

С. В. ГОЛЬДИН

ЛИНЕЙНЫЕ
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
СЕЙСМИЧЕСКИХ
СИГНАЛОВ



ИЗДАТЕЛЬСТВО „НЕ ДРА“
Москва 1974

Гольдин С. В. Линейные преобразования сейсмических сигналов. М., «Недра», 1974. 352 с.

В книге дано систематическое изложение имеющихся в сейсмо-разведке результатов по линейным преобразованиям сейсмических сигналов при их цифровой обработке, а также при распространении сейсмических волн в неоднородных средах. Основное внимание уделено многоканальной и одноканальной фильтрации сейсмограмм.

Книга состоит из трех разделов. В первом разделе приведены элементы общей теории линейных систем, в частности описаны условия физической осуществимости линейных преобразований, продолжение спектра в комплексную область и т. п., рассмотрены вопросы кодирования и декодирования при реализации цифровых фильтров.

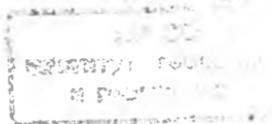
Второй раздел посвящен одноканальным линейным преобразованиям сейсмических трасс: высокочастотным, обратным, оптимальным и винеровским фильтрам. Большое внимание уделено вопросам реализации и аппроксимации фильтров, а также задачам интерпретации, обусловливающим применение того или иного фильтра.

В третьем разделе рассматриваются различные методы многоканальной фильтрации сейсмограмм, начиная от интерференционных систем и кончая многокомпонентными и пространственно-временными фильтрами.

Основная цель книги — помочь инженерам-сейсморазведчикам, занимающимся цифровой обработкой сейсмограмм, овладеть современной теорией фильтрации сигналов.

Ил. 45, список лит. — 104 назв.

65569



05

Внедрение универсальных цифровых машин в практику обработки материалов сейсмической разведки вызвало большой приток реализуемых на ЭВМ преобразований сейсмограмм, среди которых ведущую роль играют линейные преобразования: суммирование трасс, одноканальные и многоканальные фильтрации, являющиеся основным средством выделения полезных волн на фоне мешающих колебаний. Простота линейных преобразований является во многом кажущейся. Уже при использовании одномерной фильтрации мы сталкиваемся с проблемой вычислительной неустойчивости. Во многих случаях трудно построить алгоритм, который, с одной стороны, обладал бы желаемыми свойствами, с другой, — не был бы связан с чрезмерно большим объемом вычислений.

Нельзя сказать, что теория не отреагировала на появление новых проблем. Напротив, в отечественной и зарубежной геофизической литературе появились материалы, охватывающие широкий круг разнообразных задач автоматической обработки. Однако геофизик, желающий руководствоваться теорией при выборе способов преобразования сейсмограмм, остается в нелегком положении. Во-первых, теоретические статьи разрознены по периодическим изданиям и написаны на самом различном уровне. Во-вторых, полученные данные не охватывают всей проблемы в целом. Наименее изученными являются вопросы реализации тех или иных фильтров в физически осуществимых системах (а именно, в электрических цепях или ЭВМ с ограниченной памятью). Мало изучены также искажения, обусловленные отклонением реальных процессов от используемых моделей. В-третьих, во многих работах установилась традиция ставить задачи преобразования сейсмограмм без достаточно тесной связи с процессами распространения волн. Исключение составляют работы, в которых рассматриваются фильтры для подавления ревербераций и волн-спутников, а также поляризационные фильтры. Эта традиция затрудняет развитие контактов между специалистами по теории распространения сейсмических волн и специалистами по цифровой обработке, не говоря о том, что она усложняет корректную постановку конкретных задач сейсмической интерпретации.

Отмеченные обстоятельства во многом предопределили содержание данной книги, в которой приведены имеющиеся в сейсморазведке результаты по линейным преобразованиям сейсмических сигналов при цифровой и аналоговой обработке, а также при распространении сейсмических волн в среде. Основное внимание уделено многоканальной и одноканальной цифровой фильтрации.

Всякий фильтр может изучаться в трех аспектах. Первым является устройство реализующих его конструкций. Этот аспект — предмет теории аналоговой и цифровой сейсмической аппаратуры, и он остается вне рамок данной книги. Второй аспект состоит в рассмотрении абстрактных линейных преобразований, при помощи которых решаются те или иные конкретные задачи сейсмической разведки. В этом случае вопрос ставится так: как выбрать характеристики фильтра, чтобы преобразовать сейсмические колебания к нужному виду. Большинство задач фильтрации сейсмических колебаний можно разделить на две группы: задачи разрешения сейсмических колебаний и задачи подавления помех. Эта классификация, как и всякая другая, в значительной мере условна, поскольку и при разрешении полезных волн нужно учитывать наличие помех. Третьим аспектом проблемы фильтрации является синтез, т. е. реализация или аппроксимация абстрактных линейных преобразований при помощи конкретных устройств (именно в цифровой или аналоговой форме). Второй и третий аспекты в этой книге являются основными.

Спектральный метод, основанный на разложении сигналов в интеграл Фурье, позволяет с единых позиций анализировать широкий класс линейных стационарных систем, встречающихся в сейсмике. Он одинаково понятен инженеру, имеющему дело с аналоговой аппаратурой, и сейсмику-теоретику, использующему стационарные постановки при исследовании распространения сейсмических волн. Однако применение спектрального метода в рамках известной монографии А. А. Харкевича [65], апеллирующей к непосредственной физической интерпретации разложения сложной функции в сумму простых колебаний (гармоник), оказывается недостаточным. Действительно, с этой точки зрения спектральный (частотный) язык представляется хотя и удобным средством анализа линейных систем, но эквивалентным временному представлению. Более того, такие простые (во временной форме) свойства функции, как наличие начала, теряются при переходе к спектральной форме с вещественными частотами.

Полное понимание спектрального метода и возможность получения наиболее тонких, но очень важных в задаче синтеза абстрактных линейных систем результатов обуславливаются связью интеграла Фурье с разложением сигнала по собственным функциям стационарного линейного преобразования (откуда следует, что спектральный язык является не только удобной, но и наиболее естественной формой описания этих преобразований) и продолжением спектра на всю комплексную плоскость, сближающим преобразование Фурье с преобразованием Лапласа. Изложению этих общих вопросов посвящен весь первый раздел книги. В качестве примеров линейных систем рассматриваются упругие и линейно-неупругие среды.

Во втором и третьем разделах рассматриваются одноканальные и многоканальные фильтры сейсмических волн.

Основными критериями, используемыми при синтезе фильтров, являются максимум отношения сигнал/помеха и минимум среднеквадратической ошибки на выходе фильтра. Известно, что применение этих критериев приводит к тем же самым фильтрам, которые получаются методами статистической теории обнаружения сигналов при гауссовском распре-

делении помех. Именно это совпадение является обоснованием применяемых здесь критериев. Но несмотря на ту роль, которую играет теория статистических решений для понимания проблемы выделения полезных сигналов на фоне помех, методы этой теории (максимум правдоподобия, минимум риска, максимум обратной вероятности и т. п.) в книге не рассматриваются и прежде всего потому, что все они в принципе являются нелинейными (хотя в частных случаях и вырождаются в линейные преобразования). Следует иметь в виду, что и в том случае, когда некоторый фильтр вытекает из какого-либо статистического критерия, он должен быть исследован специфическими методами теории линейных преобразований, с тем чтобы установить, насколько существенны для него отклонения свойств реальных сигналов от тех идеализаций, которые положены в основу критериев оптимальности.

Несмотря на насыщенность формулами, книга предназначена главным образом для инженеров. От читателя требуется знакомство с началами теории функций комплексного переменного (примерно до теории степенных рядов и теоремы о вычетах), основными понятиями теории вероятностей (математическое ожидание и дисперсия случайной величины), некоторыми формулами линейной алгебры (произведение матриц, матрицы и вектора, обратная матрица и т. п.). Желательно знакомство с понятиями собственного вектора и собственного значения квадратной матрицы, а также знание спектрального анализа в пределах монографии А. А. Харкевича и методов обработки сейсмограмм в объеме недавно вышедшей книги М. Б. Раппопорта [55]. Ссылки на литературу в тексте практически отсутствуют. Все они вынесены в помещенный в конце книги библиографический комментарий, цель которого — помочь читателю сориентироваться в данном круге вопросов.

Замысел книги возник при чтении спецкурсов в Тюменском индустриальном институте и Новосибирском государственном университете. При разработке спецкурса постоянным помощником автора был Р. М. Бембель. Хотелось бы отметить также большую помощь В. В. Устюжанина, Б. М. Козака, В. И. Очеретина, Е. Н. Гиттермана и многих других.

Автор пользуется случаем высказать благодарность А. С. Алексееву, М. Б. Раппорту и А. К. Урупову за полезные замечания по рукописи, а также С. А. Кацу и Е. Л. Косареву, беседы с которыми во многом повлияли на формирование взглядов автора в области обработки данных.

Общие вопросы теории линейных преобразований

Глава I

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Определение и примеры линейных систем

В процессе распространения в среде, приема и обработки сейсмический сигнал подвергается неоднократным преобразованиям при прохождении через динамические системы. Динамическая система — любое искусственное или естественное устройство, которое меняет свое состояние при наличии определенного ряда внешних воздействий. К динамическим системам относятся такие устройства, как сейсмограф и фильтр. Реальная геологическая среда, очевидно, также представляет собой динамическую систему. Воздействием, как правило, является взрыв, формирующий упругий импульс, реакцией среды — упругие колебания, регистрируемые в точках приема.

К динамическим системам относятся не только «вещественные» конструкции, но и системы обработки данных эксперимента, которым и посвящена большая часть книги.

При математическом описании динамические системы заменяются некоторыми теоретическими моделями, справедливыми в узком интервале изменения физических величин. Примерами могут служить закон Гука, связывающий деформацию и напряжение в точках твердого тела, закон Ома, определяющий зависимость силы тока от падения напряжения в проводнике. Поэтому, говоря о линейных системах, будем иметь в виду реальные динамические системы, замена которых линейными математическими системами целесообразна только в некоторых пределах.

При изучении динамических систем можно отвлечься от их «материального» содержания. Важно знать, в какой сигнал $y(t)$ преобразуется сигнал $x(t)$, заданный на входе системы, но не существенно, какая материальная конструкция реализует это преобразование. Если задан только математически выраженный закон, по которому функция $x(t)$ преобразуется в функцию $y(t)$, то будем говорить, что задана абстрактная динамическая система или преобразование сигналов. Наряду с термином «преобразование» иногда используется термин «оператор». Линейным динамическим системам отвечают понятия «линейное преобразование», «линейный оператор».

Прежде чем дать определение линейной системе, заметим, что к описанию любой динамической системы можно подойти двояким образом. Во-первых, динамическая система может быть задана как «черный ящик»,

т. е. как некоторый объект, внутреннее устройство которого нам неизвестно. Все, что мы имеем — это возможность измерить функцию на входе системы и на ее выходе (т. е. воздействие на систему и ее реакцию) (рис. 1). Во-вторых, можно иметь перед собой конструкцию (или структуру) данной системы, т. е. перечисление всех составляющих ее элементов (свойства которых известны), способы их соединения и функционирования.

С точки зрения первого подхода любой класс систем — это совокупность таких систем, у которых входной и выходной сигналы связаны определенным образом. С точки зрения второго подхода класс систем — это совокупность структур с определенными свойствами элементов и соединений. Обычно эти подходы либо эквивалентны (в том смысле, что для всякого класса систем — «черных ящиков» можно указать соответствующий класс реализующих конструкций), либо первый подход дает более общее определение.

Первому подходу отвечает следующее определение линейной системы: линейной называется такая динамическая система, реакция которой на линейную комбинацию воздействий является линейной комбинацией реакций на каждое из воздействий.

Обозначим $x_1(t), \dots, x_n(t)$ — функции, описывающие воздействия, а через $y_1(t), \dots, y_n(t)$ — соответствующие реакции:

$$y_i(t) = L[x_i(t)], \quad (I.1)$$

где символ L означает преобразование, которому подвергается входной сигнал в данной системе.

Тогда из данного выше определения следует, что система линейна, если для любых чисел a_1, a_2, \dots, a_n

$$L \left[\sum_{i=1}^n a_i x_i(t) \right] = \sum_{i=1}^n a_i L[x_i(t)] = \sum_{i=1}^n a_i y_i(t). \quad (I.2)$$

Обычно выделяется подкласс линейных систем, у которых реакция инвариантна относительно сдвига начала отсчета. Это означает, что если $y(t)$ есть реакция на $x(t)$

$$y(t) = L[x(t)],$$

то реакция на сдвинутый входной сигнал $x(t - \tau)$ сдвинется на τ :

$$L[x(t - \tau)] = y(t - \tau). \quad (I.3)$$

Получается так, что система L действует «одинаково» при любых t , поэтому такие системы называют стационарными.

Данное с позиции «черного ящика» определение линейного стационарного преобразования охватывает широкое многообразие линейных систем, обладающих различной структурой. Ниже рассматривается ряд важнейших для сейсморазведки конкретных линейных систем.

1. Э л е к т р и ч е с к и е ц е п и. Наиболее простой класс линейных стационарных систем — электрические цепи с сосредоточенными параметрами, из которых конструируется аналоговая сейсморазведочная аппаратура. Примером электрической цепи является колебательный

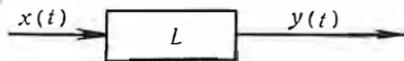


Рис. 1

контур, изображенный на рис. 2. В соответствии с законом Ома падение на активном элементе равно $RI(t)$, на емкости — $\int_0^t I(t) dt/C$, на индуктивном элементе — LdI/dt (I — сила тока в цепи). Согласно второму закону Кирхгофа

$$L(dI/dt) + RI + \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt = u(t).$$

Дифференцируя обе части полученного уравнения, найдем дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее функционирование колебательного контура:

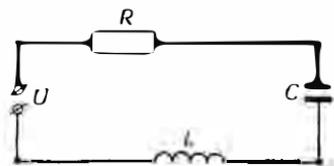


Рис. 2

$$L(d^2I/dt^2) + R(dI/dt) + (1/C)I = (du/dt). \quad (I.4)$$

Входное напряжение $u(t)$ будем считать воздействием, а силу тока $I(t)$ — реакцией колебательного контура; стало быть, $I(t) = L[u(t)]$. Пусть $y_i(t)$ является решением уравнения (I.4) при $u = x_i(t)$. Подставив $I =$

$= \sum_{i=1}^n a_i y_i(t)$ и $u = \sum_{i=1}^n a_i x_i(t)$ в уравнение (I.4), убеждаемся, что условие линейности (I.2) выполнено, а так как операция дифференцирования удовлетворяет условию стационарности (I.3), то колебательный контур является линейной стационарной системой.

В сейсморазведочной аппаратуре встречаются также линейные нестационарные системы, например экспоненциальный регулятор усиления (ЭРУ), функционирующий по формуле

$$y(t) = \exp(-at) x(t).$$

Легко проверить, что условие (I.2) выполнено, а условие (I.3) не выполнено.

И теоретическая, и практическая роль систем с сосредоточенными параметрами, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, столь велика, что в технической литературе понятие линейной системы связывают часто именно с этим подклассом линейных систем. Отсюда иногда возникает представление о том, что свойство стационарности — необходимое свойство линейных систем. При этом любая нестационарная система рассматривается как нелинейная. На самом деле линейные системы, не обладающие свойствами стационарности, встречаются не так уж редко.

2. У п р у г а я с р е д а. Упругая среда относится к классу линейных систем с рассредоточенными параметрами. На языке электромеханических аналогий это означает, что любой сколь угодно малый участок среды обладает индуктивностью (аналог массы) и емкостью (аналог упругости), а в неупругом случае — и сопротивлением (вязкостью).

Распространение колебаний в упругой среде определяется уравнениями динамического равновесия, которым удовлетворяет всякая сплошная среда,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (I.5)$$

и законом Гука, имеющим следующее математическое выражение:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \sigma_y &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \sigma_z &= \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, & \tau_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (I.6)$$

В этих формулах вектор $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ выражает смещение точки среды; σ_x , σ_y и σ_z — нормальные, а τ_{xy} , τ_{yz} и τ_{xz} — касательные напряжения (в частности, σ_x означает силу, которая действует по нормали на единичную площадку, ориентированную перпендикулярно оси x); коэффициенты λ и μ , называемые постоянными Ламе, выражают упругие свойства среды и в общем случае зависят от x , y и z ; ρ — плотность.

Уравнения динамического равновесия и закон Гука дают систему уравнений динамики упругих сред, векторную форму которых мы приведем для однородной среды $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$:

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} = \rho (\partial^2 \vec{u} / \partial t^2). \quad (I.7)$$

Чтобы решить это уравнение, нужно учесть характер начального движения среды и условия на ее границе. Пусть при $t = 0$ среда находится в состоянии покоя (нулевые начальные условия). Режим на свободной границе Γ_0 определяется заданием вектора напряжений $\vec{F}(M, t)$, $M \in \Gamma_0$, действующих на Γ_0 . Вектор $\vec{F}(M, t)$ отличен от нуля в точках, к которым приложено внешнее воздействие. Если имеется только одна такая точка M_0 , то ее называют точечным источником, вектор-функцию $\vec{p}(t) = \vec{F}(M_0, t)$ — функцией источника (воздействием).

В неоднородных средах, содержащих разрывы упругих коэффициентов, необходимо дополнительно задать условия на поверхностях разрыва (внутренних границах). Обычно принимают, что при переходе через внутреннюю границу смещение и напряжение изменяются непрерывно.

Реакцией среды на воздействие $\vec{p}(t)$ будем считать смещение $\vec{u}(M, t)$, измеряемое в некоторой фиксированной точке M . Следовательно, тем самым реакция среды зависит от выбора точки M . Покажем, что упругая

среда является стационарной линейной системой. При нулевых начальных условиях и отсутствии переменных объемных сил стационарность следует из непосредственных физических соображений: если воздействие $\vec{p}(t)$ включено не в момент времени $t = 0$, а в более поздний момент τ , то мы должны получить точно такое же решение уравнения (1.7), но сдвинутое на τ .

Пусть $\vec{u}_1(M, t)$ и $\vec{u}_2(M, t)$ являются решениями уравнения (1.7) при воздействиях $\vec{p}_1(t)$ и $\vec{p}_2(t)$ соответственно. Рассмотрим воздействие $a_1\vec{p}_1(t) + a_2\vec{p}_2(t)$. Нетрудно видеть, что сумма $a_1\vec{u}_1(M, t) + a_2\vec{u}_2(M, t)$ также является решением уравнения (1.7) (тем самым оно удовлетворяет принципу суперпозиции). Проверим условия на границе Γ_0 . Для этого запишем закон Гука для произвольной точки $M \in \Gamma_0$ и подставим в правую часть уравнений (1.6) сумму $a_1\vec{u}_1(M, t) + a_2\vec{u}_2(M, t)$. В силу линейности операции дифференцирования правая часть легко преобразуется к виду $a_1\vec{F}_1(M, t) + a_2\vec{F}_2(M, t)$. Линейность доказана.

Аналогично показывается линейность и стационарность неоднородной упругой среды.

При изучении упругих колебаний в однородной безграничной среде поле $\vec{u}(M, t)$ представляют в виде суммы:

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi}, \quad (1.8)$$

где функции $\varphi(M, t)$ и $\vec{\psi}(M, t)$ называются скалярным и векторным потенциалами соответственно. Если подставить эту сумму в уравнение (1.7) и добавить условие $\text{div } \vec{\psi} = 0$, то система (1.7) разобьется на два независимых волновых уравнения

$$\Delta\varphi = a^2(\partial^2\varphi/\partial t^2) \quad (1.9)$$

и

$$\Delta\vec{\psi} = b^2(\partial^2\vec{\psi}/\partial t^2), \quad (1.10)$$

где

$$a = \sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}, \quad b = \sqrt{\rho/\mu}. \quad (1.11)$$

Независимость уравнений (1.9) и (1.10) означает, что в среде могут существовать два независимых друг от друга волновых процесса $\vec{u}_p = \text{grad } \varphi$ и $\vec{u}_s = \text{rot } \vec{\psi}$ с различным характером колебаний.

Обозначим $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$, r — длина этого вектора, $\vec{\kappa} = \kappa_x\vec{i} + \kappa_y\vec{j} + \kappa_z\vec{k}$ — единичный вектор, фиксирующий некоторое направление, $(\vec{\kappa}, \vec{r}) = \kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z z$ — скалярное произведение

векторов $\vec{\kappa}$ и \vec{r} . Пусть $f(t)$ — произвольная полуфинитная гладкая функция: $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Легко проверить, что уравнению (I.9) удовлетворяют функции

$$\varphi = f[t - a(\vec{\kappa}, \vec{r})] \quad (\text{I.12})$$

и

$$\varphi = f(t - ar)/r. \quad (\text{I.13})$$

Первая из этих функций определяет волну, имеющую плоский передний фронт $(\vec{\kappa}, \vec{r}) = t/a$, распространяющийся в направлении $\vec{\kappa}$ со скоростью $v_p = 1/a$. Вектор смещения \vec{u}_p , равный $\text{grad } \varphi$, поляризован линейно в направлении распространения, поэтому функцию (I.12) называют плоской продольной волной.

Функция (I.13) определяет продольную сферическую волну, уравнение переднего фронта которой суть $r = t/a$. При распространении продольных волн наблюдаются только объемные деформации.

Аналогично определяются поперечные плоские и сферические волны, распространяющиеся со скоростью $v_s = 1/b$ и имеющие вектор смещений \vec{u}_s , поляризованный в плоскости, касательной к переднему фронту. При распространении поперечной волны происходят только сдвиговые деформации.

Независимый характер распространения продольных и поперечных волн может иметь место только в однородной среде. В неоднородной среде продольная и поперечная волны порождают при своем распространении колебания обоих типов, и их нельзя рассматривать независимо.

3. С ф е р и ч е с к и й и с т о ч н и к. В некоторых случаях линейная модель может быть применена для описания существенно нелинейных процессов. При этом описание дается с точностью до произвольной функции, подбираемой по данным эксперимента так, чтобы согласовать их с теоретической моделью. Несмотря на такой произвол, подобные феноменологические модели иногда позволяют выразить важные качественные особенности изучаемой динамической системы.

Рассмотрим точечный взрывной источник, помещенный во внутреннюю точку однородной среды M_0 . Характер вызываемых в окрестности источника деформаций зависит как от свойств среды, так и от количества энергии, выделившейся в источнике. В применяемых взрывных источниках излучаемая энергия столь велика, что в окружающей источник среде развиваются неупругие деформации (дробление, смятие и пластические деформации), которые не описываются линейными уравнениями. Эти деформации обуславливаются действием ударной волны, возникающей в момент взрыва.

Чтобы пояснить особенности распространения ударной волны, обратимся к уравнениям динамического равновесия сплошной среды в одномерном случае (например, при продольном сжатии — разжатии стержня). Полагая в первом из уравнений (I.5) производные по y и по z равными нулю и обозначая $\sigma_x = \sigma$ и $u_x = u$, получим

$$\partial\sigma/\partial x = \rho(\partial^2 u/\partial t^2). \quad (\text{I.14})$$

Обозначим через ε деформацию, которая в случае сжатия — растяжения связана со смещением равенством $\varepsilon = \partial u / \partial x$. Записав тождество $(\partial \sigma / \partial x) = (\partial \sigma / \partial \varepsilon) (d\varepsilon / dx)$ и подставив его в выражение (I.14), получим волновое уравнение [ср. с формулой (I.9)].

$$\partial^2 u / \partial x^2 = \left(\rho \frac{d\varepsilon}{d\sigma} \right) (\partial^2 u / \partial t^2), \quad (I.15)$$

откуда следует, что величина

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} \quad (I.16)$$

играет роль скорости распространения колебаний.

Теперь обратимся к рис. 3, на котором приведена типичная зависимость напряжения σ от деформации ε . Из формулы (I.16) следует, что скорость v при деформациях, принимающих значения ε , пропорциональна корню из тангенса угла наклона φ приведенного графика в соответствующей точке. Зона I (линейная) отвечает области упругих деформаций, зона II — области пластических деформаций, зона III — области возникновения ударной волны. Из графика видно, что скорость распространения ударной волны зависит от ее амплитуды (т. е. от развиваемых деформаций): чем выше амплитуда ударной волны, тем выше ее скорость. При этом ударные волны, имеющие большую амплитуду, распространяются со скоростью v , превышающей скорость продольных волн v_p , которая определяется наклоном графика $\sigma(\varepsilon)$ в зоне I.

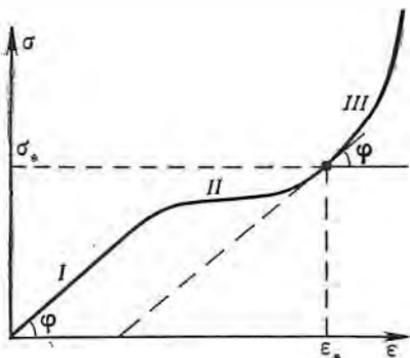


Рис. 3

При разгрузке связь между σ и ε подчинена закону Гука (пунктирная наклонная линия на рис. 3), поэтому, распространяясь, ударная волна порождает упругие колебания в виде продольных волн, которые остаются за фронтом ударной волны. Но поскольку энергия ударной волны интенсивно расходуется на необратимые деформации, ее амплитуда, а вместе с ней и скорость v уменьшается, и на некотором расстоянии r_0 , отвечающем точке $(\varepsilon_*, \sigma_*)$ графика, становится равной v_p ; после этого порождаемые ударной волной продольные колебания отрываются от ее фронта и начинают «самостоятельно» распространяться в окружающей среде, не затронутой неупругими деформациями. Следовательно, можно считать, что источник упругих колебаний сосредоточен на поверхности сферы радиуса r_0 . Воздействие неупругой части среды на упругую может быть выражено в виде сил, действующих изнутри на поверхность сферы, а сама неупругая часть может быть заменена ничем не заполненной полостью.

Итак, реальный взрывной источник, сосредоточенный в точке M_0 и вызывающий в окрестности этой точки неупругие деформации, заменяется эквивалентным (в смысле распространяющихся в среде продольных

волн) сферическим излучателем. Объем породы, подвергаемой неупругим деформациям, пропорционален энергии взрыва, которая в свою очередь пропорциональна массе заряда Q , поэтому радиус r_0 эквивалентной сферы пропорционален $\sqrt[3]{Q}$.

Пусть к поверхности сферы прилагается равномерно-радиальное давление $p(t)$. Из характера воздействий следует, что в окружающей среде возникнет продольная сферическая волна с потенциалом (I.13) и вектором смещений, равным $\vec{u} = (\partial\varphi/\partial r) \vec{r}_1$, где $\vec{r}_1 = \vec{r}/r$. Функция $f(t)$ определится из условий на границе сферы. Касательные напряжения на поверхности сферы, очевидно, равны нулю, а нормальное напряжение σ_r равно $-p(t)$. С другой стороны, по закону Гука

$$\sigma_r = \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu (\partial u/\partial r),$$

где $u = \partial\varphi/\partial r$.

Используя выражения дивергенции в сферических координатах и независимость \vec{u} от углов, получим граничное условие в следующей форме:

$$\left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{2\lambda}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right]_{r=r_0} = -p(t).$$

Подставляя сюда выражение (I.13), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого дает искомую функцию:

$$f'' + \frac{4\mu a}{\rho r_0} f' + \frac{4\mu}{\rho r_0^2} f = -\frac{r_0}{\rho} p(t). \quad (\text{I.17})$$

Феноменологический характер описываемой модели состоит в том, что воздействие $p(t)$, прилагаемое к поверхности сферы, не выводится из физического описания взрывного источника, а подбирается в соответствии с результатами эксперимента. Тем не менее можно заранее высказать некоторые соображения о характере функции $p(t)$, поскольку ударная волна состоит из полуволны сжатия, на фронте которой имеется скачок напряжения, и следующей за ней полуволны расширения. Так как после «отрыва» продольной волны от ударной «изучающая сфера» продолжает существовать, но имеет переменный радиус, рассматриваемая модель наиболее удовлетворительна для смещений в области фронта продольной волны, сформировавшихся в момент первого «отрыва».

Во всех приведенных примерах линейная система преобразует друг в друга непрерывные функции времени. Такие системы называются непрерывными. При обработке данных на ЭВМ мы сталкиваемся с системами дискретного (цифрового) типа, перерабатывающими последовательности чисел. Если такое устройство перерабатывает числовую последовательность $\mathbf{x} = \{x_k\}$ ($-\infty \leq k \leq \infty$) в последовательность $\mathbf{y} = \{y_k\}$ ($-\infty \leq k \leq \infty$), будем писать $\mathbf{y} = L\mathbf{x}$. Более подробная характеристика дискретных преобразований приведена в гл. III.

§ 2. Спектральная характеристика стационарной линейной системы

Описание линейной системы естественно считать полным, если оно позволяет найти реакцию $y(t)$ на любое (из заданного класса сигналов) воздействие $x(t)$ без его физического осуществления. Описание систем, приведенных в § 1, удовлетворяет этому требованию, но во-первых, оно зависит от вида линейной системы, а во-вторых, не дает выражения реакций через воздействие в явной форме. Чтобы получить стандартный способ описания линейной системы, независимо от ее структуры, систему нужно рассматривать как «черный ящик». А в этом случае единственный способ изучения линейной системы заключается в том, чтобы воздействовать на нее некоторыми стандартными сигналами.

Воспользуемся тем, что любой интегрируемый сигнал $x(t)$ может быть представлен в виде следующего интеграла свертки:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (\text{I.18})$$

Тем самым мы выразили $x(t)$ через линейную комбинацию бесконечного числа сдвинутых δ -функций. Подадим $x(t)$ на вход изучаемой стационарной линейной системы L .

Свойство линейности (I.2) верно для бесконечных сумм и для интегралов, поэтому

$$y(t) = L \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) l(t, \tau) d\tau, \quad (\text{I.19})$$

где $l(t, \tau) = L [\delta(t - \tau)]$ (отклик линейной системы на δ -функцию, вообще говоря, зависит от момента поступления ее на вход системы). Формула (I.19) дает общее выражение линейного преобразования.

Если применить свойство стационарности (I.3), то $l(t, \tau) = l(t - \tau)$

и

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} l(t - \tau) x(\tau) d\tau. \quad (\text{I.20})$$

Следовательно, произвольное воздействие на $x(t)$ можно представить как свертку этого воздействия с функцией $l(t)$, являющейся реакцией на входной сигнал в виде δ -функции. Функцию $l(t)$ называют импульсной характеристикой линейной системы.

Приведенное описание линейной системы основано на том, что в качестве стандартного сигнала используется δ -функция. Это может показаться неудобным, так как δ -функцию физически осуществить нельзя. На самом деле в качестве стандартного сигнала может быть взята любая такая функция $x(t)$, для которой интегральное уравнение (I.20) относительно неизвестной функции $l(t)$ имеет решение.

Описание линейной системы, основанное на разложении входного сигнала по бесконечной совокупности δ -функций, является не единст-

венным и не обязательно самым простым. В силу линейности простота описания линейной системы полностью определяется простотой преобразований тех функций, по которым строится разложение входных сигналов. Наиболее подходящим в этом смысле классом воздействий является семейство собственных функций $\psi_\alpha(t)$, $\alpha \in A$, каждая из которых удовлетворяет равенству

$$L[\psi_\alpha(t)] = \lambda_\alpha \psi_\alpha(t).$$

В этом равенстве комплексное число λ_α называется собственным значением оператора (линейной системы) L . Совокупность собственных значений при $\alpha \in A$ образует спектр (спектральную характеристику) линейной системы.

Ясно, что можно использовать только полные системы собственных функций, которые позволяют строить разложение любого воздействия из заданного класса сигналов X .

Если семейство функций $\psi_\alpha(t)$ является полным, то для произвольного сигнала $x(t)$ из X

$$x(t) = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \psi_\alpha(t),$$

откуда

$$y(t) = L[x(t)] = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha L[\psi_\alpha(t)] = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha x_\alpha \psi_\alpha(t). \quad (I.21)$$

Таким образом, «координаты» y_α выходного сигнала $y(t)$ получаются путем простого умножения «координат» x_α на соответствующие значения спектральной характеристики.

Теперь покажем, что полным семейством собственных функций линейной системы стационарного типа является множество комплексных гармоник

$$\exp(i\omega t), \quad \omega \in (-\infty, \infty). \quad (I.22)$$

Полнота этого семейства следует из известного представления абсолютно интегрируемых функций в виде интеграла Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (I.23)$$

где $S_x(\omega)$ — спектр функции $x(t)$, являющийся преобразованием Фурье этой функции:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (I.24)$$

Пусть теперь в формуле (I.20) $x(\tau) = \exp(i\omega\tau)$. После замены переменных $u = t - \tau$ получим

$$y(t) = \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} l(u) \exp(-i\omega u) du.$$

Следовательно, $\exp(i\omega t)$ — это собственная функция, так как выходной сигнал представляет собой комплексную гармонику с комплексной амплитудой:

$$L(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} l(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (I.25)$$

Совокупность значений $L(\omega)$ при $\omega \in (-\infty, \infty)$ образует спектр системы L . Значит, спектральная характеристика стационарной линейной системы совпадает с преобразованием Фурье импульсной характеристики.

Отсюда следует возможность определения импульсной характеристики по заданной спектральной характеристике:

$$l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (I.26)$$

Применим оператор L к правой части равенства (I.23).

Используя линейность, получим

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) L[\exp(i\omega t)] d\omega,$$

но поскольку $L[\exp(i\omega t)] = L(\omega) \exp(i\omega t)$, то

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) L(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (I.27)$$

Полученное выражение, являющееся аналогом равенства (I.21), представляет собой интеграл Фурье для $y(t)$, отсюда спектр функции $y(t)$

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) L(\omega). \quad (I.28)$$

Таким образом, спектр выходного сигнала — произведение спектра входного сигнала на спектральную характеристику системы. Это основное соотношение можно получить непосредственно из формулы (I.19), используя выражение для спектра свертки, но именно данный вывод объясняет значение преобразования Фурье для анализа стационарных систем: оно связано с разложением по собственным функциям этих систем. Таким образом сигналы выражаются в наиболее естественной системе координат, чем объясняется наглядность спектрального представления.

Ясно, что спектральный метод применим не только к стационарным линейным преобразованиям. Применимость его к линейным преобразованиям нестационарного типа полностью определяется свойствами системы собственных функций интегрального оператора (I.19). Всякий раз, когда

эта система ортогональна и полна (относительно заданного класса входных сигналов), спектральный подход дает наиболее простой метод изучения линейных преобразований.

Отметим следствия, вытекающие из формулы (I.28).

С л е д с т в и е 1. Полное описание стационарной линейной системы можно получить, измеряя реакцию на такой сигнал $x(t)$, спектр которого содержит все частоты.

Действительно, если при всех $\omega \in (-\infty, \infty)$ величина $S_x(\omega) \neq 0$, то спектральная характеристика определяется отношением $S_y(\omega)/S_x(\omega)$.

С л е д с т в и е 2. Любые две стационарные линейные системы L_1 и L_2 перестановочны:

$$L_1 \{L_2 [x(t)]\} = L_2 \{L_1 [x(t)]\},$$

В самом деле, спектр выходного сигнала в обоих случаях равен $L_1(\omega) L_2(\omega) S_x(\omega)$. Отсюда следует, что система L , состоящая из последовательно соединенных стационарных систем L_1, L_2, \dots, L_n , имеет характеристику

$$L(\omega) = \prod_{k=1}^n L_k(\omega),$$

не зависящую от порядка соединения.

С л е д с т в и е 3. Спектр δ -функции равен 1, так как формула (I.18) означает, что линейная система с импульсной характеристикой $\delta(t)$ пропускает сигнал без искажения.

Применяя к $S(\omega) \equiv 1$ обратное преобразование Фурье, получим следующее представление δ -функции:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) d\omega. \quad (I.29)$$

С л е д с т в и е 4. Свертка обладает свойствами перестановочности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(t-\tau) x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) l(\tau) d\tau, \quad (I.29')$$

следовательно, взяв линейную систему с импульсной характеристикой $x(t)$ и пошлав на вход ее сигнал $l(t)$, получим ту же самую реакцию $y(t)$.

П р и м е р. Спектральный метод анализа линейных систем проиллюстрируем на примере однородного отражающего слоя, расположенного между двумя однородными полупространствами (рис. 4).

Воздействием будем считать плоскую продольную волну

$$\vec{u} = f\left(t - \frac{z}{v_{P_1}}\right) \vec{k}, \quad (I.30)$$

подающую по нормали сверху на границу слоя $z = 0$. После того как волна достигла границы $z = 0$, последняя становится источником колебаний, распространяющихся в верхнем полупространстве и в слое, а после возмущения границы $z = H$ она в свою очередь оказывается источником колебаний в слое и в нижнем полупространстве.

* Конечно, этот интеграл не существует в обычном смысле. Соотношение (I.29) имеет тот смысл, что оно обращает равенство (I.18) в тождество, если получающийся двукратный интеграл брать по обычным правилам.

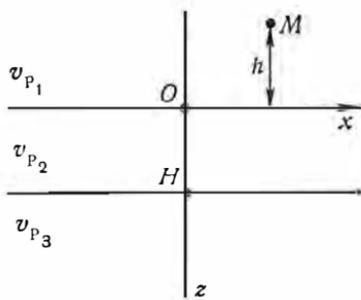


Рис. 4

Касательных напряжений при нормальном падении не возникает, поэтому все колебания являются продольными; z -составляющую колебаний в некоторой точке M верхней полупространства, расположенной на расстоянии h от границы $z = 0$, будем считать реакцией среды. Расстояние h должно быть достаточно большим, чтобы отраженная волна могла быть измерена без интерференции с падающей.

В § 1 было показано, что упругая среда является линейной системой стационарного типа, поэтому она имеет спектральную характеристику (в смысле разложения функций в интеграл Фурье), для получения которой форму падающей волны надо взять в виде комплексной гармоник:

$$\vec{u} = \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{v_{P_1}} \right) \right] \vec{k}.$$

Поскольку $\exp(i\omega t)$ является собственной функцией линейной системы, форма колебаний в любой точке среды также будет носить гармонический характер. Из физических соображений отраженная волна представляет собой плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся вверх:

$$\vec{u}^{(1)} = -L_1(\omega) \exp \left[i\omega \left(t + \frac{z}{v_{P_1}} \right) \right] \vec{k} \quad (I.31)$$

(знак перед $L_1(\omega)$ означает, что положительными считаются смещения; направление которых совпадает с направлением распространения волны последние в данном случае перемещается в отрицательном направлении оси z).

Колебания в нижней среде (проходящая волна) представляет собой распространяющуюся вниз плоскую монохроматическую волну, которую без ограничения общности можно записать так:

$$\vec{u}^{(3)} = L_3(\omega) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z-H}{v_{P_3}} \right) \right] \vec{k}. \quad (I.32)$$

Колебания в слое $\vec{u}^{(2)}$ представляют собой сумму двух волн, одна из которых бежит вниз, а другая, порождаемая нижней границей слоя, вверх:

$$\vec{u}^{(2)} = L_2'(\omega) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{v_{P_2}} \right) \right] \vec{k} - L_2''(\omega) \exp \left[i\omega \left(t + \frac{z-H}{v_{P_2}} \right) \right] \vec{k}. \quad (I.33)$$

Поскольку реакция измеряется в точке M верхней среды, искома спектральная характеристика определится функцией $L_1(\omega) \exp \left(-i\omega \frac{h}{v_{P_1}} \right)$. Экспонентный множитель $\exp(-i\omega h/v_{P_1})$ определяет чистое запаздывание, зависящее только от местоположения точки M в области $z < 0$, поэтому его целесообразно не учитывать, считая спектральной характеристикой функцию $L_1(\omega)$, определяющую форму колебаний отраженной волны.

Комплексные амплитуды $L_1(\omega)$, $L_2(\omega)$, $L_2'(\omega)$ и $L_3(\omega)$ определяются из условий на границах $z = 0$ и $z = H$; x -вая и y -вая составляющие сме-

щений во всей среде равны нулю, поэтому условия непрерывности смещений запишутся так:

$$u_z + u_z^{(1)}|_{z=0} = u_z^{(2)}|_{z=0}; \quad (I.34)$$

$$u_z^{(2)}|_{z=H} = u_z^{(3)}|_{z=H}. \quad (I.35)$$

Все касательные напряжения, как уже отмечалось, отсутствуют, в связи с чем условие непрерывности напряжений надо выписывать только для нормального напряжения σ_z .

В соответствии с законом Гука (I.6) имеем:

$$\left[(\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial}{\partial z} (u_z + u_z^{(1)}) \right]_{z=0} = (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=0}; \quad (I.36)$$

$$(\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=H} = (\lambda_3 + 2\mu_3) \frac{\partial u_z^{(3)}}{\partial z} \Big|_{z=H}. \quad (I.37)$$

Определив из равенств (I.31)–(I.33) выражения для u_z и $u_z^{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$) и используя вытекающее из (I.11) соотношение $\lambda_k + 2\mu_k = \rho_k v_{P_k}^2$, получим, обозначив через γ_k акустическую жесткость $\rho_k v_{P_k}$ и через $\tau = H/v_{P_2}$ — время пробега волны в слое, следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} L_1 + L_2' - L_2'' \exp(-i\omega\tau) &= 1; \\ L_2' \exp(-i\omega\tau) - L_2'' - L_3 &= 0; \\ \gamma_1 L_1 - \gamma_2 L_2' - \gamma_2 L_2'' \exp(-i\omega\tau) &= -\gamma_1; \\ \gamma_2 L_2' \exp(-i\omega\tau) + \gamma_2 L_2'' - \gamma_3 L_3 &= 0. \end{aligned}$$

Решая ее по правилу Крамера, найдем

$$L_1(\omega) = \frac{\gamma_2(\gamma_3 - \gamma_1) \cos \omega\tau - i(\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3) \sin \omega\tau}{\gamma_2(\gamma_3 + \gamma_1) \cos \omega\tau - i(\gamma_1\gamma_3 + \gamma_2^2) \sin \omega\tau}. \quad (I.38)$$

Легко проверить, что $L_1(\omega + k\pi/\tau) = L_1(\omega)$, следовательно, полученная спектральная характеристика является периодической функцией частоты с периодом π/τ . В точках $k\pi/2\tau$ ($k=0, 1, \dots$) она принимает экстремальные значения, равные

$$(\gamma_3 - \gamma_1)/(\gamma_3 + \gamma_1) \quad \text{при } k=0, 2, 4, \dots$$

и

$$(\gamma_2^2 - \gamma_1\gamma_3)/(\gamma_2^2 + \gamma_1\gamma_3) \quad \text{при } k=1, 3, 5, \dots$$

Можно также показать, что амплитудная частотная характеристика $|L_1(\omega)|$ имеет максимумы при нечетных k , если акустическая жесткость γ_2 является либо наибольшей, либо наименьшей среди акустических жесткостей γ_1 , γ_2 и γ_3 . В противном случае, когда слой имеет

промежуточное значение акустической жесткости, максимумы располагаются при четных k . Пусть, в частности, $\gamma_3 > \gamma_1$ и $\sqrt{\gamma_1 \gamma_3} < \gamma_2$. При этих условиях экстремальные значения модуля $|L_1(\omega)|$ и спектральной характеристики $L_1(\omega)$ равны; кроме того, обязательно $\gamma_1 < \gamma_2$.

Решая неравенство

$$\frac{(\gamma_3 - \gamma_1)}{(\gamma_3 + \gamma_1)} > \frac{(\gamma_2^2 - \gamma_1 \gamma_3)}{(\gamma_2^2 + \gamma_1 \gamma_3)},$$

получим, что условием максимума при четном k является неравенство $\gamma_2 < \gamma_3$. Аналогично рассматриваются другие ситуации: $\gamma_1 > \gamma_3$, $\sqrt{\gamma_1 \gamma_3} < \gamma_2$ и т. д.

Периодичность спектральной характеристики отражающего слоя, которую на практике можно вычислить как отношение спектров отраженной и падающей волн, используется для оценки параметров слоя, так как

$$H = \pi v_{p2} / \tau.$$

Ясно, что для уверенного определения параметра τ необходимо, чтобы в интервале (ω_1, ω_2) , который занимает спектр падающей волны, располагалось не менее двух периодов частотной характеристики, откуда вытекает условие

$$\omega_2 - \omega_1 \geq 2\pi / \tau,$$

или, полагая $\tau = H / v_{p2}$ и $\omega_j = 2\pi f_j$ (f_j — частота),

$$H \geq v_{p2} (f_2 - f_1). \quad (I.39)$$

Пусть для примера $f_2 = 80$ Гц, $f_1 = 20$ Гц и $v_{p2} = 3000$ м/с, тогда для мощности слоя получаем неравенство $H \geq 50$ м.

Интересно отметить, что хотя спектральная характеристика $L_1(\omega)$ полностью описывает среду как линейную систему, позволяя для любого входного сигнала $f(t)$ определить форму и амплитуду отраженной волны, она не дает возможности восстановить все параметры упругой среды, так как зависит не от 10 параметров ρ_k , λ_k , μ_k и H , а только от 4 параметров γ_k и τ . Таким образом, задача восстановления всех параметров упругой среды по характеристикам наблюдаемого волнового поля (обратная задача сейсмоки) при нормальном падении плоской волны в трехслойной среде не имеет единственного решения.

Рассмотренный пример интересен тем, что данная линейная система не имеет импульсной характеристики в классе обычных функций: интеграл (I.26) расходится вследствие периодичности $L_1(\omega)$. Однако этот интеграл существует в классе обобщенных функций.

Действительно, разлагая $L_1(\omega)$ в ряд Фурье

$$L_1(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \exp(-2ik\omega\tau),$$

где

$$c_k = \frac{\tau}{\pi} \int_{-\pi/2\tau}^{\pi/2\tau} L_1(\omega) \exp(2ik\omega\tau) d\omega,$$

получим из формулы (I.26), полагая в ней

$$L(\omega) = L_1(\omega) \exp(-i\omega h/v_{P1});$$

$$l(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\omega(t - 2k\tau - h/v_{P1})] d\omega.$$

Учитывая здесь равенство (I.29), найдем,

$$l(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(t - 2k\tau - h/v_{P1}). \quad (I.40)$$

Значительно более удобно получить импульсную характеристику на основе непосредственных физических рассуждений. Импульсная характеристика является реакцией среды на сигнал в виде δ -функции. Если в падающей волне (I.30) принять $f(t) = \delta(t)$, то она в любой момент $t \leq 0$ будет сосредоточена в плоскости $z = t/v_{P1}$. Но это значит, что в момент падения ее на границу $z = 0$ можно отвлечься от существования второй границы $z = H$, считая, что происходит отражение — преломление на границе двух полупространств с параметрами $(\rho_1, \lambda_1, \mu_1)$ и $(\rho_2, \lambda_2, \mu_2)$. Коэффициенты отражения и преломления при нормальном падении плоской монохроматической волны на данную границу получаются из условий (I.34) и (I.36), если взять отраженную волну в виде $-A_1 \exp[i\omega(t + z/v_{P1})] \vec{k}$, а преломленную — в виде $B_1 \exp[i\omega(t - z/v_{P2})] \vec{k}$.

Искомые коэффициенты

$$A_1 = (\gamma_2 - \gamma_1)/(\gamma_1 + \gamma_2); \quad B_1 = 2\gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2) = 1 - A_1. \quad (I.41)$$

Независимость A_1 и B_1 от частоты означает, что падающая волна $\vec{u} = \delta(t - z/v_{P1}) \vec{k}$ порождает отраженную волну $-A_1 \delta(t + z/v_{P1}) \vec{k}$ и преломленную $B_1 \delta(t - z/v_{P1})$. Последняя, достигнув в момент времени $\tau = H/v_{P2}$ границу $z = H$, снова породит две волны, одна из которых (отраженная от границы $z = H$), преломившись на границе $z = 0$, вернется в первую среду, имея амплитуду $K = -B_1 A_2 B'_1$ и запаздывание 2τ . Здесь A_2 и B'_1 соответственно коэффициент отражения от нижней границы и коэффициент преломления на первой границе при падении снизу, определяемые аналогично (I.41). Так как при падении этой волны на границу $z = 0$ возникает еще и отраженная волна, распространяющаяся вниз, то после отражения последней от границы $z = H$ и преломления на границе $z = 0$ получим еще одну волну с запаздыванием 4τ и амплитудой $A'_1 A_2 K$ (где $A'_1 = -A_1$) и так далее до бесконечности.

В соответствии с принципом суперпозиции получаем в точке $M(0, -h)$

$$l(t) = -A_1 \delta[t - (h/v_{P1})] + K \delta[t - (h/v_{P1}) - 2\tau] + A'_1 A_2 K \delta[t - (h/v_{P1}) - 4\tau] + \dots + (A'_1 A_2)^2 K \delta[t - (h/v_{P1}) - 6\tau] + \dots \quad (I.42)$$

Сравнивая это выражение с формулой (I.40), находим коэффициенты ряда Фурье: $c_k = 0$ при $k < 0$; $c_0 = -A_1$; $c_1 = K = -B_1 B_1' A_2$; $c_k = (A_1' A_2)^{k-1} K$ при $k \geq 2$. Слагаемые при $k \geq 2$ — суть кратные волны в слое. Вследствие линейности такую же структуру имеет реакция среды при произвольной форме падающей волны.

§ 3. Линейные системы с дробно-рациональными спектральными характеристиками

Вернемся к линейным системам, рассмотренным в начале главы. Приняв в уравнении (I.4)

$$u = \exp(i\omega t) \quad \text{и} \quad I = L(\omega) \exp(i\omega t),$$

найдем

$$L(\omega) = i\omega C / (1 - \omega^2 LC + i\omega RC). \quad (\text{I.43})$$

Амплитудная спектральная характеристика

$$A(\omega) = |L(\omega)| = \omega C / \sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}.$$

Она носит резонансный характер, обладая единственным максимумом на частоте

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (\text{I.44})$$

при этом $\max A(\omega) = 1/R$.

Рассмотрим спектральную характеристику сферического источника. Вследствие сферической симметрии смещение описывается одной скалярной функцией $u(r, t)$, равной $d\varphi/dr$, где $\varphi(r, t)$ выражается формулой (I.13). Отсюда, пренебрегая слагаемым более высокого порядка малости при $r \rightarrow \infty$,

$$u(r, t) \simeq -af'(t - ar)/r.$$

Можно считать, что $u(r, t)$ является сигналом на выходе последовательности двух линейных систем L_1 и L_2 , первая из которых описывается дифференциальным уравнением (I.17) и имеет спектральную характеристику

$$L_1(\omega) = -\frac{r_0}{\rho} \left(\frac{4\mu}{\rho r_0^2} - \omega^2 + i\omega \frac{4\mu a}{\rho r_0} \right),$$

а вторая определяется предыдущей формулой. Используя известные свойства преобразования Фурье (теорему о спектре производной и теорему о смещении), получим

$$L_2(\omega) = -\frac{ai\omega}{r} \exp(-i\omega ar).$$

Таким образом, учитывая равенство $1/a = v_p$ и $\mu/\rho = v_s^2$, будем иметь

$$L(\omega) = L_1 L_2 = -i\omega r_0^3 \left\{ 4\mu v_p r \left[1 - \frac{r_0^2 \omega^2}{4v_s^2} + i\omega \frac{r_0}{v_p} \right] \right\} \exp\left(-\frac{i\omega r}{v_p}\right). \quad (\text{I.45})$$

Сравнение с выражением (I.43) показывает, что сферический источник имеет резонансную спектральную характеристику, эквивалентную характеристике колебательного контура (множитель $\exp(-i\omega r/v_p)$ определяет запаздывание на расстоянии r).

Резонансная частота

$$\omega_0 = 2v_s/r_0, \quad (I.46)$$

максимум амплитудной характеристики

$$\max A(\omega) = r_0^2/4\mu r.$$

Учтя зависимость радиуса эквивалентной сферы от массы заряда, получим

$$\omega_0 = 2v_s/kQ^{1/3}; \quad \max A(\omega) = kQ^{2/3}/4\mu r.$$

Таким образом, резонансная частота слабо возрастает с уменьшением массы заряда и тем выше, чем больше скорость распространения поперечных волн. Амплитуда колебаний на резонансной частоте увеличивается при уменьшении модуля сдвига (т. е. в более пластических породах).

Полученные спектральные характеристики являются дробно-рациональными функциями частоты, т. е. функциями вида

$$L(\omega) = P_m(i\omega)/P_n(i\omega), \quad (I.47)$$

где $P_m(i\omega)$ и $P_n(i\omega)$ — полиномы степени m и n [соответственно с вещественными коэффициентами].

Класс линейных систем с дробно-рациональными спектрами полностью включает все электрические цепи с сосредоточенными, не зависящими от времени пассивными элементами R , L и C . Действительно, всякая такая цепь состоит из связанной совокупности k контуров, каждый из которых содержит набор элементов R , L и C . Каждый контур описывается дифференциальными уравнениями второго порядка (если содержатся оба реактивных сопротивления — L и C) или первого (если содержится только одно из реактивных сопротивлений). Таким образом, функционирование всей электрической цепи опишется системой линейных дифференциальных уравнений первого или второго порядка, что эквивалентно линейному дифференциальному уравнению порядка $n \leq 2k$.

Общий вид такого уравнения

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 = b_m x^{(m)} + \dots + b_0. \quad (I.48)$$

Подставив $x = \exp(i\omega t)$ и $y = L(\omega) \exp(i\omega t)$, получим

$$L(\omega) = \frac{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (I.49)$$

что равносильно равенству (I.47).

В дальнейшем будем рассматривать ω как комплексную переменную $\omega = \alpha + i\beta$, аналитически продолжив спектр $L(\omega)$ на комплексную

плоскость. На примере дробно-рациональных спектральных характеристик будет показано преимущество аналитического продолжения спектров в комплексную область.

Поставим задачу определения импульсной характеристики линейной системы по ее заданному спектру в соответствии с формулой (I.26).

Будем использовать следующую, известную из теории функций комплексного переменного лемму Жордана.

Если $f(z) = F(z) \exp(imz)$, где $m > 0$ и $F(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ по любому закону (при движении z в верхней полуплоскости), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = 2\pi i \sum_{(k)} \text{Res}(f; z_k), \quad (\text{I.50})$$

где z_k — полюса $f(z)$ в верхней полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$, $\text{Res}[f; z_k]$ — вычет функции $f(z)$ в полюсе z_k .

Напомним встречающиеся в лемме понятия. Полюсом некоторого порядка r функции $f(z)$ называется такая точка a комплексной плоскости, в которой $f(z) \sim \infty$, при этом $\lim_{z \rightarrow a} f(z) (z - a)^r < \infty$.

Ясно, что полюсами спектральной характеристики (I.47) являются корни полинома $P_n(z)$; при этом порядок полюса совпадает с кратностью корня.

Вычет функции $f(z)$ в полюсе a определяется как интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz,$$

где C — любой контур, однократно обходящий точку a . Если полюс имеет первый порядок, то

$$\text{Res}(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z) (z - a). \quad (\text{I.51})$$

Сначала применим лемму Жордана к вычислению импульсной характеристики колебательного контура и сферического источника.

Спектральную характеристику обеих систем с точностью до постоянного множителя запишем в следующей эквивалентной форме

$$L(\omega) = 2i\omega h / (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega h), \quad (\text{I.52})$$

где параметр ω_0 определен формулами (I.44) и (I.46), значение h равно для колебательного контура $R/2L$, а для сферического источника $2v_S^2/r_0 v_P$; сдвиговый множитель, имеющий место в спектральной характеристике сферического источника, можно опустить, так как он влияет только на запаздывание сигнала, но не на его форму. В соответствии с формулой (I.26)

$$l(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\omega h \exp(i\omega t)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega h} d\omega. \quad (\text{I.53})$$

При $t > 0$ оба условия леммы ($m = t > 0$ и $F(\omega) \rightarrow 0$) выполнены. Подынтегральная функция имеет два полюса $\omega_1 = n_0 + ih$ и $\omega_2 = -n_0 + ih$, где $n_0 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$; оба полюса расположены в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega > 0$ (предполагается, что $\omega_0 > h$).

Представив подынтегральную функцию в виде

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{2ih\omega \exp(i\omega t)}{i^2(\omega - n_0 - ih)(\omega + n_0 - ih)},$$

определим вычеты по формуле (I.51):

$$\text{Res}(f; \omega_1) = \frac{h}{2\pi i n_0} (n_0 + ih) \exp(-ht) \exp(in_0 t)$$

и

$$\text{Res}(f; \omega_2) = \frac{h}{2\pi i n_0} (n_0 - ih) \exp(-ht) \exp(-in_0 t).$$

Отсюда при $t \geq 0$

$$l(t) = \frac{h}{n_0} \exp(-ht) \{n_0 [\exp(-in_0 t) + \exp(in_0 t)] + ih [\exp(in_0 t) - \exp(-in_0 t)]\}.$$

Применив формулу Эйлера $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$, получим

$$l(t) = \frac{2h\omega_0}{n_0} \exp(-ht) \cos(n_0 t + \varphi), \quad t \geq 0, \quad \varphi = \text{arctg} \frac{h}{n_0}. \quad (\text{I.54})$$

Если $t < 0$, примем $m = -t > 0$, а в интеграле заменим переменные $u = -\omega$. Это даст интеграл

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2iuh \exp(ium)}{\omega_0^2 - u^2 - 2iuh} du.$$

Оба корня знаменателя $n_0 - ih$ и $-n_0 - ih$ располагаются в нижней полуплоскости, следовательно, подынтегральная функция полюсов в верхней плоскости не имеет. Это означает, что интеграл равен нулю:

$$l(t) \equiv 0 \quad \text{при } t < 0.$$

Из формулы (I.54) следует, что модуль вещественной части полюса выражает собственную частоту, а мнимая часть полюса — затухание анализируемой линейной системы.

Перейдем к более общему случаю, предположив два условия:

1) $P_m(i\omega)/P_n(i\omega)$ является спектральной характеристикой устойчивости линейной системы;

2) все корни полинома $P_n(i\omega)$ простые.

Рассмотрим свободные колебания системы L , которые, как известно, описываются общим решением уравнения (I.48), т. е. решением однородного уравнения

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 = 0.$$

Известно, что это решение имеет вид $\sum_{(k)} c_k \exp(p_k t)$, где p_k — корни характеристического уравнения

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Условие устойчивости означает, что при всех k слагаемые $\exp(p_k t)$ должны убывать при $t \rightarrow \infty$, откуда

$$\operatorname{Re} p_k < 0. \quad (I.55)$$

Корни характеристического уравнения связаны с корнями полинома $P_n(i\omega) = a_n (i\omega)^n + \dots + a_0$ соотношением $i\omega_k = p_k$, откуда $\operatorname{Im} \omega_k = -\operatorname{Re} p_k$, поэтому из условия устойчивости вытекает $\operatorname{Im} \omega_k > 0$. Мы получили, что все корни полинома $P_n(i\omega)$ располагаются в верхней полуплоскости комплексного переменного ω .

По второму условию полином $P_n(i\omega)$ можно представить в виде

$$P(i\omega) = a_n i^n \prod_{k=1}^n (\omega - \omega_k).$$

Искомая импульсная характеристика

$$l(t) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_m(i\omega) \exp(i\omega t)}{a_n \prod_{k=1}^n (\omega - \omega_k)} d\omega. \quad (I.56)$$

При $t > 0$ оба условия леммы Жордана выполнены. Кроме того,

$$\operatorname{Res}[f; \omega_k] = \frac{P_m(i\omega_k)}{2\pi a_n i^n \prod_{j \neq k} (\omega_k - \omega_j)} \exp(i\omega_k t).$$

Поскольку все полюса подынтегральной функции располагаются в верхней полуплоскости,

$$l(t) = \sum_{k=1}^n \frac{i^{1-n} P_m(i\omega_k)}{a_n \prod_{j \neq k} (\omega_k - \omega_j)} \exp(i\omega_k t). \quad (I.57)$$

При $t < 0$ приняв в формуле (I.56) $m = -t > 0$ и $u = -\omega$, получим вследствие отсутствия полюсов в верхней полуплоскости у функции $f(u) = P_m(-iu)/P_n(-iu)$, что $l(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Из формулы (I.57) следует, что и в общем случае полюса спектральной характеристики определяют частоту и затухание свободных колебаний линейной системы.

§ 4. Преобразование Гильберта и физический смысл комплексных коэффициентов отражения — преломления

При анализе стационарных линейных систем большую роль играет преобразование Гильберта:

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u-t} du, \quad (I.58)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, т. е. как предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \right)$. Преобразование Гильберта является стационарным линейным преобразованием с импульсной характеристикой $1/t$.

Покажем, что имеет место обратное преобразование

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(u)}{u-t} du, \quad (I.59)$$

и, таким образом, преобразование Гильберта образует пару симметричных (с точностью до знака) трансформаций. С этой целью вычислим спектр сопряженной функции.

По определению спектра

$$S_{\bar{f}}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{u-t} \exp(-i\omega t) du dt.$$

Приняв $t = u + \tau$, переменные интегрирования можно разделить, после чего получим

$$S_{\bar{f}}(\omega) = -S_f(\omega) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega\tau)}{\tau} d\tau.$$

Представив экспоненту $\exp(-i\omega\tau)$ по формуле Эйлера и используя четность $(1/u) \sin \omega\tau$ и нечетность $(1/u) \cos \omega\tau$, получим

$$S_{\bar{f}}(\omega) = S_f(\omega) \frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega\tau}{\tau} d\tau.$$

Применив известную из анализа формулу

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega\tau}{\tau} d\tau = \frac{\pi}{2} \text{sign } \omega \quad (I.60)$$

(где $\text{sign } \omega = -1$ при $\omega < 0$ и $+1$ при $\omega > 0$), найдем окончательно

$$S_{\bar{f}}(\omega) = iS_f \text{sign } \omega. \quad (I.61)$$

Преобразование (I.59) отличается от (I.58) только знаком, поэтому его спектральная форма имеет вид

$$S_f(\omega) = -iS_{\bar{f}}(\omega) \operatorname{sign} \omega.$$

Подставив это выражение в правую часть равенства (I.61) получим, учитывая $(\operatorname{sign} \omega)^2 = 1$, тождество, что и требовалось показать.

Поскольку $\pm i = \exp\left(\pm i \frac{\pi}{2}\right)$, фазовые спектры сопряженных функций отличаются на $\pi/2$

$$\varphi_{\bar{f}}(\omega) - \varphi_f(\omega) = (\pi \operatorname{sign} \omega)/2. \quad (\text{I.62})$$

Амплитудные спектры сопряженных функций равны между собой:

$$|S_{\bar{f}}(\omega)| = |S_f(\omega)|.$$

В заключение этого пункта покажем, что сопряженные функции могут быть определены равенствами

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} S_f(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (\text{I.63})$$

и

$$\bar{f}(t) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} S_f(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (\text{I.63}')$$

С этой целью образуем так называемый аналитический сигнал $z(t) = f(t) - i\bar{f}(t)^*$.

Из формулы (I.61) следует, что его спектр

$$S_z(\omega) = \begin{cases} 2S_f(\omega), & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0. \end{cases}$$

Определяя теперь $z(t)$ при помощи обратного преобразования Фурье и учитывая, что $f(t) = \operatorname{Re} z(t)$, а $\bar{f}(t) = \operatorname{Im} z(t)$, получаем доказываемые формулы (I.63) и (I.63').

Преобразование Гильберта неоднократно будет встречаться в дальнейшем. Здесь рассмотрим его применение в задаче отражения — преломления плоской волны на плоской границе при закритических углах падения. Чтобы избежать чисто технических трудностей, будем считать, что на плоскую горизонтальную границу $z = 0$ двух однородных сред

* Функцию $|z(t)|$ называют огибающей, а $\arg z(t)$ — фазой сигнала $f(t)$.

падает плоская поперечная волна SH, вектор смещения которой поляризован перпендикулярно к плоскости падения. При падении волны SH на границе наблюдаются только касательные напряжения, перпендикулярные к плоскости падения, вследствие чего продольных и поперечных волн SV не возникает. Таким образом, имеет место очень простая волновая картина.

Поскольку явление отражения — преломления плоских волн рассматривается в многочисленных учебных курсах, мы ограничимся краткой схемой вывода нужных нам коэффициентов отражения — преломления.

Направим ось y перпендикулярно к плоскости падения. Тогда плоская волна SH определится формулой

$$\vec{u} = f \left[t - \frac{(\vec{\kappa}, \vec{r})}{v_{S_1}} \right] \vec{j}, \quad (I.64)$$

где $\vec{\kappa} = \sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{k}$; α — угол падения; v_{S_1} — скорость распространения поперечных волн в верхней среде.

Так как упругая среда является стационарной линейной системой, входной сигнал $f(t)$ удобно взять в виде плоской гармоник:

$$\vec{u} = \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{(\vec{\kappa}, \vec{r})}{v_{S_1}} \right] \right\} \vec{j}. \quad (I.65)$$

Реакция среды также будет иметь вид гармонических колебаний, распространяющихся в верхней (отраженная волна) и нижней (преломленная волна) средах:

$$\vec{u}^{(1)} = A \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{(\vec{\kappa}_1, \vec{r})}{v_{S_1}} \right] \right\} \vec{j} \quad (I.66)$$

и

$$\vec{u}^{(2)} = B \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{(\vec{\kappa}_2, \vec{r})}{v_{S_2}} \right] \right\} \vec{j}, \quad (I.67)$$

где $\vec{\kappa}_1 = \sin \alpha_1 \vec{i} - \cos \alpha_1 \vec{k}$ и $\vec{\kappa}_2 = \sin \beta \vec{i} + \cos \beta \vec{k}$ (углы α_1 и β показаны на рис. 5).

Неизвестные амплитуды A и B и углы α_1 и β определяются из условий на границе $z=0$. Вследствие периодичности колебаний на границе $z=0$ кажущиеся длины всех трех волн, равные $\lambda/\sin \alpha$, $\lambda_1/\sin \alpha_1$ и $\lambda_2/\sin \beta$ (где $\lambda = \lambda_1 = 2\pi v_{S_1}/\omega$ — длина волны в верхней среде, $\lambda_2 = 2\pi v_{S_2}/\omega$ — длина волны в нижней среде) соответственно, должны совпадать.

Отсюда получаем закон Снелиуса:

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \sin \beta = \frac{v_{S_2}}{v_{S_1}} \sin \alpha. \quad (I.68)$$

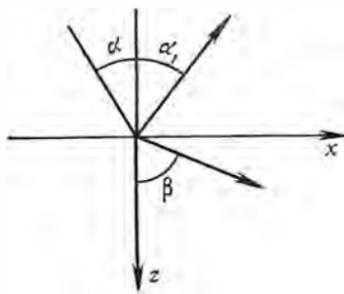


Рис. 5

Из условий непрерывности касательных смещений имеем

$$(u_y + u_y^{(1)})_{z=0} = u_y^{(2)}|_{z=0} \quad (I.69)$$

(остальные смещения равны нулю). Нормальное и касательное τ_{xz} напряжения равны нулю, так как равны нулю x -ые и z -ые составляющие смещения. Поэтому условие непрерывности нужно выписать только для τ_{yz} .

Согласно закону Гука (I.6) это условие имеет вид

$$\mu_1 \frac{\partial}{\partial z} (u_y + u_y^{(1)})|_{z=0} = \mu_2 \frac{\partial u_y^{(2)}}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (I.70)$$

(здесь учитывается, что $\partial u_z / \partial y = 0$, так как $u_z = 0$).

Подставив в условия (I.69) и (I.70) выражения u_y , $u_y^{(1)}$ и $u_y^{(2)}$ в соответствии с формулами (I.65)—(I.67) и с учетом закона Снелиуса (I.68), а также равенства $\mu = \rho v_s^2$, получим два уравнения для амплитуд A и B

$$1 + A = B, \quad \cos \alpha - A \gamma_1 \cos \alpha = B \gamma_2 \cos \beta,$$

где

$$\cos \beta = \sqrt{1 - (v_{S_2}/v_{S_1})^2 \sin^2 \alpha}, \quad \gamma_k = \rho_k v_{S_k}. \quad (I.71)$$

Отсюда

$$A = (\gamma_1 \cos \alpha - \gamma_2 \cos \beta) / (\gamma_1 \cos \alpha + \gamma_2 \cos \beta), \quad (I.72)$$

$$B = 2\gamma_1 \cos \alpha / (\gamma_1 \cos \alpha - \gamma_2 \cos \beta).$$

Оба коэффициента не зависят от частоты ω . Однако вывод, что форма отраженной и преломленной волн совпадает с формой падающей волны (I.64), будет верен только в том случае, когда A и B вещественны.

При углах падения

$$\alpha > \arcsin (v_{S_1}/v_{S_2})^* \quad (v_{S_2} > v_{S_1}) \quad (I.73)$$

значения $\cos \beta$, определяемые формулой (I.71), становятся мнимыми, а коэффициенты A и B — комплексными. Преобразование Гильберта как раз и будет использовано для определения формы отраженной и преломленной волн при комплексных значениях A и B .

Найдем форму отраженной волны при условии (I.73). Предварительно надо выбрать знак корня в выражении (I.71) для $\cos \beta$ **.

Спектр любой линейной системы с вещественной импульсной характеристикой удовлетворяет условию

$$L(-\omega) = L^*(\omega),$$

что вытекает непосредственно из формулы (I.25). Отсюда следует, что знак корня в формуле (I.71) нужно выбирать различным для частот разного знака, добиваясь выполнения соотношения

$$A|_{\omega < 0} \stackrel{r}{=} A^*|_{\omega > 0};$$

* Угол $\alpha = \arcsin (v_{S_1}/v_{S_2})$ называется критическим ($\alpha_{кр}$).

** При вещественном $\cos \beta$ значение корня берется положительным из-за очевидного условия $|\beta| \leq \pi/2$.

тем самым можно определить $\cos \beta$ одной из двух формул —

$$\cos \beta = i\Delta \operatorname{sign} \omega \quad (\text{I.74})$$

и

$$\cos \beta = -i\Delta \operatorname{sign} \omega, \quad (\text{I.74}')$$

где Δ — положительное значение корня $\sqrt{\left(\frac{v_{S_2}}{v_{S_1}} \sin \alpha\right)^2 - 1}$. Дальнейшее уточнение $\cos \beta$ требует привлечения дополнительных физических соображений, которые показывают [см. вывод формулы (I.83)], что правильной является последняя из двух приведенных формул для $\cos \beta$.

Выразим коэффициент отражения A через вещественную и мнимую части:

$$A = P + iQ \operatorname{sign} \omega, \quad (\text{I.75})$$

где

$$P = \frac{(\gamma_1 \cos \alpha)^2 - (\gamma_2 \Delta)^2}{(\gamma_1 \cos \alpha)^2 + (\gamma_2 \Delta)^2},$$

$$Q = \frac{2\gamma_1 \gamma_2 \Delta \cos \alpha}{(\gamma_1 \cos \alpha)^2 + (\gamma_2 \Delta)^2}.$$

Легко проверить, что $P^2 + Q^2 = 1$, поэтому

$$A = \exp(i\chi \operatorname{sign} \omega),$$

где $\chi = \arctg(Q/P)$, $Q = \sin \chi$ и $P = \cos \chi$.

Учитывая закон Снелиуса и вытекающее из него выражение для вектора \vec{n}_1 , отраженную монохроматическую волну \vec{u}^1 запишем следующим образом:

$$\vec{u}^{(1)} = \exp \left\{ i \left[\omega \left(t - \frac{x \sin \alpha - z \cos \alpha}{v_{S_1}} \right) + \chi \operatorname{sign} \omega \right] \right\} \vec{j}.$$

Мы видим, что «закритическая» отраженная волна получила дополнительный сдвиг по фазе χ , означающий сдвиг во времени, обратно пропорциональный частоте ω . Если падающая волна \vec{u} состоит из суммы монохроматических волн разной частоты, то все эти волны при отражении окажутся сдвинутыми на различные моменты времени, вследствие чего форма отраженной волны $\vec{u}^{(1)}$ окажется отличной от формы падающей волны.

Рассмотрим изменение формы волны более подробно. Пусть форма колебаний падающей волны \vec{u} определяется функцией $f(t)$ и пусть $S(\omega)$ —

спектр этой функции. Тогда при помощи интеграла Фурье можно представить \vec{u} как бесконечную сумму монохроматических волн:

$$\vec{u} = \frac{\vec{j}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega\xi) d\omega;$$

$$\xi = t - \frac{(\vec{x}, \vec{r})}{v_{S_1}}.$$

Для каждой падающей монохроматической волны

$$\frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) \exp(i\omega\xi) \vec{j}$$

отраженная волна равна

$$A \frac{d\omega}{2\pi} S(\omega) \exp(i\omega\xi_1) \vec{j};$$

$$\xi_1 = t - \frac{(\vec{x}_1, \vec{r})}{v_{S_1}}.$$

Отсюда, применяя принцип суперпозиции и учитывая, что $A = \cos \chi + i \sin \chi \operatorname{sign} \omega$, получим

$$\vec{u}^{(1)} = \frac{\vec{j} \cos \chi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega\xi_1) d\omega + \frac{\vec{j} \sin \chi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \operatorname{sign} \omega S(\omega) \exp(i\omega\xi_1) d\omega.$$

Но согласно формуле (I.61) выражение $iS(\omega) \operatorname{sign} \omega$ является спектром для $\bar{f}(t)$, следовательно,

$$\vec{u}^{(1)} = [f(\xi_1) \cos \chi + \bar{f}(\xi_1) \sin \chi] \vec{j}. \quad (\text{I.76})$$

Итак, форма закритической отраженной волны SH является линейной комбинацией формы падающей волны и ее преобразования Гильберта.

В диапазоне углов падения $\alpha_{\text{кр}} \leq \alpha \leq \pi/2$ форма волны изменяется от $f(t)$ при $\alpha = \alpha_{\text{кр}}$ (так как в этом случае $Q = 0$ и $P = 1$), до $-f(t)$ при $\alpha = \pi/2$ (ибо в этом случае $Q = 0$ и $P = -1$). В этом интервале имеется такой угол α' , что $\vec{u}^{(1)} = \bar{f}(\xi_1) \vec{j}$. Действительно, при $\alpha = \alpha_{\text{кр}}$ обращается в нуль величина $\gamma_2^2 \Delta^2$, а при $\alpha = \pi/2$ равна нулю величина $(\gamma_1 \cos \alpha)^2$. Так как обе величины неотрицательны и монотонны (как функции от α), то в интервале $(\alpha_{\text{кр}}, \pi/2)$ найдется угол α' , для которого имеет место равенство $\gamma_1 \cos \alpha' = \gamma_2 \Delta$; в этом случае $P = 0$ и $Q = 1$.

Чтобы лучше почувствовать отличие формы отраженной волны от формы падающей волны, предположим, что сигнал является узкополосной квазисинусоидальной функцией вида

$$f(t) = a(t) \cos(\omega_0 t - \varphi). \quad (\text{I.77})$$

Узкополосность означает, что граничная частота спектра огибающей $a(t)$ меньше частоты высокочастотного заполнения:

$$S_a(\omega) \cong 0 \quad \text{при} \quad |\omega| \geq \omega_0. \quad (I.78)$$

Найдем функцию, сопряженную к сигналу

$$x_1(t) = a(t) \cos \omega_0 t.$$

Представив с помощью формулы Эйлера косинус в виде полусуммы двух экспонент

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} [\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t)]$$

и приняв во внимание, что спектр функции $a(t) \exp(\pm i\omega_0 t)$ равен $S_a(\omega \pm \omega_0)$, найдем спектр $x_1(t)$. Он равен

$$S_1(\omega) = \frac{1}{2} [S_a(\omega - \omega_0) + S_a(\omega + \omega_0)].$$

Согласно формуле (I.61) спектр сопряженной функции $\bar{x}_1(t)$ окажется равным

$$\bar{S}_1(\omega) = \frac{i}{2} [S_a(\omega - \omega_0) + S_a(\omega + \omega_0)] \operatorname{sign} \omega.$$

После простых преобразований получим выражение

$$\bar{S}_1(\omega) = \frac{i}{2} [S_a(\omega - \omega_0) - S_a(\omega + \omega_0)] + \begin{cases} -iS_a(\omega - \omega_0), & \omega < 0 \\ iS_a(\omega + \omega_0), & \omega > 0. \end{cases} \quad (I.79)$$

С помощью тождества

$$\sin \omega_0 t = -\frac{i}{2} [\exp(i\omega_0 t) - \exp(-i\omega_0 t)]$$

легко показать, что обратное преобразование Фурье первого слагаемого в правой части (I.79) равно $-a(t) \sin \omega_0 t$. Применим обратное преобразование Фурье ко второму слагаемому. После соответствующей замены переменных получим сумму двух интегралов:

$$-\frac{i}{2\pi} \exp(i\omega_0 t) \int_{-\infty}^{\omega_0} S_a(\omega) \exp(i\omega t) d\omega + \\ + \frac{i}{2\pi} \exp(i\omega_0 t) \int_{\omega_0}^{\infty} S_a \exp(i\omega t) d\omega.$$

В соответствии с условием (I.78) оба эти интеграла близки к нулю, поэтому

$$\bar{x}_1(t) \cong -a(t) \sin \omega_0 t.$$

Аналогично можно показать, что для функции $x_2(t) = a(t) \sin \omega_0 t$ сопряженная функция равна $a(t) \cos \omega_0 t$, а поскольку

$$f(t) = x_1(t) \cos \varphi + x_2(t) \sin \varphi,$$

то вследствие линейности преобразования Гильберта

$$\bar{f}(t) = \bar{x}_1(t) \cos \varphi + \bar{x}_2(t) \sin \varphi \cong -a(t) \sin(\omega_0 t - \varphi). \quad (I.80)$$

Таким образом, сопряженная функция узкополосного сигнала отличается (приближенно) от $f(t)$ сдвигом фазы высокочастотного заполнения на $\pi/2$. Теперь, подставляя формулы (I.77) и (I.80) в (I.76), получим выражение отраженной волны при падении узкополосного сигнала:

$$\vec{u}^{(1)} = a(t) \cos(\omega_0 \xi_1 - \varphi + \chi) \vec{j}. \quad (\text{I.81})$$

Из этой формулы следует вывод, что изменение формы отраженной волны при увеличении угла падения α в закритической области сводится к сдвигу фазы высокочастотного заполнения при сохранении формы огибающей. Этот вывод является точным, если огибающая имеет спектр, граничная частота которого не превосходит ω_0 .

Преломленная монохроматическая волна описывается следующим выражением:

$$\vec{u}^{(2)} = \vec{j} B \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x \sin \beta + z \cos \beta}{v_{S_2}} \right) \right].$$

Пусть угол падения больше критического. Тогда $\cos \beta$ должен быть определен формулой (I.74) или (I.74'): $\cos \beta = \pm i\Delta \operatorname{sign} \omega$, а $\sin \beta$ — формулой (I.68).

Отсюда

$$\vec{u}^{(2)} = \vec{j} B \exp \left(\pm \frac{z |\omega| \Delta}{v_{S_2}} \right) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x \sin \alpha}{v_{S_1}} \right) \right]. \quad (\text{I.82})$$

Согласно принципу излучения в показателе первой экспоненты должен стоять такой знак, чтобы при удалении от источника амплитуда волны не могла возрастать. Поскольку источником волны $\vec{u}^{(2)}$ является граница $z = 0$ и ось z направлена во вторую среду, где распространяется волна $\vec{u}^{(2)}$, то в формуле (I.82) перед z должен стоять знак минус, что отвечает выбору формулы (I.74'). Этот выбор может быть сделан независимо от направления оси z , если величину z брать по модулю.

Учитывая эти соображения, из формулы (I.82) получим

$$\vec{u}^{(2)} = \vec{j} B \exp \left(- \frac{\Delta}{v_{S_2}} |\omega z| \right) \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x \sin \alpha}{v_{S_1}} \right) \right], \quad (\text{I.83})$$

где $B = P' + iQ' \operatorname{sign} \omega$, $P' = -2\gamma_1 \gamma_2 \Delta^2 / (\gamma_1^2 \cos^2 \alpha + \gamma_2^2 \Delta^2)$, $Q' = -2\gamma_1^2 \Delta \cos \alpha / (\gamma_1^2 \cos^2 \alpha + \gamma_2^2 \Delta^2)$.

Выражение (I.83) описывает волну, которая имеет плоский фронт, перпендикулярный к оси x , и распространяется в направлении x со скоростью $v_{S_1} / \sin \alpha$, равной кажущейся скорости падающей волны. В каждой точке среды форма колебаний является гармонической, а амплитуда колебаний экспоненциально убывает с увеличением $|z|$, при этом скорость убывания тем выше, чем больше частота ω . При увеличении значения α от $\alpha_{кр}$ до $\pi/2$ амплитуда колебаний на границе $z = 0$, равная $|B|$, возрастает от 0 до $2\gamma_1 / \gamma_2$.

Пусть теперь падающая волна \vec{u} описывается формулой (I.64). Применяя разложение в интеграл Фурье, получим

$$\vec{u}^{(2)} = \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} BS(\omega) \exp\left(-\frac{\Delta}{v_{S_2}} |\omega z|\right) \exp(i\omega \xi_2) d\omega; \quad (I.84)$$

$$\xi_2 = t - \frac{x \sin \alpha}{v_{S_1}}.$$

Умножение спектра сигнала на $L_z(\omega) = \exp\left(-\frac{\Delta |\omega z|}{v_{S_2}}\right)$ означает преобразование фильтром L_z , имеющим частотную характеристику $L_z(\omega)$. Поэтому выражение (I.84) можно трактовать как результат прохождения волны

$$\frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} BS(\omega) \exp(i\omega \xi_2) d\omega \quad (I.85)$$

через L_z .

В соответствии с анализом формы отраженной волны волна (I.85) может быть выражена следующим образом:

$$[P'f(\xi_2) + Q'\bar{f}(\xi_2)] \vec{j}.$$

Обозначим через $f_z(t)$ реакцию линейного фильтра L_z на сигнал $f(t)$: $f_z(t) = L_z[f(t)]$. Поскольку преобразование Гильберта является линейным преобразованием стационарного типа, то оно перестановочно с L_z :

$$L_z[\bar{f}(t)] = \bar{f}_z(t).$$

Следовательно,

$$\vec{u}^{(2)} = [P'f_z(\xi_2) + Q'\bar{f}_z(\xi_2)] \vec{j}. \quad (I.86)$$

Так как L_z — фильтр низкой частоты, крутизна частотной характеристики которого растет с увеличением z , колебания $\vec{u}^{(2)}$ при удалении от границы становятся все более низкочастотными. Кроме того, энергия колебаний при $z \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Глава II

ФИЗИЧЕСКАЯ ОСУЩЕСТВИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 5. Условия физической осуществимости

В § 1 мы условились говорить, что нам задана абстрактная линейная система L , если известна спектральная характеристика $L(\omega)$ или импульсная характеристика $l(t)$. Для того чтобы реальный физический сигнал $x(t)$ мог быть подвергнут преобразованию $L[x(t)]$, заданному в виде абстрактной линейной системы, последняя должна быть реализована в виде некоторой конкретной физической системы. Обычно в нашем

распоряжении имеется вполне определенный класс физических линейных систем \mathcal{L} , поэтому вопрос о реализации абстрактной линейной системы должен решаться именно относительно этого класса \mathcal{L} . Если в классе L существует такая система, которая имеет ту же спектральную характеристику, что и заданная абстрактная система L , то говорят, что L физически осуществима в классе \mathcal{L} . Разумеется, если в \mathcal{L} не существует системы, строго реализующей абстрактную систему L , то может быть поставлен вопрос о приближенной реализации, т. е. об отыскании такой реальной системы из класса \mathcal{L} , которая имеет спектральную характеристику $L_1(\omega)$, мало отличающуюся от $L(\omega)$.

Таким образом, решение вопроса о физической осуществимости любой абстрактной системы L зависит как от выбора класса конкретных систем \mathcal{L} , так и от допускаемой степени приближения реальной системы к абстрактной. В любом случае надо иметь критерии, зависящие от выбора класса \mathcal{L} , которые позволяют по виду спектральной характеристики $L(\omega)$ или импульсной характеристики $l(t)$ решить вопрос о физической осуществимости (в соответствующем смысле) рассматриваемой системы L .

Исторически сложилось так, что вопрос о физической осуществимости рассматривался в основном для одного широкого класса систем, действующих в реальном физическом времени. Поэтому, когда говорят о физической осуществимости, не указывая класса \mathcal{L} , то имеют в виду именно этот класс. Такого типа осуществимость будем называть физической осуществимостью в узком смысле. Именно она и будет рассматриваться в этом разделе.

Все линейные системы из § 1 действуют в реальном времени. Но они далеко не исчерпывают всего класса систем данного типа. Точное определение этого класса сформулируем в виде условий, накладываемых на импульсную характеристику. Для того чтобы физическое содержание этого понятия было более ясным, целесообразно вначале указать на конкретные системы, которые не входят в рассматриваемый класс.

Пусть сигнал $x(t)$ является финитным. Тогда, прежде чем подавать его на вход системы L_1 , запишем его на запоминающее устройство, например на бумажную или магнитную ленту конечной длины. Ясно, что теперь он записан в виде функции $x(t)$, где t не является реальным временем, поскольку, взяв значение сигнала в момент t_1 , мы после этого можем считать значение $x(t_2)$ при $t_2 < t_1$, что в реальном времени осуществить нельзя.

Если система L_1 устроена так, что в любой момент реального времени может измерить значение $x(t_1)$ для любого t_1 , то она, очевидно, работает не в реальном времени. Понятно, что к классу таких систем относятся электронно-вычислительные машины ЭВМ. Основной чертой этих систем является «память», в которой хранится преобразуемый сигнал. Поскольку «память» следует рассматривать как бесконечную задержку сигнала, то при помощи систем, работающих в режиме реального времени, можно приближенно реализовать любые конкретные системы, если вводить в них очень большие задержки.

Основное условие, которое должно выполняться преобразованием L , реализуемым в классе систем, действующих в режиме реального времени—

невозможность появления отклика на выходе L раньше, чем на вход L поступил входной сигнал. Грубо говоря, это означает, что всякое следствие появляется не раньше причины, поэтому его называют принципом причинности.

Пусть на вход системы L в момент $t = 0$ подается входной сигнал в виде δ -функции. Тогда откликом является импульсная реакция $l(t)$ и в соответствии с принципом причинности мы должны потребовать, чтобы

$$l(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \quad (\text{II.1})$$

Это условие — не только необходимое, но и достаточное выражение принципа причинности. Действительно, пусть $x(t)$ — произвольный сигнал, начинающийся в момент $t = 0$. В этом случае на выходе будем иметь

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} l(t - \tau) x(\tau) d\tau. \quad (\text{II.2})$$

Из условия (II.1) следует, что при $\tau > t$ $l(t - \tau) \equiv 0$, поэтому верхний предел в интеграле (II.2) можно заменить на t , а так как при $\tau < 0$ $x(\tau) \equiv 0$, то нижний предел можно заменить на 0.

Таким образом,

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) l(t - \tau) d\tau. \quad (\text{II.3})$$

Если $t < 0$, то в данном диапазоне изменения τ , $t - \tau \leq 0$ (при этом равенство имеет место только при $t = \tau$), поэтому интеграл (II.3), а вместе с ним и выходной сигнал равны нулю.

Итак, условие (II.1) является необходимым и достаточным условием выполнения принципа причинности.

Следующим требованием, которое естественно предъявить к системам, действующим в режиме реального времени, является конечность энергии сигнала $y(t)$ на выходе L , если на входе задан сигнал, несущий конечную энергию:

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt < \infty, \quad (\text{II.4})$$

когда

$$E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (\text{II.5})$$

Покажем, что для класса входных сигналов, имеющих конечные спектры $|S_x(\omega)| < \infty$, достаточным условием, обеспечивающим неравенство (II.4), является следующее:

$$\int_0^{\infty} |l(t)|^2 dt < \infty. \quad (\text{II.6})$$

Для доказательства нам понадобится теорема Релея, согласно которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega, \quad (\text{II.7})$$

где $S(\omega)$ — спектр функции $f(t)$.

По этой теореме

$$E_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S_y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |L(\omega)|^2 |S_x(\omega)|^2 d\omega,$$

$$E_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S_x(\omega)|^2 d\omega,$$

а левая часть неравенства (II.6) равна

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |L(\omega)|^2 d\omega.$$

Последние два равенства и условие (II.5) и (II.6) показывают, что функции $|S_x(\omega)|^2$ и $|L(\omega)|^2$ интегрируемы на $(0, \infty)$. Но тогда, принимая во внимание конечность $|S_x(\omega)|$, тем более интегрируемо их произведение, поэтому $E_1 < \infty$.

Наряду с рассматриваемым «энергетическим» условием к линейным системам предъявляется требование строгой устойчивости. Система считается строго устойчивой, если реакция на ограниченный сигнал всегда ограничена.

Линейная система тогда и только тогда строго устойчива, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |l(t)| dt < \infty. \quad (\text{II.8})$$

Докажем только достаточность. По условию входной сигнал ограничен: $|x(t)| \leq A < \infty$. Следовательно,

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |l(t-\tau)x(\tau)| d\tau \leq A \int_{-\infty}^{\infty} |l(t-\tau)| d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} |l(t)| dt < \infty, \quad (\text{II.8}')$$

что и нужно было показать. Надо заметить, что при $|l(t)| < \infty$ из условия (II.8) следует (II.6), т. е. в классе линейных систем с ограниченными импульсными характеристиками условие строгой устойчивости более сильное.

Если устойчивая (или строго устойчивая) система L не удовлетворяет принципу причинности, то, взяв достаточно большое запаздывание t_1 и положив $l_1(t) \equiv 0$ ($t < 0$), $l_1(t) = l(t - t_1)$ ($t \geq 0$), получим физически осуществимую систему, на выходе которой сигнал приближенно равен $y(t - t_1)$.

Желательно определить класс физически осуществимых (в узком смысле) систем в терминах спектральной характеристики.

В соответствии с теоремой Релея условие (II.6) эквивалентно

$$\int_0^{\infty} |L(\omega)|^2 d\omega < \infty. \quad (\text{II.9})$$

В классе систем с дробно-рациональными спектральными характеристиками (I.47) это условие равносильно неравенству $n > m$.

При анализе дробно-рациональных спектров было показано, что условие строгой устойчивости эквивалентно отсутствию полюсов в нижней полуплоскости комплексного переменного ω . Оказывается, последнее условие играет большую роль и в более широком классе линейных систем, являясь спектральным эквивалентом принципа причинности, т. е. имеет место следующее утверждение.

Теорема (Н. Винер). Система L тогда и только тогда удовлетворяет принципу причинности, если $L(\omega)$ является аналитической¹ во всех точках нижней полуплоскости $\text{Im } \omega \leq 0$ (включая вещественную ось).

Доказательство этого утверждения будет проведено для строго устойчивых систем с ограниченными импульсными характеристиками. Сначала докажем достаточность. Пусть $L(\omega)$ — аналитична во всех точках ω : $\text{Im } \omega \leq 0$. Выразим $l(t)$ через $L(\omega)$ при помощи обратного преобразования Фурье (I.26). Так как нас интересуют значения $t < 0$, то примем в (I.26) $m = -t > 0$:

$$l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L(u) \exp(ium) du.$$

Однако функция $G(u) = L(-u)$ является аналитической в верхней полуплоскости, включая вещественную ось, а согласно (II.9) $G(u) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$. Поэтому, интеграл $\int_0^{\infty} G(u) \exp(ium) du$ удовлетворяет условия леммы Жордана (I.50), вследствие чего равен сумме вычетов по полюсам в верхней полуплоскости. Но поскольку там полюсов нет, сумма вычетов равна нулю. Следовательно, $l(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Достаточность доказана.

Пусть теперь условие (II.4) выполнено. Тогда преобразование Фурье $l(t)$ равно

$$L(\omega) = \int_0^{\infty} l(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Рассмотрим произвольную точку ω в нижней полуплоскости $\text{Im } \omega \leq 0$. Представив ее в виде $\beta - i\alpha$ (где $\alpha > 0$), имеем

$$L(\omega) = \int_0^{\infty} l(t) \exp(-\alpha t) \exp(-i\beta t) dt. \quad (\text{II.10})$$

Интеграл (II.10) абсолютно сходится при любых $\alpha \geq 0$ и β . Действительно, при $\alpha = 0$ он сходится по условию (II.8). При $\alpha > 0$ он сходится тем более, так как

$$|l(t) \exp(-\alpha t)| \leq |l(t)|.$$

¹ Функция $f(z)$ комплексного переменного z называется аналитической в точке z , если она дифференцируема не только в z , но и в некоторой окрестности этой точки.

Но

$$\left| \int_A^{\infty} |l(t)| \exp(-\alpha t) \exp(i\beta t) dt \right| \leq \int_A^{\infty} |l(t)| \exp(-\alpha t) dt < \\ < \exp(-A\alpha) \int_A^{\infty} |l(t)| dt < \infty,$$

поэтому интеграл (II.10) сходится равномерно по β и α (при $\alpha > 0$), т. е. равномерно по ω . Следовательно, его можно дифференцировать по ω под знаком интеграла. Однако $\exp(i\omega t)$ — аналитическая функция, значит, вследствие равномерной сходимости аналитичен и сам интеграл. Теорема доказана.

Как уже отмечалось, все рассматривавшиеся в гл. I линейные преобразования удовлетворяют принципу причинности. Этот факт является,

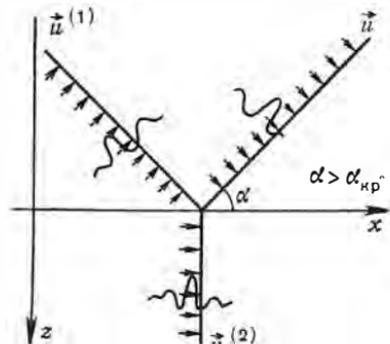


Рис. 6

(рис. 6). Тем не менее принцип причинности не нарушается, так как точки $t - (x \sin \alpha - z \cos \alpha)/v_{S_1} < 0$, $z < 0$, располагаются за фронтом падающей волны $t - (x \sin \alpha + z \cos \alpha)/v_{S_1} = 0$, которая является входным сигналом.

Что касается преломленной волны, то поскольку ее фронт распространяется со скоростью $v_{S_1}/\sin \alpha$, которая меньше скорости v_{S_2} поперечных волн во второй среде, точка отражения — преломления является постоянным источником уходящих вперед колебаний. Так как падающая волна и граница плоские, этот источник существует бесконечно долго, следовательно, преломленная волна должна иметь отличные от нуля смещения при любых $t > x \sin \alpha/v_{S_1}$.

Физически осуществимые системы обладают тем замечательным свойством, что вещественные и мнимые части их спектральных характеристик не являются независимыми. Действительно, в соответствии с условием (II.1) вещественная и мнимая части $L(\omega)$ определяются следующими равенствами:

$$P(\omega) = \operatorname{Re} L(\omega) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} l(t) \exp(-i\omega t) dt;$$

$$Q(\omega) = \operatorname{Im} L(\omega) = \operatorname{Im} \int_0^{\infty} l(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Сравнивая их с формулами (I.63) (I.63¹) видим, что функция $-Q(-\omega)/\pi$ является сопряженной (по Гильберту) к функции $P(-\omega)/\pi$. Вещественная часть спектральной характеристики — четная функция, а мнимая часть — нечетная функция частоты. Поэтому, принимая во внимание линейность преобразования Гильберта, выводим следующее соотношение, связывающее $P(\omega)$ и $Q(\omega)$: $Q(\omega) = P(\omega)$. Само собой разумеется, что в данном случае преобразование Гильберта действует по переменной ω .

По определению преобразований Гильберта (I.58) и (I.59) имеем

$$Q(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(u)}{u-\omega} du; \quad (\text{II.11})$$

$$P(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(u)}{u-\omega} du. \quad (\text{II.12})$$

Преобразования (II.11) и (II.12) часто записывают в другой форме. Разобьем интервал интегрирования на две части и учтем четность $P(\omega)$; после простых преобразований будем иметь из формулы (II.11)

$$Q(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(u)}{u^2 - \omega^2} du, \quad (\text{II.13})$$

а из (II.12)

$$P(\omega) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{uQ(u)}{u^2 - \omega^2} du.$$

Итак, получено, что задание только одной из функций $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ полностью определяет спектральную характеристику физически осуществимой линейной системы.

Если информация о системе L задана в виде амплитудной характеристики $A(\omega) = |L(\omega)|$, то возникает вопрос: можно ли указать физически осуществимую (в смысле условия причинности) линейную систему L с данной амплитудной характеристикой? Иными словами, можно ли с $A(\omega)$ связать такую фазовую характеристику $\theta(\omega)$, чтобы $L(\omega) = A(\omega) \exp[i\theta(\omega)]$ определяла физически осуществимую линейную систему?

Оказывается, что критерий физической осуществимости такого рода существует и заключается в том, чтобы

$$\int_0^{\infty} \frac{|\ln A(\omega)|}{1+\omega^2} d\omega < \infty. \quad (\text{II.14})$$

Более строго данный критерий, называемый критерием Пэйли — Винера, формулируется следующим образом: если линейная система физически осуществима и если выполнимо неравенство (II.9), то обязательно

имеет место неравенство (II.14), и обратно, если выполнены неравенства (II.9) и (II.14), то существует такая фазовая характеристика $\theta(\omega)$, что система со спектральной характеристикой $A(\omega) \exp(i\theta(\omega))$ удовлетворяет условию причинности (II.1).

Из этого условия, в частности, следует, что

$$A(\omega) \neq 0 \quad (\text{II.15})$$

ни в каком интервале частот (ω' , ω''). Таким образом, нет физически осуществимой системы, которая совсем не пропускает частот в интервале конечной длины. Возможность равенства $A(\omega_1) = 0$ в изолированной точке ω_1 зависит от скорости стремления $A(\omega)$ к нулю при $\omega \rightarrow \omega_1$.

Физически неосуществимой оказывается система с «гауссовской» частотной характеристикой

$$A(\omega) = \exp(-\omega^2/2).$$

Рассмотрим возможность реализации полосового фильтра с амплитудной частотной характеристикой

$$A(\omega) = 1 / \left[1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right)^p \right] + 1 / \left[1 + \left(\frac{\omega + \omega_0}{\Delta\omega} \right)^p \right], \quad (\text{II.16})$$

где p — четное положительное число; $\Delta\omega < \omega_0$. Нетрудно показать, что при $p \gg 1$ этот фильтр имеет столбобразную частотную характеристику с полосой пропускания ($\omega_0 - \Delta\omega$, $\omega_0 + \Delta\omega$).

При $\omega \rightarrow \infty$ $A(\omega) \sim 1/\omega^p$, следовательно,

$$\frac{|\ln A(\omega)|}{1 + \omega^2} \sim \frac{p \ln |\omega|}{\omega^2}, \quad \omega \rightarrow \infty;$$

но так как при любом α ($0 < \alpha < 1$) функция $\ln |\omega|$ возрастает медленнее, чем $\omega^{1-\alpha}$, то при больших ω $\ln |\omega|/\omega^2$ возрастает не быстрее, чем $1/\omega^{1+\alpha}$, что обеспечивает условие (II.14).

Вопрос о выборе фазовой характеристики $\theta(\omega)$ пока оставим открытым. Ясно, что брать $\theta(\omega) \equiv 0$ нельзя, так как в этом случае спектральная характеристика $L(\omega) = A(\omega)$ оказывается четной и ей отвечает четная импульсная характеристика $l(t)$, которая не может удовлетворять условию (II.1).

§ 6. Минимально-фазовые системы

Пусть система L имеет дробно-рациональную спектральную характеристику (I.47). Ее амплитудный спектр

$$A(\omega) = |P_m(i\omega)| / |P_n(i\omega)| \quad (\text{II.17})$$

а фазовый спектр

$$\theta(\omega) = \arg P_m(i\omega) - \arg P_n(i\omega). \quad (\text{II.18})$$

Как уже указывалось выше, задание полюсов и нулей $L(\omega)$ полностью определяет саму эту спектральную характеристику. Если любой

полюс (или нуль) заменить на комплексно-сопряженное число, то амплитудная характеристика $A(\omega)$ от этого не изменится.

Действительно, для всякого полинома $P(i\omega)$ с корнями $\omega_1, \omega_2, \dots$

$$|P(i\omega)|^2 = a_n^2 (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_1)^* (\omega - \omega_2)(\omega - \omega_2)^* \dots, \quad (\text{II.19})$$

но если ω вещественно, то

$$(\omega - \omega_1)^* = (\omega - \omega_1^*).$$

Отсюда следует, что амплитудная характеристика определяет мнимую часть всех полюсов и нулей с точностью до знака (вещественные части определяются полностью). В случае физически осуществимых систем мнимые части полюсов обязаны быть положительными, поскольку такие системы соответственно спектральной формулировке принципа причинности не имеют полюсов в нижней полуплоскости. Поэтому произвол в знаке остается только для нулей.

Попытаемся выбрать такое расположение нулей, которое обеспечивает наименьшее запаздывание фазы при прохождении гармонического сигнала через линейную систему. Поскольку при $\omega > 0$ отрицательным значениям $\theta(\omega)$ отвечает отставание фазы, то большим значениям фазовой характеристики отвечает меньшее запаздывание фазы. В соответствии с формулой (II.18) надо выбрать такое расположение нулей, при котором $\arg P_m(i\omega)$ максимален. Следует напомнить, что задание амплитудной характеристики однозначно определяет $P_n(i\omega)$.

Пусть $\omega_1, \omega_2, \dots$ — корни полинома $P_m(i\omega)$.

Тогда

$$\arg P_m(i\omega) = i \sum_{k=1}^m \arg i(\omega - \omega_k) = \frac{m\pi}{2} + \sum_{k=1}^m \arg(\omega - \omega_k).$$

Если ω вещественно, то при $\text{Im } \omega_k > 0$ комплексное число $\omega - \omega_k$ лежит в нижней полуплоскости, а при $\text{Im } \omega_k < 0$ — в верхней полуплоскости. Следовательно, максимальное значение $\theta(\omega)$ получим в том случае, если каждый корень ω_k , имеющий отрицательную мнимую часть, заменим сопряженным корнем ω_k^* . В полученной спектральной характеристике все полюса и нули (если они имеются) располагаются в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega \geq 0$. Системы такого типа называются минимально-фазовыми. Это определение распространяется и на произвольные спектральные характеристики (не обязательно дробно-рационального типа).

Если система L является минимально-фазовой и имеет дробно-рациональную спектральную характеристику, то последняя отыскивается по заданной амплитудной характеристике просто, по крайней мере в принципе. Согласно формулам (II.17) и (II.19) функция $|L(\omega)|^2$ имеет удвоенное по сравнению с $L(\omega)$ число полюсов и нулей. Отбросив все полюса и нули, располагающиеся в нижней полуплоскости $\text{Im } \omega < 0$, получим искомую спектральную характеристику.

Пример. Проиллюстрируем изложенную процедуру на примере линейной системы с амплитудной характеристикой (II.16), взяв для простоты $p = 2$.

Нетрудно получить следующее выражение для $|L(\omega)|^2$:

$$|L(\omega)|^2 = \frac{4\Delta\omega^4(\omega^2 + \omega_0^2 + \Delta\omega^2)^2}{[\Delta\omega^2 + (\omega - \omega_0)^2]^2 [\Delta\omega^2 + (\omega + \omega_0)^2]^2}.$$

Знаменатель имеет пару двухкратных корней $\pm i\sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega^2}$, а числитель — четыре двухкратных корня $\pm\omega_0 \pm i\Delta\omega$. Отбрасывая корни со знаком минус перед мнимой единицей, получим

$$L(\omega) = 2\Delta\omega^2 \frac{(\omega - i\sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega^2})^2}{(\omega - \omega_0 - i\Delta\omega)^2 (\omega + \omega_0 - i\Delta\omega)^2} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - \Delta\omega^2 - 2i\omega\sqrt{\omega_0^2 + \Delta\omega^2}}{(\omega - i\Delta\omega)^4 - 2\omega_0^2(\omega - i\Delta\omega)^2 + \omega_0^4}.$$

Рассмотренная выше процедура показывает, что в дробно-рациональном случае амплитудная характеристика минимально-фазовой системы однозначно определяет спектральную, а вместе с ней и фазовую характеристику. Имеет ли место эта однозначность в общем случае и можно ли указать формулу, явно выражающую фазовую характеристику минимально-фазовой системы через амплитудную?

Чтобы ответить на этот вопрос, составим логарифм спектральной характеристики:

$$\ln L(\omega) = \ln A(\omega) + i\theta(\omega).$$

Можно формально рассматривать $\ln L(\omega)$ как новую спектральную характеристику с вещественной частью $\ln A(\omega)$ и мнимой частью $\theta(\omega)$. Поскольку $L(\omega)$ при $\text{Im } \omega \leq 0$ является аналитической функцией, а по определению минимально-фазовой системы амплитудная характеристика $A(\omega)$ не обращается в нуль ни в одной точке нижней полуплоскости, то $\ln L(\omega)$ — суть аналитическая функция при $\text{Im } \omega \leq 0$. Следовательно, $\ln L(\omega)$ обладает одним из наиболее фундаментальных свойств физически осуществимых спектральных характеристик, мнимые и вещественные части которых связаны преобразованием (II.13). Однако к $\ln L(\omega)$ нельзя применить ни спектральную формулировку принципа причинности, ни критерий Пэйли — Винера, так как в обоих условиях предполагается интегрируемость квадрата модуля спектральной характеристики. Что касается $|\ln L(\omega)|^2$, то эта функция на интервале $(0, \infty)$ не интегрируема, поскольку $\ln L(\omega) \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Тем не менее удастся показать, что если равномерно в нижней полуплоскости

$$\ln L(\omega)/\omega \rightarrow 0 \text{ при } \omega \rightarrow \infty, \quad (\text{II.20})$$

то для минимально-фазовых систем выполняется соотношение типа (II.13):

$$\theta(\omega_1) = \frac{2\omega_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln A(\omega) - \ln A(\omega_1)}{\omega^2 - \omega_1^2} g(\omega) \quad (\text{II.21})$$

Условие (II.20) заведомо справедливо для спектральных характеристик дробно-рационального типа, так как в этом случае $\ln L(\omega) \sim \frac{m}{n} \ln \omega$ ($\omega \rightarrow \infty$).

Соотношение (II.21) выводится из интеграла

$$2\omega_1 \int_C \frac{\ln L(\omega) - \ln A(\omega_1)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega \quad (\text{II.22})$$

по контуру C , показанному на рис. 7. Поскольку подынтегральная функция внутри контура C является аналитической, то по теореме Коши интеграл равен нулю. Для доказательства нужно устремить $R \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$ и рассмотреть пределы для составляющих интеграла.

Составляющая по полуокружности радиуса R стремится к нулю в соответствии с условием (II.20). Рассмотрим составляющую по полуокружности радиуса r в окрестности точки ω_1 :

$$2\omega_1 \int_{C_r} \frac{\ln L(\omega) - \ln A(\omega_1)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega = \int_{C_r} \frac{\ln L(\omega) - \ln A(\omega_1)}{\omega - \omega_1} d\omega - \int_{C_r} \frac{\ln L(\omega) - \ln A(\omega_1)}{\omega + \omega_1} d\omega.$$

Так как подынтегральная функция во втором интеграле в правой части является аналитической в точке ω_1 (и, следовательно, ограничена), то при $r \rightarrow 0$ этот интеграл стремится к нулю. Чтобы найти величину первого интеграла, разложим $\ln L(\omega) - \ln A(\omega_1)$ в ряд Тейлора в точке ω_1

$$\ln L(\omega) - \ln A(\omega_1) = i\theta(\omega_1) + \frac{d \ln L(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_1} (\omega - \omega_1) + \dots,$$

откуда

$$\int_{C_r} \frac{\ln L(\omega) - \ln A(\omega_1)}{\omega - \omega_1} d\omega = i\theta(\omega_1) \int_{C_r} \frac{d\omega}{\omega - \omega_1} + \frac{d \ln L}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_1} \int_{C_r} d\omega + \dots$$

Ясно, что при $r \rightarrow 0$ будет отличен от нуля только первый интеграл в правой части.

Поскольку на контуре C_r $\omega - \omega_1 = r \exp(i\varphi)$, то

$$d\omega = ir \exp(i\varphi) d\varphi \text{ и } \int_{C_r} \frac{d\omega}{\omega - \omega_1} = i \int_{-\pi}^0 d\varphi = \pi i.$$

Итак, интеграл по контуру C_r равен $-\pi\theta(\omega_1)$. Такое же значение имеет интеграл по контуру C_r в окрестности $-\omega_1$. Интеграл по промежуткам $(-R, -\omega_1 - r)$, $(-\omega_1 + r, \omega_1 - r)$, $(\omega_1 + r, R)$ стремится к интегралу по всей вещественной оси, поэтому равенство нулю интеграла (II.22) дает при $R \rightarrow \infty$ и $r \rightarrow 0$:

$$2\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln L(\omega) - \ln A(\omega_1)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega - 2\pi\theta(\omega_1) = 0.$$

Отсюда

$$\theta(\omega_1) = \frac{\omega_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln A(\omega) - \ln A(\omega_1)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega + \frac{i\omega_1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\omega) d\omega}{\omega^2 - \omega_1^2}.$$

Последний интеграл равен нулю, так как $\theta(\omega)$ — функция нечетная. Учитывая четность $A(\omega)$, получим доказываемую формулу (II.21). Значение полученного преобразования состоит в том, что оно позволяет просто определять хотя бы одну из физически осуществимых линейных систем, отвечающих заданной амплитудной характеристике.

Чтобы получить обратное соотношение, выражающее амплитудную характеристику минимально-фазовой системы через фазовую, дополнительно к условию (II.20) нужно потребовать, чтобы при $\omega \rightarrow \infty$ (равномерно в нижней полуплоскости)

$$\ln L(\omega) \rightarrow K_0 < \infty. \quad (\text{II.23})$$

Тогда, составив интеграл

$$2 \int_c \frac{\omega \ln L(\omega) - i\omega_1 \theta(\omega_1)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega,$$

который по теореме Коши равен нулю, получим на основе примерно тех же рассуждений следующее соотношение:

$$\ln A(\omega_1) = K_0 - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \theta(\omega) - \omega_1 \theta(\omega_1)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega. \quad (\text{II.24})$$

Надо только учесть, что интеграл по полуокружности радиуса R при $R \rightarrow \infty$ стремится не к нулю, а к $2\pi K_0$, что легко получить, построив разложение $\ln L(\omega) = K_0 + K_1/\omega + \dots$ в окрестности бесконечно удаленной точки.

Понятие минимально-фазовости применимо и к сигналам. Так, полуфинитный сигнал называют минимально-фазовым, если его спектр $S(\omega)$, будучи продолженным на комплексную плоскость, не имеет нулей при $\text{Im} \leq 0$. Грубо можно считать, что энергия минимально-фазовых сигналов сосредоточена ближе к их началу по сравнению с другими сигналами, имеющими тот же амплитудный спектр.

Примером минимально-фазового сигнала является затухающая синусоида

$$x(t) = \begin{cases} a \exp(-\alpha t) \sin \omega_1 t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

спектр которой

$$S_x(\omega) = \frac{a\omega_1}{(\alpha + i\omega)^2 + \omega_1^2}, \quad (\text{II.26})$$

Этот спектр нигде в нуль не обращается.

Ясно, что при прохождении минимально-фазового сигнала через минимально-фазовую систему на выходе получим также минимально-фазовый сигнал, что следует непосредственно из формулы (I.28). Так как

спектры полуфинитных сигналов и спектральные характеристики физически осуществимых систем в нижней полуплоскости комплексного переменного ω полюсов не имеют, то из минимальной фазовости выходного сигнала следует минимальная фазовость и входного сигнала, и линейной системы.

§ 7. Дисперсионные соотношения в линейно-неупругих средах

Пусть в однородной идеально упругой среде в направлении x распространяется плоская монохроматическая волна

$$\exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{v_p} \right) \right] \vec{i}.$$

Если воздействие измеряется в точке M_0 с абсциссой $x=0$, то спектральная характеристика среды в точке M с абсциссой x равна $\exp \left(-i\omega \frac{x}{v_p} \right)$, откуда $A(\omega) \equiv 1$. Таким образом, однородная упругая среда имеет одинаковый коэффициент усиления на всех частотах в интервале $(0, \infty)$. Этот вывод справедлив и для сферических волн: $A(\omega) = r_0/r$.

Отмеченный факт является следствием сильной идеализации механизма распространения колебаний. В реальных средах часть упругой энергии переходит в тепловую — происходит диссипация энергии. Модель среды, в которой учитывается явление диссипации, не идеально упругая. Но если эта модель подчиняется принципу суперпозиции (что естественно допустить, по крайней мере, при малых деформациях), то она по-прежнему является линейной стационарной системой. Модели такого типа называются линейно-неупругими средами. Здесь для изучения линейно-неупругих сред применяются методы анализа физически осуществимых систем.

Общий вид амплитудной характеристики линейно-неупругой среды может быть получен из чисто формальных соображений. Пусть $A(\omega, x)$ — амплитуда монохроматической волны в точке с абсциссой x . Независимо от механизма поглощения можно считать, что относительное уменьшение амплитуды на малом отрезке dx пропорционально длине этого отрезка:

$$dA(\omega, x)/A(\omega, x) = -\alpha(\omega) dx,$$

где коэффициент пропорциональности $\alpha(\omega)$, называемый коэффициентом поглощения, не зависит от x вследствие однородности среды. Отсюда, учитывая граничное условие

$$A(\omega, 0) = 1,$$

получим

$$A(\omega, x) = \exp [-\alpha(\omega)x].$$

В общем случае надо предположить, что не только амплитудная, но и фазовая характеристика, которая в идеально упругой среде равна $-\omega x/v_p$, имеет более сложную зависимость от частоты. Это равносильно утверждению, что скорость распространения монохроматической волны

зависит от частоты, т. е. имеет место дисперсия скоростей. В дальнейшем мы убедимся в том, что это действительно так.

Таким образом, спектральная характеристика линейно-неупругой среды для плоских волн имеет следующую структуру:

$$L(\omega) = \exp[-\alpha(\omega)x] \exp\left[-\frac{i\omega x}{v_p(\omega)}\right] = \exp[ik(\omega)x],$$

где $k(\omega)$ — комплексное волновое число:

$$k(\omega) = -\omega/v_p(\omega) + i\alpha(\omega).$$

Если в точке M_0 волна имеет спектр $S(\omega)$, то в точке M форма волны определится согласно (I.27)

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp[i(\omega t + k(\omega)x)] d\omega. \quad (\text{II.27})$$

Эту формулу можно переписать так:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp[-\alpha(\omega)x] \exp\{it[\omega - v_g n(\omega)]\} d\omega,$$

где $v_g = x/t$ выражает скорость распространения импульса в целом, а $n(\omega) = \omega/v_p(\omega)$.

Если t велико, то в соответствии с методом стационарной фазы (см. библиографический комментарий) основной вклад в интеграл вносится составляющими при ω , близких к стационарной точке ω_0 , в которой $d[\omega - v_g n(\omega)]/d\omega = 0$, откуда $v_g = 1/n'(\omega_0)$.

Представляя в окрестности ω_0 подынтегральную функцию в виде

$$S(\omega_0) \exp[-\alpha(\omega_0)x] \exp\{it[\omega_0 - v_g n(\omega_0)]\} \exp\left[-\frac{ix}{2} n''(\omega_0)(\omega - \omega_0)^2\right]$$

и используя формулу Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(\pm iu^2) du = \sqrt{\pm i\pi}, \quad (\text{II.28})$$

получим

$$f(t, x) = \frac{S(\omega_0) \exp[-\alpha(\omega_0)x]}{\sqrt{2\pi i x n''(\omega_0)}} \exp\left[i\omega_0\left(t - \frac{x}{v_p(\omega_0)}\right)\right]. \quad (\text{II.29})$$

Таким образом, в окрестности изохроны $x = tv_g$ волна имеет вид синусоидального колебания частоты ω_0 , распространяющегося со скоростью $v_p(\omega_0)$. Выражение (II.29) описывает перемещение отдельной фазы квазисинусоидального волнового пакета, поэтому скорость $v_p(\omega_0)$ называют фазовой, а скорость v_g — групповой.

Учитывая условие стационарной точки ω_0 , найдем связь между v_g и $v_P(\omega_0)$:

$$v_g = \frac{v_P(\omega_0)}{1 - \frac{\omega_0}{v_P(\omega_0)} \frac{dv_P(\omega_0)}{d\omega}} \cong v_P(\omega_0) + \omega_0 \frac{dv_P(\omega_0)}{d\omega}.$$

Если $v_P(\omega)$ растет с увеличением ω , то $v_g > v_P(\omega_0)$ и, следовательно, отдельные фазы как бы отстают от всего волнового пакета, затухая по закону

$$\exp[-\alpha(\omega_0)x]/\sqrt{x}.$$

Общей чертой всех неупругих сред является зависимость напряженного состояния от самого процесса изменения деформации во времени. В теории упругого последействия, дающей наиболее общую модель линейно-неупругой среды, предполагается, что напряжение связано не только с деформацией в этот же момент времени t , но и с деформациями при $t - \tau$ ($\tau > 0$), причем все эти связи строятся по типу упругой среды.

Закон Гука, выражаемый формулами (I.6), заменяется следующими соотношениями:

$$\sigma_x = \lambda' \operatorname{div} \vec{u} - \int_0^\infty \lambda''(\tau) \operatorname{div} \vec{u}(t - \tau) d\tau + 2\mu' \frac{\partial u_x}{\partial x} - 2 \int_0^\infty \mu''(\tau) \frac{\partial u_x(t - \tau)}{\partial x} d\tau \quad (\text{II.30})$$

(аналогично $\sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$).

Среда с последействием задается константами λ', μ', ρ и двумя функциями «наследственности» $\lambda''(\tau)$ и $\mu''(\tau)$, характеризующими то влияние, которое оказывают на напряжение деформации, имевшие место в момент $t - \tau$. По физическому смыслу $\lambda''(\tau)$ и $\mu''(\tau)$ — монотонно убывающие функции.

Законам, связывающим деформации и напряжения в средах с упругим последействием, можно придать вид закона Гука, если толковать параметры λ и μ в формуле (I.6) не как постоянные коэффициенты, а как линейные операторы (при бесскобочной записи линейных преобразований). Действительно, если формально принять

$$\lambda = \lambda' - \int_0^\infty \lambda''(\tau) [\cdot (t - \tau)] d\tau \quad (\text{II.31})$$

и

$$\mu = \mu' - \int_0^\infty \mu''(\tau) [\cdot (t - \tau)] d\tau \quad (\text{II.32})$$

(где вместо точки надо поставить символ функции, на которую действует оператор), то формула (II.30) примет вид

$$\sigma_x = \lambda \operatorname{div} \vec{u} + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (\text{II.33})$$

точно такой же, как и в законе Гука (I.6). Оператор λ имеет импульсную характеристику [учитывая (I.29¹)]

$$\lambda(t) = \lambda' \delta(t) - \lambda''(t),$$

где

$$\lambda''(t) \equiv 0 \text{ при } t < 0, \quad (\text{II.34})$$

и спектральную характеристику

$$\lambda(\omega) = \lambda' - \lambda''(\omega), \quad (\text{II.35})$$

где $\lambda''(\omega)$ — спектр функции $\lambda''(t)$.

Оператор μ имеет спектральную характеристику

$$\mu(\omega) = \mu' - \mu''(\omega). \quad (\text{II.36})$$

Примеры. Приняв $\lambda'' \equiv 0$ и $\mu'' \equiv 0$, получим закон Гука в обычной форме. Таким образом, идеально упругую среду можно рассматривать как частный случай сред с упругим последствием.

При $\lambda''(\omega) = i\omega\lambda''$ и $\mu''(\omega) = i\omega\mu''$ получим модель вязкоупругой среды, в которой диссипация энергии объясняется вязким сплелением частиц среды, вызывающим дополнительные напряжения, пропорциональные скорости деформации.

Так как $i\omega$ — спектральная характеристика оператора дифференцирования, то в этом случае

$$\lambda = \lambda' - \lambda''(d/dt) \text{ и } \mu = \mu' - \mu''(d/dt). \quad (\text{II.37})$$

В релаксационной модели используются функции «наследственности»

$$\lambda''(\tau) = (\lambda'/T) \exp(-\tau/T), \quad \tau \geq 0$$

и

$$\mu''(\tau) = (\mu'/T) \exp(-\tau/T), \quad \tau \geq 0.$$

Релаксационная модель характеризуется четырьмя параметрами — λ' , μ' , ρ и T . Последний параметр называется временем релаксации. Операторы λ и μ имеют следующие спектральные характеристики:

$$\lambda(\omega) = \lambda' - \lambda'/T \int_0^{\infty} \exp(-\tau/T) \exp(-i\omega\tau) d\tau = i\omega T \lambda' / (1 + i\omega T) \quad (\text{II.38})$$

и

$$\mu(\omega) = i\omega T \mu' / (1 + i\omega T). \quad (\text{II.39})$$

Записав связь между деформациями и напряжениями в виде операторного закона Гука, уравнение динамики для однородных линейно-неупругих сред можно получить в точно такой же форме (I.7), что и для идеально упругой среды, но теперь λ и μ представляют собой линейные операторы типа (II.31) и (II.32) соответственно. Поскольку операторы λ и μ действуют только по переменной t , то полученное уравнение, как и в случае идеальной упругости, «расщепляется» на два независимых уравнения — (I.9) и (I.10), описывающих распространение продольных и поперечных волн.

Нетрудно показать, что плоская волна

$$\varphi(t, x) = \exp\{i\omega[t - c(\omega)x]\} \quad (\text{II.40})$$

при

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)}}, \quad \operatorname{Re} c(\omega) > 0 \quad (\text{II.41})$$

удовлетворяет первому из этих уравнений. Поскольку для рассматриваемых сред выполнен принцип суперпозиции, то решением является также любой интеграл вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp\{i\omega[t - c(\omega)x]\} d\omega. \quad (\text{II.42})$$

Сравнивая этот интеграл с выражением (II.27) видим, что множитель $\exp\{-ic(\omega)x\}$ играет роль спектральной характеристики линейно-неупругой среды для плоских волн при этом $k(\omega) = -\omega c(\omega)$. Отсюда

$$\alpha(\omega) = -\omega \operatorname{Im} c(\omega) \quad (\text{II.43})$$

и

$$\frac{1}{v_p(\omega)} = \operatorname{Re} c(\omega). \quad (\text{II.44})$$

Итак, линейно-неупругие модели характеризуются в общем случае и поглощением и дисперсией скоростей.

Для вязкоупругих сред

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{\rho}{a + i\omega b}},$$

где $a = \lambda' + 2\mu'$, $b = \lambda'' + 2\mu''$.

После длительных преобразований можно получить, что на низких частотах $\omega \ll a/b$:

$$\alpha(\omega) = \frac{b\omega^2}{2av_0}, \quad v_p(\omega) = v_0,$$

где $v_0 = \sqrt{a/\rho} = \sqrt{(\lambda' + 2\mu')/\rho}$.

На высоких частотах $\omega \gg a/b$:

$$\alpha \sim 1/v_0 \sqrt{\omega a/2b}, \quad v_p \sim v_0 \sqrt{\omega b/2a}.$$

Подставляя в формулу (II.41) выражения (II.38) и (II.39) для спектров $\lambda(\omega)$ и $\mu(\omega)$ в релаксационной модели, получим

$$c(\omega) = \sqrt{\frac{\rho(1+i\omega T)}{(\lambda' + 2\mu')i\omega T}}.$$

В этой модели на низких частотах $\omega \ll 1/T$:

$$\alpha(\omega) \sim \frac{1}{v_0} \sqrt{\omega T/2}, \quad v_p(\omega) \sim v_0 \sqrt{\omega T/2}$$

и на высоких частотах $\omega \gg 1/T$:

$$\alpha(\omega) \sim 1/2v_0 T, \quad v_p(\omega) \sim v_0.$$

Перейдем к рассмотрению основной задачи: выводу соотношений, связывающих поглощение и дисперсию скоростей в линейно-неупругих средах.

Обозначим $\varepsilon(\omega) = \lambda(\omega) + 2\mu(\omega)$ и выведем ряд свойств функции $\varepsilon(\omega)$, которую можно определить как

$$\varepsilon(\omega) = a + \tilde{b}(\omega) = a - \int_0^{\infty} b(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \quad (\text{II.45})$$

где $a = \lambda' + 2\mu'$, $b(\tau) = \lambda''(\tau) + 2\mu''(\tau)$.

1. Если $\omega \rightarrow \infty$ по любому закону, оставаясь в нижней полуплоскости комплексной переменной ω , то $\varepsilon(\omega) \rightarrow a$.

Действительно, пусть $\omega' = \text{Re } \omega$ и $-\beta = \text{Im } \omega < 0$. Тогда

$$\tilde{b}(\omega) = \int_0^{\infty} b(\tau) \exp(-\beta\tau) \exp(-i\omega'\tau) d\tau, \quad \beta > 0.$$

При $\omega' \rightarrow \infty$ $\tilde{b}(\omega) \rightarrow 0$ поскольку $\tilde{b}(\omega)$ является спектром полуфinitной функции $b(\tau) \exp(-\beta\tau)$ с экспоненциальным убыванием при $\tau \rightarrow \infty$. Если $\beta \rightarrow \infty$, то $\tilde{b}(\omega) \rightarrow 0$ из-за наличия экспоненциально убывающего множителя под знаком интеграла.

2. Функция $\varepsilon(\omega)$ является аналитической в нижней полуплоскости. Это свойство вытекает из условия (II.34) и аналогичного условия для $\mu''(\tau)$, означающим, что $b(\tau)$ удовлетворяет принципу причинности.

3. Пусть ω вещественно. Тогда $\text{Im } \varepsilon(\omega)$ при $\omega < 0$ принимает значения одного знака, а при $\omega > 0$ — другого знака.

При распространении монохроматической волны ее амплитуда может только уменьшаться, поэтому на любой частоте

$$\alpha(\omega) \geq 0, \quad -\infty \leq \omega \leq \infty.$$

Тогда согласно равенству (II.44) знак $\text{Im } c(\omega)$ является обратным знаком ω :

$$\text{sign Im } c(\omega) = -\text{sign } \omega. \quad (\text{II.46})$$

В свою очередь знак $\text{Im } c(\omega)$ совпадает со знаком $\text{Im } \sqrt{g(\omega)}$, где $g(\omega) = 1/\varepsilon(\omega)$. Из условия $\text{Re } c(\omega) > 0$, означающего, что волна распространяется в положительном направлении оси x , следует, что

$$\sqrt{g(\omega)} = \begin{cases} \sqrt{|g(\omega)|} \cdot \exp[(i/2) \arg g(\omega)], & 0 \leq \arg g(\omega) \leq \pi \\ \sqrt{|g(\omega)|} \cdot \exp[(i/2) \arg g(\omega) + i\pi], & \pi \leq \arg g(\omega) \leq 2\pi. \end{cases}$$

Но при указанном определении корня знаки $\text{Im } g(\omega)$ и $\text{Im } \sqrt{g(\omega)}$ всегда совпадают, вследствие чего из равенства (II.46) заключаем, что $\text{sign Im } g(\omega) = -\text{sign } \omega$. Свойство 3 доказано, так как $\arg \varepsilon(\omega) = -\arg g(\omega)$, в результате чего $\text{Im } \varepsilon(\omega)$ и $\text{Im } g(\omega)$ всегда имеют обратные знаки.

4. $\varepsilon(\omega) \rightarrow \varepsilon(0) \geq 0$ при $\omega \rightarrow 0$.

Докажем это свойство. Из аналитичности $\varepsilon(\omega)$ при $\text{Im } \omega \leq 0$ следует ее непрерывность в точке $\omega = 0$, откуда, учитывая (II.45), получим

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon(\omega) = \varepsilon(\bullet) = a - \int_0^{\infty} b(\tau) d\tau.$$

Видно, что $\varepsilon(0)$ — вещественная величина. Нужно доказать, что она положительна.

Предположим, что $\varepsilon(0) < 0$, тогда

$$c(\bullet) = -i \sqrt{\frac{\rho}{|\varepsilon(0)|}}.$$

Так как $\text{Re } c(0) = 0$, то по формуле (II.44) получим $v_p(0) = \infty$. Функция $\text{Re } c(\omega)$ вместе с $\varepsilon(\omega)$ непрерывна в точке $\omega = 0$, поэтому найдутся такие достаточно малые значения $\omega > 0$, для которых скорость распространения соответствующих монохроматических колебаний будет сколь угодно большой. Но это противоречит принципу относительности, согласно которому не может быть достигнута скорость, превышающая скорость света. Поэтому $\varepsilon(0) > 0$.

Отметим, что свойства 3 и 4 сильно ограничивают класс функций «наследственности», которые можно привлечь для описания линейно-неупругих моделей во всем диапазоне частот.

5. Функция $\varepsilon(\omega)$ не имеет нулей в нижней полуплоскости $\text{Im } \omega \leq 0$, за исключением, может быть, точки $\omega = 0$.

Это свойство основывается на следующей известной формуле теории аналитических функций:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P, \quad (\text{II.47})$$

где N — полное число нулей; P — полное число полюсов в области, ограниченной контуром C .

Если $f(z)$ аналитична во всех точках этой области, то $P = 0$ и формула (II.47) дает полное число нулей.

Перейдем к комплексной переменной ω , а в качестве функции f возьмем функцию $\varepsilon(\omega) - r$, где r — произвольное вещественное число. Так как в нижней полуплоскости функция $\varepsilon(\omega) - r$ по свойству 2 аналитична, то число нулей этой функции в пределах контура C , состоящего из действительной оси и бесконечной полуокружности в нижней полуплоскости (рис. 8, а),

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varepsilon'(\omega)}{\varepsilon(\omega) - r} d\omega. \quad (\text{II.48})$$

Отобразим плоскость ω на плоскость $\varepsilon(\omega)$, тогда формулу (II.48) можно переписать следующим образом:

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon - r} d\varepsilon, \quad (\text{II.49})$$

где C' — образ контура C при отображении $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$. Из свойства 1 следует, что при $\text{Im } \omega < 0$, $\varepsilon(\infty) = a > 0$ поэтому бесконечная полуокружность отображается в точку a на положительной полуоси $\text{Re } \varepsilon$. Точке $\omega = 0$ по свойству 4 соответствует точке $\varepsilon(0) = b > 0$. Из свойства 3 вытекает, что положительная часть вещественной оси $\text{Re } \omega$ перейдет в кривую, полностью расположенную в верхней полуплоскости $\text{Im } \varepsilon > 0$, а отрицательная ее часть отобразится на кривую, полностью расположенную в нижней полуплоскости $\text{Im } \varepsilon < 0$ (рис. 8, б).

Согласно теореме Коши интеграл (II.49) равен единице, если изображение числа r находится внутри контура C' . В противном случае интеграл равен нулю. Но поскольку r — вещественное число, то оно расположено

внутри контура C' , тогда и только тогда, когда

$$\min(a', a) < r < \max(a', a), \quad (\text{II.50})$$

где $a' = \varepsilon(0)$, $a = \varepsilon(\infty)$.

Итак, функция $\varepsilon(\omega)$ — r имеет нуль только в том случае, если r удовлетворяет неравенству (II.50). Иными словами, функция $\varepsilon(\omega)$ принимает

в нижней полуплоскости только один раз каждое значение в интервале (a', a) и никаких других вещественных значений не принимает. Поскольку и $\varepsilon(0) \geq 0$, и $\varepsilon(\infty) > 0$, то $\varepsilon(\omega) \neq 0$ ни при каком ω в нижней полуплоскости $\text{Im } \omega < 0$. На вещественной оси $\varepsilon(\omega)$ принимает вещественные значения только при $\omega = 0$, и только в этой точке возможен нуль функции $\varepsilon(\omega)$. Этим и завершается доказательство свойства 5.

Следующее свойство предвставляет некоторое усиление свойства 4. 6. Если ни при каком ω ($-\infty \leq \omega \leq \infty$), $v_p(\omega) \neq 0$, то $\varepsilon(0) > 0$. Действительно, по свойству 4 $\varepsilon(0) \geq 0$, поэтому

$$\text{Re } c(0) = \sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon(0)}},$$

следовательно, по формуле (II.44) $v_p(0) = \sqrt{\frac{\varepsilon(0)}{\rho}}$.

Так как $v_p(\omega)$ вместе с $\varepsilon(\omega)$ непрерывна в точке $\omega = 0$, то по условию найдется такое $\delta > 0$, когда $v_p(0) > \delta$, откуда $\varepsilon(0) > \rho\delta^2 > 0$.

Суммируя свойства 1, 5 и 6 делаем заключение, что, если линейно-неупругая модель удовлетворяет условию

$$0 < \delta \leq v_p(\omega) \leq A < \infty \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq \infty, \quad (\text{II.51})$$

то функция $c(\omega) = \sqrt{\rho/\varepsilon(\omega)}$ является аналитической в нижней полуплоскости комплексного переменного ω , включая вещественную ось. Это означает, что среда, удовлетворяющая условию (II.51), является минимально-фазовой, так как $\ln L(\omega) = \omega c(\omega) x$.

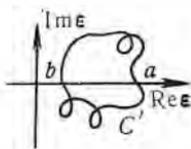
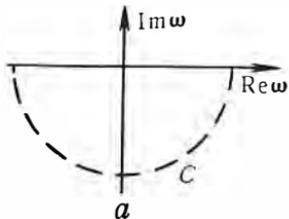


Рис. 8

Из свойства 2 следует, что при $\omega \rightarrow \infty$ по любому закону в нижней полуплоскости

$$c(\omega) \rightarrow \sqrt{\frac{\rho}{a}} < \infty.$$

Следовательно, можно рассматривать $c(\omega)$ как логарифм некоторой минимально-фазовой спектральной характеристики, удовлетворяющей условию (II.23), и применить к $\text{Im } c(\omega)$ и $\text{Re } c(\omega)$ соотношение (II.24).

Учитывая сразу формулы (II.43) и (II.44), получим

$$\frac{1}{v_p(\omega)_1} = \frac{1}{v_p(\infty)} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha(\omega) - \alpha(\omega_1)}{\omega^2 - \omega_1^2} d\omega. \quad (\text{II.52})$$

Условие (II.20) тем более выполнено, поэтому можно применить и обратное соотношение (II.21). Это дает

$$\alpha(\omega_1) = - \frac{2\omega_1}{\pi v_p(\omega_1)} \int_0^{\infty} \frac{v_p(\omega_1) - v_p(\omega)}{v_p(\omega) (\omega^2 - \omega_1^2)} d\omega. \quad (\text{II.53})$$

Формулы (II.52) и (II.53) носят название дисперсионных соотношений. Согласно этим формулам дисперсия скоростей и поглощение, наблюдающиеся в линейно-неупругих средах с довольно естественными ограничениями (II.51), не являются независимыми явлениями. Всякой допустимой в этих средах зависимости коэффициента поглощения от частоты отвечает вполне определенный закон изменения фазовой скорости от ω и обратно.

Условие $v_p(\omega) > \delta > 0$ является достаточным, но не необходимым. Можно показать, что если $\varepsilon(0) = 0$, но при $\omega \rightarrow 0$ отношение $\varepsilon(\omega)/\omega^2$ стремится к пределу больше нуля, то дисперсионные соотношения по-прежнему имеют место. В этом случае $c(\omega)$ имеет полюс в точке $\omega = 0$ меньше единицы.

Допустимые законы поглощения можно охарактеризовать при помощи критерия Пэйли — Винера. Действительно, линейно-неупругая среда является физически осуществимой системой, поэтому, подставив в формулу (II.14) $\ln A(\omega) = \alpha(\omega)x$, получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha(\omega)}{1 + \omega^2} d\omega < \infty. \quad (\text{II.54})$$

Строго говоря, этот критерий верен, если выполнено условие (II.9), которое в данном случае запишется так:

$$\int_0^{\infty} \exp[-2\alpha(\omega)] d\omega < \infty. \quad (\text{II.55})$$

Из критерия (II.54) следует, что зависимость поглощения от частоты вида

$$\alpha(\omega) = \beta\omega^m$$

может быть справедлива при $m \geq 1$ только в конечном диапазоне часто (для $m < 1$ таких ограничений нет).

Свойство минимальной фазовости выполняется не для всех сред с упругим последствием. Проверим выполнение условий (II.51) для модели вязкого трения и релаксационной модели. Первая модель не удовлетворяет принципу относительности, так как при $\omega \rightarrow \infty$ согласно выведенных ранее соотношений $v_p(\omega) \sim v_1 \sqrt{\frac{\omega b}{2a}}$. Следовательно, эта модель не может быть привлечена для описания механизма диссипации энергии на очень высоких частотах. Релаксационная модель принципу относительности не противоречит. Но при $\omega = 0$ имеем $v_p(\omega) = 0$. Однако эта особенность функции $c(\omega)$ устранима.

Из определения функции $\varepsilon(\omega)$ и формул (II.38) и (II.39)

$$\varepsilon(\omega) = [(\lambda^* + 2\mu') i\omega\tau] / (1 + i\omega\tau),$$

откуда следует, что $\varepsilon(\omega)/\omega^2 \rightarrow +\infty$, $\omega \rightarrow 0$.

Согласно сделанному выше примечанию дисперсионные соотношения для релаксационной модели выполнены.

§ 8. О реализации линейных преобразований в классе электрических цепей

Задача синтеза электрической цепи с заданной спектральной характеристикой разбивается на две. Сначала выясняется, существует ли точная реализация $L(\omega)$ в этом классе линейных систем. После этого отыскивается цепь, точно или приближенно аппроксимирующая заданную спектральную характеристику.

Легко получить следующие необходимые условия осуществимости в классе электрических цепей с сосредоточенными параметрами (по существу, они были получены в § 3).

1) спектральная характеристика является дробно-рациональной функцией $i\omega$, или (что то же самое) имеет конечное число нулей и полюсов, симметрично располагающихся относительно мнимой оси;

2) спектральная характеристика не имеет полюсов в нижней полуплоскости $\text{Im } \omega < 0$ (принцип причинности);

3) число полюсов больше числа нулей (устойчивость).

Достаточные условия, определяющие возможность точной реализации спектральной характеристики в том или ином подклассе электрических цепей, рассматриваются в специальной литературе, куда мы и отсылаем читателя.

Аппроксимация линейных преобразований электрическими цепями существенно упрощается, если в качестве отдельных элементов рассматривать не R , L и C , а более крупные блоки со стандартными частотными характеристиками. Рассмотрим две управляемые конструкции, которые называются универсальными фильтрами, позволяющие приближенно реализовывать достаточно широкий класс линейных преобразований и получившие применение при сейсмических работах.

Предположим, что имеется набор резонансных фильтров $L_k(\omega)$, каждый из которых имеет очень узкую полосу пропускания (такие фильтры могут быть получены на основе высокодобротных колебательных контуров). Пусть этот набор таков, что полосы различных фильтров перекрываются незначительно, но заполняют всю нужную полосу частот; при этом $\max |L_k(\omega)| = 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

В идеале желательно было бы иметь такие фильтры, полосы которых не перекрываются, но в совокупности покрывают всю полосу частот (такие фильтры образуют полную ортогональную систему функций). Для этого частотная характеристика каждого фильтра должна быть прямоугольной, а из критерия Пэйли — Винера следует, что такие фильтры физически неосуществимы, поскольку не существует удовлетворяющей принципу причинности линейной системы, спектральная характеристика которой в некотором интервале частот тождественно равна нулю. Поэтому указанное условие можно реализовать только приближенно.

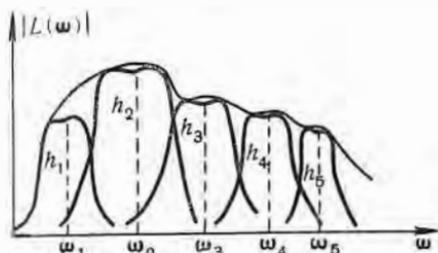


Рис. 9

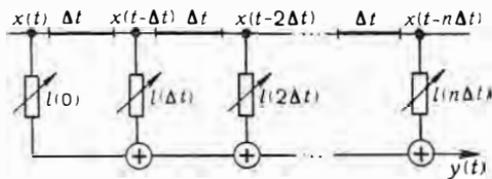


Рис. 10

Соединим фильтры L_k данного набора так, чтобы сигналы на выходе всех фильтров, имеющих один и тот же входной сигнал $x(t)$, суммировались; при этом чувствительность каждого фильтра пропорциональна переменной (и управляемой экспериментатором) величине h_k .

На выходе всей системы получим сигнал, спектр которого

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) \sum_{k=1}^n h_k L_k(\omega).$$

Таким образом, комплексная спектральная характеристика системы

$$L(\omega) = \sum_{k=1}^n h_k L_k(\omega).$$

Найдем амплитудную характеристику $A(\omega) = |L(\omega)|^2$.

Имеем

$$A^2(\omega) = L(\omega) L^*(\omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k L_j(\omega) L_k^*(\omega);$$

так как полосы фильтров практически не перекрываются, то при $j \neq k$ величина $L_j(\omega) L_k^*(\omega)$ является малой по сравнению с единицей.

Следовательно (учитывая, что при каждом ω в сумме отлично от нуля только одно слагаемое)

$$A(\omega) \cong \sum_{k=1}^n h_k |L_k(\omega)|.$$

Таким образом, амплитудная частотная характеристика полученной линейной системы практически совпадает с огибающей совокупности частотных характеристик всех фильтров L_k с учетом множителей h_k (рис. 9). Это дает простой способ реализации частотных характеристик сложной формы.

Вторая конструкция основана на описании работы линейной системы в виде интеграла свертки:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) l(t - \tau) d\tau.$$

Приближенно этот интеграл можно представить в виде следующей суммы:

$$y(t) \cong \Delta t \sum_{m=0}^{[t/\Delta t]} x(t - m\Delta t) l(m\Delta t),$$

где $[t/\Delta t]$ — целая часть от $t/\Delta t$.

Отсюда следует, что если взять сигналы

$$x(t), x(t - \Delta t), x(t - 2\Delta t) \quad (\text{II.56})$$

и т. д. и усилить первый в $l(0) = h_0$ раз, второй в $l(\Delta t) = h_1$ раз и т. д., то сумма полученных сигналов даст требуемый выходной сигнал. Последовательность сигналов (II.56) может быть получена при помощи набора постоянных задержек, а набор коэффициентов h_0, h_1, \dots — при помощи переменных сопротивлений. Соответствующая схема изображена на рис. 10.

Задержка Δt выбирается в соответствии с теоремой отсчетов В. А. Котельникова: $\Delta t = n/\omega_{\text{гп}}$, где $\omega_{\text{гп}}$ — максимальная из граничных частот сигнала и импульсной характеристики.

Глава III

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ И ВОПРОСЫ ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

§ 9. Спектральные характеристики дискретных линейных систем

Более или менее точная аппроксимация сложных спектральных характеристик при помощи электрических цепей связана с большими техническими трудностями. Поэтому широкое применение получают устройства дискретного типа (электронные вычислительные машины). Наличие памяти в таких устройствах позволяет отказаться от условия физической осуществимости (точнее говоря, оно заменяется более сла-

быми условиями), что значительно расширяет класс реализуемых спектральных характеристик.

Всякая дискретная линейная система стационарного типа (цифровой фильтр) описывается соотношением

$$y_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} l_{k-j} x_j, \quad -\infty \leq k \leq \infty. \quad (\text{III.1})$$

В этом соотношении, называемом по аналогии с (I.20) цифровой сверткой, x_k и y_k — суть отсчеты входной и выходной числовых последовательностей, l_k — отсчеты последовательности, представляющей отклик на единичный импульс $\delta = \{\delta_k\}$, где

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k=0 \\ 0 & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

Выведем соотношение (III.1). Любая числовая последовательность $x = \{x_k\}$ может быть записана в виде

$$x_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \delta_{k-j}, \quad -\infty \leq k \leq \infty. \quad (\text{III.2})$$

Каждую последовательность $\{\delta_{k-j}\} = \{\dots, 0, \dots, 0, 1, \dots, 0, \dots, \dots\}$ можно трактовать, как орт в евклидовом векторном пространстве со счетным числом измерений, поэтому формула (III.2) представляет собой разложение вектора x по координатным векторам $\{\delta_{k-j}\}$ и может быть переписана:

$$x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \{\delta_{k-j}\}.$$

Используя линейность и стационарность, получим

$$L x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j L \{\delta_{k-j}\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \{l_{k-j}\} = \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j l_{k-j} \right\},$$

где

$$\{l_k\} = L \{\delta_k\}.$$

Как в непрерывном случае, при изучении цифровых фильтров удобно перейти к спектральной форме на основе дискретного преобразования Фурье. Прежде чем записать его, заметим, что линейные дискретные преобразования могут изучаться с двух точек зрения. Более общая и вместе с тем более формальная точка зрения состоит в том, что числовые последовательности $\{x_k\}$ рассматриваются вне всякой связи с непрерывными функциями времени.

Мы будем придерживаться более узкого взгляда, считая, что x_k всегда являются отсчетами некоторой непрерывной функции $x(t)$ [$x_k = x(k \Delta t)$] и что только последняя имеет реальный физический смысл. Указанным двум подходам отвечают два определения дискретного преобразования Фурье.

В первом случае оно определяется формулой

$$S'_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \exp(-ik\omega)$$

и является периодической функцией безразмерной частоты.

Во втором случае дискретное преобразование Фурье определяется как функция частоты, имеющей размерность рад/с:

$$S'_x(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \exp(-ik\omega \Delta t). \quad (\text{III.3})$$

Эта функция (если она существует) имеет период $2\pi/\Delta t$. Известно достаточное условие сходимости тригонометрического ряда в правой части — абсолютная суммируемость ряда $\sum x_k$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_k| < \infty. \quad (\text{III.4})$$

Физически более правильно условие сходимости формулировать в терминах функции $x(t)$.

Поскольку $\Delta t \sum |x(k \Delta t)|$ является интегральной суммой для

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt,$$

то имеет место следующее условие.

1. Если функция $x(t)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$, то ряд (III.3) абсолютно сходится.

Пусть функция $S'_x(\omega)$ непрерывна на интервале $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$. Тогда ряд в правой части выражения (III.3) является ее рядом Фурье, а отсчеты x_k — коэффициентами этого ряда.

По определению коэффициентов ряда Фурье

$$x_k = x(k \Delta t) = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} S'_x(\omega) \exp(ik\omega \Delta t) d\omega. \quad (\text{III.5})$$

Однако, согласно обратному преобразованию Фурье (I.23)

$$x(k \Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \exp(ik\omega \Delta t) d\omega. \quad (\text{III.6})$$

Сопоставляя (III.5) и (III.6), получаем следующее утверждение:

2. Если

$$S_x(\omega) = 0 \text{ при } |\omega| \geq \pi/\Delta t, \quad (\text{III.7})$$

то на интервале $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$

$$\Delta t S'_x(\omega) \equiv S_x(\omega). \quad (\text{III.8})$$

Для доказательства подставим условие (III.7) в формулу (III.6):

$$x(k \Delta t) = \frac{1}{2\eta} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} S_x(\omega) \exp(ik\omega \Delta t) d\omega; \quad (\text{III.9})$$

теперь полученное равенство вычтем из (III.5). Результат означает равенство нулю всех коэффициентов ряда Фурье функции $\Delta t S'_x(\omega) - S_x(\omega)$, определенной на интервале $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$. Следовательно, эта функция тождественно равна нулю во всех точках непрерывности.

По существу, утверждение 2 эквивалентно известной теореме отсчетов В. А. Котельникова, поскольку спектр $S_x(\omega)$ а вместе с ним и вся функция $x(t)$ формулами (III.3) и (III.8) определяются через счетную последовательность отсчетов $x(k \Delta t)$.

Записав обратное преобразование Фурье при условии (III.7) для произвольного значения t

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} S_x(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

и подставив в него формулы (III.8) и (III.3), получим после простых преобразований известное разложение функции в ряд В. А. Котельникова:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t) \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta t} (t - k \Delta t)}{\frac{\pi}{\Delta t} (t - k \Delta t)}. \quad (\text{III.10})$$

Простая связь между $S_x(\omega)$ и $S'_x(\omega)$ существует и при более общих условиях.

Теорема. Если $S'_x(\omega)$ непрерывна, а $S_x(\omega)$ — абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$, то

$$\Delta t S'_x(\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} S_x\left(\omega + \frac{2p\pi}{\Delta t}\right). \quad (\text{III.11})$$

Прежде всего заметим, что ряд справа сходится и при том равномерно на интервале $-\pi/\Delta t \leq \omega \leq \pi/\Delta t$. Это вытекает из того, что он представляет собой интегральную сумму для не зависящего от ω интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega + u) du.$$

Далее, функция, выражаемая рядом $\sum_{(p)} S_x(\omega + 2p\pi/\Delta t)$, является периодической с периодом $2\pi/\Delta t$. Вычислим ее коэффициенты Фурье:

$$c_k = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \sum_{p=-\infty}^{\infty} S_x(\omega + 2p\pi/\Delta t) \exp(ik\omega \Delta t) d\omega.$$

Вследствие равномерной и абсолютной сходимости ряда его можно почленно интегрировать; отсюда

$$c_k = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} S_x(\omega + 2p\pi/\Delta t) \exp(ik\omega \Delta t) d\omega.$$

Делая подстановку $u = \omega + 2k\pi/\Delta t$ и учитывая, что $\exp(i2p\pi k) \equiv 1$ (при всех целых k и p), получим

$$c_k = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{2(p-1)\pi/\Delta t}^{2(p+1)\pi/\Delta t} S_x(u) \exp(iku \Delta t) du = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(u) \exp(iku \Delta t) du.$$

Сопоставляя полученное равенство с (III.6), имеем $c_k = \Delta t x(k \Delta t)$, а поскольку $x(k \Delta t)$ являются коэффициентами ряда Фурье функции $S_x(\omega)$, то равенство (III.11) должно иметь место во всех точках непрерывности обеих функций.

Отличие $\Delta t S'_x(\omega)$ от $S_x(\omega)$ на интервале $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$ можно трактовать как искажение, обусловленное дискретизацией анализируемой функции. Если Δt достаточно мало, так что при $\omega > \pi/\Delta t$ $S_x(\omega) \ll \ll \max S_x(\omega)$, то наибольшие искажения спектра имеют место в окрестности $\omega_{\text{гр}} = \pi/\Delta t$.

Определив аналогично (III.3) спектр выходной числовой последовательности

$$S'_y(\omega) = \sum_h y_k \exp(-ik\omega \Delta t)$$

и подставив сюда выражение y_k согласно формуле (III.4), получим после простых преобразований

$$S'_y(\omega) = L'(\omega) S'_x(\omega),$$

где $L'(\omega)$ — спектральная характеристика цифрового фильтра:

$$L'(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_k \exp(-ik\omega \Delta t). \quad (\text{III.12})$$

Таким образом, между спектрами входного и выходного сигнала выполняется то же соотношение, что и для непрерывных линейных систем.

§ 10. Реализация непрерывных линейных преобразований при помощи цифровых фильтров

Применение цифровых фильтров при обработке сейсмических сигналов, являющихся непрерывными функциями времени, требует предварительного преобразования сигналов из непрерывной формы в дискретную: $x(t) \rightarrow \{x_k\}$. Это преобразование (называемое часто квантованием, кодированием или дискретизацией) линейно, так как

$$x(t) + y(t) \rightarrow \{x_k + y_k\} = \{x_k\} + \{y_k\}$$

и

$$cx(t) \rightarrow \{cx_k\} = c \{x_k\}.$$

Если после цифровой фильтрации опять используется непрерывная форма сигналов, то дискретная последовательность $\{y_k\}$ должна быть

декодирована, т. е. переведена в непрерывную функцию. Декодирование обычно осуществляется при помощи интерполяционных многочленов.

Примером интерполяционного многочлена является ряд В. А. Котельникова (III.10), который определяет декодирующую формулу

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k \frac{\sin \frac{\pi}{\Delta t} (t - k \Delta t)}{\frac{\pi}{\Delta t} (t - k \Delta t)}, \quad (\text{III.13})$$

Функция

$$\sin \left(\frac{\pi}{\Delta t} t \right) \Big| \frac{\pi}{\Delta t} t \quad (\text{III.14})$$

имеет спектр, равный Δt при $|\omega| \leq \pi/\Delta t$ и равный нулю при $|\omega| > \pi/\Delta t$, поэтому ее можно рассматривать как импульсную характеристику идеального фильтра низкой частоты. Отсюда вытекает способ технической реализации формулы (III.1): последовательность коротких импульсов, амплитуда которых пропорциональна y_k , подается на вход низкочастотного фильтра с полосой пропускания $(0, \pi/\Delta t)$. На выходе будет получена функция $\simeq y(t)$.

Добиваясь совпадения функции $y(t)$ в точках $k \Delta t$ с отсчетами y_k , можно ухудшить приближение функции в промежуточных точках. Поэтому задачу интерполирования иногда заменяют задачей аппроксимации, решая которую ищут многочлен, наименее отклоняющийся от значений y_k в точках $k \Delta t$.

Наилучшие результаты получаются, когда аппроксимационные полиномы образуют ортонормированную систему функций на множестве точек $k \Delta t$.

При использовании как интерполяционных, так и аппроксимационных полиномов декодирование является линейным преобразованием числовых последовательностей в некоторое подмножество непрерывных функций.

Последовательность преобразований кодирование — цифровой фильтр — декодирование или сокращенно $KL'D$, используемое для аппроксимации непрерывного фильтра L , будем называть цифровой реализацией фильтра L и обозначать \tilde{L} . Преобразование \tilde{L} линейно, поскольку представляет собой последовательность линейных преобразований K , L' и D . Но оно в общем случае не стационарно вследствие нестационарности кодирования: соотношение $x(t - \tau) \rightarrow \{x_{k-j}\}$ имеет место только для сдвигов τ , кратных интервалу дискретизации Δt . Преобразования L' и D , очевидно, относятся к стационарному типу.

Из нестационарности K следует, что это преобразование неперестановочно с другими линейными системами и не имеет в обычном смысле спектральной характеристики. Если Δt уменьшить настолько, что изменением $x(t)$ в пределах интервала дискретизации можно пренебречь, то кодирование, а вместе с ним все преобразование \tilde{L} становится приближенно стационарным. Можно считать, что на низких частотах преобразование \tilde{L} стационарно (и имеет частотную характеристику), а на высоких — нестационарно. Оно может также оказаться стационарным для более

узкого класса входных сигналов. Ниже покажем, что таким классом являются функции с ограниченным спектром.

Для того чтобы лучше понять искажения, вносимые процедурами кодирования и декодирования, рассмотрим спектр сигнала на выходе системы KD (кодирование — декодирование):

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t) \left[\sin \frac{\pi}{\Delta t} (t - k \Delta t) \right] / \left[\frac{\pi}{\Delta t} (t - k \Delta t) \right].$$

Поскольку спектр функции

$$\sin \frac{\pi}{\Delta t} (t - k \Delta t) / \frac{\pi}{\Delta t} (t - k \Delta t)$$

равен $\Delta t \exp(-ik\omega \Delta t)$ при $|\omega| \leq \pi/\Delta t$ и равен нулю вне интервала $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$, то

$$S_y(\omega) = \begin{cases} \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \Delta t) \exp(-ik\omega \Delta t), & |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{\Delta t}. \end{cases}$$

Но ряд в правой части представляет собой разложение Фурье периодической функции $S'_x(\omega)$ (см. формулу (III.3), поэтому

$$S_y(\omega) = \begin{cases} \Delta t S'_x(\omega), & |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{\Delta t} \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

или по формуле (III.11)

$$S_y(\omega) = \begin{cases} \sum_{p=-\infty}^{\infty} S_x(\omega + 2p\pi/\Delta t), & |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta t} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{\Delta t}. \end{cases} \quad (\text{III.16})$$

Первый вывод, который следует из полученных формул, заключается в том, что сигнал $y(t)$ на выходе блока декодирования не содержит частот выше $\pi/\Delta t$. В этом смысле преобразование KD эквивалентно фильтру низких частот. Но из формулы (III.16) видно, что для произвольных сигналов спектр $S_y(\omega)$ нельзя представить в виде произведения спектра $S_x(\omega)$ на какую-либо спектральную характеристику.

Если выполнено условие (III.7), т. е. на вход подаются сигналы с ограниченным спектром, то в соответствии с (III.8) формула (III.15) дает

$$S_y(\omega) = S_x(\omega).$$

Таким образом, преобразование кодирование — декодирование не искажает функций с ограниченным спектром.

Важно иметь в виду, что отсутствие высоких частот на выходе системы KD обуславливается свойствами интерполяционных полиномов Котельникова. При использовании других интерполяционных или аппроксимационных полиномов, спектр которых содержит более высокие частоты, данный вывод оказывается неверным. Однако высокочастотные составляющие в таких спектрах не всегда имеют физический смысл. Например, если преобразование KD , которое основано на интерполяционных полиномах, содержащих сколь угодно высокие частоты, применяется к сигналу с ограниченным спектром, то спектр выходного сигнала содержит составляющие при $\omega > \pi/\Delta t$, однако физического смысла они не имеют. Значения $S_y(\omega)$ при $\omega > \pi/\Delta t$ будут обусловлены особенностью вычислительной схемы на этапе интерполяции.

Оценим среднее квадратичное отклонение $y(t)$ от $x(t)$. По теореме Релея

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t) - x(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S_y(\omega) - S_x(\omega)|^2 d\omega.$$

Применяя формулу (III.16) и разбивая последний интеграл на два (от 0 до $\pi/\Delta t$ и от $\pi/\Delta t$ до ∞), получим

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/\Delta t} \left| \sum_{\substack{p=-\infty \\ (p \neq 0)}}^{\infty} S_x\left(\omega + \frac{2\pi p}{\Delta t}\right) \right|^2 d\omega + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\pi/\Delta t}^{\infty} |S_x(\omega)|^2 d\omega \geq \rho_0, \end{aligned}$$

где

$$\rho_0 = (1/\pi) \int_{\pi/\Delta t}^{\infty} |S_x(\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{III.17})$$

Если при $\omega \rightarrow \infty$ $S_x(\omega) \sim c/\omega^\alpha$ ($\alpha \geq 2/3$), то можно получить и оценку сверху {см. [68], стр. 202}:

$$\rho_0 \leq \rho \leq (3+Q) \rho_0, \quad (\text{III.18})$$

где

$$Q = 2 \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \int_{(2p+1)\pi/\Delta t}^{\infty} |S_x(\omega)|^2 d\omega}$$

(практически $Q \ll 1$).

Таким образом кодирование — декодирование сигнала $x(t)$ приводит к искажениям, которые оцениваются сверху утроенной энергией,

содержащейся в отбрасываемой части спектра. При $|\omega| > \pi/\Delta t$ $S_y(\omega) \equiv 0$, поэтому интеграл (III.17) дает оценку искажений высокочастотных составляющих сигнала. Из формулы (III.18) тогда следует, что удвоенный такой интеграл является оценкой сверху для искажений спектра в интервале $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$.

Перейдем к более подробному рассмотрению цифровой реализации произвольного фильтра L . Поскольку процедуры кодирования — декодирования уже зафиксированы, нам нужно обсудить факторы, определяющие выбор цифрового фильтра L' . Кроме того, по желанию экспериментатора может изменяться шаг дискретизации Δt . Однако всегда можно указать минимальный шаг Δt_m , меньше которого Δt не может быть взят по техническим или экономическим причинам.

Вначале рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда входные сигналы $x(t)$ относятся к классу сигналов с ограниченным спектром; при этом $\Delta t_m < \pi/\omega_{гр}$. В этом случае, какая бы ни была взята непрерывная линейная система L , выходные сигналы $y(t)$ не содержат частот выше $\omega_{гр}$. Поэтому спектральную характеристику системы L достаточно реализовать в интервале частот $(-\omega_{гр}, \omega_{гр})$. Это означает, что вместо $L(\omega)$ можно взять любую спектральную характеристику $L_1(\omega)$, которая в интервале $(-\omega_{гр}, \omega_{гр})$ совпадает с $L(\omega)$

$$L_1(\omega) = L(\omega), \quad |\omega| < \omega_{гр},$$

а вне этого интервала является произвольной.

Так как $\Delta t_m < \pi/\omega_{гр}$, можно выбрать шаг Δt удовлетворяющим неравенству

$$\Delta t_m \leq \Delta t \leq \pi/\omega_{гр}.$$

Тем самым условие (III.7) оказывается выполненным.

Определим теперь цифровой фильтр L' следующим образом:

$$L'(\omega) = L(\omega) \quad \text{при} \quad -\pi/\Delta t \leq \omega \leq \pi/\Delta t. \quad (\text{III.19})$$

Вне этого интервала $L'(\omega)$ периодически продолжается с периодом $2\pi/\Delta t$. Применяя к $\{x_k\}$ оператор L' , получим выходную последовательность $\{y_k\} = L'\{x_k\}$, спектр которой $S'_y(\omega)$ равен $L'(\omega)S'_x(\omega)$. Из равенства (III.19) и (III.8) заключаем, что на интервале $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$

$$\Delta t S'_y(\omega) = L(\omega) S_x(\omega). \quad (\text{III.20})$$

На выходе блока декодирования будет наблюдаться функция $y(t)$, спектр которой согласно формуле (III.15)

$$S_y(\omega) = \begin{cases} \Delta t S'_y(\omega), & |\omega| \leq \pi/\Delta t \\ 0, & |\omega| > \pi/\Delta t. \end{cases}$$

Учитывая, что вне интервала $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$ $S_x(\omega) \equiv 0$, а также формулу (III.20), получим, что на всей оси частот $S_y(\omega) = L(\omega) S_x(\omega)$.

Таким образом, для рассматриваемого класса входных сигналов возможна точная цифровая реализация любой непрерывной линейной системы. Найдем импульсную характеристику фильтра L' .

Имеем

$$l_k = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} L'(\omega) \exp(i\omega k \Delta t) d\omega.$$

Тогда согласно (III.19)

$$l_k = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} L(\omega) \exp(i\omega k \Delta t) d\omega. \quad (\text{III.21})$$

Важно обратить внимание на то, что l_k в общем случае не совпадают с отсчетами импульсной характеристики $l(t)$ фильтра L :

$$l(k \Delta t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega) \exp(i\omega k \Delta t) d\omega.$$

Совпадение имеет место только при $L(\omega) \equiv 0$ вне интервала $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$.

Рассмотрим альтернативную ситуацию: входные сигналы имеют произвольный спектр, а $L(\omega)$ ограничена на интервале $(-\omega_{\text{гп}}, \omega_{\text{гп}})$ при $\omega_{\text{гп}} < \pi/\Delta t_m$. Из физических соображений здесь также можно добиться точной цифровой реализации системы L при соответствующем изменении системы отсчетов функции $x(t)$. Обозначим требуемую систему отсчетов сигнала через $\{x_k\}$. Эту систему нужно определить таким образом, чтобы ее дискретный спектр на интервале $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$ (где $\Delta t_m \leq \Delta t \leq \pi/\omega_{\text{гп}}$) был равен $S_x(\omega)/\Delta t$.

Поскольку отсчеты x_k являются коэффициентами ряда Фурье своего дискретного спектра, то

$$x_k = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} S_x(\omega) \exp(i\omega k \Delta t) d\omega. \quad (\text{III.22})$$

Такую систему отсчетов можно получить на выходе идеального низкочастотного фильтра, имеющего спектральную характеристику

$$K_0(\omega) = \begin{cases} c & \text{при } |\omega| \leq \pi/\Delta t \\ 0 & \text{при } |\omega| > \pi/\Delta t, \end{cases}$$

так что $x'_k = x'(k \Delta t)$, где $x'(t) = K_0[x(t)]$.

Теперь, выбрав $L'(\omega)$ из условия (III.19), получим, что на интервале $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$ спектр дискретной функции $\{y_k\} = L'\{x_k\}$ равен $S_x(\omega) L(\omega)$. Согласно формуле (III.15) на выходе декодирующего устройства получим функцию $y(t)$, спектр которой на всем интервале частот равен $S_x(\omega) L(\omega)$, что доказывает возможность точной реализации системы L последовательностью операторов K_0, K, L' и D .

Перейдем к наиболее сложной ситуации, когда граничные частоты спектров $S_x(\omega)$ и $L(\omega)$ либо бесконечны, либо больше, чем $\pi/\Delta t_m$. Ясно, что в этой ситуации преобразование L в цифровой форме точно реализовать нельзя. Реализация будет тем точнее, чем меньше Δt , поэтому нужно

принять $\Delta t = \Delta t_m$. Поскольку сигнал $y(t)$ на выходе декодирующего устройства не содержит частот выше $\pi/\Delta t$, то аппроксимацию $L(\omega)$ имеет смысл осуществлять только в интервале частот $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$.

Определим систему отсчетов $\{x'_k\}$ и цифровой фильтр L' таким образом, чтобы на указанном интервале имели место равенства

$$\Delta t S_{x'_k}(\omega) = S_x(\omega), \quad \mathbf{L}'(\omega) = L(\omega).$$

Это осуществляется согласно формулам (III.21) и (III.22). Тогда на выходе декодирующего устройства получим функцию $y_1(t)$, спектр которой

$$S_{y_1}(\omega) = \begin{cases} S_x(\omega) \mathbf{L}(\omega), & |\omega| \leq \pi/\Delta t \\ 0, & |\omega| > \pi/\Delta t. \end{cases}$$

По теореме Релея средняя квадратическая погрешность полученной аппроксимации функции $y(t)$, имеющей спектр $S_x(\omega) L(\omega)$, равна

$$\rho(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t) - y_1(t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/\Delta t}^{\infty} |S_x(\omega)|^2 |L(\omega)|^2 d\omega \quad (\text{III.23})$$

и эта погрешность уменьшена быть не может, поскольку полученное значение $\rho(\Delta t)$ входит как неотрицательное слагаемое в среднеквадратическую погрешность аппроксимации при любой цифровой реализации с шагом Δt ¹.

В заключение рассмотрим цифровую реализацию фильтра L с периодической спектральной характеристикой $\tilde{L}(\omega)$, имеющей период Ω . Примером такой линейной системы является однородный отражающий слой (см. § 2). При рассмотрении отражающего слоя было показано, что импульсная характеристика, отвечающая периодическому спектру, является обобщенной функцией вида

$$l(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(t - kT),$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции $L(\omega)$; $T = 2\pi/\Omega$.

Выходной сигнал $y(t)$ на выходе фильтра L является линейной комбинацией периодически сдвинутых входных сигналов:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(t - \tau - kT) x(\tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x(t - kT). \quad (\text{III.24})$$

Отсюда при целом $r = T/\Delta t$ следует непосредственная цифровая реализация фильтра L :

$$y(k\Delta t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j x(k\Delta t - jr\Delta t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j x_{k-rj}. \quad (\text{III.25})$$

¹ Здесь не рассматриваются возможности, связанные с изменением работы декодирующего устройства, что для более узких классов сигналов может дать более точные результаты.

Если входной сигнал $x(t)$ имеет ограниченный спектр (при $\omega_{\text{гн}} \leq \leq \pi/\Delta t$), то восстановление выходного сигнала при помощи ряда Котельникова определяет точные значения $y(t)$ при всех t . Последнее следует из того, что формула (III.25) определяет точные значения выходного сигнала в точках $k \Delta t$.

Если спектр входного сигнала не является финитным, то согласно полученным выше результатам для получения наиболее точной среднеквадратической аппроксимации $y(t)$ входной сигнал $x(t)$ должен быть предварительно преобразован идеальным низкочастотным фильтром с полосой пропускания $(0, \pi/\Delta t)$. Среднеквадратическая погрешность этой реализации оценится формулой (III.23), тогда как непосредственная реализация (III.25) хотя и дает точные значения в дискретном множестве значений аргумента $k \Delta t$, имеет большую среднеквадратическую погрешность. Действительно, применив неравенство $\rho > \rho_0$ к функции $y(t)$, получим

$$\rho > \frac{1}{\pi} \int_{\pi/\Delta t}^{\infty} |S_y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\pi/\Delta t}^{\infty} |L(\omega)|^2 |S_x(\omega)|^2 d\omega.$$

§ 11. Условия осуществимости и аппроксимация цифровых фильтров

Всякая периодическая функция $L'(\omega)$, имеющая вещественные коэффициенты Фурье¹, является спектральной характеристикой дискретного линейного преобразования. Однако не каждая такая характеристика определяет функционирование некоторого конкретного цифрового устройства. Реальные дискретные устройства имеют конечную память, поэтому цифровой фильтр должен обладать импульсной характеристикой с конечным числом отсчетов, т. е. должны существовать такие числа n_1 и n_2 ($-\infty < n_1 < n_2 < +\infty$), что

$$l_k \equiv 0 \text{ при } k < n_1 \text{ и } k > n_2. \quad (\text{III.26})$$

Это условие представляется более слабым сравнительно с принципом причинности (II.1), потому что число n_1 может быть отрицательным. Правда, возникает новое ограничение: $k \leq n_2$. Однако для убывающих при $k \rightarrow \infty$ импульсных характеристик это условие не очень существенно (если, конечно, n_2 достаточно велико).

Прежде чем получить спектральную форму условия осуществимости (III.26), целесообразно перейти от дискретного преобразования Фурье к z -преобразованию; z -преобразованием числовой последовательности $\{x_k\}$ является следующая функция комплексного переменного:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^k. \quad (\text{III.27})$$

¹ Вещественность коэффициентов Фурье обеспечивается условием $L'(-\omega) = = L'^*(\omega)$.

Преобразование z взаимнооднозначно связано с дискретным преобразованием Фурье, в частности, может быть выведено из последнего. Для этого продолжим спектр $S'_x(\omega)$ в комплексную область, приняв $\omega = \alpha + i\beta$, и подставим в (III.3) новую комплексную переменную

$$z = \exp(-i\omega \Delta t); \quad (\text{III.28})$$

эта подстановка дает формулу (III.27).

Преобразование (III.28) отображает действительную ось комплексной плоскости ω на единичную окружность $|z| = 1$, а нижнюю полуплоскость $\text{Im } \omega < 0$ — на внутреннюю часть единичного круга $|z| < 1$ (рис. 11).

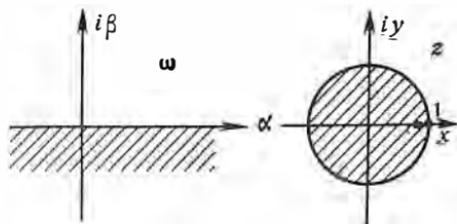


Рис. 11

Действительно,

$$\begin{aligned} z &= \exp[-i(\alpha + i\beta)\Delta t] = \\ &= \exp(-i\alpha\Delta t) \exp(\beta\Delta t), \end{aligned}$$

следовательно, если $\beta = \text{Im } \omega < 0$, то $|z| < 1$; $|z| = 1$ только в том случае, когда $\beta = 0$.

Полученное соответствие между плоскостями ω и z показывает, что условие 1 из § 9 [абсолютная интегрируемость $x(t)$] определяет сходимость ряда (III.27) при $|z| = 1$, а следовательно, и в круге $|z| \leq 1$. Покажем теперь, что z -преобразование сигналов с экспоненциальным убыванием при $t \rightarrow \pm\infty$ сходится в кольце, содержащем единичную окружность $|z| = 1$.

Теорема 1. Пусть существуют такие константы $\alpha > 0$ и $c > 0$, что

$$|x(t)| < c \exp(-\alpha|t|), \quad -\infty \leq t \leq \infty; \quad (\text{III.29})$$

тогда $X(z)$ сходится в кольце $r < |z| < R$, где $r = \exp(-\alpha\Delta t)$ и $R = \exp(\alpha\Delta t)$.

Для доказательства представим $X(z)$ в виде суммы $X_1(z) + X_2(z)$, где

$$X_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k, \quad X_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{-k} z^{-k}. \quad (\text{III.30})$$

Из неравенства (III.29) вытекает оценка $|x_k z^k| \leq c |qz|^k$, где $q = \exp(-\alpha\Delta t)$, поэтому из условия сходимости геометрической прогрессии следует, что $X_1(z)$ сходится, если $|qz| < 1$. Иначе говоря, $X_1(z)$ сходится во всех точках z , для которых $|z| \leq 1/q = R$. Аналогично показывается, что ряд $X_2(z)$ сходится, если $|q/z| < 1$, т. е. при $|z| > q = r$, что и требовалось доказать.

Применив условие сходимости геометрической прогрессии, легко получим следующее условие:

Теорема 2. Если сигнал $x(t)$ полуфинитен, то для абсолютной сходимости z -преобразования последовательности $\{x_k\}$ в круге $|z| \leq 1$ достаточно потребовать, чтобы сигнал был абсолютно интегрируемым.

Наконец, тривиально доказывается следующее.

Теорема 3. z -преобразование финитного сигнала сходится во всех точках плоскости z , за исключением точек $z = 0$ и (или) $z = \infty$.

Доказательство следует из конечности слагаемых ряда (III.27). Точка $z = 0$ оказывается точкой расходимости, если последовательность $\{x_k\}$ содержит отсчеты при отрицательных k .

Если ряд (III.27) сходится в некотором кольце $r < |z| < R$, то $X(z)$ оказывается аналитической функцией в точках этого кольца. Действительно, наиболее медленная сходимость имеет место при $|z| \rightarrow r$ и $|z| \rightarrow R$, поэтому во всяком кольце $r' \leq |z| \leq R'$, где $r' > r$ и $R' < R$, функция $X(z)$ сходится равномерно. Отсюда вытекает возможность почленного дифференцирования ряда внутри кольца $r < |z| < R$, а это и означает аналитичность $X(z)$ в точках кольца.

Связь z -преобразования с преобразованием Фурье позволяет просто получить некоторые важные свойства. Выведем, например, аналог спектральной теоремы о смещении. Так как спектр $S'_x(\omega) \exp(-i\omega r \Delta t)$ характеризует «сдвинутую» последовательность $\{x_{k-r}\}$, то согласно (III.28) z -преобразование последней равно $z^r X(z)$. Это свойство, конечно, можно получить и непосредственно из определения z -преобразования:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{k-r} z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z^{k+r} = z^r X(z).$$

Другим важным следствием является выражение отсчетов x_k через $X(z)$. Осуществим в интеграле (III.5), выражающем отсчеты x_k через спектр $S'_x(\omega)$, подстановку согласно формуле (III.28). При этой подстановке $S'_x(\omega)$ преобразуется в $X(z)$, движение ω от $-\pi/\Delta t$ до $\pi/\Delta t$ по вещественной оси преобразуется в движение z по единичной окружности от 0 до 2π против часовой стрелки, дифференциал $d\omega$ станет равным $-dz/iz \Delta t$.

Изменив направление обхода, получим

$$x_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{X(z)}{z^{k+1}} dz, \quad (\text{III.31})$$

где C — окружность $|z| = 1$.

Если $X(z)$ аналитична в кольце $r < |z| < R$ ($r < 1$, $R > 1$), то по теореме Коши контур интегрирования можно произвольно деформировать в пределах этого кольца. Поэтому символ C в формуле (III.31) может обозначать произвольный контур в кольце сходимости z -преобразования, содержащем единичную окружность.

Определив z -преобразование последовательностей $\{y_k\}$ и $\{l_k\}$

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k z^k \quad \text{и} \quad L(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_k z^k, \quad (\text{III.32})$$

найдем из (III.12) связь z -преобразований входного и выходного сигналов:

$$Y(z) = L(z) X(z). \quad (\text{III.33})$$

Эту формулу можно получить и непосредственно, вычислив z -преобразование цифровой свертки (III.1).

В соответствии с формулой (III.33) все свойства цифровых фильтров могут быть выражены в терминах z -преобразования импульсных характеристик. Для краткости функцию $L(z)$ будем называть z -характеристикой цифрового фильтра.

Сначала приведем формулировку принципа причинности для дискретных устойчивых систем:

Теорема 4. Цифровой фильтр имеет полуфинитную импульсную характеристику

$$l_k \equiv 0 \text{ при } k < 0$$

в том и только в том случае, когда его z -характеристика аналитична в круге $|z| \leq 1$.

Необходимость при $\sum |l_k| < \infty$ содержится в условии 2. Доказательство достаточности (как и ряда других последующих утверждений) опирается на известную в теории функций комплексного переменного теорему Лорана:

Если функция $j(z)$ аналитична в кольце $r < z < R$, то она единственным образом разлагается в сходящийся в этом кольце ряд по отрицательным и положительным степеням z

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad (\text{III.34})$$

называемый рядом Лорана этой функции.

По теореме Лорана функция $L(z)$ с одной стороны, единственным образом разлагается в ряд (III.32), представляющий ее в круге $|z| \leq 1$ (в данном случае $r = 0$, $R = 1$). С другой стороны, в силу того что (III.32) аналитична в окрестности $z = 0$, она может быть разложена в ряд Тейлора по положительным степеням z . Но ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана (III.32), поэтому из единственности разложения в ряд Лорана следует равенство нулю коэффициентов при отрицательных степенях z , что и требовалось показать.

Поскольку круг $|z| \leq 1$ в плоскости z отвечает нижней полуплоскости $\text{Im } \omega \leq 0$ комплексного переменного ω , то доказанное в теореме 4 означает, что спектральные условия физической осуществимости выполняются и в дискретном случае.

Перейдем к условию осуществимости z -характеристик в классе дискретных устройств с конечной памятью.

Теорема 5. Цифровой фильтр тогда и только тогда удовлетворяет условиям осуществимости (III.26), когда его z -характеристика $L(z)$ аналитична на всей плоскости комплексного переменного z , исключая, возможно, точки $z = 0$ и $z = \infty$, являющиеся полюсами $L(z)$.

Необходимость сразу следует из доказанного ранее условия 3, так как осуществимая импульсная характеристика $\{l_k\}$ — финитная последовательность. Нам остается доказать достаточность.

Поскольку $L(z)$ аналитична при $0 < |z| < \infty$, она единственным образом разлагается в ряд Лорана (III.34), коэффициенты которого выражают последовательность $\{l_k\}$. Если $z = 0$ является полюсом функции, то по определению полюса существует такое число r ($0 < r < \infty$), называемое порядком полюса $z = 0$, что $\lim_{z \rightarrow 0} z^r L(z) < \infty$.

Поэтому функция $z^r L(z)$ оказывается аналитической в круге $|z| < \infty$ и по теореме 4 определяет полуфинитную последовательность $\{l'_k\}$ с началом в нуле. Но по теореме о сдвиге $l'_k = l_{k-r}$ (или, что то же самое, $l_k = l_{k+r}$), а так как при $(k+r) < 0$ $l_{k+r} \equiv 0$, то при $k < -r$ отсчеты l_k равны нулю, и, стало быть, последовательность $\{l_k\}$ имеет начало.

Если $z = \infty$ — полюс порядка s , то функция $z^{-s} L(z)$ при $z \rightarrow \infty$ имеет конечный предел, вследствие чего является аналитической при $|z| > 0$. Осуществляя преобразование $w = 1/z$ доказательство можно провести аналогично предыдущему, но, наверно, проще сослаться на то, что лорановское разложение $z^{-s} L(z)$ не может содержать положительных степеней z , так как тогда при $z \rightarrow \infty$ $z^{-s} L(z)$ обязательно обра-

щадась бы в бесконечность, а по теореме о смещении, $z^{-s}L(z)$ является z -преобразованием последовательности $\{l_{k-s}\}$. Отсюда вытекает, что $\{l_k\}$ имеет конец при $k = s$.

Поставим задачу аппроксимации нереализуемого в смысле условия (III-26) дискретного преобразования L' при помощи финитного цифрового фильтра L'_m , имеющего длину $m + 1$. Длиной цифрового фильтра здесь называется число ненулевых отсчетов его импульсной характеристики. Если n_1 и n_2 — номера начального и конечного отсчетов $\{l_k\}$, то $m = n_2 - n_1$.

Пусть l'_k — отсчеты импульсной характеристики фильтра L'_m . Аппроксимируя преобразование L' при помощи финитного фильтра L'_m , будем оценивать качество аппроксимации среднеквадратическим отклонением

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |l_k - l'_k|^2.$$

Эту сумму можно разбить на три части:

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=n_1}^{n_2} |l_k - l'_k|^2 + \sum_{k=-\infty}^{n_1-1} l_k^2 + \sum_{k=n_2+1}^{\infty} l_k^2.$$

Последние два слагаемых не зависят (при заданных n_1 и n_2) от значений l'_k и всегда положительны. Что касается первого слагаемого, то (в силу неотрицательности) его минимальное значение равно нулю, когда при всех $k = n_1, n_1 + 1, \dots, n_1 + m$ $l'_k = l_k$. Это равенство определяет финитный цифровой фильтр длины $m + 1$ с началом в n_1 , который минимизирует среднеквадратическое отклонение от импульсной характеристики $\{l_k\}$.

Соответствующее значение ε^2 зависит от n_1 :

$$\varepsilon^2(n_1) = \sum_{k=-\infty}^{n_1-1} l_k^2 + \sum_{k=n_1+m+1}^{\infty} l_k^2. \quad (\text{III.35})$$

Отсюда вытекает метод отыскания наилучшей аппроксимации преобразования L' цифровым фильтром длины $m + 1$: сначала с учетом формулы (III.35) отыскиваем такое значение $n_1 = n_1^*$, для которого

$$\varepsilon^2(n_1^*) = \min_{(n_1)} \varepsilon^2(n_1),$$

а затем на интервале $(n_1, n_1 + m)$ полагаем $l'_k = l_k$. Определенный таким образом фильтр L'_m будем называть среднеквадратическим усечением (или просто усечением) фильтра L' .

Полученный фильтр желательно обсудить с двух точек зрения. Во-первых, соответствует ли наилучшая аппроксимация импульсной характеристики преобразования L' наилучшей аппроксимации его спектральной характеристики. Во-вторых, каким образом качество аппроксимации L' связано с различием сигналов на выходе L' и L'_m .

На первый вопрос ответ утвердительный. Действительно, импульсная характеристика дискретной линейной системы представляет собой совокупность коэффициентов ряда Фурье ее спектральной характеристики.

Но отсюда следует, что последовательность $\{l_k - l'_k\}$ — суть совокупность коэффициентов ряда Фурье для функции $L'(\omega) - L'_m(\omega)$; тогда по формуле Парсеваля

$$\int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} |L'(\omega) - L'_m(\omega)|^2 d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |l_k - l'_k|^2 = \varepsilon^2.$$

Мы доказали следующее утверждение:

Теорема 6. Среднеквадратическое усечение фильтра L' дает наилучшую среднеквадратическую аппроксимацию спектральной характеристики в классе всех финитных фильтров, имеющих фиксированную «длину».

Второй вопрос более трудный. Ясно, что минимальное значение ε^2 не гарантирует минимального различия между дискретной функцией $\{y_k\}$ на выходе оператора L' и дискретной функцией $\{y'_k\}$ на выходе L'_m .

Среднеквадратическое отклонение $\{y_k\}$ от $\{y'_k\}$ характеризуется величиной

$$\varepsilon_x^2 = \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} |S'_y(\omega) - S'_{y'}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} |L'(\omega) - L'_m(\omega)|^2 |S'_x(\omega)|^2 d\omega$$

и, таким образом, зависит от свойств входного сигнала. Величину ε_x^2 можно трактовать как средневзвешенное квадратическое отклонение $L'_m(\omega)$ от $L'(\omega)$; при этом весовой функцией является $|S'_x(\omega)|^2$. Аппроксимация по величине ε_x^2 совпадает с аппроксимацией по значению ε^2 для сигналов, у которых $|S'_x(\omega)| = \text{const.}$ К таким сигналам относятся последовательность $\{\delta_k\}$ и ее всевозможные сдвиги.

Общего ответа на второй вопрос дать нельзя. Он (этот ответ) зависит не только от свойств входного сигнала, но и от решаемой задачи (т. е. целей фильтрации). Однако можно попытаться установить характер спектральных искажений, связанных с усечением импульсной характеристики $\{l_k\}$, и на основании этого выбрать разумную аппроксимацию $\{l'_k\}$ для реального класса сигналов.

Если фильтр L'_m содержит нечетное число отсчетов l'_k , то всегда можно считать, что индекс k изменяется от $-m/2$ до $m/2$, так как сдвиг импульсной характеристики на $m/2$ влево приводит только к сдвигу выходного сигнала, но не изменяет его формы.

Из определения среднеквадратического усеченного фильтра тогда получаем:

$$L'_m(\omega) = L'(\omega) + \psi(\omega),$$

где

$$\psi(\omega) = - \sum_{|k| > \frac{m}{2}} l_k \exp(-ik\omega \Delta t).$$

Поскольку отсчет l_k является коэффициентом Фурье функции $L'(\omega)$, то слагаемое $\psi(\omega)$ представляет собой сумму гармоник с периодами, меньшими, чем $4\pi/m\Delta t$ [для сравнения заметим, что период частотной характеристики $L'(\omega)$ равен $2\pi/\Delta t$]. Таким образом, спектр $L'_m(\omega)$ отли-

чается от $L'(\omega)$ быстро осциллирующими осложнениями. Это явление носит название явления Гиббса.

Если фильтр $L'(\omega)$ полосовой [это означает, что он предназначен для пропускания сигнала без искажений в полосе частот (ω_1, ω_2)], то при $\omega_2 - \omega_1 > 2\pi/(m/2 + 1)$ качество фильтра будет плохим. Влияние осцилляций будет особенно большое на высоких частотах, где $\psi(\omega)$ сравнимо по величине с $L'(\omega)$.

Не должно возникнуть представления о том, что при $m \rightarrow \infty$ качество фильтра ухудшается из-за уменьшения периода осцилляций. Дело в том, что при $m \rightarrow \infty$ быстро уменьшается их интенсивность, характеризующаяся величиной ρ .

Для того чтобы избавиться от осциллирующей добавки $\psi(\omega)$, функцию $L'_m(\omega)$ следует сгладить при помощи специально подобранной весовой функции $g(\omega)$:

$$L_m^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) L'_m(\omega - u) du. \quad (\text{III.36})$$

Весовую функцию естественно подчинить следующим условиям: $g(\omega)$ неотрицательна, $g(\omega) \geq 0$; интеграл от $g(\omega)$ равен 1; отличные от нуля значения сконцентрированы на интервале длиной $2\pi/(\Delta/2 + 1)$, равной периоду старшей гармоники функции $\psi(\omega)$.

Первые два условия не являются строго обязательными. Задача состоит в том, чтобы функция $g(\omega)$ давила (осредняла) гармоники с периодами меньше $4\pi/m\Delta t$ и по возможности не искажала спектр $L'(\omega)$. Например, можно $g(\omega)$ выбрать так:

$$g(\omega) = \begin{cases} \left(\frac{m}{2} + 1\right) \Delta t / 2\pi, & -\frac{\pi}{\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \leq \omega \leq \frac{\pi}{\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{\left(\frac{m}{2} + 1\right)} \end{cases}. \quad (\text{III.37})$$

Существуют и другие способы выбора $g(\omega)$.

Заметим теперь, что формула (III.36) представляет собой «фильтрацию» спектров. Так как прямое и обратное преобразования Фурье симметричны, то операции (III.36) во временной области отвечает умножение отсчетов l'_k на величины p_k , где

$$p_k = \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} g(\omega) \exp(-ik\omega \Delta t) d\omega.$$

В частности, если используется весовая функция (III.37), то

$$p_k = \left(\frac{m}{2} + 1\right) \frac{\sin \frac{k\pi}{\frac{m}{2} + 1}}{k\pi}. \quad (\text{III.38})$$

Чтобы пояснить смысл полученного результата, заметим, что отсчеты l'_k получаются из l_k умножением l_k на веса

$$w_k = \begin{cases} 1 & |k| \leq \frac{m}{2} \\ 0 & |k| > \frac{m}{2} \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

При сглаживании спектра весовой функцией $g(\omega)$ отсчеты l'_k умножаются на веса

$$w_k = \begin{cases} p_k & |k| \leq \frac{m}{2} \\ 0 & |k| > \frac{m}{2} \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

которые убывают при $k \rightarrow \pm m/2$ (рис. 12).

Исходя из очевидных зрительных ассоциаций, последовательность весов $\{w_k\}$ называют функцией окна. При этом окно (III.39) называют прямоугольным. Предыдущий анализ показывает, что применение прямоугольного окна вызывает нежелательные искажения спектров, поэтому его следует заменять на более гладкое окно, в частности на окно Ланциоса, определяемое формулами (III.38) и (III.40).

Все высказанные соображения применимы и к выбору способа усечения входного сигнала $\{x_k\}$.

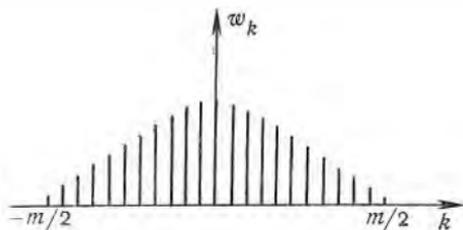


Рис. 12

§ 12. Рекурсивные фильтры

Требование финитности импульсной характеристики, предъявляемое к осуществимым цифровым фильтрам, можно обойти, если условиться, что на каждом такте работы ЭВМ арифметическое устройство может извлекать из памяти не только значения x_k , но и уже сосчитанные значения выходного сигнала y_k . Цифровые процедуры такого типа называют рекурсивными.

Рекурсивная фильтрация, реализуемая устройствами с конечной памятью, определяются следующим соотношением:

$$y_k = \sum_{j=0}^n a_j x_{k-j} - \sum_{j=1}^p b_j y_{k-j}, \quad 0 \leq k \leq \infty. \quad (\text{III.41})$$

Поскольку y_0, y_1 и т. п. линейно выражаются через отсчеты x_0, x_1, \dots , то по индукции легко вывести, что y_k линейно выражается через x_0, x_1, \dots, x_k . Следовательно, фильтр (III.41) — линейное преобразование. Ясно также, что если последовательность $\{x_k\}$ сдвинута на некоторую величину r , то на эту же величину сдвинется первый ненулевой от-

счет отклика $\{y_k\}$, а за ним — и все последующие. Таким образом, (III.41) определяет стационарное линейное преобразование, имеющее характеристику $L(z)$. Несмотря на то что числовые последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ финитны, в общем случае не существует такой финитной последовательности $\{l_k\}$, z -трансформация которой совпадает с $L(z)$.

Покажем, что всякую дробно-рациональную характеристику

$$L(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{1 + b_1 z + \dots + b_p z^p} \quad (\text{III.42})$$

можно реализовать в виде рекурсивного фильтра (III.41). Действительно, подставляя (III.42) в основное равенство, связывающее z -преобразования входного и выходного сигналов, получим

$$(1 + b_1 z + \dots + b_p z^p) Y(z) = (a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n) X(z)$$

или

$$Y(z) = (a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n) X(z) - z Y(z) (b_1 + b_2 z + \dots + b_p z^{p-1}). \quad (\text{III.43})$$

Слева стоит z -преобразование последовательности $\{y_k\}$. Учитывая теорему о смещении, согласно которой $z^l X(z)$ является z -преобразованием последовательности $\{x_{k-l}\}$, выводим, что первое слагаемое в правой части — суть z -преобразование суммы $\sum_{j=0}^n a_j \{x_{k-j}\}$, а второе слагаемое — суть

z -преобразование суммы $\sum_{j=1}^p b_j \{y_{k-j}\}$. Переходя от суммы последовательностей к последовательности сумм, найдем, что формула (III.43) эквивалентна

$$\{y_k\} = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x_{k-j} - \sum_{j=1}^p b_j y_{k-j} \right\},$$

а последняя, очевидно, эквивалентна формуле (III.41).

Из приведенного вывода вытекает способ построения спектральной z -характеристики рекурсивного фильтра, заданного числовыми последовательностями $\{a_k\}$, $\{b_k\}$. Эта характеристика выражается формулой (III.42). Импульсная характеристика рекурсивного фильтра может быть найдена, например, разложением $L(z)$ в ряд Лорана. Однако ее проще найти исходя из определения $\{l_k\}$ как реакции на «единичку» $\{\delta_k\}$:

$$l_k = \sum_{j=0}^n a_j \delta_{k-j} + \sum_{j=1}^p b_j l_{k-j}.$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть

$$L(z) = 1/(1 - qz).$$

Очевидно, $a_0 = 1$ и $b_1^* = -q$ (остальные коэффициенты рекурсивного фильтра равны нулю). Отсюда

$$y_k = x_k + q y_{k-1}$$

Подставляя $x_k = \delta_k$, получим $l_0 = \delta_0 = 1$, $l_1 = \delta_1 + ql_0 = q$ и т. п. Общая формула для l_k имеет вид: $l_k = q^k$.

При $q = 0,95$ более 45 отсчетов имеют величину не менее 0,1, поэтому качественная аппроксимация $L(z)$ обычными финитными фильтрами требует применения длинных импульсных характеристик. Рекурсивная же форма фильтра очень проста.

Рассмотрим задачу синтеза рекурсивного фильтра по заданной импульсной характеристике $\mathbf{l} = \{l_0, \dots, l_m\}$.

Эта задача может быть сформулирована следующим образом: необходимо отыскать такие числовые последовательности $\{b_1, b_2, \dots, b_p\}$ и $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$, что

$$\frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{1 + b_1 z + \dots + b_p z^p} \cong l_0 + l_1 z + \dots + l_m z^m. \quad (\text{III.44})$$

В этом равенстве справа стоит спектральная z -характеристика $L(z)$, отвечающая импульсной характеристике $\{l_k\}$, а слева — спектральная z -характеристика отыскиваемого рекурсивного фильтра. Задача не имеет единственного решения, а среди ее решений есть неудовлетворительные. Примером неудовлетворительного тривиального решения является следующее: $p = 0$, $a_k = l_k$, $k = 0, 1, \dots, m$. Поэтому необходимо как-то ограничить класс разумных решений. Ясно, что реализация фильтра $L(z)$ в рекурсивной форме разумна, если $n + p < m$, так как только в этом случае имеем экономию в количестве вычислений.

Предположим, что выбрали $p < m$, зафиксировав пока произвольные значения b_1, b_2, \dots, b_p . Если взять $n = p + m$ и выбрать a_k по формуле

$$a_k = \sum_{j=0}^p b_j l_{k-j}, \quad (\text{III.45})$$

то равенство (III.44) становится точным. В самом деле, отыскивая z -трансформацию числовых последовательностей, выражаемых левой и правой частями (III.45), получим

$$(a_0 + \dots + a_n z^n) = (1 + b_1 z + \dots + b_p z^p) (l_0 + \dots + l_m z^m), \quad (\text{III.46})$$

откуда вытекает точное равенство (III.44) (при этом обязательно $n = m + p$, так как степень старшего члена в правой части (III.46) равна $p + m$). Если теперь выберем n так, чтобы $(p + n) < m$, определив значения a_k при $k \leq n$ формулой (III.45), а последующие значения a_k приняв равным нулю, то равенство (III.46) перестанет быть точным, и мы получим приближенную аппроксимацию $L(z)$.

Охарактеризуем ошибку этой аппроксимации. Так как $b_0 = 1$, то из (III.45) следует

$$l_k = a_k - \sum_{j=1}^p b_j l_{k-j}. \quad (\text{III.47})$$

При $k \leq n$ формула (III.47) определяет импульсную характеристику и аппроксимируемого, и аппроксимирующего фильтров. При $k > n$ положение меняется. Отсчеты l_k импульсной характеристики аппрокси-

мируемого фильтра по-прежнему выражаются формулой (III.47), а для аппроксимирующего (в силу $a'_k = 0$, $k = n + 1, \dots$) имеем

$$l'_k = a'_k - \sum_{j=1}^p b_j l_{k-j} = - \sum_{j=1}^p b_j l_{k-j}, \quad k > n, \quad (\text{III.48})$$

откуда

$$l_k - l'_k = a_k = \sum_{j=1}^p b_j l_{k-j}, \quad k = n + 1, \dots, p + m.$$

Следовательно, среднеквадратическую ошибку аппроксимации можно определить формулой

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=n+1}^{p+m} (l_k - l'_k)^2 = \sum_{k=n+1}^{p+m} \left(\sum_{j=0}^p b_j l_{k-j} \right)^2, \quad (\text{III.49})$$

Ясно, что величина ε^2 зависит от того, насколько удачно выбрали последовательность b_j . Поэтому следующим шагом является выбор коэффициентов b_j с целью минимизации ε^2 .

Предварительно преобразуем правую часть формулы (III.49):

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=n+1}^{p+m} \left(\sum_{j=0}^p \sum_{i=0}^p b_i b_j l_{k-j} l_{k-i} \right). \quad (\text{III.50})$$

Теперь продифференцируем ε^2 по b_1, b_2, \dots, b_p и приравняем производные нулю (значение b_0 фиксировано и равно единице). Получим

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial b_i} = 2 \sum_{j=0}^p b_j \sum_{k=n+1}^{p+m} l_{k-r} l_{k-j} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, p.$$

Отсюда находим систему p линейных уравнений для определения b_1, b_2, \dots, b_p :

$$\sum_{j=1}^p b_j \Phi_{j,r} = \varphi_r, \quad r = 1, 2, \dots, p, \quad (\text{III.51})$$

где

$$\Phi_{j,r} = \sum_{k=n+1}^{p+m} l_{k-r} l_{k-j}, \quad \varphi_r = \Phi_{0,r}. \quad (\text{III.52})$$

Таким образом, отыскав по формулам (III.52) матрицу коэффициентов $\Phi_{j,r}$, а затем решив систему линейных уравнений (III.51) относительно b_k , найдем по формуле (III.45) значение a_k и тем самым определим рекурсивную форму заданного фильтра. Останется открытым вопрос о выборе n и p . Заметим, что минимальное значение ε^2 зависит не от коэффициентов b_j (так как b_j определяется через $\Phi_{j,r}$), а только от числовой последовательности $\{l_k\}$ и значений n и p . Поэтому, вычисляя ε^2 для разных n и p , можно выбрать такие минимальные значения n и p , при которых ε^2 не превосходит некоторую заранее заданную допустимую погрешность.

§ 13. К расчету полосовых фильтров. Нуль-фазовые и минимально-фазовые цифровые фильтры

Конкретным задачам одномерной фильтрации посвящен весь второй раздел книги. Здесь же только прокоментируем те проблемы, которые возникают при построении цифровых фильтров, на сравнительно простом примере полосовой фильтрации.

Полосовой фильтр задается, как правило, интервалом частот (ω_1, ω_2) ($0 \leq \omega_1 < \omega_2 \leq \pi/\Delta t$), в пределах которого сигнал должен передаваться без искажений и вне которого гармоники входного сигнала подавляются. Идеальный полосовой фильтр должен иметь спектральную характеристику $L'_n(\omega)$, равную единице при $\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$ и тождественно равную нулю при остальных значениях ω в интервале $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$.

Импульсная характеристика этого фильтра определяется формулой

$$l_k^{(n)} = \frac{\Delta t}{2\pi} \left[\int_{\omega_1}^{\omega_2} \exp(ik\omega \Delta t) d\omega + \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} \exp(ik\omega \Delta t) d\omega \right] = \\ = \frac{2}{k\pi} \cos \frac{(\omega_1 + \omega_2) k \Delta t}{2} \sin \frac{(\omega_2 - \omega_1) k \Delta t}{2}. \quad (\text{III.53})$$

Величины $l_k^{(n)}$ очень медленно убывают при $|k| \rightarrow \infty$. В частности, они не удовлетворяют критерию строгой устойчивости (II.8), которое для дискретных фильтров имеет вид:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |l_k| < \infty. \quad (\text{III.54})$$

В главе VI будет показано, что нарушение условия (III.54) приводит к сильному влиянию помех и погрешностей вычисления на результат цифровой фильтрации. Можно считать, что отмеченные недостатки являются платой за предельно резкую крутизну фильтра L'_n . Однако такая крутизна практически и не требуется. Более разумная постановка задачи заключается в построении фильтра, спектральная характеристика которого аппроксимирует $L'_n(\omega)$ с желаемой точностью, а импульсная характеристика финитна.

Если отклонения $L'(\omega)$ от $L'_n(\omega)$ измеряются в среднеквадратическом смысле, то искомый полосовой фильтр совпадает со среднеквадратическим усечением идеального полосового фильтра:

$$l_k = \begin{cases} l_k^{(n)} & |k| \leq m \\ 0 & |k| > m. \end{cases} \quad (\text{III.55})$$

Действительно, отсчеты $l_k^{(n)}$ — суть коэффициенты ряда Фурье функции $L'_n(\omega)$. В то же время известно, что конечная сумма ряда Фурье дает наилучшее среднеквадратическое приближение в классе всех тригонометрических многочленов того же порядка m . Чтобы устранить явление Гиббса (см. § 11), коэффициенты (III.55) следует умножить на функцию окна.

Если качество фильтра оценивается уровнем $L'(\omega)$ в интервалах гашения $(0, \omega_1)$ и $(\omega_2, \pi/\Delta t)$, то для его построения могут быть использованы полиномы Чебышева. Этот подход получил широкое распространение в задаче низкочастотной полссовой фильтрации ($\omega_1 = 0$). Ограничим рассмотрение финитными фильтрами с симметричными импульсными характеристиками: $l_k = l_{-k}$; следует заметить, что фильтр (III.55) этому условию удовлетворяет. Тогда

$$L'(\omega) = l_0 + 2 \sum_{k=1}^m l_k \cos k\omega \Delta t. \quad (\text{III.56})$$

По индукции, начав с $\cos 2(\omega \Delta t/2) = 2 \cos^2(\omega \Delta t/2)$, легко показать, что $\cos k\omega \Delta t$ является полиномом степени $2k$ от $u = \cos(\omega \Delta t/2)$. Следовательно, $L(\omega)$ можно представить полиномом степени $2m$ от переменной u . При изменении ω от нуля до $\pi/\Delta t$ переменная u изменяется от единицы до нуля, поэтому нужно найти такой полином $P_{2m}(u)$, который наименее отклоняется от нуля [в смысле максимума $|P_{2m}(u)|$ в интервале $(0, \alpha)$, где $\alpha = \cos(\omega_2 \Delta t/2)$, и который равен единице при $u = \pm 1$. Эта задача, решение которой дается выражением

$$P_{2m}(u) = T_{2m}(u/\alpha)/T_{2m}(1/\alpha), \quad (\text{III.57})$$

где $T_{2m}(x)$ — полином Чебышева порядка $2m$, эквивалентна задаче построения группы приемников с максимальным гашением. Последняя более подробно рассматривается в конце § 40.

Метод полиномов Чебышева легко применить к произвольным полосовым фильтрам. С этой целью обозначим $L_v(\omega)$ частотную характеристику низкочастотного фильтра с полосой пропускания $(0, \nu)$. Тогда спектральная характеристика $1 - L_v(\omega)$ определяет высокочастотный фильтр с полосой пропускания $(\nu, \pi/\Delta t)$, а спектральная характеристика

$$L(\omega) = L_{\omega_2}(\omega) [1 - L_{\omega_1}(\omega)], \quad \omega_1 < \omega_2$$

определяет полосовой фильтр с полосой пропускания (ω_1, ω_2) .

На рис. 13 нанесены амплитудные характеристики идеального (кривая 1), усеченного (кривая 2) и Чебышевского (кривая 3) низкочастотных фильтров для граничной частоты $\omega_2 = 0,628/\Delta t$ (что отвечает 50 Гц при $\Delta t = 0,002$ с). Усеченный и Чебышевский фильтры рассчитывались при $m = 7$.

Рассмотрим, в какой степени полученные решения удовлетворительны с точки зрения фазовых искажений сигнала. Пусть амплитудная характеристика $A(\omega)$ задана. При выборе фазовой характеристики $\theta(\omega)$ стремятся удовлетворять следующим требованиям: наименьшее искажение формы записи полезного сигнала, спектр которого сосредоточен в полосе (ω_1, ω_2) , и наименьшие потери точности оценки времени прихода сигнала.

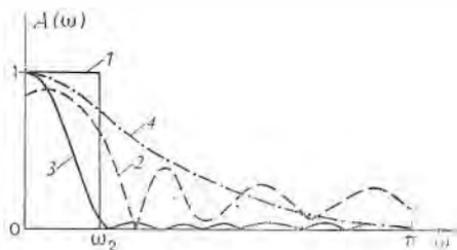


Рис. 13

Так как сигнал на выходе фильтра имеет спектр $S'_x(\omega) A(\omega) \exp[i\theta(\omega)]$, то среднеквадратическое искажение сигнала равно

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/\Delta t} |S'_x(\omega) - S'_x(\omega) A(\omega) \exp[i\theta(\omega)]|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/\Delta t} |S'_x(\omega)|^2 [1 - A^2(\omega)] d\omega - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/\Delta t} |S'_x(\omega)|^2 A(\omega) \cos \theta(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Вследствие неотрицательности $A(\omega)$ значение ε^2 является минимальным, когда при всех $\omega \leq \pi/\Delta t$ $\cos \theta(\omega) \equiv 1$. Таким образом, условие наименьшего искажения формы сигнала приводит к требованию

$$|\theta(\omega)| \equiv 0. \quad (\text{III.58})$$

Рассмотрим, насколько согласуется требование (III.58) с условием наименьших потерь при оценке времени прихода сигнала. Но сначала нужно договориться о том, как измеряется время прихода: по первому вступлению сигнала или по моменту наибольшего экстремума.

Рассмотрим первую возможность. При $\theta(\omega) = 0$ импульсная характеристика симметрична относительно нуля и, следовательно, не удовлетворяет принципу причинности. Если финитная аппроксимация имеет ненулевые отсчеты при $k = -m, \dots, +m$, то вступление полуфинитного сигнала сдвинется влево на $m \Delta t$, что означает большую ошибку измерения времени прихода. Таким образом, нуль-фазовые полосовые фильтры не могут быть использованы при измерении времени прихода сигнала по первому вступлению. В этом случае подходящий полосовой фильтр следует искать в классе причинных (физически осуществимых) систем, так как любой причинный фильтр не изменяет момента прихода полуфинитного сигнала.

При прохождении через причинный фильтр все гармоники входного сигнала «задерживаются», т. е. получают отрицательный сдвиг фазы [это означает, что выбирая значение фазы, надо взять $\theta(\omega) \leq 0$ при $\omega > 0$]. Из физических соображений наименьшие искажения формы получаются в том случае, когда каждая гармоническая составляющая входного сигнала задерживается наименьшим образом. Иначе говоря, фильтр должен быть минимально-фазовым в смысле того определения, которое было дано в § 6.

Поскольку $\theta(\omega)$ при $\omega \geq 0$ отрицательно, то требование минимальной фазовости согласуется с условием (III.58), если последнее применить к классу причинных фильтров L :

$$|\theta(\omega)| \rightarrow \min \quad \text{при } L' \in \mathcal{L}. \quad (\text{III.58}')$$

Так как преобразование $z = \exp(-i\omega \Delta t)$ переводит нижнюю полуплоскость $\text{Im } \omega \leq 0$ во внутреннюю часть круга $|z| \leq 1$, то из определения, данного в § 6, следует, что удовлетворяющий принципу причинности фильтр L' является минимально-фазовым, если его z -характеристика

$L(z)$ не имеет нулей в круге $|z| \leq 1$. Вот пример минимально-фазового цифрового оператора:

$$l_0 = 10, \quad l_1 = -7, \quad l_2 = 1, \quad l_k = 0 \quad \text{при} \quad k < 0 \quad \text{и} \quad k > 2.$$

Его z -характеристика равна $10 - 7z + z^2 = (2 - z)(5 - z)$, откуда видно, что оба корня $z_1 = 2$ и $z_2 = 5$ по модулю больше единицы.

В теории функций комплексного переменного показывается, что при $l_0 > l_1 > \dots > l_n \geq 0$ полином $l_0 + l_1 z + \dots + l_n z^n$ не имеет корней в круге $|z| \leq 1$ и поэтому также является характеристикой минимально-фазового фильтра.

Следует заметить, что функция $L(z)$, все нули которой расположены в круге $|z| \leq 1$, определяет фильтр, называемый максимально-фазовым.

При наличии помех первые вступления сигналов практически не наблюдаются, поэтому время прихода часто оценивают по моменту наибольшего экстремума. В этом случае искажения сигнала в области первого вступления несущественны. Основное требование к фильтру заключается в наименьшем сдвиге наибольшего экстремума. Для произвольных сигналов связь между фазовой характеристикой и положением основного максимума носит сложный характер, однако для узкополосных сигналов [в смысле определения из § 4; см. формулы (I.77) и (I.78)] можно показать, что сдвиг основного максимума близок к $-\theta(\omega_0)/\omega_0$. В частности, если входной сигнал является чисто синусоидальным $-f(t) = \cos(\omega_0 t - \varphi)$, то выходной сигнал будет равен $A(\omega_0) \cos[\omega_0 t - \varphi + \theta(\omega_0)]$, т. е. сдвинется ровно на $-\theta(\omega_0)/\omega_0$. Отсюда вытекает законность условия (III.58¹) независимо от удовлетворения принципа причинности.

Таким образом, приходим к следующим двум альтернативным уточнениям задачи полосовой фильтрации:

- (1) построение минимально-фазовых полосовых фильтров;
- (2) построение нуль-фазовых полосовых фильтров.

Спектральные характеристики фильтров (III.55) и (III.57), хотя и вещественны, являются в общем случае знакопеременными, поэтому оба фильтра не дают решения задачи (2). Их неминимальная фазовость следует из нарушения условия причинности.

Ниже обсуждаются возможные подходы к решению обеих задач.

При решении задачи (1) следует выделить две самостоятельные подзадачи: а) определение импульсной характеристики минимально-фазового фильтра по заданной амплитудной характеристике $A(\omega)$; б) выбор амплитудной или спектральной характеристики минимально-фазового фильтра.

Решение первой подзадачи рассматривается в § 27 и 33. Здесь остановимся на критерии, определяющем класс допустимых функций $A(\omega)$:

Критерий 1. Неотрицательная функция $A(\omega)$ тогда и только тогда является амплитудной характеристикой минимально-фазового финитного (или рекурсивного) фильтра, когда $A^2(\omega)$ является степенным полиномом (соответственно дробно-рациональной функцией) переменного $u = \cos \omega \Delta t$.

Доказательство. z -характеристика причинного финитного фильтра, имеющего $n + 1$ нулевых отсчетов, является полиномом степени n :

$$L(z) = P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k),$$

где z_k — корни полинома $P_n(z)$.

Из формулы $A^2(\omega) = L(\omega)L(-\omega)$ следует, что в терминах z -преобразований амплитудная характеристика определяется выражением

$$A^2(z) = L(z)L(1/z) = a_n^2 \prod_{k=1}^n (z - z_k)(1/z - z_k).$$

Раскрывая скобки и учитывая, что $(z + z^{-1}) = 2 \cos \omega \Delta t$, получим

$$A^2(\omega) = a_n^2 \prod_{k=1}^n (1 - 2z_k \cos \omega \Delta t + z_k^2).$$

Если z_k является комплексным корнем, то найдется сопряженный ему корень $z_j = z_k^*$, откуда

$$(1 - 2z_k \cos \omega \Delta t + z_k^2)(1 - 2z_j \cos \omega \Delta t + z_j^2) = (1 - 2x_k \cos \omega \Delta t + x_k^2 - y_k^2) + 4(y_k \cos \omega \Delta t + x_k y_k)^2,$$

где $x_k = \operatorname{Re} z_k$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$.

Таким образом, $A^2(\omega)$ является полиномом от $\cos \omega \Delta t$ с вещественными коэффициентами. Необходимость условия для финитных фильтров доказана.

Для доказательства достаточности нужно показать, что всякий неотрицательный полином $Q_n(\cos \omega \Delta t)$ представим в виде $P_n(z)P_n(1/z)$, где корни полинома $P_n(z)$ все по модулю больше единицы.

Пусть u_1, u_2, \dots, u_n — корни полинома $Q_n(u) = b_n \prod_{k=1}^n (u - u_k)$.

Подставляя $\cos \omega \Delta t = (z + z^{-1})/2$, получим

$$Q_n(\cos \omega \Delta t) = [b_n/(2z)^n] \prod_{k=1}^n (z^2 - 2zu_k + 1).$$

Легко проверить, что корни квадратного трехчлена в круглой скобке взаимно обратны:

$$(u_k + \sqrt{u_k^2 - 1})(u_k - \sqrt{u_k^2 - 1}) = 1.$$

Обозначим наибольший по модулю из этих чисел через z_k (очевидно, $|z_k| \geq 1$). Если $|z_k| = 1$ и если при $j < k$ эта пара корней уже встречалась, то z_k выбирается как сопряженное ранее выбранному значению.

Теперь

$$\begin{aligned} Q_n(\cos \omega \Delta t) &= [b_n/(2z)^n] \prod_{k=1}^n (z - z_k) \left(z - \frac{1}{z_k} \right) = \\ &= [b_n/2^n \prod_{k=1}^n (-z_k)] \prod_{k=1}^n (z - z_k) \left(\frac{1}{z} - z_k \right). \end{aligned}$$

Нам осталось показать, что полином

$$\sqrt{[b_n/2^n \prod_{k=1}^n (-z_k)] \prod_{k=1}^n (z - z_k)}$$

имеет вещественные корни. Из вещественности и неотрицательности $Q_n(\cos \omega \Delta t)$ легко вывести следующее.

1. Если u_k вещественно и $u_k < 1$, то z_k также вещественно и $-z_k > 0$.
2. Если u_k вещественно и $u_k > 1$, то при $b_n > 0$ число таких корней является четным, а при $b_n < 0$ — нечетным. При этом $z_k > 0$ и произведение $\prod_{k=1}^n (-z_k)$ по всем

таким корням имеет тот же знак, что и b_n .

3. Если u_k вещественно и $|u_k| < 1$, то такой корень обязательно является кратным (с четной кратностью). Модуль корня z_k равен единице и по условию выбора z_k такие корни образуют комплексно-сопряженные пары.

4. Если u_k комплексно, то ему отвечает комплексно-сопряженное значение $u_j = u_k^*$. При этом $z_j = z_k^*$.

Из этих фактов следует, что $\prod_{k=1}^n (z - z_k)$ является полиномом с вещественными

коэффициентами, а $b_n \prod_{k=1}^n (-z_k) > 0$.

Доказательство непосредственно переносится на рекурсивные фильтры, так как в этом случае $L(z)$ является отношением двух полиномов; при этом корни знаменателя должны быть больше единицы вследствие принципа причинности, а корни числителя больше единицы вследствие минимальной фазовости.

Строгая постановка задачи выбора спектральной и амплитудной характеристик минимально-фазового полосового фильтра приводит к исключительно сложным вычислительным проблемам. На практике выбор минимально-фазового фильтра осуществляют, рассматривая специальные классы функций $A(\omega)$, удовлетворяющих критерию 1 и позволяющих получить сколь угодно точную аппроксимацию $L_n(\omega)$. Согласно замечанию, сделанному в начале параграфа, достаточно ограничиться рассмотрением низкочастотных полосовых фильтров с интервалом пропускания $(0, \nu)$.

Примером удобного класса функций является следующий:

$$A_n^2(\omega) = \frac{1}{1 + \left[S\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) / S\left(\frac{\nu \Delta t}{2}\right) \right]^{2n}}, \quad (\text{III.59})$$

где $S(x)$ — одна из тригонометрических функций $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ или $1/\cos x$. Видно, что при $n \rightarrow \infty$ $A_n(\omega)$ стремится к идеальному низкочастотному фильтру.

Примем $S(x) = \operatorname{tg} x$, $n = 1$ и обозначим $\theta = \operatorname{tg} \frac{\nu \Delta t}{2}$. Тогда

$$A_n^2(\omega) = \frac{\theta^2 \cos(\omega \Delta t/2)}{(\theta^2 - 1) \cos^2(\omega \Delta t/2) + 1}.$$

Используя формулу $\cos^2 \alpha = (\cos 2\alpha + 1)/2$, а затем формулу Эйлера, получим после простых преобразований

$$A_n^2(\omega) = -\frac{\theta^2}{1-\theta^2} \frac{(1+z)^2}{z^2-2\gamma z+1},$$

где $\gamma = (1 + \theta^2)/(1 - \theta^2)$. Числитель имеет двухкратный корень $z = -1$.

Независимо от значения θ наибольший по модулю корень знаменателя

$$z_1 = (1 + |\theta|)/(1 - \theta^2).$$

Легко видеть, что $A_n^2(\omega)$ можно записать в виде произведения $L(z)L(1/z)$, где

$$L(z) = \theta [(1 + |\theta|)/(1 - \theta^2)] (1 + z)/(z - z_1).$$

Так как постоянный множитель при фильтрации обычно несуществен, то рекурсивный фильтр может быть взят в виде

$$y_k = x_k + x_{k-1} + y_{k-1}/z_1.$$

Амплитудная характеристика полученного фильтра при $\nu = 0,628/\Delta t$ приведена на рис. 13 (кривая 4).

Перейдем к решению задачи (2). Если амплитудная характеристика $A(\omega)$ уже задана, то импульсная характеристика нуль-фазового фильтра определится формулой

$$l_k = \frac{\Delta t}{\pi} \int_0^{\pi/\Delta t} A(\omega) \cos k\omega \Delta t d\omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В том случае, когда выбор $A(\omega)$ не гарантирует финитность импульсной характеристики, целесообразно применить метод усечения для некоторого m .

Строгое решение задачи (2) в классе финитных фильтров, очевидно, заключается в определении неотрицательного тригонометрического полинома (III.56), который наименее отклоняется от $L'_\Pi(\omega)$ в классе всех таких неотрицательных полиномов.

Будем искать решение в классе тригонометрических полиномов четной степени $m = 2s$, представимых в виде

$$A(\omega) = B^2(\omega), \tag{III.60}$$

где

$$B(\omega) = b_0 + 2 \sum_{k=1}^s b_k \cos k\omega \Delta t \tag{III.61*}$$

(коэффициенты b_k вещественны). Полином $B(\omega)$ может быть знакопеременным.

Задача, таким образом, сводится к отысканию коэффициентов b_0, b_1, \dots, b_s . Если коэффициенты b_j определены, то, выражая $B^2(\omega)$ при помощи формулы

$$2 \cos k\omega \Delta t \cos j\omega \Delta t = \cos(k+j)\omega \Delta t + \cos(k-j)\omega \Delta t$$

в виде (III.56) и приравнивая коэффициенты при косинусах одинаковой кратности, найдем выражение коэффициентов l_k :

$$l_0 = b_0^2 + 2 \sum_{k=1}^s b_k^2;$$

$$l_k = b_0 b_k + 2 \sum_{j=1}^{s-k} b_j b_{j+k} + \sum_{j=0}^{k-1} b_j b_{k-j}, \quad k = 1, \dots, 2s.$$

Приведем без доказательства простой критерий, определяющий введенный здесь класс амплитудных характеристик в терминах z -преобразований:

Критерий 2. Амплитудная характеристика $A(\omega)$ тогда и только тогда представима формулами (III.60) и (III.60'), когда выполнены следующие два условия: 1) все корни уравнений $z^m L(z) = 0$ являются кратными; 2) если z_k — корень, то z_k^* , $1/z_k$ и $1/z_k^*$ также являются корнями.

Пусть качество низкочастотного полосового фильтра оценивается максимальным значением $A(\omega)$ на интервале гашения ($\omega_s, \pi/\Delta t$) при условии, что $A(0) = 1$. Так как этот критерий эквивалентен наименьшему отклонению $|B(\omega)| = +\sqrt{A(\omega)}$ от нуля на указанном интервале, приходим к задаче, которая была выше решена при помощи полиномов Чебышева.

Используя это решение, получим

$$B(\omega) = P_{2s} \left(\cos \frac{\omega \Delta t}{2} \right),$$

где функция $P_{2s}(u)$ определена формулой (III.57).

Если расхождение между фильтрами оценивается в среднеквадратическом смысле, то вместо отклонения $A(\omega)$ от $L'_\Pi(\omega)$ удобнее рассматривать отклонение $\sqrt{A(\omega)}$ от $\sqrt{L'_\Pi(\omega)}$. Так как $\sqrt{L'_\Pi(\omega)} = L'_\Pi(\omega)$, мы получаем задачу среднеквадратической аппроксимации фильтра $L'_\rho(\omega)$ фильтром $B(\omega)$. Ясно, что последний должен совпадать с соответствующим среднеквадратическим усечением фильтра $L'_\Pi(\omega)$, поскольку усеченный фильтр (III.55) имеет спектральную характеристику типа (III.60').

Таким образом,

$$b_k = \begin{cases} l_h^{(n)}, & k = 0, 1, \dots, s \\ 0, & k > s. \end{cases}$$

Возникает вопрос: можно ли применить рекурсивные фильтры для реализации нефинитных нуль-фазовых фильтров? Разумеется, непосредственные рекурсивные реализации нуль-фазовых фильтров невозможны, так как эти фильтры не удовлетворяют условию причинности. Однако если воспользоваться описанным в § 25 методом расщепления двухсторонних операторов, то рекурсивная реализация нуль-фазового фильтра оказывается возможной при условии, что $A(\omega)$ удовлетворяет критерию 1.

§ 14. Реализация линейных преобразований в спектральной форме

Преобразование Фурье может рассматриваться не только как средство теоретического анализа линейных систем стационарного типа, но и как способ их реализации, поскольку в спектральной форме свертка функций сводится к простейшей арифметической операции — умножению. Вместе с тем спектральная форма фильтрации по необходимости связана с осуществлением прямого и обратного преобразований Фурье, довольно громоздких в вычислительном отношении. Практическая возможность спектральной формы фильтрации появилась только в связи с созданием алгоритмов быстрого преобразования Фурье, среди которых ведущее место занимает алгоритм Кулея — Тьюки.

Эффективность алгоритма Кулея — Тьюки обнаруживается только при анализе достаточно «длинных» сигналов (при этом чем больше число отсчетов, тем эффективнее алгоритм). Поэтому возникает необходимость в точных условиях, определяющих целесообразность спектральной формы цифровой фильтрации. Эти условия, формулировка которых и представляет здесь основную задачу, должны базироваться на оценке вычислительной сложности той или иной формы цифровой фильтрации.

Сначала оценим объем вычислений при непосредственном выполнении цифровой свертки. Пусть числовая последовательность $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, состоящая из N отсчетов, поступает на вход цифрового фильтра с импульсной характеристикой $\{l_1, l_2, \dots, l_M\}$, имеющей длину $M < N$. Удерживая в правой части цифровой свертки (III.1) только ненулевые слагаемые, запишем ее так:

$$y_k = \sum_{j=\max(1, k-M)}^{\min(k, N)} l_{k-j} x_j, \quad k = 1, 2, \dots, N + M.$$

Легко увидеть, что при $M \leq k \leq N$ каждый отсчет y_k вычисляется при помощи M элементарных операций, каждая из которых содержит одну операцию сложения и одну операцию умножения. Следовательно, для вычисления всех отсчетов y_k в диапазоне $M \leq k \leq N$ требуется $(N - M + 1) \cdot M$ элементарных операций. Каждый отсчет y_k в диапазоне от 1 до $M - 1$ определяется при помощи k операций, а все такие отсчеты потребуют $\sum_1^{M-1} k = \frac{1}{2} M (M - 1)$ операций. Такое же количество операций нужно для получения отсчетов в диапазоне значений k от $N + 1$ до $N + M$. Итак, всего для выполнения цифровой свертки во временной форме понадобится

$$K_{\text{вп}} = (N - M + 1) M + \frac{1}{2} M (M - 1) + \frac{1}{2} M (M - 1) = NM. \quad (\text{III.61})$$

Рассмотрим задачу вычисления спектра финитной функции $x(t)$, отличной от нуля в интервале $(0, T)$ и заданной в точках $k \Delta t$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$. Спектр ее

$$S_x(\omega) = \int_0^T x(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (\text{III.62})$$

На интервале $(0, T)$ функция $x(t)$ вполне определяется своим рядом Фурье. Коэффициенты c_j этого ряда с точностью до множителя $1/T$ определяются правой частью равенства (III.62) при $\omega = 2\pi j/T$:

$$c_j = \frac{1}{T} S_x(2\pi j/T),$$

поэтому спектр функции имеет смысл считать в точках $0, \pm \Delta\omega, \pm 2\Delta\omega, \dots$, где $\Delta\omega = 2\pi/T$.

Выбор квадратной формулы для вычисления интеграла (III.62) зависит от принимаемых предположений об $x(t)$. Обычно предполагается, что $x(t)$ близка к функциям из некоторого основного класса, для которого квадратурная формула является точной. Если основной класс образуется функциями с ограниченным спектром при $\omega_{\text{гp}} \leq \pi/\Delta t$, то точный результат (в этом классе) дает интегрирование по способу прямоугольников:

$$\hat{S}_x(j\Delta\omega) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta t) \exp(-ij\Delta\omega k\Delta t) = \Delta t \sum_{k=0}^{N-1} x_k \exp\left(-\frac{i2\pi}{T} jk\right). \quad (\text{III.63})$$

Действительно, вне промежутка $(0, T)$ $x(t) \equiv 0$, поэтому при сопоставлении формул (III.63) с (III.3) видим, что $\hat{S}_x(j\Delta\omega) = S'_x(j\Delta\omega)\Delta t$, а присоединив утверждение 2 из § 9, делаем заключение, что при $|j\Delta\omega| \leq \pi/\Delta t$ $\hat{S}_x(j\Delta\omega) = S_x(j\Delta\omega)$.

Поскольку оценка спектра $\hat{S}_x(j\Delta\omega)$, определяемая формулой (III.63), периодически зависит от j (с периодом, равным N), то независимыми могут быть только N отсчетов $\hat{S}_x(j\Delta\omega)$; учтя условие $\hat{S}_x(-j\Delta\omega) = \hat{S}_x^*(j\Delta\omega)$, получим, что спектр достаточно определить в $N/2$ точках, скажем, $0, \Delta\omega, 2\Delta\omega, \dots, (N/2-1)\Delta\omega$.

Оценим объем вычислений при использовании формулы (III.63). Для каждого из $N/2$ значений j нужно вычислить две суммы:

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos \frac{2\pi}{N} jk \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin \frac{2\pi}{N} jk.$$

Если условиться, что значения тригонометрических функций считаются заранее, то всего понадобится $2N \cdot N/2 = N^2$ элементарных операций. Необходимость вычисления тригонометрических сумм вида (III.63) возникает и в более сложных квадратурных формулах, которые следует использовать при анализе сигналов, обогащенных высокочастотными компонентами. В частности, при линейной интерполяции отсчетов $x(k\Delta t)$ имеет место следующая квадратурная формула:

$$2 \frac{1 - \cos(2\pi j/N)}{(2\pi j/T)^2 \Delta t} \left[\frac{x_0 + x_{N-1}}{2} + \sum_{k=1}^{N-2} x_k \exp\left(-i \frac{2\pi}{N} jk\right) \right].$$

Квадратурная формула широко распространенного способа Филона, основанного на параболической интерполяции отсчетов $x(k\Delta t)$, содержит

две суммы вида (III.63) — одну по четным, а другую по нечетным отсчетам x ($k \Delta t$). Во всех случаях основной объем машинного времени падает на вычисление тригонометрических сумм.

Возможность сокращения объема элементарных операций при вычислении сумм вида (III.63) связана с тем обстоятельством, что из-за периодичности тригонометрических функций каждое значение x_k приходится несколько раз (при различных j) умножать на одно и то же значение синуса или косинуса. При разумной организации вычислений, в которой счет ведется одновременно для всех j , этого можно избежать. Способ Кулея — Тыюки, краткое описание которого приведено ниже, представляет собой только одну из многочисленных предлагавшихся идей, ведущих к ускорению вычислительного процесса.

Пусть тригонометрическую сумму

$$S(j) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k W^{jk}, \quad \text{где } W = \exp[i2\pi/N], \quad (\text{III.64})$$

нужно сосчитать в точках $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Условимся, что число отсчетов является степенью двойки (этого легко добиться введением нулевых отсчетов): $N = 2^m$. Тогда всякое число k ($0 \leq k \leq N-1$) можно представить в виде суммы:

$$k = 2^{m-1}k_{m-1} + \dots + 2k_1 + k_0, \quad (\text{III.65})$$

где каждый коэффициент k_α ($0 \leq \alpha \leq m-1$) равен единице или нулю. Формула (III.65) есть не что иное как представление числа k в двоичной системе.

Аналогично запишем номер j :

$$j = 2^{m-1}j_{m-1} + \dots + 2j_1 + j_0. \quad (\text{III.66})$$

Теперь формулу (III.64) можно переписать так:

$$S(j_{m-1}, \dots, j_0) = \sum_{k_0=0}^1 \dots \sum_{k_{m-1}=0}^1 x(k_{m-1}, \dots, k_0) W^{j(2^{m-1}k_{m-1} + \dots + k_0)}. \quad (\text{III.67})$$

Рассмотрим множитель $W^{j2^{m-1}k_{m-1}}$. Вследствие того что $W^{2^\mu} = \exp(i2\pi) = 1$ для любого $\mu < m$

$$W^{j2^{m-\mu}k_{m-1}2^{\mu-1}} = W^{2^{\mu-1}j_{m-\mu}k_{m-1}} = 1,$$

так как $2^{m-\mu-1}j_{m-\mu}k_{m-1}$ — целое число. Отсюда, учитывая (III.66), получим

$$W^{j2^{m-1}k_{m-1}} = W^{j_0 k_{m-1}} 2^{m-1}.$$

Используя полученное соотношение, формулу (III.67) запишем так:

$$S(f_{m-1}, \dots, f_0) = \sum_{k_0=0}^1 \dots \sum_{k_{m-2}=0}^1 A_1(j_0; k_{m-2}, \dots, k_0) W^{j(2^{m-2}k_{m-2} + \dots + k_0)},$$

где A_1 — это внутренняя сумма по k_{m-1} :

$$A_1(j_0; k_{m-2}, \dots, k_0) = \sum_{k_{m-1}=0}^1 x(k_{m-1}, \dots, k_0) W^{j_0 k_{m-1} 2^{m-1}}.$$

Продолжая этот процесс дальше и используя тождество

$$W^{j k_{m-\nu} 2^{m-\nu}} = W^{(i_{\nu-1} 2^{\nu-1} + \dots + j_0) k_{m-\nu} 2^{m-\nu}},$$

получим для ν -той внутренней суммы:

$$A_\nu(j_{\nu-1}, \dots, j_0; k_{m-\nu-1}, \dots, k_0) = \sum_{k_{m-\nu}=0}^1 A_{\nu-1} W^{(i_{\nu-1} 2^{\nu-1} + \dots + j_0) k_{m-\nu} 2^{m-\nu}} \quad (\text{III.68})$$

При $\nu = m$ все суммы будут сосчитаны, поэтому

$$A_m(j_{m-1}, \dots, j_0) = S(j_{m-1}, \dots, j_0).$$

Таким образом, формула (III.68) выражает рекуррентный процесс, который за m шагов дает требуемые значения тригонометрической суммы (III.64). На первом шаге осуществляется переход от массива значений $\{x_k\} = \{x(k_{m-1}, \dots, k_0)\}$ к массиву $\{A_1(j_0; k_{m-2}, \dots, k_0)\}$, на ν -том шаге — переход от массива $\{A_{\nu-1}(j_{\nu-2}, \dots, j_0; k_{m-\nu}, \dots, k_0)\}$ к массиву $\{A_\nu(j_{\nu-1}, \dots, j_0; k_{m-\nu-1}, \dots, k_0)\}$. Как и исходный массив $\{x_k\}$, все эти массивы содержат по $2^m = N$ значений.

Правая часть формулы (III.68) состоит из двух слагаемых, отвечающих двум значениям $k_{m-\nu}$:

$$A_\nu = A_{\nu-1}(j_{\nu-2}, \dots, j_0; 0, \dots, k_0) + \\ + A_{\nu-1}(j_{\nu-2}, \dots, j_0; 1, \dots, k_0) W^{(i_{\nu-1} 2^{\nu-1} + \dots + j_0) 2^{m-\nu}}.$$

Произведение комплексного числа $A_{\nu-1}$ на степень W требует выполнения четырех умножений и двух сложений. Следовательно, одно значение A_ν выполняется за четыре элементарных операции. На каждом шагу затрачивается $4N$, а за m шагов — $4mN$ элементарных операций. Поскольку $m = \log_2 N$, то окончательно

$$K = 4N \log_2 N. \quad (\text{III.69})$$

Применяя спектральную форму цифровой свертки, после вычисления спектра выходного сигнала нужно еще вычислить спектральную характеристику $L(\omega)$ (если она не задана), перемножить $S_x(\omega)$ и $L(\omega)$ и вычислить обратное преобразование Фурье.

Поскольку входной сигнал и импульсная характеристика имеют разную длину (N и M соответственно), для определения их спектров, вообще говоря, требуется различный объем вычислений. Однако надо учесть следующие условия согласования спектров:

1) спектры входного и выходного сигналов и спектральная характеристика должны быть определены при одних и тех же значениях частоты $j\Delta\omega$ ($j = 1, 2, \dots, N_1$);

2) количество значений частоты N_1 должно быть достаточным для определения выходного сигнала, имеющего $N + M$ отсчетов.

Покажем, что выполнения этих условий можно добиться, если и входной сигнал и импульсную характеристику считать заданными на одном и том же интервале $[0, (N + M)\Delta t]$, что достигается введением нулевых отсчетов.

Будем считать, что интегрирование осуществляется по способу прямоугольников (III.63). Этот способ дает (с учетом множителя Δt) значения $S'_x(j\Delta\omega)$ и $L(j\Delta\omega)$, поэтому после перемножения обоих спектров получим $S'_y(j\Delta\omega)$ — значения дискретного преобразования Фурье последовательности $\{y_k\}$:

$$S'_y(j\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N_1-1} y_k \exp(-ij\Delta\omega k \Delta t), \quad N_1 = N + M.$$

Примем в этом равенстве $\Delta\omega = 2\pi/N_1\Delta t$, умножим обе части на $\exp(i2\pi jp/N_1)$ и просуммируем по j от 0 до $N_1 - 1$:

$$\sum_{j=0}^{N_1-1} S'_y(j\Delta\omega) \exp(i2\pi/N_1 jp) = \sum_{k=0}^{N_1-1} y_k \sum_{j=0}^{N_1-1} \exp[i2\pi/N_1 j(p-k)].$$

Воспользуемся следующим известным равенством:

$$\sum_{j=0}^{N_1-1} \exp[i2\pi/N_1 j(p-k)] = \begin{cases} N, & p = k \\ 0, & p \neq k, \end{cases}$$

отсюда

$$y_p = \frac{1}{N_1} \sum_{j=0}^{N_1-1} S'_y(j\Delta\omega) \exp(i2\pi/N_1 jp), \quad p = 0, 1, \dots, N_1 - 1. \quad (\text{III.70})$$

Таким образом, N_1 значений спектра $S'_y(j\Delta\omega)$ однозначно определяют N_1 значений выходной последовательности $\{y_k\}$.

Пренебрегая $4(N + M)$ умножениями, требуемыми для выполнения произведения комплексных спектров $S'_x(\omega)$ и $L'(\omega)$, получим согласно (III.69) общий объем элементарных операций, определяемый трехкратным применением быстрого преобразования Фурье числовой последовательности длиной $N + M$:

$$K_{\text{ср}} \cong 12(N + M) \log_2(N + M). \quad (\text{III.71})$$

Из сравнения формул (III.64) и (III.71) следует, что спектральная форма предпочтительнее, если

$$MN > 12(N + M) \log_2(N + M). \quad (\text{III.72})$$

В том что это неравенство может быть выполнено, легко убедиться, приняв $M = N$, ибо неравенство

$$N > 24 \log_2 2N$$

всегда имеет место при достаточно больших N (а точнее, при $N \geq 250$).

Условия применимости спектральной формы расширяются, если один и тот же фильтр применяется к большому числу входных сигналов или фильтр задается своей спектральной характеристикой. Тогда отпадает необходимость рассчитывать $L(\omega)$. Вместо оценки (III.71) будем иметь более низкую:

$$K_{\text{сп}} \cong 8(N + M) \log_2(N + M),$$

а вместо (III.72) — новое условие:

$$NM \geq 8(N + M) \log_2(N + M).$$

Несколько слов нужно сказать о физической осуществимости линейных преобразований в спектральной форме. На первый взгляд может показаться, что применение спектров снимает условие финитности импульсной характеристики. Однако это не так, по крайней мере при использовании формулы прямоугольников (III.63). Действительно, при выводе формулы (III.70) фактически было показано, что задание N значений любой спектральной функции взаимнооднозначно определяет N значений числовой последовательности. Следовательно, условие финитности импульсной характеристики эквивалентно условию конечности набора частот $j\Delta\omega$, в которых вычисляется спектр. На самом деле справедливо и более общее утверждение: задача реализации линейного преобразования при помощи цифровой свертки и задача реализации этого же преобразования в спектральной форме при интегрировании по способу прямоугольников эквивалентны.

Одноканальные фильтрации

Глава IV

ОСНОВЫ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ СЕЙСМИКИ

§ 15. Асимптотическое представление спектра на высоких частотах

В этой главе высокочастотная сейсмика рассматривается, во-первых, с точки зрения особенностей распространения высокочастотных составляющих сейсмического сигнала в неоднородных средах, во-вторых, с точки зрения применения фильтров с полосой пропускания в области высоких частот регистрируемого сигнала с целью увеличения разрешающей способности сейсморазведки.

И первый аспект высокочастотной сейсмики, ведущий к лучевому методу решения уравнений динамики упругих сред, и второй аспект, составляющий современную теорию высокочастотной фильтрации, основываются на высокочастотной асимптотике спектров полуфинитных функций.

Пусть $f(t)$ — полуфинитная функция, имеющая начало в точке $t = 0$, и пусть в этой точке имеет место разрыв некоторого порядка m (т. е. скачок производных порядка $\geq m$). Ясно, что наличие скачка производной означает наличие в спектре высокочастотных составляющих, при этом чем ниже порядок скачка, тем больше высокочастотных составляющих. Пусть, например, $m = 0$. Поскольку спектр полуфинитной функции

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt,$$

то, интегрируя по частям [положив $\exp(-i\omega t) d\omega = (-1/i\omega) d \exp(-i\omega t)$], получим

$$S(\omega) = -\frac{f(+0)}{i\omega} + \frac{1}{i\omega} \int_0^{\infty} f'(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Видно, что при $\omega \rightarrow \infty$ спектр $S(\omega)$ убывает не быстрее, чем $1/\omega$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что если имеется скачок порядка n , то в спектре $S(\omega)$ должны быть составляющие, которые при $\omega \rightarrow \infty$ убывают, как $1/\omega^{n+1}$. Отсюда следует, что поведение спектра на больших частотах во многом определяется поведением полуфинитной функции в точке ее начала.

Эти соображения физического характера ведут к следующему асимптотическому представлению спектра на больших частотах.

Рассмотрим сначала интеграл

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) h(t) dt, \quad (\text{IV.1})$$

где $g(t)$ и $h(t)$ — произвольные интегрируемые на интервале (α, β) функции. Представляя его в виде

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dh^{(-1)}(t), \quad h^{(-1)}(t) = \int_{\alpha}^t h(u) du$$

и интегрируя по частям, получим

$$I = g(\beta) h^{(-1)}(\beta) - g(\alpha) h^{(-1)}(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} g^{(1)}(t) h^{(-1)}(t) dt.$$

Повторяя эту операцию N раз, будем иметь

$$I = \sum_{n=0}^N S_n + R_N, \quad (\text{IV.2})$$

где

$$S_n = (-1)^n [g^{(n)}(\beta) h^{(-n-1)}(\beta) - g^{(n)}(\alpha) h^{(-n-1)}(\alpha)],$$

$$R_N = (-1)^N \int_{\alpha}^{\beta} g^{(N)}(t) h^{(-N)}(t) dt;$$

здесь $g^{(n)}(t)$ — n -ая производная, а $h^{(-n)}(t)$ — повторный интеграл соответствующих функций.

Теперь применим формулу (IV.2) к текущему спектру полуфинитной функции

$$S_T(\omega) = \int_0^T f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

(искомый спектр $S(\omega)$ равен пределу $S_T(\omega)$ при $T \rightarrow \infty$). Примем $g(t) = f(t)$, $h(t) = \exp(-i\omega t)$, $\alpha = 0$, $\beta = T$.

Учитывая, что в этом случае

$$h^{(-n)}(t) = \frac{(-1)^n}{(i\omega)^n} \exp(-i\omega t),$$

получим соответствующее выражение для S_n и R_N :

$$S_n = (-1)^n \left[\frac{(-1)^{n+1} f^{(n)}(T)}{(i\omega)^{n+1}} \exp(-i\omega T) - \frac{(-1)^{n+1} f^{(n)}(0+)}{(i\omega)^{n+1}} \right];$$

$$R_N = \frac{1}{(i\omega)^N} \int_0^T f^{(N)}(t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Если $T \rightarrow 0$, то $f^{(n)}(T) \rightarrow 0$ [в силу того что $f(t)$ дифференцируема и при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю], следовательно,

$$S_n(\omega) \simeq f^{(n)}(+0)/(i\omega)^{n+1}. \quad (\text{IV.3})$$

Предположим теперь, что $f^{(N)}(t)$ абсолютно интегрируема, тогда интеграл

$$\int_0^{\infty} f^{(N)}(t) \exp(-i\omega t) dt$$

существует и, будучи преобразованием Фурье абсолютно интегрируемой функции, стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Поэтому остаток R_N при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к нулю быстрее ω^{-N} .

Теперь из формулы (IV.2) получаем

$$S(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(+0)}{(i\omega)^{n+1}} + o(\omega^{-N}).$$

Пусть $f^{(n)}(t)$ интегрируема при всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Тогда полученная формула справедлива при всех N и можно принять

$$S(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(+0)}{(i\omega)^{n+1}} + r(\omega),$$

где $r(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$ быстрее, чем любая степень $1/\omega$.

Но $f^{(n)}(+0) = 0$ при $n < m$, где m — порядок скачка в «начале» функции $f(t)$, поэтому окончательно

$$S(\omega) \simeq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(+0)}{(i\omega)^{n+1}}, \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (\text{IV.4})$$

Ясно, что не любой полуфинитный сигнал допускает представление (IV.4), поскольку при выводе предполагалось, что при всех n производные $f^{(n)}(t)$ интегрируемы на $(0, \infty)$. Если $f(t)$ — квазисинусоидальный полуфинитный сигнал вида

$$a(t) \cos[\omega t - \varphi(t)],$$

то для выполнения указанных условий достаточно потребовать интегрируемость производных $a^{(n)}(t)$ на $(0, \infty)$ и ограниченность производных $\varphi^{(n)}(t)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема. Асимптотическое представление (IV.4) выполнено, если: 1) при $t \rightarrow \infty$ огибающая $a(t)$ убывает, как $\exp(-\alpha t)$ (или быстрее); 2) начиная с некоторого t' огибающая $a(t)$ монотонна; 3) при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ производные $\varphi^{(n)}(t)$ ограничены:

$$\varphi^{(n)}(t) \leq A_n < \infty.$$

Доказательство этого утверждения основывается на том, что для любого n величина $f^{(n)}(t)$ ограничена и при $t > t'$ убывает, как $\exp(-\alpha t)$.

§ 16. Лучевое разложение волнового поля

Если среда неоднородна, т. е. упругие характеристики λ , μ и ρ являются функциями координат, то уравнения динамики упругих сред не могут быть сведены к двум независимым уравнениям типа (I.9) и (I.10). Это означает, что продольные и поперечные колебания уже не являются независимыми процессами: продольные волны при своем распространении порождают поперечные, и наоборот.

Строгое решение динамических уравнений теории упругости для произвольных функций $\lambda(x, y, z)$, $\mu(x, y, z)$ и $\rho(x, y, z)$ построить не удается. При построении асимптотических решений особую роль играет лучевой метод, разработанный А. С. Алексеевым, В. М. Бабичем и Б. Я. Гельчинским.

Рассмотрим распространение упругих возмущений от конечного источника и в безграничной неоднородной среде. Функции $\lambda(x, y, z)$, $\mu(x, y, z)$ и $\rho(x, y, z)$ будем считать непрерывными вместе с их производными. Воздействие в источнике, помещенном в начале координат, задается функцией $p(t)$.

Спектральная характеристика среды в точке наблюдения M должна определяться для каждой компоненты смещения. Совокупность этих характеристик образует векторную спектральную характеристику $\vec{u}(\omega, M)$. В спектральной характеристике $\vec{u}(\omega, M)$ целесообразно выделить множитель $\exp[-i\omega t(M)]$, связанный с временем распространения возмущения от источника до точки M :

$$\vec{u}(\omega, M) = \vec{V}(\omega, M) \exp[-i\omega t(M)].$$

Ясно, что $\vec{V}(\omega, M)$ в каждой точке M является спектром векторной функции $\vec{l}(t, M)$, имеющей начало при $t=0$.

Предположим, что импульсная характеристика $\vec{l}(t, M)$ имеет такую структуру

$$\vec{l}(t, M) = \vec{u}_0(M) \delta(t) + \vec{k}(t, M),$$

где компоненты векторной функции $\vec{k}(t, M)$ являются непрерывными полуфинитными функциями времени, удовлетворяющими условиям из предыдущего параграфа. Мотивы, по которым в импульсную характеристику вводится сингулярная составляющая $\vec{u}_0 \delta(t)$ ясны: в однородной среде (являющейся частным случаем неоднородной) импульсная характеристика для плоских и сферических волн содержит только такую сингулярную составляющую [см., например, формулу (1.40)].

Для того чтобы получить высокочастотную составляющую поля смещений, нужно вычислить обратное преобразование Фурье от произведения $\vec{u}(\omega, M) S_p(\omega)$, интегрируя по соответствующему интервалу частот.

Зафиксировав некоторую достаточно высокую частоту ω_0 и взяв интеграл Фурье в форме (I.63), получим

$$\vec{u}(t, M) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\infty} \vec{V}(\omega, M) \exp\{i\omega[t - \tau(M)]\} d\omega. \quad (\text{IV.5})$$

Будем считать, что ω_0 достаточно велико, чтобы к спектру функции $\vec{k}(t, M)$ можно было применить асимптотическое представление (IV.4). Следовательно, при $\omega > \omega_0$

$$\vec{V}(\omega, M) \cong \vec{u}_0(M) + \sum_{n=0}^{\infty} [\vec{k}^{(n)}(+0, M)/(i\omega)^{n+1}].$$

Обозначив $\vec{u}_{n+1}(M) = \vec{k}^{(n)}(+0, M)$, получим более удобную запись:

$$\vec{V}(\omega, M) \cong \sum_{n=0}^{\infty} [\vec{u}_n(M)/(i\omega)^n]. \quad (\text{IV.6})$$

Независимо от того, сходится ряд (IV.6) равномерно или является расходящимся асимптотическим представлением, его можно почленно интегрировать — полученный новый ряд будет иметь тот же смысл. Поэтому, подставив ряд (IV.6) в интеграл (IV.5), получим

$$\vec{u}(t, M) \cong \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n(M) f_n(t - \tau), \quad (\text{IV.7})$$

где

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{S_p(\omega)}{(i\omega)^n} \exp(i\omega t) d\omega. \quad (\text{IV.8})$$

Полученный ряд называется лучевым, коэффициенты $\vec{u}_n(M)$ — комплексными амплитудами n -го порядка, функции $f_n(t)$ — комплексными формами n -го порядка.

Учитывая теорему о спектре производной, делаем заключение, что

$$f_n(t) = (d/dt) f_{n+1}(t),$$

следовательно, чем ниже порядок комплексной формы, тем она резче.

В лучевом разложении (IV.7) неизвестными являются только комплексные амплитуды $\vec{u}_n(M)$, так как комплексные формы формулой (IV.8) выражаются через известный спектр $S_p(\omega)$.

Для отыскания комплексных амплитуд надо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}_n(M) f_n[t - \tau(M)] \quad (\text{IV.9})$$

подставить в уравнения динамики (операцию взятия вещественной части всегда можно осуществить позже). Этот метод поиска решения и назы-

вается лучевым. Обычно в лучевом методе изучается только старший член, который при $\vec{u}_0(M) \neq 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ совпадает с нулевым. Нулевой член, очевидно, отвечает сингулярной составляющей импульсной характеристики.

Уравнения динамической теории упругости для неоднородных сред, получаемые путем подстановки закона Гука (I.6) в уравнения динамического равновесия (I.5), имеют следующий вид:

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} + \text{grad } \lambda \text{ div } \vec{u} + A \text{grad } \mu = \rho (\partial^2 \vec{u} / \partial t^2), \quad (\text{IV.10})$$

где символ A обозначает матрицу, строки которой суть вектора

$$(\vec{\partial} u / \partial x) + \text{grad } u_x, \quad (\vec{\partial} u / \partial y) + \text{grad } u_y \quad \text{и} \quad (\vec{\partial} u / \partial z) + \text{grad } u_z.$$

Нас будут интересовать только физические следствия, вытекающие из лучевого метода, поэтому при их выводе будем опускать промежуточные выкладки и преобразования (заинтересованный читатель найдет их в специальной литературе). Подстановка лучевого ряда (IV.9) в уравнение (IV.10) дает рекуррентную последовательность систем линейных алгебраических уравнений относительно $\vec{u}_n(M)$:

$$(\lambda + \mu) (\vec{u}_n, \text{grad } \tau) \text{grad } \tau + \mu \vec{u}_n |\text{grad } \tau|^2 - \rho \vec{u}_n = \mathbf{M} [\vec{u}_n] - \mathbf{L} [\vec{u}_{n-2}], \quad (\text{IV.11})$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

где \mathbf{M} и \mathbf{L} — дифференциальные операторы, действующие по пространственным переменным; при этом оператор \mathbf{L} есть суть оператор правой части уравнения (IV.10), (\vec{a}, \vec{b}) — символ скалярного произведения.

Полагая в (IV.11) $n = 0$, получим уравнение, которому должна удовлетворять комплексная амплитуда нулевого порядка:

$$(\lambda + \mu) (\vec{u}_0, \text{grad } \tau) \text{grad } \tau + \mu \vec{u}_0 |\text{grad } \tau|^2 - \rho \vec{u}_0 = 0. \quad (\text{IV.12})$$

Однородное алгебраическое уравнение имеет ненулевое решение только в том случае, когда определитель системы отличен от нуля. Переписав уравнение (IV.12) в покомпонентной записи и составив матрицу системы, состоящую, как нетрудно видеть, из элементов

$$(\lambda + \mu) (\partial \tau / \partial x_i) (\partial \tau / \partial x_k) + (\mu |\text{grad } \tau|^2 - \rho) \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, δ_{ik} — символ Кронекера), получим величину определителя

$$\Delta = [(\lambda + 2\mu) |\text{grad } \tau|^2 - \rho] (\mu |\text{grad } \tau|^2 - \rho)^2.$$

Равенство $\Delta = 0$ возможно только в одном из следующих случаев:

$$|\text{grad } \tau|^2 = \rho / (\lambda + 2\mu) = 1/v_1^2 \quad (\text{IV.13})$$

и

$$|\text{grad } \tau|^2 = \rho / \mu = 1/v_2^2. \quad (\text{IV.14})$$

Подстановка первого из этих условий в уравнение (IV.12) дает равенство

$$(\vec{u}_0, \text{grad } \tau) \text{grad } \tau = |\text{grad } \tau|^2 \vec{u}_0,$$

откуда

$$\vec{u}_0 = C(M) \text{grad } \tau, \quad (\text{IV.15})$$

где $C(M)$ — некоторая скалярная функция.

Подстановка второго условия в (IV.12) дает равенство

$$(\vec{u}_0, \text{grad } \tau) = 0, \quad (\text{IV.16})$$

означающее ортогональность векторов \vec{u}_0 и $\text{grad } \tau$.

Условия (IV.13) и (IV.14) описывают возмущение различных типов. Первое из них распространяется со скоростью продольных волн v_p и совершает колебания, поляризованные согласно (IV.15) в направлении распространения фронта $\tau(M) = \text{const}$. Второе распространяется со скоростью поперечных волн v_s и совершает колебания, поляризованные согласно (IV.16) в плоскости, касательной к фронту. Оба процесса независимы, так как и порознь, и в сумме удовлетворяют уравнению (IV.12). Таким образом, в нулевом приближении лучевого ряда распространение упругих колебаний происходит, как в однородной среде: продольные и поперечные колебания (обозначим их $\vec{u}_0^{(P)}$ и $\vec{u}_0^{(S)}$) распространяются независимо друг от друга.

Уравнение

$$|\text{grad } \tau_p(M)|^2 = 1/v_p^2(M)$$

— суть известное из геометрической сейсмологии уравнение поля времен. Следовательно, распространение наиболее высокочастотных (быстро меняющихся) частей волнового поля подчиняется законам геометрической сейсмологии, в частности принципу Ферма.

Рис. 14

Продолжим рассмотрение свойств нулевого приближения $\vec{u}_0^{(P)}$. Скалярная функция $C(M)$ определяется из условий разрешимости уравнения (IV.11) при $n = 1$. Так как определитель системы равен нулю, то получаемое уравнение будет разрешимо только в том случае, когда его правая часть, равная $M [u_0^{(P)}]$, ортогональна всякому вектору,

удовлетворяющему однородному уравнению (IV.12), в частности вектору $\text{grad } \tau$. Отсюда условие разрешимости для продольной волны (IV.15) имеет вид

$$(\mathbf{M}[C(M)\text{grad } \tau], \text{grad } \tau) = 0.$$

Исследование этого уравнения показывает, что для всех точек M любого фиксированного луча, выходящего из источника и продолженного по законам геометрической сейсмологии [т. е. ортогонально к семейству фронтов $\tau_P(M) = \text{const}$], выполняется равенство

$$C(M) = \sqrt{\frac{v_P(M)}{\rho(M)}} \frac{\psi}{\sqrt{I(M)}}, \quad (\text{IV.17})$$

где константа ψ зависит, вообще говоря, от выбора луча: $\psi = \psi(\alpha, \theta)$ (здесь α и θ — углы в полярной системе координат), \sqrt{I} — так называемое геометрическое расхождение, определяемое равенством

$$d\sigma(M) = I(M)d\Omega, \quad (\text{IV.18})$$

где $d\sigma$ — площадь сечения лучевой трубки, образованной пучком лучей, выходящим под телесным углом $d\Omega$ в направлении ранее выбранного луча (рис. 14). Подставляя (IV.17) в (IV.15) и учитывая, что $\text{grad } \tau_P = (1/v_P) \vec{n}(M)$, где $\vec{n}(M)$ — вектор нормали к фронту в точке M , получим, что

$$\vec{u}^{(P)} = u_0^P \vec{n}(M),$$

где

$$u_0^P = \psi(\alpha, \theta) / \sqrt{\rho(M)v_P(M)I(M)}. \quad (\text{IV.19})$$

Выписав такое же выражение для некоторой другой точки — M_0 , расположенной на этом же луче, найдем с учетом равенства (IV.18) следующую формулу:

$$u_0^{(P)}(M) = \sqrt{\frac{\rho(M_0)v_P(M_0)d\sigma_0}{\rho(M)v_P(M)d\sigma}} u_0^{(P)}(M_0). \quad (\text{IV.20})$$

Эта формула показывает, что для расчета нулевого приближения во всей среде его достаточно задать на некоторой поверхности Σ_0 , окружающей источник: для любой точки, лежащей вне этой поверхности, найдется луч, пересекающий Σ_0 .

Если $u_0^{(P)}$ является комплексной величиной, то нулевой член лучевого ряда (IV.7), равный $\text{Re } u_0^{(P)} f_0(t - \tau) \vec{n}$, вычисляется так: пусть $u_0^{(P)} = |u_0^{(P)}| \exp(i\chi_0)$, тогда

$$\vec{u}_0^{(P)}(t, M) = |u_0^{(P)}| [\cos \chi_0 \text{Re } f_0(t - \tau_P) - \sin \chi_0 \text{Im } f_0(t - \tau_P)]$$

или, учитывая формулы (I.63),

$$\vec{u}_0^{(P)}(t, M) = |u_0^{(P)}| [f(t - \tau_P) \cos \chi + \bar{f}(t - \tau_P) \sin \chi], \quad (\text{IV.21})$$

где

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\omega_0}^{\infty} S_p(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Если сигнал $f(t)$ является узкополосным вида $a(t) \cos \omega_1 t$ и если аргумент χ зависит от M , то в соответствии с приведенным выше анализом из § 4 [см. формулу (I.81)] фазовый голограф волны $\vec{u}_0^{(P)}$ будет иметь вид $\tau_p(M) + \chi(M)/\omega_1$.

Подсчитаем поток энергии, которую несет волна $\vec{u}_0^{(P)}$ через сечение $d\sigma$ лучевой трубки. Энергия колебаний единичного объема пропорциональна $\rho(M) |u_0^{(P)}(M)|^2$, поэтому в единицу времени через площадку $d\sigma$ переносится энергия

$$dW = \rho(M) |u_0^{(P)}(M)|^2 v_p d\sigma.$$

Подставив сюда формулы (IV.18) и (IV.19), получим

$$dW = \psi^2(\alpha, \theta) d\Omega,$$

что означает постоянство потока энергии через любое сечение лучевой трубки. Грубо говоря, в нулевом приближении энергия не переходит через стенки лучевой трубки. Сохранение потока энергии, таким образом, приближенно выполняется только для наиболее высокочастотной составляющей волнового поля.

Наконец, отметим следующее важное свойство нулевого приближения лучевого ряда. Если в среде имеется граница разрыва непрерывности упругих характеристик, обладающая необходимыми свойствами гладкости, и если в окрестности границы построить лучевые разложения для падающей, отраженных Р и S и преломленных Р и S волн, то выполнение граничных условий приводит к тому, что в каждой точке границы нулевое приближение ведет себя, как локально-плоская волна. Это означает, что отражение — преломление нулевого приближения осуществляется локально по законам плоских волн. Амплитуда нулевого приближения отраженной или преломленной волны некоторого типа q в точке M_1 границы

$$u_0^{(q)}(M_1) = A_q(M_1) u_0^P(M_1),$$

где $A_q(M_1)$ — коэффициент отражения — преломления для плоских волн, подсчитанный в точке M_1 для соответствующего угла падения.

Найдем комплексную амплитуду нулевого члена волны \vec{u}^q в некоторой внутренней точке среды M_2 (см. рис. 14). Для этого дважды воспользуемся формулой (IV.20), выразив $u_0^{(P)}(M_1)$ через $u_0^{(P)}(M_0)$ и $u_0^{(q)}(M_2)$ через $u_0^q(M_1)$:

$$\begin{aligned} u_0^{(q)}(M_2) &= A_q(M_1) \sqrt{\frac{\rho(M_1) v_q(M_1^\dagger)}{\rho(M_2) v_q(M_2)}} \sqrt{\frac{\rho(M_0) v_p(M_0)}{\rho(M_1^\dagger) v_p(M_1^\dagger)}} \times \\ &\times \sqrt{\frac{d\sigma_0}{d\sigma_2}} \sqrt{\frac{d\sigma_1^\dagger}{d\sigma_1^\dagger}} u_0^P(M_0), \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

где знак «минус» указывает предел соответствующих величин при $M \rightarrow M_1$ по траектории падающего луча, а знак «плюс» — этот предел при $M \rightarrow M_1$ по траектории волны \vec{u}_0^q .

Простые геометрические рассуждения показывают, что

$$d\sigma_1^+ / d\sigma_1^- = \cos \alpha_q / \cos \alpha_0, \quad (IV.23)$$

где α_0 — угол падения; α_q — угол выхода волны $\vec{u}_0^{(q)}$ из точки M_1 (т. е. угол отражения или преломления). В соответствии с анализом из § 4 при $\alpha_0 > \alpha_{кр}$ угол α_q для преломленной волны равен $\pi/2$, поэтому и нулевое приближение преломленной волны оказывается равным нулю. Старший член лучевого разложения будет иметь более высокий порядок, что свидетельствует о более низкочастотном характере колебаний.

Нулевое приближение в среде, содержащей несколько границ, состоит из бесконечного числа продольных и поперечных волн¹. При этом амплитуды волн, претерпевших конечное число актов отражения — преломления, легко могут быть определены по формулам (IV.22) и (IV.23) после построения их траекторий по законам геометрической сейсмологии. По этой методике не могут оцениваться волны, в которых преломление имело место при углах падения, равных критическому, а также порождаемые ими вторичные волны (в частности, головные).

Возникает вопрос: существуют ли такие ситуации, когда нулевой член лучевого ряда совпадает с точным решением уравнений динамики? Ответ является положительным. Наряду с тривиальными примерами — плоская и сферическая волны в однородной среде, — укажем и более сложные случаи: 1) падение плоской волны на плоскую границу раздела двух однородных полупространств; 2) нормальное падение плоской волны на однородный слой между однородными полупространствами. Заметим, что отыскивая в § 2 коэффициенты c_k импульсной характеристики мы, по существу, пользовались лучевыми представлениями (но они не привлекались для построения спектральной характеристики).

Несколько слов о последующих членах лучевого ряда. Поскольку матрица системы (IV.11) вырождена, то при каждом $n = 1, 2, \dots$ решение будет состоять из решения соответствующего однородного уравнения (IV.12) (для волны $\vec{u}^{(P)}$) оно имеет вид $c_n(M) \text{ grad } \tau_P$, т. е. относится к продольному типу) и вектора, ортогонального к $\text{grad } \tau_P$. Последний образует так называемую примесную составляющую, поляризованную в плоскости, касательной к фронту. Таким образом, более гладкие составляющие возмущения $\vec{u}^{(P)}$ содержат поперечные волны. Примесные составляющие носят вторичный характер по отношению к нулевому члену (так как они выражаются через $\vec{u}_0^{(P)}$). Поскольку сферическая волна в однородной среде не имеет примесных составляющих, то они своим возникновением обязаны неоднородности среды и отличию волны $\vec{u}_0^{(P)}$ от сферической (в частности, из-за несферичности фронта и изменения амплитуды вдоль фронта, т. е. из-за неравномерности характеристики направленности).

¹ Число волн в конечном интервале времени $(0, T)$ всегда конечно.

§ 17. Свободные и вынужденные колебания на выходе высокочастотного фильтра

В соответствии с лучевым разложением волновое поле, возбуждаемое в толстослойной среде, содержит (среди прочих колебаний) амплитудно-выраженные возмущения (волны), обладающие резкими фронтами и распространяющиеся по законам геометрической сейсмики. Поэтому задача изучения среды может быть сведена к измерению времен прихода отдельных волн и тем самым выражена как обратная кинематическая задача геометрической сейсмики.

Практическая ценность кинематической постановки заключается в том, что при ее реализации отпадает необходимость контроля за динамическим режимом источников и приемников: поле времен τ (M) не зависит ни от функции источника $p(t)$, ни от характеристики направленности $\psi(\theta, \alpha)$, ни от других динамических факторов, с трудом поддающихся измерению.

Точность измерения времен лимитируется наличием интерференции волн, число которых на любом конечном интервале времени быстро возрастает с увеличением числа границ. По этой причине реализация обратной кинематической задачи для слоистых сред существенно связана с задачей разрешения отдельных волн.

Широко применяемым средством увеличения разрешающей способности является метод высокочастотной фильтрации. Интуитивное обоснование этого метода состоит в том, что переход к более высоким частотам при одновременном расширении полосы пропускания позволяет получить более короткие собственные процессы фильтра. Для примера обратимся к контуру RLC , спектральная характеристика которого рассмотрена в § 3. Если уменьшить каждый из параметров L и C в k раз ($L' = L/k$ и $C' = C/k$), то новые значения коэффициента затухания h , выражающего ширину полосы пропускания, и видимой частоты n_0 будут равны: $h' = kh$ и $n'_0 = kn_0$. Из формулы (I.54) тогда получим, что импульсная характеристика $l(t)$, не изменяя формы, станет короче в k раз. Из определения импульсной характеристики следует, что этого обоснования достаточно, если на вход фильтра подаются очень короткие импульсы типа δ -функции. Однако высокочастотные фильтры применяются к регистрации более длинных, чем импульсная характеристика, сигналов. В этом и следующем параграфах дается более строгое обоснование метода высокочастотной фильтрации, предложенное С. А. Кацем.

В дальнейшем условимся называть элементарным сигналом функцию $f(t)$, выражающую отдельную волну в нулевом приближении лучевого ряда.

Спектральная характеристика разрешающего фильтра L зависит от априорно имеющейся информации о форме элементарных сигналов. Если о сигналах вообще ничего не известно, то задача разрешения становится бессмысленной, так как любая сумма элементарных сигналов может быть принята за новый элементарный сигнал. Если форма излучаемого в среду импульса точно не задана, то естественно искать фильтр, рассчитанный на целый класс сигналов определенного типа (ценой потери раз-

решающей силы для каждого фиксированного сигнала из этого класса). В этой ситуации необходимо сформулировать такие свойства $f(t)$, которые, во-первых, характеризуют достаточно широкий класс реальных сейсмических сигналов, а, во-вторых, существенны для определения основных особенностей колебаний на выходе высокочастотного фильтра.

Предположим, что сигналы $f(t)$ 1) являются полуфинитными квазисинусоидальными функциями вида $a(t) \cos [\omega_0 t - \varphi(t)]$, огибающая которых имеет единственный максимум и при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю не медленнее, чем $\exp(-\alpha t)$, а фаза $\varphi(t)$ (и ее производные) есть гладкие функции; 2) претерпевают при $t = 0$ скачок порядка $m < \infty$; 3) имеют спектр $S(\omega)$, полюса которого a_1, a_2, \dots, a_r расположены в полосе $|\operatorname{Re} \omega| < \Omega$ (при $\Omega \gg \omega_0$).

В согласии с теоремой из § 15 спектр $S(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ представляется асимптотическим рядом

$$S(\omega) \cong \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(+0)}{(i\omega)^{n+1}}, \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (\text{IV.24})$$

Будем предполагать, что при $|\operatorname{Re} \omega| > \Omega$ в (IV.24) достаточно ограничиться первым членом ряда

$$S(\omega) \cong A/(i\omega)^{m+1}, \quad (\text{IV.25})$$

где $A = f^{(m)}(+0)$. Примером такого импульса является затухающая синусоида (II.25). При $\omega \rightarrow \infty$ ее спектр (II.26) приближенно равен $a\omega_1/(i\omega)^2$, что и следовало ожидать, так как затухающая синусоида имеет в точке $t = 0$ скачок первой производной.

Фильтр L со спектральной характеристикой $L(\omega)$ будем считать высокочастотным относительно сигнала $f(t)$, если все полюса b_1, b_2, \dots, b_n спектральной характеристики лежат вне полосы $|\operatorname{Re} \omega| < \Omega$, содержащей особенности спектра сигнала:

$$\operatorname{Re} b_s > \Omega, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{IV.26})$$

Напомним, что вещественные части комплексных чисел b_s выражают собственные частоты фильтра L , а мнимые части — его коэффициенты затухания.

Как известно (см. § 3), спектральная характеристика фильтра с сосредоточенными параметрами является дробно-рациональной функцией вида (I.47). Предполагая для простоты, что все полюса спектральной характеристики имеют порядок 1 и что спектральная характеристика имеет единственный нуль порядка l при $\omega = 0$, получим следующее выражение $L(\omega)$:

$$L(\omega) = \frac{q(i\omega)^l}{i^n \prod_{s=1}^n (\omega - b_s)}, \quad (\text{IV.27})$$

В качестве примера рассмотрим фильтр RLC , изображенный на рис. 15. Функционирование фильтра описывается спектральной характеристикой:

$$L(\omega) = (i\omega)^2 / (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega h), \quad (IV.28)$$

где $\omega_0^2 = 1/LC$; $h = R/2L$. Эта характеристика при $\omega_0 > h$ имеет два полюса

$$b_1 = n_0 + ih \quad \text{и} \quad b_2 = -n_0 + ih, \quad (IV.28')$$

где $n_0 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$, откуда

$$L(\omega) = \omega^2 / (\omega - n_0 - ih)(\omega + n_0 - ih).$$

Данный фильтр является высокочастотным по отношению к затухающей синусоиде (II.25), спектр которой имеет полюса

$$a_1 = \omega_1 + i\alpha \quad \text{и} \quad a_2 = -\omega_1 + i\alpha, \quad (VI.29)$$

если $n_0 \gg \omega_1$.

Наша задача — выбрать такой фильтр L со спектральной характеристикой (IV.27), на выходе которого длительность элементарного сигнала была бы по возможности минимальной. Ясно, что выбор фильтра сводится к выбору параметров l , n и b_s ($s = 1, 2, \dots, n$).

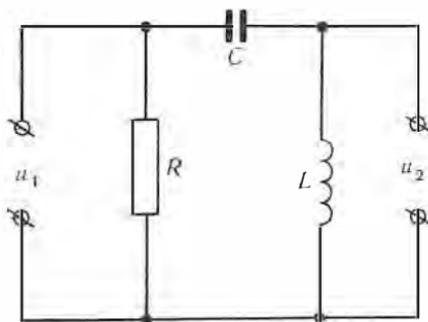


Рис. 15

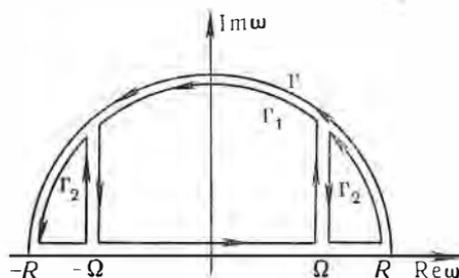


Рис. 16

Для того чтобы найти факторы, влияющие на выбор параметров высокочастотного фильтра, нужно рассмотреть реакцию фильтра, на вход которого подан элементарный сигнал $f(t)$. Поскольку спектр выходного сигнала $y(t)$ равен $S(\omega)L(\omega)$, то, используя обратное преобразование Фурье, получим выражение для $y(t)$:

$$y(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)L(\omega) \exp(i\omega t) dt. \quad (IV.30)$$

По сравнению с собственными процессами фильтра L сигнал $f(t)$ является медленно затухающей квазисинусоидальной функцией. Поэтому реакция фильтра будет близка к его реакции на начинающуюся в момент времени $t = 0$ синусоиду. А эта реакция, как известно, пред-

ставляет собой сумму свободных колебаний с основной частотой, близкой к собственной частоте фильтра, и вынужденных колебаний с частотой сигнала. Естественно предположить (и это действительно так), что разделение выходного сигнала на две составляющие будет иметь место и в нашем случае.

Формальное определение свободных и вынужденных колебаний на выходе высокочастотного фильтра получим, применив к интегралу (IV.30) лемму Жордана [см. формулу (I.50)]. Так как сигнал $f(t)$ полуфинитен, а фильтр L — физически осуществим, то подынтегральная функция

$$F(\omega) = (1/2\pi) S(\omega) L(\omega) \exp(i\omega t) \quad (\text{IV.31})$$

в нижней полуплоскости комплексного переменного ω полюсов не имеет, поэтому

$$y(t) \equiv 0 \quad \text{при } t < 0.$$

В соответствии с леммой Жордана выходной сигнал $y(t)$ при положительных значениях t может быть определен интегралом

$$\int_{\Gamma} F(\omega) d\omega \quad (\text{IV.32})$$

по любому контуру Γ , содержащему все полюса функции $F(\omega)$; например, по контуру, состоящему из отрезка $(-R, R)$ вещественной оси и полуокружности C_R радиуса R , где $R > \max\{|a_k|, |b_s|\}$ (рис. 16).

Прибавим и вычтем в формуле (IV.32) интегралы от $F(\omega)$ вдоль прямых $\text{Re } \omega = \pm \Omega$ от $\text{Im } \omega = 0$ до пересечения с C_R . Тогда интеграл (IV.32) распадется на два. Первый из них, взятый по контуру Γ_1 , ограничивающему область с полюсами a_k спектра $S(\omega)$, определяет вынужденные колебания при $t \geq 0$:

$$y_{\text{вын}}(t) = \int_{\Gamma_1} F(\omega) d\omega = 2\pi i \sum_{k=1}^r \text{Res}(F, a_k), \quad (\text{IV.33})$$

а второй, взятый по двухкомпонентному контуру Γ_2 , ограничивающему полюса b_s спектральной характеристики $L(\omega)$, определяет свободные колебания при $t \geq 0$:

$$y_{\text{св}}(t) = \int_{\Gamma_2} F(\omega) d\omega = 2\pi i \sum_{s=1}^n \text{Res}(F, b_s). \quad (\text{IV.34})$$

Рассмотрим сначала свободные колебания. По условию полюса спектральной характеристики имеют порядок 1, поэтому вычет $F(\omega)$ в полюсе b_s определится согласно формуле (I.51):

$$\text{Res}(F, b_s) = \lim_{\omega \rightarrow b_s} (\omega - b_s) F(\omega).$$

Но вблизи полюсов b_s

$$F(\omega) \cong \frac{1}{2\pi} \frac{A}{(i\omega)^{m+1}} \frac{q(i\omega)^l}{i^n \prod_{j=1}^n (\omega - b_j)} \exp(i\omega t),$$

следовательно, вычет $F(\omega)$ в точке b_s

$$\text{Res}(F, b_s) \cong \frac{1}{2\pi} \frac{A}{(ib_s)^{m+1}} \frac{q(ib_s)^l}{i^n \prod_{(j \neq s)} (b_s - b_j)} \exp(ib_s t).$$

Отсюда

$$y_{\text{св}}(t) \cong A_1 \sum_{s=1}^n \frac{[(ib_s)^{l-m-1}]}{\prod_{(j \neq s)} (b_s - b_j)} \exp(ib_s t), \quad t \geq 0, \quad (\text{IV.35})$$

где $A_1 = Aq/i^{n-1}$.

Из полученной формулы видно, что свободные колебания являются суммой затухающих комплексных гармоник с декрементами затухания $\text{Im } b_s$ и собственными частотами $\text{Re } b_s$. Амплитуда каждой гармоники зависит от значений A и m , следовательно, от амплитуды и порядка скачка на фронте элементарного сигнала (чем больше A и меньше m , тем выше амплитуда свободных колебаний). Можно сказать, что наличие свободных колебаний обусловлено вступлением элементарного сигнала.

Применим формулу (IV.35) к оценке свободных колебаний на выходе фильтра со спектральной характеристикой (IV.28), на вход которого подается затухающая синусоида (II.25). В этом случае имеем: $b_1 = n_0 + ih$, $b_2 = -n_0 + ih$, $A = a\omega_1$, $q = 1$, $l = 2$, $m = 1$, следовательно,

$$y_{\text{св}}(t) \cong \frac{a\omega_1}{n_0} (\exp -ht) \sin n_0 t, \quad t \geq 0. \quad (\text{IV.36})$$

В данном конкретном случае можно получить и точное выражение для $y_{\text{св}}(t)$, вычислив интеграл (IV.34) для

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{a\omega_1 (i\omega)^2 \exp(i\omega t)}{[\omega_1^2 + (\alpha + i\omega)^2] (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega h)}. \quad (\text{IV.37})$$

Опуская длительные преобразования, получим

$$y_{\text{св}}(t) = \frac{a\omega_1}{n_0} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{f^2 + s^2} \sqrt{g^2 + s^2}} \exp(-ht) \sin(n_0 t + \beta), \quad t \geq 0, \quad (\text{IV.38})$$

где $f = \omega_1 + n_0$, $g = n_0 - \omega_1$, $s = h - \alpha$, $\beta = 2\varphi - \alpha_1 - \alpha_2$,

$$\varphi = \arctg h/h_0, \quad \alpha_1 = \arctg (h - \alpha)/(n_0 + \omega_1),$$

$$\alpha_2 = \arctg (h - \alpha)/(n_0 - \omega_1).$$

Колебания (IV.36) и (IV.38) отличаются только амплитудой и фазой (при этом приближение тем точнее, чем больше n_0 и h сравнительно с ω_1 и α соответственно). Основные параметры — частота n_0 и затухание h

в обеих формулах одинаковы. Для нас важен вывод, что длительность свободных колебаний имеет порядок $1/h$ и определяется только затуханием фильтра (не зависит от входного сигнала).

Перейдем к определению вынужденных колебаний. Для этого нужно сначала найти вычет $F(\omega)$ в точке a_k . Учитывая, что функция $L(\omega)$ в точке a_k по условию особенностей не имеет, получим

$$\text{Res}(F; a_k) = \frac{1}{2\pi} \frac{g(ia_k)^l \sigma_k}{i^n \prod_{s=1}^n (a_k - b_s)},$$

где $\sigma_k = \text{Res}(S; a_k)$.

Отсюда по формуле (IV.33)

$$y_{\text{вын}}(t) = A_2 \sum_{k=1}^r \frac{(ia_k)^l \sigma_k}{\prod_{s=1}^r (a_k - b_s)} \exp(ia_k t), \quad A_2 = q/i^{n-1}, \quad t \geq 0. \quad (\text{IV.39})$$

Из полученного выражения следует, что вынужденные колебания являются суммой затухающих гармоник с частотами $\text{Re } a_k$ и затуханиями $\text{Im } a_k$. Как и следовало ожидать, частота и затухание (т. е. длительность) вынужденных колебаний определяются свойствами сигнала.

Отыскав в точках $a_1 = \omega_1 + i\alpha$ и $a_2 = -\omega_1 + i\alpha$ вычеты функции $F(\omega)$, определяемой формулой (IV.37), найдем вынужденные колебания для нашего иллюстративного примера:

$$y_{\text{вын}}(t) = a \frac{\omega_1^2 + \alpha^2}{\sqrt{j^2 + s^2} \sqrt{g^2 + s^2}} \exp(-\alpha t) \sin(\omega_1 t + \gamma), \quad t \geq 0, \quad (\text{IV.40})$$

где $\gamma = 2\varphi + \alpha_1 + \alpha_2$.

При $h_0 \gg \omega_1$ и $h \gg \alpha$ амплитуда вынужденных колебаний

$$A_{\text{вын}} \cong a \frac{\omega_1^2 + \alpha^2}{\omega_0^2} \quad (\text{IV.41})$$

§ 18. Разрешающая способность высокочастотного фильтра

Поскольку длительность вынужденных колебаний не меньше длительность самого сигнала $f(t)$, то при наличии интенсивных вынужденных колебаний разрешающая способность фильтра улучшаться не будет. Поэтому повышение разрешающей способности может быть достигнуто только путем увеличения сравнительной интенсивности свободных колебаний и уменьшения их длительности. И того, и другого можно добиться варьированием параметров фильтра L , поскольку амплитуда вынужденных колебаний и форма свободных колебаний зависят в основном от параметров спектральной характеристики $L(\omega)$.

Прежде чем сформулировать окончательные результаты, приведем несколько соображений физического характера. Длительность собственных колебаний определяется, очевидно, затуханием собственного процесса фильтра L , которое должно быть большим. Следовательно, спектр $L(\omega)$ должен быть достаточно широким. Но это не означает, что левый

срез спектральной характеристики $L(\omega)$ может быть как угодно пологим. Действительно, мы уже отмечали, что свободные колебания можно трактовать как реакцию фильтра L на скачок $f(t)$ в точке $t = 0$. Но в полосе частот $(-\Omega, \Omega)$ спектральная характеристика (IV.27)

$$L(\omega) \cong B(i\omega)^l, \quad B = \text{const.} \quad (\text{IV.42})$$

Вспомнив теорему о спектре производной, делаем заключение, что в полосе $(-\Omega, \Omega)$ фильтр L действует как дифференцирующая ячейка l -того порядка (т. е. функция $f(t)$ дифференцируется l раз). Ясно, что чем выше порядок m производной, претерпевающей скачок в момент $t = 0$, тем более высокого порядка надо взять производную для обнаружения этого скачка. При $(m + 1)$ -кратном дифференцировании сигнала $f(t)$ производная будет содержать δ -функцию, которая и укажет на наличие скачка функции $f(t)$ при $t = 0$. Поэтому нужно потребовать

$$l > m. \quad (\text{IV.43})$$

Фильтр с характеристикой (IV.28) удовлетворяет этому условию в отношении затухающей синусоиды (так как $l = 2 > m = 1$). При разрешении менее резких сигналов условия (IV.43) можно добиться при последовательном соединении фильтров этого типа.

Значение l определяет крутизну левого склона частотной характеристики $|L(\omega)|$, поэтому увеличение крутизны левого склона приводит к относительному ослаблению вынужденных колебаний и за счет этого — к повышению разрешающей способности. Как только свободные колебания становятся доминирующими, дальнейшее увеличение крутизны либо не меняет разрешающей способности, либо уменьшает ее вследствие увеличения длительности свободных колебаний. В связи с этим целесообразно сдвигать вправо основную частоту фильтра, не меняя крутизны в области низких частот.

Сформулированные выше выводы были сделаны на основе рассуждений наводящего характера. Попытаемся придать им более строгую форму. Качество работы разрешающего высокочастотного фильтра можно оценивать следующими параметрами: во-первых, длительностью свободных колебаний, которая может измеряться величиной $\tau = 1/\alpha_{\min}$, где $\alpha_{\min} = \min_{(s)} \text{Im } b_s$ — наименьший из коэффициентов затухания фильтра L , во-вторых, — отношением амплитуды свободных колебаний $A_{\text{св}}$ к амплитуде вынужденных колебаний $A_{\text{вын}}$: $\eta = A_{\text{св}}/A_{\text{вын}}$. Кроме того, чтобы обеспечить выделение свободных колебаний на фоне шумов, нужно контролировать абсолютную величину свободных колебаний $A_{\text{св}}$ (сравнительно с некоторой постоянной A_* , зависящей от уровня шумов).

Проиллюстрируем эти величины на примере затухающей синусоиды и фильтра (IV.28). Длительность свободных колебаний измеряется величиной $\tau = 1/h$. Для того чтобы имело место увеличение разрешенности записи, необходимо потребовать, чтобы $h \gg \alpha$ или, вспомнив выражение h через параметры фильтра, $R/2L \gg \alpha$.

Определив амплитуду свободных и вынужденных колебаний по формулам (IV.36) и (IV.41), найдем

$$\eta = \omega_1 \omega_0^2 / (\alpha^2 + \omega_0^2) \sqrt{\omega_1^2 - h^2}.$$

Если затухающая синусоида является узкополосной, а фильтр (IV.28) работает в периодическом режиме, то $h \ll \omega_0$ и $\alpha \ll \omega_0$, откуда $\eta = \omega_0/\omega_1 \gg \gg 1$, т. е. требуемое условие выполнено. Однако величину ω_0 нельзя выбирать очень большой вследствие уменьшения амплитуды $A_{св}$.

Уменьшение τ при одновременном увеличении η и $A_{св}$ является противоречивой задачей. Корректная постановка задачи состоит в минимизации τ при условиях $\eta > \eta_*$ и $A_{св} > A_*$.

В нашей иллюстративной задаче эта постановка заключается в максимизации $R/2L$ при условиях

$$C(2L - R^2C) < \frac{4\omega_1^2}{\eta_*^2(\alpha^2 + \omega_1^2)^2}$$

и

$$\frac{4L^2C\alpha\omega_1^2}{4L - R^2C} > A_*^2.$$

Разумеется, данные неравенства могут оказаться несовместимыми, что означает необходимость их ослабления. Решение задачи в общем случае требует использования методов нелинейного программирования. Более просто получить решение, когда один или два из трех параметров R , L и C фиксированы. Но мы не будем останавливаться на методах решения этой задачи, и не только потому, что это отвлечет на ненужные технические детали, но и потому, что решение подобных задач выводит за рамки рассматриваемой теории, в которой не предполагается точное задание формы сигнала. Вместо того чтобы точно решать поставленную задачу, попытаемся исследовать, как меняются параметры τ , η и $A_{св}$ при изменении параметров спектральной характеристики $L(\omega)$.

Переменными параметрами спектральной характеристики $L(\omega)$, определяемой формулой (IV.27), являются полюсы b_s . Однако в такой «многопараметровой» постановке провести нужное исследование трудно, поэтому следует сузить класс спектральных характеристик, сделав их зависящими только от одного параметра. Исходя из рассуждений § 17, естественно рассматривать спектральные характеристики, у которых увеличение собственной частоты влечет за собой пропорциональное изменение длительности собственных колебаний.

Рассмотрим класс спектральных характеристик $L_p(\omega)$ вида (IV.27) с заданными значениями n и l и полюсами вида

$$b_s^{(p)} = pb_s \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

где b_s — фиксированные комплексные числа, а p — переменная действительная величина, каждое значение которой определяет конкретный фильтр $L_p(\omega)$ из данного класса.

При увеличении p пропорционально растут собственные частоты $\text{Re } b_s^{(p)}$ и затухания $\text{Im } b_s^{(p)}$, следовательно, уменьшается значение τ_p , равное τ/p , где τ — длительность свободного колебания на выходе фильтра $L(\omega)$ с полюсами b_s , τ_p — длительность свободных колебаний на выходе $L_p(\omega)$. Легко видеть, что в этом классе фильтров произведение τ_p на любую собственную частоту является постоянным и равно $\tau \cdot \text{Re } b_s$.

Основной вопрос, который нас будет интересовать, заключается в проверке повышения разрешающей способности при увеличении параметра p . Подставляя (IV.35) pb_s вместо b_s , получим свободные колебания на выходе фильтра L_p :

$$y_{\text{св}}^{(p)}(t) \cong A_1 p^{l-m-n} \sum_{s=1}^n \frac{b_s^{l-m-1}}{\prod_{(j \neq s)} (b_s - b_j)} \exp(ipb_s t) \cong p^{l-m-n} y_{\text{св}}(pt),$$

откуда

$$A_{\text{св}}^{(p)} = p^{l-m-n} A_{\text{св}},$$

где $A_{\text{св}}$ и $A_{\text{св}}^{(p)}$ — амплитуды свободных колебаний на выходе фильтров L и L_p соответственно. Из условий $n \geq l$ и $m \geq 0$ следует, что при $p > 1$ $A_{\text{св}}^{(p)} < A_{\text{св}}$, т. е. амплитуда свободных колебаний уменьшается. Длительность колебаний $y_{\text{св}}^{(p)}(t)$ в p раз меньше длительности $y_{\text{св}}(t)$.

Теперь обратимся к формуле (IV.39) для вынужденных колебаний. По условию $\text{Re } a_k \ll \text{Re } b_s$; кроме того, при достаточно больших p имеем также $\text{Im } a_k \ll p \text{Re } b_s$, поэтому

$$y_{\text{вын}}^{(p)}(t) \cong p^{-n} A_2 \sum_{k=1}^r \frac{(ia_k)^l \sigma_k}{\prod_{j=1}^r b_j} \exp(ia_k t) \cong p^{-n} y_{\text{вын}}(t),$$

следовательно,

$$A_{\text{вын}}^{(p)} = p^{-n} A_{\text{вын}}$$

(длительности колебаний $y_{\text{вын}}^{(p)}(t)$ и $y_{\text{вын}}(t)$ одинаковы).

Составим отношение η_p :

$$\eta_p = \frac{A_{\text{св}}^{(p)}}{A_{\text{вын}}^{(p)}} = p^{l-m} \frac{A_{\text{св}}}{A_{\text{вын}}} = p^{l-m} \eta.$$

Из полученной формулы вытекает, что если условие (IV.43) выполнено, то при увеличении p амплитуда свободных колебаний растет сравнительно с вынужденными колебаниями. Поэтому в данном классе фильтров значение p выгодно увеличивать. Но слишком большие значения p брать нельзя из-за уменьшения абсолютной величины $A_{\text{св}}^{(p)}$. Максимальное значение p определится из условия

$$p \leq \sqrt[n+m-l]{A_{\text{св}}/A_*},$$

или

$$p \leq \sqrt[n+m-l]{A_{\text{св}}/A_*}. \quad (\text{IV.44})$$

Таким образом, если для некоторого фильтра L известно отношение $A_{\text{св}}/A_*$ и если условие (IV.43) выполнено, то неравенство (IV.44) показывает, во сколько раз одновременно можно увеличить собственные частоты и затухания этого фильтра.

Мы доказали следующее утверждение: пусть для некоторого фильтра L , крутизна которого в области низких частот удовлетворяет условию (IV.43), выполнено неравенство $A_{\text{св}} > A_*$, тогда разрешающая способ-

ность только увеличится, если его собственную частоту и затухание одновременно увеличить в p раз, где константа p удовлетворяет неравенству (IV.44). Это утверждение по существу является точным выражением сформулированного в начале предыдущего параграфа вывода, что при увеличении основной частоты высокочастотного фильтра нужно во столько же раз увеличивать ширину его полосы пропускания.

Напомним, что условие $A_{св} > A_*$, ограничивающее сверху значение p , связано с присутствием помех. Как правило, помехи имеют равномерный в области высоких частот спектр. Поэтому при увеличении p , означающем перемещении спектральной характеристики фильтра вправо, интенсивность помех на выходе фильтра будет уменьшаться незначительно, тогда как амплитуда свободных колебаний уменьшается быстрее, чем $1/p^n$. Следовательно, при больших p свободные колебания не будут видны на фоне помех. Если бы не это обстоятельство, то при $p \rightarrow \infty$ можно было бы получить сколь угодно малую длительность свободных колебаний и сколь угодно большое отношение $A_{св}/A_{вын}$, т. е. сколь угодно высокую разрешающую способность фильтра.

Таким образом, действительный предел разрешающей способности связан с наличием помех. Чем больше уровень помех, тем меньше допустимое значение константы p и тем меньше разрешающая способность фильтра.

Глава V

ОБРАТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В ЗАДАЧАХ СЕЙСМОРАЗВЕДКИ

§ 19. Обратные фильтры в задаче разрешения волн

В предыдущей главе рассматривались высокочастотные фильтры, которые являются разрешающими в широком классе сейсмических сигналов. Если о полезном сигнале $f(t)$ имеется большая информация (например, если точно известна его форма), то ее можно использовать для построения фильтра, в котором лучше используются свойства именно данного сигнала и который позволяет получить для этого сигнала более короткую реакцию (разумеется, при этом ухудшается разрешающая способность фильтра для сейсмических сигналов другой формы).

Пусть сейсмический сигнал $x(t)$ представляет собой сумму элементарных сигналов одинаковой формы, но с разными временами вступлений и амплитудами:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n a_k f(t - \tau_k). \quad (V.1)$$

Форму элементарного сигнала и спектр этой функции $S(\omega)$ будем считать известными.

Рассмотрим абстрактную линейную систему G со спектральной характеристикой

$$G(\omega) = 1/S(\omega). \quad (V.2)$$

Если на вход системы G подать сигнал $x(t)$, спектр которого

$$S_x(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k S(\omega) \exp(-i\omega\tau_k),$$

то на выходе получим сигнал $y(t)$, имеющий спектр

$$S_y(\omega) = \frac{1}{S(\omega)} \sum_{k=1}^n a_k S(\omega) \exp(-i\omega\tau_k) = \sum_{k=1}^n a_k \exp(-i\omega\tau_k).$$

Так как $\exp(-i\omega\tau_k)$ является спектром «сдвинутой» δ -функции $\delta(t - \tau_k)$, то

$$y(t) = \sum_{k=1}^n a_k \delta(t - \tau_k). \quad (\text{V.3})$$

Таким образом, фильтр G , определяемый формулой (V.2), дает идеальное разрешение элементарных сигналов, сжимая каждый из них в абсолютно короткий импульс. Если $f(t)$ — сигнал минимально-фазового типа, то его спектр $S(\omega)$ не имеет ни полюсов, ни нулей в нижней полуплоскости комплексного переменного ω . Но тогда и спектральная характеристика (V.2) не будет там иметь ни нулей, ни полюсов, поэтому представляет собой спектральную характеристику физически осуществимого минимально-фазового фильтра. Этот фильтр не обязательно будет удовлетворять условиям устойчивости, что может привести к большему усилению ошибок на выходе этого фильтра или к невозможности его практической реализации.

Если $f(t)$ не является минимально-фазовым сигналом, то спектральная характеристика $G(\omega)$ обязательно будет иметь полюса при $\text{Im } \omega \leq 0$ и, следовательно, не может быть реализована в классе систем, действующих в реальном физическом времени.

Рассмотренный выше фильтр относится к классу обратных фильтров, общее определение которых дано ниже. Обратные фильтрации уже давно рассматривались в радиофизике и оптике с целью построения корректирующих устройств, исправляющих сигнал после его прохождения в некоторых стандартных элементах. Оказалось, что многие задачи сейсморазведки решаются с помощью обратной фильтрации, что послужило причиной усиленного внимания сейсморазведчиков к данному методу обработки сейсмограмм.

Обратным фильтром называют абстрактную линейную систему, которая восстанавливает воздействие на входе некоторого фиксированного линейного фильтра по имеющемуся отклику на это воздействие.

Пусть $v(t)$ — отклик фильтра L на воздействие $u(t)$:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} l(t - \tau) u(\tau) d\tau, \quad (\text{V.4})$$

тогда фильтр G , имеющий импульсную характеристику $g(t)$, является обратным, если

$$G[v(t)] = u(t). \quad (\text{V.5})$$

Преобразование G обладает следующим очевидным свойством:

$$GL[u(t)] = u(t). \quad (V.6)$$

Так как последовательное применение двух линейных стационарных преобразований G и L дает новое линейное преобразование $H = GL$, то равенство (V.6) равносильно следующему:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) u(\tau) d\tau = u(t), \quad (V.7)$$

где $h(t)$ — импульсная характеристика преобразования H . Но равенство (V.7) является определением δ -функции [см. (I.18)], следовательно, $h(t) = \delta(t)$. Однако $h(t)$ — свертка импульсных характеристик $l(t)$ и $g(t)$, таким образом

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) l(\tau) d\tau = \delta(t). \quad (V.8)$$

Полученное интегральное уравнение определяет импульсную характеристику обратного фильтра.

Итак, метод обратной фильтрации заключается в том, что исходное интегральное уравнение (V.4), определяющее искомую функцию $u(t)$, решается в два этапа: вначале решается вспомогательное интегральное уравнение (V.8), не зависящее от измеряемого сигнала $v(t)$, а затем решение свертывается с сигналом $v(t)$. Очень важно помнить, что обратная фильтрация представляет собой только один из возможных методов решения интегральных уравнений типа (V.4) и может даже оказаться, что уравнение (V.4) имеет решение, но оно не может быть получено по методу обратной фильтрации из-за нереализуемости обратного фильтра. Преимуществом метода обратной фильтрации является возможность применения одного и того же обратного фильтра для большого числа сигналов $v(t)$ — интегральное уравнение (V.8) при этом решается только один раз.

Обозначим $G(\omega)$ — спектральную характеристику фильтра G . Поскольку спектр δ -функции равен единице, то из (V.8) следует, что

$$G(\omega) = 1/L(\omega). \quad (V.9)$$

Собственно говоря, эту формулу можно получить сразу из (V.6), так как спектр сигнала $v(t)$ равен $L(\omega) S_u(\omega)$.

Приведенные рассуждения носят формальный характер, поскольку они не гарантируют того, что обратный фильтр G действительно существует. Здесь имеются два момента: во-первых, деление в (V.9) может быть невыполнимым (если для некоторого ω $L(\omega) = 0$), во-вторых, преобразование с характеристикой $1/L(\omega)$ может оказаться нереализуемым ни в каком реальном классе линейных систем.

Вернемся к задаче разрешения элементарных сейсмических сигналов. Очевидно, фильтр G , определяемый формулой (V.2), является обратным, если считать, что регистрируемый сигнал $x(t)$ есть результат прохождения

искомого сигнала (V.3) через фильтр L со спектральной характеристикой $S(\omega)$.

Несмотря на существенно различный подход к задаче разрешения сигналов в методах обратной и высокочастотной фильтрации, между ними имеется большое сходство, обнаруживающееся при анализе их частотных характеристик. Рассмотрим интервал частот в окрестности Ω . В этом интервале частотная характеристика сигнала имеет асимптотику

$$S(\omega) \sim \frac{a}{\omega^{m+1}},$$

а частотная характеристика высокочастотного фильтра

$$L(\omega) \sim c\omega^l.$$

Из условия (IV.43) имеем $l > m$. Так как при увеличении l интенсивность свободных колебаний сильно падает, то наиболее благоприятным является $l = m + 1$.

Поэтому

$$L(\omega) \sim c\omega^{m+1}.$$

Таким образом, в определенном диапазоне частот высокочастотный фильтр ведет себя, как обратный. Вопрос о том, какой из этих методов лучше — неправилен, так как в них используется существенно различная информация о форме элементарного сигнала $f(t)$. Применять нужно тот фильтр, который в наибольшей степени отвечает имеющейся информации о сигнале.

§ 20. Обратные фильтры и обратная динамическая задача для вертикально-неоднородных сред

Предположим, что воздействие, которому подвергается среда, описывается функцией $f(t)$. Тогда приемник запишет реакцию среды,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} l(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad (\text{V.10})$$

где $l(t)$ — импульсная характеристика среды.

В операции свертки свертываемые функции можно поменять местами:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) l(\tau) d\tau,$$

следовательно, зарегистрированную сейсмограмму $x(t)$ можно считать реакцией фильтра с импульсной характеристикой $f(t)$ на входной сигнал $l(t)$. Соответствующий обратный фильтр должен восстанавливать импульсную характеристику $l(t)$.

Здесь мы покажем, что импульсная характеристика (или, что равносильно, спектральная характеристика) вертикально-неоднородной среды определяет до некоторой степени упругие свойства и структуру среды.

Упругое полупространство $z \geq 0$ называется вертикально-неоднородной средой, если упругие характеристики λ , μ и ρ зависят только от координаты z . Будем предполагать, что при $z \geq H$ значения λ , μ и ρ постоянны. Слой $0 \leq z \leq H$ обычно называют переходным.

Прежде чем рассмотреть обратную динамическую задачу восстановления свойств переходного слоя по смещениям, зарегистрированным в точках плоскости $z = 0$ при нормальном падении плоской волны, найдем соответствующую спектральную характеристику среды. Решение этой задачи упростится, если применить кусочно-однородную аппроксимацию среды, разбив переходной слой на n элементарных слоев $z_{k-1} \leq z \leq z_k$ ($z_0 = 0$, $z_n = H$), выбрав значения z_k из условия равенства времени пробега продольной волны (точнее, ее нулевого приближения) в каждом элементарном слое:

$$\Delta \tau = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{dz}{v_p(z)} = \text{const.}$$

Каждый элементарный слой характеризуется параметрами Ламе $\rho_k = \rho(z_k)$, $\lambda_k = \lambda(z_k)$, $\mu_k = \mu(z_k)$.

Рассматриваемая задача является непосредственным обобщением задачи отражения плоской волны от однородного слоя (см. § 2). Придерживаясь тех же рассуждений, заключаем, что если ко всем точкам плоскости $z = 0$ приложено нормальное напряжение $\exp(i\omega t)$, то в каждом k -том слое решение будет представлять собой сумму двух монохроматических волн, одна из которых распространяется вверх, а другая — вниз:

$$u(t, z) = \vec{k} \left(a_k \exp\left(i\omega \frac{z - z_{k-1}}{v_k}\right) + b_k \exp\left(-i\omega \frac{z - z_{k-1}}{v_k}\right) \right) \times \\ \times \exp(i\omega t), \quad z_{k-1} \leq z \leq z_k, \quad (\text{V.11})$$

где $v_k = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$; a_k и b_k — комплексные амплитуды. По закону Гука (I.6) нормальное напряжение в k -том слое равно:

$$\sigma_z(t, z) = (\lambda_k + 2\mu_k) \frac{\partial u_z}{\partial z} = i\omega \gamma_k \left(a_k \exp\left(i\omega \frac{z - z_{k-1}}{v_k}\right) - \right. \\ \left. - b_k \exp\left(-i\omega \frac{z - z_{k-1}}{v_k}\right) \right) \exp(i\omega t), \quad z_{k-1} \leq z \leq z_k, \quad (\text{V.12})$$

где $\gamma_k = \rho_k v_k$.

Множители при $\exp(i\omega t)$ \vec{k} в формулах (V.11) и (V.12) обозначим $u(z)$ и $\sigma(z)$ соответственно. Комплексные амплитуды $u(z)$ и $\sigma(z)$ определяются в соответствии с граничными условиями на плоскостях $z = z_k$ и $z = 0$.

Из условий непрерывности смещений и нормальных напряжений на каждой k -той границе имеем:

$$u(z_k - 0) = u(z_k + 0) = u_k; \\ \sigma(z_k - 0) = \sigma(z_k + 0) = \sigma_k.$$

Из условия на свободной границе

$$\sigma(t, 0) = -p(t) = -\exp(i\omega t)$$

получаем $\sigma_0 = -1$. В связи со специальным выбором воздействия комплексная амплитуда u_0 представляет собой значение искомой спектральной характеристики $L(\omega)$.

Дальнейшая схема вывода такова: сначала найдем связь между комплексными амплитудами $u(z)$ и $\sigma(z)$ на плоскостях $z = 0$ и $z = H$, а затем, выражая $\sigma(H)$ через $u(H)$, получим систему уравнений, решение которой дает $u_0 = L(\omega)$.

Полагая в формулах (V.11) и (V.12) $z = z_{k-1}$, получим:

$$\begin{aligned} u_{k-1} &= a_k + b_k; \\ \sigma_{k-1} &= i\omega\gamma_k(a_k - b_k). \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

Теперь, полагая $z = z_k$, найдем значения u_k и σ_k :

$$\begin{aligned} u_k &= a_k \exp(i\omega \Delta\tau) + b_k \exp(-i\omega \Delta\tau) = (a_k + b_k) \cos \omega \Delta\tau + \\ &\quad + i(a_k - b_k) \sin \omega \Delta\tau; \\ \sigma_k &= i\omega\gamma_k [i(a_k + b_k) \sin \omega \Delta\tau + (a_k - b_k) \cos \omega \Delta\tau]. \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

Определяя из системы (V.13) $a_k + b_k$ и $a_k - b_k$ и подставляя в (V.14), выразим u_k и σ_k через u_{k-1} и σ_{k-1} .

Это выражение удобно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} u_k \\ \sigma_k \end{pmatrix} = \mathbf{P}_k \begin{pmatrix} u_{k-1} \\ \sigma_{k-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{V.15})$$

где матрица

$$\mathbf{P}_k = \begin{pmatrix} \cos \omega \Delta\tau & \frac{\sin \omega \Delta\tau}{\omega\gamma_k} \\ -\omega\gamma_k \sin \omega \Delta\tau & \cos \omega \Delta\tau \end{pmatrix}. \quad (\text{V.16})$$

Соотношение (V.15) верно для всех $k = 1, 2, \dots, n$, поэтому

$$\begin{pmatrix} u_n \\ \sigma_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} u_0 \\ \sigma_0 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} L(\omega) \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{V.17})$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{P}_n \mathbf{P}_{n-1} \dots \mathbf{P}_1$.

В среде ниже переходного слоя восходящей волны нет, следовательно,

$$u(t, z) = b_{n+1} \exp\left(-i\omega \frac{z-H}{v_{n+1}}\right) \vec{k}, \quad z \geq H$$

и

$$\sigma_z(t, z) = -i\omega\gamma_{n+1} b_{n+1} \exp\left(-i\omega \frac{z-H}{v_{n+1}}\right) = -i\omega\gamma_{n+1} u(t, z),$$

где γ_{n+1} — акустическая жесткость при $z \geq H$. Отсюда

$$\sigma_n = \sigma(t, H) = -i\omega\gamma_{n+1} u_n.$$

Подставляя эти данные в (V.17) и расписав это матричное уравнение в поэлементной форме, будем иметь:

$$u_n = A_{11}L(\omega) - A_{12};$$

$$-i\omega\gamma_{n+1}u_n = A_{21}L(\omega) - A_{22}$$

(где A_{11} , A_{12} и т. д. — элементы матрицы A) и решая полученную систему относительно $L(\omega)$, найдем окончательно

$$L(\omega) = \frac{A_{22}(\omega) + i\omega\gamma_{n+1}A_{12}(\omega)}{A_{21}(\omega) + i\omega\gamma_{n+1}A_{11}(\omega)}. \quad (V.18)$$

Спектральная характеристика $L(\omega)$ определяется набором величин $\gamma_k = \gamma(k\Delta\tau)$, поэтому самое большее, что можно определить, наблюдая смещение среды, — это зависимость акустической жесткости от времени пробега продольной волны.

Вернемся к матрице P_k [см. формулу (V.16)]. Ее можно записать так:

$$P_k = \frac{1}{2} \exp(i\omega\Delta\tau) \begin{pmatrix} 1 + s & \frac{1}{i\omega} \cdot \frac{1-s}{\gamma_k} \\ i\omega\gamma_k(1-s) & 1 + s \end{pmatrix}, \quad (V.19)$$

где $s = \exp(-2i\omega\Delta\tau)$.

Отсюда следует, что матрица A имеет следующую структуру:

$$A = \frac{1}{2^n} \exp(i\omega n\Delta\tau) \begin{pmatrix} B_{11}^{(n)}(s) & \frac{1}{i\omega} B_{12}^{(n)}(s) \\ i\omega B_{21}^{(n)}(s) & B_{22}^{(n)}(s) \end{pmatrix}, \quad (V.20)$$

где $B_{11}^{(n)}(s)$, $B_{12}^{(n)}(s)$ и т. д. — многочлены от s степени n .

Докажем это по индукции. Для матрицы $A_1 = P_1$ формула (V.20) следует непосредственно из (V.19). Пусть она верна для матрицы $A_k = P \times P_{k-1} \times \dots \times P_1$:

$$A_k = \frac{1}{2^k} \exp(i\omega k\Delta\tau) \begin{pmatrix} B_{11}^{(k)}(s) & \frac{1}{i\omega} B_{12}^{(k)}(s) \\ i\omega B_{21}^{(k)}(s) & B_{22}^{(k)}(s) \end{pmatrix}.$$

Но в соответствии с правилами умножения матриц

$$A_{k+1} = P_{k+1}A_k = \frac{1}{2^{k+1}} \exp(i\omega(k+1)\Delta\tau) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} (1+s)B_{11}^{(k)}(s) + \frac{1-s}{\gamma_{k+1}}B_{21}^{(k)}(s) & \frac{1}{i\omega} \left[(1+s)B_{12}^{(k)}(s) + \frac{1-s}{\gamma_{k+1}}B_{22}^{(k)}(s) \right] \\ i\omega[\gamma_{k+1}(1-s)B_{11}^{(k)}(s) + (1+s)B_{21}^{(k)}(s)] & \gamma_{k+1}(1-s)B_{12}^{(k)}(s) + (1+s)B_{22}^{(k)}(s) \end{pmatrix}. \quad (V.21)$$

Формула (V.20) доказана. Из нее вытекает несколько важных следствий. Подставляя (V.20) в выражение (V.18), получим, что спектральная характеристика $L(\omega)$ может быть представлена в виде

$$L(\omega) = (1/i\omega)L_1(\omega),$$

где функция

$$L_1(\omega) = \frac{B_{22}^{(n)}(s) + \gamma_{n+1} B_{12}^{(n)}(s)}{B_{21}^{(n)}(s) + \gamma_{n+1} B_{11}^{(n)}(s)} \quad (\text{V.22})$$

является периодической с периодом $\pi/\Delta t$ [так как $s = \exp(-2i\omega\Delta t)$ имеет этот период].

Волне напряжения $\exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{v_1}\right)\right]$, распространяющейся в первом элементарном слое, отвечает волна смещения

$$-\frac{1}{i\omega\gamma_1} \exp[i\omega(t - z/v_1)],$$

следовательно, $-\gamma_1 L_1(\omega)$ представляет собой спектральную характеристику среды по отношению к воздействию, заданному смещением. Ясно, что $L_1(\omega)$ является непосредственным обобщением спектральной характеристики отражающего слоя, рассмотренной в § 2. Однако там период π/τ определялся реально существующей мощностью слоя. Здесь же он зависит от детальности кусочно-однородной аппроксимации переходного слоя.

Докажем следующую теорему.

Если $L(\omega)$ является спектральной характеристикой $(n+1)$ -слойной среды с параметрами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$, то не существует другой слойной среды, имеющей ту же характеристику.

Доказательство. Вследствие того что $L(\omega)$ характеризует $(n+1)$ -слойную среду, множитель $L_1(\omega)$ представляет собой дробно-рациональную функцию от s :

$$L_1(\omega) = \frac{R'_n(s)}{R_n(s)}. \quad (\text{V.23})$$

По индукции легко показать, что $B_{11}^{(n)}$ и $B_{22}^{(1,2)}$ являются полиномами вида

$$(1+s)^n + \alpha_2 (1+s)^{n-2} (1-s)^2 + \alpha_4 (1+s)^{n-4} (1-s)^4 + \dots, \quad (\text{V.24})$$

а $B_{12}^{(n)}$ и $B_{21}^{(n)}$ — полиномами вида

$$\alpha_1 (1+s)^{n-1} (1-s) + \alpha_3 (1+s)^{n-3} (1-s) + \dots \quad (\text{V.25})$$

Для $n=0$ формулы (V.24) и (V.25) следуют непосредственно из (V.19), а предположив, что они верны для некоторого $n=k$, по формуле (V.21) получим, что они верны и для $k+1$. Теперь из формул (V.22), (V.24) и (V.25) следует, что полиномы R_n и R'_n представляют собой сумму вида

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k (1+s)^{n-k} (1-s)^k.$$

При этом коэффициент α_0 при $(1+s)^n$ для полинома $R'_n(s)$ равен единице, а для полинома $R_n(s)$ он равен γ_{n+1} . Эта нормировка определяет каждый из полиномов $R_n(s)$ и $R'_n(s)$, а также параметр γ_{n+1} . Полиномы $B_{11}^{(n)}$ и $B_{21}^{(n)}$ линейно независимы, поэтому, если полином $R_n(s)$ представляется в виде суммы полиномов (V.24) и (V.25), то такое представление единственно. Поскольку коэффициент γ_{n+1} уже определен, а коэффициент при $(1+s)^n$ полинома $B_{11}^{(n)}$ равен единице, то задание полинома $R_n(s)$ определяет $B_{11}^{(n)}$ и $B_{21}^{(n)}$ однозначно.

Из формулы (V.24) следует система уравнений относительно $B_{11}^{(n-1)}$ и $B_{21}^{(n-1)}$:

$$(1+s) B_{11}^{(n-1)} + \frac{1-s}{\gamma_n} B_{21}^{(n-1)} = B_{11}^{(n)};$$

$$\gamma_n (1-s) B_{11}^{(n-1)} + (1+s) B_{21}^{(n-1)} = B_{21}^{(n)}.$$

Отсюда

$$B_{11}^{(n-1)}(s) = \frac{\gamma_n(1+s)B_{11}^{(n)}(s) - (1-s)B_{21}^{(n)}}{4\gamma_n s}.$$

Предположим, что существует другой набор чисел $(\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_n)$, которому отвечает та же матрица A . Тогда для $\gamma'_2 = \gamma_n + \delta\gamma_n$ имеем:

$$B_{11}^{(n-1)}(s) = \frac{\gamma_n}{\gamma'_n} \left[\frac{\gamma_n(1+s)B_{11}^{(n)}(s) - (1-s)B_{21}^{(n)}}{4\gamma_n s} - \frac{\delta\gamma_n(1+s)B_{11}^{(n)}}{4\gamma'_n s} \right]. \quad (V.26)$$

Выражение в квадратных скобках совпадает с полиномом $B_{11}^{(n-1)}(s)$, который при $s \rightarrow 0$ стремится к конечному пределу. Так как второе слагаемое стремится к бесконечности, то при $\delta\gamma_n \neq 0$ $B_{11}^{(n-1)}$ не является полиномом типа (V.24), что противоречит доказанному выше. Таким образом, значение γ_n и полиномы $B_{11}^{(n-1)}$ и $B_{21}^{(n-1)}$ определяются однозначно, если заданы $B_{11}^{(n)}$ и $B_{21}^{(n)}$. Для завершения доказательства в формуле (V.26) нужно последовательно уменьшать n на единицу до $n=2$. Доказательство окончено.

В соответствии с доказанной теоремой задача оценки параметров $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$ по спектральной характеристике $L(\omega)$ имеет не более одного решения.

Не всякая дробно-рациональная функция вида (V.22) есть спектральная характеристика $(n+1)$ -слойной среды. Это следует хотя бы из того, что для оценки $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}$ можно использовать только знаменатель $R_n(s)$. Следовательно, числитель $R_n(s)$ не является независимым полиномом.

Практические алгоритмы оценки коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$ более удобно строить, основываясь на импульсной характеристике $l_\Delta(t)$, отвечающей спектру (V.22). Как и в случае отражающего слоя [см. формулу (I.42)], $l_\Delta(t)$ представляет собой сумму следующих друг за другом с интервалом $2\Delta t$ δ -функций, образуемых множеством всех однократных и многократных волн при посылке в $(n+1)$ -слойную среду δ -волны $\delta\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$ с единичной амплитудой:

$$l_\Delta(t) = \sum_{p=1}^{\infty} l_{2p} \delta(t - 2p\Delta t), \quad (V.27)$$

где l_j — амплитуда импульсной характеристики в момент времени $j\Delta t$ (при нечетном j амплитуда l_j равна нулю).

Обозначим $w_k^{(j)}$ и $v_k^{(j)}$ амплитуды соответственно восходящей и нисходящей δ -волн, распространяющихся в k -том слое при $(j-1)\Delta t < t \leq j\Delta t$. Эти амплитуды определим так, что положительному значению $w_k^{(j)}$ отвечает смещение вверх, а положительному значению $v_k^{(j)}$ — смещение вниз (т. е. амплитуда каждой волны выражает смещение в направлении распространения) (рис. 17).

Из физических соображений следует, что $w_k^{(j)} \equiv 0$ при $j \leq k$ и $v_k^{(j)} \equiv 0$ при $j < k$. Амплитуды $v_1^{(j+1)}$ и $w_1^{(j)}$ связаны соотношением

$$v_1^{(j+1)} = -w_1^{(j)}; \quad j = 2, 3, \dots \quad (V.28)$$

Действительно, согласно (I.41) коэффициент отражения от свободной границы $(\rho_0 v_0 - \rho_1 v_1)/(\rho_0 v_0 + \rho_1 v_1) = -1$, так как $\rho_0 = 0$.

Учитывая соглашение о знаке амплитуд, имеем¹ $l_j = w_1^j - v_1^{j+1} = 2w_1^j$,

откуда

$$w_1^{(j)} = \frac{1}{2} l_j, \quad j = 2, 3, \dots \quad (\text{V.29})$$

Кроме того,

$$v_1^{(1)} = 1, \quad (\text{V.30})$$

поскольку $v_1^{(1)}$ представляет собой амплитуду посылаемого в среду импульса.

Равенствами (V.28)—(V.30) определены все амплитуды $w_1^{(j)}$ и $v_1^{(j)}$ волн распространяющихся в первом слое ($v_1^{(2)} = 0$, так как $v_1^{(2p)} = 0$ при всех p). Амплитуда $w_1^{(2)}$ совпадает с коэффициентом отражения на первой границе $A_1 = (\gamma_2 - \gamma_1)/(\gamma_2 + \gamma_1)$, так как $w_1^{(2)} = A_1 v_2^{(1)} = A_1$:

$$A_1 = w_1^{(2)}. \quad (\text{V.31})$$

Алгоритм расчета последовательности коэффициентов отражения A_1, A_2, \dots, A_n , являющийся обращением известного алгоритма Баранова — Кюнэтца (см. библиографические комментарии), применяемого для расчета синтетических сейсмограмм, вытекает из того факта, что для любого k амплитуды $w_k^{(j)}$ ($j = k + 1, \dots$) и $v_k^{(j)}$ ($j = k, k + 1, \dots$), а также коэффициент отражения на границе $z = z_k$ однозначно определяются набором величин $A_1, \dots, A_{k-1}, w_{k-1}^{(j)}$ ($j > k - 1$) и $v_{k-1}^{(j)}$ ($j \geq k - 1$).

Действительно, для любого момента времени с номером $j + 1$ восходящая волна в $(k - 1)$ -ом слое образуется при отражении на границе $z = z_k$ нисходящей волны $v_{k-1}^{(j)}$ и преломления на той же границе восходящей волны w_k^j из k -того слоя (см. рис. 17).

На $(k + 1)$ -той границе (при прохождении ее снизу) коэффициент преломления равен $2\gamma_k/(\gamma_{k-1} + \gamma_k) = 1 + A_{k-1}$, следовательно,

$$w_{k-1}^{(j-1)} = A_{k-1} v_{k-1}^{(j)} + (1 + A_{k-1}) w_k^j$$

или, при решении относительно $w_k^{(j)}$

$$w_k^{(j)} = \frac{w_{k-1}^{(j+1)} - A_{k-1} v_{k-1}^{(j)}}{1 + A_{k-1}}. \quad (\text{V.32})$$

¹ Считая смещение вверх положительным.

Так как последовательность амплитуд $v_1^{(1)}, v_2^{(2)}, \dots, v_k^{(k)}$ описывает проходящую вниз волну, то

$$v_k^k = (1 - A_{k-1}) v_{k-1}^{(k-1)}, \quad (\text{V.33})$$

где $1 - A_{k-1}$ равно коэффициенту преломления на границе $z = z_{k-1}$ при прохождении ее сверху.

Определим теперь амплитуду $v_k^{(j)}$ нисходящей волны, распространяющейся в k -том слое при $(j-1)\Delta t < t \leq j\Delta t$. Она образуется за счет отражения и преломления на границе $z = z_{k-1}$ волны w_k^j и за счет преломления на той же границе волны v_{k-1}^{j-1} ;

$$v_k^{(j)} = A_{k-1} w_k^{(j-1)} + (1 - A_{k-1}) v_{k-1}^{(j-1)}, \quad j = k+1, k+2, \dots \quad (\text{V.34})$$

Последовательность формул (V.32) — (V.34) определяет все амплитуды $w_k^{(j)}$ ($j > k$) и $v_k^{(j)}$ ($j \leq k$). Поскольку волна $w_k^{(k+1)}$ получается при отражении волны $v_k^{(k)}$ от границы $z = z_k$, то $w_k^{(k+1)} = A_k v_k^{(k)}$, откуда

$$A_k = w_k^{(k+1)} / v_k^{(k)}. \quad (\text{V.35})$$

Так как при $k = 1$ значения $w_1^{(j)}$, $v_1^{(j)}$ и A_1 определены формулами (V.28) — (V.31), то, полагая в формулах (V.32) — (V.35) $k = 2, 3, \dots, n$, получим коэффициенты отражения для всех n границ.

Для вычисления A_n нужно знать амплитуду w_n^{n+1} , которая в свою очередь зависит от $w_{n-1}^{(n+2)}$ [см. формулу (V.32)] и т. д. до $w_1^{(2n)} = l_{2n}$. Следовательно, значения A_1, A_2, \dots, A_n однозначно определяются первыми n ненулевыми отсчетами импульсной характеристики. Как и в случае спектральной характеристики, вся функция $l_\Delta(t)$ ($0 \leq t \leq \infty$) содержит избыточную информацию о коэффициентах отражения в переходном слое.

Ясно, что не любая совокупность чисел l_{2p} ($p = 1, 2, \dots, n$) может служить первыми n отсчетами импульсной характеристики $(n+1)$ -слойной среды. Например, при $l_2 > 2$ получаем $A_1 > 1$, что невозможно. Кроме того, не для всякой совокупности чисел l_{2p} ($p = 1, \dots, n$) алгоритм, определенный формулами (V.32) — (V.35), сходится. В частности, при $l_2 = -2$ возникает деление на нуль в формуле (V.32) при $k = 2$ и т. д.

Соответствующие условия можно сформулировать в спектральной форме, так как дискретный спектр последовательности $\{l_2, l_4, \dots, l_{2n}\}$, равный (с точностью до множителя Δt) спектру функции $l_\Delta(t)$, является функцией типа (V.23). Однако проще применить описанный алгоритм и непосредственно из результатов выяснить приемлемость исходной информации.

Из изложенного выше может возникнуть следующий вопрос. Применение спектральной характеристики позволяет (хотя бы в принципе) найти величины $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$, тогда как импульсная характеристика (V.27) дает только коэффициенты отражения A_1, A_2, \dots, A_n , что равносильно определению отношений $\gamma_2/\gamma_1, \gamma_3/\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}/\gamma_1$. Имеется ли здесь противоречие? Оказывается, что никакого противоречия нет. Спектральная характеристика используется по отношению к воздействию —

напряжению, а импульсная характеристика используется по отношению к воздействию — смещению. Если вместо $L(\omega)$ взять спектральную характеристику по отношению к воздействию — смещению [она равна — $\gamma_1 L_1(\omega)$], то величины γ_k определить уже нельзя. Действительно, потребовав, чтобы в числителе $\gamma_1 L_1(\omega)$ коэффициент при $(1+s)^n$ был равен единице, получим, что в знаменателе $\gamma_1 L_1(\omega)$ он равен γ_n/γ_1 , т. е. определяются только отношения γ_k/γ_1 .

Ясно, что никакая реальная среда не может иметь импульсную характеристику типа (V.27). Во-первых, из-за непрерывного изменения упругих свойств функция $l(t)$ должна содержать непрерывную (регулярную) составляющую (см. § 16). Во-вторых, при наличии границ сингулярные составляющие не могут следовать с постоянным интервалом $2\Delta\tau$, обусловленным только детальностью аппроксимации среды. В связи с этим возникают два вопроса: 1) приемлема ли такая аппроксимация среды для интерпретации реально наблюдаемых сейсмограмм и 2) может ли алгоритм (V.32)—(V.35) быть применен к данным, полученным в реальном эксперименте?

Не вдаваясь в подробное изучение первого вопроса, которое, будучи связанным с проблемой сходимости конечно-разностных аппроксимаций уравнения (IV.10), вывело бы нас далеко за рамки этой книги, попытаемся ответить на него на основе физических соображений. Структура импульсной характеристики (V.27) обусловлена тем, что возмущения типа δ -функции, обладая нулевой длиной волны, реагируют на сколь угодно малые неоднородности. Любой реальный сигнал, имеющий конечную длину волны, по-разному реагирует на неоднородности разного масштаба. При достаточно малых $\Delta\tau$ такой сигнал не замечает отдельных границ, появившихся в результате кусочно-однородной аппроксимации среды. Поэтому аппроксимация будет тем точнее, чем меньше Δt . Из этого следует, что если функция $f(t)$, описывающая воздействие, является достаточно гладкой функцией, то при $\Delta\tau \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} l_{\Delta}(t-\tau) f(\tau) d\tau \rightarrow x(t), \quad (\text{V.36})$$

хотя $l_{\Delta}(t)$ к $l(t)$ не стремится.

Ответ на второй из поставленных вопросов будет положительным, если удастся подобрать такой сигнал $f_0(t)$, для которого

$$x_0^{(\Delta)}(2p\Delta\tau) = l_{2p} \quad (\text{V.37})$$

где

$$x_0^{(\Delta)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} l_{\Delta}(t-\tau) f_0(\tau) d\tau. \quad (\text{V.38})$$

Измеряя реакцию

$$x_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} l(t-\tau) f_0(\tau) d\tau,$$

можно приближенно оценить l_k , так как из (V.36) следует, что при достаточно малых $\Delta\tau$ $x_0^{(\Delta)}(t) \simeq x_0(t)$.

Покажем, что условию (V.37) удовлетворяет функция Котельникова

$$f_0(t) = \frac{\sin(\pi/2 \Delta\tau) t}{(\pi/2 \Delta\tau) t}. \quad (\text{V.39})$$

Действительно, подставляя в формулу (V.38) выражения (V.27) и (V.39), получим ряд Котельникова (см. § 9), который определяет функцию $x_0^{(\Delta)}(t)$ во всех точках $2p \Delta\tau$, совпадающую с l_{2p} .

Воздействие типа (V.39) реализовано быть не может хотя бы потому, что оно не имеет начала. Поэтому функция $x_0(t)$ должна быть получена по наблюдаемой сейсмограмме $x(t)$. Это изменяет постановку задачи обратной фильтрации. Вместо оператора G , который по функции $x(t)$ определял импульсную характеристику $l(t)$, нужно построить оператор G_0 , удовлетворяющий соотношению

$$G_0[x(t)] = x_0(t),$$

или, вспоминая определение функций $x(t)$ и $x_0(t)$,

$$G_0 L[f(t)] = L[f_0(t)]. \quad (\text{V.40})$$

Расписав это равенство при помощи свертки, найдем интегральное уравнение, определяющее импульсную характеристику фильтра G_0 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_0(t - \tau) f(\tau) d\tau = f_0(t). \quad (\text{V.41})$$

Так как спектр функции $f_0(t)$ равен единице при $|\omega| \leq \frac{\pi}{2\Delta\tau}$ и тождественно равен нулю при остальных значениях ω (см. § 9), то спектральная характеристика $G_0(\omega)$ определится из условия

$$G_0(\omega) L(\omega) S(\omega) = \begin{cases} L(\omega), & |\omega| \leq \pi/2 \Delta\tau \\ 0, & |\omega| > \pi/2 \Delta\tau, \end{cases}$$

откуда

$$G_0(\omega) = \begin{cases} 1/S(\omega), & |\omega| \leq \pi/2 \Delta\tau \\ 0, & |\omega| > \pi/2 \Delta\tau. \end{cases} \quad (\text{V.42})$$

Фильтр G_0 можно представить как последовательное применение обратного фильтра G и идеального низкочастотного фильтра с полосой пропускания $(0, \pi/2\Delta\tau)$. Если $1/2\Delta\tau$ выше частот, пропускаемых сейсмической аппаратурой, то необходимость в применении последнего фильтра отпадает.

В соответствии с результатами § 10 существует абстрактный цифровой фильтр G'_0 , который реализует спектральную характеристику (V.42). Термин «абстрактный» здесь указывает, что фильтр G'_0 не обязательно финитный, т. е. он может не удовлетворять условиям осуществимости, предъявляемым к цифровым фильтрам (см. § 11).

§ 21. Импульсная характеристика вертикально-неоднородной среды без учета кратных волн

Процедура решения обратной задачи разбивается на два этапа: на первом этапе при помощи обратного фильтра G_0 отыскивается функция $x_0(t)$, аппроксимирующая импульсную характеристику $l(t)$, а затем по отсчетам функции $x_0(t)$ определяется зависимость коэффициентов отражения от времени распространения продольной волны по вертикали. Сложный характер связи между отсчетами $x_0(t)$ и коэффициентами отражения обусловлен наличием большого числа кратных волн. Применение многоканальных приемных систем типа системы ОГТ (см. § 43) позволяет в значительной мере ослабить влияние кратных волн и упростить структуру наблюдаемых колебаний. В этом случае для решения обратной задачи следует использовать импульсную характеристику среды, в которой не учитываются кратные волны.

Рассмотрим такую же среду и ее кусочно-однородную аппроксимацию, как и в предыдущем параграфе. Поставим своей задачей получить импульсную характеристику при $\Delta\tau \rightarrow 0$. Чтобы избежать трудностей, связанных с тем, что $l_\Delta(t)$ при $\Delta\tau \rightarrow 0$ не стремится к $l(t)$, с самого начала будем посылать в среду гладкий импульс $f(t)$, обеспечивающий предельное соотношение (V.36).

Однократное отражение от границы $z = z_k$ равно [с учетом удвоения амплитуды колебаний на свободной границе, вытекающего из формулы (V.29)]:

$$-2A_k \prod_{j=1}^{k-1} (1 + A_j)(1 - A_j) f(t - 2k\Delta\tau),$$

где $1 + A_j$ и $1 - A_j$ — коэффициенты преломления на промежуточных границах. Отсюда

$$x_\Delta(t) = -2 \sum_{k=1}^n A_k \prod_{j=1}^{k-1} (1 - A_j^2) f(t - 2k\Delta\tau). \quad (\text{V.43})$$

Записав коэффициент A_k в виде $A(k\Delta\tau)$, можно рассматривать полученную сумму как интегральную по переменной τ :

$$x_\Delta(t) = -2 \sum_{k=1}^n \frac{A(k\Delta\tau)}{\Delta\tau} \prod_{j=1}^{k-1} (1 - A_j^2) f(t - 2k\Delta\tau) \Delta\tau.$$

Устремим $\Delta\tau$ к нулю. Так как

$$A(k\Delta\tau) = \frac{\gamma[(k+1)\Delta\tau] - \gamma(k\Delta\tau)}{\gamma[(k+1)\Delta\tau] + \gamma(k\Delta\tau)} \cong \frac{\Delta\gamma(k\Delta\tau)}{2\gamma(k\Delta\tau)} \rightarrow 0,$$

то

$$\prod_{j=1}^{k-1} (1 - A_j^2) \rightarrow 1; \quad \frac{A(k\Delta\tau)}{\Delta\tau} \rightarrow \frac{1}{2\gamma(\tau)} \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau}.$$

Следовательно,

$$x_{\Delta}(t) \rightarrow x(t) = -A \int_0^{\tau^*} \frac{d \ln \gamma(\tau)}{d\tau} f(t-2\tau) d\tau, \quad (\text{V.44})$$

где

$$\tau^* = \int_0^H \frac{dz}{v_P(z)}.$$

Так как при $\tau > \tau^*$ $\gamma(\tau) = \text{const}$, верхний предел в интеграле может быть принят равным ∞ . Осуществив замену переменных $u = 2\tau$, получим

$$x(t) = -\int_0^{\infty} \frac{d \ln \gamma_1(u)}{du} f(t-u) du, \quad (\text{V.45})$$

где $\gamma_1(u) = \gamma(u/2)$. Так как и нижний предел в интеграле можно принять равным $-\infty$ (если доопределить соответствующим образом $\gamma_1(u)$, считая, что $\gamma_1(u) \equiv \gamma_1(0)$ при $u < 0$), то интеграл (V.45) является интегралом свертки. Вследствие перестановочности свертки его можно записать так:

$$x(t) = -\int_0^{\infty} \frac{d \ln \gamma_1(t-u)}{dt} f(u) du, \quad (\text{V.46})$$

откуда импульсная характеристика для однократных волн

$$l_1(t) = -\frac{d \ln \gamma(t/2)}{dt}. \quad (\text{V.47})$$

Получено, что без учета кратных отражений импульсная характеристика вертикально-неоднородного переходного слоя совпадает с логарифмической производной акустической жесткости, записанной как функция удвоенного времени пробега продольной волны. Функция $l_1(t)$ непосредственно выражает изменение физических свойств переходного слоя по вертикали, поэтому применение обратного фильтра G полностью решает соответствующую обратную задачу.

1. Формула (V.46) остается верной и в том случае, когда мощность переходного слоя является бесконечной (конечность H мы нигде не использовали). Поэтому выражение (V.47) представляет собой импульсную характеристику вертикально-неоднородной среды.

2. Формула (V.46) получена при условии непрерывности функции $\gamma(\tau)$. Если вертикально-неоднородная среда является кусочно-непрерывной (т. е. имеются границы разрыва непрерывности упругих свойств), то к правой части равенства (V.43) нужно прибавить отражения от каждой из границ, не включая их в интегральную сумму. Эти отражения от Δt не зависят, поэтому войдут и в окончательную формулу отдельными слагаемыми:

$$x(t) = \int_0^{\infty} \frac{d \ln \gamma_1(t-u)}{dt} f(u) du + 2 \sum_k \frac{\gamma(z_k+0) - \gamma(z_k-0)}{\gamma(z_k+0) + \gamma(z_k-0)} f\left(t - 2 \int_0^{z_k} \frac{dz}{v_P(z)}\right), \quad (\text{V.46}')$$

где $z = z_k$ — k -тая граница. Функция $\gamma_1(t)$ под знаком интеграла определена во всех точках непрерывности. Импульсная характеристика в этом случае будет содержать сингулярные составляющие.

В качестве примера рассмотрим линейный переходной слой, в котором скорость волны v_p при $0 \leq z \leq H$ изменяется по линейному закону $v_0(1 + \beta z)$, а плотность ρ постоянна при всех z . Время пробега τ как функция от z выразится следующей формулой:

$$\tau(z) = \int_0^z \frac{dz}{v_0(1 + \beta z)} = \frac{1}{\beta v_0} \ln(1 + \beta z), \quad 0 \leq z \leq H.$$

Выразим z через $t = 2\tau$.

$$1 + \beta z = \exp\left(\frac{1}{2}\beta v_0 t\right), \quad 0 \leq t \leq 2\tau^*, \quad (\text{V.48})$$

где

$$\tau^* = \frac{1}{\beta v_0} \ln(1 + \beta H).$$

Так как в интервале $0 \leq z \leq H$ акустическая жесткость равна $\gamma_0(1 + \beta z)$, где $\gamma_0 = \rho v_0$, то как функция от t она выразится формулой

$$\gamma_1(t) = \gamma_0 \exp\left(\frac{1}{2}\beta v_0 t\right), \quad 0 \leq t \leq 2\tau^*.$$

Отсюда по формуле (V.47) получим

$$l_1(t) = -\frac{1}{2}\beta v_0, \quad 0 \leq t \leq 2\tau^*;$$

при $t > 2T$ $l(t) \equiv 0$, так как $\gamma_1(t)$ в интервале $(2T, \infty)$ постоянна.

Амплитудный спектр прямоугольного импульса, имеющего высоту $\frac{1}{2}\beta v_0$ и ширину $2T$, равен

$$\frac{\beta v_0}{2\omega} |\sin \omega T|,$$

поэтому линейный переходной слой действует как фильтр низких частот. Первый нуль соответствует частоте $\pi/\tau^* = \pi\beta v_0/\ln(1 + \beta H)$. Приняв $v_0 = 3$ км/с, $H = 100$ м, $\beta = 1/600$ м⁻¹, получим $2\pi \cdot 15$ Гц, что говорит об очень низкочастотном характере отраженной волны.

Рассмотренная постановка обратной задачи сильно идеализирована и нуждается в некоторых коррективах.

Прежде всего сигнал $f(t)$ после распространения в среде проходит через приемную аппаратуру, так что $x(t) = HL[f(t)]$, где H — оператор, выражающий действие регистрирующего канала. Если H — стационарная линейная система, что вследствие перестановочности таких систем $x(t) = L[f_1(t)]$, где $f_1(t) = H[f(t)]$. Следовательно, регистрируемый сигнал можно считать результатом распространения импульса $f_1(t)$, включив влияние приемной аппаратуры в излучаемый импульс.

Более существенным ограничением является предположение, что посылаемая в среду волна — плоская. Ясно, что фронт падающей волны должен быть близким к плоскому только в некоторой цилиндрической области $D : x^2 + y^2 \leq R^2$ с радиусом R , большим, чем длина волны. Такие возмущения могут создаваться при помощи источников, рассредоточенных на дневной поверхности в области D (группа зарядов и т. п.). Рассредоточенные источники оказываются дорогостоящими, и на практике имеют дело, как правило, с источниками точечного типа, излучающими в однородной среде волны со сферическими фронтами¹.

Прежде чем рассмотреть осложнения, связанные со сферичностью фронта падающей волны, сделаем одно замечание, касающееся характера решений для плоских волн. Уже отмечалось, что при нормальном падении плоской волны в горизонтально-слоистой среде с однородными слоями член нулевого порядка лучевого ряда совпадает с точным решением. Поэтому при-

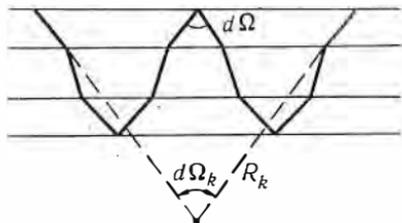


Рис. 18

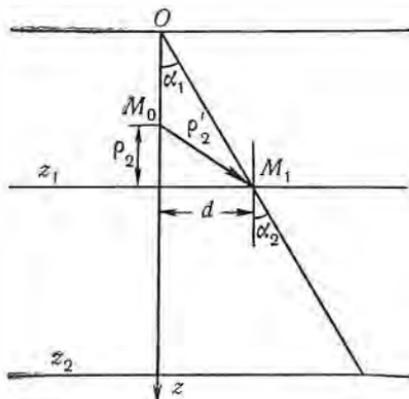


Рис. 19

меняющаяся здесь кусочно-однородная аппроксимация непрерывной вертикально-неоднородной среды по существу эквивалентна построению решения при помощи лучевого метода в том смысле, что сумма всех волн нулевого приближения лучевого ряда, возникающих в кусочно-однородной аппроксимации с шагом Δt , стремится к точному решению при достаточной гладкости падающего импульса. Разумеется, получаемое точное решение не совпадает с нулевым членом лучевого ряда для исходной непрерывной среды.

Поскольку сферическая волна является локально-плоской, то из сделанного выше замечания следует, что результаты замены рассредоточенного источника точечным могут быть получены с помощью лучевого метода для кусочно-однородной среды, по крайней мере для колебаний, распространяющихся вдоль нормального луча.

В соответствии с результатами лучевого метода при излучении сферической волны из начала координат нулевое приближение лучевого ряда в окрестности нормального луча $x = 0$, $y = 0$ будет состоять из тех же

¹ Более того, для подавления кратных волн необходимо применение точечных источников, обеспечивающих различную кинематику однократных и многократных отражений.

волн, что и при падении плоской волны. Времена их распространения будут определяться теми же законами геометрической сейсмологии, а амплитуды — коэффициентами отражения и преломления для нормального падения плоских волн и геометрическим расхождением. Таким образом, единственным дополнительным фактором является геометрическое расхождение, которое приводит к дополнительному уменьшению амплитуд волн при увеличении времени пробега и, как следствие, к быстрому уменьшению интенсивности сигнала $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Найдем импульсную характеристику вертикально-неоднородного переходного слоя без учета кратных для нормального падения сферической волны (т. е. с учетом геометрического расхождения). Входным сигналом по-прежнему является смещение продольной волны в ближайшей окрестности источника.

Считая ближайшую окрестность источника однородной, падающую сферическую волну в нулевом приближении запишем так:

$$\frac{\Psi(\alpha, \theta)}{r} f \left[t - \left(\frac{r}{v_0} \right) \right] \vec{r}_1,$$

где $\Psi(\alpha, \theta)$ — характеристика направленности источника; \vec{r}_1 — единичный радиус-вектор. Вследствие вертикальной поляризации всех возникающих волн в дальнейшем будем рассматривать только скалярный множитель при \vec{r}_1 . Амплитуду сигнала $f(t)$ нормируем так, чтобы значение характеристики направленности для нормального луча было равным единице.

Применив формулы (IV.22) и (IV.23) для нулевого члена лучевого ряда при прохождении k границ вниз, а затем вверх, получим¹ после сокращения всех сомножителей типа $\rho(M_j) v(M_j)$ и $\cos \alpha_j$

$$x_{\Delta}(t) = -2 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\sqrt{J_k}} \prod_{j=1}^{k-1} (1 - A_j^2) f(t - 2k \Delta \tau), \quad (\text{V.49})$$

где $\sqrt{J_k}$ — относительное геометрическое расхождение, которое в данном случае определяется формулой

$$J_k = r_0^2 \frac{d\sigma_k}{d\Omega},$$

где $d\sigma_k$ — площадь сечения лучевой трубки, связанной с нормальным лучом и имеющей в источнике телесный угол $d\Omega$ (рис. 18), плоскостью $z = 0$; $d\sigma_0 = r_0^2 d\Omega$.

Вследствие осевой симметрии фронт вдоль нормального луча имеет одинаковую кривизну во всех сечениях, поэтому

$$d\sigma_k = R_k^2 d\Omega_k,$$

¹ Неучтенным остается влияние примесных составляющих, обязанных несферичности фронта в неоднородной среде и характеристике направленности реального источника.

где R_k — радиус сферического фронта k -той отраженной волны в точке касания поверхности $z = 0$; $d\Omega_k$ — телесный угол последнего сегмента лучевой трубки (см. рис. 18). Поскольку угол выхода падающей волны из источника в горизонтально-слоистой среде равен углу выхода на дневную поверхность $z = 0$, то $d\Omega = d\Omega_k$. Следовательно,

$$\sqrt{J_k} = R_k.$$

Задача свелась к вычислению радиуса соответствующей сферы.

Обозначим через r_j — максимальный радиус сферического фронта для j -того сегмента лучевой трубки k -той волны. В соответствии с этим обозначением $R_k = r_{2k}$.

Для $j = 1$, очевидно, $r_1 = z_1$. Радиус r_2 представим в виде суммы

$$r_2 = \rho_2 + h_2,$$

где $h_2 = z_2 - z_1$; ρ_2 — расстояние от центра второй сферы до первой границы (рис. 19). Проведем из источника, совпадающего с центром первой сферы, луч под углом α_1 к оси z до пересечения с первой границей в некоторой точке M_1 . Этот луч будет продолжен во второй слой под углом α_2 , удовлетворяющим закону Снелиуса:

$$\sin \alpha_2 / \sin \alpha_1 = v_2 / v_1.$$

Прямая, совпадающая при $z_1 \leq z \leq z_2$ с продолжением луча во втором слое, пересечется с осью z в точке M_0 , которая является центром сфер второго сегмента лучевой трубки, отвечающей углу выхода α_1 . Поэтому при $\alpha_1 \rightarrow 0$ расстояние ρ_2' от точки M_0 до границы $z = z_1$ будет стремиться к искомой величине ρ_2 .

Обозначив через d расстояние от точки M_1 до оси z , проходящей через источник, имеем два очевидных равенства

$$d = \rho_2' \operatorname{tg} \alpha_2 \text{ и } d = r_1 \operatorname{tg} \alpha_1,$$

откуда

$$\rho_2' = r_1 \frac{v_1}{v_2} \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}.$$

Устремив α_2 к нулю, получим $\rho_2 = r_1 \frac{v_1}{v_2}$, а так как $r_1 = z_1 = h_1$, то

$$r_2 = r_1 \frac{v_1}{v_2} + h_2 = \frac{h_1 v_1 + h_2 v_2}{v_2}. \quad (\text{V.50})$$

Проведя те же самые рассуждения для $j = 3$, получим

$$r_3 = r_2 \frac{v_2}{v_3} + h_3 = \frac{h_1 v_1 + h_2 v_2 + h_3 v_3}{v_3}$$

и т. д. Окончательно

$$R_k = r_{2k} = \frac{2}{v_1} \sum_{j=1}^k v_j h_j, \quad (\text{V.50}') \quad (9^*)$$

а поскольку по условию $h_j = v_j \Delta\tau$, то

$$R_k = \frac{2 \Delta\tau}{v_1} \sum_{j=1}^k v_j^2.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (V.49) и переходя в последней к пределу при $\Delta\tau \rightarrow \infty$, получим следующий аналог формулы (V.44):

$$x(t) = -v_P(0) \int_0^{\tau:} \frac{d \ln \gamma(\tau)}{d\tau} \frac{f(t-2\tau)}{2 \int_0^{\tau} v_P^2(\tau) d\tau} d\tau.$$

Эта формула определяет сумму однократных волн в приемнике, находящемся в той же точке плоскости $z = 0$, что и источник.

Построив далее аналоги формул (V.45) и (V.46), получим выражение импульсной характеристики для однократных волн с учетом геометрического расхождения. Приведем эту характеристику для случая, когда среда содержит границы разрыва непрерывности $z = z_k$:

$$l_{1(cф)}(t) = -\frac{v_P(0)}{2 \int_0^{t/2} v_P^2(\tau) d\tau} \frac{d \ln \gamma(t/2)}{dt} + \sum_{(k)} \frac{A_k v_P(0)}{\int_0^{t_k/2} v_P^2(\tau) d\tau} \delta(t - t_k), \quad (V.51)$$

где

$$A_k = [\gamma(z_k + 0) - \gamma(z_k - 0)] / [\gamma(y_k + 0) - \gamma(z_k - 0)],$$

$$t_k = 2 \int_0^{z_k} \frac{dz}{v_P(z)}.$$

Согласно формуле (V.48) для линейного переходного слоя имеем

$$v_P^2(\tau) = v_0 \exp(2\beta v_0 \tau), \quad v_P(0) = v_0,$$

следовательно,

$$l_{1(cф)}(t) = -\frac{\beta^2 v_0^2}{2 [\exp(\beta v_0 t) - 1]}. \quad (V.52)$$

При малых $t \exp(\beta v_0 t) \sim 1 + \beta v_0 t$, откуда

$$l_{1(cф)}(t) \sim -\beta v_0^2 / 2t, \quad t \rightarrow 0,$$

а при больших t уменьшение интенсивности становится более резким:

$$l_{1(cф)}(t) \sim -(\beta^2 v_0^2 / 2) \exp(-\beta v_0 t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Импульсная характеристика (V.51) в отличие от (V.47) зависит не только от акустической жесткости ρv_P , но и от скорости распространения

продольных волн v_p . Но это не значит, что появляется возможность раздельного определения $\rho(\tau)$ и $v_p(\tau)$ и перехода к масштабу глубин $z = \tau v_p(\tau)$. Действительно, рассмотрев кусочно-однородную аппроксимацию переходного слоя, получим, что $l_{1(c\phi)}(t)$ имеет только n ненулевых отсчетов. Ясно, что по ним нельзя определить $2n$ отсчетов $\rho(k \Delta\tau)$ и $v_p(k \Delta\tau)$.

§ 22. Обратная динамическая задача для линейно-неупругой вертикально-неоднородной среды

Серьезным фактором, осложняющим изучение реальных сред при динамической интерпретации сейсмограмм, является поглощение, вызывающее не только ослабление амплитуды волн, но и изменение формы из-за более сильного затухания высокочастотных составляющих.

Влияние поглощения на структуру сейсмограмм сильно зависит от его механизма. В нелинейных моделях, например, нельзя ввести понятия импульсных и спектральных характеристик. В то же время линейно-неупругие модели обнаруживают много общих свойств с идеально-упругой средой. В частности, приведенный выше вывод спектральной характеристики непосредственно обобщается на случай вертикально-неоднородного линейно-неупругого слоя. Для этого решение в каждом элементарном слое, характеризуемом тремя «упругими» параметрами ρ_k , λ_k , μ_k и двумя функциями последействия $\lambda_k''(\tau)$ и $\mu_k''(\tau)$, нужно искать в виде (V.11), где в соответствии с формулой (II.40) величину $1/v_k$ нужно заменить на

$$c_k(\omega) = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda_k(\omega) + \mu_k(\omega)}}, \quad (V.53)$$

где $\lambda_k(\omega)$ и $\mu_k(\omega)$ — спектры операторов λ_k и μ_k .

Особенно большого сходства между решениями для упругой и линейно-неупругой сред следует ожидать, когда функции последействия не зависят от координаты z , поскольку в этом случае изменение формы отраженной волны может оказаться не связанным с изменением «упругих» параметров. В связи с этим возникает практически важный вопрос: можно ли в случае линейно-неупругой среды применить обращенный алгоритм Баранова — Кюнэтца из § 20 для решения обратной динамической задачи? Ответ является положительным для релаксационной модели с временем релаксации T , не зависящим от z .

Сначала рассмотрим вспомогательную задачу отражения плоской волны, нормально падающей на границу двух однородных линейно-неупругих полупространств.

Представив решение в первой среде в виде суммы падающей и отраженной волн

$$\{\exp[-i\omega c_1(\omega)z] - A \exp[i\omega c_1(\omega)z]\} \exp(i\omega t) \vec{k},$$

а во второй среде — в виде одной преломленной волны

$$B \exp\{i\omega [t - c_2(\omega)z]\} \vec{k},$$

получим из условия непрерывности смещений на границе $z = 0$

$$1 - A = B.$$

Выразив напряжение в обоих средах согласно операторному закону Гука (3.3), будем иметь из условия непрерывности нормального напряжения:

$$\gamma_1(\omega)(1 + A) = \gamma_2(\omega),$$

где

$$\gamma_k(\omega) = \sqrt{\rho_k [\lambda_k(\omega) + \mu_k(\omega)]}.$$

Решая эти уравнения, получим

$$A = \frac{\gamma_2(\omega) - \gamma_1(\omega)}{\gamma_2(\omega) + \gamma_1(\omega)}, \quad B = \frac{2\gamma_1(\omega)}{\gamma_1(\omega) + \gamma_2(\omega)}.$$

Согласно формулам (II.38) и (II.39), выражающим спектры операторов λ и μ релаксационной модели,

$$\gamma_k(\omega) = \gamma'_k / K(\omega) \quad \text{и} \quad c_k(\omega) = K(\omega) / v'_k;$$

где

$$\gamma'_k = \rho_k v'_k; \quad v'_k = \sqrt{(\lambda'_k + 2\mu'_k) / \rho_k};$$

$$K(\omega) = \sqrt{(1 + i\omega\tau / i\omega\tau)}.$$

Скорость v'_k , являющаяся максимальной для k -той среды, — это скорость распространения монохроматических волн при $\omega \rightarrow \infty$. Используя полученные формулы, найдем выражение отраженной

$$A' \exp \left\{ i\omega \left[t + \frac{z}{v'_1} K(\omega) \right] \right\} (-\vec{k})$$

и преломленной

$$B' \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{z}{v'_2} K(\omega) \right] \right\} \vec{k}$$

монохроматических волн. В этих выражениях A' и B' представляют собой коэффициенты отражения, зависящие по обычным формулам только от «упругих» параметров ρ_k , λ'_k и μ'_k . Множитель $\exp \left[i\omega \frac{z}{v'_k} K(\omega) \right]$, определяющий изменение формы волны, зависит только от времени пробега z/v'_k . Пусть, например, в точке $z = -h$ падающая волна имеет форму $f(t)$. Тогда монохроматическая составляющая падающей волны будет равна

$$S(\omega) \exp \left[-\frac{h}{v'_1} K(\omega) \right] \exp \left\{ i\omega \left[t - \frac{z}{v'_1} K(\omega) \right] \right\} \vec{k}.$$

Отсюда следует, что в этой же точке $z = -h$ отраженная волна выразится формулой

$$-A' f(t, \tau) \vec{k},$$

где

$$f(t, \tau) = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp \{ i\omega [t - 2\tau K(\omega)] \} d\omega, \quad (V.54)$$

$$\tau = \frac{h}{v'_1}.$$

Вернемся к $(n + 1)$ -слойной кусочно-однородной релаксационной модели с постоянным временем T . Форма всякой волны, испытавшей конечное число отражений и преломлений, будет зависеть только от ее времени пробега, а амплитуда определится коэффициентами отражения — преломления, как и в случае упругой среды. Отсюда следует, что сумма всех волн, имеющих время прихода $2p \Delta\tau$, равна

$$l'_{2p} f(t, 2p \Delta\tau),$$

где l'_{2p} имеет тот же смысл, что l_{2p} для упругой среды (с заменой μ_k и λ_k на μ'_k и λ'_k). [Суммируя по всем p , найдем выражение для сейсмической трассы, отвечающей $(n + 1)$ -слойной аппроксимации:

$$x_{\Delta}(t) = \sum_{p=1}^{\infty} l'_{2p} f(t, 2p \Delta\tau).$$

Эту формулу можно переписать

$$x_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} l'_{2p} \delta(\tau - 2p \Delta\tau) f(t, \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} l'_{\Delta}(\tau) f(t, \tau) d\tau,$$

где $l'_{\Delta}(t)$ — импульсная характеристика соответствующей упругой среды. Переходя к пределу при $\Delta\tau \rightarrow 0$, получим

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} l'(\tau) f(t, \tau) d\tau. \quad (\text{V.55})$$

Таким образом, $x(t)$ представляет собой линейное нестационарное преобразование функции $l'(t)$, являющейся импульсной характеристикой упругой среды с параметрами $\rho(z)$, $\lambda'(z)$ и $\mu'(z)$. Отсюда и следует положительный ответ на поставленный вопрос, так как к функции $l'(t)$ применим обращенный алгоритм Баранова — Кюнэтца (после преобразования ее идеальным низкочастотным фильтром с граничной частотой $\pi/2 \Delta\tau$).

Если время релаксации T известно, то функция $f(t, \tau)$ может быть определена для всех τ , и задача сводится к решению линейного интегрального уравнения (V.55).

Однако оператор, осуществляющий преобразование $x(t)$ в $l'(t)$, является нестационарным. Поэтому метод обратной фильтрации не дает в данном случае искомого решения. К аналогичному выводу придем, если рассмотрим отраженную волну без учета кратных.

§ 23. Подавление ревербераций и волны-спутника

При наличии резких границ вблизи источника появляются волны-помехи, ухудшающие разрешенность сейсмограмм. Рассмотрим применение обратных фильтров с целью подавления некоторых помех этого класса.

Пусть в интервале $0 \leq z \leq H$ среда однородна и характеризуется известными параметрами ρ_0 и v_0 . Изучаемые объекты среды располагаются

на глубине $z > H$ (рис. 20). Такая ситуация возникает при постановке сейсмических исследований на море. Слой воды малой мощности H служит источником интенсивных волн-помех, называемых реверберациями.

Рассмотрим природу реверберации, предположив сначала, что возбуждаемая на поверхности $z = 0$ волна является плоской:

$$\vec{u}_0(t, z) = f[t - (z/v_0)] \vec{k}. \quad (V.56)$$

Достигнув поверхности $z = H$, характеризующейся коэффициентом отражения

$$A = (\rho_1 v_1 - \rho_0 v_0) / (\rho_1 v_1 + \rho_0 v_0) > 0, \quad (V.57)$$

волна $\vec{u}_0(t, z)$ дает начало отраженной волне $A f\left(t + \frac{z-H}{v_0}\right) (-\vec{k})$, кото-

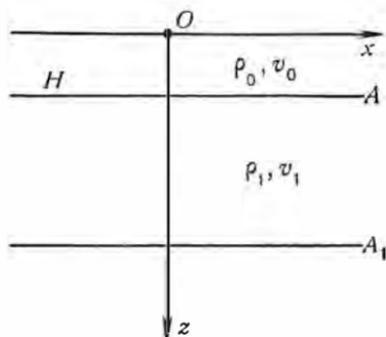


Рис. 20

рая в свою очередь отразится от дневной поверхности, и т. д. Поскольку коэффициент отражения от дневной поверхности равен -1 , то в среде $z \geq H$ фактически излучается плоская волна, состоящая из бесконечного числа волн с формой колебания $f(t)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k f\left[\left(t - \frac{2kH}{v_0}\right) - \frac{z}{v_0}\right] \vec{k}. \quad (V.58)$$

Пусть $u(t) = u(t, 0)$ — функция, выражающая колебания среды в точке приема с координатами $(0,0,0)$, под воздействием волны, которая образуется при отражении излучаемого импульса (V.56) объектом, расположенным на глубине $z > H$. Тогда волна, которая отражается от выделенного объекта, вследствие линейности и стационарности упругой среды равна

$$u_{\Sigma}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k u[t - (2kH/v_0)].$$

Так как сигнал $u_{\Sigma}(t)$ сам становится источником новых многократных отражений в слое воды, то суммарное колебание, связанное с полезным отражающим объектом, выразится формулой

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-A)^k u_{\Sigma}[t - (2kH/v_0)].$$

Таким образом, полезный сигнал $u(t)$ «расплылся» в последовательность сигналов, которые при малых H перекрываются друг другом и (что более существенно) волнами от других объектов.

Определим спектр функции $u_{\Sigma}(t)$. В соответствии с известными теоремами о спектрах

$$S_{\Sigma}(\omega) = S_u(\omega) \sum_{k=0}^{\infty} \left[-A \exp\left(-\frac{2i\omega H}{v_0}\right) \right]^k = S_u(\omega) / \left[1 + A \exp\left(-\frac{2i\omega H}{v_0}\right) \right].$$

Очевидно, спектр $S_v(\omega)$ так же связан с $S_{\Sigma}(\omega)$, как последний с $S_u(\omega)$, поэтому наложение ревербераций эквивалентно прохождению полезного сигнала через фильтр со спектральной характеристикой:

$$M(\omega) = 1 \left\{ 1 + A \exp\left[-2i\omega\left(\frac{H}{v_0}\right)\right] \right\}^2. \quad (\text{V.59})$$

В связи с этим фильтр G , корректирующий влияние ревербераций, имеет спектральную характеристику

$$G(\omega) = \{1 + A \exp[-2i\omega(H/v_0)]\}^2 = 1 + 2A \exp[-2i\omega(H/v_0)] + A^2 \exp[-4i\omega(H/v_0)]. \quad (\text{V.60})$$

Если на вход этого фильтра подается сигнал $x(t)$, то на выходе получим сумму

$$y(t) = x(t) + 2Ax(t - \tau) + A^2x(t - 2\tau); \quad \tau = 2H/v_0. \quad (\text{V.61})$$

Непосредственная цифровая реализация определится формулой

$$y_k = x_k + 2Ax_{k-s} + A^2x_{k-2s},$$

где $s = \tau/\Delta t$.

Дереверберационный фильтр (V.60) не избавляет полностью от влияния реверберации даже в том случае, когда посылаемая в среду волна действительно является плоской, поскольку он не учитывает вторичных ревербераций, возникающих от слагаемых к сумме для $v(t)$ и ревербераций более высокого порядка. Более того, вообще не существует такого абстрактного линейного преобразования, которое полностью избавляет наблюдаемую трассу от ревербераций. Причина заключается в том, что слой $0 \leq z \leq H$ и полупространство $z > H$ не образуют последовательных линейных систем, так как колебания, возникающие в полупространстве $z > H$, вызывают колебания в слое $0 \leq z \leq H$ и обратно (т. е. это система с многократной обратной связью).

Для того чтобы показать это строго, предположим, что полупространство $z > H$ является $(n+1)$ -слоистой средой с горизонтальными однородными слоями, имеющими одинаковую «временную» мощность Δt .

Для простоты предположим также, что

$$f(t) = -\frac{1}{i\omega v_0} \exp i\omega \left[t - \frac{z-H}{v_0} \right].$$

В этом случае в соответствии с законом Гука на границе $z = H$ будет создано напряжение, равное $\exp(i\omega t)$, так что искомая трасса, свободная от влияния слоя воды, будет равна

$$L(\omega) \exp(i\omega t),$$

где $L(\omega)$ — спектральная характеристика $(n + 1)$ -слоистой среды, определяемая формулой (V.18). Трасса, включающая влияние слоя воды определится аналогичной формулой

$$L'(\omega) \exp \left\{ i\omega \left[t + \left(\frac{H}{v_0} \right) \right] \right\},$$

где $L'(\omega)$ — спектральная характеристика $(n + 2)$ -слоистой среды, определяемая формулой

$$L'(\omega) = \frac{A'_{22}(\omega) + i\omega\gamma_{n+1}A'_{22}(\omega)}{A'_{21}(\omega) + i\omega\gamma_{n+1}A'_{11}(\omega)};$$

A_{ik} — элементы матрицы $\mathbf{A}' = \mathbf{P}_n \mathbf{P}_{n-1} \dots \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_0 = \mathbf{A} \mathbf{P}_0$.

Матрица \mathbf{P}_0 определяется по формуле (V.16) при $\Delta\tau = \tau = H/v_0$:

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \cos \omega\tau & \frac{\sin \omega\tau}{\omega\gamma_0} \\ -\omega\gamma_0 \sin \omega\tau & \cos \omega\tau \end{pmatrix}.$$

Вычисляя элементы матрицы \mathbf{A}' , получим

$$L'(\omega) = \frac{(A_{22} + i\omega\gamma_{i+1}A_{12}) \cos \omega\tau + (A_{21} + i\omega\gamma_{n+1}A_{11}) \frac{\sin \omega\tau}{\omega\gamma_0}}{(A_{21} + i\omega\gamma_{n+1}A_{11}) \cos \omega\tau - (A_{22} + i\omega\gamma_{n+1}A_{12}) \omega\gamma_0 \sin \omega\tau} =$$

$$= \frac{L(\omega) + \frac{\text{tg } \omega\tau}{\omega\gamma_0}}{1 - \omega\gamma_0 \text{tg } \omega\tau \cdot L(\omega)} \quad (\text{V.62})$$

Если бы влияние слоя можно было выразить в виде некоторой линейной системы, то можно было бы указать независящую от $L(\omega)$ функцию $M(\omega)$, такую, что $L'(\omega) = M(\omega) L(\omega)$. Из формулы (V.62) следует, что при $\tau \neq 0$ и $L(\omega) \neq \text{const}$ такой функции нет. Поэтому полное устранение влияния слоя воды при помощи обратного фильтра невозможно.

Рассмотрим действие ревербераций с учетом геометрического расхождения в случае точечного источника.

Пусть в начале координат помещен точечный источник, в окрестности которого возникает волна

$$\frac{\psi(\theta, \alpha)}{r} f[t - (r/v_0)] \vec{r}_1, \quad (\text{V.63})$$

где функция направленности источника нормируется таким образом, что для нормального луча $\psi = 1$.

В пределах лучевой трубки, отвечающей нормальному лучу, эта волна равна $(1/z) f[t - (z/v_0)] \vec{k}$. Величина z здесь выражает геометрическое расхождение. Далее при отражении волны от границ $z = H$ и $z = 0$ геометрическое расхождение будет изменяться в соответствии с формулой (V.50), в которой обе скорости надо принять равными v_0 , а обе мощности — равными H . Именно при первом подходе волны к границе $z = H$ геометрическое расхождение равно H , при возвращении к границе $z = 0$ оно равно $2H$, при втором подходе к границе $z = H$ равно $3H$ и т. д. Коэф-

коэффициенты отражения от границ $z = H$ и $z = 0$ определяются так же, как и в плоском случае.

Отсюда следует, что k -тая волна, падающая на границу $z = H$, имеет вид

$$\frac{(-A)^k}{2kH+z} f\left(t - \frac{z+2kH}{v_0}\right) \vec{k}. \quad (\text{V.64})$$

Рассмотрим волну, отраженную от некоторой горизонтальной границы, расположенной на глубине $z = H + H_1$ и имеющей коэффициент отражения A_1 . Слой между границами $z = H$ и $z = H + H_1$ считается однородным, скорость распространения продольных волн в этом слое равна v_1 . Используя формулу (V.50'), получим, что геометрическое расхождение отраженной волны, от k -того падающего импульса, в момент касания границы $z = 0$ равно $2(k+1)H + 2H_1(v_1/v_0)$.

Учитывая коэффициенты отражения на границе $z = H + H_1$ и преломления на границе $z = H$, найдем сумму всех отраженных волн в начале координат

$$u_{\Sigma}(t) = A_1(1 - A^2) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-A)^k f\left[t - t_0 - \frac{2kH}{v_0}\right]}{2(k+1)H + 2H_1(v_1/v_0)}, \quad (\text{V.65})$$

где

$$t_0 = 2\left[(H/v_0) + (H/v_1)\right].$$

Этот сигнал, отразившись от границы $z = 0$, порождает вторичные реверберации, связанные с границей $z = H$.

С точностью до этих ревербераций

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{v_0 A_1 (1 - A^2) g}{2(Hv_0 + H_1 v_1)} \sum_{k=1}^{\infty} (-A)^k \times \\ &\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-A)^j f\left\{t - t_0 - \left[\frac{2(j+k)H}{v_0}\right]\right\}}{k+j+g}, \end{aligned} \quad (\text{V.66})$$

где

$$g = \frac{v_0 H + v_1 H_1}{v_0 H}.$$

Будем считать, что полезным сигналом является слагаемое

$$-[v_0 A_1 (1 - A^2) / 2(v_0 H + v_1 H_1)] f(t - t_0). \quad (\text{V.67})$$

Тогда, определив спектр правой и левой частей равенства (V.66), найдем, что действие ревербераций эквивалентно фильтру со спектральной характеристикой, которую можно преобразовать к виду

$$M_q(\omega) = g \sum_{p=0}^{\infty} [(p+1)(-A)^p / (p+q)] \exp(-i\omega p\tau), \quad (\text{V.68})$$

$$\tau = 2H/v_0.$$

Видно, что действие ревербераций зависит от глубины изучаемого объекта, поэтому дереверберационный фильтр $1/M_q(\omega)$ зависит от того, какая из отраженных волн считается полезной. Так как полезная волна может интерферировать с реверберациями от предшествующих границ, то выбор дереверберационного фильтра связан с наличием априорных сведений о структуре изучаемой среды.

При $H_1 \rightarrow \infty$ имеем $q \rightarrow \infty$, откуда $M_q(\omega) \rightarrow M(\omega)$; где $M(\omega)$ определяется для плоских волн. Следовательно, при изучении глубоководных отражающих границ (сравнительно с мощностью воды) можно пользоваться дереверберационным фильтром (V.60), рассчитанным для плоских волн.

Построение дереверберационного фильтра $1/M_q(\omega)$ рассмотрим несколько позже.

Задача подавления волны-спутника возникает при расположении источника ниже какой-либо резкой границы, которой обычно является дневная поверхность.

Рассмотрим упругое полупространство, состоящее из двух слоев: $-H \leq z \leq h$ и $z > h$. Пусть в окрестности точечного источника, помещенного в начале координат ниже свободной границы $z = -h$, возбуждается сферическая волна

$$f[t - (r/v)] \vec{r}_1/r \quad (\text{рис. 21}).$$

Колебания, распространяющиеся вдоль положительного направления оси z , состоят из прямой волны $(1/z)f[t - (z/v)] \vec{k}$ и волны, отраженной от свободной границы в результате падения на нее волны $(-1/z)f[t + (z/v)] \vec{k}$. Так как коэффициент отражения от свободной границы равен -1 , геометрическое расхождение в момент касания ее равно H , то вниз пойдет волна, которая при $z > H$ будет иметь вид

$$-\left(\frac{1}{2H+z}\right) f\left[t - \left(\frac{z}{v}\right) - \left(\frac{2H}{v}\right)\right] \vec{k}.$$

Нас интересуют колебания в приемнике, расположенном в точке с координатами $(0, 0, -H)$, которые вызваны отражением от границы $z = h$. Если коэффициент отражения от этой границы есть A , то (учитывая удвоение амплитуд) суммарная отраженная волна равна

$$-\frac{2A}{2h+H} f\left(t - \frac{2h+H}{v}\right) + \frac{2A}{2h+3H} f\left(t - \frac{2h+3H}{v}\right).$$

Второе слагаемое в этом выражении называется волной-спутником. Определяя спектр этой суммы и считая полезной волной только первое слагаемое, приходим к выводу, что образование волны-спутника эквивалентно фильтрации со спектральной характеристикой

$$M(\omega) = 1 - \operatorname{sech}(\omega\tau), \quad \tau = 2H/v, \quad (\text{V.69})$$

где

$$c = \frac{1 + \left(\frac{H}{2h}\right)}{1 + \left(\frac{3H}{2h}\right)} < 1. \quad (\text{V.70})$$

Таким образом, спектральная характеристика фильтра, подавляющего волну-спутник, равна

$$G(\omega) = \frac{1}{1 - c \exp(-i\omega\tau)} = 1 + c \exp(-i\omega\tau) + c^2 \exp(-2i\omega\tau) + \dots \quad (\text{V.71})$$

Фильтр с такой спектральной характеристикой действует по формуле

$$y(t) = x(t) + cx(t - \tau) + c^2x(t - 2\tau) + \dots$$

Импульсная характеристика соответствующего цифрового фильтра определяется равенством:

$$l_{js} = c^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots; \quad s = \frac{\tau}{\Delta\tau}$$

(остальные отсчеты равны нулю).

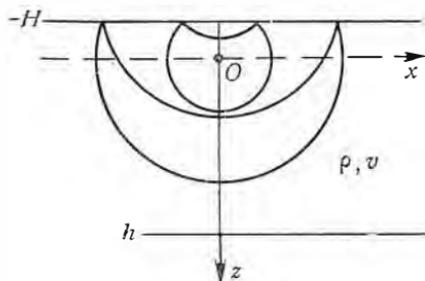


Рис. 21

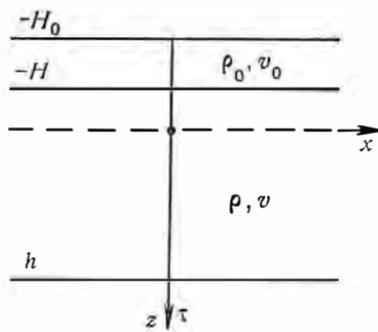


Рис. 22

Как и в случае подавления ревербераций, характеристики фильтра зависят от глубины залегания отражающей границы. Ясно, что к пределу при $h \rightarrow \infty$ переходить нельзя, так как правая часть в формуле (V.71) при $c = 1$ расходится.

Во многих случаях наиболее резкой отражающей границей, располагающейся над источником, является подошва зоны малых скоростей (рис. 22). Теперь волна-спутник образуется в результате отражения от слоя $-H_0 \leq z \leq -H$.

Спектральная характеристика фильтра, выражающего образование волны-спутника, определится приближенно формулой (V.69), в которой множитель $-c$, представляющий собой произведение коэффициента отражения от свободной границы на отношение геометрических расхождений (V.70), нужно заменить значением спектральной характеристики слоя $-H_0 \leq z \leq -H$ при отражении нормально падающей снизу волны, умноженным на новое отношение геометрических расхождений:

$$M(\omega) \approx 1 + c' L(\omega) \exp(-i\omega\tau), \quad (\text{V.72})$$

где

$$c' = \frac{(2h+H)v + \Delta H v_0}{(2h+3H)v + \Delta H v_0}.$$

Строго говоря, спектральная характеристика $L(\omega)$ должна определяться с учетом геометрического расхождения многократных волн в слое $-H_0 \leq z \leq -H$. Мы, в целях упрощения, воспользуемся спектральной характеристикой отражающего слоя для плоских волн (I.38). В формуле (I.38) надо принять $\gamma_3 = 0$ (акустическая жесткость воздуха), $\gamma_2 = \gamma_0$ (акустическая жесткость в слое малой скорости) и $\gamma_1 = \gamma$ (акустическая скорость в слое $-H \leq z \leq h$). Обозначая, кроме того, через τ_0 — время пробега в слое $-H_0 \leq z \leq -H$, получим

$$L(\omega) = -\frac{\gamma \cos \omega \tau_0 + i \gamma_0 \sin \omega \tau_0}{\gamma \cos \omega \tau_0 - i \gamma_0 \sin \omega \tau_0}.$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, запишем $M(\omega)$ в следующем виде:

$$M(\omega) = 1 - c' \frac{1 + A_1 \exp(-i\omega\tau_0)}{A_1 + \exp(-i\omega\tau_0)} \exp(-i\omega\tau).$$

Спектральная характеристика $M(\omega)$ является периодической, если величины τ и τ_0 соизмеримы. Пусть $s = \tau/\Delta t$ и $p = \tau_0/\Delta t$ — целые числа. Тогда подстановки $\tau = s \Delta t$, $\tau_0 = p \Delta t$ и $z = \exp(-i\omega \Delta t)$ дают z -характеристику соответствующего цифрового фильтра:

$$M(z) = \frac{A_1 + z^p - (z^s + A_1 z^{s+p}) c'}{A_1 + z^p}.$$

Отсюда

$$G(z) = \frac{A_1 + z^p}{A_1 + z^p - z^s (1 + A_1 z^p) c'}. \quad (V.73)$$

Структура полученной формулы говорит о том, что фильтр G может быть реализован как последовательность двух фильтров. Первый из них, имеющий z -характеристику $A_1 + z^p$, функционирует по формуле

$$A_1 x(t) + x(t - p \Delta t).$$

Импульсную характеристику второго фильтра с z -характеристикой

$$K(z) = 1/[A_1 + z^p (1 + A_1 z^p) c'^s] \quad (V.74)$$

можно найти, разложив $K(z)$ в ряд Лорана в кольце, содержащем единичную окружность. Более подробно о реализации фильтров такого типа будет сказано в следующей главе.

Если приповерхностный слой $-H_0 \leq z \leq -H$ имеет более сложное строение (например, содержит несколько прослоек и является поглощающим), определение спектральной характеристики $M(\omega)$ может оказаться невозможным из-за отсутствия соответствующей информации. В этой ситуации к подавлению волны-спутника можно подойти следующим образом.

Пусть отраженная волна выражается формулой

$$x_1(t) = f(t) + \varphi(t). \quad (V.75)$$

В этой формуле $f(t)$ интерпретируется, как отражение от падающей волны, а $\varphi(t)$ — как отражение-спутник, форма которого заранее неиз-

вестна. Осуществим взрыв на новой глубине $z > 0$. Тогда полезная волна придет с опережением $\Delta\tau = \frac{z}{v}$, а спутник получит запаздывание $2\Delta\tau$:

$$x_2(t) = f(t + \Delta\tau) + \varphi(t - 2\Delta\tau). \quad (\text{V.76})$$

Теперь образуем разность

$$x(t) = x_2(t - \Delta t) - x_1(t - 3\Delta\tau) = f(t) - f(t - 3\Delta\tau). \quad (\text{V.77})$$

Мы получили задачу подавления волны-спутника при расположении источника ниже некоторой резкой границы при $\tau = 3\Delta\tau$ и $c = 1$. Преимущество такого решения заключается в том, что значения τ и c оказываются лучше контролируруемыми, чем в предыдущей постановке. Однако значение $c = 1$ является неблагоприятным для построения обратного фильтра (в этом случае не существует даже нефинитный обратный фильтр). Эта трудность может быть устранена при использовании метода регуляризации и обратных фильтров Винера.

Глава VI

ОСУЩЕСТВИМОСТЬ И РЕАЛИЗАЦИЯ ОБРАТНЫХ ФИЛЬТРОВ

§ 24. Вопросы корректности в задаче обратной фильтрации

В предыдущей главе было показано, что решение многих кинематических и динамических задач сейсморазведки приводит к необходимости обратной фильтрации. Решение этих задач в значительной мере определяется возможностью осуществить обратную фильтрацию. С этим связана исключительная важность проблемы существования обратного фильтра.

Указанная проблема разбивается на две: проблему математической корректности (т. е. существования, единственности и устойчивости решения) исходного интегрального уравнения (V.4) и проблему осуществимости обратного оператора G , определяемого интегральным уравнением (V.8), в реализуемом классе линейных систем G .

Ниже рассматривается в основном первая из перечисленных проблем. Обе они тесно связаны, но не эквивалентны. С одной стороны, математическая корректность интегрального уравнения (V.4) необходима (но не достаточна!) для положительного решения второй проблемы, с другой стороны, возможность реализации оператора в определенном классе систем G может обеспечивать корректность исходного интегрального уравнения.

Если $v(t)$ — реакция фильтра L на некоторый реальный сигнал $u(t)$, то существование решения обеспечено именно в силу существования этого реального сигнала $u(t)$.

Ограничившись пока рассмотрением только таких ситуаций, покажем следующее.

Условие единственности. Пусть сигнал $v(t)$ имеет спектр, тогда решение уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} l(t-\tau) u(\tau) d\tau = v(t) \quad (\text{VI.1})$$

является не единственным только в случае, когда спектральная характеристика $L(\omega)$ обращается тождественно в нуль в некотором интервале частот (ω_1, ω_2) .

Действительно, в спектральной форме уравнение (VI.1) имеет вид

$$S_v(\omega) = L(\omega) S_u(\omega). \quad (\text{VI.2})$$

Если к $S_u(\omega)$ прибавить любую функцию $S_1(\omega)$, равную нулю вне интервала частот (ω_1, ω_2) , то спектр $S_v(\omega)$ не изменится. Поэтому в полосе (ω_1, ω_2) спектр решения (VI.1) может быть любым. Так как в интервалах $(-\infty, \omega_1)$ и (ω_2, ∞) спектр решения равен $S_v(\omega)/L(\omega)$, то применяя к S_v/L обратное преобразование Фурье отдельно к каждому из интервалов $(-\infty, \omega_1)$, (ω_1, ω_2) и (ω_2, ∞) , получим общую формулу решения:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega_1} \frac{S_v(\omega)}{L(\omega)} \exp(i\omega t) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_2}^{\infty} \frac{S_v(\omega)}{L(\omega)} \exp(i\omega t) d\omega + u_1(t),$$

где

$$u_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_1(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Если для некоторой изолированной точки $\omega L(\omega') = 0$, то неединственность не возникает, так как отношение $S_v(\omega')/L(\omega')$ в этой точке можно определить, как предел при $\omega \rightarrow \omega'$:

$$\frac{S_v(\omega')}{L(\omega')} = \lim_{\omega \rightarrow \omega'} \frac{S_v(\omega)}{L(\omega)}$$

(этот предел может быть и бесконечным).

Как уже было показано в § 5, спектральная характеристика физически осуществимой системы ни в каком интервале тождественно в нуль обращаться не может, поэтому задача обратной фильтрации единственна во всех случаях, когда сигнал $v(t)$ получен на выходе физически осуществимой системы. Этим доказывается единственность всех рассмотренных в этой главе задач обратной фильтрации. Строго говоря, для применения теоремы 1 к обратной динамической задаче нужно убедиться в том, что трасса $x(t)$ имеет спектр. Но это так, поскольку для переходного слоя существует спектральная характеристика, и излучаемый в среду сигнал также имеет спектр.

Вернемся к вопросу существования решения. Дело в том, что хотя по физическому смыслу задачи $v(t)$ является реакцией на воздействие реального сигнала, на практике существование решения отнюдь не обеспечено, так как измерение сигнала $v(t)$ [а также функции $l(t)$] сопряжено с погрешностью эксперимента. Поэтому вместо функции $v(t)$ — действительного отклика фильтра L , имеем дело с функцией $\bar{v}(t)$, которая может и не относиться к классу откликов фильтра L на воздействие $u(t)$ (из неко-

того множества воздействий). Следовательно, условие существования желательного сформулировать в более конструктивной форме.

Если отношение $S_v(\omega)/L(\omega)$ определено при всех значениях ω из $(-\infty, \infty)$, то для существования решения достаточно, чтобы существовало обратное преобразование Фурье:

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_v(\omega)}{L(\omega)} \exp(i\omega t) d\omega. \quad (VI.3)$$

Действительно, если функция $\tilde{u}(t)$ существует, то ее спектр (в силу однозначности преобразования Фурье) равен $S_v(\omega)/L(\omega)$, поэтому она удовлетворяет уравнению (VI.2), а следовательно, и уравнению (VI.1).

Вспомнив известный признак интегрируемости функций, имеем следующее достаточное условие.

Условие существования. Если при $\omega \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{S_v(\omega)}{L(\omega)} \right| \sim \frac{c}{\omega^\alpha}, \quad 0 \leq c < \infty,$$

то интеграл (VI.3) существует при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Итак, решение уравнения (VI.1) существует, если $v(t)$ имеет спектр, убывающий быстрее при $\omega \rightarrow \infty$ по сравнению со спектральной характеристикой $L(\omega)$ на целую степень ω .

Когда отношение $S_v(\omega)/L(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ к нулю не стремится, решение уравнения (VI.1) в обычном смысле не существует, но может быть определено в классе обобщенных функций, содержащих δ -функцию и ее производные.

В частности, если для некоторого $a < \infty$ и $\alpha > 1$

$$\left(\frac{S_v(\omega)}{L(\omega)} \right) - a \sim \frac{1}{\omega^\alpha}, \quad (VI.4)$$

то легко проверить, что решением является функция

$$u_1(t) + a\delta(t),$$

где $u_1(t)$ — обратное преобразование Фурье левой части выражения (VI.4).

Таким образом, ответ на вопрос о существовании решения зависит, вообще говоря, от рассматриваемого класса функций $u(t)$.

Из условия 2 вытекает важное следствие.

Следствие. Если $L(\omega) \rightarrow 0$ при $\omega \rightarrow \infty$, то решение интегрального уравнения (V.8), определяющего импульсную характеристику обратного фильтра, в классе обычных функций не существует. Этим исключается возможность построения точного обратного фильтра в задаче разрешения волн и в обратной динамической задаче. В обоих случаях строится фильтр, обратный к $S(\omega)$, а спектр посылаемого в среду импульсного сигнала обязательно стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$. Заметим, что этот факт не исключает существования решения для исходного интегрального

уравнения (VI.1), в обратной динамической задаче, но это решение в принципе не может быть получено по методу обратной фильтрации.

Если спектральная характеристика $L(\omega)$ является периодической, то $1/L(\omega)$ также периодична, поэтому решение может быть получено как последовательность δ -функций. Такого рода решения рассматривались в предыдущем параграфе.

Решение некоторого интегрального уравнения является устойчивым, если при замене $v(t)$ на «близкую» функцию $v_\xi(t)$ решение $u(t)$ заменяется на близкую же функцию $u_\xi(t)$ (при этом $u_\xi - u \rightarrow 0$ при $v_\xi - v \rightarrow 0$). Если не накладывать специальных ограничений на вид функции $u(t)$, задача определения этой функции по уравнению (VI.1) является неустойчивой. В самом деле, возьмем вместо функции $u(t)$ новую функцию

$$u_\xi(t) = u(t) + a \sin mt, \quad (\text{VI.5})$$

тогда получим

$$v_\xi(t) = v(t) + a \int_{-\infty}^{\infty} l(t-\tau) \sin m\tau \, d\tau.$$

Если $m \rightarrow \infty$, то по известной лемме Римана второе слагаемое стремится к нулю. Следовательно, $v_\xi(t) - v(t) \rightarrow 0$, вместе с тем $u_\xi(t) - u(t) = a \sin mt$ при $m \rightarrow \infty$ ни к какому пределу не стремится.

Если известно, что решение находится в классе абсолютно-интегрируемых функций с ограниченными производными, то приведенный пример уже не является доказательством некорректности задачи, поскольку функция $u_\xi(t)$ не обладает этими свойствами. Более того, может иметь место условная корректность уравнения (VI.1) для фиксированных классов сигналов.

При увеличении m слагаемое $a \sin mt$ попадает в область близких к нулю значений спектральной характеристики $L(\omega)$. Именно близость к нулю значений $L(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ является причиной неустойчивости интегрального уравнения (VI.1) с абсолютно-интегрируемыми ядрами $l(t)$. Поэтому между неустойчивостью и неединственностью, возникающей, когда $L(\omega)$ тождественно обращается в нуль в некотором промежутке, имеется определенное сходство. Грубо говоря, неустойчивость — это практическая неединственность, обусловленная тем, что отличие некоторых значений спектральной характеристики от нуля не превышает уровня погрешностей измерений. Именно поэтому для обеспечения устойчивости, как и единственности, полезно сузить класс допустимых решений, исходя из имеющихся априорных сведений о сигнале $u(t)$.

Для иллюстрации этих положений рассмотрим ситуации, когда спектральная характеристика $L(\omega)$ практически сосредоточена в конечном интервале (Ω_1, Ω_2) [для более короткой записи учитываются только положительные частоты, поэтому обратное преобразование Фурье будет использоваться в форме [I.63]]. Разберем следующие два случая.

1. Спектр входного сигнала $u(t)$, сосредоточенный в полосе частот (ω_1, ω_2) , уже спектральной характеристики фильтра (рис. 23):

$$\Omega_1 \leq \omega_1 < \omega_2 \leq \Omega_2.$$

По определению

$$u(t) \cong \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\omega_1}^{\omega_2} S_u(\omega) \exp(i\omega t) d\omega.$$

Но в интервале (ω_1, ω_2) спектр $S_u(\omega)$ устойчиво определяется отношением $S_v(\omega)/L(\omega)$, поэтому

$$u(t) \cong \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{S_v(\omega)}{L(\omega)} \exp(i\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{S_v(\omega)}{L(\omega)} \exp(i\omega t) d\omega.$$

Из последней формулы следует, что необходимо знать только неравенства, связывающие ω_1 и ω_2 с Ω_1 и Ω_2 , но не сами частоты ω_1 и ω_2 .

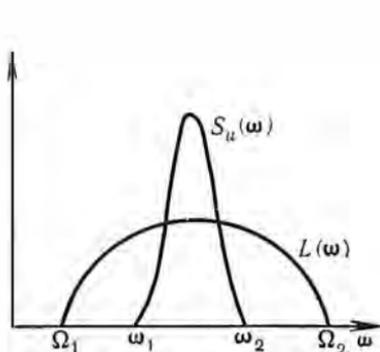


Рис. 23

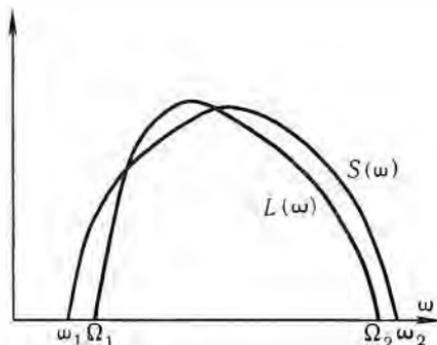


Рис. 24

Таким образом, несмотря на то что частотная характеристика $L(\omega)$ близка к нулю вне интервала (Ω_1, Ω_2) , приближенное решение интегрального уравнения (VI.1) оказывается устойчивым.

2. Спектры $L(\omega)$ и $S_u(\omega)$ имеют примерно одинаковую ширину при $\omega_1 \leq \Omega_1$, $\omega_2 \geq \Omega_2$ (рис. 24). В этом случае

$$u(t) = u_0(t) + u_1(t),$$

где $u_0(t)$ — «главная часть» функции $u(t)$, спектр которой совпадает с функцией $S_v(\omega)/L(\omega)$ на интервале (Ω_1, Ω_2) и равен нулю вне этого интервала. По теореме Релея приходящаяся на «добавку» $u_1(t)$ энергия

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_1} |S_u(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_2}^{\infty} |S_u(\omega)|^2 d\omega \cong \\ &\cong \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\Omega_1} |S_u(\omega)|^2 d\omega + \frac{1}{\pi} \int_{\Omega_2}^{\omega_2} |S_u(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Эта величина может быть малой по сравнению с полной энергией искомого сигнала.

Рассмотрим для примера задачу построения импульсной характеристики вертикально-неоднородной среды (импульсной сейсмограммы). Если посылаемый в среду сигнал имеет спектр, практически сосредоточенный в интервале частот (Ω_1, Ω_2) , то, не накладывая никаких дополнительных ограничений на среду, можно восстановить устойчиво только такие особенности импульсной сейсмограммы, которые лежат в этой же полосе частот. Поскольку с точностью до многократных волн импульсная сейсмограмма для вертикально-неоднородной среды близка к логарифмической производной акустической жесткости, то размеры восстанавливаемых особенностей среды имеют порядок $(\pi v/\Omega_1, \pi v/\Omega_2)$, где v — средняя скорость распространения продольных волн. Скажем, если $\Omega_1 = 2\pi \cdot 30$ Гц и $\Omega_2 = 2\pi \cdot 90$ Гц, то при $v = 3000$ м/с при помощи обратной фильтрации можно восстановить неоднородности среды, размеры которых лежат в интервале $(16 \div 50$ м).

Для восстановления импульсной сейсмограммы в диапазоне частот (Ω_1, Ω_2) может быть применен оператор:

$$G(\omega) = \begin{cases} 1/S(\omega), & \Omega_1 \leq |\omega| \leq \Omega_2 \\ 0, & |\omega| < \Omega_1 \text{ и } |\omega| > \Omega_2 \end{cases} \quad (\text{VI.6})$$

Этот оператор имеет абсолютно интегрируемую импульсную характеристику [если, конечно, $S(\omega)$ не обращается в нуль в интервале (Ω_1, Ω_2)]. Заметим, что построенный в § 20 обратный фильтр G_0 [см. формулу (V.42)] является частным случаем фильтра (VI.6) при $\Omega_1 = 0$ и $\Omega_2 = \pi/\Delta\tau$.

§ 25. Осуществимость операторов обратной фильтрации

Корректность интегрального уравнения (VI.4) еще не означает применимость обратной фильтрации, представляющей собой специальный метод его решения. Чтобы установить возможность построения точного оператора обратной фильтрации, надо выяснить существование решения уравнения (V.8) в некотором достаточно «хорошем» классе \mathcal{A} импульсных характеристик. Вопрос о единственности не возникает, если ограничиться рассмотрением спектральных характеристик $L(\omega)$, которые ни в каком интервале тождественно не обращаются в нуль.

Основное требование, которое необходимо предъявить к классу \mathcal{A} , заключается в условии устойчивости обратной фильтрации (см. § 24). Если отклонения $v_\xi(t)$ от $v(t)$ и $u_\xi(t)$ от $u(t)$ измеряются в равномерной метрике, т. е. по значениям $\xi = \max |v_\xi(t) - v(t)|$ и $\varepsilon = \max |u_\xi(t) - u(t)|$ соответственно, то условию устойчивости обратной фильтрации, заключающемуся в том, что $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$, удовлетворяет класс строго устойчивых линейных систем, имеющих абсолютно интегрируемые импульсные характеристики (см. § 5). Действительно, в силу линейности фильтра помеха $u_\xi(t) - u(t)$ на выходе является соответствующим преобразованием $G[v_\xi(t) - v(t)]$ помехи на входе. Поэтому устойчивость по отношению к помехам непосредственно следует из доказательства условия строгой устойчивости (II.8) при замене $x(t)$ на $v_\xi(t) - v(t)$ и $y(t)$ на $u_\xi(t) - u(t)$.

В § 24 было показано (см. следствие из условия 2), что для любого устойчивого оператора $L(\omega)$ импульсная характеристика обратного фильтра не существует по крайней мере в классе обычных функций. Отсюда вытекает неосуществимость точного оператора обратной фильтрации в задаче разрешения волн, по крайней мере, в непрерывной форме.

Можно ли сделать вывод, что вопрос о существовании точных операторов обратной фильтрации является бессодержательным? Нет. Но практическое содержание этот вопрос получает только в отношении дискретных (цифровых) фильтров.

Во-первых, как было показано в § 23, целый класс важных сейсмических задач, связанных с подавлением специфических волн-помех, приводит к обратным фильтрам, имеющим периодические спектральные характеристики. Такие фильтры функционируют по формулам вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x(t - k\tau),$$

где при $\tau = p \Delta t$ (p — целое число) коэффициенты c_k могут быть интерпретированы как ненулевые отсчеты импульсной характеристики цифрового фильтра.

Во-вторых, неустойчивую задачу обратной фильтрации естественно заменить устойчивой задачей восстановления сигнала $u(t)$ в интервале частот (Ω_1, Ω_2) , в котором практически сосредоточена спектральная характеристика прямого фильтра. Это восстановление осуществляется при помощи обратного фильтра типа (VI.6). Но в соответствии с результатами, изложенными в § 10, такие фильтры могут быть реализованы в цифровой форме при $\Delta t < \pi/\Omega_2$.

По этим причинам все дальнейшее изложение осуществляется для дискретных обратных фильтров.

Аналогично непрерывному случаю обратный цифровой фильтр G^{-1} с импульсной характеристикой $\mathbf{g} = \{g_k\}$ является устойчивым относительно возмущений последовательности $\mathbf{v} = \{v_k\}$, если

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k| < \infty. \quad (\text{VI.7})$$

Действительно, пусть возмущения сигнала \mathbf{v} задаются последовательностью $\{\Delta v_k\}$. Тогда в силу линейности ошибки определения восстанавливаемого сигнала $\mathbf{u} = \{u_k\}$ будут заданы членами последовательности $\Delta u_k =$

$$= \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{k-j} \Delta v_j.$$

Отсюда

$$|\Delta u_k| \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |g_{k-j}| \cdot |\Delta v_j| \leq \max_{(k)} |\Delta v_k| \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} |g_{k-j}| = \max_{(k)} |\Delta v_k| \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k|,$$

¹ Знак штриха, символизирующий цифровой оператор, в дальнейшем будем опускать в тех случаях, когда это не приводит к путанице.

поэтому, когда условие (VI.7), выполнено, из $\max |\Delta v_k| \rightarrow 0$ следует $\max |\Delta u_k| \rightarrow 0$. В дальнейшем фильтры, удовлетворяющие условию (VI.7), будем называть устойчивыми.

В следующих двух утверждениях используются понятия, введенные в § 13.

Теорема 1. Если цифровой оператор L — минимально-фазовый, то обратный ему оператор удовлетворяет принципу причинности и является устойчивым.

Действительно, поскольку z -характеристика минимально-фазового оператора не имеет нулей в круге $|z| \leq 1$, то $G(z) = 1/L(z)$ не имеет полюсов в этом круге. А тогда из аналитичности $L(z)$ следует аналитичность $G(z)$ при $|z| < 1$, поэтому оператор $G(z)$ удовлетворяет принципу причинности. Из аналитичности в круге $|z| \leq 1$ следует, что $G(z)$ можно разложить в $z = 0$ в ряд Тейлора

$$G(z) = g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \dots \quad (\text{VI.8})$$

и этот ряд абсолютно сходится при $|z| \leq 1$. Следовательно, он абсолютно сходится на окружности $|z| = 1$, откуда следует (VI.7).

Доказанным утверждением мы уже фактически пользовались в § 23, когда отыскивали импульсную характеристику фильтра (V.70), подавляющего волну-спутник, которая возникла от дневной поверхности.

Применим теперь теорему 1 к реверберационному фильтру с учетом геометрического расхождения волн от точечного источника (см. § 23). В этом случае имеется фильтр, обратный к L со спектральной характеристикой $M_q(\omega)$, определяемой формулой (V.68). Пусть $\tau = \Delta t \cdot s$, тогда z -характеристика фильтра M_q запишется следующим образом:

$$M_q(z) = q \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+1)(-A)^p z^{sp}}{p+q}.$$

По определению $q > 1$, поэтому данный ряд мажорируется сходящимся рядом $\sum_{p=0}^{\infty} |Az^s|^p$ при $|z| \leq 1$, состоящим из неотрицательных членов.

Следовательно, функция $M_q(z)$ аналитична в круге $|z| \leq 1$. Покажем, что условие 1 выполнено, по крайней мере при больших значениях q , отвечающих реверберациям, связанным с отражениями от глубокозалегающих границ (этот случай наиболее интересный).

Покажем сначала, что при $q \rightarrow \infty$ $M_q(z)$ сходится равномерно в круге $|z| \leq 1$ к функции

$$M(z) = 1/(1 + Az^s)^2.$$

Заметив, что $M(z)$ можно определить рядом

$$\sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(-A)^p z^{sp},$$

составим разность $\Phi_q(z) = M(z) - M_q(z)$:

$$\Phi_q(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)(-A)^p z^{sp} p/(p+q).$$

Следовательно, при $|z| \leq 1$

$$|\varphi_q(z)| \leq \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) A^p p / (p+q) < \sum_{p=0}^{\infty} p(p+1) A^p / q.$$

Так как $A < 1$, то по признаку Даламбера ряд справа сходится к некоторой положительной величине c , откуда $|\varphi_q(z)| < c/q$, $|z| \leq 1$. Функция $M(z)$ нигде в круге $|z| \leq 1$ в нуль не обращается, следовательно, $\rho = \min_{|z| \leq 1} |M(z)| > 0$.

Из неравенства

$$|M(z)| \leq |M_q(z)| + |\varphi_q(z)|$$

следует

$$|M_q(z)| \geq |M(z)| - |\varphi_q(z)| > \rho - c/q, \quad |z| \leq 1.$$

Отсюда видно, что при $q > c/p$ $|M_q(z)| > 1$.

Итак, мы показали, что при больших значениях q функция $M_q(z)$ является z -характеристикой минимально-фазового фильтра. Поэтому фильтр G имеет полуфинитную импульсную характеристику и является устойчивым. Вследствие полуфинитности отсчеты импульсной характеристики обратного фильтра совпадают с коэффициентами разложения в ряд Тейлора функции $1/M_q(z)$.

Поскольку $M_q(z)$ фактически зависит от $w = Az^s$, то разложение Тейлора функции $1/M_q(z)$ также будет рядом по степеням w :

$$G(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p w^p.$$

Это означает, что отсчеты g_k отличны от нуля только при $k = ps$. Коэффициенты a_p проще всего определить из условия

$$G(z) M_q(z) = 1,$$

которое эквивалентно следующему:

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_p w^p \cdot \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{q(p+1)}{p+q} w^p = 1.$$

Так как оба ряда в левой части являются абсолютно сходящимися, их можно почленно перемножать. Приравнивая постоянную составляющую в полученном произведении рядов к единице, а коэффициенты при остальных степенях w — нулю, получим последовательность равенств для коэффициентов a_p :

$$a_0 = 1; \quad a_1 = 2q/(q+1);$$

$$a_2 = 4q^2/(q+1)^2 - 3q/(q+2)$$

и т. д.

При $p > 2$ удобно пользоваться следующей рекуррентной формулой:

$$a_p = a_{p-1} \frac{2q}{q+1} - a_{p-2} \frac{3q}{q+2} + \dots + (-1)^p \frac{q(p+1)}{(p+q)}.$$

Отсчеты g_{sp} выражаются через коэффициенты a_p равенством $g_{sp} = a_p \cdot A^p$.

Перейдем к следующему условию реализуемости операторов обратной фильтрации.

Теорема 2. Пусть L — максимально-фазовый оператор; тогда G — устойчивый левосторонний оператор.

Доказательство. Поскольку $L(z)$ не имеет нулей при $|z| \geq 1$, то $G(z)$ аналитично на окружности $|z| = 1$ и вне круга $|z| \leq 1$. Поэтому она может быть представлена рядом Лорана, содержащим только отрицательные степени z :

$$G(z) = g_0 + g_{-1}z^{-1} + g_2z^{-2} + \dots \quad (\text{VI.9})$$

Из условия сходимости на единичной окружности получим (VI.7).

Заметим, что левосторонний оператор G может быть реализован в правосторонней (физически осуществимой) форме. Для этого нужно от левосторонней импульсной характеристики $\{g_{-k}\}$ перейти к правосторонней $\{g_k\}$ (где $g_k = g_{-k}$) и применить ее к обращенной входной последовательности $\{x_{-k}\}$.

Пусть $\{y_k\}$ — полученная в результате фильтрации последовательность:

$$y_k = \sum g_{k-j} x_{-j} \quad (\text{VI.10})$$

тогда искомым выходной сигнал $y_k = y'_{-k}$.

Для доказательства заметим, что z -преобразование «обращенной» последовательности $\{x_{-k}\}$ равно $X(1/z)$, а z -характеристика, отвечающая импульсной характеристике $\{g'_k\}$, равна $G(1/z)$. Поэтому z -преобразование последовательности $\{y'_k\}$ равно $Y(z) = G(1/z) \cdot X(1/z)$. Отсюда следует, что z -преобразование искомой последовательности $\{y_k\}$ равно $Y'(1/z)$.

Описанную форму левосторонней фильтрации будем называть обращенной.

Оператор L называется смешанно-задерживающим, если он аналитичен в кольце, содержащем единичную окружность, и не имеет нулей при $|z| = 1$.

Теорема 3. Если оператор L является смешанно-задерживающим, то обратный ему оператор G является двусторонним устойчивым оператором.

По условию найдется такая кольцеобразная область (содержащая единичную окружность), в которой $G(z) = 1/L(z)$ является аналитической функцией. Поэтому в этой области $G(z)$ может быть представлена абсолютно-сходящимся рядом Лорана:

$$G(z) = \dots + g_{-1}z^{-1} + g_0 + g_1z + g_2z^2 + \dots \quad (\text{VI.11})$$

Из абсолютной сходимости при $|z| = 1$ получим (VI.7).

В условиях теорем 2 и 3 оператор G может быть определен и как односторонний (физически осуществимый) оператор, но такая его реализация оказывается неустойчивой. А именно, пусть r — расстояние от точки $z = 0$ до ближайшего нуля $L(z)$ (очевидно, $r < 1$). Тогда в круге $|z| < r$ $G(z)$ является аналитической функцией, поэтому может быть представлена рядом Тейлора (VI.8) с радиусом сходимости r . Нетрудно показать, что в этом случае $|g_k| \rightarrow \infty$, при $k \rightarrow \infty$.

Пусть это не так: $|g_k| \rightarrow c < \infty$. Но тогда при $r < |z| < 1$ имеем

$$\sum |g_k z^k| = \sum |g_k| z^k = \sum |g_k| q^k \quad (q = |z| < 1).$$

Полученный ряд сходится абсолютно. Но это противоречит тому, что радиус сходимости ряда (VI.8) $r < q$.

Итак, односторонний оператор оказывается расходящимся.

Применим теорему 3 к анализу обратного фильтра (V.73), подавляющего волну-спутник, которая возникла от слоя малой скорости, приняв для простоты в (V.73) $s = p = 1$:

$$G(z) = (A_1 + z) / [A_1 + (1 - c')z - c'A_1 z^2]. \quad (\text{VI.12})$$

Нам нужно выяснить расположение нулей знаменателя. Оба корня уравнения

$$c'A_1 z^2 - (1 - c')z - A_1 = 0$$

вещественны. Первый из них

$$z_1 = \kappa + \sqrt{1 + \kappa^2}, \quad \kappa = \frac{1 - c'}{c'} \cdot \frac{1}{2A_1}$$

всегда больше единицы, второй

$$z_2 = \kappa - \sqrt{1 + \kappa^2}$$

располагается между 0 и -1 .

Таким образом, в кольце $z_1 < |z| < z_2$, содержащем единичную окружность, функция $G(z)$ аналитична, откуда следует устойчивость двухстороннего обратного фильтра.

Покажем, что фильтр (VI.12) может быть также реализован в виде последовательности двух односторонних устойчивых фильтров. Для этого запишем $G(z)$ в следующем виде:

$$G(z) = - \frac{A_1 + z}{(z - z_1)} \cdot \frac{1}{c'A_1(z - z_2)}. \quad (\text{VI.13})$$

Первый сомножитель определяет полуфинитный (правосторонний) фильтр. Разлагая его в ряд Тейлора, получим коэффициенты импульсной характеристики:

$$- \frac{A_1 + z}{z - z_1} = \frac{A_1}{z_1} \left[1 + \frac{A_1 + z_1}{A_1 z_1} z + \frac{A_1 + z_1}{A_1 z_1^2} z^2 + \frac{A_1 + z_1}{A_1 z_1^3} z^3 + \dots \right]. \quad (\text{VI.13}')$$

Второй сомножитель имеет единственный полюс в точке z_2 , модуль которой меньше единицы. Поэтому он определяет левосторонний устойчивый фильтр. Но, как было показано выше, его можно реализовать в обращенной правосторонней форме. Заменив z на $1/z$, найдем z -характеристику соответствующего правостороннего фильтра:

$$\frac{z}{c'A_1(1 - z z_2)} = \frac{1}{c'A_1} (z + z_2 z^2 + z_2^2 z^3 + \dots). \quad (\text{VI.13}'')$$

Описанный прием расщепления двухстороннего оператора в последовательность двух односторонних применим во всех тех случаях, когда z -характеристика фильтра G' имеет вид

$$G(z) = \frac{\varphi(z)}{R_n(z)}, \quad R_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad (\text{VI.14})$$

где $\varphi(z)$ — некоторая аналитическая функция, не имеющая полюсов в круге $|z| \leq 1$. Разбив все нули знаменателя z_k на две части, относя нуль z_k в первую группу, если его модуль больше единицы, можно переписать формулу (VI.14) следующим образом:

$$G(z) = \frac{\varphi(z)}{a_n \prod_{(k)}^{n_1} (z - z_k)} \cdot \frac{1}{\prod_{(k)}^{n_2} (z - z_k)}, \quad (n_1 + n_2 = n), \quad (\text{VI.15})$$

где \prod_i означает произведение, составленное по нулям i -той группы; при этом каждый нуль считается такое количество раз, какое определяется кратностью соответствующего корня $R_n(z) = 0$. Ясно, что первый сомножитель определяет правосторонний устойчивый фильтр, а второй может быть реализован в обращенной правосторонней форме.

Если оператор G — устойчивый, то задача обратной фильтрации оказывается корректной. Но этим еще не решается вопрос реализации обратного фильтра на конкретных цифровых устройствах, имеющих конечную память, так как в этом случае требуется финитность оператора G .

Вначале приведем одно утверждение отрицательного типа.

Теорема 4. Если L — оператор конечной длины, то обратный ему оператор G является нефинитным.

Доказательство. Пусть импульсная характеристика оператора L имеет r отрицательных и m положительных отсчетов.¹ Тогда число нулей оператора L — суть число несовпадающих корней уравнения

$$\frac{l_{-r}}{z^r} + \dots + \frac{l_{-1}}{z} + l_0 + l_1 z + \dots + l_m z^m = 0.$$

Умножив обе части на z^r , получим уравнение степени $m + r$:

$$l_{-r} + l_{-r+1} z + \dots + l_m z^{m+r} = 0.$$

Оно имеет p несовпадающих корней (где $1 \leq p \leq m + r$) в конечных точках плоскости z , поэтому $G(z)$ имеет p полюсов при $z \neq 0$ и $z \neq \infty$, и таким образом (по утверждению 3 из § 11), не может быть финитным.

Надо заметить, что доказательство изменилось бы несущественно, если бы оператор L имел только положительные или только отрицательные отсчеты.

Из теоремы 3 § 11 следует, что финитные операторы возможны только в том случае, когда оператор L не имеет нулей ни при каком конечном

¹ Имеются в виду r отсчетов l_k при $k < 0$ и m отсчетов l_k при $k > 0$.

($z \neq 0$ и $z \neq \infty$) значения z . Именно такая ситуация имела место при рассмотрении фильтра (V.60), подавляющего реверберацию. Понятно, что такие случаи чрезвычайно редки.

При реализации нефиinitных операторов G на ЭВМ с конечной памятью имеются две возможности. Первая заключается в замене оператора G усеченным оператором G_m по формуле

$$g'_k = \begin{cases} g_k & |k| \leq m \\ 0 & |k| > m. \end{cases}$$

Теорема 5. Если оператор G устойчив, то можно определить усеченный оператор G_m , работающий со сколь угодно малой ошибкой.

Доказательство. Пусть на вход оператора G подается ограниченная числовая последовательность x :

$$\max_{(k)} |x_k| = x_{\max} < \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \max_{(k)} |y_k - y'_k| &= \max \left| \sum_{j=-m}^{\infty} g_{k-j} x_j - \sum_{j=-m}^{k+m} g_{k-j} x_j \right| \leq \\ &\leq \max_{(k)} \left| \sum_{j=-\infty}^{k-m} g_{k-j} x_j + \sum_{j=k+m}^{\infty} g_{k-j} x_j \right| \leq \max_{|k| > m} |x_j| \sum |g_k|, \end{aligned}$$

а так как G — устойчивый оператор, то при $m \rightarrow \infty$ правая часть стремится к нулю, что и требовалось доказать.

Вторая возможность реализации нефиinitных операторов заключается в использовании рекурсивных фильтров, чему посвящается следующий параграф.

§ 26. Реализация обратных операторов рекурсивными фильтрами

Сначала докажем следующее утверждение:

Теорема 1. Если L — оператор конечной длины, то обратный ему оператор G может быть реализован как финитный рекурсивный фильтр.

Действительно, если L имеет p отсчетов при $k < 0$ и m отсчетов при $k > 0$, то

$$G(z) = \frac{1}{L(z)} = \frac{1}{\frac{l_{-p}}{z^p} + \dots + \frac{l_{-1}}{z-1} + l_0 + l_1 z + \dots + l_m z^m}.$$

Разделив числитель и знаменатель на l_{-r}/z^r получим

$$G(z) = a_p z^p / (1 + b_1 z + \dots + b_{m+r} z^{m+r}),$$

где

$$a_p = 1/l_{-p}, \quad b_k = l_{-p+k}/l_{-p}.$$

Полученная дробно-рациональная характеристика согласно определению рекурсивного фильтра (III.41) описывает фильтр

$$y_k = a_r x_{k-r} - \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j} y_j.$$

Для примера рассмотрим фильтр (V.70), подавляющий волну-спутник от дневной поверхности. Этот фильтр является обратным к финитному фильтру, имеющему z -характеристику $1 - cz^r$, поэтому может быть реализован в финитной рекурсивной форме

$$y_k = x_k + cy_{k-r}. \quad (\text{VI.16})$$

Имеет место и более общее утверждение.

Теорема 2. Если L реализуется как финитный рекурсивный фильтр, то так же реализуется и G .

Для доказательства нужно вспомнить, что финитный рекурсивный фильтр имеет дробно-рациональную z -характеристику, следовательно, такую же характеристику будет иметь и $G = L'$.

Следует заметить, что если оператор L финитен, то он обязательно и устойчив. Финитный рекурсивный фильтр не обязательно обеспечивает устойчивую фильтрацию. Поэтому требуется дополнительно исследовать практическую возможность применения рекурсивного фильтра.

При анализе вычислительной устойчивости рекурсивной фильтрации, определенной формулой

$$y_k = \sum_{j=0}^k a_{k-j} x_j - \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j} y_j,$$

приходится учитывать два источника погрешностей: погрешности входной числовой последовательности $\{x_k\}$ и погрешности вычисления y_j , $j < k$ при условии, что x_k заданы точно. Необходимость рассматривать второй источник погрешностей при обычной фильтрации отсутствовала по той простой причине, что там эти погрешности не могли привести к неустойчивости. Действительно, пусть имеется обычная фильтрация

$$y_k = \sum_j l_{k-j} x_j$$

и пусть ξ_j — погрешности отсчетов x_j , а Δ_k — погрешность вычисления y_k при точно заданных значениях x_k . Тогда суммарная погрешность

$$\varepsilon_k = \Delta_k + \sum_j l_{k-j} \xi_j.$$

Так как Δ_k всегда ограничена (по существу это погрешность округления окончательного результата), то ошибка ε_k может быть неограничена только из-за второго слагаемого.

При рекурсивной фильтрации положение изменяется. В этом случае

$$\varepsilon_k = \Delta_k + \sum_{j=0}^k a_{k-j} \xi_j - \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j} \varepsilon_j. \quad (\text{VI.17})$$

Если входная последовательность $\{x_k\}$ задана точно, то

$$\varepsilon_k = \Delta_k - \sum_j b_{k-j} \varepsilon_j. \quad (\text{VI.18})$$

Ясно, что если даже Δ_k ограничена, то второе слагаемое может дать неограниченный рост ошибок из-за их накопления.

В силу линейности влияние обоих источников погрешности можно изучить раздельно.

Значение y_k на выходе рекурсивного фильтра не зависит от значений x_{k+1}, x_{k+2}, \dots , поэтому при точных вычислениях он эквивалентен некоторому физически осуществимому фильтру G с z -характеристикой вида

$$g_0 + g_1 z + g_2 z^2 + \dots \quad (\text{VI.19})$$

Следовательно, если вместо входной последовательности $x = \{x_k\}$ на вход рекурсивного фильтра подать искаженную последовательность $x_\delta = \{x_k + \xi_k\}$, то на выходе получим сигнал y_δ точно такой же, как и на выходе фильтра G . Погрешность измерится той же самой последовательностью $y_\delta - y$. Это означает, что рекурсивный фильтр устойчив тогда, и только тогда, когда устойчив эквивалентный ему фильтр G .

Пусть «прямой» оператор L имеет z -характеристику

$$L(z) = \frac{c_0 + c_1 z + \dots + c_r z^r}{d_0 + d_1 z + \dots + d_m z^m} \quad (\text{VI.20})$$

Рекурсивный обратный фильтр определится z -характеристикой

$$G(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m}{1 + b_1 z + \dots + b_r z^r} \quad (\text{VI.21})$$

где

$$b_k = c_k/c_0, \quad a_k = d_k/c_0.$$

Фильтр (VI.19) представляет собой разложение $G(z)$ в ряд Тейлора в точке $z = 0$. Это разложение сходится при $|z| = 1$ в том, и только в том случае, когда $G(z)$ аналитична в круге $|z| \leq 1$ и, следовательно, не имеет в этом круге полюсов. Поэтому для устойчивости рекурсивного фильтра к ошибкам первого типа необходимо и достаточно потребовать, чтобы уравнение

$$1 + b_1 z + \dots + b_r z^r = 0 \quad (\text{VI.22})$$

не имело корней при $|z| \leq 1$. Но это условие эквивалентно тому, что $L(z)$ не имеет нулей в круге $|z| \leq 1$.

Рассмотрим устойчивость рекурсивного фильтра по отношению к погрешностям второго типа. Обратимся к формуле (VI.17).

Слагаемое

$$\sum_I a_{k-j} \xi_j$$

выражает действие оператора A с импульсной характеристикой $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ на числовую последовательность $\delta = \{\delta_k\}$. Поскольку A — финитный оператор, то он ограниченный, поэтому можно переписать (VI.17) в такой же форме как и (VI.18):

$$\varepsilon_k = \Delta'_k - \sum_I b_{k-j} \varepsilon_j \quad (\text{VI.23})$$

где $\Delta_k' = \Delta_k + \sum a_{k-j}\varepsilon_j$ — ограниченная числовая последовательность.

Формула (VI.23) является общей, независимо от того, какая из ситуаций

$$(1) \Delta_k = 0 \quad \xi_k \neq 0$$

$$(2) \xi_k = 0 \quad \Delta_k \neq 0$$

$$(3) \xi_k \neq 0 \quad \Delta_k \neq 0$$

имеет место. Это означает, что влияние погрешностей второго типа можно свести к влиянию погрешностей первого типа. Иными словами, рекурсивный фильтр устойчив по отношению к погрешности второго типа тогда, и только тогда, когда он устойчив к погрешностям первого типа.

Чтобы сделать этот вывод более строгим, перепишем равенство (2) так:

$$\sum_{j=0}^k b_{k-j}\varepsilon_j = \Delta_k + \sum_{j=0}^k a_{k-j}\xi_j, \quad b_0 = 1$$

или в операторной форме

$$B\varepsilon = \Delta + A\xi,$$

где B — оператор с импульсной характеристикой $\{1, b_1, \dots, b_k\}$ (оператор A вводился выше). Отсюда

$$\varepsilon = B^{-1}(\Delta + A\xi). \quad (\text{VI.24})$$

Так как A — устойчивый оператор, то $\Delta + A\xi$ — ограниченная числовая последовательность. А поскольку ε_k зависит только от «прошлых» ошибок ξ_j и Δ_j ($j < k$), то последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}$ ограничена тогда, и только тогда, когда устойчив физически осуществимый оператор B^{-1} . Этот оператор имеет z -характеристику

$$B^{-1}(z) = 1/(1 + b_1z + \dots + b_kz^k). \quad (\text{VI.25})$$

Ясно, что B^{-1} устойчив в физически осуществимой форме, если $B^{-1}(z)$ разлагается в точке $z = 0$ в ряд Тейлора, сходящийся при $|z| \leq 1$. Для этого необходимо снова потребовать, чтобы уравнение (VI.22) не имело корней при $|z| \leq 1$. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. Рекурсивный обратный фильтр является устойчивым тогда, и только тогда, когда z -характеристика оператора L не имеет нулей внутри и на границе круга $|z| \leq 1$.

Из доказанного условия следует устойчивость рекурсивного фильтра (VI.16), подавляющего волну-спутник от дневной поверхности. Уравнение (VI.22) в этом случае запишется $1 - cz^r = 0$, а поскольку $c < 1$, то корни этого уравнения, равные $1/\sqrt[r]{c}$, лежат вне круга $|z| \leq 1$.

Сопоставив сформулированное выше условие с теоремой 1 § 25, делаем заключение, что условие устойчивости рекурсивной фильтрации эквивалентно условию полуфинитности обычной формы обратного фильтра. Отсюда ясно, как можно получить устойчивую рекурсивную фильтрацию в других более сложных случаях, поскольку, как было показано в § 25,

любой устойчивый обратный фильтр может быть реализован при помощи одних только правосторонних операторов обратной фильтрации.

В самом деле, пусть оператор G имеет дробно-рациональную z -характеристику $R_m(z)/R_n(z)$. Тогда ее можно представить в виде (VI.15), приняв $\varphi(z) = R_m(z)$. Первый сомножитель определяет полуфинитный фильтр, поэтому может быть реализован в устойчивой рекурсивной форме. Второй сомножитель реализуем в обращенной форме, для чего от переменной z нужно будет перейти к $1/z$; в этом случае z -характеристика

$$z^{n_2} / \prod_{(k)}^{n_2} (1 - zz_k) \quad (\text{VI.26})$$

будет иметь полюса $1/z_k$, модули которых больше единицы. Следовательно, рекурсивная форма обращенного фильтра также будет устойчива.

Напомним, что фильтр (VI.26) применяется к последовательности $\{x_{-k}\}$ и после его применения выходная последовательность также должна быть «обращена».

Используя рассмотренный метод для реализации обратного фильтра (VI.13), получим, что последний может быть осуществлен в виде последовательности двух финитных рекурсивных фильтров, один из которых имеет «обращенную» форму. Первый сомножитель в (VI.13) определяет рекурсивный фильтр, функционирующий согласно формуле

$$y_k = (A_1 x_k + x_{k-1} + y_{k-1})/z_1.$$

Второй фильтр применяется к «обращенной» последовательности $u_k = y_{-k}$. Заменяя во втором сомножителе в (VI.13) переменную z на $1/z$ [см. также левую часть (VI.13)], получим, что он функционирует по формуле

$$v_k = u_{k-1}/c^s A_1 + z_2 v_{k-1}.$$

Чтобы получить сигнал на выходе, нужно от последовательности $\{v_k\}$ перейти к последовательности $\{v_{-k}\}$.

Следует отметить, что не всякие устойчивые рекурсивные обратные фильтры являются равноценными. На практике приходится встречаться как с «очень хорошими» операторами, характеризующимися очень малым накоплением ошибок, так и с «плохими» операторами, по свойствам мало отличающимися от неустойчивых операторов. Для пояснения сказанного обратимся к фильтру (VI.16).

С точки зрения условия устойчивости рекурсивного обратного фильтра, все значения $c \neq \pm 1$ равноценны. Но, исходя из здравого смысла, при $c \rightarrow 1$ оператор должен работать практически неустойчиво.

Количественную характеристику устойчивости фильтра дает норма оператора. Напомним, что нормой оператора L является число $\|L\|$, равное точной верхней грани отношений $\|Lx\|/\|x\|$, где символ $\|x\|$ означает некоторую норму последовательности $x = \{x_k\}$, например кубическую норму $\|x\| = \max_{-\infty \leq k < \infty} |x_k|$. Норма оператора показывает, во сколько раз может возрасти норма числовой последовательности, на которую воздействует данный оператор.

Целесообразность использования нормы в целях характеристики устойчивости обратного оператора вытекает из следующих рассуждений. Пусть оператор G служит для восстановления сигнала \mathbf{u} по сигналу $\mathbf{v} = L\mathbf{u}$. Если числовая последовательность v измеряется с погрешностью, то оператор G воздействует на некоторую новую последовательность $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \xi$. В результате получим $G\mathbf{v}' = \mathbf{u} + \eta$, где $\eta = G\xi$.

Норма погрешности на выходе оператора G , очевидно, имеет следующую оценку:

$$\|\eta\| \leq \|G\| \cdot \|\xi\|.$$

Таким образом, норма оператора показывает, во сколько раз могут возрастать ошибки на его выходе по сравнению с ошибками на входе, и в этом смысле является мерой устойчивости. С вычислительной точки зрения желательно иметь операторы с малой нормой. Заметим, что искусственное понижение нормы путем замены оператора G оператором $(1/p)G$ (где $p > 1$) ничего не дает, так как полезный сигнал на его выходе также уменьшится в p раз и относительная ошибка останется прежней.

Норма оператора зависит от используемой нормы числовых последовательностей. При использовании кубической нормы $\|G\| = \sum |g_k|$. В самом деле, из доказательства условия устойчивости (VI.7) следует, что для любой последовательности $\mathbf{x} = \{x_k\}$

$$\|Gx\| \leq \|x\| \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k|.$$

Однако для входной последовательности $\mathbf{x} = \{\text{sign } g_{-k}\}$ нулевой отсчет выходной последовательности равен $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k|$, поэтому число $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k|$ является точной верхней гранью отношения $\|Gx\|/\|x\|$ в кубической норме.

Если обратный фильтр является полуфинитным, то для определения его нормы нужно z -характеристику $G(z)$ разложить в ряд Тейлора и просуммировать абсолютные величины коэффициентов разложения. Однако общего выражения для коэффициентов часто найти не удастся. Тогда можно ограничиться нижней оценкой нормы этого оператора. Для любого оператора G с импульсной характеристикой $\{g_k\}$ имеем:

$$\|G\| = \sum |g_k| \geq \left| \sum g_k \right| = |G(1)|$$

(равенство имеет место только для операторов с неотрицательными импульсными характеристиками, т. е. при $g_k \geq 0$).

Пример I. Дереввербационный фильтр, построенный без учета геометрического расхождения, работает по формуле (V.61). Так как $A > 0$, то его норма равна $(1+A)^2$. Коэффициент отражения от дна моря равен примерно $1/3$, поэтому интенсивность помех на выходе фильтра примерно равна интенсивности помех на его входе. Фильтр является очень устойчивым.

$$\|G\| \geq A / [\ln(1+A)].$$

Пример II. Фильтр, служащий для подавления волны-спутника от дневной поверхности, имеет импульсную характеристику, выражаемую формулой (V71).

Поскольку $0 < c < 1$, то

$$G \parallel = \sum_{j=0}^{\infty} c^j = 1/(1-c)$$

или, учитывая формулу (V.70) для c ,

$$\parallel G \parallel = h/H [1 + (3H/2h)] > h/H.$$

Так как в обычных условиях глубина h залегания отражающей границы намного больше глубины H , на которой расположен источник, то норма оператора оказывается большой.

Таким образом, данный фильтр оказывается практически неустойчивым.

Пример III. Оценим норму оператора G , подавляющего волну-спутник от подошвы зоны малых скоростей. Воспользуемся тем, что этот оператор представляется в виде последовательности двух операторов — G_1 и G_2 .

Из определения нормы следует

$$\parallel Gx \parallel = \parallel G_1 \cdot G_2 \cdot x \parallel \leq \parallel G_1 \parallel \cdot \parallel G_2 x \parallel \leq \parallel G_1 \parallel \cdot \parallel G_2 \parallel \cdot \parallel x \parallel,$$

следовательно,

$$\parallel G \parallel \leq \parallel G_1 \parallel \cdot \parallel G_2 \parallel. \quad (\text{VI.27})$$

Оператор G_1 , z -характеристика которого выражается формулой (VI.13), имеет неотрицательную импульсную характеристику, поэтому

$$\parallel G_1 \parallel = G_1(1) = (1+A)/(z_1-1).$$

Поскольку корень z_2 отрицателен, то норму оператора G_2 , z -характеристика которого выражается формулой (VI.13), нельзя получить по этому же способу.

Осуществляя непосредственное суммирование, найдем

$$\parallel G \parallel = (1/c' A_1) (1 + |z_2| + |z_2|^2 + \dots) = 1/[c' A_1 (1 - |z_2|)].$$

§ 27. Аппроксимация обратных фильтров

Если оператор обратной фильтрации G неустойчив или нереализуем в каком-либо классе устойчивых операторов, то возникает задача приближенной реализации этого оператора в подходящем классе линейных систем. С приближенной реализацией обратного фильтра мы уже встречались при замене устойчивого цифрового оператора, имеющего бесконечную длину, усеченным оператором, имеющим конечное число отсчетов (см. § 25. К приближенной реализации обратного фильтра приходится прибегать и в том случае, когда он реализуем в рекурсивной финитной форме, но имеет большую норму.

Для того чтобы сформулировать задачу приближенной реализации, прежде всего необходимо условиться относительно критерия качества, при помощи которого будем оценивать работу аппроксимирующих операторов. Очевидно, этот критерий должен основываться на некоторой мере близости между функцией $u(t)$, на выходе обратного фильтра, и функцией $\hat{u}(t)$, на выходе аппроксимирующего фильтра. В случае цифровых фильтров (а мы будем рассматривать только дискретные преобразования) такой мерой может служить норма числовой последовательности $\hat{u} - u$.

Пусть задача обратной фильтрации состоит в получении последовательности u по заданной последовательности $v = Lu$. Обозначим через \mathcal{A} заданный класс реализуемых устойчивых операторов. Если к v

применить оператор A из класса \mathcal{A} , получим новую последовательность ALu , которая будет отличаться от u ; мерой отличия при этом служит норма $\|u - ALu\|$.

Естественно выбрать такой оператор G из класса \mathcal{A} , чтобы

$$\|u - GLu\| = \min_{A \in \mathcal{A}} \|u - ALu\|. \quad (\text{VI.28})$$

Оператор G и представляет собой приближенную реализацию оператора L^{-1} в классе \mathcal{A} для заданного сигнала u . Если $\|u - GLu\| = 0$, то оператор G оказывается точным оператором обратной фильтрации.

В качестве иллюстрации указанной постановки рассмотрим задачу разрешения последовательности сейсмических сигналов из § 19. В этой задаче каждый элементарный сигнал $f(t)$ нужно превратить в δ -функцию. Поэтому $u = \delta$, а L -оператор, спектральная характеристика которого совпадает со спектром сигнала $f(t)$.

Следовательно, оператор G определится условием

$$\|\delta - G1\| = \min_{A \in \mathcal{A}} \|\delta - A1\|, \quad 1 = L\delta. \quad (\text{VI.29})$$

Как правило, сигнал u неизвестен, но известен класс сигналов U , к которому может принадлежать сигнал u . Если для любых сигналов класса U аппроксимирующий оператор G оказывается одним и тем же, то можно использовать оператор G для любого сигнала из этого класса.

Пусть класс U вместе с любым сигналом u содержит также сигналы вида cu ($0 < c < \infty$). Так как обратный оператор не должен изменяться от умножения сигнала на константу, то качество аппроксимации естественно оценивать исходя из относительной погрешности $\|u - ALu\|/\|u\|$. Аппроксимирующий оператор A тем лучше, чем меньше максимальное значение $\|u - ALu\|/\|u\|$ при $u \in U$, поэтому наилучший аппроксимирующий оператор G определится условием

$$\max_{u \in U} \frac{\|u - GLu\|}{\|u\|} = \min_{A \in \mathcal{A}} \max_{u \in U} \frac{\|u - ALu\|}{\|u\|}. \quad (\text{VI.30})$$

Если класс U включает любые числовые последовательности с ограниченной нормой, то, обозначив через E единичный оператор, удовлетворяющий условию $Eu = u$ (импульсная характеристика этого оператора выражается единичной последовательностью δ), выведем из определения нормы оператора:

$$\max_{u \in U} \frac{\|u - GLu\|}{\|u\|} = \max_{u \in U} \frac{\|(E - AL)u\|}{\|u\|} = \|E - AL\|.$$

Следовательно, наилучший аппроксимирующий оператор определится условием

$$\|E - GL\| = \min_{A \in \mathcal{A}} \|E - AL\|. \quad (\text{VI.31})$$

Несмотря на большое сходство задач (VI.29) и (VI.31), между ними имеется формальное различие: в (VI.29) минимизируется норма числовой

последовательности, а в (VI.31) — норма оператора. Однако при специальном выборе норм входных и выходных сигналов эти задачи можно сделать эквивалентными, что позволяет ограничиться рассмотрением только одной из них, например задачи (VI.30).

Будем использовать евклидову норму числовых последовательностей:

$\|x\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^2$. Тогда задача (VI.29) сводится к выбору такой числовой последовательности $\{a_k\}$, которая минимизирует следующую сумму квадратов:

$$Q = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\delta_k - \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{k-j} l_j \right)^2. \quad (\text{VI.32})$$

К этой же задаче сводится и задача (VI.31), если выходные сигналы оценивать в кубической, а входные — в евклидовой норме.

Класс \mathcal{A} определим как множество операторов конечной длины $M + 1$ с импульсной характеристикой, начинающейся в нуле: $a_k = 0$ при $k < 0$ и $k > M$.

Напомним, что финитные операторы с конечными отсчетами всегда имеют ограниченную норму, поэтому если решение задачи (VI.29) в этом классе операторов существует, то оно является корректным.

Будем считать, что $l_k \equiv 0$ при $k < 0$ и $k > N$ (импульсная характеристика l содержит $N + 1$ отсчетов).

Последовательность A имеет нулевые отсчеты только при $0 \leq k \leq M + N$. Так как $\delta = \{\delta_k\}$ имеет нулевой отсчет при $k = 0$, то суммирование в (VI.32) по k нужно выполнять от 0 до $N + M$.

Воспользовавшись перестановочностью свертки, придем к задаче отыскания таких значений a_0, a_1, \dots, a_M , которые минимизируют

$$Q = \sum_{k=0}^{N+M} \left(\delta_k - \sum_{j=0}^M l_{k-j} a_j \right)^2. \quad (\text{VI.33})$$

Отыскивая минимум Q стандартным образом, получим следующую систему $M + 1$ линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^M R_{i-j} a_j = l_{-i}, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (\text{VI.34})$$

где

$$R_{i-j} = \sum_{k=0}^{M+N} l_{k-i} l_{k-j}. \quad (\text{VI.35})$$

Поскольку $l_{-i} = 0$ при $i > 0$, правую часть системы (VI.34) можно выразить так: $l_{-i} = l_0 \delta_i$.

Так как Q неотрицательно и при $a_i \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности, решение системы (VI.34), если оно единственно, определяет минимальное значение. Поэтому нужно убедиться в том, что определитель матрицы этой системы отличен от нуля или (что одно и то же) что ранг этой матрицы равен $M + 1$. Заметим, что матрицу системы (VI.34) можно представить как произведение транспонированной матрицы оператора L на матрицу

этого же оператора. Матрица оператора L (будем обозначать ее символом \mathbf{L}), содержащая $M + N + 1$ строк и $M + 1$ столбцов, имеет следующий вид:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_1 & l_0 & 0 & \dots & 0 \\ l_2 & l_1 & l_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & l_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ l_N & l_{N-1} & l_{N-2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_N \end{pmatrix}.$$

Воспользовавшись известными правилами умножения матрицы на матрицу, нетрудно убедиться в том, что элементы матрицы $\mathbf{L}^T \mathbf{L}$ (здесь T — символ транспонирования) совпадают с R_{i-j} . Известно, что ранг произведения матриц не меньше, чем наименьший из рангов умножаемых матриц. Поэтому достаточно показать, что ранг матрицы \mathbf{L} равен $M + 1$. Последнее имеет место в том случае, когда все $M + 1$ столбцов матрицы \mathbf{L} линейно независимы.

Обозначим символом $\mathbf{l}^{(i)}$ i -тый столбец матрицы \mathbf{L} . Этот вектор имеет компоненты

$$l_k^{(i)} = l_{k-i}, \quad k = 0, 1, \dots, M + N;$$

при этом

$$l_k^{(i)} = 0, \quad \text{когда } k < i \text{ и } k > N + i. \quad (\text{VI.36})$$

Пусть $l_0 \neq 0$ и $l_N \neq 0$. Зафиксируем некоторое j и покажем, что ни для какой совокупности номеров j_1, j_2, \dots, j_s ($0 \leq j_i \leq M$) нельзя получить равенство

$$\mathbf{l}^{(j)} = \alpha_1 \mathbf{l}^{(j_1)} + \alpha_2 \mathbf{l}^{(j_2)} + \dots + \alpha_s \mathbf{l}^{(j_s)}, \quad (\text{VI.37})$$

в котором хотя бы одно $\alpha_i \neq 0$.

Действительно, оставим в формуле (VI.37) только те слагаемые, для которых $\alpha_i \neq 0$. Тогда либо $j_1 < j$, либо $j_s > j$, либо и то, и другое вместе. Если $j_1 < j$, то вектор правой части имеет компоненту с номером j_1 , равную $\alpha_1 l_0 \neq 0$, тогда как по условию (VI.36) $l_{j_1}^{(j)} = 0$. Поэтому равенство (VI.37) невозможно. Таким же путем доказывается его невозможность при $j_s > j$, значит, оно вообще невозможно. Это означает, что вектора $\mathbf{l}^{(0)}, \dots, \mathbf{l}^{(M)}$ линейно независимы.

Итак, если отсчеты последовательности \mathbf{l} сосредоточены в интервале от 0 до N и если $l_0 \neq 0$ и $l_N \neq 0$, то система (VI.34) имеет единственное решение, что и доказывает существование оператора G , являющегося решением задачи (VI.29) в классе цифровых фильтров длины $M + 1$.

Оператор G , импульсная характеристика которого определяется решением системы линейных уравнений (VI.34), будем называть среднеквадратическим обратным фильтром.

Учитывая финитность импульсной характеристики $\mathbf{l} = \{l_k\}$, формулу (VI.35) можно переписать:

$$R_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_{-(j-k)} l_k.$$

Таким образом, последовательность $\{R_j\}$ является сверткой последовательностей $\{l_k\}$ и $\{l_{-k}\}$, т. е. автокорреляцией последовательности $\{l_k\}$. Поскольку дискретный спектр $\{l_{-k}\}$ равен $L^*(\omega)$, то дискретный спектр последовательности $\{R_j\}$ равен $|L(\omega)|^2$. Это означает, что для построения среднеквадратического фильтра достаточно знать только амплитудную характеристику $|L(\omega)|$ и не нужно знать фазовой характеристики. Этот факт имеет большое практическое значение.

Пример. Рассмотрим задачу подавления волны-спутника от дневной поверхности при $\tau = \Delta t$. Как мы уже знаем, точный обратный оператор в этой задаче имеет импульсную характеристику $g_k = c^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Длина этого оператора бесконечна.

Если оператор обратной фильтрации аппроксимируется по методу усечения, то аппроксимирующий оператор определится следующей формулой:

$$g_k^i = \begin{cases} c^k, & k=0, 1, \dots, M \\ 0, & k < 0, k > M. \end{cases}$$

Найдем среднеквадратическую аппроксимацию. Определив автокорреляцию последовательности $\{c^k, 0, 1, -c, 0, \dots\}$, получим элементы матрицы $L^T L$:

$$R_{i-j} = \begin{cases} 1+c^2, & i=j \\ -c & |i-j|=1 \\ 0, & |i-j|>1. \end{cases}$$

Соответствующую систему (VI.34) решим для $M = 2$. Система запишется следующим образом:

$$(1+c^2)g_0 - cg_1 = 1;$$

$$-cg_0 + (1+c^2)g_1 - cg_2 = 0;$$

$$-cg_1 + (1+c^2)g_2 = 0,$$

откуда

$$g_0 = 1/(1+c^4) [1+c^4/(1+c^2)];$$

$$g_1 = c/(1+c^4); \quad g_2 = c^2/[(1+c^2)(1+c^4)].$$

Видно, что среднеквадратический обратный фильтр отличается от обратного фильтра, полученного методом усечения. Очень важно отметить, что среднеквадратический фильтр определен и в том случае, когда $c = 1$, т. е. когда обратный фильтр в обычном смысле вообще не существует. Поэтому среднеквадратический обратный фильтр может быть применен для решения задачи (V.77), в которой волна-спутник устраняется путем вычитания записей, полученных на разных глубинах.

При $c = 1$ и $M = 2$ импульсная характеристика среднеквадратического обратного фильтра

$$g_0 = 3/4, \quad g_1 = 1/2, \quad g_2 = 1/4.$$

При больших M решение системы (VI.34) стандартными методами, скажем, методом Гаусса, связано с большим объемом вычислений (порядка M^3 арифметических операций). В 40-х годах Левинсон (см. библиографию) предложил рекуррентную процедуру, которая позволяет существенно упростить решение подобных систем.

Приняв $l_0 = 1$ (что несколько не ограничивает общность изложения), получим следующую матричную запись системы (VI.34):

$$\mathbf{R}\mathbf{a} = \delta.$$

Рассмотрим следующие две системы порядка $n \leq M + 1$:

$$\mathbf{R}^{(n)}\mathbf{a}^{(n)} = \delta^{(n)} \quad \text{и} \quad \mathbf{R}^{(n)}\mathbf{b}^{(n)} = \boldsymbol{\gamma}^{(n)}, \quad (\text{VI.38})$$

где матрица $\mathbf{R}^{(n)}$ определяется формулой (VI.35) при $i, j = 0, 1, \dots, n-1$; $\delta^{(n)} = (1, 0, \dots, 0)^T$, $\boldsymbol{\gamma}^{(n)} = (0, \dots, 0, 1)^T$.

Компоненты вектор-столбцов $\mathbf{a}^{(n)}$ и $\mathbf{b}^{(n)}$ обозначим a_j^n и b_j^n соответственно.

Вследствие симметричности матрицы \mathbf{R} векторы $\mathbf{a}^{(n)}$ и $\mathbf{b}^{(n)}$ связаны очевидным соотношением:

$$a_i^n = b_{n-i-1}^n \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (\text{VI.39})$$

Первая из систем (VI.38) эквивалентна системе (VI.34) при $n = M + 1$.

Введем число

$$\alpha_n = R_n a_0^n + R_{n-1} a_1^n + \dots + R_1 a_{n-1}^n \equiv R_1 b_0^n + \dots + R_n b_{n-1}^n.$$

Легко показать, что $(n+1)$ -мерные векторы-столбцы $\tilde{\mathbf{a}}^{(n)} = (a_0^n, \dots, a_{n-1}^n, 0)^T$ и $\tilde{\mathbf{b}}^{(n)} = (0, b_0^n, \dots, b_{n-1}^n)$ являются решениями следующих расширенных систем:

$$\mathbf{R}^{(n+1)}\tilde{\mathbf{a}}^{(n)} = \tilde{\delta}^{(n)}, \quad \mathbf{R}^{(n+1)}\tilde{\mathbf{b}}^{(n)} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)},$$

где $\tilde{\delta}^{(n)} = (1, 0, \dots, 0, \alpha_n)^T$ и $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)} = (\alpha_n, 0, \dots, 0, 1)^T$.

Действительно, расписав первую расширенную систему поэлементно, увидим, что первые ее n строк совпадают с соответствующей системой (VI.38), а последняя строка выполняется тождественно по определению α_n .

Умножим вторую из расширенных систем на $-\alpha_n$ и сложим с первой расширенной системой:

$$\mathbf{R}^{(n+1)}(\tilde{\mathbf{a}}^{(n)} - \alpha_n \tilde{\mathbf{b}}^{(n)}) = \tilde{\delta}^{(n)} - \alpha_n \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)}.$$

Вектор в правой части имеет компоненты $1 - \alpha_n^2, 0, \dots, 0$, следовательно, $\tilde{\delta}^{(n)} - \alpha_n \tilde{\boldsymbol{\gamma}}^{(n)} = (1 - \alpha_n^2) \delta^{(n)}$.

Сравнив полученную систему с (VI.38), делаем заключение, что

$$\mathbf{a}^{(n+1)} = \frac{1}{1 - \alpha_n^2} (\tilde{\mathbf{a}}^{(n)} - \alpha_n \tilde{\mathbf{b}}^{(n)}). \quad (\text{VI.39}')$$

Полученные рекуррентные формулы за $M + 1$ шагов дадут искомый вектор $\mathbf{g} = \mathbf{a}^{(M+1)}$ (при этом $a_0^1 = b_0^1 = 1/R_0$). Так как коэффициенты α_n вычисляются за n элементарных арифметических операций (см. § 14), каждая компонента вектора $\mathbf{a}^{(n+1)}$ — за две элементарные операции [а всего таких компонент $(n + 1)$], то нетрудно подсчитать, что всего потребуется примерно $3M^2/2$ элементарных операций.

Поскольку при построении среднеквадратического обратного фильтра не используется полная информация о L [требуется значение только амплитудной характеристики $|\tilde{L}(\omega)|$], то при $M \rightarrow \infty$ этот фильтр может и не стремиться к точному оператору обратной фильтрации. В связи с этим возникает вопрос об асимптотических свойствах среднеквадратических обратных фильтров при $M \rightarrow \infty$.

Эти свойства содержатся в следующей теореме.

Теорема 1. Среднеквадратический обратный фильтр сходится при $M \rightarrow \infty$ к точному обратному фильтру L^{-1} в том, и только в том случае, когда оператор L является минимально-фазовым. Если L — произвольный финитный оператор и $L(z)$ не имеет нулей на окружности $|z| = 1$, то среднеквадратический обратный фильтр сходится к H^{-1} , где H — минимально-фазовый оператор, имеющий ту же амплитудную характеристику, что и оператор L .

Доказательство. Докажем сначала, что любому финитному оператору L отвечает минимально-фазовый оператор H с той же амплитудной характеристикой. Нужно показать, что существует такой оператор, импульсная характеристика $\mathbf{h} = \{h_k\}$ которого имеет ту же автокорреляцию, что и последовательность $\{l_k\}$.

Но автокорреляция последовательности $\{R_k\}$, являющаяся сверткой последовательностей $\{l_k\}$ и $\{l_{-k}\}$, имеет z -преобразование $L(z)L(1/z)$.

Оператор L имеет конечную длину $N + 1$, поэтому $L(z)$ имеет N нулей и может быть представлен в виде

$$L(z) = l_N \prod_{k=1}^N (z - z_k), \quad |z| \neq 1.$$

Отсюда z -преобразование автокорреляции

$$R(z) = l_N^2 z^{-N} \prod_{k=1}^N (z - z_k)(1 - z_k z). \quad (\text{VI.40})$$

Определим искомый оператор

$$H(z) = l_N \prod_{k=1}^N (z - z_k^*) \beta_k, \quad (\text{VI.40}')$$

приняв для каждого $k = 1, 2, \dots, N$

$$\beta_k = \begin{cases} z_k, & |z_k| > 1; \\ 1/z_k, & |z_k| < 1; \end{cases} \quad \beta_k = \begin{cases} 1, & |z_k| > 1 \\ z_k, & |z_k| < 1. \end{cases}$$

Этот оператор определяется однозначно; он минимально-фазовый (так как $|z_k'| > 1$). Непосредственной проверкой убеждаемся, что произведение $H(z)H(1/z)$ совпадает с (VI.40), что и нужно было доказать.

Отсюда следует, что среднеквадратический обратный фильтр может быть найден из условия минимума $\|\delta - Ah\|$ при $A \in \mathcal{A}[M]$, где символом $\mathcal{A}[M]$ обозначен класс финитных операторов длины $M + 1$.

Согласно теореме 1 из § 25 при $M \rightarrow \infty$ оператор H имеет точный обратный оператор H^{-1} , поэтому

$$\min_{A \in \mathcal{A}[\infty]} \|\delta - Ah\| = 0.$$

Пусть H_M^{-1} — усечение оператора H^{-1} , имеющее длину $M + 1$. Из теоремы 5 § 25 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ всегда можно указать такое значение $M(\varepsilon)$, что

$$\|\delta - H_M^{-1}h\| \leq \varepsilon, \quad M > M(\varepsilon),$$

но тогда тем более и $\|\delta - G_M h\| \leq \varepsilon$, где G_M минимизирует $\|\delta - Ah\|$ в классе операторов $\mathcal{A}[M]$.

Поскольку ε может быть взято сколь угодно малым, то

$$\|\delta - G_M h\| = \|(H^{-1} - G_M)h\| \rightarrow 0 \text{ при } M \rightarrow \infty,$$

а так как не существует такого причинного фильтра, который полностью подавляет сигнал, занимающий ненулевую полосу частот, то G_M сходится к оператору H^{-1} . Теорема доказана полностью, так как существует только один минимально-фазовый фильтр с заданной амплитудной характеристикой.

Рассмотрим вкратце, к чему приводит замена оператора L^{-1} оператором H^{-1} , имеющим ту же амплитудную характеристику $1/|L(\omega)|$, но другую фазовую характеристику $-\varphi_0(\omega)$. Умножая $|L(\omega)| \exp[i\varphi(\omega)]$ на $\exp[-i\varphi_0(\omega)]/|L(\omega)|$, получим спектр $\exp\{i[\varphi(\omega) - \varphi_0(\omega)]\}$. Можно показать, что для полуфинитных сигналов $\varphi(\omega) \simeq -c \cdot \omega + 0(\omega)$ и $\varphi_0(\omega) \simeq -c_0 \cdot \omega + 0(\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ (по условию минимальной фазовости $c_0 < c$). Поэтому на низких частотах имеем спектр $\exp[-i(c - c_0)\omega]$. Это означает, что на низких частотах сигнал $H^{-1}l$ представляет собой сдвинутую «единичку».

Если $L(z)$ имеет нуль на единичной окружности, то обратный оператор H^{-1} в классе $\mathcal{A}[\infty]$ не существует. Поэтому здесь возможны две ситуации: 1) оператор G_M сходится к ограниченному оператору, не являющемуся обратным ни к какому сигналу, и 2) оператор G_M стремится к неограниченному оператору. В последнем случае задача обратной фильтрации оказывается бессмысленной: чем больше берется отсчетов обратного фильтра, тем меньше точность обратной фильтрации (из-за вычислительной неустойчивости).

Полезно иметь в виду, что среднеквадратический оператор обратной фильтрации при любом M является минимально-фазовым. Это утвержде-

ние, подробное доказательство которого мы опускаем, основывается на известной в анализе теореме, гласящей, что все нули полинома

$$Q(z) = \begin{vmatrix} R_0 & R_1 & \dots & R_M \\ R_1 & R_0 & \dots & R_{M-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{M-1} & R_{M-2} & \dots & R_1 \\ 1 & z & \dots & z^M \end{vmatrix},$$

получающегося, если последнюю строку определителя эрмитовой матрицы $L^T L$ заменить строкой $1, z, z^2, \dots, z^M$, лежат внутри единичного круга; в то же время из системы (VI.34) следует, что с точностью до постоянного множителя $G(z)$ совпадает с $z^M Q(1/z)$.

Среднеквадратический обратный фильтр, определяемый системой уравнений (VI.34), дает удовлетворительное решение только для минимально-фазовых операторов L , так как в противном случае при $M \rightarrow \infty$ он не сходится к L^{-1} . Это обстоятельство очевидным образом связано с тем, что точные обратные фильтры неминимально-фазовых операторов, как было показано в § 25, обязательно имеют ненулевые отсчеты при отрицательных k (т. е. являются двухсторонними).

Указанный недостаток можно устранить, если минимизацию $\|\delta - A\mathbf{1}\|^2$ осуществлять в классе операторов $\mathcal{A}[-M, M]$, имеющих ненулевые отсчеты при $-M \leq k \leq M$ (т. е. в классе двухсторонних операторов длины $2M+1$).

Поступая точно так же, как и при выводе (VI.34), получим, что решение дается системой

$$\sum_{j=-M}^M R_{i-j} a_j = l_i, \quad i = -M, \dots, M. \quad (\text{VI.41})$$

Аналогично утверждению 1 этого параграфа можно показать, что среднеквадратический обратный фильтр, импульсная характеристика которого совпадает с решением системы (VI.41), при $M \rightarrow \infty$ сходится к точному оператору обратной фильтрации L^{-1} , если только $L(z)$ не имеет нулей на окружности $|z| = 1$.

Докажем утверждение, связывающее двухсторонние и односторонние среднеквадратические обратные фильтры.

Теорема 2. Пусть оператор G_1 минимизирует $\|\delta - A\mathbf{1}\|$ при $A \in \mathcal{A} \times \times [-M, M]$, а оператор G_2 минимизирует $\|\delta^{(M)} - A\mathbf{1}\|$ при $A \in \mathcal{A}[2M]$, где $\delta^{(M)} = \{\delta_{k-M}\}$. Тогда импульсные характеристики операторов G_1 и G_2 связаны соотношением $g_k^{(2)} = g_{k-M}^{(1)}$

Утверждение доказывается непосредственным построением оператора G_2 . Минимизируя

$$\sum_{k=0}^{2M} \left(\delta_{k-M} - \sum_{j=0}^{2M} l_{k-j} a_j \right)^2,$$

получим систему уравнений для $g_k^{(2)}$:

$$\sum_{j=0}^{2M} R_{i-j} a_j = l_{M-i}, \quad i = 0, 1, \dots, 2M. \quad (\text{VI.42})$$

Внимательное сопоставление систем (VI.41) и (VI.42) показывает, что они имеют одинаковые матрицы и одинаковые правые части, отличаясь только нумерацией компонент вектора неизвестных коэффициентов.

Поскольку оператор G_1 при $M \rightarrow \infty$ стремится к L^{-1} , то из доказанного утверждения следует, что оператор G_2 стремится к $L_{(M)}^{-1}$, где $L_{(M)}$ имеет сдвинутую импульсную характеристику $\{l_{k-M}\}$. Таким образом, допуская сколь угодно большие сдвиги, можно получить в классе физически-осуществимых операторов сколь угодно точные операторы обратной фильтрации даже в тех случаях, когда точный оператор L^{-1} является двухсторонним.

На практике стремятся найти такой оптимальный сдвиг s , который при фиксированном M дает наименьшее значение для $\|\delta^{(s)} - A\|$ при $A \in \mathcal{A}[M]$. Физический смысл такой процедуры очевиден: максимальные значения неминимально-фазовой последовательности $\{l_k\}$ сосредоточены внутри интервала $0 < k < M$, поэтому последовательность $\{l_k\}$ проще «сжать» в сдвинутую единичку, располагающуюся в области максимальных значений, чем в единичный импульс, находящийся в точке $k = 0$.

§ 28. Регуляризация операторов обратной фильтрации

Существование среднеквадратического фильтра не является гарантией его практической устойчивости, так как норма оператора может оказаться большой. Поэтому желательно сузить класс операторов, наложив дополнительное ограничение $\|A\| \leq c$.

Определив норму оператора с помощью евклидовой нормы его импульсной характеристики, получим задачу на условный экстремум

$$\min_{(a_j)} \sum_{(k)} \left(\delta_k - \sum_j l_{k-j} a_j \right)^2 \quad (\text{VI.43})$$

при условии

$$\sum_{(j)} a_j^2 \leq c^2 \quad (\text{VI.44})$$

(пределы в суммах зависят от того, в каком из классов $\mathcal{A}[M]$ и $\mathcal{A}[-M, M]$ ищется решение).

Если решение задачи на безусловный минимум (т. е. решение, рассмотренное в предыдущем параграфе) имеет норму большую, чем c , то легко показать, что неравенство (VI.44) можно заменить условием

$$\sum_j a_j^2 = c^2. \quad (\text{VI.45})$$

Задачу (VI.43)–(45) решим методом Лагранжа. Составим для этого функцию Лагранжа

$$\sum_k \left(\delta_k - \sum_j l_{k-j} a_j \right)^2 + \alpha \left(c^2 - \sum_j a_j^2 \right)$$

и найдем седловую точку этой функции, дифференцируя по всем a_i и α и приравнявая производные нулю. Приходим к системе, состоящей из уравнения

$$\sum_{(i)} R_{i-j} a_j + \alpha a_i = l_{-i} \quad (\text{VI.46})$$

и уравнения (VI.45). Часто параметр α подбирают из косвенных соображений, решая систему, состоящую только из уравнений (VI.46), считая α известным.

Регуляризованное решение (VI.46) можно получить также методом А. Н. Тихонова, рассуждая следующим образом. Будем одновременно уменьшать $\|\delta - A\mathbf{1}\|^2$ и $\|A\|^2$, для чего найдем минимум выражения

$$Q(A) = \|\delta - A\mathbf{1}\|^2 + \alpha \|A\|^2, \quad A \in \mathcal{A}, \quad (\text{VI.47})$$

где α — параметр регуляризации, принимающий некоторое близкое к нулю, но фиксированное значение; A — один из классов $\mathcal{A} [M]$ или $\mathcal{A} [-M, M]$ или даже $\mathcal{A} [-\infty, \infty]$. Для любого оператора A с конечной нормой выражение (VI.47) конечно. Поэтому из неотрицательности функционала $Q(A)$ можно вывести существование конечного минимума (точнее — конечной точной нижней границы) этого выражения при $A \in \mathcal{A}$. Тогда, если существует оператор $G \in \mathcal{A}$, который доставляет Q минимальное значение, он обязательно имеет конечную норму. Этим гарантируется устойчивость оператора. Вместе с тем, выбирая α достаточно малым, можно добиться того, чтобы вид оператора G в основном определялся первым слагаемым в правой части (VI.47).

Полагая $\|A\|^2 = \sum a_j^2$, получим, что минимизация функционала $Q(A)$ сводится к минимизации выражения

$$\sum_k \left(\delta_k - \sum_j l_{k-j} a_j \right)^2 + \alpha \sum_j a_j^2$$

при $\alpha = \text{const}$. Дифференцируя по a_i , приходим к системе уравнений (VI.46).

Рассмотрим спектральный смысл методов регуляризации, считая, что оператор ищется в классе $\mathcal{A} [-\infty, \infty]$ (следовательно, $i = 0, \pm 1, \dots, \pm \infty$). И левая, и правая части системы уравнений (VI.46) в этом случае являются i -тыми членами бесконечной числовой последовательности.

Дискретный спектр правой части (VI.46) равен $L^*(\omega)$, дискретный спектр последовательности $\{R_k\}$, как было выяснено в предыдущем параграфе, $|L(\omega)|^2$.

Обозначая через $G(\omega)$ дискретный спектр последовательности $\{a_k\}$, минимизирующей систему (VI.46) при $A \in \mathcal{A} [-\infty, \infty]$, получим

$$G(\omega) |L(\omega)|^2 + \alpha G(\omega) = L^*(\omega)$$

или

$$G(\omega) = L^*(\omega) / [|L(\omega)|^2 + \alpha]. \quad (\text{VI.48})$$

Если $\alpha \rightarrow 0$, то $G(\omega)$ стремится к функции $1/L(\omega)$, являющейся спектральной характеристикой точного оператора обратной фильтрации. Смысл параметра α совершенно прозрачен: положительная добавка

в знаменателе (VI.48) «подавляет» близкие к нулю значения $|L(\omega)|^2$, тем самым устраняется деление на близкие к нулю величины.

Регуляризованный обратный фильтр существует и в том случае, когда спектр $L(\omega)$ имеет нули при вещественных ω . Рассмотрим для примера обратный фильтр в задаче (V.76). В этой задаче

$$L(\omega) = 1 - \exp(-i\omega\Delta\tau).$$

Следовательно, регуляризованный обратный фильтр определится спектральной характеристикой

$$G(\omega) = \frac{1 - \exp(i\omega\Delta\tau)}{2 + \alpha - [\exp(-i\omega\Delta\tau) + \exp(i\omega\Delta\tau)]}.$$

Перейдем к z -характеристике, считая, что $\Delta\tau = \Delta t$ (напомним, что $\Delta\tau$ является управляемым параметром):

$$G(z) = \frac{1 - z^{\Delta\tau}}{1 - (2 + \alpha)z^{\Delta\tau} + z^{2\Delta\tau}}. \quad (\text{VI.49})$$

Знаменатель имеет нули $1 + \alpha/2[1 + \sqrt{1 + 2/\alpha}] > 1$ и $0 < 1 + \alpha/2[1 - \sqrt{1 - 2/\alpha}] < 1$, поэтому фильтр может быть реализован в виде последовательности прямого и обращенного рекурсивных фильтров аналогично тому, как это было сделано для фильтра (25.7) (VI.13).

Регуляризованный обратный фильтр (VI.48) на высоких и низких частотах ведет себя, как полосовой фильтр (см. § 13) с полосой пропускания, определяемой спектром $L(\omega)$. Отсюда следует, что регуляризация обратной фильтрации может быть достигнута двумя последовательными фильтрами, один из которых является оператором обратной фильтрации, а второй — полосовым фильтром. Интересно отметить, что подобная регуляризация обратного фильтра, по существу, имеет место при точной постановке обратной динамической задачи для вертикально-неоднородной среды. Этот факт показывает, что необходимость регуляризации очень часто означает необходимость уточнения самой задачи.

Глава VII

ВЫДЕЛЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКОГО СИГНАЛА ИЗВЕСТНОЙ ФОРМЫ НА ФОНЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОМЕХ

§ 29. Корреляционная функция и энергетический спектр случайного процесса

В этой и следующих главах рассматриваются фильтры, выделяющие полезные сейсмические сигналы на фоне помех. Расчет этих фильтров основывается на изменении энергетических характеристик сигнала и помехи при их прохождении через линейную систему. Поэтому нужно предварительно изучить, как такие характеристики определяются для помехи.

Чтобы дать определение помехи, сначала нужно условиться о том, что будет пониматься под полезным сейсмическим сигналом, так как помеха, грубо говоря, представляет собой результат вычитания из сейсмических колебаний полезных волн. Полезным сигналом будем считать функцию $u(t)$, выражающую смещение (в точке приема), которое связано с фиксированной волной (например, с одной из составляющих старшего члена лучевого ряда), определенной в заданной модели среды. Таким образом, в помеху $\xi(t)$, значения которой прибавляются к значениям сигнала (такая помеха называется аддитивной), включаются остальные волны, определенные в этой же модели среды, волны, рассеянные на неоднородностях, волны от других источников (ветровые, микросейсм) и, наконец, модельные помехи, связанные с отличием используемой модели от реальной среды.

Ясно, что помеха $\xi(t)$ образует колебательный процесс значительно более длинный, чем сигнал, и не имеющий (в определенном смысле) фиксированной формы. Имеется в виду, что заранее нельзя сказать, какой именно вид имеют данные колебания (даже если они частично известны), но можно указать такие их свойства, которые проявляются в среднем — в разных точках приема и в разных интервалах времени. Такого рода функции принято считать случайными. Это означает, что при каждом t $\xi(t)$ является реализацией некоторой случайной величины, а вся функция $\xi(t)$ — реализацией (траекторией) случайного процесса.

Любая амплитудная и энергетическая характеристика сигнала может быть определена из его спектра $S_u(\omega)$. Всякая реализация помехи также имеет свой спектр $S_\xi(\omega)$, однако воспользоваться им нельзя, во-первых, потому, что он никогда заранее не известен, во-вторых, потому, что фильтр, построенный по заданному спектру $S_\xi(\omega)$, был бы бесполезен при фильтрации колебаний в других точках приема. Более целесообразно при выборе фильтра ориентироваться на соответствующие «средние» свойства процесса $\xi(t)$, одинаковые для многих точек приема.

Рассмотрим важнейшие из таких «средних» свойств:

1. Математическое ожидание (среднее значение) процесса $\xi(t)$:

$$M\xi(t) = m(t).$$

Так как постоянная составляющая колебаний точки среды близка к нулю, то естественно принять, что

$$m(t) \equiv 0, \quad -\infty \leq t \leq \infty \quad (\text{VII.1})$$

(такие случайные процессы называются центрированными).

2. Дисперсия (средний квадрат) центрированного процесса $\xi(t)$:

$$D\xi(t) = M|\xi(t)|^2 = \sigma^2(t).$$

Функция $\sigma^2(t)$ характеризует ожидаемую мгновенную мощность процесса $\xi(t)$.

3. Корреляционная функция:

$$K_\xi(t + \tau, t) = M\xi(t + \tau)\xi(t). \quad (\text{VII.2})$$

Смысл корреляционной функции вытекает из того, что величина

$$[r(t_1, t_2) = \frac{K_{\xi}(t_1, t_2)}{\sigma(t_1) \cdot \sigma(t_2)} \quad (\text{VII.3})$$

выражает коэффициент корреляции между значениями процесса в моменты t_1 и t_2 .

Кроме того,

$$K_{\xi}(t, t) = \sigma^2(t). \quad (\text{VII.4})$$

Грубо говоря, корреляционная функция одновременно характеризует и интенсивность процесса, и степень связи (зависимости) между его значениями.

Нам понадобится также обобщение формулы (VII.2) на случай комплекснозначных процессов:

$$K_{\xi}^{\dagger}(t + \tau, t) = M \xi(t + \tau) \xi^*(\tau). \quad (\text{VII.5})$$

Предположение о том, что характер процесса $\xi(t)$ в среднем одинаков на всем бесконечном интервале времени от $-\infty$ до $+\infty$, ведет к модели стационарного случайного процесса. Центрированный процесс $\xi(t)$ является стационарным в широком смысле, если его дисперсия $\sigma^2(t)$ постоянна, а корреляционная функция зависит только от разности $t_1 - t_2$:

$$K_{\xi}^{\dagger}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1 - t_2) = K_{\xi}^{\dagger}(\tau).$$

Корреляционная функция вещественного стационарного случайного процесса обладает следующими очевидными свойствами: 1) она является четной функцией аргумента τ : $K_{\xi}(-\tau) = K_{\xi}^{\dagger}(\tau)$; 2) значение ее в нуле совпадает с дисперсией (мощностью) процесса:

$$K_{\xi}(0) = \sigma_{\xi}^2 = M |\xi(t)|^2. \quad (\text{VII.6})$$

Если зависимость между значениями процесса убывает при увеличении интервала времени между ними, то $K_{\xi}(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$. Величина τ_0 в случае, когда при $\tau > \tau_0$ зависимостью между $\xi(\tau)$ и $\xi(t + \tau)$ можно пренебречь, называется интервалом корреляции процесса $\xi(t)$ (эта величина определяется неединственным образом). Так как нормированная корреляционная функция $r(\tau) = K_{\xi}(\tau)/\sigma_{\xi}^2$ выражает коэффициент корреляции между $\xi(t)$ и $\xi(t + \tau)$, то при $\tau > \tau_0$ значения $r(\tau)$ должны быть близкими к нулю.

Примером корреляционной функции является следующая:

$$K_{\xi}(\tau) = \sigma_{\xi}^2 \exp(-\alpha |\tau|) \cos \omega_0 \tau. \quad (\text{VII.7})$$

В качестве интервала корреляции может быть взята величина $1/\alpha$ или любая пропорциональная ей величина a/α . При $\tau > a/\alpha$ значение коэффициента корреляции $r(\tau)$ не будет превышать $\exp\{-a\}$.

Стационарный случайный процесс может быть представлен в виде бесконечной суммы комплексных гармоник со случайными амплитудами

$X(d\omega)/\sqrt{2\pi}$, где $X(d\omega)$ — случайная величина, распределение которой зависит от интервала частот $(\omega, \omega + d\omega)$ ¹:

$$\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \cdot X(d\omega). \quad (\text{VII.8})$$

При этом все комплексные случайные амплитуды $X(d\omega)$ независимы, если соответствующие интервалы не пересекаются, за исключением случая симметричных интервалов $(-\omega, -\omega - d\omega)$ и $(\omega, \omega + d\omega)$. Если $m(t) \equiv 0$, то для всех ω средние значения амплитуд также равны нулю: $\mathbf{M}X(d\omega) = 0$. В этом случае величина $\mathbf{M} |X(d\omega)|^2/2\pi$ выражает среднюю интенсивность процесса $\xi(t)$ в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$. Эта интенсивность при $d\omega \rightarrow 0$ пропорциональна $d\omega$, отсюда

$$\frac{1}{2\pi} \mathbf{M} |X(d\omega)|^2 = N_{\xi}(\omega) d\omega + 0(d\omega). \quad (\text{VII.9})$$

Функция $N_{\xi}(\omega)$ называется энергетическим спектром, или спектральной интенсивностью случайного процесса $\xi(t)$.

Энергетический спектр и корреляционная функция случайного процесса связаны между собой преобразованиями Фурье:

$$K_{\xi}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_{\xi}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad (\text{VII.10})$$

$$N_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (\text{VII.11})$$

В соответствии с (VII.6) из формулы (VII.10) следует

$$\sigma_{\xi}^2 = \mathbf{D}\xi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (\text{VII.12})$$

Согласно (VII.11) спектральная интенсивность процесса с корреляционной функцией (VII.7)

$$N_{\xi}(\omega) = \sigma_{\xi}^2 \alpha \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right].$$

Заметим, что процессы, имеющие интегрируемую в квадрате корреляционную функцию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_{\xi}(\tau)|^2 d\tau < \infty, \quad (\text{VII.13})$$

¹ Это означает, что $X(d\omega)$ является приращением некоторого другого процесса $Y(\omega)$: $X(d\omega) = Y(\omega + d\omega) - Y(\omega)$.

обладают так называемым эргодическим свойством, согласно которому корреляционная функция $K_{\xi}(\tau)$ может быть определена по единственной реализации процесса, заданной на бесконечном интервале:

$$K_{\xi}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \xi(t + \tau) \xi(t) dt, \quad (\text{VII.13}')$$

Преимущества модели стационарных процессов проявляются в тех случаях, когда наблюдаемые реализации подвергаются линейным преобразованиям.

Рассмотрим энергетический спектр случайного процесса $\eta(t)$, являющегося линейным преобразованием процесса $\xi(t)$:

$$\eta(t) = L[\xi(t)]. \quad (\text{VII.14})$$

Из стационарности системы L и процесса $\xi(t)$ следует, что замена процесса $\xi(t)$ процессом $\xi(t - \tau)$ не может изменить средних свойств процесса $\eta(t)$, поэтому он также стационарен и для него можно построить спектральное разложение типа (VII.8):

$$\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) Y(d\omega). \quad (\text{VII.15})$$

Подставим теперь разложение (VII.8) в (VII.14). Вследствие линейности

$$\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} L[X(d\omega) \exp(i\omega t)].$$

Известно, что при прохождении комплексной гармоникой $A \exp(i\omega t)$ через линейную систему L амплитуда этой гармоникой умножается на $L(\omega)$, поэтому

$$L[X(d\omega) \exp(i\omega t)] = L(\omega) X(d\omega) \exp(i\omega t),$$

т. е.

$$\eta(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) L(\omega) X(d\omega).$$

Сравнивая последнее выражение с (VII.15), имеем

$$Y(d\omega) = L(\omega) X(d\omega). \quad (\text{VII.16})$$

Энергетический спектр процесса $\eta(t)$ равен, по определению,

$$N_{\eta}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{M} |Y(d\omega)|^2}{d\omega} \quad (d\omega \rightarrow 0).$$

Подставляя сюда формулу (VII.16) и учитывая что неслучайные величины можно выносить за знак математического ожидания, получим

$$N_{\eta}(\omega) = |L(\omega)|^2 N_{\xi}(\omega). \quad (\text{VII.17})$$

Итак, энергетический спектр случайного процесса на выходе линейной системы L равен произведению квадрата амплитудной характеристики системы на энергетический спектр процесса на входе.

Важным примером стационарного процесса, гармонические составляющие которого имеют постоянную интенсивность независимо от частоты, является так называемый белый шум. Его энергетический спектр

$$N_0(\omega) = N_0 = \text{const.}$$

Если белый шум подать на вход линейного фильтра, то на выходе получим процесс с энергетическим спектром $N_0 \cdot |L(\omega)|^2$. Так как выбор L произволен, то полученный результат означает, что любая четная неотрицательная функция частоты может быть энергетическим спектром какого-нибудь процесса. А так как энергетический спектр — всегда четная неотрицательная функция, то класс таких функций исчерпывает класс энергетических спектров. Учитывая теперь связь энергетических спектров и корреляционных функций, делаем вывод, что класс корреляционных функций — это класс четных функций с неотрицательными спектрами.

Вопрос, в какой мере модель стационарного случайного процесса применима к описанию помех на реальных сейсмограммах, не прост, поскольку интенсивность сейсмических колебаний, возникающих от источника импульсного типа, быстро убывает с увеличением времени.

При выделении единичного сигнала, имеющего небольшую длительность T_1 , на фоне помех с интервалом корреляции τ_0 достаточно ограничиться участком трассы длиной примерно $T_1 + 2\tau_0$. Поэтому и стационарность фактически требуется только на интервале этой же длины.

Для примера рассмотрим двухслойное полупространство $z > 0$ с горизонтальной границей разрыва непрерывности на глубине $z = H$. Отраженную от этой границы волну будем считать полезным сигналом. Предположим, что оба слоя $0 < z < H$ и $z > H$ являются вертикально-неоднородными. Если в окрестности точечного источника, помещенного в начале координат, возбуждается колебание, имеющее форму $f(t)$, то согласно формуле (V.51) приемник, также помещенный в начале координат, регистрирует колебания, которые без учета кратных выражаются формулой

$$x(t) = \frac{Av_P(0)}{\int_0^{t_0/2} v_P^2(\tau) d\tau} f(t - t_0) - \frac{v_P(0)}{2} \int_0^T \frac{d \ln \gamma \left(\frac{t - \tau}{2} \right)}{dt} \cdot \frac{f(\tau) d\tau}{\int_0^{(t-\tau)/2} v_P^2(\tau) d\tau}, \quad (\text{VII.18})$$

где A — коэффициент отражения на границе $z = H$; t_0 — нулевое время прихода полезной волны. Пределы в интеграле поставлены с учетом длительности посылаемого в среду сигнала.

В нашей модели экспериментального материала второе слагаемое в правой части (VII.18) выражает помеху $\xi(t)$.

Воспользовавшись теоремой о среднем, можно показать, что если на интервале $(t_0 - T', t_0 + T')$, где

$$T' > T, \quad T' \ll \frac{\min v_{\mathbb{P}}^2(\tau)}{2v_{\mathbb{P}}^2(t_0)} \cdot t_0, \quad (\text{VII.19})$$

функция $\zeta_0(t) = d \ln \gamma(t/2)/dt$ является отрезком реализации стационарного процесса, то на интервале $(t_0 - T' + T, t_0 + T')$ процесс $\xi(t)$ также может считаться стационарным; при этом его энергетический спектр

$$N_{\xi}(\omega) \cong \frac{v_{\mathbb{P}}^2(0)}{4v_{\mathbb{P}}^4(t_0)t_0^2} |S(\omega)|^2 N_{\zeta}(\omega), \quad (\text{VII.20})$$

где $N_{\xi}(\omega)$ — энергетический спектр процесса $\zeta_0(t)$.

Физический смысл приведенного условия стационарности состоит в том, что степень неоднородности среды, выраженная последовательностью коэффициентов отражения, в окрестности границы $z = H$ изменяется мало. Влиянием кратных волн, образующихся в пределах этого же интервала $(t_0 - T', t_0 + T')$, обычно можно пренебречь. Что касается кратных от более резких границ, а также волн, отраженных от соседних резких границ, то подобные помехи должны учитываться как регулярные (неслучайные) сигналы, что, по существу, изменяет саму постановку задачи выделения одиночного сигнала.

Таким образом, условие локальной стационарности по отношению к широкому классу реальных сейсмограмм является оправданным.

Главное нарушение стационарности на широких интервалах времени заключается в понижении интенсивности с увеличением времени. Поэтому при рассмотрении больших участков трасс помеху целесообразно считать таким случайным процессом, у которого дисперсия $\sigma_{\xi}^2(t)$ плавно уменьшается при $t \rightarrow 0$, а коэффициент корреляции между $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ зависит только от $t_1 - t_2$.

Легко проверить, что подобные процессы могут быть записаны в виде

$$\xi(t) = \varphi(t) \xi_0(t),$$

где $\varphi(t)$ — заданная монотонно убывающая функция времени; $\xi_0(t)$ — стационарный случайный процесс.

Такая модель, в частности, следует из формул (VII.18) и (VII.20), если $\zeta_0(t)$ стационарна на всем интервале $(0, \infty)$. Другим обоснованием является хорошо известный факт, что удачный выбор закона регулирования амплитуд в сейсморегирующем канале (устройствами типа ЭРУ) делает запись стационарной в очень широком интервале времени. Именно к таким отрегулированным записям и следует применять модель стационарного процесса.

Рассмотрим некоторые соотношения для пары произвольных стационарных процессов — $\xi(t)$ и $\eta(t)$. Связь этих процессов между собой характеризуется функцией взаимной корреляции, которую определим сразу для комплекснозначных процессов:

$$K_{\xi\eta}(t + \tau, t) = \mathbf{M}\xi(t + \tau)\eta^*(t). \quad (\text{VII.21})$$

Если эта функция зависит только от разности аргументов

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = K_{\xi\eta}'(t_1 - t_2) = K_{\xi\eta}(\tau),$$

то процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называются стационарно-связанными. Функция взаимной корреляции стационарно-связанных процессов удовлетворяет следующему соотношению:

$$K_{\eta\xi}(\tau) = K_{\xi\eta}^*(-\tau). \quad (\text{VII.22})$$

Для вещественных процессов значение

$$r_{\xi\eta}(\tau) = K_{\xi\eta}(\tau) / \sigma_{\xi}\sigma_{\eta}$$

определяет коэффициент корреляции между $\xi(t)$ и $\eta(t-\tau)$, поэтому величина τ_m , для которой

$$r_{\xi\eta}(\tau_m) = \max_{(\tau)} r_{\xi\eta}(\tau),$$

показывает тот сдвиг, при котором значения процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ в наибольшей степени связаны.

Если процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ независимы, то их функция взаимной корреляции равна нулю.

Пусть $X(d\omega)$ и $Y(d\omega)$ — случайные амплитуды, фигурирующие в спектральных разложениях (VII.9) и (VII.15) для $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Предел отношения

$$\frac{MX(d\omega)Y^*(d\omega)}{2\pi d\omega}$$

при $d\omega \rightarrow 0$ называется взаимным энергетическим спектром и обозначается $N_{\xi\eta}(\omega)$.

Функции $K_{\xi\eta}(\tau)$ и $N_{\xi\eta}(\omega)$ связаны парой преобразований Фурье, в частности,

$$K_{\xi\eta}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_{\xi\eta}(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega. \quad (\text{VII.23})$$

Из этих формул легко получить функцию взаимной корреляции между процессами $\xi(t)$ и $\eta(t) = L[\xi(t)]$:

$$K_{\xi\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(t+\tau) l(t) dt. \quad (\text{VII.24})$$

Действительно, в этом случае $Y^*(d\omega) = L^*(\omega)X^*(d\omega)$, поэтому взаимный энергетический спектр

$$N_{\xi\eta}(\omega) = L^*(\omega)N_{\xi}(\omega), \quad (\text{VII.25})$$

а так как интеграл в правой части (VII.24) можно переписать, как

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\tau-u) l(-u) du,$$

то справедливость формулы (VII.24) доказывается тем, что спектр функции $l(-t)$ равен $L^*(\omega)$. Формулы (VII.24) и (VII.25) могут быть использованы для оценки статистической связи, которая имеет место между сейсмической трассой и логарифмической производной акустической жесткости при нормальном падении в вертикально-неоднородной среде.

В заключение найдем корреляционную функцию суммы двух стационарно-связанных процессов — $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

По определению

$$K_{\Sigma}(\tau) = M[\xi(t + \tau) + \eta(t + \tau)] \cdot [\xi^*(t) + \eta^*(t)].$$

Раскрыв скобки и определив математическое ожидание каждого слагаемого, получим

$$K_{\Sigma}(\tau) = K_{\xi}(\tau) + K_{\eta}(\tau) + K_{\eta\xi}(\tau) + K_{\xi\eta}(\tau). \quad (\text{VII.26})$$

Аналогичная формула имеется и для спектральной интенсивности:

$$N_{\Sigma}(\omega) = N_{\xi}(\omega) + N_{\eta}(\omega) + N_{\xi\eta}(\omega) + N_{\eta\xi}(\omega). \quad (\text{VII.27})$$

Если оба процесса независимы, то

$$K_{\Sigma}(\tau) = K_{\xi}(\tau) + K_{\eta}(\tau); \quad (\text{VII.28})$$

$$N_{\Sigma}(\tau) = N_{\xi}(\tau) + N_{\eta}(\tau). \quad (\text{VII.29})$$

§ 30. Оптимальная фильтрация при обнаружении детерминированного сигнала

Пусть $x(t) = u(t) + \xi(t)$, где помеха $\xi(t)$ является стационарным процессом. Будем считать, что фильтр L тем лучше, чем интенсивнее выходной сигнал $v(t) = L[u(t)]$ по сравнению с помехой $\eta(t) = L[\xi(t)]$ на выходе фильтра. Интенсивность сигнала $v(t)$ условимся измерять квадратом его значения в некоторый момент времени t_0 . Интенсивность помехи $\eta(t)$ будем оценивать ее дисперсией (мощностью) $D\eta$.

Таким образом, качество работы фильтра L определяется величиной

$$\mu(L) = \frac{|v(t_0)|^2}{D\eta},$$

которая называется отношением сигнал/помеха на выходе фильтра.

Так как спектр $v(t)$ равен $S_u(\omega)L(\omega)$, то

$$v(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) L(\omega) \exp(i\omega t_0) d\omega.$$

Мощность помехи на выходе равна интегралу от ее энергетического спектра, а последний равен [см. формулу (VII.17)] $|L(\omega)|^2 \cdot N_{\xi}(\omega)$, где $N_{\xi}(\omega)$ — энергетический спектр помехи на входе фильтра, поэтому

$$D\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 N_{\xi}(\omega) d\omega.$$

Таким образом,

$$\mu(L) = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega) S_u(\omega) \exp(i\omega t_0) d\omega \right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 N_{\xi}(\omega) d\omega}. \quad (\text{VII.30})$$

Задача состоит в выборе такой характеристики $L(\omega)$, для которой значение μ максимально. Покажем, что эта характеристика определяется формулой

$$L_0(\omega) = c \cdot \exp(-i\omega t_0) \frac{S_u^*(\omega)}{N_{\xi}(\omega)}, \quad (\text{VII.31})$$

где c — любая константа.

Напишем сначала неравенство Коши — Буняковского для комплекснозначных функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\left| \int_a^b f(x) g^*(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx.$$

В качестве f возьмем

$$\frac{S_u^*(\omega) \cdot \exp(i\omega t_0)}{\sqrt{2\pi N_{\xi}(\omega)}},$$

а в качестве g —

$$\frac{L(\omega) \sqrt{N_{\xi}(\omega)}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Применительно к этим функциям неравенство Коши — Буняковского даст

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega) S_u(\omega) \exp(i\omega t_0) d\omega \right|^2 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_u(\omega)|^2}{N_{\xi}(\omega)} d\omega \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 N_{\xi}(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Или, разделив обе части неравенства на

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 N_{\xi}(\omega) d\omega$$

и учтя выражение для μ , получим

$$\mu(L) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_u(\omega)|^2}{N_{\xi}(\omega)} d\omega.$$

Мы получили верхнюю границу для отношения сигнал/помеха. Теперь достаточно убедиться в том, что эта граница достигается для характеристики $L_0(\omega)$, выбранной по формуле (VII.31).

Подставляя формулу (VII.31) в (VII.30), убеждаемся, что это действительно так:

$$\mu(L_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S_u(\omega)|^2}{N_{\xi}(\omega)} d\omega. \quad (\text{VII.32})$$

Оптимальность фильтра L_0 доказана. Разумеется, необходимо оговорить возможность деления на $N_{\xi}(\omega)$ в (VII.31). Однако эта оговорка практического значения не имеет, так как не существует таких реальных помех, которые совсем не содержат гармоники на каких-нибудь частотах.

Имея в виду реальные ситуации, разумно также потребовать, чтобы всегда выполнялось условие конечности значения μ , ибо случаи, когда сигнал удастся полностью выделить на фоне помех, могут быть исключены из рассмотрения. Это ограничивает выбор математических моделей для описания помех условием

$$\frac{|S_u(\omega)|^2}{N_{\xi}(\omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty. \quad (\text{VII.33})$$

Если $S_u(\omega)$ — дробно-рациональная функция, убывающая, как $1/\omega^m$, то $N_{\xi}(\omega)$ на бесконечности должен стремиться к нулю медленнее, чем $1/\omega^m$. Это исключает возможность использования аналитических случайных процессов, для которых $N_{\xi}(\omega)$ убывает при $\omega \rightarrow \infty$, как $\exp(-\omega^2)$.

В качестве примера рассмотрим обнаружение сигнала на трассе, определяемой формулой (VII.18) (задача обнаружения отраженной от резкой границы волны на фоне однократных отражений от переходных слоев при нормальном падении). В соответствии с формулами (VII.18) и (VII.20) спектр $|S_u(\omega)|^2$ пропорционален $|S(\omega)|^2$, а $N_{\xi}(\omega)$ пропорционален $|S(\omega)|^2 N_{\xi}(\omega)$. Видно, что условие (VII.33) эквивалентно требованию $N_{\xi}(\omega) \rightarrow \infty$ ($\omega \rightarrow \infty$), которое интерпретируется как увеличение интенсивности колебаний акустической жесткости $\gamma(\tau)$ с ростом частоты. Грубо говоря, мелкомасштабные неоднородности должны быть более интенсивными, чем крупномасштабные.

Если условие (VII.33) не выполнено, то это означает, что в модели экспериментального материала не учтены какие-то помехи (например, погрешности измерения), которые, хотя и имеют малую интенсивность, играют большую роль на высоких частотах. Обычно модель изменяют введением белого шума небольшой интенсивности α , заменяя энергетический спектр $N_{\xi}(\omega)$ на $N_{\xi}(\omega) + \alpha$.

Рассмотрим физический смысл формулы (VII.31). Сначала определим амплитудную характеристику оптимального фильтра:

$$|L_0(\omega)| = |c| \cdot \frac{|S_u(\omega)|}{N_{\xi}(\omega)}.$$

Из этого выражения видно, что оптимальная фильтрация имеет амплитудную характеристику, хорошо согласующуюся со здравым смыслом: она устанавливает для каждого значения ω усиление, пропорциональное амплитуде соответствующей гармонике полезного сигнала и обратно пропорциональное интенсивности составляющих помехи.

Наличие множителя c в формуле (VII.31) указывает, что спектральная характеристика фильтра определена с точностью до коэффициента усиления, который может быть опущен. Отсюда следует, что если вместо спектра $S_u(\omega)$ взять спектр $aS_u(\omega)$, а вместо спектральной интенсивности $N_\xi(\omega)$ взять $bN_\xi(\omega)$, то спектральная характеристика оптимального фильтра не изменится. Тем самым мы показали, что характеристика оптимального фильтра не зависит от отношения сигнал/помеха на его входе, так как в качестве величины a можно взять амплитуду сигнала $u(t)$, а величину b принять равной σ_ξ^2 , нормировав соответствующим образом функции $S_u(\omega)$ и $N_\xi(\omega)$.

Множитель $\exp(-i\omega t_0)$, определяющий момент времени, на котором наблюдается максимальное значение выходного сигнала, также можно опустить. Фактически это означает выбор $t_0 = 0$, поэтому максимальная амплитуда выходного сигнала на выходе фильтра

$$L_0(\omega) = \frac{S_u^*(\omega)}{N_\xi(\omega)} \quad (\text{VII.34})$$

наблюдается в момент времени $t = 0$ (если сигнал $u(t)$ точно известен).

Если сигнал $u(t)$ известен с точностью до времени прихода и амплитуды a :

$$u(t) = af(t - \tau),$$

где $f(t)$ — заданный сигнал, начинающийся в момент времени $t = 0$, то оптимальный фильтр

$$L_0(\omega) = \frac{S^*(\omega)}{N_\xi(\omega)}, \quad (\text{VII.35})$$

где $S(\omega)$ — спектр $f(t)$, даст (в силу стационарности преобразования L) максимальное значение выходного сигнала в момент времени τ . Поэтому максимум функции $y(t) = L_0[x(t)]$ на выходе фильтра (VII.35) может служить оценкой времени прихода полезного сигнала.

Все фильтры (VII.31), (VII.34) и (VII.35) дают одно и то же значение отношения сигнал/помеха.

Пример I. Рассмотрим оптимальный фильтр (VII.35) для модели экспериментального материала (VII.18). Спектр сигнала с точностью до множителя равен $S(\omega)$, а энергетический спектр помехи определяется формулой (VII.20). Отсюда

$$L_0(\omega) = \frac{1}{S(\omega) N_\tau(\omega)}.$$

Видно, что задача оптимальной фильтрации сводится к задаче построения некоторого обратного фильтра.

Пример II (согласованный фильтр). Рассмотрим спектральную характеристику оптимального фильтра, когда помеха является белым шумом: $N_\xi(\omega) = N_0$.

Поскольку оптимальный фильтр определяется с точностью до множителя, то можно принять в этом случае

$$L_0(\omega) = S^*(\omega). \quad (\text{VII.36})$$

Фильтр с такой спектральной характеристикой является согласованным.

Из (VII.36) следует выражение для импульсной характеристики согласованного фильтра:

$$l_0(t) = f(-t). \quad (\text{VII.37})$$

Пусть на вход согласованного фильтра подается сигнал $x(t)$. На выходе получим

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) f(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau) f(\tau) d\tau. \quad (\text{VII.38})$$

Таким образом, выходной сигнал $y(t)$ представляет собой взаимную корреляцию входного сигнала $x(t)$ с ожидаемой формой полезного сигнала.

Согласно формуле (VII.32) отношение сигнал/помеха на выходе согласованного фильтра

$$\mu = \frac{1}{2\pi N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |S_u(\omega)|^2 d\omega = \frac{P_u}{N_0},$$

где P_u — мощность полезного сигнала на входе.

Итак, отношение сигнал/помеха на выходе согласованного фильтра совпадает с отношением мощности сигнала к мощности помехи на входе этого фильтра.

Если на вход фильтра (VII.35) подается сигнал $af(t-\tau)$, то на его выходе получим сигнал $v(t)$, имеющий спектр

$$S_v(\omega) = a \exp(-i\omega\tau) S(\omega) \frac{S^*(\omega)}{N_\xi(\omega)} = a \cdot \exp(-i\omega\tau) \frac{|S(\omega)|^2}{N_\xi(\omega)}.$$

Энергетический спектр помехи на выходе

$$N_\eta(\omega) = |L_0(\omega)|^2 N_\xi(\omega) = \frac{|S(\omega)|^2}{N_\xi(\omega)}.$$

Сравнивая оба выражения и применяя к правым частям обратное преобразование Фурье, получим

$$v(t+\tau) = aK_\eta(\tau). \quad (\text{VII.39})$$

Во-первых, из этого равенства следует, что на выходе оптимального фильтра сигнал имеет симметричную форму (так как корреляционная функция всегда четна). Во-вторых, оно означает, что спектральные свойства сигнала и помехи на выходе оптимального фильтра одинаковы. Из этого можно сделать очень важный вывод: на выходе оптимального фильтра форма полезного сигнала не несет никакой полезной информации. Вся информация о сигнале содержится в максимальном значении функции $y(t)$. Этот вывод совершенно естествен, поскольку вся информация о форме полезного сигнала была использована при определении спектральной характеристики $L_0(\omega)$.

Равенство (VII.39) иногда применяется как условие, контролирующее правильность выбора характеристики фильтра. По существу, мы показали лишь необходимость условия (VII.39). Для доказательства

достаточности нужно потребовать, чтобы ни при каких ω спектральная характеристика $L(\omega)$ не обращалась в нуль.

Переписав равенство (VII.39) в спектральной форме и подставив в полученное равенство выражения $S_v(\omega) = L(\omega)S_u(\omega)$ и (VII.17), делаем заключение (после деления на $L(\omega)$, что $L(\omega)$ удовлетворяет формуле (VII.31).

Другой критерий правильности фильтра основывается на том, что согласно (VII.25) взаимный энергетический спектр $\xi(t)$ и $\eta(t)$

$$N_{\xi\eta}(\omega) = \left(\frac{S^*(\omega)}{N_\xi(\omega)} \right)^* N_\xi(\omega) = S(\omega),$$

откуда $f(t) = K_{\xi\eta}(t)$. Это равенство имеет место независимо от того, правильно или неправильно предположение о форме сигнала — достаточно правильно задать энергетический спектр $N_\xi(\omega)$.

§ 31. Реализация оптимальных фильтров

Проблема реализации оптимальных фильтров близка к проблеме реализации обратных фильтров. Докажем сначала, что оптимальный фильтр физически неосуществим. Подадим на вход фильтра (VII.35) сигнал $f(t)$, относительно которого, как всегда, предполагается, что он имеет начало в момент $t = 0$. Тогда на выходе фильтра получим сигнал $v(t)$, спектр которого

$$S_v(\omega) = S(\omega) \frac{S^*(\omega)}{N_\xi(\omega)} = \frac{|S(\omega)|^2}{N_\xi(\omega)}.$$

И числитель, и знаменатель в правой части — четные вещественные функции. Значит, спектр $S_v(\omega)$, а вместе с ним и выходной сигнал также являются четными. Но для всякой четной функции, не равной тождественно нулю, можно указать такие значения $t < 0$, что $v(t) \neq 0$. Стало быть, фильтр отреагировал на сигнал $f(t)$ раньше, чем он поступил на вход этого фильтра. Поэтому фильтр (VII.35) не удовлетворяет принципу причинности. Отсюда следует, что фильтры (VII.31) и (VII.34) тоже физически неосуществимы, ибо их спектральные характеристики имеют в нижней полуплоскости комплексного переменного такие же особенности, как и (VII.35).

Таким образом, оптимальный фильтр нельзя точно реализовать на устройствах, действующих в реальном физическом времени, например при помощи электрических цепей. Но это, конечно, не значит, что его вообще нельзя реализовать. Во-первых, в этом классе линейных систем он может быть аппроксимирован — выбирая достаточно большое запаздывание t_0 в формуле (VII.31), можно, в частности, добиться сколь угодно точной аппроксимации в классе причинных систем. Во-вторых, он может быть реализован в цифровой форме.

Перепишем формулу (VII.35):

$$L_0(\omega) N_\xi(\omega) = S^*(\omega).$$

Применяя к этому равенству теорему о спектре свертки, получим, что импульсная характеристика $l_0(t)$ оптимального фильтра является решением следующего интегрального уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(t-\tau) l_0(\tau) d\tau = f(-t). \quad (\text{VII.40})$$

Сравнивая его с уравнением (VII.1), видим, что задача построения оптимального фильтра является частным случаем задачи обратной фильтрации. В отличие от общей задачи обратной фильтрации интегральное ядро $K_{\xi}(t-\tau)$ уравнения (VII.40) относится к специальному классу функций, имеющих неотрицательные спектры.

Если $N_{\xi}(\omega) > 0$ и при $\omega \rightarrow \infty$

$$\frac{|S(\omega)|}{N_{\xi}(\omega)} \sim \frac{c}{\omega^{\alpha}}, \quad \alpha > 1, \quad (\text{VII.41})$$

то импульсная характеристика оптимального фильтра существует и определяется единственным образом.

Доказательство этого утверждения основывается на достаточных условиях существования и единственности решения интегрального уравнения (VI.1). Из $N_{\xi}(\omega) > 0$ следует единственность, а из скорости убывания $|S(\omega)|/N_{\xi}(\omega)$ — существование решения и его устойчивость.

Любая реальная помеха имеет спектр более широкий, чем сигнал, поэтому условие (VII.41) можно считать всегда выполненным.

Перейдем к вопросам реализации оптимальной фильтрации в классе цифровых фильтров. Эту реализацию можно получить либо непосредственно из конечной аппроксимации интегрального уравнения (VII.40), либо решением соответствующей задачи на максимум отношения сигнал/помеха в области числовых последовательностей.

Первый путь, который основан на замене в (VII.40) интеграла интегральной суммой, мало удобен, так как приводит к решению системы линейных алгебраических уравнений очень высокого порядка.

Рассмотрим второй путь. Пусть на вход цифрового фильтра подается последовательность $\mathbf{x} = \{u(k\Delta t) + \xi(k\Delta t)\}$. Отношение сигнал/помеха на выходе цифрового фильтра L будем оценивать отношением квадрата амплитуды v_0 полезного сигнала $\mathbf{v} = L\{u(k\Delta t)\}$ к мощности помехи $\eta = \{\eta_k\}$ на выходе фильтра, где

$$\eta_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} l_{k-j} \xi_j, \quad \xi_k = \xi(k\Delta t). \quad (\text{VII.42})$$

Прежде чем приступить к задаче максимизации отношения сигнал/помеха, рассмотрим вкратце способы описания случайных последовательностей, представителями которых являются последовательности ξ и η .

Пусть $\{\xi_k\}$ — произвольная случайная последовательность, среднее значение которой равно нулю: $\mathbf{M} \xi_k = 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Эта последо-

вательность называется стационарной (в широком смысле), если среднее значение произведения $\xi_{k+n} \xi_k^*$ не зависит от k :

$$M \xi_{k+n} \xi_k^* = B_\xi(n). \quad (\text{VII.43})$$

Функция $B_\xi(n)$ целочисленного аргумента n — корреляционная функция последовательности $\{\xi_k\}$. Средняя интенсивность (дисперсия) последовательности $\{\xi_k\}$ равна $B_\xi(0)$.

Дискретный энергетический спектр случайной последовательности $\{\xi_k\}$ определяется как дискретный спектр последовательности $\{B_\xi(n)\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$N'_\xi(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_\xi(n) \exp(-i\omega n \Delta t). \quad (\text{VII.44})$$

Из этой формулы следует, что $B_\xi(n)$ — суть коэффициента ряда Фурье периодической функции $N'_\xi(\omega)$, имеющей период $2\pi/\Delta t$, поэтому

$$B_\xi(n) = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} N'_\xi(\omega) \exp(i\omega n \Delta t) d\omega. \quad (\text{VII.45})$$

Роль белого шума играет некоррелированная случайная последовательность, для которой $B_\xi(0) \neq 0$, $B_\xi(n) = 0$ при $n \neq 0$. Эта последовательность имеет дискретный энергетический спектр

$$N'_\xi(\omega) = B_\xi(0).$$

Вернемся теперь к нашему случаю, когда $\xi_k = \xi(k\Delta t)$.

Очевидно,

$$B_\xi(n) = K_\xi[n \Delta t]. \quad (\text{VII.46})$$

Найдем энергетический спектр последовательности $\{\eta_k\}$, определяемой формулой (VII.42). Сначала найдем ее корреляционную функцию $B_\eta(n) = M \eta_{k+n} \eta_k^*$.

Подставляя формулу (VII.42), получим:

$$B_\eta(n) = M \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} l_{k-j} l_{k+n-s} \xi_j^* \xi_s.$$

Так как знак суммы можно поменять со знаком математического ожидания, то с учетом формул (VII.43) и (VII.46)

$$B_\eta(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} l_{k-j} l_{k+n-s} B_\xi(s-j).$$

Если перейти к новым индексам суммирования $j' = j + k$ и $s' = s + k$, то полученное выражение можно переписать:

$$B_\eta(n) = \sum_{j'=-\infty}^{\infty} \sum_{s'=-\infty}^{\infty} l_{n-s'} l_{-j'} B_\xi(s' - j') = \sum_{s'=-\infty}^{\infty} l_{n-s'} \left(\sum_{j'=-\infty}^{\infty} B_\xi(s' - j') l_{-j'} \right).$$

В круглой скобке стоит свертка последовательности $\{l_{-k}\}$ с последовательностью $\{B_{\xi}(n)\}$. Результат этой свертки «сворачивается» далее с последовательностью $\{l_k\}$. Поэтому равный дискретному спектру корреляционной функции $B_{\eta}(n)$ энергетический спектр последовательности $\{\eta_k\}$ равен

$$N'_{\eta}(\omega) = |L(\omega)|^2 N'_{\xi}(\omega). \quad (\text{VII.47})$$

Итак, связь между дискретными энергетическими спектрами помехи на входе и выходе линейной цифровой системы оказалась такой же, как и для непрерывных систем.

Полученные соотношения позволяют осуществить вывод цифрового оптимального фильтра точно так же, как и в непрерывном случае. А именно нужно выразить амплитуду v_0 через дискретный спектр последовательности $\{v_k\}$

$$v_0 = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} L'(\omega) S'_u(\omega) d\omega,$$

а мощность помехи η — через ее энергетический спектр:

$$D\eta = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} |L'(\omega)|^2 N'_{\xi}(\omega) d\omega.$$

Составив теперь отношение $|v_0|^2/D\eta$, получим путем тех же рассуждений, которые проводились в § 30, что дискретная спектральная характеристика оптимального цифрового фильтра выражается формулой

$$L_0(\omega) = \frac{S'_u^*(\omega)}{N'_{\xi}(\omega)}. \quad (\text{VII.48})$$

Если время прихода и амплитуда полезности сигнала неизвестны $[u(t) = af(t-\tau)]$, то спектральная характеристика оптимального цифрового фильтра может быть взята в виде

$$L_0(\omega) = \frac{S'^*(\omega)}{N'_{\xi}(\omega)}, \quad (\text{VII.49})$$

где $S'(\omega)$ — дискретный спектр последовательности $f = \{f(k\Delta t)\}$.

Условием существования оптимального цифрового фильтра, очевидно, является неравенство $N'_{\xi}(\omega) > 0$. Оказывается, что данное условие заведомо выполнимо, если для всех ω величина $N_{\xi}(\omega) > 0$. Это легко показать для случайных процессов $\xi(t)$, имеющих конечную энергию

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_{\xi}(\omega) d\omega < \infty.$$

Действительно, в этом случае функция $N_{\xi}(\omega)$ абсолютно интегрируема (ибо она неотрицательна) и к ней можно применить формулу (III.11), связывающую дискретные и непрерывные спектры:

$$\Delta t N'_{\xi}(\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} N_{\xi}\left(\omega + \frac{2p\pi}{\Delta t}\right). \quad (\text{VII.50})$$

Вследствие неотрицательности всех слагаемых $N'_\xi(\omega) > 0$.

Заметим, что в дискретном случае отпадает необходимость формулировать условия типа (VII.41). Действительно, при $N'_\xi(\omega) > 0$ функция $L_0(\omega)$ является непрерывной периодической функцией, обладающей абсолютно сходящимся рядом Фурье. Но коэффициенты этого ряда — суть отсчеты импульсной характеристики оптимального фильтра. Из абсолютной суммируемости отсчетов вытекает конечность нормы оператора L_0 .

Так как ЭВМ имеет конечную память, нужно рассмотреть условия, при которых оптимальный фильтр является финитным обычным или рекурсивным оператором. Здесь будут приведены два таких условия.

Условие 1. Если последовательность $f = \{f_0, f_1, \dots, f_N\}$ финитна, а последовательность ξ представляет белый шум ($N'_\xi(\omega) = \text{const.}$) то оптимальный фильтр (VII.49) реализуем в финитной форме.

Действительно, соответственно § 30 оптимальный фильтр является согласованным. Из формулы (VII.37) и финитности сигнала следует, что

$$l_k^{(\bullet)} = \begin{cases} f_{-k}, & -N \leq k \leq 0 \\ 0, & k < -N, k > 0. \end{cases}$$

Если фильтрации подвергать последовательность $\{x_{-k}\}$, то фильтр L_0 можно взять в обращенной форме: $l_k^{(0)} = f_k$.

Условие 2. Если сигнал $f(t)$ финитен, а помеха $\xi(t)$ имеет конечный интервал корреляции τ_0

$$K_\xi(\tau) \equiv 0 \text{ при } |\tau| > \tau_0,$$

то оптимальный цифровой фильтр реализуем в финитной рекурсивной форме.

Доказательство. Характеристика z оптимального фильтра выразится формулой

$$L_0(z) = \frac{f_0 + \frac{f_1}{z} + \dots + \frac{f_N}{z^N}}{\sum_{n=-M}^M K_\xi(n \Delta t) z^n},$$

где $M = \lceil \tau_0 / \Delta t \rceil$. Мы уже убедились в том, что $L_0(z)$ является дробно-рациональной функцией z . Остается выяснить, как получить устойчивую реализацию рекурсивного фильтра.

Согласно формуле (VII.47) случайная последовательность с корреляционной функцией $B_\xi(n)$ может рассматриваться как результат прохождения некоррелированной последовательности через цифровой фильтр H со спектральной характеристикой $H(\omega)$, квадрат модуля которой равен $|H(\omega)|^2 = N'_\xi(\omega)$. Если $H(z)$ — z -характеристика фильтра H , то $B_\xi(n) = H(z)H\left(\frac{1}{z}\right)$. При доказательстве теоремы 1 §27 мы убедились в том, что фильтр H с заданной амплитудной характеристикой $|H(\omega)|$ всегда можно выбрать так, чтобы он был минимально-фазовым. Следовательно, нули функции $H(z)$ лежат вне круга $|z| \leq 0$, а нули $H\left(\frac{1}{z}\right)$ — внутри этого круга.

Представляя $L_0(z)$ в виде

$$L_0(z) = \frac{1}{H(z)} \cdot \frac{F\left(\frac{1}{z}\right)}{H\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad (\text{VII.51})$$

мы получили, что L_0 можно реализовать с помощью последовательности прямого и обращенного финитных рекурсивных фильтров. Оба эти фильтра устойчивы (в том смысле, что их норма конечна).

§ 32. Оптимальный разрешающий фильтр

Вернемся к задаче разрешения волн из § 19, но теперь предположим, что последовательность сигналов $\sum a_k f(t - \tau_k)$ регистрируется на фоне стационарной случайной помехи $\xi(t)$. Саму задачу разрешения будем понимать как максимальное выделение одного из сигналов на фоне всех остальных. Действительно, если в некоторый момент времени t амплитуда одного из сигналов большая, а амплитуда остальных сигналов и помехи мала, то этот сигнал наблюдается в «разрешенном» от прочих колебаний виде.

Итак, на вход фильтра подается входной сигнал, имеющий следующую структуру:

$$x(t) = af(t - t_0) + \sum_{(k)} a_k f(t - \tau_k) + \xi(t); \quad (\text{VII.52})$$

при этом составляющая $\sum_{(k)} a_k f(t - \tau_k) + \xi(t)$ образует суммарную помеху.

Введенный в § 30 оптимальный фильтр предназначен для подавления случайной помехи, поэтому, чтобы применить этот фильтр для задачи разрешения, необходимо обсудить возможность трактовки суммы

$$z(t) = \sum_{(k)} a_k f(t - \tau_k) \quad (\text{VII.53})$$

как случайного процесса. Предположим, что сумма (VII.53) представляет собой последовательность отраженных волн, образующихся в горизонтально слоистой среде. Если значения коэффициентов отражения и глубины до каждой из границ не подчиняются никаким детерминированным закономерностям, то их можно считать реализациями случайных величин. Тогда a_k и τ_k в (VII.53) — суть случайные величины и сам процесс $z(t)$ является случайным.

Более строго будем предполагать следующее. Пусть все случайные амплитуды a_k одинаково распределены, независимы между собой, имеют математическое ожидание, равное нулю (это означает, что и положительные и отрицательные значения равновозможны) и независимы от случайных величин τ_k . Дисперсию случайных амплитуд обозначим σ^2 . Если сигнал $f(t)$ нормирован так, что $\max |f(t)| = 1$, то σ выражает среднеквадратическое значение пиковой амплитуды последовательности импульсов в формуле (VII.53).

В соответствии с экспериментальными данными последовательность случайных величин τ_k образует пуассоновский поток. Это означает, что любые две разности $\tau_{k+1} - \tau_k$ и $\tau_{j+1} - \tau_j$ при $j \neq k$ независимы, а среднее значение $\tau_{k+1} - \tau_k$ не зависит от k . Обозначим это среднее значение через $1/\lambda$. Величина λ является параметром пуассоновского потока и выражает среднее число импульсов в единицу времени.

Найдем сначала корреляционную функцию процесса $z(t)$ при условии, что он задан на интервале $\left(t_0 - \frac{T}{2}, t_0 + \frac{T}{2}\right)$ и что на этом интервале имеется ровно n импульсов. Эта корреляционная функция [обозначим ее $K_z(t_1, t_2 | n, t_0, T)$] равна условному математическому ожиданию произведения $z(t_1) \cdot z(t_2)$ при фиксированном значении числа n импульсов на интервале $\left(t_0 - \frac{T}{2}, t_0 + \frac{T}{2}\right)$. Чтобы получить искомую безусловную корреляционную функцию, нужно будет вычислить математическое ожидание $K_z(t_1, t_2 | n, t_0, T)$ по распределению случайной величины n .

Полагая $t_1 = t + \tau$ и $t_2 = t$ и используя формулу (VII.53), получим

$$K_z(t + \tau, t | n, t_0, T) = M_n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k f(t + \tau - \tau_j) f(t - \tau_k).$$

Так как суммы содержат конечное число слагаемых, можно поменять знаки суммы и математического ожидания местами. Случайные величины a_j и a_k независимы друг от друга и от времен появления импульсов. А так как математические ожидания этих величин равны нулю, то все слагаемые при $j \neq k$ обратятся в нуль.

Следовательно,

$$K_z(t + \tau, t | n, t_0, T) = \sigma^2 \sum_{j=1}^n M_n f(t + \tau - \tau_j) f(t - \tau_j).$$

Все n моментов времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ в совокупности независимы и распределены равномерно с плотностью $1/T$ на интервале $\left(t_0 - \frac{T}{2}, t_0 + \frac{T}{2}\right)$. Поэтому

$$\begin{aligned} M_n f(t + \tau - \tau_j) f(t - \tau_j) &= \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t + \tau - \tau_j) f(t - \tau_j) d\tau_j = \\ &= \frac{1}{T} \int_{t - t_0 - \frac{T}{2}}^{t - t_0 + \frac{T}{2}} f(u + \tau) f(u) du. \end{aligned}$$

Отсюда

$$K_z(t + \tau, t | n, t_0, T) = \frac{n\sigma^2}{T} \int_{t - t_0 - \frac{T}{2}}^{t - t_0 + \frac{T}{2}} f(u + \tau) f(u) du.$$

Математическое ожидание числа импульсов на интервале, имеющем длину T , равно λT . Следовательно, безусловная корреляционная функция

$$K_z(t + \tau, t | t_0, T) = \lambda \sigma^2 \int_{t-t_0-\frac{T}{2}}^{t-t_0+\frac{T}{2}} f(u + \tau) f(u) du.$$

Пусть значение T намного больше длительности импульса $f(t)$: $T \gg T_0$. Тогда в интервале $(t_0 - \frac{T}{2} + T_0, t_0 + \frac{T}{2} - T_0)$, длина которого намного больше T_0 , корреляционная функция процесса $z(t)$ зависит только от τ :

$$K_z(t + \tau, t | t_0, T) = \lambda \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(u + \tau) f(u) du = \lambda \sigma^2 R(\tau),$$

где $R(\tau)$ — автокорреляция импульса $f(t)$. Если t и $t + \tau$ удовлетворяют условиям $t_0 + T_0 - \frac{T}{2} \leq t \leq t_0 - T_0 + \frac{T}{2}$ и $t_0 + T_0 - \frac{T}{2} \leq t + \tau \leq t_0 - T_0 + \frac{T}{2}$, то для корреляционной функции $K_z(t + \tau, t | t_0, T)$ будем использовать обычное обозначение $K_z(\tau)$.

Поскольку спектр функции $R(\tau)$ равен $|S(\omega)|^2$, можно считать, что при больших T процесс $z(t)$ имеет спектральную интенсивность

$$N_z(\omega) = \lambda \sigma^2 |S(\omega)|^2. \quad (\text{VII.54})$$

Теперь мы имеем все данные для определения спектральной характеристики оптимального разрешающего фильтра. Вследствие независимости процессов $z(t)$ и $\xi(t)$ энергетический спектр суммы $z(t) + \xi(t)$ равен сумме энергетических спектров $N_\xi(\omega)$ и $N_z(\omega)$ [см. формулу (VII.29)].

Согласно формуле (VII.35) спектральная характеристика оптимального фильтра равна отношению комплексно-сопряженного спектра выделяемого сигнала к энергетическому спектру помехи. Поэтому

$$L_r(\omega) = \frac{S^*(\omega)}{\lambda \sigma^2 |S(\omega)|^2 + N_\xi(\omega)}. \quad (\text{VII.55})$$

Как и следовало ожидать, спектральная характеристика оптимального разрешающего фильтра не зависит от того, какой именно из сигналов последовательности $\sum a_k f(t - \tau_k)$ рассматривается как выделяемый. Поэтому фильтр (VII.55) является разрешающим для всей этой последовательности.

Оптимальный разрешающий фильтр тесно связан с обратными фильтрами.

Пусть в некотором интервале частот (ω_1, ω_2) интенсивность помехи намного меньше интенсивности потока сигналов:

$$N_\xi(\omega) \ll \lambda \sigma^2 |S(\omega)|^2, \quad \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2. \quad (\text{VII.56})$$

Тогда в этом интервале

$$L_r(\omega) \simeq \frac{1}{\lambda \sigma^2 S(\omega)}$$

Иными словами, в тех интервалах частот, в которых интенсивностью помехи можно пренебречь, оптимальный разрешающий фильтр действует как обратный. Если же, наоборот, в интервале (ω_1, ω_2) помеха более интенсивна $[N_\xi(\omega) \gg \lambda \sigma^2 |S(\omega)|^2]$, то спектральная характеристика фильтра L_r совпадает при $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ со спектральной характеристикой обычного оптимального фильтра (VII.35). Это означает, что при большом фоне помех задача разделения импульсов не может быть решена. Единственный разумный выход — увеличить амплитуду всей сигнальной составляющей $\sum a_{kf}(t - \tau_k)$ по сравнению с помехой $\xi(t)$.

На рис. 25 изображена «типичная» форма амплитудной характеристики фильтра $L_r(\omega)$.

Пусть помеха является «белым шумом»: $N_\xi(\omega) = N_0$. Тогда

$$L_r(\omega) = \frac{1}{\lambda \sigma^2} \cdot \frac{S^*(\omega)}{[|S(\omega)|^2 + \alpha]}, \quad (\text{VII.57})$$

где $\alpha = N_0/\lambda \sigma^2$. Сравним полученную формулу с формулой (VI.48). Так как в задаче разрешения волн $L(\omega) = S(\omega)$, то обе формулы с точностью до постоянного множителя определяют один и тот же фильтр.

Таким образом, регуляризация обратного фильтра по методу Тихонова оказывается эквивалентной разрешению сигналов по методу оптимальной фильтрации при наличии помехи типа «белый шум». Эта эквивалентность, конечно, не случайна, так как всякая неустойчивость в конечном итоге обусловлена наличием помех, поэтому она может быть устранена соответствующим изменением постановки задачи и включением в задачу подавления помех. Тот факт, что регуляризация по методу Тихонова оптимальна по отношению к помехе типа белый шум, означает «беспристрастный» подход к свойствам помехи: если нет никаких сведений о распределении энергии помехи по частотам, то разумно принять это распределение равномерным.

Полученная эквивалентность оптимального разрешающего фильтра и регуляризованного обратного фильтра позволяет обобщить формулу (VI.48) на случай помех с произвольным энергетическим спектром:

$$G(\omega) = \frac{L^*(\omega)}{|L(\omega)|^2 + \alpha N_\xi(\omega)} \quad (\text{VII.58})$$

§ 33. Об оценке формы сигнала в задаче разрешения сейсмических волн

При использовании обратных или оптимальных фильтров, направленных на разрешение сейсмических сигналов, отраженных от совокупности горизонтальных отражающих границ, возникает задача определения

формы $f(t)$ излучаемого в среду импульса. Дело в том, что наличие границ вблизи источника осложняет падающую волну, вследствие чего ее не удастся наблюдать в «чистом» виде. Дополнительным осложнением является слабое изменение свойств сигнала из-за поглощения. Поэтому форму сигнала приходится изучать непосредственно по интерференционным записям сейсмических волн на ограниченных интервалах времени.

Возможность такого изучения открывается формулой (VII.54), согласно которой энергетический спектр $N_z(\omega)$ случайной последовательности (VII.53) совпадает (с точностью до постоянного множителя) с квадратом амплитудного спектра сигнала $f(t)$. Во временной области этот факт означает, что корреляционная функция $K_z(\tau)$ совпадает (опять-таки с точностью до множителя) с автокорреляцией сигнала $R(\tau)$.

Для построения среднеквадратического обратного фильтра Райса, определяемого формулами (VI.34) и (VI.35), достаточно задать амплитудный спектр сигнала. Хотя для других обратных фильтров, а также для оптимальной фильтрации требуется более полная информация о спектре полезного сигнала, значение амплитудного спектра оказывается чрезвычайно важным, так как, во-первых, фазовая характеристика может быть получена на основе гипотезы минимальной фазовости сигнала $f(t)$, а во-вторых, приближенное задание фазовой характеристики может оказаться практически достаточным, поскольку операторы обратной и оптимальной фильтрации вообще реализуются только приближенно.

Для выполнения гипотезы минимально-фазового сигнала $f(t)$ необходимо и достаточно потребовать, чтобы воздействие, источник, среда и сейсмический канал (включая систему приемник — почва) имели минимально-фазовые спектральные характеристики. Минимальная фазовость сферического источника вытекает из формулы (I.45), согласно которой спектральная характеристика имеет единственный нуль при $\omega = 0$. В соответствии с результатами § 7 допущение о конечности максимальной скорости распространения волн влечет и минимальную фазовость среды, если последнюю рассматривать как линейную систему. Что касается воздействия и приемной системы, то здесь мы имеем дело с факторами, до некоторой степени контролируруемыми экспериментатором. Эти рассуждения показывают, в какой мере гипотеза минимальной фазовости является обоснованной.

Остановимся на двух задачах:

1) практические оценки амплитудного спектра на основе формулы (VII.54);

2) построение комплексного спектра $S(\omega)$ или фазовой характеристики $\varphi(\omega)$ минимально-фазового сигнала по амплитудному спектру.

Погрешности, возникающие от замены реального полуфинитного сигнала минимально-фазовым, уже рассматривались нами в § 27.

Согласно формуле (VII.54) оценка амплитудного спектра $|S(\omega)|$ может быть получена с помощью оценки спектральной интенсивности процесса $z(t)$. Процесс $z(t)$ наблюдается в сумме с помехой $\xi(t)$, поэтому оценка $N_z(\omega)$ возможна в следующих ситуациях.

I. Помеха $\xi(t)$ мала и ею можно пренебречь, так что $N_x(\omega) \simeq N_z(\omega)$, где $N_x(\omega)$ — энергетический спектр наблюдаемого процесса $x(t)$.

II. Корреляционная функция (или энергетический спектр) помехи $\xi(t)$ известны, тогда $N_z(\omega) = N_x(\omega) - N_\xi(\omega)$.

III. Существуют трассы $x_1(t)$ и $x_2(t)$, которые содержат одну и ту же сигнальную часть $z(t)$ и независимые помехи $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ соответственно. В этом случае взаимный энергетический спектр процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ равен $N_z(\omega)$.

В ситуациях I и II задача сводится к оценке энергетического спектра наблюдаемого процесса $x(t)$, в ситуации III — к оценке взаимного энергетического спектра двух трасс $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Выгодность ситуации III заключается в том, что не требуется никаких допущений о помехах (кроме независимости). Можно считать, что эта ситуация возникает, когда роль регулярных помех мала. Разность времен прихода полезных сигналов на разные трассы устраняется введением кинематических поправок.

Существует большое число работ, посвященных проблеме оценки корреляционных функций и спектральных интенсивностей по наблюдаемым траекториям случайного процесса. Наша задача заключается в том, чтобы в какой-то мере отразить ее современное состояние.

Физически возможность оценки параметров стационарного случайного процесса по единственной траектории состоит в том, что вследствие убывания связей между значениями $x(t)$ и $x(t + \tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ и постоянства свойств длительная запись траектории эквивалентна большому числу независимых наблюдений этого процесса.

Если выполнено условие эргодичности (VII.13), то на основе формулы (VII.13') можно построить следующую численную оценку:

$$\hat{B}_x(n) = \hat{K}(n \Delta t) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=1}^{N-n} x_{k+n} x_k, \quad (\text{VII.59})$$

где N — число наблюдаемых значений процесса $x(t)$.

Эта оценка не смещена, т. е. ее математическое ожидание совпадает с $K_x(n \Delta t)$. Выражение для дисперсии оценки зависит от закона распределения случайного вектора (x_1, x_2, \dots, x_n) . Строго говоря, распределение процесса $z(t)$ отличается от гауссовского.

Отличие особенно значительно при малых значениях интенсивности потока событий τ_k . Если же интенсивность велика так, что каждый импульс $a_k f(t - \tau_k)$ интерферирует с большим числом других импульсов, распределение можно считать практически нормальным и тогда

$$\mathbf{D} \hat{B}_x(n) = \frac{2}{N-n} \sum_{k=0}^{N-n} \left(1 - \frac{k}{N-n}\right) [B_x^2(k) + B_x(k+n) B_x(k-n)].$$

При увеличении n от 0 до N дисперсия $\hat{B}_x(n)$ сначала немного уменьшается, а затем растет. Особенно быстро растет на всем интервале $(0, N)$ относительная величина $v = \sqrt{\mathbf{D} \hat{B}_x(n)} / B_x(n)$. Расчеты для корреляционных функций типа (VII.7) показывают, что для того чтобы получить $v \approx 0,1$ при $n \Delta t \sim 1/\alpha$ (где $1/\alpha$ — интервал корреляции процесса), нужно брать $N \Delta t > 100/\alpha$. Для процессов типа (VII.53) интервал корреляции

примерно равен длительности T_0 элементарного сигнала $f(t)$, что для среднечастотной сейсморазведки составляет величину порядка 0,06 с. Таким образом, удовлетворительную точность можно получить только в том случае, когда анализируются трассы длиной 6 с и более. Но на таких интервалах времени стационарность процесса $z(t)$ заведомо не выполняется.

Дисперсия оценки $K_z(\tau)$ по взаимной корреляции процессов $x_1(t) = z(t) + \xi_1(t)$ и $x_2(t) = z(t) + \xi_2(t)$ равна

$$D\hat{B}_z(n) = \frac{2}{N-n} \sum_{k=0}^{N-n} \left(1 - \frac{k}{N-n}\right) [B_x^2(k) + B_z(k+n)B_z(k-n)].$$

Хотя $D\hat{B}_z(n) < D\hat{B}_x(n)$, так как $B_x(n) = B_z(n) + B_\xi(n)$, из формулы видно, что для построения хорошей оценки $\hat{B}_z(n)$ необходимо иметь практически такие же интервалы наблюдения.

Классическая оценка энергетического спектра определяется формулой

$$\hat{N}_x(\omega) = \frac{1}{N} \left| \sum_{k=1}^N x_k \exp(-i\omega k \Delta t) \right|^2.$$

Раскрывая модуль и учитывая формулу (VII.59), получим

$$\hat{N}_x(\omega) = \sum_{n=-N+1}^{n=N-1} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \hat{B}_x(n) \exp(-i\omega n \Delta t). \quad (\text{VII.60})$$

Интересно отметить, что данная оценка энергетического спектра не совпадает с дискретным преобразованием Фурье оценки корреляционной функции (VII.59). Оценка (VII.60) асимптотически (при $N \rightarrow \infty$) не смещена. Для гауссовских процессов ее дисперсия стремится при $N \rightarrow \infty$ к $B_x^2(0)$, т. е. с увеличением длины реализации процесса $x(t)$ среднеквадратический разброс значений $\hat{N}_x(\omega)$ стремится к постоянной величине, равной мощности анализируемого процесса. В математической статистике такие оценки называются несостоятельными. Известно, что оценки интегралов от $\hat{N}_x(\omega)$ являются состоятельными, поэтому для улучшения оценки $\hat{N}_x(\omega)$ ее следует отфильтровать с некоторой весовой функцией $w(\omega)$:

$$\tilde{N}_x(\omega) = \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} w_N(\omega - \lambda) \hat{N}_x(\lambda) d\lambda.$$

Как было показано в § 11, это эквивалентно введению в формулу (VII.60) весовых множителей $w_n^{(N)}$, образующих так называемую «функцию окна»:

$$\tilde{N}_x(\omega) = \sum_{n=-N+1}^{n=N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) w_n^{(N)} \cdot \hat{B}_x(n) \exp(-i\omega n \Delta t). \quad (\text{VII.61})$$

Оценки такого типа оказываются смещенными, однако удается подобрать такую последовательность коэффициентов w_n^N , что при $N \rightarrow \infty$

$$M |\tilde{N}_x(\omega) - N_x(\omega)|^2 \rightarrow 0.$$

На практике получили применение модифицированная оценка Бартлетта

$$\tilde{N}_x(\omega) = \sum_{n=-m_N}^{m_N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \left(1 - \frac{|n|}{m_N}\right) \hat{B}_x(n) \exp(-i\omega n \Delta t)$$

и оценка Хемминга

$$\tilde{N}_x(\omega) = \sum_{n=-m_N}^{m_N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \left(0,54 + 0,46 \frac{\cos \pi n}{m_N}\right) \hat{B}_x(n) \exp(-i\omega n \Delta t),$$

где $m_N \sim N^{1/(1+2q)}$ при $B_x(n) \sim c/n^{q+\alpha}$ ($n \rightarrow \infty$, $\alpha > 1$). Выбор m_N может осуществляться по следующим соображениям: спектры $N_x(\omega)$ получаются из $\hat{N}_x(\omega)$ сглаживанием на интервале, примерно равном $\Delta\omega = 2\pi/m_N \Delta t$. Поэтому если на энергетическом спектре нужно разделить точки ω' и ω'' с расстоянием $|\omega' - \omega''| \geq \Delta\omega_*$, то значение m_N определяется условием

$$m_N \geq \frac{2\pi}{\Delta t \Delta\omega_*}.$$

Условие для N вытекает из следующей асимптотической формулы для дисперсии оценки $\tilde{N}_x(\omega)$:

$$\frac{D\tilde{N}_x(\omega)}{|N_x(\omega)|^2} \sim \frac{m_N}{N} \kappa, \quad N \rightarrow \infty,$$

где $\kappa = 2/3$ для оценки Бартлетта и $3/4$ — для оценки Хемминга. Требуя одновременно и высокую разрешающую способность и малую дисперсию, приходим к выводу о необходимости использовать большие значения N .

Приведенные выше факты показывают, что для построения удовлетворительных оценок $K_z(\tau)$ и $N_z(\omega)$ по одиночным реализациям (или парам реализаций) наблюдаемого процесса $x(t)$ необходимо иметь интервалы наблюдения, удовлетворяющие двум противоречивым требованиям: 1) длина интервала должна во много (около 100) раз превосходить длительность элементарного сигнала; 2) процесс $z(t)$ на всем интервале должен быть стационарным. Таким требованиям одновременно удовлетворять никогда не удается¹.

Имеются следующие возможности улучшения оценок $K_z(\tau)$ и $N_z(\omega)$.

Использование большого числа трасс $x_k(t)$. Оценки для $K_z(\tau)$ и $N_z(\omega)$ определяются как среднеарифметические

¹ Из этого, между прочим, следует, что попытки применять обратные фильтры (в сочетании с полосовыми) с целью приведения сигналов к стандартной форме являются недостаточно обоснованными.

оценок, полученных на каждой трассе $x_k(t)$. Следует иметь в виду, что трассы $x_k(t)$ должны быть независимы как по мешающей, так и по сигнальной составляющей. Если в совокупности трасс $x_k(t)$ сигнальная составляющая одинакова, то самое большее, что можно добиться, — это просуммировать трассы для подавления помехи. С точки зрения оценки $K_z(\tau)$ и $N_z(\omega)$ такая совокупность трасс дает не больше, чем одна трасса $z(t) + (1/n) \sum \xi_k(t)$.

Использование схем с конечным числом параметров. В этом случае процесс $x(t)$ параметризуется набором параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, к оценке которых и сводится анализ наблюдаемых реализаций процесса.

Среди множества методов параметризации процесса $x(t)$ отметим следующие.

1. Представление сигнала $f(t)$ импульсом стандартного типа, скажем, затухающей синусоидой, импульсом Берлаге либо линейной комбинацией таких импульсов. Если, к примеру, $f(t)$ является затухающей синусоидой (II.25), то задача сводится к оценке параметров ω_1 и α . Для этого оценка $\hat{N}_x(\omega)$ может быть аппроксимирована соответствующим выражением $A \cdot |S(\omega)|^2$ по методу наименьших квадратов.

2. Представление случайной последовательности $\{x_k\}$ конечно-разностным уравнением

$$x_k + \alpha_1 x_{k-1} + \dots + \alpha_m x_{k-m} = \beta_0 \xi_k + \beta_1 \xi_{k-1} + \dots + \beta_s \xi_{k-s}, \quad (\text{VII.62})$$

где последовательность $\{\xi_k\}$ является белым шумом. Процесс $\{x_k\}$ можно рассматривать как выход рекурсивного фильтра с z -характеристикой

$$L(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_s z^s}{1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_m z^m} = \frac{P_s(z)}{P_m(z)}, \quad (\text{VII.63})$$

на входе которого действует последовательность $\{\xi_k\}$.

Переходя от $N_x(\omega)$ к $B_x(z)$, получим в соответствии с формулой (VII.47)

$$B_x(z) = \sigma_x^2 L(z) L(1/z).$$

Отсюда видно, что по автокорреляции (или энергетическому спектру) коэффициенты полиномов $P_s(z)$ и $P_m(z)$ однозначно не определяются. Для однозначного их определения нужны дополнительные условия, в частности условие устойчивости фильтра L , согласно которому корни $P_m(z)$ лежат вне круга $|z| \leq 1$, и условие минимальной фазовости, согласно которому этим же свойством обладают корни полинома $P_s(z)$.

Рассмотрим более подробно модель авторегрессии ($s = 0, m < \infty$):

$$x_k + \alpha_1 x_{k-1} + \dots + \alpha_m x_{k-m} = \xi_k. \quad (\text{VII.64})$$

Метод наименьших квадратов дает следующую систему уравнений для оценки параметров α_j :

$$\sum_{k=1}^m \hat{\alpha}_k \hat{B}_x(j-k) = -\hat{B}(j), \quad j = 1, \dots, m. \quad (\text{VII.65})$$

Теперь оценка для $N_x(\omega)$ определится следующим образом:

$$N_x(\omega) = 1/[1 + \hat{\alpha}_1 \exp(-i\omega \Delta t) + \dots + \hat{\alpha}_m \exp(-i\omega m \Delta t)]^2,$$

однако при $x(t) \cong z(t)$ строить эту оценку не надо, так как выражение

$$1/(1 + \hat{\alpha}_1 z + \hat{\alpha}_2 z^2 + \dots + \hat{\alpha}_m z^m) \quad (\text{VII.66})$$

непосредственно определяет оценку для z -преобразования сигнала $\{f(k \Delta t)\}$.

Использование авторегрессионной системы (VII.62) при небольшом m полезно и в том случае, когда она является только приближенной. Дело в том, что, заменяя исходный процесс $\{x_k\}$ процессом

$$y_k = \sum_{j=0}^m a_j x_{k-j},$$

мы перейдем к задаче оценки более гладкого спектра $N_x(\omega)/|L(\omega)|^2$, которая решается более удовлетворительно.

Перейдем к задаче построения минимально-фазового сигнала по амплитудному спектру $|S(\omega)| = A(\omega)$. Фазовая характеристика сигнала может быть получена непосредственно интегрированием по формуле (II.21). После этого сигнал $f(t)$ определяется обратным преобразованием Фурье. Недостатком этого метода является невысокая точность интегрирования в связи с особенностью подынтегральной функции при $\omega = \omega_1$. Вычисление интеграла (II.21), определяемого в смысле главного значения, требует применения специальных численных схем.

Другой метод основан на разложении $\ln|S(\omega)|$ в ряд по косинусам на интервале $(-\pi/\Delta t, \pi/\Delta t)$:

$$\ln|S(\omega)| = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\omega \Delta t). \quad (\text{VII.67})$$

Так как z -преобразование $F(z)$ минимально-фазового сигнала не имеет нулей и полюсов при $|z| \leq 1$, то функция $\ln F(z)$ может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности $z = 0$, который сходится при $|z| < 1$:

$$\ln F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k. \quad (\text{VII.67}')$$

Из вещественности коэффициентов ряда $F(z)$ следует, что коэффициенты γ_k также вещественны.

На окружности $z = \exp(-i\omega \Delta t)$ ($-\infty \leq \omega \leq \infty$) ряд (VII.67) может быть записан, как

$$\ln F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \cos k\omega \Delta t + i \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k \sin k\omega \Delta t. \quad (\text{VII.68})$$

Но при $z = \exp(-i\omega \Delta t)$ $F(z) = S(\omega)$, отсюда

$$\ln F(z) = \ln|S(\omega)| + iy(\omega); \quad z = \exp(-i\omega \Delta t), \quad -\infty \leq \omega \leq \infty.$$

Сопоставив (VII.68) и (VII.67) и учтя вещественность коэффициентов γ_k , делаем заключение, что при всех $k = 0, 1, \dots, \infty$ $\gamma_k = a_k$. Но коэффициенты γ_k легко связать с отсчетами сигнала f_k на основании тождества:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \equiv \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k \right).$$

Дифференцируя k раз по z , находим:
при $k=0$ $f_0 = \exp(\gamma_0)$; при $k > 1$ $k f_k = (\gamma_1 f_{k-1} + 2\gamma_2 f_{k-2} + \dots + k\gamma_k f_0)$.

Если исходной информацией является автокорреляция $B_x(n)$, то сигнал $f(t)$ может быть найден на основе либо формулы (VI.40'), либо формул (VII.65) и (VII.66).

Г л а в а VIII

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФИЛЬТРЫ ВИНЕРА

§ 34. Определение фильтров Винера

В оптимальных фильтрах, рассматривавшихся в предыдущей главе, форма сигнала предполагается точно известной. Однако на практике это часто не выполняется, поэтому желательно искать более адекватные предположения о полезном сигнале. В этом отношении имеются следующие возможности: 1) считать, что сигнал известен с точностью до некоторых параметров: $f = f(t; \alpha)$; 2) строить адаптирующиеся фильтры, настраивающиеся на поступающий сигнал; 3) отказаться от предположения о детерминированности сигнала.

В последнем случае, на котором мы и остановимся, неизвестный полезный сигнал $f(t)$ является отрезком реализации стационарного случайного процесса $u(t)$, средние характеристики которого известны. Таким образом считается, что сигнал $f(t)$ представляет собой результат случайного выбора из некоторого статистического ансамбля сигналов, образующих случайный процесс $u(t)$, независимый от $\xi(t)$. Корреляционную функцию $K_u(\tau)$ и энергетический спектр $u(\omega)$ процесса $u(t)$ будем предполагать известными. Энергетический спектр помехи $\xi(t)$ по-прежнему обозначается $N_{\xi}(\omega)$.

Изменение представления о сигнале влечет за собой изменение критерия оптимальности фильтра. Действительно, прежний критерий оптимальности не может быть применен, так как значение сигнала на выходе линейного фильтра L в любой фиксированный момент времени t_0 является случайным и его среднее значение равно нулю. Теперь оптимальность фильтра будем понимать в среднеквадратическом смысле.

Рассмотрим следующую постановку задачи. Пусть на входе фильтра L действует случайный процесс

$$x(t) = u(t) + \xi(t). \quad (\text{VIII.1})$$

Предположим, что на выходе фильтра L нужно получить не сам сигнал $u(t)$, а некоторое заданное его линейное преобразование

$$w(t) = K[u(t)].$$

Из-за наличия помехи прямое применение фильтра K может не дать желаемого результата, так как помеха $K[\xi(t)]$ на выходе фильтра K может оказаться очень большой. В качестве примера укажем задачу дифференцирования сигнала, осложненного высокочастотной помехой. Ясно, что непосредственное дифференцирование здесь вообще бессмысленно: наблюдаемый сигнал надо, по крайней мере предварительно, сгладить. Поэтому применим к $x(t)$ некоторый другой оператор H и потребуем, чтобы ошибка $y(t) - w(t)$ была мала в смысле среднего квадрата отклонения $y(t)$ от $w(t)$.

Итак, мы ищем фильтр H , удовлетворяющий условию

$$\mathbf{M} \int_{y(t)} |H[x(t)] - w(t)|^2 = \min_{(L)} \mathbf{M} \int_{y(t)} |L[x(t)] - w(t)|^2. \quad (\text{VIII.2})$$

Если в частном случае $w(t) = u(t)$ (оператор K при этом является единичным), то фильтр, удовлетворяющий условию (VIII.2), наилучшим образом (в среднеквадратическом смысле) выделяет сигнал $u(t)$ на фоне помехи $\xi(t)$.

Вследствие стационарности всех рассматриваемых процессов выражение под знаком минимума в условии (VIII.2) не зависит от времени t . Для того чтобы дальнейший вывод был более простым, предположим, что наблюдаемые процессы могут быть комплекснозначными. Это несколько не уменьшит общности рассуждений.

Выражение под знаком минимума теперь можно переписать:

$$\begin{aligned} \zeta_{\bar{L}}^2 = \mathbf{M} |y(t) - w(t)| |y(t) - w(t)|^* &= \mathbf{M} |y(t)|^2 - [\mathbf{M} y(t) w^*(t) + \mathbf{M} y^*(t) w(t)] + \\ &+ \mathbf{M} |w(t)|^2. \end{aligned} \quad (\text{VIII.3})$$

Последнее слагаемое выражает мощность (дисперсию) процесса $w(t) = K[u(t)]$. В соответствии с формулой (VII.12) эта величина может быть выражена как интеграл от энергетического спектра процесса $w(t)$. А поскольку энергетический спектр процесса $w(t)$ равен $|K(\omega)|^2 U(\omega)$, то

$$\mathbf{M} |w(t)|^2 = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} |K(\omega)|^2 U(\omega) d\omega. \quad (\text{VIII.4})$$

Вследствие независимости процессов $u(t)$ и $\xi(t)$ энергетический спектр процесса $y(t) = L[u(t)] + L[\xi(t)]$ равен $|L(\omega)|^2 [U(\omega) + N_{\xi}(\omega)]$. Отсюда найдем первое слагаемое в (VIII.3)

$$\mathbf{M} |y(t)|^2 = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 [U(\omega) + N_{\xi}(\omega)] d\omega. \quad (\text{VIII.5})$$

Раскрывая $y(t)$, получим

$$\mathbf{M}y(t)w^*(t) = \mathbf{M}L[u(t)]\{K[u(t)]\}^* + \mathbf{M}L[\xi(t)]\{K[u(t)]\}^*.$$

Из независимости процессов $u(t)$ и $\xi(t)$, имеющих равное нулю среднее значение, следует, что второе слагаемое равно нулю. Первое слагаемое равно значению функции взаимной корреляции процессов $v(t) = L[u(t)]$ и $w(t)$ при $\tau = 0$.

Аналогично (VII.25) можно показать, что взаимный энергетический спектр $N_{vw}(\omega)$ равен $L(\omega)K^*(\omega)U(\omega)$, поэтому

$$\mathbf{M}y(t)w^*(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega)K^*(\omega)U(\omega)d\omega. \quad (\text{VIII.6})$$

Аналогично

$$\mathbf{M}w(t)y^*(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega)L^*(\omega)U(\omega)d\omega. \quad (\text{VIII.7})$$

Подставляя формулы (VIII.4)—(VIII.7) в (VIII.3), найдем выражение среднего квадрата ошибки на выходе фильтра L через энергетические спектры:

$$\begin{aligned} \varepsilon_L^2 = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \{ |L(\omega)|^2 [U(\omega) + N_\xi(\omega)] - 2 \operatorname{Re} [K(\omega)L^*(\omega)] U(\omega) + \\ + |K(\omega)|^2 U(\omega) \} d\omega. \end{aligned} \quad (\text{VIII.8})$$

Выражение под знаком интеграла представляет собой энергетический спектр процесса $y(t) - w(t)$, поэтому оно неотрицательно.

Ясно, что ε_L^2 примет минимальное значение, когда при каждом значении ω величина

$$|L(\omega)|^2 [U(\omega) + N_\xi(\omega)] - 2 \operatorname{Re} [K(\omega)L^*(\omega)] U(\omega) + |K(\omega)|^2 U(\omega) \quad (\text{VIII.9})$$

будет минимальной.

Для удобства обозначим (при фиксированном значении ω): $L(\omega) = x + iy$, $U(\omega) + N_\xi(\omega) = a > 0$, $U(\omega) = b$, $K(\omega) = c + id$.

Тогда величина (VIII.9) перепишется следующим образом:

$$a(x^2 + y^2) - (cx + dy)b + b(c^2 + d^2). \quad (\text{VIII.10})$$

Чтобы найти минимум этого выражения, продифференцируем его по x и по y и приравняем производную нулю:

$$ax - cb = 0, \quad ay - db = 0;$$

отсюда получим $x = cb/a$ и $y = db/a$ или, возвращаясь к прежним обозначениям,

$$H(\omega) = U(\omega)K(\omega)/[U(\omega) + N_\xi(\omega)]. \quad (\text{VIII.11})$$

То, что данное решение дает именно минимум, доказывается положительной определенностью матрицы вторых производных от квадратичной формы (VIII.10), равной

$$2 \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a > 0.$$

Фильтр H можно представить как последовательность двух фильтров — L_s и K , где

$$L_s(\omega) = U(\omega) / [U(\omega) + N_\xi(\omega)]. \quad (\text{VIII.12})$$

Фильтр L_s , очевидно, минимизирует средний квадрат отклонения выходного сигнала от $u(t)$. Таким образом, искомый фильтр H содержит как процедуру сглаживания (подавления помехи), реализуемую оператором L_s , так и линейное преобразование K . Это не значит, однако, что фильтр H действительно можно реализовать путем последовательного применения фильтров L_s и K . Пусть, к примеру, линейное преобразование, которому надо подвергнуть сигнал $u(t)$, состоит в дифференцировании последнего. Оператор дифференцирования, имеющий спектральную характеристику $i\omega$, неограничен при $\omega \rightarrow \infty$, поэтому неустойчив. Ясно, что последовательное применение сглаживающего фильтра L_s и оператора дифференцирования также дает неустойчивую процедуру. В то же время для того, чтобы фильтр H в данном случае был устойчивым, достаточно выполнить следующее условие:

$$L_s(\omega) \sim c/\omega^\alpha, \quad (\alpha > 2, \omega \rightarrow \infty). \quad (\text{VIII.13})$$

В противном случае для устранения неустойчивости необходимо изменить постановку задачи.

Полагая в (VIII.8) $L(\omega) = H(\omega)$, найдем выражение для среднего квадрата на выходе фильтра H :

$$\varepsilon_H^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U^2(\omega) |K(\omega)|^2}{U(\omega) + N_\xi(\omega)} d\omega. \quad (\text{VIII.14})$$

Если в этой формуле принять $K(\omega) \equiv 1$, то она даст средний квадрат ошибки при выделении сигнала $u(t)$ с помощью фильтра L_s :

$$\varepsilon_{L_s}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\omega) N_\xi(\omega) d\omega}{U(\omega) + N_\xi(\omega)}. \quad (\text{VIII.15})$$

Фильтры L_s и H называют фильтрами Винера по имени изучавшего их видного американского математика и кибернетика¹. В отличие от оптимальных фильтров фильтры Винера имеют вполне определенное значение усиления (оптимальные фильтры определялись с точностью до произвольного множителя). Второе отличие винеровских фильтров заключается

¹ Приоритет в постановке таких задач принадлежит советскому математику академику А. Н. Колмогорову.

в следующем. Примем $U(\omega) = \sigma_u^2 \tilde{U}(\omega)$ и $N_\xi(\omega) = \sigma_\xi^2 \tilde{N}_\xi(\omega)$, где функции $U(\omega)$ и $\tilde{N}_\xi(\omega)$ имеют смысл нормированных энергетических спектров. Тогда по формуле (VIII.1)

$$H(\omega) = \frac{\tilde{U}(\omega) K(\omega)}{\tilde{U}(\omega) + (\sigma_u^2 / \sigma_\xi^2) \tilde{N}_\xi(\omega)}$$

Таким образом, спектральная характеристика винеровского фильтра зависит от отношения сигнал/помеха на входе фильтра. При $\sigma_u^2 / \sigma_\xi^2 \rightarrow \infty$, как и следовало ожидать, спектральная характеристика стремится к $K(\omega)$. В случае $\sigma_u^2 / \sigma_\xi^2 \cong 0$ спектральная характеристика сглаживающего фильтра равна приблизительно $\sigma_u^2 \tilde{U}(\omega) / \sigma_\xi^2 \tilde{N}_\xi(\omega)$ и напоминает по форме оптимальный фильтр. При $\sigma_u^2 / \sigma_\xi^2 = 0$ фильтр вообще не пропускает колебаний.

§ 35. Обратные фильтры винеровского типа

При решении задач обратной фильтрации мы столкнулись с их некоррекностью, заключающейся в неустойчивости обратных операторов по отношению к искажениям регистрируемого сигнала и погрешностям в задании формы анализируемых импульсов. Этой некорректности можно избежать, если отказаться от поиска точного решения задачи обратной фильтрации, заменив его некоторым устойчиво вычисленным приближением. Было выяснено, что методы регуляризации приближенного решения задачи обратной фильтрации, имеющие своей целью увеличение устойчивости численных процедур по отношению к ошибкам в задании регистрируемых сигналов, эквивалентны методу оптимальной фильтрации.

Дальнейшее уточнение задачи обратной фильтрации можно получить, если попытаться более полно учесть свойства сигналов, действующих на входе и получаемых на выходе обратного фильтра. Если считать, что эти сигналы являются результатом случайного выбора из некоторого ансамбля сигналов, то они оказываются реализациями некоторого случайного процесса, статистические свойства которого выражают характеристику данного ансамбля «в среднем». Таким образом мы приходим к идее использования винеровских фильтров для решения задач обратной фильтрации.

Рассмотрим следующую постановку. Пусть

$$x(t) = L[u(t)] + \xi(t), \quad (\text{VIII.16})$$

где $u(t)$ и $\xi(t)$ — стационарные независимые друг от друга процессы. Эту запись будем трактовать следующим образом: полезный сигнал $u(t)$ претерпел преобразование L ; при этом реакция на выходе фильтра L измеряется с погрешностью $\xi(t)$. Необходимо применить к $x(t)$ такой линейный оператор G_s , который позволит наилучшим (в среднеквадратическом смысле) образом восстановить сигнал $u(t)$.

Как видно, эта задача является частным случаем постановки, рассмотренной в конце предыдущего параграфа, при $K = L^{-1}$, так как из сигнала $L[u(t)]$ нужно получить сигнал $u(t)$.

Энергетический спектр сигнальной составляющей (VIII.16) равен $|L(\omega)|^2 U(\omega)$, а желаемое линейное преобразование сигнала — суть $K(\omega) = 1/L(\omega)$, поэтому, заменяя в (VIII.11) $\bar{U}(\omega)$ на $|L(\omega)|^2 U(\omega)$ и $K(\omega)$ на $1/L(\omega)$, получим:

$$G_s = \frac{U(\omega) L^*(\omega)}{|L(\omega)|^2 U(\omega) + N_\xi(\omega)}. \quad (\text{VIII.17})$$

Если помехи нет, то $G_s(\omega) = 1/L(\omega)$ (т. е. «чистый» обратный фильтр). Если же, напротив, помеха очень велика, то

$$G_s \simeq [U(\omega)/N(\omega)] L^*(\omega) \approx L_s(\omega) L^*(\omega). \quad (\text{VIII.18})$$

Фильтр (VIII.18) состоит из оптимального среднеквадратического фильтра L_s и оператора взаимной корреляции процесса на выходе фильтра с импульсной характеристикой фильтра L .

Сравним фильтр (VIII.17) с двухсторонним обратным фильтром, полученным методом регуляризации. Для сопоставления с формулой (VI.48) перепишем формулу (VIII.17) следующим образом:

$$G_s(\omega) = \frac{L^*(\omega)}{|L(\omega)|^2 + N_\xi(\omega)/U(\omega)}. \quad (\text{VIII.17}')$$

Видно, что фильтр, получаемый методом регуляризации, является частным случаем винеровского обратного фильтра при $N_\xi(\omega) = \alpha U(\omega)$, т. е. при одинаковых частотных свойствах сигнала и помехи. Поскольку выделение сигнала на фоне помехи тем хуже, чем ближе его спектр к спектру помехи, то можно утверждать, что метод регуляризации дает винеровский обратный фильтр для наименее благоприятной ситуации. Этот подход разумен, когда об $N(\omega)$ и $U(\omega)$ отсутствует какая-либо априорная информация.

Если задачу переформулировать, включив в $x(t)$ помеху на входе оператора L

$$x(t) = L[u(t) + \xi_1(t)] + \xi_2(t),$$

то ее можно привести к первоначальной постановке, приняв

$$\xi(t) = L[\xi_1(t)] + \xi_2(t).$$

Тогда

$$N_\xi(\omega) = |L(\omega)|^2 N_1(\omega) + N_2(\omega),$$

где $N_j(\omega)$ — энергетический спектр помехи $\xi_j(t)$.

Винеровский обратный фильтр определится формулой

$$G_s(\omega) = \frac{U(\omega) L^*(\omega)}{|L(\omega)|^2 [U(\omega) + N_1(\omega)] + N_2(\omega)}. \quad (\text{VIII.19})$$

Характеристики винеровских обратных фильтров, как мы видим, зависят не только от прямого оператора L , но и от статистических свойств сигнала и помехи. Введение этой дополнительной информации позволяет повысить надежность результатов обратной фильтрации.

Применим полученные фильтры к задаче дифференцирования сигнала, осложненного помехой. Напомним, что непосредственное решение этой

задачи с помощью винеровского фильтра H дает оператор, который может оказаться неустойчивым. Эту неустойчивость можно устранить, если изменить постановку задач, включив в нее сведения не о дифференцируемом сигнале, а о том сигнале, который должен быть получен в результате дифференцирования. Иначе говоря, в постановку задачи вводится априорная информация о решении. Это можно сделать, если принять в (VIII.16) $L = D^{-1}$, где D — оператор дифференцирования:

$$x(t) = D^{-1} [u(t)] + \xi(t).$$

Таким образом, мы считаем, что наблюдаемый сигнал является результатом интегрирования искомого сигнала $u(t)$. Ясно, что задача дифференцирования полезной составляющей наблюдаемого процесса $x(t)$ свелась к задаче восстановления сигнала $u(t)$, т. е. к задаче обратной фильтрации.

Полагая в формуле (VIII.17) $L(\omega) = 1/i\omega$, получим

$$G_s(\omega) = \frac{i\omega U(\omega)}{U(\omega) + \omega^2 N_\xi(\omega)}.$$

Пусть при $\omega \rightarrow \infty$ $N(\omega)$ стремится к нулю не быстрее, чем $U(\omega)$. Тогда при больших ω

$$G_s(\omega) \cong \frac{1}{\omega} \frac{U(\omega)}{N_\xi(\omega)}.$$

Оператор G_s получился ограниченным (так как его спектральная характеристика интегрируема в квадрате). В этих же условиях ограниченность оператора $H(\omega)$ не может быть гарантирована [нужно потребовать выполнения более жесткого условия (VIII.13)]. Повышение устойчивости произошло за счет того, что в фильтре $H(\omega)$ использовался энергетический спектр наблюдаемого сигнала, а в фильтре G_s — энергетический спектр сигнала, который нужно получить.

Рассмотрим применение обратных фильтров винеровского типа к некоторым задачам из главы V.

Пусть задан случайный поток сейсмических сигналов на фоне случайной помехи $\xi(t)$:

$$x(t) = \sum a_k f(t - \tau_k) + \xi(t), \quad (\text{VIII.20})$$

где случайные величины a_k и τ_k удовлетворяют предположениям, высказанным в § 32. Необходимо указать оператор, в максимальной степени разрешающий случайную последовательность сигналов. С этой целью перепишем формулу (VIII.20):

$$x(t) = L \left[\sum a_k \delta(t - \tau_k) \right] + \xi(t),$$

где L — оператор со спектральной характеристикой $S(\omega)$ [напомним, что $S(\omega)$ — спектр импульса $f(t)$].

Учитывая, что амплитудный спектр δ -функции равен единице, получим соответственно формуле (VII.54) энергетический спектр случайной

последовательности $\sum a_k \delta(t - \tau_k)$: $U(\omega) = \lambda \sigma^2$. Подставляя теперь в формулу (VIII.17) соответствующие значения $L(\omega)$ и $U(\omega)$, найдем

$$G_s(\omega) = \frac{\sigma^2 \lambda S^*(\omega)}{\lambda \sigma^2 |S(\omega)|^2 + N_\xi(\omega)}. \quad (\text{VIII.21})$$

Это решение с точностью до множителя совпадает с обратным фильтром (VII.55), полученным методом оптимальной фильтрации.

Теперь рассмотрим задачу подавления волны-спутника от дневной поверхности. В ней

$$x(t) = u(t) - cu(t - \tau) + \xi(t). \quad (\text{VIII.22})$$

Эта формула эквивалентна (VIII.16), если принять, что оператор L имеет спектральную характеристику $1 + c \exp(-i\omega\tau)$.

Отсюда

$$G_s(\omega) = \frac{U(\omega) [1 - c \exp(i\omega\tau)]}{[U(\omega) (1 - 2c \cos \omega\tau + c^2) + N_\xi(\omega)]}. \quad (\text{VIII.23})$$

Легко видеть, что этот фильтр устойчив, если $U(\omega)$ стремится к нулю при $\omega \rightarrow \infty$ быстрее, чем $N(\omega)$. Тогда знаменатель на больших частотах ведет себя, как $N(\omega)$, числитель — как $U(\omega)$ и $G_s(\omega)$ — как $U(\omega)/N(\omega)$.

Перепишем (VIII.23) в виде

$$G_s(\omega) = \frac{1 - c \exp(i\omega\tau)}{1 - 2c \cos \omega\tau + [N(\omega)/U(\omega)]}. \quad (\text{VIII.24})$$

Минимальное значение выражения $1 - 2c \cos \omega\tau + c^2$ при $c \geq 0$ равно $(1 - c)^2 \geq 0$. Если $N_\xi(\omega) > 0$, то тем более $N_\xi(\omega)/U(\omega) > 0$, поэтому знаменатель в (VIII.23) отличен от нуля даже в том случае, когда $c = 1$. Легко также видеть, что при $N_\xi(\omega)/U(\omega) \sim \omega^\alpha$ ($\alpha > 1$, $\omega \rightarrow \infty$) фильтр (VIII.23) является устойчивым. Поэтому винеровский фильтр может быть применен к задаче подавления волны-спутника в постановке (V.75), (V.76), в которой спутник неизвестной формы устраняется вычитанием трасс, полученных от источников на разной глубине. Эта постановка эквивалентна (VIII.22) при $c = 1$.

§ 36. Построение импульсной сейсмограммы в методе «Вибросейс»

Метод «Вибросейс» заключается в том, что в среду при помощи вибрационной платформы посылается сигнал типа $\sin [p\omega_0(t) t]$ с медленно изменяющейся частотой [обычно $\omega_0(t)$ — линейная функция частоты]. Так как мгновенная мощность, излучаемая вибрационной платформой, намного меньше мощности взрывных источников, то для получения такой же суммарной энергии, излучаемой в среду, необходима очень большая длительность посылаемого в среду сигнала. Как правило, она больше длительности полезной импульсной сейсмограммы. Поэтому реакция среды на такого рода входной сигнал имеет принципиально неразрешенный вид, вследствие чего применение метода «Вибросейс» невозможно без соответствующей фильтрации записи с целью получения импульсной сейсмограммы (или сейсмограммы, близкой к импульсной).

Постановка задачи сводится к (VIII.16), если трактовать $u(t)$ как искомую импульсную характеристику среды и считать, что импульсная характеристика оператора совпадает с посылаемым в среду сигналом вида $\sin [p\omega_0(t)t]$ (мы пользуемся тем, что вследствие перестановочности свертки входной сигнал и импульсную характеристику можно поменять местами).

Рассмотрим более подробно случай большой помехи, когда винеровский обратный фильтр выражается формулой (VIII.18). Множитель $L_s(\omega)$ выполняет, очевидно, задачу подавления помех, не играя существенной роли в разрешении колебаний. С этой точки зрения существен последний множитель $L^*(\omega)$.

Применение к процессу $x(t)$ оператора со спектральной характеристикой $L^*(\omega)$ означает построение функции взаимной корреляции между $x(t)$ и $\sin [p\omega_0(t)t]$:

$$R(t) = \int_0^T x(\tau + t) \sin [p\omega_0(\tau) \cdot \tau] d\tau, \quad (\text{VIII.25})$$

где T — длительность вибрации. Очень часто на практике ограничиваются использованием только оператора взаимной корреляции.

Рассмотрим полезный сигнал на выходе оператора (VIII.25). Будем считать, что $u(t)$ — это некоторая детерминированная функция со спектром $S_u(\omega)$. Тогда полезный сигнал на сейсмограмме «Вибросейс» имеет спектр $S_u(\omega)L(\omega)$. Умножая этот спектр на $L^*(\omega)$, получим спектр полезного сигнала на коррелограмме, равный $S_u(\omega)|L(\omega)|^2$. Поскольку $|L(\omega)|^2$ является спектром функции $R_0(t)$, а последняя — автокорреляцией сигнала $\sin [p\omega_0(t)t]$, то полезный сигнал на коррелограмме совпадает с полезным сигналом такой сейсмограммы, которую можно получить, если в среду посылать падающую волну, по форме совпадающую с $R_0(t)$.

Может ли сигнал $R_0(t)$ оказаться существенно короче исходного сигнала $\sin [p\omega_0(t)t]$? Этот вопрос не излишен, так как, строго говоря, автокорреляция не может быть короче самого импульса. Но при изучении высокочастотной фильтрации мы уже встретились с таким обстоятельством, когда реакцию на выходе фильтра можно было разделить на две части: короткую (несущую основную энергию) и длинную (мало интенсивную), вследствие чего эффективная длительность реакции оказывается малой. Именно в таком смысле существует положительный ответ на поставленный выше вопрос: основная энергия, которую несет $R_0(t)$, может быть сосредоточена на интервале значительно меньшем, чем длительность исходного сигнала.

Рассмотрим пример, который хорошо поясняет, в чем тут дело. Пусть посылаемый в среду вибрационный сигнал является «белым шумом». Это процесс эргодический, поэтому автокорреляция его любой реализации при $T \rightarrow \infty$ близка к корреляционной функции, равной в случае белого шума $\sigma^2\delta(t)$. Следовательно, спектр полезного сигнала на коррелограмме будет равен примерно $\sigma^2 S_u(\omega)$.

При медленном изменении частоты $\omega_0(t)$ спектр функции $\sin [p\omega_0(t)t]$, так же как и белый шум, равномерно содержит все частоты,

поэтому ее автокорреляция тоже должна характеризоваться небольшой эффективной деятельностью.

Более точную качественную картину получим, воспользовавшись асимптотическими методами.

Вибрационный сигнал можно представить как мнимую часть сигнала

$$z(t) = A(t) \exp[ip\Phi(t)],$$

где

$$\Phi(t) = t\omega_0(t), \quad A(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > T. \end{cases}$$

Отсюда легко получить

$$L(\omega) = \frac{1}{2i} [S_z(\omega) - S_z^*(\omega)], \quad (\text{VIII.26})$$

где $S_z(\omega)$ — спектр функции $z(t)$:

$$S_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \exp\{i[p\Phi(t) - \omega t]\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \exp[ip\varphi(t)] dt, \quad (\text{VIII.27})$$

где

$$\varphi(t) = \Phi(t) - \frac{\omega t}{p}.$$

Функция $\Phi(t)$ выражает фазовую модуляцию посылаемого в среду сигнала, параметр p — глубину фазовой модуляции. Если диапазон изменения частоты в вибрационном воздействии велик, то глубина фазовой модуляции также велика: $p \gg 1$.

Согласно методу стационарной фазы основной вклад в интеграл (VIII.27) дадут значения переменной t , располагающиеся вблизи стационарной точки t_0 , определяемой уравнением

$$\Phi'(t) - \frac{\omega}{p} = 0. \quad (\text{VIII.28})$$

Если функция $A(t)$ изменяется намного медленнее, чем $\exp[ip\varphi(t)]$ (что имеет место в нашем случае), то в окрестности стационарной точки подынтегральная функция приближенно равна

$$A(t_0) \exp\left\{ip \left[\varphi(t_0) + \frac{1}{2} \varphi''(t_0) t^2\right]\right\}.$$

Отсюда

$$S_z(\omega) \cong \sqrt{\frac{2\pi}{p\varphi''(t_0)}} A(t_0) \exp[ip\varphi(t_0)] \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right). \quad (\text{VIII.29})$$

Поскольку производная от $\Phi(t)$ имеет смысл мгновенной частоты, то равенство (VIII.28) означает, что спектр на частоте ω определяется в основном поведением функции $z(t)$ вблизи того времени t_0 , на котором мгновенная частота этой функции равна ω .

Так как уравнение (VIII.28) определяет зависимость t_0 от ω , то вместо $\varphi''(t_0)$ можно написать соответствующую функцию от частоты [обозначим эту функцию через $\beta(\omega)$]. Из определения множителя $A(t)$ следует,

что он отличен от нуля (и равен единице) только для таких частот ω , которые совпадают с одной из мгновенных частот сигнала на интервале $(0, T)$. Поскольку мгновенная частота изменяется непрерывно от нуля до некоторого максимального значения Ω , то $A(t) = 1$ при $0 \leq \omega \leq \Omega$.

Ввиду того что

$$\varphi(t_0) = \frac{\omega_0(t_0)t_0}{p} - \frac{\omega t_0}{p},$$

где согласно уравнению (VIII.28) $\omega = p\Phi'(t_0)$, после несложных преобразований получим

$$\varphi(t_0) = -\frac{t_0^2}{p} \left(\frac{d\omega_0}{dt} \right)_{t=t_0}.$$

Теперь формулу (VIII.29) запишем при $|\omega| \leq \Omega$

$$S_2(\omega) \cong \sqrt{\frac{2\pi}{p\beta(\omega)}} \exp \left[-it_0^2 \left(\frac{d\omega_0}{dt} \right)_{t=t_0} + i \left(\frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Подставляя это выражение в (VIII.26), найдем

$$L(\omega) \cong \sqrt{\frac{2\pi}{p\beta(\omega)}} \sin \left[\left(\frac{\pi}{4} \right) - t_0^2 \left(\frac{d\omega_0}{dt} \right)_{t_0} \right].$$

Отсюда следует выражение искомого спектра автокорреляции $R_0(t)$:

$$|L(\omega)|^2 \cong \left(\frac{2\pi}{p\beta(\omega)} \right) \sin^2 \left[\left(\frac{\pi}{4} \right) - t_0^2 \left(\frac{d\omega_0}{dt} \right)_{t_0} \right], \quad |\omega| \leq \Omega. \quad (\text{VIII.30})$$

Исследуем эту формулу при линейной зависимости ω_0 от t :

$$\omega_0(t) = \frac{1}{2} pt.$$

в этом случае функция $\Phi(t)$ равна $t^2/2$, откуда

$$\Omega = p\Phi(t) = pt; \quad t_0 = \frac{\omega}{p}; \quad \frac{d\omega_0}{dt} = \frac{p}{2}; \quad \beta(\omega) = 1.$$

Подставляя эти данные в (VIII.30), будем иметь

$$|L(\omega)|^2 \cong \frac{2\pi}{p} \sin^2 \left[\left(\frac{\pi}{4} \right) - \left(\frac{\omega^2}{2p} \right) \right], \quad |\omega| \leq pT. \quad (\text{VIII.31})$$

Вне интервала $(-pT, pT)$ функция $|L(\omega)|^2$ близка к нулю.

Так как функция $|L(\omega)|^2$ является неотрицательной, то ее можно представить в виде суммы двух спектров, первый из которых

$$S_1(\omega) \cong \begin{cases} 2\pi/p, & -pT \leq \omega \leq pT \\ 0, & \omega < -pT \text{ и } \omega > pT \end{cases}$$

является постоянной составляющей, а второй $S_2(\omega) = |L(\omega)|^2 - S_1^2(\omega)$ — представляет собой функцию, колеблющуюся вокруг нуля. Обе составляющие несут примерно одну и ту же энергию:

$$E_1 \cong E_2.$$

Соответственно этому автокорреляция $R_0(t)$ разбивается на два слагаемых:

$$R_0(t) \cong f_1(t) + f_2(t),$$

где $f_j(t)$ — обратное преобразование спектра $S_j(\omega)$.

Воспользовавшись симметричностью прямого и обратного преобразований Фурье и формулой для спектра прямоугольного импульса, получим

$$f_1(t) = (4\pi a^2/p) (\sin pTt/t).$$

Этот сигнал нефиinitен, но он имеет эффективную длительность $T_1 \sim \sim k\pi/pT$, где k — число порядка 1. Следовательно, энергия E_1 достаточна в основном на интервале T_1 . Эффективная длительность T_2 сигнала $f_2(t)$ намного больше, чем T_1 . Но это не приводит к заметному увеличению суммарного сигнала $R_0(t)$, так как энергия E_2 рассредоточивается на большом интервале времени и средняя мощность сигнала $f_2(t)$, равная E_2/T_2 , оказывается (в силу $E_2 \cong E_1$) намного меньше средней мощности сигнала $f_1(t)$, равной E_1/T_1 . Поэтому эффективная длительность $R_0(t)$ примерно равна эффективной длительности сигнала $f_1(t)$, т. е. имеет порядок $k\pi/pT$. Так как она обратно пропорциональна длительности вибрационного воздействия T , то хотя бы в принципе может быть сделана сколь угодно малой. Разумеется, это обстоятельство на практике использовать нельзя из-за сильного поглощения высоких частот.

§ 37. Дискретные фильтры Винера

Пусть дана дискретная случайная последовательность

$$x_k = u_k + \xi_k, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (\text{VIII.32})$$

где $\mathbf{u} = \{u_k\}$ представляет собой полезную (сигнальную) составляющую, $\mathbf{a} \xi = \{\xi_k\}$ — помеху. Случайные последовательности \mathbf{u} и ξ характеризуются корреляционными функциями $B_u(n) = K_u(n \Delta t)$ и $B_\xi(n) = K_\xi(n \Delta t)$ соответственно.

Пусть далее

$$w_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} l_{k-j} u_j, \quad (\text{VIII.33})$$

где $\{l_k\}$ — импульсная характеристика заданного дискретного преобразования L . Найдем наилучшую среднеквадратическую оценку для значения w_k по совокупности отсчетов $\{x_{s-m}, \dots, x_s\}$:

$$\hat{w}_k = \sum_{j=0}^m h_j x_{s-j}. \quad (\text{VIII.34})$$

Таким образом, нашей задачей является отыскивание таких коэффициентов h_0, h_1, \dots, h_m , которые минимизируют

$$\varepsilon^2 = \mathbf{M} \left| w_k - \sum_{j=0}^m h_j x_{s-j} \right|^2. \quad (\text{VIII.35})$$

Общность указанной постановки заключается в том, что она включает в себя задачи, которые мы перечислим для случая, когда L — тождественный оператор (т. е. $w_k = u_k$).

1. Сглаживание односторонним финитным оператором ($s = k$). Задача заключается в том, чтобы по $m + 1$ отсчетам x_j , предшествующих отсчету x_k (включая этот отсчет), наилучшим образом восстановить значение сигнала u_k .

2. Сглаживание двухсторонним финитным оператором: $s = k + M$, $m = 2M$. Задача заключается в том, чтобы по $2M + 1$ отсчетам x_j ($j = k - M, \dots, k + M$) наилучшим образом восстановить сигнал u_k .

3. Чистое предсказание (экстраполяция). В этой задаче предполагается, что $\xi_k = 0$ (т. е. экстраполяции подлежит весь наблюдаемый сигнал) и $k = s + n$, $n > 0$. Таким образом, задача состоит в том, чтобы по m предшествующим значениям x_j ($j = s - m, \dots, s$) предсказать значение наблюдаемого процесса на k шагов вперед.

4. Экстраполяция со сглаживанием. Задача отличается от предыдущей тем, что экстраполируется не весь наблюдаемый процесс, а только его сигнальная часть: $\xi_k \neq 0$, $k = s + n$, $n > 0$.

Аналогичные задачи можно перечислить при $w_k \neq u_k$.

Перейдем к решению поставленной общей задачи. В силу стационарности рассматриваемых последовательностей можно принять $s = 0$ и $k = s + n = n$. Тогда, раскрывая скобки в левой части (VIII.35), будем иметь:

$$\varepsilon^2 = \mathbf{M}|w_n|^2 - 2\mathbf{M}w_n \sum_{j=0}^m h_j x_{-j} + \mathbf{M} \left| \sum_{j=0}^m h_j x_{-j} \right|^2. \quad (\text{VIII.36})$$

Первое слагаемое — это мощность (дисперсия) последовательности \mathbf{w} , равная $K_w(0)$.

В соответствии с определением взаимной корреляции

$$\mathbf{M}w_n \sum_{j=0}^m h_j x_{-j} = \sum_{j=0}^m h_j \mathbf{M}w_n x_{-j} = \sum_{j=0}^m h_j B_{wx}(j+n).$$

Что касается третьего слагаемого, то оно определяется следующим образом:

$$\mathbf{M} \left| \sum_{j=0}^m h_j x_j \right|^2 = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m h_j h_k \mathbf{M}x_{-j} x_{-k} = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m h_j h_k B_x(j-k). \quad (\text{VIII.37})$$

Подставляя полученные выражения в (VIII.36) и дифференцируя по h_k , получим, после приравнения нулю производных, $m + 1$ уравнений для искоемых коэффициентов h_k :

$$\sum_{j=0}^m h_j B_x(j-k) = B_{wx}(n+k), \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (\text{VIII.38})$$

Это решение обеспечивает минимум. Действительно, элементы матрицы вторых производных $\partial^2 \varepsilon / \partial h_j \partial h_k$ суть $B_x(j-k)$. Но эта матрица неотрицательно определена, так как для любого вектора $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \dots, h_m)$ правая часть равенства (VIII.37) равна положительному числу.

Для окончательного решения нужно выразить B_x и B_{wx} через корреляционные функции B_u и B_ξ , заданные в условии задачи.

Считая случайные последовательности u и ξ независимыми, имеем

$$B_x(n) = B_u(n) + B_\xi(n).$$

В силу той же независимости

$$B_{wx}(n) = \mathbf{M}w_{k+n}x_k = \mathbf{M}w_{k+n} \cdot (u_k + \xi_k) = \mathbf{M}w_{k+n}u_k = B_{wu}(n).$$

Подставляя сюда (VIII.38), найдем

$$B_{wu}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} l_{n-j} B_u(j). \quad (\text{VIII.39})$$

Теперь система уравнений (VIII.38) переписывается следующим образом:

$$\sum_{j=0}^m h_j [B_u(j-k) + B_\xi(j-k)] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} l_{n+k-j} B_u(j), \quad k=0, 1, \dots, m. \quad (\text{VIII.40})$$

После несложных преобразований получим из выражения (VIII.36)

$$\min \varepsilon^2 = B_w(0) - \sum_{j=0}^m h_j B_{wx}(n+j),$$

где коэффициенты h_j определяются системой линейных уравнений (VIII.38).

Как уже указывалось выше, данная постановка задачи является общей и может быть применена к большому числу частных задач. Рассмотрим, в частности, задачу «чистого» сглаживания односторонним финитным оператором. В этом случае $n=0$ и $w_k = u_k$. Следовательно, система уравнений (VIII.40) примет следующую форму:

$$\sum_{j=0}^m h_j [B_u(j-k) + B_\xi(j-k)] = B_u(k), \quad k=0, 1, \dots, m. \quad (\text{VIII.41})$$

при этом

$$\min \varepsilon^2 = B_u(0) - \sum_{j=0}^m h_j B_u(j). \quad (\text{VIII.42})$$

Для решения системы (VIII.38) при больших m следует воспользоваться методом Левинсона, применение которого к системе (VI.34) было дано в § 27. Метод пригоден для решения любых систем, матрицы которых являются корреляционными. Для большего сходства с формулами (VI.38) матрицу системы обозначим символом \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}\mathbf{h} = \mathbf{g}, \quad (\text{VIII.43})$$

где \mathbf{g} — вектор-столбец порядка $m+1$, который в случае системы (VIII.38) имеет компоненты $B_{wx}(n+j)$, $j=0, 1, \dots, m$.

Аналогично (VI.38) запишем подсистему порядка $k \leq m + 1$:

$$\mathbf{R}^{(k)} \bar{\mathbf{h}}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)},$$

где $\mathbf{h}^{(k)} = (h_0^k, \dots, h_{k-1}^k)^T$ и $\mathbf{g}^{(k)} = (g_0, g_1, \dots, g_{k-1})^T$.

Непосредственной подстановкой показывается, что вектор $\bar{\mathbf{h}}^{(k)} = (h_0^k, \dots, h_{k-1}^k, 0)^T$ является решением расширенной системы

$$\mathbf{R}^{(k+1)} \bar{\mathbf{h}}^{(k)} = \bar{\mathbf{g}}^{(k)}, \quad (\text{VIII.44})$$

где

$$\bar{\mathbf{g}}^{(k)} = (g_0, g_1, \dots, g_{k-1}, \theta_k)^T$$

при

$$\theta_k = R_k h_0^k + R_{k-1} h_1^k + \dots + R_1 h_{k-1}^k.$$

Умножим вторую из систем (VI.38) при $n = k + 1$ на произвольный пока коэффициент p_k и сложим с (VIII.44)

$$\mathbf{R}^{(k+1)} \cdot (\mathbf{h}^{(k)} + p_k \mathbf{b}^{(k+1)}) = \bar{\mathbf{g}}^{(k)} + p_k \mathbf{y}^{(k+1)}.$$

Вектор в правой части имеет компоненты $g_0, g_1, \dots, g_{k-1}, \theta_k + p_k$. Поэтому, выбрав p_k таким образом, что $\theta_k + p_k = g_k$, получим следующую рекуррентную процедуру:

$$\mathbf{h}^{(k+1)} = \bar{\mathbf{h}}^{(k)} + p_k \mathbf{b}^{(k+1)},$$

где вектор $\mathbf{b}^{(k+1)}$ определяется рекуррентными формулами (VI.39) и (VI.39'). При $k = m$ получим искомый вектор \mathbf{h} .

Вычислительная сложность полученной процедуры оценивается величиной $5m^2/2$ арифметических операций. При достаточно больших m она оказывается весьма громоздкой. Тогда целесообразно, перейдя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получить соответствующее предельное решение спектральными методами, а затем, воспользовавшись ограниченностью операторов винеровской фильтрации, построить соответствующие усеченные операторы. Проиллюстрируем указанный метод на примере двухстороннего оператора сглаживания (задача 2).

Прежде чем перейти к пределу при $m \rightarrow \infty$, заметим, что при выводе системы уравнений (VIII.38) мы приняли $s = 0$ и тем самым закрепили правый конец оператора. Поэтому, устремив $m \rightarrow \infty$, все равно не получим двухстороннего бесконечного оператора. Для устранения этой трудности примем при выводе этой системы $s = M$, $m = 2M$. Соответствующий фильтр даст наилучшую оценку для w_k при $k = 0$. Легко видеть, что значение n равно M , поэтому система уравнений (VIII.38) переписется следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{2M} h_j B_x(j-k) = B_{wx}(k+M), \quad k=0, 1, \dots, 2M.$$

Изменив индексы суммирования, эту систему можно переписать:

$$\sum_{j=-M}^M h'_j B_x(j-k) = B_{\omega x}(k), \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm M, \quad (\text{VIII.45})$$

где $h'_j = h_{j+M}$.

Устремим M к ∞ . Тогда и в левой, и в правой частях равенства (VIII.45) будут стоять отсчеты бесконечных последовательностей. Дискретный спектр последовательности в правой части равен взаимному энергетическому спектру $N'_{\omega x}(\omega)$, а дискретный спектр левой части, являющейся сверткой последовательностей $\{h'_j\}$ и $\{B_x(j)\}$, равен, очевидно, $H'(\omega) N'_x(\omega)$.

Отсюда

$$H'(\omega) = N'_{\omega x}(\omega)/N'_x(\omega) = L(\omega) U'(\omega)/[U'(\omega) + N'_\xi(\omega)]. \quad (\text{VIII.46})$$

Так как комплексная характеристика представляет последовательность коэффициентов Фурье дискретного спектра, то

$$h'_j = \left(\frac{\Delta t}{2\pi} \right) \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \{L(\omega) \cdot U'(\omega)/[U'(\omega) + N'_\xi(\omega)]\} d\omega. \quad (\text{VIII.47})$$

При решении задачи «чистого» сглаживания в этих формулах нужно принять

$$L(\omega) \equiv 1.$$

Рассмотрим некоторые особенности цифровых винеровских фильтров, осуществляющих чистое сглаживание. Полагая в (VIII.46) $L(\omega) = 1$ и переходя к z -преобразованию, найдем z -характеристику двухстороннего сглаживающего фильтра:

$$L_s(z) = B_u(z)/B_x(z). \quad (\text{VIII.48})$$

И в числителе, и в знаменателе этого выражения стоят z -преобразования корреляционных функций. При доказательстве условия 2 § 31 было показано, что z -преобразование любой корреляционной функции можно представить в виде произведения двух функций, первая из которых является z -характеристикой минимально-фазового фильтра, а вторая получается из первой при замене z на $1/z$.

Таким образом, формулу (VIII.48) можно представить в виде

$$L_s(z) = \left[Y_u(z) \cdot Y_u\left(\frac{1}{z}\right) \right] / \left[Y_x(z) \cdot Y_x\left(\frac{1}{z}\right) \right]. \quad (\text{VIII.49})$$

Первый множитель не имеет ни нулей, ни полюсов в круге $|z| \leq 1$, поэтому выражает z -характеристику минимально-фазового фильтра. Второй множитель определяет максимально-фазовый фильтр. Однако если его применить к «обращенной» числовой последовательности, то, заменяя z на $1/z$, снова получим первый фильтр. Следовательно, фильтр L_s реализуется в виде последовательности двух одинаковых минимально-фазовых фильтров, один из которых используется в «обращенной» форме.

Теперь можно доказать следующее.

Условие. Если сигнал $\{u_k\}$ и помеха $\{\xi_k\}$ имеют конечные интервалы корреляции

$$B_u(n) = K_u(n \Delta t) = 0 \text{ при } |n| > n_0$$

и

$$B_\xi(n) = K_\xi(n \Delta t) = 0 \text{ при } |n| > n_1, \quad (\text{VIII.50})$$

то фильтр L_s реализуем в виде последовательности двух одинаковых финитных рекурсивных фильтров, один из которых применяется в «обращенной» форме.

Действительно, по условию (VIII.50)

$$B_u(z) = \sum_{n=-n_0}^{n_0} K_u(n \Delta t) z^n \quad (\text{VIII.51})$$

и

$$B_x(z) = \sum_{n=-n_0}^{n_0} K_u(n \Delta t) z^n + \sum_{n=-n_1}^{n_1} K_\xi(n \Delta t) z^n. \quad (\text{VIII.52})$$

Отсюда видно, что $L_s(z)$ является дробно-рациональной функцией от z . Но тогда и первый сомножитель в (VIII.49) — тоже дробно-рациональная функция. Следовательно, он определяет фильтр, который может быть реализован в финитной рекурсивной форме. Поскольку знаменатель не имеет нулей в круге $|z| \leq 1$, то данный рекурсивный фильтр устойчив, что и требовалось доказать.

П р и м е р. Возьмем корреляционные функции

$$K_u(n \Delta t) = \begin{cases} \sigma_u^2, & n = 0 \\ \rho \sigma_u^2, & |n| = 1 \\ 0, & |n| > 1 \end{cases}$$

и

$$K_\xi(n \Delta t) = \begin{cases} \sigma_\xi^2, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Подставив эти выражения в (VIII.51) и (VIII.52), а затем в (VIII.48), получим после простых преобразований

$$L_s(z) = \frac{\rho z^2 + z + \rho}{\rho z^2 + (1 + \alpha)z + \rho}, \quad \alpha = \sigma_\xi^2 / \sigma_u^2.$$

Корни числителя равны

$$z_{1,2} = -s \pm \sqrt{s^2 - 1}, \quad s = 1/(2\rho),$$

а корни знаменателя

$$z'_{1,2} = -(1 + \alpha)s \pm \sqrt{(1 + \alpha)^2 s^2 - 1}.$$

Легко проверить, что $z_1 z_2 = 1$ и $z'_1 z'_2 = 1$. Отсюда следует, что первый сомножитель в (VIII.49) равен

$$\frac{z + s - \sqrt{s^2 - 1}}{z + (1 + \alpha)s - \sqrt{(1 + \alpha)^2 s^2 - 1}}.$$

Полученная z -характеристика определяет рекурсивный фильтр, работающий по формуле

$$y_k = \frac{(s - \sqrt{s^2 - 1})x_k + x_{k-1} - y_{k-1}}{(1 + \alpha)s - \sqrt{(1 + \alpha)^2 s^2 - 1}}.$$

Пространственный прием сейсмических волн

Глава IX

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ СИСТЕМ

§ 38. Обобщенная характеристика интерференционной системы

В этом разделе рассматриваются особенности приема сейсмических колебаний приемниками, рассредоточенными в пространстве. Линейной пространственной системой называется совокупность расположенных в определенных точках пространства приемных элементов, в каждом из которых входной сигнал подвергается линейному преобразованию (фильтрации), и на выходе которых сигналы складываются.

Если в качестве линейных преобразований, действующих в приемных элементах, использовать умножение на константу и временной сдвиг, то получим простейшую приемную систему, которую называют интерференционной. Интерференционные системы являются не только самыми простыми, но и наиболее распространенными в сейсморазведке. Такие системы, как группирование и смеситель, применялись с самого зарождения сейсмического метода разведки. Несколько позже широкое распространение получили методы регулируемого направленного приема и в сравнительно недавнее время — суммирование по общей глубинной точке и дифракционное преобразование.

Теория интерференционных систем — хорошо разработанный фрагмент сейсмической теории. Ей посвящена обширная литература, поэтому в этой книге рассматриваются только те вопросы интерференционных систем, которые либо важны для понимания дальнейшего материала, либо получили развитие в самое последнее время. Некоторые результаты, давно ставшие классическими, включены по той простой причине, что без них общая теория пространственных линейных систем потеряла бы необходимую полноту.

Рассмотрим действие интерференционной системы, состоящей из приемников, расположенных в точках M_1, M_2, \dots, M_n , на волну вида

$$u(t, M) = A(M) u[t - \tau(M)]. \quad (\text{IX.1})$$

Напомним, что формулы типа (IX.1) характеризуют поле сейсмических колебаний в нулевом приближении лучевого ряда.

В соответствии с определением интерференционной системы на выходе ее получим колебание

$$y(t) = \sum_{k=1}^n h_k A(M_k) u(t - \tau_k - \Delta t_k), \quad (\text{IX.2})$$

где h_k — чувствительность в k -том приемнике; $\tau_k = \tau(M_k)$; Δt_k — временной сдвиг, называемый часто кинематической поправкой¹.

Фактически формула (IX.2) описывает более широкий класс систем вида

$$y(t) = L_2 \left\{ \sum_{k=1}^n h_k A(M_k) L_1 [u(t - \tau_k - \Delta t_k)] \right\}, \quad (\text{IX.3})$$

где L_1 и L_2 — фильтры в приемниках и на выходе интерференционной системы. Из линейности операторов L_1 и L_2 следует, что формулу (IX.3) можно переписать в виде

$$y(t) = \sum_{k=1}^n h_k A(M_k) v[t - \tau(M_k) - \Delta t_k],$$

где $v(t) = L_1 L_2 [u(t)]$.

Таким образом, можно считать, что фильтры L_1 и L_2 были осуществлены еще до подхода волны к интерференционной системе и исключить их из рассмотрения. Грубо говоря, это означает, что интерференционная система рассчитывается не на тот сигнал, который действует на входе, а на тот, который фактически наблюдается с учетом всех фильтров.

Осуществим преобразование Фурье левой и правой частей равенства (IX.2):

$$S_y(\omega) = S_u(\omega) \sum_{k=1}^n h_k A(M_k) \exp[-i\omega(\tau_k + \Delta t_k)].$$

Функция

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^n h_k A(M_k) \exp[-i\omega(\tau_k + \Delta t_k)] \quad (\text{IX.4})$$

называется спектральной характеристикой интерференционной системы относительно волн с моментами прихода $\{\tau(M_k)\}$ и амплитудами $\{A(M_k)\}$. Поскольку сдвиг колебания $y(t)$ или умножение его на константу не изменяет его формы, спектральные характеристики, отличающиеся множителем $c \cdot \exp(-i\omega a)$ считаются эквивалентными.

Из формулы (IX.4) видно, что спектральные характеристики различны для волн с разными годографами (в соответствии с принятым выше соглашением об эквивалентности исключение составляют волны, у которых все времена отличаются на одну и ту же константу). Поэтому интерференционные системы могут быть использованы для пропуска одних волн и подавления других.

Без искажения пропускаются волны, для которых

$$\tau(M_k) + \Delta t_k = \text{const}, \quad (\text{IX.5})$$

так как в этом случае спектральная характеристика эквивалентна единице.

¹ Обычно кинематической называют только такую поправку Δt_k , которая зависит от времени t : $\Delta t_k = \Delta t_k(t)$. В данной книге этот термин используется в более широком смысле: кинематической считается всякая поправка, определяемая кинематикой выделяемой волны.

Будем говорить, что интерференционная система настроена на волну с годографом $\{\tau(M_k)\}$, если имеет место условие (IX.5).

Рассмотрим классификацию интерференционных систем. Если для всех $k = 1, \dots, n$ $\Delta t_k = 0$, то такая система называется группой. Если кинематические поправки зависят от переменного параметра $\Delta t_k = \Delta t_k(\theta)$, принимающего ряд значений $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$, то система является регулируемой. Ясно, что применение регулируемой интерференционной системы возможно только при условии консервации (запоминания) сейсмических колебаний, зарегистрированных в точках приема. Ясно также, что нерегулируемая интерференционная система эквивалентна группе приемников при регистрации волны с годографом $\tau'_k = \tau(M_k) + \Delta t_k$.

Структура интерференционной системы зависит от той информации о полезных волнах и волнах-помехах, которой мы располагаем. В этой связи выделяют регулярные волны, обладающие вполне определенными и доступными изучению годографами, и случайные волны, для которых совокупность времен прихода либо вообще не имеет смысла, либо является случайной. В зависимости от того, какие волны-помехи подавляются данной интерференционной системой, говорят о направленном или статистическом эффекте суммирования.

Дальнейшая классификация определяется типом годографов полезных волн и волн-помех, используемых при расчете интерференционной системы. Условимся, что интерференционная система действует в классе плоских волн, если волны являются плоскими

$$u(t, M) = u_0 \left(t - \frac{(\vec{x}, \vec{r})}{v_0} \right) \quad (\text{IX.6})$$

и если кинематические поправки рассчитываются по годографу плоской волны (в частности, поправки могут быть равными нулю). Именно такие системы изучаются в начале этой главы.

Рассмотрим подробнее спектральную характеристику нерегулируемой интерференционной системы, действующей в классе плоских волн.

Пусть приемники расположены вдоль оси x в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Если кажущаяся скорость распространения волны (IX.6) вдоль направления x равна v_x и если кинематические поправки рассчитываются по формуле $\Delta t_k = -x_k/c$, то данная система эквивалентна группе приемников, на вход которой поступает плоская волна с кажущейся скоростью распространения, определяемой из условия

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_x} - \frac{1}{c} \quad (\text{IX.7})$$

Это следует непосредственно из формулы (IX.4), в которой нужно принять $\tau(M_k) = x_k/v_k$, $\Delta t_k = -x_k/c$ и $A(M_k) = 1$:

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^n h_k \exp \left[-i\omega \left(\frac{x_k}{v} \right) \right]. \quad (\text{IX.8})$$

Величину v будем называть приведенной скоростью распространения плоской волны.

Строго говоря, функция $G(\omega)$ не является спектральной характеристикой стационарного линейного преобразования, так как зависит от параметра v входного сигнала. Однако мы ее можем рассматривать как спектральную характеристику относительно фиксированного класса входных сигналов, обладающих одной и той же приведенной скоростью. Как мы увидим дальше (см. главу IX), спектральная характеристика интерференционной системы для более широких классов сигналов не может быть скалярной функцией.

Как правило, на практике используются группы с равномерными расстановками: $x_{k+1} - x_k = \Delta x$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Нетрудно заметить, что спектральная характеристика такой группы эквивалентна следующей:

$$G(\omega) = \sum_{k=1}^n h_k \exp \left\{ -i\omega \left[\frac{(k-1)\Delta x}{v} \right] \right\}. \quad (\text{IX.9})$$

Покажем, что группы с неравномерными расстановками можно свести к группам с равномерными расстановками, если числа $x_k - x_1$, $k = 2, \dots, n$ соизмеримы. Действительно, в этом случае существует такое число δx , что для всех $k = 2, \dots, n$ значение $s_k = \frac{(x_k - x_1)}{\delta x}$ является целым. Следовательно, формулу (IX.8) можно переписать:

$$G(\omega) = \exp \left[-i\omega \left(\frac{x_1}{v} \right) \right] \sum_{s=0}^N h'_s \exp \left[-i\omega \left(\frac{s\delta x}{v} \right) \right], \quad (\text{IX.10})$$

где $N = s_n$ и

$$h'_s = \begin{cases} h_k & \text{при } s = s_k \\ 0 & \text{при } s \neq s_k. \end{cases} \quad (\text{IX.10}')$$

Спектральная характеристика (IX.10) эквивалентна спектральной характеристике группы с равномерной расстановкой, поэтому в дальнейшем, практически не уменьшая общности, можно ограничиться рассмотрением только таких групп.

Спектральная характеристика $G(\omega)$, определяемая формулой (IX.9), представляет собой тригонометрический многочлен и, таким образом, является периодической функцией частоты с периодом $2\pi v/\Delta x$. Приведенная скорость v влияет только на период спектральной характеристики и ее можно исключить из рассмотрения, если перейти к аргументу $\nu = \omega/v$, который принято называть обобщенной частотой.

Функцию

$$H(\nu) = \sum_{k=1}^n h_k \exp [-i\nu(k-1)\Delta x] \quad (\text{IX.11})$$

называют обобщенной характеристикой интерференционной системы, действующей в классе плоских волн. Обобщенная характеристика имеет период $2\pi/\Delta x$ и зависит только от распределения чувствительности и параметров расстановки Δx и n .

Строго говоря, величина $H(\nu)$ зависит от знака приведенной скорости, так как при замене v на $-v$ обобщенная частота ν заменяется на $-\nu$. Однако эта зависимость не касается амплитудной обобщенной характеристики $|H(\nu)|$. Действительно, функция

$H(\nu)$ является дискретным спектром последовательности $\{h_{k-1}\}$, поэтому $H(-\nu) = H^*(\nu)$, откуда следует, что $|H(-\nu)| = |H(\nu)|$.

Правая часть равенства (IX.11) представляет собой ряд Фурье функции $H(\nu)$, следовательно, коэффициенты h_k могут быть определены по заданной обобщенной характеристике при помощи формул для коэффициентов ряда Фурье:

$$h_k = \frac{\Delta x}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} H(\nu) \exp[i\nu(k-1)\Delta x] d\nu. \quad (\text{IX.12})$$

Разумеется, не всякая комплекснозначная периодическая функция обобщенной частоты определяет группу, имеющую конечное число приемников. Фактически мы сталкиваемся здесь с вопросом физической осуществимости, поскольку $H(\nu)$ представляет собой спектральную характеристику цифрового фильтра с импульсной характеристикой h_1, h_2, \dots, h_n . Отсюда следует, что для решения подобных вопросов целесообразно перейти к z -преобразованию распределения чувствительности, сделав в формуле (IX.12) подстановку $z = \exp(-i\nu\Delta x)$. Тогда в соответствии с теоремой 5 из § 11 аналитичность полученного z -преобразования во всей плоскости комплексного переменного z , за исключением хотя бы одной из точек $z = 0$ и $z = \infty$, является необходимым и достаточным условием осуществимости в классе групп с конечным числом приемников.

Полезным является также следующее утверждение.

Теорема 1. Если на интервале $(-\nu_0, \nu_0)$ задана некоторая непрерывная функция $f(\nu)$, удовлетворяющая условию $f(-\nu) = f^*(\nu)$, то она может быть со сколь угодно высокой точностью аппроксимирована в классе конечных групп, имеющих шаг $\Delta x = \pi/\nu_0$.

Действительно, функция $f(\nu)$ с указанными свойствами разлагается на интервале $(-\nu_0, \nu_0)$ в ряд Фурье с вещественными коэффициентами c_k . Полученный ряд на всей бесконечной оси выражает периодическую обобщенную характеристику (с периодом $2\nu_0$), которая вследствие абсолютной сходимости ряда может быть со сколь угодно точно аппроксимирована в классе конечных групп, имеющих шаг π/ν_0 и распределение чувствительности

$$h_k = \begin{cases} c_k, & -m \leq k \leq m \\ 0, & |k| > m. \end{cases} \quad (\text{IX.13})$$

Рассмотрим несколько подробнее группы с симметричным распределением чувствительности:

$$h_1 = h_n, \quad h_2 = h_{n-1}, \quad \dots$$

Относительно симметричных групп докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Обобщенная характеристика группы с симметричным распределением чувствительности с точностью до эквивалентности является вещественной четной функцией. И обратно: всякая вещественная периодическая непрерывная четная функция $H(\nu)$, имеющая период $2\nu_0$, есть обобщенная характеристика симметричной (не обязательно конечной) группы с шагом между приемниками, равным π/ν_0 .

Для доказательства перепишем формулу (IX.11) следующим образом:

$$H(\nu) = \exp \left\{ -i\nu \left[\frac{(n-1)}{2} \right] \Delta x \right\} \sum_{k=1}^n h_k \exp \left\{ -i\nu \left[k - \frac{(n+1)}{2} \right] \Delta x \right\}.$$

В соответствии с соглашением об эквивалентности множитель перед суммой можно опустить.

Применим ко второму сомножителю формулу Эйлера:

$$H(\nu) = \sum_{k=1}^n h_k \cos \nu \left[k - \frac{(n+1)}{2} \right] \Delta x + i \sum_{k=1}^n h_k \sin \nu \left[k - \frac{(n+1)}{2} \right] \Delta x.$$

Когда индекс k пробегает значения $1, 2, \dots, n-1, n$, аргумент тригонометрических функций пробегает значения $-\left(\frac{n-1}{2}\right) \nu \Delta x, \dots, \left(\frac{n-1}{2}\right) \nu \Delta x$, отсюда,

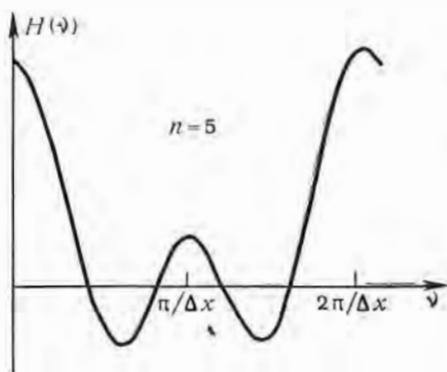


Рис. 26

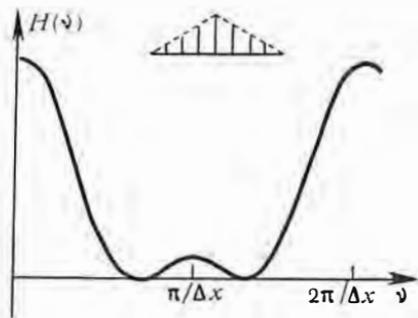


Рис. 27

применив условие (IX.14) и нечетность синуса, получим, что второе слагаемое в правой части последней формулы равно нулю.

Следовательно,

$$H(\nu) = \sum_{k=1}^n h_k \cos \nu \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \Delta x. \quad (\text{IX.14})$$

Первая половина утверждения доказана. Интересно отметить, что период эквивалентной вещественной характеристики равен $2\pi/\Delta x$ только в том случае, когда группа содержит нечетное число приемников: $n = 2m + 1$. При $n = 2m$ сумма содержит слагаемое $\cos \left(\frac{\nu \Delta x}{2} \right)$, откуда следует, что наименьший период равен $4\pi/\Delta x$. Можно, однако, показать, что период амплитудной характеристики $|H(\nu)|$ и в этом случае равен $2\pi/\Delta x$.

Вторая половина утверждения доказывается элементарно, так как функция $H(\nu)$ разлагается в ряд Фурье, содержащий только косинусные составляющие:

$$H(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cos \left(\frac{\pi k \nu}{\nu_0} \right). \quad (\text{IX.15})$$

Поскольку коэффициенты ряда Фурье любой вещественной функции удовлетворяют условию $a_{-k} = a_k^*$, а коэффициенты ряда (IX.15) вещественны, то $a_{-k} = a_k$, что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е. Для любой конечной группы можно указать симметричную (но не обязательно конечную) группу с той же самой амплитудной характеристикой.

Доказательство очевидно, поскольку $|H(v)|$ — непрерывная, вещественная, четная и периодическая функция.

Примером наиболее часто встречающихся симметричных групп являются однородные группы с одинаковой чувствительностью приемников (прямоугольное распределение чувствительности):

$$h_1 = h_2 = \dots = h_n = 1. \quad (\text{IX.16})$$

Пусть число приемников нечетно ($n = 2m + 1$) и они расположены в точках $j\Delta x$ ($j = 0, \pm 1, \dots, \pm m$).

Определяя обобщенную характеристику по формуле (IX.11)

$$H_{\text{пр}}(v) = \sum_{j=-m}^m \exp(-ivj\Delta x) = \sum_{j=0}^m q^j + \sum_{j=0}^m \left(\frac{1}{q}\right)^j - 1; \quad q = \exp(-iv\Delta x)$$

и применяя формулу суммы геометрической прогрессии, найдем

$$H_{\text{пр}}(v) = \frac{\sin \frac{1}{2} n v \Delta x}{\sin \frac{1}{2} v \Delta x}. \quad (\text{IX.17})$$

Эта характеристика (рис. 26) имеет основные максимумы, имеющие амплитуду n , в точках $2k\pi/\Delta x$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Каждый основной максимум определяет полосу пропускания. Считая, что каждая полоса пропускания ограничена ближайшими нулями обобщенной характеристики, найдем, что первая полоса пропускания располагается в интервале $-v_{\text{гр}} \leq v \leq v_{\text{гр}}$ (где $v_{\text{гр}} = 2\pi/n\Delta x$), вторая полоса — в интервале $(2v_0 - v_{\text{гр}}, 2v_0 + v_{\text{гр}})$ (где $v_0 = \pi/\Delta x$) и т. д. Величина $n\Delta x$, определяющая ширину полосы пропускания, называется эффективной базой группы, в отличие от действительной базы, равной $(n-1)\Delta x$. Между полосами пропускания находятся полосы гашения. В частности, первая полоса гашения располагается в интервале $(v_{\text{гр}}, 2v_0 - v_{\text{гр}})$.

Найдем автокорреляцию последовательности (IX.16). Заметим, что автокорреляция последовательности $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ выражается формулой $\sum_{j=1}^{n-|k|} h_j h_{j+k}$, поэтому k -тый отсчет искомой автокорреляции равен числу слагаемых от 1 до $n - |k|$:

$$g_k = \begin{cases} n - |k|, & k = 0, \pm 1, \dots, \pm n - 1 \\ 0, & |k| \geq n. \end{cases} \quad (\text{IX.18})$$

Полученная формула выражает распределение чувствительности так называемой треугольной группы (рис. 27). Так как спектр автокорреляции

равен квадрату амплитудного спектра исходной числовой последовательности, то

$$H_{\text{тр}}(\nu) = |H_{\text{пр}}(\nu)|^2 = \left(\frac{\sin \frac{1}{2} n \nu \Delta x}{\sin \frac{1}{2} \nu \Delta x} \right)^2. \quad (\text{IX.19})$$

Нетрудно увидеть, что эффективность гашения этой группы на порядок выше. Но эта группа имеет $2n - 1$ приемников. Так как эффективная база по-прежнему равна $n\Delta x$, то она почти вдвое меньше действительной базы $2(n - 1)\Delta x$.

К линейной группе (т. е. к группе с приемниками, расположенными вдоль линии) сводятся многие интерференционные системы более общего типа. В частности, укажем площадную группу, приемники которой располагаются в точках $M_k(x_k, y_k)$ плоскости $z = 0$. Пусть $\vec{\kappa}_0$ — проекция вектора $\vec{\kappa}$, выражающего направление распространения волны (IX.6), на плоскость $z = 0$. Ясно, что если совместить новую ось x' с $\vec{\kappa}_0$, то спектральная характеристика данной интерференционной системы снова выразится формулой (IX.8) при замене x на x' .

Другим примером является комбинированная группа, состоящая из n приемников, расположенных в точках x_1, x_2, \dots, x_n оси x и m одновременно действующих источников, расположенных в точках x'_1, \dots, x'_m . Так как в каждом j -том приемнике вследствие принципа суперпозиции регистрируется колебание $\sum_{k=1}^m g_k u(t - \tau_{jk})$, где g_k — интенсивность k -того источника и τ_{jk} — время пробега волны из k -того источника в j -тый приемник, то на выходе группы будем иметь сумму

$$y(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m h_j g_k u(t - \tau_{jk}).$$

Если время прихода волны аппроксимируется формулой вида

$$\tau_{jk} = t_0 + \frac{(x_j - x'_k)}{v},$$

то обобщенная характеристика всей комбинированной группы эквивалентна следующей:

$$H(\nu) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m h_j g_k \exp[-i\nu(x_j - x'_k)].$$

Полученную формулу можно переписать следующим образом:

$$H(\nu) = H_1(\nu) H_2^*(\nu), \quad (\text{IX.20})$$

где

$$H_1 = \sum_{j=1}^n h_j \exp(-i\nu x_j) \text{ и } H_2 = \sum_{k=1}^m g_k \exp(-i\nu x'_k).$$

Пусть δx является наибольшим общим делителем совокупности чисел $x_j - x_1$, $j=2, \dots, n$; $x'_k - x'_1$, $k=2, \dots, m$. Ясно, что и $H_1(v)$ и $H_2(v)$ являются периодическими функциями с периодом $2\pi/\delta x$, поэтому каждая из этих функций является дискретным спектром последовательности, заданной с шагом δx . Обозначим $h' = \{h'_s\}$, где $h'_s = h'(s\delta x)$, числовую последовательность, отвечающую дискретному спектру $H_1(v)$. Эта последовательность определится аналогично формуле (IX.10). Соответственно обозначим $g' = \{g'_s\}$, где $g'_s = g'(s\delta x)$, числовую последовательность, отвечающую дискретному спектру $H_2(v)$. Формула (IX.20) означает, что $H(v)$ — дискретный спектр последовательности $\{c_s\}$, являющейся сверткой последовательностей $\{h'_s\}$ и $\{g'_s\}$, т. е. взаимной корреляцией последовательностей $\{h'_s\}$ и $\{g'_s\}$:

$$c_s = \sum_{(t)} h'_{t+s} g'_t, \quad s=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{IX.21})$$

Таким образом, заданная комбинированная группа оказалась эквивалентной группе приемников, расположенных с шагом δx .

Пример I. Пусть группа приемников и группа источников — однородные группы, имеющие одинаковое число элементов, расположенных с одинаковым шагом

Δx : $n = m$, $h_j = g_k$, $j, k = 1, \dots, n$. Тогда $H_2(v)$ выразится формулой (IX.17), $H(v)$ — формулой (IX.19). Эквивалентная группа, таким образом, имеет треугольное распределение чувствительности. Число приемников в эквивалентной группе равно $2n - 1$, а шаг между приемниками — Δx (что и следовало ожидать, так как $\delta x = \Delta x$).

Пример II. Предположим, что шаг в группе приемников равен Δx , а шаг в группе источников — $r\Delta x$. Распределение чувствительности в обеих группах произвольное. В этом случае $\delta x = \Delta x$, $h_j = h_j$ ($j = 1, \dots, n$), $g'_{rk} = g_k$, $g'_s = 0$ ($s \neq rk$). Формула (IX.21) дает

$$c_s = \sum_{k=1}^m g_k h_{s+rk}, \quad -r \cdot m < s < n.$$

Из этой формулы видно, что для получения эквивалентной группы нужно исходную группу приемников последовательно сдвигать на шаг группы источников, каждый раз умножая ее распределение чувствительности на соответствующее значение g_k . Если в эквивалентной группе в некоторую точку попадает несколько приемников, то их чувствительность нужно просуммировать. Действительная база эквивалентной группы равна $(n + rm)\Delta x$, т. е. примерно сумме действительных баз обеих групп.

На основе описанной процедуры, которая поясняется рис. 28, легко строить заданные эквивалентные группы из более простых групп источников и приемников.

§ 39. Синтез нерегулируемых интерференционных систем при минимальных сведениях о параметрах плоских волн

Несмотря на то что всякая регулируемая интерференционная система представляет собой набор нерегулируемых систем, методы синтеза систем того и другого типов несколько различаются. Дело в том, что при выборе параметров нерегулируемой системы, например группы

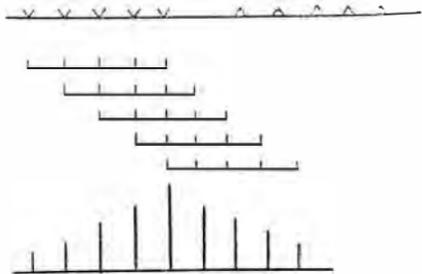


Рис. 28

приемников, приходится предусматривать одновременно и пропускание, и подавление волн с конечными приведенными скоростями.

В регулируемой системе, изменяя параметр θ , подбирают такие кинематические поправки $\Delta t_k = \Delta t_k(\theta)$, для которых выполняется условие (IX.5) относительно времен прихода полезной волны. Последняя пропускается без подавления, и дело сводится к подавлению всех остальных волн с конечными приведенными скоростями распространения. Синтез нерегулируемых интерференционных систем с этой точки зрения оказывается более общей задачей. Так как всякая система такого типа эквивалентна группе приемников, то мы и будем рассматривать задачу синтеза групп.

Синтез группы состоит в определении таких параметров, как шаг Δx , число приемников n и распределение чувствительности $\{h_k\}$, обеспечивающих желаемые свойства группы в отношении подавления помех и выделения полезных сигналов. Поскольку указанные свойства могут быть выражены в терминах спектральной и обобщенной характеристик группы, то задача сводится к выбору обобщенной характеристики $H(\nu)$ из заданного класса \mathcal{H}_0 обобщенных характеристик. В качестве \mathcal{H}_0 могут использоваться и такие широкие классы, как класс всех финитных групп с заданным шагом Δx , и более узкие классы, включающие, например; только однородные группы с фиксированными Δx или n .

В некоторых случаях решение задачи синтеза разбивается на два этапа: на первом выбирается характеристика из класса \mathcal{H} всех непрерывных и интегрируемых функций $f(\nu)$ [при условии $f(-\nu) = f^*(\nu)$], на втором функция $f(\nu)$ аппроксимируется в заданном классе \mathcal{H}_0 .

Критерий выбора обобщенной характеристики может сильно зависеть от полноты имеющейся информации о свойствах полезного сигнала и волны-помехи.

Минимальные сведения, имея которые можно разумно решать задачу синтеза группы, заключаются в том, что для полезных и мешающих волн задаются значения кажущихся (приведенных) скоростей и интервалы частот, которые занимают спектры этих волн. Пусть \mathcal{H}_0 — класс групп с фиксированным распределением чувствительности (например, класс однородных групп). Если для обобщенных характеристик этого класса известна зависимость границ ν' и ν'' полосы гашения от параметров n и Δx , то можно попытаться найти такие значения n и Δx , для которых спектры помех попадают в полосу гашения, а спектры полезных волн — в интервал пропускания.

Проиллюстрируем указанный подход к выбору группы на примере однородных групп. Пусть (ω'_c, ω''_c) — интервал частот, в котором располагается спектр полезного сигнала, (ω'_n, ω''_n) — соответствующий интервал для волны-помехи. Кажущиеся (приведенные) скорости распространения полезной волны и волны-помехи обозначим через v_c и v_n соответственно. Условимся, что волна-помеха имеет более низкую скорость:

$$v_c/v_n = p > 1. \quad (\text{IX.22})$$

Напомним (см. § 38), что первая полоса гашения однородной группы определяется границами $\nu' = 2\pi/n\Delta x$ и $\nu'' = 2\nu_0 - \nu' = 2\pi(n-1)/n\Delta x$.

Поскольку $v = \omega/v$, то для волны с приведенной скоростью v полоса гашения в терминах частоты ω выразится интервалом $[2\pi v/n\Delta x, 2\pi(n-1)v/n\Delta x]$. Ясно, что параметры группы, пропускающей полезную волну, удовлетворяют неравенству $\omega'_c < 2\pi v_c/n\Delta x$ или

$$n \Delta x < \frac{2\pi v_c}{\omega'_c} \quad (\text{IX.23})$$

Потребовав, чтобы ω'_n было больше, чем $v_n v'$, а ω''_n меньше, чем $v_n v''$, получим условия гашения волны-помехи:

$$\frac{\omega'_n}{v_n} > \frac{2\pi}{n \Delta x} \quad \text{и} \quad \frac{\omega''_n}{v_n} < \frac{2\pi(n-1)}{n \Delta x} \quad (\text{IX.24})$$

Из неравенства (IX.23) и первого из неравенств (IX.24) найдем условие, которому должна удовлетворять эффективная база $l = n\Delta x$:

$$\frac{2\pi v_n}{\omega'_n} < l < \frac{2\pi v_c}{\omega'_c} \quad (\text{IX.25})$$

В общем случае полученное условие может оказаться противоречивым. Это значит, что не существует группы, обеспечивающей одновременное помещение интервала (ω'_c, ω'_c) в полосу пропускания, а интервала (ω'_n, ω''_n) — в полосу гашения. Так как выбор граничных частот ω' и ω'' для сигналов, имеющих практически неограниченные спектры, является вопросом соглашения, мы можем изменить определение граничных частот. В соответствии с предположением (IX.22) всегда можно осуществить такой выбор ω'_c и ω'_c (при этом $\omega'_c > \omega'_n$), что неравенство (IX.25) будет разрешимо. Действительно, достаточно выполнить условие

$$p > \frac{\omega'_c}{\omega'_n} > 1.$$

Полученная группа будет разделять сигналы и помехи в той мере, в какой энергия, заключенная в выбранных интервалах частот, относится ко всей энергии сигналов и помех. Чем уже выбраны интервалы частот, тем проще подобрать параметры группы и меньше эффект группирования.

Зафиксировав любое из чисел l , удовлетворяющих условию (IX.25), выведем из второго неравенства (IX.24) условие для числа приемников:

$$n > \frac{l\omega''_n}{2\pi v_n} + 1 \quad (\text{IX.26})$$

Зафиксировав n , определим шаг группы из формулы:

$$\Delta x = l/n.$$

Пример I. Пусть $v_c = 6000$ м/с, $v_n = 1000$ м/с, $\omega'_c = \omega'_n = 2\pi \cdot 20$ рад/с и $\omega'_c = \omega''_n = 2\pi \cdot 60$ рад/с. Из условия (IX.25) находим $50 \text{ м} < l < 120 \text{ м}$. Выбрав $l = 60$ м, получим $n > 4,6$.

Выбирать очень большое n нет никакого смысла. При $n \rightarrow \infty$ ($l = \text{const}$) эффект однородной группы будет мало отличаться от эффекта

так называемой непрерывной группы (приемной линии) с равномерным распределением чувствительности:

$$h_0(x) = \begin{cases} 1, & -\frac{l}{2} \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 0, & |x| > \frac{l}{2}. \end{cases} \quad (\text{IX.27})$$

Относительно волны с приведенной скоростью v спектральная характеристика этой группы

$$G_0(\omega) = \int_{-l/2}^{l/2} \exp\left[-i\omega\left(\frac{x}{v}\right)\right] dx = \frac{\sin l\omega/2v}{\omega/2v}. \quad (\text{IX.28})$$

Данная характеристика имеет ту же самую граничную частоту $2\pi v/l$, определяемую как наименьший положительный корень уравнения $G_0(\omega) = 0$, что и характеристика дискретной однородной группы. Ослабление помехи, спектр которой располагается в окрестности частоты $\omega^* > 2\pi v_n/l$, можно ориентировочно охарактеризовать отношением соответствующего значения огибающей спектра, равной примерно $2v_n/\omega$, к $G_0(0) = l$, т. е. величиной

$$\eta_{\text{пр}} \approx \frac{2v_n}{l\omega^*}. \quad (\text{IX.29})$$

Таким образом, ослабление помехи при $n \rightarrow \infty$ зависит главным образом от эффективной базы группы.

Если скорости полезной волны и помехи точно неизвестны, но известны интервалы, в которых они находятся ($v'_c \leq v_c \leq v''_c$ и $v'_n \leq v_n \leq v''_n$), то осторожная стратегия при синтезе групп заключается в том, что условие (IX.25) рассчитывается на наименьшую скорость сигнала и наибольшую скорость помехи, а условие (IX.26) — на наименьшую скорость помехи. Это имеет смысл, если $v'_c > v''_n$.

Учитывая связь спектральных характеристик однородной и треугольной групп (см. § 38), можно прийти к выводу, что условия (IX.25), (IX.26) применимы и к треугольным группам, состоящим из $n_{\text{тр}} = 2n - 1$ приемников. Величина $l = l_{\text{тр}}$ теперь выражает эффективную базу треугольной группы, равную по-прежнему $n\Delta x$.

Из формулы (IX.19) следует, что эффективность ослабления помех треугольной группой на порядок выше. В частности, для треугольных групп с большим числом приемников степень ослабления можно выразить аналогично соотношению (IX.29):

$$\eta_{\text{тр}} \approx \left(\frac{2v_n}{l_{\text{тр}}\omega^*}\right)^2. \quad (\text{IX.30})$$

Однако сопоставить треугольные и однородные группы на основе используемых критериев не так просто, поскольку указанная эффективность треугольной группы достигается ценой увеличения числа прием-

ников вдвое (при фиксированном Δx). Если условие (IX.29) выполнено и для $l_{\text{пр}}$, и для $l_{\text{тр}}$ и если интересоваться только степенью ослабления помехи, имеющей скорость $v_{\text{п}}$ на фиксированной частоте ω^* , то, приравнявая $\eta_{\text{тр}}$ к $\eta_{\text{пр}}$ и выражая $l_{\text{тр}}$ и $l_{\text{пр}}$ через $n_{\text{тр}}$ и $n_{\text{пр}}$, получим, что одна и та же степень ослабления достигается при

$$n_{\text{тр}} = 2 \sqrt{\eta} n_{\text{пр}}.$$

Ясно, что при $\eta < 1/4$ треугольные многоэлементные группы более экономичны.

Подобный же анализ применим к группе, распределение чувствительностей которой является автокорреляцией последовательности (IX.18) [обобщенные характеристики этих групп совпадают с $|H_{\text{пр}}(\nu)|^4$] и т. д. Возникает вопрос: насколько широк класс групп, синтез которых может быть осуществлен на основе условий типа (IX.25) и (IX.26)? Очевидно, это такие группы, которые имеют полосу гашения вида $(\nu, 2\nu_0 - \nu')$, где ν' — обратно пропорционально параметру, имеющему смысл эффективной базы группы. Более конструктивный ответ дается следующим утверждением.

Теорема. Пусть $h_k = \Delta x h_0(k\Delta x)$, где $h_0(x)$ — финитная функция, отличная от нуля на интервале $(-l_0/2, l_0/2)$ и имеющая абсолютно-интегрируемый на $(-\infty, \infty)$ спектр $H_0(\nu)$.

Если значение ν' удовлетворяет условию

$$\int_{\nu'}^{\infty} |H_0(\nu)|^2 d\nu = \varepsilon E, \quad \text{где} \quad E = \int_0^{\infty} |H_0(\nu)|^2 d\nu, \quad (\text{IX.31})$$

то при $\Delta x \rightarrow 0$ интегралы

$$\int_0^{\nu'} |H(\nu)|^2 d\nu \quad \text{и} \quad \int_{2\nu_0 - \nu'}^{2\nu_0} |H(\nu)|^2 d\nu \quad (\text{IX.32})$$

стремятся каждый к $(1 - \varepsilon)E$, а интеграл

$$\int_{\nu'}^{2\nu_0 - \nu'} |H(\nu)|^2 d\nu$$

— к величине не более $2\varepsilon E$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из абсолютной интегрируемости $H_0(\nu)$ вытекает возможность применения формулы (III.11), связывающей дискретные и непрерывные спектры. В данном случае упомянутая формула означает, что

$$H(\nu) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_0(\nu + 2p\nu_0), \quad \nu_0 = \pi/\Delta x. \quad (\text{IX.33})$$

Теперь из неравенства (III.18) выводим, что

$$\int_0^{\nu_0} |H_0(\nu) - H(\nu)|^2 d\nu \leq (2+Q) \int_{\nu_0}^{\infty} |H_0(\nu)|^2 d\nu, \quad Q \ll 1.$$

Так как при $\Delta x \rightarrow 0$ имеем $\nu_0 = \frac{\pi}{\Delta x} \rightarrow \infty$, то из абсолютной интегрируемости $H_0(\nu)$ следует, что на интервале $(0, \nu_0)$ функция $H(\nu)$ в среднеквадратической норме сходится к $H_0(\nu)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому на любом интервале (a, b) , где $0 \leq a \leq b \leq \nu_0$,

норма $H(\nu)$ стремится к норме $H_0(\nu)$. Отсюда сразу получаем, что интеграл от $|H(\nu)|^2$ на промежутке $(0, \nu')$ стремится к $(1 - \varepsilon)E$, а на промежутке (ν', ν_0) — к величине, не превосходящей εE . Для завершения доказательства нужно вспомнить, что $H(\nu)$ имеет период $2\nu_0$ и что $|H(-\nu)| = |H(\nu)|$. Отсюда $|H(\nu_0 + u)| = |H[2\nu_0 - (\nu_0 - u)]| = |H(\nu_0 - u)|$. Значит, интервал $(\nu', 2\nu_0 - \nu')$ состоит из симметричных интервалов (ν', ν_0) и $(\nu_0, 2\nu_0 - \nu')$, а оба интеграла (IX.32) равны.

Доказанная теорема означает, что интервал $(0, \nu')$ является полосой пропускания, а интервал $(\nu', 2\nu_0 - \nu')$ — полосой гашения дискретной группы $h_k = \Delta x h_0(k\Delta x)$ при малых Δx (т. е. при больших n). Так как функция $h_0(ax)$ имеет спектр $\frac{1}{a} H_0\left(\frac{\nu}{a}\right)$, то граничная частота ν' обратно пропорциональна значению $l_0: \nu' = 2\pi c/l_0$. Следовательно, можно применить при выборе группы условие (IX.25), приняв $l = l_0/c$.

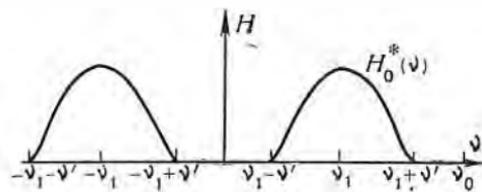


Рис. 29

Равенство (IX.33), связывающее обобщенные характеристики дискретных и непрерывных групп, показывает, как конструировать группы, выделяющие волны с меньшими кажущимися скоростями на фоне высокоскоростных помех, т. е. когда условие (IX.22) не выполнено. Для этого нужно в окрестности точки

$\nu = 0$ получить полосу гашения. Покажем, как это можно сделать.

Пусть спектр $H_0(\nu)$ функции $h_0(x)$ имеет граничную частоту ν' . Введем новую функцию:

$$h_0^*(x) = h_0(x) \cos \nu_1 x.$$

Выразив $\cos \nu_1 x$ по формуле Эйлера и применив теорему о смещении спектра, получим, что спектр функции $h_0^*(x)$ равен

$$\frac{1}{2} [H_0(\nu - \nu_1) + H_0(\nu + \nu_1)].$$

Если $\nu_1 \gg \nu'$, то полученный спектр сосредоточен в интервалах $(\nu_1 - \nu', \nu_1 + \nu')$ и $(-\nu_1 - \nu', -\nu_1 + \nu')$, поэтому интервал $(0, \nu_1 - \nu')$ является полосой гашения (рис. 29). В соответствии с формулой (IX.32) обобщенная характеристика дискретной группы $h_k = \Delta x h_0^*(k\Delta x)$ будет иметь область пропускания, являющуюся объединением следующих интервалов:

$$(\nu_1 - \nu' + 2p\nu_0, \nu_1 + \nu' + 2p\nu_0) \text{ и } (-\nu_1 - \nu' + 2p\nu_0, -\nu_1 + \nu' + 2p\nu_0),$$

$$p = 0, \pm 1, \dots$$

Отсюда следует, что при $\nu_0 > \nu_1 + \nu'$ в интервале $(0, \nu_1 - \nu')$ заключена полоса гашения, а в интервале, включающем промежутки $(\nu_1 - \nu', \nu_1 + \nu')$ — полоса пропускания.

Значения ν_1 и ν' выбираются следующим образом. Пусть $v_{II} > v_c$. Тогда условия пропускания сигнала выразятся неравенствами

$$\nu_1 - \nu' \leq \frac{\omega_c'}{v_c}, \quad \nu_1 + \nu' \geq \frac{\omega_c''}{v_c},$$

а условие гашения помехи — неравенством

$$\nu_1 - \nu' \geq \frac{\omega''_{\Pi}}{\nu_{\Pi}}.$$

Если

$$\frac{\nu_{\Pi}}{\nu_c} > \frac{\omega''_{\Pi}}{\omega'_c}, \quad (\text{IX.34})$$

то полученная система неравенств разрешима (рис. 30).

Пример II. Пусть $\nu_c = 2000$ м/с, $\nu_{\Pi} = 12000$ м/с, граничные частоты — как в примере 1. Условие (IX.34) выполнено. Легко проверить, что возможны следующие значения ν_1 и ν' : $\nu' = \pi/1000$ рад/м,

$\nu_1 = \frac{2\pi}{100}$ рад/м. Кроме того, необходимо, чтобы $\nu_0 > 3\pi/100$ рад/м (это означает, что $\Delta x < < 100/3 \approx 30$ м). Если $h_0(x)$ определить формулой (IX.27), то значение эффективной базы l будет равно $2\pi/\nu' = 200$ м.

Строго говоря, равенство (IX.32), на котором основан данный метод, получено нами только для абсолютно-интегрируемых $H_0(\nu)$. Это условие не выполнено для однородной группы (IX.27). Можно, однако, показать, что в подобных ситуациях первая часть равенства (IX.32) может сходиться к $H(\nu)$ при соответствующем выборе способа суммирования. В частности, читателю представляется самому убедиться в том что равенство (IX.32) выполнено для однородной группы, если при суммировании объединять слагаемые с одинаковым значением $|p|$. Указание: нужно воспользоваться формулой

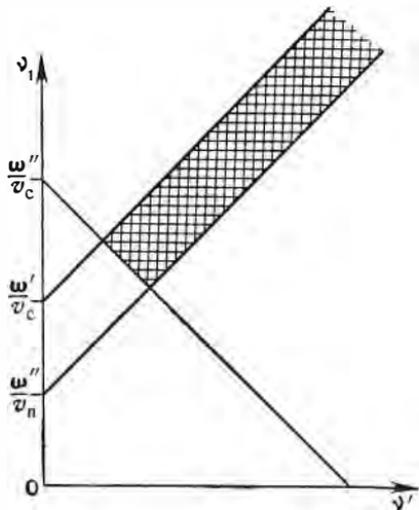


Рис. 30

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{x} + 2x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x-n)^2} \right) = \operatorname{cosec} 2\pi x.$$

Если спектры помехи и сигнала неизвестны (известны только интервалы частот, которые они занимают), то разумной мерой эффективности гашения является максимальное значение $|H(\nu)|$ в полосе гашения: группа G с полосой гашения (ν', ν'') тем лучше, чем меньше величина

$$\gamma = \max_{\nu' \leq \nu \leq \nu''} |H(\nu)|/H(0). \quad (\text{IX.35})$$

Сколь угодно малое значение γ можно получить при помощи групп, распределение чувствительности которых является s -кратными автокорреляциями последовательности $\{1, 1, \dots, 1\}$, так как обобщенные характеристики равны $|H_{\text{гп}}(\nu)|^{2s}$ (при $s = 1$ имеем треугольную группу). Однако, при увеличении s число приемников в этих группах растет, как $2^s n$, поэтому они не очень экономичны и (это главное) обладают большими действительными базами. А на больших базах никакие реальные волны не могут считаться плоскими. В связи с этим желательно сделать величину γ минимальной при фиксированных значениях n и Δx .

Решение этой задачи рассматривается в классе симметричных групп с нечетным числом приемников $n = 2m + 1$. Если заумеровать приемники от $-m$ до m , то формула (IX.14) будет эквивалентна следующей

$$H(\nu) = h_0 + 2 \sum_{k=1}^m h_k \cos(k\nu \Delta x). \quad (\text{IX.36})$$

В § 13 было показано, что данное выражение является полиномом степени $2n$ относительно переменной $u = \cos\left(\frac{\nu \Delta x}{2}\right)$ [заметим также, что при $|u| < 1$ выражение $\cos(n \arccos u)$ является определением полинома Чебышева $T_n(u)$ порядка n].

В силу периодичности $H(\nu)$ последнюю достаточно выбрать на интервале $(0, 2\nu_0)$. При изменении ν от 0 до $2\nu_0$ переменная u изменяется от $+1$ до -1 , при изменении ν от ν' до $\nu'' = 2\nu_0 - \nu'$ переменная u изменяется от $\alpha = \cos\left(\frac{\nu' \Delta x}{2}\right)$ до $-\alpha$. Поскольку в соответствии с условием эквивалентности обобщенная характеристика определяется с точностью до постоянного множителя, можно принять $H(0) = 1$. Тогда значение γ выразится непосредственно максимальным отклонением полинома на интервале $(-\alpha, \alpha)$. Таким образом, задача сводится к выбору полинома степени $2m$, который в интервале $(-\alpha, \alpha)$ имеет наименьшее отклонение от нуля среди всех полиномов $P_{2m}(u)$, равных единице при $u = \pm 1$.

Эта задача эквивалентна задаче выбора характеристики полосового фильтра низкой частоты. Ее решение определяется формулой (III.57), при этом

$$\gamma = \frac{1}{T_{2m}(1/\alpha)} = \frac{1}{T_{2m}\left[1/\cos\left(\frac{\nu' \Delta x}{2}\right)\right]}. \quad (\text{IX.37})$$

Если эффективность гашения γ недостаточна, следует перейти к другому значению m .

Распределение чувствительности полученной группы (ее называют чебышевской) определится формулой (IX.12) при

$$H(\nu) = \gamma T_{2m} \left[\frac{\cos\left(\frac{\nu \Delta x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\nu' \Delta x}{2}\right)} \right]. \quad (\text{IX.38})$$

Более удобно распределение чувствительности искать исходя из равенства $\cos(k\nu \Delta x) := T_{2k}\left[\cos\left(\frac{\nu \Delta x}{2}\right)\right]$, воспользовавшись которым обобщенная характеристика (IX.36) раскрывается как полином от u . Приравнявая полученное выражение полиному (IX.38), находим нужные коэффициенты.

Пример III. Пусть помеху, которая характеризуется данными из примера I, нужно подавить не менее чем в 5 раз ($\gamma \leq 1/5$). Выбираем $\nu' = \omega_p''/v_{\Pi} = 0,02 \cdot 2\pi \text{ рад/м}$ и Δx из условия $2\nu_0 - \nu' \leq \omega_p''/v_{\Pi}$. Подставляя численные данные, получим $\Delta x < 12$ м. Пусть $\Delta x = 10$ м, тогда $\alpha = \cos(0,1 \times 2\pi) = 0,95$.

Из условия $\gamma \leq 1/5$ и формулы (IX.37) получаем следующее условие для m :

$$T_{2m}(1,05) \geq 5.$$

Так как при $|u| > 1$

$$T_{2m}(u) = \text{ch}(2m \text{ Arch } u), \quad (\text{IX.39})$$

то, взяв от обеих частей последнего равенства арха-косинус гиперболический, получим

$$2m \geq \frac{\text{Arch } 5}{\text{Arch } 1,05} \approx 7.$$

Отсюда $n = 2m + 1 \geq 9$.

Примем $m = 4$. Воспользовавшись известными выражениями для $T_{2k}(u)$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$), $T_0(u) = 1$, $T_2(u) = 2u^2 - 1$, $T_4(u) = 8u^4 - 8u^2 + 1$, $T_6(u) = 32u^6 - 48u^4 + 18u^2 - 1$, $T_8(u) = 128u^8 - 256u^6 + 160u^4 - 32u^2 + 1$, получим из (IX.36): $H(v) = 2 \cdot 128h_4u^8 - 2 \cdot (256h_4 - 32h_3)u^6 + 2 \times \times (160h_4 - 48h_3 + 8h_2)u^4 - 2 \cdot (32h_4 - 18h_3 + 8h_2 - 2h_1)u^2 + 2(h_4 - h_3 + h_2 - h_1) + h_0$. В то же самое время, отбросив в (IX.38) постоянный множитель γ , имеем

$$H(v) = \frac{128}{(0,95)^8} u^8 - \frac{256}{(0,95)^6} u^6 + \frac{160}{(0,95)^4} u^4 - \frac{32}{(0,95)^2} u^2 + 1.$$

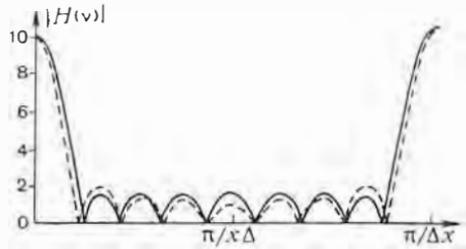


Рис. 31

Сравнивая два последних выражения, последовательно находим: $h_4 = 0,76$; $h_3 = 0,61$; $h_2 = 0,76$; $h_1 = 0,85$; $h_0 = 0,88$.

На рис. 31 изображены амплитудные характеристики полученной чебышевской (сплошная линия) и однородной (пунктир) групп.

§ 40. Оптимальные группы

Рассматривавшиеся выше методы синтеза дают группы, которые благоприятствуют выделению сигнала и подавлению помехи, но еще не гарантируют удовлетворительного решения данной задачи. В самом деле, главная цель, которая достигается этими методами, заключается в помещении спектра сигнала в полосу пропускания, а спектра помехи — в полосу гашения. Кроме того, мы добивались малых значений $|H(v)|$ в полосе гашения. Ясно, что этих фактов недостаточно, чтобы гарантировать доминирование волн на фоне интенсивных регулярных помех.

Если спектры $S_u(\omega)$ и $S_\xi(\omega)$, характеризующие соответственно полезный сигнал и помеху, известны, то качество группы G , имеющей обобщенную характеристику $H(v)$, может быть оценено сравнительной интенсивностью сигнала и помехи на выходе группы. Будем измерять сравнительную интенсивность отношением квадрата амплитуды в момент $t = 0$, совпадающий с моментом прихода сигнала в приемник с наименьшим (по абсолютной величине) номером, к энергии помехи на выходе группы. Поскольку спектральная характеристика группы для волны

с кажущейся (приведенной) скоростью v равна $H(\omega/v)$, то указанное отношение определится следующим образом:

$$\mu = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(\omega) H\left(\frac{\omega}{v_c}\right) d\omega \right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| S_{\xi}(\omega) H\left(\frac{\omega}{v_n}\right) \right|^2 d\omega}$$

Осуществим в числителе замену $v = \omega/v_c$, а в знаменателе замену $v = \omega/v_n$:

$$\mu = \frac{v_c^2 \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_u(v_c v) H(v) dv \right|^2}{v_n^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S_{\xi}(v_n v)|^2 |H(v)|^2 dv} \quad (\text{IX.40})$$

Пусть характеристика $H(v)$ принадлежит узкому классу групп \mathcal{H}_0 с фиксированным распределением чувствительности. Тогда, изменяя Δx , можно определить группу, наилучшую в этом классе по критерию μ . Если μ недостаточно велико, то следует увеличить n и снова искать максимальное значение $\mu(\Delta x)^1$ при фиксированном n . Сравнивая μ для групп с различным распределением чувствительности, можно получить представление о том, какой тип группы предпочтителен при разделении заданных сигналов и помех.

Поставим задачу выбора наилучшей обобщенной характеристики в более широком классе функций, не фиксируя заранее тип группы. Заметим, что максимизация отношения (IX.40) эквивалентна максимизации отношения (VII.30) при замене $L(\omega)$ на $H(v)$, $S_u(\omega)$ на $S_u(v_c v)$ и $N(\omega)$ на $|S_{\xi}(v_n v)|^2$. Отсюда сразу следует решение данной вариационной задачи:

$$H_0(v) = \frac{S_u^*(v_c v)}{|S_{\xi}(v_n v)|^2} \quad (\text{IX.41})$$

Функция $H_0(v)$, вообще говоря, не является периодической, поэтому не определяет никакой дискретной группы. Но поскольку $H_0(-v) = H_0^*(v)$, то в соответствии с теоремой 1 из § 38 она может быть сколь угодно точно аппроксимирована в любом интервале $(-v_0, v_0)$. Интервал $(-v_0, v_0)$ достаточно выбрать так, чтобы он охватывал и спектр сигнала, и спектр помехи:

$$\frac{\omega_c''}{v_c} \leq v_0 \quad \text{и} \quad \frac{\omega_n''}{v_n} \leq v_0.$$

¹ Поиск максимума $\mu(\Delta x)$ требует численного определения μ для каждого значения Δx из некоторого множества значений.

Распределение чувствительности полученной группы в соответствии с формулой (IX.34) определяется так:

$$h_k^0 = \begin{cases} \frac{1}{2v_0} \int_{-v_0}^{v_0} \frac{S_u^*(v_c v)}{|S_{\xi}(v_n v)|^2} \exp(ivk \Delta x) dv, & k=0, \pm 1, \dots, \pm m \\ 0, & |k| > m \quad (\Delta x = \pi/v_0), \end{cases} \quad (\text{IX.42})$$

где значение m зависит от достигаемой точности аппроксимации.

Распределение h_k^0 симметрично только в том случае, когда функция $S_u(\omega)$ является вещественной (т. е. когда сигнал симметричен). В остальных случаях оптимальная группа несимметрична и зависит от знака скорости v_c [при этом $h_k^0(v_c) = h_{-k}^0(-v_c)$].

Если наилучшая характеристика ищется в классе симметричных групп, то с учетом равенства $H(-v) = H(v)$ перепишем числитель в формуле (IX.40):

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} S_u(v_c v) H(v) dv \right|^2.$$

Как видно, наилучшая характеристика определяется функцией $\operatorname{Re} H_0(v)$. Соответствующее распределение чувствительности равно $(h_k^0 + h_{-k}^0)/2$.

При $m \rightarrow \infty$ обобщенная характеристика группы (IX.42) стремится к $H_0(v)$. Так как $H_0(v)$ доставляет максимальное значение μ в классе произвольных обобщенных характеристик, то группа (IX.42) по крайней мере асимптотически (при $m \rightarrow \infty$) оптимальна в классе дискретных групп. Однако при малых m уже нельзя утверждать, что формула (IX.42) даст наилучшую группу среди групп с заданным числом приемников. Поэтому при синтезе малоэлементных групп следует максимизировать критерий качества в соответствующем классе обобщенных характеристик.

Задачу синтеза малоэлементных групп будем решать, несколько изменив критерий качества, а именно, будем измерять сравнительную интенсивность сигнала и помехи отношением их энергий на выходе групп:

$$\eta = \frac{\int_0^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n h_k u \left[t - \left(\frac{k \Delta x}{v_c} \right) \right] \right|^2 dt}{\int_0^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n h_k \tilde{u} \left[t - \left(\frac{k \Delta x}{v_n} \right) \right] \right|^2 dt}. \quad (\text{IX.43})$$

Введем автокорреляцию сигнала

$$R_u(\tau) = \int_0^{\infty} u(t + \tau) u(t) dt$$

и аналогично определим по $\xi(t)$ автокорреляцию помехи $R_{\xi}(t)$. Тогда после простых преобразований критерий η выразится так:

$$\eta = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n R_{j-k}^{(u)} h_j h_k}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n R_{j-k}^{(\xi)} h_j h_k}, \quad (\text{IX.44})$$

где

$$R_{j-k}^{(u)} = R_u \left[\frac{(j-k) \Delta x}{v_c} \right] \quad \text{и} \quad R_{j-k}^{(\xi)} = R_{\xi} \left[\frac{(j-k) \Delta x}{v_{\Pi}} \right].$$

Дальнейшие действия зависят от того, в каком классе ищется наилучшая группа приемников. Если класс \mathcal{H}_0 представляет собой совокупность групп с фиксированным типом распределения чувствительности, то следует при каждом n искать максимум η по Δx , выбрав такое минимальное n , при котором $\max \eta(\Delta x)$ все еще больше заданного значения η_{*} .

Для однородных групп функция $\eta(\Delta x)$ выглядит так:

$$\eta(\Delta x) = \frac{\sum_j \sum_k R_u \left[\frac{(j-k) \Delta x}{v_c} \right]}{\sum_j \sum_k R_{\xi} \left[\frac{(j-k) \Delta x}{v_{\Pi}} \right]}.$$

Ясно, что отыскание максимума $\eta(\Delta x)$ требует осуществления численных экспериментов на ЭВМ.

Отыскание наилучшей группы в классе произвольных групп с заданным числом приемников n сводится к следующей классической задаче линейной алгебры: найти вектор $\mathbf{h}^* = (h_1^*, h_2^*, \dots, h_n^*)$, который максимизирует отношение двух квадратичных форм (IX.44).

Обозначим через \mathbf{R}_u и \mathbf{R}_{ξ} квадратные матрицы порядка n с элементами $R_{j-k}^{(u)}$ и $R_{j-k}^{(\xi)}$ ($j, k = 1, \dots, n$) соответственно. Тогда максимум достигается в том случае [17], когда вектор \mathbf{h}^* является собственным вектором матрицы $\mathbf{R}_{\xi}^{-1} \mathbf{R}_u$, отвечающим наибольшему собственному значению этой матрицы λ_{\max} ; при этом $\max \eta = \lambda_{\max}$. Ясно, что, как и ранее, $\max \eta$ — функция Δx (при каждом n). Выбор подходящих значений n и Δx может быть осуществлен с применением стандартных алгоритмов анализа проблемы собственных значений квадратной матрицы. В частности, можно указать следующий итерационный процесс: $\mathbf{b}^{(n+1)} = \mathbf{R}_{\xi}^{-1} \mathbf{R}_u \mathbf{b}^{(n)}$, который при произвольном начальном векторе $\mathbf{b}^{(0)}$ дает при $n \rightarrow \infty$ искомого распределение чувствительности \mathbf{h}^* . Теперь из уравнения $\mathbf{R}_{\xi}^{-1} \mathbf{R}_u \mathbf{h}^* = \lambda_{\max} \mathbf{h}^*$ найдем λ_{\max} .

Оптимальные распределения чувствительности h^0 и h^* является очень сложными и их следует определять только в том случае, когда имеется очень хорошая информация о форме сигнала и помехи.

§ 41. Разрешающая способность и синтез регулируемых интерференционных систем при разделении плоских волн

Соответственно определениям из § 38 регулируемая интерференционная система, действующая в классе плоских волн, задается следующими параметрами: расстановкой и распределением чувствительности приемников (для равномерных расстановок имеем параметры n , Δx и h_1, h_2, \dots, h_n) и системой кинематических поправок $\Delta t_k = -\frac{x_k}{c}$, где переменный параметр c принимает ряд значений c_1, c_2, \dots, c_M .

Обычно полагают

$$c_j = \frac{\Delta x}{j \delta \tau}, \quad (\text{IX.45})$$

где $\delta \tau$ имеет смысл минимального сдвига между соседними приемными элементами. Результат суммирования для фиксированного c_j называют суммотрассой, а набор таких суммотрасс — суммограммой.

Обобщенная характеристика регулируемой интерференционной системы одинакова для всех $j = 1, 2, \dots, M$, так как она не зависит от значения приведенной скорости. Последняя для волны с кажущейся скоростью v_x определяется соотношением

$$\frac{1}{v_j} = \frac{1}{v_x} - \frac{1}{c_j}. \quad (\text{IX.46})$$

При изменении c_j изменяется только положение интервалов $\left(\frac{\omega'}{v_j}, \frac{\omega''}{v_j}\right)$, который занимает спектр волны с кажущейся скоростью v_x на оси ν .

Регулируемые интерференционные системы обладают значительно большими возможностями, чем нерегулируемые. А именно, добиваясь того, чтобы параметр c_j поочередно совпадал с кажущейся скоростью v_x любой из регистрируемых волн, получаем такие суммотрассы, на которых выделяемая волна суммируется с бесконечной кажущейся скоростью (т. е. без искажения), а все остальные волны в той или иной степени подавляются. Положение выделяемых волн фиксируется разрастанием амплитуды выходного сигнала на времени прихода в приемник с нулевой кинематической поправкой. Важно подчеркнуть, что при использовании регулируемых интерференционных систем отпадает необходимость априорного задания кажущихся скоростей. Значение c_j , для которого наблюдается разрастание, служит оценкой кажущейся скорости выделяемой волны. Описанный метод разделения волн при использовании однородного распределения чувствительности, получивший развитие в работах Л. А. Рябинкина, носит название регулируемого направленного приема (РНП).

Прежде чем поставить вопрос о синтезе регулируемой интерференционной системы, рассмотрим оценку ее разрешающей способности.

Пусть рассматриваемая регулируемая интерференционная система имеет обобщенную характеристику $H(\nu)$ с полосой гашения $(\nu', 2\nu_0 - \nu')$. Номер суммотрассы j^* , на которой наблюдается максимум разрастания

для волны с кажущейся скоростью v_x , определяется из условия $\Delta x/j\delta\tau = v_x$, откуда

$$j^* = \frac{\Delta x}{v_x \delta\tau}. \quad (\text{IX.47})$$

При увеличении $|j - j^*|$ интервал $(\omega'/v_j, \omega''/v_j)$ постепенно входит в полосу гашения и при значении $j = j'$, которое определится из условия $|\omega'/v_j| = v'$, данная волна будет гаситься. Если в это условие подставить выражение (IX.46), получим равенство

$$\omega' \left| \frac{1}{v_x} - \frac{j' \delta\tau}{\Delta x} \right| = v'.$$

Отсюда, учитывая формулу (IX.45), найдем:

$$|j' - j^*| = \frac{v' \Delta x}{\omega' \delta\tau}.$$

Две волны, разрастания которых располагаются на трассах с номерами j_1^* и j_2^* и спектр которых имеет одинаковую нижнюю граничную частоту ω' , естественно считать разрешенными, если

$$|j_1^* - j_2^*| > 2 \frac{v' \Delta x}{\omega' \delta\tau}.$$

Выразив j_1^* и j_2^* через кажущиеся скорости $v_x^{(1)}$ и $v_x^{(2)}$ обеих волн, получим условие разрешения волн в виде следующего неравенства:

$$\frac{|v_x^{(1)} - v_x^{(2)}|}{v_x^{(1)} \cdot v_x^{(2)}} > \frac{2v'}{\omega'}. \quad (\text{IX.48})$$

В частности, если используется однородная группа, для которой, как мы знаем, $v' = 2\pi/l$, то волны будут разрешены в случае достаточно большой эффективной базы:

$$l > \frac{4\pi}{\omega'} \frac{v_x^{(1)} \cdot v_x^{(2)}}{|v_x^{(1)} - v_x^{(2)}|}. \quad (\text{IX.49})$$

Такое же условие получим и для более широкого класса групп, охарактеризованных теоремой из § 39.

Эффективность регулируемой интерференционной системы, имеющей обобщенную характеристику $H(v)$, определяется двумя условиями: 1) чем меньше значение γ [см. формулу (IX.35)], тем меньше искажение разрастаний выделяемых волн из-за интерференции с другими волнами; 2) чем меньше значение v' (при заданном уровне γ), тем выше в соответствии с неравенством (IX.48) разрешающая способность системы. Если ограничиться рассмотрением систем, обладающих заданным уровнем гашения $\gamma \leq \gamma_*$, то основной характеристикой системы будет значение v' . Отсюда следует, что когда в нашем распоряжении отсутствуют сведения о форме изучаемых регулярных волн, задача синтеза регулируемой интерференционной системы должна быть сформулирована так: при заданном уровне гашения $\gamma \leq \gamma_*$, получить наименьшее значение v' . Если Δx и $n = 2m +$

+ 1 фиксированы, то решение заключается в выборе чебышевской характеристики (IX.38) для минимального ν' , удовлетворяющего неравенству

$$T_{2m} \left(\frac{1}{\cos \frac{\nu' \Delta x}{2}} \right) \geq \frac{1}{\gamma_*} \quad (\text{IX.50})$$

(если такое решение существует).

Действительно, пусть неравенство (IX.50) имеет решение и пусть ν'_* — наименьшее из его положительных решений, так как значение $\nu' = \nu'_*$ обращает неравенство (IX.50) в равенство, у всякой другой обобщенной характеристики, имеющей интервал гашения $(\nu'_*, 2\nu_0 - \nu'_*)$ и не являющейся чебышевской, уровень гашения будет больше γ_* . Если бы существовали группы с $\nu' < \nu'_*$ при $\gamma \leq \gamma_*$, то среди них нашлись бы чебышевские, это противоречит тому, что ν'_* — наименьшее из положительных решений неравенства (IX.50).

Используя определение полинома Чебышева при аргументах больше единицы [см. формулу (IX.39)], найдем после элементарных преобразований

$$\nu'_* = \frac{2}{\Delta x} \arccos \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \left(\frac{1}{2m} \operatorname{Arch} \frac{1}{\gamma_*} \right)} \right]. \quad (\text{IX.51})$$

В частности, при $\Delta x = 5$ и $m = 5\nu'_* = 0,09 \text{ м}^{-1}$. Формулы (IX.48) и (IX.51) определяют максимальную разрешающую способность регулируемой интерференционной системы с заданными n и Δx . Кстати, формула (IX.51) показывает, что решение неравенства (IX.50) всегда существует.

При расчете регулируемой интерференционной системы необходимо предотвратить появление вторичных разрастаний, связанных с попаданием интервала $(\omega'/\nu_j, \omega''/\nu_j)$ в область вторичного максимума $(2\nu_0 - \nu', 2\nu_0 + \nu')$. Поэтому необходимо потребовать, чтобы для всех $j = 1, \dots, M$

$$\left| \frac{\omega''}{\nu_j} \right| < 2\nu_0 - \nu'.$$

После подстановки ν_j получим следующее условие:

$$\delta\tau |j - j^*| \leq \frac{2\pi - \nu' \Delta x}{\omega''}, \quad j = 1, \dots, M.$$

Так как $|j - j^*| < M$, то полученное условие заведомо будет выполнено, если

$$\tau_M \leq \frac{2\pi - \nu' \Delta x}{\omega''},$$

где $\tau_M = M\delta\tau$ — максимальный сдвиг между соседними каналами интерференционной системы.

§ 42. Суммирование по методу общей глубинной точки

При проведении сейсморазведки в большей части нефтеносных районов наиболее сильными помехами являются кратные отраженные волны. Так как кажущиеся скорости распространения кратных и однократных

волн различаются незначительно, для их разделения необходимо применять также большие базы суммирования, что концепция плоских волн становится неправомерной. Так, при кажущихся скоростях распространения полезной волны 6 км/с и кратной волны 5 км/с неравенство (IX.49) при $\omega' = 2\pi \cdot 20$ Гц дает $l > 3$ км. Ясно, что эффективное разделение обеих волн на таких базах возможно только при суммировании по реальному годографу полезной отраженной волны. В частности, при выделении волны, отраженной от нижней границы однородного слоя

$$0 \leq z \leq x \operatorname{tg} \varphi + h,$$

кинематические поправки должны определяться формулами вида

$$\Delta t = a_0 - \frac{1}{v} \sqrt{(x - x^e)^2 + 4(h + x^e \sin \varphi)(x - x^e) \sin \varphi + 4(h + x' \sin \varphi)^2}, \quad (\text{IX.52})$$

где x — абсцисса приемника; x' — абсцисса источника. Константа a_0 обычно выбирается так, чтобы при $x = x'$ кинематическая поправка была равна нулю (т. е. приравнивается нулевому времени).

Кинематическая поправка (IX.52) зависит не от одного, как это было при разделении плоских волн, а от трех параметров — h , φ и v . Как правило, эти параметры, особенно h и φ , определение которых входит в задачу всей интерпретации, неизвестны. Простой перебор возможных значений h , φ и v — далеко не простое решение задачи. Пусть число варьируемых значений каждого параметра равно M . Если числовая последовательность, определяющая сигнал на выходе каждого из n приемников, содержит K отсчетов, то общее число сложений равно $M^3 n K$ вместо $n K$ — для нерегулируемой системы и $M n K$ — для регулируемой системы, функционирующей в классе плоских волн. Вторым (на наш взгляд, менее существенным) обстоятельством является необозримость получающейся суммограммы, содержащей M^3 суммотрасс.

Блестящая идея, приведшая В. Мэйна к методу общей глубинной точки, заключается в выборе такой схемы суммирования, которая позволила уменьшить число независимых параметров. Рассмотрим множество трасс, каждая из которых зарегистрирована приемником в точке x от источника в точке x' . Если полевой материал был получен по системе многократного прослеживания, то из этого множества можно выбрать такую совокупность трасс, называемую сейсмограммой ОГТ, для которых сумма $x + x'$ равна постоянной величине; обозначим ее $2x_0$ ¹. Максимальное число трасс в сейсмограммах ОГТ (каждая такая сейсмограмма определяется константой x_0) выражает кратность системы наблюдения.

Найдем выражение для годографа ОГТ, представляющего собой зависимость времени пробега отраженной волны от $d = x - x'$ при $x + x' = 2x_0$. Перенесем начало координат в точку x_0 . Тогда параметр h выразит глубину по нормали к границе в точке x_0 . По определению

$$\tau(d) = \frac{1}{v} \sqrt{d^2 + 4 \left[h - \left(\frac{d}{2} \right) \sin \varphi \right] d \sin \varphi + 4 \left[h - \left(\frac{d}{2} \right) \sin \varphi \right]^2}.$$

¹ При $\varphi = 0$ значение x_0 выражает абсциссу точки отражения, общей для всех трасс сейсмограммы ОГТ.

После преобразований найдем

$$\tau(d) = \sqrt{\tau_0^2 + \frac{d^2}{v_e^2}}, \quad (\text{IX.53})$$

где

$$\tau_0 = 2h/v, \quad v_e = v/\cos \varphi. \quad (\text{IX.54})$$

Таким образом, годограф ОГТ, определяющий систему кинематических поправок при суммировании трасс сейсмограммы ОГТ, фактически зависит от двух параметров τ_0 и v_e . Величину d будем называть параметром трассы в сейсмограмме ОГТ.

Ценой некоторого искажения полезных сигналов на трассах с большим значением параметра d удается избавиться еще от одного параметра. Заметим, что при $v_e = \text{const}$ зависимость между τ_0 и $\tau_d - \tau(d)$ взаимнооднозначна:

$$\tau_0 = \sqrt{\tau_d^2 - \frac{d^2}{v_e^2}}.$$

Следовательно, для любого момента времени t и любой трассы сейсмограммы ОГТ $x_d(t)$ с параметром d можно определить поправку

$$\Delta t(t, d) = \sqrt{t^2 - \frac{d^2}{v_e^2}} - t, \quad (\text{IX.55})$$

которую нужно ввести в трассу $x_d(t)$, если полезная волна на данной трассе имеет вступление в момент времени t .

Вычислив поправку $\Delta t(t, d)$ для всех t и d и введя их во все трассы сейсмограммы

$$y_d(t) = x_d[t - \Delta t(t, d)], \quad (\text{IX.56})$$

мы обеспечим синфазное суммирование вступлений полезного сигнала для любого значения неизвестного параметра τ_0 . Действительно, пусть трасса $x_d(t)$ содержит полезный сигнал $u(t - \tau_d)$. Тогда после введения кинематических поправок (IX.55) трасса $y_d(t)$ будет содержать сигнал

$$u_d(t) = u\left(t - \tau_d - \sqrt{t^2 - \frac{d^2}{v_e^2}} + t\right).$$

Легко получить:

$$\sqrt{t^2 - \frac{d^2}{v_e^2}} = \sqrt{\tau_0^2 + 2(t - \tau_d)\tau_d + (t - \tau_d)^2}.$$

Пренебрегая слагаемым $(t - \tau_d)^2$ и воспользовавшись разложением

$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$ (при $|x| \ll 1$), получим

$$\sqrt{t^2 - \left(\frac{d^2}{v_e^2}\right)} \simeq \tau_0 + \frac{\tau_d}{\tau_0}(t - \tau_d),$$

откуда

$$u_d(t) \simeq u\left[t - \tau_0 - \frac{\tau_d - \tau_0}{\tau_0}(t - \tau_d)\right],$$

или (поскольку $\tau_d - \tau_0 \simeq d^2/2v_e^2\tau_0$)

$$u_d(t) \simeq u \left[t - \tau_0 - \left(\frac{d^2}{2v_e^2\tau_0} \right) (t - \tau_d) \right]. \quad (\text{IX.57})$$

Слагаемое $d^2(t - \tau_d)/2v_e^2\tau_0$ описывает дополнительный сдвиг, обуславливающий растяжение сигнала. Этот сдвиг равен нулю при $t = \tau_d$ (т. е. в момент вступления сигнала) и увеличивается с ростом d и $t - \tau_d$. Грубо говоря, это означает, что система кинематических поправок получена для сигналов нулевой длительности (типа δ -функции). Растяжение реальных сигналов ограничивает длину допустимых баз суммирования с кинематическими поправками (IX.55). С этой точки зрения суммирование по методу ОГТ целесообразно комбинировать с обратной фильтрацией трасс $x_d(t)$ при помощи фильтра, имеющего спектральную характеристику $1/S_u(\omega)$. Преобразование (IX.56), хотя и является линейным, не относится к стационарному типу. Поэтому оно не перестановочно с фильтром $1/S_u(\omega)$. Обратная фильтрация должна осуществляться до введения кинематических поправок (IX.55).

Формула (IX.55) показывает, что на основе сейсмограммы ОГТ можно определить регулируемую интерференционную систему, в которой кинематические поправки зависят только от одного параметра v_e . Прежде чем приступить к анализу эффективности этой системы, рассмотрим два вопроса: 1) можно ли на основе сейсмограммы ОГТ определить нерегулируемую интерференционную систему и 2) в какой мере подобные системы применимы к более сложным средам?

Необходимость постановки первого вопроса определяется тем, что значение v может быть известно заранее, в то же время неясно, в какой мере эту информацию можно использовать, поскольку параметр v_e зависит еще от неизвестного угла φ . Тем не менее ответ является положительным для довольно широкого интервала $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, так как при малых углах наклона границ $\cos \varphi$ от φ практически не зависит.

Если вместо поправки (IX.55) использовать поправку $\Delta t'$, получающуюся при замене v_e на v , то ошибка в величине поправки оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta \Delta t' &= \Delta t'' - \Delta t = \\ &= \sqrt{t^2 - \frac{d^2}{v^2}} - \sqrt{t^2 - \frac{d^2 \cos^2 \varphi}{v^2}} \simeq - \frac{d^2 \sin^2 \varphi}{2\tau_0 v^2}. \end{aligned} \quad (\text{IX.58})$$

Чтобы можно было почувствовать, насколько эта величина мала, заметим, что ошибка поправки (IX.52), получающаяся при замене истинного угла φ углом $\varphi = 0$, оценивается величиной $d \sin \varphi / v$, которая на порядок больше.

Выбрав допустимое значение $\delta \Delta t$ (скажем, 0,001 с) и максимальное значение d , из формулы (IX.58) можно получить значение φ_0 . При малых $\max d < h$ оно равно примерно $\arcsin(v \sqrt{2\tau_0 \delta \Delta t} / \max d)$. Для типичных условий φ_0 имеет порядок 8–10°.

На первый взгляд может показаться, что система ОГТ имеет ограниченное применение к сложным средам, поскольку ее преимущество тесно

связано с особенностями годографа (IX.53). Приведенное ниже утверждение показывает, что это не так.

Теорема. Пусть $\tau(x, x')$ выражает время прихода некоторой волны (например, одной из составляющих нулевого приближения лучевого ряда в неоднородной среде) в точку x при распространении ее из точки x' . Если функция $\tau(x, x')$ удовлетворяет принципу взаимности $\tau(x, x') = \tau(x', x)$ и если она не менее трех раз дифференцируема в окрестности прямой $x = x'^1$, то система ОГТ применима к выделению данной волны по крайней мере при малых $d = x - x'$.

Доказательство. Зафиксируем некоторую точку x_0 . Воспользовавшись рядом Тейлора, можно приближенно представить $\tau(x, x')$ в окрестности точки (x_0, x_0) следующим образом:

$$\tau(x, x') \cong \tau_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x' - x_0) + b_1(x - x_0)^2 + b_2(x' - x_0)^2 + b_{1,2}(x - x_0)(x' - x_0),$$

где

$$\tau_0 = \tau(x_0, x_0).$$

Из условия взаимности делаем заключение, что $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, откуда

$$\tau(x, x') \cong \tau_0 + a_1(x + x' - 2x_0) + b_{1,2}[(x - x_0)^2 + (x' - x_0)^2] + b_{1,2}(x - x_0)(x' - x_0).$$

Рассмотрим теперь множество значений x и x' , удовлетворяющих условию $x + x' = 2x_0$, и обозначим $d = x - x'$. Легко видеть, что второе слагаемое в правой части обращается в нуль и что $x - x_0 = d/2 = -(x' - x_0)$.

Таким образом,

$$\tau(x, x') \cong \tau_0 + bd^2, \tag{IX.59}$$

где

$$b = (2b_1 - b_{1,2})/4.$$

Видно, что однопараметрическое семейство кинематических поправок

$$\Delta t(t, d) = -bd^2 \tag{IX.60}$$

обеспечивает с точностью до малых относительно d^2 синфазное суммирование вступлений рассматриваемой волны. При малых d эта система поправок эквивалентна (IX.55), если принять

$$v_e = 1/\sqrt{2b\tau_0}.$$

Таким образом, v_e играет роль эффективного параметра, который в широком классе сред описывает годограф ОГТ. В некоторых случаях известно явное выражение v_e через параметры среды. Например, для вертикально-неоднородной среды

$$v_e^2 = \int_0^h v(z) dz \bigg/ \int_0^h \frac{dz}{v(z)}.$$

Ясно, что в общем случае эффективный параметр v_e зависит от значения τ_0 . При изучении сред с малым углом наклона отражающих границ эта зависимость может быть получена заранее на основе скважинных

¹ Годографы прямых, рефрагированных и головных волн этому условию не удовлетворяют.

измерений или других косвенных данных. Если функция $v_e = \varphi(\tau_0)$ монотонна и возрастает не очень сильно

$$[\varphi'(\tau_0) < 2hv^2/d^2],$$

то зависимость τ_d от τ_0 , выражаемая функцией

$$\tau_d(\tau_0) = \sqrt{\tau_0^2 + d^2/\varphi^2(\tau_0)},$$

по-прежнему взаимнооднозначна. Поэтому для любого значения $\tau_d = t$ можно единственным образом определить $\tau_0(t)$ и соответствующую поправку $\Delta t(t, d) = \tau_0(t) - t$. Значение $\tau_0(t)$ может быть получено с помощью итераций по методу Ньютона:

$$\tau_0^{(k+1)} = \tau_0^{(k)} + [t - \tau_d(\tau_0^{(k)})/\tau_d'(\tau_0^{(k)})],$$

где k — номер итерации.

Если зависимость v_e от τ_0 известна лишь с точностью до некоторого параметра θ , представляющего неизвестную функцию от x_0 [$v_e = \varphi(\tau, \theta)$], то перебор этого параметра определяет регулируемую интерференционную систему ОГТ относительно однопараметрического семейства функций $\varphi(\tau_0, \theta)$.

Перейдем к анализу эффективности гашения волн-помех при суммировании по методу ОГТ. С целью упрощения анализа будем брать годографы в виде (IX.59). Значение d будет изменяться дискретно: $d = k\Delta x$, где k принимает значения $0, 1, \dots, n$ (постоянный знак параметра d имеет место в односторонних системах прослеживания).

Пусть суммирование осуществляется по годографу отраженной волны с параметром $b = 1/2\tau_0 v_e^2$, а годограф помехи имеет параметр $b = 1/2\tau_n v_n^2$ (где $v_n < v_e$, $\tau_n \simeq \tau_0$).

После введения поправок (IX.60) каждая трасса $y_k(t)$ сейсмограммы ОГТ будет содержать помеху

$$\xi_k(t) = \xi(t - \tau_n - pk^2 \Delta x^2), \quad (\text{IX.61})$$

где

$$p = (v_e^2 - v_n^2)/2\tau_n v_e^2 v_n^2.$$

Результат суммирования в спектральной форме выразится следующим образом

$$S_\eta(\omega) = S_\xi(\omega) \exp(-i\omega\tau_n) \sum_{k=0}^n h_k \exp(-i\omega k^2 \Delta x^2 p). \quad (\text{IX.62})$$

Ограничиваясь для простоты однородным суммированием, дадим приближенную оценку спектральной характеристики

$$G(\omega) = \sum_{k=0}^n \exp(-i\omega k^2 \Delta x^2 p). \quad (\text{IX.63})$$

С этой целью будем считать, что n велико, а Δx — мало, вследствие чего сумму в правой части (IX.63) можно рассматривать как интегральную.

Отсюда

$$G(\omega) \simeq \frac{1}{\Delta x} \int_0^i \exp(-i\omega p x^2) dx. \quad (\text{IX.64})$$

Рассматривая также сумму (IX.63) как интегральную для $\exp \times \times (-i\omega py)$ с переменным шагом $\Delta y_k = k^2 (\Delta x)^2 - (k-1)^2 (\Delta x)^2$ и потребовав, чтобы максимальный шаг $\Delta y_n \simeq 2n (\Delta x)^2$ был намного меньше периода $2\pi/p\omega$, найдем условие для тех частот, для которых замена суммы (IX.63) интегралом (IX.64) допустима:

$$\omega \ll \pi n / l^2 p. \quad (\text{IX.65})$$

Выразив экспоненту под знаком интеграла по формуле Эйлера и воспользовавшись определением интегралов Френеля

$$C(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \cos t^2 dt \quad \text{и} \quad S(u) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u \sin t^2 dt,$$

найдем

$$G(\omega) \simeq nH(l\sqrt{p\omega}), \quad (\text{IX.66})$$

где

$$H(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{u} [C(u) - iS(u)]. \quad (\text{IX.66}')$$

Амплитудная характеристика определяется с помощью функции (рис. 32)

$$|H(u)| = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{u} \sqrt{C^2(u) + S^2(u)}. \quad (\text{IX.67})$$

Полосу пропускания системы определим условием $|H(u)| \geq \gamma_*$. Пусть u_* — наибольшее из чисел, удовлетворяющих этому неравенству, и ω' — нижняя граница спектра помехи. Тогда помеха полностью попадет в полосу гашения, если

$$l \geq \frac{u_*}{\sqrt{\omega' p}} = \frac{u_* \sqrt{2\tau_n} v_e v_n}{\sqrt{\omega' |v_e^2 - v_n^2|}}. \quad (\text{IX.68})$$

Пример. Пусть $\omega' = 2\pi \cdot 25$ Гц, $v_e = 3,0$ км/с, $v_n = 2,5$ км/с и $\tau = 2$ с. Выберем $\gamma_* = 1/2$. Этому значению γ_* отвечает $u_* \simeq 2$. Следовательно, $l \geq 1,6$ км. Эта оценка носит чисто качественный характер, так как при таких базах формула (IX.59) неточна.

Воспользовавшись известными в теории интегралов Френеля асимптотическими формулами, можно оценить степень подавления помехи в полосе гашения. Без вывода приведем следующую асимптотическую формулу для функции $|H(u)|$:

$$|H(u)| \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{u} \sqrt{1 + \sqrt{\frac{2}{\pi - u^2}} \sin[u^2 - (\pi/4)] + \varepsilon(u)},$$

где $\varepsilon(u)$ — малая величина порядка $1/u^2$.

Таким образом, эффект гашения обратно пропорционален l и корню из $|v_e^2 - v_n^2|$. В соответствии с условием (IX.65) эту оценку можно принять только при $u \ll \sqrt{\pi l}$.

Для завершения исследований эффективности суммирования по методу ОГТ необходимо оценить влияние суммирования на полезный сигнал.

Эта оценка особенно существенна при нерегулируемом суммировании, которое, как правило, не обеспечивает точного определения поправок.

Замена параметра $v_e = v/\cos \varphi$ параметром v . Этот фактор имеет значение только при нерегулируемом суммировании. В соответствии с формулой (IX.58) после введения поправок сигнал на k -той трассе $y_k(t)$ сейсмограммы ОГТ будет равен $u(t - \tau_0 + pk^2\Delta x^2)$ при $p = \sin^2 \varphi / 2\tau_0 v^2$. Спектральная характеристика системы по-прежнему выразится формулами (IX.66), (IX.66') при замене знака минус перед i на плюс. Поэтому амплитудная характеристика снова определится с помощью формулы (IX.67).

Пусть верхняя граничная частота сигнала равна ω'' . Ясно, что сигнал полностью располагается в полосе пропускания, если $l\sqrt{p\omega''} < u_*$, откуда получаем условие для φ :

$$\sin \varphi \leq \frac{u_* v}{l} \sqrt{\frac{2\tau_0}{\omega''}}$$

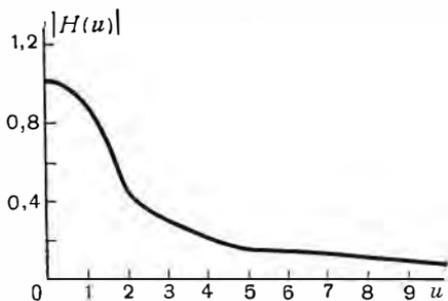


Рис. 32

Аналогично можно исследовать другие ошибки в выборе v_e .

Растяжение импульса. Поскольку обнаружение сигнала осуществляется по амплитуде основного экстремума, то основные «неприятности» связаны с тем, что из-за растяжения основной экстремум суммируется несинфазно. Если интервал времени между вступлением и основным экстремумом равен T , то в соответствии с формулой (IX.57) сигнал на трассе $y_k(t)$ равен $u(t - \tau_0 - pk^2\Delta x^2)$ при $p = T/2v_e^2\tau_0^2$. Теперь из условия $l\sqrt{p\omega''} < u_*$ получаем

$$l < u_* \tau_0 v_e \sqrt{2/\omega'' T}$$

В частности, при $T = 0,03$ с, $\omega'' = 2\pi 60$ Гц, $\tau_0 = 2$ е, $v_e = 3$ км/с, $u_* = 2$ значение l не должно превышать 1 км.

Нужно иметь в виду, что фактор растяжения импульса действует и при регулируемом суммировании.

При суммировании на больших базах большое значение приобретает отклонение реального годографа от функции (IX.53) или (IX.59).

§ 43. Д-преобразование

Метод общей глубинной точки имеет ограниченное применение при проведении сейсморазведки в сложных средах. Во-первых, простая параболическая форма годографа ОГТ (IX.59) выполняется только на небольших расстояниях, что ограничивает базу суммирования, во-вторых, связь эффективных параметров параболы τ_0 и b с параметром сложнопостроенных сред является неоднозначной, в-третьих, основанное на лучевом методе представление о регулярном характере отраженной волны в случае не-

гладких границ оказывается неверным. Напомним, что лучевой метод применим в ситуациях, когда отражающие границы, так же как и фронты волн, являются локально плоскими (сравнительно с длиной волны).

Группа быстро развивающихся методов сейсмической разведки, направленных на преодоление указанных трудностей, связана с представлением поля отраженной волны в виде интегралов типа интеграла Кирхгофа, получившего широкое распространение при изучении электромагнитных колебаний. Электромагнитные колебания сближает с упругими тот факт, что магнитный и электрический векторы электромагнитного поля в вакууме удовлетворяют уравнению (I.10) при $b = 1/c$ (где c — скорость света), а скалярные функции, которые могут быть использованы для описания напряженности электромагнитного поля, — уравнению (I.9) скалярного потенциала продольных волн при $a = 1/c$.

Пусть задана некоторая поверхность S , разделяющая среду на две части, и пусть точка M_0 располагается по другую сторону от источника монохроматического света. В случае монохроматического излучения скалярная функция, описывающая электромагнитное поле, имеет вид $\varphi = u(M) \exp(i\omega t)$. Подставив ее в (I.9) при $a = 1/c$, получим уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad k = \omega/c. \quad (\text{IX.69})$$

Известно, что если поле u удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то комплексная амплитуда $u(M_0)$ в точке M_0 выражается через значения поля и его производные на поверхности S с помощью интеграла Кирхгофа

$$u(M_0) = (1/4\pi) \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial n} G - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (\text{IX.70})$$

где $G(M)$ — функция Грина от точечного источника: $G = \exp(-ikr)/r$, $r = r(M, M_0)$. Будем предполагать, что поверхность S состоит из двух частей: плоского бесконечного экрана S_1 и щели Σ , помещенных в плоскости xoy (рис. 33). С целью получения приближенного решения примем условия Кирхгофа: 1) распределение возмущения на Σ такое же, как и при отсутствии экрана; 2) возмущение u и его производная du/dn на экране S_1 тождественно равны нулю. Согласно этим условиям область интегрирования (IX.70) может быть заменена на Σ . Заметим, что последнее условие является противоречивым. Действительно, если функция u , удовлетворяющая уравнению (IX.69), и ее производная du/dn на некоторой поверхности равны нулю, то u должна быть нулем во всем пространстве. Для устранения этого противоречия А. Зоммерфельд предложил изменить функцию Грина так, чтобы одно из слагаемых в формуле (IX.70) тождественно обращалось в нуль на плоскости S . Этого можно добиться, взяв G в виде разности двух функций Грина точечного источника, одна из которых создается в точке M_0 источником, а другая — его зеркальным отображением M'_0 относительно S :

$$G(M) = \frac{1}{r} \exp(-ikr) - \frac{1}{\bar{r}} \exp(-ik\bar{r}),$$

$$r = \sqrt{(z - z_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \bar{r} = \sqrt{(z + z_0)^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Легко убедиться в том, что $G(M) = 0$ при $M \in S$ (т. е. при $z = 0$). Учитывая в интеграле (IX.70) условия Кирхгофа, получим при $r \gg \lambda$ (где λ — длина волны, равная $2\pi/k$) формулу дифракции Релея — Зоммерфельда:

$$u(M_0) = \frac{i}{\lambda} \iint_{\Sigma} u(M) \frac{\exp(-ikr)}{r} \cos(\vec{n}, \vec{r}) dx dy. \quad (\text{IX.71})$$

Эта формула выражает принцип Гюйгенса, так как каждая точка поверхности Σ является источником волн, обладающим характеристикой направленности $\cos(\vec{n}, \vec{r})$.

Перейдем к упругим колебаниям. Пусть в однородном пространстве на глубине $h > 0$ имеется неоднородность Σ (например, участок шероховатой отражающей границы произвольной формы), являющаяся объектом

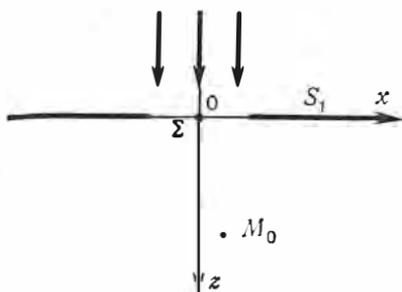


Рис. 33

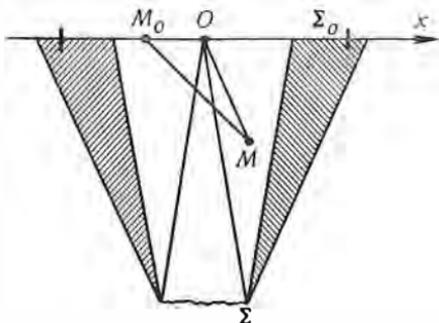


Рис. 34

изучения. В начале координат помещен источник продольных волн, излучающий колебания, спектр которых расположен в интервале (ω', ω'') . Предполагается, что глубина h намного больше максимальной длины волны $2\pi\nu_p/\omega'$. Если минимальная частота имеет порядок 20 Гц, то при $\nu_p = 2 \div 3$ км/с глубина должна составлять $1 \div 2$ км. Путь в плоскости $z = 0$ в пределах области Σ_0 расположены приемники, регистрирующие колебания $u_0(t, M_0)$. Поскольку прямая волна может быть вычтена из записи, то $u_0(t, M_0)$ выражает поле отраженной от Σ волны в области Σ_0 .

Из аналогии между упругими и электромагнитными колебаниями следует, что в однородной среде поле как продольных, так и поперечных волн может быть выражено с помощью интеграла Кирхгофа (IX.70) с функцией Грина точечного источника. Строго говоря, это верно только для сферических волн. Из лучевого разложения (см. § 16) следует, что продольная волна с несферическим фронтом и неравномерным распределением амплитуд на фронте порождает обменные волны (в виде примесных колебаний) даже в однородной среде. Поэтому интеграл Кирхгофа, не учитывающий явления обмена, дает более точное приближение на более высоких частотах, напоминающая в этом смысле нулевой член лучевого ряда.

Если поверхность S содержит границу Σ , то функция Грина должна быть изменена так, чтобы обеспечить граничные условия на Σ . Однако

если нормаль к Σ мало отличается от вертикали и если размеры Σ малы по сравнению с h , то явлениями обмена можно пренебречь, выбрав функцию Грина для продольных и поперечных волн независимым образом. Разложим $u_0(t, M_0)$ и $u(t, M)$ ($M_0 \in \Sigma_0$, $M \in \Sigma$) в интегралы Фурье, обозначив $u_0(\omega, M_0)$ и $u(\omega, M)$ спектральные составляющие на частоте ω . Тогда, взяв функцию Грина так, как она определяется в теории дифракции Релея — Зоммерфельда, можем приближенно выразить $u_0(\omega, M_0)$ через $u(\omega, M)$ по формуле (IX.71), в которой $k = \omega/v_p$ и $\lambda = 2\pi v_p/\omega$. Теория Релея — Зоммерфельда дает хорошее совпадение с экспериментом в окрестности оси z (точнее, в окрестности центрального луча, отвечающего в данном случае направлению зеркального отражения), включающей зону вблизи границ геометрической тени. При удалении от границ геометрической тени (рис. 34) точность приближения снижается, однако и интенсивность поля здесь становится пренебрежимо малой.

Заметим, что дифракция Релея — Зоммерфельда удовлетворяет принципу взаимности. Действительно, мы можем выразить поле в каждой точке M (не обязательно принадлежащей Σ) через поле в такой области Σ_0 плоскости наблюдения, в которой интенсивность $u(\omega, M_0)$ заметно отлична от нуля. Так как меняется только ориентация системы координат относительно направления распространения, то согласно (IX.71)

$$u(\omega, M) \cong \frac{1}{\lambda} \iint_{\Sigma_0} u_0(\omega, M_0) \exp(i\omega r/v_p) [\cos(\vec{n}_0, \vec{r})/r] dx_0 dy_0,$$

где \vec{n}_0 выражает направление оси z .

Отсюда

$$\begin{aligned} u(t, M) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\omega, M) \exp(i\omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 v_p} \iint_{\Sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega u_0(\omega, M_0) \exp\left[i\omega \left(\frac{r}{v_p} + t\right)\right] \frac{\cos(\vec{n}_0, \vec{r})}{r} d\omega dx dy_0 = \\ &= \frac{1}{2\pi v_p} \iint_{\Sigma_0} \dot{u}_0\left(t + \frac{r}{v_p}, M_0\right) \frac{\cos(\vec{n}_0, \vec{r})}{r} dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (\text{IX.72})$$

где

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}, \quad \dot{u}_0 = \frac{\partial u_0}{\partial t}.$$

Формула (IX.72) верна для любой точки $M(x, y, z)$ при $z \gg \lambda$. Из физических соображений $u(t, M)$ отлична от нуля только в те моменты времени, в которые отраженная волна достигла точки M . В частности, если определить $u(t, M)$ в момент времени $\tau(0, M) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}/v_p$, который определяет время вступления падающей волны в точку M , то $u[\tau(0, M), M]$ будет отлична от нуля только при $M \in \Sigma$. Следовательно, поле значений $A(M) = u[\tau(0, M), M]$ определит положение границы Σ .

Если система наблюдений дискретна, то интеграл заменится суммой

$$A(M) \cong \sum_{(i)} \dot{u}[\tau(0, M) + \tau(M, M_{0i}), M_{0i}] \cos(\vec{n}_0, \vec{r}_i) / 2\pi r_i v_p,$$

где суммирование ведется по всем точкам наблюдения из области Σ_0 . В многократной системе наблюдения осуществляются при различных положениях источников P_1, P_2, \dots, P_n .

С целью усиления изображения осуществляется накапливание по формуле

$$A_{\Sigma}(M) \cong \sum_j \sum_i \dot{u} [\tau(P_j, M) + \tau(M, M_{0i}), M_{0i}] \cos(\vec{n}_0, \vec{r}_i) / 2\pi r_i v_p.$$

Как правило, точки наблюдения располагаются на свободной границе $z = 0$. Влияние последней (коэффициенты конверсии) нужно учитывать только при больших углах между \vec{n}_0 и \vec{r} . При больших значениях h изменениями r_i и угла между \vec{n}_0 и \vec{r}_i можно пренебречь, поэтому с точностью до постоянного множителя

$$A_{\Sigma}(M) \cong \sum_{(j)} \sum_{(i)} \dot{u} [\tau(P_j, M) + \tau(M, M_{0i}) M_{0i}]. \quad (\text{IX.73})$$

Для квазисинусоидальных процессов $\dot{u}(t, M) \cong \omega_0 u [t + (\pi/2\omega_0), M]$, где ω_0 — видимая частота, поэтому более грубое приближение запишется в виде суммы

$$D_{\Sigma}(M) = \sum_{(j)} D_j(M), \quad (\text{IX.74})$$

где

$$D_j(M) \cong \sum_{(i)} u [\tau(P_j, M) + \tau(M, M_{0i}), M_{0i}].$$

Строго говоря, функции $D_j(M)$ выражают значение интеграла от $u(t, M)$ при $t = \tau(P_j, M)$, поэтому обладают тем же свойством, что и $A(M)$, отличаясь от нуля при $M \in \Sigma$.

В том случае (а это всегда так), когда среда между Σ и Σ_0 неоднородна, времена $\tau(P, M)$ и $\tau(M, M_0)$ вычисляются по соответствующим экстремалиям интеграла Ферма, т. е. по функциям полей времен.

Функция $t(M_0) = \tau(P, M) + \tau(M, M_0)$ совпадает с годографом дифрагированной волны. По этой причине Ю. В. Тимошин, предложивший преобразование (IX,74), назвал его дифракционным, или Д-преобразованием. Иногда ошибочно полагают, что суммирование по годографу дифрагированной волны подчеркивает ее. На самом деле это не так, поскольку дифрагированная волна от таких объектов, как уступ или сброс, изменяет полярность в окрестности границ тени, поэтому при суммировании будет гаситься.

Сопоставляя Д-преобразование с суммированием по общей глубинной точке, нужно иметь в виду, что оба метода связаны с различными приближенными представлениями поля отраженной волны: метод ОГТ основывается на лучевом приближении отраженной волны в докритической области (где она не изменяет формы), а Д-преобразование — на приближенном представлении отраженной волны, как суммы большого числа волн от фиктивных источников, расположенных на границе Σ . Первое представление эффективно для зеркальных протяженных границ, второе (также связанное с высокочастотной частью поля) — в том случае, когда

имеют дело практически с диффузным (рассеянным) отражением. Связь функции $A(M)$ с упругими свойствами отражающего объекта имеет сложную природу, зависящую от расположения и типа источника упругих колебаний. Поэтому метод Д-преобразования, как и ОГТ, служит в основном для определения геометрии границ.

Большим преимуществом Д-преобразования перед методом ОГТ является независимость кинематических поправок от угла наклона отражающей границы. Благодаря этому в Д-преобразовании определяются глубины залегания отражающих границ, а не нулевые времена, как в методе ОГТ. Однако применение Д-преобразования требует довольно точного расчета кинематики лучей, а это возможно только при очень хорошей априорной информации о распределении скоростей $u_p(x, y, z)$. В отличие от этого годограф ОГТ при малых удалениях имеет простую форму параболы второй степени независимо от строения среды.

Среди специфических ограничений Д-преобразования отметим следующие. Во-первых, поле продольных волн в неоднородной среде не может быть выражено интегралом Кирхгофа (IX.70). Для иллюстрации возникающих осложнений рассмотрим следующую простую ситуацию. Пусть среда является вертикально-неоднородной [$\lambda = \lambda(z)$, $\mu = \mu(z)$ при $\rho = \text{const}$] и пусть на границу $z = 0$ падает по нормали плоская волна $u(t, z) \vec{n}_0$. В уравнениях Ламе (IV.10) все производные по x и y будут равны нулю.

После простых преобразований получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial \ln v_p^2}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (\text{IX.75})$$

относящееся к классу обобщенных волновых уравнений. Применив к нему формулу С. Л. Соболева (см. библиограф. коммент.), имеем в нестационарном случае

$$u(t, M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ G \frac{\partial [u]}{\partial n} - [u] \frac{\partial G}{\partial n} + G \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] \frac{\partial \tau}{\partial n} + G \frac{\partial \ln v_p^2}{\partial n} [u] \right\} dS + \frac{1}{4\pi} \iiint_D [u] \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial \ln v_p^2}{\partial z} \right) \right\} dx dy dz,$$

где $\tau = \tau(0, M)$, $f(t, M) = f[t - \tau(0, M), M]$; G — функция, являющаяся аналогом функции Грина и определяемая по функции поля времен (в однородной среде $G = 1/r$).

Из этой формулы следует, что вклад в поле от поверхности S (включающей Σ) определяется более сложным образом, чем в случае однородной среды; кроме того, появляется определяемый объемным интегралом вклад от всех точек M промежуточной среды, каждая из которых оказывается источником вторичных волн со сложной характеристикой направленности. Грубо говоря, объемный интеграл выражает мутность среды, благодаря которой функция $A(M)$, определяемая формулами типа (IX.73), будет отлична от нуля для любых точек M . Таким образом, неоднородность промежуточной среды приводит к искажению характеристик

направленности точечных источников (в частности, может привести к нарушению принципа взаимности) и к появлению фона помех, затушевывающих изображение изучаемого объекта. Заметим, что аналогичное осложнение имеется в методе ОГТ, в котором роль рассеянного поля играют последующие члены лучевого ряда.

Во-вторых, интеграл Кирхгофа заменяется более простым интегралом Релея — Зоммерфельда на основе ряда постулатов эвристического характера (условия Кирхгофа, выбор функции Грина), в связи с чем детальность изображения не может быть намного меньше длины волны.

Третьим ограничением является дискретный характер множества точек наблюдения и фактические размеры области Σ_0 . Влияние этих факторов мы рассмотрим позже (см. § 59).

Рассмотрим вкратце влияние промежуточных границ в кусочно-однородной среде. Всякий раз, когда точка M принадлежит отражающей границе, при правильном расчете времени $\tau(0, M) + \tau(M, M_0)$ амплитуда $A(M)$ будет отлична от нуля. Поэтому функция $A(M)$ [так же, как и $D(M)$] определит положение всех промежуточных и изучаемой границ. Вместе с тем наличие промежуточных границ вызывает появление поля кратных волн, которые не входят в описание поля отраженных волн с помощью интегралов типа Кирхгофа. Понятно, что они будут проявляться в виде дополнительного фона помех в поле $A(M)$. Так как кратные волны в среде с переменной скоростью имеют не такую кинематику, как однократные волны, поле кратных волн будет гаситься примерно так же, как и в методе ОГТ. Эффективность подавления тем выше, чем больше размеры области Σ_0 , однако при больших Σ_0 суммирование по формулам (IX.73) и (IX.74) становится неточным.

Глава X

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ СИСТЕМ

§ 44. Статистический эффект интерференционных систем

Излагавшаяся в предыдущей главе теория интерференционных систем предполагает весьма идеальную ситуацию: прием регулярной (плоской или отраженной) волны на фоне регулярной помехи. Для того чтобы теория была ближе к реальным ситуациям, необходимо учесть следующие моменты: 1) кроме регулярных помех, на сейсмограммах наблюдается значительный фон случайных помех; 2) параметры (амплитуды и времена прихода) регулярных волн подвержены случайным флуктуациям, связанным в основном с поверхностными неоднородностями.

На свойствах интерференционных систем сказываются также неизбежные погрешности измерения параметров самих систем. Речь идет о случайных отклонениях чувствительности приемников, ошибках определения Δz временных задержках и т. д. Однако дополнительно исследовать влияние этих погрешностей нет необходимости, так как они могут быть включены в флуктуации параметров регулярных волн.

В связи с этим возникают два вопроса: 1) каким образом случайные факторы сказываются на характеристиках конкретных интерференционных систем; 2) каким образом следует выбирать параметры интерференционных систем для учета этих факторов. В первых двух параграфах эти вопросы будут рассматриваться для случая, когда на нефлуктуирующий сигнал в каждом k -том приемнике наложена помеха $\xi_k(t)$, являющаяся реализацией стационарного случайного процесса с корреляционной флуктуацией $K_{\xi}(\tau)$, не зависящей от k . Функцию взаимной корреляции процессов $\xi_j(t)$ и $\xi_k(t)$ будем обозначать $K_{jk}(\tau)$. Предполагается, что используемая система кинематических поправок Δt_k удовлетворяет условию (IX.5), т. е. обеспечивает синфазное суммирование полезного сигнала.

Найдем корреляционную функцию помехи

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^n h_k \xi_k(t - \Delta t_k), \quad (\text{X.1})$$

регистрируемую на выходе интерференционной системы.

Используя перестановочность символов математического ожидания и суммирования, получим

$$\begin{aligned} K_{\eta}(\tau) &= \mathbf{M} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k \xi_j(t + \tau - \Delta t_j) \xi_k(t - \Delta t_k) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k K_{jk}(\tau + \Delta t_k - \Delta t_j). \end{aligned} \quad (\text{X.2})$$

Вычисляя преобразование Фурье от обеих частей, найдем энергетический спектр процесса $\eta(t)$:

$$N_{\eta}(\omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k N_{jk}(\omega) \exp[-i\omega(\Delta t_j - \Delta t_k)], \quad (\text{X.3})$$

где $N_{jk}(\omega)$ — взаимный энергетический спектр процессов $\xi_j(t)$ и $\xi_k(t)$.

Как видно, по отношению к случайным процессам общего вида интерференционная система не обладает спектральной характеристикой. О спектральной характеристике интерференционной системы можно говорить только для случайных процессов, взаимные корреляционные функции которых имеют вид:

$$K_{jk}(\tau) = r_{jk} K_{\xi}(\tau - \Delta_{jk}), \quad (\text{X.4})$$

В этом выражении параметр Δ_{jk} означает тот сдвиг во времени, при котором в наибольшей степени коррелируются процессы $\xi_j(t)$ и $\xi_k(t)$, а r_{jk} выражает коэффициент корреляции между этими процессами при сдвиге Δ_{jk} .

Для корреляционных функций (X.4)

$$N_{jk}(\omega) = r_{jk} N_{\xi}(\omega) \exp(-i\omega \Delta_{jk}); \quad (\text{X.5})$$

подставив в (X.3), получим

$$N_{\eta}(\omega) = N_{\xi}(\omega) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k r_{jk} \exp[-i\omega(\Delta_{jk} + \Delta t_j - \Delta t_k)]. \quad (\text{X.6})$$

Поскольку при прохождении случайного процесса через линейную систему его энергетический спектр умножается на квадрат амплитудной характеристики, то множитель при $N_{\xi}(\omega)$ можно интерпретировать как квадрат амплитудной характеристики интерференционной системы по отношению к помехе с корреляционной функцией типа (X.4).

Если помеха является регулярной плоской волной

$$r_{jk} = 1, \quad \Delta_{jk} = (k - j)\Delta x/v_x$$

и если $\Delta t_k = (k - 1)\Delta x/c$, то, как легко убедиться непосредственной проверкой, этот множитель и в самом деле совпадает с квадратом модуля спектральной характеристики (IX.9) интерференционной системы, функционирующей в классе плоских волн, т. е.

$$N_{\eta}(\omega) = N_{\xi}(\omega) |G(\omega)|^2.$$

Таким образом, если плоская волна, форма которой описывается случайным процессом $\xi(t)$, проходит через интерференционную систему с частотной характеристикой $G(\omega)$, то на выходе интерференционной системы получим процесс $\eta(t)$, корреляционная функция которого представляет собой результат прохождения корреляционной функции исходного процесса через интерференционную систему с характеристикой $|G(\omega)|^2$.

Определим отношение сигнал/помеха на выходе интерференционной системы как отношение квадрата амплитуды сигнала к дисперсии помехи. Предполагая, что амплитуда полезного сигнала на входе всех приемников одинакова и равна a и учитывая условие (IX.5) для кинематических поправок, будем иметь

$$\mu = a^2 \left(\sum_k h_k \right)^2 / K_{\eta}(0) = a^2 \left(\sum_k h_k \right)^2 / \sum_j \sum_k K_{jk}(\Delta t_k - \Delta t_j) h_j h_k. \quad (\text{X.7})$$

Эта величина и определяет статистический эффект интерференционной системы при выделении нефлуктуирующего сигнала.

Более подробно рассмотрим статистический эффект однородной группы приемников для сигнала с бесконечной кажущейся скоростью. В этом случае $h_k = 1$, $\Delta t_k = 0$, $k = 1, \dots, n$. Следовательно,

$$\mu = a^2 n^2 / \sum_j \sum_k K_{jk}(0). \quad (\text{X.8})$$

Заметим, что функции $\xi_k(x, t)$ являются сечениями поля помехи $\xi(x, t)$ при $x = k\Delta x$. Сечение этого же поля при $t = \text{const}$ называют x -представлением помехи. Пусть x -представление помехи — стационарный процесс с корреляционной функцией $\sigma_{\xi}^2 R_{\xi}(x - x')$, нормированной так, что $R_{\xi}(0) = 1$. Тогда $K_{jk}(0) = \sigma_{\xi}^2 R_{\xi}[(j - k)\Delta x]$ и

$$\mu = \frac{a^2}{\sigma_{\xi}^2} \frac{n^2}{\sum_j \sum_k R_{\xi}[(j - k)\Delta x]}. \quad (\text{X.9})$$

Множитель при $\mu_0 = a^2/\sigma_\xi^2$ будем называть эффектом однородной группы и обозначать $\rho_{\text{одн}}$. В случае независимых по линии наблюдения помех эффект группы равен n .

Ниже рассматривается несколько примеров. В этих примерах l обозначает действительную базу группы $(n-1)\Delta x$, \mathbf{R} — матрицу с элементами $R_\xi [(j-k)\Delta x]$.

Пример I. Треугольная корреляционная функция

$$R_\xi(x'-x) = \begin{cases} 1 - \alpha |x' - x|, & |x' - x| \leq 1/\alpha \\ 0, & |x' - x| > 1/\alpha. \end{cases} \quad (\text{X.10})$$

Величина $1/\alpha$ выражает интервал корреляции помехи по линии наблюдения. Пусть $l < 1/\alpha$. Тогда для любых j и k

$$R_\xi [(j-k)\Delta x] = 1 - \alpha |j-k|\Delta x = 1 - (\lambda |j-k|)/(n-1),$$

где $\lambda = l\alpha < 1$. Разделив n^2 на сумму всех значений $R_\xi [(j-k)\Delta x]$ при $j, k = 1, 2, \dots, n$, найдем эффект однородной группы, состоящей из n приемников:

$$\rho_{\text{одн}}^{(n)} = 1/[1 - [(n-1)/n]\lambda/3]. \quad (\text{X.11})$$

Интересно отметить, что эффект падает при увеличении n и постоянной действительной базе и наименьший бывает при $n \rightarrow \infty$, что отвечает использованию однородной непрерывной группы:

$$\rho_{\text{одн}}^{(\infty)} = 1/(1 - \lambda/3).$$

Следует заметить, что при $n = 2$

$$\rho_{\text{одн}}^{(2)} = 1/(1 - \lambda/2). \quad (\text{X.11}')$$

При увеличении базы эффект группы быстро растет. Пусть, например, $n = 3$ и $1/\alpha < l < 2/\alpha$. Матрица \mathbf{R} определяется следующим образом:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \lambda/2 & 0 \\ 1 - \lambda/2 & 1 & 1 - \lambda/2 \\ 0 & 1 - \lambda/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разделив $n^2 = 9$ на сумму элементов матрицы \mathbf{R} , найдем

$$\rho_{\text{одн}}^{(3)} = 9/(7 - 2\lambda). \quad (\text{X.12})$$

Пример II. Экспоненциальная корреляционная функция:

$$R_\xi(x'-x) = \exp(-\alpha |x' - x|). \quad (\text{X.13})$$

Элементы матрицы \mathbf{R} равны $r^{|j-k|}$, где $r = \exp(-\alpha\Delta x)$:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ r & 1 & r & \dots & r^{n-2} \\ r^2 & r & 1 & \dots & r^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^{n-1} & r^{n-2} & r^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{X.14})$$

Отсюда

$$\rho_{\text{одн}}^{(n)} = \frac{n^2}{n+2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)r^k} = \frac{n^2(1-r)^2}{n(1-r^2) - 2r(1-r^n)}. \quad (\text{X.15})$$

Если $\Delta x \rightarrow \infty$, то при $n = \text{const}$ имеем $r \rightarrow 0$ и $\rho_{\text{одн}}^{(n)} \rightarrow n$ (как при независимых помехах).

Если $n \rightarrow \infty$ и $\Delta x = \text{const}$, то

$$\rho_{\text{одн}}^{(n)} \sim n(1-r)/(1+r).$$

Множитель $(1-r)/(1+r)$, очевидно, выражает влияние коррелированности помех вдоль линии наблюдения. При $r = 1/2$ эффект группирования равен $n/3$ — в три раза меньше, чем при независимых помехах.

Важной особенностью рассматриваемого случая является наличие максимума функции $\rho_{\text{одн}}^{(n)} = f(n)$ при $l = \text{const}$, т. е. такого значения $n_0 < \infty$, что

$$\rho_{\text{одн}}^{(n_0)} = \max_{1 < n < \infty} \rho_{\text{одн}}^{(n)}, \quad (l = \text{const}).$$

Расчеты показывают, что при $\lambda = l\alpha = 1$, $n_0 = 3$, при $\lambda = 3$ $n_0 = 5$. Полагая в (X.15) $r = \exp[-\lambda/(n-1)]$ и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\rho_{\text{одн}}^{(n)} \rightarrow \rho_{\text{одн}}^{(\infty)} = \lambda^2 / \{2\lambda - 2[1 - \exp(-\lambda)]\}.$$

При больших значениях λ приближенно $\rho_{\text{одн}}^{(\infty)} \sim \lambda/2$. Так как величина $2/\alpha$ представляет собой интервал корреляции для процессов с корреляционной функцией (X.13), то предельный эффект однородной группы определяется числом интервалов корреляции, укладывающихся на расстоянии l .

Обе рассмотренные корреляционные функции характеризуют помехи, которые имеют максимальную коррелированность при нулевом сдвиге Δj_k . Ясно что это наиболее тяжелая ситуация из создающихся при выделении сигналов с бесконечной кажущейся скоростью распространения воли.

В следующем примере рассматривается корреляционная функция $R_\xi(x' - x)$, которая вытекает из формулы (X.4) при условии, что $\Delta j_k = (j - k)\Delta x/v$, а $K_\xi(\tau)$ является квазисинусоидальной типа (VII.7).

Пример III. Квазисинусоидальные корреляционные функции

$$R_\xi(x' - x) = r(x' - x) \cos v_0(x' - x), \quad (\text{X.16})$$

где $r(x) \geq 0$, $v_0 = \omega_0/v$.

Основное отличие корреляционных функций этого вида от рассмотренных ранее заключается в том, что при каждом фиксированном n функция $\rho_{\text{одн}}^{(n)} = f(\Delta x)$ имеет максимумы при конечных значениях шага Δx . Ясно, что эти максимумы достигаются при значениях Δx , близких к $(2k - 1)\pi/v_0$, $k = 1, 2, \dots$, причем наибольший максимум — при $k = 1$.

Если

$$r(x) = \exp(-\beta|x|), \quad (\text{X.17})$$

то нетрудно убедиться, что при $\Delta x = \pi/v_0$ $\rho_{\text{одн}}^{(n)}$ выразится формулой (X.15) при $r = -\exp(-\pi\beta/v_0) = -\delta$:

$$\rho_{\text{одн}}^{(n)} = \frac{n^2(1+\delta)^2}{n(1-\delta^2) + 2\delta[1 - (-\delta)^n]} \quad (\text{X.18})$$

Если $\beta \rightarrow 0$, то при четных n $\rho_{\text{одн}}^{(n)} \rightarrow \infty$, а при нечетных $\rho_{\text{одн}}^{(n)} \rightarrow n^2$.

§ 45. Оптимальные группы при подавлении случайных помех

Рассмотрим задачу синтеза оптимальной в смысле отношения сигнал/помеха (X.7) интерференционной системы.

Перепишем отношение (X.7) в следующем виде:

$$\mu = \mu_0 \frac{\sum_{(j)} \sum_{(k)} h_j h_k}{\sum_{(j)} \sum_{(k)} R_{jk} h_j h_k}, \quad (\text{X.19})$$

где $R_{jk} = K_\xi(\Delta t_k - \Delta t_j)/\sigma_\xi^2$ — элементы матрицы **R**. Мы уже встречались в § 40 с задачей максимизации подобного отношения [см. формулу

(IX.44)]. Обозначив через \mathbf{J} матрицу квадратичной формы в числителе (очевидно, все элементы этой матрицы равны 1), получим, что максимальное значение эффекта группы (совпадающего с множителем при μ_0) равно максимальному собственному значению матрицы $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}$ и достигается оно в том случае, когда распределение чувствительности $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ совпадает с соответствующим собственным вектором этой матрицы.

Покажем, что оптимальное распределение чувствительности определяется формулой

$$h_j = q^{(j)} = \sum_{k=1}^n q_{jk}, \quad (\text{X.20})$$

где q_{jk} — элементы матрицы \mathbf{R}^{-1} . Используя формулу умножения матриц, получим, что элемент p_{jk} матрицы $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}$ равен $\sum_{k=1}^n q_{jk} = q^{(j)}$. Так как все столбцы этой матрицы одинаковы, то ее ранг равен единице, поэтому она имеет только одно, отличное от нуля собственное значение, которое, очевидно, оказывается максимальным, и только один отвечающий этому значению собственный вектор. Осталось проверить, что вектор с компонентами $q^{(j)}$ является собственным. Умножив матрицу $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}$ на этот вектор, получим вектор с компонентами $qq^{(j)}$, где

$$q = \sum_{j=1}^n q^{(j)} = \sum_j \sum_k q_{jk} \quad (\text{X.21})$$

выражает собственное число матрицы $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{J}$ и по доказанному — максимальный эффект группы $\rho_{\text{опт}}$.

Рассмотрим несколько примеров. Во всех случаях предполагается, что $R_{jk} = R_{\xi} [(j - k) \Delta x]$.

Пример I. Пусть $n = 3$. Тогда матрицу \mathbf{R} можно записать следующим образом:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $r_1 = R_{\xi}(\Delta x)$, $r_2 = R_{\xi}(2\Delta x)$.

Элементы обратной матрицы определяются, как известно, формулой

$$q_{jk} = A_{jk} / \det \mathbf{R},$$

где A_{jk} — алгебраическое дополнение элемента R_{jk} ; $\det \mathbf{R}$ — определитель матрицы \mathbf{R} :

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{33} &= (1 - r_1^2), & A_{22} &= 1 - r_2^2, & A_{12} = A_{21} = A_{23} = A_{32} &= \\ &= -r_1(1 - r_2), & A_{13} = A_{31} &= r_1^2 - r_2, & \det \mathbf{R} &= (1 - r_2)(1 + r_2 - 2r_1^2). \end{aligned}$$

Отсюда по формуле (X.21) находим эффект оптимальной группы

$$\rho_{\text{опт}}^{(3)} = q = (3 + r_2 + 4r_1) / (1 + r_2 - 2r_1^2). \quad (\text{X.22})$$

Для однородной группы мы имели бы согласно формуле (X.9)

$$\rho_{\text{одн}}^{(3)} = 9 / (3 + 4r_1 + 2r_2).$$

Оптимальное распределение чувствительности найдем по формуле (X.20):

$$\mathbf{h} = \left(\frac{1 - r_1}{1 + r_2 - 2r_1^2}, \frac{1 + r_2 - 2r_1}{1 + r_2 - 2r_1^2}, \frac{1 - r_1}{1 + r_2 - 2r_1^2} \right). \quad (\text{X.23})$$

Так как распределение чувствительности определяется с точностью до постоянного множителя, то вместо (X.23) можно написать

$$h = (1 - r_1, 1 + r_2 - 2r_1, 1 - r_1). \quad (X.24)$$

Теперь рассмотрим треугольную, экспоненциальную и квазисинусоидальную корреляционную функции $R_\xi(x' - x)$ с целью сравнения оптимального группирования с однородным.

Пример II. Треугольная корреляционная функция [см. формулу (X.10)]. Пусть $n = 3$ и $l < 1/\alpha$. Имеем $r_1 = 1 - \alpha\Delta x = 1 - \lambda/2$ и $r_2 = 1 - 2\alpha\Delta x = 1 - \alpha$. Отсюда по формуле (X.24) находим оптимальное распределение чувствительности

$$h = (\lambda/2, 0, \lambda/2).$$

Таким образом, если база группы меньше интервала корреляции ($l \leq 1/\alpha$), то оптимальная группа из трех приемников вырождается в однородную группу из двух приемников, эффект которой определяется формулой (X.11). Этот же эффект получается и по формуле (X.22).

При $1/\alpha < l < 2/\alpha$ имеем $r_2 = 0$, а $r_1 = 1 - \lambda/2$.

Отсюда по формуле (X.24) получим

$$h = (\lambda/2, \lambda - 1, \lambda/2),$$

а по формуле (X.22)

$$\rho_{\text{одн}}^{(3)} = (2\lambda - 1)/[\lambda(2 - \lambda/2) - 1] \quad (1 \leq \lambda \leq 2).$$

В частности, при $\lambda = 1,5$ распределение чувствительности определяется (с точностью до множителя) вектором (3, 2, 3), а эффект равен 2,29 [однородное группирование согласно (X.12) дает 2,25].

Пример III. Экспоненциальная корреляционная функция [см. формулу (X.13)]. Матрица R выражается формулой (X.14), а обратная матрица — формулами

$$q_{11} = q_{nn} = 1/(1 - r^2), \quad q_{jj} = (1 + r^2)/(1 - r^2), \quad 1 < j < n$$

$$q_{j, j+1} = q_{j+1, j} = -r/(1 - r^2), \quad q_{jk} = 0, \quad |j - k| > 1.$$

Отсюда по формуле (X.21) получим

$$\begin{aligned} \rho_{\text{опт}}^{(n)} &= 2/(1 - r^2) + (n - 2)(1 + r^2)/(1 - r^2) - 2(n - 1)r/(1 - r^2) = \\ &= [n(1 - r) + 2r]/(1 + r). \end{aligned} \quad (X.25)$$

Оптимальное распределение чувствительности находим по формуле (X.20):

$$h_1 = h_n = 1/(1 - r^2) - r/(1 - r^2) = 1/(1 + r);$$

$$h_2 = \dots = h_{n-1} = (1 + r^2)/(1 - r^2) - 2r/(1 - r^2) = (1 - r)/(1 + r). \quad (X.26)$$

Крайние приемники характеризуются повышенной чувствительностью.

Если зафиксировать базу группы l и измерить число приемников n , то в отличие от однородной группы, имевшей максимальный эффект при некотором значении $n_0 < \infty$, эффект оптимальной группы монотонно увеличивается до некоторого предельного значения $\rho_{\text{опт}}^{(\infty)}$. Это значение получим, приняв в формуле (X.25) $r = \exp[-\lambda/(n - 1)]$ и устремив $n \rightarrow \infty$:

$$\rho_{\text{опт}}^{(\infty)} = \lambda/2 + 1.$$

Пример IV. Квазисинусоидальная корреляционная функция (X.16), (X.17). Эффект группы при $\Delta x = \pi\beta/\nu_0$, очевидно, выразится формулой (X.25) при $r = -\delta$:

$$\rho_{\text{опт}}^{(n)} = [n(1 + \delta) - 2\delta]/(1 - \delta).$$

Как видно, и при четных и при нечетных n эффект неограниченно возрастает, если $\beta \rightarrow 0$. Распределение чувствительности при $\Delta x = \pi\beta/\nu_0$ определится формулой (X.26).

Приняв $r = -\delta$, получим с точностью до множителя

$$h_1 = h_n = 1, \quad h_2 = \dots = h_{n-1} = 1 + \delta.$$

В отличие от экспоненциальной корреляционной функции крайние приемники имеют пониженную чувствительность. Таким образом, структура оптимальных групп для квазисинусоидальных x -представлений, характеризующих класс помех с более или менее выраженными наклонными осями синфазности, существенно отличается от структуры групп, предназначенных для подавления помех, обладающих максимальной коррелированностью в направлении x . При отсутствии надежных данных о типе корреляционной функции целесообразно использовать однородное группирование, эффект которого сравнительно устойчив по отношению к виду корреляционной функции.

§ 46. Влияние случайных флуктуаций параметров плоской волны на характеристику интерференционной системы

До сих пор полезный сигнал предполагался регулярной волной, не подверженной случайным искажениям. Рассмотрим влияние случайных флуктуаций амплитуд и времен прихода сигнала, имеющих место на входе интерференционной системы с однородным распределением чувствительности, функционирующей в классе плоских волн:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n a_k u [t - (k \Delta x)/v - \theta_k], \quad (\text{X.27})$$

где a_k и θ_k — случайные величины с заданными распределениями вероятностей.

Поскольку функция $y(t)$ зависит от случайных величин a_k и θ_k , то она сама является случайной. Это означает, что для ее описания нужно использовать способы, разработанные для случайных процессов. Здесь возникает одна трудность: если $u(t)$ — обычный детерминированный сигнал, ограниченный во времени, то функция $y(t)$ — не стационарный процесс хотя бы потому, что она тоже ограничена во времени.

Чтобы обойти эту трудность, рассмотрим две постановки задачи. В первом случае будем искать математическое ожидание (т. е. среднее значение) функции $|S_y(\omega)|^2$. Хотя $M|S_y(\omega)|^2$ и не представляет собой энергетический спектр процесса $y(t)$, она показывает среднюю интенсивность гармонических составляющих $y(t)$, поэтому описывает эффект суммирования.

Во втором случае будем считать $u(t)$ стационарным случайным процессом с корреляционной функцией $B(\tau)$. Тогда и $y(t)$, очевидно, окажется стационарным процессом, вследствие чего амплитудную характеристику интерференционной системы можно будет получить из отношения энергетических спектров процессов $y(t)$ и $u(t)$.

Перейдем к решению первой из поставленных задач. Поскольку $|S_y(\omega)|^2$ равен произведению $S_y(\omega)$ и $S_y^*(\omega)$, а согласно (X. 27)

$$S_y(\omega) = S_u(\omega) \sum_{j=1}^n a_k \exp[-i\omega(k \Delta x/v + \theta_k)], \quad (\text{X.28})$$

$$|S_y(\omega)|^2 = |S_u(\omega)|^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \exp\{-i\omega[(k-j)\Delta x/v + (\theta_k - \theta_j)]\}. \quad (\text{X.29})$$

Чтобы оценить отдельно влияние разброса амплитуд (чувствительностей) и разброса времен прихода волны, рассмотрим два случая: 1) имеются флуктуации только моментов прихода сигнала; 2) имеются флуктуации только амплитуд.

В первом случае ($a_k = a$, $k = 1, \dots, n$) нужно найти

$$\Psi_{jk}(\omega) = \mathbf{M} \exp[-i\omega(\theta_k - \theta_j)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_{jk}(\theta) \exp(-i\omega\theta) d\theta, \quad (\text{X.30})$$

где $p_{jk}(\theta)$ — распределение вероятностей разности $\theta = \theta_k - \theta_j$.

Пусть θ_k и θ_j распределены нормально, тогда их разность также распределена нормально с дисперсией $2\sigma_\theta^2(1 - \rho_{jk})$, где σ_θ^2 — дисперсия θ_k . ρ_{jk} — коэффициент корреляции между θ_j и θ_k .

Основываясь на известном выражении плотности нормального распределения, напомним формулу для $p_{jk}(\theta)$:

$$p_{jk}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\theta} \sqrt{2(1-\rho_{jk})}} \exp[-\theta^2/(4\sigma_\theta^2(1-\rho_{jk}))]. \quad (\text{X.31})$$

Подставляя полученное выражение в (X.30), найдем в результате интегрирования

$$\Psi_{jk}(\theta) = \exp[-\omega^2\sigma_\theta^2(1-\rho_{jk})], \quad (\text{X.32})$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{M} |S_y(\omega)|^2 &= a^2 |S_u(\omega)|^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \exp\{-i\omega[(k-j)\Delta x/v]\} \times \\ &\times \exp[-\omega^2\sigma_\theta^2(1-\rho_{jk})]. \end{aligned} \quad (\text{X.33})$$

Пусть флуктуации моментов прихода волны в разные приемники статистически независимы. В этом случае ρ_{jk} совпадает с символом Кронекера δ_{jk} .

После простых преобразований найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{M} |S_y(\omega)|^2}{a^2 |S_u(\omega)|^2} &= n + \exp(-\omega^2\sigma_\theta^2) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \exp[-i\omega(k-j)\Delta x/v] = \\ &= n + 2 \exp(-\omega^2\sigma_\theta^2) \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cos(\omega k \Delta x/v). \end{aligned} \quad (\text{X.34})$$

Если бы флуктуации отсутствовали ($\sigma_\theta = 0$), то тогда было бы

$$|S_y(\omega)|^2/a^2 |S_u(\omega)|^2 = n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cos(\omega k \Delta x/v), \quad (\text{X.35})$$

где правая часть совпадает с квадратом амплитудной характеристики однородной группы [выше мы встречались с несколько иным выражением этой же формулы — см. (IX.19)]. Из сопоставления формул (X.34) и (X.35) следует, что флуктуации θ_k приводят к ослаблению высокочастотных составляющих. Если характеристика (X.35) является периодической и в ней интервалы пропускания чередуются с интервалами гашения, то характеристика (X.34) неперiodична и при достаточно большом значении σ_t^2 ее второй основной максимум может оказаться практически невыраженным.

Более подробно рассмотрим характеристику для $\nu = \infty$.

Из выражения (X.34) выведем

$$M |S_y(\omega)|^2 / a^2 |S_u(\omega)|^2 = n [1 + (n-1) \exp(-\omega^2 \sigma_t^2)].$$

Так как при $\sigma_t^2 = 0$ правая часть равна n^2 , то относительное ослабление энергии на частоте ω из-за флуктуации времен приема выражается отношением

$$\eta(\omega) = [1 + (n-1) \exp(-\omega^2 \sigma_t^2)] / n.$$

Случаю отсутствия всякой регулярности отвечает значение $\sigma_t^2 = \infty$. Тогда $\eta(\omega) = 1/n$, поэтому в области частот, в которой $\eta(\omega) \approx 1/n$ группирование не дает никакого эффекта. Эта область является полуоткрытым интервалом $\omega \geq \omega_*$, где ω_* можно найти из условия $\eta(\omega) \leq 1/q$, где q — некоторое число из интервала $(1, n)$.

Решая неравенство, получим

$$\omega_* = \sqrt{\ln [q(n-1)/(n-q)]} / \sigma_t.$$

Если сигнал располагается в указанной области частот, то он воспринимается интерференционной системой как практически нерегулярное хаотическое колебание. При больших n и $q \cong 3$ справедлива приближенная оценка $\omega_* = 1/\sigma_t$. Отсюда, в частности, следует, что при $\sigma_t = T/2\pi$ (где T — видимый период полезного сигнала) основная энергия полезной волны в основном гасится.

Из неравенства $\omega'' \leq \omega_x$ получим условия пропускания флуктуирующего сигнала группой:

$$\sigma_t \leq \sqrt{\ln [q(n-1)/(n-q)]} / \omega''.$$

В частности, при $\omega'' = 2\pi 60$ рад/с, $n = 5$ и $q = 2$, $\sigma_t \leq 0,0026$ с.

Эти оценки показывают, что суммирование очень чувствительно к флуктуациям времени приема волны.

Рассмотрим влияние флуктуаций амплитуд. Выразим сначала экспоненту в равенстве (X.29) по формуле Эйлера. Поскольку $|S_y(\omega)|^2$ — вещественная функция, слагаемые, содержащие синус, будут равны нулю. Поэтому из формулы (X.29) при $\theta_k = 0$ следует:

$$M |S_y(\omega)|^2 = |S_u(\omega)|^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M a_j a_k \cos [\omega (k-j) \Delta x / v].$$

Будем считать, что флуктуации амплитуд в соседних приемниках независимы. В этом случае

$$\mathbf{M} a_j a_k = a^2 + \sigma_a^2 \delta_{jk}, \quad (\text{X.36})$$

где a и σ_a^2 — математическое ожидание и дисперсия случайной величины a_k .
Отсюда

$$\mathbf{M} |S_y(\omega)|^2 = |S_u(\omega)|^2 \left\{ n\sigma_a^2 + a^2 \left[n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(k\omega \Delta x/v) \right] \right\}. \quad (\text{X.37})$$

Выражение в квадратных скобках — суть квадрат амплитудной характеристики однородной группы при отсутствии случайных флуктуаций. Видно, что наличие флуктуаций амплитуд в среднем мало оказывается на форме энергетического спектра $y(t)$. Наличие постоянной составляющей $n\sigma_a^2$ приводит к некоторому ослаблению эффекта подавления волны, спектр которой располагается в полосе гашения. Действительно, если при $\omega = 0$ выражение в фигурных скобках (X.37) равно $n\sigma_a^2 + n^2 a^2$, то в середине полосы подавления (при $\omega = \pi v/\Delta x$) оно равно $n\sigma_a^2 + a^2$. Поэтому относительное подавление характеризуется величиной

$$\gamma = (a^2 + n\sigma_a^2)/(n^2 a^2 + n\sigma_a^2).$$

При $\sigma_a^2 = 0$ $\gamma = 1/n^2$, при $\sigma_a^2 = a^2$ $\gamma = 1/n$ и при $\sigma_a^2 \rightarrow \infty$ $\gamma \rightarrow 1$. Такое ухудшение свойств групп при подавлении регулярных волн объясняется следующим образом: если в k -том приемнике значение амплитуды очень велико, а на других — мало, то сумма сигналов практически не будет отличаться от сигнала в k -том приемнике. Волна подавляться не будет. В случае синфазного суммирования ($v = \infty$) волна принимается интерференционной системой без искажения, независимо от величины разброса амплитуд.

Если флуктуируют одновременно и времена, и амплитуды, то

$$\begin{aligned} \mathbf{M} |S_y(\omega)|^2 = |S_u(\omega)|^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a + \sigma_a^2 \delta_{jk}) \exp[-\omega^2 \sigma_t^2 (1 - \rho_{jk}) \times \\ \times \exp[-i\omega(k-j)\Delta x/v]. \end{aligned} \quad (\text{X.38})$$

Поскольку функция $y(t)$ является случайной, ее спектр $S_y(\omega)$ будет случайно изменяться от эксперимента к эксперименту, поэтому интересно исследовать разброс значений $S_y(\omega)$ на разных частотах. Этот разброс может быть охарактеризован дисперсией

$$\mathbf{D}S_y(\omega) = \mathbf{M} |S_y(\omega) - \mathbf{M}S_y(\omega)|^2 = \mathbf{M} |S_y(\omega)|^2 - |\mathbf{M}S_y(\omega)|^2. \quad (\text{X.39})$$

Первое слагаемое вычислялось выше. Найдем второе слагаемое, применяя операцию осреднения (X.28).

В силу независимости разброса амплитуд и моментов прихода, имеем

$$\mathbf{M}S_y(\omega) = aS_u(\omega) \sum \exp(-i\omega k \Delta x/v^2) \mathbf{M} \exp(-i\omega \theta_k). \quad (\text{X.40})$$

Поступая так же, как и при выводе формулы (X.32), получим

$$M \exp(-i\omega\theta_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\theta_k^2/2\sigma_t^2) \exp(-i\omega\theta_k) d\theta = \exp(-\omega^2\sigma_t^2/2). \quad (X.41)$$

Подставив (X.41) в (X.40) и умножив на комплексно-сопряженное выражение, найдем

$$|MS_y(\omega)|^2 = a^2 |S_u(\omega)|^2 \exp(-\omega^2\sigma_t^2) \left[n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(\omega k \Delta x/v) \right].$$

Если флуктуируют только моменты прихода волны $\sigma_a^2 = 0$, то, принимая во внимание выражение (X.34), получим из (X.39)

$$DS_y(\omega) = na^2 |S_u(\omega)|^2 [1 - \exp(-\omega^2\sigma_t^2)].$$

Но в то же время $DS_y(\omega) = D[aS_u(\omega)G(\omega)] = a^2 |S_u(\omega)|^2 DG(\omega)$, поэтому множитель $n[1 - \exp(-\omega^2\sigma_t^2)]$ выражает дисперсию $DG(\omega)$ спектральной характеристики группы при наличии флуктуаций времени прихода. При малых ω дисперсия $DG(\omega)$ мала, а при $\omega \rightarrow \infty$ — стремится к n , что совпадает с пределом $M|G(\omega)|^2$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Если флуктуируют только амплитуды сигнала, то

$$MS_y(\omega)|^2 = a^2 |S_u(\omega)|^2 \left[n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(k\omega \Delta x/v) \right].$$

Подставляя эту формулу, а также формулу (X.37) в (X.39), получим

$$DS_y(\omega) = n |S_u(\omega)|^2 \sigma_a^2.$$

Следовательно, дисперсия спектральной характеристики равна $n\sigma_a^2$ и не зависит от частоты ω .

Перейдем к исследованию характеристики интерференционных систем при условии, что $u(t)$ — стационарный случайный процесс. Поскольку тогда и $y(t)$ — стационарный процесс, а при прохождении стационарного процесса через линейную систему энергетический спектр его умножается на квадрат амплитудной характеристики, то отношение $N_y(\omega)/U(\omega)$ следует считать квадратом амплитудной характеристики интерференционной системы.

Найдем $N_y(\omega)$. Для этого нужно сначала определить преобразование Фурье корреляционной функции процесса $y(t)$.

По определению корреляционной функции стационарного процесса

$$K_y(\tau) = M \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k u(t + \tau - k \Delta x/v - \theta_k) u(t - j \Delta x/v - \theta_j).$$

Математическое ожидание и суммирование можно поменять местами. В силу независимости флуктуаций амплитуд и моментов прихода под

знаком суммы получим произведение $\text{Ma}_j a_k$, определяемое формулой (X.36), и

$$\text{Mu}(t + \tau - k \Delta x/v - \theta_k) u(t - j \Delta x/v - \theta_j). \quad (\text{X.42})$$

Это математическое ожидание можно найти в два этапа: сначала найти условное математическое ожидание при фиксированных значениях θ_j и θ_k , а затем осреднить его по распределению θ_j и θ_k . Упомянутое условное математическое ожидание равно корреляционной функции процесса $u(t)$ в точке $\tau + (j - k) \Delta x/v + \theta_j - \theta_k$, т. е. равно

$$K_u \{ \tau + [(k - j) \Delta x/v] - (\theta_k - \theta_j) \}.$$

Осредняя по $\theta = \theta_k - \theta_j$, найдем, что искомое математическое ожидание равно

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{jk}(\theta) K_u[\tau - (k - j) \Delta x/v - \theta] d\theta, \quad (\text{X.42}')$$

где $p_{jk}(\theta)$ — плотность вероятности $\theta = \theta_k - \theta_j$, выражаемая формулой (X.31).

Окончательно получим

$$K_y(\tau) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a^2 + \sigma_a^2 \delta_{jk}) \int_{-\infty}^{\infty} p_{jk}(\theta) K_u[\tau - (k - j) \Delta x/v - \theta] d\theta.$$

Интеграл в этой сумме есть свертка функций $P_{jk}(\tau)$ и $K_u[\tau - (k - j) \Delta x/v]$.

Отсюда, осуществляя преобразование Фурье, получим

$$N_y(\omega) = U(\omega) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a^2 + \sigma_a^2 \delta_{jk}) \Psi_{jk}(\omega) \exp[-i\omega(k - j) \Delta x/v],$$

где $\Psi_{jk}(\omega)$ определяется формулой (X.30). Разделив обе части на $U(\omega)$ и подставив выражение (X.32) для $\Psi_{jk}(\omega)$ в случае нормальных флуктуаций, найдем квадрат амплитудной характеристики группы:

$$|G(\omega)|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (a^2 + \sigma_a^2 \delta_{jk}) \exp[-\omega^2 \sigma_i^2 (1 - \rho_{jk})] \exp[-i\omega(k - j) \Delta x/v]. \quad (\text{X.43})$$

Сравнивая формулы (X.38) и (X.43) видим, что квадрат амплитудной характеристики группы при приеме флуктуирующего сигнала, форма которого выражается стационарным случайным процессом, совпадает со средним квадратом амплитудной характеристики при приеме флуктуирующего сигнала с детерминированной формой, поэтому исследовать характеристику (X.43) нет никакой необходимости.

§ 47. Оптимальные группы приемников при выделении флуктуирующих сигналов на фоне случайных помех

Выше было показано, что наличие флуктуаций параметров полезных волн, вызванных поверхностными неоднородностями и погрешностями при установке приемников, снижает эффект интерференционных систем. Может оказаться, что интерференционная система, являющаяся оптимальной (в смысле того или иного критерия) в предположении идеальной регулярности полезной волны, уступает по эффективности другим интерференционным системам, если параметры полезных волн флуктуируют. Иначе говоря, выбирая оптимальную интерференционную систему, следует исходить из ее эффекта в условиях, максимально приближенных к реальной обстановке, т. е. с учетом всех случайных факторов.

Рассмотрим способы расчета оптимальных групп при обнаружении имеющей бесконечную кажущуюся скорость распространения волны с флуктуирующими параметрами на фоне коррелированных по линии наблюдения помех для двух критериев оптимальности. Эти результаты применены и к интерференционным системам с суммированием по годографу полезной волны.

Итак, предполагается, что на входе k -того приемника наблюдается случайный процесс:

$$x_k(t) = a_k u(t - \theta_k) + \xi_k(t),$$

где первое слагаемое в правой части — полезный сигнал с флуктуирующими параметрами a_k и θ_k , а $\xi_k(t)$ — стационарная случайная помеха.

На выходе группы имеем

$$y(t) = \sum_{k=1}^n h_k x_k(t). \quad (\text{X.44})$$

Из результатов предыдущего параграфа следует, что характеристики интерференционной системы при наличии флуктуаций параметров a_k и θ_k одинаковы как для детерминированного сигнала, так и для случайного (изменяется только смысл этих характеристик). Поэтому целесообразно взять такую модель полезного сигнала, которая удобнее при теоретических расчетах. Из этих соображений будем считать, что $u(t)$ является реализацией стационарного случайного процесса с корреляционной функцией $K_u(\tau)$, нормированной так, что $K_u(0) = 1$.

Статистические свойства флуктуирующих параметров описываются так же, как и в предыдущем параграфе. Единственное отличие состоит в том, что амплитуды a_j и a_k коррелированы. Коэффициент корреляции между ними равен γ_{jk} [легко получить, что в этом случае в формуле (X.43) нужно заменить δ_{jk} на γ_{jk}].

Последовательности $\{\theta_k\}$ и $\{a_k\}$ являются стационарными:

$$\rho_{jk} = \rho[(j-k)\Delta x] = \rho_{j-k}; \quad \gamma_{jk} = \gamma[(j-k)\Delta x] = \gamma_{j-k}. \quad (\text{X.45})$$

Определим критерий оптимальности следующим образом. Если на выходе группы приемников стремятся получить наименее искаженный сигнал, то при оценке эффективности естественно исходить из величины

$$\varepsilon^2 = \mathbf{M} |u_s(t) - y(t)|^2, \quad (\text{X.46})$$

где $u_s(t) = a_s u(t - \theta_s)$ — колебания полезной волны в фиксированной точке линии наблюдения (обычно в центральной точке расстановки приемников). Вследствие стационарности процессов $u(t)$ и $\varepsilon(t)$ значение ε^2 от t не зависит. Группа G^* является оптимальной в классе групп \mathcal{G} по величине ошибки воспроизведения (т. е. оптимальной неискажающей группой), если

$$\varepsilon_*^2 = \varepsilon^2(G^*) = \min \varepsilon^2(G). \quad (\text{X.47})$$

Вместо ε^2 удобнее рассматривать относительную ошибку $\delta^2 = \varepsilon^2/P_u$, где P_u — мощность сигнала. Ясно, что группа G^* , оптимальная в классе групп \mathcal{E}_n с фиксированным числом приемников n , не обязательно удовлетворительна для практических целей. Кроме того, может оказаться, что оптимум не достигается при конечных значениях Δx . Поэтому наряду с требованием оптимальности следует учитывать и требование достаточности: группа G является достаточной неискажающей, если $\delta^2(G) \leq \delta_0^2$ для некоторого наперед заданного δ_0^2 .

Группа G , достаточная в классе G_n при минимальном n (т. е. при условии, что класс \mathcal{E}_{n-1} не содержит достаточной группы), с практической точки зрения наиболее эффективна. Из определения оптимальности следует, что если оптимальная в классе \mathcal{E}_n группа G^* не является достаточной, то этот класс не содержит достаточных групп. В связи с этим процедура расчета эффективных групп сводится к последовательному расчету оптимальных групп в классах $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \dots$ и проверке оптимальных групп на достаточность.

Обозначим $\mathcal{E}_{n, \Delta x}$ — подкласс групп из \mathcal{E}_n с фиксированным шагом Δx . Тогда условие (X.47), определяющее оптимальную неискажающую группу в классе \mathcal{E}_n , можно записать в виде

$$\varepsilon_*^2 = \min_{\Delta x} \varepsilon_*^2(\Delta x), \quad \text{где } \varepsilon_*^2(\Delta x) = \min_{G \in G_{n, \Delta x}} \varepsilon^2(G). \quad (\text{X.48})$$

Таким образом, для решения поставленной задачи нужно рассмотреть минимизацию ошибки в подклассе $G_{n, \Delta x}$. Вследствие стационарности выбор момента времени t в формуле (X.46) не имеет значения, поэтому аргумент t можно опустить, записав условие оптимальности (X.47) следующим образом:

$$\mathbf{M} \left| u_s - \sum_{k=1}^n h_k^* x_k \right|^2 = \min_{(h_k)} \mathbf{M} \left| u_s - \sum_{k=1}^n h_k x_k \right|^2.$$

Сравнивая это условие с условием (VIII.35), видим, что задача выбора оптимальной неискажающей группы при заданных n и Δx эквивалентна задаче сглаживания случайной последовательности x_k цифровым фильтром Винера, оператор которого имеет заданную длину n . При этом чув-

ствительность h_k связана с отсчетами l_k соответствующего фильтра соотношением $h_k = l_{-k}$. В тех случаях, когда решение приводит к симметричному оператору (а это практически всегда выполняется), можно считать $h_k = l_k$.

Таким образом, решая задачу выбора оптимальной неискажающей группы, можно воспользоваться результатами из § 37, проделав выкладки согласно формулам (VIII.36) — (VIII.40), либо переинтерпретировав окончательную формулу (VIII.40). Предоставляем читателю право выбора удобного ему пути.

В соответствии с (VIII.40) оптимальное распределение чувствительности определится следующей системой линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^n [B_u(j-k) + B_\xi(j-k)] h_k = B_u(s-j), \quad (\text{X.49})$$

где $B_\xi(j-k)$ и $B_u(j-k)$ являются корреляционными функциями дискретных случайных последовательностей $\{\xi_k(t)\}$ и $\{a_{ku}(t - \theta_k)\}$ при $t = \text{const}$. Очевидно, $B_\xi(j-k)$ определяется непосредственно по корреляционной функции x -представления помехи:

$$B_\xi(j-k) = \sigma_\xi^2 R_\xi[(j-k) \Delta x], \quad (\text{X.50})$$

Что касается $B_u(j-k)$, то в соответствии с определением корреляционной функции она равна математическому ожиданию произведения $a_j u(t - \theta_j) a_k u(t - \theta_k)$. Для вычисления этого математического ожидания нужно воспользоваться формулой (X.36), в которой δ_{jk} заменяется на γ_{jk} , и формулами (X.42), (X.42'), в которых нужно принять $\nu = \infty$ и $\tau = 0$:

$$B_u(j-k) = (a^2 + \sigma^2 \gamma_{j-k}) L_{j-k}, \quad (\text{X.51})$$

где

$$L_{j-k} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{jk}(\theta) K_u(\theta) d\theta. \quad (\text{X.52})$$

Если, к примеру, корреляционная функция процесса $u(t)$

$$K_u(\tau) = \exp(-q^2 \tau^2 / 2) \cos \omega_0 \tau, \quad (\text{X.53})$$

а плотность вероятности $p_{jk}(\theta)$ определяется формулой (X.31), то после несложных выкладок получим:

$$L_{j-k} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\sigma_\xi^2 q^2 (1 - \rho_{j-k})}} \exp \left[-\frac{\omega_0^2 \sigma_\xi^2 (1 - \rho_{j-k})}{1 + 2\sigma_\xi^2 q^2 (1 - \rho_{j-k})} \right]. \quad (\text{X.54})$$

Если число приемников в группе нечетно ($n = 2m + 1$) и индекс s в формуле (X.46) равен номеру центрального прибора $m + 1$, то вследствие четности корреляционных функций значение $B(s-j)$ не изменится при замене j на $n - j + 1$:

$$B_u[m + 1 - (n - j + 1)] = B_u[-(m + 1 - j)] = B_u(m + 1 - j).$$

Вследствие той же симметрии коэффициенты $B_u(j-k)$ и $B_\xi(j-k)$ в левой части системы (X.49) не изменятся при замене j и k на $n-j+1$ и $n-k+1$ соответственно. Это означает, что при таком выборе индекса s оптимальное распределение чувствительности является симметричным.

Значение среднего квадрата ошибки оптимальной неискажающей группы определяется в соответствии с формулой (VIII.42):

$$\varepsilon^2(\Delta x) = B_u(0) - \sum_{k=1}^h h_k^* B_u(s-k), \quad (\text{X.55})$$

где h_k^* удовлетворяют системе уравнений (X.49). Фигурирующая здесь величина $B_u(0)$, очевидно, выражает мощность последовательности $\{u_k\}$. В соответствии с формулой (X.51) она равна $(a^2 + \sigma_a^2) L_0$. Но поскольку разность $\theta_k - \theta_j$ при $k = j$ с вероятностью 1 равна нулю, то $p_{jk}(\theta) = \delta(\theta)$ и $L_0 = K_u(0) = 1$.

Следовательно,

$$P_u = B_u(0) = a^2 + \sigma_a^2.$$

Теперь можно использовать относительную ошибку $\delta_*^2(\Delta x)$, которая зависит только от Δx . Если $\min \delta_*^2(\Delta x)$ не удовлетворяет условию достаточности, то следует перейти к группам с большим числом приемников.

Некоторые особенности оптимального распределения чувствительности можно получить непосредственно из уравнения (X.49). Вследствие убывания корреляционных связей при увеличении расстояния между точками приема существует такое расстояние d , что при $\Delta x > d$ значения $\gamma(\Delta x)$, $\rho(\Delta x)$ и $R_\xi(\Delta x)$ практически равны нулю. Из формулы (X.50) тогда следует

$$B_\xi(j-k) = \sigma_\xi^2 \delta_{jk}, \quad \Delta x > d. \quad (\text{X.56})$$

Ясно, что плотность вероятности $p_{jk}(\theta)$ при $d > \Delta x$ и $j \neq k$ от j и k зависеть не будет. Отвечающее этому значение L_{j-k} обозначим L_∞ . В частности, если $p_{jk}(\theta)$ выражается формулой (X.31), то, полагая в (X.54) $\rho_{j-k} = 0$, получим

$$L_\infty = (1/\sqrt{1 + 2\sigma_i^2 q^2}) \exp[-\omega^2 \sigma_i^2 / (1 + 2\sigma_i^2 q^2)]. \quad (\text{X.57})$$

Так как γ_0 и L_0 равны единице, то из формулы (X.51) следует

$$B_u(j-k) = \begin{cases} a^2 + \sigma_a^2, & j = k \\ a^2 L_\infty, & j \neq k \end{cases} \quad \Delta x \gg d. \quad (\text{X.58})$$

Таким образом, матрица системы (X.49) при $\Delta x > d$ имеет элементы, которые можно выразить следующим образом:

$$B_u(j-k) + B_\xi(j-k) = \begin{cases} \sigma_\xi^2(1 + \mu_0), & j = k \\ \sigma_\xi^2 \mu_0 c, & j \neq k, \end{cases} \quad (\text{X.59})$$

где

$$\mu_0 = P_u / P_\xi = (a^2 + \sigma_a^2) / \sigma_\xi^2, \quad c = L_\infty / (1 + \kappa), \quad \kappa = \sigma_a^2 / a^2. \quad (\text{X.59}')$$

Для матрицы с элементами (X.59) удастся найти точное выражение обратной матрицы. Элементы последней равны

$$Q_{jk} = \begin{cases} (n + \alpha - 1) / [\sigma_{\xi}^2 \mu_0 c \alpha (n + \alpha)], & j = k \\ -1 / [\delta_{\xi}^2 \mu_0 c \alpha (n + \alpha)], & j \neq k, \end{cases} \quad (\text{X.60})$$

где

$$\alpha = [1 + \mu_0 (1 - c)] / \mu_0 c. \quad (\text{X.60}')$$

Теперь решение системы (X.49) определится так:

$$h_k^* = \sum_{j=1}^n B(s - j) Q_{jk}.$$

Подставив сюда выражения (X.58) и (X.60), найдем после преобразований:

$$h_k^* = \begin{cases} \frac{(n-1)(1-c)+\alpha}{c\alpha(n+\alpha)}, & k = s \\ \frac{(\alpha+1)c-1}{c\alpha(n+\alpha)} - \frac{1}{\mu_0 c(n+\alpha)}, & k \neq s. \end{cases} \quad (\text{X.61})$$

Учитывая, что $\mu_0 > 0$, $n \geq 1$ и $0 \leq c \leq 1$, легко показать, что $h_s^* \geq h_k^*$, т. е. центральный приемник имеет максимальную чувствительность.

При $n \rightarrow \infty$

$$h_s^* \rightarrow \mu_0 (1 - c) / [1 + \mu_0 (1 - c)],$$

тогда как $h_k^* \rightarrow 0$, поэтому разница в чувствительности между центральным и остальными приемниками увеличивается с ростом n . Если флуктуации параметров отсутствуют, то параметр c будет равен 1 (так как $L_{\infty} = 1$ и $\kappa = 0$). Тогда из формулы (X.61) следует $h_s^* = h_k^* = \mu_0 (1 + n\mu_0)$ — распределение оказывается равномерным.

Так как при флуктуации моментов прихода полезный сигнал суммируется несинфазно, то возникает вопрос: всегда ли группа приемников лучше одиночного приемника? Чтобы ответить на него, надо рассмотреть значение $\delta_x^2 (\Delta x) = \delta_{\infty}^2$ при $\Delta x > d$. Разделив обе части равенства (X.55) на $p_u = a^2 + \sigma_a^2$ и подставляя найденные выше значения h_k^* и $B_u(j - k)$ при $\Delta x > d$, получим после длительных преобразований

$$\delta_{\infty}^2 = 1 - \frac{\alpha \mu_0 + (n+1)[c + \mu_0(1-c)]}{\alpha \mu_0^2 (n+\alpha)} \quad (\text{X.62})$$

Дифференцируя по n , будем иметь

$$\frac{d\delta_{\infty}^2}{dn} = -\frac{1 + \mu_0}{\alpha \mu_0^2 (n + \alpha)} \leq 0,$$

поэтому с увеличением числа n ошибка на выходе оптимальной неискажающей группой может только уменьшаться. Знак равенства в полученном неравенстве имеет место только при $c = 0$, когда α обращается в ∞ , т. е. в случае крайне больших флуктуаций. Заметим, что при $c = 0$ оптимальная группа вырождается в одиночный приемник.

Мы показали, что при $\Delta x > d$ оптимальная группа не хуже одиночного приемника. Тем более она не хуже при таком Δx , которое минимизи-

рует $\delta_{\infty}^2(\Delta x)$. Возможность минимума $\delta_{\infty}^2(\Delta x)$ по Δx связана со следующим: увеличивать Δx , с одной стороны, выгодно, так как это улучшает возможность подавления помех, с другой стороны, невыгодно из-за роста дисперсии разности $\theta_j - \theta_k$. Поэтому-то может существовать такое значение Δx , которое наилучшим образом сочетает оба фактора.

На рис. 35 приведены пример зависимости δ_{∞}^2 от $\zeta = \alpha \Delta x$ (сплошная линия) и отвечающее наилучшему значению Δx оптимальное распределение чувствительности. Корреляционная функция $R_{\xi}(x - x')$ взята в виде (X.10), флуктуация параметров описывается функциями $\rho(x - x') = \gamma(x' - x) = \exp(-\beta|x - x'|)$ при $n = 5$; $a^2/\sigma_a^2 = 0,5$; $\sigma_z/T_0 = 0,3$; $\beta/\alpha = 2$.

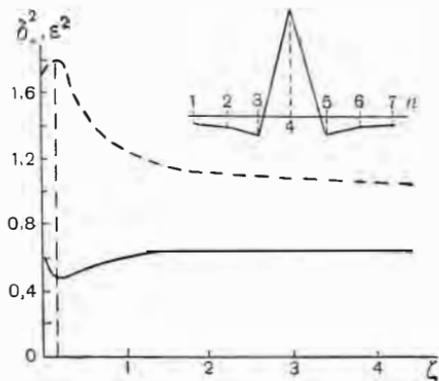


Рис. 35

Неравномерное распределение чувствительности, получающееся при расчете оптимальных групп, практически можно осуществить только в интерференционных системах, реализуемых на специальных процессорах цифрового или аналогового типа. Осуществление его в обычных группах затруднено из-за конструктивных особенностей стандартных приемников. Поэтому при обычном группировании приходится искать наилучшую группу в классе однородных групп.

С точки зрения фильтрации случайных последовательностей применение однородной группы эквивалентно тому, что оценка для $u_s(t)$ определяется как среднеарифметическое из $x_1(t), \dots, x_n(t)$.

Отсюда

$$\begin{aligned} \epsilon^2 = \mathbf{M} \left| u_s - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (u_k + \xi_k) \right|^2 &= B_u(0) - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n B_u(s-k) + \\ &+ \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [B_u(j-k) + B_{\xi}(j-k)]. \end{aligned} \quad (\text{X.63})$$

Рассчитывая (X.63) при разных n и Δx , можно выбрать нужную группу.

Для сопоставления с оптимальными неискажающими группами примем $\Delta x > d$. Воспользовавшись полученными ранее соотношениями, получим

$$\begin{aligned} \epsilon_{\infty}^2 &= (a^2 + \sigma_a^2) - \frac{2}{n} [(a^2 + \sigma_a^2) + (n-1)a^2 L_{\infty}] + \\ &+ \frac{1}{n^2} [n(a^2 + \sigma_a^2 + \sigma_{\xi}^2) + n(n-1)a^2 L_{\infty}]. \end{aligned}$$

Разделив на $a^2 + \sigma_a^2$ и учтя формулы (X.59') и (X.60'), найдем после небольших преобразований

$$\delta_{\infty}^2 = 1 - [\mu_0 + (n-1)\mu_0 c - 1]/n\mu_0. \quad (\text{X.64})$$

Производная правой части по n равна $-[1 - \mu_0(1 - c)]/\mu_0 n^2$. Отсюда выводим, что при

$$c > (\mu_0 - 1)/\mu_0 \quad (\text{X.65})$$

эффект группы увеличивается с ростом n . В противном случае одиночный приемник оказывается лучше группы из любого числа приемников. Из неравенства (X.65) следует, что при $\mu_0 < 1$ группирование всегда предпочтительнее, так как с неопределенностью. Если же μ_0 велико, то группирование оказывается целесообразным только при малых флуктуациях сигнала. Этот вывод вполне понятен: когда отношение сигнал/помеха велико, то уже одиночный приемник позволяет обнаружить сигнал, в то же время суммирование сильно флуктуирующего сигнала может привести к его подавлению.

Наилучшее значение Δx для однородной группы может отличаться от такого же значения Δx для оптимальной группы. Пример зависимости μ' на выходе однородной группы от Δx см. на рис. 35 (пунктир).

Критерий (X.47) не единственный. Если искажения сигнала в расчет не принимаются, то в качестве критерия естественно взять отношение мощности сигнала к мощности помехи на выходе группы. Группу, которая максимизирует данное отношение (обозначим его μ' , естественно назвать оптимальной подавляющей группой. Мощность помехи на выходе группы уже вычислялась [см., например, знаменатель формулы (X.8)]. Аналогично вычисляется мощность сигнала. Следовательно,

$$\mu' = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k B_u(j-k)}{\sigma_{\xi}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k R_{\xi}[(j-k)\Delta x]}. \quad (\text{X.66})$$

С задачей максимизации отношения квадратичных форм мы уже встречались [см. (X.19)]. Максимальное значение μ' совпадает с максимальным собственным значением матрицы $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}/\sigma_{\xi}^2$, где \mathbf{R} — как и ранее, матрица с элементами $R_{\xi}[(j-k)\Delta x]$, а \mathbf{B} — матрица с элементами $B_u(j-k)$. Оптимальное распределение чувствительности определяется соответствующим собственным вектором. Если флуктуации сигнала отсутствуют, то μ' совпадает с критерием μ из § 45.

Для сравнения неискажающих и подавляющих групп примем $\Delta x > d$. Тогда

$$\mu' = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_j h_k B_u(j-k)}{\sigma_{\xi}^2 \sum_{k=1}^n h_k^2},$$

где $B_u(j-k)$ — определяются формулой (X.58). Видно, что задача сводится к определению максимального собственного значения и отвечающего

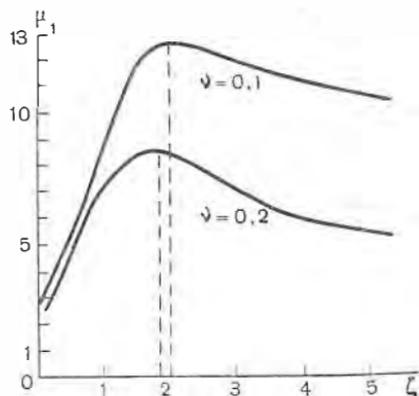


Рис. 36

ему собственного вектора матрицы с элементами (X.58). Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что умножение этой матрицы на вектор с компонентами $(1, 1, \dots, 1)$ дает вектор с компонентами $\lambda = (a^2 + \sigma_a^2) [1 + (n-1)c]$. Отсюда следует, что однородное распределение чувствительности является собственным вектором данной матрицы. Нужно еще убедиться в том, что λ — максимальное собственное значение. При $c = 1$ все столбцы матрицы \mathbf{B} одинаковы, поэтому ее ранг при данном значении c равен единице. Но это значит, что при $c \rightarrow 1$ все собственные значения матрицы \mathbf{B} , кроме максимального, должны стремиться к нулю. Поскольку при $c \rightarrow 1, \lambda \rightarrow n(a^2 + \sigma_a^2)$, то λ может быть только максимальным собственным значением.

Итак, при $\Delta x > d$ оптимальная подавляющая группа приемников имеет равномерное распределение чувствительности и

$$\mu'_\infty = \frac{a^2 + \sigma_a^2}{\sigma_\xi^2} [1 + (n-1)c].$$

Легко видеть, что при любых $n > 1$ и $c > 0$ $\mu'_\infty > \frac{a^2 + \sigma_a^2}{\sigma_\xi^2}$. Следовательно, при использовании чисто энергетических критериев группа всегда выгоднее одиночного приемника. Этот вывод верен и для однородной группы, так как при $\Delta x > d$ она совпадает с оптимальной.

Если оптимальная подавляющая группа ищется в классе однородных групп, то задача сводится к определению такого Δx , при котором наблюдается максимум величины

$$\mu' = \sum_{(j)} \sum_{(k)} B_{jk} (j-k) \left/ \sum_{(j)} \sum_{(k)} R_{jk} [(j-k)\Delta x] \right.$$

Если для μ' установлено некоторое пороговое значение μ_* , то надо найти такое минимальное n , для которого $\max \mu'(\Delta x) > \mu_*$. Расчеты показывают [см., например, графики $\mu'(\Delta x)$ для однородных групп на рис. 3б], что зависимость $\mu'(\Delta x)$ имеет хорошо выраженный максимум.

Глава XI

МНОГОКАНАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

§ 48. Основные понятия многоканальной фильтрации

Рассматривавшиеся в предыдущих главах интерференционные системы — весьма специальный вид более широкого класса линейных преобразований многоканальных сейсмограмм. Поэтому только в отдельных случаях в интерференционной системе удается наилучшим образом учесть пространственную корреляцию реальных волн, которая лежит в основе многоканальной регистрации сейсмических колебаний. Поскольку большая часть применяемых интерференционных систем имеет частотную характеристику фильтра низких частот, то наиболее трудно интерфе-

ренционными методами решаются задачи повышения разрешающей способности.

Во втором разделе различные сейсмические задачи решались методами одноканальной фильтрации, основанной на особенностях частотного спектра полезных сигналов и помех. При этом фильтрация каждого канала рассматривалась независимо от фильтрации других каналов. Никакая связь между значениями волнового поля в различных точках приема не учитывалась. Естественно предположить, что если объединить достоинства интерференционных систем и одноканальных фильтров в рамках одной приемной системы, в равной мере учитывающей и частотные свойства волн, и их пространственную корреляцию, то эффективность решения сейсмических задач может быть в значительной мере увеличена. Эти соображения ведут нас к понятию многоканального фильтра.

Многоканальным фильтром называется линейная система, на входе которой действует совокупность из n входных сигналов трасс $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$, а на выходе регистрируется совокупность $m \geq 1$ выходных сигналов $y_1(t)$, $y_2(t)$, ..., $y_m(t)$:

$$y_j(t) = \sum_{k=1}^n L_{jk} [x_k(t)], \quad (\text{XI.1})$$

где L_{jk} — одноканальный фильтр.

Многоканальный фильтр с n входами и m выходами будет называться $(n \times m)$ -мерным фильтром. При $n = m = 1$ получим обычный одноканальный фильтр. Если $L_{jk} [x_k(t)] = x_k [t - \Delta t_k(\theta_j)]$, то многоканальный фильтр представляет собой регулируемую интерференционную систему.

Рассмотрим спектральную форму равенства (XI.1). Пусть $S_x^{(k)}(\omega)$ — спектр сигнала $x_k(t)$, а $S_y^{(j)}(\omega)$ — спектр сигнала $y_j(t)$. Тогда равенство (XI.1) перепишется в следующей форме

$$S_y^{(j)}(\omega) = \sum_{k=1}^n L_{jk}(\omega) S_x^{(k)}(\omega). \quad (\text{XI.2})$$

Этим формулам можно придать более компактный вид. Обозначим

$$\vec{S}_x(\omega) = \begin{pmatrix} S_x^{(1)}(\omega) \\ S_x^{(2)}(\omega) \\ \vdots \\ S_x^{(n)}(\omega) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{S}_y(\omega) = \begin{pmatrix} S_y^{(1)}(\omega) \\ S_y^{(2)}(\omega) \\ \vdots \\ S_y^{(m)}(\omega) \end{pmatrix}.$$

В этом случае совокупность равенств (XI.2) выражается следующей матричной формулой:

$$\vec{S}_y(\omega) = \mathbf{L}(\omega) \vec{S}_x(\omega), \quad (\text{XI.3})$$

где $\mathbf{L}(\omega)$ — матрица с элементами $L_{jk}(\omega)$. Эта формула эквивалентна основному соотношению (I.28) при замене спектров входного и выходного сигналов на векторные спектры, а спектральной характеристики — на матрицу спектральных характеристик.

Пример I. Матрица спектральных характеристик перегулируемой интерференционной системы представляет собой строку

$$G(\omega) = [h_1 \exp(-i\omega \Delta t_1), h_2 \exp(-i\omega \Delta t_2), \dots, h_n \exp(-i\omega \Delta t_n)]. \quad (XI.4)$$

Матрица спектральных характеристик является строкой вида

$$L(\omega) = L_1(\omega), L_2(\omega), \dots, L_n(\omega)$$

во всех случаях $(n \times 1)$ -мерной (или, будем говорить, векторной) фильтрации, определяемой формулой

$$y(t) = \sum_{k=1}^n L_k [x_k(t)]. \quad (XI.5)$$

Пример II. Пусть к трассам $x_k(t)$ n -канальной сейсмограммы применяется один и тот же одномерный фильтр $L_0: y_k(t) = L_0 [x_k(t)]$. Это преобразование может быть выполнено либо с помощью $(n \times n)$ -мерного фильтра с диагональной матрицей

$$L(\omega) = \begin{pmatrix} L_0(\omega) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & L_0(\omega) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & L_0(\omega) \end{pmatrix}, \quad (XI.6)$$

либо с помощью (1×1) -мерного скалярного фильтра, так как в формуле (XI.3) $L(\omega)$ может быть и скаляром.

Пусть к совокупности функций $\{y_1(t), \dots, y_m(t)\}$ применяется новый $(m \times s)$ -мерный фильтр M , на выходе которого определяются сигналы

$$z_r(t) = \sum_{j=1}^m M_{rj} [y_j(t)], \quad r = 1, \dots, s.$$

Аналогично формуле (XI.3) имеем:

$$\vec{S}_z(\omega) = M(\omega) \vec{S}_y(\omega), \quad (XI.7)$$

где $M(\omega)$ — матрица с элементами M_{rj} . Подставив в (XI.7) выражение $\vec{S}_y(\omega)$ по формуле (XI.3), получим

$$\vec{S}_z(\omega) = M(\omega) L(\omega) \vec{S}_x(\omega) = P(\omega) \vec{S}_x(\omega), \quad (XI.8)$$

где $P(\omega)$ является $(s \times n)$ -мерной матрицей, представляющей собой произведение матриц $L(\omega)$ и $M(\omega)$. Таким образом, последовательность $(n \times m)$ -мерного фильтра L и $(m \times s)$ -мерного фильтра M — это $(n \times s)$ -мерный фильтр P , а матричная спектральная характеристика — произведение матричных характеристик фильтров L и M .

Заметим, что формулу (XI.8) можно было получить и в поэлементной (нематричной) записи, подставив в формулу

$$S_z^{(r)}(\omega) = \sum_{j=1}^m M_{rj}(\omega) S_y^{(j)}(\omega) \quad (XI.8')$$

выражение (XI.2) и обозначив символом $P_{rk}(\omega)$ сумму $\sum_{j=1}^m M_{rj}(\omega) L_{jk}(\omega)$.

Поскольку произведение матриц, вообще говоря, непрерывно, то и последовательность многоканальных фильтров также не обязана быть перестановочной. Этим многоканальный фильтр отличается от одноканальных.

Пример III. Последовательность фильтров (XI.6) и (XI.4) (т. е. фильтрация + суммирование) определяет $(n \times 1)$ -мерный фильтр

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\omega) &= \mathbf{G}(\omega) \mathbf{L}(\omega) = [h_1 L_0(\omega) \exp(-i\omega \Delta t_1), \dots, h_n L_0(\omega) \exp(-i\omega \Delta t_n)] = \\ &= L_0(\omega) [h_1 \exp(-i\omega \Delta t_1), \dots, h_n \exp(-i\omega \Delta t_n)] = L_0(\omega) \mathbf{G}(\omega). \end{aligned}$$

Несмотря на то что произведение $\mathbf{L}(\omega) \mathbf{G}(\omega)$ не имеет смысла (не определено), фильтрация и суммирование оказались перестановочны вследствие эквивалентности скалярного фильтра $L_0(\omega)$ и фильтра (XI.6).

Пусть матрица $\mathbf{L}(\omega)$ в формуле (XI.3) при каждом значении ω имеет обратную. Так как произведение $\mathbf{L}^{-1}(\omega) \mathbf{L}(\omega)$ определяет единичную матрицу \mathbf{E} , умножение которой на любой вектор оставляет этот вектор без изменения, то $\mathbf{L}^{-1}(\omega) \vec{S}_y(\omega) = \vec{S}_x(\omega)$, следовательно, матрица $\mathbf{L}^{-1}(\omega)$ задает обратный $(n \times m)$ -мерный фильтр.

Вспомнив формулу обратной матрицы, легко получить следующее утверждение.

Теорема. Пусть элементы матрицы $\mathbf{L}(\omega)$ — физически осуществимы (в смысле условия причинности) спектральные характеристики, тогда обратный фильтр $\mathbf{L}^{-1}(\omega)$ физически осуществим, если $\det \mathbf{L}(\omega)$ является минимально-фазовой спектральной характеристикой.

Рассмотрим действие $(n \times m)$ -мерного фильтра \mathbf{L} на n -мерный стационарный процесс $\{\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)\}$, который описывается матрицей $\mathbf{N}_\xi(\omega)$ взаимных энергетических спектров $\mathbf{N}_{kl}^{(\xi)}(\omega)$.

Найдем аналогичную матрицу выходного процесса $\{\eta_1(t), \dots, \dots, \eta_m(t)\}$, где

$$\eta_j(t) = \sum_{k=1}^n L_{jk}[\xi_k(t)], \quad j=1, \dots, m.$$

Как известно (см. § 29), взаимный энергетический спектр процессов $\eta_j(t)$ и $\eta_s(t)$ определяется как предел при $d\omega \rightarrow 0$ математического ожидания отношения $Y_j(d\omega) Y_s^*(d\omega) / 2\pi d\omega$, где $Y_j(d\omega)$ — комплексная амплитуда в спектральном разложении процесса $\eta_j(t)$ [см. формулу (VII.15)].

Из линейности интеграла Фурье

$$Y_j(d\omega) = \sum_{k=1}^n L_{jk}(\omega) X_k(d\omega),$$

поэтому искомым взаимный энергетический спектр

$$\begin{aligned} N_{js}^{(\eta)}(\omega) &= \lim_{d\omega \rightarrow 0} \mathbf{M} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n L_{jk}(\omega) L_{sl}^*(\omega) X_k(d\omega) X_l^*(d\omega) / 2\pi d\omega = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n L_{jk}(\omega) N_{kl}^{(\xi)}(\omega) L_{sl}^*(\omega). \end{aligned} \quad (\text{XI.9})$$

Полученную формулу можно также записать в матричном виде:

$$\mathbf{N}_\eta(\omega) = \mathbf{L}(\omega) \mathbf{N}_z(\omega) \mathbf{L}^*(\omega), \quad (\text{XI.10})$$

где $\mathbf{L}^*(\omega)$ означает матрицу, которая транспонирована к $\mathbf{L}(\omega)$ и в которой все элементы заменены на комплексно-сопряженные.

§ 49. Дискретные многоканальные фильтры

Пусть $\{x_s^{(1)}, \dots, x_s^{(n)}\}$ — совокупность входных последовательностей, полученных дискретизацией «непрерывных» сигналов $x_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$). На выходе $(n \times m)$ -мерного дискретного фильтра будут получены m выходных последовательностей $\{y_s^{(1)}, \dots, y_s^{(m)}\}$, каждая из которых определяется формулой

$$y_s^{(j)} = \sum_{k=1}^n \sum_{r=-\infty}^{\infty} l_{s-r}^{(j,k)} x_r^{(k)}. \quad (\text{XI.11})$$

Пусть, к примеру, рассматривается (2×2) -мерный фильтр со следующими импульсными характеристиками:

$$\begin{aligned} l^{(1,1)} &= \{2, -1\}_0^1, & l^{(1,2)} &= \{1, -1\}_0^1; \\ l^{(2,1)} &= \{0, 1\}_0^1, & l^{(2,2)} &= \{3, -3\}_0^1. \end{aligned} \quad (\text{XI.12})$$

Запись $l^{(1,1)} = \{2, -1\}_0^1$ означает, что $l_s^{(1,1)}$ тождественно равны нулю при $s < 0$ и при $s > 1$; кроме того, $l_0^{(1,1)} = 2$ и $l_1^{(1,1)} = -1$.

Тогда

$$\begin{aligned} y_s^{(1)} &= 2x_s^{(1)} - x_{s-1}^{(1)} + x_s^{(2)} - x_{s-1}^{(2)}; \\ y_s^{(2)} &= x_{s-1}^{(1)} + 3x_s^{(2)} - 2x_{s-1}^{(2)}. \end{aligned} \quad (\text{XI.13})$$

В частности, этот фильтр преобразует входные последовательности $x^{(1)} = \{1, 1\}_0^1$, $x^{(2)} = \{2, 0\}_0^1$, в $y^{(1)} = \{4, -1, -1\}_0^2$, $y^{(2)} = \{6, 3, 1\}_0^2$.

Введем дискретные спектры фигурирующих в формуле (XI.14) последовательностей, обозначая их так же, как и непрерывные спектры. Поскольку свойства дискретных и непрерывных спектров аналогичны, то получим точный аналог формулы (XI.2) и (XI.3). Вследствие полной аналогии на дискретный случай полностью переносятся теоремы предыдущего параграфа. В силу периодичности дискретных спектров любые их свойства устанавливаются и проверяются для промежутка $-\pi/\Delta t \leq \omega \leq \pi/\Delta t$.

При изучении одномерных дискретных фильтров важную роль играло z -преобразование; при помощи которого удалось сформулировать простые условия устойчивости обратных фильтров. Поэтому представляется разумным распространить технику z -преобразований и на многомерный случай.

Определим z -преобразование совокупности числовых последовательностей в виде следующего, зависящего от z вектора:

$$\vec{X}(z) = \begin{pmatrix} \sum_{s'=-\infty}^{\infty} x_s^{(1)} z^s \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum_{s=-\infty}^{\infty} x_s^{(n)} z^s \end{pmatrix} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} z^s \begin{pmatrix} x_s^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_s^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (\text{XI.14})$$

Поскольку совокупность последовательностей $\{x_s^{(k)}\}$ можно рассматривать как векторную последовательность

$$\vec{x}_s = \begin{pmatrix} x_s^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ x_s^{(n)} \end{pmatrix},$$

то формула (XI.14) эквивалентна векторной формуле

$$\vec{X}(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \vec{x}_s z^s. \quad (\text{XI.15})$$

Если аналогично определить z -преобразование $\vec{Y}(z)$ векторной последовательности \vec{y}_s и ввести матрицу $\mathbf{L}(z)$ с компонентами

$$L_{jk}(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} l_s^{(j,k)} z^s, \quad (\text{XI.16})$$

то можно написать

$$\vec{Y}(z) = \mathbf{L}(z) \vec{X}(z). \quad (\text{XI.17})$$

Заметим, что последовательность матриц $\Lambda_s = \{l_s^{(j,k)}\}$ ($s = 0, \pm 1 \dots$) образует матричную импульсную характеристику $(n \times m)$ -мерного фильтра; при этом

$$\vec{y}_s = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \Lambda_{s-r} \vec{x}_r. \quad (\text{XI.18})$$

Матричная импульсная характеристика $\{\Lambda_s\}$ и матрица \mathbf{L}_z связаны соотношением, аналогичным (III.32):

$$\mathbf{L}(z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Lambda_s z^s. \quad (\text{XI.19})$$

Проиллюстрируем введенные понятия на примере (XI.12).

Матричная импульсная характеристика, очевидно, выразится так:

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

а z -матрица

$$\mathbf{L}(z) = \begin{pmatrix} 2-z & 1-z \\ z & 3-2z \end{pmatrix}. \quad (\text{XI.19}')$$

Функционирование фильтра определяется формулой

$$\vec{y}_s = \Lambda_0 \vec{x}_s + \Lambda_1 \vec{x}_{s-1}.$$

Применим построенную выше z -характеристику многомерного фильтра для выяснения условия устойчивости многомерной обратной фильтрации. Ограничимся рассмотрением только такой ситуации, когда все импульсные характеристики $\{l_s^{(j,k)}\}$ финитны и отличны от нуля только при $s \geq 0$. В этом случае элементы матрицы $\mathbf{L}(z)$ будут многочленами, содержащими неотрицательные степени z не выше какого-то фиксированного числа.

Пусть $\mathbf{L}(z)$ — квадратная матрица порядка $(n \times n)$. Элементы обратной матрицы равны $L^{jk}(z)/\det \mathbf{L}(z)$, где $L^{jk}(z)$ — алгебраические дополнения элементов матрицы $\mathbf{L}(z)$, являющиеся полиномами конечной степени. Ясно, что устойчивость обратного оператора полностью определяется сомножителем $1/\det \mathbf{L}(z)$. По существу задача свелась к выяснению возможности устойчивой реализации фильтра, обратного фильтру с z -характеристикой $\det \mathbf{L}(z)$.

В соответствии с результатами § 25 ответ на данный вопрос зависит от расположения корней уравнения

$$\det \mathbf{L}(z) = 0. \quad (\text{XI.20})$$

Если ни один корень этого уравнения не лежит на окружности $|z| = 1$, то фильтр $1/\det \mathbf{L}(z)$ реализуется либо как устойчивый правосторонний (если все корни лежат вне единичного круга), либо как устойчивый левосторонний [если все корни уравнения (XI.20) лежат в единичном круге], либо как устойчивый двухсторонний оператор.

Применим эти условия к z -матрице (XI.19'). Определитель этой матрицы равен $3z^2 - 8z + 6$. Уравнение (XI.20) имеет два корня:

$$z_{1,2} = (4 \pm \sqrt{2})/3,$$

модули которых равны $\sqrt{2}$. Итак, все корни лежат вне единичного круга. Все импульсные характеристики двумерного фильтра \mathbf{L}^{-1} являются устойчивыми и правосторонними. Их легко найти, если разложить в ряд Тейлора элементы матрицы

$$\mathbf{L}^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{3-2z}{3z^2-8z+6} & -\frac{z}{3z^2-8z+6} \\ \frac{z-1}{3z^2-8z+6} & \frac{2-z}{3z^2-8z+6} \end{pmatrix}.$$

§ 50. Двухканальный фильтр для подавления волны-спутника

Рассмотрим метод устранения волны-спутника неизвестной формы при помощи двух источников, помещенных на различную глубину (см. конец § 23). Раньше эту задачу мы сводили к задаче обратной фильтрации

вычитанием одной трассы из другой при определенном сдвиге. Однако это решение было мало удовлетворительным, так как получающийся обратный фильтр не является устойчивым.

Покажем, что значительно большего эффекта можно достичь, если к обоим трассам применить специальный двухканальный фильтр. Применяя ко второй трассе [см. формулу (V.76)] сдвиг на $\Delta\tau$, задачу можно сформулировать следующим образом.

Даны две трассы:

$$x_1(t) = f(t) + g(t)$$

и

$$x_2(t) = f(t) + g(t - 3\Delta\tau).$$

Необходимо определить (2×1) -мерный фильтр, на выходе которого сигнал $f(t)$, приходящий на обе трассы синфазно, регистрируется без искажения, а сигнал $g(t)$, имеющий известное запаздывание на второй трассе по отношению к первой, подавляется максимальным образом. Относительно сигнала $g(t)$ будет считаться известным интервал частот, в котором сосредоточен его спектр. Соответствующий (2×1) -мерный фильтр будем искать в цифровой форме, взяв интервал дискретизации Δt таким, чтобы отношение $3\Delta\tau/\Delta t$ было целым числом.

Рассмотрим предварительно некоторые свойства (2×1) -мерных фильтров.

Каждый такой фильтр, работающий по формуле

$$y_s = \sum_{r=-\infty}^{\infty} l_{s-r}^{(1)} x_r^{(1)} + \sum_{r=-\infty}^{\infty} l_{s-r}^{(2)} x_r^{(2)}, \quad (\text{XI.21})$$

определяется парой импульсных характеристик $\{l_s^{(1)}\}$ и $\{l_s^{(2)}\}$. Введем класс F_p входных сигналов $\{f_s, f_{s-p}\}$, где $\{f_s\}$ — произвольная числовая последовательность.

Для сигналов класса F_p (2×1) -мерный фильтр имеет скалярную спектральную характеристику. В самом деле, дискретный спектр числовой последовательности (XI.21)

$$S_y(\omega) = [L_1(\omega) + L_2(\omega) \exp(-i\omega p \Delta t)] S(\omega), \quad (\text{XI.22})$$

где $L_1(\omega)$ и $L_2(\omega)$ — спектральные характеристики, отвечающие импульсным характеристикам $\{l_s^{(1)}\}$ и $\{l_s^{(2)}\}$ ¹.

Выражение в квадратных скобках зависит от спектральных характеристик $\{l_s^{(1)}\}$, $\{l_s^{(2)}\}$ и от фиксированного числа p и не зависит ни от каких других особенностей сигналов класса F_p , поэтому оно может рассматриваться как спектральная характеристика для сигналов этого класса:

$$H^{(p)}(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) \exp(-i\omega p \Delta t). \quad (\text{XI.23})$$

Теперь задача заключается в следующем: определить такой (2×1) -мерный фильтр, для которого $H^{(0)}(\omega) = \text{const} = A$, а $H^{(p)}(\omega)$ имеет полосу гашения в интервале (ω', ω'') . Покажем, что этот фильтр действительно

¹ Штрихи, отличающие дискретные спектры от непрерывных, нами опущены.

решает поставленную вначале задачу. Если на вход фильтра, удовлетворяющего указанному условию, послать синфазный сигнал $\{f_s, f_s\}$, то на выходе получим выходной сигнал, спектр которого равен $AS(\omega)$, т. е. сигнал $\{Af_s\}$. Если же на вход этого фильтра послать сигнал $\{g_s, g_{s-p}\}$ класса F_p , то на выходе получим сигнал, спектр которого равен $H^{(p)}(\omega)S_g(\omega) \simeq 0$. Вследствие линейности, реакция на сумму $\{f_s + g_s, f_s + g_{s-p}\}$ окажется равной сумме соответствующих реакций, т. е. приближенно $\{Af_s\}$.

Таким образом, спектральные характеристики $L_1(\omega)$ и $L_2(\omega)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$H^{(0)}(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) = A \quad (\text{XI.24})$$

и

$$H^{(p)}(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) \exp(-i\omega p \Delta t) \simeq 0. \quad (\text{XI.25})$$

Из условия (XI.24) следует, что при фиксированном A фильтр $L_2(\omega)$ вполне определяется фильтром $L_1(\omega)$. Выражая $L_2(\omega)$ через $L_1(\omega)$ согласно (XI.24) и подставляя в (XI.25), второе условие запишем следующим образом:

$$L_1(\omega) [1 - \exp(-i\omega p \Delta t)] + A \exp(-i\omega p \Delta t) \simeq 0. \quad (\text{XI.26})$$

Заметим, что если потребовать, чтобы равенство (XI.26) было строгим и выполнялось при любых ω , то фильтр L_1 оказался бы нереализуемым, так как его z -характеристика

$$L_1(z) = -Az^p / (1 - z^p).$$

Поскольку корни знаменателя имеют модуль, равный единице, то данный фильтр оказывается неустойчивым. Возможность получения устойчивого решения существенным образом связана, во-первых, с отказом от строгого равенства, во-вторых, с тем, что приближенное равенство требуется получить только в конечном интервале частот.

Решение приближенного уравнения (XI.26) неединственно, поэтому нужно либо уточнить характер приближения, либо сузить класс спектральных характеристик.

Прежде всего ограничим длину оператора L_1 , предположив, что его импульсная характеристика $\{l_s^{(1)}\}$ имеет $M + 1$ отсчетов.

Тогда

$$L_1(\omega) = \sum_{s=0}^M l_s \exp(-i\omega s \Delta t) \quad (\text{XI.27})$$

(для упрощения записи верхний индекс у l опущен).

Самый простой способ уточнения характера приближения в (XI.26) заключается в отыскании коэффициентов l_s , минимизирующих средне-квадратическое отклонение левой части от нуля на интервале (ω', ω'') . Это приводит к задаче минимизации следующего выражения:

$$\int_{\omega'}^{\omega''} \left| \sum_{s=0}^M l_s \exp(-i\omega s \Delta t) [1 - \exp(-i\omega p \Delta t)] + A \exp(-i\omega p \Delta t) \right|^2 d\omega. \quad (\text{XI.28})$$

Поскольку значение параметра A нами еще не выбрано, то кажется естественным искать минимум и по l_s и по A . Однако этот путь неверен, поскольку такой минимум тривиален: нужно принять все значения l_s и A равными нулю. Но в этом случае фильтр не пропускает никакого сигнала, поэтому параметр A нужно считать фиксированным. Поскольку он определяет амплитуду полезного сигнала на выходе фильтра, выбор значения A определяется уровнем помех.

Представляя подынтегральное выражение в (XI.28) через произведение сопряженных величин и продифференцировав по l_s , получим после приравнивания производных нулю следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^M l_k \int_{\omega'}^{\omega''} [(1 - \cos \omega p \Delta t) \cos \omega (k - s) \Delta t] d\omega &= \\ &= -A \int_{\omega'}^{\omega''} \cos \omega (p - s) \Delta t d\omega; \\ s &= 0, 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Все интегралы в этих уравнениях берутся в явном виде, так что доведение решения до численных расчетов не представляет особых трудностей.

Другой способ уточнения характера приближения в (XI.26) заключается в отыскании такой спектральной характеристики, которая дает наименьшее максимальное отклонение левой части (XI.26) от нуля в интервале (ω', ω'') среди всех спектральных характеристик, определяемых равенством (XI.27). Нетрудно увидеть, что эта задача близка к задаче выбора чебышевских групп.

В самом деле, учитывая (XI.27), левую часть приближенного равенства (XI.26) можно преобразовать к виду

$$H^{(p)}(\omega) = \sum_{k=0}^{M+p} h_k \exp(-i\omega k \Delta t), \quad (\text{XI.29})$$

где при $p < M$

$$h_k = \begin{cases} l_k, & k < p \\ l_p - l_k + A, & k = p \\ l_k - l_{k-p}, & p < k \leq M \\ -l_{k-p}, & k > M. \end{cases} \quad (\text{XI.30})$$

Из результатов § 13 мы знаем, что минимизация максимального отклонения многочлена (XI.29) от нуля в заданном интервале (ω', ω'') может быть выполнена при помощи полиномов Чебышева. Тем самым мы найдем коэффициенты h_k . Решение системы (XI.30), состоящей из $M + p + 1$ уравнений и содержащая $M + 2$ (считая все l_k и A) неизвестных, возможно лишь при $p = 1$. В противном случае система переопределена, и для отыскания $L_1(\omega)$ нужно будет обратиться к методу наименьших квадратов.

При $p = 1$ спектральную характеристику можно построить исходя из аналогии выражения (XI.29) и обобщенной характеристики дискретной группы (при замене ω на ν и Δt на Δx).

Если принять $h_k = 1$, то полоса гашения характеристики (XI.29) определится известными неравенствами (см. § 38), задающими полосу гашения однородной группы:

$$\frac{2\pi}{(M+1)\Delta t} \leq \omega \leq \frac{2\pi}{\Delta t} \left(1 - \frac{1}{M+1}\right). \quad (\text{XI.31})$$

Ясно, что величину M нужно выбрать такой, чтобы интервал (XI.31) покрыл заданный интервал (ω' , ω''). Отсюда следует условие

$$M \geq \max\left(\frac{2\pi}{\omega' \Delta t} - 1, \frac{2\pi}{2\pi - \omega'' \Delta t} - 1\right). \quad (\text{XI.32})$$

Пусть, к примеру, $\omega' = 2\pi \cdot 20$ Гц, $\omega'' = 2\pi \cdot 50$ гц, $\Delta t = 0,004$ с, тогда $M \geq 12$.

При $p = 1$ система уравнений (XI.30) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} l_0 &= h_0, & k < 1 \\ l_1 - l_0 + A &= h_1, & k = 1 \\ l_k - l_{k-1} &= h_k, & 1 < k \leq M \\ -l_M &= h_{M+1}, & k > M. \end{aligned} \quad (\text{XI.33})$$

Решая эту систему с конца при $h_k = 1$, получим $l_M = -1$, $l_{M-1} = -2$, ..., $l_2 = -M + 1$, $l_1 = -M$. Значение l_0 найдется из первой строки системы (XI.33) ($l_0 = 1$), значит, константа A , определяемая по второй строке, равна $1 - l_1 + l_0 = M$. Следовательно, полезный сигнал получает усиление в M раз.

Известно, что эффективность подавления однородной группы невелика. В этом отношении более удовлетворительной является треугольная группа (см. § 38). Так как нижняя граничная частота полосы гашения треугольной группы равна $4\pi/(M+1)\Delta t$, для M получим новое условие:

$$M \geq \max\left(\frac{4\pi}{\omega' \Delta t} - 1, \frac{4\pi}{2\pi - \omega'' \Delta t} - 1\right). \quad (\text{XI.34})$$

Правая часть системы (XI.33) определится следующим равенством,

$$h_k = \begin{cases} k + 1, & 0 \leq k \leq (M+1)/2 + 1 \\ M + 2 - k, & (M+1)/2 + 1 \leq k \leq M. \end{cases} \quad (\text{XI.35})$$

Не занимаясь общей формулой для определения l_k (хотя это и не представляет особых трудностей), ограничимся численным примером для $M = 5$. Подставляя (XI.34) в (XI.33), получим следующую систему:

$$\begin{aligned} l_0 &= 1; \\ l_1 - l_0 + A &= 2; \end{aligned}$$

$$l_2 - l_1 = 3;$$

$$l_3 - l_2 = 4;$$

$$l_4 - l_3 = 3;$$

$$l_5 - l_4 = 2;$$

$$-l_5 = 1.$$

Решая последовательно, находим,

$$l_5 = -1; l_4 = -3; l_3 = -6; l_2 = -10; l_1 = -13; l_0 = 1; A = 16.$$

Коэффициенты $l_k^{(2)}$ импульсной характеристики фильтра $L_2(\omega)$ определяются из условия (XI.24). Выражая $L_1'(\omega)$ и $L_2'(\omega)$ через соответствующие импульсные характеристики по формулам типа (XI.27) и приравняв коэффициенты при одних и тех же гармониках, получим

$$l_0^{(2)} = A - l_0^{(1)}; \quad l_k^{(2)} = -l_k^{(1)}, \quad (\text{XI.36})$$

в нашем численном примере $l^2 = \{15, 13, 10, 6, 3, 1\}$.

В заключение заметим, что чебышевский метод и метод из последнего пункта, которые могут применяться только при $p = 1$, на самом деле легко распространить на более общий случай. С этой целью всю систему каждого из входных сигналов $\{x_s^{(1)}\}$ и $\{x_s^{(2)}\}$ нужно разбить на p групп. В первую группу войдут отсчеты с номерами kp , $k = 0, 1, \dots$ во вторую — отсчеты с номерами $1 + kp$, $k = 0, 1, \dots$ и т. д. Для каждой группы отсчетов нужно будет применить один и тот же фильтр, после чего отсчеты выходной последовательности поместить на соответствующие места.

§ 51. Многоканальные фильтры при разделении плоских волн

Полученный выше двухканальный фильтр специфически не связан с задачей подавления волн-спутников. При его помощи можно разделить любые волны, которые регистрируются с различной разностью времен вступления на соседних трассах. Единственным условием его применения является наличие информации об этих разностях. Поэтому метод из § 50 может быть положен в основу многоканальной ($n \times 2$)-мерной фильтрации, предназначенной для разделения двух регулярных волн с известными кажущимися скоростями распространения.

Итак, рассматривается следующая модель для n трасс:

$$x_k(t) = f\left(t - \frac{k-1}{v_1} \Delta x\right) + g\left(t - \frac{k-1}{v_2} \Delta x\right), \quad (\text{XI.37})$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

где v_1 и v_2 известны. Относительно сигналов $f(t)$ и $g(t)$ предполагаются заданными интервалы частот (ω_1', ω_1'') и (ω_2', ω_2'') , в которых располагаются спектры этих сигналов.

Наша задача — построить $(n \times 2)$ -мерный фильтр с выходными сигналами $y_1(t)$ и $y_2(t)$, удовлетворяющими условию

$$y_1(t) \cong f(t), \quad y_2(t) \cong g(t), \quad (\text{XI.38})$$

где

$$y_j(t) = \sum_{k=1}^n L_{jk} [x_k(t)], \quad j=1, 2. \quad (\text{XI.39})$$

Искомый $(n \times 2)$ -мерный фильтр состоит из двух векторных фильтров $\mathbf{L}^{(1)}$ и $\mathbf{L}^{(2)}$, первый из которых имеет выходом $y_1(t)$, а второй — $y_2(t)$. В силу полной симметрии задачи относительно индекса j , можно ограничиться рассмотрением только первого векторного фильтра. Поскольку значение v_1 известно, то введением временных задержек формулу (XI.37) можно преобразовать к такому виду:

$$x_k(t) = f(t) + g \left[t - \frac{(k-1)}{w} \Delta x \right], \quad (\text{XI.40})$$

где

$$w = v_1 v_2 / (v_1 - v_2).$$

Перейдем к дискретному заданию обрабатываемой информации:

$$x_s^{(k)} = f_s + g_{s-1} k^{-1} p, \quad p = \Delta x / w \Delta t$$

(предполагается, что p — целое число).

Вначале рассмотрим простой метод решения задачи выделения сигнала $f(t)$ при $p=1$. Пусть n четно, тогда всю совокупность обрабатываемых трасс можно разбить на пары $\{x_s^{(2l-1)}, x_s^{(2l)}\}$ и для каждой пары применить (2×1) -мерный фильтр (L_1, L_2) . Результат фильтрации каждой такой пары представляет собой числовую последовательность $z^{(l)} = \{z_s^{(l)}\}$, равную $\{A f_s + r_{s-2l+1}\}$, где последовательность $\{r_s\}$ равна отклику фильтра (L_1, L_2) на сигнал $\{g_s, g_{s-1}\}$, т. е. равна $L_1 \{g_s\} + L_2 \{g_{s-1}\}$.

Поскольку совокупность последовательностей $\{r_{s-2l+1}\}$ при $l=1, 2, \dots, n/2$ является плоской волной, то дополнительное гашение этого остатка может быть достигнуто суммированием всех числовых последовательностей $\{z_s^{(l)}\}$, откуда

$$y_1(t) = \sum_{l=1}^{n/2} \{L_1 [x_{2l-1}(t)] + L_2 [x_{2l}(t)]\} a_l,$$

где распределение чувствительностей a_l выбирается из тех же соображений, что и в интерференционных системах.

Сравнивая последнее равенство с (XI.39), видим, что операторы L_{1k} определены следующим образом:

$$L_{1, 2l-1} = a_l L_1, \quad L_{1, 2l} = a_l L_2.$$

Теперь откажемся от условия $p = 1$ и рассмотрим более общий подход. Введем снова класс F_p сигналов вида $x_s^{(k)} = f_{s-(k-1)p}$. Для сигналов этого класса всякий векторный фильтр $\mathbf{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ имеет скалярную спектральную характеристику

$$H^{(p)}(\omega) = L_1(\omega) + L_2(\omega) \exp(-i\omega p \Delta t) + \dots + L_n(\omega) \exp[-i\omega(n-1)p \Delta t]. \quad (\text{XI.41})$$

Очевидно, что задача сводится к отысканию такого $(n \times 1)$ -мерного фильтра \mathbf{L} , для которого

$$H^{(0)}(\omega) \simeq A > 0, \quad \omega_1^* \leq \omega \leq \omega_1'' \quad (\text{XI.42})$$

и

$$H^{(p)}(\omega) \simeq 0, \quad \omega_2^* \leq \omega \leq \omega_2''. \quad (\text{XI.43})$$

Фильтры L_1, L_2, \dots, L_n будем искать в классе фильтров конечной длины $M + 1$:

$$L_k(\omega) = \sum_{s=0}^M l_s^{(k)} \exp(-i\omega s \Delta t).$$

Подставляя $L_k(\omega)$ в формулу (XI.41), получим

$$H^{(p)}(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^M l_s^{(k+1)} \exp[-i\omega(s+kp)\Delta t]. \quad (\text{XI.44})$$

Рассматривая различные уточнения приближений (XI.42) и (XI.43), можно получить, вообще говоря, разные решения — задачи выделения сигнала.

Приближение (XI.43) всегда будем оценивать в смысле среднеквадратического отклонения, т. е. по величине

$$Q_p = \int_{\omega_2^*}^{\omega_2''} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^M l_s^{(k+1)} \exp[-i\omega(s+kp)\Delta t] \right|^2 d\omega. \quad (\text{XI.45})$$

Что касается приближения (XI.42), то здесь можно поступить двояким путем: либо потребовать, чтобы для всех ω ($0 \leq \omega \leq \infty$) выполнялось

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^M l_s^{(k+1)} \exp(-i\omega s \Delta t) \equiv A, \quad (\text{XI.46})$$

либо вместе с Q_p минимизировать среднеквадратическое отклонение

$$Q_0 = \int_{\omega_1'}^{\omega_1''} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{s=0}^M l_s^{(k+1)} \exp(-i\omega s \Delta t) - A \right|^2 d\omega.$$

Мы получили две постановки задачи выделения волны $f(t)$ класса F_0 на фоне волны $g(t)$ класса F_p :

$$\min Q_p \text{ при условии (XI.46);} \quad (\text{XI.47})$$

$$\min (Q_p + \alpha Q_0). \quad (\text{XI.48})$$

Параметр α в постановке (XI.48) введен для обеспечения возможности различных требований к точности приближений (XI.42) и (XI.43): чем больше α , тем лучше выполняется (XI.42) по сравнению с (XI.43).

В задачах выделения волн иногда легче удовлетворить поставленным требованиям, чем понять, какие требования нужно предъявлять к приемной системе. Первая постановка предпочтительнее с той точки зрения, что она обеспечивает отсутствие каких-либо искажений полезного сигнала. Однако, добиваясь высокого качества воспроизведения полезного сигнала, можно ухудшить значение Q_p и тем самым увеличить амплитуду помехи. В этом смысле вторая постановка представляется более гибкой. Варьируя значением α , можно добиться разумного соотношения амплитуды полезного сигнала и помехи. Систему линейных уравнений, определяющую коэффициенты $l_s^{(k)}$ в этой постановке, легко получить, выразив квадраты модулей в выражениях для Q_0 и Q_p через произведение комплексно-сопряженных величин и дифференцируя $Q_p + \alpha Q_0$ по $l_s^{(k)}$. Получающаяся система очень громоздка. Для понижения вычислительной сложности может быть применен алгоритм Левинсона (см. §§ 27 и 37, а также библиографический комментарий к § 54).

Многоканальный фильтр, определяемый критерием (XI.48), является остронаправленной системой, обеспечивающей высокую разрешающую способность. Однако его применение возможно при наличии очень качественной априорной информации о кажущихся скоростях распространения разделяемых сигналов. В принципе можно осуществить перебор параметров v_1 и v_2 , как это делается в регулируемых интерференционных системах, в частности в РНП, однако трудность заключается не только в том, что даже при фиксированных v_1 и v_2 данный многоканальный фильтр требует гораздо большего объема вычислений, чем интерференционная система, но и в том, что различным значениям p отвечают разные наборы коэффициентов в системе уравнений, определяющей значения $l_s^{(k)}$. Иначе говоря, структура многоканального фильтра изменится при изменении p .

По существу мы сталкиваемся с обычным для интерпретации геофизических данных противоречием: чем точнее нужно измерить параметры исследуемых объектов, тем более полной должна быть априорная информация о них. Разумный выход заключается в предварительной оценке параметров v_1 и v_2 более грубыми методами, в частности, при помощи РНП.

§ 52. Оптимальный векторный фильтр при выделении детерминированного сигнала

Пусть система кинематических поправок обеспечивает следующую модель сейсмограммы:

$$x_k(t) = af_k(t) + \xi_k(t), \quad k=1, 2, \dots, n,$$

где совокупность стационарных случайных помех $\xi_k(t)$ описывается матрицей взаимных энергетических спектров $\sigma_{jk}^2 N_{jk}(\omega)$. Наша задача — определить такой $(n \times 1)$ -мерный векторный фильтр, на выходе которого амплитуда полезного сигнала будет максимальной по сравнению с интенсивностью помехи.

Спектр полезного сигнала на выходе векторного фильтра

$$S_v(\omega) = a \sum_{k=1}^n S_k(\omega) L_k(\omega).$$

Будем максимизировать амплитуду выходного сигнала в момент времени $t = 0$. Эта амплитуда равна

$$\frac{a}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n S_k(\omega) L_k(\omega) d\omega.$$

Энергетический спектр помехи $\eta(t)$ на выходе векторного фильтра получим в соответствии с формулой (XI.10), в которой нужно принять $L(\omega) = [L_1(\omega), \dots, L_n(\omega)]$.

Используя правила перемножения матриц, получим

$$N_{\eta}(\omega) = \sigma_{\xi}^2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_j(\omega) L_k^*(\omega) N_{jk}(\omega). \quad (\text{XII.1})$$

Так как интеграл от энергетического спектра определяет (с точностью до множителя) интенсивность помехи, то на выходе векторного фильтра искомое отношение сигнал/помеха

$$\mu = \frac{\mu_0 \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n S_k(\omega) L_k(\omega) d\omega \right|^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_j(\omega) L_k^*(\omega) N_{jk}(\omega) d\omega}, \quad (\text{XII.2})$$

где $\mu_0 = a^2/\sigma_{\xi}^2$.

Задача максимизации величины μ для одномерной фильтрации рассматривалась в § 30 [см. формулу (VII.30)], где она решалась при помощи интегрального неравенства Коши — Буняковского. Здесь нам понадобится

известное обобщение этого неравенства для произвольных скалярных произведений в линейном векторном пространстве:

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g)^1. \quad (\text{XII.3})$$

Определим скалярное произведение n -мерного вектора a -столбца $\vec{F}(\omega)$ с компонентами $F_k(\omega)$, $k = 1, \dots, n$ и n -мерного вектора (столбца) $G(\omega)$ с компонентами $G_k(\omega)$ следующей формулой

$$(\vec{F}(\omega), G(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{G}^*(\omega) \cdot \vec{F}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n F_k(\omega) G_k^*(\omega) d\omega. \quad (\text{XII.4})$$

Нетрудно увидеть, что числитель в правой части формулы (XII.2) представляет собой скалярное произведение (\vec{F}, \vec{G}) , если ввести векторы-столбцы $\vec{L}(\omega)$ и $\vec{S}(\omega)$ с компонентами $L_k(\omega)$ и $S_k(\omega)$ соответственно и принять

$$\vec{F}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} N^{1/2}(\omega) \vec{L}(\omega), \quad \vec{G}(\omega) = \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{2\pi}} N^{1/2}(\omega) \vec{S}(\omega),$$

где $N^{1/2}(\omega)$ — матрица, удовлетворяющая соотношению $N^{1/2} N^{1/2} = N(\omega)$ [в силу положительной определенности матрицы $N(\omega)$ матрица $N^{1/2}(\omega)$ определяется единственным образом и положительно определена]. Заметим теперь, что знаменатель в (XII.2) совпадает с (\vec{F}, \vec{F}) , поэтому, применяя к числителю неравенство (XII.3), найдем следующую оценку сверху для μ :

$$\mu \leq \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{S}^*(\omega) N^{-1}(\omega) \vec{S}(\omega) d\omega. \quad (\text{XII.5})$$

Ясно, что фильтр L , который обращает неравенство (XII.5) в равенство, является оптимальным. Покажем, что спектральная характеристика такого фильтра удовлетворяет (при каждом ω) следующей системе линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^n L_j(\omega) N_{jk}(\omega) = S_k^*(\omega), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{XII.6})$$

Действительно, для такого фильтра знаменатель в (XII.2) равен

$$\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n L_k(\omega) S_k(\omega) d\omega \right]^*$$

¹ Используемое в § 30 неравенство Коши — Буняковского получим, если принять $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g^*(t) dt$.

следовательно, отвечающее ему значение μ равно

$$\frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n L_k(\omega) S_k(\omega) d\omega. \quad (\text{XII.7})$$

Однако решение системы (XII.6) по правилу Крамера дает

$$L_k(\omega) = \sum_{j=1}^n Q_{jk}(\omega) S_j^*(\omega), \quad (\text{XII.8})$$

где $Q_{jk}(\omega)$ — элементы матрицы $N^{-1}(\omega)$. Подставив в (XII.7) формулу, полученную для $L_k(\omega)$, а в правую часть неравенства (XII.5) — выражение вектора $\vec{S}(\omega)$, будем иметь одну и ту же величину

$$\max \mu = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n S_j^*(\omega) S_k(\omega) Q_{jk}(\omega) d\omega, \quad (\text{XII.9})$$

что и доказывает оптимальность фильтра, определяемого системой (XII.6). Как и в одноканальном случае, спектральная характеристика оптимального фильтра не зависит от отношения сигнал/помеха на входе фильтра.

Рассмотрим ряд примеров, в которых

$$f_k(t) = f(t), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Пример I. Пусть помехи на разных трассах независимы, но имеют различную интенсивность:

$$N_{jk}(\omega) = p_k N_{\xi}(\omega) \delta_{jk}.$$

Матрица системы (XII.6) оказывается диагональной, откуда легко следует решение:

$$L_k(\omega) = \frac{1}{p_k} \frac{S^*(\omega)}{N_{\xi}(\omega)} = \frac{1}{p_k} L_0(\omega).$$

где $L_0(\omega)$ — спектральная характеристика одноканального оптимального фильтра (см. § 29).

Полученный векторный оптимальный фильтр работает следующим образом:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} L_0[x_k(t)] = L_0 \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} x_k(t) \right].$$

Оптимальная обработка содержит суммирование с весами, обратными интенсивности помех, и одноканальную оптимальную фильтрацию, которую выгоднее применять после суммирования один раз.

Пример II. Пусть пространственная корреляция помех определяется корреляционными функциями (X.4) при $\Delta_{jk} = 0$.

Тогда

$$N_{jk}(\omega) = r_{jk} N_{\xi}(\omega). \quad (\text{XII.10})$$

Система (XII.6) принимает следующий вид:

$$\sum_{j=1}^n L_j(\omega) r_{jk} = S^*(\omega) / N_{\xi}(\omega), \quad k = 1, \dots, n.$$

Если обозначить символом q_{ik} элементы матрицы, обратной матрице R с элементами r_{jk} , то решение полученной системы определится формулой

$$L_k(\omega) = q^{(k)} L_0(\omega),$$

где

$$q^{(k)} = \sum_{j=1}^n q_{jk}.$$

Таким образом, оптимальный фильтр

$$y(t) = L_0 \left[\sum_{k=1}^n q^{(k)} x_k(t) \right].$$

Сравнив данное выражение с (X.20) делаем заключение, что многоканальный оптимальный фильтр состоит из интерференционной системы с оптимальным распределением чувствительности и одноканального фильтра.

Следующий пример показывает, что далеко не во всех случаях многоканальный оптимальный фильтр содержит интерференционную систему.

Пример III. Пусть пространственная корреляция помех произвольна, число каналов равно двум, $N_{jj}(\omega) = N_{\xi}^{\zeta}(\omega)$, ($j = 1, 2$).

Расписав систему (XII.6) для $n = 2$ и применив правило Крамера, получим после простых преобразований

$$L_1(\omega) = L_0(\omega) K(\omega) \text{ и } L_2(\omega) = L_0(\omega) K^*(\omega),$$

где

$$K(\omega) = \frac{1 - N_{12}^*(\omega)/N_{\xi}(\omega)}{1 - |N_{12}(\omega)/N_{\xi}(\omega)|^2}.$$

Таким образом,

$$y(t) = L_0 \{K[x_1(t)] + K^*[x_2(t)]\}.$$

Более подробно рассмотрим задачу подавления плоской волны, форма которой является реализацией случайного процесса.

Пусть

$$x_k(t) = af(t) + b\zeta(t - k\Delta x/v) + \xi_k(t),$$

где $\zeta(t)$ — случайный процесс с энергетическим спектром, равным $N_{\zeta}(\omega)$.

Будем считать, что помехи $\xi_j(t)$ и $\xi_k(t)$ при $j \neq k$ независимы. Наша задача — определить взаимные энергетические спектры $N_{jk}(\omega)$ суммарной помехи. Из физических соображений помехи $\xi_k(t)$ и $\zeta(t)$ следует считать независимыми, поэтому спектр $N_{jk}(\omega)$ является суммой взаимного энергетического спектра $N_{jk}^{(\zeta)}(\omega)$ регулярной помехи и взаимного энергетического спектра нерегулярной помехи, который по условию равен $\sigma_{\xi}^2 N_{\xi}(\omega) \delta_{jk}$.

Взаимная корреляционная функция процессов $b\zeta(t - j\Delta x/v)$ и $b\zeta(t - \frac{k\Delta x}{v})$ равна

$$b^2 M \zeta [t + \tau - (j\Delta x/v)] \zeta [t - (k\Delta x/v)] = b^2 K_{\zeta} \{ \tau - [(j-k)\Delta x/v] \}.$$

Определяя преобразование Фурье, находим

$$N_{jk}^{(\zeta)}(\omega) = b^2 N_{\zeta}(\omega) \exp[-i\omega(j-k)\Delta x/v].$$

Таким образом, система уравнений (XII.6) при

$$N_{jk}(\omega) = b^2 N_{\zeta}(\omega) \exp[-i\omega(j-k)\Delta x/v] + \sigma_{\xi}^2 N_{\xi}(\omega) \delta_{jk} \quad (\text{XII.11}).$$

дает оптимальный векторный фильтр, который осуществляет подавление как нерегулярной, так и регулярных помех.

Так как спектральная характеристика оптимального фильтра определяется с точностью до множителя, то вместо $N_{jk}(\omega)$ в (XII.6) можно подставить $N_{jk}(\omega)/\sigma_{\xi}^2$. Тогда система (XII.6) с учетом полученного равенства (XII.11) запишется следующим образом:

$$\sum L_j(\omega) [r(\omega) q^{j-k}(\omega) + \delta_{jk}] = L_0(\omega), \quad (\text{XII.12})$$

где $r(\omega) = v_0 N_{\zeta}(\omega)/N_{\xi}(\omega)$, $q(\omega) = \exp(-i\omega \Delta x/v)$, $v_0 = b^2/\sigma_{\xi}^2$.

Теперь нужно обратить матрицу с элементами $r q^{j-k} + \delta_{jk}$. Отыскивая обратную матрицу $Q'(\omega)$ в виде $Q'_{jk} = \delta_{jk} - c q^{k-j}$, из условия

$$\sum_{i=1}^n (r q^{j-i} + \delta_{ji})(\delta_{ik} - c q^{k-i}) = \delta_{ik}$$

получим

$$c = c(\omega) = r(\omega)/(nr(\omega) + 1).$$

Решим теперь систему (XII.12) по правилу Крамера:

$$L_k(\omega) = L_0(\omega) \sum_{j=1}^n Q'_{jk} = L_0(\omega) \left\{ 1 - \frac{r(\omega)}{nr(\omega) + 1} \sum_{j=1}^n \exp[i\omega(j-k)\Delta x/v] \right\}.$$

Следовательно, фильтр работает согласно формуле

$$y(t) = L_0 \left\{ \sum_{k=1}^n x_k(t) - L_c \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k \left(t + \frac{(j-k)\Delta x}{v} \right) \right] \right\}, \quad (\text{XII.13})$$

где фильтр L_c имеет спектральную характеристику $c(\omega)$. Легко увидеть, что при $N_{\zeta}(\omega) = N_{\xi}(\omega)$ $c = v_0/(v_0 n + 1)$, так что применение фильтра L_c будет заключаться в умножении двойной суммы на константу $v_0/(v_0 n + 1)$. Если интенсивность регулярной помехи сравнительно велика ($v_0 \geq 1$), то при увеличении n слагаемым $N_{\xi}(\omega)$ в знаменателе $c(\omega)$ можно будет пренебречь. Этот факт оправдывает применение фильтра

$$y(t) = L_0 \left\{ \sum_{k=1}^n x_k(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_j \left[t + \frac{(j-k)\Delta x}{v} \right] \right\}, \quad (\text{XII.13}')$$

который не требует информации о $N_{\zeta}(\omega)$ и v_0 .

Чтобы сделать более понятным смысл полученных формул, перепишем (XII.13'):

$$y(t) = L_0 \left\{ \sum_{k=1}^n \left[x_k(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \left(t + \frac{(j-k)\Delta x}{v} \right) \right] \right\}. \quad (\text{XII.13}'')$$

В квадратной скобке стоит результат вычитания из трассы $x_k(t)$ оценки регулярной волны-помехи, полученной суммированием по ее

годографу. Многоканальный фильтр содержит два суммирования: сначала по годографу помехи, а затем по годографу полезной волны.

Обработка сейсмограмм по формуле (XII.13') получила название способа вычитания (см. библиограф. коммент.). При отсутствии регулярной помехи ($v_0 = 0$) фильтр (XII.13) переходит в фильтр из примера I.

Найдем отношение сигнал/помеха на выходе оптимального фильтра. Для этого нужно подставить коэффициенты $Q_{jk} = Q'_{jk}/N_{\xi}(\omega)$ в формулу (XII.9). Поскольку

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q^{j-k} = 1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \cos(k\omega \Delta x/v) = |H_{\text{одн}}(\omega/v)|,$$

то

$$\mu = \frac{n\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{N_{\xi}(\omega)} d\omega - \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|S(\omega)|^2}{N_{\xi}(\omega)} \frac{v_0 N_{\zeta}(\omega) |H_{\text{одн}}(\omega/v)|^2}{nv_0 N_{\zeta}(\omega) + N_{\xi}(\omega)} d\omega. \quad (\text{XII.14})$$

Первое слагаемое выражает отношение сигнал/помеха при отсутствии регулярной волны-помехи. Манипулируя значениями n и Δx , можно добиться уменьшения влияния второго слагаемого.

Сравним рассмотренный фильтр с векторным фильтром из предыдущего параграфа [см. условие (XI.48)]. Оба фильтра решают одну и ту же задачу выделения плоской волны на фоне другой. Преимущество фильтра (XI.48) заключается в том, что в нем не используются никакие сведения о форме полезной и подавляемой волн (кроме граничных частот). Однако это преимущество превращается в недостаток, когда такая информация на самом деле задана или может быть извлечена из анализа экспериментальных данных. Кроме того, фильтр (XI.48) может оказаться неустойчивым по отношению к чисто случайным помехам, наличие которых не предполагается в § 51, но которые на самом деле всегда есть.

При обсуждении фильтра (XI.48) мы указывали, что его применение требует точных априорных сведений о значении кажущейся скорости сигнала v . То же самое необходимо знать и в данном случае. Однако случай неизвестной скорости не представляется теперь столь серьезно трудным. Во-первых, значение v в формуле (XII.13) можно изменять, так как при различных значениях v фильтр сохраняет свою структуру. Пересчитывать нужно только двойную сумму на входе фильтра. Ясно, что совокупность фильтров при $v = v_1, v_2, \dots, v_m$ определяет $(n \times m)$ -мерный оптимальный фильтр. Во-вторых, если известно априорное распределение v , то можно определить новый фильтр, осреднив $N_{jk}(\omega)$ по заданному априорному распределению.

Для простоты предположим, что известно априорное распределение параметра $\gamma = 1/v$ и что среднее значение γ равно γ_0 . Тогда, определяя математическое ожидание взаимного энергетического спектра (XII.11), найдем новое выражение $N_{jk}(\omega)$:

$$N_{jk}(\omega) = \gamma_0 \psi_{jk}(\omega) N_{\zeta}(\omega) \exp[-i\omega(j-k)\Delta x \gamma_0] + N_{\xi}(\omega) \delta_{jk}, \quad (\text{XII.15})$$

где

$$\psi_{jk}(\omega) = M \exp[-i\omega(j-k)\Delta x(\gamma - \gamma_0)]. \quad (\text{XII.16})$$

По существу, математическое ожидание такого типа нам уже приходилось вычислять [см. например, формулу (X.30)]. Если случайная величина $s = \gamma - \gamma_0$ распределена нормально с дисперсией σ_γ^2 , то аналогично формуле (X.32) получим

$$\psi_{jk}(\omega) = \exp[-\omega^2 (j-k)^2 \Delta x^2 \sigma_\gamma^2]. \quad (\text{XII.17})$$

При равномерном распределении s в интервале $(-\Delta\gamma/2, \Delta\gamma/2)$ будем иметь

$$\psi_{jk}(\omega) = \frac{1}{\Delta\gamma} \int_{-\Delta\gamma/2}^{\Delta\gamma/2} \exp[-i\omega(j-k)\Delta x s] ds = \frac{\sin(\Delta\gamma/2)\omega(j-k)\Delta x}{(\Delta\gamma/2)\omega(j-k)\Delta x}. \quad (\text{XII.18})$$

Систему (XII.6) при спектрах $N_{jk}(\omega)$, выраженных формулой (XII.15) решить в явной форме не удастся.

§ 53. Выделение отраженной волны на фоне других однократных и двукратных отраженных волн

При наблюдениях в среде с большим числом параллельных отражающих границ для сейсмограммы ОГТ можно принять (после введения кинематических поправок) следующую модель, в которой учитываются отраженные волны вплоть до двукратных от наиболее резкой верхней границы:

$$x_k(t) = af(t) + \sum_s a_s f(t - \tau_s) + \sum_s b_s f(t - t_s^k) + \xi_k(t). \quad (\text{XII.19})$$

В этой формуле $af(t)$ выражает полезный сигнал, второе слагаемое — сумму остальных однократных волн, третье слагаемое складывается из наиболее интенсивных кратных волн, а четвертое — случайная помеха. Поскольку коррелированность трасс выражается первыми тремя слагаемыми, то совокупность помех $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ естественно считать некоррелированной. Поэтому матрица взаимных энергетических спектров случайной помехи имеет элементы $\delta_{jk} N_\xi(\omega)$.

Если последовательности моментов τ_s и $t_s^{(k)}$ являются пуассоновскими случайными потоками, а все амплитуды a_s и b_s — независимыми случайными величинами, распределение которых не зависит от s , то суммарная помеха, включающая все отраженные волны, кроме $af(t)$, представляет собой n -мерный стационарный процесс. Поэтому для обнаружения полезного сигнала можно применить многоканальный оптимальный фильтр, спектральная характеристика которого определяется системой уравнений (XII.6). Для этого нужно найти матрицу энергетических спектров суммарной помехи.

Энергетический спектр случайной последовательности сигналов выражается формулой (VII.54), из которой следует, что энергетический спектр суммарной помехи на k -той трассе равен

$$(\lambda\sigma^2 + \lambda_1\sigma_1^2) |S(\omega)|^2 + N_\xi(\omega) \sigma_\xi^2, \quad (\text{XII.20})$$

где λ и σ^2 — интенсивность потока τ_s и дисперсия амплитуд a_s ; λ_1 и σ_1^2 — аналогично для $t_s^{(k)}$ и b_s (предполагается, что $\mathbf{M} a_s = \mathbf{M} b_s = 0$).

Взаимные энергетические спектры поля однократных волн совпадают с энергетическими спектрами этого поля, т. е. с $\lambda_1 \sigma_1^2 |S(\omega)|^2$. Следовательно, для полного описания помех нам осталось найти взаимный энергетический спектр последовательностей $\sum_s b_{sf}(t - t_s^{(j)})$ и $\sum_s b_{sf}(t - t_s^{(k)})$.

В ограниченном по длительности интервале обнаружения остаточные годографы двукратных волн отличаются только нулевыми временами, поэтому разности $\tau_{jk} = t_s^{(j)} - t_s^{(k)}$ практически не зависят от s . Отсюда следует, что вторая из указанной пары последовательностей представляет собой сдвиг первой последовательности на величину $-\tau_{jk}$. В связи с этим взаимный энергетический спектр будет отличаться от энергетического спектра $\lambda_1 \sigma_1^2 |S(\omega)|^2$ только сдвиговым множителем $\exp(-i\omega\tau_{jk})$. Таким образом, взаимный энергетический спектр между суммарной помехой на j -той трассе и суммарной помехой на k -той трассе

$$N_{jk}(\omega) = \lambda \sigma^2 |S(\omega)|^2 [1 + \alpha \exp(-i\omega\tau_{jk})] + \delta_{jk} N_{\xi}(\omega) \sigma_{\xi}^2, \quad (\text{XII.21})$$

где $\alpha = \lambda_1 \sigma_1^2 / \lambda \sigma^2$. Подставив полученное выражение $N_{jk}(\omega)$ в (XII.6), получим систему линейных уравнений, определяющую спектральную характеристику искомого многоканального фильтра.

Рассмотрим ряд специальных случаев и обобщений полученного фильтра.

1. При $\alpha = 0$ фильтр работает по формуле

$$y(t) = L_r \sum_{k=1}^n x_k(t), \quad (\text{XII.22})$$

где одноканальный фильтр L_r имеет спектральную характеристику (VII.55). Таким образом, данный фильтр является обобщением оптимального разрешающего фильтра из § 32 на n трасс.

2. Выразим τ_{jk} через остаточный годограф двукратной волны [см., например, (IX.61)]:

$$\tau_{jk} = p(j^2 - k^2)(\Delta x)^2, \quad p = (v_e^2 - v_n^2) / (2\tau_n v_e^2 v_n^2).$$

Предположим, что нам известно не точное значение параметра p , а его априорное распределение с некоторым средним значением p_0 . Тогда найденный ранее взаимный энергетический спектр нужно осреднить по заданному априорному распределению. Вычисляя от выражения (XII.21) математическое ожидание по параметру p , получим

$$N_{jk}(\omega) = \lambda \sigma^2 |S(\omega)|^2 \{1 + \varphi_{jk}(\omega) \exp[-i\omega(j^2 - k^2)]\} + \delta_{jk} N_{\xi}(\omega) \sigma_{\xi}^2, \quad (\text{XII.23})$$

где

$$\varphi_{jk}(\omega) = M \exp[-i\omega(j^2 - k^2)(\Delta x)^2(p - p_0)]. \quad (\text{XII.24})$$

Функции $\varphi_{jk}(\omega)$ вычисляются точно так же, как и $\psi_{jk}(\omega)$ [см. (XII.16) с заменой $(j - k)\Delta x$ на $(j^2 - k^2)(\Delta x)^2$]. В частности, если $p - p_0$ распределено нормально с дисперсией σ_p^2 , то

$$\varphi_{jk}(\omega) = \exp[-\omega^2(j^2 - k^2)(\Delta x)^4 \sigma_p^2],$$

а если $p - p_0$ распределено равномерно в интервале $(-\Delta p/2, \Delta p/2)$, то

$$\varphi_{jk}(\omega) = \frac{\sin(\Delta p/2)\omega(j^2 - k^2)(\Delta x)^2}{(\Delta p/2)\omega(j^2 - k^2)(\Delta x)^2}.$$

3. При обнаружении одиночной отраженной волны на фоне кратных волн параметр $\lambda\sigma^2$ нужно принять равным нулю:

$$N_{jk}(\omega) = \lambda_1^2 \sigma_1^2 |S(\omega)|^2 \varphi_{jk}(\omega) \exp[-i\omega p_0(j^2 - k^2)(\Delta x)^2] + \delta_{jk} \sigma_{\xi}^2 N_{\xi}(\omega). \quad (\text{XII.25})$$

Рассмотрим подробнее случай, когда параметр p известен точно и, следовательно, $\varphi_{jk}(\omega) \equiv 1$. Будем использовать метод обращения матрицы $N_{jk}(\omega)$, отличный от применявшегося в § 52 при построении фильтра, подавляющего плоскую волну-помеху.

Для получения интересующего нас решения введем кинематические поправки по годографу волны-помехи. Тогда регулярная помеха окажется на всех трассах записанной синфазно, и матрица ее взаимных энергетических спектров будет равна $\lambda_1 \sigma_1^2 |S(\omega)|^2$ при всех j и k . Трасса с индексом k будет содержать сигнал $f[t + k^2(\Delta x)^2 p]$. Отсюда следует, что в правой части (XII.6) вместо $S_k^*(\omega)$ нужно поставить $S^*(\omega) \exp[-i\omega k^2(\Delta x)^2 p]$. Суммировав все эти данные, получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^n L_j(\omega) [\rho(\omega) + \delta_{jk}] = L_0(\omega) \exp[-i\omega p k^2(\Delta x)^2], \quad (\text{XII.26})$$

где

$$\rho(\omega) = \nu_1 |S(\omega)|^2 / N_{\xi}(\omega), \quad \nu_1 = \lambda_1 \sigma_1^2 / \sigma_{\xi}^2$$

(мы опять воспользовались тем, что фильтр определяется с точностью до постоянного множителя).

Матрицу с элементами $\rho + \delta_{jk}$ нам уже приходилось обращать [см. формулу (X.59)]. Элементы обратной матрицы в данном случае равны $\delta_{jk} - [\rho/(n\rho + 1)]$. Отсюда

$$L_k(\omega) = L_0(\omega) \left\{ \exp(-i\omega p k^2 \Delta x^2) - \frac{\rho(\omega)}{n\rho(\omega) + 1} \sum_{j=1}^n \exp(-i\omega j^2 \Delta x^2 p) \right\}.$$

Эти спектральные характеристики определяют векторный фильтр, применяемый к совокупности трасс $x_k'(t)$, $k = 1, \dots, n$, в которые введены кинематические поправки по годографу помехи:

$$y(t) = L_0 \left\{ \sum_{k=1}^n x_k'(t - p k^2 \Delta x^2) - L_{\rho} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k'(t - p j^2 \Delta x^2) \right] \right\},$$

где L_{ρ} — фильтр со спектральной характеристикой $\rho(\omega)/(n\rho(\omega) + 1)$. Но $x_k'(t) = x_k(t + p k^2(\Delta x)^2)$ где $x_k(t)$ — трассы с кинематическими поправками, отвечающими годографу полезной волны. Следовательно, возвращаясь к трассам $x_k(t)$, получим:

$$y(t) = L_0 \left\{ \sum_{k=1}^n x_k(t) - L_{\rho} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k[t - p(j^2 - k^2)\Delta x^2] \right) \right\}. \quad (\text{XII.27})$$

Сравнивая формулы (XII.27) и (XII.13), видим, что между обоими фильтрами имеется большое сходство. Как и в случае фильтра (XII.13), имеет смысл использовать следующую модификацию:

$$y(t) = L_0 \left\{ \sum_{k=1}^n x_k(t) - \frac{v_1}{n v_1 + 1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k [t - p(j^2 - k^2) \Delta x^2] \right\}.$$

§ 54. Винеровские многоканальные фильтры и их применение

Отказ от точного задания формы полезного сигнала и представление его в виде отрезка реализации стационарного случайного процесса ведут к методам винеровской фильтрации, которые для одномерного случая подробно рассматривались в главе VIII. Эти методы полностью переносятся и на многомерный случай.

Рассмотрим ряд задач, решение которых заключается в построении многоканального винеровского фильтра. Основное внимание будет уделено самим постановкам задач и уравнениям, определяющим спектральную характеристику фильтра. Техника вывода, представляющая собой естественное обобщение рассуждений из § 34, по существу стандартна.

Самой общей постановкой является следующая. Пусть

$$x_k(t) = u_k(t) + \xi_k(t), \quad (\text{XII.28})$$

где $u_k(t)$ — реализация полезного сигнала на выходе k -того приемника; $\xi_k(t)$ — помеха. Сигнал характеризуется матрицей взаимных энергетических спектров $U_{jk}(\omega)$, помеха — матрицей спектров $N_{jk}^{\xi}(\omega)$. Необходимо по совокупности трасс $x_1(t), \dots, x_n(t)$ построить линейную оценку типа (XI.5) для процесса $w(t)$ если для каждого k известен взаимный энергетический спектр $N_{w u_k}^{(k)}(\omega)$ процессов $w(t)$ и $u_k(t)$.

Оценка

$$\hat{w}(t) = y(t) = \sum_{k=1}^n L_k [x_k(t)]$$

считается наилучшей, если она минимизирует величину

$$\varepsilon^2 = \mathbf{M} |w(t) - y(t)|^2.$$

Выразив квадрат модуля через произведение комплексно-сопряженных величин, получим следующее выражение среднего квадрата ошибки: $\varepsilon^2 = \mathbf{M} w(t)w^*(t) - [\mathbf{M} w(t)y^*(t) + \mathbf{M} y(t)w^*(t)] + \mathbf{M} y(t)y^*(t)$.

Вследствие стационарности все математические ожидания в правой части от величины τ не зависят. Из определений (VII.5) и (VII.21) следует, что каждое слагаемое равно значению при $\tau = 0$ соответствующей корреляционной или взаимокорреляционной функции, а из формул (VII.10) и (VII.23) — что эти значения могут быть выражены как интегралы от соответствующих энергетических спектров. Поэтому

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{N_w(\omega) - [N_{wy}(\omega) + N_{yw}(\omega)] + N_y(\omega)\} d\omega. \quad (\text{XII.29})$$

Нужно выразить эту величину через энергетические спектры, заданные в условии задачи. Применяя формулу (XI.9) к процессу $y(t)$ на выходе векторного ($n \times 1$)-мерного фильтра, получим

$$N_y(\omega) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_j(\omega) L_k^*(\omega) N_{jk}^{(x)}(\omega), \quad (\text{XII.30})$$

где $N_{jk}^{(x)}(\omega)$ — взаимный энергетический спектр процессов $x_j(t)$ и $x_k(t)$, который в предположении независимости сигнала и помехи равен сумме $U_{jk}(\omega) + N_{jk}^{(z)}(\omega)$.

Не останавливаясь на выходе, приведем также формулу

$$N_{wy}(\omega) = \sum_{k=1}^n L_k^*(\omega) N_{wu}^{(k)}(\omega) = N_{yw}^*(\omega). \quad (\text{XII.31})$$

Выражение под интегралом в формуле (XII.29) вещественно и неотрицательно [ибо это энергетический спектр процесса $w(t) - y(t)$], следовательно, минимум ε^2 будет достигнут, если минимизировать подинтегральное выражение при каждом ω . Подставим формулы (XII.30) и (XII.31) в (XII.29), обозначив при $\omega = \text{const}$ $L_k(\omega) = x_k + iy_k$. После простых преобразований, в которых нужно учесть формулу $N_{uw}^{(k)}(\omega) = [N_{wu}^{(k)}(\omega)]^*$, а также равенства $z + z^* = 2 \text{Re } z$ и $z - z^* = 2 \text{Im } z$, подинтегральное выражение приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned} N_w(\omega) - 2 \sum_{j=1}^n [x_j \text{Re } N_{wu}^{(j)}(\omega) + y_j \text{Im } N_{wu}^{(j)}(\omega)] + \\ + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [(x_j x_k + y_j y_k) + i(y_j x_k - x_j y_k)] N_{jk}^{(x)}(\omega). \end{aligned}$$

Продифференцировав по x_k и по y_k и приравняв производные к нулю, получим две системы вещественных уравнений:

$$\sum_{j=1}^n x_j N_{jk}^{(x)}(\omega) = \text{Re } N_{wu}^{(k)}(\omega);$$

$$\sum_{j=1}^n y_j N_{jk}^{(x)}(\omega) = \text{Im } N_{wu}^{(k)}(\omega); \quad k = 1, \dots, n,$$

которые эквивалентны одной системе комплексных уравнений

$$\sum_{j=1}^n L_j(\omega) N_{jk}^{(x)}(\omega) = N_{wu}^{(k)}(\omega) \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{XII.32})$$

Эта система дает минимум, так как матрица вторых производных, совпадающая с $N_{jk}^{(x)}(\omega)$, положительно определена. Если оценке подлежат ряд сигналов $w_1(t), \dots, w_m(t)$, то получим m систем (XII.32), которые в совокупности определяют $(n \times m)$ -мерный винеровский фильтр.

Интересующие нас задачи получим как частные случаи постановки (XII.28).

Сглаживающие винеровские фильтры. Пусть $u_k(t) = u(t) = w(t)$. В этом случае $U_{jk}(\omega) = U(\omega) = N_{\omega u}^{(k)}(\omega)$, поэтому система (XII.32) даст

$$\sum_{j=1}^n L_j(\omega) [U(\omega) + N_{jk}^{(\xi)}(\omega)] = U(\omega). \quad (\text{XII.33})$$

Для этой системы рассмотрим два типа помех.

1. Независимые помехи: $N_{jk}^{(\xi)}(\omega) = \delta_{jk} N_{\xi}(\omega)$.

Систему (XII.33) перепишем следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n L_j(\omega) [\rho(\omega) + \delta_{jk}] = \rho(\omega); \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\rho(\omega) = U(\omega) / N_{\xi}(\omega).$$

Матрица с элементами $\rho + \delta_{jk}$ имеет обратную матрицу $\delta_{jk} - \rho / (n\rho + 1)$, отсюда

$$L_k(\omega) = \rho(\omega) \left[1 - \frac{n\rho(\omega)}{n\rho(\omega) + 1} \right] = \frac{U(\omega)}{nU(\omega) + N_{\xi}(\omega)}. \quad (\text{XII.34})$$

Так как получившаяся спектральная характеристика $L_k(\omega)$ не зависит от k , то $(n \times 1)$ -мерный фильтр сводится к суммированию и одномерной фильтрации с характеристикой (XII.34). Последняя зависит от n и при $n = 1$ совпадает с одноканальным сглаживающим винеровским фильтром (VIII.12). При $n \rightarrow \infty$ $L_k(\omega) \rightarrow 1/n$. Это объясняется тем, что при увеличении n сумма $(1/n) \sum_k x_k(t)$ стремится к $u(t)$, вследствие чего фильтрация становится излишней. Для сравнения заметим, что в подобной ситуации (см. пример I из § 52) векторный оптимальный фильтр, в котором искажения формы сигнала в расчет не принимаются, содержит одноканальный фильтр, не зависящий от n .

2. Пусть матрица взаимных энергетических спектров помехи удовлетворяет условию (XII.10) и дополнительно $U(\omega) = \mu_0 N_{\xi}(\omega)$. Тогда система (XII.33) редуцируется в следующую:

$$\sum_{j=1}^n L_j(\omega) (\mu_0 + r_{jk}) = 1; \quad k = 1, \dots, n. \quad (\text{XII.35})$$

Решение полученной системы от ω не зависит, следовательно, $(n \times 1)$ -мерный фильтр вырождается в интерференционную систему

$$y(t) = \sum_{k=1}^n l_k x_k(t),$$

где $l_k = \sum_{j=1}^n s_{jk}$ и s_{jk} — элементы матрицы, обратной матрице системы (XII.35).

Если отношение сигнал/помеха μ_0 стремится к нулю, то распределение чувствительности l_k будет таким же, как и в оптимальной группе (см. § 45, а также пример II из § 52). При $r_{jk} \rightarrow 0$ (или, что все равно, при $\mu_0 \rightarrow \infty$) $l_k \rightarrow 1/n$. Таким образом, с точки зрения теории винеров-

ских фильтров оптимальные группы являются благоприятными при выделении слабых сигналов, а однородные группы — при выделении сильных сигналов.

Выделение сигнала с флуктуирующими амплитудами и временем прихода. Пусть

$$u_k(t) = a_k u(t - \theta_k), \quad (\text{XII.36})$$

где a_k и θ_k — случайные величины, которые рассматривались в §§ 46—47. Было показано, что

$$U_{jk}(\omega) = (a^2 + \sigma_{\alpha\delta}^2 \delta_{jk}) \psi_{jk}(\omega) U(\omega). \quad (\text{XII.37})$$

где $\psi_{jk}(\omega)$ определяется общей формулой (X.30), а для гауссовых флуктуаций — формулой (X.32).

Наша задача — оценить сигнал $au(t)$. Так как взаимная корреляция процесса $au(t)$ и $a_k u(t - \theta_k)$ равна

$$a^2 \int_{-\infty}^{\infty} p_k(\theta) K_u(\tau + \theta) d\theta,$$

где $p_k(\theta)$ — плотность распределения θ_k , то взаимный энергетический спектр $N_{\omega u}^{(k)}(\omega)$ равен $a^2 \psi_k^*(\omega) U(\omega)$, где функция $\psi_k(\omega)$ является спектром плотности $p_k(\omega)$ или, что то же самое, математическим ожиданием $\exp(-i\omega\theta_k)$. Для нормального распределения эта функция выражается формулой (X.41).

Для любых симметричных распределений случайной величины θ_k функция $\psi_k(\omega)$ вещественна, поэтому правая часть системы (XII.33) равна

$$N_{\omega u}^{(k)}(\omega) = a^2 \psi_k(\omega) U(\omega). \quad (\text{XII.38})$$

Подставляя в (XII.32) формулы (XII.37) и (XII.38), можно сделать вывод, что многоканальный винеровский фильтр только тогда может вырождаться в интерференционную систему, когда $\psi_{jk}(\omega) = 1$, т. е. только при отсутствии флуктуаций времен прихода.

Сглаживание сейсмограммы при наличии флуктуаций времен прихода. Пусть по-прежнему полезные сигналы выражаются формулой (XII.36), а

$$w_s(t) = a_s u(t - t_s), \quad s = 1, \dots, n.$$

Задача такого рода возникает, если параметры a_s и θ_s сами являются целевыми. В этом случае матрица $U_{jk}(\omega)$ по-прежнему выражается формулой (XII.37), а что касается правой части системы (XII.32), то она определяется отдельно для каждого значения s . При этом, как легко видеть, $N_{\omega u}^{(k)}(\omega)$ совпадает с $U_{sk}(\omega)$. Совокупность всех систем (XII.32) при $s = 1, \dots, n$ определяет $(n \times 2)$ -мерный фильтр. Всю эту совокупность систем можно определить следующим образом:

$$\sum_{j=1}^n L_{sj}(\omega) [U_{jk}(\omega) + N_{jk}^{(\xi)}(\omega)] = U_{sk}(\omega), \quad (\text{XII.39})$$

где U_{sk} определены формулой (XII.37) при $j = s$.

При этом

$$y_s(t) = \sum_{k=1}^n L_{sk} [x_k(t)]. \quad (\text{XII.40})$$

Если x -представление случайной помехи $\xi_k(t)$ и последовательности a_1, \dots, a_n и $\theta_1, \dots, \theta_n$ стационарны, то энергетические спектры зависят только от разности индексов:

$$U_{jk}(\omega) = U_{j-k}(\omega), \quad N_{jk}^{(\xi)}(\omega) = N_{j-k}^{(\xi)}(\omega).$$

Тогда и $L_{sj} = L_{s-j}$.

Следовательно, вместо n систем (XII.39) нужно будет решить одну систему

$$\sum_{j=-n+1}^{n-1} L_j(\omega) [U_{k-j}(\omega) + N_{k-j}^{(\xi)}(\omega)] = U_k(\omega); \quad (\text{XII.39}')$$

$$k = -n + 1, \dots, n - 1,$$

при этом

$$y_s(t) = \sum_{k=1}^n L_{s-k} [x_k(t)]. \quad (\text{XII.41})$$

Подавление регулярных волн-помех. Пусть

$$x_k(t) = au(t) + b\zeta(t - \tau_k) + \xi_k(t), \quad (\text{XII.42})$$

где помеха $\xi_k(t)$ описывается матрицей энергетических спектров $\sigma_{\xi}^2 N_{\xi}(\omega) \delta_{jk}$, а процесс $\zeta(t)$ имеет энергетический спектр $N_{\zeta}(\omega)$.

Целью фильтрации является выделение сигнала $au(t)$, значит, $w(t) = au(t)$, откуда правая часть в системе равна $a^2U(\omega)$. Матрица энергетических спектров регулярной помехи равна, очевидно, $b^2 N_{\zeta}(\omega) \exp[-i\omega(\tau_j - \tau_k)]$, поэтому вследствие независимости всех процессов

$$N_{jk}^{(x)}(\omega) = a^2U(\omega) + b^2 N_{\zeta}(\omega) \exp[-i\omega(\tau_j - \tau_k)] + \sigma_{\xi}^2 N_{\xi}(\omega) \delta_{jk}. \quad (\text{XII.42}')$$

Тем самым система уравнений, определяющая винеровский фильтр в данной постановке, определена полностью.

Рассмотрим более подробно случай, когда полезный сигнал слабый и первым слагаемым в правой части (XII.41') можно пренебречь. Это означает, что мы строим фильтр в расчете на наихудшую ситуацию. Применение такого фильтра при неизвестной интенсивности сигнала удовлетворяет критерию минимакса, предлагаемому в теории статистических решений.

Если регулярная помеха является плоской волной: $\tau_k = k \Delta x/v$, то, отбрасывая в (XII.42') первое слагаемое, приведем систему (XII.32) к следующему виду:

$$\sum_{j=1}^n L_j(\omega) [r(\omega) q^{j-k} + \delta_{jk}] = K(\omega), \quad (\text{XII.43})$$

где функции $r(\omega)$ и $q(\omega)$ были определены в (XII.12),

$$K(\omega) = \mu_0 U(\omega) / N_{\xi}(\omega). \quad (\text{XII.44})$$

Системы (XII.12) и (XII.43) отличаются только правыми частями. Поэтому, воспользовавшись решением (XII.13), сразу напишем формулу для минимаксного винеровского фильтра:

$$y(t) = K \left\{ \sum_{k=1}^n x_k(t) - L_c \left[\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_j \left(t + \frac{(j-k)\Delta x}{v} \right) \right] \right\}, \quad (\text{XII.45})$$

где фильтр K имеет спектральную характеристику (XII.44).

Теперь легко найти формулу минимаксного фильтра для регулярной волны с годографом $\tau_k = pk^2(\Delta x)^2$ в (XII.45) нужно $(j-k)\Delta x/v$ заменить на $p(j^2 - k^2)(\Delta x)^2$.

Г л а в а XIII

МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ ФИЛЬТРЫ

§ 55. Многокомпонентные измерения при разделении волн с поляризацией различных типов

До сих пор мы рассматривали приемные системы, основанные на измерении только одной компоненты смещения. Такие приемные системы позволяют осуществить селекцию волн по их частотному составу и по характеру изменения времени прихода вдоль линии наблюдения. Регистрация смещений почвы многокомпонентными приемниками позволяет привлекать данные о поляризации волн для получения более полной информации о среде и использовать эти данные для дополнительной селекции волн, обладающих различной поляризацией.

Основные возмущения, наблюдаемые в достаточно простых средах (продольные и поперечные волны в однородных средах, нулевые приближения лучевого ряда в неоднородных средах, поверхностные волны), обладают либо линейной, либо плоской поляризацией. Напомним, что тип поляризации определяется числом скалярных функций, требуемых для задания вектора смещений $\vec{u}(t, M)$. А именно: волна $\vec{u}(M, t)$ является линейно-поляризованной, если существует такой вектор $\vec{\kappa}$, что $\vec{u}(M, t) = u(M, t)\vec{\kappa}$. Соответственно волна $\vec{u}(M, t)$ плоско-поляризована, если можно указать два таких ортогональных вектора $\vec{\chi}_1$ и $\vec{\chi}_2$, что $\vec{u}(M, t) = u_1(M, t)\vec{\chi}_1 + u_2(M, t)\vec{\chi}_2$.

Так как продольные и поперечные волны, используемые при кинематической интерпретации сейсмограмм, обладают линейной поляризацией, то возникает задача выделения линейно-поляризованных колебаний на

фоне волн с более сложной поляризацией. В этой главе данная проблема будет проиллюстрирована на примере задачи подавления плоско-поляризованных волн релеевского типа.

Существование волны Релея вытекает из уравнения Ламе (I.7) для однородного полупространства $z \geq 0$, если искать решение в классе смещений $\vec{u}(M, t)$ с компонентами, являющимися в каждой точке периодическими функциями t , амплитуда которых экспоненциально убывает с глубиной, т. е. в виде

$$\vec{a} \exp(-\beta |\omega| z) \exp[i\omega(t - x/c_R)], \quad \beta > 0, \quad (\text{XIII.1})$$

где $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$. Подстановка (XIII.1) в уравнение (I.7) показывает, что оно может быть удовлетворено при \vec{a} , не равном нулю, если $a_y = 0$ и если показатель β совпадает с одним из двух значений:

$$\beta_1 = \sqrt{v_P^2 - c_R^2} / v_P c_R \quad \text{и} \quad \beta_2 = \sqrt{v_S^2 - c_R^2} / c_R v_S;$$

при этом если $\beta = \beta_1$, то $a_x = -i\omega a / c_R$ и $a_z = \beta_1 |\omega| a$,

если $\beta = \beta_2$, то $a_x = -i\omega \beta_2 b$ и $a_z = |\omega| b / c_R$

(в этих выражениях a и b — произвольные пока константы).

Допуская возможность обоих значений β , имеем

$$\vec{u}(M, t, \omega) = -b \left\{ i\omega \left[\frac{a}{bc_R} \exp(-\beta_1 |\omega| z) + \beta_2 \exp(-\beta_2 |\omega| z) \right] \vec{i} - |\omega| \left[\frac{\beta_1 a}{b} \exp(-\beta_1 |\omega| z) + \frac{1}{c_R} \exp(-\beta_2 |\omega| z) \right] \vec{k} \right\} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{x}{c_R} \right) \right]. \quad (\text{XIII.3})$$

Параметры c_R и a/b определяются из условия равенства нулю напряжений σ_z и τ_{xz} на свободной границе $z = 0$ (напряжение τ_{yz} тождественно равно нулю, так как $a_y = 0$). Анализ соответствующих уравнений дает $c_R = v_S \sqrt{2 - 2\sqrt{3}} \approx 0,919 v_S$ и $a/b = -\sqrt{\beta_1 / \beta_2}$. Согласно (XIII.2) получаем $\beta_1 \approx 0,848 / c_R$, $\beta_2 \approx 0,393 / c_R$ и $a/b \approx -1,46$.

Вследствие принципа суперпозиции решением уравнения (I.7) является любой интеграл вида

$$\vec{u}_R(t, M) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \vec{u}(M, t, \omega) d\omega, \quad (\text{XIII.4})$$

который будем называть волной релеевского типа; x и z составляющие релеевской волны определяются следующими равенствами

$$u_x^{(R)}(t, M) = \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) L_x(\omega) \exp[i\omega(t - x/c_R)] d\omega, \quad (\text{XIII.5})$$

где

$$L_x(\omega) = i\omega [\exp(-0,848 |\omega| z / c_R) - 0,577 \exp(-0,393 |\omega| z / c_R)], \quad (\text{XIII.6})$$

и

$$u_z^{(R)}(t, M) = \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) L_z(\omega) \exp[-i\omega(t - x/c_R)] d\omega, \quad (\text{XIII.7})$$

где

$$L_z(\omega) = -1,46 |\omega| [0,577 \exp(-0,848 |\omega| z/c_R) - \exp(-0,393 |\omega| z/c_R)]. \quad (\text{XIII.8})$$

Выражение (XIII.3) показывает, что горизонтальная компонента при $\omega = \text{const}$ сдвинута относительно вертикальной по фазе на $\pi/2$ так как $i = \exp(i\pi/2)$. Это означает, что вектор смещения каждой монохроматической составляющей релеевской волны описывает эллипс с полуосями $L_x(\omega)$ и $L_z(\omega)$. Суммарное колебание, разумеется, имеет значительно более сложную траекторию.

В отношении волны Релея среду можно рассматривать как (1×2) -мерный фильтр с входным сигналом $f(t)$, имеющим спектр $S(\omega)$, и выходными сигналами

$$u_x^{(R)}(M, t - x/c_R)$$

$$u_z^{(R)}(M, t - x/c_R).$$

и

Обе спектральные характеристики $L_x(\omega)$ и $L_z(\omega)$ имеют полосу пропускания, которая сдвигается влево при увеличении z . Верхняя граничная частота (в герцах) равна примерно $2c_R/z$. На рис. 37 изображены $|L_x(\omega)|$ и $|L_z(\omega)|$ для двух значений z/c_R : $1/16$ и $1/30$ с (при $c_R = 300$ м/с это отвечает $z = 10$ и 5 м).

Волна Релея формируется на некотором удалении от источника. Поскольку она распространяется в приповерхностных отложениях, обладающих высоким поглощением, то фактически является более низкочастотной, чем это вытекает из приведенных выше спектральных характеристик $L_x(\omega)$ и $L_z(\omega)$. Наиболее простой способ выделения глубоких отраженных волн на фоне релеевских колебаний заключается в применении высокочастотной фильтрации в сочетании с размещением приемников на некоторой глубине $z > 0$. Для приемников, расположенных на дневной поверхности, применение низкочастотной фильтрации также оправдано благодаря сильному поглощению в верхней части среды, однако эффективность этого метода снижается.

Заметим, что при $z = 0$ спектральные характеристики — $L_x(\omega)$ и $L_z(\omega)$ носят характер высокочастотных фильтров [в частности, $L_x(\omega) = i\omega$ выражает дифференцирование сигнала $f(t)$].

Перейдем к методам подавления волны Релея, основанным на особенностях ее поляризации. Рассмотрим один простой нелинейный метод.

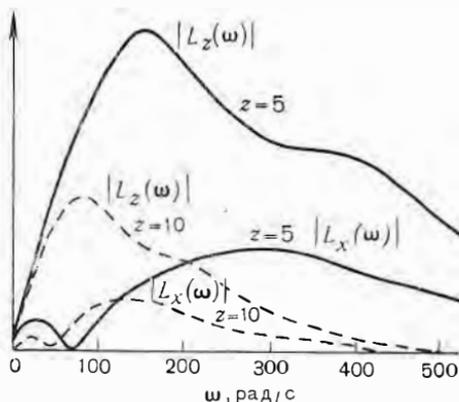


Рис. 37

Из выражения (XIII.8) следует, что спектральная характеристика $L_z(\omega)$ всегда положительна, поэтому

$$\arg L_z(\omega) = 0.$$

Что касается фазовой характеристики фильтра L_x , то поскольку выражение в квадратной скобке в (XIII.6) может быть и положительным, и отрицательным, ее можно выразить следующим образом:

$$\arg L_x(\omega) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \omega \cdot \operatorname{sign} (\omega_0 - |\omega|), \quad (\text{XIII.9})$$

где ω_0 означает то значение частоты ω , при котором $L_x(\omega)$ обращается в нуль.

Таким образом, при любом значении ω фазовые спектры функций $u_x(M, t)$ и $u_z(M, t)$ отличаются по модулю на $\pi/2$.

Этот факт можно использовать, основываясь на следующем утверждении:

Если фазовые спектры двух сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ отличаются по модулю на $\pi/2$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t) dt = 0. \quad (\text{XIII.10})$$

Величина в левой части равенства (XIII.10) совпадает со значением в нуле функции взаимной корреляции

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt.$$

Но взаимная корреляция сигналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ представляет собой свертку сигнала $f_1(t)$ с сигналом $f_2(-t)$, поэтому спектр функции $R_{12}(\tau)$ равен $S_1(\omega) S_2^*(\omega)$, где $S_k(\omega)$ — спектр сигнала $f_k(t)$. Произведение $S_1(\omega)$ с $S_2^*(\omega)$ можно записать также в виде

$$S_R(\omega) = |S_1(\omega)| |S_2(\omega)| \exp \{i [\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)]\},$$

где

$$\varphi_k(\omega) = \arg S_k(\omega).$$

Так как по условию $|\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega)| = \frac{\pi}{2}$, то

$$S_R(\omega) = |S_1(\omega)| |S_2(\omega)| \exp \left(i \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{sign} \psi(\omega) = i |S_1(\omega)| |S_2(\omega)| \operatorname{sign} \psi(\omega),$$

где $\psi(\omega)$ — некоторая функция частоты, принимающая значение $+1$ или -1 .

Таким образом, спектр функции $R_{12}(\tau)$ оказывается чисто мнимым. Следовательно, $R_{12}(\tau)$ является функцией нечетной, откуда и следует $R_{12}(0) = 0$. Утверждение доказано.

Пусть суммарный вектор смещения $\vec{v}(t)$ в точке приема состоит из релеевской волны $\vec{u}_R(t)$ и линейно-поляризованной волны $u(t)\vec{\kappa}$, где $\vec{\kappa} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k}$. Определим функцию

$$r(t) = \int_t^{t+T} v_x(\tau) v_z(\tau) d\tau,$$

где T не меньше длительности любого из колебаний $\vec{u}_R(t)$ и $u(t)$.

Полагая $\vec{v} = \vec{u}_R + u\vec{\kappa}$, получим

$$\begin{aligned} r(t) = & \int_t^{t+T} u_x^{(R)}(\tau) u_z^{(R)}(\tau) d\tau + \alpha_x \alpha_z \int_t^{t+T} u^2(\tau) d\tau + \\ & + \alpha_x \int_t^{t+T} u(\tau) u_z^{(R)}(\tau) d\tau + \alpha_z \int_t^{t+T} u(\tau) u_x^{(R)}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{XIII.11})$$

Пусть обе волны приходят в один и тот же момент времени t_1 , тогда при $t = t_1$ в написанных интегралах пределы можно заменить на $(-\infty, \infty)$. В соответствии с доказанным выше утверждением первый интеграл равен нулю. Второй интеграл имеет, очевидно, максимальное значение при $t = t_1$, равное $\alpha_x \alpha_z E_u$, где E_u — интенсивность линейно-поляризованной волны. Если сигнал $u(t)$ отличен по форме от $u_z^{(R)}(t)$ и $u_x^{(R)}(t)$ (что всегда имеет место), то последние два интеграла малы по сравнению со вторым. Ясно, что обнаружение линейно-поляризованной волны указанным способом возможно, если

$$\alpha_x \neq 0, \quad \alpha_z \neq 0. \quad (\text{XIII.12})$$

Иными словами, направление $\vec{\kappa}$ не должно совпадать ни с направлением оси x , ни с направлением оси z .

Более слабое условие

$$\alpha_z \neq 0 \quad (\alpha_x + \alpha_y) \neq 0$$

получим, если обнаружение осуществлять по функции

$$r(t) = \int_t^{t+T} v_z(t) [v_x(\tau) + v_y(\tau)] d\tau.$$

Функция $r(t)$ носит медленно изменяющийся низкочастотный характер (грубо говоря, она выражает изменение энергии линейно-поляризованных волн).

Чтобы на выходе рассматриваемого приемного устройства получить колебание в более привычном виде, иногда пользуются функцией

$$r(t) v_z(t). \quad (\text{XIII.13})$$

Роль множителя $r(t)$, очевидно, заключается в автоматическом усилении колебаний $v_i(t)$ на интервале прихода линейно-поляризованных волн и в подавлении суммарных колебаний на остальных участках. Нужно конечно, иметь в виду, что процедура (XIII.13) никакого подавления помех не содержит, так как отношение амплитуды сигнала к амплитуде помехи в любой момент времени t остается тем же. Роль этой процедуры состоит только в облегчении визуального восприятия волновой картины.

§ 56. Линейный поляризационный фильтр

Рассмотренный выше способ подавления волн релеевского типа является нелинейным. Это нежелательно из-за существенно нелинейного искажения формы полезного сигнала.

Рассмотрим предложенный Е. Ж. Меркадо линейный поляризационный фильтр, основанный на следующей идее. Если пропустить через фильтр с очень узкой полосой пропускания и вертикальную, и горизонтальную составляющие линейно-поляризованной волны, на выходе получим практически синусоидальные колебания, отличающиеся только амплитудой. Если на вход того же фильтра подать горизонтальную и вертикальную составляющие волны Релея, фазовые спектры которых отличаются на $\pi/2$, то гармонические колебания на выходе фильтра окажутся сдвинутыми друг относительно друга на $\pi/2\omega_r$, где ω_r — резонансная частота фильтра. Задача, таким образом, теперь заключается в том, чтобы выделить сигнал, имеющий одинаковое на обеих трассах время прихода, на фоне сигнала, имеющего временной сдвиг $\lambda/2\omega_r$. Решив такую задачу при помощи двухканального фильтра для различных значений ω_r и просуммировав отфильтрованные колебания, мы восстановим линейно-поляризованную волну.

Обозначим через K_r узкополосный фильтр с полосой пропускания $(\omega_r - \Delta\omega/2, \omega_r + \Delta\omega/2)$. Символом (L_{r1}, L_{r2}) обозначим двухканальный векторный фильтр, осуществляющий подавление сигналов с временным сдвигом $\pi/2\omega_r$. Тогда действие поляризационного фильтра выразится формулой

$$y(t) = \sum_{r=1}^N \{L_{r1}K_r[v_x(t)] + L_{r2}K_r[v_z(t)]\}. \quad (\text{XIII.14})$$

Так как данный поляризационный фильтр является (2×1) -мерным векторным фильтром, его можно записать также следующим образом:

$$y(t) = H_1[v_x(t)] + H_2[v_z(t)]. \quad (\text{XIII.15})$$

Перейдя к спектральному представлению (XIII.14) и (XIII.15), найдем спектральные характеристики одномерных фильтров H_1 и H_2 :

$$H_j(\omega) = \sum_{r=1}^N K_r(\omega) L_{rj}(\omega), \quad j=1, 2. \quad (\text{XIII.16})$$

Формула (XIII.16) следует также непосредственно из (XI.8), если заметить, что поляризационный фильтр (XIII.14) представляет собой

результат последовательного применения $(2 \times N)$ -мерного фильтра с матрицей спектральных характеристик $L_{rj}(\omega)$ и $(N \times 1)$ -мерного векторного фильтра со скалярными характеристиками $K_r(\omega)$.

Надо отметить, что последовательное применение всех фильтров, входящих в формулу (XIII.14), требует $4N$ одномерных фильтраций. Эквивалентный фильтр (XIII.15) заключается всего в двух одномерных фильтрациях. Выигрыш получается за счет того, что большой объем вычислений переносится на подготовительный этап, на котором отыскиваются характеристики фильтра H в соответствии с формулой (XIII.16). Выигрыш особенно велик, когда поляризационный фильтр применяется к большому числу сейсмограмм.

Перейдем к расчету фильтров L_{rj} . Прежде всего заметим, что в соответствии с формулой (XIII.9) знак сдвига $\pi/2\omega_r$, строго говоря, зависит от того, какое из неравенств $-\omega_r > \omega_0$ или $\omega_r < \omega_0$ — имеет место. Однако при наблюдениях на поверхности $z = 0$ и вблизи нее это обстоятельство несущественно, так как $\omega_0 \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 0$. Таким образом, всегда можно считать, что z -я составляющая релеевской волны отстает от x -й.

Двухканальные фильтры из § 50 могут быть применены, если сдвиг $\pi/2\omega_r$ является кратным интервалу дискретизации Δt сейсмограмм. Наиболее простые фильтры получаются в том случае, когда временной сдвиг подавляемого сигнала между трассами равен интервалу дискретизации, т. е. при $\pi/2\omega_r = \Delta t$. Понятно, что этого добиться практически невозможно. Простой выход заключается в том, чтобы, рассчитав спектральные характеристики $L_{rj}(\omega)$ для шага $\pi/2\omega_r$, во временную область вернуться с шагом Δt . Это означает, что спектральные характеристики $L_{rj}(\omega)$ ищутся в виде

$$L_{rj}(\omega) = \sum_{k=0}^M l_k^{(j)} \exp(-i\omega k\pi/2\omega_r), \quad (\text{XIII.17})$$

а импульсные характеристики вычисляются по формуле

$$\bar{l}_y^{(j)} = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} L_{rj}(\omega) \exp(i\omega v \Delta t) d\omega.$$

В этом случае значения $l_k^{(j)}$ (но не $\bar{l}_y^{(j)}$) от r не зависят.

Прежде чем применить методику расчета двухканальных фильтров из § 50, заметим, что система уравнений (XI.33), определяющая значение $l_k^{(1)}$, справедлива, если и выделяемый, и подавляемый сигналы на обеих трассах имеют одинаковые амплитуды. В данном случае это не так. В соответствии с формулами (XIII.6) и (XIII.8) при $z = 0$ вертикальная составляющая релеевской волны в 1,46 раз больше, нежели горизонтальная. Отношение амплитуд горизонтальной и вертикальной составляющих линейно-поляризованной волны, направление смещений которой определяется вектором $\vec{\kappa} = \alpha_x \vec{i}_x + \alpha_y \vec{i}_y + \alpha_z \vec{i}_z$, равно $\eta = \alpha_x/\alpha_z$.

Таким образом, основные условия (XI.24), (XI.25), которые мы рассматриваем здесь для $p = 1$, должны быть заменены следующими:

$$\begin{aligned} \eta L_1(\omega) + L_2(\omega) &= A; \\ L_1(\omega) + 1,46L_2(\omega) \exp(-i\omega \Delta t) &\simeq 0. \end{aligned}$$

Рассуждая дальше таким же образом, как и в § 50, выведем вместо (XI.33) новую систему уравнений для $l_j^{(1)}$:

$$\begin{aligned} l_0^{(1)} &= h_0; \\ l_1^{(1)} - 1,46\eta l_0^{(1)} + 1,46A &= h_1; \\ l_k^{(1)} - 1,46\eta l_{k-1}^{(1)} &= h_k, \quad 1 < k \leq M; \\ -1,46\eta l_M^{(1)} &= h_{M+1}, \end{aligned} \tag{XIII.18}$$

где h_0, \dots, h_{M+1} — распределение чувствительности стандартной группы с заданной полосой гашения.

Если в качестве стандартной выбрать группу с треугольным распределением чувствительности (XI.35), то, полагая в (XI.34) $\Delta t = \pi/2\omega_r$, $\omega' = \omega_r - \Delta\omega/2$ и $\omega'' = \omega_r + \Delta\omega/2$, найдем условие для M :

$$M \geq \frac{8\omega_r}{\omega_r - \Delta\omega/2} - 1.$$

Так как обычно $\Delta\omega \ll \omega_r$, то достаточно взять $M=7$. Подставим теперь в правую часть (XIII.18) треугольное распределение чувствительности (XI.35) при $M=7$. Окончательная система уравнений для $l_j^{(1)}$ такова:

$$\begin{aligned} l_0^{(1)} &= 1; \quad l_1^{(1)} - 1,46\eta l_0^{(1)} + 1,46A = 2; \\ l_2^{(1)} - 1,46\eta l_1^{(1)} &= 3; \\ l_3^{(1)} - 1,46\eta l_2^{(1)} &= 4; \\ l_4^{(1)} - 1,46\eta l_3^{(1)} &= 5; \\ l_5^{(1)} - 1,46\eta l_4^{(1)} &= 4; \\ l_6^{(1)} - 1,46\eta l_5^{(1)} &= 3; \\ l_7^{(1)} - 1,46\eta l_6^{(1)} &= 2; \\ -1,46\eta l_7^{(1)} &= 1. \end{aligned}$$

Значения $l_j^{(2)}$ определяются равенствами

$$l_0^{(2)} = A - \eta l_0^{(1)}; \quad l_k^{(2)} = -\eta l_k^{(1)}.$$

Определив спектральную характеристику $K_r(\omega)$ равной единице при $\omega_r - \Delta\omega/2 \leq |\omega| \leq \omega_r + \Delta\omega/2$ и нулю при других значениях ω , получим, что каждое слагаемое в формуле (XIII.16) равно

$$K_r(\omega) L_{rj}(\omega) = \begin{cases} \sum_{k=0}^M l_k^{(j)} \exp(-i\omega k \pi/2\omega_r), & \omega_r - \Delta\omega/2 \leq |\omega| \leq \omega_r + \Delta\omega/2 \\ 0, & |\omega| < \omega_r - \Delta\omega/2, \quad |\omega| > \omega_r + \Delta\omega/2. \end{cases} \tag{XIII.19}$$

Однако ν -тый отсчет импульсной характеристики цифрового фильтра H_j определяется формулой

$$h_\nu^{(j)} = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} H_j(\omega) \exp(i\omega \nu \Delta t) d\omega.$$

Если $\pi/\Delta t > \omega_N + \Delta\omega/2$, то в соответствии с формулами (XIII.16) и (XIII.19)

$$h_\nu^{(j)} = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{r=0}^N \left\{ \int_{\omega_r - \Delta\omega/2}^{\omega_r + \Delta\omega/2} \sum_{k=0}^M l_k^{(j)} \exp[-i\omega (k\pi/2\omega_r - \nu \Delta t)] d\omega + \right. \\ \left. + \int_{-\omega_r - \Delta\omega/2}^{-\omega_r + \Delta\omega/2} \sum_{k=0}^M l_k^{(j)} \exp[-i\omega (k\pi/2\omega_r - \nu \Delta t)] d\omega \right\}.$$

Меняя знаки суммирования по k и интегрирования, найдем после выполнения интегрирования:

$$h_\nu^{(j)} = \frac{\Delta t}{\pi} \sum_{k=0}^M l_k^{(j)} \sum_{r=1}^N \frac{\sin \Delta\omega/2 (k\pi/2\omega_r - \nu \Delta t)}{k\pi/2\omega_r - \nu \Delta t} \cos \omega_r (k\pi/2\omega_r - \nu \Delta t).$$

Линейный поляризационный фильтр определен полностью. Разумеется, способ выбора спектральных характеристик $K_r(\omega)$ и $L_{rj}(\omega)$ не является единственным, поэтому могут быть предложены и другие модификации фильтров этого типа.

§ 57. Трехкомпонентный поляризационный фильтр винеровского типа

Рассмотрим задачу выделения линейной поляризованной волны $\vec{u}(t)$ на фоне волны $u_R(t)$ с эллиптической поляризацией в терминах теории фильтров Винера. Функция $u(t)$ будет считаться реализацией стационарного случайного процесса, имеющего энергетический спектр $U(\omega)$. Относительно волны Релея будем предполагать, что направление ее распространения составляет угол α с осью x , поэтому

$$u_x^{(R)}(t) = u_H^{(R)}(t) \cos \alpha, \quad u_y^{(R)}(t) = u_H^{(R)}(t) \sin \alpha.$$

Для того чтобы получить решение при помощи фильтра винеровского типа, компоненты $u_H^{(R)}(t)$ и $u_t^{(R)}(t)$ также должны считаться реализациями стационарных случайных процессов. Обозначим $N_R(\omega)$ энергетический спектр горизонтальной компоненты и попытаемся найти энергетический спектр процесса $u_t^{(R)}(t)$, а также взаимный энергетический спектр процессов $u_H^{(R)}(t)$ и $u_t^{(R)}(t)$, предполагая, что наблюдения осуществляются

на дневной поверхности. С этой целью построим спектральные разложения типа (VII.8) для вертикальной и горизонтальной компонент:

$$u_H^{(R)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) H(d\omega)$$

и

$$u_z^{(R)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) Z(d\omega).$$

В соответствии с (XIII.6) и (XIII.8) при $z = 0$ комплексная амплитуда $Z(d\omega)$ связана с $H(d\omega)$ равенством

$$Z(d\omega) = -i\rho H(d\omega) \operatorname{sign}(\omega), \quad \rho \simeq 1,46.$$

В соответствии с определением энергетического спектра (VII.9) имеем

$$N_z(\omega) = \lim_{d\omega \rightarrow 0} \frac{|Z(d\omega)|^2}{2\pi d\omega} = \rho^2 N_R(\omega). \quad (\text{XIII.20})$$

Взаимный энергетический спектр N_{Hz} горизонтальной и вертикальной компонент определяется следующим образом:

$$N_{Hz}(\omega) = \lim_{d\omega \rightarrow 0} \frac{H(d\omega) Z^*(d\omega)}{2\pi d\omega} = i\rho N_R(\omega) \operatorname{sign} \omega. \quad (\text{XIII.21})$$

Принципиальным отличием винеровских фильтров является возможность учитывать различного рода помехи в рамках одной задачи. Будем считать, что, кроме волны Релея, на всех трех компонентах регистрируется случайная помеха $\vec{\xi}(t) = [\xi_x(t), \xi_y(t), \xi_z(t)]$ с независимыми составляющими. Предполагая, что составляющие $\xi_x(t)$, $\xi_y(t)$ и $\xi_z(t)$ отличаются только интенсивностями, их энергетические спектры обозначим $\sigma_x^2 N_{\xi}(\omega)$, $\sigma_y^2 N_{\xi}(\omega)$ и $\sigma_z^2 N_{\xi}(\omega)$ соответственно.

Таким образом, задача, которую мы хотим решить, заключается в построении наилучшей среднеквадратической оценки случайного процесса $u(t)$ по трехмерному векторному процессу:

$$\vec{v}(t) = u(t) \vec{\kappa} + u_R(t) + \vec{\xi}(t). \quad (\text{XIII.22})$$

В соответствии с результатами § 54 решение дается векторным фильтром, скалярные характеристики которого $L_x(\omega)$, $L_y(\omega)$ и $L_z(\omega)$ являются решением системы (XII.32). Матрица этой системы совпадает с матрицей взаимных энергетических спектров процесса $\vec{v}(t)$.

Предполагая, что процессы $u(t)$, $u_R(t)$ и $\xi(t)$ между собой независимы и используя (XII.17—18), получим выражение элементов матрицы системы

$$N_x(\omega) = \alpha_x^2 U(\omega) + \cos^2 \alpha N_R(\omega) + \sigma_x^2 N_{\xi}(\omega) \quad (\text{XIII.23})$$

аналогично $N_y(\omega)$ (с заменой $\cos \alpha$ на $\sin \alpha$ и т. д.);

$$N_z(\omega) = \alpha_z^2 U(\omega) + \rho^2 N_R(\omega) + \sigma_z^2 N_\xi(\omega); \quad (\text{XIII.24})$$

$$N_{xz}(\omega) = N_{zx}^*(\omega) = \alpha_x \alpha_z U(\omega) + i \cos \alpha \rho N_R(\omega) \operatorname{sign} \omega \quad (\text{XIII.25})$$

аналогично $N_{yz}(\omega)$ и, наконец,

$$N_{xy}(\omega) = N_{yx}^*(\omega) = \alpha_x \alpha_y U(\omega) + \sin \alpha \cos \alpha N_R(\omega). \quad (\text{XIII.26})$$

Правые части равны взаимным энергетическим спектрам процесса $u(t)$ с процессами $v_x(t)$, $v_z(t)$ и $v_y(t)$:

$$N_{uv_x}(\omega) = \alpha_x U(\omega); \quad N_{uv_z}(\omega) = \alpha_z U(\omega) \quad (\text{XIII.27})$$

и аналогично $N_{uv_y}(\omega)$.

Решение полученной системы в явном виде выписывать не будем. Если какие-нибудь из параметров α_x , α_z и α_y неизвестны, то, придавая им различные значения, получим $(3 \times m)$ -мерный фильтр, рещающий задачу выделения волны $u(t)$ одновременно с оценкой направления ее прихода.

Более подробно рассмотрев структуру решения для случая, когда смещение линейно-поляризованной волны происходит в плоскости xOz , и волна Релея распространяется в направлении x : $\alpha_y = 0$, $\alpha = 0$. Ясно, что в этой ситуации оценку для $u(t)$ можно получить по двум компонентам — $v_x(t)$ и $v_z(t)$. Матрица системы уравнений, определяющей двухкомпонентный винеровский фильтр $[L_x(\omega), L_z(\omega)]$ вычисляется по формулам (XIII.23)—(XIII.25), а правая часть — по формулам (XIII.27).

Решим полученную систему по правилу Крамера:

$$L_x(\omega) = \frac{\alpha_x K_0(\omega)}{\sigma_x^2 D(\omega)} [\rho c_1 (\alpha_x \rho + i \alpha_z \operatorname{sign} \omega) r(\omega) + 1] \quad (\text{XIII.28})$$

и

$$L_z(\omega) = \frac{\alpha_z K_0(\omega)}{\sigma_z^2 D(\omega)} [c_2 (\alpha_z - i \alpha_x \rho \operatorname{sign} \omega) r(\omega) + 1], \quad (\text{XIII.29})$$

где

$$D(\omega) = 1 + c_3 r(\omega) K_0(\omega) + c_4 r(\omega) + c_5 K_0(\omega),$$

$$r(\omega) = N_R(\omega)/N_\xi(\omega), \quad K_0(\omega) = U(\omega)/N_\xi(\omega),$$

$$c_1 = 1/\alpha_x \sigma_z^2, \quad c_2 = 1/\alpha_z \sigma_x^2,$$

$$c_3 = (\rho^2 \alpha_x^2 + \alpha_z^2)/\sigma_x^2 \sigma_z^2,$$

$$c_4 = (\sigma_z^2 + \rho^2 \sigma_x^2)/\sigma_x^2 \sigma_z^2,$$

$$c_5 = \alpha_x^2/\sigma_x^2 + \alpha_z^2/\sigma_z^2.$$

Полученный фильтр является довольно сложным. Покажем, что на его основе можно построить более простой фильтр, обладающий желаемыми

свойствами. С этой целью рассмотрим действие двухканального фильтра (M_x, M_z) , где

$$M_x(\omega) = \rho(a_x \rho + i a_z \operatorname{sign} \omega) P(\omega); \quad (\text{XIII.30})$$

$$M_z(\omega) = (a_z - i \rho a_x \operatorname{sign} \omega) P(\omega), \quad (\text{XIII.31})$$

$P(\omega)$ — произвольная функция; Q_x и a_z — произвольные константы, на релеевскую волну

$$y(t) = M_x[u_x^{(R)}(t)] + M_z[u_z^{(R)}(t)]. \quad (\text{XIII.32})$$

В соответствии с формулами (XIII.5)—(XIII.8) спектр $u_x^{(R)}(t)$ при $z = 0$ равен $i\omega S(\omega)$, а спектр компоненты $u_z^{(R)}(t)$ равен $\rho|\omega| S(\omega)$. Отсюда, выразив равенство (XIII.32) в спектральной форме, получим

$$S_y(\omega) = P(\omega) S(\omega) [\rho(a_x \rho + i a_z \operatorname{sign} \omega) i\omega + \rho(a_z - i \rho a_x \operatorname{sign} \omega) |\omega|] \equiv 0.$$

Итак, фильтр (M_x, M_z) уничтожает волну Релея независимо от ее спектра $S(\omega)$ и при любых значениях $P(\omega)$, a_x и a_z . Это значит, что можно ограничиться применением только такого фильтра. Легко показать, что $P(\omega)$ в этом случае следует приравнять спектральной характеристике винеровского фильтра, выделяющего полезный сигнал на фоне помехи $\xi(t)$.

Глава XIV

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ФИЛЬТРАЦИИ

§ 58. Линейные преобразования, стационарные по пространственным переменным

Существенным свойством линейных систем и линейных преобразований является стационарность, или инвариантность, относительно начала отсчета времени. Именно это свойство в конечном счете определяет эффективность спектральных методов, поскольку комплексные гармоники являются собственными функциями линейных операторов стационарного типа.

Существует широкий класс многоканальных преобразований сейсмических полей, в которых аналогичное свойство инвариантности имеет место для пространственной переменной. Например, $(n \times n)$ -мерный фильтр (XII.41), предназначенный для сглаживания сейсмограммы, содержащей флуктуирующий сигнал и аддитивную помеху, стационарен относительно номера точки приема, так как замена входной сейсмограммы $x_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) на $x_{k+1}(t)$ ($k = 1, \dots, n$) изменяет выходной сигнал $y_s(t)$ на $y_{s+1}(t)$. Дальше увидим, что подобные многоканальные фильтры обладают рядом замечательных свойств, существенно упрощающих их анализ. Однако приведенный пример показывает, что во всех тех случаях, когда x -представления сигнала и помехи обнаруживают

свойства стационарности, поиск оптимального фильтра можно вести, сразу ограничив себя классом подобного рода многоканальных систем.

Дадим общее определение. Пусть $u_k(t)$ — сейсмическая трасса, зарегистрированная в k -той точке линии наблюдения: $u_k(t) = u(t, k \Delta x)$ и пусть $v(t, k \Delta x)$ имеет смысл преобразованного поля в этой точке. Тогда линейная система, преобразующая бесконечную последовательность функций $u(t, k \Delta x)$, $k = 0, \pm 1, \dots$ в последовательность $v(t, k \Delta x)$, $k = 0, \pm 1, \dots$, называется стационарной по пространственной переменной, если

$$v(t, k \Delta x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} L_{k-j} [u(t, j \Delta x)]. \quad (\text{XIV.1})$$

Пример I. Простейший пример линейного преобразования типа (XIV.1) бесконечный двухсторонний смеситель с коэффициентом смещения $q = \rho^{\Delta x}$:

$$v(t, k \Delta x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \rho^{|k-j| \Delta x} u(t, j \Delta x), \quad (\text{XIV.2})$$

вывод которого был дан Г. А. Гамбурцевым еще в 30-х годах.

Пример II. Рассмотрим следующее линейное преобразование:

$$v(t, k \Delta x) = \sum_{j=-m}^m u(t, (k-j) \Delta x). \quad (\text{XIV.3})$$

При каждом k функция $v(t, k \Delta x)$ равна сигналу на выходе однородной группы, содержащей $2m + 1$ приемников. Линейная система (XIV.3) осуществляет как бы скользящее группирование приемников.

Более общая формула линейных систем этого типа —

$$v(t, k \Delta x) = \sum_{j=k-m}^{k+m} l_{k-j} u(t, j \Delta x). \quad (\text{XIV.4})$$

В ней последовательность $\{l_{-k}\}$ выражает распределение чувствительности «скользящей» группы.

Вернемся к общему случаю. Пусть $l(t, k \Delta x)$ — импульсная характеристика одномерного фильтра L_k . Тогда формулу (XIV.1) можно переписать:

$$v(t, k \Delta x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l[t - \tau, (k-j) \Delta x] u(\tau, j \Delta x) d\tau. \quad (\text{XIV.5})$$

Эта формула подсказывает определение непрерывного линейного преобразования, являющегося стационарным и по t , и по пространственной координате x :

$$v(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l(t - \tau, x - x') u(\tau, x') d\tau dx'. \quad (\text{XIV.6})$$

Формулы типа (XIV.5) и (XIV.6) будем объединять термином пространственно-временной фильтрации. Таким образом, пространственно-временные фильтры, как и обычные, могут быть и непрерывными, и дис-

кретными по одной или по обоим переменным t и x одновременно. Функция $l(t, x)$ в последней формуле выражает импульсную характеристику пространственно-временного фильтра и, как нетрудно показать, является откликом на воздействие вида $\delta(x, t) = \delta(x) \delta(t)$. Действительно, подставив $u(t, x) = \delta(t, x)$ в (XIV.6) и выполнив интегрирование сначала по одной переменной, а затем по другой, найдем, что $v(t, x)$ совпадает с $l(t, x)$. Аналогично $l(t, k \Delta x)$ в формуле (XIV.5) представляет собой отклик на сигнал $\delta_k \delta(t)$.

Импульсная характеристика смесителя в примере I равна

$$l(t, k \Delta x) = \rho^{|k| \Delta x} \delta(t). \quad (\text{XIV.7})$$

Скольльзящая интерференционная система (XIV.4) имеет импульсную характеристику

$$l(t, k \Delta t) = l_k \delta(t). \quad (\text{XIV.8})$$

Если суммирование осуществляется с временными задержками по голографу плоской волны

$$v(t, k \Delta t) = \sum_j l_{k-j} u[t - (k-j) \Delta x/c, j \Delta x],$$

$$l(t, k \Delta t) = l_k \delta(t - k \Delta x/c). \quad (\text{XIV.9})$$

Пространственно-временную фильтрацию можно определить и в тех случаях, когда приемники не расположены на одной линии. Обозначим символом \vec{r}_k — радиус-вектор точки, в которой расположен k -тый приемник. Множество всех точек приема обозначим символом \mathcal{R} . Прежде чем ввести инвариантность относительно сдвига по пространственным переменным, необходимо договориться о том, что понимать под сдвигом вектора \vec{r}_k . То, что этот вопрос не тривиален и не всегда может быть решен, вытекает из следующего рассуждения. Всякий пространственный сдвиг заключается в переходе от вектора \vec{r}_k к вектору $\vec{r}_k + \Delta \vec{r}_0$. Но такой сдвиг имеет смысл только в том случае, когда при всех $k \vec{r}_k + \Delta \vec{r} \in \mathcal{R}$. Для произвольного множества \mathcal{R} такие сдвиги $\Delta \vec{r}$, вообще говоря, могут не существовать.

Пусть \mathcal{R} образует периодическую решетку. Это значит, что каждый вектор $\vec{r} \in \mathcal{R}$ представим в виде

$$\vec{r} = l \vec{a} + m \vec{b} + n \vec{c}, \quad (\text{XIV.10})$$

где \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} — система линейно-зависимых векторов, l , m , n — любые целые числа. Тогда при любых целых λ , μ и ν сдвиг

$$\Delta \vec{r} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} \quad (\text{XIV.11})$$

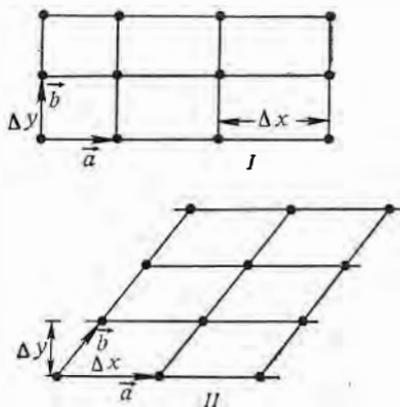


Рис. 38

ТО

дает вектор $\vec{r} + \Delta\vec{r} = (l + \lambda)\vec{a} + (m + \mu)\vec{b} + (n + \nu)\vec{c}$, который также принадлежит решетке R .

Примером одномерной периодической решетки является дискретное множество точек $k \Delta x$ (в этом случае $\vec{a} = \Delta x \vec{i}$, $b = 0$ и $c = 0$). На рис. 38 даны примеры двумерных решеток: прямоугольной (I)

$$\vec{a} = \Delta x \vec{i}, \quad \vec{b} = \Delta y \vec{j}, \quad (\text{XIV.12})$$

и косоугольной (II)

$$\vec{a} = \Delta x \vec{i}, \quad \vec{b} = c \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j}. \quad (\text{XIV.13})$$

Линейное преобразование

$$v(t, \vec{r}_k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l(t - \tau, \vec{r}_k - \vec{r}_j) u(\tau, \vec{r}_j) d\tau, \quad (\text{XIV.14})$$

$$\vec{r}_k, \vec{r}_j \in \mathcal{R}$$

будем называть пространственно-временным фильтром на периодической решетке \mathcal{R} . Чтобы показать стационарность относительно сдвига $\Delta\vec{r}$ вида (XIV.11), заменим в (XIV.14) входную последовательность $\{u(t, \vec{r}_k)\}$ на $\{u(t, \vec{r}_k + \Delta\vec{r})\}$, рассматривая, таким образом, следующую сумму:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l(t - \tau, \vec{r}_k - \vec{r}_j) u(\tau, \vec{r}_j + \Delta\vec{r}) d\tau. \quad (\text{XIV.15})$$

Поскольку вектор $\vec{r}_j + \Delta\vec{r}$ принадлежит \mathcal{R} , то он может быть обозначен символом \vec{r}_s , где индекс s взаимнооднозначно зависит от j ; $s = s(j)$. Следовательно, выражение (XIV.15) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l[t - \tau, \vec{r}_k - \vec{r}_{s(j)} + \Delta\vec{r}] u[\tau, \vec{r}_{s(j)}] d\tau.$$

Вследствие взаимнооднозначной зависимости s от j суммирование по j можно заменить суммированием по s , а так как сумма не зависит от обозначения индекса суммирования, то, сопоставляя последнее выражение с (XIV.14), получим, что последнее выражение дает $v(t, \vec{r}_k + \Delta\vec{r})$. Стационарность относительно сдвигов $\Delta\vec{r}$ доказана.

Ясно, что любая реальная приемная система основана на неперiodических решетках, хотя бы из-за конечного числа приемников. С подобным ограничением, по существу, мы уже имели дело при исследовании одномерных линейных фильтров, так как они рассматривались на всей бесконечной оси, хотя все реальные наблюдения осуществляются в конечные отрезки времени. Теория оказалась практически приемлемой потому, что время наблюдения, как правило, значительно больше эффективной

длительности собственных процессов применяемых фильтров. Теория пространственно-временных фильтраций также будет в той степени конструктивна, в какой размеры решеток превосходят характерные размеры пространственно-временных импульсных характеристик.

§ 59. Многомерное преобразование Фурье

При анализе одномерных фильтров главенствующую роль играло преобразование Фурье по переменной t . Аналогичное значение при изучении пространственно-временных фильтраций имеет многомерное преобразование Фурье. Сначала рассмотрим преобразование по переменным t и x .

Найдем спектр функции $u(t, x)$ в каждой точке x линии наблюдения

$$S_u(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) \exp(-i\omega t) dt. \quad (\text{XIV.16})$$

Поскольку при фиксированном ω спектр $S_u(\omega, x)$ является функцией от x , то можно применить к $S_u(\omega, x)$ преобразование Фурье по переменной x (если, конечно, выполнены необходимые условия при $x \rightarrow \infty$). Определяя это преобразование, изменим знак показателя в экспоненте (напомним, что в силу симметрии прямого и обратного преобразований Фурье, выбор знака — это вопрос соглашения):

$$B_u(\omega, \nu_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, x) \exp[-i(\omega t - \nu_x x)] dt dx. \quad (\text{XIV.17})$$

Функция $B_u(\omega, \nu_x)$ и называется двумерным преобразованием Фурье функции $u(t, x)$. Величина ν_x выражает пространственную частоту.

С. А. Нахамкин впервые обратил внимание на связь $B_u(\omega, \nu_x)$ с непрерывной суммограммой РНП:

$$u(t, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t + x/v, x) dx, \quad -\infty \leq v \leq \infty,$$

а именно: преобразование Фурье любой трассы суммоленды $u(t, v)$ ($v = \text{const}$), равное

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t, v) \exp(-i\omega t) dt,$$

совпадает с сечением двумерного спектра вдоль прямой $\nu_x = \omega/v$. Отсюда, в частности, следует, что суммограмма РНП сохраняет всю информацию об исходном волновом поле.

Если к $B_u(\omega, \nu_x)$ применить обратное преобразование Фурье по переменной ν_x (учитывая соглашение о знаке в показателе экспоненты), мы восстановим функцию $S_u(\omega, x)$. Применяя далее преобразование по ω , найдем исходное поле $u(t, x)$:

$$u(t, x) = 1/(2\pi)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} B_u(\omega, \nu_x) \exp[i(\omega t - \nu_x x)] d\nu_x d\omega. \quad (\text{XIV.18})$$

Формулы (XIV.17) и (XIV.18) представляют собой пару прямого и обратного преобразований Фурье.

Отметим следующее свойство полученного преобразования. Заменяя в формуле (XIV.17) ω на $-\omega$ и v_x на $-v_x$, получим

$$B_u(-\omega, -v_x) = B_u^*(\omega, v_x). \quad (\text{XIV.19})$$

Согласно формуле (XIV.18) двумерное преобразование Фурье разлагает волновое поле $U(t, x)$ в бесконечную систему плоских монохроматических волн $B \exp[i\omega(t - xv_x/\omega)]$, каждая из которых распространяется в направлении x со скоростью ω/v_x . Длина волны каждой монохроматической составляющей равна $2\pi/v_x$, откуда и следует смысл пространственной частоты: она показывает, сколько периодов соответствующей монохроматической составляющей укладывается на расстоянии $x = 2\pi$.

Пример I. Рассмотрим плоскую волну $u(t - x/v)$. Подставив в формулу (XIV.17) $u = u(t - x/v)$ и интегрируя по τ , после замены переменных $\tau = t - x/v$ найдем

$$B_u(\omega, v_x) = S_u(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\omega/v - v_x)x] dx, \quad (\text{XIV.20})$$

где $S_u(\omega)$ — спектр сигнала $u(t)$.

Применим выражение (1.29)

$$B_u(\omega, v_x) = 2\pi S_u(\omega) \delta(v_x - \omega/v). \quad (\text{XIV.21})$$

Из полученной формулы следует, что спектр плоской волны сосредоточен на линии $v_x = \omega/v$, вне которой он обращается в нуль. Все монохроматические составляющие плоской волны $u(t - x/v)$ распространяются с одной и той же скоростью v .

Если $u(t, x)$ состоит из суммы плоских волн с различными кажущимися скоростями

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^n u_k(t - x/v_k),$$

то в силу линейности преобразования Фурье

$$B_u(\omega, v_x) = 2\pi \sum_{k=1}^n S_k(\omega) \delta(v_x - \omega/v_k). \quad (\text{XIV.22})$$

Спектр интерференционной волны оказался сосредоточенным на прямых линиях $v_x = \omega/v_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) (рис. 39). Полученную особенность двумерного интерференционного спектра естественно использовать для анализа интерференции нескольких плоских волн. Из равенства (XIV.22) следует, что, вычисляя двумерный спектр в любой конечной полосе частот (ω', ω'') и отыскивая линии, на которых он сосредоточен, мы должны получить идеальное разрешение любого числа волн с как угодно близкими кажущимися скоростями распространения — факт, который с физической точки зрения не имеет смысла. В чем же здесь дело?

Два обстоятельства ограничивают разрешающую способность любого метода, в том числе и спектрального: 1) наличие случайных помех и 2) конечные интервалы наблюдений (по t и по x). Рассмотрим подробно второе обстоятельство, причем для простоты будем считать, что время наблюдения является бесконечным, а интервал наблю-

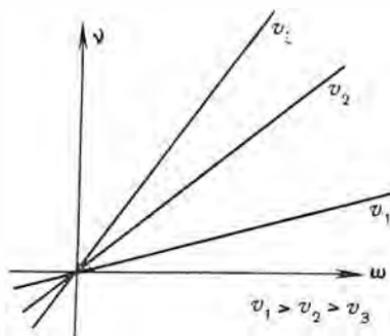


Рис. 39

дений — от $-l/2$ до $l/2$. Легко увидеть, что в таком случае интеграл в равенстве (XIV.20) фактически будет вычисляться в конечных пределах от $-l/2$ до $l/2$.

Полученный интеграл легко берется

$$B_u(\omega, v_x, l) = S_u(\omega) \cdot \frac{\sin[l(\omega/v - v_x)/2]}{(\omega/v - v_x)/2}. \quad (\text{XIV.23})$$

Теперь прямая $v_x = \omega/v$ является линией главного максимума спектра $B_u(\omega, v_x, l)$. Область максимальных значений спектра $B_u(\omega, v_x, l)$, определяемая неравенством

$$\omega/v - 2\pi/l \leq v_x \leq \omega/v + 2\pi/l, \quad (\text{XIV.24})$$

конечна, откуда и получается конечность разрешающей способности спектрального метода. Из неравенства (XIV.24) следует условие разрешения двух плоских волн $u(t - x/v_1)$ и $u(t - x/v_2)$ на фиксированной частоте ω :

$$\omega/v_2 - 2\pi/l \geq \omega/v_1 + 2\pi/l \quad (v_1 > v_2).$$

Волны полностью разрешены, если они разрешены на всех частотах. Предполагая, что оба спектра $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$ располагаются в интервале (ω', ω'') , условие разрешения можно выразить следующим образом:

$$l \geq (4\pi/\omega') v_1 v_2 / (v_1 - v_2).$$

Это условие совпадает с условием (IX.49), определяющим разрешающую способность метода РНП.

В заключение этого примера заметим, что на первый взгляд знание второго сомножителя в правой части формулы (XIV.23) позволяет в принципе разрешать волны со сколь угодно близкими кажущимися скоростями распространения. Но именно наличие случайных помех не позволяет эту возможность реализовать на самом деле.

Пример II. Рассмотрим двумерный спектр плоской волны в среде с поглощением. Нам нужно вычислить двумерное преобразование Фурье волны, заданной формулой (II.27), в которой $k(\omega) = -\omega/v_p(\omega) + i\alpha(\omega)$. Если бы поглощение отсутствовало ($\alpha(\omega) \equiv 0$), то согласно (II.27) колебание $u(t, x)$ состояло бы из совокупности монохроматических волн вида $A \exp\{i\omega[t - x/v_p(\omega)]\}$, откуда следует, что двумерный спектр был бы сосредоточен на линии $v_x = \omega/v_p(\omega)$. Наличие поглощения приводит к «рассредоточению» спектра по всей области пространственных и временных частот.

Для удобства изменим обозначение переменной интегрирования (II.27), записав этот интеграл так:

$$u(t, x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) \exp\{-i[\lambda t - k(\lambda)x]\} d\lambda.$$

Подставим его в (XIV.17), осуществим вначале интегрирование по t , используя равенство (I.29). Будем иметь

$$B_u(\omega, v_x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i[k(\lambda) - v_x]x\} dx \right) \delta(\omega - \lambda) d\lambda.$$

Внутренний интеграл берется легко. После этого остается учесть свойство δ -функции. Окончательно

$$B_u(\omega, v_x) = S(\omega) / \{\alpha(\omega) + i[\omega/v_p(\omega) - v_x]\}. \quad (\text{XIV.25})$$

Двумерный амплитудный спектр

$$|B_u(\omega, v_x)| = |S(\omega)| / \sqrt{\alpha^2(\omega) + [\omega/v_p(\omega) - v_x]^2}.$$

Видно, что максимальные значения спектра сосредоточены на линии $v_x = \omega/v_p(\omega)$.

В связи с полученными формулами следует еще раз остановиться на понятии дисперсии скорости. Нельзя считать, что в среде с поглощением каждая гармоника имеет свою строго определенную скорость распространения $v_p(\omega)$, ибо двумерный спектр «размазан» и в нем существуют гармоники одной и той же частоты, распространяющиеся с различными скоростями. Но если среди всех гармоник, имеющих одну и ту же частоту ω , выбрать ту, которая имеет максимальную амплитуду, то ее скорость распространения близка к $v_p(\omega)$.

Пример III. Рассмотрим спектр волны $u(t - t_0 - ax^2)$ на конечной базе $(-l/2, l/2)$.

Имеем

$$\begin{aligned} B_u(\omega, v_x, l) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-l/2}^{l/2} u(t - t_0 - ax^2) \exp[i(\omega t - xv_x)] dt dx = \\ &= S_u(\omega) \exp(-i\omega t_0) \int_{-l/2}^{l/2} \exp[-i(\omega ax^2 - xv_x)] dx. \end{aligned}$$

Дополняя в показателе экспоненты до полного квадрата и полагая $u = x\sqrt{a\omega} - v_x/2\sqrt{a\omega}$, получим

$$B_u(\omega, v_x; l) = S_u(\omega) \exp(-i\omega t_0) \int_{-iu_1}^{iu_2} \exp(iu^2) du,$$

где $u_1 = l/2\sqrt{a\omega} + v_x/2\sqrt{a\omega}$ и $u_2 = l/2\sqrt{a\omega} - v_x/2\sqrt{a\omega}$. Этот интеграл вычисляется так же, как и (IX.64), при помощи интегралов Френеля:

$$\begin{aligned} B_u(\omega, v_x, l) &= \sqrt{\pi/2} [S_u(\omega) \exp(-i\omega t_0) / \sqrt{a\omega}] [C(u_1) + \\ &+ C(u_2) + iS(u_1) + iS(u_2)]. \end{aligned}$$

Максимальные значения двумерного спектра волны с параболическим годографом сосредоточены в окрестности линий $v_x = \pm a\omega l$, где al представляют собой кажущуюся скорость в точке $l/2$.

Двумерное преобразование Фурье легко обобщается на случай большого числа переменных. Обозначим \vec{v} — вектор с компонентами v_x, v_y и v_z . Тогда четырехмерный спектр волнового поля $u(t, \vec{r})$ равен

$$B_u(\omega, \vec{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(t, \vec{r}) \exp\{-i[\omega t - (\vec{v}, \vec{r})]\} dt d\vec{r}, \quad (\text{XIV.26})$$

где скалярное произведение (\vec{v}, \vec{r}) определяется обычным образом как $v_x x + v_y y + v_z z$. В этой формуле дифференциал $d\vec{r}$ суть $dx dy dz$ и соответствующий интеграл является трехкратным.

По спектру $B_u(\omega, \vec{v})$ волновое поле восстанавливается при помощи обратного преобразования

$$u(t, \vec{r}) = 1/(2\pi)^4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_u(\omega, \vec{v}) \exp\{i[\omega t - (\vec{v}, \vec{r})]\} d\omega d\vec{v}. \quad (\text{XIV.27})$$

Каждая гармоническая составляющая в (XIV.27) представляет собой плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в направлении вектора \vec{v} со скоростью

$$v = \omega / \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (\text{XIV.28})$$

Таким образом, четырехмерное преобразование Фурье определяет разложение волнового поля в бесконечную сумму плоских монохроматических волн, имеющих различные частоты, скорости и направление распространения. При этом значение $B_u(\omega, \vec{v})$ пропорционально амплитуде каждой такой волны.

Величину $k = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ называют волновым числом, а $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — волновым вектором.

Пример IV. Пусть $u = u(t - (\kappa, \vec{r})/v)$. Подставив это выражение в (XIV.26) и интегрируя по $\tau = t - (\kappa, \vec{r})/v$, получим после простых преобразований

$$\begin{aligned} B_u(\omega, \vec{v}) &= S_u(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\omega \kappa_x/v - v_x)x] dx \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\omega \kappa_y/v - v_y)y] dy \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-i(\omega \kappa_z/v - v_z)z] dz = \\ &= S_u(\omega) \delta(v_x - \omega \kappa_x/v) \delta(v_y - \omega \kappa_y/v) \delta(v_z - \omega \kappa_z/v). \end{aligned}$$

Это означает, что спектр полностью сосредоточен на множестве точек $\vec{v} = (\omega/v) \vec{\kappa}$, представляющем собой прямую линию в четырехмерном пространстве (ω, v_x, v_y, v_z) .

Найдем геометрическое место точек, в которых сосредоточен спектр плоских волн, регистрируемых в плоскости $z = 0$ и имеющих кажущуюся скорость v при произвольной ориентации направления распространения. Каждая такая волна имеет спектр, сосредоточенный на линии

$$v_x = (\kappa_x/v) \omega, \quad v_y = (\kappa_y/v) \omega, \quad (\text{XIV.29})$$

где κ_x и κ_y — произвольные величины, удовлетворяющие единственному условию $\kappa_x^2 + \kappa_y^2 = 1$. Возведя левые и правые части в формуле (XIV.29) в квадрат, получим уравнение

$$v_x^2 + v_y^2 = \omega^2/v^2,$$

которое определяет конус, полученный вращением вокруг оси ω прямой, исходящей из начала координат под углом $\arctg 1/v$ к плоскости (v_x, v_y) .

Пример V. Найдем преобразование Фурье по переменным t, x и z для вертикальной компоненты волны Релея, выражаемой формулой (VIII.9). Изменим обозначение переменной интегрирования в (VIII.7) и подставим это выражение в формулу (XVI.26) при $\vec{r} = xi + zk$ и $(\vec{v}, \vec{r}) = xv_x + zv_z$:

$$\begin{aligned} B_u(\omega, v_x, v_z) &= (b/2\pi) \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\lambda) L_z(\lambda) \exp \times \\ &\times \left\{ i \left[\lambda \left(t - \frac{x}{c_R} \right) - (\omega t - xv_x - zv_z) \right] \right\} d\lambda dt dx dz \end{aligned}$$

(нижний предел интегрирования по z равен нулю, так как волна Релея определена только при $z \geq 0$). Интегрирование по t осуществляется на основе формулы (I.29).

Используя далее основное свойство δ -функции, получим

$$B_u(\omega, v_x, v_z) = bS(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[ix \left(v_x - \frac{\omega}{c_R} \right) \right] dx \int_{-\infty}^{\infty} L_z(\omega) \exp(izv_z) dz.$$

Первый интеграл опять вычисляется при помощи формулы (I.29), а второй — элементарно после подстановки выражения (XIII.8). Окончательно

$$B_u(\omega, \nu_x, \nu_z) = -2\pi b c_R |\omega| S(\omega) \delta\left(\nu_x - \frac{\omega}{c_R}\right) \left[\frac{0,577}{0,848 |\omega| - i\nu_z c_R} - \frac{1}{0,393 |\omega| - i\nu_z c_R} \right].$$

В соответствии с полученной формулой трехмерный спектр волны Релея сосредоточен в плоскости $\nu_x = \omega/c_R$. Аналогично определяется трехмерный спектр горизонтальной компоненты.

Пример VI. Фурье-анализ Д-преобразования. Рассмотрим интеграл Релея — Зоммерфельда (IX.71) для $u(M) = u_z(\omega, x, y)$ и $u(M_0) = u_0(\omega, x_0, y_0)$ в дальней зоне:

$$z \gg \max_{M_0 \in \Sigma_0, M \in \Sigma} (x_0, y_0, x, y).$$

Можно принять $\cos(\vec{n}, \vec{r}) \cong 1$ и (в знаменателе подынтегрального выражения) $r \cong z$. Так как волновое число $k = \omega/v_P$ может быть большим, то в показателе экспоненты

$$r = \sqrt{z^2 + (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \cong z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x-x_0}{z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y-y_0}{z} \right)^2 \right],$$

откуда

$$u_0(\omega, x_0, y_0) = \frac{i \exp(-ikz)}{\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} u_z(\omega, x, y) \exp \left\{ -\frac{ik}{2z} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] \right\} dx dy.$$

Полученное выражение называют дифракцией Френеля. Пусть изучаемый объект Σ располагается на такой большой глубине $z = h$, что

$$h \gg \frac{\omega}{v_P} \max_{M \in \Sigma} (x^2 + y^2).$$

Тогда, пренебрегая в показателе экспоненты слагаемыми, содержащими x^2 и y^2 , получим приближение Фраунгофера:

$$u_0(\omega, x_0, y_0) = \frac{i P_h}{\lambda h} \iint_{-\infty}^{\infty} u_h(\omega, x, y) \exp \frac{2\pi i (x_0 x + y_0 y)}{\lambda h} dx dy, \quad (\text{XIV.30})$$

где

$$P_h = \exp(-ikh) \exp \left(-ik \frac{x_0^2 + y_0^2}{2h} \right).$$

Сравнив (XIV.30) с (XIV.26), делаем заключение, что с точностью до множителя, зависящего только от глубины h и координат точек наблюдения, поле $u_0(\omega, x_0, y_0)$ приближенно представляет собой двумерное преобразование Фурье поля $u_h(\omega, x, y)$ по переменным x и y с пространственными частотами $\nu_x = 2\pi x_0/\lambda h$ и $\nu_y = 2\pi y_0/\lambda h$. Это обстоятельство позволяет легко оценить влияние ограниченности и дискретности области наблюдения Σ_0 на точность восстановления объекта Σ . Ясно, что ограничение размера Σ_0 эквивалентно обрезанию высоких частот. По теореме Котельникова поле $u_h(\omega, x, y)$ можно построить с детальностью δx , если его спектр изучается в области $-\nu_0 \leq \nu_x \leq \nu_0$, $-\nu_0 \leq \nu_y \leq \nu_0$, где $\nu_0 \cong \pi/\delta x$. Из определения пространственных

¹ Пределы интегрирования заменены на бесконечные, так как по условиям Кирхгофа вне Σ $u_z = 0$.

частот следует, что граничная частота связана с линейными размерами L прямоугольной области Σ_0 равенством $\nu_0 = \pi L/\lambda l$, откуда получаем условие

$$L \geq \lambda h/\delta x.$$

Практически это неравенство выражает условие для базы суммирования, если источник совпадает с проекцией центра горизонтальной неоднородности Σ на плоскость $z = 0$. Для бесконечной горизонтальной неоднородности эти размеры следует применять к источнику, являющемуся проекцией на плоскость $z = 0$ точки $M(x, y, z)$, для которой определяется значение $A_{\Sigma}(M)$. Если источник расположен в точке $(x - d, y, 0)$, то в соответствии с рис. 40 суммироваться должны наблюдения в квадрате со стороной L и центром в точке $(x + d, y, 0)$. Все эти рассуждения относятся к горизонтальной границе Σ . Если эта граница наклонена под углом φ к оси x , то положение усложняется. Учитывая, что интеграл (XIV.30) описывает поле в окрестности луча, отвечающего зеркальному отражению, получим, чтобы область суммирования для источника с координатами $(x, y, 0)$ имеет центр в точке $(x + z \operatorname{tg} \varphi, y, 0)$ рис. 41). Если угол φ заранее не известен, приходится суммировать на больших базах, что увеличивает влияние помех.

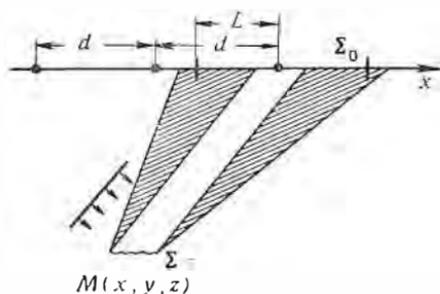


Рис. 40

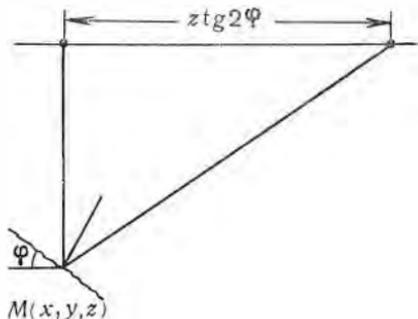


Рис. 41

Если размер горизонтальной неоднородности Σ равен l , то для получения функции $u_i(\omega, x, y)$ в области $-l/2 \leq x \leq l/2$, $-l/2 \leq y \leq l/2$ ее спектр должен изучаться с шагом $\Delta\nu$ не меньшим, чем $2\pi/l$. Отсюда следует условие для шага между приемниками: $\Delta x = \Delta y \leq \lambda h/l$.

Для многомерных преобразований Фурье выполняется большая часть свойств, известных для одномерного преобразования. В частности, спектр «сдвинутого» поля $u(t - \tau, \vec{r} - \vec{r}_0)$ равен $B_u(\omega, \vec{\nu}) \exp\{-i[\omega\tau - (\vec{\nu}, \vec{r}_0)]\}$. Это свойство легко получить непосредственно из формулы (XIV.26), в которую нужно подставить $u(t - \tau, \vec{r} - \vec{r}_0)$, а затем осуществить замену переменных $t' = t - \tau$ и $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$.

Найдем спектр многомерной свертки

$$v(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l(t - \tau, \vec{r} - \vec{r}') u(\tau, \vec{r}') d\tau d\vec{r}'. \quad (\text{XIV.31})$$

Подставляя это выражение в спектр поля $v(t, \vec{r})$

$$B_v(\omega, \vec{\nu}) = \iint_{-\infty}^{\infty} v(t, \vec{r}) \exp\{-i[\omega t - (\vec{\nu}, \vec{r})]\} dt d\vec{r}$$

и переходя к переменным τ , $t' = t - \tau$, \vec{r}' , $\vec{a} = \vec{r} - \vec{r}'$, получим

$$B_v(\omega, \vec{v}) = L(\omega, \vec{v}) B_u(\omega, \vec{v}), \quad (\text{XIV.32})$$

где $L(\omega, \vec{v})$ и $B_u(\omega, \vec{v})$ — многомерные спектры полей $u(t, \vec{r})$ и $l(t, \vec{r})$, в частности

$$L(\omega, \vec{v}) = \iint_{-\infty}^{\infty} l(t, \vec{r}) \exp\{-i[\omega t - (\vec{v}, \vec{r})]\} dt d\vec{r}. \quad (\text{XIV.33})$$

Так как формула (XIV.31) выражает пространственно-временную фильтрацию поля $u(t, \vec{r})$, то полученное соотношение (XIV.32), связывающее спектры преобразуемого и преобразованного полей и являющееся аналогом соотношения (I.28) и определяет значение многомерного преобразования Фурье при изучении пространственно-временных фильтров.

§ 60. Спектральные характеристики пространственно-временных фильтров

Выше было показано, что если поле $u(t, x)$ подвергнуть непрерывной пространственно-временной фильтрации, то спектр преобразованного поля будет равен произведению спектра исходного поля на спектральную характеристику фильтра, выражаемую формулой (XIV.33). Это соотношение показывает, как нужно выбирать спектральную характеристику пространственного фильтра, если многомерные спектры полезных волн и волн-помех сосредоточены в непересекающихся областях пространства (ω, \vec{v}) . Импульсная характеристика определяется при помощи обратного преобразования типа (XIV.27).

Рассмотрим пространственно-временные фильтры, являющиеся дискретными по пространственным переменным. Для их описания понадобится ввести спектры, также дискретные по пространственным переменным.

Пусть задана последовательность функций $\{u(t, k\Delta x)\}$. Обозначим символом $S_u(\omega, k\Delta x)$ одномерное преобразование Фурье каждого члена этой последовательности. Зафиксировав частоту ω , получим числовую последовательность $\{S_u(\omega, k\Delta x)\}$, дискретный спектр которой равен

$$B'_u(\omega, \nu_x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_u(\omega, k\Delta x) \exp(i\nu_x k\Delta x). \quad (\text{XIV.34})$$

Полученная функция и определяет дискретно-непрерывный спектр совокупности функций $\{u(t, k\Delta x)\}$. При каждом ω она является периодической функцией аргумента ν_x с периодом $2\pi/\Delta x$. Формулу обращения получить довольно просто, если учесть, что при каждом значении ω величина $S_u(\omega, k\Delta x)$ является коэффициентом ряда Фурье (XIV.34). Отсюда

$$u(t, k\Delta x) = \frac{\Delta x}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} B'_u(\omega, \nu_x) \exp[i(\omega t - \nu_x k\Delta x)] d\omega d\nu_x.$$

Преобразование Фурье по x имеет те же свойства, что и по t , поэтому к спектру $B'_u(\omega, \nu_x)$ можно применить формулу (III.11), согласно которой

$$\Delta x B'_u(\omega, \nu_x) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} B_u(\omega, \nu + 2p\pi/\Delta x).$$

В частности, дискретно-непрерывный спектр плоской волны равен

$$B'_u(\omega, \nu_x) = \frac{S_u(\omega)}{\Delta x} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta\left(\nu_x - \frac{\omega}{v} + \frac{2p\pi}{\Delta x}\right). \quad (\text{XIV.35})$$

Спектр оказался сосредоточенным на периодической системе линий

$$\omega/v + 2p\pi/\Delta x, \quad p = 0, \pm 1, \dots$$

Найдем преобразование Фурье по аргументу t обеих частей равенства (XIV.5), а затем дискретный спектр полученных числовых последовательностей в левой и правой частях. После простых преобразований будет найден следующий аналог формулы (XIV.32):

$$B'_v(\omega, \nu_x) = L(\omega, \nu_x) B'_u(\omega, \nu_x),$$

где $B'_v(\omega, \nu_x)$ и $L(\omega, \nu_x)$ — дискретно-непрерывные спектры последовательностей $\{v(t, k\Delta x)\}$ и $\{l(t, k\Delta x)\}$. В частности,

$$L(\omega, \nu_x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} l(t, k\Delta x) \exp[i(\omega t - \nu_x k\Delta x)] d\omega. \quad (\text{XIV.36})$$

Пример I. Спектральную характеристику бесконечного смесителя, определяемого формулой (XIV.2), найдем, подставив выражение (XIV.7) в формулу (XIV.36):

$$L(\omega, \nu_x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho^{|k|} \Delta x \exp(i\nu_x \Delta x) = \frac{1 + q \exp(-i\nu \Delta x)}{1 - q \exp(-i\nu \Delta x)}.$$

Пример II. В соответствии с формулами (XIV.8) и (XIV.36) спектральная характеристика скользящей интерференционной системы (XIV.4) равна

$$L(\omega, \nu_x) = \sum_{k=-m}^m l_k \exp(i\nu_x k \Delta x) = \sum_{k=-m}^m h_k \exp(-i\nu_x k \Delta x), \quad (\text{XIV.37})$$

$$h_k = l_{-k}.$$

Мы видим, что спектральная характеристика пространственно-временных фильтров интерференционного типа совпадает с обобщенной характеристикой соответствующей интерференционной системы, а пространственная частота — с аргументом ν обобщенной характеристики. Основным максимумам обобщенной характеристики $H(\nu)$ на плоскости (ω, ν) отвечают периодически повторяющиеся (с периодом $2\pi/\Delta x$) полосы пропускания двумерной спектральной характеристики. Эти полосы определяются неравенствами

$$2k\pi/\Delta x - \nu^s \leq \nu_x \leq 2k\pi/\Delta x + \nu^s, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (\text{XIV.38})$$

где ν' — граничная частота характеристики $H(\nu)$, определяемая условием (IX.34).

Пусть на вход пространственного фильтра интерференционного типа подается плоская волна. Поскольку двумерный спектр (XIV.35) также имеет периодическую структуру (рис. 42), то действие фильтра можно определить, рассматривая только одну линию $\nu = \omega/v$ спектра волны: если некоторая точка этой линии лежит в полосе пропускания фильтра, то в полосе пропускания будут лежать точки всех линий $\omega/v + 2k\pi/\Delta x$ при том же самом значении ω . Обозначим $\omega' = \nu\nu'$ и $\omega'' = (2\pi/\Delta x - \nu')v$. Ясно, что пропускаться будут те частоты сигнала, которые меньше, чем ω' , а подавляться будут частоты в интервале $\omega' \leq \omega \leq \omega''$. Таким образом, метод анализа ин-

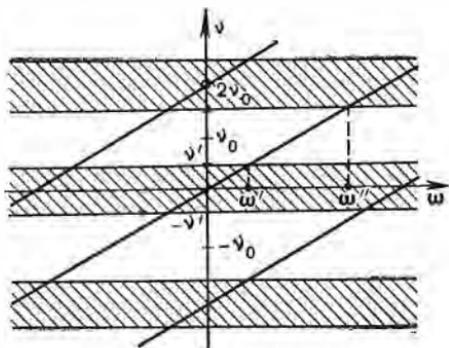


Рис. 42

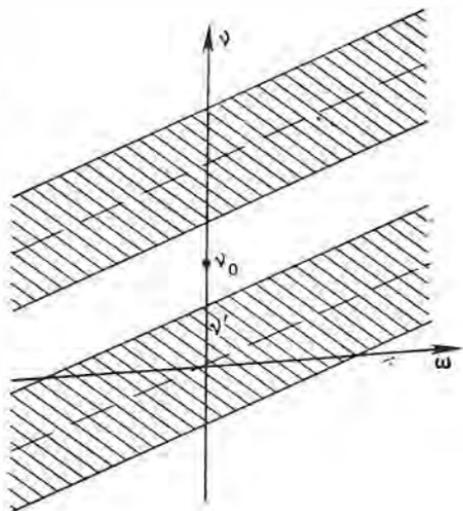


Рис. 43

терференционных систем, основанный на двумерных спектрах, дает те же результаты, что и метод обобщенных характеристик. С точки зрения двумерного анализа метод обобщенных характеристик заключается в проектировании интервала частот, занимаемого сигналом, на ось ν при помощи зависимости $\nu = \omega/v$.

Пример III. Спектральная характеристика скользящей интерференционной системы с временными задержками по голографу плоской волны определяется в соответствии с формулами (XIV.9) и (XIV.36):

$$L(\omega, \nu_x) = \sum_{k=-m}^m l_k \exp \left[i \left(k\nu_x \Delta x - \frac{k \Delta x \omega}{c} \right) \right] = \sum_{k=-m}^m h_k \exp \left[-ik \left(\nu_x - \frac{\omega}{c} \right) \Delta x \right]. \quad (\text{XIV.39})$$

Двумерный спектр опять имеет полосчатую структуру, но полосы ориентированы по направлению прямой $\nu_x = \omega/c$. Ясно, что плоская волна $u(t - k\Delta x/c)$, спектр которой сосредоточен на этой прямой, воспринимается фильтром без искажения (рис. 43).

Пространственно-временные фильтры на периодических решетках, определяемые формулой (XIV.14), описываются при помощи соответствующего дискретно-непрерывного преобразования Фурье

$$B'_u(\omega, \vec{v}) = \sum_l \sum_m \sum_n S_u(\omega, l, m, n) \exp[-i(\vec{r}, \vec{v})],$$

где

$$S_u(\omega, l, m, n) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t, \vec{r}) \exp(-i\omega t) dt,$$

а вектор \vec{r} выражается формулой (XIV.10). Покажем, что функция $B'_u(\omega, \vec{v})$ является периодической на множестве значений волнового вектора \vec{v} .

Более точно покажем, что существуют такие векторы $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ и $\vec{\gamma}$, образующие решетку \mathcal{R}^* , называемую взаимной с \mathcal{R} , что для любых целых f, g и h

$$B'_u(\omega, \vec{v} + f\vec{\alpha} + g\vec{\beta} + h\vec{\gamma}) = B'_u(\omega, \vec{v}). \quad (\text{XIV.40})$$

Выберем векторы $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ и $\vec{\gamma}$ из условий

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha}, \vec{a}) &= 0, & (\vec{\beta}, \vec{a}) &= 2\pi, & (\vec{\gamma}, \vec{a}) &= 2\pi; \\ (\vec{\alpha}, \vec{b}) &= 2\pi, & (\vec{\beta}, \vec{b}) &= 0, & (\vec{\gamma}, \vec{b}) &= 2\pi; \\ (\vec{\alpha}, \vec{c}) &= 2\pi, & (\vec{\beta}, \vec{c}) &= 2\pi, & (\vec{\gamma}, \vec{c}) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{XIV.41})$$

Если расписать эти условия в покомпонентной форме, получим девять линейных уравнений относительно девяти неизвестных компонент векторов $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ и $\vec{\gamma}$. Тем самым секторы $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ и $\vec{\gamma}$ условиями (XIV.41) определяются однозначно.

Теперь рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}, \vec{v} + f\vec{\alpha} + g\vec{\beta} + h\vec{\gamma}) &= (l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}, \vec{v}) + \\ &+ (l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}, f\vec{\alpha} + g\vec{\beta} + h\vec{\gamma}). \end{aligned} \quad (\text{XIV.42})$$

Задача состоит в том, чтобы показать, что при целых f, g и h второе слагаемое в правой части (XIV.42) кратно 2π . Если $f = 1, g = h = 0$,

то второе слагаемое по условиям из первого столбца (XIV.41) равно $(m + n) 2\pi$. При $f = h = 0, g = 1$. По условиям из второго столбца оно равно $(l + n) 2\pi$, а при $f = g = 0, h = 1$ оно равно $(l + m) 2\pi$. Отсюда, прибавляя к f, g и h по единичке, по индукции выводим, что второе слагаемое в правой части (XIV.42) кратно 2π при любых целых f, g и h . Но это и значит, что равенство (XIV.40) выполнено.

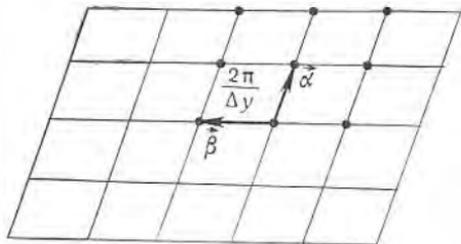


Рис. 44

Легко показать, что уменьшить длину векторов $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ и $\vec{\gamma}$ нельзя. Действительно, уменьшив $\vec{\gamma}$, получим $(\vec{\gamma}, \vec{a}) < 2\pi$, а тогда при $h = l = 1$ и

$m = n = f = g = 0$ мы имели бы во втором слагаемом величину меньше

2π. То же самое верно для $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$.

Пример IV. Рассмотрим плоскую прямоугольную решетку (XIV.12). Условия (XIV.41) распишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha}, \vec{a}) &= \alpha_x \Delta x = 0, & (\vec{\beta}, \vec{a}) &= \beta_x \Delta x = 2\pi; \\ (\vec{\alpha}, \vec{b}) &= \alpha_y \Delta y = 2\pi, & (\vec{\beta}, \vec{b}) &= \beta_y \Delta y = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что взаимная решетка также является прямоугольной:

$$\vec{\alpha} = (2\pi/\Delta y) \vec{j}, \quad \vec{\beta} = (2\pi/\Delta x) \vec{i}.$$

Пример V. Запишем условия (XIV.41) для косоугольной решетки (XIV.13):

$$\begin{aligned} \alpha_x \Delta x &= 0, & \beta_x \Delta x &= 2\pi, \\ \alpha_x c \Delta x + \alpha_y \Delta y &= 2\pi, & \beta_x c \Delta x + \beta_y \Delta y &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда (рис. 44):

$$\vec{\alpha} = (2\pi/\Delta y) \vec{j}, \quad \vec{\beta} = (2\pi/\Delta x) \vec{i} - (2\pi c/\Delta y) \vec{j}. \quad (\text{XIV.43})$$

Обратное преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$u(t, \vec{r}_k) = \frac{\Delta x}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_A B'_u(\omega, \vec{v}) \exp\{i[\omega t - (\vec{r}_k, \vec{v})]\} d\omega d\vec{v},$$

где область интегрирования A имеет форму и ориентацию ячейки взаимной решетки \mathcal{R}^* и может быть помещена с центром в любой точке \vec{v}_0 .

Спектральная характеристика фильтра на периодической решетке определяется через соответствующее дискретно-непрерывное преобразование Фурье импульсной характеристики $l(t, \vec{r}_k)$.

В качестве примера рассмотрим пространственно-временной фильтр интерференционного типа

$$v(t, l\vec{a} + n\vec{b}) = \sum_{l'=-m}^m \sum_{n'=-m}^m u[t, (l-l')\vec{a}, (n-n')\vec{b}]$$

на косоугольной решетке

$$\vec{a} = \Delta x \vec{i}, \quad \vec{b} = (\Delta x/2) (\sqrt{3} \vec{i} + \vec{j}).$$

Спектральная характеристика фильтра равна

$$L(\omega, \nu_x, \nu_y) = \sum_{l=-m}^m \sum_{n=-m}^m \exp\left\{i \Delta x \left[l \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \nu_x + \frac{n}{2} \nu_y \right]\right\}.$$

В соответствии с формулой (XIV.43) эта характеристика периодична на решетке \mathcal{R}^* , определяемой векторами $(4\pi/\Delta x) \vec{j}$ и $(2\pi/\Delta x) (\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j})$.

§ 61. Верная фильтрация

Четкая геометрия двумерных спектров плоских волн позволяет подойти к синтезу пространственно-временных фильтров, используя соображения геометрического характера.

Рассмотрим такую задачу. Пусть полезные волны имеют кажущиеся скорости распространения, сосредоточенные в интервале (v_1, v_2) , а помехи — вне этого интервала. Если ввести кинематические поправки — $2v_1v_2k\Delta x/(v_1 + v_2)$, то приведенная скорость любой полезной волны будет по модулю не меньше

$$v_0 = 2v_1v_2/(v_2 - v_1), \quad (\text{XIV.44})$$

а скорости помех по модулю меньше v_0 . Двумерные спектры полезных волн теперь сосредоточены в области

$$-|\omega|/v_0 \leq v_x \leq |\omega|/v_0. \quad (\text{XIV.45})$$

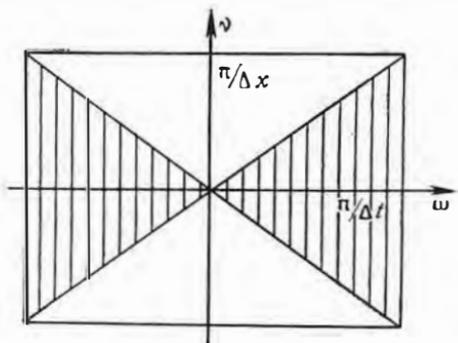


Рис. 45

Таким образом, наша задача заключается в построении пространственного фильтра, у которого область (XIV.45) совпадает с областью пропускания. Грубо говоря, эта область при $\omega \geq 0$ состоит из «веера» линий, выходящих из начала координат в пределах плоского угла величиной $2\text{arctg } 1/v_0$, отчего фильтры этого типа и получили название верных.

Решение поставленной задачи будем искать в классе пространственно-временных фильтров, дискретных и по t , и по x :

$$v(s \Delta t, k \Delta x) = \sum_r \sum_j l[(s-r) \Delta t, (k-j) \Delta x] u(r \Delta t, j \Delta x). \quad (\text{XIV.46})$$

Двумерная спектральная характеристика этого фильтра, равная

$$L(\omega, \nu) = \sum_s \sum_k l(s \Delta t, k \Delta x) \exp[-i(\omega s \Delta t - \nu k \Delta x)],$$

является периодической и по ω (с периодом $2\pi/\Delta t$), и по ν (с периодом $2\pi/\Delta x$).

Формула обращения имеет вид:

$$l(s \Delta t, k \Delta x) = \frac{\Delta t \Delta x}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \int_{-\pi/\Delta x}^{\pi/\Delta x} L(\omega, \nu) \exp[i(\omega s \Delta t - \nu k \Delta x)] d\omega d\nu. \quad (\text{XIV.47})$$

Таким образом, функцию $L(\omega, \nu)$ достаточно определить в прямоугольнике

$$-\pi/\Delta t \leq \omega \leq \pi/\Delta t; \quad -\pi/\Delta x \leq \nu \leq \pi/\Delta x. \quad (\text{XIV.47'})$$

Исходя из условия пропускания волн в области (XIV.45) определим функцию $L(\omega, \nu)$:

$$L(\omega, \nu) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\nu| \leq |\omega|/v_0; \quad -\pi/\Delta t \leq \omega \leq \pi/\Delta t \\ 0 & \text{при } |\nu| > |\omega|/v_0; \quad -\pi/\Delta t \leq \omega \leq \pi/\Delta t. \end{cases} \quad (\text{XIV.48})$$

Предполагается, что значение v_0 достаточно велико, чтобы линия $\nu = \omega/v_0$ не пересекалась с линией $\nu = \pi/\Delta x$ в прямоугольнике (XIV.47'), т. е. $q = \Delta x/v_0 \Delta t \leq 1$. Отсюда по формуле (XIV.47)

$$l(s \Delta t, k \Delta x) = \frac{\Delta t \Delta x}{(2\pi)^2} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} \int_{-|\omega|/v_0}^{|\omega|/v_0} \exp [i(\omega s \Delta t - \nu k \Delta x)] \nu d\nu d\omega.$$

Выполним сначала интегрирование по ν , а затем, применив формулу Эйлера, сведем интеграл к табличному. В итоге получим

$$l(s \Delta t, k \Delta x) = -\frac{2 \Delta t}{(2\pi)^2 k} \left\{ \frac{\cos [\pi (k \Delta x/v_0 - s \Delta t)/\Delta t] - 1}{(k \Delta x/v_0 - s \Delta t)} + \frac{\cos [\pi (k \Delta x/v_0 + s \Delta t)/\Delta t] - 1}{(k \Delta x/v_0 + s \Delta t)} \right\}. \quad (\text{XIV.49})$$

Более подробно рассмотрим импульсную характеристику веерного фильтра при $q = 1$ (этого можно добиться надлежащим выбором Δt и Δx). Область пропускания такого фильтра показана на рис. 45.

Равенство (XIV.49) преобразуется

$$l_{s,k} = l(s \Delta t, k \Delta x) = -\frac{2}{(2\pi)^2 k} \left[\frac{\cos \pi (k-s) - 1}{k-s} + \frac{\cos \pi (k+s) - 1}{k+s} \right]. \quad (\text{XIV.50})$$

Заметим, что целые числа $k-s$ и $k+s$ либо одновременно четные, либо одновременно нечетные. Так как в нечетном случае оба косинуса равны -1 , а в четном $+1$, то из формулы (XIV.50) следует

$$l_{s,k} = \begin{cases} \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{k^2 - s^2} & \text{при нечетном } k+s \\ 0 & \text{при четном } k+s \end{cases} \quad (\text{XIV.51})$$

На первый взгляд, в этой формуле имеется особенность при $k=s$. На самом же деле знаменатель $k^2 - s^2$ никогда в нуль не обращается, так как при $k=s$ число $k+s$ является четным.

Полученные импульсные характеристики несложны, но их можно еще больше упростить, сведя данный фильтр к суммированию со сдвигами и временной фильтрации.

Воспользовавшись перестановочностью свертки, перепишем формулу (XIV.46):

$$v_{s,k} = \sum_r \sum_l l_{r,j} u_{s-r, k-j}, \quad (\text{XIV.52})$$

где

$$v_{s,k} = v(s \Delta t, k \Delta x), \quad u_{s,k} = v(s \Delta t, k \Delta x).$$

Поскольку $l_{r,j}$ тогда, и только тогда отлично от нуля, когда либо r , либо j (но не то и другое вместе) нечетно, то правую часть в формуле (XIV.52) можно разбить на две суммы

$$v_{s,k} = \sum_m \sum_n l_{2m+1, 2n} u_{s-2m-1, k-2n} + \sum_m \sum_n l_{2m, 2n+1} u_{s-2m, k-2n-1}. \quad (\text{XIV.53})$$

В обеих суммах m и n принимают любые целочисленные значения. Заметим, что если зафиксировать s и k , то отсчеты $u_{r,j}$, входящие в первую систему, не входят во вторую, и наоборот, отсчеты $u_{r,j}$ из второй суммы не входят в первую. Следовательно, при вычислении $v(s\Delta t, k\Delta x)$ все отсчеты $u_{r,j}$ разбиваются на две части: на первую часть воздействуют коэффициенты фильтра $l_{2m+1, 2n}$, а на вторую — $l_{2m, 2n+1}$. Мы можем использовать «локальную» систему отсчетов, связанную с s и k .

Важно иметь в виду, что ни первая, ни вторая сумма не представляет собой пространственно-временной фильтрации на исходной системе отсчетов. Однако если исходную систему отсчетов сгруппировать в 4 группы, то можно представить процедуру веерной фильтрации таким образом, что в пределах каждой группы действует свой пространственно-временной фильтр.

Рассмотрим следующие ситуации:

$$\begin{aligned} s = 2p, \quad k = 2q; \quad s = 2p, \quad k = 2q + 1; \\ s = 2p + 1, \quad k = 2q; \quad s = 2p + 1, \quad k = 2q + 1. \end{aligned}$$

Для каждой из этих ситуаций будем определять $v_{s,k}$ отдельно, обозначив

$$\begin{aligned} v_{p,q}^{(1)} = v_{2p, 2q}; \quad v_{p,q}^{(2)} = v_{2p+1, 2q}; \\ v_{p,q}^{(3)} = v_{2p, 2q+1}; \quad v_{p,q}^{(4)} = v_{2p+1, 2q+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы разбили совокупность отсчетов на выходе веерного фильтра на группы v_1, v_2, v_3, v_4 . На группы разобьем и совокупность входных отсчетов, но сделаем это иначе:

$$\begin{aligned} u_{p,q}^{(1)} = u_{2p, 2q+1}; \quad u_{p,q}^{(3)} = u_{2p, 2q}; \\ u_{p,q}^{(2)} = u_{2p+1, 2q}; \quad u_{p,q}^{(4)} = u_{2p+1, 2q+1}. \end{aligned}$$

Выразим выходные величины согласно формуле (XIV.53), в которой примем $l'_{m,n} = l_{2m+1, 2n}$ и $l''_{m,n} = l_{2m, 2n+1}$:

$$v_{p,q}^{(1)} = \sum_m \sum_n l'_{m,n} u_{p-m, q-n}^{(2)} + \sum_m \sum_n l''_{m,n} u_{p-m, q-n}^{(1)}; \quad (\text{XIV.54})$$

$$v_{p,q}^{(2)} = \sum_m \sum_n l'_{m,n} u_{p-m, q-n}^{(1)} + \sum_m \sum_n l''_{m,n} u_{p-m, q-n}^{(2)}; \quad (\text{XIV.55})$$

$$v_{p,q}^{(3)} = \sum_m \sum_n l'_{m,n} u_{p-m, q-n}^{(4)} + \sum_m \sum_n l''_{m,n} u_{p-m, q-n}^{(3)}; \quad (\text{XIV.56})$$

$$v_{p,q}^{(4)} = \sum_m \sum_n l'_{m,n} u_{p-m, q-n}^{(3)} + \sum_m \sum_n l''_{m,n} u_{p-m, q-n}^{(4)}. \quad (\text{XIV.57})$$

Каждая сумма в этих выражениях представляет пространственно-временную фильтрацию соответствующей группы отсчетов.

Рассмотрим более подробно пространственно-временные фильтры с импульсными характеристиками $l'_{m,n}$ и $l''_{m,n}$. Представим коэффициент $l'_{n,n}$ в виде

$$l'_{m,n} = \frac{1}{2\pi n} (\lambda_m^n + \mu_m^n), \quad (\text{XIV.58})$$

где

$$\lambda_m^n = \frac{1}{2n - 2m - 1}; \quad \mu_m^n = \frac{1}{2n + 2m + 1}.$$

Легко получить следующие тождества:

$$\mu_m^n = \mu_{m+n}^0; \quad \lambda_m^n = -\mu_{m-n}^0 \quad (\text{XIV.59})$$

(в дальнейшем будем обозначать $\mu_m^0 = \mu_m$). Теперь в одну из сверток, фигурирующих в формулах (XIV.54)–(XIV.57), например

$$z'_{p,q} = \sum_m \sum_n l'_{m,n} u_{p-m,q-n}^{(1)}$$

подставим формулы (XIV.58) и (XIV.59):

$$z'_{p,q} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_n \frac{1}{n} \sum_m u_{p-m,q-n}^{(1)} (\mu_{m+n} - \mu_{m-n}).$$

Поскольку

$$\sum_m u_{p-m,q-n}^{(1)} \mu_{m+n} = \sum_m u_{p-m+n,q-n}^{(1)} \mu_m$$

а

$$\sum_m u_{p-m,q-n}^{(1)} \mu_{m-n} = \sum_m u_{p-m-n,q-n}^{(1)} \mu_m$$

то

$$z'_{p,q} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_m \mu_m \sum_n \frac{1}{n} (u_{p-m+n,q-n}^{(1)} - u_{p-m-n,q-n}^{(1)}). \quad (\text{XIV.60})$$

Полученный фильтр описывается следующим образом: трасса, отстоящая от q -той, трассы на $n \Delta x$ (т. е. имеющая номер $q - n$) сдвигается влево на n отсчетов и вправо на n отсчетов; сдвинутые трассы вычитаются и затем полученные при всех n разностные трассы суммируются с весами $1/n$. Результаты суммирования подаются на вход одномерного фильтра с импульсной характеристикой μ_m .

Аналогично можно представить пространственно-временную фильтрацию с импульсной характеристикой $l''_{m,n}$. В частности, фильтрация последовательности $\{u_{p,q}^{(1)}\}$ дает

$$z''_{p,q} = -\frac{1}{\pi^2} \sum_m \frac{1}{2m+1} \sum_n \frac{1}{2n-1} (u_{p-m-n,q-n}^{(1)} - u_{p-m+n+1,q-n}^{(1)}). \quad (\text{XIV.61})$$

Полученные формулы (XIV.60) и (XIV.61) существенно упрощают сверную фильтрацию, сводя ее к суммированию и одномерной фильтрации. Иногда сверным фильтром называют одну из этих формул. Если

вести фиктивные интервалы $\delta x = \Delta x/2$ и $\delta t = \Delta t/2$, то можно определить нумерацию так, что реально имеющиеся отсчеты совпадут только с одной из групп $u_{p,q}^{(1)}$, $u_{p,q}^{(2)}$, $u_{p,q}^{(3)}$ или $u_{p,q}^{(4)}$, что оправдывает такую точку зрения.

Отмеченная в § 59 связь суммограммы РНП с двумерным преобразованием Фурье позволяет осуществлять веерную фильтрацию после осуществления РНП. В дискретном случае (при произвольных Δt и Δx суммограмма РНП определяется формулой

$$u(s \Delta t, \gamma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(s \Delta t + k\gamma \Delta x, k \Delta x).$$

Если для каждого значения $\gamma = 1/v$ построить спектр $S_u(\omega, \gamma)$ по переменной t , то совокупность таких спектров при $|\gamma| \leq \gamma_0$ эквивалентна двумерному спектру $B_u(\omega, v)$ в области (XIV.45), так как $S_u(\omega, v/\omega) = B_u(\omega, v)$. Поэтому сейсмограмму на выходе веерного фильтра можно определить следующим выражением:

$$y(s \Delta t, k \Delta x) = \frac{\Delta x \Delta t}{(2\pi)^2} \iint_A S_u(\omega, v/\omega) \exp[i(\omega s \Delta t - k v \Delta x)] d\omega dv,$$

где символ A обозначает область (XIV.45).

Перейдем к переменным ω и $\gamma = v/\omega$. Поскольку якобиан преобразования равен $|\omega|$, то

$$y(s \Delta t, k \Delta x) = \frac{\Delta x \Delta t}{(2\pi)^2} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} |\omega| S_u(\omega, \gamma) \exp[i\omega(s \Delta t - k\gamma \Delta x)] d\omega d\gamma.$$

Выражение $|\omega| S_u(\omega, \gamma)$ представляет собой спектр сигнала $u_1(s \Delta t, \gamma)$ на выходе цифрового фильтра $L(\omega) = |\omega|$ ($|\omega| \leq \pi/\Delta t$), на вход которого подан сигнал $u(s \Delta t, \gamma)$.

Импульсная характеристика этого фильтра равна

$$l_k = \frac{\Delta t}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta t}^{\pi/\Delta t} |\omega| \exp(i\omega k \Delta t) d\omega = \begin{cases} -\frac{2}{\pi k^2}, & \text{четные } k, \\ 0 & \text{нечетные } k. \end{cases} \quad (\text{XIV.62})$$

Таким образом, веерная фильтрация сводится к следующим операциям: 1) построение суммограммы РНП; 2) фильтрация каждой трассы суммограммы фильтром (XIV.62); 3) построение функции

$$y(s \Delta t, k \Delta x) = \frac{\Delta x}{2\pi} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} u_1(s \Delta t - k\gamma \Delta x; \gamma) d\gamma, \quad (\text{XIV.63})$$

которую можно трактовать как применение вторичной процедуры РНП к отфильтрованной первичной суммограмме РНП $u_1(s \Delta t; \gamma)$.

Данный вывод веерного фильтра (принадлежащий С. А. Нахамкину) позволяет легко получить ограничения, связанные с конечностью базы суммирования по $k \Delta x$. Очевидно, они выражаются условием (IX.49) при $v_x^{(1)}$ — минимальная скорость полезных волн, $v_x^{(2)}$ — максимальная скорость помех. Более глубокий анализ требует построения двумерной спектральной характеристики финитного веерного фильтра.

Покажем сначала, что если на вход пространственно-временного фильтра поступает плоская волна $f(t - x/v_x)$, то спектр функции $y(t, 0)$ равен $S(\omega) L(\omega, \nu)$ при $\nu = \omega/v_x$. Действительно, согласно (XIV.32) волна $\exp[i\omega(t - x/v_x)]$ является собственной функцией пространственно-временного фильтра. Следовательно, если на вход поступает сигнал

$$f\left(t - \frac{x}{v_x}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp[i\omega(t - x/v_x)] d\omega,$$

то на выходе в точке x получим

$$y(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega, \omega/v_x) S(\omega) \exp[i\omega(t - x/v_x)] d\omega.$$

Приняв $x = 0$, убеждаемся в справедливости сделанного утверждения.

Согласно (XIV.63) спектр функции $y(s \Delta t, 0)$ на выходе веерного фильтра равен

$$S_y(\omega) = \frac{\Delta x}{2\pi} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} S_1(\omega, \gamma) d\gamma, \quad (\text{XIV.64})$$

где $S_1(\omega, \gamma)$ — спектр функции $u_1(s \Delta t, \gamma)$.

Пусть веерный фильтр является финитным и пусть на вход его поступает плоская волна $f(t - x/v_x)$. Тогда

$$u_1(s \Delta t, \gamma) = L \left\{ \sum_{k=-m}^{+m} f \left[t - k \left(\frac{1}{v_x} - \gamma \right) \Delta x \right] \right\},$$

где L — оператор с импульсной характеристикой (XIV.62). Следовательно,

$$S_1(\omega, \gamma) = |\omega| S(\omega) \sum_{k=-m}^{+m} \exp[-i\omega k(1/v_x - \gamma) \Delta x], \quad |\omega| \leq \pi/\Delta t.$$

Подставим последнюю формулу в (XIV.64) и осуществим суммирование по k , а затем разделим на $S(\omega)$ и примем $\nu = \omega/v_x$. Таким образом мы найдем искомую спектральную характеристику

$$L(\omega, \nu) = \frac{|\omega| \Delta x}{2\pi} \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \frac{\sin n(\nu - \gamma) \Delta x/2}{\sin(\nu - \gamma) \Delta x/2} d\gamma, \quad |\omega| \leq \pi/\Delta t,$$

где

$$n = 2m + 1.$$

§ 62. Пространственно-временные фильтры при подавлении случайных помех

В главе XII было показано, что расчет оптимальных многоканальных фильтров в общем случае приводит к необходимости решать большое число систем линейных уравнений высокого порядка. Пространственно-временные фильтры представляют собой специальный класс многоканальных линейных преобразований с очень компактным спектральным описанием. Поэтому построение оптимальных преобразований в классе пространственно-временных фильтров должно быть более простым.

Пусть помеха $\xi(t, \vec{r})$ суть реализация случайного поля. Это поле называется стационарным, если корреляционная функция поля, равная $M \xi(t_1, \vec{r}_1) \xi^*(t_2, \vec{r}_2)$, зависит только от разностей $t_1 - t_2$ и $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, поэтому ее можно записать в виде $K_\xi(\tau, \vec{r})$. Преобразование Фурье по переменным τ и \vec{r} от корреляционной функции $K_\xi(\tau, \vec{r})$ будем по-прежнему называть энергетическим спектром и обозначать $N_\xi(\omega, \vec{v})$. Это преобразование либо непрерывно, либо дискретно в зависимости от того множества аргументов t и \vec{r} , которые заданы.

Можно не проводить никакого формального различия между ситуацией, когда спектры зависят только от одного аргумента ω , и ситуацией, когда аргумент спектра является векторным. Поэтому все результаты, которые были изложены в главах VII и VIII для одной переменной ω , непосредственно переносятся на случай полей, если только гарантируется существование соответствующих спектров. В частности, пусть $B_u(\omega, \vec{v})$ — многомерное преобразование Фурье полезного поля $u(t, \vec{r})$, регистрируемого в сумме с полем стационарной помехи $\xi(t, \vec{r})$. Тогда оптимальный пространственно-временной фильтр, максимизирующий отношение квадрата амплитуды сигнала к интенсивности помехи, определится в соответствии с формулой (VII.34):

$$L_0(\omega, \vec{v}) = B_u^*(\omega, \vec{v}) / N_\xi(\omega, \vec{v}). \quad (\text{XIV.65})$$

Из этой формулы при соответствующих предположениях можно получить практически все рассмотренные ранее пространственно-временные фильтры. Пусть, в частности, сигнал является плоской волной $u(t - k \Delta x / v)$, а помеха — белым шумом с постоянным энергетическим спектром, равным единице.

В соответствии с формулой (XIV.34) спектр плоской волны можно представить в виде

$$S_u(\omega) \sum_{(k)} \exp [i(\nu_x - \omega/v) k \Delta x],$$

так как $S_u(\omega; k \Delta x) = S_u(\omega) \exp(-i\omega k \Delta x / v)$. Подставляя этот спектр в (XIV.65), получим

$$L_0(\omega, \vec{v}) = S_u^*(\omega) \sum_{(k)} \exp[-i(\nu_x - \omega/v) k \Delta x].$$

Теперь сравним полученное выражение с (XIV.39). Мы видим, что оптимальная пространственно-временная фильтрация сводится к одномерному (временному) согласованному фильтру, имеющему спектральную характеристику $S^*(\omega)$, и к пространственно-временному фильтру интерференционного типа с временными задержками по годографу выделяемой волны.

Вeerный фильтр также является частным случаем оптимального фильтра, если полезный сигнал $u(t, x)$ после введения кинематической поправки определяется интегралом

$$u(t, x) = \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} u(t - \gamma x) d\gamma, \quad \gamma_0 = 1/v_0,$$

а помеха остается белым шумом. Действительно, спектр плоской волны определяется формулой (XIV.21), отсюда в силу линейности преобразования Фурье

$$B_u(\omega, \nu_x) = 2\pi S_u^*(\omega) \int_{-\gamma_0}^{\gamma_0} \delta(\nu_x - \gamma\omega) d\gamma = \begin{cases} 2\pi S_u(\omega), & |\omega/\nu_x| \geq v_0 \\ 0, & |\omega/\nu_x| \leq v_0. \end{cases}$$

Поэтому в соответствии с (XIV.65) оптимальный фильтр состоит из одномерного согласованного фильтра $S_u^*(\omega)$ и пространственно-временного фильтра, спектральная характеристика которого при дискретных x и t определяется формулой (XIV.48), т. е. вeerного фильтра.

Формула (XIV.65) позволяет получить решение и в более сложных ситуациях, когда помеха является случайным полем, коррелированным и по времени, и по пространственным переменным. Нужно, однако, иметь в виду, что формула (XIV.65) оказывается практически бесполезной, если сигнал — плоская волна, а помеха не является белым шумом, а также в тех случаях, когда в состав помехи входят плоские волны. Действительно, в этой ситуации приходится делить δ -функцию на некоторую другую функцию либо рассматривать отношение δ -функций. Ни та, ни другая операция смысла не имеет, а решение можно получить только при помощи интегрального уравнения, эквивалентного формуле (XIV.65) и являющегося многомерным аналогом уравнения (VII.40), которое рассматривалось в связи с задачей одномерной оптимальной фильтрации.

Теперь рассмотрим постановку задачи, приводящую к пространственно-временным винеровским фильтрам.

Пусть

$$x(t, \vec{r}) = u(t, \vec{r}) + \xi(t, \vec{r}),$$

где $u(t, \vec{r})$ и $\xi(t, \vec{r})$ — стационарные случайные поля с энергетическими спектрами $U(\omega, \vec{\nu})$ и $N_\xi(\omega, \vec{\nu})$ соответственно. Необходимо построить пространственно-временный фильтр, который дает наилучшую среднеквадратическую оценку поля $w(t, \vec{r})$, являющегося заданным линейным преобразованием $K[u(t, \vec{r})]$ поля $u(t, \vec{r})$.

В соответствии с формулой (VIII.41) решение дается пространственно-временным фильтром, имеющим спектральную характеристику

$$H(\omega, \vec{v}) = U(\omega, \vec{v})K(\omega, \vec{v})/[U(\omega, \vec{v}) + N_{\xi}(\omega, \vec{v})]. \quad (\text{XIV.66})$$

Если принять $K(\omega, \vec{v}) \equiv 1$, то формула (XIV.66) определит фильтр, который осуществляет выделение сигнала $u(t, \vec{r})$ на фоне помехи $\xi(t, \vec{r})$. Если аргументы принимают дискретное множество значений, то энергетические спектры должны быть дискретными.

Чтобы проиллюстрировать связь пространственно-временных винеровских фильтров с многоканальными, рассмотрим пример 3 из § 54. В этом примере аргумент x является дискретным, поэтому энергетический спектр

$$U(\omega, \nu_x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} U(\omega, r\Delta x) \exp(ir\nu_x \Delta x),$$

где $U(\omega, r\Delta x)$ — преобразование Фурье корреляционной функции $K_u(\tau, r\Delta x)$. Так как последняя является взаимной корреляционной функцией между процессами $u(t, k\Delta x)$ и $u(t, j\Delta x)$ и $k - j = r$, то функция $U(\omega, r\Delta x)$ совпадает с $U_{k-j}(\omega)$ фигурирующей в системе уравнений (XII.39). Аналогично $N_{\xi}(\omega, r\Delta x) = N_{k-j}^{(\xi)}(\omega)$.

Осуществляя дискретное преобразование Фурье обеих частей уравнения (XII.39) при $n = \infty$, получим

$$L(\omega, \nu_x) = U(\omega, \nu_x)/[U(\omega, \nu_x) + N_{\xi}(\omega, \nu_x)], \quad (\text{XIV.67})$$

где

$$L(\omega, \nu_x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_k(\omega) \exp(ik\nu_x \Delta x).$$

Сравнивая (XIV.66) и (XIV.67), мы видим, что обе постановки приводят к одному и тому же решению.

§ 63. Реализация пространственно-временных фильтров в спектральной форме

Непосредственная реализация пространственно-временных фильтров на ЭВМ приводит к большим затратам машинного времени. Как и в случае одномерной фильтрации, некоторый выигрыш можно получить при использовании быстрого преобразования Фурье.

Пусть $\{u_{sk}\}$ — двумерный числовой массив, выражающий отсчеты входного сигнала: $u_{sk} = u(s\Delta t, k\Delta x)$, $1 \leq s \leq N$, $1 \leq k \leq R$. Если оператор пространственно-временного фильтра характеризуется матрицей $\{l_{s,k}\}$, $1 \leq s \leq M$, $1 \leq k \leq P$, то выходной сигнал, как мы знаем, определяется формулой (XIV.46). При помощи рассуждений, которые были проведены в § 14 при анализе одномерной свертки, можно показать, что вычисление массива $\{v_{sk}\}$ (где $s = 1, \dots, N + M$; $k = 1, \dots, R + P$) осуществляется за $K_{\text{вп}} = NMRP$ элементарных операций.

Перейдем к спектральной форме двумерного линейного преобразования. Сначала оценим число операций, необходимых для получения двумерного преобразования Фурье по алгоритму Кулея — Тьюки.

Запишем двумерный спектр в виде

$$B_u(j \Delta\omega, p \Delta\nu_x) = \sum_{k=1}^R \sum_{s=1}^N u_{sk} \exp [-(2\pi i/N) js] \exp [(2\pi i/R) pk],$$

где $\Delta\omega = 2\pi/N \Delta t$, $\Delta\nu_x = 2\pi/R \Delta t$.

При каждом значении k мы имеем N значений внутренней суммы

$$A(k, j) = \sum_{s=1}^N u_{sk} \exp \left[\left(\frac{2\pi i}{N} \right) js \right].$$

Совокупность величин $A(k, j)$, $j = 1, 2, \dots, N$, представляющая собой одномерное преобразование Фурье, получается в соответствии с (III.69) при помощи $4N \log_2 N$ вычислений, а так как j изменяется от 1 до R , то всего для получения двумерного массива $\{A(k, j)\}$, $1 \leq k \leq R$, $1 \leq j \leq N$ нужно будет $4RN \log_2 N$ операций.

Рассмотрим число операций, необходимое при выполнении суммирования по k . При каждом j имеем R значений внешней суммы. На совокупность этих значений затрачивается $4R \log_2 R$ элементарных операций, а всего (учитывая, что j изменяется от 1 до N) — $4RN \log_2 R$ элементарных операций. Следовательно, двумерное преобразование Фурье массива, имеющего размер $N \times R$, осуществляется за $4NR \log_2 NR$ элементарных операций (без учета затрат на вычисление тригонометрических функций).

Поскольку массив $\{v_{s,k}\}$ имеет размер $(N+M)(R+P)$, то, потребовав те же условия согласования, которые мы предъявляли к одномерному преобразованию Фурье функций, участвующих в одномерной свертке, получим, что на все три двумерных преобразования Фурье (из них два — прямые и одно — обратное), необходимые для реализации пространственно-временного фильтра в спектральной форме, потребуется $3 \cdot 4(N+M) \cdot (R+P) \log_2(N+M)(R+P)$ элементарных операций.

Пренебрегая $4(N+M)(R+P)$ операциями, затрачиваемыми на перемножение спектров, получим

$$K_{\text{сп}} = 12(N+M)(R+P) \log_2(N+M)(R+P).$$

Из сравнения с $K_{\text{вр}}$ вытекает условие применимости спектральной формы:

$$NMRP > 12(N+M)(R+P) \log_2(N+M)(R+P).$$

Для частного случая $R = P$, $N = M$ получим более простое условие: $NR > 48 \log_2 NR$. Если $R = 16$, то это неравенство будет выполнено уже при $N > 70$. Аналогичные условия можно привести, когда фильтр с

самого начала задан в спектральной форме. Напомним, что в этих расчетах не учитывается объем вычислений тригонометрических функций.

Эффективным средством ускорения двумерной фильтрации является применение оптических фильтров, основанных на том, что если фотопластинку, на которой изображено фильтруемое поле, поместить на определенном расстоянии перед тонкой собирающей линзой и осветить монохроматическим пучком света, то в фокальной плоскости линзы формируется двумерный спектр поля [фактически линза осуществляет компенсацию множителя P_{fi} в формуле (XIV.30) для дифракции в зоне Фраунгофера]. Помещая в фокальной плоскости транспарант-маску, мы получаем возможность пропускать одни частоты и гасить другие. Изложение теоретических и технических аспектов оптической фильтрации выходит за рамки этой книги. Заинтересованный читатель может обратиться к специальной литературе.

Большая часть рассмотренных в книге задач фильтрации носит скорее модельный, чем практический характер: они позволяют лучше понять факторы, влияющие на выбор преобразования сейсмограмм, но не дают еще конкретных алгоритмов. Ряд отдельных упрощений вызван желанием получить более обозримые, чем при точном решении, результаты. Таким упрощением является, например, использование интегралов Френеля при изучении характеристик интерференционной системы ОГТ. При оценке характеристик ОГТ на практике целесообразно производить расчеты по точным формулам с учетом реальной формы суммируемых сигналов.

Другие упрощения обусловлены недостаточным развитием теории фильтрации. Ограничения теории определяются чаще всего характером предполагаемой информации о полезных сигналах и помехах. Либо о сигнале используются самые минимальные сведения (как это имеет место в задаче высокочастотной фильтрации), либо сигнал предполагается точно известным (обратные фильтры в задаче разрешения волн и в обратной динамической задаче, оптимальные фильтры и др.).

В задаче подавления волн-спутников и реверберации форма сигналов не влияет на выбор фильтра (исключая винеровское решение). Ни та, ни другая ситуация не характерна для практики, так как в распоряжении исследователя всегда имеются (либо он их может получить в результате изучения сейсмограмм) определенные, хотя и неполные сведения о форме сигналов. Такие сведения могут быть также обусловлены решением соответствующих динамических задач распространения волн и постановкой специальных экспериментов.

Статистический подход к задачам фильтрации, основанный на характеристике сигнала как представителя ансамбля возможных (но случайных) траекторий, не всегда является выходом из этого положения.

Во-первых, сейсмический эксперимент не всегда обеспечивает статистическую устойчивость предполагаемых распределений. В частности, может оказаться, что сигнал в разных точках наблюдения вообще не изменяет формы, и тогда использование винеровской фильтрации будет отвечать слишком осторожному подходу к решению задачи, следствием которого будет неполное извлечение информации из эксперимента.

Во-вторых, статистические решения вообще следует привлекать только в тех случаях, когда характеристики фильтра сравнительно мало зависят от выбора энергетических спектров (из некоторого класса спектров), поскольку информация об энергетических спектрах или корреляционных функциях в редких случаях может быть полной. В противном случае нельзя рассчитывать даже на среднюю высокую эффективность фильтра.

В частности, для описания реальных процессов нельзя привлекать корреляционные функции сингулярных (бесконечно-дифференцируемых) процессов, например корреляционные функции колокольного типа, так как для таких процессов теоретически достигается нулевая среднеквадратическая ошибка фильтра. Реальные процессы такими свойствами обладать не могут.

Применение подобных «сверхэффективных» фильтров к процессу с несколько отличными характеристиками приведет к противоположному результату — резкому увеличению ошибок на выходе. Кроме того, подобные фильтры неустойчивы.

Некоторую неудовлетворенность вызывает возможность применения различных критериев оптимальности при решении одних и тех же задач. Теоретик обычно полагает, что критерий либо задан априори, либо может быть выбран в соответствии с характером имеющейся информации о сигналах и помехах. Ни того, ни другого на практике не наблюдается. Априорная информация, как правило, является «сырой» и формируется в соответствии с выбранной постановкой задачи. К счастью, выбор постановки часто мало сказывается на решении. Так, различные подходы к задаче разрешения сигналов (регуляризация среднеквадратического обратного фильтра, оптимальный и винеровский фильтры) дают один и тот же фильтр Кюнетца. В какой-то мере этот факт указывает на то, что полученное решение действительно хорошее.

Развитие теории в задачах фильтрации ожидается (а в ряде случаев уже осуществляется) в следующих направлениях. В области обратной фильтрации: отказ от точного задания оператора, для которого ищется обратный фильтр, и сужение класса сигналов в аппроксимационных постановках (VI.30). В области оптимальной и винеровской фильтраций: отказ от точного описания сигналов и помехи как в детерминированном, так и в теоретико-вероятностном смысле. Последнее означает, что вместо спектральной интенсивности задается класс энергетических спектров. Основные способы решения возникающих задач: 1) построение фильтров, свойства которых инвариантны относительно отсутствующей информации; 2) построение минимаксных фильтров, ориентированных на наименее благоприятную ситуацию; 3) построение адаптивных фильтров, настраиваемых на изучение и учет недостающей информации в процессе обработки. Фильтры последнего типа, как правило, оказываются нелинейными.

Внедрение наиболее эффективных — многоканальных фильтров сдерживается их большой вычислительной сложностью. Поэтому одна из настоящих потребностей состоит в развитии теории, приводящей к построению более экономичных алгоритмов. Такие методы, например, использующие экстремированное представление сейсмограмм, также могут оказаться нелинейными.

Значение теории линейных преобразований состоит в том, что она является отправной точкой как для понимания применяемых в настоящее время алгоритмов одноканальной и многоканальной фильтрации, так и для дальнейшего развития линейных и нелинейных методов обработки сейсмограмм.

Глава I

§ 1. Современное изложение теории линейных систем дается в монографии Л. Заде и Ч. Дезоера [30]. Обширная литература посвящена линейным электрическим цепям [4 и 26], а также линейным оптическим системам [27]. Общие сведения о распространении упругих волн можно найти в монографии И. Снеддона и Д. Берри [58], в учебнике Е. Ф. Саваренского и Д. П. Кириоса [57] и в курсе лекций Е. И. Шемякина [71]. Последний пример известен как задача Шарпа. И. И. Гурвичем [29] было предложено использовать эту задачу в качестве линейной модели взрывного источника. Изложенная здесь идея феноменологического обоснования была указана Б. П. Сибиряковым.

§ 2. На глубокую связь преобразования Фурье с разложением входного сигнала по системе собственных функций стационарного линейного преобразования обратил внимание впервые Н. Винер [14]. Преобразованию Фурье посвящена литература самого различного уровня, начиная от широко известной, выдержавшей несколько изданий небольшой монографии А. А. Харкевича [65], написанной на инженерном уровне строгости, и кончая монографиями Е. Титчмарша [62], Н. Винера [14], Н. Винера и Р. Пейли [15], посвященными различным математическим аспектам теории интеграла Фурье.

Спектральная характеристика отражающего слоя рассматривалась различными авторами, в частности И. И. Гурвичем [28], которым она была построена на основе формулы (1.42). Л. Л. Худзинский [67] предложил использовать периодичность этой характеристики для оценки параметров отражающего слоя.

§ 4. О преобразовании Гильберта см. [62]. Примеры можно найти в таблицах [6]. Задача отражения и преломления плоских волн является классической. Связь этой задачи с преобразованием Гильберта отмечалась Л. Н. Бреховских [11].

Глава II

§ 5. Впервые спектральная формулировка принципа причинности была дана Н. Винером и Р. Пейли. Инженерное изложение этой теории дано В. В. Солодовниковым [59].

§ 6. Связь амплитудной и фазовой характеристик минимально-фазовой системы излагается, следуя Л. Заде и Ч. Дезоеру [30].

§ 7. Краткое, но достаточно полное изложение математической теории распространения волн в линейно-неупругих средах имеется в курсе лекций Е. И. Шемякина [71]. Многочисленные работы посвящены конкретным задачам распространения волн в поглощающих средах [34]. Известны различные и не всегда строгие варианты доказательства дисперсионных соотношений для неидеально-упругих сред (см., в частности, работу Б. Футермана) [83]. В данной книге доказательство основывается на идее, которая использовалась в курсе Л. Ландау и Е. Лифшица [41] для электромагнитных волн.

О методе стационарной фазы см. А. Эрдейи [72] и Д. Вакман [13].

§ 8. Для ознакомления с задачей синтеза электрических цепей читатель отсылается к монографии Н. Балабаняна [7] и другой специальной литературе. Первый универсальный фильтр был предложен в статье Х. Меерхоффа [91]. Второй универсальный сейсмический фильтр был предложен и сконструирован Ф. М. Гольцманом и Ю. Н. Кейльманом [25].

Глава III

§ 9. Формализм теории цифровых фильтров близок, с одной стороны, к теории линейных импульсных систем [69], а с другой, — к теории разностных уравнений [18]. Современное изложение теоремы В. А. Котельникова и смежных вопросов дано в монографии Я. И. Хургина и В. П. Яковлева [68]. Для функций, имеющих не только верхнюю, но и нижнюю граничную частоту, доказывается аналогичная теорема, определяющая еще более экономичную систему отсчетов.

§ 11. Применение z -преобразования при анализе цифровых фильтров стало уже традиционным после ряда работ Э. Робинсона и С. Трейтла [95—98].

§ 12. Изложение основано на работе Д. Шенкса [99].

§ 13. Среди многочисленных трудов, посвященных полосовым фильтрам, отметим работу Х. Хольца и К. Лондеса [85], в которой введены фильтры типа (III.59).

§ 14. Алгоритм быстрого преобразования Фурье был предложен в 1965 году Д. Кулеем и Д. Тьюки [79] и имеет уже обширную библиографию (см. специальный выпуск журнала IEEE Transactions, v, Au — 15).

Глава IV

§ 15. Высокочастотная асимптотика спектра полуфинитного сигнала излагается, следуя А. Эрдейи [72].

§ 16. Лучевой метод построения асимптотического решения уравнений Ламе (IV.10) был разработан А. С. Алексеевым, В. М. Бабичем и Б. Я. Гельчинским [2]. В недавно вышедшей монографии В. М. Бабича и В. С. Булдырева [5] излагается современное состояние теории асимптотических (при $\omega \rightarrow \infty$) решений уравнений гиперболического типа.

§ 17 и 18. Излагаемая здесь теория высокочастотной фильтрации предложена С. А. Кацем [31].

Глава V

§ 19. Как указывается в тексте, обратные фильтры впервые изучались в связи с задачами теории связи и радиофизики [68].

§ 20. Падение плоской волны на горизонтально-слоистую среду рассматривалось Л. Н. Бреховских [41] и др. В работе Э. Робинсона и К. Трейтла [98] выявляется связь спектральных характеристик типа (V.22) с характеристиками дискретных фильтров, в связи с чем предлагается использовать для анализа волновых явлений z -преобразования.

Обращение разностной схемы В. Баранова и Ж. Кюнэтца [8] было сделано Э. В. Никольским и А. С. Алексеевым [4]. Устойчивость обращения разностной схемы подробно анализировалась в работе Н. Г. Михайловой и Б. С. Парийского [45]. Роль обратной фильтрации в других постановках обратной задачи обсуждается в работе А. С. Алексеева [4].

§ 21. Формула (V.45) приводилась в работе Э. В. Никольского [52]. Аналогичная формула с учетом геометрического расхождения приводится впервые.

§ 22. Строгий вывод формул типа (V.55) см. в [71]. Слоистые поглощающие среды рассматривались также Д. Шервудом и А. Трори [100].

§ 23. Обратные фильтры для подавления ревербераций были предложены М. М. Бэкусом [77] еще в конце 50-х годов. Применение фильтров с целью устранения волны-спутника см. в работе Д. Линдея [88].

Глава VI

§ 24. Изложение, близкое к Я. И. Хургину и В. П. Яковлеву [68].

§ 25. Условия устойчивости обратных фильтров формулировались в работах различных авторов [36, 97].

§ 27. Среднеквадратический обратный фильтр впервые рассматривался Р. Райсом [94]. Им же было предложено аппроксимировать «сдвинутую» единицу. Более подробно о таких фильтрах см. в работе И. К. Кондратьева [38]. Асимптотическое исследование дано впервые.

§ 28. О методе регуляризации см. работы А. Н. Тихонова [63, 64] и др. Различные способы регуляризации уравнений типа свертки предлагались В. Н. Страховым [60]. Формула (VI. 48) выражает спектральную характеристику фильтра Г. Кюнэтца [87].

Глава VII

§ 29. Строгое, но очень ясное изложение теории стационарных случайных процессов дано в статье А. М. Яглома [73]. Инженерам можно рекомендовать курс Б. Р. Левина [42]. Современное состояние теории см. в монографии Ю. А. Розанова [56].

§ 30. См. [12]. Критерий оптимальности в конце параграфа детально рассматривался А. К. Яновским [75].

§ 32. Строгий вывод формулы (VII.55), носящий имя Кембелла, см. в работе А. К. Яновского [74]. Фильтр (VII.55) давно известен в статической теории радиосвязи [66].

Глава VIII

§ 34. Фильтрам Винерова типа посвящена обширная литература. Достаточно полное изложение см. в работе [12].

§ 35. Близкий подход к построению обратных фильтров предлагался Е. А. Козловым [35].

§ 36. См. работу И. С. Чичинаина [70].

§ 37. См. [12].

Глава IX

§ 38. Группированию сейсмоприемников посвящено большое число работ. Наиболее полное изложение теории интерференционных систем см. в монографии Ф. М. Гольцмана [24]. Следует также отметить работу Ю. В. Напалкова [46], в которой задача синтеза группы рассматривается на основе аппроксимации заданной обобщенной характеристики конечным рядом Фурье. Комбинированные группы приемников и источников рассматривались С. А. Кацем [32].

§ 39. Методы синтеза групп на основе формулы (IX.33), связывающей обобщенные характеристики непрерывных и дискретных групп, разрабатывались Ф. М. Гольцманом. Следует отметить, что им не выяснились условия применимости этих формул (см. на стр. 231). Возможность применения развитой Дойлем теории расчета антенны на основе полиномов Чебышева практически одновременно была указана Л. В. Петровым [54] и М. Хольцманом [84]. В работе Л. В. Петрова подробно анализируется распределение чувствительности чебышевских групп. О полиномах Чебышева см. [3].

§ 40. Близкие к рассматриваемым здесь энергетические характеристики действия группы предлагались Б. И. Беспятовым [9].

§ 41. Подробнее о методе РНП см. работы Л. А. Рябинкина и его сотрудников в сборнике [16].

§ 42. Метод суммирования по общей глубинной точке был предложен американским геофизиком Н. Мэйном [89]. Среди советских геофизиков, много сделавших для развития этого метода, следует отметить В. И. Мешбея [44].

§ 43. Подробнее см. в [61]. О формулах С. Л. Соболева см. в известном курсе В. И. Смирнова (т. 4).

Глава X

§ 44. Статистический эффект суммирования изучался в работах Ф. М. Гольцмана [24], С. А. Нахамкина [47] и С. В. Гольдина [19].

§ 45. Излагаются результаты С. В. Гольдина и Т. В. Нефёдкиной [22].

§ 46. Влияние флуктуаций рассматривалось в ряде работ, данные которых частично перекрываются [19, 33, 43, 47, 53]. Во всех работах допустимый разброс времен прихода сигналов составляет менее $1/5$ видимого периода.

§ 47. Более подробно см. работы [21 и 23].

Глава XI

§ 48. Вопросы общей теории многоканальной фильтрации излагались в работах Э. Робинсона [95], С. Трейтела [102], Р. Виггинса и Т. Робинсона [104] и др.

§ 50. См. также У. А. Шнейдер, К. Л. Лэрнер и др. [76].

Глава XII

§ 52. Пример III и многоканальный фильтр (XII.13) были построены С. А. Нахамкиным и [48 и 50]. Им же был предложен метод вычитаний, являющийся частным случаем алгоритма (XII.13) [49].

§ 53. По существу, при выводе формулы (XII.27) мы показали, что многоканальный фильтр С. А. Нахамкина [50] легко обобщается на случай волн-помех с произвольными годографами.

§ 54. Винеровские многоканальные фильтры рассматривались в работах Д. Бурга [78], Х. Мейерхоффа [92] и др. В [104] дано обобщение метода Левинсона (см. § 27 и 37), позволяющее сравнительно быстро отыскивать коэффициенты винеровских многоканальных фильтров.

Глава XIII

§ 55. Более полный вывод волны Релея см. у И. Н. Снеддон и Д. С. Берри [58]. Нелинейный поляризованный фильтр был предложен М. Шимшони и С. Смитом [101].

§ 56. См. статью Э. Меркадо [90]. Здесь рассматривается эквивалентный двухканальный фильтр, значительно более экономичный.

§ 57. Более полная постановка задачи рассматривалась Т. Поттером и Р. Родемом [93]. В их работе предполагается, что угол α подхода релейской волны имеет равномерное распределение в интервале $(-\pi, \pi)$. Кроме того, ими рассматриваются кольцевые расстановки приемников.

Глава XIV

§ 60. Веерная фильтрация была предложена практически одновременно П. Эмбри, Д. Бургом, М. Бэкусом [80] и Т. Файлом, Г. Грау [81]. Сведение веерного фильтра к последовательности суммирований и одномерной фильтрации было сделано С. Трейтелом, Д. Шенксом и К. Фрейзером [103]. И. К. Кондратьев [39] рассмотрел особенности веерного фильтра на конечных базах. Связь с РНП см. в работе [51].

1. Алексеев А. С. Обратные динамические задачи сейсмологии. — В кн.: Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М., «Наука», 1967.
2. Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельчинский Б. Я. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. 5. Л., изд. ЛГУ, 1961.
3. Анго А. Математика для электро- и радиотехников. М., «Наука», 1967.
4. Атабеков Г. И. Теория линейных электрических цепей. М., «Советское радио», 1960.
5. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Л., «Наука», 1972.
6. Байтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2, Справочная библиотека математика. М., «Наука», 1970.
7. Балабанян Н. Синтез электрических цепей. М., Госэнергоиздат, 1961.
8. Баранов В., Кюнетц Ж. Синтетические сейсмограммы с многократными отражениями. — В кн.: Проблемы сейсмической разведки. М., Гостоптехиздат, 1962.
9. Беспалов Б. И. Некоторые вопросы теории группирования в сейсморазведке. — В кн.: Прикладная геофизика, вып. 25. М., Гостоптехиздат, 1960.
10. Боде Г., Шеннон К. Упрощенное изложение линейной минимально-квадратической теории сглаживания и предсказания. — В кн.: Теория информации и ее приложения. М., Физматгиз, 1959.
11. Бреховских Л. Н. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
12. Вайнштейн Л. А., Зубаков В. Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. М., «Советское радио», 1960.
13. Вакман Д. Е. Асимптотические методы в линейной радиотехнике. М., «Советское радио», 1962.
14. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его применения. М., Физматгиз, 1963.
15. Винер Н., Пэйли Р. Преобразование Фурье в комплексной области. М., «Наука», 1964.
16. Вопросы регулируемого направленного приема сейсмических волн. — «Труды Моск. ин-та нефтехим. и газовой пром-сти им. Губкина», вып. 18. М., Гостоптехиздат, 1957. Авт.: Л. А. Рябинкин Ю. В. Напалков и др.
17. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1967.
18. Гельфонд О. К. Исчисление разностей. М., Физматгиз, 1959.
19. Гольдин С. В. Вероятность ложных разрастаний амплитуд и ложных осей синфазности. — «Геология и геофизика», 1965, № 11.
20. Гольдин С. В. Статистическая связь волнового поля с сейсмическими характеристиками непрерывных сред при нормальном падении. — В кн.: Прикладная геофизика, вып. 57. М., «Недра», 1969.
21. Гольдин С. В. К расчету оптимальных подавляющих групп сейсмореприемников при наличии поверхностных неоднородностей. — В кн.: Геофизический сборник, вып. 25. М., «Недра», 1971 (Труды Западно-Сибирского науч.-исслед. нефтяного геол.-разв. ин-та).
22. Гольдин С. В., Нефедкина Т. В. Группирование и РНП как часть оптимального приемного устройства при подавлении коррелированных помех. — В кн.: Методика сейсморазведки. М., «Наука», 1965.

23. Гольдин С. В., Нефедкина Т. В. Выбор оптимальных параметров группирования в случае поверхностных неоднородностей. — В кн.: Методика рудной сейсморазведки. Новосибирск, «Наука», Сибирское отд., 1968.

24. Гольцман Ф. М. Основы теории интерференционного приема сейсмических волн. М., «Наука», 1964.

25. Гольцман Ф. М., Кейльман Ю. Н. Универсальный фильтр сейсмических сигналов. — В кн.: Прикладная геофизика, вып. 25, М., Гостоптехиздат, 1960.

26. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М., «Советское радио», 1967.

27. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. М., «Мир», 1970.

28. Гурвич И. И. Анализ отражений от тонких пластов. — В кн.: Прикладная геофизика, вып. 15, М., Гостоптехиздат, 1956.

29. Гурвич И. И. К теории сферического излучателя сейсмических волн. — «Изв. АН СССР, Физика Земли», 1965, № 11.

30. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем. М., «Наука», 1970.

31. Кац С. А. Разрешающая способность высокочастотной сейсмики. — «Изв. АН СССР, Физика Земли», 1966, № 3.

32. Кац С. А. Принцип эквивалентности интерференционных систем. — «Изв. АН СССР, сер. геофиз.», 1961, № 11.

33. Кац С. А., Кун В. В. Некоторые свойства оценок спектров волн, искаженных аддитивными и мультипликативными помехами. — В кн.: Интерпретация и обнаружение сейсмических волн в неоднородных средах. М., «Наука», 1971.

34. Коган С. Я. Краткий обзор теории поглощения сейсмических волн. I и II — «Изв. АН СССР, Физика Земли», 1966, № 11.

35. Козлов Е. А. Об обратной фильтрации записей МОВ. В кн.: Прикладная геофизика, вып. 51, М., «Недра», 1967.

36. Кондратьев И. К. Корректность и помехоустойчивость способов цифровой обратной фильтрации сейсмических трасс. — В кн.: Прикладная геофизика, вып. 50, М., «Недра», 1967.

37. Кондратьев И. К. Корректность задачи обратной фильтрации. — «Изв. АН СССР, Физика Земли», 1968, № 8.

38. Кондратьев И. К. Оценка степени повышения разрешающей способности сейсмических записей способом обратной фильтрации. — В кн.: Прикладная геофизика, вып. 57, М., «Недра», 1969.

39. Кондратьев И. К. К теории веерной фильтрации. — В кн.: Прикладная геофизика, вып. 64, М., «Недра», 1971.

40. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.

41. Ландау Л., Лифшиц Е. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехтеоретиздат, 1957.

42. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Т. 1. М., «Советское радио», 1966.

43. Лукашин Ю. П. Оценка влияния случайных временных сдвигов между сейсмическими сигналами на эффективность группирования. — В кн.: Прикладная геофизика, вып. 37, М., Гостоптехиздат, 1963.

44. Мешбей В. И. Элементы теории накопления регулярных сейсмических волн, зарегистрированных по системе многократного прослеживания. — В кн.: Прикладная геофизика, вып. 51, М., «Недра», 1968.

45. Михайлова Н. Г., Парийский Б. С. Обратная задача для волнового уравнения при поверхностном источнике. — В кн.: Вычислительная сейсмология, вып. 4, М., «Наука», 1968.

46. Напалков Ю. В. О теории группирования сейсмоприемников. — В кн.: Прикладная геофизика, вып. 27, М., Гостоптехиздат, 1960.

47. Нахамкин С. А. Статистические оценки допустимых погрешностей в аппаратуре и экспериментах РНП. — В кн.: Прикладная геофизика, вып. 31, М., Гостоптехиздат, 1961.

48. Нахамкин С. А. Спектральный способ построения оптимальных алгоритмов многоканального приема сейсмических волн на фоне коррелированных

помех. — В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, вып. VII. М.—Л., «Наука», 1966.

49. Нахамкин С. А. Математические алгоритмы вычитания регулярных помех при разделении сейсмических волн. — «Изв. АН СССР, Физика Земли», 1966, № 12.

50. Нахамкин С. А. Оптимальный алгоритм выделения сейсмических волн на фоне регулярных волн-помех. — «Изв. АН СССР, Физика Земли», 1966, № 5.

51. Нахамкин С. А. О веерной фильтрации. — «Изв. АН СССР, Физика Земли», 1969, № 11.

52. Никольский Э. В. О решении прямых и обратных задач сейсмики для одномерной неоднородной среды при нормальном падении плоской волны. — В кн.: Методика сейсморазведки. М., «Наука», 1965.

53. Петров Л. В. Значение идентичности условий приема при группировании. — В кн.: Прикладная геофизика, вып. 32. М., Гостехиздат, 1962.

54. Петров Л. В. Значение полиномов Чебышева для расчета группирования в сейсморазведке. — «Изв. АН СССР, сер. геофиз.», 1963, № 5.

55. Раппопорт М. Б. Автоматическая обработка сейсмических записей. М., «Недра», 1973.

56. Розанов Ю. А. Стационарные случайные процессы. М., Физматгиз, 1963.

57. Саваренский Е. Ф., Кирнос Д. П. Элементы сейсмологии и сейсмометрии. М., Гостехиздат, 1955.

58. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1961.

59. Солодовников В. В. [Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.

60. Страхов В. Н. О решении некоторых задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свертки I и II. — «Изв. АН СССР, Физика Земли», 1967, № 4 и 5.

61. Тимошин Д. В. Основы дифракционного преобразования сейсмических записей. М., «Недра», 1972.

62. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М., Гостехтеоретиздат, 1948.

63. Тихонов А. Н. О некоторых задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения. — «Докл. АН СССР», т. 163, № 3, 1965.

64. Тихонов А. Н. О некорректно поставленных задачах. — В кн.: Вычислительные методы, вып. 8. М., изд. МГУ, 1967.

65. Харкевич А. А. Спектры и анализ. М., Гостехтеоретиздат, 1957.

66. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

67. Худзинский Л. Л. Об определении некоторых параметров слоев промежуточной мощности по спектрам отраженных волн. — «Изв. АН СССР, сер. геофиз.», 1961, № 5.

68. Хургин Я. И., Яковлев В. П. Финитные функции в физике и технике. М., «Наука», 1971.

69. Цыпкин А. Я. Теория импульсных систем. М., Физматгиз, 1958.

70. Чичинин И. С. Вопросы теории сейсмического вибророндирования. — В кн.: Методика сейсморазведки. М., «Наука», 1965.

71. Шемякин Е. И. Динамические задачи теории упругости и пластичности. Изд. Новосибирского гос. ун-та (ротاپринт), 1968.

72. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М., Физматгиз, 1962.

73. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. — «Успехи математических наук», 1952, № 5.

74. Яновский А. К. О статистической модели сейсмограммы и задаче фильтрации. — «Изв. АН СССР, Физика Земли», 1967, № 6.

75. Яновский А. К. Критерий оптимальности фильтрации случайных процессов применительно к задачам сейсморазведки. — «Изв. АН СССР, Физика Земли», 1968, № 6.

76. A new data-processing technique for the elimination of ghost arrivals on reflection seismograms. — «Geophysics», v. 29, 1964, p. 783. Aut.: W. Schneider, K. Lerner, J. Burg, M. Backus.

77. Backus M. M. Water reverberations — their nature and elimination. — «Geophysics», v. 24, No 2, 1959, p. 233.
78. Burg J. P. Three — dimensional filtering with an array of seismometers. — «Geophysics», v. 29, No 5, 1964, p. 693—713.
79. Cooley J. W., Tukey J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. — «Math. of Computation», v. 19, No 90, 1965.
80. Embree P., Burg J., Backus M. Wide-band velocity filtering — the pie-slice process. — «Geophysics», v. 28, No 6, 1963.
81. Fail T., Grau G. Lis filters en vential. — «Geoph. Prospecting», 1963, No 2.
82. Fitton J. C., Dobrin M. B. Optical processing and interpretation. «Geophysics», v. 32, No 2, 1967.
83. Futterman B. Dispersive body waves. — «Journ. Geoph. Res.», v. 67, No 13, 1962.
84. Holzman M. Chebyshev optimized geophone arrays. — «Geophysics», v. 28, No 2, 1963.
85. Holtz H., Londes C. Synthesis of the recursive digital filters. — «Journ. of Association of Computer machines», v. XIII, No 2, 1966.
86. Jackson Ph. Sectional correlograms and convolutions by a simple optical method. — «Geophysics», v. 33, No 5, 1968.
87. Kunetz G. Essai d'analyse des traces sismiquess. — «Geoph. Prospecting», v. 9, No 3, 1961.
88. Lindsey J. P. Elimination of seismic ghost reflection by means of linear filters. — «Geophysics», v. 25, No 2, 1960, p. 130.
89. Mayne N. H. Common reflection point horisontal data stacking techniques. — «Geophysics», v. 27, No 6, part 2, 1962.
90. Mercado E. J. Linear filtering of multicomponent seismic data. — «Geophysics», v. 33, No 6, 1968.
91. Meyerhoff H. I. A self-adjusting filter for shallow seismic exploration. — «Geophysics», v. 31, No 2, 1966.
92. Meyerhoff H. H. Horizontal stacking and multichannel filtering applied to CDP seismic data. — «Geoph. Prospecting», v. 14, 1966, p. 441.
93. Potter T. F., Roden R. B. Seismic noise elimination using horisontal components. — «Geophysics», v. 32, No 4, 1967.
94. Rice R. B. The inverse convolution filters. — «Geophysics», v. 27, No 1, 1962, p. 4.
95. Robinson E. Multichannel Z-transformation and minimum delay. — «Geophysics», v. 31, No 3, 1966, p. 482.
96. Robinson E., Treitel S. Principles of digital filtering. — «Geophysics», v. 29, No 3, 1964, pp. 395—404.
97. Robinson E., Treitel S. Stability of digital filters. IEEE Trans. on Geoscience Electronics, GE-2, 1964, pp. 6—8.
98. Robinson E., Treitel S. Seismic wave propagation in layered media in terms of communicated theory. — «Geophysics», v. 31, No 1, 1966.
99. Shanks J. Recursion filters for digital processing. — «Geophysics», v. 32, No 1, 1967, p. 33.
100. Sherwood J., Trorey A. Minimum phase and related properties of the response of a horisontally stratified absorptive earth to phone acoustic waves. — «Geophysics», v. 30, No 2, 1965, p. 191.
101. Shimshony M., Smith S. Seismic signal enhancement with three-component detectors. — «Geophysics», v. 29, No 5, 1964.
102. Treitel S. Principles of digital multichannel filtering. — «Geophysics», v. 35, No 5, 1970.
103. Treitel S., Shanks J., Fraiser C. Some aspects of fan filtering. — «Geophysics», v. 32, No 5, 1967.
104. Wiggins R. A., Robinson T. A. Recursive solution of the multichannel filtering problem. — «J. Geoph. Res.», v. 70, 1965, p. 1885.

Предисловие	3
-------------	---

Р а з д е л п е р в ы й

Общие вопросы теории линейных преобразований

<i>Глава I.</i> Линейные системы	6
§ 1. Определение и примеры линейных систем	6
§ 2. Спектральная характеристика стационарной линейной системы	14
§ 3. Линейные системы с дробно-рациональными спектральными характеристиками	22
§ 4. Преобразование Гильберта и физический смысл комплексных коэффициентов отражения — преломления	27
<i>Глава II.</i> Физическая осуществимость линейных преобразований	35
§ 5. Условия физической осуществимости	35
§ 6. Минимально-фазовые системы	42
§ 7. Дисперсионные соотношения в линейно-неупругих средах	47
§ 8. О реализации линейных преобразований в классе электрических цепей	56
<i>Глава III.</i> Цифровые фильтры и вопросы их реализации	58
§ 9. Спектральные характеристики дискретных линейных систем	58
§ 10. Реализация непрерывных линейных преобразований при помощи цифровых фильтров	62
§ 11. Условия осуществимости и аппроксимация цифровых фильтров	69
§ 12. Рекурсивные фильтры	76
§ 13. К расчету полосовых фильтров. Нуль-фазовые и минимально-фазовые цифровые фильтры	80
§ 14. Реализация линейных преобразований в спектральной форме	88

Р а з д е л в т о р о й

Одноканальные фильтрации

<i>Глава IV.</i> Основы высокочастотной сейсмики	94
§ 15. Асимптотическое представление спектра на высоких частотах	94
§ 16. Лучевое разложение волнового поля	97
§ 17. Свободные и вынужденные колебания на выходе высокочастотного фильтра	104
§ 18. Разрешающая способность высокочастотного фильтра	109
<i>Глава V.</i> Обратная фильтрация в задачах сейсморазведки	113
§ 19. Обратные фильтры в задаче разрешения волн	113
§ 20. Обратные фильтры и обратная динамическая задача для вертикально-неоднородных сред	116
§ 21. Импульсная характеристика вертикально-неоднородной среды без учета кратных волн	126

22.	Обратная динамическая задача для линейно-неупругой вертикально-неоднородной среды	133
§ 23.	Подавление ревербераций и волны-спутника	135
<i>Глава VI.</i>	<i>Осуществимость и реализация обратных фильтров</i>	<i>143</i>
§ 24.	Вопросы корректности в задаче обратной фильтрации	143
§ 25.	Осуществимость операторов обратной фильтрации	148
§ 26.	Реализация обратных операторов рекурсивными фильтрами	155
§ 27.	Аппроксимация обратных фильтров	161
§ 28.	Регуляризация операторов обратной фильтрации	170
<i>Глава VII.</i>	<i>Выделение сейсмического сигнала известной формы на фоне случайных помех</i>	<i>172</i>
§ 29.	Корреляционная функция и энергетический спектр случайного процесса	172
§ 30.	Оптимальная фильтрация при обнаружении детерминированного сигнала	180
§ 31.	Реализация оптимальных фильтров	185
§ 32.	Оптимальный разрешающий фильтр	190
§ 33.	Об оценке формы сигнала в задаче разрешения сейсмических волн	193
<i>Глава VIII.</i>	<i>Оптимальные фильтры Винера</i>	<i>200</i>
§ 34.	Определение фильтров Винера	200
§ 35.	Обратные фильтры винеровского типа	204
§ 36.	Построение импульсной сейсмограммы в методе «Впбросейс»	207
§ 37.	Дискретные фильтры Винера	211

Р а з д е л т р е т и й

Пространственный прием сейсмических волн

<i>Глава IX.</i>	<i>Элементы теории интерференционных систем</i>	<i>217</i>
§ 38.	Обобщенная характеристика интерференционной системы	217
§ 39.	Синтез нерегулируемых интерференционных систем при минимальных сведениях о параметрах плоских волн	225
§ 40.	Оптимальные группы	233
§ 41.	Разрешающая способность и синтез регулируемых интерференционных систем при разделении плоских волн	237
§ 42.	Суммирование по методу общей глубинной точки	239
§ 43.	Д-преобразование	246
<i>Глава X.</i>	<i>Статистический анализ интерференционных систем</i>	<i>252</i>
§ 44.	Статистический эффект интерференционных систем	252
§ 45.	Оптимальные группы при подавлении случайных помех	256
§ 46.	Влияние случайных флуктуаций параметров плоской волны на характеристику интерференционной системы	259
§ 47.	Оптимальные группы приемников при выделении флуктуирующих сигналов на фоне случайных помех	265
<i>Глава XI.</i>	<i>Многоканальная фильтрация</i>	<i>272</i>
§ 48.	Основные понятия многоканальной фильтрации	272
§ 49.	Дискретные многоканальные фильтры	276
§ 50.	Двухканальный фильтр для подавления волны-спутника	278
§ 51.	Многоканальные фильтры при разделении плоских волн	283
<i>Глава XII.</i>	<i>Многоканальные фильтры при подавлении случайных помех</i>	<i>287</i>
§ 52.	Оптимальный векторный фильтр при выделении детерминированного сигнала	287

§ 53. Выделение отраженной волны на фоне других однократных и двукратных отраженных волн	293
§ 54. Винеровские многоканальные фильтры и их применение	296
<i>Глава XIII. Многокомпонентные фильтры</i>	301
§ 55. Многокомпонентные измерения при разделении волн с поляризацией различных типов	301
§ 56. Линейный поляризационный фильтр	306
§ 57. Трехкомпонентный поляризационный фильтр винеровского типа	309
<i>Глава XIV. Пространственно-временные фильтрации</i>	312
§ 58. Линейные преобразования, стационарные по пространственным переменным	312
§ 59. Многомерное преобразование Фурье	316
§ 60. Спектральные характеристики пространственно-временных фильтров	323
§ 61. Веерная фильтрация	328
§ 62. Пространственно-временные фильтры при подавлении случайных помех	334
§ 63. Реализация пространственно-временных фильтров в спектральной форме	336
Заключение	339
Библиографический комментарий	341
Список литературы	345

СЕРГЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ГОЛЬДИН

**Линейные преобразования
сейсмических сигналов**

Редактор издательства В. Н. Никитина
Художник А. Д. Смеляков
Художественный редактор А. Я. Гладышев
Технический редактор О. Ю. Трепенко
Корректор Л. В. Сметанина

Сдано в набор 25/1 1974 г.
Подписано в печать 27/V 1974 г. Т-10142.
Формат 70 × 90^{1/16}. Бумага № 1. Печ. л. 22,0.
Усл. п. л. 25,74. Уч.-изд. л. 23,86.
Тираж 2400 экз. Заказ № 811/5171—3.
Цена 2 р. 78 к.

Издательство «Недра», 103633,
Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19.
Ленинградская типография № 6
«Союзполиграфпрома»
при Государственном Комитете
Совета Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
196006, г. Ленинград, Московский пр., 91.