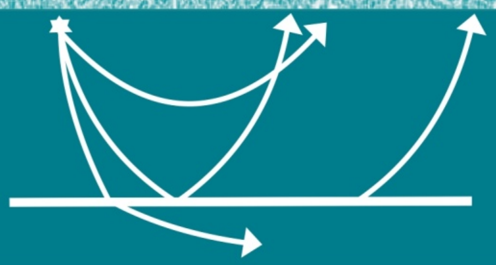
С. В. Гольдин

Введение в геометрическую сейсмику



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ НЕФТЕГАЗОВОЙ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ ИМ. А.А. ТРОФИМУКА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

С. В. Гольдин

ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ СЕЙСМИКУ

Учебное пособие

2-е издание, исправленное

Новосибирск
ИНГГ СО РАН
2016

ББК 26.21
УДК 550.834.018 (075.4)
Г631

Гольдин, С.В. Введение в геометрическую сейсмику: Учеб. пособие / С.В. Гольдин; Рос. Акад. Наук, Сиб.отд-ние, Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука. – Новосибирск: ИНГГ СО РАН, 2016. – 2-е изд., испр. – 203 с. – ISBN 978-5-4262-0068-5.

Геометрическая сейсмика – это обширная область теории распространения сейсмических волн, в которой широко используются такие фундаментальные геометрические понятия, как лучи и фронты. Строго говоря, оба объекта идеальны по своей природе. Они привнесены человеческим сознанием в целях интерпретации явлений, наблюдаемых при распространении колебаний различной физической природы: электромагнитных, звуковых и упругих. Поэтому в точности они описывают распространение идеальных объектов. Широко распространена интерпретация геометрических законов распространения волн с позиции высокочастотной асимптотики решений волновых уравнений.

В данном пособии принята несколько иная, хотя математически эквивалентная, интерпретация, в которой лучи и фронты связываются с распространением разрывов (скачков производных) решений уравнений гиперболического типа. Исторически сложились различные подходы как к обоснованию геометрических законов распространения волн, так и к способам их развития. Автор поставил перед собой задачу охватить практически все использовавшиеся подходы и показать их взаимоотношение. В частности, лучи рассматриваются и в рамках гамильтонова формализма, и как следствие принципа Ферма, и как геодезические метрических пространств. Большое место уделено исследованию аналитических решений системы уравнений луча для моделей сред, которые уже находят или могут найти широкое практическое применение.

Настоящее пособие ориентировано на магистрантов-геофизиков университетов, но может служить источником информации и для более широкого круга студентов и специалистов, интересующихся теорией распространения волн.

Рецензенты
чл.-кор. РАН Б. Г. Михайленко
д-р физ.-мат. наук К. Д. Клем-Мусатов

Допущено УМО в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальности 011200 «Геофизика» и 080400 «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых»

ISBN 978-5-4262-0068-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ **4**

Глава 1. ВОЛНЫ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ **6**

§ 1. Разрывы и характеристические многообразия решений скалярных волновых уравнений 6

§ 2. Уравнение эйконала 11

§ 3. Уравнение эйконала для электромагнитных и упругих сред 25

§ 4. Волны в некоторых неклассических линейных моделях 42

Глава 2. ЛУЧИ И ПОЛЯ ВРЕМЕН В ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ **50**

§ 5. Уравнения Гамильтона и бихарактеристики. Лучи 50

§ 6. Лучи и поля времен в изотропной среде 62

§ 7. Задача Коши для уравнения эйконала (изотропные среды) 69

§ 8. Изотропные среды с границами 82

§ 9. Лучи в анизотропных средах 91

§ 10. Связь лучевой индикатрисы и поверхности рефракции 100

§ 11. Условия на границе анизотропных сред 116

Глава 3. ПРИНЦИП ФЕРМА **124**

§ 12. Лучи как стационарные траектории функционала Ферма 125

§ 13. Принцип композиции 130

§ 14. Связь вариационного исчисления и гамильтонова формализма 138

§ 15. Вторая вариация функционала Ферма 142

Глава 4. ЛУЧИ КАК ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА **148**

§ 16. Элементы римановой геометрии 148

§ 17. Параллельный перенос объектов риманова пространства 160

§ 18. Геометрия на сфере и эллипсоиде 167

§ 19. Тензор кривизны и вторая вариация функционала Ферма 175

§ 20. Лучи – геодезические финслерова пространства 185

Библиографический список общей литературы **201**

Библиографический список цитированной литературы **202**

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу настоящего учебного пособия положена первая часть годового курса лекций по геометрической сейсмике, который на протяжении 10 последних лет читается автором студентам-магистрантам геофизической специальности Новосибирского государственного университета. Эта часть охватывает те разделы сейсмики, которые часто характеризуют кратким (но не совсем точным) термином – *кинематика*. Во второй части курса читается геометрия лучей и фронтов, лучевой метод (имеется в виду его динамический аспект), а также теория сейсмической миграции. Уже отсюда можно судить, что предлагаемое издание является частью более обширного замысла (или, как сейчас принято говорить, проекта) – охватить все области современной сейсмологии и современной сейсморазведки, в которых применяются подходы, связанные с идеями геометрической сейсмики. Это означает, в частности, включение обратных кинематических задач и методов лучевой сейсмической томографии, а также те разделы сейсмической волновой томографии, которые принято относить к теории миграционных преобразований сейсмограмм (к сейсмовидению). В какой степени автору удастся выполнить данный проект – покажет будущее.

В первой главе изложен вывод уравнений эйконала из динамических уравнений упругости. Параллельно показана справедливость этих уравнений в случае электромагнитных и акустических колебаний. Дан вывод уравнений Кристоффеля в случае анизотропии упругой среды. Намеренно сделано отступление от современной традиции связывать уравнение эйконала исключительно с высокочастотной асимптотикой решений волновых уравнений. Скорее, автор опирается на классическую традицию, связанную с именами Кристоффеля и Адамара, – рассматривает уравнение эйконала как уравнение распространяющихся разрывов, или, что одно и то же, как характеристическое уравнение соответствующего волнового уравнения. Разрыв волнового поля в теории волн – полный эквивалент материальной точки в классической механике. Это – идеальный объект, который перемещается (распространяется) в строгом соответствии с геометрическими законами.

Следует помнить, что геометрические законы распространения волн были получены гораздо раньше, чем стали известными «динамические» волновые уравнения, описывающие колебания в сплошных средах. Основой для вывода геометрических законов были такие великие принципы, как принцип Ферма и принцип Гюйгенса. Но сами эти принципы далеко не очевидны. Было интересно найти более простое предположение, достаточное для построения всей, чисто геометрической теории распространения волн. Такое предположение, названное нами принципом локальности, удалось построить. Принцип локальности сформулирован в конце второго параграфа.

Во второй главе рассмотрены уравнения лучей в рамках гамильтонова формализма. Был большой соблазн изложить гамильтонов формализм сразу для изотропной среды, обращаясь к изотропии, как к простейшему примеру. Это позволило бы сэкономить немало места. Однако, на наш взгляд, сложными понятиями нужно овладевать, начиная с простых. За сложные же нужно браться во всеоружии. Поэтому уравнения лучей в анизотропной среде, связь индикатрис фазовой и лучевой скоростей, условия на границе двух анизотропных сред обсуждаются после изучения изотропного случая.

Третья глава посвящена применению лагранжева формализма, частным выражением которого является принцип Ферма. Строго говоря, все необходимые следствия можно извлечь и в рамках гамильтонова формализма. И тот, и другой подход (при определенных, но достаточно широких условиях) эквивалентны. Однако лагранжев формализм не только позволяет проще решать определенные классы задач, но и дает более углубленное понимание такого фундаментального понятия, как луч. Еще одно видение понятия «луч» формируется в рамках формализма римановой геометрии (гл. 4). Здесь показывается, что понятия прямой линии и параллелизма (параллельного переноса) зависят от используемой метрики и что луч – это прямая линия в метрике, определяемой временными интервалами между близкими точками. В сущности, риманова геометрия охватывает только изотропные и эллиптически-анизотропные среды. Примеров эллиптической анизотропии в упругости совсем немного, а изотропные среды можно изучать и без обращения к технике римановой геометрии. Однако, по нашему мнению, высокообразованный специалист обязан хорошо понимать место и возможности тех или иных подходов, поэтому автор счел необходимым поместить и этот раздел в данное пособие. Более принципиальным шагом является включение элементов финслеровой геометрии, охватывающей гораздо более широкий круг анизотропных сред. К сожалению, связь финслеровой геометрии с сейсмической анизотропией мало разработана. Тем не менее, один из полученных там результатов активно здесь используется при описании геометрии поверхностей рефракции и волновых поверхностей.

Читателя может удивить, что в курсе не нашлось места для изложения принципа Гюйгенса. Но, как оказалось, принцип Гюйгенса играет огромную роль в обосновании многих миграционных методов. Современное понимание этого принципа (в рамках контактной геометрии) будет изложено в издании, посвященном сейсмовидению.

Рассмотренные в настоящем издании теоретические проблемы относятся не только к геометрической сейсмике. Строго говоря, в своей фундаментальной части формализм геометрической оптики и геометрической акустики обязан совпадать с формализмом геометрической сейсмики. Но благодаря приложениям круг задач, решаемых во всех этих геометрических теориях, оказывается различным, что не могло не оказать влияния и на фундаментальные части теории. Наиболее ярким примером является понятие двухточечного эйконала. Именно в сейсморазведке, в которой используются плотные системы наблюдений при одинаково плотном размещении источников и приемников, это понятие (как и производные этого понятия) играет фундаментальную роль. Именно поэтому специалисты по оптике и акустике могут найти в пособии новые для себя задачи и увидеть возможности каких-то новых приложений.

При работе над пособием неоценимую помощь оказала автору его многолетняя помощница Л. Г. Киселева. Большое ей спасибо! Автор не может не вспомнить своих коллег и учеников: Р. М. Бембеля, В. С. Черняка, С. А. Гриценко, Э. А. Бляса, Т. В. Курдюкову, Д. И. Судварга, А. Ф. Глебова, В. Г. Пашкова, с которыми в 70-е и 80-е гг. минувшего столетия работал над методами кинематической интерпретации данных сейсморазведки.

Книга была подготовлена при частичной поддержке Минобразования РФ (гранты УР. 09.01.020 и Е02 -9.0.-13).

ГЛАВА 1. ВОЛНЫ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Существуют различные подходы к обоснованию геометрических законов распространения волн. Первоначально они формировались в связи со стремлением понять природу света, задолго до того, как Максвелл предложил систему уравнений, описывающих распространение электромагнитных колебаний. Такие понятия как «фронты» и «лучи» имели скорее интуитивный характер и в то же время воспринимались такими же неотъемлемыми сущностями бытия, какими были «точка», «линия», «поверхность», «пространство». Различные эпохи вкладывали свое видение и понимание этих и им подобных сущностей, но возможность их использования никогда не отрицалась. Были выдвинуты такие великие положения как принцип Ферма и принцип Гюйгенса, которые, как тогда казалось, различно трактовали природу света, но из которых вытекали одни и те же следствия. Значительно позже, когда появились уравнения, описывающие не стационарные состояния электромагнитных, упругих и акустических сред, возникла необходимость связать эти уравнения с уже известными геометрическими законами. Установление этой связи в XIX столетии служило одним из подтверждений правильности найденных тогда уравнений. Но в современной физике установилась такая точка зрения, согласно которой геометрические представления в той мере справедливы, в какой они выводятся из уравнений распространения электромагнитных, упругих или акустических колебаний. Этому выводу и посвящена данная глава.

§ 1. Разрывы и характеристические многообразия решений скалярных волновых уравнений

В предисловии «идеальная волна» определена как разрыв волнового поля. Поскольку волновое поле — это решение некоторого (в зависимости от его физической природы) уравнения в частных производных, то предлагаемое определение разумно, если разрывы производных таких решений обладают специфическими свойствами, которые мы вправе ожидать от «идеальных» волн.

Может ли решение уравнения в частных производных иметь разрыв? Говорят, что в точке *M* функция $u(\mathbf{x})$ имеется разрыв порядка *p*, если ее *p*-я производная по одной из переменных не является в этой точке непрерывной. В зависимости от размерности вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ множество точек *одного и того же разрыва* в типичных ситуациях состоит из одной точки (при $n = 1$), является линией (при $n = 2$), поверхностью ($n = 3$), гиперповерхностью ($n > 3$). Все эти геометрические объекты объединяются одним термином – «многообразие». Многообразие Φ точек разрыва называется его носителем. Пусть носитель разрыва задается уравнением $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ [1]. Будем говорить, что многообразие Φ регулярно в выбранной точке *M* на ней, если функция φ обладает необходимым запасом производных в невырожденной окрестности *M*. Если

[1] Может оказаться, что не существует глобальной системы координат, которая позволяет определить данное многообразие Φ одним таким уравнением. Тогда, по предположению, существует такой набор точек M_I, что: 1) в окрестности каждой из них можно ввести локальную систему координат, позволяющую описать многообразие Φ уравнением вида $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$; 2) каждая точка $N \in \Phi$, не совпадающая ни с одной из точек M_I, принадлежит как минимум двум из таких окрестностей; 3) переход от одной локальной системы координат в другую в точке *N* является взаимно-однозначным и взаимно-гладким.

регулярность выполнена во всех точках Ф, то данное многообразие является гладким. В дальнейшем мы уточним понятие многообразия.

Направление, определяемое вектором **l**, трансверсально разрыву в точке M, если p-я частная производная поля $u(\mathbf{x})$ в M по этому направлению терпит разрыв. Очевидно, что трансверсальное направление **l** не лежит в касательной плоскости к Ф (такая плоскость обозначается TФ) и не параллельно к ней. Если **l** совпадает с i-м ортом координатной системы, то переменная x_i трансверсальна разрыву. Имеет место *свойство инвариантности порядка*, которое интуитивно понятно и состоит в следующем: *если* Ф *регулярна в M, то любой разрыв на* Ф *имеет одинаковый порядок по всем трансверсальным к разрыву переменным*.

Чтобы понять существо дела, удобно начать со скалярных уравнений. Пусть $u(\mathbf{x})$ есть некоторое решение уравнения в частных производных

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_k} + ... = 0, \tag{1.1}$$

где точками обозначены производные первого (и нулевого) порядков. Коэффициенты под знаком суммы удовлетворяют условию симметричности: $a_{ik} = a_{ki}$.

Предположим, что поле $u(\mathbf{x})$ содержит разрыв второго порядка (такой разрыв принято называть слабым) на гладком многообразии Ф: $\varphi(x_1, ..., x_n) = 0$. Введем в окрестности Ф новые координаты $\xi_i = \omega_i(x_1, ..., x_n)$ такие, что $\omega_1(x_1, ..., x_n) \equiv \varphi(x_1, ..., x_n)$ (предполагается, что существуют и обратные функции $x_i = \nu_i(\xi_1, ..., \xi_n)$). В новых координатах поверхность Ф определяется равенством $\xi_1 = 0$. (Среди новых переменных ξ_1 единственная, которая трансверсальна разрыву.) В соответствии с условием о наличии разрыва на Ψ

$$\left.\frac{\partial^2 u^{(+)}}{\partial \xi_1^2}\right|_{\xi_1=0} \neq \left.\frac{\partial^2 u^{(-)}}{\partial \xi_1^2}\right|_{\xi_1=0}, \tag{1.2}$$

где символ (–) отвечает пределу $\xi_1 \uparrow 0$ (предел снизу), а символ (+) пределу $\xi_1 \downarrow 0$ (предел сверху). В то же время по условию функции $u, \partial u / \partial \xi_i \ (i = 1, ..., n)$, $\partial^2 u / \partial \xi_i \partial \xi_j \ (i, j = 2,..., n)$ и, как легко видеть, $\partial^2 u / \partial \xi_1 \partial \xi_i \ (i = 2, ..., n)$ непрерывны. В силу того что уравнение (1.1) устанавливает линейную связь между производными первых и вторых порядков, неравенство (1.2) не всегда возможно. Действительно, если производная $\partial^2 u / \partial \xi_1^2$ детерминируется (при $\xi_1 = 0$) значениями остальных производных, то в силу их непрерывности производная $\partial^2 u / \partial \xi_1^2$ также окажется непрерывной при переходе через Ф. Итак, нам нужно выяснить, в каком случае указанная детерминация не имеет места.

Для этого перепишем уравнение (1.1) в новых координатах. Поскольку

$$u_{x_i} = u_{\xi_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}, \quad u_{x_i x_k} = u_{\xi_j \xi_j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial x_k} + u_{\xi_j} \frac{\partial^2 \omega_j}{\partial x_i \partial x_k},$$

то после подстановки в уравнение (1.1) получим

$$a'_{11} u_{\xi_1 \xi_1} + ... = 0, \tag{1.3}$$

где

$$a'_{11} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_i} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_k} \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \tag{1.4}$$

а горизонтальная фигурная скобка означает слагаемые, непрерывные при переходе через Ф. Если $a'_{11} \neq 0$, то из непрерывности этих слагаемых следует и непрерывность $u_{\xi_1\xi_1}$. Стало быть, разрыв возможен в том случае, если

$$a'_{11} \equiv \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0\,. \tag{1.5}$$

Многообразие, удовлетворяющее уравнению (1.5), принято называть характеристическим для уравнения (1.1), или просто характеристикой.

По тем же причинам, по которым на характеристическом многообразии может существовать разрыв, на нем нельзя корректно поставить классическую задачу Коши для уравнения (1.1). Напомним, что задача Коши состоит в отыскании такого решения уравнения (1.1), для которого на некотором многообразии Ф заданы условия

$$u\big|_{\Phi} = u_0 \quad \text{и} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Phi} = v_0\,,$$

где $\partial u / \partial n$ есть производная по нормали к Ф, u_0 и v_0 – заданные на Ф функции. Доказательство единственности решения существенно опирается на возможность восстановления всех вторых производных, а для характеристических многообразий это не выполняется.

Всегда ли характеристическое многообразие существует? В силу симметричности матрицы $A = (a_{ik})$, фигурирующую в уравнении (1.5) квадратичную форму в любой точке M можно привести к диагональной форме вида

$$\sum_{i,k=1}^{n} \lambda_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} \right)^2 .$$

Ясно, что решение уравнения (1.5) существует только в том случае, когда хотя бы одно собственное значение имеет знак, отличный от других. Если такое собственное значение только одно, то такие уравнения называют гиперболическими. В физических задачах, в которых свойства среды со временем не изменяются, переменная, отвечающая собственному значению с отличным от других знаком, всегда совпадает со временем. Оставшееся число переменных, как правило, равно 3. В этом случае уравнение (1.1) может быть конкретизировано так:

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \ldots = 0 \tag{1.6}$$

с положительно определенной матрицей коэффициентов a_{ik} $(i,k = 1, 2, 3)$. Соответственно перепишется характеристическое уравнение:

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - b \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 = 0 \tag{1.7}$$

при $a_{ik} = a_{ik}(\mathbf{x}), b = b(\mathbf{x})$.

Преобразованием координат любой гиперболический оператор (не обязательно возникающий в физических задачах)[2] может быть записан в форме уравнения (1.6) (мы назовем ее канонической), однако переменная t не обязана в этом случае играть роль времени, переменные x_i $(i = 1, 2, 3)$ не обязаны совпадать с пространственными координатами, коэффициенты могут зависеть от t. Если переход к канонической форме не связан с изменением физического смысла переменных, то мы будем говорить, что уравнение имеет естественную каноническую форму.

Отметим еще, что уравнения, в которых одно из собственных значений λ_i есть нуль (а остальные одинаковы по знаку), называются параболическими, а если все они имеют одинаковый знак, то эллиптическими.

Следует отметить одно важное свойство характеристических многообразий. Они определяются только коэффициентами уравнения (1.1) при старших (вторых) производных и не меняются, когда происходит изменение коэффициентов при производных меньшего порядка. Все уравнения (1.1), имеющие одну и ту же матрицу коэффициентов a_{ik}, имеют одно и то же характеристическое уравнение. Такие гиперболические уравнения будем называть кинематически эквивалентными.

Характеристики и разрывы произвольного порядка. Как мы видим, существование решений со слабыми разрывами, располагающимися на характеристических многообразиях, является важнейшим свойством гиперболических уравнений. Именно к ним и относятся уравнения распространения электромагнитных, акустических и сейсмических колебаний. Возникает вопрос: в какой мере существенно, что разрыв является слабым?

Ограничимся разрывами, трансверсальными относительно переменной t (такие разрывы содержат скачок производной по времени). Продифференцируем уравнение (1.6) по t. Если коэффициенты уравнения не зависят от времени (что чаще всего и имеет место в уравнениях физического происхождения), то мы получим точно такое же уравнение относительно $\dot{u} = \partial u / \partial t$:

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial x_i \partial x_k} - b \frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial t^2} + \ldots = 0,$$

стало быть, слабый разрыв поля $\dot{u}$ тоже может располагаться только на поверхностях, удовлетворяющих характеристическому уравнению (1.7). Но слабый разрыв поля $\dot{u}$ является разрывом порядка 3 для самого поля u. Продолжая эти рассуждения дальше, мы выведем, что сказанное для слабых разрывов верно и для всех разрывов $k > 2$. Если вместо дифференцирования применить к уравнению (1.6) операцию интегрирования (от 0 до t) по той же переменной, то полученные выше результаты окажутся верными и для сильного разрыва ($k = 1$) и для разрыва самой функции ($k = 0$).

Теперь откажемся от независимости коэффициентов от времени, но предположим их непрерывную дифференцируемость. Ограничимся только порядками $k < 2$ и предположим, что производные функции u (до вторых включительно) при $t = -0$

---

[2] Уравнения «нефизического» происхождения возникают, например, в теории преобразований сейсмограмм в процессе их обработки.

обращаются в нуль. Возьмем интеграл от обеих частей уравнения (1.6) в пределах от -0 до *t*, обозначив $w=\int_{-0}^{t} u dt$. По условию

$$\int_0^t a_{ik}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}dt=\int_{-0}^t a_{ik}\,\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x_i \partial x_k}dt=a_{ik}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_k}-\int_{-0}^t \dot{a}_{ik}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_k}dt\,.$$

Если коэффициенты дифференцируемы, то интегралы типа

$$\int_{-0}^{t} \dot{a}_{ik}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_k}dt \;\text{ и }\; \int_{-0}^{t} \dot{b}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}d$$

оказываются непрерывными по *t* (по свойству инвариантности порядка и по другим трансверсальным переменным). Поэтому задача снова сводится к исследованию уравнения

$$a'_{11}\left(\partial^2 w/\partial\xi_{11}^2\right)+\ldots=0\,,$$

где точками обозначены непрерывные (следовательно, известные) величины. Мы приходим к тому же характеристическому уравнению, что и раньше.

Имеют ли физический смысл разрывы порядка $k<2$? Если для разрыва порядка $k=1$, на котором рвутся нормальные напряжения, можно поставить дополнительные (кроме характеристичности) условия, обеспечивающие сохранение количества движения в окрестности разрыва, то решения с разрывами порядка 0 или -1 не могут иметь непосредственного физического смысла, поскольку они означают разрыв сплошности деформируемой среды (предполагается, что u – смещение частицы среды). Но они имеют смысл обобщенных решений. В эту фразу вкладывается следующий смысл: с помощью этих решений определяются такие функционалы от решений или другие решения, которые имеют нормальную физическую интерпретацию. Для тех, кто знаком с теорией линейных систем, напомним, что импульсная характеристика линейной системы является прекрасным примером применения обобщенной функции. Являясь откликом линейной системы на такой абстрактный сигнал, каким является дельта-функция (разрыв порядка -1), она используется в интеграле свертки для построения выходного сигнала, отвечающего физически интерпретируемому входному сигналу.

Фронты и распространение разрывов. Предположим, что переменная *t* трансверсальна к поверхности разрыва. Тогда уравнение $\varphi=0$ разрешимо относительно переменной t : $t=\tau(x,y,z)$. При каждом фиксированном значении *t* уравнение $t=\tau(x,y,z)$ описывает поверхность в «обычном» пространстве (x,y,z). Эта поверхность называется фронтом. Таким образом, математически фронт является проекцией сечения (при $t=\text{const}$) характеристической поверхности φ в пространство (x,y,z). При изменении *t* положение фронта в пространстве (x,y,z) меняется. Следовательно, характеристическое уравнение, разрешимое относительно переменной *t*, описывает распространение фронта (и самого разрыва) в физическом пространстве. Это предложение можно переформулировать так: разрывы, трансверсальные переменной *t,* являются распространяющимися в пространстве. Удобно переписать характеристическое уравнение в терминах функции τ. Так как мы можем положить $\varphi=t-\tau(x,y,z)$, то уравнение (1.7) перепишется так:

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\,\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_k}-b=0\,. \qquad (1.8)$$

Все кинематически эквивалентные уравнения имеют один и тот же закон распространения фронтов (= носителей разрывов).

Покажем теперь, как можно представить в аналитической форме факт распространения разрыва. Введем «стандартный» разрыв формулой

$$R_m^{(+)}(t) = \begin{cases} t_+^m / m!, & m = 0, 1, 2, \dots, \\ \delta(t), & m = -1, \end{cases} \tag{1.9}$$

где функция $t_+ = 0$ при $t < 0$ и $t_+ = t$ при $t > 0$. Дифференцирование стандартного разрыва сводится к изменению его порядка:

$$dR_m^{(+)}(t) / dt = R_{m-1}^{(+)}(t). \tag{1.10}$$

Условимся говорить, что функция $f(t)$ эквивалентна (с порядком эквивалентности m) разрыву $AR_m^{(+)}(t-\tau)$ (что записывается как $f(t) \overset{m}{\sim} AR_m^{(+)}(t-\tau)$), если разность $f(t) - AR_m^{(+)}(t-\tau)$ принадлежит функциям класса $C^m\ (\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon)$, имеющим непрерывные производные (вплоть до m-о порядка) на интервале $(\tau-\varepsilon, \tau+\varepsilon)$. Ясно, что функция $f(t)$ имеет скачок m-й производной в точке $t = \tau$ с амплитудой скачка $f^{(m)}(\tau+0) - f^{(m)}(\tau-0) = A$.

Для всякой гладкой функции $\varphi(t)$ справедливо

$$\varphi(t) R_m^{(+)}(t) \overset{m}{\sim} \varphi(0) R_m^{(+)}(t). \tag{1.11}$$

Теперь наличие распространяющегося в поле $u(\mathbf{x}, t)$ разрыва порядка m означает, что

$$u(\mathbf{x}, t) \overset{m}{\sim} A(\mathbf{x}) R_m^{(+)}[t - \tau(\mathbf{x})]. \tag{1.12}$$

Хотя амплитуда $A(\mathbf{x})$ определена на всем пространстве, но, согласно свойству (1.11), имеет значение только то, как она определена на самом разрыве. Поэтому $A(\mathbf{x})$ определяется как амплитуда разрыва при $t = \tau(\mathbf{x})$. Изучение амплитуд и порядков, образующих набор динамических параметров идеальной волны, здесь не рассматривается. Перейдем к отысканию характеристических уравнений для конкретных гиперболических уравнений.

§ 2. Уравнение эйконала

В этом параграфе из уравнений акустики выводится уравнение эйконала, играющее фундаментальную роль на протяжении всей книги. Рассмотрен ряд решений этого уравнения, которые могут встретиться при распространении волн в однородной среде (в том числе комплекснозначные решения) либо являются модельными при решении различных теоретических задач. Показывается, что решения скалярных уравнений могут включать только эллиптическую анизотропию скорости распространения волн.

В заключение параграфа обсуждается, какой минимальный набор предположений «порождает» уравнение эйконала независимо от уравнений распространения колебаний и независимо от таких великих принципов, как принципы Ферма и Гюйгенса. Эти предположения суммируются в предложении, который назван нами *принципом локальности.*

Характеристическое многообразие для уравнения акустики. Если состояние среды описывается давлением p, то в линейном приближении уравнение акустических колебаний записывается так:

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\right)-\frac{1}{k}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0$$

или в покомпонентной записи:

$$\sum\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)-\frac{1}{k}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0\,. \tag{2.1}$$

Плотность ρ и коэффициент объемного расширения k в общем случае являются функциями координат. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial p}{\partial x_i}\,,$$

то уравнение (2.1) есть гиперболическое уравнение, записанное в (естественной) канонической форме при $a_{ik}=(1/\rho)\delta_{ik}$ и $b=1/k$. Применяя формулу (1.8), получаем классическое уравнение эйконала

$$\sum\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)^2=\frac{1}{V^2}\,, \tag{2.2}$$

где $V=\sqrt{k/\rho}$. Величины $\partial\tau/\partial x_i\equiv\tau_{x_i}$ суть компоненты вектора grad τ, поэтому полученное уравнение будем чаще записывать в бескоординатной форме:

$$\left|\operatorname{grad}\tau\right|^2=1/V^2\,. \tag{2.3}$$

Если взять близкие моменты времени t и $t+\Delta t$, то, по определению градиента, расстояние между фронтами $\tau=t$ и $\tau=t+\Delta t$ (вдоль линии градиента) окажется равным $\Delta l\cong V\Delta t$, поэтому параметр V имеет смысл (мгновенной) скорости распространения фронта (такую скорость еще называют фазовой).

Волновое уравнение. Если плотность в акустической среде постоянна, то мы получим уравнение, которое называют (классическим) волновым:

$$\Delta u=\frac{1}{V^2(x,y,z)}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,, \tag{2.4}$$

где $\Delta u\equiv u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ – оператор Лапласа. Как и следовало ожидать, характеристическое уравнение снова сводится к классическому уравнению эйконала (2.3). Это означает, что акустическое уравнение и волновое уравнение кинематически эквивалентны.

Примеры решений уравнения (2.3). Пусть среда однородна: $V=\mathrm{const}$. Легко проверить, что функция

$$\tau(\mathbf{x})=t_0+\frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x})}{V}=t_0+\frac{\alpha_x x+\alpha_y y+\alpha_z z}{V} \tag{2.5}$$

является решением классического уравнения эйконала, если $\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2=1$. Поскольку $\tau(\mathbf{x})=\mathrm{const}$ есть уравнение плоскости в трехмерном пространстве, то формула (2.5) описывает распространение плоского фронта. Числа α_x,α_y и α_z суть направляющие косинусы плоского фронта. Каждой плоской волне можно сопоставить точку на единичной сфере, поэтому множество всех плоских волн изоморфно единичной сфере. Плоская волна – волна без источника. Можно сказать также, что ее источник бесконечно удален.

Если волна имеет точечный источник в точке $\mathbf{x}^0$ (а среда по-прежнему однородна), то фронты являются сферами радиуса $R = tV$ с центром в $\mathbf{x}^0$, а эйконал выражается функцией

$$\tau = t_0 + (1/V)\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right| = t_0 + \left(1/V\right)\sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 + \left(z - z_0\right)^2}\ . \tag{2.6}$$

Пусть пространство является двумерным и совпадает с плоскостью (x, y). Тогда семейство всех фронтов, отвечающих источнику в точке (x^0, y^0), есть семейство концентрических кругов. В пространстве-времени (x, y, t) мы получаем характеристическое многообразие в виде конической поверхности с вершиной в (x^0, y^0, t_0). Строго говоря, функция

$$\tau = t_0 - (1/V)\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\right| \tag{2.7}$$

также удовлетворяет уравнению эйконала, поэтому полное характеристическое многообразие в пространстве $\left(x, y, t\right)$ состоит из двуполостной конической поверхности (рис. 1). В трехмерном случае характеристическое многообразие, отвечающее волне из точечного источника, называют характеристическим коноидом, применяя этот термин иногда и к неоднородной среде. Эйконал (2.7) есть эйконал сходящейся (бегущей из бесконечности) сферической волны. Отметим еще решения в виде конических фронтов, распространяющихся вдоль положительного направления оси x:

$$\tau = t_0 + ax \pm b\sqrt{y^2 + z^2};\ a^2 + b^2 = 1/V^2. \tag{2.8}$$

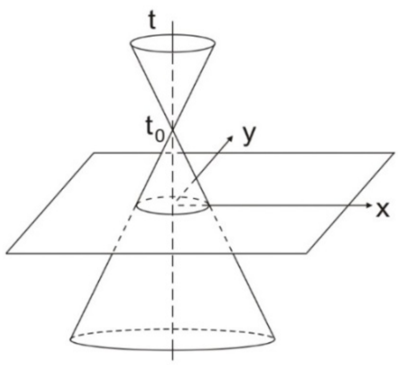


Рис.1. Характеристический конус в случае однородного двумерного пространства

Решение, отвечающее знаку «минус» перед корнем необычно: это конус, распространяющийся полостью вперед. Такие решения, так же как и функция (2.7), в физических задачах, как правило, не рассматриваются, хотя предложить некий искусственный пример, содержащий явление фокусировки с фронтами, которые в ограниченной области пространства выражаются формулой (2.7) или (2.8) (со знаком «минус»), не представляет особого труда. Однако глубокий смысл существования решений двух типов становится окончательно ясным при рассмотрении обратных задач геометрической сейсмики.

Комплекснозначные решения. С чисто формальных позиций существует и возможность комплекснозначных решений. Так, в формуле (2.5) один или два из коэффициентов α_x, α_y и α_z могут быть чисто мнимыми, например: $\alpha_z = \pm i\beta, (\beta > 0)$ (в этом случае $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 - \beta^2 = 1$). В последнем случае эйконал (2.5) определяет фронт так называемой плоской эванесцентной волны. В формуле (2.8) коэффициент b также может быть мнимым: $b = \pm i\beta, (\beta > 0)$. Мы получим эйконал так называемого гауссова пучка:

$$\tau = \alpha z \pm i\beta\sqrt{x^2 + y^2} \text{ при } \alpha^2 - \beta^2 = 1/V^2. \tag{2.9}$$

Комплекснозначные решения могут показаться просто формальным «трюком». Это не так. Изучение динамики показывает, что все формальные возможности природа реализует в той или иной ситуации. Сейчас мы ограничимся тем, что постараемся понять, как меняется характер идеальной волны (разрыва), имеющей комплекснозначный эйконал. Подставим, в частности, эйконал плоской эванесцентной волны, распространяющейся в направлении x в выражении волны-разрыва с порядком –1. Согласно формулам (1.9) и (1.12), речь идет о волне вида

$$u(t,x,z) = A\delta(t - ax \pm ibz).$$

Что такое дельта-функция от комплекснозначного аргумента? Чтобы построить аналитическое продолжение δ -функции на комплексную плоскость, воспользуемся преобразованием Фурье. Преобразование Фурье выписанной функции есть $U(\omega,x,z) = A\exp[-i\omega(ax \mp ibz)]$. Теперь у нас есть возможность правильного выбора знака перед ibz исходя из следующих физических условий: 1) $U(-\omega,x,z) = U^*(\omega,x,z)$ (условие вещественности функции $u(t,x,z)$) и 2) при каждых x и ω $U(\omega,x,z) \to 0$ при $z \to \infty$ (существование функции $u(t,x,z)$). Если считать, что решение рассматривается, только при $z \geq 0$, то указанным условиям удовлетворяет функция $U(\omega,x,z) \equiv A\exp[-ia\omega x - b|\omega|z]$. Теперь искомое продолжение δ-функции определится обратным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-ax)-b|\omega|z}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{i\omega(t-ax)+b\omega z}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{i\omega(t-ax)-b\omega z}d\omega = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\omega[i(t-ax)+bz]}d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{\omega[i(t-ax)-bz]}d\omega = \\
&= -\frac{1}{2\pi[i(t-ax)+bz]} + \frac{1}{2\pi[i(t-ax)-bz]} = \frac{1}{\pi}\frac{bz}{\left(t-ax\right)^2 + b^2z^2}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Мы получили волну, которая, во-первых, является гладкой (не имеет фронта), во-вторых, убывает при увеличении z, в-третьих, положение гребня этой волны описывается уравнением $t - ax = 0$, т.е. распространяется в направлении оси x. Волны такого типа называются *эванесцентными*.

Вопрос о возможности определения разрыва с комплексным эйконалом не следует смешивать с вопросом о существовании таких решений базисных уравнений, которые содержат волны с комплексным эйконалом. Скорее опыт, нежели физический или математический принципы, подсказывает, что если можно определить некий эйконал, то наверняка можно поставить задачу, в которой волна с таким эйконалом содержится в решении. Однако окончательный ответ на данный вопрос не может быть дан в рамках чисто геометрической теории.

Формулы Беннорфа. Приводимые ниже формулы выражают элементарные свойства градиента скалярной функции и, видимо, не заслуживают того, чтобы носить чье-то имя. Но в приложении к $\nabla\tau \equiv \mathrm{grad}\tau$ в сейсмической литературе они связываются с именем Беннорфа, и это оказывается удобным как-то именовать часто используемые соотношения. Пусть вектор $\mathbf{n}$ есть вектор нормали к фронту $\tau(x, y, z) = \mathrm{const}$, направленный в сторону возрастания времени распространения разрыва. По определению градиента, $\nabla\tau = (\partial\tau / \partial n)\mathbf{n}$, где, очевидно, $\partial\tau / \partial n > 0$. Применяя уравнение эйконала в форме (2.3), получаем, что в произвольной точке $\mathbf{x}$

$$\nabla\tau(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) / V(\mathbf{x}), \ \ \partial\tau / \partial n = 1 / V. \tag{2.11}$$

Для произвольного направления, характеризуемого единичным вектором $\mathbf{l}$,

$$\partial\tau/\partial l = \nabla\tau \cdot \mathbf{l} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{l} / V = (\cos\alpha) / V, \quad \alpha = \measuredangle\left(\widehat{\mathbf{n},\mathbf{l}}\right). \tag{2.12}$$

Величину $V^* = (\partial\tau / \partial l)^{-1} = V / \cos\alpha$ принято называть кажущейся скоростью распространения волны в направлении $\mathbf{l}$.

Пусть P – плоскость, проходящая через точку $\mathbf{x}$. Сечение эйконала этой плоскостью обозначим символом τ_P. Для этой функции, как для функции двух переменных, можно определить двумерный градиент $\nabla_2\tau_P$. Этот вектор коллинеарен плоскости P и может быть записан в виде $a\mathbf{m}$, где $\mathbf{m}$ – единичный вектор, выражающий направление вектора $\nabla_2\tau_P$. В то же время вектор $\nabla_2\tau_P$ совпадает с проекцией вектора $\nabla\tau$. Следовательно,

$$\nabla_2\tau_P = \mathrm{pr}_P\nabla\tau = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{V}\mathbf{m} = \frac{\cos\beta}{V}\mathbf{m}, \quad \beta = \measuredangle\widehat{\mathbf{m},\mathbf{n}}.$$

Вместо угла между направлением распространения фронта и плоскостью чаще используется угол между направлением распространения фронта и вектором $\mathbf{N}$ нормали к плоскости P, обозначаемый α. Все три вектора $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$ и $\mathbf{N}$ лежат в одной и той же (ортогональной к P) плоскости, поэтому $\alpha = \pi / 2 - \beta$. Следовательно,

$$\nabla_2\tau_P = \mathrm{pr}_P\tau = \frac{\sin\alpha}{V}\mathbf{m}, \quad \alpha = \measuredangle\widehat{\mathbf{N},\mathbf{n}}. \tag{2.13}$$

Величину $V_P^* = V / \sin\alpha$ называют кажущейся скоростью распространения волны вдоль плоскости P (в заданной точке этой плоскости).

Понятие кажущейся скорости можно ввести для криволинейной поверхности. Пусть $T_x\Sigma$ есть плоскость, касательная к поверхности Σ в точке $\mathbf{x}$. Тогда соответствующее значение кажущейся скорости определяется соотношением

$$\mathrm{pr}_{T_x\Sigma}\nabla\tau = \mathbf{m} / V^*.$$

Во всех случаях интервал возможных значений кажущейся скорости вещественного эйконала определяется неравенством

$$V \le V^* \le \infty.$$

Аффинные и евклидовы пространства. До сих пор радиусы-векторы точек $\mathbf{x}$, векторы $\mathbf{n}$, $\nabla\tau$ и т. п. рассматривались как элементы одного и того же координатного пространства. Точнее говоря, мы не обращали внимания читателя на то, что фактически это элементы различных пространств. В частности, если используются криволинейные координаты, то при замене переменных такие объекты, как скорости движения частицы,

$\nabla\tau$ и радиус-вектор точки, преобразуются различным образом, что, собственно, и доказывает их принадлежность к различным пространствам. Сейчас мы упорядочим наши представления о пространствах и проведем их инвентаризацию.

Базисное (физическое) пространство R^3 наделяется свойствами аффинного пространства. Аффинное пространство состоит из элементов двух типов: точек и векторов. Каждой паре точек A и B сопоставляется вектор $\overrightarrow{AB}$. (Но одному и тому же вектору, вообще говоря, отвечает бесконечное множество векторов.) Множество векторов образует линейное векторное пространство над множеством вещественных (либо комплексных) чисел R^1. Это значит, что сумма двух векторов и умножение вектора на число из R^1 является также вектором. Аффинное пространство допускает введение аффинных координат (x^1, x^2, x^3) таких, что: 1) каждой точке A отвечает комплект координат (x_A^1, x_A^2, x_A^3), называемый радиус-вектором точки и обозначаемый $\mathbf{r}_A$; 2) вектору $\overrightarrow{AB}$ отвечает комплект координат (x^1, x^2, x^3) при $x^i = x_B^i - x_A^i$. Можно также написать, что $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_{\overrightarrow{AB}} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$. Множество радиусов-векторов линейного векторного пространства не образует. Имеет ли смысл складывать радиус-векторы двух разных точек? Складывать можно силы, скорости, т. е. элементы совсем других пространств. Кстати, такие векторы, как сила и скорость (в отличие от векторов аффинного пространства $\mathbf{x}_{\overrightarrow{AB}}$), всегда приписаны к какой-либо точке из R^3 (например, к точке приложения силы) и являются элементами векторных пространств, приписанных к соответствующим точкам. Складывать силы, приложенные к различным точкам, физически бессмысленно.

Если и x^i и $x^{i'}$ суть аффинные координаты, то они связаны линейным преобразованием вида $x^i = A^i_{i'}x^{i'} + r_0^i$, где $A^i_{i'}$ – элементы матрицы поворота, r_0^i – координаты радиус-вектора точки, в которую переносится начало новой (штрихованной) системы координат. Координаты векторов аффинного пространства от значений r_0^i не зависят. Любые три линейно независимых вектора образуют базис в аффинном пространстве. Любой вектор аффинного пространства можно представить (единственным образом) как линейную комбинацию базисных векторов. Если базис выбран так, что коэффициенты линейной комбинации совпадают с координатами x^i, то базис называется репером и его вектора обозначаются $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$. Каждой аффинной системе координат отвечает репер $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, векторы которого имеют координаты $e_k^i = \delta_k^i$. И наоборот, любой базис можно сделать репером, считая координатами произвольного вектора $\mathbf{x}$ коэффициенты в разложении $\mathbf{x} = u^1\mathbf{e}_1 + u^2\mathbf{e}_2 + u^3\mathbf{e}_3 = u^i\mathbf{e}_i$.

Аффинное пространство является евклидовым, если в нем определено скалярное произведение векторов $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, т. е. симметричная билинейная невырожденная функция (со значениями в R^1): $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}, \mathbf{z})$, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$. Величина $(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$ называется длиной вектора $\mathbf{x}$ и обозначается $|\mathbf{x}|$. В линейном векторном пространстве всякое скалярное произведение определяется положительно определенной матрицей $\|g_{ij}\|$: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{ij}x^i y^j$. Два вектора $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, для которых $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, считаются ортогональными (в смысле заданного скалярного произведения). Репер с взаимно ортогональными векторами единичной длины называется ортонормированным, а соответствующая система координат – декартовой. Если аффинное пространство является евклидовым, то оно метризуемо, т.е. в нем может быть введено расстояние между любыми точками A и B, определяемое как длина вектора $\overrightarrow{AB}$. В общем случае метрика есть скалярная функция точек $\rho(A,B)$, которая: 1) симметрична, $\rho(A,B)=\rho(B,A)$; 2) неотрицательна, $\rho(A,B)\geq 0$ и обращается в нуль только тогда, когда $A=B$; 3) удовлетворяет неравенству треугольника, $\rho(A,B)\leq\rho(A,C)+\rho(C,B)$ (для любых A, B и C).

Условимся, что в физическом (базисном) пространстве R^3 скалярное произведение и длина вектора определяются в «обычной» форме:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})\equiv\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x^i y^i, \quad \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(r_A^i-r_B^i)^2}\equiv(\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2}.$$

Другие евклидовые пространства обозначаются символом E^3. В аффинном пространстве может быть определена билинейная функция векторов $g_{ij}x^i y^j$ с невырожденной, но необязательно положительно-определенной матрицей $\|g_{ij}\|$. Если матрица $\|g_{ij}\|$ не положительно определена, то пространство называется псевдоевклидовым, а порождаемая матрицей $\|g_{ij}\|$ метрика – псевдометрикой. В этом случае величина $(\mathbf{x},\mathbf{x})$ может быть и равной нулю и отрицательной. Два последних свойства метрики не обязаны выполняться.

Многообразия. В § 1 многообразия были определены как множества точек, удовлетворяющих уравнениям вида $f(x^1,x^2,x^3)=0$. Определим элементарное m-мерное многообразие как такое множество точек M, которое взаимно однозначно отображается на связное подмножество U m-мерного арифметического (координаты) пространства R^m. Это означает, что каждой точке из M можно приписать координаты $(u^1,...,u^m)$, при этом всякому пути в U отвечает путь в M. Все поверхности в аффинном пространстве, которые можно описать гладкими функциями $x^i=x^i(u^1,u^2)$, линии, описываемые гладкими функциями $x^i=x^i(s)$, $s\in R^1$, как и само множество точек аффинного пространства, – это все примеры элементарных многообразий. Само аффинное пространство не только можно, но и нужно рассматривать как многообразие, если в нем используются криволинейные координаты, в которых невозможно явно выразить аффинные свойства. Примером поверхности, не являющейся элементарным многообразием, служит двухмерная сфера в трехмерном пространстве. Известно, что на ней не удается определить двумерную систему координат, которая была бы гладким образом связана с аффинными координатами точек сферы. Этот пример служит поводом для более общего определения многообразия как множества точек, которое может быть покрыто семейством частично перекрывающихся областей (карт), являющихся элементарными многообразиями, при этом: 1) любая точка многообразия принадлежит открытому множеству одной из карт; 2) системы координат, определенные в перекрывающихся картах, в области перекрытия связаны взаимно гладкими и взаимно однозначными преобразованиями. В дальнейшем мы будем обозначать любые координаты (аффинные или криволинейные) символами x^i, $x^{i'}$ и т. д. Если многообразие M определено на аффинном пространстве (например, является поверхностью в R^3 или совпадает с R^3), то R^3 по отношению к M представляет объемлющее пространство.

В каждом многообразии определены два типа векторных пространств, прикрепленных к точкам многообразия. Зафиксируем некоторую точку A на M и рассмотрим множество линий $x^i = x^i(t)$, проходящих через A. На каждой линии в точке A определен бесконечно малый вектор $d\mathbf{x}$ с компонентами $dx^i = \dot{x}^i dt$. Легко понять, что этот вектор является касательным к линии $x^i = x^i(t)$, а стало быть, и к самому многообразию. Множество векторов этого типа образует линейное векторное пространство, которое называется касательным к M в точке A и обозначается $T_A M$. Векторы касательного пространства при замене координат $x^i = x^i(x^{1'}, ..., x^{m'})$ преобразуются следующим образом:

$$\dot{x}^i dt = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \dot{x}^{i'}(t)dt \quad \text{или} \quad \dot{x}^{i'} dt = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dot{x}^i(t)dt .$$

В приведенной формуле используется правило суммирования по повторяющемуся индексу.

Такой способ преобразования называется *контравариантным*, а сами векторы, преобразующиеся контравариантным образом – контравариантными. Касательное пространство к аффинному пространству совпадает с самим этим пространством (точнее, с множеством векторов этого пространства). Естественный репер, определенный на многообразии M в точке A, определяется как комплект касательных векторов к координатным линиям этого многообразия. В координатах $x^1, ..., x^m$ естественный репер выражается тривиально ($e^i_k = \delta^i_k$). Более конструктивно его определить при помощи аффинных координат объемлющего пространства. Пусть $\mathbf{x}$ – радиус-вектор точки A, рассматриваемой как точка объемлющего пространства. Переход от объемлющего пространства к многообразию осуществляется при помощи вектор-функции $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^1, ..., x^m)$. Поскольку координатная линия x^k определяется условием $x^j = \text{const}, j \neq k$, то координату x^k можно принять за параметр координатной линии. Следовательно, касательный вектор к этой линии совпадает с вектором

$$\mathbf{e}_k = \partial \mathbf{x} / \partial x^k .$$

Комплект векторов $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m)$ и образует естественный репер многообразия в точке A. Одновременно он является базисом в касательном пространстве. Отметим, что его компоненты преобразуются по правилу преобразования контравариантных векторов.

Определим на m-мерном касательном пространстве $T_A M$ линейный функционал $f(d\mathbf{x})$, т. е. линейное отображение $T_A M \to R^1$, удовлетворяющее свойству линейности: $f(\alpha d\mathbf{x}_1 + \beta d\mathbf{x}_2) = \alpha f(d\mathbf{x}_1) + \beta f(d\mathbf{x}_2)$. Известно, что всякий линейный функционал m-мерного векторного пространства в заданной системе координат определяется при помощи m чисел $p_1, ..., p_m$: $f(d\mathbf{x}) = p_i dx^i$. Поскольку форма $p_i dx^i$ билинейна, то множество всех линейных функционалов на $T_A M$ само образует m-мерное линейное векторное пространство, сопряженное к $T_A M$. Его называют кокасательным пространством и обозначают T_A^*M . Числа $p_1, ..., p_m$ образуют ковариантный вектор, поскольку преобразуются *ковариантным* образом:

$$p_{i'} = \left(\partial x^i / \partial x^{i'}\right) p_i .$$

Действительно, скаляр $p_i dx^i$ инвариантен относительно системы координат ($p_i dx^i = p_{i'} dx^{i'}$). А поскольку закон преобразования вектора $d\mathbf{x}$ уже задан, то требование инвариантности можно выполнить только, предположив выписанный закон преобразования. (При этом мы используем тот факт, что

$$\left(\partial x^i / \partial x^{i'}\right) \cdot \left(\partial x^{i'} / \partial x^k\right) = \delta_{ik} .)$$

Уравнение $p_i dx^i = \text{const}$ определяет плоскость в $T_A M$ с нормалью, коллинеарной вектору $\mathbf{p}$. Если рассматриваемое многообразие является аффинным (но с криволинейными координатами), то данную плоскость можно отождествить с обычной плоскостью аффинного пространства.

В силу того что $\tau_{x^{i'}} = \tau_{x^i} \left(\partial x^i / \partial x^{i'}\right)$, вектор $\operatorname{grad} \tau$ является ковариантным и, стало быть, является элементом пространства с точностью до изоморфизма совпадающим с T_A^*M . Ковариантным является и вектор $\mathbf{n}$ (нормаль к фронту $\tau = \text{const}$).

В тех случаях, когда точка A может быть идентифицирована радиус-вектором **x**, наряду с обозначениями $T_A M$ и T_A^*M используются обозначения $T_\mathbf{x} M$ и $T_\mathbf{x}^* M$ или (если из контекста ясно, о каком многообразии идет речь) $T_\mathbf{x}$ и $T_\mathbf{x}^*$. Если многообразие совпадает с аффинным пространством, наделенном аффинными координатами, то $T_\mathbf{x} = T$ и $T_\mathbf{x}^* = T^*$.

Пока системы координат декартовы, между всеми перечисленными пространствами имеется изоморфизм и в большинстве случаев их можно не различать. И все же, даже в этих случаях, возникает необходимость в их различии. Пример этого будет дан ниже при обсуждении квадратичной формы (2.26).

Примем следующее соглашение об обозначениях: во всех случаях, когда изложение ведется в декартовых координатах, мы не делаем никакого различия между векторами и ковекторами, обозначая координаты и элементы матриц с применением исключительно нижних индексов: $x_i, y_j, ..., c_{ij}$ и т. д. Для обозначения суммы используется обычный символ суммировании. В тех же случаях, когда возникает необходимость в различении ковариантных и контравариантных векторов, мы прибегаем к тензорным обозначениям и, в частности, используем соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу. Однако, и в этих случая может применяться обычное обозначение суммирования, если оно осуществляется по одиночному индексу или индексам, являющимся одновременно «нижними» или «верхними». По внешним (даже повторяющимся) индексам, присутствующим и в левой и в правой частях уравнений, суммирование не производится.

Уравнение эйконала в криволинейных координатах. Как уже было сказано, наряду с декартовой системой координат нам понадобятся и криволинейные системы координат достаточно общего вида. Запишем уравнение эйконала в криволинейной системе координат $U = (u^1, u^2, u^3)$, где

$$u^i = u^i(x^1, x^2, x^3) \quad i = 1, 2, 3 .$$

В целях уменьшения объема формул удобно обозначить $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Тогда

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^j} = \frac{\partial \tau}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial x^j} \quad j = 1, 2, 3. \tag{2.14}$$

Отсюда

$$\left|\nabla \tau\right|^2 = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial \tau}{\partial x^j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \tau}{\partial u^i}\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial u^k}{\partial x^j}\frac{\partial \tau}{\partial u^k} = g_0^{ik}\frac{\partial \tau}{\partial u^i}\frac{\partial \tau}{\partial u^k},$$

где

$$g_0^{ik} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\frac{\partial u^k}{\partial x^j}. \tag{2.15}$$

Если ввести обозначение $\partial \tau / \partial u^i = \tau_{,i}$, то уравнение эйконала в криволинейной системе координат запишется так:

$$g_0^{ik}\tau_{,i}\tau_{,k} = 1/V^2(u^1, u^2, u^3). \tag{2.16}$$

Слева стоит квадратичная форма с матрицей $\mathbf{G}_0^{-1} = \left\| g_0^{ik} \right\|$. Согласно уравнению (2.15),

$$\mathbf{G}_0^{-1} = \mathbf{C}_{UX}\cdot\mathbf{C}_{UX}^T, \quad \mathbf{G}_0 = \mathbf{C}_{XU}^T\cdot\mathbf{C}_{XU}, \tag{2.17}$$

где $\mathbf{C}_{XU} = \left\|\partial x^i / \partial u^j\right\|$ – матрица преобразования криволинейной системы координат X в декартовую систему координат U, T – символ транспонирования матрицы. Обратная матрица $\mathbf{C}_{UX} = \left\|\partial u^i / \partial x^j\right\|$ выражает обратное преобразование.

Если обозначить через τ_U вектор-столбец с элементами $\tau_{,i}$ $(i = 1, 2, 3)$, то уравнение эйконала (2.16) можно еще записать в матричной форме:

$$\tau_U^T\mathbf{G}_0^{-1}\tau_U = 1/V^2. \tag{2.18а}$$

Если ввести матрицу $\mathbf{G} = V^{-2}\mathbf{G}_0$ (при этом $g^{ik} = V^2 g_0^{ik}$), то уравнение эйконала можно записать еще компактнее:

$$\tau_U^T\mathbf{G}^{-1}\tau_U = 1 \quad \text{или} \quad g^{ik}\tau_{,i}\tau_{,k} = 1. \tag{2.18б}$$

Линеаризация уравнения эйконала. Вернемся к декартовым координатам. Пусть среда, характеризующаяся скоростью $V(\mathbf{x})$, рассматривается как малое «возмущение» более простой среды со скоростью $V_0(\mathbf{x})$: $\left|V(\mathbf{x}) - V_0(\mathbf{x})\right| \le \varepsilon$. Тогда эйконал $\tau(\mathbf{x})$ удобно разделить на два слагаемых

$$\tau(\mathbf{x}) = \tau_0(\mathbf{x}) + \tau_1(\mathbf{x}), \tag{2.19}$$

выбрав в качестве $\tau_0(\mathbf{x})$ эйконал, отвечающий среде $V_0(\mathbf{x})$:

$$\left|\nabla \tau_0\right|^2 = 1/V_0^2.$$

Ясно, что при $\varepsilon \to 0$ второе слагаемое в уравнении (2.19) также будет стремиться к нулю.

Вместо скорости $V(\mathbf{x})$ удобнее рассматривать обратную величину $w = 1/V$, которую в оптике называют коэффициентом преломления, а в сейсмике в последнее время стали называть «медленностью» (англ. – *slowness*). В терминах медленности наши предположения запишутся так:

$$w(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}) + w_1(\mathbf{x}) \tag{2.20}$$

при $w_1 = 1/V - 1/V_0$, $\quad w_0 = 1/V_0$ и

$$\left|\nabla\tau_0\right|^2 = w_0^2. \tag{2.21}$$

Лучи эйконала $\tau_0(\mathbf{x})$ будем обозначать символом $\gamma^{(0)}$, а через $\mathbf{t}^{(0)}$ – вектор касательной к лучу $\gamma^{(0)}$.

Подставив выражения (2.20) и (2.21) в уравнение эйконала $\left|\nabla\tau(\mathbf{x})\right|^2 = w^2(\mathbf{x})$, получим

$$\left|\nabla\tau_0\right|^2 + \left|\nabla\tau_1\right|^2 + 2\left(\nabla\tau_0\cdot\nabla\tau_1\right) = w_0^2 + w_1^2 + 2w_0w_1.$$

Учитывая выражение (2.21) и пренебрегая членами второго порядка малости $\left|\nabla\tau_1\right|^2$ и w_1^2, получим следующее приближенное уравнение:

$$\left(\nabla\tau_0\cdot\nabla\tau_1\right) = w_0w_1, \tag{2.22}$$

в которое «поправочная» функция (или «остаточный эйконал») $\tau_1(\mathbf{x})$ входит линейно.

Эллиптическая анизотропия. Вернемся к общей канонической форме гиперболического уравнения (1.6), предположив, что коэффициенты уравнения (при производных второго порядка) не зависят от времени. В соответствующем характеристическом уравнении (1.7) положим $\varphi = t - \tau(x,y,z)$ и $\alpha_{ik} = a_{ik}/b$:

$$\sum_i\sum_j \alpha_{ij}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_j} = 1. \tag{2.23}$$

Введем единичный вектор нормали к фронту $\mathbf{n}$ формулой

$$\nabla\tau = \mathbf{n}/V,$$

где V, очевидно, есть скорость распространения разрыва. Тогда формула (2.23) перепишется так:

$$\sum_{i,j=1}^{3}\alpha_{ij}n_in_j = V^2. \tag{2.24}$$

Мы можем рассматривать полученное уравнение как формулу для определения значения фазовой скорости $V = V(\mathbf{n})$ в зависимости от направления распространения фронта. Зависимость фазовой скорости от направления распространения называют анизотропией (точнее – анизотропией скоростей). Отметим, что фазовые скорости фронтов, распространяющихся в соответствии с уравнениями, кинематически эквивалентных волновому уравнению, одинаковы для любых направлений распространения фронта. Такие уравнения (и только они) описывают изотропные среды.

Квадратичная форма (2.24) определена на кокасательном пространстве T_x^*, но записана нами в координатах объемлющего пространства. И в этом нет никакой ошибки, так как в случае декартовых координат оба пространства изоморфны в смысле любых операций, которые осуществляются над объектами этих пространств, если, конечно, пространство T_x^* рассматривается как постоянно прикрепленное к одной и той же точке $\mathbf{x}$. Однако эти пространства приходится различать в иных ситуациях. Предположим, к примеру, что мы преобразуем систему координат в целях диагонализации формы (2.24). Если коэффициенты формы от точки $\mathbf{x}$ объемлющего пространства не зависят, то это преобразование может рассматриваться одновременно как в T_x^*, так и в R^3, но если коэффициенты α_{ij} от $\mathbf{x}$ зависят, то в R^3 данная операция просто бессмысленна, в T_x^* она по-прежнему определена. Поэтому приводимая ниже диагональная форма

$$V^2 = \sum \lambda_i n_i^2 \tag{2.25}$$

не может рассматриваться как уравнение для всего пространства R^3. В каждой точке $\mathbf{x}$ углы направляющих косинусов $n_i = \cos\beta_i$ отсчитываются в (автономной от других точек) системе координат соответствующего пространства T_x^*.

Индикатриса фазовых скоростей и поверхность рефракции. Рассмотрим в T_x^* полярную систему координат (φ, θ, r), в которой координату r будем идентифицировать как значение *V*. Зависимости $r = V(\varphi,\theta)$ в координатном пространстве (φ, θ, r) отвечает поверхность, которую называют индикатрисой фазовой скорости.

Из уравнения (2.23) вытекает следующее выражение индикатрисы:

$$r = V(\varphi,\theta) = \sqrt{\lambda_1 \cos^2\varphi \sin^2\theta + \lambda_2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + \lambda_3 \cos^2\theta}\,. \tag{2.26}$$

Наряду с данной индикатрисой, рассматривается также индикатриса величины $1/V$, которую называют поверхностью рефракции. Поверхность рефракции $r = 1/V(\varphi,\theta)$ является трехосным эллипсоидом, его оси направлены вдоль координатных осей локальной системы координат, а величины полуосей совпадают с числами $1/\sqrt{\lambda_i}$. Действительно, если полярную координату r и компоненты вектора $\mathbf{n}$ выразить через декартовы координаты произвольной точки на индикатрисе, т. е. взять $r = \sqrt{\sum x_i^2}$ и $n_i = x_i/\sqrt{\sum x_i^2}$, а затем подставить эти выражения в уравнение $r = 1/\sqrt{\sum \lambda_i n_i^2}$, то мы получим уравнение трехосного эллипсоида $\sum \lambda_i x_i^2 = 1$. Величины $\sqrt{\lambda_i}$ суть значения фазовой скорости при распространении фронта в направлении осей данной координатной системы. Эти оси суть оси анизотропии в рассматриваемой точке среды. Отношения $\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}$ и $\sqrt{\lambda_3/\lambda_1}$ характеризуют степень анизотропности среды.

Полученную анизотропию называют эллиптической. Таким образом, каждое скалярное уравнение гиперболического типа, кинематически не эквивалентное классическому волновому уравнению, описывает эллиптическую анизотропию. Строго говоря, этот факт показан нами только для уравнений, коэффициенты которых не зависят от времени. Как легко сообразить, все остается верным и в общем случае, но направления осей и степень анизотропии могут зависеть от времени.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = \nu$, то индикатриса становится фигурой вращения. В каждой плоскости $\varphi = \mathrm{const}$ имеем плоскую индикатрису вида

$$V = \sqrt{\lambda \sin^2\theta + \nu \cos^2\theta}\,.$$

Поверхность рефракции

$$1/V = 1/\sqrt{\lambda \sin^2\theta + \nu \cos^2\theta}$$

естественно оказывается эллипсоидом вращения.

Уравнение (2.23) условимся называть уравнением эйконала для эллиптически анизотропной среды. Если среда однородна, то, как и классическое уравнение для изотропной среды, оно допускает решение в виде плоской волны:

$$\tau = \tau_0 + \frac{1}{V(n)}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}),$$

где $V(n)$ определяется согласно уравнению (2.26).

Имеются также решения, отвечающие волнам, распространяющимся из точечного источника в однородной среде. Естественно, что они имеют эллипсоидальные фронты

$$\tau = \tau_0 + \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}}, \text{ где } \mathbf{A} = \left\|\alpha_{ij}\right\|, \ \mathbf{A}^{-1} = \left\|a^{ij}\right\|. \quad (2.27)$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет уравнению эйконала для эллиптической анизотропии. Вычислим τ_{x_i}:

$$\tau_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\sum_k\sum_l a^{kl}x_k x_l} = \sum_k a^{ik}x_k \,/\, \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}}.$$

Подставим в формулу (2.23). Так как

$$\sum\sum \alpha_{ij}\tau_{x_i}\tau_{x_j} = \frac{\sum\sum\sum\sum a_{ij}a^{ik}a^{jl}x_k x_l}{\sum\sum a^{ij}x_i x_j} = 1,$$

то уравнение (2.23) выполнено.

Принцип локальности. Согласно современной традиции, уравнение эйконала выводится как следствие из уравнений движения среды. Следуя этой традиции, мы и вывели его из уравнений для акустических колебаний. В § 3 мы получим его как следствие из уравнений для электромагнитных и упругих колебаний в гуковской среде. Но нуждается ли оно в таком выводе? Не очевидна ли его правильность априори? Вопрос этот не праздный, хотя бы потому, что это уравнение (без каких-либо сомнений в его правильности) использовалось задолго до того, как были написаны уравнения распространения колебаний в классических сплошных средах. Во всяком случае, принцип Ферма и принцип Гюйгенса, эквивалентные уравнению эйконала, были первыми законами в теории распространения волн. Разумеется, нельзя оспорить того факта, что именно уравнения колебаний показывают, какие именно сущности распространяются в соответствие с этими великими принципами (разрывы, высокочастотные составляющие поля колебаний). Но давайте предположим, что если есть источник колебаний, то есть и нечто, чему можно приписать время распространения из источника в данную точку **x**. Пусть поле времен в некотором эксперименте описывается функцией $t = \tau(\mathbf{x})$. Наметим список предположений, который нас приведет непосредственно к уравнению эйконала. Это поможет нам уяснить, что же нужно обосновывать. Первое мы уже выяснили: следует обосновывать тот факт, что в поле колебаний есть это «нечто», чему можно приписать время распространения. И здесь (в этом месте) без уравнения колебаний обойтись трудно (если вообще возможно). Следующее предположение: это нечто, обладающее временем распространения, ни в какой точке среды не останавливается и не опережает физическое время. Иначе говоря, функция $\tau(\mathbf{x})$ непрерывна. Следует еще допустить, что она определена как однозначная функция хотя бы в некоторой окрестности источника. Предположим, что она не только непрерывна, но и дифференцируема. Но если функция

$\tau(\mathbf{x})$ определена и дифференцируема в некоторой области D, то в каждой точке этой области можно определить градиент $\nabla\tau$. Обозначим

$$|\nabla\tau| = 1/V\,. \tag{2.28}$$

Поскольку «длина» вектора $\nabla\tau$ совпадает с производной $\partial\tau/\partial l$ (где дифференцирование осуществляется в направлении нормали к фронту $\tau(\mathbf{x}) = \mathrm{const}$), которая по физическому смыслу обратна скорости в направлении $\mathbf{n} = \nabla\tau/|\nabla\tau|$, то V есть скорость распространения фронта (в данном эксперименте). Теперь, чтобы равенство (2.28) перестало быть только определением величины V, но стало бы еще и уравнением эйконала, необходимо допустить следующее: 1) величина V не зависит ни от каких особенностей источника, ни от его положения; 2) величина V не зависит от эволюции распространяющегося «нечто» в процессе распространения; 3) величина V определяется только физическими свойствами материала в точке $\mathbf{x}$ (точнее, в его малой окрестности): $V = V(\mathbf{x})$. Все эти предположения можно суммировать в одном предложении (*принцип локальности*): *значение V в любой совокупности экспериментов зависит только от свойств среды в малой окрестности точки $\mathbf{x}$ и не от чего больше*. Можно сказать и еще короче: геометрический закон распространения «нечто» имеет абсолютно локальную природу. Вот этих простых допущений и достаточно, чтобы вывести всю гигантскую совокупность теоретических фактов (включая принципы Ферма и Гюйгенса), касающихся геометрии волн в изотропных средах. Роль уравнений колебаний состоит в другом. Как уже было сказано, они определяют, что же распространяется по локальным геометрическим законам – это, во-первых. Во-вторых, они определяют совокупность физически различных волн, распространяющихся в среде с различными скоростями. В-третьих, они связывают значение скорости с другими физическими характеристиками среды.

Выше было показано, что в качестве «нечто», распространяющегося по геометрическим законам, могут быть взяты разрывы. Этим список идеальных (с геометрической точки зрения) элементов поля исчерпывается. Фазы гармонических колебаний уже распространяются иначе. Для иллюстрации возьмем простейшее из уравнений, обладающих классически эйконалом, – волновое уравнение (2.4) и подставим в него функцию $A(\mathbf{x})\exp[i\omega\tau(\mathbf{x})]$. Несложно получить, что волновое уравнение сводится к системе двух уравнений (отдельно для мнимой и вещественной частей комплекснозначного уравнения) относительно неизвестных функций $A(\mathbf{x})$ и $\tau(\mathbf{x})$:

$$|\nabla\tau|^2 - 1/V^2 + (1/\omega^2 A)\Delta A = 0,$$
$$\frac{\partial \ln A}{\partial x_i}\tau_{x_i} + (1/2)\Delta\tau = 0.$$

Второе из этих уравнений – классическое уравнение переноса для амплитуды, которое фигурирует и в геометрических приближениях, но первое уравнение показывает, что скорость распространения фазы гармонического колебания, вообще говоря, отлично от V. Она еще зависит и от частоты, и от изменения амплитуды в окрестности данной точки. Поскольку изменение амплитуды в окрестности точки зависит и от предыстории распространяющейся фазы, то имеет место нарушение локальности распространения. Исключение имеется только для плоской волны (когда и $\Delta\tau = 0$, и $\Delta A = 0$). Плоская волна (она существует только для однородной среды $V = \text{const}$) распространяется со скоростью, присущей среде. Те же выводы мы получили бы и для акустического уравнения.

§ 3. Уравнение эйконала для электромагнитных и упругих сред

Здесь мы рассматриваем вывод уравнений эйконала для уравнений, имеющих векторную форму, в том числе для основного уравнения колебаний упругой среды, как в изотропной так и анизотропной ситуациях. Показывается замечательный факт, состоящий в том, что максимальное число скоростей распространения волн непосредственно связано с размерностью вектора, характеризующего состояние среды.

Характеристические многообразия векторных гиперболических уравнений. Распространение сейсмических и электромагнитных волн характеризуется векторными уравнениями, поэтому нам нужно распространить результаты § 1 на векторный случай. Общую форму векторных гиперболических уравнений легко получить, если в скалярных уравнениях заменить скаляр u на вектор $\mathbf{u}$, а скалярные коэффициенты – на матричные. В частности, используя каноническую форму скалярного уравнения (1.6), получим

$$\sum \mathbf{A}_{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} - \mathbf{B} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \ldots = 0, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}$ – положительно определенные матрицы и $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, k-я компонента вектора $\mathbf{A}_{ij} \partial^2 \mathbf{u} / \partial x_i \partial x_j$ равна

$$\sum_{r=1}^{3} a_{ks}^{(ij)} \partial^2 u_s / \partial x_i \partial x_j \,. \tag{3.2}$$

В дальнейшем принятую в уравнении (3.1) форму записи дифференциальных операторов второго порядка будем называть их *матричным представлением*.

Далее мы в точности следуем пути, намеченному при исследовании скалярных уравнений. А именно переписываем уравнение (3.1) в новой системе координат:

$$\mathbf{A}'_{11} \mathbf{u}_{\xi_1 \xi_1} + \underset{\text{известно}}{\ldots\ldots} = 0,$$

где

$$\mathbf{A}'_{11} = \sum_{i,j}^{3} \mathbf{A}_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \mathbf{B} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 .$$

Видно, что вектор (вторых производных) $\mathbf{u}_{\xi_1 \xi_1}$ определяется, если $\det(\mathbf{A}'_{11}) \neq 0$. Стало быть, характеристическое многообразие определяется уравнением $\det(\mathbf{A}'_{11}) = 0$, или

$$\det \left\{ \sum \mathbf{A}_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \mathbf{B} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right\} = 0,$$

или

$$\det\left(\sum \mathbf{A}_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} - \mathbf{B} \right) = 0. \tag{3.3}$$

Электромагнитные волны. Изучение распространения разрывов векторных полей начнем с электромагнитных колебаний в непроводящей среде. Уравнение Максвелла для непроводящей среды записываются так:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \left(\partial \mathbf{E} / \partial t \right), \ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \left(\partial \mathbf{H} / \partial t \right); \tag{3.4}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{H}) = 0,\ \operatorname{div}(\mu \mathbf{H}) = 0. \tag{3.5}$$

Продифференцируем второе из уравнений (3.4) по времени и подставим в него выражение $\partial \mathbf{E} / \partial t$ согласно первому уравнению:

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot}\mathbf{H}\right) = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Применяя формулы векторного анализа, имеем

$$\frac{1}{\varepsilon}(\operatorname{grad}\ \operatorname{div}\mathbf{H} - \Delta\mathbf{H}) + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\times \operatorname{rot}\mathbf{H} = -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \tag{3.6}$$

Поскольку $\operatorname{div}\mathbf{H} \equiv \operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\mu\mathbf{H}\right) = \mu\mathbf{H}\cdot\operatorname{grad}\left(\frac{1}{\mu}\right) + \frac{1}{\mu}\operatorname{div}\left(\mu\mathbf{H}\right) = 0$, то (с учетом второго из уравнений (3.5)), уравнение (3.6) преобразуется к следующему виду:

$$\Delta\mathbf{H} + \ldots = \varepsilon\mu\left(\partial^2\mathbf{H}/\partial t^2\right),$$

где точками помечено слагаемое

$$-\operatorname{grad}(\mu\mathbf{H}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{\mu}) - \operatorname{grad}(\frac{1}{\mu})\times\operatorname{rot}\mathbf{H}.$$

Это слагаемое содержит только производные первого порядка от компонент вектора **H**, стало быть, не влияет на характеристическое уравнение.

Оператор $\Delta\mathbf{H}$ имеет компоненты

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 H_k}{\partial x_i^2}, \quad k = 1,2,3.$$

Отсюда можно вывести, что матрицы $\mathbf{A}_{ij}$ в уравнении (3.1) имеют элементы $\delta_{ij}\delta_{ks}$, поэтому характеристическое уравнение есть

$$\det\left(\sum_i\sum_j \delta_{ij}\delta_{sk}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_j} - \varepsilon\mu\delta_{sk}\right) = 0$$

или

$$\det\left(\sum_i \left(\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)^2\delta_{sk} - \varepsilon\mu\delta_{sk}\right) = \left(\sum_i\left(\frac{\partial\tau}{\partial s_i}\right)^2 - \varepsilon\mu\right)^3 = 0.$$

Это уравнение имеет трехкратный корень при $V = \sqrt{\varepsilon\mu}$:

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)^2 = \frac{1}{V^2}.$$

Мы опять получили классическое уравнение эйконала. Точно такое же уравнение получается и для вектора электрического поля E. Таким образом, разрывы электромагнитного поля в непроводящей среде распространяются со скоростью $V = \sqrt{\varepsilon\mu}$. Хотя уравнение Максвелла является векторным, кинематически оно эквивалентно скалярному волновому уравнению.

Упругие волны в изотропной среде. Поскольку в излагаемой следом теории упругой анизотропии существует устойчивая традиция не использовать знака суммирования, целесообразно уже здесь использовать соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу. В этих обозначениях уравнение эластодинамики для изотропного случая имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\lambda\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i})\right)=\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}. \quad (3.7)$$

Главные члены этого уравнения:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_j}+\mu\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_i}-\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}.$$

Первому слагаемому можно поставить в соответствие оператор $(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$. Его *матричное представление* определяется матрицами $\mathbf{A}_{ij}$, которые составлены из элементов $a_{ks}^{(ij)}=(\lambda+\mu)\delta_{ik}\delta_{js}$. Второе слагаемое есть оператор $\Delta\mathbf{u}$. Ему соответствует форма (3.2) при $a_{ks}^{ij}=\mu\delta_{ij}\delta_{ks}$. Наконец, $\mathbf{B}=\rho\mathbf{I}$. Подставляя в характеристическое уравнение, получаем

$$\det[(\lambda+\mu)\frac{\partial\tau}{\partial x_k}\frac{\partial\tau}{\partial x_s}+\mu\sum\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\right)^2\delta_{ks}-\rho\delta_{ks}]=0$$

или в матричной форме

$$\det[(\lambda+\mu)\nabla\tau\cdot(\nabla\tau)^T+(\mu|\nabla\tau|^2-\rho)\mathbf{I}]=0, \quad (3.8)$$

(в матричных формулах символ $\nabla\tau$ используется как вектор-столбец). Достаточно найти, при каких условиях матрица, стоящая под знаком определителя (обозначим ее **C**), имеет хотя бы одно равное нулю собственное значение. Пусть

$$|\nabla\tau|^2\equiv(\nabla\tau)^T\nabla\tau=1/V_P^2, \quad (3.9)$$

где $V_P^2=(\lambda+2\mu)/\rho$. Тогда $\nabla\tau(\nabla\tau)^T\nabla\tau=(1/V_P^2)\nabla\tau$. После простых преобразований получим, что $\mathbf{C}\nabla\tau=0\cdot\nabla\tau$. Следовательно, 0 является одним из собственных значений матрицы **C**, а условие (3.9) определяет характеристические многообразия. Легко видеть, что соответствующие уравнению (3.9) фронты распространяются со скоростью V_P. Покажем, что имеется еще один тип характеристических многообразий. Пусть

$$|\nabla\tau|^2=1/V_S^2, \quad (3.10)$$

где $V_S^2=\mu/\rho$, а вектор $\mathbf{q}$ ортогонален вектору $\mathrm{grad}\,\tau$: $(\nabla\tau)^T\mathbf{q}=0$. Тогда, как легко проверить, $\mathbf{Cq}=0\cdot\boldsymbol{\nabla\tau}$. В силу того что точно такой же результат был бы получен и для вектора ортогонального сразу, и $\nabla\tau$, и **q**, то полученный корень характеристического уравнения является кратным. Из формул для V_P и V_S следует, что $V_P>V_S$. С этим связаны и названия соответствующих волн: *P*-волны (*prime* – первые) и *S*-волны (*secondary* – вторые).

Однако в настоящее время эти названия скорее связываются с поляризацией волн, т. е. с направлением, в котором «поляризован» вектор смещения **u**. Выясним поляризацию *P*- и *S*-волн на примере распространения плоской волны в неоднородной среде. Пусть

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{a}f(t-\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/V). \quad (3.11)$$

Вектор **a** считается здесь постоянным. Любая ли поляризация вектора **a** возможна? В однородной среде ($\lambda=\mathrm{const},\ \mu=\mathrm{const},\ \rho=\mathrm{const}$) уравнению (3.7) можно придать форму

$$(\lambda+\mu)\text{grad div}\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u}=\rho\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2 \tag{3.12}$$

или (в более принятых в физике обозначениях)

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+\mu\nabla\cdot(\nabla\mathbf{u})=\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}. \tag{3.12‘}$$

Подставим решение (3.11) в уравнение (3.12’). Так как $\nabla\cdot\mathbf{a}f=-a_k n_k\dot{f}/V$, $-\nabla a_i n_i\dot{f}/V=n_i a_i n_i\ddot{f}/V^2$ и $\nabla\cdot(\nabla f)a_i=\ddot{f}a_i/V^2$, то получаем (после сокращения на $\ddot{f}$) новое уравнение

$$(\lambda+\mu)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}/V^2+\mu\mathbf{a}/V^2=\rho\mathbf{a}.$$

Положим сначала $\mathbf{a}=c\mathbf{n}$ (для произвольного скаляра c). Так как $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$, то уравнение удовлетворяется при $V=V_P$. А если положить $\mathbf{a}=\mathbf{q}$ при $\mathbf{q}\perp\mathbf{n}$, то уравнение снова удовлетворяется при $V=V_S$. Так как множество векторов $\mathbf{q}$ двумерно, а множество векторов $c\mathbf{n}$ одномерно, то других собственных векторов у линейного оператора, стоящего в левой части последнего уравнения, больше нет. Итак, P-волна поляризована в направлении распространения фронта (и ее называют продольной волной), а S-волна поляризована поперек направления распространения (ее называют поперечной волной).

Итак, в изотропной упругой среде, в отличие от электрического поля, существуют два семейства фронтов (и характеристических многообразий), распространяющихся с различными скоростями и удовлетворяющих классическому уравнению эйконала.

Анизотропная упругая среда. Колебания упругой анизотропной среды определяются уравнениями динамического равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{3.13}$$

и законом Гука для анизотропной среды

$$\sigma_{ij}=c_{ijkl}\varepsilon_{kl}=c_{ijkl}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \tag{3.14}$$

Четырехвалентный тензор упругих модулей c_{ijkl} симметричен относительно перестановки индексов внутри пар (i,j) и (k,l), а также самих этих пар. Благодаря указанной симметрии этот тензор имеет всего 21 независимый компонент (при общем числе 81).

Если ввести так называемую сжатую индексацию, то тензор упругих модулей удается записать в виде (двух индексной) симметричной матрицы 6х6 $\|c_{pq}\|$, в которой фигурируют независимые элементы в количестве 21. Это делается на основе следующего соответствия индексов $(i,j)\to p$, $(k,l)\to q$:

$$(1,1)\to1;\,(2,2)\to2;\,(3,3)\to3;\,(2,3),(3,2)\to4;\,(1,3),(3,1)\to5;\,(1,2),(2,1)\to6;$$

т. е. $c_{1111}=c_{11}$, $c_{1122}=c_{22}$, $c_{2323}=c_{44}$ и т. д.

Будучи тензором, комплект чисел c_{ijkl} зависит от используемой системы координат. При переходе от координатной системы (x_1,x_2,x_3) к $(x_{1'},x_{2'},x_{3'})$ он преобразуется по следующему закону:

$$c'_{i'j'k'l'}=a_{i'i}a_{j'j}a_{k'k}a_{l'l}c_{ijkl}, \tag{3.15}$$

где $a_{i'i}$ – элементы матрицы преобразования $\mathbf{A}$. Найдем правильную тензорную форму для последнего выражения. Тензор напряжений σ^{ij} физически определен как контравариантный тензор, а комплект деформаций ε_{kl} – как ковариантный тензор. Контравариантность тензора напряжений, связывающего напряжение $\mathbf{t} = \mathbf{F} / \Delta S$ с вектором нормали $\mathbf{n}$ к площадке dS, $\mathbf{t} = \mathbf{Tn}$, определяется следующими обстоятельствами: вектор силы $\mathbf{F}$ является контравариантным (так как контравариантны все векторы вида $\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}$ и т. д.), а вектор нормали, напротив, ковариантен, поскольку определяемая им плоскость характеризуется уравнением $n_1 dx^1 + n_2 dx^2 + n_3 dx^3 = a$, где справа стоит скаляр. Следовательно, правильная тензорная запись, связывающая $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$, выглядит так: $t^i = \sigma^{ij} n_j$, что и доказывает контравариантность тензора напряжений по обоим индексам. Ковариантность тензора деформации непосредственно следует из того, что мера деформации $\varepsilon_{kl} dx^k dx^l$ является скаляром (т. е. объектом, инвариантным относительно преобразования координат). Таким образом, комплект c^{ijkl} является контравариантным (по всем индексам) и правильная тензорная запись закона Гука выглядит так: $\sigma^{ij} = c^{ijkl} \varepsilon_{kl}$.

Упругая среда может обладать симметрией, означающей инвариантность комплекта чисел c_{ijkl} относительно ортогональных преобразований координат. Каждому такому преобразованию отвечает определенный элемент симметрии: ось симметрии порядка *n,* означающая инвариантность относительно поворота на угол $2\pi / n$ вокруг этой оси, плоскость симметрии и центр симметрии. Строго говоря, указанные элементы являются элементами касательных пространств $T_x R^3$, прикрепленных ко всем точкам физического пространства R^3, где определена анизотропная среда. Касательные пространства, прикрепленные к разным точкам пространства, различны, если тензор упругих модулей зависит от координат точки $\mathbf{x}$ физического пространства. Но если среда однородна (по своим свойствам), то касательные пространства можно и не вводить, пользуясь следующим правилом: если через точку $\mathbf{x}$ проходит некоторый элемент симметрии, то такой же элемент симметрии параллельно проходит и через любую другую точку физического пространства. При наличии элементов симметрии число независимых компонент уменьшается. Например, в изотропной среде, у которой все оси являются осями симметрии бесконечного порядка, а все плоскости – плоскостями симметрии, есть всего два независимых модуля (в качестве таковых можно взять λ и μ).

Как правило, для описания тензора упругих модулей используются кристаллографические системы координат, в которых какие-то (или все) координатные оси параллельны осям симметрии наибольших порядков, а координатные плоскости параллельны плоскостям симметрии (если таковые имеются). Понятно, что в случае изотропной среды любая декартова система координат является кристаллографической.

Симметричные тензоры σ_{ij} и ε_{kl} также имеют элементы симметрии, в точности совпадающие с элементами симметрии эллипсоида: три взаимно ортогональные оси симметрии (порядков $n = 2$ или ∞), три взаимно ортогональные плоскости симметрии и центр симметрии [3]. При этом каждой оси симметрии отвечает ортогональная ей

[3] Достаточно вспомнить, что первому тензору можно поставить в соответствие эллипсоид нормальных напряжений $\sigma^{ij} n_i n_j = \text{const}$, а второму тензору – эллипсоид деформации $\varepsilon_{kl} dx^k dx^l = \text{const}$.

плоскость симметрии. Не удивительно, что тензор упругих модулей, связывающий комплекты σ_{ij} и ε_{kl}, наследует некоторые из этих свойств. А именно:

1) *упругая (гуковская) среда всегда обладает центром симметрии;*

2) *если упругая среда обладает осью симметрии четного порядка, то она имеет и ортогональную (к оси) плоскость симметрии (и обратно).*

Первое из свойств непосредственно следует из формулы (3.15), так как центр симметрии определяется преобразованием $x_i \to -x_i$, для которого $a_{ii'} = -\delta_{ii'}$. Докажем второе. Предположим, что в кристаллографической системе координат ось x_3 параллельна оси симметрии четного порядка. Каждая ось четного порядка является и осью порядка 2, которому отвечает поворот вокруг данной оси на угол $2\pi/2 = \pi$. Так как повороту вокруг оси x_3 на угол φ отвечает матрица

$$\mathbf{A}_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

то оси второго порядка отвечает преобразование с матрицей $\mathbf{A}_3(\pi) = \mathrm{diag}[-1, -1, 1]$. Плоскости симметрии, ортогональной к оси x_3, отвечает преобразование координат $x_1 \to x_1, x_2 \to x_2, x_3 \to -x_3$ с матрицей $\mathbf{A}_3^{(-)} = \mathrm{diag}[1, 1, -1]$. Обозначим через κ_m число появлений номера m в последовательности $ijkl$. Значения m суть 1, 2, 3. Каждое из этих значений может встретиться 0, 1, 2, 3 или 4 раза. Таким образом, $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 4$. Согласно формуле (3.15), в случае преобразования $\mathbf{A}_3(\pi)$ имеем $c'_{ijkl} = (-1)^{\kappa_1+\kappa_2} c_{ijkl}$, а в случае преобразования $\mathbf{A}_1^{(-)}$ имеем $c''_{ijkl} = (-1)^{\kappa_3} c_{ijkl}$. Но в силу равенства $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = 4$ числа κ_3 и $\kappa_1 + \kappa_2$ имеют одинаковую четность. Следовательно, $c''_{ijkl} = c'_{ijkl}$, что и требовалось доказать.

Теперь легко показать, что при наличии указанных элементов симметрии многие из компонент тензора упругих модулей, записанного в кристаллографической системе координат, становятся равными нулю. А именно имеет место следующий принцип.

Принцип четного вхождения. Если координатная ось x_r есть ось симметрии порядка 2 (или, что равноценно, ортогональна плоскости симметрии), то все элементы c_{ijkl} с нечетным вхождением числа r (т. е. с нечетным значением κ_r) равны нулю.

Действительно, из условия симметрии мы должны иметь $c'_{ijkl} = (-1)^{\kappa_r} c_{ijkl}$. Ясно, что при нечетном значении κ_r это равенство возможно только в случае, когда $c_{ijkl} = 0$.

В частности, если в среде имеются три взаимно ортогональные оси симметрии второго порядка, то модули упругости c_{ijkl} с такой комбинацией индексов $ijkl$, в которую хотя бы одно из чисел 1, 2, 3 входит нечетное число раз, равны нулю. Отсюда можно вывести следующую структуру тензора упругих модулей в сжатой (двухиндексной) записи:

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}. \qquad (3.17)$$

В частности, для изотропной среды эта матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Естественно ожидать, что в изотропной среде наблюдается наименьшее число независимых элементов. Структура тензора **C**, определяемая формулой (3.17), будет называться квазидиагональной.

Далеко не всякий тензор c_{ijkl}, удовлетворяющий условиям симметрии, может описывать реальное физическое тело. Он должен удовлетворять и определенным термодинамическим условиям. Плотность упругой энергии деформированного тела (т. е. запасенная в результате упругого деформирования и отнесенная к единице объема энергия) определяется выражением

$$W=c_{ijkl}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}.$$

Эта величина всегда положительна. Из положительности W следует положительность формы

$$F=c_{ijkl}a_i b_j c_k d_l \qquad (3.18)$$

для любых чисел a_i, b_j, c_k и d_l.

Уравнение Кристоффеля. Подставим уравнение (3.14) в (3.13), одновременно сделав подстановку $i\to k, k\to j, j\to i, l\to s$ (с учетом симметрии). Получим

$$c_{ikjs}\frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j}+\ldots-\rho\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}=0. \qquad (3.19)$$

(Напомним, что точками опущены слагаемые, содержащие производные первого порядка от компонент вектора смещений. Поскольку коэффициентами в этих слагаемых являются производные от модулей c_{ijkl}, то в однородной среде эти слагаемые равны нулю.)

Видно, что элементы матриц A_{ij} в уравнении (3.3) равны $a_{ks}^{(ij)}=c_{ikjs}$. Таким образом, из уравнения (3.3) следует характеристическое уравнение

$$\det\left[c_{ikjs}\frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_j}-\rho\delta_{ks}\right]=0. \qquad (3.20)$$

Сделаем подстановку $\tau_{x_i} \equiv p_i = n_i / V$ и еще одну перестановку индексов: $i \to i, k \to j, j \to k, s \to l$. Это дает более удобную форму характеристического уравнения для упругой анизотропной среды:

$$\det\left[c_{ijkl} n_i n_k - V^2 \rho \delta_{jl}\right] = 0, \tag{3.21}$$

которое принято называть уравнением Кристоффеля. Для каждого фиксированного направления $\mathbf{n}$ распространения фронта оно может рассматриваться как уравнение относительно (фазовой) скорости $V = V(\mathbf{n})$.

Введем тензор $\Gamma_{jl} = c_{ijkl} n_i n_k$. Уравнение Кристоффеля запишется так:

$$\det\left[\Gamma_{jl}(\mathbf{n}) - \rho V^2(\mathbf{n}) \delta_{jl}\right] = 0. \tag{3.22}$$

Мы получили задачу на собственные значения матрицы Γ_{jl}. Из положительности формы F при произвольных числах a_i и d_l (при тоже произвольных, но фиксированных b_j и c_k) следует положительная определенность тензора Кристоффеля Γ_{jl} . Следовательно, уравнение Кристоффеля имеет три решения $\lambda_1^{(r)} > \lambda_2^{(r)} > \lambda_3^{(r)}$, определяющие три функции фазовой скорости $V_r(\mathbf{n}) = \sqrt{\lambda_r(\mathbf{n}) / \rho}$, и соответственно три типа волн. Как правило, первую (в порядке убывания скорости) называют qP- (квази P) волной, две другие называют быстрой qS-волной и медленной qS-волной. Как и в случае изотропной среды, сейчас эти названия скорее связываются с поляризацией волн, нежели со скоростями распространения. Если плоскую волну (3.11) подставить в уравнение эластодинамики для однородной анизотропной среды, которое получается из уравнения (3.19) отбрасыванием обозначенных точками слагаемых первого порядка, то несложно вывести, что вектор поляризации $\mathbf{a}$ обязан совпадать с одним из собственных векторов матрицы Кристоффеля. Таким образом, имеем три собственных вектора тензора Кристоффеля, отвечающие трем возможным ориентациям векторов поляризации – $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}$ и $\mathbf{a}^{(3)}$ – для данного направления вектора волновой нормали $\mathbf{n}$. В силу положительной определенности тензора Кристоффеля, все три вектора взаимно ортогональны. Как известно, собственные вектора определяются с точностью до множителя. Нормированные значения векторов $\mathbf{a}^{(r)}$ обозначаются $\mathbf{l}^{(r)}$: $\mathbf{a} = a\mathbf{l}, a = |\mathbf{a}|$. Если нормированный вектор $\mathbf{l}$ является собственным, то вектор $-\mathbf{l}$ также собственный.

Два (теоретически не исключено, что и все три) корня уравнения Кристоффеля могут совпадать. В подавляющем числе практических ситуаций совпадают корни квазипоперечных волн.

В конце § 2 выдвинут принцип локальности как минимальный физический принцип, необходимый для вывода уравнения эйконала. Какое он имеет отношение к упругой анизотропии? Разумеется, из него нельзя вывести существование трех волн. Этим же недостатком страдают и принцип Ферма, и принцип Гюйгенса. Но предположим, что этот факт известен из других соображений. Тогда принцип локальности означает, что для каждой из волн в равенстве (2.28) $V = V(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ (при $\mathbf{n} = \nabla\tau / |\nabla\tau|$) и не зависит от предыстории процесса. Однако в дальнейшем будет показана важная роль того, что функция $V(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ является однородной функцией степени 1, что легко выводится из уравнения Кристоффеля. Можно ли это вывести из принципа локальности? Можно, если переписать уравнение эйконала так: $\operatorname{grad}\tau = \mathbf{n}/V(\mathbf{x},\mathbf{n})$. Ясно, что справа должна стоять однородная функция степени 0, а так как **n** есть однородная функция степени 1, то $V(\mathbf{x},\mathbf{n})$ также обязана иметь эту же степень однородности.

Индикатрисы. Будем обозначать S^2 двумерную сферу единичного радиуса в любом пространстве, где она может быть определена. Например, в R^3 это множество точек **x**, находящихся на расстоянии 1 от начала координат. В пространстве $T^*_{\mathbf{x}}R^3$ это множество векторов **n** единичной длины ($|\mathbf{n}|=1$). Поверхность, представляющая геометрическое место точек $V(\mathbf{n})\mathbf{n}$ при $\mathbf{n}\in S^2$, называется индикатрисой фазовой скорости. Вместо индикатрисы фазовой скорости чаще рассматривается индикатриса «медленности» $\mathbf{n}/V(\mathbf{n})$, которая называется часто поверхностью рефракции. Если среда изотропна, то обе индикатрисы суть сферы радиуса V и $1/V$ соответственно. В анизотропной среде это не так. И поэтому нормаль **t** к плоскости, касающейся поверхности рефракции, не обязана совпадать с вектором **n**.

Далеко не всякий набор трех замкнутых однозначных поверхностей может претендовать на то, чтобы служить индикатрисами фазовых скоростей или медленностей. На самом деле, класс индикатрис – это довольно узкий класс алгебраических поверхностей, определяемый конечным набором параметров, число которых не превышает 21. Сами эти параметры также не произвольны, так как во многих случаях удовлетворяют условиям симметрии и во всех случаях термодинамического равновесия, из которых вытекает положительная определенность формы *F*. Для индикатрис установлен ряд общих свойств, которым они обязаны удовлетворять. Самое первое свойство – инвариантность фазовой скорости относительно замены **n** на **–n** следует непосредственно из уравнения Кристоффеля. Поэтому каждая индикатриса обладает центром симметрии.

Условие $p_1^2+p_2^2+p_3^2=1/V^2\neq 0$ означает, что решение $p_1=p_2=p_3=0$ невозможно. Стало быть, поверхность рефракции, определяемая уравнением

$$\det\left[c_{ijkl}p_ip_jp_kp_l-(p_1^2+p_2^2+p_3^2)\rho^2\right]=0,$$

не проходит через начало координат. Имеется еще ряд менее тривиальных общих свойств. К числу их относится, например, такое: наибольшая скорость самой медленной волны не превосходит наименьшую скорость самой быстрой. Отметим еще одно свойство. Пусть $V_1(\mathbf{n}), V_2(\mathbf{n}), V_3(\mathbf{n})$ – фазовые скорости, отвечающие направлению **n**. Если взять любые, но взаимно ортогональные три направления $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}$ и $\mathbf{n}^{(3)}$, то

$$\sum_{\alpha,k=1}^{3} V_\alpha^2(\mathbf{n}^{(k)})=\text{const}.$$

Сумма слева зависит только от выбора тензора упругих модулей. Оба указанных свойства получены в работах В. Альшица и Е. Лоте [1, 2].

Как и всякая гладкая поверхность, и индикатриса фазовой скорости, и поверхность рефракции локально (т. е. в окрестности некоторого направления **n**) могут быть охарактеризованы направлением нормали к поверхности, главными кривизнами K_1 и K_2 и ориентацией главных сечений. Величина $K=K_1K_2$ называется гауссовой кривизной.

Точку, в которой $K > 0$, называют (локально-) эллиптической, в противном случае – (локально-) гиперболической. В окрестности гиперболической точки поверхность имеет форму седла, в окрестности эллиптической точки она выпукла в ту или иную сторону. Если замкнутая гладкая поверхность всюду локально эллиптична, то она (глобально) выпукла. В общем случае поверхность рефракции может быть локально и выпуклой, и вогнутой, и седлообразной.

Имеет место очень важная *теорема*, которую мы приведем без доказательства: *если поверхность рефракции квазипродольной (самой быстрой) волны не имеет общих точек с поверхностями рефракции других волн, то она выпукла. Данное условие выпуклости достаточно, но не является необходимым.* В § 10 разъяснен физический смысл приведенного утверждения.

Насколько устойчивы решения уравнений Кристоффеля? Сильно ли изменятся значения фазовых скоростей и направлений векторов поляризации как при малом изменении вектора **n**, так и при малом возмущении тензора упругих модулей? Здесь приведены оценки, полученные стандартным методом возмущений, для фазовой скорости и нормированных векторов поляризации [1]:

$$\delta V_\alpha = \Delta_{\alpha\alpha} / \rho, \quad \delta \mathbf{l}^{(1)} = \frac{\Delta_{12}\mathbf{l}^{(2)}}{\rho(V_1^2 - V_2^2)} + \frac{\Delta_{13}\mathbf{l}^{(3)}}{\rho(V_1^2 - V_3^2)}$$

(возмущения для $\delta\mathbf{l}^{(2)}$ и $\delta\mathbf{l}^{(3)}$ получаются циклической перестановкой индексов). В этих формулах

$$\Delta_{\alpha\beta} = \delta\Gamma_{il} l_i^{(\alpha)} l_l^{(\beta)},$$

$\delta\Gamma_{il}$ – возмущение тензора Кристоффеля, обусловленное либо возмущением вектора волновой нормали, либо тензора упругих модулей. Все остальные величины относятся к невозмущенной ситуации. Из приведенных оценок следует, что значение фазовой скорости всегда непрерывно зависит от возмущений, тогда как ориентация вектора поляризации становится неустойчивой в ситуации с кратными корнями (и вблизи ее).

Из непрерывной зависимости значений фазовой скорости от возмущений и тензора упругих модулей и вектора следует непрерывная зависимость фазовой индикатрисы и поверхности рефракции от возмущений упругих модулей. Но поскольку обе индикатрисы являются алгебраическими поверхностями, то отсюда можно вывести более сильное свойство: гладкую зависимость деформации обеих индикатрис (за исключением направлений, для которых имеются кратные корни). В частности, имеет место непрерывная зависимость кривизн от таких возмущений. А отсюда уже можно вывести, что выпуклость является устойчивой характеристикой поверхности рефракции.

Особые направления. Направление волновой нормали **n** считается особым, если в этом направлении наблюдается хотя бы одно из следующих трех явлений, характерных для изотропной среды: 1) квазипродольная волна поляризована вдоль вектора **n**; 2) хотя бы одна поперечная волна поляризована ортогонально вектору **n**; 3) скорости двух (квазипоперечных) волн совпадают. Примерами особых направлений являются оси симметрии (если они есть). Если, скажем, вектор **n** параллелен оси симметрии второго порядка L_2 (инвариантность относительно вращения вокруг оси на угол $2\pi/2 = \pi$), то вектор поляризации может быть либо ортогонален, либо параллелен этой оси, иначе нарушится симметрия. Заметим, что при проверке симметрии каждый собственный вектор представлен парой $\mathbf{l}$ и $-\mathbf{l}$. Из условия взаимной ортогональности следует, что один из векторов поляризации направлен вдоль вектора **n**, а два ортогональны к **n**. Первые два явления имеют место. В системе координат, в которой орты $\mathbf{e}^{(r)}$ коллинеарны с векторами поляризации $\mathbf{e}^{(r)} \parallel \mathbf{a}^{(r)}$, волновая нормаль $\mathbf{n} = \mathbf{e}^{(1)} \equiv (1,0,0)$, а тензор Кристоффеля, очевидно, диагонален. Из формулы $\Gamma_{ij} = c_{ijkl} n_j n_k$ получаем $\mathbf{\Gamma} = \mathrm{diag}[c_{1111}, c_{2121}, c_{3131}]$, откуда

$$V_r = \sqrt{c_{1r1r} / \rho}\,. \tag{3.23}$$

Аналогичную ситуацию мы имеем и при распространении в направлении, ортогональном к плоскости симметрии, поскольку в упругости оба элемента симметрии друг друга обуславливают: если есть ось второго порядка, то плоскость ортогональная ей, есть плоскость симметрии и обратно.

Пусть имеется ось четвертого порядка. Тогда оба вектора поляризации квазипоперечной волны ортогональны вектору волновой нормали, но, кроме того, скорости их распространения должны совпадать. Именно в этом случае из двух пар векторов $\pm\mathbf{l}^{(2)}$ и $\pm\mathbf{l}^{(3)}$ можно составить комбинацию, имеющую вращательную симметрию четвертого порядка. В системе координат, в которой $\mathbf{e}^{(1)} \parallel \mathbf{a}^{(1)}$, тензор Кристоффеля имеет вид $\mathbf{\Gamma} = \mathrm{diag}[c_{1111}, c_{2121}, c_{2121}]$. Таким образом, для этой оси наблюдаются все три явления, характеризующие особое направление.

Если вектор **n** лежит в плоскости симметрии, то обязательно наблюдается второе из явлений. Векторы двух других волн параллельны плоскости симметрии, но в остальном их ориентации произвольны (при сохранении взаимной ортогональности). Нетрудно убедиться в том, что тензор Кристоффеля в системе координат, в которой орт $\mathbf{e}^{(2)}$ направлен перпендикулярно плоскости симметрии, имеет следующую структуру:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 & \Gamma_{13} \\ 0 & \Gamma_{22} & 0 \\ \Gamma_{13} & 0 & \Gamma_{33} \end{pmatrix}.$$

Фазовые скорости в этом случае вычисляются по формулам, которые ниже даны на примере трансверсально-изотропной среды.

Не следует думать, что особые направления связаны только с элементами симметрии. Докажем, в частности, что любая анизотропная среда (даже не имеющая осей и плоскостей симметрии), имеет хотя бы два особых направления первого типа (с чистой поляризацией продольной волны: $\mathbf{a} = \mathbf{n}$). Для этого (следуя Ф. И. Федорову) рассмотрим функционал

$$F(\mathbf{n}) = c_{ijkl} n_i n_j n_k n_l\,,$$

который непрерывен (как функция от **n**) и вследствие положительной определенности тензора Кристоффеля всегда положителен. Следовательно, он принимает на сфере $|\mathbf{n}| = 1$ как максимальное, так и минимальное значения, являющиеся экстремумами. Найдем экстремум этого функционала при условии $|\mathbf{n}| = 1$. Воспользовавшись методом неопределенных множителей Лагранжа, нужно найти экстремум функции

$$f = F - 2\lambda\left(\sum n_i^2 - 1\right).$$

Находим

$$\partial f / \partial n_s = 4(\lambda_{sjkl} n_j n_k n_l - \lambda n_s) = 0\,.$$

Если полученное уравнение сопоставить с уравнением Кристоффеля (3.21), то очевидно, что оно означает равенство $\mathbf{a}=\mathbf{n}$. Таким образом, для произвольного тензора упругих модулей существуют как минимум два направления (отвечающие минимуму и максимуму), в которых поляризация волны является чисто продольной.

Из взаимной ортогональности векторов поляризации следует, что всякое особое направление первого типа является и особым направлением второго типа.

Для нас представляют интерес особые направления, в которых имеет место последнее из перечисленных явлений – совпадение скоростей квазипоперечных волн. Напомним, что такие направления называются акустическими осями.

Тензор Кристоффеля $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{n})$ на акустической оси является симметричным тензором, который после диагонализации, достигаемой поворотом системы координат, имеет вид $\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda,\lambda]$ (где $\lambda=\lambda_2=\lambda_3$). Пусть $\mathbf{a}^{(1)}$ есть собственный вектор, отвечающий собственному значению λ_1. Тогда каждый вектор $\mathbf{a}$, ортогональный вектору $\mathbf{a}^{(1)}$, является собственным вектором тензора $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{n})$. Все эти векторы параллельны плоскости $P_\perp$, ортогональной к $\mathbf{a}^{(1)}$. Фактическая поляризация определяется начальными условиями конкретной задачи. Но, в отличие от ситуации, когда акустическая ось совпадает с осью симметрии порядка ≥ 4, эта поляризация не обязана быть «чистой» (т. е. ортогональной акустической оси). Вместе с тем, среди всех векторов $\mathbf{a}\parallel P_\perp$ имеется один вектор, который ортогонален вектору $\mathbf{n}$, задающему направление акустической оси. Очевидно, он параллелен пересечению плоскости $P_\perp$ и плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{a}^{(1)}$ и $\mathbf{n}$. Тем самым доказано, что акустическая ось (= особое направление третьего типа) одновременно является и особым направлением второго типа.

Пусть все компоненты тензора Кристоффеля (для некоторого направления $\mathbf{n}$) отличны от нуля:

$$\Gamma_{ij}\neq 0,\ i,j=1,2,3\,. \tag{3.24}$$

Это условие всегда можно выполнить поворотом системы координат. Тогда направление $\mathbf{n}$ определяет акустическую ось [12], если для него одновременно выполнены следующие два условия

$$R_1(\mathbf{n})\equiv(\Gamma_{11}-\Gamma_{22})\Gamma_{13}\Gamma_{23}-\Gamma_{12}(\Gamma_{13}^2-\Gamma_{23}^2)=0\,, \tag{3.25а}$$

$$R_2(\mathbf{n})\equiv(\Gamma_{11}-\Gamma_{33})\Gamma_{12}\Gamma_{23}-\Gamma_{13}(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{23}^2)=0\,. \tag{3.25б}$$

Если для некоторого направления $\mathbf{n}$ выполнено условие (3.24), то оно выполнено и в некоторой окрестности D_ε этого направления. Будем считать, что функции $R_1(\mathbf{n})$ и $R_2(\mathbf{n})$ определены на области D_ε. Поскольку на три компоненты вектора $\mathbf{n}$ наложено условие $|\mathbf{n}|=1$, то каждая из функций $R_1(\mathbf{n})$ и $R_2(\mathbf{n})$ является функцией двух переменных. Следовательно, каждое из уравнений $R_1(\mathbf{n})=0$ и $R_2(\mathbf{n})=0$ определяет линию на сфере, а точка пересечения этих линий – акустическую ось. Ей отвечает изолированная точка вырождения. Разумеется, нельзя исключить ситуацию, когда обе линии совпадают, определяя линию вырождения. Для анизотропных сред с низкой симметрией последнюю ситуацию можно считать нетипичной, так как в типичном случае две прямые, имеющие общую точку, пересекаются (но не совпадают)[4]. Однако среды, содержащие оси симметрии высокого порядка, могут содержать линии вырождения.

[4] Понятие «типичность» здесь используется как математический термин (его синонимами являются такие термины, как «в общем положении», «почти всегда»). Следующий пример поясняют содержание этого понятия: две случайно взятые прямые в плоскости в типичном случае пересекаются, тогда как две случайно взятые линии в пространстве в типичном случае не пересекаются.

К этому следует отметить, что вырождение, обусловленное пересечением линий (3.25а) и (3.25б) (при условии (3.24)), является не только типичной ситуацией, но и устойчивой. Малые возмущения тензора упругих модулей вызывают малое смещение линий (3.25а, б), но не устраняют сам факт пересечения. Очевидно, что линия вырождения не может быть устойчивой по отношению к произвольным возмущениям тензора **C**, устраняющим какие-то элементы симметрии. У нас еще будет повод вернуться к тем следствиям в геометрии индикатрис, которые обусловлены наличием акустической оси.

Обратим внимание на то, что критерий Хаткевича не имеет инвариантного характера, так как зависит от выбора системы координат. Если условие (3.14) нарушено, то одновременное обращение в нуль $R_1(\mathbf{n})$ и $R_2(\mathbf{n})$ не гарантирует вырожденности. Инвариантный критерий вырождения был построен в работе Альшица и Лоте [1]. Ими было показано, что, помимо функций $R_1(\mathbf{n})$ и $R_2(\mathbf{n})$, можно определить еще пять функций:

$$
\begin{aligned}
R_3(\mathbf{n}) &\equiv (\Gamma_{22}-\Gamma_{33})\Gamma_{12}\Gamma_{13}-\Gamma_{23}(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{13}^2),\\
R_4(\mathbf{n}) &\equiv (\Gamma_{11}-\Gamma_{22})(\Gamma_{11}-\Gamma_{33})\Gamma_{23}-\Gamma_{12}\Gamma_{13}(\Gamma_{11}-\Gamma_{33})+\Gamma_{23}(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{23}^2),\\
R_5(\mathbf{n}) &\equiv (\Gamma_{22}-\Gamma_{11})(\Gamma_{22}-\Gamma_{33})\Gamma_{13}-\Gamma_{12}\Gamma_{23}(\Gamma_{22}-\Gamma_{33})+\Gamma_{13}(\Gamma_{12}^2-\Gamma_{13}^2),\\
R_6(\mathbf{n}) &\equiv (\Gamma_{33}-\Gamma_{11})(\Gamma_{33}-\Gamma_{22})\Gamma_{12}-\Gamma_{13}\Gamma_{23}(\Gamma_{22}-\Gamma_{33})+\Gamma_{13}(\Gamma_{13}^2-\Gamma_{12}^2),\\
R_7(\mathbf{n}) &\equiv (\Gamma_{11}-\Gamma_{22})(\Gamma_{11}-\Gamma_{33})(\Gamma_{22}-\Gamma_{33})\Gamma_{12}+(\Gamma_{13}^2-\Gamma_{23}^2)(\Gamma_{22}-\Gamma_{33})+(\Gamma_{13}^2-\Gamma_{12}^2)(\Gamma_{11}-\Gamma_{22}),
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

которые: 1) вместе с $R_1(\mathbf{n})$ и $R_2(\mathbf{n})$ образуют систему линейно независимых функций (хотя все они могут быть выражены через $R_1(\mathbf{n})$ и $R_2(\mathbf{n})$); 2) при условии (3.14) обращаются в нуль вместе с $R_1(\mathbf{n})$ и $R_2(\mathbf{n})$. При этом одновременное обращение в нуль всего комплекта функций $R_i(\mathbf{n})$ является и необходимым, и достаточным условием вырождения независимо от структуры тензора Кристоффеля.

Анизотропия кристаллов. Выше мы рассуждали об индикатрисах вообще. Но множество всех упругих анизотропных сред подразделяется на классы сред с различными наборами элементов симметрии – осей симметрии различных порядков и плоскостей симметрии. Не любые сочетания элементов симметрии допустимы. Классификация упругих анизотропных сред тесно связана с классификацией кристаллов, а точнее с классификацией периодических (в пространстве) атомных конфигураций. Классификация кристаллов по сочетанию элементов симметрии была построена русским ученым Е. С. Федоровым и содержит 36 классов. Эти классы группируются в 7 сингоний (кубическая, орторомбическая, тетрагональная, тригональная, гексогональная, моноклинная, триклинная) исходя из наличия и сочетания «главных» элементов симметрии. Например, отличительным признаком кубической сингонии является наличие трех равноправных и взаимно ортогональных направлений, совпадающих с осями симметрии четного порядка (фактически второго или четвертого порядков). Отличительная особенность орторомбической сингонии является наличие трех взаимно ортогональных (но неравноправных!) осей симметрии второго порядка. В тетрагональной симметрии есть одна ось четвертого порядка. В тригональной – ось третьего порядка, в гексагональной – ось шестого порядка, в моноклинной есть либо одна ось второго порядка, либо одна плоскость симметрии (либо и то и другое), в триклинной – элементов симметрии (кроме, возможно, центра симметрии) нет. В каждой сингонии есть классы с более богатой и более бедной симметриями. Скажем, в кубической сингонии максимальная симметрия содержит три оси четвертого порядка, три оси третьего порядка и т. д. Тогда как в минимальной кубической симметрии осей четвертого и третьего порядков нет. Упругая анизотропия значительно беднее, что связано с бедностью симметрии тензоров напряжения и деформации. У нее всего 8 различных классов симметрий, причем каждой сингонии (кроме тетрагональной) отвечает класс упругой симметрии. Тетрагональная сингония представлена двумя упругими классами. При этом всякий кристалл некоторой конкретной сингонии в отношении упругих свойств обладает самым богатым – для данной сингонии – набором элементов симметрии. В одном случае, а именно в случае гексагональной сингонии, симметрия становится еще более сильной: ось шестого порядка становится осью бесконечного порядка. Такую среду называют трансверсально-изотропной.

Индикатрисы сред определенного класса симметрии наследуют элементы симметрии самой среды. Например, если среда имеет плоскость симметрии и ось симметрии второго порядка в этой же плоскости, или имеет две ортогональных плоскости симметрии, или две ортогональных оси симметрии второго порядка, то во всех этих случаях индикатрису достаточно задать в одном из восьми октантов пространства T^*R^3.

Трансверсально-изотропная среда. В качестве примера построения функций $V_r(n)$ рассмотрим наиболее часто применяемую в сейсмике модель трансверсально-изотропной среды. Это среда, в которой имеется одна ось симметрии бесконечного порядка. Любые направления, перпендикулярные этой оси, равноправны. Следовательно, плоскости, расположенные поперек оси симметрии, изотропны (откуда и проистекает название модели). В отдельных случаях наблюдается трансверсальная изотропия пород, сложенных листоватыми минералами. Такой вид анизотропии может быть характерен для глин, сланцев, серпентинитов и т. п. Но чаще трансверсально-изотропная модель возникает как модель квазианизотропии: объемы пород, сложенные из параллельных тонких слоев, образующих квазипериодическую систему или имеющие систему параллельных трещин, ведут себя по отношению к упругим колебаниям среды, имеющим длину волны, заметно большую, нежели отдельный слой или трещина, как трансверсально-изотропная среда.

Кристаллографическая система координат для трансверсально-изотропной (*TI*) среды выбирается так, что одна из осей (обычно, это ось $x_3 = Z$) с осью симметрии бесконечного порядка. В силу равноправности всех ортогональных этой оси направлений, оси $x_1 = X$ и $x_2 = Y$ могут быть направлены произвольно. Поскольку в плоскости XY все направления равноправны, то эту плоскость называют плоскостью изотропии.

Совокупность трех координатных осей удовлетворяет условиям теоремы о четном вхождении, поэтому тензор упругих модулей *TI*-среды относится к классу тензоров, которые в сжатой индексации имеют квазидиагональную структуру, выраженную формулой (3.17), но отличается определенными связями между элементами. В силу равноправности осей x_1 и x_2 номер 1 в каждом его вхождении в комбинацию $ijkl$ можно заменить на 2, одновременно заменив 2 на 1. Это приводит к равенствам

$$c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{44} = c_{55} \tag{3.27}$$

(последнее равенство, например, означает $c_{2323} = c_{1313}$). Потребуем теперь, чтобы плоская деформация в плоскости изотропии осуществлялась как в изотропной среде. Поскольку эта деформация зависит только от модулей $c_{11}=c_{1111}, c_{22}=c_{2222}$ и $c_{66}=c_{1212}$, то мы приходим к равенству

$$c_{11}-c_{12}=2c_{66}, \tag{3.28}$$

которое легко проверяется в изотропном случае.

Полученные соотношения между модулями можно получить и более формальным путем, осуществив поворот системы координат относительно оси x_3 на произвольный угол φ. В силу того что ось x_3 является осью бесконечного порядка, такой поворот не должен вывести структуру тензора из класса квазидиагональных тензоров (3.16). Поскольку после такого поворота ось x_3 для любого тензора данного класса остается осью симметрии, к полученному тензору автоматически будет применим принцип четного вхождения для числа 3. Но если он окажется применим и для чисел 1 и 2 при произвольном φ, то это и будет означать, что ось x_3 является осью симметрии бесконечного порядка. Множество модулей, не имеющих четного вхождения чисел 1 и 2, можно разбить на классы эквивалентности, представителями которого являются модули $c_{1211}=c_{16}, c_{1222}=c_{26}, c_{1233}=c_{36}, c_{1323}=c_{45}$. Все остальные модули этого множества получаются разрешенными перестановками индексов. Применяя формулу (3.15) (с учетом формулы (3.16) для матрицы $\mathbf{A}_3(\varphi)$) к указанным элементам, получаем

$$c'_{45}=(1/2)(c_{44}-c_{55})\sin 2\varphi,$$

$$c'_{63}=(1/2)(c_{23}-c_{13})\sin 2\varphi,$$

$$c'_{16}=-(1/2)\left[(c_{11}-c_{12})\cos^2\varphi-(c_{22}-c_{12})\sin^2\varphi)\right]\sin 2\varphi+(1/2)c_{66}\sin 4\varphi=-c'_{26}.$$

Теперь два последних равенства из (3.27) равносильны условиям $c'_{45}=c'_{36}=0$, а остальные равенства в (3.27) и (3.28) следуют из условия $c'_{16}=c'_{26}=0$. Таким образом, матрица упругих модулей трансверсально-изотропной среды записывается так:

$$[c_{pq}]=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{pmatrix}, \quad c_{66}=\frac{c_{11}-c_{12}}{2}.$$

В полярных координатах фазовая скорость не зависит от угла φ: $V=V(\theta)$ (в полярных координатах). Таким образом, исследуя зависимость от угла θ, можно ограничиться плоскостью $X0Z$ и положить $n_2=0,\ n_1=\sin\theta,\ n_3=\cos\theta$. Обратимся к уравнению Кристоффеля (3.21). Слагаемое $c_{ijkl}n_i n_k$ (не суммировать!), фигурирующее в определении матрицы Γ_{jl} не равно 0, если:

1) $i\neq 2$ и $k\neq 2$;

2) при $i=j$ имеем $k=l$;

3) при $i\neq j$ имеем $(i,j)=(k,l)$.

В частности,

$$\Gamma_{11} = c_{i1k1} n_i n_k = c_{1111} n_1^2 + c_{1313} n_3^2 = c_{11} \sin^2\theta + c_{33} \cos^2\theta .$$

Далее

$$\Gamma_{12} = c_{i1k2} n_i n_k = 0 = \Gamma_{21},$$

$$\Gamma_{13} = (c_{13} + c_{44}) \sin\theta \cos\theta = \Gamma_{31},$$

$$\Gamma_{22} = c_{66} \sin^2\theta + c_{44} \cos^2\theta ,$$

$$\Gamma_{23} = 0 = \Gamma_{32},$$

$$\Gamma_{33} = c_{44} \sin^2\theta + c_{33} \cos^2\theta .$$

Следовательно,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} c_{11} \sin^2\theta + c_{44} \cos^2\theta & 0 & c_{13} + c_{44} \sin\theta\cos\theta \\ 0 & c_{66} \sin^2\theta + c_{44} \cos^2\theta & 0 \\ c_{13} + c_{44} \sin\theta\cos\theta & 0 & c_{33} \cos^2\theta + c_{44} \sin^2\theta \end{bmatrix}.$$

Из структуры полученной матрицы сразу заключаем, что

$$\lambda_2 = c_{66} \sin^2\theta + c_{44} \cos^2\theta .$$

Этому собственному значению отвечает скорость распространения

$$V_2(\theta) = \sqrt{\frac{c_{66} \sin^2\theta + c_{44} \cos^2\theta}{\rho}} . \tag{3.29}$$

Как указано выше, собственный вектор матрицы Кристоффеля, отвечающий собственному значению λ_2 , определяет вектор поляризации данной волны $\mathbf{a}^{(2)}$. Очевидно, этот вектор параллелен оси Y кристаллографической системы координат. Вследствие того, что в рассматриваемой симметрии ничего не изменяется при любом повороте вокруг оси Z, данная волна всегда поляризована ортогонально оси симметрии бесконечного порядка и параллельно плоскости изотропии. Она всегда поляризована строго поперек направлению распространения, поэтому ее можно назвать чисто поперечной волной (S).

Сравнивая с формулой (2.26), заключаем, что для рассматриваемой волны среда эллиптически анизотропна. В соответствии с определением, данным в § 2, полученная функция $V(\theta)$ в полярной системе координат (r,θ,φ) определяет индикатрису фазовых скоростей $r = V(\theta)$, совпадающую в данном случае с эллипсоидом вращения.

Теперь найдем собственные числа подматрицы, образованной элементами $\Gamma_{11}, \Gamma_{13} = \Gamma_{31}$ и Γ_{33}:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,3} &= \frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{33}}{2} \pm \sqrt{\left(\Gamma_{11} + \Gamma_{33}\right)^2 - 4\Gamma_{11}\Gamma_{33} + 4\Gamma_{13}^2} = \\ &= \frac{1}{2}\left[A(\theta) + c_{44} \pm \sqrt{\left(A(\theta) - c_{44}\right)^2 + 4B \sin^2\theta \cos^2\theta} \right], \end{aligned} \tag{3.30}$$

где $A(\theta) = c_{11} \sin^2\theta + c_{33} \cos^2\theta$,

$$B = c_{44}(c_{11} + c_{33}) + (c_{13} + c_{44})^2 - (c_{11}c_{33} + c_{44}^2) \equiv (c_{13} + c_{44})^2 - (c_{44} - c_{11})(c_{44} - c_{33}) .$$

Этим собственным значениям отвечают фазовые скорости $V_{1,3} = \sqrt{\lambda_{1,3} / \rho}$. Полученная анизотропия уже не является эллиптической. Вообще, эллиптическая анизотропия в анизотропно упругих средах является довольно экзотическим частным случаем, возникая только в отдельных плоскостях, связанных с элементами симметрии среды. Индикатрисы фазовых скоростей для волн, отвечающих скоростям V_1 и V_3, по-прежнему являются поверхностями вращения. Волны, распространяющиеся с этими скоростями, обозначаются *qP* и *qS*. (Используются и другие обозначения для квазипоперечной волны, например *qSV*.)

В плоскости изотропии ($\theta = \pi / 2$) имеем $\lambda_2 = c_{66}, \lambda_1 = c_{11}, \lambda_3 = c_{44}$, следовательно, скорости всех волн постоянны независимо от направления распространения в плоскости изотропии. Соотношения между скоростями зависят, вообще говоря, от значений модулей. Но в плоскости изотропии всегда $\lambda_2 < \lambda_1$ (это следует из выражения модуля c_{66}). Поскольку в изотропной среде $c_{11} = \lambda + 2\mu$, а $c_{44} = \mu$, то в средах с умеренной анизотропией $\lambda_1 > \lambda_3$. Следовательно, собственному значению λ_1 отвечает самая быстрая волна.

Если величина B в формуле (3.30) равна нулю (условие Гассмана), то индикатриса фазовых скоростей волны, отвечающей первому собственному значению, становится эллипсоидом вращения с полуосью вдоль оси вращения $\sqrt{c_{11} / \rho}$ и другой полуосью $\sqrt{c_{33} / \rho}$. Третья волна в этом случае имеет сферическую индикатрису.

Замечание о числе скоростей распространения волн. Обратим внимание на различие в числе решений в рассмотренных выше трех примерах. Характеристическое уравнение, отвечающее системе уравнений Максвелла, имеет только один (трехкратный) корень и, соответственно, одну скорость распространения разрывов. В случае изотропной упругой среды характеристическое уравнение имеет две скорости (одна из них отвечает двухкратному корню), а анизотропная упругая среда характеризуется тремя скоростями. Изотропная среда является вырожденным случаем анизотропной среды, когда две S-волны распространяются с одной и той же скоростью и, строго говоря, не отличаются друг от друга. Могут ли существовать среды, характеризующиеся большим числом скоростей, чем 3? Легко усмотреть, что цифра 3 не случайна – она непосредственно связана с задачей определения характеристических (собственных) чисел матрицы 3x3, что в свою очередь обусловлено тем, что состояние среды описывается трехмерными векторами. В конечном счете – трехмерностью мира. Электромагнитные колебания, кажется, выпадают из этого правила, так как описываются двумя векторами **E** и **H**, но имеют одну скорость. Но, в силу уравнений (3.4), оба вектора друг с другом взаимнооднозначно связаны и – в математическом смысле – здесь только один независимый вектор. Тем не менее, ответ на поставленный вопрос положителен. Существуют процессы, характеризующиеся большим числом скоростей. Об этом пойдет речь в следующем параграфе.

§ 4. Волны в некоторых неклассических линейных моделях

В этом параграфе мы познакомимся с моделями, в которых число различных волн возрастает либо благодаря увеличению числа различных фаз в среде (взаимно проникающие континуумы), что увеличивает размерность вектора **u**, описывающего состояние среды, либо усложняются связи между элементами модели, что приводит к увеличению порядка уравнений. В реальном мире таких процессов гораздо больше, нежели описанных в § 3 рафинированных ситуаций. Упомянем, к примеру, пьезоэлектрические и пьезомагнитные тела и т.д. Здесь мы ограничимся только двумя примерами, первый из которых есть пористая среда, состоящая из упругого скелета и заполненной жидкостью порами. В реальности такая среда обладает целой гаммой разнообразных физических взаимодействий, включающих поверхностные силы натяжений на поверхности зерен, наличия двойного электрического слоя, капиллярные силы и т. д. В рассматриваемой ниже модели Био–Френкеля учитываются только движение вязкой жидкости в проницаемой пористой среде. Вязкость и есть тот механизм, который учитывает взаимодействие твердой и жидкой фазы. Если бы скелет обладал анизотропией, то естественно ожидать, что число скоростей окажется 3+1=4: три скорости связаны с анизотропией скелета (но не обязаны совпадать с ними из-за влияния жидкости) и одна скорость связана с жидкостью, описание состояния которой может быть сведено к заданию давления в ней (т. е. к одному скалярному параметру). Если же скелет изотропен, то остается 2 +1 скорости, в чем мы здесь и убедимся. Второй пример является, скорее, контрпримером: усложнение уравнения при наделении ее свойством гиротропии приводит к тому, что оно не обладает распространяющимся характеристическим многообразием. И это происходит именно потому, что распространение волны оказывается нелокальным, оно становится зависящим от предыстории. В заключение мы вернемся к упругости, записав уравнения упругой среды в виде системы первого порядка.

Волны в модели Био–Френкеля. Изотропная среда Био–Френкеля описывается следующими уравнениями:

$$\operatorname{grad}\,[(\lambda+\mu)e+Q\varepsilon]+\mu\Delta\mathbf{u}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_{11}\mathbf{u}+\rho_{12}\mathbf{V})+b\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}-\mathbf{V}),$$

$$\operatorname{grad}\,(Qe+\mathrm{R}\,\varepsilon)=\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{t}^2}(\rho_{12}\mathbf{u}+\rho_{22}\mathbf{V})-b\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u}-\mathbf{V}), \tag{4.1}$$

$$e=\operatorname{div}\mathbf{u},\quad \varepsilon=\operatorname{div}\mathbf{V},$$

где **u** – вектор смещения частиц скелета; **V** – вектор смещения частиц жидкости; Q, R – константы; $\rho_{11}=\rho_1+\rho_\alpha$, $\rho_{22}=\rho_2+\rho_\alpha$, $\rho_{12}=-\rho_\alpha$, $\rho_1=\rho_s(1-\psi)$ и $\rho_2=\rho_f\cdot\psi$; ρ_α – присоединенная плотность; символ f указывает на флюид, а s – на скелет; ψ – коэффициент пористости.

Введем вектор $\mathbf{w}=(u_1,u_2,u_3,V_1,V_2,V_3)$, тогда выписанные выше уравнения можно представить в виде (3.1) при $k,r=1,2,3,4,5,6$. Поэтому матрицы $\mathbf{A}_{ij}$ (при $i,j=1,2,3$) оказываются матрицами 6х6. Следовательно, характеристическое уравнение по-прежнему совпадает с уравнением (3.3). Осталось выяснить структуру соответствующих матриц. Естественно, что такие матрицы 6х6 можно представить в клеточной форме через четыре матрицы 3х3:

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{ij}^{(1)} & \mathbf{A}_{ij}^{(2)} \\ \mathbf{A}_{ij}^{(3)} & \mathbf{A}_{ij}^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Представим уравнение (4.1) в клеточной форме:

$$\begin{pmatrix} (\lambda+\mu)\mathbf{L}+\mu\Delta & Q\mathbf{L} \\ Q\mathbf{L} & R\mathbf{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \ldots = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \rho_{11}\mathbf{I} & \rho_{12}\mathbf{I} \\ \rho_{12}\mathbf{I} & \rho_{22}\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} + \ldots,$$

где опять точки означают слагаемые второго порядка, $\mathbf{L} = \operatorname{grad}\operatorname{div}$. Переход от уравнения колебаний к среде и характеристическому уравнению можно отобразить подстановкой

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} \to \frac{\partial\tau}{\partial x_i}\frac{\partial\tau}{\partial x_j}.$$

Отсюда нетрудно заключить, что клеточная форма матрицы $\mathbf{A}_{ij}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} (\lambda+\mu)\mathbf{L}_{ij}+\mu\mathbf{\Delta}_{ij} & Q\mathbf{L}_{ij} \\ Q\mathbf{L}_{ij} & R\mathbf{L}_{ij} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{L}_{ij}$ и $\mathbf{\Delta}_{ij}$ – матричные составляющие операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{\Delta}$. Используя полученные выше матричные представления операторов $\operatorname{grad}\operatorname{div}$ и $\mathbf{\Delta}$, запишем характеристическое уравнение в следующей форме:

$$\det\left\{\begin{pmatrix} (\lambda+\mu)\mathbf{p}\mathbf{p}^T+\mu|\mathbf{p}|^2\,\mathbf{I} & Q\mathbf{p}\mathbf{p}^T \\ Q\mathbf{p}\mathbf{p}^T & R\mathbf{p}\mathbf{p}^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{11}\mathbf{I} & \rho_{12}\mathbf{I} \\ \rho_{12}\mathbf{I} & \rho_{22}\mathbf{I} \end{pmatrix}\right\} = 0,$$

где $\mathbf{p} = \operatorname{grad}\tau$.

Теперь воспользуемся следующей теоремой линейной алгебры: если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, а также $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ перестановочны, то

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{AD}-\mathbf{BC}).$$

В нашем случае требуемая перестановочность матриц очевидным образом выполнена, поэтому характеристическое уравнение сводится к следующему:

$$\det\left\{\left[(\lambda+\mu)\mathbf{p}\mathbf{p}^T+\mu\big(\mathbf{p}\big(^2\,\mathbf{I}-\rho_{11}\mathbf{I}\right]\left[R\mathbf{p}\mathbf{p}^T-\rho_{22}\mathbf{I}\right]-\left[Q\mathbf{p}\mathbf{p}^T-\rho_{12}\mathbf{I}\right]\left[Q\mathbf{p}\mathbf{p}^T-\rho_{12}\mathbf{I}\right]\right\} = 0.$$

Легко проверить, что вектор $\mathbf{p} = \operatorname{grad}\tau$ по-прежнему является собственным вектором матрицы под знаком определителя с собственным значением

$$\left(\frac{M}{V^2}-\rho_{11}\right)\left(\frac{R}{V^2}-\rho_{22}\right)-\left(\frac{Q}{V^2}-\rho_{12}\right)^2,$$

где $M = \lambda + 2\mu$. Для того чтобы определитель оказался равным нулю, нужно найти такое значение *V*, при котором данное собственное значение превратилось бы в нуль. Мы получаем биквадратное уравнение относительно величины 1/*V*, которое имеет два положительных решения:

$$\frac{1}{V_{1,2}^2} = \frac{\rho_{22}M+\rho_{11}R \pm \sqrt{(\rho_{22}M-\rho_{11}R)^2+4(RM-4Q^2)\rho_{12}+4RQ\rho_{22}}}{2(RM-Q)^2}.$$

Скорость V_1 – самая быстрая волна. При $p \to 0$ $\rho_\alpha \to 0$ и $Q \to 0$ имеем $\rho_{12} = \rho_{22} = 0$. Следовательно, $1/V_{1,2}^2 = (\rho_s R \pm \rho_s R)/2RM$, откуда $1/V_1^2 = \rho_s / M \equiv 1/V_P^2$, а другой корень равен нулю. Естественно сохранить за самой быстрой волной название быстрой P-волны, а другую волну назвать медленной P-волной. Физический смысл медленной волны состоит в том, что она описывает распространение возмущения, связанного с движением жидкости относительно скелета.

Умножая матрицу под знаком детерминанта на вектор $\mathbf{q} \perp \operatorname{grad} \tau$, получаем, что он также является собственным вектором этой матрицы с собственным значением $(\mu / V^2 - \rho_{11})\rho_{22} - \rho_{12}^2$. Приравнивая эту величину нулю, получаем еще один корень

$$V_3 = \sqrt{\mu / \left(\rho_{11} - \rho_{12} / \rho_{22}\right)}.$$

При исчезновении жидкости $(\rho_{12} / \rho_{22} = 0)$ он совпадает с известным нам значением V_S. Следовательно, скорость V_S описывает распространение поперечной волны в пористой среде с жидкостью.

Характеристические многообразия в случае уравнений третьего порядка. Прежде чем рассмотреть следующий пример, нам потребуется выяснить, каким образом определяются распространяющиеся разрывы решений уравнений третьего порядка. Рассмотрим общее скалярное уравнение третьего порядка:

$$\sum_{ijk} b_{ijk} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{ij} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \ldots = 0.$$

Проще всего найти условия существования разрывов третьего порядка. Пусть искомая поверхность разрыва определяется уравнением $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Тогда введем новую систему координат $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, положив $\xi_1 = \Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. После этого мы найдем коэффициент b'_{111} при $\partial^3 u / \partial \xi_1$:

$$b'_{111} = \sum_{ijk} b_{ijk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}.$$

По условию если этот коэффициент отличен от нуля, то непрерывность всех остальных производных (а она имеет место по условию) будет детерминировать непрерывность $\partial^3 u / \partial \xi_1$. Значит, чтобы поверхность Φ имела разрыв третьего порядка, необходимо, чтобы она удовлетворяла следующему уравнению:

$$\sum_{ijk} b_{ijk} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = 0.$$

В случае векторного уравнения – по аналогии с уравнениями второго порядка – скаляры b_{ijk} заменяются на матрицы $\mathbf{B}_{ijk} = (b_{ijk}^{lm})$ и характеристическое уравнение станет таким:

$$\det \left[b_{ijk}^{lm} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_i} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} \right] = 0.$$

Гораздо сложнее выяснить возможность существования разрывов второго порядка. Такая возможность возникает, когда производные для различных переменных имеют разные порядки. В этом случае число рвущихся производных возрастает: помимо $\partial^2 u / \partial \xi_1^2$ рвутся также $\partial^3 u / \partial \xi_1^2 \partial \xi_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому задача определения соответствующей поверхности разрыва усложняется. Ее значительно проще решить одновременно с анализом динамики волн в рамках лучевого метода, но это выходит за рамки проблем, рассматриваемых в данном пособии. А сейчас мы приведем пример модели, в которой эта проблема возникает.

Модель сейсмической гиротропной среды. Говорят, что среда обладает гиротропией, если распространение поперечной волны сопровождается вращением плоскости поляризации (или самого вектора поляризации) поперечной волны. Формально явление гиротропии обусловлено тем, что напряжение связано не только с величиной деформации, но и с изменением деформации в малой окрестности точки **x**. Закон Гука (3.14) заменяется на следующий:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} + b_{ijklm}\partial\varepsilon_{kl} / \partial x_m , \tag{4.2}$$

где b_{ijklm} – 5-валентный тензор гирации инвариантен относительно вращений, не имеет центра симметрии и характеризуется в общем случае 45 независимыми компонентами. Выражая тензор деформации через компоненты смещения и используя имеющуюся симметрию индексов, мы можем прийти – после подстановки модифицированного закона Гука в уравнение динамического равновесия (3.11) – к следующей системе уравнений:

$$c_{ijkl}\partial^2 u_k / \partial x_j \partial x_l + b_{ijklm}\partial^3 u_k / \partial x_j \partial x_l \partial x_m + ... = \rho\partial^2 u_i / \partial t^2 . \tag{4.3}$$

Хотелось бы сразу обратить внимание, что если это уравнение записать в векторной форме, то тензор гирации будет представлен набором матриц $\mathbf{B}_{jlm} = (b^{ik}_{jlm}) = (b_{ijklm})$. (В общем уравнении эти матрицы индексировались как $\mathbf{B}_{ijk} = (b^{lm}_{ijk})$.)

Стандартный подход к изучению явления гирации состоит в следующем: среда предполагается однородной, решение ищется в виде плоской гармонической волны вида

$$\mathbf{a}e^{i\,\omega\,(t - \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}/V)} .$$

В силу линейности уравнения (4.3) и его инвариантности относительно времени, такое решение всегда существует. Чтобы найти, каковы должны быть векторная амплитуда волны **a** и скорость распространения *V*, подставим это решение в уравнение (4.3). В результате получается следующее уравнение для **a** и *V* (уравнение Кристоффеля):

$$\left(c_{ijkl}n_i n_l + (i\omega/V)b_{ijklm}n_i n_l n_m\right)a_k = \rho V^2 a_i . \tag{4.4}$$

Это равенство означает, что векторная амплитуда **a** должна быть собственным вектором матрицы $\left(c_{ijkl}n_i n_l + (i\omega/V)b_{ijklm}n_i n_l n_m\right)$, а величина ρV^2 – ее собственным значением. Таким образом, фазовая скорость *V* должна удовлетворять характеристическому уравнению

$$\det\left(c_{ijkl}n_i n_l + (i\omega/V)b_{ijklm}n_i n_l n_m - \rho V^2\delta_{jk}\right) = 0 . \tag{4.5}$$

Сразу бросаются в глаза два важных отличия от характеристических уравнений, встречавшихся ранее. Во-первых, скорость зависит от частоты. Такая зависимость в терминах характеристических многообразий вообще получена быть не может, ибо понятие разрыва (непосредственно!) с частотой не связано. Во-вторых, скорость более сложно входит в детерминант. Благодаря наличию множителя $(i\omega/V)$ перед элементом тензора гирации уравнение (4.5) (если его подробно расписать) оказывается уравнением четвертой степени относительно V^2, а это означает, что в гиротропной среде существуют четыре типа волны. Первые три – это знакомые уже нам квазипродольная и две квазипоперечные волны, скорости которых, естественно, отличаются от скоростей анизотропной среды без гирации. Четвертая волна присуща только гиротропной модели. Правда, скорость ее очень мала и в реальном анализе явлений в гиротропной среде она обычно не принимается во внимание [14]. Собственно, явление гирации состоит в следующем. Благодаря тому, что матрица в уравнении Кристоффеля (4.4) комплекснозначна, квазипоперечные волны (с близкими скоростями распространения) имеют различные фазы, благодаря чему и происходит вращение вектора поляризации в процессе распространения квазипоперечных волн.

Каковы же характеристические многообразия, отвечающие уравнению (4.3)? Согласно данному выше анализу общего уравнения третьего порядка, имеем уравнение

$$\det\left(b_{ijklm} \frac{\partial\tau}{\partial x_i} \frac{\partial\tau}{\partial x_l} \frac{\partial\tau}{\partial x_m} \right) = 0 . \tag{4.6}$$

(отличие в структуре индексов в сопоставлении с общим уравнением (4.1) связано с другой индексацией матриц коэффициентов b_{ijklm} – см. выше).

Положив $\tau_{x_i} = n_i / V$, мы увидим, что полученное направление определяет до трех возможных конусов направлений (поскольку компонента n_3 определяется первыми двумя, то при каждом фиксированном n_1 мы получаем алгебраическое уравнение для n_2). Никакая скорость не определяется. Поскольку данное уравнение получается из уравнения (4.5) при $\omega \to \infty$, то результат можно интерпретировать так, что на бесконечных частотах существуют только конусы направлений, по которым имеются гармонические, стоячие колебания (не имеющие скорости).

В этой модели разрывы второго порядка также существуют, однако это именно тот случай, когда используемая здесь техника не позволяет добиться соответствующего результата. Но заранее можно сказать, что результат будет отличным от результатов анализа ранее рассмотренных уравнений. Почему? Скорости распространения квазипродольных и квазипоперечных волн зависят от частоты. Это значит, что среда является диспергирующей. Рассмотрим распространяющийся квазисинусоидальный сигнал, имеющий начало в виде разрыва. Данная волна имеет свойства и того и другого идеального объекта: вступление обязано распространяться как разрыв, а основная фаза (экстремум) – примерно как синусоида. В силу того что среда диспергирующая, форма волны меняется в процессе распространения, а в этом случае скорости распространения фаз (экстремумов) и вступления различны.

В силу того что поверхность разрыва не может иметь скорость, зависящую от частоты, можно догадаться, что в случае распространения плоского разрыва соответствующее характеристическое уравнение должно совпасть с (4.5) в предельном случае при $\omega \to 0$ (предел при $\omega \to \infty$ уже определил характеристическое уравнение (4.6)), т. е. для плоских разрывов

$$\det\left(c_{ijkl} \frac{\partial\tau}{\partial x_j} \frac{\partial\tau}{\partial x_l} - \rho\delta_{jk} \right) = 0 . \tag{4.7}$$

Сравнивая с результатами § 3, мы видим, что наша догадка состоит в том, что первые вступления обычных волн в гиротропной среде распространяются так же, как в гуковской среде.

Мы видим, что нельзя противопоставлять различные подходы. В стандартном подходе используется точное решение для идеального объекта (гармоническая плоская волна) в идеальной ситуации (однородная среда). Если использовать аналогию с ньютоновской механикой, то такое решение отвечает прямолинейному движению тела в отсутствие силовых полей. Геометрический подход всегда развивался как некая возможность что-то оценивать для волн с неплоскими фронтами в неоднородных средах. Неудивительно, что какие-то особенности распространения либо теряются, либо достигаются более сложным путем. Но справедливости ради следует добавить, что если сразу искать решение в виде разрывов с плоскими фронтами, то уравнение (4.7) выводится, может чуть сложнее, чем (4.5).

Динамический анализ показывает и нечто более существенное. Дело в том, что для неплоских волн это уравнение сильно усложняется, в частности, в уравнении фигурируют и логарифмические производные амплитуд и вторые производные эйконала. То обстоятельство, что уравнение распространения разрыва по-разному выглядит для плоских и неплоских волн, на самом деле имеет фундаментальное значение. Оно означает, в частности, что для уравнения распространения гиротропных волн нельзя написать уравнения эйконала, как это мы делали для упругой (изотропной или анизотропной) среды. Если вспомнить, что для обоснования уравнения эйконала необходима абсолютная локальность физических законов распространения, то нетрудно понять, что второе слагаемое в уравнении (4.2) как раз и означает нарушение локальности. Несколько выходя за рамки этого издания, можно сказать, что локальность обусловливает свойство контактности преобразования фронтов: если два фронта в момент времени t_0 касаются в некоторой точке, то это касание сохраняется и в последующие моменты времени. Свойство контактности как раз и нарушается для распространения колебаний в гиротропной среде.

Характеристические многообразия для решений систем уравнений первого порядка. Мы по-разному строили анализ характеристических многообразий для скалярных и матричных уравнений, для уравнений второго и третьего порядков. Более того, анализ уравнений третьего порядка может быть полным только в том случае, когда производные и по пространственным переменным, и по времени имеют одинаковые порядки. Анализ характеристик значительно упрощается, если исследуемое уравнение удается записать как систему линейных уравнений первого порядка вида

$$a_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial t}-b_{ij}^{(k)}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}=0,\quad i,j,k=1,\ldots,n$$

(используется правило суммирования по повторяющемуся индексу) или в матричной форме

$$\left(\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{B}_k\frac{\partial}{\partial x_k}+\mathbf{C}\right)\mathbf{U}=0\,. \tag{4.8}$$

Система уравнений (4.8) называется *t*-гиперболической, если матрица **A** положительно определена, а матрицы $\mathbf{B}_k$ симметричны. В отношении характеристических многообразий *t*-гиперболические системы обладают такими же свойствами, что и уравнения второго порядка гиперболического типа.

Чтобы получить характеристическую поверхность для уравнения (4.8), нужно поступить стандартным образом (т. е. сделать соответствующую замену переменных и т.д.). В итоге получим уравнение

$$\det\left(\mathbf{A}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\sum\mathbf{B}_k\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}\right)=0\,.$$

Рассмотрим соответствующую систему для динамических уравнений упругости для изотропных сред. Обратимся к основным соотношениям, из которых выводится соответствующее уравнение второго порядка.

Система уравнений динамического равновесия

$$\partial\sigma_{ij} / \partial x_j = \rho\left(\partial^2 u_i / \partial t^2\right),\ i = 1, 2, 3 .$$

Закон Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda(\partial u_k / \partial x_k)\delta_{ij} + \mu(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) .$$

Если ввести вектор скорости смещения с компонентами v_i, то обе системы равенств можно записать в виде системы первого порядка относительно вектора **U** с компонентами $v_1, v_2, v_3, \sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$:

$$\partial\sigma_{ij} / \partial x_j = \rho\,\partial v_i / \partial t , \quad \partial\sigma_{ij} / \partial t = \lambda(\partial v_k / \partial x_k)\delta_{ij} + \mu(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i) . \qquad (4.9)$$

Эту систему можно записать в виде уравнения (4.8) с матрицей $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ и симметричными матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}_k$, которые записываются в следующей клеточной форме:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_3^T & \mathbf{P}_4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{S}_1^k & \mathbf{S}_2^k \\ (\mathbf{S}_1^k)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{S}_2^k)^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{P}_1 = \rho\mathbf{E}$,

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} a-b & 0 & -b \\ 0 & 2a & 0 \\ -b & 0 & a-b \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix},$$

$a = 1/2\mu,\ b = \lambda / 2\mu(3\lambda + 2\mu),\ \mathbf{S}_1^3 = \mathbf{0}, \mathbf{S}_2^3 = \mathbf{E}$, кроме того,

$$\mathbf{S}_1^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, как достигается симметризация системы (4.9) на более простом примере двумерной среды, когда вектор **U** имеет всего пять компонент $(v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{22})$.

Уравнения динамического равновесия запишем так:

$$\rho\frac{\partial v_1}{\partial t} - \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial y} = 0, \quad \rho\frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x} - \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial y} = 0 .$$

Уравнения, выражающие закон Гука для нормальных напряжений, разрешим относительно переменных $\partial v_1 / \partial x$ и $\partial v_2 / \partial y$, а затем запишем их в виде

$$h\sigma_{11} - g\sigma_{12} - \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0,$$

$$-g\sigma_{11} + h\sigma_{12} - \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0,$$

где

$$h = \frac{\lambda + 2\mu}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad g = \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} .$$

И наконец, закон Гука для касательного напряжения запишем, почти ничего не меняя:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t}-\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}=0.$$

В итоге получим матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -g & 0 \\ 0 & 0 & -g & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $\Phi = t-\tau(x,y)$ и $\partial\tau/\partial x = p, \partial\tau/\partial y = q$, получаем следующее уравнение для характеристической поверхности:

$$\det\begin{pmatrix} \rho & 0 & p & 0 & q \\ 0 & \rho & 0 & q & p \\ p & 0 & h & -g & 0 \\ 0 & q & -g & h & 0 \\ q & p & 0 & 0 & 1/\mu \end{pmatrix}=0.$$

Достаточно просто этот определитель вычисляется, если воспользоваться следующими рассуждениями С. К. Годунова [5]. Уравнения (4.9) записываются независимо от выбора декартовой системы координат. В частности, это означает, что они инвариантны относительно поворотов плоскости x, y. В свою очередь, это означает, что искомый определитель имеет зависимость от p и q вида p^2+q^2. В частности, при $y=0$ он зависит от p^2. Поэтому мы можем положить $q=0$, вычислить определитель, а затем заменить все вхождения p^2 на p^2+q^2. Разлагая по элементам первой строки, получаем

$$\Delta=\rho\begin{vmatrix} \rho & 0 & 0 & p \\ 0 & h & -g & 0 \\ 0 & -g & h & 0 \\ p & 0 & 0 & 1/\mu \end{vmatrix}+p\begin{vmatrix} 0 & \rho & 0 & p \\ p & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & p & 0 & 1/\mu \end{vmatrix}.$$

Первый определитель четвертого порядка разложим по элементам первой строки. В результате получим $\rho(h^2/\mu - g^2/\mu) - p(ph^2 - pg^2) = (\rho/\mu - p^2)\,(h^2-g^2)$. Второй определитель естественно разлагать по элементам первого столбца, что даст $-p(\rho h/\mu - p^2 h)$. Собирая все вместе, получаем

$$\Delta=\rho[(\rho/\mu-p^2)\,(h^2-g^2)-p^2h(\rho/\mu-p^2)]=(\rho/\mu-p^2)\,[\rho(h^2-g^2)-p^2h].$$

Заменив p^2 на p^2+q^2 и вычислив $h/(h^2-g^2)=1/(\lambda+2\mu)$, получим два корня: $p^2+q^2=\rho/\mu$ (уравнение эйконала поперечной волны) и $p^2+q^2=\rho/(\lambda+2\mu)$ (эйконал продольной волны). Отметим, что, в отличие от трехмерного случая, первый корень не является кратным.

ГЛАВА 2. ЛУЧИ И ПОЛЯ ВРЕМЕН В ИЗОТРОПНЫХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Исаак Ньютон (1642–1727) полагал, что свет – это поток корпускул, мельчайших частиц, распространяющихся вдоль специфических траекторий, называемых лучами. В последующие столетия было потрачено немало интеллектуальных усилий, чтобы доказать неправомочность представлений великого физика. Иногда казалось, что он окончательно опровергнут, а когда были открыты фотоны, то, казалось, что он окончательно победил. В конце концов, дуализм волна–частица стал общим местом в современной физике. Этот дуализм (в форме волна–фонон) имеет отношение и к распространению колебаний в твердом теле, если их рассматривать на микроуровне в рамках статистической физики. Однако этот физический дуализм непосредственно не связан с явлениями на макроуровне, которые описываются такими феноменологическими макроуравнениями, как динамические уравнения теории упругости (уравнения эластодинамики). Никому не приходит в голову связывать упругие волны с какими-либо материальными корпускулами. Между тем дуализм волна–частица содержится и в макроуравнениях. Но этот дуализм лучи–фронты имеет чисто математическую природу. Существование фронтов, как математических объектов, прямо следует из существования разрывов в решениях волновых уравнений. Лучи еще предстоит определить.

Первым, кто заметил формальное сходство вытекающих из уравнения эйконала задач с задачами для материальных или заряженных частиц, распространяющихся в силовых полях, был, по-видимому, выдающийся шотландский математик Гамильтон. Он же и развил методы исследования таких уравнений, объединяемые термином *гамильтонов формализм*. В этой главе вводится понятие лучей в рамках гамильтонова формализма, как для изотропных, так и для анизотропных сред, а также рассматривается задача Коши для уравнения эйконала, исследование и решение которой существенно опирается на систему уравнений луча.

§ 5. Уравнения Гамильтона и бихарактеристики. Лучи

В этом параграфе гамильтонов формализм рассматривается в достаточно общей форме для произвольных *гамильтонианов*, то есть функций, связывающих частные производные некоторого скалярного поля с локальными свойствами среды. Показывается, что при выполнении ряда общих условий из существования гамильтониана следует и существование лучей, которые описываются системой канонических уравнений, определяемых заданным гамильтонианом. Используемая общность изложения, с одной стороны, связывает геометрическую сейсмику с другими областями физики, а с другой стороны, показывает, что многие свойства, вытекающие из уравнения эйконала, на самом деле являются общими свойствами очень широкого класса уравнений.

Уравнение Гамильтона. В первой главе мы получили ряд характеристических уравнений, определяющих распространение разрывов поля колебаний в ряде сплошных сред, в том числе и в упругой среде. Возьмем для примера характеристическое уравнение (1.7), которое перепишем так:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \pm \sqrt{\sum_{i,k=1}^{3} b^{-1} a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}} = 0 . \tag{5.1}$$

Фактически мы имеем два уравнения, каждое из которых отвечает выбору знака перед корнем. Само наличие проблемы выбора знака имеет глубокий физический смысл, и мы еще не раз будем к ней возвращаться в связи с конкретными задачами. Сейчас мы условимся, что у нас есть основание выбрать какой-то из знаков.

Выписанное уравнение, как и все другие полученные в гл. 1 характеристические уравнения, имеют форму так называемых уравнений Гамильтона, широко применяемых в задачах механики при изучении движения частицы в силовом поле:

$$\varphi_t - H(\mathbf{x},\mathbf{p}) = 0, \tag{5.2}$$

где $\mathbf{p} = \partial\varphi / \partial\mathbf{x}$ (эта запись означает $p_i = \partial\varphi/\partial x_i, \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$). Функцию $H(\mathbf{x},\mathbf{p})$ принято называть гамильтонианом (по имени Гамильтона, выяснившего роль этих функций во многих задачах механики и развившего соответствующие формальные методы их исследования). В задачах механики **x** есть радиус-вектор, характеризующий положение частицы в пространстве, а вектор **p** есть ее импульс.

Важная особенность гамильтониана состоит в том, что $H(\mathbf{x},\mathbf{p})$ является однородной функцией степени 1 по переменной **p**. Напомним, что функция $f(\mathbf{x})$ является однородной степени m по переменной **x**, если $f(c\mathbf{x}) = c^m f(\mathbf{x})$ для всех **x**. Заменив в (5.1) $\partial\varphi/\partial x_i$ на $c\,\partial\varphi/\partial x_i$ непосредственно убедимся, что гамильтониан в уравнении (5.1) действительно является однородной функцией степени 1. Это оказывается верным и в других ситуациях. Для однородных функций выполнена следующая формула Эйлера:

$$x_i \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = mf(\mathbf{x}). \tag{5.3}$$

(Вывод этой формулы весьма прост: положим $g(c) \equiv f(c\mathbf{x}) = c^m f(\mathbf{x})$ и вычислим производную dg/dc при $c = 1$. Из дифференцирования $f(c\mathbf{x})$ по правилам сложной функции следует левая часть равенства (5.3). Если же дифференцируется функция $c^m f(\mathbf{x})$, получим правую часть его.) Еще одно свойство: если $f(\mathbf{x})$ есть однородная функция степени *m*, то $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_j$ есть однородная функция степени $m-1$. (Доказывается непосредственной подстановкой $x_i \to cx_i$, $i = 1, 2, 3$).

Бихарактеристики. Подобно тому как в анализе решений гиперболических уравнений, описывающих распространения колебаний в упругих, акустических и электромагнитных средах, важную роль сыграли характеристические многообразия, вдоль которых производные решений по нетрансверсальным переменным являются гладкими функциями, при анализе решений характеристических уравнений аналогичную роль играют линии $\gamma = \{t, \mathbf{x} = \mathbf{x}(t);\ t \in (0,T)\}$, вдоль которых не рвутся производные $\partial p_i / \partial t$, в силу того что они однозначно детерминируются значениями **x**, **p** и $d\mathbf{x}/dt$ на γ. Вектор $(1,\ d\mathbf{x}/dt)$ параллелен касательной к γ в пространстве-времени R^4, поэтому направление линии γ однозначно определяется вектором $d\mathbf{x}/dt$. Оказывается, что всякая характеристическая поверхность $\Phi : \varphi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$, являющаяся решением уравнения Гамильтона, состоит из таких линий, которые называются характеристиками данного уравнения. В силу того что решения уравнения Гамильтона сами являются характеристиками уравнения колебаний среды $\mathbf{L}u = 0$, то по отношению к последнему указанные линии называются бихарактеристиками.

Найдем уравнения бихарактеристик, предполагая, что гамильтониан дифференцируем по обеим переменным (по $\mathbf{p}$ не менее двух раз). Пусть линия $\gamma = \{t, \mathbf{x} = \mathbf{x}(t),\ t \in (0,T)\}$ принадлежит поверхности $\Phi : \varphi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$. Из условия $\varphi(t, \mathbf{x}(t)) \equiv 0$ (тождественно по t) следует

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial t} + p_i \frac{dx_i}{dt} = 0. \tag{5.4}$$

В дальнейшем анализе будем предполагать, что уравнение $\varphi(t, \mathbf{x}) = 0$, всегда разрешимое относительно t и φ, можно переписать в виде $\varphi \equiv \tau(\mathbf{x}) - t$. Напомним, что данное условие есть условие трансверсальности переменной t к поверхности Φ и фактически означает, что положение разрыва в физическом пространстве R^3 меняется с течением времени. В силу принятого соглашения, условие (5.4) перепишется так:

$$p_i\left(dx_i / dt\right) = 1, \tag{5.5}$$

где теперь $p_i = \partial\tau / \partial x_i = \tau_{x_i}$. В силу же принятого соглашения, уравнения Гамильтона запишутся следующим образом:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 1. \tag{5.6}$$

Подставляя $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t),\ \mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ в последнее равенство и дифференцируя его по t, получаем еще одно условие для всякой линии, принадлежащей характеристическому многообразию:

$$H_{x_i} \frac{dx_i}{dt} + H_{p_i} \frac{dp_i}{dt} = 0. \tag{5.7}$$

Мы получили следующее: какую бы мы ни взяли линию γ, лежащую в Φ, и какую бы мы ни взяли точку $(t, \mathbf{x}(t))$ на этой линии, соответствующие значения $\mathbf{p}, d\mathbf{x}/dt$ и $d\mathbf{p}/dt$ обязаны удовлетворять условиям (5.5), (5.6) и (5.7). При фиксированных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ каждое из условий (5.5) и (5.7) представляет систему линейных алгебраических уравнений относительно величин $y_i = dx_i / dt$ и $z_i = dp_i / dt$:

$$p_i y_i = 1; \tag{5.8}$$

$$H_{x_i} y_i + H_{p_i} z_i = 0. \tag{5.9}$$

Предположим, что векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{y} = d\mathbf{x}/dt$ на произвольной линии γ как-то зафиксированы. В этом случае в последнем уравнении неизвестен только вектор $\mathbf{z} = d\mathbf{p}/dt$, который этим уравнением определен еще быть не может. Поэтому произвольная линия на характеристической поверхности вовсе не обязана быть бихарактеристикой. Если бы это было бы не так, то понятие бихарактеристики утратило бы всякий смысл. Наша задача как раз и состоит в том, чтобы показать существование единственного однозначно определяемого заданными значениями $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ «направления» $d\mathbf{x}/dt$, для которого вектор $d\mathbf{p}/dt$ также определяется однозначно.

Заметим, что искомые соотношения на бихарактеристике должны выполняться не только для какой-то заданной поверхности Φ, но и для любой другой характеристической поверхности, проходящей через ту же точку $(t, \mathbf{x})$ (с другими значениями $\mathbf{p}$) либо проходящей через другую точку. Иными словами, условия (5.8)–(5.9) должны выполняться тождественно по $\mathbf{p}$ и по $\mathbf{x}$.

Теорема. Пусть гамильтониан $H(\mathbf{x},\mathbf{p})$ обладает непрерывными и ограниченными в некоторой области D производными $H_{x_i}, H_{p_i}, H_{x_i p_j}$ и $H_{p_i p_j}$, при этом $rank\,(H_{p_i p_j}) > 1$ (здесь $rank\,\mathbf{A}$ есть ранг матрицы **A**). Тогда в области D характеристическая поверхность может быть покрыта системой линий (бихарактеристик), удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \tag{5.10}$$

Условие (5.9) проверяется тривиально. Подставим первое из соотношений (5.10) в (5.8), в левой части последнего получим $p_i \partial H / \partial p_i$. Теперь осталось применить формулу Эйлера (5.3). Условие (5.8) выполняется тождественно по $\mathbf{p}$ и по **x**.

Пока мы показали только то, что определение векторов **y** и **z** в виде уравнений (5.10) согласуется с тем, что соответствующая линия $(t, \mathbf{x}(t))$ принадлежит некоторому характеристическому многообразию. Дальнейший план доказательства таков. Сначала мы убедимся в том, что выбор

$$dx_i / dt = \partial H / \partial p_i \tag{5.11}$$

действительно детерминирует второе из соотношений (5.10). Затем мы покажем, что других таких направлений $d\mathbf{x}/dt$ нет. А уже отсюда выведем существование самих линий бихарактеристик. «Направление», определяемое формулой (5.11), будем обозначать $\mathbf{y^0}$. В фиксированной точке $\mathbf{x}$ оно является функцией вектора $\mathbf{p}$: $\mathbf{y^0} = \mathbf{y^0}(\mathbf{p})$.

С учетом выражения (5.11) условие (5.9) запишется так: $H_{p_i} z_i = -H_{x_i} H_{p_i}$ или

$$H_{p_i} \tilde{z}_i = 0, \tag{5.12}$$

где $\tilde{z}_i = z_i + H_{x_i}$. Выписанное условие должно быть выполнено тождественно по **p**. Продифференцируем обе части условия (5.12) по переменной p_j. Получим соотношения

$$H_{p_i p_j} \tilde{z}_i = -H_{p_i}\left(\partial \tilde{z}_i / \partial p_j\right), \quad j = 1, 2, 3. \tag{5.13}$$

Покажем, что определитель матрицы $(H_{p_i p_j})$ в левой части равен нулю. Для этого рассмотрим величину

$$p_i H_{p_i p_j} \equiv p_i \left(\partial H_{p_j} / \partial p_i\right).$$

Поскольку H_{p_j} есть однородная функция степени 0, то величина справа есть 0. Следовательно, вектор **p** есть собственный вектор матрицы $(H_{p_i p_j})$, отвечающий нулевому собственному значению. Наличие собственного значения, равного нулю, означает, что матрица $(H_{p_i p_j})$ вырождена и ее определитель равен нулю. Но тогда система линейных уравнений может иметь отличное от нуля решение только в том случае, когда правая часть равна нулю. Предположим, что так и случилось:

$$H_{p_i}\left(\partial \tilde{z}_i / \partial p_j\right) = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Но в этом случае вектор с компонентами $\tilde{z}_i$ удовлетворяет следующему набору условий:

$$H_{p_i} \tilde{z}_i = 0 \ \text{ и } \ H_{p_i p_j} \tilde{z}_i = 0, \quad j = 1, 2, 3. \tag{5.14}$$

Покажем, что полный ранг этой системы равен 3. По условию теоремы ранг матрицы $(H_{p_i p_j})$ больше 1. В то же время, как только что было показано, эта матрица выроождена.

Следовательно, ее ранг равен двум и ее столбцы, рассматриваемые как векторы, принадлежат некоторой плоскости Q трехмерного линейного пространства. Тогда выведенные выше равенства $H_{p_i p_j} p_i = 0,\ j = 1, 2, 3$, в свою очередь, означают, что вектор $\mathbf{p}$ ортогонален любым векторам этой плоскости. Но он не ортогонален вектору $H_{\mathbf{p}} = (H_{p_1}, H_{p_2}, H_{p_3})$, так как по свойству однородных функций степени 1, имеем $H_{p_i} p_i = 1 \neq 0$. Таким образом, вектор $H_{\mathbf{p}}$ не лежит в Q. Поэтому полный ранг системы (5.14) равен 3. Единственное решение системы (5.14) есть $\tilde{z}_i = 0\ (i = 1, 2, 3)$, следовательно,

$$dp_i / dt = -\partial H / \partial x_i . \tag{5.15}$$

Мы показали, что направление $\mathbf{y}^0$ линии γ, определяемое согласно соотношению (5.11), детерминирует выбор вектора $\mathbf{z} = \mathbf{z}^0$ в виде уравнения (5.15). Теперь нужно показать, что других таких направлений больше нет.

Лемма. Если, помимо $\mathbf{y}^0$, существует еще одно направление $\mathbf{y}^1$, для которого соответствующее значение $\mathbf{z}^1$ вектора $\mathbf{z}$ определяется однозначно, то это верно и для любого другого направления $\mathbf{y}$.

Данная лемма является простым следствием линейности всех выписанных условий и размерности 2 для подпространства допустимых направлений. Любое допустимое направление $\mathbf{y}$ в этом подпространстве является линейной комбинацией $\mathbf{y}^0$ и $\mathbf{y}^1$. В силу линейности, решение $\mathbf{z}$, отвечающее направлению $\mathbf{y}$, равно такой же линейной комбинации решений $\mathbf{z}^0$ и $\mathbf{z}^1$.

Следствие. Чтобы показать, что существует только одно направление, детерминирующее вектор $\mathbf{z}$, достаточно указать одно (любое) направление $\mathbf{y}$, для которого это не так.

Определим векторную функцию $\mathbf{y}'(\mathbf{p})$ так, что при каждом $\mathbf{p}$ значение $\mathbf{y}'(\mathbf{p})$ допустимо, отличается от $\mathbf{y}^0(\mathbf{p})$ и, кроме того, $H_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}' \equiv H_{x_i} y_i' = a(\mathbf{p}) \neq \mathrm{const}$. Это всегда можно сделать. Действительно, положим $a(\mathbf{p}) = H_{\mathbf{x}} \mathbf{y}^0(\mathbf{p})$. Если определенная таким образом функция $a(\mathbf{p})$ не постоянна (а это должно быть в так называемом типичном случае), то поступаем следующим образом. При каждом значении $\mathbf{p}$ условия $p_i y_i' = 1$ и $H_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}' = a(\mathbf{p})$ совместны (поскольку они выполняются для $\mathbf{y}(\mathbf{p})$). Следовательно, они определяют одномерное многообразие (прямую) $l(\mathbf{p})$, являющуюся пересечением двух плоскостей. Выберем на этой линии любую точку, отличающуюся от $\mathbf{y}^0(\mathbf{p})$. Полученное значение $\mathbf{y}'(\mathbf{p})$ при непрерывном изменении $\mathbf{p}$ легко изменять непрерывно при $\mathbf{y}'(\mathbf{p}) \neq \mathbf{y}(\mathbf{p})$. Если же так случилось, что $H_{\mathbf{x}} \mathbf{y}^0(\mathbf{p}) = a_0 = \mathrm{const}$, то всегда найдется такой интервал значений $(a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$, значения из которого совместны с условием $p_i y_i' = 1$ для любых $\mathbf{p}$ и в котором можно определить функцию $a(\mathbf{p}) \neq \mathrm{const}$.

Из условия (5.9) имеем

$$H_{p_i} z_i = -H_{x_i} y_i' = a(\mathbf{p}) \neq \mathrm{const} .$$

Предположим, что для всякого значения $\mathbf{p}$ найдется такое $\mathbf{z}(\mathbf{p})$, которое является решением этого уравнения. Тогда последнее уравнение можно продифференцировать по p_j:

$$H_{p_i p_j} z_i = -H_{p_i} \frac{dz_i}{dp_j} + \frac{da}{dp_j}. \tag{5.16}$$

Мы видим, что z_i тождественно не равно нулю, так как в противном случае $dz_i / dp_j \equiv 0$ и мы получим $da / dp_j \equiv 0$, что противоречит условию. Пусть

$$H_{p_i} \frac{dz_i}{dp_j} \neq \frac{da}{dp_j}. \tag{5.17}$$

Поскольку правая часть в уравнении (5.16) отлична от нуля, а $\det(H_{p_i p_j}) = 0$, то ненулевое решение возможно, если правая часть является вектором, принадлежащим подпространству, порождаемому собственными векторами матрицы $(H_{p_i p_j})$ с ненулевыми собственными значениями. Легко, однако, немного изменить выбор функции $a(t)$, чтобы избежать такой ситуации. Пусть теперь

$$H_{p_i} \frac{dz_i}{dp_j} \equiv \frac{da}{dp_j}.$$

Но тогда для уравнения (5.16) возможно только нулевое решение, что несовместно с условием (5.17). Полученные противоречия и говорят о том, что для направления $\mathbf{y}'(\mathbf{p})$ решение для $\mathbf{z}$ не существует.

Поскольку в каждой точке характеристического многообразия $\Phi : \varphi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$ заданы значения $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$, то тем самым задано и единственное направление $d\mathbf{x} / dt$, обеспечивающее непрерывность производной $d\mathbf{p} / dt$. В каждой точке Φ задан касательный вектор $(1, d\mathbf{x} / dt)$. В таком случае говорят, что на многообразии Φ определено векторное поле. Интегральные кривые этого поля (т. е. линии, касательные к которой суть вектора данного векторного поля) и есть бихарактеристики. Теорема доказана.

Бихарактеристика – это такая линия в пространстве-времени, вдоль которой вектор $\mathbf{p}$ может быть предсказан с более высокой точностью, чем поперек. Действительно, пусть в некоторой точке t_0 на бихарактеристике заданы значения $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{p}^0$. Согласно доказанному выше, этими данными однозначно определяется и величина $\mathbf{z}^0$, так что $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^0 + \mathbf{z}^0 \cdot (t - t_0) + O(|t - t_0|^2)$. Тогда как для направления, ортогонального к бихарактеристике, можно сказать только то, что вектор $\mathbf{p}$ мало отличается от $\mathbf{p}^0$. Иначе говоря, имеет место дефицит информации для ортогональных направлений. Поэтому данные на бихарактеристике не могут быть использованы для построения других бихарактеристик.

Напомним, что характеристическое многообразие Φ определено в пространстве-времени R^4. Всякое его сечение $\varphi(t = t' = \text{const}, x_1, x_2, x_3)$ есть фронт – поверхность в физическом пространстве R^3. Пересечение фронта с бихарактеристикой $(t, \mathbf{x}(t))$ есть точка $\mathbf{x}(t')$ физического пространства. При изменении t эта точка перемещается вдоль бихарактеристики, как и вдоль проекции бихарактеристики на физическое пространство. Последнее перемещение непосредственно описывается функцией $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$. Соответствующая траектория в R^3 называется *лучом*. Итак, *луч* – это траектория, вдоль которой перемещается одна из точек фронта. Через каждую точку фронта проходит один и только один луч, вдоль которого эта точка перемещается.

Интерпретация бихарактеристики как траектории точки в пространстве-времени приобретает точный физический смысл, если вспомнить, что в физике уравнение Гамильтона используется для описания движения частицы в силовом поле. В физической интерпретации вектор **p** есть импульс частицы.

Уместно здесь вернуться к замечаниям, сделанным в начале параграфа. Именно «разрывная» интерпретация геометрической теории распространения колебаний возвращает нас к «корпускулярной» ньютоновской концепции природы света. Современникам Френеля такая концепция уже казалась весьма ограничительной. Но, как показано в [15], именно разрывная» концепция не только в той же мере возвращает нас к «волновой» концепции Гюйгенса, непримиримого противника Ньютона, но и показывает, что принцип Гюйгенса характеризует значительно более широкий класс, чем распространение волн. Многие явления (конечно, не все!), которые современникам Френеля представлялись выходящими далеко за рамки ньютоновского подхода, находят свое объяснение и в излагаемой здесь трактовке геометрической теории. Можно сказать просто: дуализм фронт–лучи (характеристика–бихарактеристика) и есть тот контрапункт, который объединяет концепции великих наших предшественников и примиряет их друг с другом.

Проведение лучей. Выше было показано, что бихарактеристики (а следовательно, и лучи) можно построить для всякого характеристического многообразия, если в каждой его точке $\mathbf{x}$ определить векторы $\mathbf{p}$ и $d\mathbf{x}/dt$ (последний – по формуле (5.11)). На практике же поступают наоборот – строят бихарактеристики (лучи), а затем уже характеристическое многообразие определяется как совокупность всех своих характеристик.

Зададимся вопросом: какая минимальная информация необходима для построения бихарактеристики (луча)? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к построенной выше системе *канонических* уравнений (5.10). Так как для заданного гамильтониана $H(\mathbf{x},\mathbf{p})$ правые части этой системы – известные функции, то канонические уравнения образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно шести неизвестных функций $x_i(t), p_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$. Для этой системы можно поставить задачу Коши с начальными условиями:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \ \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}^0. \tag{5.18}$$

Для тех условий, которые фигурировали выше в формулировке теоремы, поставленная задача Коши имеет единственное решение, существование которого гарантируется на некотором невырожденном интервале времени.

Следует заметить, что если мы интересуемся только трассированием лучей и построением характеристического многообразия, то одну и ту же систему лучей можно построить, по-разному определяя гамильтониан. Например, вместо уравнения (5.6) можно использовать уравнение

$$F(\mathbf{x},\mathbf{p}) = c$$

при $F(\mathbf{x},\mathbf{p}) = f(H(\mathbf{x},\mathbf{p})), c = f(1)$, $f(r)$ – однозначная функция скалярного аргумента. Система канонических уравнений по-прежнему будет определяться формулами, подобными (5.10), при замене H на F и замене t на новый параметр на луче. Действительно,

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = \frac{df}{dr}\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{df}{dr}\frac{dx_i}{dt}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{df}{dr}\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{df}{dr}\frac{dp_i}{dt}.$$

Поэтому, если положить

$$d\lambda = (df/dr)^{-1}dt, \tag{5.19}$$

то канонические уравнения будут эквивалентны следующим:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Начальные условия остаются такими же.

Если параметр λ не совпадает со временем, то возникает задача определения времени в каждой точке луча. Эта задача решается просто, если известна функция $f(r)$, связывающая исходный гамильтониан H с эквивалентной ему функцией F:

$$t(\lambda) = \int_0^t dt = \int_0^\lambda \frac{df}{dr}d\lambda.$$

Но такая информация не всегда известна. Покажем, что справедлива формула

$$t(\lambda) = \int_0^\lambda \sum_1^3 p_i F_{p_i} d\lambda.$$

Действительно, $\sum_1^3 p_i F_{p_i} d\lambda = \frac{df}{dr}(\sum_1^3 H_{p_i} p_i) d\lambda = \frac{df}{dr}d\lambda$. (Мы применили формулу Эйлера для однородных функций.)

В дальнейшем под символом H будем понимать любое эквивалентное определение гамильтониана, если не оговорено, что имеется в виду классическое его определение через уравнение (5.2), но во всех таких случаях параметр на луче не обязан совпадать со временем распространения. Поэтому система канонических уравнений будет использоваться в виде

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3 \tag{5.20}$$

при

$$t(\lambda) = \int_0^\lambda \sum_1^3 p_i H_{p_i} d\lambda. \tag{5.21}$$

Решение уравнения (5.20) с начальными условиями (5.18) есть пара функций $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda), \mathbf{p} = \mathbf{p}(\lambda)$. Эта пара определяет траекторию «точки фронта» в фазовом пространстве. Если основное (физическое) пространство R^3 наделено аффинными (тем более декартовыми) координатами, то фазовое пространство представляет декартово произведение двух пространств: $R^3 \times T^*$, где T^* – трехмерное ковекторное (кокасательное) пространство (т. е. линейное пространство векторов, преобразуемых при изменении системы координат в R^3 так же, как преобразуются векторы вида $\nabla\varphi$). В случае многообразий более общего вида фазовое пространство совпадает с кокасательным расслоением заданного многообразия *M*, представляющего множество элементов вида $\{(\mathbf{x},\mathbf{p});\mathbf{x}\in M,\mathbf{p}\in T^*_{\mathbf{x}}M\}$, где $T^*_{\mathbf{x}}M$ – кокасательное пространство к M в точке $\mathbf{x}$ (см. § 2).

Отметим одно важное свойство фазовых траекторий: *никакие две фазовые траектории не пересекаются в* $R^3\times T^*$.

Действительно, если бы это было не так, то нашлась бы такая «точка» фазового пространства $(\mathbf{x}^0,\mathbf{p}^0)$, которая принадлежит сразу двум (различным!) фазовым траекториям $\{\mathbf{x}^{(1)}(\lambda),\ \mathbf{p}^{(1)}(\lambda)\}$ и $\{\mathbf{x}^{(2)}(\lambda),\mathbf{p}^{(2)}(\lambda)\}$. Но это означало бы неединственность решения задачи Коши: «точку» $(\mathbf{x}^0,\mathbf{p}^0)$ можно использовать как новые начальные данные и тогда обе фазовые траектории можно трактовать как различные решения одной и той же задачи Коши.

Агрегат $\{t,\ \mathbf{x}=\mathbf{x}(t),\ \mathbf{p}=\mathbf{p}(t)\}$ (либо эквивалентный ему агрегат $\{t(\lambda),\mathbf{x}=\mathbf{x}(\lambda),\ \mathbf{p}=\mathbf{p}(\lambda)\}$ называется *характеристической полосой*. Его проекция на пространство-время есть бихарактеристика $\{t,\mathbf{x}(t)\}$.

В отличие от фазовых траекторий и характеристических полос, лучи и бихарактеристики могут пересекаться. Такие пересечения всегда означают нерегулярность системы лучей. Понятия регулярности и нерегулярности семейства лучей будут играть важную роль в дальнейшем и у нас еще будет повод их уточнить.

Среда называется однородной, если гамильтониан от **x** не зависит: $H(\mathbf{x},\mathbf{p})\equiv H(\mathbf{p})$. В такой среде луч есть прямая. Действительно, в этом случае правая часть второго из уравнений (5.18) равна нулю и, следовательно, $\mathbf{p}(\lambda)=\mathbf{p}^0=\mathrm{const}$. Но тогда и правая часть первого из уравнений также оказывается постоянной: $m_k=\partial H(\mathbf{p})/\partial p_k\big|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^0}=\mathrm{const}$. Стало быть, уравнение луча совпадает с уравнением прямой: $\mathbf{x}(\lambda)=\mathbf{x}^0+\lambda\mathbf{m}$.

Примечание. Уравнения (5.20) справедливы и для двумерного пространства (при $i=1,2$). В этом случае они описывают распространение разрывов в двумерном пространстве. Двумерные задачи имеют не только модельный характер. Мы неоднократно убедимся в том, что во многих ситуациях трехмерные задачи могут быть сведены к решению более простых двумерных задач. Некоторое представление о том, как устроено фазовое пространство в однородной двумерной ($n=2$) среде, показывает рис. 2.

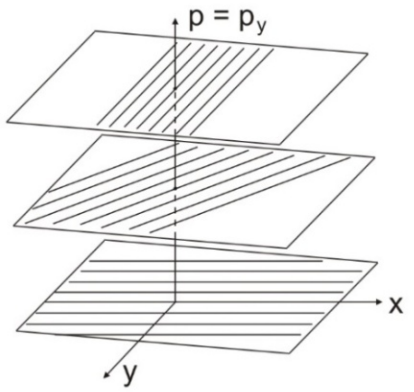


Рис. 2. Траектории лучей в фазовом пространстве для однородной двумерной среды

Поскольку для задания двумерного вектора $\mathbf{p}$ достаточно задать одну компоненту (другая определяется уравнением $F(\mathbf{x},\mathbf{p}) = c$), то фазовое пространство можно свести к пространству размерности $2 \times 2 - 1 = 3$. Всякое семейство параллельных лучей (все они отвечают одному и тому же значению $\mathbf{p}^0$ и имеют направление $\mathbf{m}$) располагается в «своей» плоскости $\mathbf{p} = \mathrm{const} = \mathbf{p}^0$. Лучи разных таких семейств пересекаться не могут.

Пучки лучей, лучевые координаты и уравнение Якоби. Пусть P есть некоторое заданное множество векторов $\mathbf{p}$. Множество лучей при фиксированных $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{p}^0 \in P$ называется пучком лучей. В силу уравнения Гамильтона для задания вектора $\mathbf{p}^0$ достаточно иметь две его компоненты. Пусть это будут p_1^0 и p_2^0. Тройка чисел $u_1 = p_1^0, u_2 = p_2^0, u_3 = \lambda$ устанавливает в пучке лучей естественную криволинейную систему координат (называемую *лучевой*): первые две координаты идентифицируют луч, третья координата – точку на луче. Обозначим через $\mathbf{Q}$ матрицу преобразования декартовых координат в лучевые. Эта матрица имеет элементы $\partial x_i / \partial u_k$. Кроме того введем матрицу $\mathbf{P}$ с элементами $\partial p_i / \partial u_k$. Если вспомнить, что $p_i = \partial \tau / \partial x_i \equiv \tau_{x_i}(x_1, x_2, x_3)$, то легко получить связь обеих матриц:

$$P_{ik} = \tau_{x_i x_j} Q_{jl}.$$

Теперь продифференцируем систему уравнений (5.20) по $u_k\ (k = 1, 2, 3)$. Дифференцирование гамильтониана $H(\mathbf{x}; \nabla\tau(\mathbf{x}))$ осуществляется по правилам дифференцирования сложных функций: $\partial H / \partial u_k = (\partial H / \partial x_j)(\partial x_j / \partial u_k) + (\partial H / \partial p_r)\tau_{x_r x_j}(\partial x_j / \partial u_k)$. В итоге получаем систему уравнений Якоби

$$\frac{dQ_{ik}}{d\lambda} = A_{ji} Q_{jk} + B_{ir} P_{rk}, \quad \frac{dP_{ik}}{d\lambda} = -C_{ir} Q_{rk} - A_{im} P_{mk}, \tag{5.21a}$$

где $A_{is} = \partial^2 H / \partial x_i \partial p_s, \quad B_{ir} = \partial^2 H / \partial p_i \partial p_r, \quad C_{im} = \partial^2 H / \partial x_i \partial x_m$.

Устойчивость решения системы уравнений луча. Вкратце обсудим вопросы устойчивости системы уравнений (5.20). Для систем нелинейных дифференциальных уравнений различают три типа устойчивости. Во-первых, это классическая устойчивость по отношению к малым возмущениям начальных данных, которая рассматривается на некотором невырожденном отрезке $(0, t^*)$ (задача устойчива, если существует такой отрезок $(0, t^*)$, что малым вариациям начальных данных отвечают малые же вариации решения на указанном отрезке), далее – устойчивость по Ляпунову (при $t \to \infty$) и устойчивость по отношению к вариациям самого гамильтониана, что в нашем случае сводится к вариации значений поля скоростей, т. е. к замене одного поля скоростей на близкое, либо же – к зависимости поля скоростей от группы параметров.

Первый тип устойчивости обеспечивается гладкостью правых частей. (Минимальное условие состоит в том, что правые части удовлетворяют условию Липшица.) Мы увидим что, помимо гладкости коэффициентных функций в исходном уравнении $Lu = 0$, требуется, чтобы скорости распространения не приближались к нулю. Обычно эти условия обеспечиваются. Однако и в случае устойчивости может иметь место значительный рост вариации решения. А именно на языке δ и ε вариация решения мала, но фактически может оказаться, что $\varepsilon = K\delta$ при $K >> 1$. Другими словами, имеем дело с практической неустойчивостью. Все случаи такой неустойчивости связаны со специфическими особенностями поля скоростей и геометрии луча. Поэтому их целесообразно рассматривать конкретно в тех разделах, в которых геометрия луча изучается подробно.

Устойчивостью по Ляпунову решения задачи Коши для дифференциальных уравнений луча, как правило, не обладают. Мы в этом убедимся на конкретных примерах.

Третий тип устойчивости не всегда может быть обеспечен гладкостью возмущений поля скоростей. Мы увидим, что если поле скоростей зависит от некоторого числа параметров, то может возникнуть так называемая *структурная* неустойчивость, состоящая в том, что при малом изменении параметров меняются топологические характеристики семейства лучей. Все эти вопросы естественнее рассматривать для конкретных гамильтонианов.

Построение и идентификация характеристических многообразий. Важное применение решений задачи Коши для канонических уравнений – это построение характеристических многообразий (в виде поля времен $\tau(\mathbf{x})$) по заданному его сечению многообразием Σ (точкой, линией или поверхностью в пространстве R^3).

Задача, таким образом, состоит в построении поля $\tau(\mathbf{x})$ по его следу на Σ:

$$\tau\big|_{\Sigma} = \tau_{\Sigma}\,. \tag{5.22}$$

(где τ_{Σ} есть заданное число, функция одной или двух переменных в зависимости от размерности многообразия Σ).

Математическая формулировка состоит в решении задачи Коши для уравнения Гамильтона (в форме (5.2) или (5.6)) по начальным данным (5.22). Эта задача может быть сведена к решению семейства задач Коши для канонических уравнений (метод характеристик). Метод характеристик состоит в следующем. В каждой точке $M \in \Sigma$ определяются начальные данные для уравнений луча и затем «выпускается» луч из каждой такой точки. Если $\lambda \neq t$, то для определения времени пробега используется формула (5.21). В чем следует убедиться, так это в том, что данных (5.22) «хватает» для определения начальных данных (5.18) в любой точке многообразия Σ. Более подробно эти вопросы мы рассмотрим для конкретных гамильтонианов, что позволит нам четче понять разницу между изотропной и анизотропной средами. Здесь мы ограничимся только формулировкой условия корректности этой задачи. Комплект (τ_{Σ}, Σ) сам является многообразием размерности $r = 0$, 1 или 2, вложенным в пространство-время. Если это многообразие состоит из бихарактеристик $(r = 2)$ или является бихарактеристикой, то корректная постановка задачи Коши для уравнения Гамильтона невозможна, поскольку бихарактеристики не содержат достаточной информации о «соседних» (в пространстве-времени) бихарактеристиках. Условие корректности можно теперь сформулировать как условие трансверсальности многообразия (τ_{Σ}, Σ) любому характеристическому многообразию.

Условимся назвать всякий комплект (τ_{Φ}, Φ) (где $\Phi \subset R^3$ и имеет размерность 1, 2 или 3) характеристическим подмногообразием, если оно может быть покрыто семейством бихарактеристик (для заданного гамильтониана) и является частью характеристического многообразия. Теперь условие корректности можно сформулировать так: данные (5.22) корректны, если комплект (τ_{Σ}, Σ) не является характеристическим подмногообразием.

В связи с обсуждаемым понятием корректности важное значение имеет следующий вопрос: пусть задано некоторое многообразие Ψ : $\psi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$. И пусть оно удовлетворяет уравнению Гамильтона в форме (5.2) или (5.6) (последнее возможно, если $\psi = 0$ разрешимо относительно *t*). Означает ли, что это многообразие обязано быть характеристическим? Оказывается, что это необязательно. Выполнение уравнения Гамильтона является только необходимым, но не достаточным условием «характеристичности» Ψ. Чтобы показать это, введем понятие касания многообразий: многообразия $\psi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$ и $\varphi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$ касаются в точке (t, x_1, x_2, x_3), если в этой точке векторы $(\psi_t, \psi_{x_1}, \psi_{x_2}, \psi_{x_3})$ и $(\varphi_t, \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_3})$ колинеарны. Теперь предположим, что имеется семейство характеристических многообразий Φ_α : $\varphi(t, x_1, x_2, x_3; \alpha) = 0$, зависящих от векторного параметра α и имеющих в качестве огибающей многообразие Ψ : $\psi(t, x_1, x_2, x_3) = 0$. Это означает, что в каждой точке своего определения многообразие Ψ касается одного из характеристических многообразий семейства Φ_α . Пусть $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$ есть закон прикрепления огибающей. Тогда, согласно определению касания, для каждой точки $(t, \mathbf{x}) \in \Psi$ найдется такое многообразие $\Phi_{\alpha(\mathbf{x})}$, что

$$(\varphi_t, \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_3}) = c(t, \mathbf{x})(\psi_t, \psi_{x_1}, \psi_{x_2}, \psi_{x_3}), \quad c(t, \mathbf{x}) \neq 0 .$$

«Подправим» уравнение огибающей, заменив его на $\psi'(t, \mathbf{x}) \equiv c(t, \mathbf{x})\,\psi(t, \mathbf{x})) = 0$. От этой замены положение поверхности Ψ не изменится. При этом в точках многообразия Ψ :

$$\psi'_t = c\psi_t + c_t\psi = c\psi_t, \;\; \psi'_{x_i} = c\psi_{x_i} + c_{x_i}\psi = c\psi_{x_i}$$

и, таким образом, $(\varphi_t, \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_3})$ = $(\psi'_t, \psi'_{x_1}, \psi'_{x_2}, \psi'_{x_3})$. Но вектор $(\varphi_t, \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_3})$ удовлетворяет уравнению Гамильтона (если уравнение $\varphi = 0$ взято в форме $t - \tau(\mathbf{x}) = 0$ и тогда $(\varphi_t, \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_3}) \equiv (1, p_1, p_2, p_3)$). Следовательно, в каждой точке многообразия Ψ выполняется уравнение Гамильтона, но данное многообразие не может быть характеристическим. Действительно, в характеристическом многообразии $\Phi_{\alpha(\mathbf{x})}$ можно провести бихарактеристику, касательную к Ψ в точке прикосновения Ψ и $\Phi_{\alpha(\mathbf{x})}$. Если бы и поверхность Ψ была характеристической, то в ней также существовала бы бихарактеристика, которая проходила через ту же точку $(t, \mathbf{x})$ и характеризовалась бы тем же самым значением вектора $(\varphi_t, \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2}, \varphi_{x_3})$. Мы получили две бихарактеристики одного и того же гамильтониана, отвечающие одним и тем начальным условиям для канонической системы уравнений и отличающиеся друг от друга, что невозможно вследствие единственности решения задачи Коши для канонических уравнений. Таким образом, условие $H(\mathbf{x},\mathbf{p}) = 1$ может оказаться выполненным и на не характеристическом многообразии. Пример такой ситуации дан в § 7.

Необходимое и достаточное условие «характеристичности» произвольного многообразия (размерности >1) состоит в том, что оно полностью состоит из бихарактеристик. Именно этот критерий (*критерий характеристичности*) и позволяет определить корректность задачи Коши: данные (τ_Σ, Σ) корректны, если они не образуют многообразия, удовлетворяющего критерию характеристичности.

Значение бихарактеристик не сводится только к возможности решения упомянутой здесь задачи построения характеристического многообразия. Если к каноническим уравнениям добавить еще дифференциальное уравнение первого порядка, характеризующее изменение амплитуды вдоль луча (в рамках лучевого метода), то задача изучения распространения идеальных волн разрывов сведется к изучению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. И здесь дело не в том, что изучение такого сложного объекта, как уравнения в частных производных второго порядка, сведено к изучению хорошо изученного объекта – системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Дело в том, что эволюционная форма канонических уравнений и транспортного уравнения есть самая естественная основа для изучения эволюции параметров идеальных волн (разрывов) с течением времени. А это именно та задача, которую и надо решить.

§ 6. Лучи и поля времен в изотропной среде

Был большой соблазн приложить гамильтонов формализм, равно как и другие «измы», сразу для анизотропной среды, обращаясь к изотропии как к простейшему примеру. Это позволило бы сэкономить не мало места. Но мое глубокое убеждение состоит в том, что сложными понятиями нужно овладевать начиная с простых. А за сложное нужно браться уже во всеоружии. Другое дело, что удовольствие ознакомиться с более общими задачами, не следует откладывать в «долгий ящик».

В этом параграфе основной материал – непосредственное приложение гамильтонова формализма к произвольной изотропной среде – сосредоточен в первой части. Читатель, интересующийся принципиальной стороной дела, может сразу переходить к параграфам, в которых гамильтонов формализм прилагается к анизотропным средам. Остальное содержание этого и следующих двух параграфов, имеет скорее технический характер – приобретение необходимых сведений (и навыков), необходимых для решения конкретных задач. Рассматривается запись уравнений луча в криволинейных координатах, линеаризация системы уравнений луча, вводится понятие двухточечного эйконала и формулируется принцип взаимности. В § 7–8 рассматриваются особенности постановки задачи Коши для уравнения эйконала при задании начальных данных на многообразиях различных размерностей, обсуждаются особенности решения задач в средах с границами. Примеры берутся только в предположении, что среда либо однородна, либо кусочно-неоднородна. Вся конкретика, связанная с неоднородными средами, отнесена к последней главе книги.

Лучи в изотропной среде. Нам необходимо построить систему канонических уравнений для классического уравнения эйконала (2.3). Сначала нужно построить гамильтониан. Записав уравнение эйконала в виде (5.3) и вспомнив, что гамильтониан – однородная функция вектора $\mathbf{p}$, мы приходим к следующей функции Гамильтона: $H\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right) = V(\mathbf{x})(\sum p_k^2)^{1/2}$. Удобнее, однако, положить

$$H\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right) = (1/2)V^2(\mathbf{x})\sum p_k^2 . \tag{6.1}$$

Коэффициент 1/2 используется для того, чтобы сохранить в качестве параметра на луче время t (фигурирующая в формуле (5.19) функция $f(r)$ в этом случае равна $r^2/2$ и

$df\,/\,dr = 1$). Если рассматривается упругая среда, то скорость V есть одна из скоростей V_P и V_S.

Применяя уравнения (5.20), получаем искомые дифференциальные уравнения луча:

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = V^2 p_i,\ \frac{dp_i}{d\lambda} = -V \cdot V_{x_i} \sum p_k^2 \equiv -V \cdot V_{x_i} (1/V^2) = -\frac{1}{V} V_{x_i} = -(\ln V)_{x_i}$$

при

$$t = \int_0^{\lambda} \sum_1^3 p_i V^2 p_i d\lambda = \lambda$$

(напомним, что, согласно уравнению эйконала, $\sum p_k^2 = 1/V^2$). С учетом того что $\lambda = t$, запишем полученную систему дифференциальных уравнений луча в векторной форме

$$d\mathbf{x}/dt = V^2\mathbf{p}, \quad d\mathbf{p}/dt = \mathrm{grad}\ln\left(1/V\right). \tag{6.2}$$

Другой удобный параметр для идентификации точек на луче есть s – длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки на луче. Такой параметр будем называть натуральным. В этом случае $dt = ds/V$. В этой параметризации дифференциальные уравнения луча запишутся так:

$$d\mathbf{x}/ds = V\mathbf{p},\ d\mathbf{p}/ds = \mathrm{grad}\left(1/V\right), \tag{6.3}$$

при этом

$$t(s) = t(0) + \int_0^s \frac{ds}{V}. \tag{6.4}$$

По определению, вектор $d\mathbf{x}/ds$ есть вектор касательной к лучу. Этот вектор будет обозначаться символом **t**. С другой стороны, $\mathbf{p} = \mathbf{n}/V$, где $\mathbf{n}$ – вектор нормали к фронту. Поэтому первое из уравнений (6.3) означает, что в случае изотропной среды векторы нормали к фронту и вектор касательной к лучу совпадают: $\mathbf{n} = \mathbf{t}$. Отсюда выводится, что в изотропной среде лучи совпадают с линиями стока эйконала τ. Последние определяются как линии, которые в каждой точке касательны векторам **grad** τ (или, что все равно, **n**). Более строгое определение линий стока состоит в том, что они являются интегральными линиями векторных полей **grad** $\tau(M)$ и $\mathbf{n}(M)$.

Как уже указывалось, существуют различные эквивалентные формы гамильтониана. Положим, например,

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \left(1/2\right)\sum p_i^2 - \left(1/2\right)(1/V)^2,$$

тогда

$$d\mathbf{x}/d\sigma = \mathbf{p},\ d\mathbf{p}/d\sigma = \left(1/2\right)\mathrm{grad}\left(1/V\right)^2, \tag{6.5}$$

где $d\sigma = Vds$, при этом

$$t(\sigma) = t(0) + \int \frac{d\sigma}{V^2}.$$

Именно для данной параметризации уравнения луча формально совпадают с уравнениями движения частицы в силовом поле.

Лемма. Всякое множество $\{t(s), \mathbf{x}(s), s \in L\}$ есть бихарактеристика, если $\mathbf{x}(s)$ есть луч и для всех s $dt/ds = 1/V(\mathbf{x})$.

Доказательство. В изотропной среде вектор касательной к лучу коллинеарен к вектору **grad** τ. Поэтому равенство $dt/ds = 1/V(\mathbf{x})$ (во всех точках луча) означает выполнение уравнения эйконала.

Следствие. Если годограф $t(s)$ эйконала τ на произвольной кривой $\mathbf{x}(s)$ удовлетворяет равенству $dt/ds = 1/V(\mathbf{x})$ в некоторой точке s', то в этой точке многообразие $\{t(s), \mathbf{x}(s), s \in L\}$ (как минимум) касается бихарактеристики. Если же указанное равенство выполняется на некотором непрерывном интервале значений s, то на этом интервале данное многообразие есть либо бихарактеристика, либо огибающая семейства бихарактеристик.

Примечание. Касание многообразий $\{t_1(s), \mathbf{x}_1(s), s \in L\}$ и $\{t_2(s'), \mathbf{x}_2(s'), s' \in L\}$ в некоторой точке $\mathbf{x}'$ означает, что кривые $\mathbf{x}_1(s)$ и $\mathbf{x}_2(s')$ касаются друг друга в этой точке, а отвечающие этой же точке производные dt_1/ds и dt_2/ds' совпадают. (В обоих случаях используется натуральный параметр.)

Уравнение луча в однородной среде ($V = \text{const}$) для разных параметризаций имеет вид:

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}(0)+tV^2\mathbf{p}(0),\ \ \mathbf{x}(s)=\mathbf{x}(0)+sV\mathbf{p}(0) \equiv \mathbf{x}(0)+s\mathbf{n}(0),\ \mathbf{x}(\sigma)=\mathbf{x}(0)+V^{-1}\sigma\,\mathbf{n}(0) \equiv \mathbf{x}(0)+\sigma\mathbf{p}(0).$$

Направление луча совпадает с направлением вектора $\mathbf{p}(0)$ (или, что одно и то же, $\mathbf{n}(0)$).

В отношении существования, единственности и устойчивости решения уравнений (6.2), (6.3) и (6.5) можно сказать то же, что было сказано для общих канонических систем уравнений. Устойчивость на конечных отрезках имеет место, если функции $\ln(1/V)_{x_i}$, $(1/V)_{x_i}$ и $(1/V^2)_{x_i}$ обладают гладкостью. Видно, что дифференцируемость (даже двукратная) еще не достаточна для локальной устойчивости. Необходимо еще, чтобы множество значений скорости было отделено от нуля: $V(x,y,z) \ge \delta > 0$. С точки зрения практической вычислительной неустойчивости она может оказаться значительной и в том случае, когда значение $\min V(x,y,z)$ хотя и больше нуля, но мало. В частности, задача трассирования луча из области малых скоростей требует вычислений с повышенной точностью.

Вычисление времен в «близкой» среде. Предположим, что выполнено $w(\mathbf{x}) = w_0(\mathbf{x}) + w_1(\mathbf{x})$, где $w(\mathbf{x}) = 1/V(\mathbf{x})$ и $w_1(\mathbf{x})$ – малая (но гладкая) добавка. Тогда, как было показано в § 2, уравнение эйконала можно линеаризовать, аппроксимировав его следующим уравнением:

$$\left(\nabla\tau_0 \cdot \nabla\tau_1\right) = w_0 w_1,$$

где τ_0 удовлетворяет классическому уравнению эйконала для невозмущенной среды со скоростью $V_0(\mathbf{x})$ и которое считается известным, а τ_1 – искомая добавка. Так как $\nabla\tau_0 = \mathbf{t}^{(0)}/V_0$, то из приведенного выше уравнения следует

$$(\mathbf{t}^{(0)} \cdot \nabla\tau_1) = w_1 .$$

Будем рассматривать значения τ_1 на луче $\gamma^{(0)}$, проведенном в невозмущенной среде: $\tau_1(s) \equiv \tau_1[\mathbf{x}^{(0)}(s)]$. Тогда последнее уравнение перепишется так:

$$d\tau_1 / ds = w_1[\mathbf{x}^{(0)}(s)].$$

Данное уравнение просто интегрируется. Так как при $s = 0$ естественно положить $\tau_1 = 0$, то

$$\tau_1(s) = \int\limits_{\gamma^{(0)}} w_1(\mathbf{x}) ds \equiv \int\limits_0^s w_1[\mathbf{x}^{(0)}(s)] ds. \tag{6.6}$$

Фактически мы получим следующее: если $w_1 \to 0$, то

$$w\, ds \equiv \int\limits_{\gamma^{(0)}} w_0 ds + \int\limits_{\gamma^{(0)}} w_1 ds + o(\|w_1\|). \tag{6.7}$$

Иначе говоря, с точностью до малых более высокого порядка, чем w_1, интеграл вдоль фактического луча для возмущенной среды можно заменить интегралом вдоль невозмущенной траектории. Если интеграл (6.4) связан с функцией медленности $w(\mathbf{x})$ не линейно (поскольку от $\mathbf{n}$ зависит не только подынтегральная функция, но и траектория луча), то интеграл (6.6) связан с $w_1(\mathbf{x})$ линейно именно потому, что траектория, вдоль которой ведется интегрирование, от $w_1(\mathbf{x})$ не зависит.

Линеаризованные уравнения лучей. При выводе формулы (6.6) рассматривался «близкий» луч, отличающийся от фактического луча благодаря «возмущению» (вариации) параметров среды. Теперь мы рассмотрим лучи, близкие к заданному лучу γ^*, в той же самой среде $V = V(\mathbf{x})$, основываясь на уравнении (6.5). Условимся, что функции $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(\sigma)$ и $\mathbf{p} = \mathbf{p}^*(\sigma)$ характеризуют заданный луч γ^*, а функции $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\sigma)$ и $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\sigma)$ – произвольный «близкий» луч γ. Близость понимается в том смысле, что величина $|\mathbf{x}^*(\sigma) - \mathbf{x}(\sigma)|$ является малой по отношению к характерным размерам неоднородностей среды.

Положим

$$\mathbf{x}(\sigma) = \mathbf{x}^*(\sigma) + \mathbf{r}(\sigma) \quad \text{и} \quad \mathbf{p}(\sigma) = \mathbf{p}^*(\sigma) + \mathbf{q}(\sigma). \tag{6.8}$$

Так как функции $\mathbf{x}^*(\sigma)$ и $\mathbf{p}^*(\sigma)$ заданы, достаточно получить уравнение для «поправок» $\mathbf{r}(\sigma)$ и $\mathbf{q}(\sigma)$.

Возьмем систему уравнений луча в форме (6.5), разложив вектор $\operatorname{grad} V^{-2}$ в окрестности $\mathbf{x}^*(\sigma)$ в ряд Тейлора, и ограничимся малыми порядка $|\mathbf{r}(\sigma)|$. Для i-й компоненты вектора ∇V^{-2} имеем

$$\frac{\partial V^{-2}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial w^2}{\partial x_i}\right)_{\mathbf{x}^*(\sigma)} + \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial^2 w^2}{\partial x_i \partial x_k}\right)_{\mathbf{x}^*(\sigma)} \left(x_k - x_k^*\right) \tag{6.9}$$

(здесь $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$).

Обозначим через W матрицу 3×3 с элементами $\left(\partial^2 w^2 / \partial x_i \partial x_k\right)_{\mathbf{x}^*(s)}$. Тогда три равенства (6.9) (при $i = 1,\ 2,\ 3$) можно записать в виде следующего матричного равенства:

$$\nabla w^2 = \left(\nabla w^2\right)_* + \mathrm{W}\mathbf{r} . \qquad (6.10)$$

Примечание. При умножении матрицы на вектор последний всегда считается столбцом (если не указан знак транспонирования).

Подставляя уравнения (6.8) и (6.9) в систему (6.5), получаем

$$\frac{d\mathbf{x}^*}{d\sigma} + \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \mathbf{p}^*(\sigma) + \mathbf{q}(\sigma) ,$$

$$\frac{d\mathbf{p}^*}{d\sigma} + \frac{d\mathbf{q}}{d\sigma} = \frac{1}{2}(\nabla w^2)_* + \frac{1}{2}\mathrm{W}\,\mathbf{r} .$$

Но, по определению луча γ^*,

$$d\mathbf{x}^*/d\sigma = \mathbf{p}^*(\sigma) \quad \text{и} \quad d\mathbf{p}^*/d\sigma = \left(1/2\right)(\nabla w^2)_* .$$

Следовательно,

$$\begin{cases} d\mathbf{r}/d\sigma = \mathbf{q}(\sigma), \\ d\mathbf{q}/d\sigma = \left(1/2\right)\mathrm{W}\mathbf{r}(\sigma). \end{cases} \qquad (6.11)$$

Эту систему можно переписать и в виде одного векторного уравнения второго порядка:

$$d^2\mathbf{r}/d\sigma^2 = \left(1/2\right)\mathrm{W}\mathbf{r}(\sigma) . \qquad (6.12)$$

Полученная система уравнений линейна, так как матрица W определяется в точках луча γ^*, т. е. независимо от искомого решения. Отметим еще, что величина σ является параметром и на заданном луче γ^*, и на искомом луче γ, но только для луча γ^* он удовлетворяет определению $d\sigma = Vds$. Это, однако, не мешает его использованию в целях параметризации луча γ.

Спрашивается, что же мы выиграли, заменив систему (6.5) приближенной системой (6.11)? Вопрос законный, так как матрица W вычисляется сложнее, чем ∇V^{-2}.

Выигрыш только в том и состоит, что система линейна. Во-первых, для решения таких систем существуют более простые методы решения. Во-вторых (и это – главное), любое решение $\mathbf{r}(\sigma)$ системы (6.11) (или, что равносильно уравнению (6.12)) можно записать как линейную комбинацию двух любых линейно независимых решений $\mathbf{r}_1(\sigma)$ и $\mathbf{r}_2(\sigma)$:

$$\mathbf{r}(\sigma) = A\,\mathbf{r}_1(\sigma) + B\,\mathbf{r}_2(\sigma) , \qquad (6.13)$$

что существенно упрощает задачу проведения большего числа лучей.

Фактически формула (6.13) описывает целый пучок лучей, окружающих заданный луч γ^*. Поэтому уравнение (6.11) (или (6.12)) можно назвать уравнениями пучка лучей. Следует сразу же заметить, что в дальнейшем, используя геометрию лучей, мы выведем значительно более простые уравнения пучка лучей (так называемое параксиальное приближение), которые чаще и используются в приложениях.

Криволинейные координаты. Вернемся к полным (нелинеаризованным) уравнениям лучей. Хотя эти уравнения записаны выше в векторной форме, тем не менее нельзя утверждать, что эта форма является инвариантной, т. е. не зависит от выбора системы координат, поскольку она была получена дифференцированием гамильтониана в декартовой системе координат. Выведем систему уравнений луча для произвольной криволинейной системы координат $U = (u^1, u^2, u^3)$. Матрица $\mathbf{C}_{XU}$ преобразования декартовой системы координат в криволинейную имеет элементы $c_{ij} = \partial x^i / \partial u^j$, матрица обратного преобразования $\mathbf{C}_{UX}$ – элементы $c^{jk} = \partial u^j / \partial x^k$. Очевидно, что $\mathbf{C}_{XU} \cdot \mathbf{C}_{UX} = \mathbf{E}$ (справа стоит единичная матрица), поскольку произведение матриц $\mathbf{C}_{XU}$ и $\mathbf{C}_{UX}$ описывает последовательное преобразование системы координат $X \to U \to X$.

Мы можем поступить двояким образом. Первый путь состоит в том, что, обратившись к уравнению эйконала в криволинейной системе координат, мы заново определяем гамильтониан и затем выписываем систему канонических уравнений. Второй путь состоит в замене переменных непосредственно в уже имеющихся уравнениях луча.

Первый путь (он значительно проще) мы проиллюстрируем для параметра на луче *t*. Согласно уравнению эйконала в криволинейных координатах (2.18б), гамильтониан можно взять в форме $H = g^{jk}\tau_{,j}\tau_{,k}/2$. Здесь матрица $\|g^{jk}\|$ определяется равенствами $g^{ik} = V^2 g_0^{ik}$, $g_0^{ik} = c^{jl}c^{lk}$. Составляя канонические уравнения $du^i/dt = \partial H / d\tau_{,i}$ и $d\tau_{,i}/dt = -\partial H / \partial u^i$, получаем

$$du^i / dt = g^{ij}\tau_{,j}, \tag{6.14а}$$

$$d\tau_{,i}/dt + \left(1/2\right)(\partial g^{jk}/\partial x^i)\tau_{,j}\tau_{,k} = -(\ln V)_{,i}. \tag{6.14б}$$

Во многих случаях удобно учесть величины g_0^{ik} и V отдельно. Полагая в полученных уравнениях $g^{ik} = V^2 g_0^{ik}$, находим

$$du^i/dt = V^2 g_0^{ij}\tau_{,j}, \tag{6.15а}$$

$$\frac{d\tau_{,i}}{dt} + (V^2/2)\frac{\partial g_0^{jk}}{\partial x^i}\tau_{,j}\tau_{,k} = -(\ln V)_{,i} \tag{6.15б}$$

(при выводе второго из уравнений используется уравнение эйконала в форме $g_0^{jk}\tau_{,j}\tau_{,k} = 1/V^2$).

Второй путь проделаем для параметра s. Имеем

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial x^i}{\partial u^j}\frac{du^j}{ds} = c_{ij}\frac{du^j}{ds}.$$

Далее

$$\tau_{x_j} = \frac{\partial \tau}{\partial u^i}\frac{du^i}{dx^j} = c^{ij}\,\tau_{,i}.$$

Таким образом, первое из векторных уравнений (6.3) эквивалентно следующим трем скалярным уравнениям

$$c_{ij}\left(du^j/ds\right) = Vc^{ij}\tau_{,i} \quad (j = 1,\ 2,\ 3).$$

После умножения справа на матрицу $\|c^{ji}\|$, обратную к $\|c_{ij}\|$, получим уравнение, эквивалентное (6.14а), но с другим параметром:

$$du^i/ds = Vg_0^{ij}\tau_{,j}. \tag{6.16а}$$

Но вторая группа уравнений выглядит иначе, чем (6.14б):

$$d(c^{ij}\tau_{,i})/ds = -c^{ij}(1/V)_{,i} \quad (j = 1,2,3).$$

Чтобы разрешить его относительно производных $d\tau_{,i}/ds$, произведем следующие преобразования:

$$c^{ij}\frac{d\tau_{,i}}{ds}+\frac{dc^{ij}}{ds}\tau_{,i}=-c^{ij}(1/V)_{,i}$$

или

$$c^{ij}\frac{d\tau_{,i}}{ds}+\frac{\partial c^{rj}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\tau_{,r}=-c^{ij}(1/V)_{,i}\quad (j=1,2,3).$$

Если учесть, что в первом слагаемом в левой и в правой части стоят элементы матрицы $(\mathbf{C}_{UX})^T$, то, умножая на соответствующую обратную матрицу обе части уравнения, получаем:

$$\frac{d\tau_{,i}}{ds}+c_{ij}^{-1}\frac{\partial c^{rj}}{\partial u^k}\frac{du^k}{ds}\tau_{,r}=-(1/V)_{,i}\quad (i=1,2,3), \tag{6.16б}$$

где c_{ij}^{-1} – элементы матрицы, обратной к $(\mathbf{C}_{UX})^T$.

Делимость луча, принцип взаимности и двухточечный эйконал. Имеется ряд простых свойств, которые желательно помнить. Сначала убедимся в существовании *транзитивности* на луче. Пусть луч, построенный для начальных условий $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{p}^0$, попадает из точки *A* в точку *B*. В каждой точке луча определены векторы $\mathbf{x}(s),\mathbf{p}(s)$. Возьмем произвольную точку *C* на луче между *A* и *B,* отвечающую значению s' натурального параметра на луче. Поставим в точке *C задачу Коши для системы уравнений луча, взяв в качестве начальных условий значения* $\mathbf{x}^1=\mathbf{x}(s'),\mathbf{p}^1=\mathbf{p}(s')$. Тогда решением задачи Коши для системы (6.3) будет отрезок луча CB. Свойство является прямым следствием единственности решения для данной задачи. Оно означает, что задачу проведения луча в заданном направлении можно проводить последовательно, воспроизведя в некоторой последовательности точек соответствующие начальные условия. Из транзитивности вытекает другое не менее простое, но и не менее важное свойство (которое будем называть *делимостью* луча): пусть точки *C* и *D* лежат на луче γ_{AB}, соединяющем точки *A* и *B*. Тогда та часть луча, которая расположена между точками *C* и *D,* также есть луч γ_{CD}.

Наконец, имеется еще одно важное свойство – *принцип взаимности.* Он состоит в том, что время по одному и тому же лучу γ_{AB} не зависит от того, в каком направлении распространяется волна – от *A* к *B* или от *B* к *A*: $t(\gamma_{AB})=t(\gamma_{BA})$. Оно тривиально, что следует из формулы (6.4). Все перечисленные свойства справедливы для любых гамильтонианов (а не только для классического эйконала). Имеет смысл доказать принцип взаимности в самом общем случае.

Принимая в уравнении (5.21) $t(0)=0$, имеем

$$t(\gamma_{AB})=\int_A^B\sum_1^3 p_iH_{p_i}d\lambda\equiv\int_0^L\sum_1^3 p_iH_{p_i}d\lambda,$$

$$t(\gamma_{BA})=\int_B^A\sum_1^3 p_iH_{p_i}d\lambda'\equiv\int_0^L\sum_1^3 p_iH_{p_i}d\lambda'$$

при $\lambda'=L-\lambda$ и $d\lambda'=d\lambda$. Сделав во втором интеграле подстановку $\lambda'=L-\lambda$, получим

$$t(\gamma_{BA})=-\int_L^0\sum_1^3 p_iH_{p_i}d\lambda=\int_0^L\sum_1^3 p_iH_{p_i}d\lambda=t(\gamma_{AB}).$$

Мы видим, что с точки зрения геометрии распространения источник и приемник колебаний оказываются равноправными. Это позволяет ввести понятие двухточечного эйконала $\tau(A,B) \equiv \tau(\mathbf{x},\mathbf{y})$, где $\mathbf{x}$ – радиус-вектор точки *A*, $\mathbf{y}$ – радиус-вектор точки *B*. В силу взаимности, двухточечный эйконал удовлетворяет уравнению эйконала и по $\mathbf{x}$ и по $\mathbf{y}$:

$$\left|\nabla_{\mathbf{x}}\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2 = 1/V^2(\mathbf{x}), \quad \left|\nabla_{\mathbf{y}}\tau(\mathbf{x},\mathbf{y})\right|^2 = 1/V^2(\mathbf{y}).$$

Рассмотрим, в частности, эйконал сферической волны, испускаемой источником в точке $\mathbf{y}$ однородной среды: $t = \left|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|/V$. Легко проверить, что функция справа удовлетворяет системе уравнений двухточечного эйконала. Если исключить функции, линейно зависящие от координат, то в однородной безграничной среде двухточечный эйконал определяется единственным образом.

Одноточечная и двухточечная задачи трассирования луча. Задачу Коши для любой из систем уравнений (6.2), (6.3) и (6.5) с начальными данными

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \ \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0 \tag{6.17}$$

принято называть одноточечной задачей трассирования луча. Но во многих случаях для уравнений, подобных (6.2) или (6.3), ставится не начальное условие, а два краевых условия, заключающиеся в том, что луч должен пройти через заданные две точки A и *B*. Именно такую задачу и называют двухточечной. Свойства этой задачи резко отличны от одноточечной, если, конечно, среда неоднородна. В однородной среде провести прямую, соединяющую две точки, не представляет труда. В неоднородной среде это уже не так. Во-первых, для этой задачи не гарантируется существование решения. Во-вторых, если есть решение, то оно не обязано быть единственным и число решений, как правило, априори неизвестно. В-третьих, методы поиска какого-нибудь одного или нескольких решений много сложнее одноточечного трассирования луча.

Сложности двухточечной задачи обусловлены нелинейностью систем уравнения луча: правые части этих систем зависят от неизвестного решения. Нельзя сказать, что общей теории таких задач совсем нет. Но и нельзя сказать, что, ничего не предполагая определенного относительно правой части, можно ответить на вопрос о числе решений. Наиболее глубокие результаты получены для более узких классов таких уравнений. Рекомендуем читателю следующие источники: [3; 7].

§ 7. Задача Коши для уравнения эйконала (изотропные среды)

Этот параграф, скорее, имеет чисто технический характер. Те условия, которые были выяснены для общих гамильтонианов, иллюстрируются на примере уравнений эйконала для изотропных сред. В первую очередь следует обратить внимание на то, что начальные условия для задачи Коши можно ставить на многообразиях различной размерности. Конкретные примеры приводятся только для однородных сред, когда не составляет труда выписать аналитическое решение. План изложения таков: условия корректности, аналитические решения для однородной среды (в основном здесь указываются начальные условия, которые отвечают решениям, указанным в § 2), метод характеристик для общей ситуации.

Условия корректности. Задача Коши для уравнения эйконала (в любых средах) может быть поставлена для данных на многообразиях размерности 2 (поверхность), 1 (линия) и 0 (точка). Пусть на поверхности Σ задана функция $\tau_\Sigma(\mathbf{x}_0)$ $(\mathbf{x}_0 \in \Sigma)$, нужно найти в примыкающей к Σ области D функцию $\tau(\mathbf{x})$, которая удовлетворяет в D уравнению эйконала, а на Σ совпадает с τ_Σ:

$$|\nabla\tau|^2 = 1/V^2(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in D; \tag{7.1а}$$

$$\tau|_\Sigma = \tau_\Sigma(\mathbf{x}_0),\ \mathbf{x}_0 \in \Sigma. \tag{7.1б}$$

Как показано в § 5, поставленная задача корректна, если комплект (Σ, τ_Σ) не характеристичен, т. е. не образует в пространстве-времени поверхности, состоящей из бихарактеристик. Пусть многообразие Σ имеет размерность $m = 1$ или 2. Случай $m = 0$ рассматривать не нужно, поскольку многообразие размерности 0 не может содержать лучей, каждый из которых имеет размерность 1. Предположим еще, что Σ – либо прямая линия, либо плоскость. Обозначим ∇_m как символ m–мерного градиента на Σ. Поскольку на луче $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ $dx/ds \equiv |\nabla\tau| = 1/V$, то достаточным условием нехарактеристичности многообразия $(\sum, \tau_\Sigma)$ является

$$|\nabla_m\tau(\mathbf{x})| \neq 1/V(\mathbf{x}),\ \forall\mathbf{x} \in \Sigma. \tag{7.2}$$

Это условие можно слегка ослабить, потребовав, чтобы неравенство $|\nabla_m\tau(\mathbf{x})| \neq 1/V(\mathbf{x})$ имело место почти всюду на Σ. Вырождение почти всюду следует понимать так, что неравенство может нарушаться в изолированных точках. (Строго говоря, употребленное выражение означает, что неравенство может нарушаться на любом счетном множестве, но к физическим ситуациям это уточнение вряд ли относится.) Покажем достаточность условия для $m = 2$. Для следует нужно показать, что тождественное выполнение $|\nabla_2\tau(\mathbf{x})| \equiv 1/V(\mathbf{x})$ является необходимым условием характеристичности. Предположим, что плоскость Σ состоит из лучей и на этих лучах $x = x(s)$ выполнено $d\tau(s)/ds = 1/V(\mathbf{x})$. Поскольку все лучи являются плоскими, то и вектор dx/ds параллелен плоскости Σ и, стало быть, $p(x) \parallel \Sigma$. Таким образом, предположение о характеристичности комплекта (Σ, τ_Σ) влечет равенство $|\mathbf{p}| \equiv \nabla_2\tau(\mathbf{x}) = 1/V(\mathbf{x})$. Что и нужно было показать. Доказательство для $m = 1$ совсем просто.

Пусть начальные данные определены на поверхности Σ, которая в криволинейной системе координат $U = (u_1, u_2, u_3)$ определяется уравнением $u_3 = 0$. Уравнение эйконала в криволинейных координатах записывается согласно (2.16):

$$g_0^{ij}\tau_{,i}\tau_{,j} = 1/V^2(u_1, u_2, u_3), \tag{7.3}$$

где величины g_0^{ij} определены формулой (2.15). Поэтому достаточное условие нехарактеристичности может быть записано в виде

$$g^{ik}\tau_{,i}\tau_{,k} \neq 1/V^2(u_1, u_2, 0),\ \ i,k = 1,2.$$

Приведенные условия нехарактеристичности не являются необходимыми, поскольку (как показано в § 5) уравнение Гамильтона может оказаться выполненным и на нехарактеристической поверхности: может иметь место касание многообразия данных и характеристического многообразия (в пространстве-времени). Такие примеры будут даны ниже (см. пример 5).

Примеры аналитического решения. Приведем примеры, в которых решения поставленной задачи легко угадываются. Все они даны для однородной среды. Вначале рассматриваются ситуации, когда $\left|\nabla_2 \tau_\Sigma(x, y)\right| < 1/V$.

Пример 1. Пусть на плоскости $z = 0, \tau_\Sigma = V^{-1}\sqrt{x^2 + y^2 + z_0^2}$. Тогда

$$\tau^{(\pm)}(x, y, z) = V^{-1}\sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm z_0)^2}.$$

Непосредственная проверка показывает, что эта функция (эйконал сферической волны) удовлетворяет и граничным условиям и уравнению эйконала (для любого выбора знака при z_0). Отсутствие других решений будет показано ниже для наиболее общей ситуации. Как правило, выбор знака определяется физическим смыслом задачи (в частности, информацией о расположении источника). Пусть решение рассматривается в области $z > 0$. Тогда знак «плюс» определяет эйконал сферической волны от источника в точке $-z_0$, располагающейся в «верхнем» полупространстве [5]. В данном случае эйконал восстанавливается в точках, «удаляющихся» от источника. Вместо термина «восстановление» мы чаще будем использовать термин «продолжение» (экстраполяция). Продолжение в направлении «от источника» естественно считать «прямым». Если выбирается знак «минус», то мы получаем эйконал сферической волны, испускаемой точечным источником в точке z_0, расположенной в нижнем полупространстве. Теперь эйконал продолжается от точек поверхности «в направлении источника». Такое продолжение естественно назвать «обращенным». Соответствующие строгие определения для общей ситуации будут даны ниже. Мы видим, что существование двух решений не является каким-то «математическим» недостатком рассматриваемой задачи. Лишних решений в ней нет. По следу τ_Σ на самом деле нельзя решить, где расположен источник. Поэтому в задаче Коши для уравнения эйконала всегда требуется дополнительная информация о типе продолжения эйконала. Необходимость в такой информации лежит в природе вещей.

Пример 2. Пусть $\Sigma : z = 0$ и $\tau_\Sigma = t_0 + a_1 x + a_2 y$. Если $a_1^2 + a_2^2 < 1/V^2$, то

$$\tau^{(\pm)}(x, y, z) = t_0 + a_1 x + a_2 y \pm bz \text{ при } b = \sqrt{1/V^2 - a_1^2 - a_2^2}. \quad (7.4)$$

Непосредственная проверка показывает, что и краевое условие и уравнения эйконала выполнены. Информация о правильной альтернативе должна войти в постановку задачи Коши. Как в первом, так и во втором примере дополнительное условие может быть определено так:

$$\nabla\tau \cdot \mathbf{e}_z\big|_{z=0} < 0 \text{ или } \nabla\tau \cdot \mathbf{e}_z\big|_{z=0} > 0. \quad (7.5)$$

Если $a_1^2 + a_2^2 > 1/V^2$, то решение оказывается комплекснозначным:

$$\tau^{(\pm)}(x, y, z) = t_0 + a_1 x + a_2 y \pm ibz \text{ при } b = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 1/V^2}.$$

В § 2 такое решение определено как эйконал эванесцентной волны. В этом случае выбор знака должен осуществляться из других условий, нежели (7.5). Если в случае

[5] В геофизике принято ось z направлять вниз, поэтому верхнее полупространство определяется отрицательными значениями z.

вещественнозначных решений оба знака продолжения могут иметь физический смысл, то в рассматриваемом случае это уже не так. Однако правильно выбрать знак, оставаясь в рамках чистой геометрии, теперь нельзя.

Пример 3. Пусть $\tau_\Sigma = t_0 + (1/V_1)\sqrt{x^2+y^2}$. Если $V_1 > V$, то решение имеет вид уже рассмотренной нами конической волны (2.8):

$$\tau^{(+)} = t_0 \pm az + (1/V_1)\sqrt{x^2+y^2}$$

при $a^2 + 1/V_1^2 = 1/V^2$. При $V_1 < V$ получаем комплекснозначный эйконал.

Пример 4. Усложним пример 1, несколько изменив начальные данные. Предположим, что на плоскости $z = 0$, $\tau_\Sigma = \left(1/V_1\right)\sqrt{x^2+y^2+z_0^2}$ при $V_1 \neq V$. Если $V_1 > V$, то, как легко проверить, во всех точках плоскости имеем $\left|\tau_\Sigma\right| < 1/V$ и условие нехарактеристичности выполнено всюду на Σ. Решение существует, хотя его и не удается выписать в аналитической форме. Если же $V_1 < V$, то вся плоскость делится окружностью, имеющей радиус *r*, который удовлетворяет уравнению $r/V_1\sqrt{r^2+z_0^2} = 1/V$; при этом в этом круге решение вещественно, а вне круга комплекснозначно.

Пример 5. Многообразие данных в каждой своей точке касается некоторого характеристического многообразия. Рассмотрим задачу Коши для продолжения эйконала в область, являющуюся внутренней для круговой цилиндрической поверхности Ф, при условии, что $\mathrm{pr}_{T\Sigma}\nabla\tau$ ортогонален образующим цилиндра и $\left|\mathrm{pr}_{T\Sigma}\nabla\tau\right| = 1/V$ (здесь $T\Sigma$ есть плоскость, касательная к Σ). Напомним, что в том случае, когда вектор $\mathrm{pr}_{T\Sigma}\nabla\tau$ коллинеарен образующим, то условие $\left|\mathrm{pr}_{T\Sigma}\nabla\tau\right| = 1/V$ означает, что многообразие данных является характеристическим. Но в рассматриваемом случае условие $\left|\mathrm{pr}_{T\Sigma}\nabla\tau\right| = 1/V$ означает только касание многообразий, поскольку окружность не является лучом в однородном пространстве. Итак, на поверхности Ф: $x^2 + z^2 = R^2$ задан эйконал $\tau\big|_\Phi = R\varphi/V$, где φ – угол полярной системы координат $\left(r,\varphi\right)$. Перепишем уравнение эйконала в полярной системе координат (см. § 2):

$$\tau_\rho^2 + \left(1/\rho^2\right)\tau_\varphi^2 = 1/V^2.$$

Проверим, что искомое решение имеет вид

$$\tau = \frac{R\varphi}{V} \pm \frac{i}{V}\int_\rho^R \sqrt{\frac{R^2-\rho^2}{\rho^2}}\,d\rho. \tag{7.6}$$

Действительно, проверка краевого условия элементарна. Далее имеем

$$\tau_\varphi = R/V,\ \tau_\rho = \mp i\sqrt{\left(R^2-\rho^2\right)/\rho^2}.$$

Подставляя в уравнение эйконала, получаем $-R^2/\rho^2V^2 + 1/V^2 + R^2/\rho^2V^2 = 1/V^2$.

Интеграл в формуле (7.6) можно взять:

$$\tau = \frac{R\varphi}{V} \mp \frac{i}{V}\left(\sqrt{1-\rho^2/R^2} + \ln\frac{1-\sqrt{1-\rho^2/R^2}}{\rho/R}\right).$$

При $\rho \to 0$ $\tau \sim R\varphi/V \pm (i/V)\ln(\rho/2R) \to R\varphi/V \pm (i/V)\infty$. В соответствии с формулой (2.10) для разрыва порядка -1 амплитуда волны при приближении к центру окружности стремится к нулю.

Пример 6. Пусть на линии λ, совпадающей с осью x, заданы начальные данные $\tau_\lambda = t_0 + ax$. Непосредственная проверка показывает, что этому условию отвечает эйконал конической волны, рассматривавшийся нами выше:

$$\tau^{(\pm)}(x,y,z) = t_0 + ax \pm b\sqrt{y^2+z^2},\ b = \sqrt{1/V^2 - a^2}\ .$$

Но поскольку в данном случае a обязательно вещественно, то комплекснозначное решение выглядит иначе:

$$\tau^{(\pm)}(x,y,z) = t_0 + ax \pm ib\sqrt{y^2+z^2}\ .$$

Пример 7. Пусть в точке $\mathbf{x}^0$ задано значение времени t_0. Если действительно задано, что при $t = t_0$ в других точках среды эйконал отсутствует, то имеется два решения:

$$\tau = t_0 \pm (1/V)\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right|$$

– сходящаяся и расходящаяся сферические волны.

Метод характеристик. Перейдем к изучению общей ситуации: Σ – произвольная гладкая поверхность, $V(x,y,z)$ – произвольная гладкая положительная функция, нигде не приближающаяся к нулю. В силу дуальности, существующей между фронтами и лучами, разрешимость задачи (7.1)–(7.2) можно установить, переформулировав ее в семейство задач для любой из систем уравнений луча (6.2), (6.3) и (6.5) с начальными данными (6.17) для всех лучей, начинающихся в точках поверхности Σ . Для этого необходимо установить возможность восстановления вектора $\nabla\tau(\mathbf{x}_0)$ для всех точек $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$.

Пусть $P = T_{x_0}\Sigma$ – плоскость, касательная к Σ в точке $\mathbf{x}_0$, и пусть $\mathbf{N}_0$ – вектор нормали к Σ в $\mathbf{x}_0$. Задача восстановления $\mathbf{p}^0 = \nabla\tau(\mathbf{x}_0)$ решается в два этапа. Первый этап – восстановление $\mathrm{pr}_P\nabla\tau$, второй этап – определение вектора $\nabla\tau(\mathbf{x}_0)$ согласно уравнению эйконала:

$$\nabla\tau(\mathbf{x}_0) = \mathrm{pr}_P\nabla\tau(\mathbf{x}_0) \pm \mathbf{N}_0\sqrt{\left(1/V_0^2\right) - \left|\mathrm{pr}_P\nabla\tau\right|^2}\ , \tag{7.7}$$

где $V_0 = V(\mathbf{x}_0)$. На выборе знака мы остановимся позже, а сейчас займемся первым этапом. Принципиальная возможность его выполнения (во всяком случае, для гладкой поверхности Σ) не вызывает никаких сомнений. Поэтому речь пойдет о некоей общей схеме алгоритма восстановления $\mathrm{pr}_P\nabla\tau$. Нам придется применить ряд координатных систем, которые часто будут использоваться и в дальнейшем. Это глобальная координатная система $X = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, присоединенная к Σ (в точке $\mathbf{x}_0$), декартова система координат $X' = (x_1', x_2', x_3') = (x', y', z')$ и сопряженная с Σ криволинейная система координат $U = (u_1, u_2, u_3)$. Определим две последние. Пусть поверхность Σ описывается функцией $\Phi(x, y, z) = 0$. Вычислим в точке $\mathbf{x}_0$ производные Φ_x, Φ_y и Φ_z. После нормировки этих значений, найдем вектор нормали $\mathbf{N}_0$. В качестве присоединенной к Σ декартовой системы координат можно взять любую прямоугольную систему с началом в точке $\mathbf{x}_0$, у которой ось z' направлена вдоль вектора $\mathbf{N}_0$. Можно, например, вычислить угол $\varphi = \arccos(\mathbf{e}_3, \mathbf{N}_0)$ и после переноса начала координат в $\mathbf{x}_0$ повернуть плоскость xz вокруг оси y на угол φ. В новой системе координат компоненты вектора $\mathbf{x}$ определятся так:

$$x' = (x - x_0)\cos\varphi - (z - z_0)\sin\varphi,\ y' = y - y_0,\ z' = -(x - x_0)\sin\varphi + (z - z_0)\cos\varphi.$$

Орты новой координатной системы обозначим $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ и $\mathbf{e}_3'$ ($\mathbf{e}_3' = \mathbf{N}_0$). Запишем уравнение $\Phi(x, y, z) = 0$ в системе координат X', положив $x = x_0 + x'\cos\varphi - z'\sin\varphi$ и т. д. В силу трансверсальности координатной оси z' и поверхности Σ, полученное уравнение можно разрешить относительно z'. Уравнение поверхности Σ запишется в виде функции $z' = F(x', y')$. Теперь присоединенная к Σ криволинейная координатная система U определится формулами

$$u_1 = x', \quad u_2 = y', \quad u_3 = z' - F(x', y'). \tag{7.8}$$

Из определения функции F следует, что в точке $\mathbf{x}_0$ $F_{x'} = F_{y'} = 0$.

После введения координатной системы U эйконал на Σ опишется функцией $\tau_\Sigma(u_1, u_2) = \tau(u_1, u_2, 0)$. Вместе с тем, искомый вектор $\mathrm{pr}_P\nabla\tau$ по определению есть

$$\mathrm{pr}_P\nabla\tau = \frac{\partial\tau}{\partial x'}\mathbf{e}_1' + \frac{\partial\tau}{\partial y'}\mathbf{e}_2' = \frac{\partial\tau}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x'}\mathbf{e}_1' + \frac{\partial\tau}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial y'}\mathbf{e}_2'.$$

Поскольку в точке $\mathbf{x}_0$ $\partial u_1/\partial x' = 1,\ \partial u_2/\partial x' = 0, \partial u_3/\partial x' = -F_{x'} = 0,$ $\partial u_1/\partial y' = 0,$ $\partial u_2/\partial y' = 1,\ \partial u_3/\partial y' = -F_{y'} = 0$ и, кроме того $\partial\tau(u_1, u_2, 0)/\partial u_i = \partial\tau_\Sigma/\partial u_i\ \ (i = 1, 2)$, то

$$\mathrm{pr}_P\nabla\tau\big|_{x_0} = \frac{\partial\tau_\Sigma}{\partial u_1}\mathbf{e}_1' + \frac{\partial\tau_\Sigma}{\partial u_2}\mathbf{e}_2'.$$

Таким образом, проекция градиента эйконала на касательную (к Σ) плоскость по функции $\tau_\Sigma(u_1, u_2)$ построена. Важно отметить, что в процедуре отыскания проекции градиента условие изотропности никак не фигурировало.

Перейдем к задаче восстановления самого градиента $\nabla\tau(\mathbf{x}_0)$. Предположим, что условие (7.2) выполнено. Ситуации $|\mathrm{pr}_P\nabla\tau| < 1/V_0$ и $|\mathrm{pr}_P\nabla\tau| > 1/V_0$ приходится рассматривать по отдельности. Если

$$|\nabla\tau(\mathbf{x}_0)| < 1/V(\mathbf{x}_0),\ \forall\mathbf{x}_0 \in \Sigma,$$

то, согласно формуле (7.7), во всех точках поверхности Σ восстанавливаются начальные данные для системы уравнений луча с единственным произволом, связанным с выбором знака. Будем считать, что нормаль $\mathbf{N}_0$ направлена в область *D*, в которой ищется решение. Условимся называть решение, отвечающее выбору знака «плюс» в (7.7) (при указанном выше выборе направления вектора $\mathbf{N}_0$), прямым продолжением эйконала и обозначать $\tau^{(+)}(x, y, z)$. Альтернативное решение обозначается $\tau^{(-)}(x, y, z)$ и называется обращенным продолжением. Обращенное продолжение есть продолжение в направлении источника. Выше сказано, что наличие двух знаков в уравнении (7.7) и отвечающих им двух решений не является математическим трюком, но отражает реальные явления, связанные с распространением волн. Дело в том, что одна и та же функция $\tau_\Sigma(u_1, u_2)$ может оказаться как следом (годографом) эйконала, распространяющемся *от* поверхности Σ в область *D*, так и следом эйконала, распространяющемся *из* области *D* в направлении Σ. В первом случае источник находится *за* поверхностью Σ либо источником оказывается сама граница, как это имеет место в случае образования отраженной волны. Произвол в выборе знака отражает физический факт, что по функции τ_Σ, заданной на поверхности, мы не можем определить, с какой стороны к поверхности подошла волна (см. пример 1). Ясно, что имеется только два решения в рассматриваемой задаче, поскольку других способов определить вектор $\mathbf{p}^0$, согласованный с данными кроме как по формуле (7.7), нет.

Пусть тип продолжения выбран и пусть для определенности это прямое продолжение. Тогда, решая систему уравнений луча с начальными данными $\left(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0^{(+)}\right)$ для всех точек $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$, мы построим в области, прилегающей к Σ, двухпараметрическое семейство лучей $\Gamma_\Sigma^{(+)}$. Каждый луч γ этого семейства идентифицируется точкой выхода луча $\gamma = \gamma(\mathrm{x}_0)$. Выше мы пользовались локальной (присоединенной к некоторой точке $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$) системой координат для описания точек на поверхности Σ. Предположим, что нам удалось ввести на поверхности $\sum$ криволинейную систему координат (u_1, u_2) для идентификации всех точек этой поверхности. (Ниже мы остановимся на этом вопросе подробнее.) Тогда $\gamma = \gamma(u_1, u_2)$. Чтобы идентифицировать точку *M* на луче $\gamma(u_1, u_2)$, будем использовать расстояние *s* при движении по лучу от поверхности Σ до *M*. (Можно, конечно, использовать и время пробега t.) Системы координат типа (u_1, u_2, s) и (u_1, u_2, t) называются лучевыми. Совокупность точек, наделенных координатами (u_1, u_2, s) (или (u_1, u_2, t)), образует лучевое многообразие, отвечающее эйконалу $\tau_\Sigma(u_1, u_2)$ на поверхности Σ.

Построение лучей, отвечающих данным (τ_Σ, Σ), проиллюстрируем на приведенном выше примере 1. Поскольку задача осесимметрична относительно оси *z*, ее можно рассмотреть в любой вертикальной плоскости, проходящей через эту ось, например в плоскости $y = 0$. Для произвольной точки x_0 на оси *x* находим $p_1^0 = (1/V)\, x_0 \big/ \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$ и $p_3^0 = \pm(1/V)\, z_0 \big/ \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$ (кроме того, $p_2^0 = 0$, так как луч лежит в плоскости $y = 0$). Теперь нетрудно записать уравнение, описывающее положение луча в пространстве (для обоих продолжений):

$$x = x_0 + s x_0 \big/ \sqrt{x_0^2 + z_0^2}\,, \quad z = \pm s z_0 \big/ \sqrt{x_0^2 + z_0^2}\,. \tag{7.9}$$

Выразим луч в виде функции z от x: $z = \pm(x - x_0) z_0 / x_0$. Мы видим, что независимо от значения x_0 луч проходит через точку $(0, 0, -z_0)$ (прямое продолжение) и через точку $(0, 0, z_0)$ (обращенное продолжение). Значит, в силу осевой симметрии, в первом случае все лучи выходят из точки $(0, 0, -z_0)$, а во втором – из точки $(0, 0, z_0)$.

Запишем в явном виде лучи семейств $\Gamma_\Sigma^{(\pm)}$ для случая однородной среды, а годограф τ_Σ произволен. Общее уравнение луча в однородной среде может быть записано следующим образом: $\mathbf{x}(s;\, u_1, u_2) = \mathbf{x}_0(u_1, u_2) + sV\mathbf{p}_0(u_1, u_2)$. Здесь векторы $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{p}_0$

определены в глобальной декартовой системе координат. Эту запись следует уточнить для каждого из типов продолжения. Предположим, что направление нормали $\mathbf{N}_0$ (которая, как мы договорились выше, направлена внутрь области продолжения) составляет острый угол с положительным направлением оси *z*. Тогда независимо от типа продолжения координата $\mathrm{x}_3(s)$ должна расти с ростом $s>0$. Поэтому мы должны положить:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(s;u_1,u_2) &= \mathbf{x}_0(u_1,u_2) \pm sV\left(\mathrm{pr}_P\nabla\tau\big|_{\mathbf{x}_0} \pm \mathbf{N}_0\sqrt{\left(1/V_0^2(u_1,u_2) - \left|\mathrm{pr}_P\nabla\tau\right|^2\right)}\right) \equiv \\ &\equiv \mathbf{x}_0(u_1,u_2) \pm sV\mathbf{p}_0^{\pm}.\end{aligned} \tag{7.10}$$

После того как построены лучи, можно перейти к определению времени пробега в каждой точке каждого луча. Пусть луч $\gamma(u_1,u_2)\in\Gamma_\Sigma^{(\pm)}$ описывается параметрическим уравнением $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s;\ u_1,u_2)$. Тогда

$$\tau^{(\pm)}(s;u_1,u_2) = \tau_\Sigma(u_1,u_2) \pm \int_0^S \frac{ds}{V\left[\mathbf{x}(s;u_1,u_2)\right]}. \tag{7.11}$$

Меняя s, u_1 и u_2, получаем эйконал $\tau^{(\pm)}(\mathbf{x})$ во всех точках области D, в которых определены лучи семейства $\Gamma_\Sigma^{(\pm)}$.

Может оказаться, что решение ищется и по другую сторону от поверхности Σ. Условимся обозначать обе области символами D_+ и D_- считая, что нормаль к Σ направлена в D_+. Тогда возможными решениями являются функции $\tau_{D_\pm}^{(\pm)}$. Во всех случаях прямым продолжением считают такое, при котором значение времени возрастает при переходе от Σ внутрь данной области. Скажем, решение $\tau_{D_-}^{(-)}$ есть обращенное продолжение и означает волну, распространяющуюся из D_- к Σ (и далее в D_+, если Σ не является свободной границей). Так как по обе стороны от поверхности Σ значения скорости могут отличаться, то вместо формулы (7.7) мы должны написать

$$\nabla\tau_{D_\pm}^{(\pm)}(\mathbf{x_0}) = \mathrm{pr}_P\nabla\tau(\mathbf{x_0}) \pm \mathbf{N}_0\sqrt{\left(1/V_\pm^2\right) - \left|\mathrm{pr}_P\nabla\tau\right|^2},$$

где $V_\pm = V\left(u_1^0, u_2^0, \pm 0\right)$. (Считается, что точка с координатами $(u_1, u_2, \pm 0)$ принадлежит области $D_\pm$.)

Уместно задать вопрос: является ли продолжение заданного типа однозначным? Предположим, что область *D*, в которую осуществляется продолжение, имеет гладкое поле скоростей $V(\mathbf{x})$. Поскольку задача Коши для уравнений луча имеет единственное решение, то все, что может нарушить единственность продолжения заданного типа, это пересечение лучей: если два луча пересекаются, то в точке пересечения определены два (вообще говоря, различные) значения одного и того же эйконала. Такая возможность может возникнуть только в некотором отдалении от поверхности Σ. А именно имеет место утверждение: если поверхность Σ гладкая, функция $\tau_\Sigma(u_1,u_2)$ непрерывно дифференцируема (т. е. функция класса C^1) и, кроме того,

$$\sup(\partial\tau_\Sigma/\partial u) = A < \inf_{\mathbf{x}_0\in\Sigma} 1/V(\mathbf{x}_0),$$

то существует такая невырожденная область, примыкающая к Σ, в которой продолжение эйконала является вещественной однозначной функцией координат.

В связи с проблемой однозначности поля времен, уместно вспомнить определение регулярности семейства лучей: семейство лучей $\Gamma_{\Sigma}^{(\pm)}$ *регулярно* в *D*, если через каждую точку $\mathbf{x} \in D$ проходит один и только один луч семейства $\Gamma_{\Sigma}^{(\pm)}$. Если семейство $\Gamma_{\Sigma}^{(\pm)}$ регулярно, то эйконал $\tau^{(\pm)}$ – однозначная функция на *D*.

Но, как правило, лучи, выпущенные из разных точек, в нетривиальных ситуациях не параллельны. Поэтому в достаточно большой области *D* лучи обязательно пересекаются. Однако и в этой ситуации эйконал (поле времен) в расширенном пространстве $(\mathbf{x}, t)$ оказывается устроенным как многолистная поверхность, состоящая из гладких (однозначных) листов. Почему это так? В § 5 сказано, что в фазовом пространстве фазовые траектории (агрегаты вида $\{\mathbf{x}(s), \mathbf{p}(s)\}$) не пересекаются. В силу непрерывной зависимости решения задачи Коши для уравнений луча от данных, поле времен $\tilde{\tau}$, определенное на расширенном фазовом пространстве $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$, есть гладкое однолистное многообразие. Определим его размерность. Каждая точка луча идентифицируется заданием значений (u_1, u_2, s). Тройку этих величин можно рассматривать как криволинейные координаты на многообразии $\tilde{\tau} : t = \tau(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Стало быть, это трехмерная поверхность в семимерном пространстве. Проекция гладкой поверхности $\tilde{\tau}$, определенной в пространстве большей размерности, в пространство меньшей размерности (в данном случае в пространство $(\mathbf{x}, t)$) может иметь особенности, которые суть границы разных листов поверхности τ. (Пример такой проекции для фронта, устроенного по типу катастрофы сборки – по известной в теории катастроф классификации Тома – дан на рис. 3.)

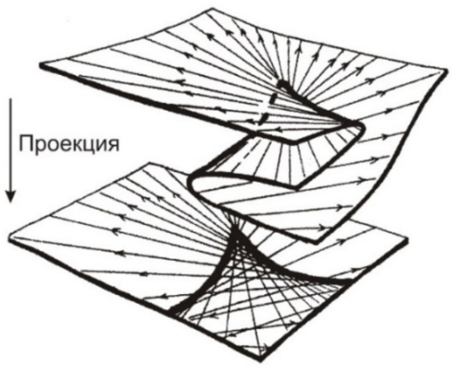


Рис. 3. Пример ветвления фронта

Поскольку точки и той и другой поверхностей идентифицируются одними и теми же координатами (u_1, u_2, s), между обеими поверхностями имеется одно однозначное поточечное соответствие. Следовательно, поле времен τ в пространстве $(\mathbf{x}, t)$ представляет многообразие, на котором можно ввести атлас лучевых систем координат (u_1, u_2, s) (отвечающий атласу криволинейных координат (u_1, u_2) на Σ). Следовательно, имеется принципиальная возможность идентифицировать листы поля времен τ, непрерывно переходить от одного листа к другому и тем самым как бы устранить неоднозначность в описании поля времен.

С учетом этих рассуждений решение задачи Коши для уравнения эйконала (при выбранном типе продолжения) в область с гладким полем скоростей существует и является однозначным.

Замечание. Термин *поле времен* для функции $\tau(u_1, u_2, s)$ используется тогда, когда он рассматривается как геометрический объект (поверхность, многообразие) в пространствах $(\mathbf{x}, t)$ или $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$. Если геометрический аспект не играет никакой роли, используется термин *эйконал*.

Особое место занимает ситуация, когда Σ – поверхность фронта $\tau(x, y, z) = t_0 = \text{const}$. Благодаря ортогональности лучей и фронта в изотропной среде на фронте $\text{pr}_P \nabla\tau(\mathbf{x}_0) \equiv 0 \;\; (\mathbf{x}_0 \in \Sigma)$, поэтому условие (7.9) заведомо выполнено и

$$\mathbf{p}_0^{\pm}(\mathbf{x}_0) = \pm \mathbf{N}_0(\mathbf{x}_0) / V(\mathbf{x}_0).$$

Таким образом, решение всегда существует и вещественно. Это, в частности, означает, что фронтом (в отличие от лучей) может быть произвольная гладкая поверхность в R^3. Как и во всех других ситуациях, продолжение эйконала, заданного на собственном фронте, требует дополнительной информации о направлении распространения волны.

Если

$$\left|\nabla\tau(\mathbf{x}_0)\right| > 1/V(\mathbf{x}_0), \forall \mathbf{x}_0 \in \Sigma,$$

то вещественных решений у рассматриваемой задачи нет. Метод характеристик для такой ситуации разработан только в случае, когда среда однородна, а поверхность Σ описывается аналитической функцией. Мы рассмотрим эти вопросы гораздо позже, в связи с изучением конкретных задач. Примеры решения подобных задач в простейших случаях даны выше.

Остановимся на ситуации, когда

$$\left|\nabla\tau(\mathbf{x}_0)\right| = 1/V(\mathbf{x}_0), \forall \mathbf{x}_0 \in \Sigma, \tag{7.12}$$

а поверхность Σ в окрестности $\mathbf{x}_0$ криволинейна. Данное равенство не обязательно означает характеристичность многообразия данных. Оно может означать, что многообразие данных является огибающей для семейства характеристических подмногообразий. Как показывает пример 5, решение может существовать. Для простоты среду в области D будем считать однородной. Рассмотрим картину, которая возникает в плоскости, определяемой векторами $\mathbf{N}_0$ и $\text{pr}_P \nabla\tau$ (рис. 4, *а*, *б*). Если поверхность Σ вогнута относительно области D в окрестности $\mathbf{x}_0$, то существует луч (он касается поверхности Σ в точке $\mathbf{x}_0$), который принадлежит области *D*. Если условие (7.2) выполнено в окрестности $\mathbf{x}_0$, то в каждой точке данной окрестности восстанавливаются лучи.

Следовательно, вещественное решение задачи Коши для уравнения эйконала существует. Совсем иная картина получается, когда поверхность Σ выпукла относительно D в окрестности рассматриваемой точки (см. рис. 4, *б*). Теперь лежащих в области D лучей, которые могли бы отвечать условию (7.12), нет. Решение уравнения эйконала может быть только комплекснозначным. Именно такая ситуация наблюдается в так называемых зонах тени, которые будут нами рассматриваться значительно позже.

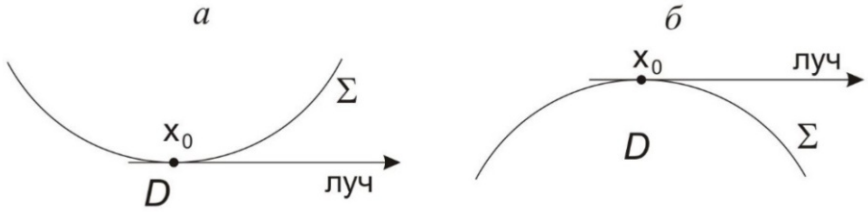


Рис. 4. К условию разрешимости задачи Коши

Определение $\mathbf{p}_0$ в глобальных системах координат. Локальная система координат, использованная выше для доказательства принципиальной возможности восстановления начальных данных для системы уравнений луча, не всегда удобна в практических вычислениях. В том случае, если поверхность Σ в глобальной декартовой системе координат описывается уравнением $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$ и она повсюду трансверсальна к одной из координатных осей, скажем x_3, то существует и глобальная криволинейная система координат (u_1, u_2, u_3), в которой поверхность Σ описывается уравнением $u_3 = 0$. При этом матрица Якоби $(\partial u_i / \partial x_j)$ считается известной.

В криволинейной системе координат уравнение эйконала описывается формулой (7.3), где g_0^{ij} – элементы матрицы $\mathbf{G}_0^{-1}$, которая была определена в § 2 как произведение матрицы Якоби преобразования $u_i \to x_i$ на транспонированную к ней

$$g_0^{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^j}{\partial x^k}. \tag{7.13}$$

Выделив в уравнении (7.3) слагаемые, содержащие производные по третьей координате, получим

$$g^{33}\tau_{,3}^2 + \left(g^{13}\tau_{,1} + g^{23}\tau_{,2}\right)\tau_{,3} + A - 1/V^2 = 0, \tag{7.14}$$

где $A = g^{11}\tau_{,1}^2 + 2g^{12}\tau_{,1}\tau_{,2} + g^{22}\tau_{,2}^2$. Поскольку производные $\tau_{,1}$ и $\tau_{,2}$ известны на поверхности Σ, то мы можем решить полученное квадратное уравнение относительно $\tau_{,3}$. Теперь осталось вернуться в глобальную декартовую систему координат:

$$\tau_{x_i} = \left(\partial x^i / \partial u^j\right)\tau_{,j}.$$

Применим изложенную технику к присоединенной к Σ в $\mathbf{x}_0$ криволинейной системе координат, которая была определена выше (формула (7.8)). Для нее матрица Якоби равна

$$\mathbf{C}_{UX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 1 \end{pmatrix},$$

$u_1 = x', \quad u_2 = y', \quad u_3 = z' - F\left(x', y'\right)$, где для простоты обозначено $\varphi_i = -F_{x_i}$ $(i = 1,2)$. Если обозначить $\varphi_3 = 1$, то

$$\mathbf{G}_0^{-1} = \mathbf{C}_{XU}\left(\mathbf{C}_{XU}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \varphi_1 \\ 0 & 1 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \sum \varphi_i^2 \end{pmatrix}.$$

Квадратное уравнение для $\tau_{,i}$ будет выглядеть так:

$$\tau_{,3}^2 \sum \varphi_i^2 + \left(\varphi_1 \tau_{,1} + \varphi_2 \tau_{,2}\right) \tau_{,3} + \tau_{,1}^2 + \tau_{,2}^2 - 1/V^2 = 0 .$$

В точке $\mathbf{x}_0$ $\mathbf{C}_{UX} = \mathbf{G}_0^{-1} = \mathbf{I}$.

Данные на линии. С данными на линии мы сталкиваемся, во-первых, в двумерных задачах, когда одна из координат (например, y) просто отсутствует. Но этот случай ничего принципиально не меняет в уже проделанных рассуждениях. Больший интерес представляет другой случай, когда имеются данные на линии, вложенной в трехмерное пространство. Итак, пусть на линии $\lambda : \mathbf{x} = \mathbf{x}(l)$ заданы значения $y = \tau(l)$, при этом l есть натуральный параметр на λ. Задача Коши имеет решение, если многообразие данных не является бихарактеристикой: $d\tau / dl \neq 1/V_0(l)$ $\left(V_0(l) = V(\mathbf{x}(l))\right)$. Пусть вектор $\mathbf{t}_0$ есть вектор касательной к λ в точке l_0. Опять поставим задачу восстановления лучей, начинающихся в точке l_0 и согласующихся с этими данными. Разница с предыдущим изложением состоит в том, что при выбранном типе продолжения эйконала такой луч был один (по одну сторону от Σ), а теперь их оказывается множество. Именно положим

$$\mathbf{p}^0 = \partial\tau / \partial l\big|_{l_0} \mathbf{t}_0 \pm b\mathbf{q} ,$$

где $\mathbf{q}$ – единичный вектор, ортогональный к $\mathbf{t}_0$, $b = \sqrt{1/V_0^2 - (\partial\tau/\partial l)^2}$. Каждый вектор $\mathbf{q} \perp \mathbf{t}_0$ определяет луч $\gamma(l_0, \mathbf{q})$, отвечающий начальным данным $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(l_0)$, $\mathbf{p}^0$ и тем самым согласующийся с данными на λ. Каждому вектору $\mathbf{q}$ можно поставить в соответствие угол α между ним и некоторым фиксированным вектором $\mathbf{q}_0(l_0)$. Семейство лучей $\Gamma_{l_0}^{(\pm)}$, отвечающих точке l_0 на луче, является однопараметрическим (с параметром α), а полное семейство лучей $\Gamma_\lambda^{(\pm)}$, отвечающих линии λ с заданным эйконалом $\tau_\lambda(l)$, как и для данных на поверхности, двухпараметрическим (с параметрами l и α). Тройка параметров (l, α, s) образует лучевые координаты, а множество точек наделенных этими координатами – лучевое многообразие.

Решение задачи Коши состоит в определении значения времени t во всех точках лучевого многообразия при помощи трассирования всех лучей семейства $\Gamma_\lambda^{(\pm)}$. Дальнейший анализ не отличается от того, который был проведен выше.

Данные в точке. Естественная физическая интерпретация подобной ситуации – наличие источника. Пусть точке $\mathbf{x}^0$ приписано некоторое значение времени t_0. В точке $\mathbf{x}^0$ определим двухпараметрическое семейство лучей $\Gamma_{\mathbf{x}^0}^{(\pm)}$, каждый из которых определяется вектором $\mathbf{t}^0 \in S_2$, указывающим начальное направление луча. Тем самым для каждого луча определены начальные данные $\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{p}^0\right)$, $\mathbf{x}^0 = \text{const}$, $\mathbf{t}^0 \in S_2$. В качестве параметров, идентифицирующих лучи семейства $\Gamma_{\mathbf{x}^0}^{(\pm)}$, могут быть взяты два угла (углы полярной системы координат либо углы двух из направляющих косинусов), которые мы будем обозначать α_1 и α_2. Точки лучевого многообразия идентифицируются лучевыми координатами (α_1, α_2, s). Важно отметить, что независимо от размерности многообразия, на котором определены данные для задачи Коши, размерность лучевого многообразия всегда равна трем. Пусть Φ есть Σ , λ или $\mathbf{x}^0$ и $m = \dim \Phi$ – размерность этого многообразия. Пусть $\Gamma_{\mathbf{x}}(\Phi)$ – размерность семейства лучей, отвечающих точке $\mathbf{x} \in \Phi$ и согласующихся с данными на Φ. Тогда имеет место простая формула $\dim \Phi + \dim \Gamma_{\mathbf{x}}(\Phi) = 3$.

Возвращаясь к задаче с данными в точке, находим решение задачи Коши для всех лучей семейства $\Gamma_{\mathbf{x}^0}^{(\pm)}$, после чего определяем соответствующее поле времен. Лучи семейств $\Gamma_{\mathbf{x}^0}^{(+)}$ и $\Gamma_{\mathbf{x}^0}^{(-)}$ не отличаются друг от друга. Различие состоит в знаке в формуле для определения времени пробега

$$\tau^{(\pm)}\left(\alpha_1, \alpha_2, s; \mathbf{x}^0\right) = t_0 \pm \int_0^s \frac{ds}{V\left[\mathbf{x}\left(s; \alpha_1, \alpha_2\right)\right]} .$$

Обращенное продолжение эйконала для данных в точке (т. е. использование знака «минус» в последней формуле) кажется не имеющим смысла. Это действительно так в физических задачах, связанных с распространением волн. Однако при решении обратных задач, когда возникает необходимость в реконструкции полей времен по измеренным данным, обращенное продолжение эйконала начинает играть исключительно важную роль.

Следует обратить внимание на то, что для данных в точке единственным «свободным» параметром является t_0 . Поэтому в этой задаче решение с точностью до выбора t_0 и знака продолжения является единственным. В частности, эйконал сферического источника является единственным примером решения данной задачи в однородной среде. На рис. 1 изображено характеристическое многообразие, отвечающее прямому продолжению в однородную двумерную среду из точечного источника, помещенного в начало координат. Оно имеет вид конической поверхности с вершиной в $(0, 0, t_0)$. Обращенному продолжению отвечает коническая поверхность, полость которой обращена к отрицательному направлению оси времени.

Волны, испускаемые точечным источником и не испытавшие актов отражения и преломления, часто называют *проходящими*. След эйконала проходящей волны на поверхности Σ (т. е. сечение поля времен $\tau\left(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0\right)$ при $\mathbf{x} \in \Sigma, \mathbf{x}^0 = \mathrm{const}$) называется годографом проходящей волны на поверхности Σ . Если среда однородна и Σ есть плоскость, то годограф определится парой уравнений

$$t = V^{-1}\sqrt{\left(x - x^0\right)^2 + \left(y - y^0\right)^2 + \left(z - z^0\right)^2},\ c_1 x + c_2 y + c_3 z - d = 0 .$$

Однако такое описание годографа неудобно. Разрешив второе уравнение относительно z и подставив в первое, получим более удобное описание

$$t = V^{-1}\sqrt{\left(x - x^0\right)^2 + \left(y - y^0\right)^2 + \left(d - (c_1/c_3)x - (c_2/c_3)y - z^0\right)^2} .$$

Если перейти к системе координат, начало которой расположено в источнике, а ось z перпендикулярна плоскости $(\Sigma : z = d)$, то легко увидеть, что годограф $t = V^{-1}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ представляет одну полость гиперболоида вращения. Асимптоты этого гиперболоида при $x \to \infty$ и / или $y \to \infty$ представляют прямые, выходящие из начала координат с угловым коэффициентом $1/V$.

Решив задачу Коши для данных в точке $\mathbf{x}^0$ для всех $\mathbf{x}^0 \in D$, мы получим поле времен $\tau\left(\mathbf{x};\mathbf{x}^0\right)$ двухточечного эйконала, который введен в § 6. Пусть теперь Φ_0 и Φ – многообразия произвольной размерности ≤ 3 . Тогда годографы двухточечного эйконала есть сечения поля времен $\tau\left(\mathbf{x};\mathbf{x}^0\right)$ при $\mathbf{x}^0 \in \Phi_0$ и $\mathbf{x} \in \Phi$. Декартово произведение $\Phi_0 \times \Phi$ образует *множество наблюдений*, являющееся подмножеством *пространства наблюдений* $D \times D$.

§ 8. Изотропные среды с границами

До сих пор мы рассматривали задачу Коши для области, в которой поле скоростей представляло достаточно гладкую функцию координат. Но в геофизической практике, как правило, имеют дело со средами, содержащими поверхности, на которых рвутся либо значения скорости (границы первого рода) либо их производные (границы второго рода). Естественно предположить, что эйконал остается непрерывной функцией и в средах с границами. Это предположение можно рассматривать как следствие из уравнения эйконала: в левой части его стоят производные первого порядка функции $\tau\left(x, y, z\right)$, а справа – значения $V\left(x, y, z\right)$. Это означает, что гладкость эйконала на единицу выше, чем гладкость поля скоростей. Следовательно, если в точке M скорость терпит конечный разрыв, то эйконал остается непрерывной функцией. Но правильнее считать, что непрерывность эйконала следует просто из физических соображений: волна не задерживается на границе и не возникает за этой поверхностью раньше, чем она подошла к ней (принцип причинности).

Закон Снеллиуса, связывающий производные эйконала в касательной к границе плоскости по обе стороны от границы, выводится здесь как простое следствие непрерывности эйконала. Если эйконал обладает достаточной гладкостью, то помимо классического закона Снеллиуса (закона первого порядка) устанавливаются аналогичные законы для производных второго, третьего и других порядков.

Задача Коши в средах с границами. Продолжение эйконала в среду с границами сводится к решению последовательности задач Коши в гладких областях. А именно мы продолжаем эйконал до ближайшей границы Σ_1 . Пусть след этого продолжения на Σ_1 есть τ_{Σ_1} , тогда мы ставим новую задачу Коши с данными на Σ_1 . Но теперь у нас возникает новая ситуация, поскольку граница Σ_1 есть граница между двумя областями: между областью D и областью D_1, лежащей за поверхностью Σ_1 . Как сказано выше, в каждой из областей определено два типа продолжения эйконала. В упругой среде каждая область характеризуется двумя скоростями: V_P и V_S , а так как тип волны (не путать с типом продолжения эйконала!) может измениться благодаря явлению *обмена*, то число возможных продолжений удваивается, т. е. может иметь место ветвления решений. В первой главе было отмечено, что любой эйконал, который не противоречит данным (в нашем случае – удовлетворяет граничным условиям на Σ_1), потенциально может оказаться эйконалом волны, содержащейся в решении базисного уравнения. Окончательное решение может быть принято только после анализа динамических условий на границе. Но, как правило, исследователь знает, эйконал какой волны (или каких волн) ему нужен. Это может быть проходящая (преломленная) монотипная (т. е. не испытавшая обмена) волна. Во всех физических задачах, связанных с распространением волн, используется только прямой тип продолжения (время увеличивается по лучу). С обращенным продолжением мы встречаемся только в задачах интерпретации данных. Поэтому при выборе ветви решения выбор сводится к выбору области продолжения и к выбору одной из скоростей (V_P или V_S). Мы будем считать, что такой выбор уже сделан и будем рассматривать продолжение в заданную область с заданным типом скорости, которую будем обозначать просто символом V. Мы нарушим порядок, который был принят в § 7. Сначала рассмотрим общую ситуацию (криволинейная граница двух неоднородных сред), а потом перейдем к примерам для плоских границ, разделяющих однородные среды. В этом параграфе впервые появляется термин «*годограф* волны», играющий важную роль при решении обратных задач.

Условия на границе (Закон Снеллиуса). Как сказано выше, условие непрерывности позволяет воспроизвести на каждой границе Σ_i данные, позволяющие решать задачу Коши для продолжения эйконала в новую среду. Разумеется, не исключается ситуация, когда для новой среды комплект $\left\{\Sigma_i, \tau_{\Sigma_i}\right\}$ оказывается характеристичен, хотя лучи в предыдущей среде «подходили» к Σ_i трансверсально (в дальнейшем номер границы не указывается). Наша задача состоит в том, чтобы условия непрерывности записать в терминах лучей, поскольку именно это необходимо при трассировании лучей (в рамках метода характеристик). Но сначала запишем условие непрерывности для самого эйконала с использованием присоединенной к поверхности Σ системе координат U (формула (7.8)). В этих координатах неравенство $u_3 < 0$ определяет одну из областей пространства, прилегающих к поверхности Σ, а неравенство $u_3 > 0$ – другую область. Обозначим их $D_{(-)}$ и $D_{(+)}$ соответственно и условимся, что волна распространяется из $D_{(-)}$ в $D_{(+)}$. Условимся также, что символы -0 и $+0$ означают пределы $u_3 \to 0$ при стремлении к нулю в соответствующей области $D_{(-)}$ или $D_{(+)}$ соответственно. Тогда условие непрерывности запишется следующим образом:

$$\tau(u_1, u_2, -0) = \tau(u_1, u_2, +0) \tag{8.1}$$

или еще короче: $\tau\big|_{-0} = \tau\big|_{+0}$. Этими равенствами определяется новая функция $\tau_\Sigma(u_1, u_2)$ – след эйконала на поверхности Σ. Вычислим первые производные τ_{u_i} $(i = 1, 2)$ в произвольной точке (u_1, u_2, u_3), принадлежащей какой-то из областей $D_{(-)}$ или $D_{(+)}$. Будем считать, что гладкость поля скоростей в каждой из областей обеспечивает непрерывность этих производных вплоть до поверхности $u_3 = 0$. Следовательно, пределы $\tau_{u_i}(u_1, u_2, -0)$ и $\tau_{u_i}(u_1, u_2, +0)$ существуют, и в силу этого они не могут не совпасть с величинами $\partial u_\Sigma(u_1, u_2)/\partial u_i$. А отсюда следует равенство

$$(\partial\tau/\partial u_i)\big|_{-0} = (\partial\tau/\partial u_i)\big|_{+0},\ i = 1, 2\,. \tag{8.2}$$

Продолжая эти рассуждения дальше, мы получаем, что при достаточной гладкости поля скоростей в областях $D_{(-)}$ и $D_{(+)}$:

$$\left(\partial^2\tau / \partial u_i \partial u_k\right)\Big|_{-0} = \left(\partial^2\tau / \partial u_i \partial u_k\right)\Big|_{+0}, \ (i, k = 1, 2) \tag{8.3}$$

и вообще,

$$\left(\partial^{m+n}\tau / \partial u_i^m \partial u_k^n\right)\Big|_{-0} = \left(\partial^{m+n}\tau / \partial u_i^m \partial u_k^n\right)\Big|_{+0}, \quad (i, k = 1, 2). \tag{8.4}$$

Каждое из равенств (8.1)–(8.4) будем называть законом Снеллиуса соответствующего порядка (нулевого, первого, второго и ($n+m$)-го порядков). При этом закон каждого порядка является прямым следствием закона предыдущего порядка и все они являются следствием непрерывности (и предполагаемой гладкости) эйконала. При обосновании непрерывности эйконала мы нигде не ссылались на изотропность среды. Поэтому все законы Снеллиуса переносятся и на случай контакта анизотропных сред.

Вернемся к равенству (8.2), представляющему классический закон Снеллиуса. Классический закон Снеллиуса имеет порядок 1. Учитывая связь присоединенных к поверхности Σ координатных систем X' и U, имеем, что в начале координат обеих систем $\tau_{u_i}(0, 0\pm 0) = \tau_{x_i}(0, 0, \pm 0)$, $(i, k = 1, 2)$. Но $\tau_{x_i}(0, 0, \pm 0)$, $(i, k = 1, 2)$ суть компоненты вектора $\mathrm{pr}_{T\Sigma}\nabla\tau$ ($T\Sigma$ – плоскость, касательная к Σ). В силу произвольности выбора точки присоединения координатных систем X' и U, мы можем написать для любой точки на границе в бескоординатной форме:

$$\mathrm{pr}_{T\Sigma}\nabla\tau\big|_{-0} = \mathrm{pr}_{T\Sigma}\nabla\tau\big|_{+0}. \tag{8.5}$$

Известно, что вектор $\nabla\tau$ и его проекция $\mathrm{pr}_Q\nabla\tau$ на плоскость $Q = T_{\mathbf{x}}\Sigma$ лежат в одной плоскости с нормалью $\mathbf{N}$ к Q. Отсюда легко выводится, что векторы $\nabla\tau$ и $\mathrm{pr}_Q\nabla\tau$ лежат в одной и той же плоскости (называемой плоскостью падения волны на Σ). Эти факты, равно как и формула (8.5), справедливы и в анизотропном случае. Следующие два соотношения верны только для изотропии:

$$\mathbf{N}\times\nabla\tau\big|_{-0} = \mathbf{N}\times\nabla\tau\big|_{+0}, \tag{8.6а}$$

$$\sin\alpha^{(-)}/V^{(-)} = \sin\alpha^{(+)}/V^{(+)}, \quad \cos\alpha^{(\pm)} = \mathbf{t}^{(\pm)}\cdot\mathbf{N}, \tag{8.6б}$$

где $\mathbf{t}^{(\pm)}$ – единичные касательные векторы к лучу в точке его пересечения границы (непосредственно до и после пересечения), $V^{(\pm)}$ – соответствующие значения скорости распространения.

Все эти формулы нужны, чтобы восстановить начальное значение вектора $\mathbf{p} = \nabla\tau$ в точке пересечения с границей, но уже в новой среде. В вычислительных алгоритмах предпочтительнее использовать закон Снеллиуса в форме (8.5) или (8.6а). В случае вычислений, основанных на формуле (8.5), по заданному вектору на падающем луче определяется $\nabla\tau(u_1, u_2, +0) = \nabla\tau(u_1, u_2, -0) - \mathbf{N}\cdot\nabla\tau(u_1, u_2, -0)$. Затем вектор $\nabla\tau(u_1, u_2, +0)$ восстанавливается по формуле

$$\nabla\tau(u_1, u_2, +0) = \mathrm{pr}_{T\Sigma}\nabla\tau \pm \mathbf{N}\sqrt{1/\mathrm{V}_+^2 - \left|\mathrm{pr}_{T\Sigma}\nabla\tau\right|^2}. \tag{8.7}$$

Формулу (8.6а) в покомпонентной записи можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно трех компонент вектора $\nabla\tau(u_1, u_2, +0)$.

Примеры волн, возникающих на плоских границах однородных сред. В этом разделе рассмотрим ситуации, допускающие построение решения в аналитической (явной) форме.

Пример 1. Пусть на поверхности $\Sigma_0 : z = 0$ задано уже использовавшееся условие $\tau_\Sigma = t_0 + a_1 x + a_2 y$. К этой границе примыкает область *D*, в которой скорость принимает постоянное значение *V*. Следующая поверхность Σ_1 также является плоскостью $c_1 x + c_2 y + c_3 z - d = 0$. Рассмотрим прямое продолжение через плоскость Σ_1 в область *D*1. Предполагается, что в областях D и D_1, скорости V и V_1 не зависят от координат. Согласно примеру 2 § 7 (формула 7.4), в области D между Σ и Σ_1 мы имеем решение $\tau = t_0 + a_1 x + a_2 y + bz$. Повернем систему координат таким образом, чтобы в новой системе координат (x, y, z) плоскость Σ_1 была записана как $z' = d$. Если уравнение плоскости Σ_1 дано в нормированном виде и c_i суть направляющие косинусы нормали к Σ_1, то мы должны положить орт $\mathbf{e}'_3$ новой системы, равным вектору (c_1, c_2, c_3) в старой системе координат. Остальные два вектора – $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ – можно выбрать произвольно, но ортогонально вектору $\mathbf{e}'_3$. Пусть

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_3 \end{pmatrix}$$

– матрица, столбцы которой совпадают с ортами $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ и $\mathbf{e}'_3$ соответственно: $c_i c_{ik} = \delta_{ik}$, $(i = 1, 2, 3; k = 1, 2)$. Тогда представления радиус-вектора $\mathbf{x}$ в старой и новой системе координат связаны следующей формулой $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x}'$. Легко проверить, что требуемое уравнение для плоскости Σ_1 достигнуто, а эйконал в области D запишется так: $t = t_0 + a'_1 x' + a'_2 y' + a'_3 z'$, где $a'_i = a_i c_{ik}$, $a'_3 = a_i c_i$ $(i = 1, 2, 3;\ k = 1, 2)$. Теперь след эйконала на Σ_1 запишется просто: $t = t'_0 + a'_1 x' + a'_2 y'$ при $t'_0 = t_0 + a'_3 d$. Далее мы ставим новую задачу Коши для данных на поверхности Σ_1 в целях продолжения эйконала в область D_1 $(z' > d)$. Мы опять обращаемся к формуле (7.4), но используем значение скорости V_1. Решения для монотипных и обменных проходящих волн отличаются только выбором значения скорости V_1. Случай отражения рассматривается аналогично. Читатель может самостоятельно убедиться в том, что отраженная волна определится выражением вида $t = t'_0 + a'_1 x' + a'_2 y' - b' z'$ при $b' > 0$.

Пример 2. Рассмотрим преломление и отражение сферической волны на плоской границе двух однородных сред, характеризующихся скоростями V и V_1 соответственно. Если при отражении рассматривается обменная волна, то ее скорость принимается равной V'. Пусть граница раздела описывается уравнением $z = 0$, а источник помещен в среде со скоростью V в точке с координатами $(0, 0, -d)$. Сначала рассматривается задача о прохождении сферической волны с эйконалом:

$$\tau = (1/V)\sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}$$

через плоскость $z = 0$ в область $z > 0$. Годограф (след) эйконала на данной плоскости есть $\tau_\Sigma(x, y) = (1/V)\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}$. В силу круговой симметрии, мы можем сначала рассмотреть продолжение эйконала в плоскости $y=0$, положив $\tau_\Sigma(x) \equiv \tau_\Sigma(x;0) = (1/V)\sqrt{x^2+d^2}$. Вычислим значение τ_x в точке $x=r$:

$$\tau_x = \frac{1}{V}\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}. \tag{8.8}$$

Найдем в этой же точке значение τ_z для нижнего полупространства:

$$\tau_z = \pm\sqrt{\frac{1}{V_1^2} - \frac{r^2}{V^2\left(r^2+d^2\right)}} = \pm\frac{1}{V_1}\sqrt{\frac{d^2-\left(\eta^2-1\right)r^2}{r^2+d^2}},$$

где $\eta = V_1/V$. Пусть для начала $\eta<1$. Тогда выражение под корнем при любых значениях r вещественно. В силу того, что мы осуществляем прямое продолжение, перед корнем выбираем знак «плюс». Теперь лучи в плоскости $y=0$ при $z>0$ определятся следующими параметрическими формулами типа (7.9):

$$x = r + \frac{1}{V}\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}V_1^2\left(t-(1/V)\sqrt{r^2+d^2}\right),$$

$$z = \frac{1}{V_1}\sqrt{\frac{d^2+\left(1-\eta^2\right)r^2}{r^2+d^2}}V_1^2\left(t-(1/V)\sqrt{r^2+d^2}\right). \tag{8.9}$$

В этих формулах величина r обозначает положение точки преломления. При $r\to\infty$

$$x \sim r\left(1-\eta^2\right)+V_1\eta t,$$

$$z \sim V_1\sqrt{1-\eta^2}\left(t-r/V\right).$$

Исключим из этих выражений параметр r. Согласно первому из уравнений,

$$r \sim \left(x-V_1\eta t\right)/\left(1-\eta^2\right).$$

Подставляя во второе уравнение, получаем после преобразований

$$t \sim \frac{x}{V}+\frac{z}{V_1\sqrt{1-\eta^2}}.$$

Для точек вне плоскости $y=0$ соответствующее выражение получим исходя из круговой симметрии задачи:

$$t \sim \left(\sqrt{x^2+y^2}/V\right)+\left(z/V_1\sqrt{1-\eta^2}\right).$$

В «дальней зоне» фронт волны имеет форму, близкую к конической. Точки фронта перемещаются вдоль границы $z=0$ со скоростью в верхней среде. Этот результат имеет очень простой физический смысл. В верхней среде фронт падающей волны при больших расстояниях от источника скользит вдоль границы со скоростью очень близкой к скорости в верхней среде. С такой же скоростью скользит вдоль границы и фронт преломленной волны, поскольку оба фронта имеют на границе общие точки.

Ситуация становится более сложной, когда $V_1>V$ и $\eta>1$. Теперь после достижения величины

$$r_0 = d/\sqrt{\eta^2-1}, \tag{8.10}$$

корень в выражении для τ_z становится мнимым. Поэтому мы сначала рассмотрим продолжение эйконала, порождаемого лучами при $r \le r_0$, а затем уже перейдем к эйконалу с точками преломления $r > r_0$. Поскольку при $r \le r_0$ корень в формуле (8.10) является вещественным, то опять выбирается его положительное значение. Подсемейство лучей Γ^+ при $r \le r_0$ по-прежнему определится формулами (8.9). Найдем предел этих выражений при $r \to r_0$ $(r \le r_0)$:

$$x \to V_1 t - d\sqrt{\eta^2 - 1},\ z \to 0\,.$$

Эти формулы означают, что «предельный» луч распространяется вдоль границы со скоростью V_1. Годограф точки на этом луче получим, разрешив первую из формул относительно t:

$$t = (1/V_1)\left(x + d\sqrt{\eta^2 - 1}\right),$$

а для произвольных точек плоскости:

$$t = \left(1/V_1\right)\left(\sqrt{x^2 + y^2} + d\sqrt{\eta^2 - 1}\right). \qquad (8.11)$$

Важно отметить, что данное семейство лучей заполняет все нижнее полупространство. Поэтому семейство лучей при $r > r_0$ определяют совсем другой эйконал. Определим его. Сначала заметим, что выбор знака перед корнем теперь определяется не типом продолжения, а условием убывания амплитуды разрыва при удалении от границы в сторону положительного направления оси *z*. Как показано при выводе формулы (2.10), этот знак должен быть положительным. Согласно (8.9) лучи определяются параметрическими формулами

$$x = r + \frac{1}{V}\frac{r}{\sqrt{r^2 + d^2}}V_1^2\left(t - \left(1/V\right)\sqrt{r^2 + d^2}\right),$$

$$z = i\sqrt{\frac{d^2 - \left(\eta^2 - 1\right)r^2}{r^2 + d^2}}V_1\left(t - \left(1/V\right)\sqrt{r^2 + d^2}\right).$$

Рассмотрим асимптотику этих выражений при $r \to \infty$:

$$x \sim V_1 \eta t - r\left(\eta^2 - 1\right), \quad z \sim iV_1\sqrt{\eta^2 - 1}\left(t - r/V\right).$$

Исключая r, получаем для произвольных x и y:

$$t \sim \frac{1}{V}\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{iz}{V_1}\sqrt{\eta^2 - 1}\,.$$

Это – эйконал эванесцентной волны, скользящей вдоль границы со скоростью, характерной для верхней среды. Почему появилась эванесцентная волна? При $r > r_0$ значение τ_x оказывается больше, чем $1/V_1$. Значит, кажущаяся скорость падающей волны оказывается меньше скорости в нижней среде. Но с такой скоростью в нижней среде нормальные объемные волны распространяться не могут. И тогда возникают эванесцентные волны, распространяющиеся с меньшими скоростями. Описанное явление называется полным внутренним отражением. Энергия падающей волны вглубь нижней среды не проникает и сосредотачивается в окрестности границы.

Необходимо обратить внимание на то, что первая из распространяющихся в нижней среде волн распространяется вдоль границы со скоростью более высокой, чем эванесцентная волна.

Перейдем к рассмотрению волн, возникающих в первой среде. Сначала построим эйконал отраженной монотипной волны. Для верхней среды мы имеем данные, которые рассматривались в примере 1 § 7. Там было показано, что в этом случае имеется два решения:

$$\tau^{(\pm)}(x, y, z) = (1/V)\sqrt{x^2 + y^2 + (z \pm d)^2} .$$

Поскольку рассматривается распространение в среде, вглубь которой направлена отрицательная полуось z, то знак «+» относится к обращенному продолжению в среду. Соответствующее решение восстанавливает эйконал падающей волны с источником в $(0, 0, -d)$. Поэтому искомое решение есть

$$\tau(x, y, z) = (1/V)\sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2},\ z < 0 .$$

Полученный эйконал можно трактовать как эйконал сферической волны в фиктивной однородной среде от «мнимого» источника в точке $(0, 0, d)$. Понятием мнимого источника удобно воспользоваться, чтобы построить годограф отраженной волны на плоскости Q, расположенной в верхней среде и имеющей другую ориентацию, нежели отражающая плоскость. Пусть, к примеру, эта плоскость проходит через реальный источник и описывается уравнением

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 (z + d) = 0, \quad \sum \alpha_i^2 = 1 . \tag{8.12}$$

В принципе, можно выразить любую переменную через остальные и подставить в формулу, однако на практике обычно плоскость Q совмещена с координатной плоскостью, а отражающая граница наклонна. Рассмотрим именно эту ситуацию. Здесь также можно прибегнуть к поворотам координатных осей, но этот подход не оставляет места геометрической интуиции. Пусть реальный источник находится в точке O с координатами $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, 0)$ и отражающая граница описывается уравнением $\beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z - d = 0, \quad \sum \beta_i^2 = 1$. Мнимый источник O^* есть зеркальная по отношению к реальному источнику точка и, следовательно, находится на прямой $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + (\beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3)s$ на удвоенном расстоянии от источника до отражающей плоскости. Расстояние H от источника до отражающей плоскости найдем из следующего уравнения: $\beta_1 (x - x_0) + \beta_2 (y - y_0) + \beta_3 z - H = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z - d$. Отсюда $H = d + \beta_1 x_0 + \beta_2 y_0$. Следовательно, координаты мнимого источника O^* определяются радиус-вектором $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0 + 2H(\beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3)$. Осталось построить эйконал сферической волны с источником в O^* и взять затем его след на плоскости Q:

$$\tau = (1/V)\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + (z^*)^2} .$$

Условимся, что реальный источник находится в начале координат $(\mathbf{x}_0 = 0)$ и что ось x проходит вдоль сечения Q плоскостью, которая содержит вектор $\mathbf{x}(s) = (\beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3)$ и ортогональна к Q. В этой системе координат $\beta_2 = 0$, а

$\beta_1 = \sin\varphi$ и $\beta_3 = \cos\varphi$, где φ – угол наклона границы к горизонту. В этом случае $x^* = 2H\sin\varphi,\ z^* = 2H\cos\varphi$ и

$$\tau = (1/V)\sqrt{(x - 2H\sin\varphi)^2 + y^2 + 4H^2\sin^2\varphi} = (1/V)\sqrt{x^2 - 4Hx\sin\varphi + y^2 + 4H^2} .$$

В таком виде годограф отраженной волны от плоской границы и фигурирует в учебниках по сейсморазведке. На рис. 5 приведен поясняющий чертеж, на котором A – точка отражения, B – точка приема.

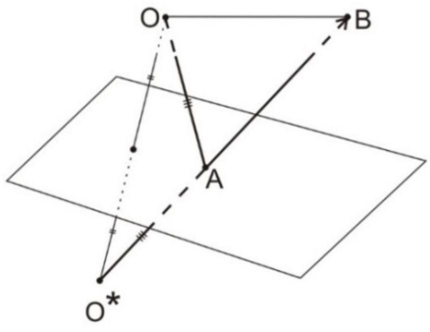


Рис. 5. К выводу уравнения годографа отраженной волны от плоской границы

Заметим, что найденный годограф отраженной монотипной волны никак не зависит от значения η. Но если $\eta > 1$, то в верхней среде должна появиться еще одна волна. Действительно, преломленная «нормальная» волна (во втором слое) распространяется вдоль отражающей границы со скоростью, отличной от кажущейся скорости падающей волны. Вследствие непрерывности эйконала на границах в верхней среде должна возникнуть волна с эйконалом, являющейся решением задачи Коши для уравнения эйконала в среде $z < 0$ с данными

$$\tau\big|_\Sigma = (1/V_1)\left(\sqrt{x^2 + y^2} + d\sqrt{\eta^2 - 1}\right).$$

Согласно примеру 3 § 7 в верхней среде возникает коническая волна

$$\tau = (d/V_1)\sqrt{\eta^2 - 1} + (1/V_1)\sqrt{x^2 + y^2} - (z/V_1)\sqrt{\eta^2 - 1} .$$

Эту волну принято называть *головной*. Головная волна существует не везде. Тот луч падающей волны, который попадает в «критическую» точку, называют критическим. Соответствующий луч монотипной отраженной волны принадлежит сразу и отраженной волне, и головной. Он и отграничивает ту часть пространства, где существует головная волна. Как легко убедиться (подставив r_0 в формулу для τ_x), в критической точке $\tau_x = 1/V_1$ и $\tau(r_0) = \eta d/V\sqrt{\eta^2 - 1}$. Следовательно, отраженный луч (в плоскости $y = 0$) можно представить уравнениями

$$x = r_0 + \left(V^2/V_1\right)\left(t - \eta d/V\sqrt{\eta^2 - 1}\right),\ z = -\left(V^2/V_1\right)\sqrt{\eta^2 - 1}\left(t - \eta d/V\sqrt{\eta^2 - 1}\right).$$

Исключая t и (с учетом круговой симметрии) переходя к произвольной точке, получаем неравенство, определяющее область существования головной волны: $\sqrt{x^2 + y^2} > (d + |z|)\big/\sqrt{\eta^2 - 1}$.

Построим годограф головной волны в плоскости (8.12), проходящей через источник. Сначала перенесем начало в источник, сохранив параллельность плоскости (xy) границе Σ. Поле времен головной волны перепишется так:

$$\tau = (d/V_1)\sqrt{\eta^2-1} + (1/V_1)\sqrt{x^2+y^2} + ((d-z)/V_1)\sqrt{\eta^2-1}. \qquad (8.13)$$

Далее учтем возможность того, что граница является наклонной, но плоскость падения совпадает с плоскостью xz. Нужно повернуть систему координат на угол падения границы (который обозначим как φ). Матрица поворота имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Подставляя в формулу (8.13) $x = x'\cos\varphi - z'\sin\varphi$, $z = x'\sin\varphi + z'\cos\varphi$, $y' = y$ и затем полагая $z = 0$, получаем:

$$\tau\big|_{\Sigma_0} = \frac{2d}{V_1}\sqrt{\eta^2-1} + \frac{1}{V_1}\sqrt{(x'\cos\varphi)^2 + y'^2} + \frac{x'\sin\varphi}{V_1}\sqrt{\eta^2-1}.$$

Параметр d в этой формуле означает инвариантную (относительно замены координат) величину, выражающую расстояние от источника до границы Σ.

Вместо параметра η чаще используют критический угол α_{cr} – угол падения критического угла на границу Σ. Воспользовавшись тем, что в старой системе координат нормаль к границе совпадет с ортом $\mathbf{e}_z$, найдем критический угол, используя соотношение $\tau_x = \nabla\tau\cdot\mathbf{e}_z$. Если эта величина определяется со стороны верхней среды, то $\nabla\tau\cdot\mathbf{e}_z = (\mathbf{n}/V)\cdot\mathbf{e}_z = (1/V)\cos(\pi/2 - \alpha_{cr}) = (1/V)\sin\alpha_{cr}$. Если в выражение (8.8) подставить (8.10), то в критической точке $\tau_x = 1/\eta$, т. е. $\sin\alpha_{cr} = V/V_1$. Если воспользоваться этими соотношениями, то при $y = 0$ (опуская штрихи) найдем стандартную запись линейного годографа головной волны:

$$\tau\big|_{\Sigma_0} = \frac{2d\cos\alpha_{cr}}{V} + \frac{x'\cos\varphi\sin\alpha_{cr}}{V} + \frac{x'\sin\varphi\cos\alpha_{cr}}{V} = \frac{2d\cos\alpha_{cr}}{V} + \frac{x'\sin(\alpha_{cr}+\varphi)}{V}.$$

Рассмотрим взаимоотношение годографов отраженной и головной волн. Обе волны имеют общий (критический) луч. В точке выхода этого луча, которая одновременно является и начальной точкой годографа головной волны, оба годографа имеют одинаковое время и одно и то же значение первой производной (величину τ_x). Таким образом, в своей начальной точке годограф головной волны касается годографа отраженной волны. Поскольку годограф отраженной волны, являясь гиперболой, представляет выпуклую (вниз) функцию, а годограф головной волны – прямая, то последний идет ниже (т. е. на меньших временах) годографа отраженной волны.

Нам осталось рассмотреть отраженную обменную волну. Здесь решение опять существенно зависит от соотношения между скоростью распространения падающей волны V и скоростью отраженной волны V'. Если скорость V' меньше, чем V, то никаких проблем не возникает. Эйконал отраженной волны определяется так же, как эйконал преломленной волны при $V_1 < V$. Более того, если $V_1 = V'$, то эти эйконалы являются зеркальными отражениями друг к другу. Если же $V' > V$, то возникают явления, аналогичные полному внутреннему отражению. Эванесцентная волна, очевидно, распространяясь вдоль границы вместе с падающей волной, имеет такую же кажущуюся скорость распространения, как и та из преломленных волн, которая непрерывно порождается падающей волной (это может быть и эванесцентная, и обычная волна в зависимости от взаимоотношения между всеми тремя скоростями). Обычная отраженная волна, распространяясь вдоль границы с большей скоростью и оторвавшись от падающей, породит головную волну в нижней среде. Полный анализ всех этих явлений требует привлечения динамики с учетом всех возникающих здесь волн.

Условия на ребрах и вершинах. Две смежных границы – Σ_1 и Σ_2 – могут образовывать ребро ς. Волна, падающая на такую систему, порождает ряд волн отраженных, проходящих и дифрагированных, монотипных и обменных. Эйконалы этих волн определяются из решений следующих задач Коши. Пусть τ_{Σ_1}, τ_{Σ_2} и τ_ς – годографы (следы) эйконала τ на этих объектах. Тогда для границ Σ_1 и Σ_2 ставятся задачи Коши аналогично тому, как мы это делали выше для произвольной поверхности Σ. Кроме того, ставится задача Коши для линии ς с данными τ_ς для каждой из двух сред, разделяемых поверхностью $\Sigma_1+\Sigma_2$. Волна с эйконалом, являющимся решением этой задачи, называется волной, дифрагированной на ребре. Семейство лучей дифрагированной на ребре волны было описано в § 7 (раздел «Данные на линии»). Обычно формулируют геометрический закон дифракции: каждая точка ребра l_0 порождает в каждой из сред, смежных этому ребру (в момент времени $\tau_\varsigma(l_0)$), коническое семейство лучей $\Gamma_\alpha(l_0)$, векторы рефракции которых определяются формулой

$$\mathbf{p}=a\mathbf{t}_0\pm b\mathbf{q}(\alpha),\ b=\sqrt{1\Big/V_0^2-\left(\partial\tau/\partial l\big|_{l_0}\right)^2},$$

где $\mathbf{t}_0$ – единичный вектор, указывающий направление ребра, $\alpha=\partial\tau/\partial l\big|_{l_0}$, $\mathbf{q}(\alpha)\perp\mathbf{t}_0$ и угол α, отсчитываемый в плоскости перпендикулярной ребру, принадлежит такому подынтервалу интервала $(0,2\pi)$, который характеризуют лучи, направленные в заданную среду. При падении на следующую границу или ребро, эти лучи рассматриваются так же, как и любые другие лучи.

При падении волны на вершину, порожденную тремя смежными границами – Σ_1, Σ_2 и Σ_3, точка вершины рассматривается как источник новых волн, эйконалы которых (для каждой смежной среды) определяются в соответствие с разделом «Данные в точке» § 7.

§ 9. Лучи в анизотропных средах

Наша задача состоит в том, чтобы перенести гамильтонов формализм на анизотропные среды. В теоретическом плане эта задача представляет бóльший интерес чем та, которая решалась для изотропных сред. Именно здесь читатель может почувствовать, что однородность гамильтониана по переменным p_i играет в гамильтоновом формализме решающую роль. Впервые вводится понятие лучевой скорости. Благодаря этому возникает и понятие касательного пространства. Но, помимо этого, решается и техническая задача: как вычислять лучевую скорость в различных ситуациях.

Уравнения лучей в анизотропных средах. Уравнение эйконала в анизотропных средах можно записать в следующей форме:

$$|\mathrm{grad}\,\tau|^2 = 1/V^2(\mathbf{x},\mathbf{n}), \tag{9.1}$$

где $V(\mathbf{x},\mathbf{n})$ – одно из решений уравнения Кристоффеля

$$\det\left[c^{ijkl}(\mathbf{x})n_i n_k - \rho(\mathbf{x})V^2\delta_{jl}\right] = 0, \tag{9.2}$$

отвечающее заданному типу волны. Напомним, что существует три, вообще говоря, различных решения, определяющих три типа волн: qS_1, qS_2 и qP. Мы будем считать, что тип волны задан, и, как и в случае изотропной среды, будем опускать обозначения, определяющие тип волны (во всех ситуациях, когда задание типа не играет особой роли). Ситуации, в которых два решения совпадают, являются особыми. Как правило, могут совпадать только скорости квазипоперечных волн V_{qS_1} и V_{qS_2}. Направления $\mathbf{n}$, для которых это имеет место, называются акустическими осями.

Тензор

$$\mathbf{\Gamma}^{jl} = c^{ijkl}n_i n_k \tag{9.3}$$

принято называть тензором Кристоффеля.

Чтобы воспользоваться гамильтоновым формализмом, возьмем гамильтониан в виде

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p}) \equiv (1/2)V^2(\mathbf{x},\mathbf{n})\sum p_i^2 = (1/2)V^2(\mathbf{x},\mathbf{p}/|\mathbf{p}|)\sum p_i^2, \tag{9.4}$$

где по-прежнему $\mathbf{p} = \mathrm{grad}\,\tau$ и $\mathbf{n} = V\mathbf{p}$.

Применим канонические уравнения Гамильтона (5.20). Составим производную

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p_k} + Vn_k. \tag{9.5}$$

Заметим, что функция $V(\mathbf{x},\mathbf{n})$ по второму своему аргументу определена на сфере единичного радиуса (в силу $|\mathbf{n}| = 1$). Поэтому, чтобы выполнить «обычное» дифференцирование гамильтониана по компонентам вектора $\mathbf{p}$, необходимо доопределить $V(\mathbf{x},\mathbf{n})$ по переменным n_1, n_2, n_3 до функции, определенной для любых вещественных значений указанных переменных.

Лемма. Фазовая скорость $V(\mathbf{x},\mathbf{n})$ $(\mathbf{n} \in S_2^*)$ доопределяется до однородной функции степени 1, заданной на трехмерном пространстве $T_x^*R^3$.

Чтобы сделать указанное доопределение, нужно просто рассматривать уравнение Кристоффеля (9.2) как определенное при произвольных вещественных значениях чисел n_1, n_2 и n_3. Чтобы проверить однородность полученной функции, сделаем в уравнение (9.2) подстановку $n_i \to cn_i$. Получим новое уравнение

$$\det\left[c^{ijkl}(\mathbf{x})\,cn_i cn_k - \rho(\mathbf{x})V_c^2\delta_{jl}\right] = 0.$$

Поскольку $V_c^2/c^2 = V^2$, то формальное решение этого уравнения есть $V_c = cV$, а это и означает однородность степени 1. Мы сохраним за новой функцией прежнее обозначение, что не приведет к недоразумению, так как доопределенная функция используется только под знаком дифференцирования (но в любом случае значения производных рассматриваются при $|\mathbf{n}| = 1$). Теперь мы можем осуществить следующее дифференцирование:

$$\frac{\partial V\left(\mathbf{x},\mathbf{p}/|\mathbf{p}|\right)}{\partial p_k} = \sum \frac{\partial V}{\partial n_i}\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{p_i}{|\mathbf{p}|}\right) = V\left(\frac{\partial V}{\partial n_k} - n_k \sum n_i \frac{\partial V}{\partial n_i}\right).$$

Применяя формулу Эйлера (5.3) при $m = 1$, получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial p_k} = V\frac{\partial V}{\partial n_k} - V^2 n_k, \qquad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p_k} + V n_k.$$

Подставляя в формулу (9.5), получаем

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{1}{V}\left(V\frac{\partial V}{\partial n_k} - V^2 n_k\right) + V n_k = \frac{\partial V}{\partial n_k}.$$

Кроме того, $\dfrac{\partial H}{\partial x_k} = V\dfrac{\partial V}{\partial x_k}\sum p_k^2 \equiv \dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial x_k}$.

Рассматривая изотропную среду, мы показали, что выбор гамильтониана в форме (9.3) обеспечивает равенство $\lambda = t$. Суммируя все полученные соотношения, получаем систему дифференциальных уравнений луча:

$$dx_k / dt = \partial V / \partial n_k, \tag{9.6а}$$

$$dp_k / dt = -\left(1/V\right)\partial V / \partial x_k. \tag{9.6б}$$

При выводе этих формул мы молчаливо предполагали, что производные $\partial V / \partial n_k$ существуют и однозначно определены для всех направлений n. Но это вовсе не обязательно. Могут существовать направления (например, акустические оси), для которых величина $\partial V / \partial n_k$ определяется неоднозначно. В следующем параграфе особенности функции $V(\mathbf{n})$ и вытекающие из них последствия будут обсуждаться более детально. Здесь же мы условимся, что система канонических уравнений (дифференциальные уравнения луча) рассматривается только для таких «неособенных» направлений, для которых правые части – гладкие функции без особенностей.

Для системы (9.6а–б) ставятся те же задачи, которые в § 5 рассматривались для гамильтонианов общего вида.

При построении луча на основе системы уравнений (9.6а–б) необходимость в дополнительных вычислениях для определения времени пробега вдоль луча не возникает: время известно в каждой точке луча в процессе решения самой системы, так как оно является параметром на луче.

Как было получено ранее, при рассмотрении произвольного гамильтониана, в однородной среде ($V(\mathbf{x},\mathbf{n}) = V(\mathbf{n})$) луч всегда является прямой линией. Ее уравнение есть $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{v}^0 = \mathbf{x}^0 + \mathbf{t}^0 s$. Отличие от изотропии состоит в том, что направление луча уже не совпадает с вектором нормали к фронту волны.

Здесь мы не будем останавливаться на использовании произвольных криволинейных координат в уравнениях для анизотропных сред. В случае эллипсоидальной анизотропии у нас еще появится возможность на этом остановиться подробнее (см. гл. 4). В общем случае следует поступать в соответствии с общими рецептами. Скажем, в уравнении (9.1) левая часть будет записана так же, как это мы делали для уравнения эйконала в изотропной среде. Вектор **n**, как и вектор **p**, преобразуются ковариантным образом, тогда как вектор лучевой скорости является контравариантным. (О ковариантных и контравариантных векторах см. § 2 раздел «Многообразия».) Однако при практическом использовании индикатрис, заданных в форме $V(\mathbf{n},\mathbf{x})$, необходимо при каждом обращении к индикатрисам записывать вектор $\mathbf{n}$ в декартовых координатах.

Лучевая скорость. Назовем вектор $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $v_k = dx_k / dt$ вектором лучевой скорости. Его направление совпадает с единичным вектором касательной к лучу **t**, а его модуль равен скорости v перемещения точки фронта вдоль луча: $\mathbf{v}=v\mathbf{t}$. Согласно уравнению (9.6а)

$$v_k = \partial V / \partial n_k . \tag{9.7}$$

Из самого смысла определения лучевой скорости v следует формула

$$t(s) = t(0) + \int_0^s \frac{ds}{v(\mathbf{x}(s),\mathbf{n}(s))}, \tag{9.8}$$

которую можно использовать при «натуральной» параметризации луча.

В отличие от вектора рефракции, принадлежащего кокасательному (сопряженному) пространству, вектор лучевой скорости (как всякий вектор вида $d\mathbf{x}/ds$) является элементом касательного пространства $T_x R^3$. В силу изоморфизма всех касательных пространств пространства R^3, снабженного декартовыми координатами, индекс x при обозначении касательного пространства (если в нем нет необходимости) будем опускать.

В самом общем случае формулу для ν_k можно получить по формулам дифференцирования неявных функций. Запишем уравнение Кристоффеля в следующей эквивалентной форме:

$$c_{ijkl} n_j n_k a_l = \rho V^2 a_i , \tag{9.9}$$

где a_l – компоненты собственного вектора тензора Кристоффеля, отвечающего собственному значению ρV^2 . Умножим уравнение (9.9) на a_i (просуммировав по повторяющемуся индексу):

$$c_{ijkl} n_j n_k a_l a_i = \rho V^2 |\mathbf{a}|^2 .$$

Теперь продифференцируем обе части полученного равенства по n_s, рассматривая это равенство как уравнение, выражающее зависимость V от $\mathbf{n}$. Получим

$$2c_{iskl} n_k a_i a_l = 2\rho V (dV / dn_s) |\mathbf{a}|^2 .$$

Заменяя опять индекс s индексом j, получаем

$$dV / dn_j = c_{ijkl} n_k a_i a_l / \rho V |\mathbf{a}|^2 .$$

Используя нормированный собственный вектор $\mathbf{l} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, запишем окончательное выражение:

$$v_j = c^{ijkl} n_k l_i l_l / \rho V . \tag{9.10}$$

На примере плоских волн в однородной среде было показано, что собственные векторы тензора Кристоффеля совпадают с векторами поляризации соответствующих волн.

Поскольку тензоры Кристоффеля симметричны, то векторы поляризаций всех трех волн взаимно ортогональны.

В тех случаях, когда индикатрисы фазовых скоростей вычисляются в полярной системе координат, можно получить формулу для $\partial V / \partial n_k$ тоже в полярной системе координат (r, θ, φ), не прибегая к вычислению собственных векторов. Как и всякая однородная функция степени 1, фазовая скорость (будучи доопределенной на все кокасательное пространство) может быть записана в виде $V = r\bar{V}(\varphi, \theta)$. Для произвольной координатной системы (u_1, u_2, u_3)

$$\frac{\partial V}{\partial n_k} = \frac{\partial V}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial n_k}.$$

Полагая $u_1 = r, u_2 = \varphi, u_3 = \theta,$ получаем

$$\frac{\partial V}{\partial n_k} = \bar{V} \frac{\partial r}{\partial n_k} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial n_k} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial n_k}.$$

Используя соотношения

$$r = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}, \ \varphi = \operatorname{arctg}(n_2 / n_1), \ \theta = \arccos \frac{n_3}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}},$$

находим (при $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$)

$$v_1 = \frac{\partial V}{\partial n_1} = \bar{V} \sin\theta \cos\varphi - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi} \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} \cos\theta \cos\varphi,$$

$$v_2 = \frac{\partial V}{\partial n_2} = \bar{V} \sin\theta \sin\varphi + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi} \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} \cos\theta \sin\varphi, \qquad (9.11а)$$

$$v_3 = \frac{\partial V}{\partial n_3} = \bar{V} \cos\theta - \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} \sin\theta.$$

Вектор нормали $\mathbf{n}$ удобно записывать через орты декартовой системы координат (в которой ось z совпадает с осью θ, а ось x отвечает направлению $\varphi = 0$):

$$\mathbf{n} = (\mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi) \sin\theta + \mathbf{e}_3 \cos\theta.$$

Отсюда видно, что компонентам лучевой скорости можно придать и такую форму:

$$v_k = \frac{\partial V}{\partial n_k} = \bar{V} n_k + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi} \frac{\partial n_k}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} \frac{\partial n_k}{\partial \theta}$$

или же

$$\mathbf{v} = \bar{V} \mathbf{n} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \theta}. \qquad (9.11б)$$

Пример 1. Найдем лучевую скорость для волны S, распространяющейся в трансверсально изотропной среде. Обратимся к формуле (3.29) для фазовой скорости этой волны. Подставляя ее в формулу (9.11б), получаем

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{c_{66} \sin^2\theta + c_{44} \cos^2\theta}{\rho}} \left[(\mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi) \sin\theta + \mathbf{e}_3 \cos\theta \right] +$$

$$+ \frac{(c_{66} - c_{44}) \sin 2\theta}{2\sqrt{\rho (c_{66} \sin^2\theta + c_{44} \cos^2\theta)}} \left[(\mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi) \cos\theta - \mathbf{e}_3 \sin\theta \right].$$

Выделяя слагаемые, относящиеся к множителям при n_1, n_2 и n_3, после простых преобразований получаем:

$$\mathbf{v} = \frac{c_{66} n_1 \mathbf{e}_1}{\sqrt{\rho(c_{66}\sin^2\theta + c_{44}\cos^2\theta)}} + \frac{c_{66} n_2 \mathbf{e}_2}{\sqrt{\rho(c_{66}\sin^2\theta + c_{44}\cos^2\theta)}} + \frac{c_{44} n_3 \mathbf{e}_3}{\sqrt{\rho(c_{66}\sin^2\theta + c_{44}\cos^2\theta)}}\mathbf{e}_1 . \quad (9.12)$$

Значительно проще было бы при выводе этой формулы воспользоваться приводимой в § 10 формулой (10.2) для эллипсоидальной анизотропии, но полезно было проиллюстрировать работу более общих и чаще используемых формул.

Пример 2. Обратимся к формулам (3.30), которые описывают индикатрису фазовой скорости для qP и qS волн. В этом случае $\partial\bar{V}/\partial\varphi = 0$ и

$$\frac{\partial\bar{V}}{\partial\theta} = \frac{1}{2\bar{V}\rho}\frac{d\lambda_{1,3}}{d\theta},$$

где

$$\frac{d\lambda_{1,3}}{d\theta} = \frac{1}{2}\left[A'(\theta) \pm \frac{(A(\theta)-c_{44})A'(\theta) + 2B\sin 4\theta}{\sqrt{\left(A(\theta)-c_{44}\right)^2 + B\sin^2 2\theta}}\right]$$

и $A'(\theta) = (c_{11} - c_{33})\sin 2\theta$. Осталось подставить полученные выражения (вместе с формулой (3.30) в любую из формул (9.11а) или (9.11б)). Получающиеся громоздкие выражения выписывать нет смысла.

Некоторые свойства фазовых и лучевых скоростей. 1. Пусть Φ_1 и Φ_2 – два последовательных положения фронта, разделенные временным интервалом *dt*. Пусть $d\mathbf{x}$ есть соответствующее приращение радиус-вектора луча. Тогда расстояние между поверхностями Φ_1 и Φ_2 по нормали к ним есть $\left|d\mathbf{x}^0\right| = (\mathbf{n}\cdot d\mathbf{x}) = (\mathbf{n},\mathbf{t})\left|d\mathbf{x}\right|$. Поделив на *dt*, получим $V = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{t})v = \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}$ или

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{v} = 1. \quad (9.13)$$

Следует обратить внимание на то, что соотношение (9.13) на самом деле является простым следствием из выведенного ранее условия (5.5), которое выполняется на бихарактеристике произвольного гамильтониана. Можно, конечно, воспользоваться сделанным ранее выводом, но нужно показать одну из простых интерпретаций этого фундаментального в гамильтоновом формализме равенства.

2. Функции $v_i(\mathbf{n})$ доопределяются до функций в касательном пространстве $T_x = R^3$, однородных степени 0. Действительно, согласно первому свойству, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} = V$. Рассматривая теперь $\mathbf{n}$ как вектор в T_x, сделаем (в уравнении Кристоффеля) подстановку $n_i \to cn_i$. Тогда $\mathbf{v}_c \cdot c\mathbf{n} = V_c \equiv cV$, а это означает $\mathbf{v}_c = \mathbf{v}$, что и требовалось показать. Применяя формулу (5.3) для $m = 0$, получаем

$$\left(\partial v_i/\partial n_k\right) n_k = 0. \quad (9.14а)$$

Заметим, что равенство $v_k = \partial V/\partial n_k$, в силу однородности степени 0 обеих его частей, имеет место не только на S_2, но и во всем пространстве T_x. Продифференцируем его по n_i. Получим

$$\partial v_k/\partial n_i = \partial V/\partial n_i\partial n_k,$$

а это означает, что матрица $\partial v_k / \partial n_i$ симметрична и кроме равенства (9.14а) выполняется еще

$$\left(\partial v_i / \partial n_k\right) n_i = 0. \qquad (9.14б)$$

Из уравнения Кристоффеля (9.2) следует, что значение фазовой скорости не изменяется при замене $\mathbf{n}$ на $-\mathbf{n}$.

Лучевые скорости и особые направления. Сначала рассмотрим распространение вдоль осей симметрии. Пусть волновая нормаль направлена вдоль оси симметрии второго порядка. Как было выяснено в § 3, один из векторов поляризации направлен вдоль этой оси, остальные два ей ортогональны. Введем систему координат, в которой орт $\mathbf{e}^{(1)}$ направлен вдоль данной оси и остальные $\mathbf{e}^{(r)} \parallel \mathbf{l}^{(r)}$ ($r = 1,\ 2,\ 3$). Найдем лучевую скорость, отвечающую вектору поляризации $\mathbf{l}^{(m)}$. Тогда в формуле (9.10) $n_k = \delta_{k1}, l_i = \delta_{im}, l_l = \delta_{lm}$. Отлична от нуля, очевидно, только m-я компонента вектора лучевой скорости. Согласно формуле (9.10), первая компонента вектора лучевой скорости равна $v_1^{(m)} = c^{m11m} / \rho V_m = c^{1m1m} / \rho V_m$. Применяя теперь формулу (3.23), получаем $v_1^{(m)} = V_m$. Осталось показать, что остальные компоненты вектора лучевой скорости равны нулю. Имеем

$$v_2^{(m)} = c^{m21m} / \rho V_m .$$

При любом m номер 1 входит в комбинацию $m12m$ нечетно, это, согласно принципу четного вхождения, означает, что $v_2^{(m)} = 0$. Аналогично и $v_3^{(m)} = 0$. Итак, при распространении вдоль оси второго порядка (а значит, и при распространении вдоль любой оси четного порядка) направления волновой нормали и лучевой скорости совпадают. В таком случае говорят, что имеет место чисто модовое распространение. Можно убедиться в том, что «чисто» поперечная волна также имеет чисто модовое распространение, если она распространяется в плоскости симметрии. Чисто модовое распространение не обязано наблюдаться только при распространении вдоль элементов симметрии.

Остановимся на определении лучевых скоростей при распространении вдоль акустической оси, т. е. в ситуации, когда совпадают второй и третий корень уравнения Кристоффеля: $V_2(\mathbf{n}) = V_3(\mathbf{n})$. Как мы знаем, в этом случае существует множество $\Lambda = \{\mathbf{l}; \mathbf{l} \perp \mathbf{l}^{(1)}\}$ нормированных собственных векторов матрицы Кристоффеля, ортогональных вектору $\mathbf{l}^{(1)}$.

В классической теории упругих волн в анизотропных средах, основанной на точных решениях уравнений эластодинамики для плоских волн в однородных средах, принято определять лучевые скорости, отвечающие множеству Λ, исходя из формулы (9.10). В геометрической сейсмике основным определением лучевой скорости является формула (9.7), и нельзя исключить того, что оба подхода могут дать различные ответы. Чтобы понять сложность ситуации, приведем следующий пример: пусть вектор $\mathbf{l}^{(1)}$ лежит в плоскости симметрии среды P. Тогда векторы $\mathbf{l}' \perp P$ и вектор $\mathbf{l}''$, который одновременно параллелен P и ортогонален вектору $\mathbf{l}^{(1)}$, оба не противоречат симметрии среды и оба принадлежат множеству Λ. Но никакая линейная комбинация $\alpha\mathbf{l}' + \beta\mathbf{l}'' \in \Lambda$ симметрии среды не удовлетворяет. Именно такая ситуация имеет место в трансверсально-изотропной среде, в которой при некотором значении $\theta = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \pi/2$ пересекаются индикатрисы фазовой скорости S и qS волн. Имеет ли смысл в таком случае подставлять векторы $\mathbf{l} = \alpha\mathbf{l}' + \beta\mathbf{l}''$ в формулу (9.10)? Заметим, что при такой подстановке волновые поверхности трансверсально-изотропной среды осложняются неким «пояском»: линией, касающейся волновых поверхностей и волны S и волны qS. Хаткевич связывает этот поясок с вращением конуса векторов лучевой скорости вокруг оси бесконечного порядка [13]. Гречка и Оболенцева полагают, что этот конус вырождается в линию [6]. Другие авторы игнорируют наличие этого пояска. Точный ответ на подобные вопросы дан в § 10, а сейчас наметим некоторую классификацию акустических осей и охарактеризуем множество векторов лучевой скорости, отвечающих всем направлениям поляризации из множества Λ.

Прежде всего, отметим, что условие $V_2(\mathbf{n}) = V_3(\mathbf{n})$ определяет: 1) одну; 2) несколько; 3) континуальное множество точек, общих точек индикатрис фазовой скорости обеих квазипоперечных волн. Эти точки будем называть точками вырождения. Каждой точке вырождения отвечает одна акустическая ось и наоборот. В первую очередь, отделим случаи 1–2 от случая 3. В случае 1 будем говорить об изолированных точках вырождения, в случае 2 – о континуальном. Вырождение (континуальное или изолированное) называется спорадическим (этот термин был предложен в работе Альшица и Лоте [1]), если оно не вносит никакой особенности (осложнения) в геометрическую картину распространения.

Наиболее просто устроено касательное вырождение, когда в изолированной точке вырождения обе индикатрисы касаются друг друга. С касательным вырождением мы, например, встречаемся при распространении вдоль оси симметрии порядков 4 и ∞. В частности, оно имеет место при распространении волны вдоль оси L_∞ трансверсально-изотропной среды. Как показано выше, при распространении вдоль оси второго (и любого четного) порядков лучевые скорости определяются однозначно. В § 10 мы покажем, что этот факт справедлив для всех касательных вырождений. Альшиц и Лоте приводят как бы взгляд сверху на картину векторного поля поляризации S и qS волн в окрестности касательной точки вырождения на оси L_∞ (рис. 6).

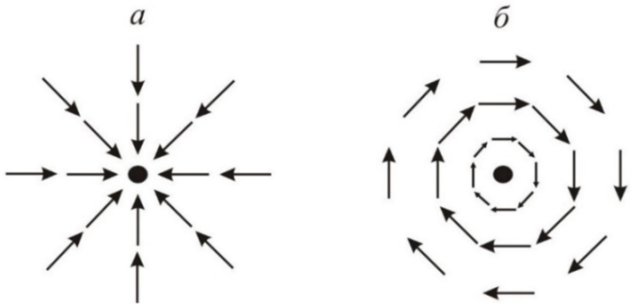


Рис. 6. Векторы поляризации волны S (*а*) и волны qS (*б*) при распространении в окрестности оси бесконечного порядка

Эта картина может иметь двоякую интерпретацию. Во-первых, каждую стрелку можно интерпретировать как поляризацию плоской волны, распространяющейся в заданном направлении. Каждой стрелке отвечает свой мысленный эксперимент. В точке, отвечающей оси L_∞, именно потому не проставлена поляризация, потому что она может быть любой. Но в § 10 показано, что данную картину можно интерпретировать как мгновенное распределение вектора поляризации на фронте волны от точечного источника. В этой интерпретации поле волны *S*, имеющее чисто вихревой характер, в точках на оси L_∞ может измеряться только приемником вращения, тогда как поле волны qS имеет псевдодивергентный характер, при этом интенсивность в точках на оси L_∞ равна нулю. Векторы поляризации, ортогональные параллельным между собой векторам $\mathbf{l}^{(1)}, \mathbf{n}, \mathbf{e}^{(3)}$, просто не определены. Возникает вопрос: возможен ли физический эксперимент, который подтверждает существование плоской волны, распространяющейся вдоль оси L_∞, имея произвольное направление вектора поляризации? При изучении изотропной среды любая волна, порожденная точечным источником, может считаться плоской при достаточном удалении от источника. В анизотропной среде фронт также стремится стать плоским, но та поляризация, которая существовала в окрестности источника, сохранится и на больших расстояниях. В частности, сохранится указанная особенность на оси L_∞. Однако не вызывает сомнения, что если сдвиговый источник выполнен в виде круговой пластины, нормаль к которой параллельна оси L_∞, то вблизи пластины поперечная поляризация при распространении вдоль L_∞ будет четко выражена.

Если распространение волн qS и S вдоль оси L_∞ *TI*-среды есть пример реального изолированного вырождения, то распространение этих же волн в плоскости изотропии *TI*-среды при $c_{66} = c_{44}$ является примером спорадического континуального вырождения, хотя в этом случае поляризации $\mathbf{l} = \alpha\mathbf{l}' + \beta\mathbf{l}''$ все физически могут быть проинтерпретированы в мысленном эксперименте любого типа (точечный источник или плоская волна). Его спорадичность (случайность) состоит в том, что факт совпадения двух модулей является случайным, обе волны распространяются абсолютно независимо, никаких специфических картин с поляризацией не возникает.

Важнейшим типом изолированного вырождения является вырождение конического типа, которому отвечает коническая акустическая ось. Формально мы определим этот тип вырождения следующим условием: множества векторов лучевой скорости, полученных на основе формул (9.7) и (9.10), совпадают. При этом если акустическая ось совпадает с направлением $\mathbf{n}_0$, а лучевые скорости определяются на основе формулы (9.7), то различные значения лучевых скоростей отвечают разным путям стремления $\mathbf{n}$ к $\mathbf{n}_0$. Геометрия индикатрис в случае конического вырождения будет раскрыта в § 10, а здесь мы ограничимся некоторыми сведениями относительно конуса лучевых скоростей в случае конического вырождения. Как показывает анализ, выполненный Хаткевичем, концы векторов $\mathbf{v}$, определяемых формулой (9.10), при вращении вектора $\mathbf{l}$ в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{l}^{(1)}$, образуют эллипс, для описания которого введем следующую систему координат [13]. Орт $\mathbf{e}_1$ направим вдоль волновой нормали $\mathbf{n}$, орт $\mathbf{e}_2$ направим перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}^{(1)}$, оставшийся орт $\mathbf{e}_3$ определяется как векторное произведение первых двух ортов.

В этой системе координат данный эллипс определяется формулами

$$V_1^e = V_1^0; \quad V_2^e = V_2^0 + g_2 \cos 2\psi - h_2 \sin 2\psi; \quad V_3^e = V_3^0 + g_3 \cos 2\psi - h_3 \sin 2\psi,$$

где ψ – угол между вектором $\mathbf{I}^{(1)}$ и ортом $\mathbf{e}_2$; $V_1^0 = V_t$, $V_2^0 = f_2$, $V_3^0 = f_3$; коэффициенты f_i, g_i и h_i являются суммой величин, которые в качестве сомножителей содержат либо недиагональный член тензора Кристоффеля (записанного во введенной выше системе координат), либо вторую или третью компоненту вектора $\mathbf{I}^{(1)}$, либо и то и другое. Если вдоль акустической оси осуществляется чисто модовое распространение, то векторы $\mathbf{I}^{(1)}$ и $\mathbf{n}$ совпадают и тензор Кристоффеля (во введенной системе координат) диагонален, так что все коэффициенты f_i, g_i и h_i обращаются в нуль и эллипс вырождается в точку. Вектор **v**, отвечающий квазипоперечной волне, совпадает с $\mathbf{V}^0 \parallel \mathbf{n}$. Возможна, однако, ситуация, когда эллипс вырождается в точку, но $\mathbf{V}^0 \neq \mathbf{n}$. Обе ситуации имеют место в случае касательного вырождения, которое формально можно рассматривать как вырожденный случай конического вырождения. Возможно еще вырождение эллипса в линию (линейное вырождение). В общем же случае векторы лучевой скорости образуют конус, у которого ось отклоняется от вектора n на некоторый угол φ, а ортогональное к оси сечение образует эллипс. Угол φ может достигать значение $\pi/2$. Вектор лучевой скорости вращается (по мере вращения вектора $\mathbf{I}^{(1)}$) с удвоенной угловой скоростью в том же или в противоположном направлении в зависимости от знаков величин g_i и h_i.

Если ввести векторы $\mathbf{g} = (0, g_2, g_3)$ и (аналогично) **h**, то при $\mathbf{g}\cdot\mathbf{h} = \mathbf{g}^2 - \mathbf{h}^2 = 0$ эллипс вырождается в окружность, при $\mathbf{g} \parallel \mathbf{h}$ – в прямую. Если $[\mathbf{g}\times\mathbf{h}]\cdot\mathbf{n} < 0$, то вращение вектора лучевой скорости осуществляется в ту же сторону, что и вращение вектора $\mathbf{I}^{(1)}$.

§ 10. Связь лучевой индикатрисы и поверхности рефракции

До сих пор мы рассматривали, главным образом, геометрию индикатрисы фазовой скорости. В этом параграфе в центре внимания будут две другие индикатрисы: индикатрисы обратных скоростей (медленностей) и лучевых скоростей. Интерес к последней понятен: ее можно интерпретировать как поверхность фронта волны (отсюда ее общепринятое название – волновая поверхность). Что же касается индикатрисы медленностей (т. е. поверхности рефракции), то именно она наиболее естественным способом связана с волновой поверхностью. Эта связь осуществляется при помощи преобразования Лежандра, простейшего из контактных преобразований, играющих важную роль во многих задачах геометрической сейсмики. Именно преобразование Лежандра помогает анализировать особенности и генезис таких явлений, как коническое вырождение и появление петель у волновой поверхности. Но, прежде чем ввести преобразование Лежандра для индикатрис общего вида, внимательно рассмотрим случай эллиптической анизотропии, которая (благодаря простой аналитике) позволяет достаточно просто изучить ряд важных свойств самого преобразования Лежандра.

Лучевая индикатриса (волновая поверхность). Волновая поверхность определяется как поверхность, проходящая через концы векторов $\mathbf{r} = v(\mathbf{t})\mathbf{t}$ ($\mathbf{t} \in S^2$), где v – модуль вектора лучевой скорости, **t** – единичный вектор, выражающий направление вектора лучевой скорости (таким образом, $\mathbf{v} = v\mathbf{t}$). В § 9 рассмотрен ряд методов, которые позволяют по индикатрисе фазовой скорости (т. е. по функции $V(\mathbf{n})$) найти и v и $\mathbf{t}$. Пару функций $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ и $v(\mathbf{n})$ можно рассматривать как параметрическую форму задания функции $v = v(\mathbf{t})$. Из ее определения следует, что $v(\mathbf{t}) = v(-\mathbf{t})$. Функции $v(\mathbf{n})$ и $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ однозначны. Однако отсюда еще не следует однозначность функции $v(\mathbf{t})$. На лучевой индикатрисе могут наличествовать петли (рис. 7) [8].

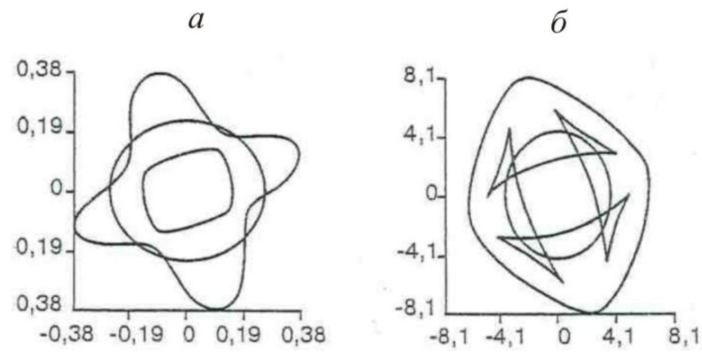


Рис. 7. Пример индикатрис для анизотропной среды (роговая обманка). Сечения индикатрис даны для углов $\theta = 0^\circ$, $\psi = 0^\circ$: *а* – фазовая поверхность, *б* – волновая поверхность

Причины неоднозначности будут исследованы в конце параграфа.

Эллиптическая анизотропия (предварительное рассмотрение). Хотя эллиптическая анизотропия не часто проявляется в упругих телах, она является удобным объектом для изучения анизотропии, поскольку все можно сделать в аналитическом виде. Так как преобразование Лежандра связывает поверхность рефракции и волновую поверхность и в случае эллиптической анизотропии, то оказывается, что изучение последней полезно именно для лучшего понимания преобразования Лежандра в более общих ситуациях. После того как мы определим преобразование Лежандра и его основные свойства, снова вернемся к эллиптической анизотропии, но в этом случае будем излагать те факты, которые подготовят нас к изложению римановой геометрии (см. гл. 4). Сейчас для нас достаточно рассмотреть ту ситуацию, когда оси эллипсоида направлены вдоль осей координат. Тогда, согласно формуле (2.27), имеем (в новых обозначениях) $V(\mathbf{n}) = \sqrt{\sum \alpha_i n_i^2}$. Далее применяем формулу (9.7):

$$v_k(\mathbf{n}) = \alpha_k n_k / \sqrt{\sum \alpha_i n_i^2}\ , \tag{10.1}$$

что эквивалентно формуле (9.10).

Заметим, что

$$v_k(\mathbf{e}_j) = \alpha_j \delta_{jk} / \sqrt{a_j} = \sqrt{a_j}\delta_{jk}\ .$$

Отсюда следует, что $v_j = \sqrt{\alpha_j} = V(e_j)$, а это означает, что при распространении волны вдоль осей эллипса фазовые и лучевые скорости совпадают, а также совпадают векторы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ ($\mathbf{t} = \mathbf{e}_j = \mathbf{n}$).

Теперь построим лучевую индикатрису. Согласно формуле (10.1), построим функцию $v(\mathbf{n})$:

$$v(\mathbf{n}) = \sqrt{\sum v_k^2(n)} = \sqrt{\sum \alpha_k^2 n_k^2 / \sum \alpha_k n_k^2}\ . \tag{10.2}$$

В то же время компоненты вектора $\mathbf{t}$ суть

$$t_k(\mathbf{n}) = \alpha_k n_k / \sqrt{\sum \alpha_i^2 n_i^2}\ . \tag{10.3}$$

Запишем тождество

$$n_k = (t_k / \alpha_k)\sqrt{\sum \alpha_i^2 n_i^2} \tag{10.4}$$

и подставим его в знаменатель выражения (10.2) для лучевой скорости. Тогда легко получается, что

$$v(\mathbf{t}) = \sqrt{1 / \sum t_k^2 / \alpha_k}\ . \tag{10.5}$$

Как и поверхность рефракции, лучевая индикатриса является эллиптической, но полуоси эллипса находятся во взаимно обратном отношении.

Формула (10.5) точна при $|\mathbf{t}| = 1$. Но при доопределении функции $v(\mathbf{t})$ на все касательное пространство ее необходимо модифицировать так, чтобы удовлетворить уже выясненное нами ее свойство однородности. Было показано, что v как функция от $\mathbf{n}$ является однородной функцией степени 0. Формула (10.2) этому свойству удовлетворяет, а (10.5) – нет. Легко увидеть, что единственно правильное доопределение $v(\mathbf{t})$ на все касательное пространство состоит в следующем:

$$v(\mathbf{t}) = \sqrt{\sum t_k^2 / \sum (t_k^2 / \alpha_k)}\ . \tag{10.6}$$

Преобразование Лежандра и связь поверхности рефракции с лучевой индикатрисой в общем случае. Определим локальное преобразование Лежандра следующим образом. Пусть поверхность Φ лежит в пространстве с координатами (x_1, x_2, x_3), а поверхность Ψ – в пространстве с координатами (y_1, y_2, y_3). Мы скажем, что поверхности Φ и Ψ связаны локальным преобразованием Лежандра, если для каждой точки $\mathbf{x}_0 \in \Phi$ найдется такая точка $\mathbf{y}_0 \in \Phi$, что плоскость $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_0 = 1$ (проведенная в пространстве (x_1, x_2, x_3)) касается Φ в точке $\mathbf{x}_0$, а плоскость $\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y} = 1$ (проведенная в пространстве (y_1, y_2, y_3)) касается поверхности Ψ в точк $\mathbf{y}_0$. Аналогичное преобразование может быть определено для плоских кривых.

Преобразование Лежандра инвариантно относительно поворотов системы координат в следующем смысле: повороту системы координат в пространстве (x_1, x_2, x_3), описываемому ортогональной матрицей **A**, отвечает такой же поворот в пространстве (y_1, y_2, y_3).

Доказательство. Поворот системы координат удобнее трактовать как вращение всего пространства вокруг центра координат. Ясно, что поверхность Φ и касательная плоскость будут вращаться вместе с точкой $\mathbf{x}_0$ их касания. Найдем новое значение вектора $\mathbf{y}_0$. Вектор $\mathbf{y}_0$ равен произведению единичного вектора **n**, параллельного вектору нормали к поверхности Φ на величину обратную длине l проекции отрезка $\overline{O\mathbf{x}_0}$ на вектор **n**. Поэтому равенство $\mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{x}_0 = 1$ эквивалентно следующему: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0 = l$. При повороте плоскости и длина отрезка $\overline{O\mathbf{x}_0}$, и угол между векторами **n** и $\mathbf{x}_0$ не изменятся, так что не изменится и величина l. Старые координаты точки **x** выражаются через новые формулой $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}'$. Подставим эту формулу в тождество $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0 = l$, тогда получим следующую цепочку равенств:

$$l = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{A}\mathbf{x}' \cdot \mathbf{n} = (a_{ik} x'_{0k}) n_i = x'_{0k} (a_{ik} n_i) = x'_{0k} (a^*_{ki} n_i) = x'_k n'_k,$$

где a^*_{ij} – элементы матрицы $\mathbf{A}^T$. Следовательно, $\mathbf{y}'_0 = (1/l)\mathbf{n}' = (1/l)\mathbf{A}^T \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{y}_0$, откуда $\mathbf{y}_0 = \mathbf{A}\mathbf{y}'_0$. Этот факт можно выразить следующим образом: образ повернутой (вокруг центра) поверхности есть поворот ее образа. Выявленный факт означает коммутативность операции поворота и преобразования Лежандра.

Классическое преобразование Лежандра определяется для выпуклых функций. При этом выпуклая функция преобразуется в выпуклую же. Для невыпуклых функций возникает проблема, что одна и та же плоскость может касаться поверхности в нескольких точках. Кроме того, само касание определено не в каждой точке. Чтобы обойти эту трудность, мы будем определять преобразование локально – в окрестности каждой точки A гладкой поверхности Ф, в которой касание определено. Тогда локальный кусок одной поверхности взаимно однозначно отображается на локальный кусок другой поверхности. Множество точек гладкой поверхности, на которых касание не определено, имеет размерность не больше 1 (особенности или линии особенностей). Эти точки без ущерба можно исключить. Поверхность Ψ определяется как объединение всех локальных образов. Более строгое определение поверхности Ψ требует привлечения понятий *открытых* окрестностей. Тогда поверхность Ψ определяется как *замыкание* объединения всех *открытых* локальных образов. Поверхность Ψ, вообще говоря, является многолистной и может иметь негладкости (на линиях размерности не выше 1), самопересечения и дыры, даже в том случае, когда Φ – гладкая однолистная поверхность. Тем не менее и в этом случае между точками обеих поверхностей существует взаимнооднозначное соответствие.

Прежде чем перейти к сути дела, сделаем одно замечание. Мы будем считать, что: 1) лучевая индикатриса определена в пространстве T (с декартовыми координатами $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ и $\dot{x}_3$); 2) поверхность рефракции определена в пространстве T^* (с декартовыми координатами $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ и $\bar{y}_3$). Таким образом, векторы $\mathbf{v}$ и $\mathbf{t}$ принадлежат пространству T, а векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{n} - T^*$. На произведении $T \times T^*$ определена билинейная форма $(\dot{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = \dot{x}^i \bar{y}_i$, обращение в нуль которой можно трактовать как ортогональность векторов $\dot{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$. На самом деле, это обычная ортогональность. Пространства T^* и T изоморфны друг другу (как всякие линейные пространства одинаковой конечной размерности), а поскольку это пространства направлений, соотнесенных с направлениями физического пространства *X*, то координаты в этих пространствах всегда можно выбрать так, что понятия параллельности и ортогональности векторов $\dot{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$ имеет обычный смысл.

Докажем следующую **теорему**: *вектор **t** ортогонален поверхности рефракции, а вектор **n** ортогонален лучевой индикатрисе.*

Доказательство. Рассмотрим векторные функции $\mathbf{p}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} / V(\mathbf{n})$ и $\mathbf{v}(\mathbf{t})$. Векторная функция $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ доопределяется до функции, заданной на всем пространстве T^*, как однородная функция степени 0. Это следует из того, что она является отношением двух однородных функций степени 1. Лучевая скорость $\mathbf{v}$ изначально была определена как однородная функция степени ноль от векторного аргумента $\mathbf{n}$. Всякая однородная функция $f(\mathbf{n})$ степени ноль в полярной системе координат (r,φ,θ) записывается как $f(\varphi,\theta)$. Следовательно, $\mathbf{v}(\mathbf{n}) = \mathbf{v}(\varphi,\theta)$. При переходе к функции $\mathbf{v}(\mathbf{t})$ она остается функцией, определенной на сфере $r=1$, но теперь она зависит от координат φ' и θ' вектора **t**: $\mathbf{v}(\mathbf{t}) = \mathbf{v}(\varphi',\theta')$, что можно рассматривать просто как замену переменных на сфере $r=1$. Таким образом, естественно принять, что $\mathbf{v}(\mathbf{t})$ остается однородной функцией степени 0. Найдем общее выражение для вектора, касательного к поверхности рефракции. В соответствии со сказанным выше, поверхность рефракции может быть задана формулой $\dot{x}_k = n_k(\varphi,\theta)/V(\varphi,\theta) = n_k(\xi_1,\xi_2)/V(\xi_1,\xi_2)$. Тогда всякий касательный вектор к этой поверхности может быть выражен так:

$$d\dot{x}_k = \frac{\partial(n_k/V)}{\partial\xi_\alpha}d\xi_\alpha = \left(\frac{\partial n_k}{\partial\xi_\alpha} - \frac{n_k}{V^2}\frac{\partial V}{\partial\xi_\alpha}\right)d\xi_\alpha .$$

Удобно будет рассматривать все фигурирующие здесь функции как сложные функции вида $f(\mathbf{n}(\xi_1,\xi_2))$. Тогда приведенную выше формулу можно переписать так:

$$d\dot{x}_k = \left(\frac{\delta_{ik}}{V} - \frac{n_k}{V^2}\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)\frac{\partial n_i}{\partial\xi_\alpha}d\xi_\alpha \equiv \left(\frac{\delta_{ik}}{V} - \frac{n_k}{V^2}v_i\right)dn_i .$$

Составим скалярное произведение вектора с вектором лучевой скорости. С учетом фундаментального соотношения $\mathbf{p}\cdot\mathbf{v} = 1$ (см. формулу (9.13)):

$$v_k dx_k = \left(\frac{v_i}{V} - \frac{v_k n_k}{V^2}v_i\right)dn_i = \frac{v_i}{V}\left(1 - v_k\frac{n_k}{V}\right)dn_i = 0 .$$

Таким образом, вектор лучевой скорости **v** ортогонален любому касательному к поверхности рефракции вектору, а это и означает, что он ортогонален самой поверхности.

Ортогональность вектора **n** и лучевой индикатрисы мы докажем совсем другим способом. Зафиксируем некоторую точку среды $\mathbf{x}^0$ и отвечающий ей тензор упругих модулей $\mathbf{C}(\mathbf{x}^0)$. Определим теперь гипотетическую однородную среду, характеризующуюся тензором упругих модулей $\mathbf{C}(\mathbf{x}^0)$. Далее проводится следующий мысленный эксперимент. Пусть среда однородна и пусть в момент времени $t=0$ из начала координат выпущена волна (= разрыв!). Разрыв распространяется по лучам со скоростью $v(\varphi,\theta)$ и в момент времени $t=1$ на каждом луче, имеющем направление **t**, достигнет расстояния от начала координат, равного $r = 1\cdot v(\mathbf{t})$. Но это означает, что фронт совпадет с лучевой индикатрисой. Тогда доказываемая ортогональность просто следует из определения **n** как вектора нормали к фронту. На первый взгляд доказательство нестрого, так как среда не обязана быть однородной. Но поскольку точка среды **x** закреплена и свойства индикатрис в данной точке не зависят от того, как изменяется среда в ее окрестности, мы имеем право доопределить среду в окрестности **x**, если, конечно, речь идет о свойствах самой индикатрисы.

Теперь рассмотрим некоторую плоскость $\dot{\mathbf{x}}\cdot\bar{\mathbf{y}} = 1$, касающуюся лучевой индикатрисы в точке M, отвечающей направлению **t**. Из только что доказанной теоремы следует, что вектор $\bar{\mathbf{y}}$ коллинеарен вектору **n**. Опустим из начала координат перпендикуляр на рассматриваемую плоскость. Длина этого перпендикуляра равна, очевидно, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}(\mathbf{t})$. Но, согласно равенству (9.13), эта величина равна $V(\mathbf{n})$. Перепишем уравнение плоскости в виде

$$\dot{\mathbf{x}}\cdot(\overline{\mathbf{y}}/|\overline{\mathbf{y}}|)=1/|\overline{\mathbf{y}}|.$$

В силу коллинеарности $\overline{\mathbf{y}}$ и $\mathbf{n}$**,** заключаем, что $\mathbf{y}/|\mathbf{y}|=\mathbf{n}$. А так как в точке касания $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{v}(\mathbf{t})$, то $1/|\mathbf{y}|=V(\mathbf{n})$. Таким образом, точка лучевой индикатрисы, радиус-вектор которой есть $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{t})$, преобразуется в точку $\overline{\mathbf{y}}=\mathbf{n}/V(\mathbf{n})$. Итак, мы показали, что преобразование Лежандра преобразует лучевую индикатрису в поверхность рефракции. Но преобразование Лежандра симметрично. Поэтому и наоборот: преобразование Лежандра поверхности рефракции есть лучевая индикатриса. Обе поверхности дуальны друг по отношению к другу.

Преобразование Лежандра устанавливает *между точками дуальных поверхностей взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие.* Это соответствие условимся обозначать символом ω, а точки, связанные соответствием ω, условимся называть дуальными. Отмеченное свойство нетривиально, поскольку лучевая индикатриса может иметь самопересечения, а это эквивалентно многозначности функции $v=v(\mathbf{t})$. Но волновую поверхность в этом случае можно представить как результат склеивания нескольких листов, каждому из которых соответствует «свой» кусок поверхности рефракции. При этом направления нормалей (к волновой поверхности) в точках, отвечающих одному и тому же значению **t**, но лежащих на разных листах, не могут совпадать.

Для эллиптической анизотропии мы уже произвели преобразование лучевой индикатрисы в индикатрису фазовых скоростей аналитическим способом, получив

$$1/V(\mathbf{n})=1/\sqrt{\sum\alpha_i n_i^2}, \qquad v(\mathbf{t})=1/\sqrt{\sum t_k^2/\alpha_k}.$$

Отсюда мы заключаем, что преобразование Лежандра эллипсоида есть по-прежнему эллипсоид, но с обратными величинами полуосей. Более того, при выводе формул для эллипсоидальной анизотропии нигде не использовались знаки коэффициентов α_k. Таким образом, полученное следствие можно распространить на однополостные и двухполостные гиперболоиды. В силу инвариантности преобразования Лежандра относительно поворота вокруг начала координат, следствие распространяется на любые поверхности, которые можно определить уравнением $a_{ik}x_ix_k=1$ с произвольной симметричной невырожденной матрицей a_{ik}. Полученному результату можно придать такую форму: *преобразование Лежандра поверхности второго порядка, описываемого уравнением* $a_{ik}x_ix_k=1$ *с произвольной симметричной невырожденной матрицей* a_{ik}*, есть снова поверхность второго порядка того же типа с собственными значениями, которые обратны к собственным значениям матрицы* a_{ik}.

Для поверхностей, записанных в диагональной форме

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1}+\frac{x_2^2}{\alpha_2}+\frac{x_3^2}{\alpha_3}=1, \tag{10.7}$$

легко получить поточечное соответствие между точками поверхности рефракции и волновой поверхности, которое выше обозначено ω. Действительно, легко проверить, что уравнение плоскости, касательной к эллипсоиду в точке с координатами (x_1^0, x_2^0, x_3^0), есть

$$\frac{x_1 x_1^0}{\alpha_1} + \frac{x_2 x_2^0}{\alpha_2} + \frac{x_3 x_3^0}{\alpha_3} = 1. \tag{10.8}$$

Из сопоставления с основным уравнением в преобразовании Лежандра $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^0 = 1$ легко заключить, что

$$y_i^0 = x_i^0 / a_i^2. \tag{10.9}$$

Полученное соотношение и реализует соответствие ω.

Преобразование Лежандра относится к классу дифференцируемых отображений (диффеоморфизмов), которое сохраняет не только обычное касание поверхностей, но и касание более высоких порядков, в частности касание второго порядка. В совокупности с теоремой о касательных эллипсоидах и гиперболоидах, которая будет доказана в § 20, это означает, что локальная геометрия поверхностей рефракции и дуальных к ним волновых поверхностей связана точно так же, как локальная геометрия касательных эллипсоидов и гиперболоидов. Теорема утверждает, что для каждой точки M гладкой поверхности рефракции найдется касательный эллипсоид или гиперболоид с центром в начале координат, который имеет касание второго порядка с поверхностью рефракции. (В силу того, что поверхность рефракции имеет центр симметрии в начале координат, касание осуществляется в двух симметричных точках с одинаковыми геометрическими характеристиками.) Применяя преобразование Лежандра и к поверхности рефракции, и к касательной поверхности второго порядка, учитывая сформулированное выше следствие, а также только что упомянутое свойство о сохранении порядка, мы получаем, что и волновая поверхность имеет касательную поверхность того же типа, имеющую касание второго порядка в дуальной точке и обратные полуоси.

Таким образом, проблема сводится к изучению геометрии преобразования Лежандра для поверхностей второго порядка, заданных уравнением типа (10.7). Такая задача рассматривается в § 18. Удается показать, что гауссова кривизна K поверхности рефракции связана с гауссовой кривизной K^* волновой поверхности следующим соотношением (18.21):

$$KK^* = (\mathbf{n}, \mathbf{t})^4.$$

Из положительности правой части следует, что гауссова кривизна сохраняет свой знак. Вследствие того, что на выпуклой части поверхности классическое и локальное преобразования Лежандра совпадают, сохранение положительной гауссовой кривизны означает, что не только образы выпуклых кусков выпуклы, но и образы вогнутых кусков, также имеющих положительную гауссову кривизну, вогнуты: если бы они были выпуклы, то по свойствам классического преобразования Лежандра и прообраз был бы выпуклым. Естественно, что участки поверхности рефракции, состоящие из точек гиперболичности, отображаются на участки волновой поверхности того же типа.

В § 3 приведена (без доказательства) важная теорема о выпуклости фазовой поверхности квазипродольной волны. Из рассмотренных свойств преобразования Лежандра следует, что и волновая поверхность квазипродольной волны (при тех же условиях) всегда выпукла.

Эллиптическая анизотропия (окончание). Полученная в предыдущем разделе связь между лучевой индикатрисой и поверхностью рефракции позволяет гораздо проще построить формулы, связывающие фазовую и лучевую скорость, а также систему уравнений луча для эллипсоидальной симметрии, чем это мы сделали раньше. Более того, принятое ранее условие о параллельности осей координат осям симметрии становится ненужным.

Пусть лучевая индикатриса (волновая поверхность Ψ) определяется уравнением

$$g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 1, \tag{10.10}$$

в котором $\dot{x}^i = dx/dt$ и $\|g_{ij}\|$ – положительно определенная матрица, вообще говоря, с зависящими от координат точки среды элементами и представляющая в декартовых координатах двухвалентный ковариантный тензор. Это уравнение определяет поверхность эллипсоида в касательном пространстве $T_{\mathbf{x}}$. Как сказано выше, ничто не мешает нам интерпретировать касательное пространство как фиктивное (воображаемое) однородное пространство с постоянной матрицей $\|g_{ij}\|$. Тогда мы можем положить в уравнение (10.10) $\dot{x}^i = x^i/t$, где t – время распространения фронта в фиктивном пространстве, получив следующее выражение:

$$t = \sqrt{g_{ij}x^i x^j}\ ,$$

которое определяет положение фронта (в фиктивном пространстве) в момент времени t. Лучевая скорость может быть определена отношением

$$v = |\mathbf{x}|/t = \sqrt{\delta_{ij}x^i x^j / g_{ij}x^i x^j}\ .$$

Если считать, что вектор-радиус $\mathbf{x}$ имеет единичную длину, то: 1) его компоненты совпадают с компонентами касательного вектора **t**; 2) наименьшее и наибольшее значения лучевой скорости совпадают с наибольшими и наименьшими из чисел $1/\sqrt{\lambda_i}$, где λ_i – собственные числа матрицы $\|g_{ij}\|$; 3) имеем следующее определение вектора $\mathbf{v}$ в терминах матрицы $\|g_{ij}\|$

$$v^k = t^k / \sqrt{g_{ij}t^i t^j}\ . \tag{10.11}$$

Перейдем к описанию вектора рефракции **p** с компонентами p_i. Согласно выясненным свойствам преобразования Лежандра, поверхность рефракции Φ лежит в сопряженном пространстве $T^*_{\mathbf{x}}$ и тоже является эллипсоидом с теми же направлениями главных осей и с обратными значениями длин полуосей. Это означает, что она описывается уравнением

$$g^{ij}p_i p_j = 1. \tag{10.12}$$

Полагая в последнем уравнении $p_i = n_i / V$, получаем формулу для фазовой скорости как функцию волновой нормали:

$$V^2 = g^{ij}n_i n_j\,. \tag{10.13}$$

После диагонализации матрицы имеем уравнение $p_{i'}^2/\lambda_{i'} = 1$ (штрих означает, что компоненты вектора **p** записаны в новой, повернутой системе координат). Следовательно, наибольшее и наименьшее значения величины вектора **p** совпадают соответственно с наибольшим и наименьшим значениями чисел λ_i. В свою очередь, это означает, что наибольшие (наименьшие) значения лучевой и фазовой скоростей совпадают и достигаются они в направлении главных осей обоих эллипсоидов.

Перейдем теперь к главной задаче – определению лучевой скорости по фазовой и, наоборот, фазовой по лучевой. Для их решения нет нужды обращаться к преобразованию Лежандра (мы им уже воспользовались, выводя уравнение (10.13) из (10.11)), так как, по определению, $v^k = \partial V / \partial n_k$. Используя формулу (10.13), получаем:

$$v^k = g^{ik} n_i / \sqrt{g^{ij} n_i n_j} = g^{ik} p_i . \qquad (10.14)$$

Отсюда сразу получаем

$$p_i = g_{ij} v^j . \qquad (10.15)$$

Все же покажем, как эти формулы выводятся при помощи преобразования Лежандра. Для определения вектора $\mathbf{p}$ по вектору лучевой скорости составим уравнения плоскости в сопряженном пространстве: $P: \mathbf{y} \cdot \dot{\mathbf{x}}_0 = 1$. Необходимо найти такое значение $\mathbf{y} = \mathbf{y}^0$, которое удовлетворяет уравнению плоскости и условию касания последней с поверхностью рефракции $\Phi : g^{ij} y_i y_j = 1$. Определяемое таким образом значение $\mathbf{y}$ и даст нам искомое значение **p**. Нормаль к плоскости $\mathbf{y} \cdot \dot{\mathbf{x}}_0 = 1$ есть вектор, пропорциональный $\mathbf{x}_0$, а нормаль к поверхности Φ есть вектор, пропорциональный $g^{ij} y_j$. Если положить $g^{ij} y_j = \dot{x}^i$, уравнение плоскости выполняется вслед за выполнением уравнения для поверхности рефракции. Все условия выполнены. Но $y_j = p_j$ и $\dot{x}^i = v^i$. Формулы (10.14) и (10.15) получены. Из (10.15) следует

$$V^2 = \frac{1}{p_i p_i} = \frac{1}{g_{ij} g_{ik} v^j v^k} = \frac{1}{f_{jk} v^j v^k} ,$$

где $f_{ij} = g_{ik} g_{kj}$.

В заключение построим систему уравнений луча для эллипсоидально-анизотропной среды. Подставляя в систему уравнений (9.6а–б) выражения (10.14) и (10.13), получаем

$$dx^k / dt = g^{ik} p_i , \qquad (10.16а)$$

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} p_i p_j . \qquad (10.16б)$$

По форме эти уравнения не отличаются от уравнений (2.8а–б), полученных для криволинейных координат в изотропной среде. В главе 4 будет получено, что это сходство является не только формальным.

Конические акустические оси. В ходе вывода преобразования Лежандра мы установили, что вектор лучевой скорости ортогонален поверхности рефракции. Этот фундаментальный факт, как и само преобразование Лежандра, поможет нам разрешить ряд парадоксов, о которых шла речь в предыдущем разделе, т.е. о возможной физической реализации всего множества решений, возникающих в случае кратных корней уравнения Кристоффеля, в том числе решений, противоречащих симметрии среды. Естественно, что некоторое решение имеет смысл, если существует (хотя бы мысленный) эксперимент, где оно может быть проинтерпретировано.

Ссылка на существование плоской волны идеальна в математическом плане, но остается неясной возможность физической реализации каждой такой волны. Более того, геометрическая сейсмика как научная дисциплина вообще не рассматривает распространение плоских волн в однородной среде. Поэтому необходимо следовать традициям этой дисциплины. И вместе с тем без апелляции к однородной среде трудно обойтись. Фактически, мы повторяем рассуждения, которые уже использовались выше, при обосновании ортогональности вектора волновой нормали к волновой поверхности. Уточним некоторые детали. Напомним, что все индикатрисы определены не в физическом пространстве, а в касательном пространстве T_x либо в сопряженном к нему пространстве T_x^*. Если в точке $\mathbf{x}$ тензор упругих модулей принимает конкретное значение c_{ijkl}, то мы определим фиктивную однородную среду, характеризующуюся данным тензором, и поместим в начало координат точечный источник, излучающий волны-разрывы всех типов. Тогда разрывы будут распространяться в этой среде в точном соответствии с уравнением Кристоффеля для однородной среды. В частности, движение помеченной точки на разрыве будет происходить по прямолинейным лучам с постоянной лучевой скоростью и по истечении единицы времени разрыв будет совпадать с волновой поверхностью. Отметим, что этот факт строго верен только для разрывов. Для всех других волн геометрические законы верны только приближенно (в отличие от распространения плоских волн в однородной среде). Таким образом, некоторое решение может быть верным, если оно может быть проинтерпретировано в указанном эксперименте.

Насколько жестки выдвинутые условия проверки, показывает такое рассуждение. Рассматривается направление нормали $\mathbf{n}$, являющееся акустической осью с кратным корнем V. Пусть одно из направлений вектора поляризации $\mathbf{a}$ для этого корня противоречит симметрии среды. Но существуют два таких направления – $\mathbf{a}^{(1)}$ и $\mathbf{a}^{(2)}$, которые ей не противоречат. Попробуем показать, что такая ситуация не может породить конуса векторов поляризации. Поскольку все три вектора лежат в одной плоскости, то вектор $\mathbf{a}$ можно получить как линейную комбинацию физически осуществимых поляризаций, объяснив таким образом поляризацию $\mathbf{a}$ как результат интерференции, что вроде бы допустимо в линейной среде. Однако этот довод верен только в том случае, если волны с поляризациями $\mathbf{a}^{(1)}$ и $\mathbf{a}^{(2)}$ могут накладываться в пространстве. В силу контактности преобразования Лежандра, общая точка двух поверхностей рефракции отображается на общую точку соответствующих волновых поверхностей в том и только в том случае, когда поверхности рефракции касаются друг друга, т. е. в случае касательного вырождения. А в этом случае, как мы уже знаем (см. § 9), имеется одна и только одна лучевая скорость. Вообще, волны от одного точечного источника в линейной среде распространяются независимо, каждая со своей лучевой скоростью, и они не могут порождать новое направление переноса энергии. Если же две гладкие поверхности рефракции пересекаются на некоторой гладкой линии (как это может наблюдаться в *TI*-среде для *S*- и *qS*-волн), то отвечающие им точки волновой поверхности разнесены в пространстве так, что интерферировать они не могут. Отметим, что волны-разрывы, имеющие, по определению, нулевую длительность, могут интерферировать только в точках пересечения или совпадения волновых фронтов.

Выскажем ряд общих положений, которые необходимо использовать при интерпретации точек вырожденности:

1) всякое направление $\mathbf{t} \in S^2$ (рассматриваемое как возможное направление лучевой скорости) характеризует либо луч регулярной волны, либо область дифракции;

2) если волна регулярна, то лучевая скорость обязана быть проинтерпретирована при помощи формулы (9.8) (т. е. как $\partial V / \partial \mathbf{n}$), являющейся основным определением лучевой скорости в рамках гамильтонова формализма;

3) дифрагированное волновое поле существует только в секторах тени: либо в секторе тех направлений, где одна из волновых поверхностей не определена, либо вблизи границы петли волновой поверхности;

4) только в том случае, когда имеющаяся информация о свойствах поверхностей рефракции не позволяет выбрать одну из альтернатив, имеет смысл обратиться к эксперименту с плоскими волнами.

Конические вырождения могут иметь место лишь при специфической геометрии поверхностей рефракции. Если некоторому направлению $\mathbf{n}^0$ отвечает коническое вырождение, то, согласно положению 2, формула (9.8) должна определять целый конус векторов $\mathbf{v}$, а это возможно только в том случае, когда предел вектора $\mathbf{v}(\mathbf{n}) = \partial V / \partial \mathbf{n}$ при $\mathbf{n} \to \mathbf{n}^0$ зависит от пути, по которому определяется предельный переход. Поскольку вектора $\mathbf{v}(\mathbf{n})$ ортогональны поверхности рефракции, то это возможно только в том случае, когда в окрестности $\mathbf{n}^0$ поверхность рефракции топологически эквивалентна конусу. Более точное определение такой особенности состоит в следующем: поверхность Ф имеет коническую особенность в точке *M*, если существует конус с вершиной в этой точке, который касается поверхности Ф (с внешней или внутренней стороны этой поверхности). Ясно, что множество векторов, нормальных к Ф в точке *M* (эти же векторы нормальны и к касательному конусу), также образуют конус. Ясно также, что преобразование Лежандра поверхности Ф в окрестности является непрерывным. Но если любая точка $M' \in \Phi$ из окрестности *M* отображается только на одну точку волновой поверхности, то точка *M* отображается на непрерывное множество точек волновой поверхности. Действительно, образ любой точки поверхности рефракции определяется параметрами касательной плоскости. Если каждой «обычной» точке M' (т. е. точке, в окрестности которой не нарушается гладкость поверхности рефракции) отвечает одна и только одна касательная плоскость (и единственный образ N'), то точке *M* отвечает целый веер касательных плоскостей. Каждая плоскость этого веера однозначно определяется направлением ζ подхода к точке *M*. Следовательно, образ точки *M* состоит из множества точек $N(\zeta)$. Поскольку $N\,(\zeta = 2\pi) = N\,(\zeta = 0)$, то множество $Z = \{N(\zeta); \zeta \in (0, 2\pi)\}$ оказывается замкнутой линией. Поскольку множество всех образов N' связно (их можно «связать» непрерывной траекторией, двигаясь по поверхности Φ), то все они располагаются с одной стороны от линии *Z*. А это означает, что линия Z является *краем* волновой поверхности. Иными словами, в волновой поверхности образуется дырка. Физический смысл этой «дырки» состоит в том, что в соответствующем коническом секторе направлений (секторе тени) не определены лучи соответствующей квазипоперечной волны. В этом направлении не может распространяться энергия, отвечающая данной волне, упругой деформации.

В силу того что коническому вырождению отвечает и коническая особенность поверхности рефракции, коническое вырождение может наблюдаться только для изолированной акустической оси. Поскольку при $\mathbf{n} = \mathbf{n}^0$ данная поверхность рефракции имеет общую точку с другой поверхностью рефракции (по самому определению акустической оси), то абстрактно мыслимы две ситуации: в одной – только одна из контактирующих поверхностей имеет коническую особенность (рис. 8, *а*), в другой –

коническая особенность наблюдается у обеих контактирующих поверхностей (рис. 8, *б*). Сначала рассмотрим вторую возможность. Отметим, что рис. 8, *б* только тогда отвечает конической особенности, когда нарисованные два контакта одновременно имеются только в плоскости, проходящей через обе эти особенности. Возможно ли существование двух конусов скоростей в одной точке контакта? Из свойств уравнения Кристоффеля следует, что векторы поляризации плоских волн, отвечающие кратному корню, располагаются только в одной плоскости. При этом каждому значению вектора поляризации, согласно формуле (9.10), отвечает только одно значение лучевой скорости. Согласно результатам А. Г. Хаткевича, кратко изложенным в конце § 9, при вращении вектора поляризации по кругу конец вектора лучевой скорости описывает эллипс с удвоенной угловой скоростью, дважды обегая один и тот же эллипс. Поэтому существование двух разных конусов исключено. Но у двух поверхностей может существовать один и тот же конус! Именно этот случай изображен на рис. 8, *б*. В этой ситуации касательные конусы обеих поверхностей как бы гладко сопряжены, представляя разные полости одного двухполостного конуса. Именно эта ситуация рассматривается как истинное коническое вырождение, поскольку именно в ней мы ощущаем, что поверхности рефракции, отвечающие разным волнам, суть только разные части единой алгебраической поверхности.

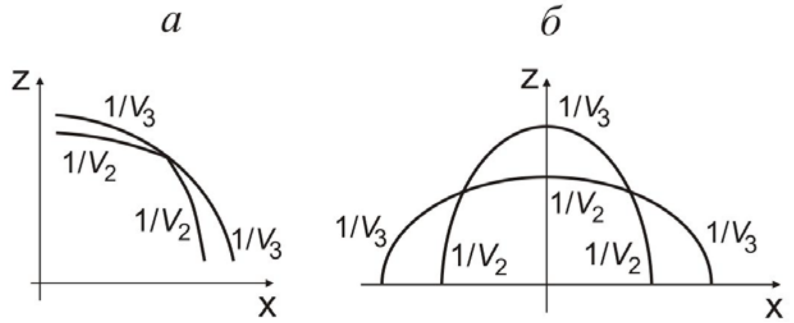


Рис. 8. Возможные контакты поверхностей рефракции в случае акустической оси: только одна из контактирующих поверхностей имеет особенность (*а*); обе поверхности рефракции имеют симметрично расположенные конические особенности (*б*)

Выше мы рассмотрели геометрию волновой поверхности с выпуклой конической особенностью. Но если в точке контакта каждая из контактирующих поверхностей имеет сопряженную с другой коническую особенность, то внешняя поверхность рефракции имеет вогнутую коническую особенность. Как мы увидим ниже, вогнутым участкам поверхности рефракции всегда отвечает петля волновой поверхности. Важно еще отметить, что в самой точке контакта определено множество контактных элементов, одновременно принадлежащих обеим поверхностям (хотя и разноориентированных). Так как ориентация контактного элемента не имеет значения, то данный факт означает, что по краю дыры волновой поверхности с выпуклой конической особенностью она контактирует с другой волновой поверхностью. Более того, если при вычислении производной $\partial V / \partial \mathbf{n}$ выбрать путь через точку контакта так, что после контакта он гладко переходит на другую поверхность, то ориентация вектора лучевой скорости и его величина будут меняться непрерывно, как бы продолжая первую поверхность в область дыры. Однако гладкого восполнения дыры произойти не может, потому что, продолжая выбранный путь дальше, мы не можем попасть на другой край дыры (для этого нужно совершить полукруговой обход вокруг точки контакта). Не случайно в этом месте наблюдается ветвление второй волновой поверхности. Поэтому топология волновых поверхностей в этом секторе лучевых скоростей очень сложна. Заметим еще, что в результате преобразования Лежандра контактирующие поверхности меняются положением: внутренняя становится внешней и наоборот.

Геометрия волновых поверхностей в ситуации, изображенной на рис. 8, *а*, выглядит так: волновая поверхность, дуальная к поверхности с конической особенностью, имеет край (т. е. дыру) и не имеет общих точек с другой волновой поверхностью, гладкость которой ничем не нарушается. Эту ситуацию можно было бы считать естественной, если волны с контактирующими индикатрисами распространяются независимо друг от друга, вследствие чего матрица Кристоффеля для направления $\mathbf{n}^0$ имеет структуру типа

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & 0 \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_{33} \end{pmatrix},$$

характерную для направлений $\mathbf{n}$, лежащих в плоскости симметрии. Но по критерию Альшица–Лоте (см. уравнение (3.26.)) вырождение для такой структуры имеет место только тогда, когда какие-то из диагональных элементов равны между собой (речь идет о критериальных величинах R_6 и R_7, поскольку остальные величины R_k $(k < 6)$ обращаются в нуль независимо от значений ненулевых компонент данной матрицы). Назовем модуль c_{sr} не общим, если от него зависит элемент Γ_{33}, но не зависят остальные элементы данной матрицы (или, наоборот, остальные элементы зависят от модуля c_{sr}, от которого не зависит Γ_{33}). Можно предложить представленный далее критерий.

Критерий необщего элемента заключается в следующем: *если для данного направления элемент* Γ_{33} *зависит от необщего модуля* c_{sr}, *то вырождение может быть только спорадическим*.

Действительно, предположим, что имеет место особенность у второй индикатрисы и одновременно контакт с поверхностью третьей индикатрисы. В силу линейной зависимости элементов матрицы Кристоффеля от модулей, значение Γ_{33} изменится, а с ним изменится и значение $V_3 = \sqrt{\Gamma_{33}/\rho}$. Следовательно, равенство $V_2 = V_3$ нарушится, так как значения остальных корней уравнения Кристоффеля не изменятся. Но, как показано в теории распространения плоских волн в кристаллах [11], особенность поверхности рефракции имеет место только при равенстве корней. А это означает, что в рассматриваемой ситуации поверхность рефракции второй волны не может иметь особенности.

На наш взгляд, ситуация, изображенная на рис. 8, *а*, встречается только как спорадическое вырождение.

Теперь мы можем дать окончательное суждение о возможности осложнения волновых поверхностей в *TI*-среде из-за пересечения поверхностей рефракции *qS*- и *S*-волн. Тензор Кристоффеля для всех направлений (кроме $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$) имеет приведенную выше структуру, если считать волну *qS* – второй, а волну *S* – третьей. При

$\Gamma_{22} = \Gamma_{44}$ (что имеет место при распространении вдоль оси бесконечного порядка) наблюдается вырождение касательного типа, уже изучавшееся нами. Других изолированных вырождений (по критерию Альшица–Лоте) этот класс анизотропных тел не имеет. Впрочем, и без применения упомянутого критерия ясно, что поверхности вращения могут иметь конические особенности только на оси вращения (но именно в этих точках все исключительно гладко). Поверхность рефракции третьей волны, будучи эллипсоидом, является гладкой всюду. Поверхность рефракции второй волны также всюду гладкая, хотя гипотетически возможно такое сочетание параметров, когда не определено значение производной $\partial V_2 / \partial\theta$. В общем положении две поверхности рефракции второй и третьей волн пересекают друг друга в точках гладкости. Точки на линии пересечения (вследствие контактности) отображаются на разные участки волновых поверхностей. Поэтому никакая интерференция волн, связанная с кратностью корня уравнения Кристоффеля, невозможна. Векторы поляризации обеих волн ведут себя так, что они просто не замечают кратности. На линии пересечения они определяются как пределы поляризационных векторов при подходе к этой линии с любой стороны. Нормали к гладким поверхностям ведут себя как однозначные, гладкие функции координат, и образование конусов, даже вырожденных, невозможно. Если же так случилось, что на линии обеих индикатрис не определено значение производной $\partial V_2 / \partial\theta$, то можно определить пределы этой функции при $\theta \to \theta_0 - 0$ и при $\theta \to \theta_0 + 0$. Эти пределы существуют, так как $V_2(\theta)$ – непрерывная, ограниченная сверху и снизу величина. Так что самое большое, что может случиться, – появление двух круговых краев у волновой поверхности с шаровым поясом тени в направлениях между «краевыми» направлениями $\mathbf{t}(\theta - 0)$ и $\mathbf{t}(\theta + 0)$ лучевой скорости. Если особенность отвечает вогнутому углу, то возникает петлевая ситуация, а это, как говорится, уже другая история.

Причины неоднозначности (наличия петель) лучевой индикатрисы. Неоднозначность волновой поверхности возникает тогда, когда поверхность рефракции вогнута. Как выяснено выше, вогнутость возможна только для индикатрис квазипоперечных волн. Для простоты ограничимся индикатрисами, являющимися телами вращения. Тогда достаточно взять «меридиональное» сечение индикатрисы при $\varphi = 0$ и все функции рассматривать только как функции θ. Если мы покажем, что неоднозначность возникает в этом очень простом случае, то тем более она возникает и в более сложных ситуациях, когда вогнутость имеет место по обеим угловым координатам. Сначала выведем одну формулу. Пусть функция $a(\theta)$ описывает индикатрису некоторой величины a в сечении $\varphi = 0$. Если при $\theta = \theta_0$, $da / d\theta = 0$ и $d^2 a / d\theta^2 > 0$, то в направлении θ_0 значение a имеет локальный минимум как функция от θ . Однако это еще не означает, что в окрестности θ_0 индикатриса $a(\theta)$ вогнута. Необходимо еще потребовать, чтобы она располагалась (в окрестности θ_0) вне касательной плоскости, уравнение которой можно записать так: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - a_0 = 0$, где $\mathbf{n} = (\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta), a_0 = a(\theta_0)$. Представим вектор $\mathbf{x}$ в виде $\mathbf{x} = r(\cos\theta,\ 0,\ \sin\theta)$. Тогда уравнение плоскости можно представить в виде

$$r(\theta) = a_0 / \cos(\theta - \theta_0) .$$

Тогда, как нетрудно получить, в направлении θ_0 $d^2r/d\theta^2 = a$. При $d^2r/d\theta^2 > a$ индикатриса $a(\theta)$ будет касаться плоскости извне, что и означает ее вогнутость в окрестности точки касания. Отсюда следует условие вогнутости поверхности рефракции (в окрестности точки локального минимума функции $a(t) = 1/V(\theta)$):

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{V}\right) > \frac{1}{V}.$$

Что же произойдет, если вогнутость имеет место? Поскольку фазовая поверхность есть (почти всюду) гладкая замкнутая поверхность, то участок вогнутости при изменении θ обязан замениться на участки выпуклости.

Вспомним, что нормаль к фазовой поверхности есть вектор $\mathbf{t}$ касательной к лучу. Этот вектор запишем в виде $\mathbf{t} = (\cos\alpha, 0, \sin\alpha)$, где $\alpha = \alpha(\theta)$. На участках выпуклости $\alpha(\theta)$ есть монотонно возрастающая, а на участках вогнутости – монотонно убывающая функция. Пусть $\alpha_0 = \alpha(\theta_0)$. В силу того что поверхность рефракции вогнута в окрестности θ_0 , то при $\theta = \theta_0 - \varepsilon''$ $(\varepsilon > 0)$ будет наблюдаться значение $\alpha' > \alpha_0$, а при $\theta = \theta_0 + \varepsilon''$ ($\varepsilon'' > 0$) – значение $\alpha'' < \alpha_0$. Но на участках выпуклости характер изменения α меняется. В силу того что при изменении $\theta \in (0, 2\pi)$ значения $\alpha(\theta)$ непрерывно заполняют интервал $(0, 2\pi)$, то при $\theta < \theta_0 - \varepsilon'$ найдутся значения α , лежащие в интервале $(0, \alpha')$, в частности и значение $\alpha = \alpha_0$ (при некотором θ_1). Аналогично при $\theta > \theta_0 + \varepsilon''$ найдутся значения, непрерывно заполняющие интервал $(\alpha'', 2\pi)$, в частности и значение $\alpha = \alpha_0$ для некоторого θ_2 (доказательство проще понять, глядя на рис. 9).

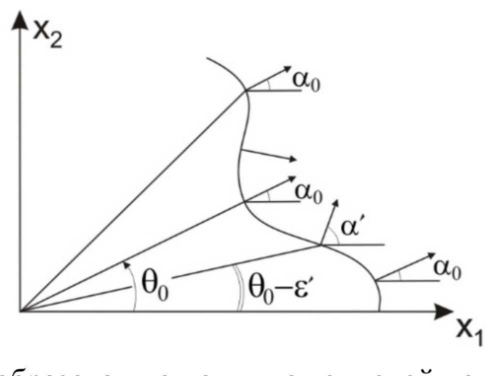


Рис. 9. К образованию петли на волновой поверхности

Таким образом, трем значениям угла θ (т. е. трем разным векторам волновой нормали) отвечает одно и то же направление луча. Поскольку в окрестности точек θ_1 и θ_2 поверхность рефракции выпукла, а в точке θ_0 вогнута, то значения $\partial V/\partial n_i$ оказываются разными. Следовательно, одному и тому же направлению луча $\mathbf{t}$ отвечают различные значения лучевой скорости. Значения лучевой скорости в точках θ_1 и θ_2 могут и совпадать, и отличаться. Это уже не меняет сути дела. Как правило, участкам вогнутости поверхности рефракции (являющейся индикатрисой медленности) отвечают увеличенные значения лучевой скорости. Поэтому из двух возможных вариантов петли на волновой поверхности, приведенных на рис. 10, более правдоподобным является вариант, представленный рис. 10, *а*. Аналогично тому, как в случае конической вырожденности появляются внутренние края у волновых поверхностей, так в случае ветвления появляются внешние края, проходящие по угловым точкам, в которых сопрягаются различные ветви волновой поверхности.

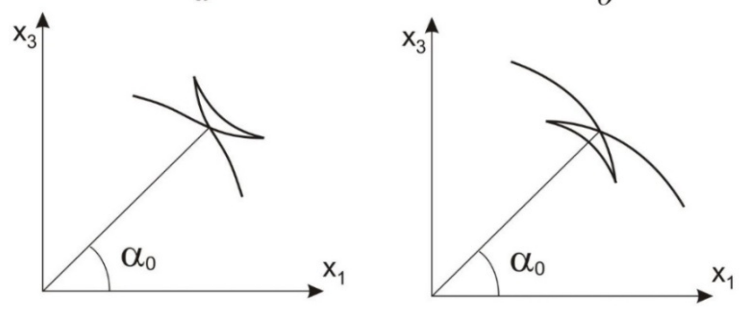


Рис. 10. Два гипотетических варианта петли для волновой поверхности

На рис. 11 приведены поверхности рефракции и волновые поверхности для всех четырех типов невыпуклых фазовых поверхностей, которые встречаются для волны *qS* в *TI*-среде [9].

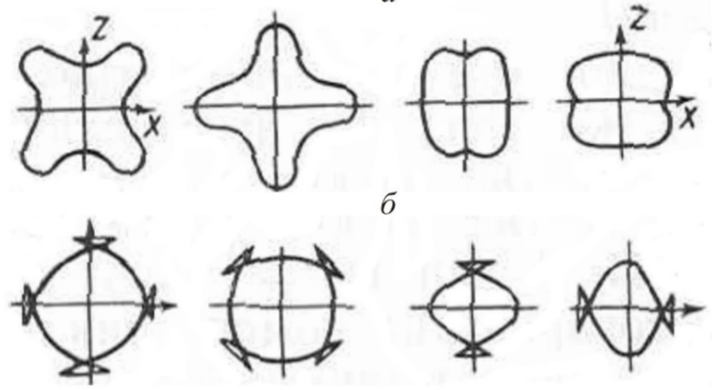


Рис. 11. Сечения поверхности рефракции (*а*) и волновые поверхности (*б*) волны *qS* в трансверсально-изотропной среде

В литературе приводятся различные формы достаточных условий ветвления волновой поверхности. Мы их приводить не будем, но обратим внимание на то, что все они так или иначе связаны с различными мерами отклонения от изотропии, такими как, $|c_{11}-(c_{12}+2c_{44})|$, $|c_{44}-c_{66}|$, $|c_{12}-c_{13}|$ и т. д. Все дело в том, чтобы анизотропия была достаточно велика. Действительно, поверхности рефракции в изотропной среде являются сферами, следовательно, в каждой точке имеют положительное значение кривизны. При достаточно малом (анизотропном) возмущении модулей упругости поверхность рефракции подвергается непрерывной деформации, оставаясь однозначной выпуклой поверхностью, что вытекает из отмеченной в § 3 устойчивости свойства выпуклости индикатрис.

Перечисление и описание всех возможных особенностей геометрии волновых поверхностей относятся к прерогативам общей теории особенностей дифференцируемых отображений (более известной, как теории катастроф), изложение которой выходит за рамки введения в геометрическую сейсмику.

Специфическая петлевая геометрия волновой поверхности есть только одно (чисто геометрическое) из следствий локальной вогнутости поверхностей рефракции. Как показывает динамический анализ, при переходе с одного листа волновой поверхности на другой происходит смена формы сигнала, которая в рамках геометрической сейсмики может быть проинтерпретирована как изменение порядка разрыва и / или преобразование Гильберта. У внутреннего и внешнего края волновой поверхности возможна дифракция в виде появления волн с комплексным эйконалом (о котором шла речь в § 2). В таких случаях возможно появление непричинных разрывов, обладающих отличными от нуля значениями перед фронтом разрыва. Однако это не нарушает принципа причинности, поскольку данные явления наблюдаются только у квазипоперечных волн, которые, как мы знаем, не обладают наибольшими скоростями распространения. В ряде научных дисциплин используется термин «слабая причинность» для характеристики таких ситуаций. В отличие от этого, квазипродольные волны обязаны удовлетворять сильному принципу причинности.

Не исключено, что в сложных ситуациях нарушается независимость распространения квазипродольных и квазипоперечных волн, имеющаяся при распространении плоских волн. Вследствие этого происходит порождение продольных волн поперечными. Так или иначе, но именно в условии сильной причинности лежит физическая причина обязательной выпуклости индикатрис квазипродольной волны.

§ 11. Условия на границе анизотропных сред

При изучении изотропных сред мы убедились в том, что как решение задачи Коши (для уравнения эйконала), так и продолжение эйконала через границу двух сред, сводится к одному и тому же: к задаче восстановления вектора $\nabla\tau$ в некоторой точке $\mathbf{x}^0$, заданной на поверхности Σ. Если вектор $\mathbf{p} = \nabla\tau$ восстановлен в каждой точке поверхности Σ, то определены начальные условия для уравнений луча в анизотропной среде, с помощью которых можно построить нужный эйконал. В какой бы ситуации ни возникла задача восстановления вектора **p**, всегда можно считать, что задача состоит в восстановлении $\nabla\tau$ в одной из примыкающих сред (в среде продолжения) по вектору $\mathrm{pr}_{T(\Sigma)}\nabla\tau$, заданному в точке на границе. Действительно, если задан вектор рефракции падающего луча, то определение $\mathrm{pr}_{T(\Sigma)}\nabla\tau$ элементарно. Если задан вектор лучевой скорости на падающем луче, то, как показано в § 10, зная лучевую индикатрису (волновую поверхность), можно восстановить и вектор медленности (рефракции) $\mathbf{p} = \nabla\tau$. Если же на Σ задан годограф τ_Σ, то, как было показано в § 7, по этим данным однозначно восстанавливается значение $\mathrm{pr}_{T(\Sigma)}\nabla\tau = \left(p_1, 0, 0\right)$ в любой точке $\mathbf{x}^0 \in \Sigma$. Соответствующая процедура была определена без использования каких-либо предположений об изотропности пространства.

Определение вектора медленности. Вектор медленности восстанавливается при помощи уравнения Кристоффеля. В некоторых случаях известны аналитические выражения для индикатрис именно тех волн, эйконалы которых необходимо строить в среде продолжения. В таких случаях каждая волна может рассматриваться независимо от других. Однако чаще всего уравнение Кристоффеля – единственный источник информации об индикатрисах фазовой скорости или поверхностях рефракции. Уравнение Кристоффеля, как мы знаем, не относится к какому-либо определенному типу волны. Поэтому при использовании уравнения Кристоффеля продолжение эйконалов всех типов приходится рассматривать совместно, в рамках одной задачи. Более того, часто возникает вопрос об идентификации нужного решения.

Важно подчеркнуть, что поверхность Σ и поверхности рефракции являются объектами различных пространств. Первая определена в обычном физическом пространстве R^3, вторые – в кокасательном пространстве $T^*_{\mathbf{x}^0}R^3$. Поэтому их нельзя нарисовать на одном и том же чертеже. Вместе с тем, с элементами кокасательного (сопряженного) пространства (ковекторами, градиентами) можно связывать направления, которые в содержательном плане характеризуют взаимное расположение бесконечно близких объектов в R^3. Поэтому системы координат в обоих пространствах должны быть согласованы друг с другом. На этом более подробно мы останавливались в § 2. Для описания анизотропии в $T^*_{\mathbf{x}^0}R^3$, как правило, используется кристаллографическая система координат (X, Y, Z), ось Z которой направлена вдоль главной оси соответствующей группы симметрии. Понятно, что ориентация этой оси может быть любой относительно направлений, связанных с касательной плоскостью $T_{\mathbf{x}^0}\Sigma$. Поэтому в $T^*_{\mathbf{x}^0}R^3$ необходимо ввести дополнительные координаты, с помощью которых это согласование можно произвести. Условимся, что в окрестности точки $\mathbf{x}^0 \in \Sigma$ введена присоединенная к Σ декартова система координат (x, y, z), у которой ось z направлена вдоль нормали к Σ, ось x лежит в $T_{\mathbf{x}^0}\Sigma$ параллельно (коллинеарно) вектору $\mathrm{pr}_{T_{\mathbf{x}^0}\Sigma}\nabla\tau$. Теперь и в плоскости $T^*_{\mathbf{x}^0}R^3$ можно ввести координаты (x', y', z'), оси которой «параллельны» соответствующим осям присоединенной к Σ системе координат. У исследователя всегда есть выбор: либо при записи тензора упругих модулей от кристаллографической системы координат перейти к системе (x', y', z') (формулы пересчета определены в § 3), либо, напротив, координатную систему, в которой записывается поверхность Σ, выбрать параллельно кристаллографической координатной системе. Здесь мы предполагаем, что выбран первый путь.

Векторы $\nabla\tau$, $\mathrm{pr}_{T_{\mathbf{x}^0}\Sigma}\nabla\tau$ и вектор $\mathbf{N}$ нормали к Σ расположены в одной и той же плоскости (плоскости падения P), безотносительно от типа волны или среды, в которую строится продолжение. Поэтому вторая компонента всех этих векторов (определяемая как проекция на ось y') равна нулю. Рассматривая поверхности рефракции, достаточно использовать их сечения плоскостью (x', z'). Проекция q-й поверхности рефракции на ось x' образует интервал $\left(-p^*_q, p^*_q\right)$, который симметричен, поскольку всякая индикатриса обладает центром симметрии.

Составим уравнение Кристоффеля для среды продолжения:

$$\det\left|c_{ijkl}p_j p_k - \rho\delta_{il}\right| = 0$$

(напомним, что модули определены в координатной системе (x', y', z')). Внесем в это уравнение известную информацию (т. е. значение p_1 и $p_2 = 0$). Мы получим алгебраическое уравнение шестой степени относительно скалярной величины p_3. Если положить в уравнении Кристоффеля $p_1 = 1/V^*$ и $p_3 = h/V^*$, то полученное уравнение (оно будет называться модифицированным уравнением Кристоффеля) запишется в более удобной для вычисления форме

$$\det\left[c_{i11l} - \rho V^{*2}\delta_{il} + \left(c_{i13l} + c_{i31l}\right)h + c_{i33l}h^2\right] = 0. \tag{11.1}$$

Это – алгебраическое уравнение шестой степени (относительно h) с действительными коэффициентами. Такое уравнение с произвольными вещественными коэффициентами имеет шесть решений, среди которых могут быть пары комплексно-сопряженных решений (в том числе и чисто мнимых), а значит, и четное число вещественных решений. Чисто мнимые решения отвечают классическим эванесцентным волнам. Пары (или четверки) вещественных решений отвечают обычным волнам. Пары нетривиальных комплексно-сопряженных решений отвечают неклассическим эванесцентным волнам.

В чем заключается их «неклассичность»? Предположим, что и граница Σ , и падающая волна являются плоскими, а контактирующие среды однородными. Тогда кажущаяся скорость V^* оказывается постоянной на границе, постоянным является и решение $h = h' + ih''$. Решение задачи Коши в среде продолжения имеет вид $\tau = t_0 + x/V^* + zh'/V^* + izh''/V^*$. Пусть падающая волна является δ -функцией, тогда поступая так же, как и при выводе формулы (2.10), получим, что в среде продолжения распространяется импульс:

$$\frac{1}{\pi}\frac{\left(h''/V^*\right)z}{\left(t - x/V^* - zh'/V^*\right)^2 + \left(h''/V^*\right)^2 z^2}.$$

Этот импульс распространяется в направлении, которое задается вектором $\mathbf{m} = \mathbf{e}_1 + h'\mathbf{e}_3$. Иначе говоря, при положительном h' он отходит от границы, а при отрицательном h' он приближается к ней. Классическая эванесцентная волна распространяется строго вдоль границы. Рассмотренное решение при $h' \neq 0$ удобно назвать *косой эванесцентной волной*. Два вещественных решения могут «слиться» в одно (кратное). В этом случае восстановленный из конца вектора $\mathrm{pr}_{T_{\mathbf{x}_0}\Sigma}\nabla\tau$ перпендикуляр касается соответствующей индикатрисы. Угол падения, который приводит к этой ситуации, называется критическим. Он отвечает условию $p_1 = p_q^*$. Геометрическая интерпретация перечисленных возможностей показана на рис. 12.

Все решения характеристического уравнения вещественны, если $p_1 < \min\left(p_q^*\right)$, все решения комплекснозначны, если $p_1 > \max\left(p_q^*\right)$. В промежуточных случаях только часть решений комплекснозначна. Если p_2 совпадает с одним из значений p_q^*, то имеет место кратный корень.

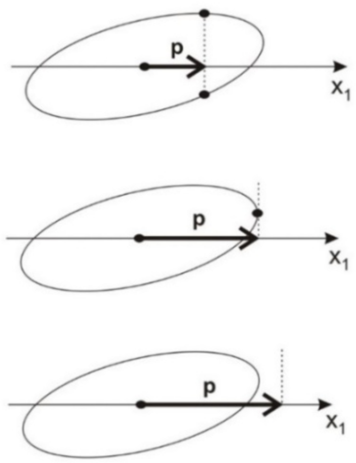


Рис. 12. Геометрическая интерпретация различных решений

Обозначим через γ^q замкнутую кривую, представляющую пересечение фазовой поверхности волны типа q с плоскостью падения P, совпадающей с координатной плоскостью (x', z'). С каждым вещественным корнем характеристического уравнения можно связать пересечение перпендикуляра, восстановленного из конца вектора $\mathrm{pr}_{T(\Sigma)}\nabla\tau$ в плоскости P, с кривой γ^q. Число таких пересечений (исключая случаи касания) может быть только четным. Но оно не обязано быть равным двум! Действительно, поверхности рефракции не обязаны быть выпуклыми, вследствие чего может возникнуть и большее число пересечений. Но и в этом случае общее число решений (включая комплекснозначные) не превосходит шести. На рис. 13 показана ситуация с числом пересечений равным 4.

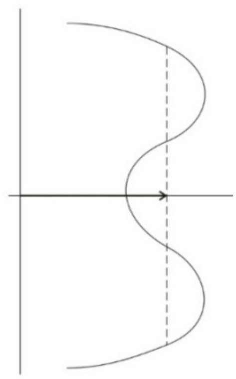


Рис. 13. К существованию четырех решений для одного типа волны

Теорема (о числе пересечений.) При достаточно малом значении $\left|\mathrm{pr}_\Sigma \mathbf{p}\right| = 1/V^*$ модифицированное уравнение Кристоффеля имеет шесть вещественных решений.

Доказательство. Пусть $\left|\mathrm{pr}_\Sigma \mathbf{p}\right| = 0$. Тогда уравнение (11.1) сводится к следующему: $\det[c_{i33l}p_3^2 - \rho\delta_{il}] = 0$ или $(c_{1331}p_3^2 - \rho)(c_{2332}p_3^2 - \rho)(c_{3333}p_3^2 - \rho) = 0$. В упругих средах (независимо от используемых координатных систем) $c_{33} > 0, c_{44} > 0, c_{55} > 0$. Таким образом, имеется шесть вещественных решений $\pm\sqrt{\rho/c_{33}}$, $\pm\sqrt{\rho/c_{44}}$, $\pm\sqrt{\rho/c_{55}}$, отличных от нуля. Модифицированное уравнение Кристоффеля можно переписать так:

$$\det[(1/V^*)^2 c_{i11l} - \rho\delta_{il} + (1/V^*)^2 (c_{i13l} + c_{i31l})h + (1/V^*)^2 c_{i33l} h^2] = 0 .$$

В окрестности значения $1/V^* = 0$ левая часть является непрерывной функцией переменной $1/V^*$. Стало быть, существует невырожденная область значений $1/V^*$, для которых модифицированное уравнение Кристоффеля имеет ровно шесть вещественных решений.

Из всех вещественных решений удерживаются только те, для которых нормаль к поверхности рефракции (а она, как мы знаем, совпадает с вектором $\mathbf{t}$) составляет острый угол с тем направлением оси z', которое отвечает направлению (из $\mathbf{x}^0$) в среду продолжения. Почему? Да потому, что именно направление луча показывает, куда перемещается точка на фронте. А поскольку среда продолжения выбрана, то мы выбираем только решения, отвечающие движению точек фронта именно в эту среду. Таким образом, z' – компонента вектора лучевой скорости должна быть положительна, если среда продолжения примыкает к границе со стороны положительного направления оси *z*, в противном случае она должна быть отрицательна. Данная компонента определяется третьей строчкой в формуле (9.11а) (если, конечно, используемая в этой формуле полярная система координат определена в системе координат (x', y', z')). Отсюда получаем следующие условия:

$$\bar{V}\cos\theta - \left(\partial\bar{V}/\partial\theta\right)\sin\theta > 0 \quad \left(\text{продолжение в сторону } z' = +\infty\right),$$

$$\bar{V}\cos\theta - \left(\partial\bar{V}/\partial\theta\right)\sin\theta < 0 \quad \left(\text{продолжение в сторону } z' = -\infty\right).$$

Для комплекснозначных решений дополнительным критерием является критерий убывания амплитуды волны при удалении от поверхности.

В тех случаях, когда вектор $\mathbf{v}$ оказывается направленным параллельно границе Σ (точнее, параллельно касательной плоскости $T_{\mathbf{x}^0}\Sigma$), данные в точке $\mathbf{x}^0$ характеристичны и условие корректности задачи Коши не выполнено.

Плоскость падения является плоскостью симметрии в среде продолжения. В качестве примера рассмотрим ситуацию, когда плоскость падения совпадает с плоскостью симметрии среды продолжения. Из симметрии следует, что одна из трех волн должна быть поляризована ортогонально плоскости падения (совпадающей симметрии). Ее естественно назвать волной *SH*. Две другие – (*qP* и *qSV*) – поляризованы в плоскости падения.

Модифицированное уравнение Кристоффеля определяется формулой (11.1). Но поскольку плоскость симметрии перпендикулярна оси x_2, то, как показано в § 9, те элементы в матрице, стоящей в квадратных скобках, в которых имеется нечетное вхождение индекса 2, равны нулю. Запишем эту матрицу в сжатой индексации:

$$\det\begin{pmatrix} c_{11} - \rho V_*^2 + 2c_{14}h^2 & 0 & c_{15} + \left(c_{13} + c_{55}\right)h + c_{35}h^2 \\ 0 & c_{66} - \rho V_*^2 + 2c_{46}t + c_{44}t^2 & 0 \\ c_{15} + \left(c_{13} + c_{55}\right)h + c_{35}h^2 & 0 & c_{55} - \rho V_*^2 + 2c_{35}h + c_{33}h^2 \end{pmatrix} = 0 .$$

Уравнение удовлетворяется, если удовлетворяется любое из следующих уравнений:

$$c_{66} - \rho V_*^2 + 2c_{46}h + c_{44}h^2 = 0 ,$$

$$\det\begin{pmatrix} c_{11}-\rho V_*^2+2c_{14}h+c_{55}h^2 & c_{15}+\left(c_{13}+c_{55}\right)h+c_{35}h^2 \\ c_{15}+\left(c_{13}+c_{55}\right)h+c_{35}h^2 & c_{15}+\left(c_{13}+c_{55}\right)h+c_{35}h^2 \end{pmatrix}=0 .$$

Первое из уравнений определяет вектор рефракции волны *SH*. Выпишем оба решения этого уравнения:

$$h_{1,2}=\frac{-c_{46}\pm\sqrt{\rho V_*^2 c_{44}-\left(c_{44}c_{66}-c_{46}^2\right)}}{c_{44}} . \tag{11.2}$$

Из этих двух решений одно определяет отраженную волну, а другое – проходящую. Напомним, что критерием выбора является направление вектора лучевой скорости. Именно этот вектор показывает, куда распространяется фиксированная точка на разрыве. Знак модуля $c_{44}=c_{2312}$ может зависеть от ориентации оси *z*. Чтобы убедиться в этом, следует построить форму $c^{ijkl}x_i x_j x_k x_l$ (по индексам не суммировать!). Правило здесь следующее: если при перемене знака у переменной x_s $\left(s=1,2,3\right)$ форма меняет знак, то соответствующий модуль меняет знак при перемене направления соответствующей оси. В частности, отсюда следует, что модули типа c_{pp} всегда положительны: форма $c^{ijij}x_i^2 x_j^2$ знака не меняет, а в кристаллографических координатах эти модули всегда положительны. Из указанного свойства модуля c_{46} следует, что возможны все ситуации: оба решения положительны; оба решения отрицательны; решения имеют разные знаки. В последнем случае из интуитивных соображений ясно, что, отыскивая решение, отвечающее отраженной волне, нужно брать знак минус, а для проходящей волны – выбирать противоположный знак. Геометрически это следует из того, что сечение (плоскостью P) поверхности рефракции в рассматриваемом случае есть «повернутый» эллипс. Если оба решения имеют одинаковые знаки, то в подобных ситуациях задачу надо решать до конца, вычисляя вектор лучевой скорости (9.10) или пропорциональный ему вектор **r** с компонентами $r_j=c^{ijkl}l_i l_l n_k$.

В нашем случае задача упрощается: из всех компонент вектора **l** только l_2 отлична от нуля (и она, по определению нормированного вектора поляризации, равна 1) и, кроме того, $n_2=0$. Следовательно,

$$r_j=c_{2j12}n_1+c_{2j32}n_3 , \tag{11.3}$$

где $n_1=1/V_*\sqrt{1+h^2}$, $n_3=t/V_*\sqrt{1+h^2}$. Так как вектор **r** определяется с точностью до множителя, положим $n_1=1$, $n_3=t$, получив $r_j=\left(c_{2j12}+c_{2j32}h\right)$. Поскольку, в силу симметрии, нечетные вхождения индекса 2 исключены, то $\left[r_1=c_{66}+c_{46}h,\ r_2=0,\ r_3=c_{46}+c_{44}h\right]$. Так как ось z направлена вниз, то точка на разрыве отражается, если $r_3<0$. С учетом формулы (11.2), получаем критерий

$$r_3=c_{46}-c_{46}\pm\sqrt{\rho V_*^2 c_{44}-\left(c_{44}c_{66}-c_{46}^2\right)}\equiv\pm\sqrt{\rho V_*^2 c_{44}-\left(c_{44}c_{66}-c_{46}^2\right)}<0 .$$

Таким образом, независимо от знака c_{46} для отраженных волн выбирается решение, отвечающее выбору знака «минус» перед корнем в (11.2).

После того как правильное решение h выбрано, вектор рефракции отраженной и проходящей волн определяется формулами

$$\mathbf{p}^R = (1/V_*)n_1 + \left(h^{(-)}/V_*\right)n_3, \quad \mathbf{p}^T = (1/V_*)n_1 + \left(h^{(+)}/V_*\right)n_3.$$

Угол отражения $\alpha = \arg\mathrm{tg}\, h^{(-)}$, угол преломления: $\alpha = \arg\mathrm{tg}\, h^{(+)}$. Заметим, что при отражении и преломлении используются модули разных сред, каждый раз они обозначают свойства среды продолжения. Угол падения равен углу отражения тогда и только тогда, когда $h^{(+)} = -h^{(-)}$.

Рассмотренная задача может возникнуть на контакте двух *TI*-сред, у которых оси бесконечного порядка наклонены, оставаясь лежать в плоскости падения.

Примеры для *TI*-сред. Для того чтобы проиллюстрировать все возникающие возможности, достаточно рассмотреть задачу продолжения волны $qS_{\|}$ в трансверсально-изотропной среде. Это не приведет нас к слишком сложным формулам.

Пример 1. В качестве среды продолжения рассмотрим трансверсально-изотропную среду, у которой главная ось симметрии (O_∞) касательна границе Σ в заданной точке *M*, но перпендикулярна заданному вектору $\mathrm{pr}_{T_M^*(\Sigma)}\nabla\tau = \mathbf{e}_1/V^*$. Необходимо восстановить вектор $\nabla\tau$ волны $qS_{\|}$ в среде продолжения. По своему определению, вектор $\nabla\tau$ лежит в плоскости *P*, проведенной через векторы $\mathbf{e}_1/V^*$ и $\mathbf{N}$ (нормаль к Σ в рассматриваемой точке). По условию задачи эта плоскость совпадает с плоскостью изотропии среды продолжения. Поэтому решение задачи совершенно аналогично решению для изотропной среды. Фазовые скорости от угла (между $\nabla\tau$ и **N**) не зависят, лучевые скорости совпадают с фазовыми.

Пример 2. Теперь направим ось O_∞ вдоль вектора **N**. Система координат (x', y', z') совпадает с кристаллографической, поэтому поверхность рефракции в среде продолжения определится в соответствии с формулой (3.29):

$$1/V = \sqrt{\rho/\left(c_{66}\sin^2\theta + c_{44}\cos^2\theta\right)}.$$

Необходимо из конца вектора $\mathbf{e}_1/V^*$ восстановить перпендикуляр до пересечения с данной индикатрисой. Угол θ, отвечающий точке пересечения, и определит направление вектора $\nabla\tau$ и его величину, равную $1/V(\theta)$.

Рассмотрим следующие ситуации: 1) $V^* > \sqrt{c_{66}/\rho}$; 2) $V^* = \sqrt{c_{66}/\rho}$; 3) $V^* < \sqrt{c_{66}/\rho}$. В первой ситуации уравнение

$$\sin\theta\sqrt{\rho/\left(c_{66}\sin^2\theta + c_{44}\cos^2\theta\right)} = 1/V^* \tag{11.4}$$

обязано иметь решение, поскольку левая часть при изменении θ в интервале $(0, 2\pi)$ изменяется от 0 до $\sqrt{\rho/c_{66}}$. Переписав данное уравнение в виде

$$\left[\rho V^{*2} - c_{66}\right]\sin^2\theta = c_{44}\cos^2\theta,$$

получим следующее решение:

$$\theta = \mathrm{arctg}\sqrt{c_{44}/(\rho V^{*2} - c_{66})}.$$

Во второй ситуации $\theta = \pi/2$ – луч скользит вдоль границы со скоростью V^*. Перейдем к третьей ситуации. Теперь вещественное решение невозможно. Так как в случае вещественного решения фигурирующая в уравнении (11.1) величина h совпадает с $\cos\theta$, то соблазнительно положить в уравнение (11.2) $\cos^2\theta = h^2$ и $\sin^2\theta = 1-h^2$. Однако эти рассуждения неверны. Необходимо обратиться к модифицированному уравнению Кристоффеля (11.1). Матрица под знаком детерминанта имеет такую же структуру, как и в случае вещественных решений. Поэтому, если повторить тот анализ, который был сделан в § 1–2 для исходной матрицы, то для волны $qS_{\parallel}$ уравнение, определяющее величину h, редуцируется к следующему:

$$c_{66} - \rho V^{*2} + c_{44}h^2 = 0 .$$

Отсюда в ситуации 3 получаем $h = \pm i\sqrt{\left(pV^{*2} - c\right)/c_{44}}$.

Пример 3. В этом примере ось O_∞ проведена вдоль оси x_1. Кристаллографические оси X и Z как бы меняются местами. Поэтому во всех полученных в примере 2 формулах модули c_{44} и c_{66} нужно поменять местами.

Пример 4. Пусть ось симметрии O_∞ по-прежнему находится в плоскости *P*, но отклонена от направления нормали **N** на угол α. Если имеется вещественное решение, то оно находится достаточно просто. Фазовая поверхность имеет ту же форму, но угол θ отсчитывается от нового направления кристаллографической оси. Восстановим перпендикуляр из конца вектора $\mathbf{e}_1/V^*$ до пересечения с фазовой поверхностью. Пусть вектор, определяющий точку пересечения, составляет с осью x' угол φ. Тогда величина скорости определится по стандартной (не повернутой) поверхности рефракции углом $\theta = \varphi - \alpha$, поэтому вместо уравнения (11.4) получим новое уравнение

$$\sin(\theta+\alpha)\sqrt{\rho/\left(c_{66}\sin^2\theta + c_{44}\cos^2\theta\right)} = 1/V^* .$$

Это уравнение можно решить только численно.

Для построения комплексного решения необходимо найти упругие модули в системе координат (x', y', z'), что соответствует повороту кристаллографических координат на угол α вокруг оси y', и опять воспользоваться модифицированным уравнением Кристоффеля.

ГЛАВА 3. ПРИНЦИП ФЕРМА

В XVII в. Пьер Ферма сформулировал два утверждения, оба носящие его имя и оба заставившие потомков в течение веков размышлять над ними. Великая теорема Ферма оказалась доказанной только в наши дни. Не менее великому принципу Ферма повезло больше в том смысле, что он был осознан значительно раньше, но, однако, его пришлось весьма серьезно модифицировать. Формулировка самого Ферма излагается чаще всего так: «выпущенный из точки *A,* свет распространяется до точки *B* по такому пути, который обеспечивает ему наименьшее время распространения». В такой формулировке принцип не лишен мистического оттенка: как свет может «знать», какой путь окажется «правильным»? Не исключено, что мистические воззрения были Ферма и не чужды. Но из всего, что мы уже знаем о распространении колебаний, следует, что, по крайней мере, распространение разрывов является сугубо локальным процессом: положение разрыва в некоторый момент времени t зависит только от его положения в интервале в момент $t-\varepsilon$ для сколь угодно малого ε. В свое время Шредингер предложил красивый пример, объясняющий, как можно совместить глобальный характер принципа Ферма с локальным характером самого движения. Он предложил рассмотреть цепь взявшихся за руки солдат на пересеченной местности, каждому из которых приказано бежать с максимальной скоростью. Считается, что эта скорость зависит только от условий местности (в частности, может зависеть от направления), но не от солдата. По команде цепь бежит и через условленное время останавливается. И хотя ни для одного из солдат заранее нельзя было указать, в какую точку он попадет, по достижении этой точки оказывается, что он бежал так, как будто придерживался принципа Ферма. Шредингер полагал, что решающим является взаимодействие одного солдата со всей солдатской цепью. В духе этого примера принцип Ферма следовало бы переформулировать так: «при распространении из точки *A* свет достигает точки *B* за такое время, как если бы он распространялся по траектории из *A* в *B*, обеспечивающей наименьшее время распространения».

Но и в такой формулировке принцип Ферма не объяснял распространения волн, приходящих в точку *B* вслед за первой волной. А такие волны неизбежно появляются, если в среде есть поверхности разрыва физических свойств. С появлением вариационного исчисления стало ясно, что главную роль играют не траектории, обеспечивающие наименьшее время среди всех мыслимых траекторий из *A* в *B*, а траектории, имеющие наименьшее время только среди «близких» траекторий, и даже еще более широкий класс так называемых стационарных траекторий. Последние имеют такое же отношение к наименьшему времени, какое стационарные точки функции (точки локальных максимумов, минимумов и перегибов) к наименьшему ее значению.

Современная формулировка и вытекающая из нее система уравнений луча как в изотропном, так и в анизотропном случаях дана в § 12. Но если для изотропной среды эквивалентность уравнений Эйлера уравнениям, полученным в рамках гамильтонова формализма, устанавливается непосредственно, то для анизотропии установление эквивалентности подходов оказывается сложной (в техническом отношении). Эта эквивалентность устанавливается позже, в § 14, посвященном эквивалентности лагранжева и гамильтонова формализма. Она оказывается простым следствием одной общей теоремы. В § 13 формулируется важный принцип композиции, благодаря которому принцип Ферма во многих задачах оказывается более эффективным средством, нежели гамильтонова техника. Последний параграф этой главы посвящен условиям, при которых современная и классическая формулировки принципа Ферма совпадают. Показывается, что в анизотропной среде, даже в однородном безграничном пространстве, эти условия могут быть и не выполнены.

§ 12. Лучи как стационарные траектории функционала Ферма

Функционал Ферма. Рассмотрим некоторую траекторию γ, соединяющую две фиксированные точки *A* и *B* (рис. 14).

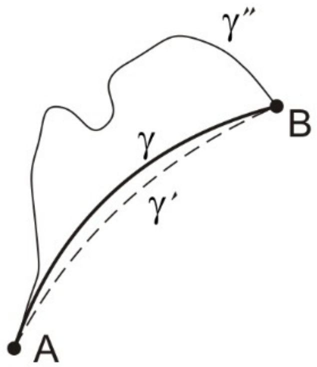


Рис. 14. Траектория и ее вариации

Пусть она описывается вектор-функцией $\mathbf{x} = \mathbf{x}(l)$, где l – натуральный параметр (dl – дифференциал длины дуги). Тогда такой траектории ставится в соответствие функционал Ферма:

$$T(\gamma) = \int \frac{dl}{v[\mathbf{x}(l), \dot{\mathbf{x}}(l)]}, \; \dot{\mathbf{x}}(l) = d\mathbf{x} / dl, \tag{12.1}$$

совпадающий со временем распространения возмущения среды из A в B по данной траектории. Этот функционал определен как в изотропном, так и анизотропном случаях. Величина $v(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ есть лучевая скорость. Строго говоря, функция $v(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ не обязана быть однозначной функцией своего аргумента, что, казалось бы, исключает возможность однозначного определения функционала Ферма. Однако, как выяснено в § 11, значения вектора лучевой скорости $\mathbf{v}$ и вектора рефракции $\mathbf{p}$ связаны взаимно однозначно и взаимно непрерывно благодаря преобразованию Лежандра. Поэтому, если выбирать значения функции $v(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ в соответствии с условием непрерывного изменения вектора **p**, то проблемы с выбором «правильного» значения лучевой скорости не возникает.

При любой другой параметризации луча $\gamma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, где s – произвольный параметр, функционал Ферма записывается так:

$$T(\gamma) = \int_\gamma \frac{|\dot{\mathbf{x}}| \, ds}{v[\mathbf{x}(l), \dot{\mathbf{x}}(s)]}, \; \dot{\mathbf{x}}(s) = d\mathbf{x} / ds. \tag{12.2}$$

Покажем, что формула (12.2) эквивалентна (12.1). Вектор $\dot{\mathbf{x}}(s)$ имеет то же направление, что и вектор $\dot{\mathbf{x}}(l)$, поэтому в одной и той же точке луча $v[\mathbf{x}(l), \dot{\mathbf{x}}(l)] = v[\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s)]$ (напомним, что лучевая скорость является однородной функцией степени ноль по второму аргументу). Осталось показать, что $dl = \sqrt{\sum \dot{x}_i^2} \, ds$ независимо от параметризации траектории. Действительно, обозначим через $\mathbf{t}$ вектор касательной к траектории. Тогда

$$dl = |\mathbf{t}|dl = \sqrt{\sum t_i^2}\,dl = \sqrt{\sum\left(\frac{dx_i}{dl}\right)^2}\,dl = \sqrt{\sum_i\left(\frac{dx_i}{ds}\frac{ds}{dl}\right)^2}\,dl = \sqrt{\sum_i \dot{x}_i^2}\,\frac{ds}{dl}\,dl = \sqrt{\sum \dot{x}_i^2}\,ds\,.$$

Чтобы ввести понятие близости траекторий, нам нужно ввести такую их параметризацию, которая обеспечивала бы возможность такого сравнения. Зафиксируем некоторую траекторию γ^0, где параметр s является натуральным. Пусть L – длина этой траектории. Тогда для любой другой траектории γ', соединяющей точки *A* и *B* и имеющей произвольную параметризацию $\mathbf{x} = \mathbf{x}'(s'),\ \mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}_A,\ \mathbf{x}'(L') = \mathbf{x}_B$, введем новый параметр $s = Ls'/L'$ и положим $\gamma' : \mathbf{x} = \mathbf{x}''(s) \equiv \mathbf{x}'\left(L's/L\right)$. По отношению к траектории γ' параметр s не обязан быть натуральным. Однако при новой (нормализованной) параметризации точки кривых γ и γ' поставлены во взаимно однозначное соответствие, и мы можем определить разности $\mathbf{x}''(s) - \mathbf{x}(s)$ и $\dot{\mathbf{x}}''(s) - \dot{\mathbf{x}}(s)$. Потребовав, чтобы эти разности были малы (например, если максимальные их значения не превосходят некоторого ε), мы формализуем понятие близости траекторий.

Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ – множество близких траекторий, соединяющих точки *A* и *B*. Тогда траектория γ^0 называется *минималью*, если функционал Ферма принимает на ней наименьшее значение по сравнению со всеми траекториями множества Γ.

Если от траектории γ перейти к близкой γ_δ, то и функционал Ферма изменится, т. е. получит приращение $\Delta T(\gamma) = T(\gamma_\delta) - T(\gamma)$. Дальше мы рассуждаем так же, как и в отношении обычных числовых функций. Линейная часть приращения числовой функции $\Delta f(x)$ обозначается $df = f'(x)dx$. При этом стационарная точка функции определяется условием $f'(x) = 0$, или, что равнозначно, $df = 0$. Аналогично вводится линейная часть (первая вариация) приращения функционала $T(\gamma)$ (она обозначается $\delta T(\gamma)$), а стационарная траектория (экстремаль) определяется условием $\delta T(\gamma) = 0$.

Прежде чем построить конструктивную форму этого условия напомним, как определяется стационарная точка функции многих переменных $f(x_1, ..., x_n)$. Для этого рассматриваются «возмущения» (приращения) по каждому одномерному «направлению» x_i и проверяется условие $\partial f / \partial x_i = 0$. Если оно выполнено по каждому направлению x_i, $i = 1, 2, ..., n$, то условие стационарности выполнено в целом: $df \equiv f_{x_i} dx_i = 0$. Задача, стало быть, состоит в том, чтобы такие «направления» построить во множестве всех гладких возмущений проверяемой на стационарность траектории $\gamma^0 : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$.

Пусть на траектории γ^0 параметр s является натуральным, при этом $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_A,\ \mathbf{x}(L) = \mathbf{x}_B,\ \mathbf{x}_A$ и $\mathbf{x}_B$ – радиус-векторы точек *A* и *B*. Покажем, что «направление», о котором шла речь, можно определить так:

$$\mathbf{x}_\alpha(s) = \mathbf{x}(s) + \alpha\mathbf{z}(s)\,, \qquad (12.3)$$

где $\mathbf{z}(s)$ – произвольная гладкая вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$y(0) = y(L) = 0\,, \qquad (12.4)$$

α – произвольное вещественное число. Для каждого фиксированного выбора функции $\mathbf{z}(s)$, функционал Ферма становится числовой функцией $T(\alpha)$.

Ясно, что траектория $\mathbf{x}_\alpha(s)$ принадлежит классу гладких «возмущений» проверяемой траектории $\mathbf{x}_\alpha(s)$. Но если взять произвольную гладкую траекторию из окрестности траектории, то ее можно представить в виде (12.3): достаточно положить $\mathbf{z}(s) = \mathbf{x}''(s) - \mathbf{x}(s)$ и взять $\alpha = 1$, чтобы записать траекторию γ' в форме (12.3).

Таким образом, форма (12.3) описывает всевозможные «направления» возмущения траектории $\mathbf{x}(s)$. Следовательно, если значение $\alpha = 0$ является стационарной точкой функционала $T(\alpha)$ для любой гладкой функции $\mathbf{y}(s)$, удовлетворяющей условиям (12.4), то γ^0 есть стационарная траектория (экстремаль) во всем множестве ее гладких возмущений.

Изотропная среда. В изотропной среде ($\nu(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = V(\mathbf{x})$):

$$T(\alpha) = \int_0^L \frac{\sqrt{\sum (\dot{x}_i + \alpha \dot{z}_i)^2} ds}{V[\mathbf{x}(s) + \alpha \mathbf{z}(s)]}.$$

Вычислим $dT(\alpha)/d\alpha$:

$$\frac{dT}{d\alpha} = \int_0^L \frac{(\dot{x}_i + \alpha \dot{z}_i)\dot{z}_i V - V_{x_i} z_i \sum (\dot{x}_i + \alpha \dot{z}_i)^2}{V^2[\mathbf{x} + \alpha \mathbf{z}_i] \cdot \sqrt{\sum (\dot{x}_i + \alpha \dot{z}_i)}}.$$

При $\alpha = 0$ параметр s является натуральным, так что $|\dot{x}|^2 = 1$ и

$$\left.\frac{dT}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \int_0^L \left(\frac{\dot{x}_i \dot{y}_i}{V} - \frac{v_{x_i}}{V^2} y_i \right) ds.$$

Положим $\mathbf{q} = \mathbf{t}/V$, где $\mathbf{t}$ – единичный вектор касательной к лучу. Тогда

$$\int_0^L q_i \dot{y}_i ds + \int_0^L \left(\frac{1}{V} \right)_{x_i} y_i ds = q_i y_i \Big|_0^L - \int_0^L \left(\dot{q}_i - \left(\frac{1}{V} \right)_{x_i} \right) y_i(s) ds.$$

В силу условий (12.4), первое слагаемое в правой части равно нулю. Величина

$$\delta T = -\int_0^L \left(\dot{q}_i - \left(\frac{1}{V} \right)_{x_i} \right) y_i(s) ds \tag{12.5а}$$

и есть первая вариация функционала Ферма (для изотропной среды). Она является полным аналогом дифференциала $f_{x_i} dx_i$. Роль приращения dx_i играет возмущение y_i, а роль производной f_{x_i} (скалярного линейного оператора) играет линейный функционал с ядром

$$\left(1/V\right)_{x_i} - \dot{q}_i,$$

который чаще всего и называют первой производной функционала $T(\gamma)$. Приравняем $\delta T = 0$. В силу произвольности функции $y_i(s)$, интеграл равен нулю тогда и только тогда, когда $q_i = (1/V)_{x_i}$. Мы получили систему двух векторных уравнений

$$\begin{cases} d\mathbf{x}/ds = \mathbf{t} \equiv \mathbf{q}V, \\ d\mathbf{q}/ds = \nabla\left(1/V\right), \end{cases} \tag{12.5б}$$

являющихся уравнениями Эйлера для функционала Ферма в изотропной среде. Они, как легко видеть, совпадают с уравнениями лучей, определяемыми через бихарактеристики уравнения колебаний, поэтому $\mathbf{q} = \mathbf{p}$. Таким образом, лучи-бихарактеристики и лучи-экстремали функционала Ферма (по крайней мере, в изотропной среде – суть одно и то же).

Может быть, все стационарные траектории являются минималями функционала Ферма (такие лучи будем называть классическими)? В § 13 мы приведем примеры, которые показывают, что это не так. Но может быть стационарная траектория, которая не является классическим лучом, есть лишь математическая фикция, имеющая только тот смысл, что используется в методе характеристик для построения эйконала? Попытаемся показать, что и это не так. Но в то же время различие между классическим лучом и стационарной траекторией (не являющейся минималью) весьма глубоко, и у нас еще будет повод остановиться на этом подробнее.

Анизотропная среда (предварительное рассмотрение). Несложно выписать уравнения Эйлера–Лагранжа и для анизотропной среды:

$$\begin{cases} d\mathbf{x}/ds = v\mathbf{q}, \\ d\mathbf{q}/ds = \nabla_{\mathbf{x}}\left(1/v\right) - d(\nabla_{\dot{\mathbf{x}}}(1/v))/ds. \end{cases} \tag{12.6а}$$

Однако прямое выяснение связи этих уравнений с уравнениями лучей-бихарактеристик (9.6а–б) является технически весьма сложной задачей, непосредственное решение которой не проясняет существа дела. Исключение составляет только эллиптическая анизотропия, на которой мы уже не раз останавливались. Да и практического значения уравнения (12.6а) не имеют, поскольку исходной характеристикой среды является индикатриса фазовой скорости (либо поверхность рефракции), но не лучевая индикатриса. Нас интересует скорее чисто теоретическая проблема: связаны ли в принципе лучи, определяемые как бихарактеристики, с лучами, являющимися стационарными траекториями? Оказывается, что подобные вопросы естественнее рассматривать в рамках общей проблемы связи гамильтонова формализма с формализмом Лагранжа, развитым для того же круга задач (что и гамильтонов формализм) в механике. Изучение этой общей проблемы мы отложим до § 14.

Следует, однако, подчеркнуть, что, несмотря на внешнее сходство, уравнения Эйлера–Лагранжа для анизотропных средств обладают существенно иными свойствами, нежели уравнения Гамильтона (т. е. уравнения бихарактеристик), рассматривавшиеся нами в § 5. Чтобы показать это, преобразуем систему (12.6а), положив $\mathbf{t} = d\mathbf{x}/ds$. Применяя формулу $df(\mathbf{x}(s), \mathbf{t}(s))/ds = f_{x_i} t_i + f_{y_i} \dot{t}_i$, получаем

$$\begin{cases} dx_i/ds = t_i, \\ \left[\dfrac{\delta_{ij}}{v} + \left(\dfrac{1}{v}\right)_{t_j} t_i + \left(\dfrac{1}{v}\right)_{t_i t_j}\right] \dfrac{dt_j}{ds} = \left(\dfrac{1}{v}\right)_{x_i} - \left(\dfrac{1}{v}\right)_{t_i x_j} t_j - \left(\dfrac{1}{v}\right)_{x_j} t_i t_j. \end{cases} \tag{12.6б}$$

Если

$$\det[(\delta_{ij}/v) + t_i(1/v)_{t_j} + (1/v)_{t_i t_j}] \neq 0, \tag{12.7}$$

то система (12.6б) записывается в разрешенном виде относительно производных dy_i/ds и задача Коши для нее имеет единственное решение. В случае изотропии условие (12.7) всегда выполнено. Для анизотропии это уже не так. Важно установить, из-за чего стоящая под знаком определителя матрица **A** может оказаться вырожденной. Матрица **A** есть сумма трех матриц, которые можно обозначить следующим образом: $w\mathbf{E}$, $\mathbf{t}(w_{\mathbf{t}})^T$ и $w_{\mathbf{tt}}$, где $w = 1/v$. Первая из перечисленных матриц положительно определена, вторая неотрицательно определена и имеет одно отличное от нуля собственное значение $\sum w_{t_i}^2 > 0$. Теперь выведем одну формулу обращения:

$$(\mathbf{C} + \mathbf{ab}^T)^{-1} = \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{1+\alpha}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{ab}^T\mathbf{C}^{-1}, \quad \alpha = \mathbf{a}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{b}$$

(матрица $\mathbf{C}$ симметрична). Действительно, умножим правую часть первого равенства на $\mathbf{C} + \mathbf{ab}^T$. Получим следующее выражение:

$$\mathbf{E} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{ab}^T - \frac{1}{1+\alpha}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{ab}^T - \frac{1}{1+\alpha}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{ab}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{ab}^T.$$

В последнем слагаемом выделим множитель $\mathbf{b}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{a} = (\mathbf{a}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{b})^T = \alpha$ (поскольку это число). Теперь легко убедиться в том, что приведенное выражение равно $\mathbf{E}$.

Применим выведенную формулу к нашему случаю:

$$\mathbf{A}^{-1} = (w\mathbf{E} + w_{\mathbf{tt}})^{-1} + \beta(w\mathbf{E} + w_{\mathbf{tt}})^{-1}\mathbf{t}(w_{\mathbf{t}})^T(w\mathbf{E} + w_{\mathbf{tt}})^{-1}, \tag{12.8}$$

где $\beta = 1/(1+\alpha)$, $\alpha = \mathbf{t}^T(w\mathbf{E} + w_{\mathbf{tt}})^{-1}w_{\mathbf{t}}$. Из формулы следует, что матрица $\mathbf{A}$ обратима, если обратима матрица $w\mathbf{E} + w_{\mathbf{tt}}$. Рассмотрим условие обратимости последней матрицы подробнее. Предположим, что данная матрица вычисляется для направления $\mathbf{t}^0$. Выберем в касательном пространстве $T_{\mathbf{x}}R^3$ систему координат (y_1, y_2, y_3) так, что направление оси y_3 совпадает с направлением $\mathbf{t}^0$. В силу того что однородная функция степени 0 от радиальной координаты не зависит, а координата y_3 для направления $\mathbf{t}^0$ является радиальной координатой, величины $w_{t_3}, w_{t_3t_3}, w_{t_3t_j}$ $(j = 1,2)$ равны 0. Выберем оси y_1 и y_2 так, что $w_{t_1t_2} = 0$ (что всегда можно сделать). Тогда собственные значения матрицы $w_{\mathbf{tt}}$ равны $\lambda_j = w_{t_jt_j}$ $(j = 1,2)$. Матрица $\mathbf{A}$ не вырождена, если $\lambda_j \neq -w$ $(j = 1,2)$. Рассмотрим сечение индикатрисы $w(\mathbf{t})\mathbf{t}$ координатной плоскостью (y_1, y_3). Значение (0, 0, 1) определяет вектор $\mathbf{t}^0$. Чтобы вычислить $w_{t_1t_1}$, значение y_3 можно зафиксировать, положив $y_3 = 1$. Тогда значение t_1 можно определить как $\operatorname{tg}\theta$, где θ – угол между осью y_3 и вектором $\mathbf{t} = (t_1, 0, 1)$. Тогда

$$w_{t_1} = w_\theta(d\theta/dt_1), \; w_{t_1t_1} = w_{\theta\theta}(d\theta/dt_1)^2 + w_\theta(d^2\theta/dt_1^2).$$

Из условия $\operatorname{tg}\theta = t_1$ находим $d\theta/dt_1 = \cos^2\theta$, $d^2\theta/dt_1^2 = -\sin 2\theta(d\theta/dt_1)$. При $\mathbf{t} = \mathbf{t}^0$ угол $\theta = 0$, следовательно, $w_{t_1t_1} = w_{\theta\theta}$. Ясно, что матрица $\mathbf{A}$ вырождена, если в каком-то из главных сечений индикатрисы $w(\mathbf{t})\mathbf{t}$ (для заданного направления $\mathbf{t}^0$)

$$w_{\theta\theta} = -w. \tag{12.9}$$

Отрицательное значение второй производной означает, что индикатриса $w(\mathbf{t})\mathbf{t}$ в данном сечении в окрестности направления $\mathbf{t}^0$ выпукла (относительно начала координат). Соответственно индикатриса $v(\mathbf{t})\mathbf{t}$ вогнута. Таким образом, вырождение системы уравнений луча может встретиться только на участках сильной вогнутости волновой поверхности. В случае слабой анизотропии такие ситуации исключены.

Однородная среда. Остановимся чуть подробнее на однородной среде ($v = v(\mathrm{t})$):

$$\begin{cases} dx_i / ds = t_i, \\ \left[(1/v)_{t_i t_j} + t_i (1/v)_{t_j} + (\delta_{ij} / v) \right] \left(dt_j / ds \right) = 0. \end{cases} \tag{12.10}$$

Если условие (12.7) выполнено, то система вырождается в следующую:

$$\begin{cases} dx_i / ds = t_i, \\ dt_i / ds = 0. \end{cases}$$

При начальных данных $\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0\right)$ она имеет единственное решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + s\mathbf{y}^0$. Такое же решение мы имели и при изучении лучей-бихарактеристик. Важно подчеркнуть, что если среда однородна и если начальное условие не отвечает точке нерегулярности лучевой индикатрисы, то данный луч никогда не встречает особенностей на своем пути. Пусть начальное условие $\mathbf{t}^0$ отвечает точке нерегулярности лучевой индикатрисы. Матрица $\mathbf{A}$ оказывается вырожденной. Тривиальное решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + s\mathbf{t}^0$ по-прежнему может рассматриваться как решение уравнения (12.9). Но в этом случае имеется такое направление $\mathbf{t}^1$ (одно, если матрица $\mathbf{A}$ имеет два отличных от нуля собственных значения, и бесконечное множество таких векторов, если отличное от нуля собственное значение только одно), что $\mathbf{At}^1 = 0$. В этом случае мы обязаны рассматривать множество траекторий

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + s\mathbf{t}^0 + (c/2)s^2\mathbf{t}^1, \quad c \in (0, \infty),$$

как формально возможные решения. Но имеют ли они физический смысл, можно решить только на основе динамического анализа этой задачи.

§ 13. Принцип композиции

Читатель, который стремится найти кратчайший путь к овладению техникой решения сложных задач геометрической теории распространения волн, чувствует себя не очень удовлетворенным. Если гамильтонов формализм дает исчерпывающее описание геометрии волн, то зачем еще изучать следствия из принципа Ферма? Нельзя ли изучить что-нибудь одно и кратчайшим путем двигаться к решению сложных задач. Безусловно, сопоставление различных подходов и ознакомление с ними, изучение всех «границ» геометрической теории являются одной из задач данного курса, и эта задача может не отвечать запросам воображаемого прагматика. Но правдой является и то, что разные задачи для наиболее простого решения нуждаются в различных подходах и методах. К числу эффективных технических приемов, который находит свое место и в преимущественно гамильтоновом подходе, относится и принцип композиции, о котором пойдет речь в этом параграфе.

Некоторые следствия из принципа Ферма. Рассмотрим ряд простых, но очень важных свойств, вытекающих из полученных выше результатов. Приведем эти свойства даже в том случае, когда они уже известны как следствия, полученные в рамках гамильтонова формализма, чтобы подчеркнуть сходство и различие между двумя подходами.

Если среда однородна, то лучом между любыми точками A и B является прямая, соединяющая эти точки. Раньше этот факт следовал из уравнений для бихарактеристик, теперь он доказывается так: из функционала Ферма следует, что время на произвольной траектории в однородной среде пропорционально ее (траектории) длине. Прямая есть траектория, обладающая наименьшей длиной.

Локальность: всякая часть луча есть также луч. Пусть M и N – точки на луче из A в B. Отыщем экстремаль функционала Ферма для луча из M в N. Далее поступим таким образом: разобьем интеграл в (12.5а) на три части (от A до M, от M до N и от N до B). Простые рассуждения показывают, что, в силу произвольности возмущения траектории, каждая часть обязана обратиться в нуль. А это значит, что все отрезки AM, MN и NB луча AB являются экстремалями соответствующих функционалов Ферма.

Рассмотрим важное для дальнейшего следствие, которое естественным путем вытекает именно из принципа Ферма.

Принцип композиции. Пусть γ есть экстремаль функционала Ферма в классе траекторий, соединяющих точки A и B. Мы будем говорить просто: γ есть луч AB. Возьмем произвольную точку C на γ. Тогда вследствие локальности отрезки луча γ, соединяющие точки A и C, а также C и B, являются лучами AC и CB. Теперь предположим, что между точками A и B имеется поверхность Σ, на которой введены криволинейные координаты (ξ_1, ξ_2). Наша задача состоит в том, чтобы найти точку $C(\xi_1, \xi_2) \in \Sigma$, через которую проходит луч AB. В силу свойства локальности, мы можем ограничить себя таким классом траекторий, которые являются лучами (экстремалями функционала Ферма), на участках от A до Σ и от Σ до B. Такие траектории будем называть композиционными (или просто – композициями). Тогда каждой композиции можно поставить во взаимнооднозначное соответствие координаты (ξ_1, ξ_2) точки ее пересечения с Σ (рис. 15). На классе композиций функционал Ферма зависит только от координат (ξ_1, ξ_2): $T = T(\xi_1, \xi_2)$. Принцип композиции состоит в том, что луч из A в B определяется условием

$$\partial T(\xi_1, \xi_2) / \partial \xi_i = 0,\ i = 1, 2\,. \tag{13.1}$$

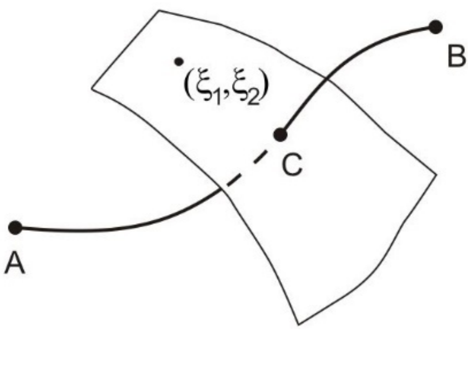


Рис. 15. Принцип композиции

Поскольку $T(\xi_1, \xi_2) = T_1(\xi_1, \xi_2) + T_2(\xi_1, \xi_2)$, где $T_1 = T_{AC}$ и $T_2 = T_{CB}$, то можно написать и так:

$$\partial T_1(\xi_1, \xi_2) / \partial \xi_i + \partial T_2(\xi_1, \xi_2) / \partial \xi_i = 0\,. \tag{13.2}$$

Принцип композиции весьма конструктивен при решении как теоретических и практических задач. У нас еще будет возможность доказать эффективность этого принципа на ряде примеров. А сейчас мы используем его, чтобы связать закон Снеллиуса с принципом Ферма.

Закон Снеллиуса. Закон Снеллиуса мы вывели из условия непрерывности эйконала и это, безусловно, наиболее естественное его обоснование. Гамильтонов формализм к этому закону никакого отношения не имеет, поскольку канонические уравнения определяются для непрерывной среды. Но функционал Ферма определен и на кусочно-непрерывных (на всех измеримых) функциях. Поэтому естественно поставить вопрос о том, как он соотносится с законом Снеллиуса. Поскольку функционал Ферма есть непрерывная функция от положения точки *A* (или *B)*, мы вправе ожидать, что закон Снеллиуса будет удовлетворен автоматически. Тем не менее факт следует проверить. Это будет сделано только для изотропной среды.

Сначала рассмотрим ситуацию, когда плоская граница разделяет два однородных изотропных полупространства. Плоская граница двух однородных сред совмещена с плоскостью x, y, и ось x проходит через проекции точек *A* и *B* на плоскость x, y. (Это нисколько не ограничивает общности.) Точка *A* имеет координаты (0, 0, -*h*), точка *B* – (*a* ,0, *b*). Искомые координаты пересечения луча с границей – $(x,\ y)$. Тогда

$$T(x,y) = \left(1/V_1\right)\sqrt{x^2+y^2+h^2} + \left(1/V_2\right)\sqrt{(a-x)^2+y^2+b^2}\ .$$

Мы можем сразу положить $y = 0$ (значение функционала только уменьшится). Таким образом, падающий и преломленный луч лежат в одной плоскости. Остается приравнять производную по x нулю:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{x}{V_1\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{1}{V_2}\frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = 0\,.$$

Поскольку $x/\sqrt{x^2+h^2} = \sin\alpha_1$ и $x/\sqrt{(a-x)^2+b^2} = \sin\alpha_2$ (α_1 и α_2 – углы падения и преломления соответственно), то мы получаем закон Снеллиуса в виде

$$\sin\alpha_1 / \sin\alpha_2 = V_1 / V_2\,.$$

Он получен для очень простой модели среды. Но если и контактирующие среды и разделяющая их граница – гладкие функции, то, сближая точки A и B как угодно близко, мы попадем в ситуацию, когда отличие кусочно-гладкой модели от только что рассмотренной становится пренебрежимо малым. А именно отрезки, соединяющие точки *A* и *B* с границей, становятся дифференциалами (dx_A, dy_A, dz_A) и (dx_B, dy_B, dz_B), а они зависят только от значения скоростей. Однако если у читателя возникает представление о том, что принцип Ферма в этом вопросе более фундаментален, нежели условие непрерывности эйконала, то пусть он попробует вывести закон Снеллиуса для контакта анизотропных сред, основываясь именно на принципе Ферма.

Условные экстремали Ферма на композициях в средах с границами. Пусть в среде имеется одна поверхность разрыва скорости Σ (рис. 16). Тогда во множестве всех траекторий, соединяющих точки *A* и *B,* имеются траектории, находящиеся в различных отношениях с границей Σ. При отыскании экстремалей Ферма (лучей) все множество траекторий удобно разделить на такие классы, в пределах которого отношения между γ и Σ однотипны. На рис. 16 изображены представители таких классов: I – нет общих точек с Σ; II – одна общая точка с Σ; III – общий участок с Σ; IV – проходит через выделенную точку; V – проникает во вторую среду. На самом деле, эти классы еще следует разделить на подклассы, поскольку при каждом контакте луча с границей тип волны (ее поляризация) может измениться, и тогда меняется скорость, с которой волна распространяется дальше. Поэтому каждая среда должна наделяться двумя значениями скорости – V_P и V_S. Чтобы во всем этом было легче разобраться, введем такой способ кодировки волн. Если волна имеет общий отрезок со средой с номером *k*, распространяясь как волна типа Q ($Q = P$ или S), то этот участок луча отмечается как (LQk). Если волна имеет общую точку с границей Σ, то этот факт отмечается кодом (*MΣ*). Если луч имеет общий отрезок с Σ, распространяясь со скоростью волны типа Q в среде с номером *k*, то этот факт обозначим $L\Sigma Qk$. Таким образом, траектории типа I запишутся как $(LQ1)$, траектории типа II – как $(LQk)(M\Sigma)(LQj)$, траектории типа III – как $(LQk)(M\Sigma)(L\Sigma Ql)(M\Sigma)(LQj)$, траектория типа IV – как $(LQk)(M^*)(LQk)$ и, наконец, траектория последнего типа – как $(LQk)(M\Sigma)(LQl)(M\Sigma)(LQk)$. Каждое выражение, заключенное в круглые скобки, будем называть *словом*.

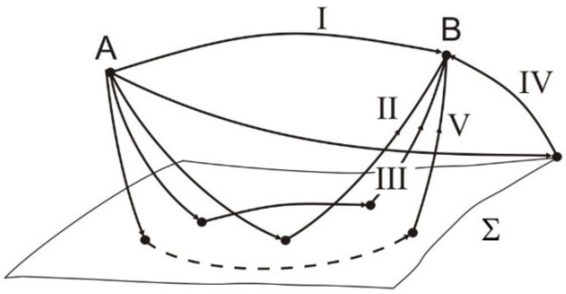


Рис. 16. Различные соотношения между траекториями из точки A в B и поверхностью Σ

Этот же принцип можно применить и для кодирования волн в средах со многими границами. Читатель вправе спросить, а существуют ли все перечисленные волны? Окончательный ответ на такой вопрос дает только динамический анализ (теория на уровне динамической эквивалентности). Задача чисто геометрической части теории – выяснить все потенциально возможные волны.

Применяя принцип композиции, перечисленные выше траектории можно представить как композиции, охарактеризовав каждую траекторию (композицию) конечным числом параметров. Например, если отыскание экстремалей на участках AC и CB для траекторий класса II при произвольном положении точки C на Σ не представляет труда, то траектории этого класса параметризуются (криволинейными) координатами точки C на Σ. Экстремаль Ферма, отыскиваемую в фиксированном классе траекторий (композиций), будем называть условной. (В этом смысле и можно говорить об условном принципе Ферма.)

Здесь мы ограничимся изучением композиций типа III. А именно рассмотрим композиции

$$C_{1j} = (LQ1)(M\Sigma)(L\Sigma Qj)(M'\Sigma)(LQ1),$$

$$C_{2j} = (LQ1)(M\Sigma)(L\Sigma Qj)(M'\Sigma)(LQ2)$$

при $j = 1, 2$. Граница – плоская и совпадает с плоскостью x, y, координатная плоскость x, y содержит прямую *AB*, контактирующие среды однородны. Скорости волн $Q1$ и $Q2$ обозначаются V_1 и V_2 соответственно. Ось x параллельна отрезку, соединяющему точки

A и B. Координаты точек A и B равны соответственно $(0,0,h_1)$ ($h_1>0$) и $(a,0,h_2)$. При $h_2>0$ имеем траекторию типа C_{1j}, а при $h_2<0$ – композицию типа C_{2j}. Координаты концевых точек отрезка луча на границе M и M' суть $(x,y,0)$ и $(x',y',0)$. Так как скорости постоянны, то все отрезки AM, MM' и $M'B$ луча суть прямые и для любой композиции C_{kj}:

$$T_{kj}(\gamma)\equiv T_{kj}(x,y;x',y')=\left(1/V_1\right)\sqrt{x^2+y^2+h_1^2}+\left(1/V_j\right)\sqrt{(x'-x)^2+(y-y')^2}+$$
$$+\left(1/V_k\right)\sqrt{(a-x')^2+y'^2+h_2^2}.$$

Значение $T(\gamma)$ только уменьшится, если устремить $y',y\to 0$. Стало быть, луч лежит в плоскости x,y. Приходим к задаче минимизации функции

$$T(x,x')=\left(1/V_1\right)\sqrt{x^2+h_1^2}+\left(1/V_j\right)(x'-x)+\left(1/V_k\right)\sqrt{(a-x')^2+h_2^2}.$$

Имеем

$$\frac{\partial T_{kj}}{\partial x}=\frac{1}{V_1}\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}-\frac{1}{V_j}=0 \qquad \text{или} \qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{V_1}{V_j}. \tag{13.3}$$

Аналогично из $\partial T_{kj}/\partial x'=0$ получим

$$\frac{(a-x')}{\sqrt{(a-x')^2+h^2}}=-\frac{V_k}{V_j}. \tag{13.4}$$

Пусть $j=1$. Тогда $V_1/V_j=1$. Глядя на правое из уравнений (13.3), заключаем, что оно может быть выполнено только при $x\to\infty$. Если и $k=1$, то из уравнения (13.4) следует, что $x'\to-\infty$. Грубо говоря, отрезок MM' обязан сжаться до нуля! Композиция C_{11} не существует, вырождаясь в композицию $(LQ1)(M\Sigma)(LQ1)$, которая определяет отраженную волну. Обратимся к композиции C_{12}. Теперь в уравнении (13.3) справа стоит отношение V_1/V_2. Уравнение имеет решение только в том случае, когда $V_2>V_1$. Если это так, то одновременно имеет решение и уравнение (13.4). Следовательно, при $V_2>V_1$ композиция

$$C_{12}=(LQ1)(M\Sigma)(L\Sigma Q2)(M'\Sigma)(LQ1)$$

существует и определяет (как уже догадался читатель) траекторию головной волны. Из уравнений (13.3) и (13.4) заключаем, что

$$x=h\,\mathrm{tg}\arcsin(V_1/V_2) \text{ и } x'=a-h\,\mathrm{tg}\arcsin(V_1/V_2).$$

Угол $i=\arcsin(V_1/V_2)$ называется критическим. Он совпадает с углом, который составляют отрезки AM и BM с осью z.

Рассмотрим композицию C_{22}. Хотя уравнение (13.3) имеет решение и, таким образом, положение точки x определено, уравнение (13.4) решения при конечных x' не имеет. Следовательно, данная композиция не реализуется как физическая траектория. Иначе говоря, головной волны, излучающейся во вторую среду, не существует. Но существует ли какой-то другой луч из A в B? Рассмотрим композицию преломленной волны $(LQ1)(M\Sigma)(LQ2)$. Согласно принципу композиции, ее траектория определится из условия

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{V_1}\sqrt{x^2+h_1^2}+\frac{1}{V_2}\sqrt{(a-x)^2+h_2^2}\right)=0$$

или

$$x/\left(V_1\sqrt{x^2+h_1^2}\right)=(a-x)/V_2\sqrt{(a-x)^2+h_2^2}\ .$$

Легко установить, что слева стоит монотонно возрастающая на интервале $(0, a)$ положительная функция, а справа – монотонно убывающая на этом же интервале и тоже положительная функция. Поскольку минимальные значения у каждой из функций равны нулю, то их графики обязательно пересекаются (и только один раз). Таким образом, преломленная волна $(LQ1)\,(M\boldsymbol{\Sigma})(LQ2)$ существует независимо от отношения скоростей.

Единственная ситуация, которой мы не охватили, – это композиции

$$C'_{12}=(LQ1)(M\boldsymbol{\Sigma})(L\boldsymbol{\Sigma}Q2)(M'\boldsymbol{\Sigma})(LQ'2)\,,$$

$$C'_{22}=(LQ1)(M\boldsymbol{\Sigma})(L\boldsymbol{\Sigma}Q2)(M'\boldsymbol{\Sigma})(LQ'2)$$

при $Q'k\neq Qk$. Если эти композиции существуют, то они могут относиться к траекториям обменных головных волн PPS , PSS , PSP и PSS , SPS , SPP , SSP . Обозначим скорость волны $Q'k$ как V' . Теперь уравнения, аналогичные (13.3)–(13.4), запишутся так:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{V_1}{V_2},\qquad \frac{(a-x')}{\sqrt{(a-x')^2+h^2}}=-\frac{V'}{V_2}. \tag{13.5}$$

Волны C'_{12} и C'_{22} существуют, если $V'<V_2$. Поскольку в случае C'_{22} обе скорости V' и V_2 характеризуют одну и ту же среду, то данное неравенство возможно только для волн PPS и SPS. Именно в этом случае могут существовать головные волны, излучающие во вторую среду.

Принцип взаимности для композиций. Ранее нами был сформулирован принцип взаимности для траекторий в непрерывной среде. Однако для композиций его следует уточнить. Пусть некоторая композиция определяется кодом $\vec{C}=C_1C_2\ldots C_n$, состоящим из *n слов.* Предполагается, что слово C_1 описывает сегмент луча, выходящий из источника, а слово C_n – сегмент луча, примыкающий к приемнику. Что происходит с кодом, когда приемник и источник меняются местами? Траектория заведомо сохраняется, если перейти к коду $\bar{C}=C_nC_{n-1}\ldots C_1$. Рис. 17 поясняют, в чем здесь дело. Следовательно, принцип взаимности должен иметь форму

$$t_{\vec{C}}(\mathbf{x}^0,\mathbf{x}^1)=t_{\bar{C}}(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^0)\,. \tag{13.6}$$

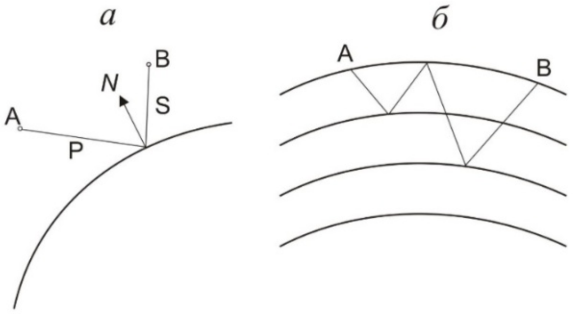


Рис. 17. Принцип взаимности для волн с несимметричным кодом

Если композиция имеет симметричный код $\vec{C} = \overleftarrow{C}$, то принцип взаимности можно записать в привычной форме.

Примеры неклассических траекторий. Рассмотрим множества траекторий (композиций), приходящих из A в B. Только одна из этих композиций может удовлетворять принципу Ферма в формулировке самого Ферма. При этом может оказаться, что Ферма-траектория для разных точек B может менять тип композиции. Пусть для примера источник находится на оси x, горизонтальная преломляющая граница находится на глубине H, V – скорость между плоскостями $z = 0$ и $z = H$, V_g – граничная скорость. Источник A находится в начале координат. Рассмотрим точки приема, расположенные на оси x. До некоторого значения x_0 в точки $(0 \le x \le x_0)$ приходит только прямая волна и отраженная волна. Ясно, что время отраженной волны больше, т. е. именно прямая волна распространяется по классическому лучу. Ее время прихода $t = x/V$. Однако, если $V_g > V$, то при достаточно больших x время головной волны $t = 2H\,\mathrm{tg}\,i + x/V_g$ окажется меньше, а именно при x, удовлетворяющих условию $2H\,\mathrm{tg}\,i + x/V_g = x/V$, т. е

$$x^* = \frac{2H}{V_g - V} V \cdot V_g\,\mathrm{tg}\,i\,.$$

Стало быть, до $x < x^*$ луч прямой волны является Ферма-лучом, а при $x > x^*$ таковым становится луч головной волны.

Однако и та и другая траектории представляют траектории классического типа, являясь минималями функционала Ферма. Все примеры предыдущего раздела представляли именно классические траектории. В этом разделе мы дадим два примера, когда траектория (в классе композиций) представляет стационарную точку типа седло или даже – максималь.

1. *Отражение.* На рис. 18 приведен пример условной экстремали, не являющейся минималью в классе композиций.

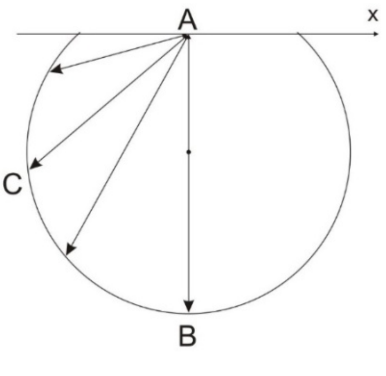


Рис. 18. Пример стационарной траектории-максимали в классе композиций

Модель среды представляет полупространство, состоящее из двух однородных сред, разделенных участком сферы Σ, центр которой расположен ниже поверхности полупространства (т. е. свободной границы). Рассмотрим траектории, которые начинаются и заканчиваются в точке A при условии $\gamma \bigcap \Sigma \ne \varnothing$, $\left\{\gamma \bigcap \Sigma\right\} = 1$, т. е. траектории вида $\gamma(ACA)$, где C – произвольная точка на границе Σ. Поскольку участки AC и CA лежат в однородной среде, то в соответствии со следствиями из принципа

Ферма (начало данного параграфа) они обязаны быть прямыми и, очевидно, совпадать друг с другом. Следовательно, $T(ACA) = (2/V_0)|\mathbf{AC}|$. В силу осевой симметрии задачи, достаточно рассмотреть лучи в плоскости (x, z). Тогда, поместив точку A в начало координат и записав уравнение окружности Σ в виде

$$x = r\sin\alpha, \quad z = h + r_0\cos\alpha,$$

получим

$$T(ACA) \equiv F(\alpha) = (2/V_0)\sqrt{r^2\sin^2\alpha + (h + r\cos\alpha)^2} = (2/V_0)\sqrt{r^2 + h^2 + 2hr\cos\alpha}.$$

Отсюда

$$\frac{dT(\alpha)}{d\alpha} = \frac{2}{V_0}\frac{2hr\sin\alpha}{\sqrt{r^2 + h^2 + 2hr\cos\alpha}}.$$

Из условия $dT(\alpha) = 0$ находим два экстремальных значения $\alpha = 0$ и $\pm\pi$. Второе в данной среде не реализуется, а первое отвечает лучу ABA. Легко видеть, что значение $\alpha = 0$ доставляет функции $T(\alpha)$ максимальное значение

$$(2/V_0)(r+h)^2 \geq (2/V_0)\sqrt{r^2 + h^2 + 2hr\cos\alpha}.$$

2. Преломление. Рассмотрим еще один пример составного луча, не являющегося минималью. С этой целью рассмотрим преломление луча на параболической границе двух однородных сред (рис. 19). Пусть граница описывается уравнением $y = 1 + ax^2$, точка A находится в начале координат, точка B имеет координаты $x = 0,\ y = 2 - \eta$. Если точка A является источником, то эйконал, имеющий в данном случае сферические фронты, в точке с координатами $(0, 1)$ касается границы. Стало быть, направление $\operatorname{grad}\tau$ совпадает с нормалью к границе в этой же точке. Проекция $\operatorname{grad}\tau$ на касательную плоскость (линию) к границе по обе стороны от нее равна нулю (в соответствии с условием непрерывности эйконала), поэтому вектор **n** по обе стороны от границы направлен вдоль оси *y*. Следовательно, луч-бихарактеристика из точки *A* в точку *B* совпадает с отрезком прямой $(0, 2)$ на оси *y*. Покажем, что при определенных условиях на коэффициент *a* и отношение скоростей $\kappa = V_1/V_2$, эта траектория является максималью в классе композиций.

Рис. 19. Второй пример максимали

Если композиционная траектория пересекает границу в точке $(x, 1 + x^2)$, то $T(x) = T_1(x) + T_2(x)$, где

$$T_1(x) = (1/V_1)\sqrt{x^2 + (1 + ax^2)^2},\ T_2(x) = (1/V_2)\sqrt{x^2 + (2 - ax^2)^2}.$$

В силу четности $T(x)$, стационарное значение переменной $x = 0$. Максимум это или минимум? Необходимо определить знак d^2T/dx^2 при $x = 0$. Покажем, что вместо d^2T/dx^2 мы можем использовать d^2T^2/dx^2 (что значительно проще). Действительно, $d^2T_i^2/dx^2 = 2T_i'^2 + T_iT_i''$, а так как в точке $x = 0 \quad T_i' = 0$, то

$$d^2T/dx^2 = T_1''/T_1 + T_2''/T_2. \tag{13.7}$$

Опуская рутинные вычисления, получаем, что при $x = 0$

$$T'' = (2/V_1)[(1+2a) + \kappa(1-2a)].$$

Эта величина отрицательна (т. е. луч является максималью в классе композиций), если $a > 1$ и $\kappa > (1+2a)/(2a-1)$. Разумеется, максималью в классе всех близких траекторий он быть не обязан (мы не принимали во внимание лучей, не имеющих прямолинейных участков).

§ 14. Связь вариационного исчисления и гамильтонова формализма

Как было сказано ранее, установить эквивалентность Ферма-лучей и лучей-бихарактеристик для анизотропных сред путем прямых подстановок формул, связывающих фазовые и лучевые скорости, технически сложно. Гораздо проще обратиться к неким общим теоремам, в которых подобные связи являются предметом исследования. Это тем более целесообразно, что заодно мы познакомимся с понятиями, играющими важную роль в современной науке.

Уже говорилось о том, что гамильтонов формализм развивался в связи с потребностями механики. И мы его применяли ввиду глубокого сходства уравнений луча с уравнениями, описывающими движение частиц в силовом поле. Принцип Ферма тоже имеет свой аналог в задачах механики. Речь идет о решении задач механики методами вариационного исчисления. Естественно, что вопрос об эквивалентности двух подходов возник давно, хотя это и не означает, что он решен уже до конца.

Лагранжиан и функция действия. Принцип Ферма – это частный случай вариационной задачи

$$S[\gamma] = \int_\gamma L[x(t), \dot{x}(t), t]\,dt. \tag{14.1}$$

Первая вариация функционала (14.1) (относительно произвольного возмущения $\mathbf{z}(s)$) траектории $\gamma : x(t)$ есть

$$\delta S = \int \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} \right) z^i\,dt, \tag{14.2}$$

а уравнения Эйлера–Лагранжа записываются так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \tag{14.3}$$

(вывод мало отличается от проделанного для функционала Ферма). В механике величину $S[\gamma]$ принято называть *действием*, а подынтегральную функцию – *лагранжианом*. В задаче движения частицы в поле сил, обладающих потенциалом $L = (m/2)\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - U(x)$ (разность кинематической и потенциальной энергий),

$$S[\gamma]=\int_\gamma\left(\sum_i\left(m/2\right)(\dot{x}^i)^2-U(x)\right)dt. \qquad (14.4)$$

Экстремали интеграла действия и есть траектории частицы. В этой задаче вектор $\mathbf{p}=\nabla_{\dot{\mathbf{x}}}L$ с компонентами

$$p_i=\partial L/\partial\dot{x}^i \qquad (14.5)$$

есть импульс частицы. Для функционала (14.4) уравнение Эйлера–Лагранжа совпадает с классическим уравнением $m\ddot{x}^i=f_i$ при $f_i=\partial U/\partial x^i$.

В задаче распространения волн импульс эквивалентен вектору рефракции. Например, если среда изотропна, то

$$p_i=\frac{\partial}{\partial\dot{x}^i}\left(\frac{|\dot{\mathbf{x}}|}{V}\right)=\frac{\dot{x}^i}{V}\frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}|}=\frac{\dot{x}^i}{V}$$

(предполагается, что t – натуральный параметр: $|\dot{\mathbf{x}}|=1$, а также учитывается, что в изотропном случае $n_i=\dot{x}^i$). В задачах механики вводится также «энергия» согласно формуле

$$E=\dot{x}^i(\partial L/\partial\dot{x}^i)-L. \qquad (14.6)$$

Если лагранжиан не зависит явно от t: $L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}},t)\equiv L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})$, – то полная производная энергии вдоль экстремали равна нулю. Действительно,

$$\frac{dE}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^i\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}-L\right)=\ddot{x}^i\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}+\dot{x}^i\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}-\frac{\partial L}{\partial x^i}\dot{x}^i-\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}\ddot{x}^i=\dot{x}^i\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^i}-\frac{\partial L}{\partial x^i}\right)\equiv 0.$$

Таким образом, на экстремали $E=\mathrm{const}$. Если лагранжиан $L(x,\dot{x})$ – однородная функция от $\xi=\dot{x}$ первой степени то, применяя в (14.6) формулу Эйлера для однородных функций, получим, что на экстремали

$$\dot{x}^i(\partial L/\partial\dot{x}^i)-L=0, \qquad (14.7)$$

а параметр может быть взят любым.

Назовем параметр t в формуле (14.1) каноническим (натуральным относительно действия S), если на экстремали $S=\int dt$. Для канонического параметра $\dot{\mathbf{x}}=d\mathbf{x}/dt=\mathbf{v}$.

Лемма. Если параметр t является натуральным относительно S_0 (см. ниже), то в терминах этого параметра уравнения для экстремалей, отвечающих действиям

$$S_0=\int L_0dt \text{ и } S=\int\left(L_0^2/2)\right)dt,$$

совпадают. Импульсы, определенные для лагранжианов L_0 и $L=L_0^2/2$, совпадают, сохраняется и натуральность (каноничность) параметра t.

Доказательство. Пусть γ есть экстремаль для *S*. Тогда на γ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(L_0^2/2)}{\partial\dot{x}^i}-\frac{\partial(L_0^2/2)}{\partial x^i}=0.$$

Используя натуральность параметра t (относительно действия S_0), получаем

$$\frac{\partial(L_0^2/2)}{\partial\dot{x}^i}=L_0\frac{\partial L_0}{\partial\dot{x}^i}=\frac{\partial L_0}{\partial\dot{x}^i}\ (x\in\gamma)$$

и

$$\frac{\partial(L_0^2/2)}{\partial x^i}=L_0\frac{\partial L_0}{\partial x^i}=\frac{\partial L_0}{\partial x^i}\ \ (x\in\gamma)\,.$$

Отсюда следует, что уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}-\frac{\partial L_0}{\partial x^i}=0$$

выполнено, что и следовало показать. Заодно выясняется, что определение импульса не изменяется.

Основная теорема. Пусть $L(x,\dot{x})$ – сильно невырожденный лагранжиан

$$\det\left(\partial^2 L/\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^k\right)\neq 0\,, \tag{14.8}$$

а система уравнений $p_i=\partial L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})/\partial\dot{x}^i$ (относительно $\dot{\mathbf{x}}$) имеет решение, гладко зависящее от **p**, тогда лагранжиану $L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})$ соответствует гамильтониан H(**x**,**p**), совпадающий с «энергией» E, выраженной через **x** и **p**, а уравнения Эйлера–Лагранжа эквивалентны уравнениям Гамильтона

$$\dot{p}_i=-\partial H/\partial x^i,\quad \dot{x}^i=\partial H/\partial p_i\,, \tag{14.9}$$

в которых x^i и p_i – независимые переменные.

Доказательство. При доказательстве мы считаем, что параметр t является натуральным относительно действия. В этом случае $L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})=L(\mathbf{x},\mathbf{v})$, где $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{x}}$. По определению, $E=\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}-L(\mathbf{x},\mathbf{v})$. Так как по условию теоремы может быть определена функци $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{x},\mathbf{p})$, то энергию E можно выразить как функцию только двух переменных: $E=H\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right)$. Матрица под знаком детерминанта совпадает с матрицей $\partial p_i/\partial v_k$. Поэтому условие (14.8) означает существование обратной матрицы $\partial v^i/\partial p_k$. С учетом этого выполним дифференцирование функции $H\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right)$ по p_i:

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=\frac{\partial}{\partial p_i}(p_j v^j-L)=v^i+p_i\frac{\partial v^j}{\partial p_i}-\frac{\partial L}{\partial v^j}\frac{\partial v^j}{\partial p_i}=v^i\equiv\dot{x}^i\,,$$

так как $p_i=\partial L/\partial v^i$. Теперь выполним дифференцирование по x_i:

$$-\frac{\partial H}{\partial x^i}=-\frac{\partial}{\partial x^i}(p_j v^j-L)=-p_j\frac{\partial v^j}{\partial x^j}+\frac{\partial L}{\partial x^i}+\frac{\partial L}{\partial v^j}\frac{\partial v^j}{\partial x^i}=\frac{\partial L}{\partial x^i}$$

(мы снова учли, что $p_i=\partial L/\partial v^i$). Но, согласно уравнениям Эйлера–Лагранжа (14.3),

$$\partial L/\partial x^i=d\left(\partial L/\partial\dot{x}\right)/dt=\dot{p}\,,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Условия эквивалентности принципа Ферма и гамильтонова формализма. В какой мере доказанная теорема применима к распространению волн в анизотропных средах? Обратимся к функционалу Ферма (12.2) с произвольным параметром s. Соответствующий лагранжиан

$$L_0=\left|\dot{\mathbf{x}}\right|/v(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})$$

является однородной функцией степени 1, а $(L_0)_{\dot{x}^i}$ – однородной функцией степени 0. Применяя теорему Эйлера для однородных функций, убедимся в том, что $(L_0)_{\dot{x}^i\dot{x}^j}\dot{x}^i\dot{x}^j=\{[(L_0)_{\dot{x}^i}]_{\dot{x}^j}\dot{x}^j\}\dot{x}^i=0$. Следовательно, этот лагранжиан заведомо не удовлетворяет условию (14.7). Воспользуемся тем, что в соответствии с леммой мы можем перейти к функционалу

$$T'(\gamma)=\frac{1}{2}\int_{\gamma}|\dot{\mathbf{x}}|^2\,dt\,/\,v^2(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})\,. \tag{14.10}$$

Соответствующий лагранжиан $L=L_0{}^2/2$ является однородной функцией степени 2, а в этом случае (как легко проверить) матрица $L_{\dot{x}^i\dot{x}^j}$ не обладает свойством «фатальной» (т. е. обусловленной только свойствами однородных функций) вырожденности. Более подробно свойство (14.8) применительно к функционалу (14.10) записывается так:

$$\det\Big(\big(\delta_{ij}/v\big)+2(y^i w_{y^j}+y^j w_{y^i})+v(w_{y^j}w_{y^i})+w_{y^i y^j}\Big)\neq 0\,, \tag{14.11}$$

где $w=1/v$, $y^i=dx^i/dt$. В линейной алгебре есть критерий: если положительно определенную матрицу сложить с неотрицательно определенной, то сумма положительно определена. Поскольку все матрицы вида $\mathbf{ab}^T$ неотрицательно определены и поскольку $w_{y^i}=(1/v)w_{t^i}$, $w_{y^i y^j}=(1/v^2)w_{t^i}$ и $|\mathbf{y}|^2=v^2$, то из положительной определенности матрицы **A**, стоящей под знаком определителя в (12.7), следует положительная определенность матрицы, стоящей под знаком определителя в (14.11).

Теперь, чтобы обеспечить применимость теоремы к неоднородным анизотропным средам, осталось найти условия разрешимости уравнений $p_i=\partial L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})/\partial\dot{x}^i$ относительно вектора $\dot{\mathbf{x}}$. Мы будем предполагать, что условие (12.7) выполнено и, следовательно, задача Коши для уравнений Эйлера–Лагранжа (12.6а) имеет единственное решение. Покажем, что точки поверхности (индикатрисы) $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ $(\mathbf{n}=\mathbf{p}/|\mathbf{p}|)$ и лучевой индикатрисы $\mathbf{v}(\dot{\mathbf{x}})$ связаны преобразованием Лежандра. Заметим, что согласно уравнениям $p_i=\partial L(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})/\partial\dot{x}^i$, каждому вектору $\dot{\mathbf{x}}$ (и соответствующей точке лучевой индикатрисы) ставится в однозначное соответствие вектор **p**. Покажем, что вектор **p** ортогонален лучевой индикатрисе. Мы уже показывали этот факт для вектора рефракции, который обозначался тем же самым символом $\mathbf{p}(\mathbf{n})$. Но сейчас нам еще нужно убедиться в том, что это – тот же самый вектор! Мы воспользуемся тем же методом, что использовался и раньше, а именно возможностью построить лучевую индикатрису как фронт в фиктивной однородной среде в момент времени, равный единице. Напомним, что фиктивная однородная среда определяется лучевой скоростью $\mathbf{v}(\dot{\mathbf{x}})=\mathbf{v}(\mathbf{x}^0,\dot{\mathbf{x}})$ для выбранной точки $\mathbf{x}^{\mathbf{0}}$ исходного пространства. Как показано выше, стационарные траектории в однородной среде суть прямые (такое решение есть даже при невыполнении условия (12.7)). Если поместить источник (точку A) в начало координат фиктивной среды, а сами координаты обозначить $\bar{\mathbf{x}}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)$, то функционал Ферма на стационарных траекториях принимает значение

$$T=|\bar{\mathbf{x}}|/\mathbf{v}(\dot{\mathbf{x}})\,.$$

При этом вектор $\dot{\mathbf{x}}=\bar{\mathbf{x}}/T$. В силу того что лучевая скорость является однородной функцией степени 0, $\mathbf{v}(\dot{\mathbf{x}})=\mathbf{v}(\bar{\mathbf{x}})$. Следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial\bar{x}^i}=\left(\frac{|\bar{\mathbf{x}}|}{v(\bar{\mathbf{x}})}\right)_{\bar{x}^i}=\left(\frac{|\bar{\mathbf{x}}/T|}{v(\bar{\mathbf{x}}/T)}\right)_{\bar{x}^i/T}=\left(\frac{|\dot{\mathbf{x}}|}{v(\dot{\mathbf{x}})}\right)_{\dot{x}^i}=\left(\frac{|\dot{\mathbf{x}}|}{v(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})}\right)_{\dot{x}^i}=\frac{\partial L_0}{\partial x^i}=p_i\,.$$

Поскольку слева стоят компоненты вектора $\operatorname{grad} T$, который ортогонален изоповерхностям $T(\mathbf{x}) = \text{const}$, а изоповерхность $T(\mathbf{x}) = 1$ в фиктивной среде совпадает с лучевой индикатрисой, то мы убеждаемся, что вектор **p** действительно ортогонален лучевой индикатрисе. Теперь обратимся к равенству (14.7). В силу того что при использовании натурального (относительно «действия» T) параметра t на экстремали $L = 1$, поэтому $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 1$. Итак, функции $\mathbf{p}(\mathbf{n})$ и $\mathbf{v}(\dot{\mathbf{x}})$ однородны степени 0, удовлетворяют фундаментальному равенству $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 1$, вектор **p** (определяемый согласно уравнениям $p_i = \partial L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) / \partial \dot{x}^i$) ортогонален лучевой индикатрисе. Согласно доказательству, которое было проведено в § 10 второй главы, поверхность, определяемая векторной функцией **p(n)**, является преобразованием Лежандра лучевой индикатрисы и, следовательно, совпадает с поверхностью рефракции. Теперь взаимно однозначность и взаимно непрерывность соответствия между векторами **p** и $\dot{\mathbf{x}}$ следует из соответствующих свойств преобразования Лежандра. Все условия теоремы 1 выполнены и эквивалентность принципа Ферма гамильтонову формализму (при выполнении ряда условий) доказана.

§ 15. Вторая вариация функционала Ферма

При анализе стационарных точек важную роль играют вторые производные анализируемых функций, позволяющие различать точки локальных максимумов и локальных минимумов. Аналогичную роль в вариационном исчислении играют вторые вариации анализируемых функционалов. Именно по ним можно судить, является ли данная траектория минималью. При выводе условия стационарности произвольной траектории мы ориентировались на аналогию с задачей поиска минимума функции многих переменных. Так же поступим и сейчас.

Оператор Якоби. Пусть $\mathbf{x}^0$ является стационарной точкой функции n переменных $f(x_1, ..., x_n)$. Тогда условием того, что она есть точка локального минимума, является положительная определенность матрицы вторых производных $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$. Как мы уже знаем, аналогом «направления» x_i в случае функционалов является возмущение траектории вида (12.3). Взяв произвольный (пока) лагранжиан *L*, вычислим вторую производную соответствующего «возмущенного» функционала действия

$$T(\alpha, \beta) = \int_0^r L[\mathbf{x}(s) + \alpha \mathbf{z}(s) + \beta \mathbf{h}(s);\ \dot{\mathbf{x}}(s) + \alpha \dot{\mathbf{z}}(s) + \beta \dot{\mathbf{h}}(s)]\, ds$$

для двух произвольных возмущений – **z**(s) и **h**(s). Мы можем использовать готовое выражение первой вариации (см. (14.2)). Введя в нее возмущение $\beta\mathbf{h}(s)$ и продифференцировав по β, получим

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right|_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}} = \int_a^b \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} h^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} \dot{h}^j - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} h^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right) \right) z^i ds. \quad (15.1)$$

Полученная величина второй вариации (которую мы будем обозначать $G_\gamma(\mathbf{h}, \mathbf{z})$) является билинейной формой (т. е. линейной по обоим аргументам), заданной на возмущениях $\mathbf{z}(s)$ и $\mathbf{h}(s)$. Введем оператор Якоби $\mathbf{J}$, действующий на вектор-функцию $\mathbf{h}(s)$, заданную на кривой γ (такая функция является векторным полем на γ):

$$(\mathbf{J}_L\mathbf{h})_i = \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} h^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} \dot{h}^j - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} h^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right). \tag{15.2}$$

Результат действия оператора Якоби снова является векторным полем на γ. Поэтому вторую вариацию можно записать так:

$$G_\gamma(\mathbf{z},\mathbf{h}) = \int_a^b < \mathbf{J}_L\mathbf{h}(s), \mathbf{z}(s) > ds. \tag{15.3}$$

Условие минимальности траектории состоит в том, что величина $G_\gamma(\mathbf{h},\mathbf{h})$ для лагранжиана $|\dot{x}|/v$ положительна на любом векторном поле $\mathbf{h}(s)$, обращающемся в нуль на концах кривой γ. В однородной среде все производные по x^i равны нулю, поэтому

$$(\mathbf{J}_L\mathbf{h})_i = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right). \tag{15.4}$$

Отметим, что операторы Якоби для лагранжианов $L = |\dot{x}|^2 / 2v^2$ и $L_0 = |\dot{\mathbf{x}}|/v$ отличаются, поэтому экстремаль, являющаяся минималью для одного лагранжиана, для другого минималью может и не быть.

Найдем связь между $\mathbf{J}_{L_0}\mathbf{h} \equiv \mathbf{Jh}$ и $\mathbf{J}_L\mathbf{h}$, перейдя к каноническому параметру t, натуральному относительно «действия» T. Вследствие выбора параметра t

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_0^2}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial L_0}{\partial x^i}\frac{\partial L_0}{\partial x^j} + L_0 \frac{\partial^2 L_0}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial L_0}{\partial x^i}\frac{\partial L_0}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 L_0}{\partial x^i \partial x^j}.$$

(Аналогичные формулы имеют место для производных, содержащих дифференцирование по $\dot{x}^i$.) Применяя эти формулы к правой части (15.2) и используя по ходу уравнение Эйлера–Лагранжа, получаем

$$(\mathbf{J}_L\mathbf{h})_i = (\mathbf{Jh})_i + \frac{\partial L_0}{\partial x^i}\frac{\partial L_0}{\partial x^j} h^j + \frac{\partial L_0}{\partial x^i}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j} \dot{h}^j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial L_0}{\partial x^j} h^j + \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right) =$$

$$= (\mathbf{Jh})_i + \left(\frac{\partial L_0}{\partial x^j} h^j + \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right)\frac{\partial L_0}{\partial x^i} - \left(\frac{\partial L_0}{\partial x^j} h^j + \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right)\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial x^j} h^j + \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right) =$$

$$= (\mathbf{Jh})_i - \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial x^j} h^j + \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right),$$

откуда

$$(\mathbf{Jh})_i = (\mathbf{J}_L\mathbf{h})_i + \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial x^j} h^j + \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right). \tag{15.5}$$

Вторая вариация функционала Ферма в однородной анизотропной среде. Не требует доказательства тот факт, что прямая в изотропной однородной среде является минималью. Однако в анизотропной среде это может быть и не так. Чтобы увидеть, с чем это может быть связано, определим, основываясь на формуле (15.5), вторую вариацию функционала Ферма для однородной анизотропной среды.

Все производные по x^i в формуле (15.2) равны нулю, следовательно,

$$(\mathbf{J}_L\mathbf{h})_i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right);\ (\mathbf{Jh})_i = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right) + \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right), \tag{15.6}$$

учитывая обращение в нуль функции $\mathbf{h}(t)$ на концах траектории γ, получаем

$$-\int_0^a h^i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\dot{h}^j\right)dt = \int_0^a \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\dot{h}^i\dot{h}^j dt,$$

$$\int_0^a h^i \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j}\dot{h}^j\right)dt = -\int_0^a \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j}\dot{h}^j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}h^i\right)dt = -\int_0^a \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j}\dot{h}^j\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}\right)h^i + \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}\dot{h}^i\right]dt =$$

$$= -\int_0^a \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}\dot{h}^j\dot{h}^i dt,$$

следовательно,

$$G_\gamma(\mathbf{h},\mathbf{h}) = \int_0^a \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\dot{h}^i\dot{h}^j dt - \int_0^a \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}^j}\dot{h}^i\dot{h}^j dt. \tag{15.7}$$

Из определения лагранжианов L и L_0 (см. § 14, где, напоминаем, $w = 1/v$, $y' = dx'/dt$), находим (полагая $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{x}}$):

$$\partial^2 L/\partial y^i \partial y^j = w^2\delta_{ij} + w^{-2}w_{y_i}w_{y_j} + 2w(y^i w_{y^j} + y^j w_{y^i}) + w^{-1}w_{y^i y^j}; \tag{15.8}$$

$$\left(\partial L_0/\partial \dot{x}^i\right)\left(\partial L_0/\partial \dot{x}^j\right) = w^4 y_i y_j + w(w_{y_i}y_j + w_{y_j}y_i) + w^{-2}w_{y_i}w_{y_j}. \tag{15.9}$$

Окончательно

$$G_\gamma(\mathbf{h},\mathbf{h}) = \int_0^a w^2\left[\delta_{ij} + w^{-3}w_{y^i y^j} + w^{-1}\left(y^i w_{y^j} + y^j w_{y^i}\right) - w^2 y_i y_j\right]\dot{h}_i\dot{h}_j dt. \tag{15.10}$$

Направим ось y_3 вдоль выбранного луча, имеющего направление $\mathbf{y}^0$, а оси y_1 и y_2 выберем так, что подматрица $\left\|w_{y_\alpha y_\beta}\right\|$ ($\alpha,\beta = 1,2$) диагональна (что всегда можно сделать поворотом вокруг оси y_3). В этой системе координат в формуле (15.10) $\mathbf{h}(t) = h_1(t)\mathbf{e}_1 + h_2(t)\mathbf{e}_2$ и, кроме того, $y_1 = y_2 = 0$, $w_{y_1 y_2} = 0$. Еще учтем, что значение скорости (и величины ей обратной) на луче постоянны. В результате получим

$$G_\gamma(\mathbf{h},\mathbf{h}) = \int_0^a w^2\left(\delta_{\alpha\beta} + w^{-3}w_{y_\alpha y_\beta}\right)\dot{h}_\alpha\dot{h}_\beta dt = w^2\left[\left(1 + w^{-3}w_{y_1 y_1}\right)\int_0^a \dot{h}_1^2 dt + w^2\left(1 + w^{-3}w_{y_2 y_2}\right)\int_0^a \dot{h}_2^2 dt\right]. \tag{15.11}$$

В рассматриваемой ситуации необходимое и достаточное условие того, что луч – минималь, есть

$$w_{y_1 y_1} > -w^3; \quad w_{y_2 y_2} > -w^3. \tag{15.12}$$

Траектория имеет тип седловой точки, если $\operatorname{sgn}(w^3 - w_{y_1 y_1})\operatorname{sgn}(w^3 - w_{y_2 y_2}) < 0$. В этом случае знак второй вариации не определен, так как зависит от соотношения норм функций $h_1(t)$ и $h_2(t)$. Если воспользоваться аналогией со стационарными функциями многих переменных, то в «направлении» $\mathbf{e}_1$ мы имеем экстремум одного типа, а в направлении $\mathbf{e}_2$ – экстремум другого типа.

И наконец, луч является максималью, если

$$w_{y_1 y_1} < -w^3; \quad w_{y_2 y_2} < -w^3.$$

В эллипсоидальной анизотропии последние две ситуации невозможны, так как $w_{y_\alpha y_\alpha} > 0$. В трансверсально-изотропной среде все индикатрисы являются поверхностями вращения. А это означает, что все линии $\theta = \text{const}$ выпуклы, вследствие чего появление максималей также невозможно.

Покажем, что любое из неравенств (15.12) нарушается, как только в соответствующем сечении волновая поверхность вогнута (относительно центра). Что означает вогнутость? Если провести в рассматриваемом сечении прямую, касающуюся волновой поверхности, то в случае вогнутости волновая поверхность в окрестности точки касания расположится вне области, отсекаемой касательной (рис. 20). Если ввести полярные координаты (r, θ) в плоскости (t_1, t_3), то условие вогнутости можно записать как неравенство $v_{\theta\theta} > \rho_{\theta\theta}$ (в точке касания), где $r = v(\theta)$ есть уравнение волновой поверхности (в данном сечении), $r = \rho(\theta)$ – уравнение прямой.

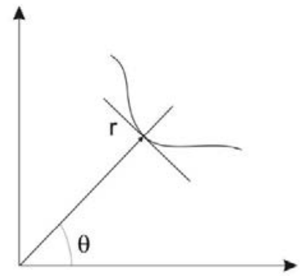


Рис. 20. К выводу условия вогнутости

Вычислим значения $r_{\theta\theta}$ и $\rho_{\theta\theta}$. Сначала перейдем от производных величины w по y_i к производным v по $t_i = y_i / v$. Имеем $w_{y_i} = -w^2 v_{y_i}$, $w_{y_i y_k} = 2w^3 v_{y_i} v_{y_k} - w^2 v_{y_i y_k}$. Переход к производным по переменным t_i основывается на формулах

$$v_{t_i} = v v_{y_i}; \quad v_{t_i t_k} = v^2 v_{y_i y_k}. \tag{15.13}$$

При выводе этих формул используются следующие свойства однородных функций степени 0:

$$v_{y_s} t_s = v^{-1} v_{y_s} y_s = 0, \quad v_{y_i y_s} t_s = v^{-1} v_{y_i y_s} y_s = -v^{-1} v_{y_i}.$$

В частности, первая из формул (15.13) получается так:

$$v_{t_i} = v_{y_s} \frac{\partial y_s}{\partial t_i} = v_{y_s} \frac{\partial (v t_s)}{\partial t_i} = v_{y_s} \left(\frac{\partial t_s}{\partial t_i} v + v_{t_i} t_s \right) = v v_{y_s} \delta_{is} + v_{t_i} v_{y_s} t_s = v v_{y_i}.$$

С учетом полученных формул неравенства (15.12) запишутся так:

$$v_{t_\alpha t_\alpha} < v(1 + 2 v_{t_\alpha}^2 / v^2); \quad \alpha = 1, 2.$$

Покажем, что каждое из этих неравенств эквивалентно неравенству $v_{\theta\theta} < \rho_{\theta\theta}$ (для полярной системы координат в соответствующем плоском сечении). Уравнение прямой в полярной системе координат записывается так: $r = \rho(\theta) \equiv a / \cos(\theta - \theta_0)$. Поскольку v есть однородная функция степени ноль, то она зависит только от угловых координат. В рассматриваемом сечении $v = v(\theta)$. Предположим, что начало отсчета переменной θ выбрано так, что направление $\theta = 0$ совпадает с направлением рассматриваемого луча. Тогда условие касания прямой и индикатрисы определится условиями

$$a / \cos\theta_0 = v(0), \quad a \sin\theta_0 / \cos^2\theta_0 = v_\theta(0),$$

откуда $\operatorname{tg}\theta_0 = v_\theta(0) / v(0)$. Дифференцируя $\rho(\theta)$, получаем

$$\rho_{\theta\theta} = v(0)(1 + 2\operatorname{tg}^2\theta_0) = v(0)\{1 + 2[v_\theta(0) / v(0)]^2\}.$$

Правая часть совпадает с правой частью выписанного выше неравенства. Пусть $\alpha = 1$. При $t_2 = \text{const}$ и $t_3 = v(0)$ величина $t_1 = v(0)\,\text{tg}\,\theta$, откуда

$$dt_1 / d\theta = v(0) / \cos^2\theta,\ \ d^2 t_1 / d\theta^2 = v(0)\sin\theta / \cos^3\theta\,,$$

тогда легко выводится, что в точке $\theta = 0$ $v_{t_1 t_1} = v_{\theta\theta}$. Итак, неравенства (15.12) эквивалентны следующим:

$$v_{\theta\theta} < v \cdot (1 + 2v_\theta^2 / v^2) = \rho_{\theta\theta}\,,$$

определяя тем самым условие выпуклости индикатрисы. Наличие вогнутости означает, что луч перестает быть минималью. В силу замкнутости лучевой индикатрисы, она может иметь вогнутый характер только в ограниченных секторах направлений.

Что же происходит, когда вместо неравенств в (15.12) мы имеем одно или два равенства? Это означает, что рассматриваемый луч является пограничным между множеством лучей, в которых имеется один тип стационарной траектории, и множеством с другим типом траектории. По крайней мере, в одном из этих множеств лучи не являются минималями. Множество пограничных лучей в типичном случае одномерно.

Вырожденность второй вариации. В условие минимальности входит невырожденность билинейной формы $G_\gamma(\mathbf{h}, \mathbf{z})$. Последняя невырождена, если для любого векторного поля $\mathbf{z}(t)$, обращающегося в нуль на концах луча γ, $G_\gamma(\mathbf{h}, \mathbf{z}) \neq 0$. Для вырожденности достаточно наличия хотя бы одного такого поля, которое обращает вторую вариацию в нуль.

Введем понятие пары сопряженных точек. Точки A и B сопряжены, если найдется такое векторное поле $\mathbf{h}(t)$, определенное на луче из A в B, которое удовлетворяет *системе уравнений Якоби*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} h^j(s) + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} \dot{h}^j(s) - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} h^j(s) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \dot{h}^j(s) \right) = 0,\ i = 1, 2, 3 \qquad (15.14)$$

с нулевыми данными на концах: $h(0) = h(a) = 0$. (Такое векторное поле называется якобиевым.) Если точки A и B сопряжены, то на луче AB вторая вариация заведомо вырождена, так как обращается в нуль на любом векторном поле $\mathbf{z}(t)$. Имеет место следующее необходимое и достаточное условие: *вторая вариация функционала Ферма на луче AB вырождена тогда и только тогда, когда на этом луче найдется пара сопряженных точек P и Q.*

Покажем достаточность. Если P и Q совпадают с концевыми точками A и B, то вырожденность очевидна. Если P и Q – внутренние точки луча, то мы можем выбрать векторное поле $\mathbf{z}(t)$ так: на интервалах AP и QB мы полагаем его равным нулю, а на интервале PQ – отличным от нуля. Легко видеть, что это обеспечивает обращение в нуль величины $G_\gamma(\mathbf{h}, \mathbf{z})$. Необходимость доказывается так: если $\mathbf{Jh}(t)$ не обращается в нуль ни на каком невырожденном интервале луча, то всегда найдется такая функция $\mathbf{z}(t)$, что функционал (15.3) в нуль не обращается (достаточно положить $\mathbf{z}(t) = \mathbf{Jh}(t)$).

Если на некотором луче γ вторая вариация билинейной формы обращается в нуль, то тонкий пучок лучей, в котором луч γ является центральным, оказывается нерегулярным. В частности, это означает обращение в нуль площади поперечного сечения данного пучка в точке, сопряженной с источником.

Короткие лучи в неоднородной изотропной среде. Если среда обладает гладкой неоднородностью, то в малом она слабо отличается от однородной среды, а луч – от прямой линии. Поэтому из интуитивных соображений ясно, что достаточно короткие экстремали в неоднородной изотропной среде являются минималями. В этом разделе данный факт будет обоснован строго. А именно мы покажем, что всегда существует такое расстояние от источника (вдоль луча), до которого луч остается минималью.

Из формулы (15.5) следует, что в изотропной среде оператор Якоби для функционала Ферма совпадает с оператором Якоби для лагранжиана $L = L_0^2/2$. Применяя формулу (15.2), а затем (15.1), получаем при $L = w^2|\dot{\mathbf{x}}|^2$:

$$G_\gamma(\mathbf{h},\mathbf{h}) = \int_0^t w^2v^2dt + \int_0^t \left[(w^2)_{x^i} h^i\right]\left(\dot{x}^j\dot{h}^j\right)dt + \int_0^t \left[(w^2)_{x^j} h^j\right]\left(\dot{x}^i\dot{h}^i\right)dt + \int_0^t \left\{(w^2)_{x^ix^j} h^ih^j\right\}dt \qquad (15.15)$$

(пусть читатель не удивляется, что вместо w^2v^2 не написана единица). Если поле скоростей обладает необходимой гладкостью, то величины в квадратных скобках имеют порядок $|\mathbf{h}|$, а величина в фигурных скобках – порядок $|\mathbf{h}|^2$. В круглых скобках в обоих случаях стоит величина $\dot{\mathbf{x}}\cdot\dot{\mathbf{h}} < v\max|\dot{\mathbf{h}}|$ (поскольку $|\dot{\mathbf{x}}| = v$). В силу условия $\mathbf{h}(0)=0$, $h_i(t) = \beta_i t + \gamma_i t^2 + \ldots$, поэтому $|\mathbf{h}| \sim t$, $|\mathbf{h}|^2 \sim t^2$, $\max|\dot{\mathbf{h}}| \sim \max|\beta_i|$. Следовательно, первый интеграл в формуле (15.15) равен $t > 0$, второй и третий интегралы суть малые порядка t^2, а последний интеграл – малая порядка t^3. Поэтому при достаточно малых t знак интеграла совпадает со знаком первого слагаемого, т. е. положителен, что и требовалось доказать.

В гл. 4, воспользовавшись методами римановой геометрии, покажем, что «минимальность» достаточно коротких траекторий справедлива и для эллиптической анизотропии.

ГЛАВА 4. ЛУЧИ КАК ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Риманова геометрия оказывается эффективной, когда неизбежно использование криволинейных координат. Хотя язык римановой геометрии применяется не так уж редко, но чаще всего это имеет лишь метафорическое значение. По настоящему, техника римановой геометрии используется далеко в неполном объеме. В какой-то мере это связано с тем, что при изучении изотропной среды большинство результатов можно получить и без использования методов римановой геометрии (по крайней мере, в явной форме). В русскоязычной сейсмической литературе есть только одна небольшая книжка рано ушедшего из жизни талантливого украинского геофизика А. Н. Герасименко, полностью основанная на технике римановой геометрии [4]. Но значение римановой геометрии состоит, скорее, в интерпретации гамильтонова формализма с общегеометрических позиций. Она, например, позволяет понять иерархию сред по сложности лучевой картины. Если одна среда может быть преобразована в другую неким преобразованием координат, то их сложность одинакова. Например, нет принципиальной разницы между однородными изотропными и однородными эллипсоидально-анизотропными средами. Но другие виды анизотропии не могут быть сведены к изотропии никакими преобразованиями координат. Неоднородное эллипсоидально-анизотропное пространство, в сущности являющееся предметом римановой геометрии, никаким преобразованием координат (за возможным исключением каких-то специально подобранных ситуаций) не может быть преобразовано в изотропную (в том числе и в неоднородную) среду. Более того, даже локально (в малой окрестности любой точки) оно отличается от изотропной среды. Вместе с тем неоднородное изотропное пространство локально не отличается от изотропного однородного пространства, с чем и связано название этой части римановой геометрии – конформно-евклидова геометрия. В окрестности любой точки этого пространства можно ввести (локально) такую замену координат, что среда становится однородной, но углы между лучами инвариантны относительно такой замены.

Несмотря на то что эллипсоидально-анизотропная неоднородная среда принципиально отличается от изотропных сред, введение адекватной римановой метрики позволяет трактовать лучи как прямые линии в однородном изотропном пространстве. Если проводить измерения только средствами римановой метрики, их кривизну обнаружить невозможно (на этом мы еще раз остановимся при рассмотрении геометрии лучей).

Возможность трактовать геометрию лучей в анизотропных средах с позиции более общих метрических пространств рассматривается в § 20.

§ 16. Элементы римановой геометрии

Напомним, что метрическое пространство – это пространство, наделенное метрикой (расстоянием) между точками этого пространства, т. е. такой неотрицательной функцией $\rho(A,B)$, которая симметрична (то есть инвариантна относительно перестановки A и B), обращается в нуль только при $A=B$ и удовлетворяет неравенству треугольника $\rho(A,B)\le\rho(A,C)+\rho(C,B)$ (для любой точки C). В задачах, связанных с распространением волн, метрику удобно определить так, чтобы значение $\rho(A, B)$ совпало со временем распространения волны из точки A в точку B (такую метрику называют хронометрией).

Аффинные пространства легко метризуются при помощи какой-либо нормы (длины) вектора **x**, являющегося разностью радиус-векторов $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$. Например, метрика может быть определена при помощи положительно-определенной симметричной матрицы (метрического тензора) g_{ij}. В этом случае $|\mathbf{x}| = (g_{ij}x^i x^j)^{1/2}$. Порождаемую этой формулой метрику называют евклидовой (см. § 2). Однако аффинное пространство одинаково устроено во всех своих частях. Поэтому обладающее хронометрией неоднородное физическое пространство не может быть аффинным. Неоднородное пространство естественно считать многообразием более общего вида. Но теперь мы сталкиваемся с той проблемой, что различные точки многообразия, вообще говоря, не обладают радиус-векторами, вследствие чего метрику нельзя построить при помощи длины вектора.

Решение этой проблемы осуществляется следующим образом. Вводится длина вектора в каждом касательном пространстве $T_A M$, т. е. для векторов вида $d\mathbf{x}$. Тогда для любого пути γ : $x^i = x^i(s)$ (где $x^i(s_0)$ суть координаты точки A) длина $|d\mathbf{x}| = |\dot{x}^i ds|$ трактуется как расстояние между близкими точками $x^i(s_0)$ и $x^i(s_0 + ds)$ на пути γ. Это позволяет метризовать пространство, состоящее из точек произвольного пути γ. Метризуется ли при этом все многообразие M как целое? В этом состоит одна из главных проблем любой такой геометрии. Мы ее коснемся на примере римановой геометрии, которая определяется наделением касательных пространств евклидовой метрикой.

Наделение каждого касательного пространства $T_A M$ метрическим тензором $g_{ij}(A)$ выглядит некоторым произволом по отношению к потенциально мыслимым средам, описываемым уравнениями эластодинамики. Поэтому следующий вопрос, на который желательно ответить, состоит вот в чем: насколько широк класс сред, который адекватно описывается римановой геометрией? Данный подкласс не пуст – это легко устанавливается благодаря тому, что он включает произвольные изотропные, неоднородные среды. Этот класс не охватывает всех сред, как следует из показанной в § 15 возможности совпадения луча с максималью. В этом случае неравенство треугольника не выполняется даже для бесконечно близких точек, что невозможно в случае евклидовой метрики. Естественно предположить, что в этом случае адекватной является псевдоевклидова метрика (она определялась в § 2) и соответственно псевдориманова геометрия. Однако это предположение требует проверки.

В дальнейшем будем использовать обозначение **x** просто как набор координат точки A. Если используются аффинные координаты, то **x** есть радиус-вектор данной точки (именно в этом случае определены такие выражения как $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$), в случае криволинейных координат это обозначение никакого «векторного» смысла не несет.

Риманова геометрия. В римановой геометрии расстояние между близкими точками определяется при помощи квадратичной формы

$$\rho^2\left(\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s + ds)\right) = g_{ij}(\mathbf{x})dx^i dx^j, \tag{16.1}$$

где $g_{ij}(\mathbf{x})$ – положительно-определенный тензор валентности (0, 2). Последнее означает следующее: 1) в любой координатной системе матрица чисел $g_{ij}(\mathbf{x})$ положительно определена (здесь точка $\mathbf{x}$ фиксирована); 2) при преобразованиях системы координат комплект чисел $g_{ij}(\mathbf{x})$ преобразуется как ковариантный тензор валентности 2:

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij} . \qquad (16.2)$$

Введенный тензор называется метрическим. Метрический тензор обладает замечательным свойством опускания индекса. А именно каждому контравариантному вектору $\mathbf{a}$ метрический тензор ставит в соответствие ковариантный вектор $\overline{\mathbf{a}}$ с компонентами $\overline{a}_j = g_{ij} a^i$. Обратный к тензору g_{ij} тензор g^{ij} ($g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$), напротив, может поднимать индекс $b^i = g^{ij} \overline{b}_j$. В римановой геометрии считается, что и вектор $\mathbf{a}$, и вектор $\overline{\mathbf{a}}$ суть один и тот же объект, но выраженный в ковариантных или контравариантных координатах. Поэтому «черта», использовавшаяся для различения этих векторов, в дальнейшем опускается.

Таким образом, расстояние выражается через длину вектора $d\mathbf{x}$ – элемента касательного пространства $T_{\mathbf{x}}M$, наделенного евклидовой метрикой:

$$|d\mathbf{x}| = \sqrt{g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}\, ds . \qquad (16.3)$$

Теперь можно ввести длину произвольной кривой η как интеграл

$$\int_{\eta} \sqrt{g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^i(s) \dot{x}^j(s)}\, ds . \qquad (16.4)$$

Скалярное произведение двух векторов в $T_{\mathbf{x}}M$, согласованное с введенной метрикой G, обозначается $< \mathbf{a}, \mathbf{b} >_G = g_{ij} a^i b^j$ либо $< \mathbf{a}, \mathbf{b} > = g_{ij} a^i b^j$, если имеется только одна метрика. Помимо этого, возникает понятие угла $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = < \mathbf{a}, \mathbf{b} > / \sqrt{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$ и связанные с ним понятия параллельности и ортогональности векторов. В частности, векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $< \mathbf{a}, \mathbf{b} > = 0$.

Скалярное произведение инвариантно относительно преобразования координат и может быть выполнено контравариантным, ковариантным и смешанным образом:

$$g_{ij} a^i b^j = g_{i'j'} a^{i'} b^{j'} = g^{ij} \overline{a}_i \overline{b}_j = a^i \overline{b}_j . \qquad (16.5)$$

Во всех наших рассмотрениях риманова метрика определяется при помощи координат физического евклидового пространства E^3 , в котором определены «свои» скалярное произведение, «длина» и ортогональность. Это пространство по отношению к римановой геометрии, определяемой в многообразии M , считается объемлющим. Полезно рассмотреть связи между метрическими свойствами в объемлющем пространстве и в многообразии M. Считается, что в объемлющем пространстве метрический тензор совпадает с δ_{ij} . Согласно формуле (16.2), метрика объемлющего пространства в криволинейных координатах многообразия M выражается метрически тензором

$$g_{i'k'} = \left(\partial x^i / \partial x^{i'} \right) \left(\partial x^i / \partial x^{k'} \right). \qquad (16.6)$$

Метрический тензор объемлющего пространства в дальнейшем обозначается символом $\mathbf{G}_0$. Если обозначить символом $\mathbf{C}$ матрицу с компонентами $\partial x^i / \partial x^{i'}$ (i – номер строки, i' – номер столбца), то в координатах многообразия M, $\mathbf{G}_0 = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$. Репер объемлющего пространства $\mathbf{e}_s$ ($s = 1, 2, 3$; $e^i_s = \delta_{is}$) ортогонален в метрике $\mathbf{G}_0$ в любых координатах. Но локальный репер, отвечающий криволинейным координатам $x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3)$ в многообразии *M*, уже не обязан быть ортогональным в той же метрике. Напомним, что локальный (ковариантный) репер, определяемый в точке A многообразия, – это комплект векторов, касательных к координатным линиям системы координат $x^{i'}$. Как показано в § 2, этот вектор определяется формулой

$$\tilde{\mathbf{e}}_{i'} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \mathbf{e}_i . \tag{16.7}$$

Теперь любой вектор $\mathbf{y}$ может быть записан в виде разложения как по базису $\mathbf{e}_i$, так и по базису $\tilde{\mathbf{e}}_{i'}$: $\mathbf{y} = y^i \mathbf{e}_i = y^{i'} \tilde{\mathbf{e}}_{i'}$. Важно подчеркнуть, что построенный репер зависит только от введенной системы координат, но никак не связан с наличием римановой метрики в M и, как сказано выше, он не обязан быть ортогональным в метрике $\mathbf{G}_0$. Собственно, это прямо следует из формулы (16.6), выведенной для метрического тензора объемлющего пространства (в старых координатах) $g^0_{ik} = \delta_{ik}$. Действительно, согласно этой формуле, $\left\langle \tilde{\mathbf{e}}_{i'}, \tilde{\mathbf{e}}_{k'} \right\rangle_{G_0} \equiv \tilde{\mathbf{e}}_{i'} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{k'} = g_{i'k'}$. Покажем, что в любом римановом пространстве с метрическим тензором g_{ik} и репером $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ имеем

$$\left\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \right\rangle_G = g_{ik} . \tag{16.8}$$

Действительно, для любых двух векторов $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = b^i \mathbf{e}_i$ имеем $\left\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \right\rangle_G = g_{ik} a^i b^k$, а с другой стороны $\left\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \right\rangle_G = \left\langle a^i \mathbf{e}_i, b^k \mathbf{e}_k \right\rangle_G = a^i b^k \left\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k \right\rangle_G$. Правые части обоих равенств совпадают только в том случае, когда выполнено (16.8).

Построим комплект контравариантных векторов $\overline{\mathbf{e}}_r$ $(r = 1, 2, 3)$, скалярные произведения которых (записанные в координатах объемлющего пространства), удовлетворяют условию

$$\overline{\mathbf{e}}_s \cdot \overline{\mathbf{e}}_r = g_{sr} \quad (s, r = 1, 2, 3), \tag{16.8а}$$

где g_{sr} – метрический тензор римановой геометрии на *M*. В силу инвариантности скалярного произведения, выполнено и $\left\langle \overline{\mathbf{e}}_s, \overline{\mathbf{e}}_r \right\rangle_{G_0} = g_{sr}$ (в координатах на M). Дуальным (к локальному базису $\overline{\mathbf{e}}_r$) называется комплект контравариантных векторов $\overline{\mathbf{e}}^s = g^{sr} \overline{\mathbf{e}}_r$. Легко проверить, что

$$\overline{\mathbf{e}}^i \cdot \overline{\mathbf{e}}_k = g^{ij} \overline{\mathbf{e}}_j \cdot \overline{\mathbf{e}}_k = g^{ij} g_{jk} = \delta_{ik} . \tag{16.8б}$$

Таким образом, векторы дуальных базисов попарно ортогональны друг другу. Подстановкой в приведенную формулу легко устанавливается, что если векторы $\overline{\mathbf{e}}_{k'}$ связаны с векторами $\mathbf{e}_k$ объемлющего пространства формулой (16.7), то дуальные им (контравариантные) базисы связаны формулой

$$\overline{\mathbf{e}}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \mathbf{e}^i . \tag{16.8в}$$

Риманова хронометрия. Риманова хронометрия определена для изотропных, неоднородных сред, а также для неоднородных сред с эллипсоидальной анизотропией. В изотропном случае $g_{ik}(\mathbf{x}) = \delta_{ik} / V^2(\mathbf{x})$ и, согласно формуле (16.3),

$$dt = \left(|\dot{\mathbf{x}}| / V(\mathbf{x})\right) ds .$$

Если бы скорость не зависела от точки $\mathbf{x}$, то введенная метрика совпала бы с метрикой евклидова пространства. В противном случае введенную метрику называют конформно евклидовой.

Предположим, что оси координат эллипсоидально-анизотропной среды выбраны параллельно осям анизотропии (в заданной точке $\mathbf{x}$). Тогда, согласно формуле (10.6), в которой надо положить $t_k = \dot{x}^k$, будем иметь $dt^2 = ds^2 / v^2 \equiv ds^2 \sum \left(\dot{x}^k\right)^2 / \alpha_k$, $\alpha_k > 0$. При переходе к новой системе координат данная форма преобразуется по правилу, которое совпадает с формулой (16.2), поэтому мы снова имеем дело с метрикой риманова типа при $g_{ik}(\mathbf{x}) = \delta_{ik} / \alpha_k$ Если в неоднородной среде оси симметрии меняются от точки к точке, то такая форма метрического тензора теряет смысл, так как производить в каждой точке среды «свое» преобразование координат в целях его диагонализации невозможно. Пусть g_{ik} – элементы матрицы, диагональная форма которой есть $\mathrm{diag}\left[1/\alpha_1, 1/\alpha_2, 1/\alpha_3\right]$, то для среды с эллипсоидальной симметрией

$$(dt)^2 = g_{ij}(\mathbf{x}) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} (ds)^2 .$$

Полученное соотношение вместе с формулой (16.2) и правилами преобразования контравариантного вектора означает, что эллипсоидальная анизотропия инвариантна относительно системы координат:

$$(dt)^2 = g_{i'j'}(\mathbf{x}) \frac{dx^{i'}}{ds} \frac{dx^{j'}}{ds} (ds)^2$$

(величина $(ds)^2$, будучи скаляром, инвариантна относительно замены координат). Иначе говоря, в любой координатной системе она выражается однотипной квадратичной формой.

В дальнейшем удобно различать обозначения различных фигурирующих здесь метрических тензоров: метрический тензор евклидовой метрики объемлющего пространства в криволинейных координатах многообразия M – $g_{ij}^{(0)}$ или $\breve{g}_{ij}$; метрический тензор эллипсоидальной анизотропии в декартовых координатах объемлющего пространства – h_{ij}; метрический тензор римановой хронометрии в произвольных координатах (так же, как и произвольный метрический тензор) – g_{ij}. В частности, для изотропной среды $h_{ij} = \delta_{ij} / V^2$, а если на M определены декартовы координаты, то $g_{ij} = h_{ij}$.

Из приведенных выше рассуждений, в частности, следует, что полученные ранее уравнения луча для эллипсоидальной анизотропии в декартовых координатах имеют инвариантный характер, поэтому справедливы в любой римановой метрике. В частности, если положить $\dot{x}^i = dx^i / dt$ (что в дальнейшем всегда предполагается), то выписанное выше определение римановой хронометрии можно записать в виде уравнения

$$g_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j = 1, \tag{16.9}$$

что совпадает с формулой (10.10). Это означает также, что полученные в § 10 формулы

$$\dot{x}^k = g^{ik} p_i \text{ и } p_i = g_{ij} v^j , \tag{16.10}$$

а также уравнение эйконала

$$g^{ik} p_i p_k = 1, \qquad (16.11)$$

являются формулами римановой геометрии.

Равенства (16.10) означают, что в римановой геометрии и вектор медленности, и вектор лучевой скорости представляют один и тот же тензорный объект, контравариантное представление которого совпадает с вектором лучевой скорости, а ковариантное – с вектором медленности. Аналогично, уравнение (16.9) может рассматриваться как дуальное (сопряженное) к уравнению эйконала. Естественно, что уравнения (10.16а–б) представляют, по крайней мере, одну из форм уравнений луча в римановой геометрии. Но риманова геометрия содержит и существенно иную интерпретацию луча (и вытекающую из нее другую форму уравнений), с которой мы и познакомимся в следующем разделе.

Ковариантное дифференцирование и геодезические. Понятие геодезической возникает в связи с задачей переноса вектора вдоль кривой. Пусть $\mathbf{b}(s)$ – вектор, прикрепленный к кривой $\gamma : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$. Примером может служить вектор касательной или вектор нормали (последнее – для кривой на плоскости), вообще, вектор, составляющий определенный угол с кривой γ. Понятно, что в римановой геометрии ортогональность и угол определяются согласованно с метрикой. В каком случае указанные вектора переносятся вдоль кривой γ параллельно? В евклидовом случае ответ прост: параллельный перенос векторов возможен, если γ есть прямая. Естественно было бы решить этот вопрос для произвольного метрического тензора, вычисляя производную $d\mathbf{b}/ds$ вдоль γ. Параллельный перенос тогда можно определить как выполнение равенства $d\mathbf{b}/ds = 0$. Однако проблема состоит в том, что в соседних точках из-за изменения базиса изменяется разложение вектора по этому базису. Происходит изменение вектора, не связанное с искривлением γ. Именно по этой причине обычная производная вектора не является тензором (т. е. при переходе к новой системе координат не преобразуется по тензорным правилам). Поэтому поступают таким образом: вначале определяют производную вектора так, чтобы она была инвариантна относительно изменения базиса, а затем уже применяется условие $d\mathbf{b}/ds = 0$.

Принцип инвариантности состоит в том, что производная вектора является вектором. Продифференцируем вектор $\mathbf{f} = f^i \overline{e}_i$, считая, что x^i – не обязательно декартовы координаты:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(f^i \overline{\mathbf{e}}_i) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\,\overline{\mathbf{e}}_i + f^k \frac{\partial \overline{\mathbf{e}}_k}{\partial x^j}.$$

Выше выяснено, что базисные векторы $\overline{\mathbf{e}}_i$ преобразуются ковариантным способом, а вектор f^i – контравариантным. Поэтому выражение $f^i \overline{\mathbf{e}}_i$ (как и скалярное произведение ковариантного и контравариантного векторов) не изменяет своей формы в любой координатной системе. Это же замечание оказывается справедливым и для правой части полученного выражения. Требуемая инвариантность получена.

Разложим вектор $\partial \mathbf{e}_k / \partial x^j$ в базисе ($\mathbf{e}_i$):

$$\partial \mathbf{e}_k / \partial x^j = \Gamma^i_{jk} \mathbf{e}_i, \qquad (16.12)$$

тогда

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} + f^k \Gamma^i_{jk}\right) \cdot \mathbf{e}_i .$$

Величина

$$f^i_{,j} = \left(\partial f^i / \partial x^j\right) + f^k \Gamma^i_{jk} \qquad (16.13а)$$

называется ковариантной производной контравариантного вектора. Иногда она обозначается $\nabla_j f^i$ (обычная производная в этом случае обозначается $\partial_j f^i$). Как показано выше, выражение $f^i_{,j} \cdot \mathbf{e}_i$ дает инвариантное описание операции дифференцирования вектора.

Аналогично разложим тот же вектор $\mathbf{f}$ по дуальному базису: $\mathbf{f} = \overline{f}_i \overline{\mathbf{e}}^i$ и продифференцируем данное выражение. В силу того что $\partial(\overline{f}_i \overline{\mathbf{e}}^i)/dx^j = \partial(f^i \mathbf{e}_i)/dx^j$ и, кроме того, $\overline{\mathbf{e}}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j$, $\overline{f}_i = g_{ij} f^j$, ковариантное дифференцирование ковариантного вектора определится формулой

$$f_{i,j} = \left(\partial f / \partial x^j\right) - f_k \Gamma^k_{ij} . \qquad (16.13б)$$

В § 17 мы выведем формулы (16.13а) и (16.13б) из общей формулы ковариантного дифференцирования тензоров.

Комплект Γ^i_{jk} принято называть (аффинной) связностью или символом Кристоффеля. Если составить «обычное» скалярное произведение обеих частей равенства (16.12) с вектором $\overline{\mathbf{e}}^i$, применив формулы (16.8б), то связность можно определить формулой

$$\Gamma^i_{jk} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}^i \right\rangle = g^{is} \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}_s \right\rangle . \qquad (16.14а)$$

Символ Кристоффеля первого рода определяется формулой

$$\Gamma_{i;jk} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^j} \cdot \mathbf{e}_i \right\rangle \qquad (16.14б)$$

и, стало быть, $\Gamma^i_{jk} = g^{il}\Gamma_{l;jk}$.

Так как в декартовой системе координат базисные векторы не зависят от $\mathbf{x}$, то связность равна нулю. Наиболее просто вычисляется связность для евклидовой метрики в криволинейной системе координат. Перепишем формулу (16.14а) со штрихованными индексами (чтобы отличить используемую криволинейную систему координат от координат эвклидова пространства):

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \left\langle \frac{\partial \tilde{\mathbf{e}}_{k'}}{\partial x^{j'}}, \tilde{\mathbf{e}}^{i'} \right\rangle .$$

Остается подставить выражения (16.6), (16.7) и (16.8б) в эту формулу. В итоге получим

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} . \qquad (16.15)$$

Из этой формулы видно, что связность симметрична относительно перестановки двух нижних индексов. Это свойство верно во всех случаях, когда связность вводится согласованно с метрикой.

В общем случае и базисные векторы, и их изменение от точки к точке определяются метрическим тензором, поэтому согласованная с метрикой связность может быть выражена через метрический тензор и его производные. Продифференцируем равенство (16.8) по x^j:

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j}, \mathbf{e}_k \right\rangle_G + \left\langle \mathbf{e}_i, \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^j} \right\rangle_G = \Gamma_{i;jk} + \Gamma_{k;ji}.$$

Делая циклическую перестановку индексов и учитывая симметричность символов Кристоффеля относительно индексов, отделенных точкой с запятой, вместе с этим соотношением имеем еще два:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{k;ij} + \Gamma_{j;ik}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{j;ik} + \Gamma_{i;jk}.$$

Разрешая полученную систему трех линейных уравнений относительно символов Кристоффеля, получаем формулы Кристоффеля

$$\Gamma_{i;jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \qquad (16.16а)$$

и

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right). \qquad (16.16б)$$

С помощью ковариантной производной мы можем определить производную по направлению, определяемому вектором $\boldsymbol{\xi}$:

$$\nabla_\xi \mathbf{f} = \xi^j \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} + f^k \Gamma^i_{jk} \right) \cdot \mathbf{e}_i = \xi^j \nabla_j \mathbf{f}.$$

Теперь у нас есть все, чтобы определить параллельный перенос вектора вдоль кривой: *вектор* $\mathbf{f}$ *переносится вдоль кривой* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ *параллельно, если для всех* s $\nabla_\xi \mathbf{f} = 0$ *при* $\boldsymbol{\xi} = d\mathbf{x}/ds$. Поскольку для разных параметризаций кривой векторы $d\mathbf{x}/ds$ могут отличаться зависящими от s множителями, то при определении геодезической необходимо правильно зафиксировать этот параметр. Теперь дадим точное определение геодезической. Пусть параметр t на кривой γ выбран так, что dt определяет длину дифференциального элемента кривой в метрике g_{ij}: $dt = g_{ij}dx^i dx^j$, тогда *кривая* γ: $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ *называется геодезической, если вектор касательной* $\mathbf{y} = d\mathbf{x}/dt$ (*т. е., вектор (лучевой) скорости*) *переносится вдоль нее параллельно:*

$$\frac{dx^j}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{dx^i}{dt} \right) + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^k}{dt} \right] \equiv \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0.$$

Нам осталось проверить, что геодезические совпадают с экстремалями функционала Ферма для римановой хронометрии, т. е. являются лучами.

Функционал Ферма («действие») в римановой геометрии определяется так:

$$T(\gamma) = \int_\gamma \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i \dot{x}^j}\, ds.$$

Воспользуемся тем, что t является натуральным (относительно «действия» T) параметром, вследствие чего лагранжиан $L_0 = \sqrt{g_{ij}(\mathbf{x})\dot{x}^i\dot{x}^j}$ можно заменить более простым лагранжианом $L = (1/2)\,g_{ij}(\mathbf{x})\dot{x}^i\dot{x}^j$. Подставим его в уравнения Эйлера–Лагранжа (14.3):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0 .$$

После подстановки получим

$$\ddot{x}^j g_{jk} + \frac{g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j .$$

В первом слагаемом левой части индекс j (он является «внутренним») можно заменить на m. Теперь умножим обе части последнего уравнения на обратную матрицу g^{km}:

$$\ddot{x}^m + g^{km}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}\dot{x}^i\dot{x}^j g^{km}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} . \qquad (16.17)$$

Обратим теперь внимание на то, что в суммах

$$g^{km}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^j \quad \text{и} \quad g^{km}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\dot{x}^i\dot{x}^j$$

стоят одни и те же слагаемые. Поэтому уравнение (16.17) можно записать и так:

$$\ddot{x}^m + \frac{1}{2}g^{km}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\dot{x}^i\dot{x}^j = 0$$

или так:

$$\ddot{x}^m + \Gamma^m_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0 , \qquad (16.18)$$

что и нужно было показать. Необходимо помнить, что для другой параметризации луча, уравнение геодезической принимает иную форму.

Найдем уравнение геодезической для изотропной неоднородной среды. Подставляя в формулу (16.16б) $g_{ij} = \delta_{ij}/V^2$ и произведя подстановку индексов $i \to m,\ j \to i,\ k \to j$, получаем

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{V^2}{2}\delta^{ms}\left(\frac{\partial V^{-2}}{\partial x^i}\delta_{js} + \frac{\partial V^{-2}}{\partial x^j}\delta_{is} - \frac{\partial V^{-2}}{\partial x^s}\delta_{ij}\right) = \frac{V^2}{2}\left(\frac{\partial V^{-2}}{\partial x^i}\delta^m_j + \frac{\partial V^{-2}}{\partial x^j}\delta^m_i - \frac{\partial V^{-2}}{\partial x^m}\delta_{ij}\right). \quad (16.19)$$

После подставки полученной формулы в уравнение геодезической, получим (с учетом того, что $\dot{x}^i\dot{x}^i = V^2$)

$$\ddot{x}^m + \frac{V^2}{2}\left(2\dot{x}^i\frac{\partial V^{-2}}{\partial x^i}\dot{x}^m - V^2\frac{\partial V^{-2}}{\partial x^m}\right) = 0 . \qquad (16.20)$$

Покажем, что это уравнение эквивалентно полученной ранее системе уравнений луча (6.2):

$$d\mathbf{x}/dt = V^2\mathbf{p},\ \ d\mathbf{p}/dt = \operatorname{grad}\ln(1/V) .$$

Действительно, подставляя во второе уравнение величину $\mathbf{p} = (1/V^2)d\mathbf{x}/dt$, получаем

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} + V^2\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V^2}\right)\dot{\mathbf{x}} - \operatorname{grad}\ \ln\left(\frac{1}{V}\right)\right] = 0 .$$

Но так как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V^2}\right)=\frac{\partial V^{-2}}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt}=\frac{\partial V^{-2}}{\partial x^i}\dot{x}^i \quad \text{и}$$

$$\operatorname{grad}\ln\left(\frac{1}{V}\right)=V\operatorname{grad}\left(\frac{1}{V}\right)=\frac{V^2}{2}\operatorname{grad}\left(\frac{1}{V^2}\right),$$

то окончательно в покомпонентной форме

$$\ddot{x}^m+\frac{V^2}{2}\left(2\frac{\partial V^{-2}}{\partial x^i}\dot{x}^i\dot{x}^m-V^2\frac{\partial V^{-2}}{\partial x^m}\right)=0\,,$$

что и требовалось получить. Эквивалентность уравнений (10.16а–б) и (16.18) будет показана в § 17.

Распространение волн на криволинейных поверхностях. Применять или не применять технику римановой геометрии – для большинства практических задач в классе изотропных и эллипсоидально-анизотропных моделей – является делом вкуса. В конце концов, уравнения лучей в рамках гамильтонова формализма выведены для любых сред, а из них выводится и все остальное. Однако есть одна задача, которую было бы трудно решить иными методами, а именно задача, поставленная в заголовок этого раздела. Она возникает, например, при проведении участка луча головной волны в пределах криволинейной преломляющей поверхности. Эта же задача возникает и при изучении распространения поверхностных волн вдоль поверхности латерально-неоднородной Земли.

Возникающая задача формулируется так: на поверхности S заданы две точки – A и B. Необходимо описать стационарные траектории, соединяющие указанные точки, в классе всех гладких траекторий, принадлежащих S. Имеет смысл различать две задачи: *задача* 1 – скорость распространения волны вдоль поверхности постоянна; *задача* 2 – скорость распространения волны различна в различных точках поверхности. Во второй *задаче* может быть допущена и эллиптическая анизотропия, что не приводит к существенному усложнению решения.

Почему использование техники римановой геометрии в сформулированных задачах необходимо? Потому что криволинейная поверхность в общем случае является многообразием, которое неизоморфно никакому евклидову пространству. Поэтому невозможно избежать введения римановой метрики, хотя объемлющее пространство, в котором лежит поверхность S, является евклидовым. Однако в задаче 2 более естественно и объемлющее пространство считать наделенным римановой геометрией. Для головных волн этот взгляд обоснован и с физической точки зрения, поскольку эти волны являются объемными и скорость их распространения есть скорость распространения объемных волн, которая определена в среде, прилегающей (обычно снизу) к поверхности S.

Пусть поверхность задана уравнениями

$$x^i=x^i(u^1,u^2)\,,$$

и пусть g_{ij} есть метрический тензор объемлющего пространства. Тогда, согласно (16.2), в многообразии S будет определена риманова метрика:

$$dt^2=g_{ij}\left(\partial x^i/\partial u^\alpha\right)\left(\partial x^j/\partial u^\beta\right)du^\alpha du^\beta \tag{16.21}$$

с метрическим тензором

$$G_{\alpha\beta}=g_{ij}\left(\partial x^i/\partial u^\alpha\right)\left(\partial x^j/\partial u^\beta\right) \quad (\alpha,\beta=1,2)\,.$$

Если метрика g_{ij} положительно определена, то метрика $G_{\alpha\beta}$ также является положительно определенной.

Геодезические соединяющие точки A и B в метрике (16.21) представляют решение данной задачи. В случае постоянной скорости (ее можно без всякого ущерба положить равной единице, так что $t = s$) геодезические строятся в метрике

$$ds^2 = \left(\partial x^i / \partial u^\alpha\right)\left(\partial x^i / \partial u^\beta\right) du^\alpha du^\beta. \tag{16.22}$$

Соответствующие этой метрике геодезические решают задачу 1. Правая часть последнего равенства представляет первую квадратичную форму поверхности. Коэффициенты данной квадратичной формы образуют первый фундаментальный тензор поверхности.

Найдем связность, отвечающую метрическому тензору

$$G^0_{\alpha\beta} = \left(\partial x^i / \partial u^\alpha\right)\left(\partial x^i / \partial u^\beta\right) \tag{16.23}$$

для метрики (16.22). В римановой геометрии тензор $G^0_{\alpha\beta}$ принято называть первым фундаментальным тензором поверхности. С этой целью законно воспользоваться формулой (16.15), положив $i' = \mu,\ j' = \alpha,\ k' = \beta\ (\alpha, \beta, \mu = 1, 2)$:

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \left(\partial u^\mu / \partial x^i\right)\left(\partial^2 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta\right). \tag{16.24}$$

В порядке упражнения можно воспользоваться и общей формулой (16.16б) для связности, отвечающей фундаментальному тензору $G^0_{\alpha\beta}$. Достаточно простые выкладки дают

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = G_0^{\mu\lambda}\gamma_{\lambda\alpha\beta};\quad \gamma_{\lambda\alpha\beta} = \left(\partial x^i / \partial u^\lambda\right)\left(\partial^2 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta\right). \tag{16.25}$$

После определения связности мы обращаемся к стандартному уравнению геодезической (16.18). Оба выражения для связности дают в итоге одно и то же уравнение. Вычисление связности для более общей метрики (16.21) является чисто техническим упражнением, которым мы заниматься здесь не будем. В тех случаях, когда для тензора $G^{\alpha\beta}$ удается получить относительно простые аналитические выражения, целесообразнее воспользоваться гамильтоновым формализмом, построив канонические уравнения для гамильтониана $H = (1/2) G^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta$:

$$du^\alpha / dt = G^{\alpha\beta} p^\beta;\quad dp^\alpha / dt = -(1/2)\left(\partial G^{\beta\lambda} / \partial u^\alpha\right) p_\beta p_\lambda. \tag{16.26}$$

Если $G^{\alpha\beta} = V^2 G_0^{\alpha\beta}$, можно показать, что уравнения перепишутся следующим образом:

$$\frac{du^\alpha}{dt} = V^2 G_0^{\alpha\beta} p^\beta;\quad \frac{dp^\alpha}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial G_0^{\beta\lambda}}{\partial u^\alpha} p_\beta p_\lambda = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}\ln\left(\frac{1}{V}\right). \tag{16.27}$$

Выше была определена первая квадратичная форма поверхности. Определим вторую квадратичную форму. Пусть на поверхности Σ задана кривая $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u_1(s), u_2(s))$, и пусть $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности в выбранной точке. Ее можно определить из условия $[\mathbf{x}_{u^1}, \mathbf{x}_{u^2}] = \left|[\mathbf{x}_{u^1}, \mathbf{x}_{u^2}]\right|\mathbf{n}$ (здесь $[\cdot,\cdot]$ символизирует векторное произведение и $\mathbf{x}_u = \partial\mathbf{x}/\partial u$). Поскольку $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{u^\alpha}\dot{u}^\alpha$ и в выбранной точке векторы $\mathbf{x}_{u^\alpha}$ и $\mathbf{n}$ ортогональны: $\left\langle \mathbf{x}_{u^\alpha}, \mathbf{n}\right\rangle = 0$, то, дифференцируя выражение $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{u^\alpha}\dot{u}^\alpha$ и умножая полученное выражение скалярно на вектор $\mathbf{n}$, получаем

$$\left\langle \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{n}\right\rangle = b_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta,$$

где $b_{\alpha\beta} = \left\langle \mathbf{x}_{u^\alpha u^\beta}, \mathbf{n} \right\rangle$. Вторую квадратичную форму определяют равенством

$$\left\langle \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{n} \right\rangle ds^2 = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = L(du^1)^2 + 2M du^1 du^2 + N(du^2)^2. \qquad (16.28)$$

Кривизна кривой k определяется формулой

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = k\mathbf{m},$$

где $\mathbf{m}$ – единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\ddot{\mathbf{x}}$. Вектор $\mathbf{m}$ принято называть вектором главной нормали к кривой $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u_1(s), u_2(s))$. Поэтому

$$\left\langle \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{n} \right\rangle = k \left\langle \mathbf{n}, \mathbf{m} \right\rangle = k\cos\theta.$$

Подставляя полученную формулу в (16.28) и учитывая (16.22), находим

$$k\cos\theta = \frac{b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{G^0_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}. \qquad (16.29)$$

Чтобы лучше понять полученную формулу, введем в окрестности точки M, в которой вычисляется кривизна k, присоединенную к Σ декартову систему координат $\Xi = (\xi, \eta, \zeta)$ с началом в точке M так, что плоскость (ξ, η) совмещена с касательной к Σ плоскостью P. Следовательно, ось ζ направлена вдоль нормали к поверхности Ω. Оси ξ и η ориентированы (в пределах плоскости P) произвольно. В этой системе координат поверхность описывается функцией $\zeta = f(\xi, \eta)$. При этом $f_0 \equiv f(0,0) = 0,\ f_\xi(0,0) = 0$ и $f_\eta(0,0) = 0$. Теперь в приведенных выше формулах мы можем положить $u^1 = \xi,\ u^2 = \eta$, считая, что поверхность задана формулами $x^1 = u^1, x^2 = u^2$ и $x^3 = f(u^1, u^2)$. Тогда легко выводится, что

$$G^0_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial f}{\partial \xi^\beta}, \quad \mathbf{x}_{u^\alpha u^\beta} = (0, 0, f_{\xi^\alpha \xi^\beta}); \quad \xi^1 = \xi,\ \xi^2 = \eta. \qquad (16.30)$$

А так как в точке M $G^0_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ и $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, а $\mathbf{x}_{u^\alpha u^\beta} = (0, 0, f_{\xi^\alpha\xi^\beta})$, то $b_{\alpha\beta} = f_{\xi^\alpha\xi^\beta}$ и формула (16.28) запишется так:

$$k\cos\theta = f_{\xi^\alpha\xi^\beta} d\xi^\alpha \xi^\beta / d\xi^\alpha d\xi^\beta, \qquad (16.31)$$

где θ – угол между нормалью $\mathbf{n}$ и главной нормалью к кривой. Если в качестве кривой берутся сечения поверхности плоскостями $\xi\zeta$ и $\eta\zeta$, то получим кривизны поверхности $K_\xi = f_{\xi\xi}$ и $K_\eta = f_{\eta\eta}$ в соответствующих сечениях. Собственные значения K_1 и K_2 матрицы $f_{\xi^\alpha\xi^\beta}$ называются главными кривизнами поверхности. Произведение $K = K_1 K_2$ (или, что все равно, определитель

$$K = \det\left(f_{u^\alpha u^\beta}\right) \equiv f_{\xi^\alpha\xi^\alpha} f_{\xi^b\xi^b} - \left(f_{\xi^\alpha\xi^\beta}\right)^2 \qquad (16.32)$$

называется гауссовой кривизной, играющей исключительно важную роль в теории поверхностей.

Из данного определения гауссовой кривизны следует ее определение в произвольной системе криволинейных координат на поверхности:

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{G^0_{11}G^0_{22} - (G^0_{12})^2}. \qquad (16.33)$$

§ 17. Параллельный перенос объектов риманова пространства

В начале этого параграфа обсуждается несколько иной подход к определению параллельного перенесения дифференциальных характеристик поля времен в процессе распространения волны, нежели в § 16. Этот подход более отчетливо проясняет и геометрический смысл ковариантного дифференцирования, и сущность параллельного перенесения. В силу того, что перенос тензоров будет играть в дальнейшем важную роль, имеет смысл остановиться на этом подходе подробнее. В этом же параграфе доказывается минимальность достаточно коротких геодезических, а также максимальность геодезической в некотором варианте псевдоримановой метрики.

Параллельный перенос в пространствах аффинной связности. В § 16 ковариантное дифференцирование определялось исходя из довольно-таки формального условия: производная от тензора должна быть тензором. Параллельный перенос и уравнение геодезической в римановом пространстве были получены как следствие ковариантного дифференцирования. Возможен и другой подход, в котором параллельное перенесение вектора вводится независимо от ковариантного дифференцирования, а последнее выводится как следствие. При этом наличие метрического тензора не играет существенной роли.

Сначала рассмотрим задачу параллельного перенесения вектора в аффинном пространстве, наделенном криволинейными координатами. Если вектор требуется перенести из точки A в точку B, то естественный путь состоит в том, чтобы сделать это вдоль прямой. Само определение параллельности в аффинном пространстве является тривиальным: вектор должен остаться самим собой. Пусть уравнение прямой в криволинейных координатах x^i записано в виде $x^i = x^i(t)$. Символ $\mathbf{x}$ будет обозначать радиус-вектор аффинного пространства, рассматриваемый как функция криволинейной системы координат: $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(x^1, x^2, x^3)$. Введем репер

$$\mathbf{x}_i = \partial \mathbf{x} / \partial x^i .$$

Теперь любой вектор в точке с криволинейными координатами x^1, x^2, x^3 может быть записан в виде $\boldsymbol{\xi} = \xi^i \mathbf{x}_i(x^i, x^2, x^3)$. Поэтому на прямой $x^i = x^i(t)$ постоянный вектор $\boldsymbol{\xi}_0$ запишется так:

$$\xi_0^i = \xi^i(t)\mathbf{x}_i(x^i(t), x^2(t), x^3(t)) .$$

Продифференцируем эту систему равенств. В силу того, что левые части постоянны, получим

$$0 = d\xi^i \mathbf{x}_i + \xi^i d\mathbf{x}_i . \tag{17.1}$$

По формуле полного дифференцирования

$$d\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{ij} dx^j, \quad \mathbf{x}_{ij} = \partial^2 \mathbf{x} / \partial x^i \partial x^j .$$

Разложим каждый из векторов $\mathbf{x}_{ij}$ по векторам репера $\mathbf{x}_k$:

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{x}_k .$$

Теперь векторное уравнение (17.1) может быть переписано так:

$$(d\xi^k + \Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j)\mathbf{x}_k = 0 .$$

Поскольку это равенство выполняется для произвольной системы координат и любого вектора $\boldsymbol{\xi}_0$, то необходимо обращение в нуль коэффициентов при $\mathbf{x}_k$:

$$d\xi^k + \Gamma^k_{ij}\xi^i dx^j = 0 \tag{17.2а}$$

или

$$\left(d\xi^k / ds\right) + \Gamma^k_{ij}\xi^i \left(dx^j / ds\right) = 0 . \tag{17.2б}$$

Полученное уравнение, геометрический смысл которого совершенно прозрачен, и положен в основу параллельного перенесения в более общем случае.

В произвольном многообразии параллельное перенесение возможно, если в нем определен объект связности (или просто связность). Объектом связности называется комплект чисел Γ^k_{ij}, преобразуемый по следующему правилу:

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i \partial x^j \partial x^{k'}}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}\partial x^k}\Gamma^k_{ij} . \tag{17.3}$$

В дальнейшем предполагается, что связность симметрична: $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Параллельное перенесение вектора в многообразии, обладающем произвольной связностью Γ^k_{ij} (такие многообразия называются пространствами аффинной связности), определяется уравнениями (17.2а) и (17.2б). Кривая в пространстве аффинной связности называется геодезической, если вектор касательной параллельно переносится вдоль нее. Пусть кривая задана уравнением $x^i = x^i(s)$ и пусть $\xi^i(s)$ – переносимый касательный вектор. Параметр s всегда можно определить так, что $dx^i / ds = \xi^i$ (такой параметр называется каноническим). Применим формулу (17.2а) параллельного переноса:

$$d\left(dx^k / ds\right) + \Gamma^k_{ij}\left(dx^i / ds\right)dx^j = 0 .$$

Отсюда сразу получаем уравнение геодезической

$$\left(d^2x^k / ds^2\right) + \Gamma^k_{ij}\left(dx^i / ds\right)\left(dx^j / ds\right) = 0 . \tag{17.4}$$

Из теоремы единственности решения дифференциальных уравнений следует, что через одну точку в заданном направлении проходит только одна геодезическая. Существование решения уравнения (17.4) гарантируется лишь на некотором интервале $(0, s_1)$, где величина $s_1 > 0$, но может быть и малой, и бесконечно большой. При $s \to s_1$ геодезическая не может достигнуть никакой конечной точки. Иначе говоря, предел при $s \to s_1$ не достигаем. Геодезическая в пространстве с несимметричной связностью Γ^k_{ij} совпадает с геодезической в пространстве с симметризованной связностью $\tilde{\Gamma}^k_{ij} = (\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji})/2$. Если при введении координат $x^{i'}$ в некоторой точке A $\Gamma^k_{ij}(A) = 0$, то такие координаты называются геодезическими (в окрестности A). Преобразованием координат можно добиться обращения Γ^k_{ij} в нуль не только в изолированной точке, но и на любой наперед заданной кривой C.

Естественно, что смысл параллельного переноса зависит от того, как введена связность. Но точно так же и смысл ортогональности зависит от введенного скалярного произведения. Ясно, что если в многообразии определены и связность, и метрический тензор, то возникает вопрос об их соответствии. Условия соответствия формулируются следующим образом: 1) связность симметрична; 2) при параллельном переносе произвольных векторов $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ их скалярное произведение $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta} \rangle$ (а значит, и длина каждого из них) остается постоянной. Показывается, что этим условиям отвечает единственная связность, а именно связность (16.16б):

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Параллельное перенесение тензора. Параллельное перенесение тензора это такое продолжение его вдоль заданной кривой, при котором его координаты в параллельно переносимом репере остаются неизменными (но координаты в основном репере $\mathbf{x}_i = d\mathbf{x}/dx^i$, конечно, меняются). Введем произвольный двухвалентный тензор, имеющий в репере $\mathbf{e}_i$ координаты U^i_j. При переходе к произвольному реперу $\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i$ координаты тензора меняются следующим образом:

$$U^{i'}_{j'} = A^{i'}_i A^j_{j'} U^i_j .$$

Это равенство удобно переписать так (после очевидной замены индексов):

$$A^p_{p'} U^{p'}_{j'} = A^j_{j'} U^p_j . \qquad (17.5)$$

Обозначим через $\tilde{U}^p_r$ координаты тензора в параллельно переносимом репере $\xi_i(s) = \xi^i_k(s)\mathbf{e}_i$. В этом случае в формуле (17.5) коэффициенты $A^i_{i'}$ совпадают с ξ^i_k и вместо (17.5) мы имеем

$$\xi^i_p \tilde{U}^p_r = \xi^j_r \tilde{U}^i_j . \qquad (17.6)$$

При параллельном переносе вдоль кривой $x^i = x^i(s)$ имеем $\tilde{U}^p_r(s) = \mathrm{const}$. Следовательно, дифференцирование (вдоль кривой) равенства (17.6) дает

$$d\xi^i_p \tilde{U}^p_r = d\xi^j_r U^i_j + \xi^j_r dU^i_j .$$

В начальной точке параллельно переносимый репер совпадает с $\mathbf{e}_i$: $\xi^j_r(0) = \delta^j_r$, вследствие чего $\tilde{U}^p_r = U^p_r$ и

$$dU^i_r = d\xi^i_p U^p_r - d\xi^j_r U^i_j .$$

Теперь осталось учесть уравнение параллельного перенесения произвольного вектора (17.2а), согласно которого $d\xi^i_p = -\Gamma^i_{kl}\xi^l_p dx^k$. Осуществляя простые преобразования, получаем в начальной точке

$$dU^i_r = -\Gamma^i_{kl}\delta^l_p dx^k U^p_r + \Gamma^j_{ks}\delta^s_r dx^k U^i_j = \left(\Gamma^j_{kr} U^i_j - \Gamma^i_{kp} U^p_r \right) dx^k$$

или

$$dU^i_r / ds = \left(\Gamma^j_{kr} U^i_j - \Gamma^i_{kp} U^p_r \right) \left(dx^k / ds \right). \qquad (17.7)$$

Данная формула инвариантна относительно выбранного репера. Аналогичные формулы можно построить для тензоров других валентностей. Для одновалентного тензора (вектора) $U^i \equiv \xi^i$ она совпадает с полученной ранее формулой (17.2б). Для ковектора U_i получаем формулу

$$dU_i / ds = \Gamma^j_{ik} U_j \left(dx^k / ds \right). \qquad (17.8)$$

Инвариант тензора (скаляр) при любом переносе остается постоянным: $dU = 0$.

Распространение фронта как его параллельное перенесение вдоль геодезических. Локальная ориентация фронта в любой точке на луче определяется любым вектором, ортогональным к фронту (в метрике объемлющего исходного пространства R^3). Поэтому параллельное перенесение бесконечно малого элемента фронта вдоль геодезической имеет место, если вдоль этой же геодезической параллельно переносится хотя бы один из векторов, ортогональных фронту (в метрике объемлющего пространства). Таким вектором является вектор медленности (рефракции) $\mathbf{p} = \nabla\tau$. Его параллельное перенесение непосредственно следует из параллельного перенесения вектора лучевой скорости $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$, поскольку, как показано в § 16, оба вектора выражают контравариантное и ковариантное представления одного и того же тензорного объекта. Фундаментальное равенство (9.13), которое можно записать в инвариантной относительно используемых координат форме

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle = p_i v^i = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = 1,$$

непосредственно, в силу формулы (16.5), следует из обычной и дуальной форм уравнения эйконала ($g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 1$ и $g^{ij}p_i p_j = 1$) и выражает постоянство скалярного произведения (и длин) параллельно переносимых векторов. Уместно заметить, что из ортогональности вектора **p** фронту в метрике объемлющего пространства, следует ортогональность вектора лучевой скорости фронту в римановой метрике (т. е. в хронометрии). А именно, если вектор **a** касателен к фронту в некоторой точке, то в этой же точке

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{v} \rangle = g_{ij} a^i v^i = 0.$$

Из параллельного перенесения вектора медленности следует, что уравнение (10.16б)

$$\frac{dp_k}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} p_i p_j \tag{17.9}$$

эквивалентно уравнению (17.8). Для доказательства воспользуемся следующей известной в тензорном анализе формуле

$$\partial g^{ij} / \partial x^k = -\left(g^{il}\Gamma^j_{lk} + g^{lj}\Gamma^i_{lk} \right),$$

которая здесь приводится без вывода, но она прямо следует из выводимой в конце этого параграфа формулы (17.18). Подставим в уравнение (17.9)

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{1}{2}\left(g^{il}\Gamma^j_{lk} + g^{lj}\Gamma^i_{lk} \right) p_i p_j .$$

Согласно формуле (16.10), $g^{il} p_i = \dot{x}^l$, $g^{lj} p_j = \dot{x}^l$, следовательно,

$$dp_k / ds = \left(\Gamma^i_{lk} p_i \dot{x}^l + \Gamma^j_{lk} p_j \dot{x}^l \right) / 2 = \Gamma^i_{lk} p_i \dot{x}^l ,$$

что совпадает с формулой (17.8) при $U_i = p_i$.

Итак, фронт вдоль каждого луча переносится параллельно, это позволяет говорить, что распространение не только бесконечно малых кусков фронта, но и фронта в целом, имеет характер параллельного перенесения. Две поверхности, одна из которых получена параллельным перенесением вдоль геодезических, называются геодезически параллельными.

Каждая поверхность риманова пространства включается, и притом единственным образом, в однопараметрическое семейство геодезически параллельных поверхностей. С таким семейством поверхностей тесно связаны полугеодезические координатные системы. Возьмем произвольную поверхность S : $x^i = x^i(u^1, u^2)$ и восстановим все геодезические, которые нормальны к *S*, тогда *полугеодезическая система координат* определяется как набор чисел (u^1, u^2, t). В этих координатах фронты (поверхности, геодезически параллельные к S) определяются уравнениями вида $t = \text{const}$, а координатные линии $u^i = \text{const}$ суть геодезические. Полугеодезическая система координат определена в окрестности любой гладкой поверхности.

Метрический тензор в полугеодезических координатах имеет специфическую структуру. Для удобства обозначим $x^i = u^i$ $(i = 1, 2)$, $x^3 = t$. Пусть dx^i и δx^3 – векторы бесконечно малых смещений из точки A соответственно по координатной линии x^3 и по поверхности $x^n = \text{const}$. В силу ортогональности смещений dx^i ($i = 1, 2$) и δx^3,

$$g_{ij} dx^i \delta x^j = \left(g_{31} dx^1 + g_{32} dx^2\right) \delta x^3 = 0$$

(учитывается, что $dx^3 = 0$ и $\delta x^i = 0$ $(i = 1, 2)$). В силу произвольности чисел dx^i получаем

$$g_{31} = g_{13} = g_{32} = g_{23} = 0\,.$$

Из полученной структуры метрического тензора следует, что на геодезической $dt^2 = g_{33}(\delta x^3)$. Но мы выбрали координаты так, что $\delta x^3 = dt$. Следовательно, $g_{33} = 1$ и

$$dt^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + dx^3 \quad (\alpha, \beta = 1, 2)\,. \tag{17.10}$$

Ясно, что форма $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ положительно определена.

В § 15 показано, что в изотропном (неоднородном) пространстве достаточно короткие лучи являются минималями. Там же было показано, что в анизотропной среде это не обязательно так. Введенные здесь координаты позволяют дать простое доказательство (без обращения ко второй вариации функционала Ферма) того, что в римановом пространстве геодезические суть минимали в области, в которой удается ввести регулярную полугеодезическую систему координат (*теорема о минималях*).

Итак, покажем, что всякий отрезок AB геодезической линии x^3 короче (в римановой метрике) любой другой кривой $\widehat{AB}$, соединяющей его концы и лежащей в области определения полугеодезических координат. Длина отрезка AB геодезической x^3 равна, очевидно, $x_B^3 - x_A^3$, где $x_A^3 < x_B^3$. Для произвольной кривой $\widehat{AB}$

$$t = \int\limits_{\widehat{AB}} \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + \left(dx^3\right)^2}\,.$$

В силу положительной определенности формы $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$,

$$\sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + (dx^3)^2} \geq \left|dx^3\right|, \tag{17.11}$$

причем хотя бы на каком-то участке имеем знак > (иначе $dx^\alpha = 0$ и кривая $\widehat{AB}$ совпадает с отрезком геодезической AB). В результате

$$t > \int\limits_{\widehat{AB}} \left|dx^3\right| \geq \left|\int\limits_{\widehat{AB}} dx^3\right| = \left|x_B^3 - x_A^3\right| > 0\,,$$

что и нужно было показать.

Псевдориманова метрика. Предположим, что вогнутый участок лучевой индикатрисы аппроксимируется уравнением

$$g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = 1\,, \tag{17.12}$$

в котором невырожденная матрица g_{ij} не является положительно определенной. Один или два ее собственных значения отрицательны. Квадратичной форме $g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$ отвечает метрика $(dt)^2 = g_{ij} d\dot{x}^i d\dot{x}^j$, которая после подходящей замены переменных может быть выражена формулой

$$(dt)^2 = \lambda_1 (dx^{1'})^2 + \lambda_2 (dx^{2'})^2 + \lambda_3 (dx^{3'})^2 ,$$

где хотя бы один из коэффициентов – λ_2 и λ_3 – отрицателен.

Если исключить доказательство минимальности достаточно короткой геодезической в теории, которая рассматривалась выше, положительная определенность метрического, строго говоря, нигде не играла никакой роли. Поэтому большая часть римановой геометрии переносится и на пространства с «расстоянием», отвечающим произвольному (но невырожденному) вещественному метрическому тензору. Определяемое таким тензором пространство называется псевдоримановым. В псевдоримановой метрике определяются геодезические (с использованием тех же самых формул, что и для риманова пространства), которые опять являются стационарными траекториями функционала Ферма, т. е. лучами. В «настоящем» псевдоримановом пространстве возможны отрицательные значения dt^2, означающие мнимые значения dt. Но к рассматриваемой здесь реальности это не имеет никакого отношения. Поскольку в уравнении (17.12) в правой части стоит положительная величина, то оно (уравнение) определяет псевдориманову метрику в такой области направлений, в которой dt^2 всегда положительно. Для этого не обязательно требовать малости абсолютных значений λ_2 и λ_3. Дело в том, что в рассматриваемой области направлений величина $dx^{1'}$ является доминирующей.

Воспользовавшись тем же методом, которым доказывалась минимальность короткой геодезической в римановой метрике, можно показать, что в псевдоримановой метрике короткая геодезическая может быть максималью. Предположим, что направление геодезической выбрано так, что в ее окрестности $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta < 0$ (в полугеодезических координатах). Но при этом предполагается, что рассматриваются только такие кривые $\widehat{AB}$, во всех точках которой $dt^2 > 0$. Поскольку на геодезической это заведомо так (вследствие выбранного направления геодезической), то это должно быть выполнено и на достаточно близких к ней кривых. В рассматриваемой ситуации вместо формулы (17.11) имеем

$$\sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + (dx^3)^2} \le \left| dx^3 \right| .$$

При движении по кривой $\widehat{AB}$ от точки A к точке B все время $dx^n > 0$. Действительно, так как $x_A^3 < x_B^3$, то dx^3 не может оставаться все время отрицательным. Если же допустить, что отрицательные значения dx^3 достигаются на каких-то интервалах, то, в силу гладкости, в каких-то точках мы получим $dx^3 = 0$. Тогда в этих точках $dt^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta < 0$, что противоречит условию. Таким образом,

$$t\left(\widehat{AB}\right) < \int\limits_{\widehat{AB}} dx^3 = x_B^3 - x_A^3 .$$

На семействе гладких кривых вещественной длины геодезическая может иметь максимальное время распространения (раньше это было показано только для однородной анизотропной среды).

Ковариантное (абсолютное) дифференцирование тензора. Основываясь на полученных выше формулах параллельного переноса, дадим детальный вывод формул ковариантного дифференцирования. Проблема дифференцирования тензора состоит в том, что тензоры $U_j^i(s)$ и $U_j^i(s+dt)$, строго говоря, нельзя сравнивать: они определены в разных точках $\mathbf{x}(s)$ и $\mathbf{x}(s+dt)$ многообразия и принадлежат различным тензорным пространствам. В частности, не определена разность $U_j^i(s+dt)-U_j^i(s)$ (она не обладает инвариантностью относительно замены координат). Но если тензор $U_j^i(s+dt)$ параллельно перенести в точку $\mathbf{x}(s)$ (результат перенесения обозначим $\tilde{U}_j^i(s)$), то возможность сравнения появляется, а значит, появляется и возможность корректного определения дифференцирования. Линейная часть разности $\tilde{U}_j^i(s)-U_j^i(s)$ называется абсолютным дифференциалом тензора U_j^i (вдоль пути $\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$) и обозначается DU_j^i.

Перейдем к выводу соответствующей формулы. С точностью до $o(dt)$

$$U_r^i(s+dt)=\tilde{U}_r^i(s)+\left[\Gamma_{kr}^j\tilde{U}_j^i-\Gamma_{kp}^i\tilde{U}_r^p\right]dx^k .$$

Но с этой же точностью мы можем заменить в квадратных скобках тензоры с волной на тензоры без волны:

$$U_r^i(s+dt)=\tilde{U}_r^i(s)+\left[\Gamma_{kr}^jU_j^i-\Gamma_{kp}^iU_r^p\right]dx^k .$$

Полагая $U_r^i(s+dt)=U_r^i(s)+dU_r^i$, находим

$$\tilde{U}_r^i(s)-U_r^i(s)=dU_r^i+\left[\Gamma_{kp}^iU_r^p-\Gamma_{kr}^jU_j^i\right]dx^k\equiv DU_r^i$$

или

$$DU_r^i/ds=\left(dU_r^i/ds\right)+\left[\Gamma_{kp}^iU_r^p-\Gamma_{kr}^jU_j^i\right]\left(dx^k/ds\right). \qquad (17.13)$$

Инвариантность этой формулы следует из инвариантности параллельного переноса (хотя строгое доказательство этого факта не является простым).

Сопоставляя полученную формулу с (17.7), заключаем, что тензор U_j^i тогда и только тогда параллельно переносится вдоль кривой, когда вдоль этой кривой $DU_j^i=0$.

Аналогичный вывод для вектора и ковектора дают формулы

$$DU^i/ds=\left(dU^i/ds\right)+\Gamma_{kp}^iU^p\left(dx^k/ds\right) \qquad (17.14)$$

и

$$DU_i\ /ds=\left(dU_i\ /ds\right)-\Gamma_{ki}^pU_p\left(dx^k/ds\right). \qquad (17.15)$$

Если в качестве пути выбирать координатные линии ($dx^k/ds=dx^k/dx^i=\delta_{ik}$), то мы получим формулы ковариантного дифференцирования. В частности,

$$DU_r^i/ds^j\equiv\nabla_jU_r^i=\left(dU_r^i/ds^j\right)+\Gamma_{jp}^iU_r^p-\Gamma_{sr}^pU_p^i. \qquad (17.16)$$

Из этой формулы достаточно просто вывести формулы для ковариантного дифференцирования дважды ковариантного и дважды контравариантного тензоров. В случае вектора f^i и ковектора f_i получаем приведенные ранее формулы (16.13а) и (16.13б).

Оказывается, что ковариантная производная метрического тензора всегда равна нулю (если, конечно, связность определена в соответствии с формулой Кристоффеля (16.13)). Покажем это. Наряду с символом Кристоффеля Γ_{jk}^i (который часто называют символом Кристоффеля второго рода) рассматривается также символ Кристоффеля первого рода: $\Gamma_{i,jk} = g_{ir}\Gamma^{r}_{jk}$, для которого формула Кристоффеля запишется, очевидно, так:

$$\Gamma_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right). \tag{17.17}$$

Эту же формулу запишем для другого порядка тех же индексов:

$$\Gamma_{k,ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Сумма этих формул дает

$$\partial g_{ik} / \partial x^j = \Gamma_{i,jk} + \Gamma_{k,ij}\,. \tag{17.18}$$

В то же время, по правилам ковариантного дифференцирования симметричного ковариантного тензора

$$\frac{Dg_{ik}}{\partial x^j} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma^{r}_{jk} g_{ir} - \Gamma^{p}_{ij} g_{kp} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma_{i,jk} - \Gamma_{k,ij} = 0\,. \tag{17.19}$$

§ 18. Геометрия на сфере и эллипсоиде

Этот параграф дает примеры, иллюстрирующие применение формул римановой геометрии, и, кроме того, он содержит ряд полезных формул, которые нужны для обоснования уже приведенных в гл. 2 результатов. В частности, рассматривая связь между геометрией поверхности рефракции и волновой поверхностью, мы свели эту задачу к связи между геометрией эллипсоида и дуального эллипсоида, связанных преобразованием Лежандра. Соответствующие формулы выводятся в конце этого параграфа.

Первые разделы посвящены сферическим координатам, которыми естественно пользоваться при проведении лучей в планетарных моделях Земли. Земля, наделенная сферическими координатами, является многообразием, вследствие чего применение методов римановой геометрии становится адекватным. В разделе «Евклидова метрика в сферических координатах» сферические координаты используются, главным образом, для иллюстрации понятий, которые вводились в § 16 (матрицы преобразования координат, метрический тензор, связность, координатные реперы). Затем рассматриваются две задачи: проведение луча внутри шара, наделенного сферическими координатами, и на поверхности сферы. Последняя задача служит примером более общей задачи проведения луча на криволинейной поверхности (см. § 16).

Евклидова метрика в сферических координатах. При описании сферических координат будем использовать следующие обозначения компонент: $x^{1'} = R$, $x^{2'} = \phi$ и $x^{3'} = \vartheta$ (при $x^1 = x, x^2 = y$ и $x^3 = z$). R – расстояние между точкой $\mathbf{x} = (x, y, z)$ и началом координат; ϕ – угол между «вертикальной» плоскостью P', проходящей через точку $\mathbf{x}$ и ось z, и плоскостью (x, z) (угол отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть на плоскость (x, y) со стороны положительного направления оси z); ϑ – угол между вектором $\mathbf{x}$ и осью z:

$$R{=}|\mathbf{x}| \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \phi = \mathrm{arctg}(y/x),\ \vartheta = \mathrm{arctg}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\,/\,z\right). \tag{18.1a}$$

Декартовы координаты (x, y, z) выражаются через сферические по формулам

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad z = R\cos\theta. \tag{18.1б}$$

Точка $\mathbf{x} = 0$ является особой для сферической системы координат, так как в ней нарушается взаимно однозначность соответствия между (x, y, z) и (R, φ, θ).

Найдем матрицы преобразования декартовых координат в сферические и сферических в декартовые. Первая матрица находится дифференцированием равенств (18.1б) по R, φ и θ. Запишем получающуюся таблицу чисел $\partial x^i / \partial x^{i'}$, считая не заштрихованный индекс номером строки, а заштрихованный – номером столбца:

$$\left\|\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right\| = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -R\sin\theta \end{bmatrix}. \tag{18.2а}$$

Матрицу преобразования сферических координат в декартовые можно получить либо дифференцированием равенств (18.1а) по x, y и z, либо обращением матрицы (18.2а). В результате получим

$$\left\|\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right\| = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ -\dfrac{\sin\phi}{R_0\sin\theta} & \dfrac{\cos\phi}{R_0\sin\theta} & 0 \\ \dfrac{\cos\phi\cos\theta}{R_0} & \dfrac{\sin\phi\cos\theta}{R_0} & -\dfrac{\sin\theta}{R_0} \end{pmatrix}. \tag{18.2б}$$

Подставляя элементы матрицы (18.2а–б) в (16.6), получим искомые выражения метрического тензора, определяющего евклидову метрику объемлющего пространства в сферической системе координат:

$$\left\|g^0_{i'k'}\right\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{bmatrix} \equiv I^{(1)} + R^2\left[\sin^2\theta \cdot I^{(2)} + I^{(3)}\right]. \tag{18.3}$$

Обратный (ковариантный) метрический тензор получается либо обращением тензора (18.3), либо применением формулы типа (16.6) к элементам матрицы (18.2б):

$$\left\|g_0^{i'j'}\right\| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^{-2}\sin^{-2}\theta & 0 \\ 0 & 0 & R^{-2} \end{bmatrix}. \tag{18.4}$$

Найдем базисные векторы сферической системы координат:

$$\mathbf{э}_{1'} = \partial\mathbf{x} / \partial x^{1'} = \sin\theta\cos\varphi\cdot\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\cdot\mathbf{e}_y + \cos\theta\cdot\mathbf{e}_z =$$
$$= \sin\vartheta(\cos\phi\cdot\mathbf{e}_x + \sin\phi\cdot\mathbf{e}_y) + \cos\vartheta\cdot\mathbf{e}_z; \tag{18.5а}$$

$$\mathbf{э}_{2'} = \partial\mathbf{x} / \partial x^{2'} = -R\sin\vartheta\sin\phi\cdot\mathbf{e}_x + R\sin\vartheta\cos\phi\cdot\mathbf{e}_y =$$
$$= R\sin\vartheta(-\sin\phi\cdot\mathbf{e}_x + \cos\phi\cdot\mathbf{e}_y) \tag{18.5б}$$

и, наконец,

$$\mathbf{э}_{3'} = \partial\mathbf{x} / \partial x^{3'} = R\cos\theta\cos\varphi\cdot\mathbf{e}_x + R\cos\theta\sin\varphi\cdot\mathbf{e}_y - R\sin\theta\cdot\mathbf{e}_z =$$
$$= R\cos\vartheta(\cos\phi\cdot\mathbf{e}_x + \sin\phi\cdot\mathbf{e}_y) - R\sin\vartheta\cdot\mathbf{e}_z. \tag{18.5в}$$

Вектор $\mathbf{э}_{1'}$ имеет единичную длину, поэтому $\mathbf{э}_{1'} = \mathbf{e}_{1'} \equiv \mathbf{e}_R$. Согласно формуле (18.1б),

$$\mathbf{x} = R\mathbf{e}_R . \tag{18.6а}$$

Из формулы (18.1б) следует также, что проекция вектора $\mathbf{x}$ на экваториальную плоскость равна $\mathrm{pr}_{\mathrm{E}}\left(\mathbf{x}\right) = R\sin\vartheta(\cos\phi\cdot\mathbf{e}_x + \sin\phi\cdot\mathbf{e}_y)$. Тогда легко понять, что вектор $\mathbf{э}_{2'}$ параллелен экваториальной плоскости и перпендикулярен вектору $\mathrm{pr}_{\mathrm{E}}\left(\mathbf{x}\right)$. Результат нормировки базисного вектора $\mathbf{э}_{2'}$ обозначим $\mathbf{e}_{\phi}$:

$$\mathbf{e}_{\phi} = -\sin\theta\cdot\mathbf{e}_x + \cos\theta\cdot\mathbf{e}_y = \left(1/R\cos\theta\right)\mathbf{э}_{2'} . \qquad 18.6б)$$

Обозначим теперь $\mathbf{e}'$ результат нормировки вектора $\mathrm{pr}_{\mathrm{E}}\left(\mathbf{x}\right)$: $\mathbf{e}' = \cos\phi\cdot\mathbf{e}_x + \sin\phi\cdot\mathbf{e}_y$. Тогда вектор $\mathbf{э}_{3'}$ можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{э}_{3'} = R(\cos\vartheta\cdot\mathbf{e}' - \sin\vartheta\cdot\mathbf{e}_z) . \qquad 8.6в)$$

Этот вектор лежит в «вертикальной» плоскости P (порожденной векторами $\mathrm{pr}_{\mathrm{E}}\left(\mathbf{x}\right)$ и $\mathbf{e}_{\mathrm{z}}$) и перпендикулярен вектору $\mathbf{x} = R(\sin\vartheta\cdot\mathbf{e}' + \cos\vartheta\cdot\mathbf{e}_z)$. Результат нормировки вектора $\mathbf{э}_{3'}$ обозначим $\mathbf{e}_{\vartheta}$:

$$\mathbf{e}_{\vartheta} = \cos\theta\cdot\mathbf{e}' - \sin\theta\cdot\mathbf{e}_z = \left(1/R\right)\mathbf{э}_{3'} . \tag{18.6г}$$

Базисные векторы сферической системы координат взаимно ортогональны. Поэтому нормированные векторы $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_{\phi}$ и $\mathbf{e}_{\vartheta}$ образуют систему ортов. Это, в частности, означает, что компоненты вектора ∇f в сферической системе координат можно определить равенствами

$$f_{,1'} \equiv f_R = \mathbf{e}_R\cdot\nabla f; \quad f_{,2'} \equiv f_{\varphi} = \mathbf{e}_{\varphi}\cdot\nabla f; \quad f_{,3'} \equiv f_{\theta} = \mathbf{e}_{\theta}\cdot\nabla f ,$$

при этом вытекающая из $\nabla f = f_{i'}\mathbf{e}_{i'} \equiv f_R\mathbf{e}_R + f_{\varphi}\mathbf{e}_{\varphi} + f_{\theta}\mathbf{e}_{\theta}$ запись градиента

$$\nabla f = f_R\mathbf{э}_R + \left(f_{\varphi}/R\sin\theta\right)\mathbf{э}_{\varphi} + \left(f_{\theta}/R\right)\mathbf{э}_{\theta} \tag{18.7}$$

имеет инвариантный характер.

Вычислим теперь компоненты связности $\Gamma^{i'}_{j'k'}$ (в базовом пространстве связность равна нулю). Сначала найдем три матрицы $\partial^2 x^i/\partial x^{j'}\partial x^{k'}$ ($i = 1,\ 2,\ 3$):

$$\left(\frac{\partial^2 x^1}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ & -R\cos\varphi\sin\theta & -R\sin\varphi\cos\theta \\ & & -R\cos\varphi\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial^2 x^2}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ & -R\sin\varphi\sin\theta & R\cos\varphi\cos\theta \\ & & -R\sin\varphi\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$\left(\frac{\partial^2 x^3}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta \\ & 0 & 0 \\ & & -R\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Приступаем к вычислению связности по формуле (16.15):

$$\Gamma^{i'}_{j'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{j'}\partial x^{k'}} .$$

В итоге получим

$$\left\|\Gamma^{1'}_{j'k'}\right\| = \begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi\,\sin\theta\,\sin(\varphi-\theta) & \cos\varphi\,\cos\theta\,\sin(\varphi-\theta) \\ 0 & -R\cos\varphi\,\sin\theta\,\cos(\varphi-\theta) & -R\sin\varphi\cos\theta\,\sin(\varphi-\theta) \\ 0 & 0 & -R\sin\varphi\,\sin\theta\,\cos(\varphi-\theta) - R\cos^2\theta \end{pmatrix},$$

$$\left\|\Gamma^{2'}_{j'k'}\right\| = \begin{pmatrix} 0 & 1/R & 0 \\ 0 & 0 & 2\operatorname{ctg}\theta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \left\|\Gamma^{3'}_{j'k'}\right\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos^2\theta/R \\ 0 & \text{-}\sin\theta\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для направления $\varphi = 0,\ \theta = \pi/2$ только одна компонента связности отлична от нуля: $\Gamma^{2'}_{1'2'} = 1/R$.

Уравнение луча в сферических координатах. Оставаясь в рамках римановой геометрии, мы можем прибегнуть к различным способам построения уравнения луча. Но если в данной задаче использовать стандартное уравнение геодезической (16.18), то комплект величин, которые необходимо вычислить еще до составления уравнения, поистине впечатляющ. Одна только связность состоит из 18 независимых величин. А для их вычисления нужно еще несколько таких комплектов. Проще обратиться к уравнениям (10.13а–б), которые мы перепишем в используемой здесь индексации:

$$\frac{dx^{k'}}{dt} = g^{i'k'} p_{i'},\ (k' = 1,2,3), \qquad \frac{dp_{k'}}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{i'j'}}{\partial x^{k'}} p_{i'} p_{j'},\ (k' = 1,2,3), \tag{18.8}$$

инвариантность которых (относительно замен координат) была показана в разделе «риманова хронометрия».

Предположим, что среда является изотропной. Тогда $g_{i'j'} = g^0_{i'j'}/V^2$ и $g^{i'j'} = V^2 g_0^{i'j'}$. Наиболее просто расписывается первая тройка уравнений. Используя формулу (18.4), получаем:

$$\frac{dR}{dt} = V^2\tau_R; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V^2\tau_\varphi}{R^2\sin^2\theta}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{V^2\tau_\theta}{R^2}.$$

Аналогично тому, как в § 6 мы перешли от уравнения (6.8б) к уравнению (6.9б), вторую тройку уравнений в (18.8) можно переписать так:

$$\left(d\tau_{,i'}/dt\right) + (V^2/2)\left(\partial g_0^{j'k'}/\partial x^{i'}\right)\tau_{,j'}\tau_{,k'} = (\ln V)_{,i'}.$$

Необходимо вычислить комплект величин $\partial g_0^{i'j'}/\partial x^{k'}$:

$$\partial g_0^{1'1'}/\partial x^{1'} = 0, \quad \partial g_0^{2'2'}/\partial x^{1'} = -2/R^3\sin^2\theta, \quad \partial g_0^{3'3'}/\partial x^{1'} = -2/R^3,$$

$$\partial g_0^{1'1'}/\partial x^{2'} = \partial g_0^{2'2'}/\partial x^{2'} = \partial g_0^{3'3'}/\partial x^{3'} = 0,$$

$$\partial g_0^{1'1'}/\partial x^{3'} = 0, \quad \partial g_0^{2'2'}/\partial x^{3'} = -\cos\theta/(R^2\sin^3\theta), \quad \partial g_0^{3'3'}/\partial x^{3'} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{d\tau_R}{dt} - \frac{V^2}{R^3}\left(\frac{\tau_\varphi^2}{\sin^2\theta} + \tau_\theta^2\right) = \frac{\partial}{\partial R}(\ln V),$$

$$\frac{d\tau_\varphi}{dt} = \frac{\partial}{\partial\varphi}(\ln V), \qquad \frac{d\tau_\theta}{dt} - \frac{V^2\cos\theta\,\tau_\varphi^2}{R^2\sin^3\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\ln V).$$

Начальными данными для этой системы служит комплект чисел $(R_0, \varphi_0, \theta_0, \dot{R}_0, \dot{\varphi}_0, \dot{\theta}_0)$. Этот комплект не совсем произволен, так как начальные значения производных (так же как и их текущие значения при любом *t*) должны удовлетворять уравнению эйконала.

Последнее для сферических координат определяется в соответствии с формулами (16.11) и (18.4)

$$\tau_R^2 + \frac{\tau_\varphi^2}{R^2 \sin^2\theta} + \frac{\tau_\theta^2}{R^2} = \frac{1}{V^2}.$$

Уравнение эйконала позволяет слегка упростить первое из уравнений в приведенной выше системе:

$$\frac{d\tau_R}{dt} - \left(1 - V^2\tau_R^2\right)\big) / R = \frac{\partial}{\partial R}(\ln V).$$

Предположим, что $V = V(R)$. Из уравнения $d\tau_{,\varphi} / dt = 0$ получаем $\tau_{,\varphi} = \mathrm{const} = \tau^0_{,\varphi}$. Подставляя в остальные уравнения, получаем систему из пяти уравнений

$$\frac{dR}{dt} = V^2\tau_R; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{V^2\tau_\varphi^0}{R^2\sin^2\theta}; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{V^2\tau_\theta}{R^2}; \tag{18.9а}$$

$$\frac{d\tau_R}{dt} - \left(1 - V^2\tau_R^2\right) / R = \frac{\partial}{\partial R}(\ln V); \quad \frac{d\tau_\theta}{dt} = \frac{V^2\cos\theta\,(\tau_\varphi^0)^2}{R^2\sin^3\theta}. \tag{18.9б}$$

В дальнейшем (следующей главе) эта система будет сведена к значительно более простой эквивалентной системе уравнений.

Геодезические на сфере. В этой задаче мы проиллюстрируем все возможные подходы к построению луча. Определим сферу радиуса $R = R_0$ уравнениями

$$x^1 = R_0\sin\theta\cos\varphi, \quad x^2 = R_0\sin\theta\sin\varphi, \quad x^3 = R_0\cos\theta; \quad \varphi = u^1,\ \theta = u^2.$$

Наиболее простой путь построения уравнения луча и в этом случае состоит в использовании канонических уравнений, которые для поверхности записаны в форме (16.26). Предположим, что $G_{\alpha\beta} = V^{-2}G^0_{\alpha\beta}$, где в случае сферы $\left\|G^0_{\alpha\beta}\right\|$ совпадает с соответствующей подматрицей матрицы $\left\|G^0_{ij}\right\|$ (см. выражения (18.3)):

$$\left\|G^0_{\alpha\beta}\right\| = \begin{pmatrix} R_0^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & R_0^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\left\|G_0^{\alpha\beta}\right\| = \begin{pmatrix} R_0^{-2}\sin^{-2}\theta & 0 \\ 0 & R_0^{-2} \end{pmatrix}.$$

Искомые уравнения запишутся так:

$$\frac{d\varphi}{dt} = V^2\tau_\varphi / R_0^2\sin^2\theta; \quad \frac{d\theta}{dt} = \tau_\theta V^2 / R_0^2; \quad \frac{\partial\tau_\varphi}{dt} = \frac{\partial\ln V^{-1}}{\partial\varphi}; \quad \frac{\partial\tau_\theta}{dt} - \frac{2\cos\theta}{\sin^3\theta}\tau_\varphi^2 = \frac{\partial\ln V^{-1}}{\partial\theta}. \tag{18.10}$$

При выводе уравнений геодезической с использованием связности ограничимся ситуацией, когда скорость распространения волны постоянна и равна 1. Тем самым полагаем $V = 1$, $dt = ds$, $\dot{u}^\alpha = du^\alpha / ds$. Тогда луч совпадает с геодезической в метрике, определяемой метрическим тензором $G^0_{\alpha\beta}$. Уравнение геодезической на криволинейной поверхности, характеризующейся связностью $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$, есть

$$\ddot{u}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha\dot{u}^\beta = 0.$$

Для вычисления связности для сферы по формуле (16.21)

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \left(\partial u^\mu / \partial x^i\right)\left(\partial^2 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta\right)$$

нам понадобятся две вспомогательные таблицы: таблица чисел $\partial u^\mu / \partial x^i$ и таблица чисел $\partial^2 x^i / \partial u^\alpha \partial u^\beta$. Первая таблица вычисляется согласно формулам (18.1б):

$$\left\| \frac{\partial u^\mu}{\partial x^i} \right\| = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin\phi}{R_0 \sin\theta} & \dfrac{\cos\phi}{R_0\sin\theta} & 0 \\ \dfrac{\cos\phi\cos\theta}{R_0} & \dfrac{\sin\phi\cos\theta}{R_0} & -\dfrac{\sin\theta}{R_0} \end{pmatrix}.$$

Таблицу чисел $\partial^2 x^m / \partial u^\alpha \partial u^\beta$, определяемую дифференцированием элементов матрицы (18.2), удобно разместить в трех матрицах:

$$\left\| \frac{\partial^2 x^1}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right\| = \begin{pmatrix} -R_0 \sin\theta\cos\varphi & -R_0\cos\theta\sin\varphi \\ -R_0\cos\theta\sin\varphi & -R_0\sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix}; \tag{18.10а}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 x^2}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right\| = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix}; \tag{18.10б}$$

$$\left\| \frac{\partial^2 x^3}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R_0\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{18.10в}$$

Теперь получаем искомые коэффициенты

$$\left\| \Gamma^1_{\alpha\beta} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{ctg}\theta \\ \operatorname{ctg}\theta & 0 \end{pmatrix}; \quad \left\| \Gamma^2_{\alpha\beta} \right\| = \begin{pmatrix} -(1/2)\sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Окончательно система уравнений запишется так:

$$d^2\varphi / ds^2 = -2\dot\varphi\,\dot\theta\operatorname{ctg}\theta, \tag{18.11а}$$

$$d^2\theta / ds^2 = (1/2)\dot\varphi^2 \sin 2\theta. \tag{18.11б}$$

Вычисление связности по формуле (16.25) приводит к тому же результату. С использованием таблиц (18.10а–в) находим величины $\gamma_{\lambda\alpha\beta}$:

$$\left\| \gamma_{1\alpha\beta} \right\| = \begin{pmatrix} 0 & R_0^2\sin\theta\cos\theta \\ R_0^2\sin\theta\cos\theta & 0 \end{pmatrix}; \quad \left\| \gamma_{2\alpha\beta} \right\| = \begin{pmatrix} -R_0^2\sin\theta\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а отсюда по формуле $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = G^{\mu\lambda}\gamma_{\lambda\alpha\beta}$ находим искомую связность.

Найдем решение полученной системы уравнений для каких-то начальных данных $(\varphi_0, \theta_0, \dot\varphi_0, \dot\theta_0)$. Числа $\dot\varphi_0$ и $\dot\theta_0$ не могут быть взяты произвольно: они должны удовлетворять уравнению эйконала на сфере. В данном случае уравнение эйконала естественно взять в дуальной форме

$$G_{\alpha\beta}\dot u^\alpha \dot u^\beta \equiv \dot\varphi\, R_0^2 \sin^2\theta + \dot\theta R_0^2 = 1. \tag{18.12}$$

В силу сферической симметрии, мы без ограничения общности можем считать, что точка выбрана на экваторе и либо $\dot\varphi_0$, либо $\dot\theta_0$ равны нулю. На экваторе $\theta = \pi/2$. Следовательно

$$d^2\varphi / ds^2 = 0, \quad d^2\theta / ds^2 = 0.$$

Отсюда получаем решение $\varphi = \varphi_0 + \dot\varphi_0 s; \quad \theta = \pi/2 + \dot\theta_0 s$. Положим, в частности, $\dot\theta_0 = 0$. Тогда $\theta(s) = \pi/2$. Из сопряженного уравнения эйконала получим $\dot\varphi_0 = 1/R_0$, так что $\varphi = \varphi_0 + s/R$. Точка равномерно движется по экватору, являющемуся окружностью максимального радиуса. Из сферической симметрии следует, что всякая геодезическая на сфере лежит на дуге большого радиуса.

Геометрия алгебраических поверхностей второго порядка. Основной целью этого раздела является определение гауссовой кривизны таких поверхностей, как эллипсоид, однополостной и двуполостной гиперболоиды. Для наших целей достаточно рассмотрение этих поверхностей, заданных в канонической форме, которую для удобства в последующих выкладках запишем в следующих обозначениях:

$$\frac{x_1^2}{\mu_1}+\frac{x_2^2}{\mu_2}+\frac{z^2}{\gamma}=1. \tag{18.13}$$

Предполагается, что всегда $\gamma>0$. Остальные коэффициенты могут принимать любые знаки. При положительных коэффициентах уравнение описывает эллипсоид $(K>0)$, при одном отрицательном – однополостной гиперболоид ($K<0$), при двух отрицательных – двухполостной гиперболоид ($K>0$, но обе главные кривизны отрицательны). Напомним, что символ K означает гауссову кривизну, а гауссова кривизна поверхности определяется формулой (16.33):

$$K=\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{G_{11}^0G_{22}^0\ -(G_{12}^0)^2}, \tag{18.14}$$

где $b_{\alpha\beta}=\left\langle \mathbf{x}_{u^\alpha u^\beta},\mathbf{n}\right\rangle$, где $\mathbf{n}$ – нормаль к поверхности и $\mathbf{x}_{u^\alpha}$, $\mathbf{x}_{u^\alpha u^\beta}$ – производные радиус-вектора $\mathbf{x}$ при параметрическом задании поверхности $\mathbf{x}=\mathbf{x}(u^1,u^2)$.

В силу симметрии, достаточно рассматривать поверхность только при положительных значениях z, поэтому ее можно определить так

$$z=\sqrt{\gamma}\sqrt{1-x_1^2/\mu_1-x_2^2/\mu_2}\ .$$

Если за криволинейные координаты на поверхности взять $u_1=x_1$ и $u_2=x_2$, то параметрическим заданием поверхности будет:

$$x_1=u_1,\quad x_2=u_2,\quad z=\sqrt{\gamma}\sqrt{1-u_1^2/\mu_1-u_2^2/\mu_2}\equiv f(u^1,u^2)\equiv\sqrt{\gamma}\omega(u_1,u_2). \tag{18.15}$$

Мы можем воспользоваться формулами (16.30) и сразу написать

$$G_{\alpha\beta}^0=\delta_{\alpha\beta}+\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}\frac{\partial f}{\partial u^\beta},\quad \mathbf{x}_{u^\alpha u^\beta}=(0,0,f_{u^\alpha u^\beta}).$$

Определим вектор нормали к поверхности. Его, очевидно, можно взять в виде

$$A\left(\frac{\partial f}{\partial u^1},\frac{\partial f}{\partial u^2},1\right), \tag{18.16}$$

где множитель A определяется условием нормировки

$$A=1/\sqrt{1+f_{u^1}^2+f_{u^2}^2}\ .$$

Легко видеть, что $\det(G_{\alpha\beta}^{(0)})=1/A^2$. Теперь можно выписать и коэффициенты $b_{\alpha\beta}$:

$$b_{\alpha\beta}=Af_{u^\alpha u^\beta}.$$

Таким образом,

$$K=A^4\det\left[f_{u^\alpha u^\beta}\right]. \tag{18.17}$$

Конкретный вид функции f никак не участвовал при выводе этой формулы, поэтому она является общей для любых поверхностей, которые (в окрестности точки M) можно записать в виде $z=f(x,y)$. Для функции f, определяемой формулами (18.15), имеем

$$f_{u^\alpha}=\frac{\sqrt{\gamma}u_\alpha}{\mu_\alpha\omega},\quad f_{u^\alpha u^\alpha}=-\sqrt{\gamma}\,\frac{1-(u^\beta/\mu_\beta)}{\mu_\alpha\omega^3},\quad f_{u^1u^2}=-\frac{\sqrt{\gamma}u^1u^2}{\mu_1\mu_2\omega^3}$$

(по α и β в этих формулах не суммировать!). После подстановки в формулу (18.17), получим

$$K=\gamma\,A^4\omega^{-4}/\mu_1\mu_2\,.$$

В этой формуле удобнее вместо переменных u^1 и u^2 использовать декартовы координаты точек, в данном случае x_1 и x_2. С учетом этого замечания преобразуем радикал, входящий в определение величины A:

$$\sqrt{1+f_{u^1}^2+f_{u^2}^2}=\sqrt{1+\frac{\gamma x_1^2}{\mu_1^2\omega^2}+\frac{\gamma x_2^2}{\mu_2^2\omega^2}}=\omega^{-1}\sqrt{1-x_1^2/\mu_1-x_2^2/\mu_2+\frac{\gamma x_1^2}{\mu_1^2}+\frac{\gamma x_2^2}{\mu_2^2}}\equiv\omega^{-1}B\,. \qquad (18.18)$$

Теперь видно, что гауссову кривизну можно записать и так:

$$K=\gamma/\mu_1\mu_2B^4\,. \qquad (18.19)$$

Найдем гауссову кривизну дуальной поверхности второго порядка, полученную из исходной преобразованием Лежандра. Как показано в § 10, в случае, когда исходная поверхность описывается уравнением (18.13), дуальная поверхность описывается таким же уравнением, но с обратными значениями коэффициентов μ_k и γ. Если обозначить через B^* величину, аналогичную величине B, но вычисленную в дуальной точке дуальной поверхности, то гауссова кривизна последней выразится формулой

$$K^*=\mu_1\mu_2/\gamma^2(B^*)^4$$

и, таким образом,

$$K\,K^*=1/(BB^*)^4\,. \qquad (18.20)$$

Чтобы вычислить B^*, нужно в выражении для B заменить коэффициенты μ_k и γ на обратные, а затем подставить координаты y_i дуальной точки. Последние вычисляются по формуле (10.9): $y_i=x_i/\mu_i$ (при $i=3$ полагаем $x_3=z,\mu_3=\gamma$). Следовательно,

$$B^*=\sqrt{1-\mu_1y_1^2-\mu_2y_2^2+\frac{\mu_1^2y_1^2}{\gamma}+\frac{\mu_2^2y_2^2}{\gamma}}=\sqrt{1-x_1^2/\mu_1-x_2^2/\mu_2+\frac{x_1^2}{\gamma}+\frac{x_2^2}{\gamma}}\,.$$

Теперь докажем, что формула (18.20) эквивалентна

$$K\,K^*=(\mathbf{n},\mathbf{t})^4, \qquad (18.21)$$

где $\mathbf{t}$ – вектор нормали к дуальной поверхности в дуальной точке. Выше мы исходили из представления вектора нормали в форме (18.16). Но его можно определить и из уравнения касательной к эллипсоиду (10.8), т. е. как вектор вида

$$C^{-1}(x_1/\mu_1,x_2/\mu_2,z_1/\gamma)\,,$$

где

$$C=(1/\sqrt{\gamma})\sqrt{x_1^2/\mu_1^2+x_2^2/\mu_2^2+z^2/\gamma^2}=\sqrt{1-x_1^2/\mu_1-x_2^2/\mu_2+\gamma(x_1^2/\mu_1^2+x_2^2/\mu_2^2)}=(1/\sqrt{\gamma})B\,.$$

Аналогично вектор $\mathbf{t}$ есть вектор вида

$$(C^*)^{-1}(y_1\mu_1,y_2\mu_2,z\gamma)=(C^*)^{-1}(x_1,x_2,z)\,,$$

где аналогично предыдущему $C^*=\sqrt{\gamma}B^*$.

Теперь

$$(\mathbf{n},\mathbf{t}) = (x_1^2/\mu_1 + x_2^2/\mu_2 + z^2/\gamma)/CC^* = BB^*.$$

Формула (18.21) доказана. Из нее следует сохранение знака гауссовой кривизны, а также соотношение $K^* = 1/K$ для полюсов эллипса (или гиперболоида), в которых $\mathbf{t} = \mathbf{n}$.

§ 19. Тензор кривизны и вторая вариация функционала Ферма

Тензор кривизны. Этот тензор характеризует не кривизну некоторого объекта, находящегося в римановом пространстве, но кривизну самого этого пространства, его внутреннюю геометрию. Сначала получим некоторые общие соотношения. Ковариантная производная

$$\nabla_j f_i = \frac{\partial f_k}{\partial x^j} - \Gamma^r_{kj} f_r \tag{19.1}$$

произвольного ковариантного векторного поля является двухвалентным дважды ковариантным тензором. Используя рассмотренные в § 18 правила ковариантного дифференцирования, вычисляем его ковариантную производную:

$$\nabla_i(\nabla_j f_k) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\nabla_j f_k\right) - \Gamma^r_{ij}\nabla_r f_k - \Gamma^s_{ik}\nabla_j f_s.$$

В отличие от обычных производных, смешанные ковариантные производные зависят от порядка дифференцирования. Легко понять, что разность двух смешанных производных, отличающихся только порядком дифференцирования, определяется метрическими свойствами самого пространства. Вычислим эту разность. Но сначала для удобства последующих обозначений введем операцию *альтернирования* индексов. Эта операция осуществляется по любой паре индексов. Например:

$$A_{i[jk]l\ldots} = A_{ijkl\ldots} - A_{ikjl\ldots},\quad A_i{}^{[j}{}_{k]l} = A^j_{ikl} - A^k_{ijl}.$$

Если тензор симметричен относительно альтернируемой пары индексов, то результат альтернирования по ним равен 0. Любую двухиндексную величину a_{jk} можно разложить в сумму симметричной и кососимметричной частей: $a_{jk} = \overline{a}_{jk} + \hat{a}_{jk}$, где $\overline{a}_{jk} = \overline{a}_{kj}, \hat{a}_{jk} = -\hat{a}_{kj}$. Отсюда

$$a_{[jk]} = \overline{a}_{[jk]} + \hat{a}_{[jk]} = 2\hat{a}_{jk} = -2\hat{a}_{kj} = -a_{[kj]}. \tag{19.2}$$

Применяя операцию альтернирования, получаем

$$\nabla_i\nabla_j f_k - \nabla_j\nabla_i f_k \equiv \nabla_{[i}\nabla_{j]} f_k = \frac{\partial}{\partial x^{[i}}\left(\nabla_{j]} f_k\right) - \Gamma^l_{[ij]}\nabla_l f_k - \Gamma^s_{k[i}\nabla_{j]} f_s. \tag{19.3}$$

Поскольку связность симметрична по нижней паре индексов, то второй член в правой части равен нулю. При вычислении оставшихся слагаемых опираемся на формулу (19.1). Первый член преобразуется так:

$$\frac{\partial}{\partial x^{[i}}\left(\nabla_{j]} f_k\right) = \frac{\partial}{\partial x^{[i}}\frac{\partial f_k}{\partial x^{j]}} - f_l\frac{\partial}{\partial x^{[i}}\Gamma^l{}_{j]k} - \frac{\partial f_l}{\partial x^{[i}}\Gamma^l{}_{j]k}.$$

Первое слагаемое равно нулю, так как в обычной смешанной производной порядок дифференцирования не имеет значение. Для последнего члена в формуле (19.3) имеем

$$\Gamma^s_{k[i}\nabla_{j]}f_s = \Gamma^s_{ik}\nabla_j f_s - \Gamma^s_{jk}\nabla_i f_s = \Gamma^s_{ik}\left(\frac{\partial f_s}{\partial x^j} - \Gamma^l_{sj}f_l\right) - \Gamma^s_{jk}\left(\frac{\partial f_s}{\partial x^i} - \Gamma^l_{si}f_l\right) =$$

$$= \Gamma^s_{ik}\frac{\partial f_s}{\partial x^j} - \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js}f_l - \Gamma^s_{jk}\frac{\partial f_s}{\partial x^i} + \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is}f_l = \Gamma^s_{k[i}\frac{\partial f_s}{\partial x^{j]}} - \Gamma^s_{k[i}\Gamma^l_{j]s}f_l.$$

С учетом равенства (19.2)

$$\frac{\partial f_l}{\partial x^{[i}}\Gamma^l_{j]k} = -\Gamma^l_{k[i}\frac{\partial f_l}{\partial x^{j]}}.$$

Складывая оба ненулевых слагаемых в правой части (19.3) (при этом второе берется со знаком «минус»), получаем так называемое тождество Риччи:

$$\nabla_{[i}(\nabla_{j]}f_k) = \left(\Gamma^s_{k[i}\Gamma^l_{j]s} - \frac{\partial}{\partial x^{[i}}\Gamma^l_{j]k}\right)f_l. \qquad (19.\ 4а)$$

Ковариантная производная ковариантной производной есть тензор. Тензором является и разность ковариантных производных. Таким образом, в левой части полученного равенства стоит тензор. А так как ковектор f_l тоже есть тензор, то и выражение в круглых скобках является тензором, который определяется только метрическими свойствами пространства. Удвоенное значение полученного тензора называют тензором кривизны (иногда – тензором Римана):

$$R^{\cdot\cdot\cdot l}_{ijk} = 2\left(\Gamma^s_{k[i}\Gamma^l_{j]s} - \frac{\partial}{\partial x^{[i}}\Gamma^l_{j]k}\right). \qquad (19.4б)$$

Если тот же вывод провести для контравариантного вектора, то будет получена формула

$$\nabla_{[i}\nabla_{j]}f^k = -R^{\cdot\cdot\cdot k}_{ijm}f^m = R^{\cdot\cdot\cdot k}_{jim}f^m. \qquad (19.5)$$

Тензор кривизны часто используется в полностью ковариантной форме

$$R_{ijkl} = R^{\cdot\cdot\cdot s}_{ijk}g_{sl}.$$

Отметим, что различными авторами используются разный порядок написания индексов в обозначении тензора Римана. Однако это не так существенно, поскольку $R_{ijkl} = R_{klij}$. Но порядок внутри каждой пары индексов существен, так как $R_{jikl} = -R_{ijkl}$, $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$.

Помимо тензора кривизны, для анализа и сравнения различных римановых пространств используются также тензор Риччи

$$R_{jk} = R^{\cdot\cdot\cdot i}_{ijk} \qquad (19.6а)$$

и скалярная кривизна

$$R = g^{jk}R_{jk}. \qquad (19.6б)$$

Риманово пространство имеет нулевую скалярную кривизну тогда и только тогда, когда оно евклидово. Ясно, что это имеет место только в том случае, когда метрический тензор не зависит от координат: $g_{ij} \equiv \mathrm{const}$. Непосредственной проверкой устанавливается, что в том случае, когда

$$R_{ijkl} = \psi\cdot(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il}), \quad \psi = \mathrm{const},$$

скалярная кривизна постоянна и равна $R = -6\psi$. (Действительно, $R = g^{jk}g^{il}(g_{ik}g_{jl} - g_{jk}g_{il})\psi = g^{jk}(\delta^l_k g_{jl} - 3g_{jk})\psi = -2\psi g^{jk}g_{jk} = -6\psi$, так как $g^{jk}g_{jk} = \mathrm{tr}(g^{lj}g_{jk}) =$

$= \mathrm{tr}(\delta^l_j) = 3$, $\mathrm{tr}\mathbf{A}$ есть след матрицы $\mathbf{A}$.) Пространство постоянной, отрицательной кривизны называется пространством Больяи–Чебышевского.

В двумерном случае тензор кривизны имеет всего одну независимую компоненту R_{1212} (остальные равны нулю либо выражаются через R_{1212}). Поэтому скалярная кривизна исчерпывающе описывает локальную внутреннюю геометрию двумерного пространства. В трехмерном пространстве имеется шесть независимых компонент. Неудивительно, что тензор кривизны может быть выражен через тензор Риччи. Скалярная кривизна остается весьма емкой, но уже не единственной характеристикой локальной внутренней геометрии.

Скалярная кривизна поверхности. Основным примером двумерного многообразия является поверхность в трехмерном пространстве. В силу того что риманова метрика пространства, в котором определена Σ, индуцирует на ней свою риманову геометрию ds^2_Σ (с метрическим тензором $G_{\mu\lambda}$) и связность $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$, то для поверхности могут быть определены все присущие риманову многообразию характеристики, в том числе ковариантные производные, тензор Римана, тензор Риччи и, наконец, скалярная кривизна, которая, как уже было сказано, исчерпывающе характеризует внутреннюю геометрию поверхности. С другой стороны, в § 16 были определены обычные кривизны (в том числе гауссова кривизна) произвольной гладкой поверхности Σ. Возникает вопрос о взаимоотношении этих характеристик. Найдем сначала скалярную кривизну поверхности Σ, отвечающую евклидовой метрике объемлющего пространства. Соответствующие этой метрике метрический тензор $G^0_{\mu\lambda}$ и связность поверхности, заданной функциями $x^i = x^i(u^1, u^2)$, определяются формулами (16.23–16.25). Для удобства приведем их:

$$G^0_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial x^i}{\partial u^\beta}, \quad \gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = G_0^{\mu\lambda}\gamma_{\alpha\beta\lambda}, \quad \gamma_{\alpha\beta\lambda} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\lambda}\frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}.$$

Как только что было сказано, наличие связности позволяет ввести для рассматривамой поверхности сначала ковариантные производные $\nabla_\alpha f^\beta$, а затем и тензор Римана $r^{\cdot\cdot\cdot\mu}_{\alpha\beta\lambda}$, который вводится точно так же, как он был введен выше для произвольного риманова пространства:

$$\nabla_{[\alpha}\nabla_{\beta]} f_\gamma = r^{\cdot\cdot\cdot\delta}_{\alpha\beta\gamma} f_\delta, \quad r^{\cdot\cdot\cdot\mu}_{\alpha\beta\lambda} = 2\left(\gamma^\delta_{\lambda[\alpha}\gamma^\mu_{\beta]\delta} - \frac{\partial}{\partial u^{[\alpha}}\gamma^\mu_{\beta]\lambda}\right).$$

Перейдем к полностью ковариантному представлению тензора кривизны $r_{\alpha\beta\lambda\mu}$. Выше говорилось, что в случае двумерного многообразия тензор Римана имеет только одну независимую компоненту, в данном случае r_{1212}, через которую выражается и тензор Риччи $r_{\beta\mu}$, и скалярная кривизна поверхности r:

$$r = G_0^{\beta\lambda} r_{\beta\mu} = G_0^{\beta\lambda} r^{\alpha}_{\alpha\beta\lambda}. \tag{19.7}$$

Докажем следующее утверждение: *скалярная кривизна поверхности совпадает с удвоенной ее гауссовой кривизной.*

Введем присоединенную к поверхности Σ декартову систему координат (ξ, η, ζ), в которой плоскость $\zeta = 0$ касается поверхности, а в окрестности точки касания поверхность описывается формулой $\zeta = f(\xi, \eta)$. Вычислим скалярную кривизну в точке

M_0 касания поверхности с плоскостью $\zeta = 0$. Тогда, применяя формулу (16.30) к используемой параметризации поверхности, получаем

$$G^0_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial f}{\partial \xi^\beta}, \quad \xi^1 = \xi, \ \ \xi^2 = \eta .$$

Поскольку в точке M_0 все $\partial f / \partial \xi^\alpha = 0$, а следовательно, и $\partial G^0_{\alpha\beta} / \partial \xi^\alpha = 0$, то в этой точке $\gamma^\lambda_{\alpha\beta} = 0$. Отсюда выводится

$$-r^{\cdots\mu}_{\alpha\beta\lambda} = \frac{\partial \gamma^\mu_{\beta\lambda}}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial \gamma^\mu_{\alpha\lambda}}{\partial \xi^\beta} .$$

Далее

$$r_{\alpha\beta\mu\lambda} = G^0_{\mu\nu}\frac{\partial \gamma^\nu_{\alpha\lambda}}{\partial \xi^\beta} - G^0_{\mu\nu}\frac{\partial \gamma^\nu_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\lambda} = \frac{\partial (G^0_{\mu\nu}\gamma^\nu_{\alpha\lambda})}{\partial \xi^\beta} - \frac{\partial (G^0_{\mu\nu}\gamma^\nu_{\alpha\beta})}{\partial \xi^\lambda} = \frac{\partial \gamma_{\mu;\alpha\lambda}}{\partial \xi^\beta} - \frac{\partial \gamma_{\mu;\alpha\beta}}{\partial \xi^\lambda} .$$

При вычислении $\gamma_{\alpha\beta\mu}$ мы будем использовать общую формулу типа (16.16а), содержащую производные метрического тензора (в данном случае фундаментального тензора $G^0_{\alpha\beta}$). В итоге получим

$$r_{\alpha\beta\mu\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G^0_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\mu \partial \xi^\lambda} + \frac{\partial^2 G^0_{\mu\lambda}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\beta} - \frac{\partial^2 G^0_{\beta\mu}}{\partial \xi^\alpha \partial \xi^\lambda} - \frac{\partial^2 G^0_{\alpha\lambda}}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\mu}\right).$$

В частности,

$$r_{1212} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G^0_{12}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 G^0_{12}}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 G^0_{11}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 G^0_{22}}{\partial \eta^2}\right)$$

и

$$r_{2112} = r_{1221} = -r_{1212}; \quad r_{1111} = r_{2222} = 0; \quad r_{2121} = r_{1212}; \quad r_{1122} = r_{2211} = 0.$$

Используя выписанное выше выражение для $G^0_{\alpha\beta}$, получаем в точке M_0:

$$\frac{\partial^2 G^0_{11}}{\partial \eta^2} = 2 f^2_{\xi\eta}; \quad \frac{\partial^2 G^0_{22}}{\partial \xi^2} = 2 f^2_{\xi\eta}; \quad \frac{\partial^2 G^0_{12}}{\partial \xi\, \partial \eta} = f_{\xi\xi} f_{\eta\eta} + f^2_{\xi\eta} .$$

Следовательно, $r_{1212} = f_{\xi\xi} f_{\eta\eta} - f^2_{\xi\eta}$, и если учесть формулу (16.32), то $r_{1212} = \det\left[f_{\xi^\alpha \xi^\beta} \right] = K$. Это равенство верно только в используемой нами системе координат (поскольку K – скаляр, а r_{1212} – компонента тензора). Вычислим скалярную кривизну. Правая часть формулы (19.7) состоит из слагаемых $G_0^{\beta\lambda} G_0^{\alpha\mu} r_{\alpha\beta\mu\lambda}$. Как только что было выяснено, большинство из них обращается в нуль. Оставляя только отличные от нуля слагаемые, получаем:

$$r = G_0^{11} G_0^{22} r_{1212} + G_0^{22} G_0^{11} r_{2121} + G_0^{12} G_0^{21} r_{1221} + G_0^{21} G_0^{12} r_{2112} = 2 \det\left[G_0^{\alpha\beta} \right] K ,$$

а так как в точке M_0 $G^0_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, $G_0^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$, то $r = 2K$, что и требовалось доказать.

Кривизна конформно-евклидовой хронометрии – 1. Напомним, что конформно-евклидовым является риманово пространство с метрикой $dt^2 = ds^2 / V^2(\mathbf{x})$, т. е. среда с переменной скоростью, изотропная в каждой точке.

Найдем тензор кривизны для неоднородного изотропного пространства в декартовых координатах. Распишем формулу (19.4б) более подробно:

$$R_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot l} = 2\left(\Gamma_{ik}^{s}\Gamma_{js}^{l} - \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{jk}^{l} - \left(\Gamma_{jk}^{s}\Gamma_{is}^{l} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ik}^{l}\right)\right).$$

Связность в этом пространстве определяется формулой (16.19). Преобразуем ее слегка:

$$\Gamma_{ij}^{m} = -\frac{1}{V}\left(V_i\delta_j^m + V_j\delta_i^m - V_s\delta^{ms}\delta_{ij}\right), \tag{19.8}$$

где $V_i = \partial V / \partial x^i$. Прямая подстановка дает

$$\Gamma_{ik}^{s}\Gamma_{js}^{l} - \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma_{jk}^{l} = -\frac{1}{V}\left(V_{ij}\delta_k^l + V_{ik}\delta_j^l - V_{is}\delta^{ls}\delta_{jk} - \frac{V_jV_k}{V}\delta_i^l + \frac{V_kV_r}{V}\delta^{lr}\delta_{ij} + \frac{\left|\nabla V\right|^2}{V}\delta_j^l\delta_{ik} - \frac{V_iV_k}{V}\delta_j^l\right),$$

где $V_{ij} = \partial^2 V / \partial x^i \partial x^j$. Далее мы осуществляем альтернирование по индексам i и j, учитывая, что

$$V_{[ij]} = 0, \quad \frac{V_k}{V}(V_{[i}\delta_{j]}^l - V_{[j}\delta_{i]}^l) = 0, \quad \delta_{[ij]} = 0,$$

получим

$$\Gamma_{k[i}^{s}\Gamma_{j]s}^{l} - \frac{\partial}{\partial x^{[i}}\Gamma_{j]k}^{l} = -\frac{1}{V}\left(V_{ik}\delta_j^l - V_{jk}\delta_i^l - V_i^l\delta_{jk} + V_j^l\delta_{ik} - \frac{\left|\nabla V\right|^2}{V}\delta_j^l\delta_{ik} + \frac{\left|\nabla V\right|^2}{V}\delta_i^l\delta_{jk}\right).$$

Если введем обозначения

$$\Lambda_{ij} = V_{ij} - \frac{1}{2}\frac{\left|\nabla V\right|^2}{V}\delta_{ij} \text{ и } \Lambda_i^j = V_i^j - \frac{1}{2}\frac{\left|\nabla V\right|^2}{V}\delta_i^j$$

(где $V_i^j = V_{is}\delta^{sj}$), то окончательно получим

$$R_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot l} = -\left(1/V\right)\left(\Lambda_{ik}\delta_j^l - \Lambda_{jk}\delta_i^l - \Lambda_i^l\delta_{jk} + \Lambda_j^l\delta_{ik}\right).$$

Если перейти к полностью ковариантному представлению тензора кривизны $R_{ijkl} = R_{ijk}^{s}g_{sl} = V^{-2}R_{ijk}^{s}\delta_{sl}$, то формула становится более симметричной

$$R_{ijkl} = -\frac{1}{V^3}\left(\Lambda_{ik}\delta_{jl} - \Lambda_{jk}\delta_{il} - \Lambda_{il}\delta_{jk} + \Lambda_{jl}\delta_{ik}\right) = -\frac{1}{V^3}\left(\Lambda_{k[i}\delta_{j]l} - \Lambda_{l[i}\delta_{j]k}\right). \tag{19.9}$$

Заметим, что выражение в скобках справа является альтернированием по паре индексов k и r.

Примечание. Формула для тензора кривизны конформно-евклидова пространства получена для декартовой системы координат. Но, в силу тензорного характера комплекта R_{ijkl}, легко найти его выражение в любой криволинейной системе координат $x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3)$, действуя по стандартным правилам:

$$R'_{i'j'k'l'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^l}{\partial x^{l'}}R_{ijkl}.$$

Подставляя в формулу (19.9), получаем

$$R'_{i'j'k'l'} = -\frac{1}{V^3}\left(\Lambda'_{k'[i'}g_{j']l'}^{(0)} - \Lambda'_{l'[i'}\delta_{j']k'}\right), \tag{19.10}$$

где

$$\Lambda'_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}V_{ij} - \frac{1}{2}\frac{\left|\nabla V\right|^2}{V}g_{i'j'}^{(0)}; \quad g_{i'j'}^{(0)} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}.$$

Следующие две формулы запишем для $g_{ij} = V^{-2}\delta_{ij}$. Применяя формулу (19.6а) к (19.10) и используя $\delta_i^i = 3$, получим

$$R_{jk} = R_{ijk}^{\cdot\cdot i} = -\frac{1}{V}\left(2\Lambda_{jk} - \Lambda_{jk}\delta_i^i - \Lambda\delta_{jk}\right) = \frac{1}{V}\left(\Lambda_{jk} + \Lambda\delta_{jk}\right), \tag{19.11}$$

где

$$\Lambda = \delta^{jk}\Lambda_{jk} = \Delta V - \frac{3}{2}\frac{|\nabla V|^2}{V}.$$

Согласно формуле (19.6б), находим скалярную кривизну:

$$R = 4V\Lambda. \tag{19.12}$$

Отметим, что размерность кривизны есть $1/c^2$. Этот неожиданный факт следует из того, что рассматривается хронометрия с элементарным интервалом, имеющим размерность времени. Если бы элементарный интервал имел размерность длины, то размерность кривизны была бы (как и в случае гауссовой кривизны) $1/\text{м}^2$.

Кривизна конформно-евклидовой хронометрии – 2. Отметим следующее тождество:

$$\Lambda_{jk} = VR_{jk} - \frac{1}{4V}Kg_{jk}^{(0)} \tag{19.13а}$$

или

$$V_{ij} + \frac{1}{2}\frac{|\nabla V|^2}{V}\delta_{ij} = VR_{jk} - \frac{1}{4V}Kg_{jk}^{(0)}. \tag{19.13б}$$

Последнее равенство можно рассматривать как дифференциальное уравнение для поля скоростей, определяющего в среде заданный тензор Риччи, а следовательно, и тензор Римана. Поскольку конформно-евклидова геометрия представляет довольно узкий класс римановых пространств, то далеко не каждая тензорная функция $R_{jk}(\mathbf{x})$ может быть реализована. Насколько нам известно, проблема реализации заданной тензорной функции $R_{jk}(\mathbf{x})$ в конформно-евклидовой геометрии никем не рассматривалась. Но некоторые достаточно простые факты не требуют сложных исследований. Приведем их.

1° *Локально (т. е. в окрестности некоторой точки) задача реализации произвольного тензора Риччи всегда имеет решение.* А именно любой тензор $R_{jk}(\mathbf{x})$ реализуется в заданной точке.

Достаточно рассмотреть поле скоростей:

$$V = V_0 + (1/2)(\mathbf{x}\cdot\mathbf{Bx}) \equiv V_0 + (1/2)b_{ij}x^i x^j \tag{19.14}$$

и поставить задачу реализации произвольного тензора R_{jk} в начале координат. В рассматриваемой ситуации $\Lambda_{jk} = b_{jk}$, стало быть, для реализации тензора R_{jk} нужно положить $b_{jk} = V_0\left(R_{jk} - \delta_{jk}\sum R_{ii}/4\right)$. Приведем заодно формулы для тензора Риччи и скалярной кривизны поля скоростей (19.14) в произвольной точке $\mathbf{x}$:

$$\begin{gathered}R_{jk}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_0 + (1/2)b_{ij}x^i x^j}\left[b_{jk} + \frac{\sum(b_{ij}x^j)^2}{2V_0 + b_{ij}x^i x^j}\delta_{jk} + \left(\sum b_{ii} + \frac{3\sum(b_{ij}x^j)^2}{2V_0 + b_{ij}x^i x^j}\right)\right],\\ R(\mathbf{x}) = 4\left(\left(V_0 + \frac{1}{2}b_{ij}x^i x^j\right)\sum b_{ii} + \frac{3}{2}\sum(b_{ij}x^j)^2\right).\end{gathered} \tag{19.15}$$

Если матрица **B** отрицательно определена, то скалярная кривизна отрицательна на всей области определения данного поля скорости:

$$V_0 - (1/2)\left|(\mathbf{x}\cdot\mathbf{Bx})\right| \ge 0 .$$

Если же матрица **B** положительно определена, то скалярная кривизна, будучи положительной в некоторой окрестности начала координат, вообще говоря, может иметь разные знаки.

2° *Скалярная кривизна поля скоростей тождественно равна нулю тогда и только тогда, когда* V = const. Это утверждение является следствием из известной в римановой геометрии (и уже упомянутой выше) теоремы, согласно которой кривизна равна нулю тогда и только тогда, когда пространство является евклидовым.

3° *Скалярная кривизна отрицательна и постоянна, если поле скоростей характеризуется постоянным градиентом* ∇V = const.

Скалярная кривизна есть инвариант, не зависящий от системы координат. Поэтому примем, что используется декартова система координат с осью z, направленной вдоль градиента. Тогда поле скорости можно определить формулой вида $V = V_0(1+\beta z)$, следовательно, $V_{ij} = 0$ и

$$\Lambda = -3(V_0\beta)^2 / 2V .$$

Таким образом, $R = -6(V_0\beta)^2$. Поскольку в рассматриваемой среде величина $V_0\beta = \left|\mathrm{grad} V\right| = \mathrm{const}$, то данная среда является римановым пространством постоянной кривизны. Можно сделать (пока интуитивный) вывод, что любой луч, а также фронт волны из точечного источника в такой среде должны быть искривлены одинаково в каждой точке. А это означает, что лучи суть окружности, а фронты суть сферы.

Вторая вариация функционала Ферма. Согласно формуле (15.3), вторая вариация для произвольного лагранжиана L есть

$$G_\gamma(\mathbf{z},\mathbf{h}) = \int_a^b < \mathbf{J}_L\mathbf{h}(t), \mathbf{z}(t) > dt ,$$

где

$$(\mathbf{J}_L\mathbf{h})_i = \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} h^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial \dot{x}^j} \dot{h}^j - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} h^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right),$$

а скалярное произведение $\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$ определено в метрике риманова пространства. При этом лагранжианом, отвечающим метрике риманова пространства, является функция $L_0 = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}$. С аналитической точки зрения удобно, однако, перейти к функции $L_1 = L_0^2/2 = (1/2)g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$, воспользовавшись формулой (15.5):

$$(\mathbf{J}_{L_0}\mathbf{h})_i = (\mathbf{J}_{L_1}\mathbf{h})_i + \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x^j} h^j + \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right).$$

Наша задача состоит в доказательстве того факта, что в римановой геометрии (как и в изотропном пространстве) достаточно короткая геодезическая является минималью. Доказательство будет состоять в том, что на достаточно короткой геодезической

$$\int_0^a \left\langle \mathbf{J}_{L_1}\mathbf{h}(t), \mathbf{h}(t)\right\rangle dt > 0 ,$$

а величина

$$\int_0^a \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^i} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x^j} h^j + \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right) h^i dt \sim o(a)a\,. \tag{19.16}$$

При вычислении второй вариации действия S_1, отвечающего лагранжиану L_1, удобно не пользоваться готовыми формулами, а осуществить вывод заново, в том числе и вывод формулы для первой вариации. Для заданн8iых возмущений $\mathbf{h}_1(t)$ и $\mathbf{h}_2(t)$ траектории γ определим функции $x^i = \alpha^i(u_1, u_2, t)$ такие, что

$$\gamma: \ \alpha^i(0,0,t) = x^i(t), \quad \left.\frac{\partial \alpha^i}{\partial u_1}\right|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}} = h_1^i(t), \quad \left.\frac{\partial \alpha^i}{\partial u_2}\right|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}} = h_2^i(t) \tag{19.17}$$

(что всегда можно сделать). Вектор скорости определяется равенством $\dot{x}^i = \partial\alpha^i / \partial t$ при $u_1 = u_2 = 0$. Ясно, что при фиксированных u_1 и u_2 вектор-функция $\boldsymbol{\alpha}(u_1, u_2, t)$ определяет возмущенную траекторию. Следовательно, вторую вариацию действия S_1 можно определить равенством

$$\boldsymbol{\delta}^2 S_1 = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} S_1[\boldsymbol{\alpha}(u_1, u_2, t]\Bigg|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}},$$

где

$$S_1[\boldsymbol{\alpha}] = \frac{1}{2}\int_0^a \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t}, \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} \right\rangle dt\,.$$

Продифференцируем по u_2. В силу ограниченности подынтегрального выражения, возможно интегрирование под знаком интеграла. В силу того, что подынтегральное выражение есть скаляр (т. е. величина, инвариантная относительно замены координат), дифференцирование осуществляется по правилам ковариантного (абсолютного) дифференцирования (см. § 17, в частности формулу (17.14)):

$$\boldsymbol{\delta} S_1[\boldsymbol{\alpha}] = \int_0^a \left\langle \frac{D}{\partial u_2}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t}, \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} \right\rangle dt\,.$$

Для дальнейшего нам нужна следующая формула:

$$\frac{D}{\partial u_r}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial u_r}. \tag{19.18}$$

Действительно, обращаясь к формуле (17.14), имеем

$$\frac{D}{\partial u_r}\frac{\partial \alpha^i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u_r}\frac{\partial \alpha^i}{\partial t} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial \alpha^k}{\partial t}\frac{\partial \alpha^j}{\partial u_r} = \frac{\partial^2 \alpha^i}{\partial t\, \partial u_r} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial \alpha^k}{\partial t}\frac{\partial \alpha^j}{\partial u_r} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \alpha^i}{\partial u_r} + \Gamma^i_{jk}\frac{\partial \alpha^j}{\partial t}\frac{\partial \alpha^k}{\partial u_r} = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \alpha^i}{\partial u_r}$$

(в последнем равенстве использовалась симметричность связности по двум нижним индексам). Следовательно, первую вариацию можно записать следующим образом:

$$\boldsymbol{\delta} S_1[\boldsymbol{\alpha}] = \int_0^a \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial u_2}, \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} \right\rangle dt\,.$$

Интегрируя по частям и используя тот факт, что на концах интервала интегрирования всегда $\mathbf{h}_2 \equiv \partial\boldsymbol{\alpha} / \partial u_2 = 0$, получаем еще одно выражение первой вариации:

$$\boldsymbol{\delta} S_1[\boldsymbol{\alpha}] = -\int_0^a \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial u_2}, \frac{D}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} \right\rangle dt \,. \tag{19.19}$$

Приступим к вычислению второй вариации:

$$G_\gamma(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \boldsymbol{\delta}^2 S_1[\boldsymbol{\alpha}(u_1, u_2, t)]\Big|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}} = \frac{\partial}{\partial u_1}\boldsymbol{\delta} S_1[\boldsymbol{\alpha}(u_1, u_2, t)]\Big|_{\substack{u_1=0\\u_2=0}} .$$

Применяя к выражению (19.19) абсолютное дифференцирование по u_1, получаем:

$$\boldsymbol{\delta}^2 S_1[\boldsymbol{\alpha}] = -\int_0^a \left\langle \frac{D}{\partial u_1}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial u_2},\, \frac{D}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^a \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial u_2},\, \frac{D}{\partial u_1}\frac{D}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial t} \right\rangle dt \,.$$

Теперь положим $u_1 = u_2 = 0$. Согласно формуле (19.17),

$$G_\gamma(\mathbf{h}_1,\, \mathbf{h}_2) = \int_0^a \left\langle \frac{D}{\partial u_1}\mathbf{h}_2, \frac{D}{dt}\dot{\mathbf{x}} \right\rangle dt - \int_0^a \left\langle \mathbf{h}_2, \frac{D}{\partial u_1}\frac{D}{dt}\dot{\mathbf{x}} \right\rangle dt = -\int_0^a \left\langle \mathbf{h}_2, \frac{D}{\partial u_1}\frac{D}{dt}\dot{\mathbf{x}} \right\rangle dt$$

(здесь учитывается, что при $u_1 = u_2 = 0$ выполняется уравнение геодезической $D\dot{\mathbf{x}}/dt = 0$). Для придания второй вариации окончательной формы нам понадобится тождество Риччи для абсолютных производных. Воспользуемся тем, что если ξ есть вектор касательной на кривой $\mathbf{x}(s)$, то

$$\frac{dU^i}{ds} = \xi^i \frac{\partial U^i}{\partial x^i}$$

и, следовательно,

$$\frac{DU^k}{ds} = \xi^i \frac{\partial U^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{il} U^l \xi^i = \xi^i \nabla_i U^k .$$

Далее имеем следующую цепочку равенств:

$$\left(\frac{D}{\partial s_1}\frac{D}{ds_2} - \frac{D}{\partial s_2}\frac{D}{\partial s_1}\right) f^k = \left(\xi_1^i \nabla_i (\xi_2^j \nabla_j) - \xi_2^i \nabla_i (\xi_1^j \nabla_j)\right) f^k =$$
$$= \xi_1^i \xi_2^j \left(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i\right) f^k + \left(\xi_1^i \nabla_i \xi_2^j - \xi_2^i \nabla_i \xi_1^j\right) \nabla_j f^k .$$

Согласно формуле (19.5), первое слагаемое равно $-R^{\cdot\cdot\cdot k}_{ijm}\xi_1^i \xi_2^j f^m = R^{\cdot\cdot\cdot k}_{jim}\xi_1^i \xi_2^j f^m$. Последнее выражение можно записать в инвариантной форме как $R(\xi_2, \xi_1)\mathbf{f}$, полагая $[R(\xi_1, \xi_2)\mathbf{f}]^k =$ $R^{\cdot\cdot\cdot k}_{ijl}\xi_1^i \xi_2^j f^l$ при $R(\xi_2, \xi_1)\mathbf{f} = -R(\xi_1, \xi_2)\mathbf{f}$. Второе слагаемое, очевидно, совпадает с

$$\left(\frac{D\xi_2^j}{ds_1} - \frac{D\xi_1^j}{ds_2}\right)\nabla_j f^k .$$

В нашем случае $s_1 = u_1,\ s_2 = t,\ \xi_1 = \mathbf{h}_1,\ \xi_2 = \mathbf{f} = \dot{\mathbf{x}}$. Согласно (19.18) $D\xi_2 / ds_1 \equiv D\dot{\mathbf{x}} / du_1 =$ $= D\mathbf{h}_1 / dt \equiv D\xi_1 / ds_2$. Следовательно, это слагаемое обращается в нуль и

$$\left(\frac{D}{\partial u_1}\frac{D}{dt} - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial u_1}\right)\dot{\mathbf{x}} = R(\dot{\mathbf{x}},\, \mathbf{h}_1)\mathbf{f}$$

или

$$\frac{D}{\partial u_1}\frac{D}{dt}\dot{\mathbf{x}} = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial u_1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{R}(\dot{\mathbf{x}},\, \mathbf{h}_1)\dot{\mathbf{x}} \,. \tag{19.20}$$

Таким образом,

$$G_\gamma(\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2) = -\int_0^a \left\langle \frac{D^2\mathbf{h}_1}{\partial t^2} + \mathbf{R}(\dot{\mathbf{x}},\mathbf{h}_1)\dot{\mathbf{x}},\mathbf{h}_2 \right\rangle dt. \tag{19.21}$$

Теперь покажем, что не только в изотропной среде, но и в эллипсоидально-анизотропной, достаточно короткая геодезическая является минималью. Полагая $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_2 = \mathbf{h}$, разбивая интеграл на два и интегрируя первый из них по частям, получаем:

$$G_\gamma(\mathbf{h},\mathbf{h}) = \int_0^a \left\langle \frac{D\mathbf{h}}{\partial t}, \frac{D\mathbf{h}}{\partial t} \right\rangle dt - \int_0^a \left\langle R(\dot{\mathbf{x}},\mathbf{h})\dot{\mathbf{x}},\mathbf{h} \right\rangle dt. \tag{19.22}$$

Под знаком первого интеграла стоит невырожденная квадратичная форма. Ее невырожденность следует из того, что вектор $\mathbf{h}$ не является постоянным на интервале (0, a), поскольку обращается в нуль на концах интервала и отличен от нуля внутри. При малых a этот интеграл имеет оценку $a\cdot\mathrm{const}$ при $a>0$. Под знаком второго интеграла стоит величина $R^i_{jkl}h^k\dot{x}^j\dot{x}^l g_{ir}h^r$. Для доказательства минимальности возмущенная траектория может быть взята сколь угодно близкой к геодезической. Поэтому мы можем взять $h^i \sim o(a)$, вследствие чего второй интеграл имеет оценку $\sim a\left|o\left(a\right)\right|^2\cdot\mathrm{const}$. Нам остается убедиться в справедливости оценки (19.16). В результате простых преобразований интеграл в левой части формулы (19.16) сводится к сумме следующих интегралов:

$$\int_0^a \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial x^j}h^j\right)h^i dt - \int_0^a \frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^i}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^j}\dot{h}^i\dot{h}^j dt - \int_0^a \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \dot{x}^j}\right)\dot{h}^j h^i dt.$$

Первый и третий интегралы, очевидно, имеют оценку типа $a\cdot o(a)\cdot\mathrm{const}$. Остается рассмотреть второй интеграл. Так как $L_1 = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$, то нам необходимо рассмотреть интеграл

$$-\int_0^a \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}(g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l)\frac{\partial}{\partial \dot{x}^j}(g_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n)\dot{h}^i\dot{h}^j dt = -\int_0^a (g_{in}\dot{x}^n\dot{h}^i)(g_{mj}\dot{x}^m\dot{h}^j)dt = -\int_0^a (g_{ij}\dot{x}^i\dot{h}^j)^2 dt.$$

Выбирая возмущения $\mathbf{h}_1(t)$ и $\mathbf{h}_2(t)$, мы были ограничены только одним условием: функции $\dot{\mathbf{x}}(t)$, $\mathbf{h}_1(t)$ и $\mathbf{h}_2(t)$ должны быть линейно независимы. В частности, нисколько не ограничивая себя в общности, мы может выбрать эти функции так, что при каждом значении t они образуют ортогональный репер в римановой метрике: $g_{ij}\dot{x}^i h^j_r = 0$. Следовательно, исследуемый интеграл равен нулю. Минимальность достаточно короткой геодезической доказана.

Уравнение Якоби. Из формулы (19.21) следует, что особая ситуация возникает, если векторное поле $\mathbf{h}_1(t) = \mathbf{h}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(D^2\mathbf{h}/dt^2\right) + \mathbf{R}(\dot{\mathbf{x}},\mathbf{h})\dot{\mathbf{x}} = 0.$$

Это векторное уравнение является частным случаем (при $L = L_1$) системы скалярных уравнений (15.4), которые называются уравнениями Якоби. Напомним, что всякое векторное поле $\mathbf{U}$, удовлетворяющее этому уравнению, называется якобиевым. Введение этого поля оправдывается следующим условием: вторая вариация на интервале (0, a) вырождена тогда и только тогда, когда найдется якобиево поле $\mathbf{U}(t)$ на геодезической, которое обращается в нуль на концах этого интервала.

§ 20. Лучи – геодезические финслерова пространства

Как сказано выше, риманова геометрия имеет не слишком большое пересечение с геометрией упругих анизотропных сред. Известным расширением средств и понятий римановой геометрии является так называемая финслерова геометрия. Строго говоря, существуют различные варианты построения финслеровых пространств, хотя исходные посылки у них одинаковы. Задачей этого параграфа является установление связи между классическим вариантом финслеровой геометрии и анизотропными средами. Классическим здесь считается тот вариант финслеровой геометрии, который изложен в первых двух главах книги Х. Рунда [10]. В последнем подразделе этого параграфа дано доказательство теоремы о вложении финслеровой геометрии в риманову для заданного пучка лучей, согласно которой имеется возможность использовать технику римановой геометрии для изучения особенностей конкретных пучков лучей, являющихся геодезическими в финслеровой геометрии.

Основные понятия финслеровой геометрии. Финслерова геометрия родилась в связи с развитием вариационного исчисления, как ответ на естественный вопрос: какая геометрия возникнет, если в качестве метрики использовать произвольный лагранжиан? Пространство F называется *финслеровым пространством*, если расстояние между близкими точками x^i и $x^i + dx^i$ определяется равенством

$$ds = F(x^i, dx^i),$$

где функция $F(x^i, \dot{x}^i)$ удовлетворяет приведенным ниже свойствам.

A. Функция $F(x^i, \dot{x}^i)$ положительно однородна степени 1 по $\dot{x}^i$:

$$F(x^i, k\dot{x}^i) = kF(x^i, \dot{x}^i) \quad (k > 0).$$

Дополнительно предполагается, что $F(x^i, -\dot{x}^i) = F(x^i, \dot{x}^i)$.

B. Функция $F(x^i, \dot{x}^i)$ положительна, если не все $\dot{x}^i$ одновременно обращаются в нуль:

$$F(x^i, \dot{x}^i) > 0 \quad \text{при} \quad \sum (\dot{x}^i)^2 \neq 0.$$

C. Квадратичная форма

$$F_{\dot{x}^j\dot{x}^k}(x^i, \dot{x}^i)\xi^j\xi^k \equiv \frac{\partial^2 F(x^i, \dot{x}^i)}{\partial\dot{x}^j\,\partial\dot{x}^k}\xi^j\xi^k \tag{20.1}$$

неотрицательно определена, при этом знак равенства в

$$\frac{\partial^2 F(x^i, \dot{x}^i)}{\partial\dot{x}^j\,\partial\dot{x}^k}\xi^j\xi^k \geq 0 \tag{20.2}$$

имеет место только при $\xi^i = \lambda\dot{x}^i$.

Заметим, что обращение в нуль квадратичной формы (20.1) при $\xi^i = \lambda\dot{x}^i$ следует из того, что функция $\partial F(x^i, \dot{x}^i)/\partial\dot{x}^j$ является однородной степени 0 (см. формулу Эйлера (5.3)). В § 14, посвященном лагранжеву формализму, показано, что соответствующая квадратичная форма, построенная по функции $F^2(x^i, \dot{x}^i)$, положительно определена:

$$\frac{\partial^2 F^2(x^i, \dot{x}^i)}{\partial\dot{x}^j\,\partial\dot{x}^k}\xi^j\xi^k > 0. \tag{20.3}$$

Как показано в теории выпуклых функций, условие (20.2) означает, что метрическая функция $F(x^i, \dot{x}^i)$ является выпуклой по аргументу $\dot{x}^i$. Напомним определения, связанные с понятием выпуклости. Область D в пространстве переменных u^i называется *выпуклой*, если вместе с двумя любыми точками она содержит и отрезок, соединяющий эти точки. Функция $f(u^i)$ выпукла на выпуклой области D, если она определена всюду на D и если для всех двух пар точек u^i_A и u^i_B:

$$f\left(\left(u^i_A + u^i_B\right)/2\right) \le \left[f(u^i_A) + f(u^i_B)\right]/2 .$$

Если функция $f(u^i)$ однородна первой степени по u^i, то последнее неравенство превращается в следующее:

$$f\left(u^i_A + u^i_B\right) \le f(u^i_A) + f(u^i_B) .$$

Если ввести точку C с радиусом-вектором $u^i_C = u^i_A + u^i_B$, то последнее неравенство можно трактовать как неравенство треугольника

$$\rho(O, C) \le \rho(O, A) + \rho(A, C) .$$

Тем самым показано, что условия (**A**–**C**) обеспечивают выполнение неравенства треугольника для функции $F(x^i, \dot{x}^i)$:

$$F\left(x^i, \dot{x}^i_A + \dot{x}^i_B\right) \le F(x^i, \dot{x}^i_A) + F(x^i, \dot{x}^i_B) . \qquad (20.4)$$

Введем функцию пар точек в касательном пространстве

$$\rho(A, B) = F(x^i, \left|\dot{x}^i_A - \dot{x}^i_B\right|) . \qquad (20.5)$$

Она удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства (положительность, симметричность и неравенство треугольника). Линейное векторное пространство с метрикой (20.5) называется пространством Минковского. Если пространство с римановой геометрией локально устроено как евклидово пространство, то финслерово пространство локально устроено как пространство Минковского.

Уравнение

$$F(x^i, \dot{x}^i) = 1 \qquad (20.6)$$

при фиксированных значениях x^i представляет собой поверхность в касательном пространстве $T_{\mathbf{x}}$. Поскольку эта поверхность (ее называют индикатрисой) есть множество векторов единичной длины (в норме $\left|x^i\right| = F(x^i, \dot{x}^i)$), то индикатриса играет роль единичной сферы пространства Минковского $T_{\mathbf{x}}$. Докажем, что индикатриса выпукла и ограничивает выпуклое тело в касательном пространстве. Имеет место теорема:

Теорема. Элементы из $T_{\mathbf{x}}$, удовлетворяющие неравенству

$$F(x^i, \dot{x}^i) \le 1 \quad (x^i = \mathrm{const}), \qquad (20.7)$$

являются внутренними или граничными точками выпуклого тела, граница которого задается уравнением (20.6).

Действительно, из условия **A** (и произвольности k) следует, что линия, проведенная в направлении произвольного радиус-вектора OQ, обязательно пересекает индикатрису (20.6). Если бы такое пересечение произошло два раза, то нашлись бы два вектора – $\lambda\dot{x}^i$ и $\mu\dot{x}^i$ ($\lambda, \mu > 0,\ \lambda \ne \mu$), такие, что по условию **A**, $(\lambda - \mu)F(x^i, \dot{x}^i) = 0$ – это противоречит условию **B**. Пусть теперь $\dot{x}_A^i$ и $\dot{x}_B^i$ – два радиус-вектора точек A и B, удовлетворяющие условию теоремы. Множество (20.7) выпукло, если любая точка с координатами ξ^i , лежащая на отрезке AB, также удовлетворяет неравенству (20.7). Координаты такой точки могут быть записаны в виде $\xi^i = (1-\theta)x_A^i + \theta x_B^i$, где $0 \le \theta \le 1$. Вследствие функции (20.5) $F\left(x^i, \xi^i\right) \le F(x^i, (1-\theta)\dot{x}_A^i) + F(x^i, \theta\dot{x}_B^i)$ или, согласно условию **A**,

$$F\left(x^i, \xi^i\right) \le (1-\theta)F(x^i, \dot{x}_A^i) + \theta F(x^i, \theta\dot{x}_B^i). \tag{20.8}$$

А так как предполагается выполнение неравенств $F(x^i, \dot{x}_A^i) \le 1,\ F(x^i, \theta\dot{x}_B^i) \le 1$, то и $F(x^i, \xi^i) \le 1$, что и требовалось доказать.

Без доказательства приведем еще одну важную *теорему (Минковского)*. Пусть $f(x^i, \dot{x}^i)$ – функция, удовлетворяющая условиям **A** и **B**. Тогда метрическая функция $r(A, B) = f(x^i, \left|\dot{x}_A^i - \dot{x}_B^i\right|)$ тогда и только тогда удовлетворяет неравенству треугольника, когда поверхность $f(x^i, \dot{x}^i) = 1$ нигде не вогнута.

В дальнейшем в целях упрощения письма индексы при аргументах метрической функции могут опускаться, т. е. наряду с обозначением $F(x^i, \dot{x}^i)$ используется и более простое обозначение $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$.

Определим величины g_{ij} равенством

$$g_{ij} = \left(\partial^2 F^2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) / \partial\dot{x}^i\, \partial\dot{x}^j\right) / 2. \tag{20.9}$$

Комплект величин g_{ij} образует ковариантный тензор второго ранга, который называется метрическим. В силу того что $F^2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ есть однородная функция степени 2, умножаем обе части последнего равенства на $\dot{x}^i\dot{x}^j$ и дважды применяя формулу Эйлера (5.3), получаем

$$F^2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = g_{ij}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{x}^i\dot{x}^j, \tag{20.10}$$

так что $ds^2 = g_{ij}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{x}^i\dot{x}^j$.

Ясно, что риманова геометрия является частным случаем финслеровой. Последняя переходит в риманову, когда метрический тензор не зависит от направления $\dot{x}^i$.

Уравнение индикатрисы теперь может быть записано так:

$$g_{ij}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{x}^i\dot{x}^j = 1.$$

Квадратическую поверхность

$$g_{ij}(x^k, \dot{x}_{(0)}^k)\dot{x}^i\dot{x}^j = 1$$

(где x^k и $\dot{x}_{(0)}^k$ фиксированы) называют соприкасающейся индикатрисой. Она имеет соприкосновение второго порядка в точке с координатами $\dot{x}_{(0)}^k$, что следует непосредственно из формулы (20.9).

Сопоставление с геометрией анизотропных сред. Хотя в основе финслеровой геометрии лежит весьма общая конструкция, мы приходим к понятиям, уже знакомым нам по римановой геометрии. Для того чтобы читатель лучше оценил возможности техники, которой оперирует финслерова геометрия, целесообразно сейчас провести сопоставление с анизотропными, упругими средами, а затем продолжить изложение основ финслеровой геометрии дальше.

Естественная метрика анизотропного упругого пространства определяется равенством, которое здесь дано для двух близких точек на линии $x^i = x^i(t)$:

$$dt = ds / v(x^i(t), t^i(t)),$$

где $ds = \sqrt{dx^i dx^i}$ – евклидово расстояние в объемлющем пространстве. Положим

$$F(x^i, \dot{x}^i) = \sqrt{\dot{x}^i \dot{x}^i} / v(x^i, \dot{x}^i), \quad \dot{x}^i = dx^i / dt. \tag{20.11}$$

Отвечающий упругой анизотропии метрический тензор определяется следующей формулой:

$$g_{ij}(x^i, \dot{x}^i) = w\delta_{ij} + (\dot{x}^i w_{\dot{x}^j} + \dot{x}^j w_{\dot{x}^i}) + (1/2)\sum (\dot{x}^k)^2 w_{\dot{x}^i \dot{x}^j}.$$

В рассматриваемой ситуации уравнение (20.6) можно записать так:

$$\left|\dot{x}^i\right| = v(x^i, \dot{x}^i).$$

Так как вектор $\dot{x}^i$, по определению, есть вектор лучевой скорости, то индикатриса финслеровой геометрии совпадает с индикатрисой лучевой скорости, т. е. с волновой поверхностью.

Поскольку лучевая скорость $v(x^i, \dot{x}^i)$ – однородная функция степени 0, то условие **A** выполнено, тривиально выполняется и условие **B**.

Нам нет необходимости проверять условие **C**: согласно приведенным выше двум теоремам, метрическая функция (20.11) тогда и только тогда удовлетворяет условию **A**, когда волновая поверхность выпукла, что всегда выполняется только для квазипродольных волн. В случае же квазипоперечных волн для большинства известных кристаллов это не так. Итак, с одной стороны, множество метрических функций, удовлетворяющих условиям **A**–**C**, много шире, чем множество метрических функций, удовлетворяющих тем же условиям, но характеризующих упругую анизотропию, а с другой стороны, условие **A** оказывается слишком ограничительным, чтобы считать финслерову геометрию адекватной геометрии упругих анизотропных сред (в отношении квазипоперечных волн).

Существуют различные попытки смягчения условия **C**. По-видимому, наиболее перспективными являются те из них, в которых финслерова геометрия строится на основе псевдометрических пространств Минковского, в которых неравенство треугольника не предполагается выполненным. Поскольку индикатриса, будучи замкнутой кусочно-гладкой поверхностью, обязана иметь выпуклые участки, то классический вариант финслеровой геометрии справедлив для таких конгруэнций лучей, у которых все касательные принадлежат секторам выпуклости индикатрисы.

Дальнейшее изложение элементов финслеровой геометрии преследует следующие цели. Во-первых, если сравнивать с гамильтоновым формализмом, развитие финслеровой геометрии происходит как бы с другого конца. Гамильтонов формализм начинался с уравнений Гамильтона, эквивалентных уравнению эйконала, и с определения вектора **p**, эквивалентного вектору рефракции (медленности) и только потом вводилась лучевая скорость и связанные с ней понятия. Здесь же все начинается с определения метрической функции, глубоко связанной с лучевой скоростью. Собственно говоря, этот же порядок присутствовал и в римановой геометрии, но в ней слишком силен элемент эллипсоидальной анизотропии, в котором все связи между дуальными понятиями определяются на основе чисто алгебраических выкладок. Во-вторых, представляет интерес, какой геометрический смысл можно придать лучам для произвольной (пусть даже и выпуклой) метрической функции. В-третьих, важно выяснить, что именно органически связано с предположением о выпуклости и что именно теряется (помимо неравенства треугольника) при отказе от этого предположения.

Фигуратриса. Найдем уравнение плоскости, касательной к индикатрисе в точке, определяемой вектором $\dot{x}^i_{(0)}$. Если точка, определяемая произвольным вектором $\dot{x}^i$, лежит в этой плоскости, то разность $\dot{x}^i_{(0)} - \dot{x}^i$ ортогональна вектору нормали к индикатрисе или любому коллинеарному вектору, например вектору $F_{\dot{x}^i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Следовательно, искомое уравнение таково:

$$F_{\dot{x}^i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_{(0)})(\dot{x}^i - \dot{x}^i_{(0)}) = 0 . \tag{20.12}$$

Это уравнение можно переписать с помощью компонент метрического тензора. Сначала запишем тождество

$$\left(1/2\right) F^2_{\dot{x}^i\dot{x}^j}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = F_{\dot{x}^i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) F_{\dot{x}^j}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) F_{\dot{x}^i\dot{x}^j}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) .$$

Умножим это тождество на $\dot{x}^j$ и применим вытекающие из свойства **A** и формулы Эйлера для однородных функций соотношения $F_{\dot{x}^j}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{x}^j = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ и $F_{\dot{x}^i\dot{x}^j}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{x}^j = 0$. Отсюда получаем

$$\left(1/2\right) F^2_{\dot{x}^i\dot{x}^j}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{x}^j = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) F_{\dot{x}^i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) . \tag{20.13}$$

С другой стороны, уравнение (20.12) можно представить так:

$$F_{\dot{x}^i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_{(0)})\dot{x}^i = F_{\dot{x}^i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_{(0)})\dot{x}^i_{(0)} .$$

К правой части применяем формулу Эйлера: $F_{\dot{x}^i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_{(0)})\dot{x}^i_{(0)} = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_{(0)})$. Умножим обе части получающегося равенства на $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_{(0)})$. Получим

$$F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_{(0)}) F_{\dot{x}^i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_{(0)})\dot{x}^i = F^2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}_{(0)}) .$$

К левой части применяем формулу (20.13) и следом – определение (20.9), а к правой части применяем (20.6) (поскольку точка $x^i_{(0)}$ находится на индикатрисе). В итоге получаем требуемое уравнение

$$g_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{(0)})\dot{x}^i_{(0)}\dot{x}^j = 1 . \tag{20.14}$$

Каждому контравариантному вектору $\dot{x}^i$ можно поставить в соответствие ковариантный вектор

$$p_i = g_{ij}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{x}^j . \tag{20.15}$$

Исходя из этого определения, а также формул (20.9) и (20.13), ковектор p_i можно еще определить так:

$$p_i = F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) F_{\dot{x}^i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) . \tag{20.16}$$

Ясно, что формулами (20.15) и (20.16) вводится вектор рефракции, но пока это не более чем формальное определение. Линейное векторное пространство векторов p_i является сопряженным к $T_{\mathbf{x}}$ и обозначается $T'_{\mathbf{x}}$.

Как говорилось в § 2, каждому ковариантному вектору u_i отвечает плоскость в касательном пространстве

$$u_i\dot{x}^i = \mathrm{const} . \tag{20.17}$$

Дадим константе в правой части такое значение, чтобы плоскость коснулась поверхности

$$F^2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = r^2 \quad (r > 0). \tag{20.18}$$

Константа в формуле (20.17) зависит и от выбора ковектора u_i, и от выбора r. Поскольку константа прямо пропорционально зависит от r, то рассматриваемую зависимость можно определить функцией вида $rH(x^k, u^k)$. Если заменить компоненты u_i пропорциональными компонентами $u_i^* = \lambda u_i$, то и константу в выражении (20.17) придется умножить на λ, откуда

$$H(x^i, \lambda u_i) = \lambda H(x^i, u_i).$$

Стало быть, функция $H(x^k, u^k)$ есть однородная функция степени 1. Кроме того, из $r > 0$ следует, что и $H(x^k, u^k) > 0$.

Пусть $\dot{x}^i_{(0)}$ – координаты точки соприкосновения плоскости (20.17) и поверхности (20.18). Аналогично уравнению (20.14) можем написать

$$g_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{(0)})\dot{x}^i_{(0)}\dot{x}^j = r^2$$

или

$$p_i^{(0)}\dot{x}^i = r^2. \tag{20.19}$$

Уравнения (20.17) и (20.19) представляют одну и ту же гиперплоскость, поэтому

$$p_i^{(0)} = ru_i / H(x^k, u_k).$$

Таким образом, с точностью до положительного множителя λ координаты u_i определяются по $p_i^{(0)}$. Выберем $u_i^{(0)} = \lambda u_i$ так, чтобы $H(x^i, u_i^{(0)}) = r$. Тогда, согласно уравнению (20.19), мы имеем $u_i^{(0)} = p_i^{(0)}$ и уравнение касательной плоскости принимает вид

$$p_i^{(0)}\dot{x}^i = H^2(x^k, p_k^{(0)}).$$

Но точка $\dot{x}^i_{(0)}$ тоже лежит на гиперплоскости. Поэтому, суммируя все полученные равенства, находим основное тождество

$$H^2(x^k, p_k^{(0)}) = p_i^{(0)}\dot{x}^i_{(0)} = g_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{(0)})\dot{x}^i_{(0)}\dot{x}^j_{(0)} = F^2(x^k, \dot{x}^k_{(0)}). \tag{20.20}$$

Из приведенных формул следует дуальность функции $F(x^i, \dot{x}^i)$, заданной на элементах касательного пространства T_{x}, и функции $H(x^k, p_k)$, заданной на элементах сопряженного (дуального) пространства $T_{\mathbf{x}}'$.

Чтобы показать, что эта дуальность абсолютна (т. е. касается всех свойств функций $F(x^i, \dot{x}^i)$ и $H(x^k, p_k)$), покажем, что из выпуклости первой функции, следует выпуклость второй. В силу выпуклости $F(x^i, \dot{x}^i)$, индикатриса лежит по одну сторону от касательной плоскости. Поэтому для всех точек $\dot{x}^i$, лежащих внутри или на поверхности индикатрисы ($F(x^i, \dot{x}^i) \le 1$), имеет место неравенство $u_i\dot{x}^i \le H(x^k, u_k)$. При этом правая часть неравенства является точной верхней гранью для значений $(u_i\dot{x}^i)$. Но, по определению функции $H(x^k, p_k)$, аналогичное неравенство может быть получено для любого другого элемента v_i из $T_{\mathbf{x}}'$: $v_i\dot{x}^i \le H(x^k, v_k)$. Складывая оба неравенства, получаем

$$(u_i + v_i)\dot{x}^i \le H(x^k, u_k) + H(x^k, v_k).$$

Но, поскольку $H(x^k, u_k + v_k)$ есть точная верхняя грань для $(u_i + v_i)\dot{x}^i$, достигаемая в некоторой точке множества $F(x^i, \dot{x}^i) \le 1$, то

$$H(x^k, u_k + v_k) \le H(x^k, u_k) + H(x^k, v_k). \tag{20.21}$$

Аналогично, как функция $F(x^i, \dot{x}^i)$ определяет норму вектора $\dot{x}^i$ в пространстве $T_{\mathbf{x}}$, функция $H(x^k, p_k)$ определяет норму ковектора в дуальном пространстве $T_{\mathbf{x}}'$, а уравнение

$$H(x^k, p_k) = 1$$

определяет единичную сферу в смысле геометрии Минковского с метрической функцией $H(x^k, p_k)$. Данную поверхность в вариационном исчислении принято называть фигуратрисой. Нетрудно видеть, что индикатриса и фигуратриса связаны локальным преобразованием Лежандра и, следовательно, дуальны друг к другу (см. § 19). Действительно, каждой точке выпуклой индикатрисы $\dot{x}^i_{(0)}$ отвечает одна (и только одна) касательная плоскость $p_i^{(0)}\dot{x}^i = 1$ пространства $T_{\mathbf{x}}$, которая задает отображение $\dot{x}^i_{(0)} \to p_i^{(0)}$, при этом, согласно тождеству (20.20), $H(x^k, p_k^{(0)}) = 1$. В силу абсолютной дуальности, такое же преобразование задает и обратное отображение.

Из этой же дуальности следует также, что аналогично равенству (20.9) функция $H(x^k, p_k)$ определяет ковариантный метрический тензор в $T_{\mathbf{x}}'$:

$$g^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \left(\partial^2 H(\mathbf{x},\mathbf{p}) / \partial x \, \partial p\right) / 2.$$

Не останавливаясь на выводе, основанном на многократном использовании свойства однородности, приведем следующие формулы:

$$\dot{x}^i = g^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{p}) p_j = H(\mathbf{x},\mathbf{p}) H_{p_i}(\mathbf{x},\mathbf{p}),$$

$$g_{ik}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) g^{kj}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \delta_i^j.$$

Аналогично формуле (20.10) выводится, что для всякого вектора $p_i^{(0)}$ уравнение

$$g^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{p}^{(0)}) p_i p_j = 1$$

определяет поверхность (эллипсоид), имеющую касание второго порядка с фигуратрисой $H(x^k, p_k) = 1$. Этот эллипсоид, очевидно, имеет обратные полуоси сравнительно с эллипсоидом, определяемым уравнением (20.10). Полученный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема о касательных эллипсоидах. Если поверхность рефракции (фигуратриса) выпукла, то для каждой точки M этой поверхности существует эллипсоид с центром в начале координат, имеющий касание второго порядка с поверхностью рефракции в этой точке. Также существует (дуальный) эллипсоид, который имеет касание второго порядка с волновой поверхностью (индикатрисой) в дуальной (к M) точке N и полуоси которого обратны по отношению к полуосям первого эллипсоида.

Проведем сопоставление с фактами, полученными в § 10, где было установлено, что волновая поверхность (индикатриса) и поверхность рефракции (фигуратриса) связаны локальным преобразованием Лежандра (без каких-либо предположений о выпуклости). Необходимо отметить, что здесь этот факт был получен при минимальном запасе предварительных понятий и формул. В частности, использовавшаяся в § 10 формула

$p_i^{(0)}\dot{x}_0^i = 1$ была получена как следствие из системы уравнений луча, тогда как в финслеровой геометрии уравнения для лучей еще только будут получены. Возникли ли какие-то новые факты? Да, в финслеровой геометрии показывается возможность определения метрического тензора, позволяющего связать векторы $\dot{x}^i$ и p_i теми же простыми формулами, которыми они связаны при эллипсоидальной анизотропии (и в римановой геометрии). Это и не удивительно. По существу, основной вывод, который можно сделать из развития финслеровой геометрии, состоит в том, что в случае выпуклых индикатрис финслерова геометрия локально совпадает с римановой. А именно для любого фиксированного направления $\dot{x}_0^i$ существует такой метрический тензор $g_{ij}(x^i, x_0^i)$ риманова пространства, который имеет касание второго порядка с индикатрисой финслерова пространства. Ниже этот принцип локальности будет существенно уточнен.

В какой степени изложенные результаты связаны с предположением о выпуклости индикатрисы? Практически ни в какой, если не считать двух обстоятельств. Первое: без предположения о выпуклости теряется возможность привычной геометрической интерпретации тензора $g_{ij}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ как метрического. И функция $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ и тензор $g_{ij}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ в этом случае оказываются псевдометрическими (соответственно функцией и тензором). Функция $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ перестает быть опорной функцией для $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ (и обратно), обе они не определяют нормы (в привычном понимании), а индикатриса и фигуратриса не могут быть истолкованы как единичные сферы соответствующего пространства Минковского. Тем не менее, все формулы (кроме неравенств (20.2), (20.8), (20.21)) остаются верными. А это означает возможность следующего уточнения высказанного выше принципа локальности: если в направлении $\dot{x}_0^i$ лучевая индикатриса является гладкой, то существует метрический или псевдометрический тензор $g_{ij}(x^i, x_0^i)$, определяющий в малой окрестности этого направления риманову или соответственно псевдориманову метрику. Отсюда следует, что, во-первых, приведенная выше теорема касательных эллипсоидах не нуждается в предположении о глобальной выпуклости индикатрис: достаточно, если она выпукла в окрестности некоторого направления (это же верно и для поверхности рефракции); а во-вторых, что наряду с теоремой о касательных эллипсоидах должна существовать и теорема о касательных гиперболоидах, позволяющая связывать локальную геометрию поверхности рефракции и волновой поверхности в дуальных точках не только для выпуклых индикатрис, но и в значительно более общей ситуации.

Второе обстоятельство: преобразование Лежандра выпуклых поверхностей заменяется локальным преобразованием Лежандра произвольных гладких (или даже кусочно-гладких) поверхностей. Всякая замкнутая гладкая (кусочно-гладкая) поверхность S может быть разделена на конечное число поверхностей $S_1, ..., S_n$, которые почти всюду (т. е. на множестве полной меры) выпуклы вовне или выпуклы внутрь. Следовательно, почти во всех точках каждой такой поверхности определяется обычное преобразование Лежандра LS_k. Замыкание объединения $\bigcup LS_k$ может считаться результатом преобразования всей поверхности *S*.

С учетом сделанных замечаний переформулируем *теорему о касательных эллипсоидах*: если поверхность рефракции (фигуратриса) является гладкой в окрестности точки *M*, то существует поверхность второго порядка $g^{ij}p_ip_j = 1$ (эллипсоид или гиперболоид с центром в начале координат), которая имеет касание второго порядка с поверхностью рефракции в этой и в симметричной точках. Так же, как существует дуальный эллипсоид или гиперболоид $g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 1$ с обратными полуосями, который имеет касание второго порядка с волновой поверхностью (индикатрисой) в дуальной (к *M*) точке *N*.

Есть обстоятельство, которое позволяет гамильтонов формализм (пополненный некоторыми полученными здесь и при изложении лагранжева подхода формулами), все-таки считать основной линией в развитии геометрической сейсмики. Дело даже не в том, что уравнение эйконала непосредственно выводится из уравнений движения упругой среды. Дело в том, что поверхность рефракции $H(x^k, p_k) = 1$ для выбранной волны всегда является простой поверхностью (не имеет петель и т. п.), тогда как волновая поверхность (индикатриса), как правило, имеет сложную топологию. Особенности волновой поверхности естественно трактовать как особенности отображения $T'_{\mathbf{x}} \to T_{\mathbf{x}}$ (как это делается в гамильтоновом формализме), а не наоборот.

Ортогональность в финслеровом пространстве. Позволяет ли финслерова геометрия придать распространению вдоль луча смысл параллельного переноса (или какой-либо иной геометрический смысл)? Ясно, что сначала нужно выяснить возможность введения таких понятий, как параллельность и ортогональность, которые, в свою очередь, связаны с понятием угла, косинуса угла и т. п. Оказывается, в финслеровой геометрии существуют различные соответствующие обобщения, которые сводятся к одним и тем же понятиям евклидовой геометрии, когда пространство Минковского сводится к евклидову пространству. Мы следуем тому варианту обобщения, который принят в книге Х. Рунда [10].

Пусть ξ^i – произвольный вектор длины $|\xi| \equiv F(\mathbf{x}, \xi)$. Построим поверхность $I_\xi : F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = |\xi|$, гомотетичную индикатрисе. Уравнение касательной плоскости к I_ξ (в точке ξ^i) записывается аналогично уравнению (20.14):

$$g_{ij}(x^k, \xi^k)\xi^i\dot{x}^j = \left|\xi^2\right|. \tag{20.22}$$

Любой вектор η^i, принадлежащий или параллельный этой плоскости, считается *ортогональным* к ξ^i. Поскольку такой вектор η^i может быть представлен как разность двух векторов $\dot{x}^i_{(1)}$ и $\dot{x}^i_{(2)}$, каждый из которых удовлетворяет уравнению (20.22), то условие ортогональности запишется так:

$$g_{ij}(x^k, \xi^k)\xi^i\eta^j = 0. \tag{20.23}$$

Отметим, что отношение ортогональности не является симметричным. Теперь определим косинус угла между произвольными векторами ξ^i и η^i, выходящими из центра. Пусть вектор η^i (или его продолжение) пересекает плоскость (20.22) в точке *Q* (рис. 21).

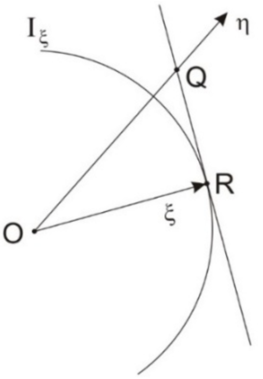


Рис. 21. К определению косинуса угла между векторами

Обозначим через R точку касания плоскости (20.22) с поверхностью I_ξ. Тогда по построению вектор RQ ортогонален к вектору OR и, следовательно, косинус может быть определен равенством

$$\cos(\xi, \boldsymbol{\eta}) = \pm|OR| / |OQ| = \pm|OR|^2 / |OR| \cdot |OQ|$$

(знак «минус» выбирается, если точки η^i и R лежат по разные стороны плоскости, проходящей через центр параллельно плоскости (20.14)). Пусть $\dot{x}^i$ есть координаты точки Q. Тогда, согласно уравнению (20.22), $|OR|^2 = |\xi^2| = g_{ij}(x^k, \xi^k)\xi^i \dot{x}^j$. С другой стороны, $|OR| = |\xi| = F(\mathbf{x}, \xi)$. Точка Q лежит на одной радиальной прямой с точкой η^i, поэтому $\eta^i = c\dot{x}^i$. А поскольку $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ – однородная функция степени 1, то $|OQ| = F(x^i, \dot{x}^i) = F(x^i, \eta^i / c) = c^{-1}F(x^i, \eta^i)$ и $g_{ij}(x^k, \xi^k)\xi^i \dot{x}^j / |OQ| = c^{-1} g_{ij}(x^k, \xi^k)\xi^i \eta^j / c^{-1}F(x^k, \eta^k)$. Окончательно

$$\cos(\xi, \boldsymbol{\eta}) = g_{ij}(x^k, \xi^k)\xi^i \eta^j / F(x^k, \xi^k)F(x^k, \eta^k). \tag{20.24}$$

Из формулы (20.23) следует, что $\cos(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = 0$, если вектор $\boldsymbol{\eta}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{\xi}$. Из неравенства (20.3) (выпуклость!) следует

$$\left(F^2_{\dot{x}^i \dot{x}^j}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\xi^i \eta^j\right)^2 \le \left(F^2_{\dot{x}^i \dot{x}^j}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\xi^i \xi^j\right)\left(F^2_{\dot{x}^i \dot{x}^j}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\eta^i \eta^j\right).$$

Воспользовавшись формулами (20.9) и (20.10), получим $-1 \le \cos(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \le 1$. Если выпуклость не имеет места, то формула (20.24) теряет (по крайней мере, обычный) смысл.

Имеет место следующая формула, которую мы приведем без вывода: пусть $A(\dot{x}^i_{(1)})$ и $B(\dot{x}^i_{(0)})$ – две точки на индикатрисе и $p_i^{(0)}\dot{x}^i = 1$ – уравнение касательной к индикатрисе в точке $B(\dot{x}^i_{(0)})$. Тогда расстояние от точки A до касательной вдоль линии AC, параллельной линии OB (рис. 22), равно

$$E(x^k, \dot{x}^i_{(0)}, \dot{x}^i_{(1)}) = 1 - \cos(\dot{x}^i_{(0)}, \dot{x}^i_{(1)}) \ge 0. \tag{20.25}$$

Естественно, неравенство справедливо, если выполняется выпуклость индикатрисы.

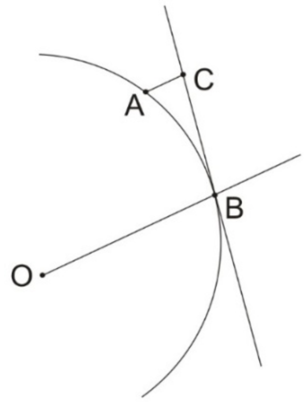


Рис. 22. К выводу неравенства (20.25)

Уравнение эйконала и уравнения луча. Согласно определению, финслерово пространство F можно мыслить как физическое пространство R^3, снабженное метрической функцией $F(x^i, \dot{x}^i)$. Пусть в области D финслерова пространства F задано семейство поверхностей уравнениями

$$S(x^i) = \Sigma, \tag{20.26}$$

где Σ – параметр семейства. Если δx^i – малое смещение, касательное какой-либо поверхности семейства, то

$$\left(\partial S / \partial x^i\right)\delta x^i = 0. \tag{20.27}$$

Комплект производных $\partial S / \partial x^i$ определяет ковариантный вектор. Найдем соответствующий единичный (в метрике пространства $T'_{\mathbf{x}}$) вектор. Так как норма вектора $\partial S / \partial x^i$ равна $H(x^j, \partial S / \partial x^j) \equiv \varphi^{-1}(x^j)$, то искомый вектор равен

$$p_i = \varphi(x^i)\left(\partial S / \partial x^i\right). \tag{20.28}$$

С ним можно связать единичный контравариантный вектор

$$\xi^i = g^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) p_j, \ (p_i = g_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\xi^j).$$

Теперь уравнение (20.27) запишется так:

$$g_{ij}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\xi^j \delta x^i = 0.$$

Сравнивая с условием (20.23), заключаем, что смещение δx^i ортогонально вектору ξ^i в метрике минковского пространства $T_{\mathbf{x}}$. Можно сказать, что вектор ξ^i ортогонален касательной плоскости. Построим в каждой точке области D векторное поле $\xi^i(x^k)$ единичных нормалей к семейству поверхностей (20.26). Решая дифференциальные уравнения

$$dx^i / ds = \xi^i(x^k),$$

получаем конгруэнцию G кривых, касательные векторы к которым совпадают с единичными нормалями к семейству поверхностей (20.26). Необходимо, чтобы параметр s вдоль кривых из G являлся финслеровой длиной дуги, определяемой метрической функцией $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$: $ds = F(\mathbf{x}, d\mathbf{x})$.

Пока семейство (20.26) есть произвольное семейство поверхностей и определяемая им конгруэнция траекторий G еще не связана с задачей минимизации функционала

$$\int_P^Q F(x^i(s), \dot{x}^i(s))ds$$

для двух закрепленных точек *P* и *Q*. Более просто, чем это сделано в § 19, но с использованием условия выпуклости, показывается, что абсолютный минимум достигается на траектории (луче) из конгруэнции *G*, если: 1) семейство поверхностей (20.26) регулярно и 2) если данное семейство удовлетворяет уравнению в частных производных (уравнению эйконала)

$$H\left(x^i, \partial S / \partial x^i\right) = 1 . \tag{20.29}$$

Это уравнение можно построить в явной форме, если в явной форме определена метрическая функция $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ (в конечном итоге – если задана функция $v(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$). Но фактически, как мы знаем, на практике исходной информацией является фазовая скорость $V(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = H^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, определяемая уравнением Кристоффеля.

Теперь легко найти уравнение лучей. Согласно формуле (20.29), фигурирующая в определении (20.28) функция $\varphi = H^{-1} = 1$, стало быть, $p_i = \partial S / \partial x^i$. Продифференцировав это равенство по s вдоль луча, получим

$$dp_i / ds = \left(\partial^2 S / \partial x^i \partial x^j\right) \dot{x}^j .$$

В силу дуальности, существующей между объектами $\{ \dot{x}^i, F(x^i, \dot{x}^i) \}$ и $\{ p_i, H(x^i, p_i) \}$, для $\dot{x}^i$ имеет место формула, аналогичная (20.16): $\dot{x}^i = H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) H_{p_i}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Подставив ее в написанную выше формулу (с учетом (20.16)), получаем

$$dp_i / ds = \left(\partial^2 S / \partial x^i \partial x^j\right) H_{p_i}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) .$$

Теперь продифференцируем уравнение (20.29) по x^i:

$$\left(\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) / \partial x^i\right) + \left(\partial^2 S / \partial x^i \partial x^j\right) H_{p_j}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0 .$$

Сопоставляя две последние формулы, получаем

$$dp_i / ds = -\left(\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) / \partial x^i\right) . \tag{20.30}$$

Уравнение (20.30) вместе с полученным чуть выше уравнением

$$\dot{x}^i \equiv dx^i / ds = \partial H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) / \partial p_i \tag{20.31}$$

составляют знакомую нам систему канонических уравнений луча.

Геодезические финслерова пространства. Можно ли придать полученным уравнениям некий геометрический смысл в рамках геометрии финслерова пространства? Имеет ли место параллельный перенос тензорных объектов вдоль луча? Характер рассуждений здесь тот же, что и в римановой геометрии. А именно отыскивается такой способ дифференцирования вектора вдоль луча, который имеет тензорный характер. Напомним читателю, в чем здесь сложность. Пусть на линии $x^i = x^i(t)$ задано векторное поле $X^i(t)$. При движении вдоль любой траектории изменяются компоненты вектора X^i независимо от того, какая метрика определена в касательном пространстве (и определена ли она там вообще!). Но изменяется и само касательное пространство, так как метрическая функция $F(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ зависит от x и, стало быть, в соседних точках $x^i(t)$ и $x^i(t + dt)$ по-разному определены такие понятия, как параллельность и ортогональность. Поэтому «прямые» определения производной векторного поля теряют инвариантный (тензорный) характер. Необходимо найти такое определение, в котором учитывалось бы и изменение векторного поля как такового и изменение метрики касательного пространства.

В финслеровой геометрии известны различные подходы к определению «абсолютной» производной вектора вдоль траектории. Приводимое здесь определение дано Х. Рундом [10]:

$$\delta X^i / \delta t = \left(dX^i / dt\right) + P_{h\,j}^{\,i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) X^h \dot{x}^j ,$$

где

$$P_{h\,j}^{\,i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \gamma_{h\,j}^{\,i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - C_{h\,l}^{\,i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \gamma_{p\,j}^{\,l}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{x}^p ,$$

$$C_{h\,j}^{\,i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = g^{il} C_{hlj}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}); \quad \gamma_{h\,j}^{\,i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = g^{il} \gamma_{hlj}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}),$$

$$C_{ijk}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{x}^k} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3 F^2(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k},$$

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{x}^k} + \frac{\partial g_{hk}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial g_{ki}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial \dot{x}^h} \right).$$

Здесь $\gamma_{h\,j}^{\,i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ – символ Кристоффеля второго рода в финслеровой геометрии и $\gamma_{ijk}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ – символ Кристоффеля первого рода.

Для сравнения напомним формулу абсолютного дифференцирования в римановой геометрии. Переходя в формуле (17.13) от двухвалентного тензора U_r^i к одновалентному X^i, получаем:

$$DX^i / dt = \left(dX^i / dt\right) + \Gamma_{kp}^i X^p \dot{x}^k .$$

Если в римановой геометрии равенство $DX^i / dt = 0$ означало параллельный перенос вектора вдоль всей линии $x^i = x^i(t)$, то в финслеровой геометрии аналогичное равенство $\delta X^i / \delta t = 0$ означает параллельный перенос только в бесконечно близкую точку. Кривая называется автопараллельной, если ее касательные векторы получаются друг из друга бесконечно малыми переносами типа

$$dX^i = -P_{h\,j}^{\,i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) X^h dx^j .$$

Именно такие кривые естественно назвать геодезической финслеровой геометрии. Имеет место следующая *теорема. Лучи являются автопараллельными (геодезическими) кривыми финслеровой геометрии*.

Доказательство (на котором мы останавливаться не будем) сводится к тому, что система уравнений (20.30–20.31) сводится к уравнению вида

$$\left(d^2 x^i / dt^2\right) + P_{h\,j}^{\,i}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \dot{x}^h \dot{x}^j = 0 .$$

Рассмотренный здесь классический вариант финслеровой геометрии имеет тот недостаток, что ковариантная производная метрического тензора, в отличие от римановой геометрии, не равна нулю. В связи с этим предлагались другие определения ковариантной производной, в частности теория Картана, основанная на понятии «евклидовой связности». Однако все эти модификации не устраняют основного ограничения, связанного с классическим вариантом финслеровой геометрии, – предположения о выпуклости индикатрисы (лучевой поверхности). Это ограничение несущественно только для случая распространения квазипродольных волн, волновые поверхности которых, как известно, всегда выпуклы.

Более широкий класс лучевых индикатрис (волновых поверхностей) обязательно состоит из поверхностей, включающих как вогнутые куски, так и особенности. Именно потому, что волновая поверхность обязана включать начало координат как точку своей внутренней области, т. е. области, окруженной волновой поверхностью (точнее, как область, вписанная в волновую поверхность), наличие вогнутости любого типа означает и наличие пограничных линий, вдоль которых могут иметь место особенности волновой поверхности. Об этих особенностях шла речь в конце § 10. Фактически в реальности нет промежуточных ситуаций между классом выпуклых индикатрис и классом выпукло-вогнутых с особенностями поверхностей. Поэтому геометрия, адекватная упругой анизотропии, неминуемо должна включать не только возможность вогнутости для открытых двумерных многообразий направлений, но и возможность недифференцируемых особенностей на одномерных многообразиях направлений.

Для секторов направлений, характеризующихся вогнутостью лучевой поверхности, финслерова геометрия может быть построена по уже указанному выше образцу на основе псевдометрического пространства Минковского (так же, как псевдориманова геометрия строится на основе псевдоевклидовой метрики). А именно вводятся такие гладкие метрические функции $F(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})$, что квадратичная форма $g_{ij}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})\xi^i\xi^j$, где

$$g_{ij}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) = \partial^2 F(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}) / \partial\dot{x}^i\,\partial\dot{x}^j,$$

является знакопеременной (либо даже отрицательно-определенной). Но для построения геометрии, которая охватывает самую общую ситуацию, нужны принципиально другие подходы.

При изучении римановой геометрии указывалось, что для построения теории геодезических достаточно ввести понятие связности, являющееся более общим, чем метрический тензор, в том смысле, что пространство со связностью не обязано иметь метрический тензор. Еще более общий подход возникает тогда, когда вводится уравнение луча (пути) как исходная посылка, а затем ставится вопрос о возможности ввести такую связность, в рамках которой данное уравнение как-то связано с идеей параллельного переноса. Пусть, например, задано дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + h_{r\ k}^{\ i}(\mathbf{x})\frac{dx^r}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \tag{20.32}$$

инвариантное относительно преобразований координат. Это возможно, если коэффициенты $h_{r\ k}^{\ i}(\mathbf{x})$ удовлетворяют следующему закону преобразования:

$$h_{r'\ k'}^{\ i'}(\mathbf{x}) = h_{r\ k}^{\ i}(\mathbf{x})A_i^{i'}A_{r'}^r A_{k'}^k + (\partial_{r'}A_{k'}^i)A_i^{i'}.$$

Такая функция может считаться связностью. Вытекающая отсюда геометрия называется геометрией путей или геометрией неримановых пространств. По отношению к геометрии анизотропных сейсмических сред такая геометрия могла бы развиваться следующим образом: уравнение луча записывается в произвольной криволинейной системе координат в форме (20.32) (если это оказывается возможным), после чего определяется связность и другие геометрические свойства. Работы в этом направлении мне не известны, так же как не известны и работы, посвященные сингулярностям лучевых индикатрис, которые были бы включены в рамки достаточно широких геометрических концепций.

Принцип вложения финслеровой геометрии в риманову. Несмотря на некоторую определенность в смысле перспектив использование методов финслеровой геометрии при изучении анизотропных сред, имеется возможность привлечения богатой техники римановой геометрии в ситуациях, когда лучи уже проведены. Дело в том, что проведение лучей обеспечивается уравнениями, полученными в рамках гамильтонова формализма (§ 9). Если проведенные лучи отвечают тому сектору направлений, для которого волновая поверхность выпукла, то эти лучи являются геодезическими финслеровой геометрии. Действительно, по основной теореме § 14, гамильтонов луч является стационарной точкой функционала Ферма. Выпуклость индикатрис и регулярность поля лучей гарантирует идентификацию стационарной траектории как минимали. Выше (в этом параграфе) было показано, что минималь является геодезической финслерова пространства. Проблема состоит не в проведении геодезических, а в изучении геометрии конкретного семейства лучей.

Пусть в области D физического пространства, определены поле времен $t=\tau(x^i)$ и семейство лучей Γ, отвечающие метрической функции $F(x^i,\dot{x}^i)$ финслерова пространства. Предполагается, что и поле времен и семейство лучей регулярны в D, в частности, через каждую точку области D проходит один и только один луч $\gamma\in\Gamma$. Функция $F(x^i,\dot{x}^i)$ определяет метрический тензор $g_{ij}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})=F^2_{\dot{x}^i\dot{x}^j}(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})$, зависящий от направления. (Для анизотропных сред он определен формулой, следующей за (20.11).) Пусть ξ^i есть единичный (в смысле $F(x^i,\xi^i)=1$) вектор касательной к лучу γ в точке x^k. Тем самым, в области D определено векторное поле $\xi^i(\mathbf{x})$. Тогда мы можем ввести «обычный» метрический тензор $\tilde{g}_{ij}(\mathbf{x})=g_{ij}(\mathbf{x},\xi^i(\mathbf{x}))$. Введенный тензор определяет на D риманову геометрию, которую мы будем называть индуцированной (семейством лучей Γ) на D.

Теорема о вложении. Лучи семейства Γ (т.е. геодезические финслеровой геометрии) являются геодезическими в индуцированной римановой метрике.

Доказательство. Для произвольной поверхности семейства поверхностей $\tau(x^i)=\mathrm{const}$ вектор $p_i=\partial\tau/\partial x^i$ связан с вектором ξ^i касательной к лучу (в точке пересечения луча с фронтом) равенством $\xi^i=g^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{p})p_j$ или, что то же самое, $p_i=g_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\xi^j=\tilde{g}_{ij}(\mathbf{x})\xi^j$. Заметим, что – вследствие уравнений $F(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})=1$ и $H(\mathbf{x},\mathbf{p})=1$ – оба вектора имеют единичную длину в метрике финслерова пространства. Тензор $g^{ij}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ является обратным к $g_{ij}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, поэтому и первое из приведенных равенств можно записать так: $\xi^i=\tilde{g}^{ij}(\mathbf{x})p_j$. Пусть δx^i есть вектор касательной к фронту:

$$\frac{\partial\tau}{\partial x^i}\delta x^i\equiv p_i\delta x^i=0.$$

Выражая вектор медленности через вектор ξ^i, получим равенство

$$\tilde{g}_{ij}(\mathbf{x})\xi^i\delta x^i\equiv\langle\boldsymbol{\xi},\delta\mathbf{x}\rangle_{\tilde{G}}=0,$$

означающее, что вектор ξ^i является единичным вектором нормали (в смысле скалярного произведения, определяемого метрическим тензором $\tilde{g}_{ij}(\mathbf{x})$) к поверхности $\tau(x^i)=\mathrm{const}$. Равенство $\xi^i(\mathbf{x})=\tilde{g}^{ij}(\mathbf{x})p_j(\mathbf{x})$ определяет векторное поле $\xi^i(\mathbf{x})$ единичных нормалей к поверхностям $\tau(x^i)=\mathrm{const}$. Интегральные кривые этого поля, то есть решения уравнения

$$\frac{dx^i}{dt}=\xi^i(\mathbf{x}),$$

совпадают, очевидно, с лучами семейства Г. Введем на одной из поверхностей $\tau(x^i)=\text{const}$ криволинейную систему координат (u^1,u^2). Ясно, что конкретный выбор u^1 и u^2 определяют некоторый луч семейства Г. Поскольку через каждую точку *M* области *D* проходит некоторый луч, то точке *M* можно сопоставить координаты (u^1,u^2,t), где первые два числа идентифицируют луч, проходящий через данную точку, а значение t определяет длину отрезка луча (от выбранной поверхности $\tau(x^i)=\text{const}$ до точки *M*) как соответствующий интеграл от $F(\mathbf{x},d\mathbf{x})$. Если луч записан в виде уравнений $x^i=x^i(s)$, то:

$$t(s)=\int\limits_0^s F(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})ds=\int\limits_0^s \sqrt{F^2(\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}})}ds=\int\limits_0^s g_{ij}(\mathbf{x}(s),\dot{\mathbf{x}}(s))\dot{x}^i(s)\dot{x}^j(s)ds=\int\limits_0^s \tilde{g}_{ij}(\mathbf{x}(s))\dot{x}^i\dot{x}^j ds\,.$$

Пока мы еще не можем утверждать, что введенные координаты являются полугеодезическими в метрике $\tilde{g}_{ij}(\mathbf{x})$, поскольку еще не доказано, что лучи семейства Г являются геодезическими в этой метрике. Но легко убедиться в том, что тензор $\tilde{g}_{ij}(\mathbf{x})$ в координатах (u^1,u^2,t) имеет такую же структуру, как и в полугеодезических координатах:

$$\begin{pmatrix}\tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} & 0\\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} & 0\\ 0 & 0 & \tilde{g}_{33}\end{pmatrix}.$$

Действительно, в данной системе координат компоненты тензора $\tilde{g}_{ij}(\mathbf{x})$ определяются как скалярные произведения $\left\langle \mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j\right\rangle_{\tilde{G}}$ базисных векторов. Но первые два базисные векторы e_1^i и e_2^i координатной системы (u^1,u^2,t) лежат в касательной плоскости к фронту, а третий базисный вектор, совпадающий с ξ^i, ортогонален им в метрике $\tilde{g}_{ij}(\mathbf{x})$: $\tilde{g}_{ij}e_\alpha^i\xi^j=0,\ (\alpha=1,2)$. Теперь, следуя рассуждениям, использованным при доказательстве теоремы о минималях (§ 17) легко убедиться и в том, что лучи семейства Г являются минималями в метрике $\tilde{g}_{ij}(\mathbf{x})$ и, стало быть, обязаны удовлетворять уравнениям геодезических в этой же метрике. Доказательство завершено.

Вытекающую из доказанной теоремы возможность применения римановой геометрии к полю лучей финслерова пространства будем называть *принципом вложения* (финслеровой геометрии в риманову). Чтобы у читателя не возникло впечатления, что нами доказана эквивалентность римановых и финслеровых пространств, заметим следующее. В конкретной анизотропной среде определена только одна финслерова геометрия. Но если в этой же среде имеется n источников, каждому из которых отвечает свой пучок лучей, то каждому пучку отвечает «своя» индуцированная риманова геометрия.

В индуцированной метрике вектор медленности и вектор лучевой скорости удовлетворяют формулам римановой хронометрии:

$$v^i=\tilde{g}^{ij}p_j;\quad p_j=\tilde{g}_{ij}v^j;\quad \tilde{g}^{ij}p_ip_j=1;\quad \tilde{g}_{ij}v^jv^j=1\,.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ОБЩЕЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1978.

Он же. Математические методы классической механики. М.: Наука. 1979. 431 с.

Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1971. 390 с.

Гольдин С. В. Интерпретация данных сейсмического метода отраженных волн. М.: Недра. 1979. 344 с.

Дубровин Б. А. и др. Современная геометрия. Методы и приложения / *Б. А. Дубровин, С. Н. Новиков, А. Т. Фоменко*. М.: Наука. Гл. редакция физ.-мат. лит. 1986. 759 с.

Поручиков В. Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука. 1986.

Пузырев Н. Н. Интерпретация данных сейсморазведки методом отраженных волн. М.: Гостоптехиздат, 1959. 451 с.

Он же. Временные поля отраженных волн и метод эффективных параметров. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1979. 288 с.

Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука. 1967.

Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: Наука. 1981. Т. 4. Ч. 2. 550 с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альшиц В. И., Лоте Е.* Упругие волны в триклинных кристаллах. I: Общая теория и проблема вырождения // Кристаллография. 1979а. Т. 24. Вып. 4. С. 672–682.

2. *Они же.* Упругие волны в триклинных кристаллах. II: Топология поляризационных полей и некоторые общие теоремы // Там же. 1979б. Т. 24. Вып. 4. С. 683–693.

3. *Беллман Р., Кабала Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир. 1968.

4. *Герасименко А. Н.* Лучевой метод в геометрической сейсмике сложнопостроенных слоистых сред. Киев: Наук. Думка. 1982.

5. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука. 1978.

6. *Гречка В. Ю., Оболенцева И. Р.* Расчет лучей в слоисто-однородных анизотропных средах с неоднозначными волновыми поверхностями / Новосибирск. 1989. 46 с. (Препр. / ИГиГ СО АН СССР. № 9).

7. *Когай В. В., Фадеев С. И.* Применение продолжения по параметру на основе метода множественной стрельбы для численного исследования нелинейных краевых задач // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. Т. 4, № 1 (7). С. 83–101.

8. *Лунева М. Н.* Вычисление волновых характеристик в анизотропной среде произвольной симметрии // Геология и геофизика. 1999. Т. 40, № 2. С. 235–248.

9. *Ляховицкий Ф. М.* Проблемы сейсмической анизотропии тонкослоистых сред // Вестн. МГУ. Сер. 4. Геология. 1983. № 5. С. 68–75.

10. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М. 1981. 504 с.

11. *Федоров Ф. И.* Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука. 1965. 386 с.

12. *Хаткевич А. Г.* Акустические оси в кристаллах // Кристаллография. 1962а. Т. 7. Вып. 5. С. 742-747.

13. *Он же.* К явлению внутренней конической рефракции упругих волн // Там же. 1962б. Т. 7. Вып. 6. С. 916–921.

14. *Оболенцева И.Р.* Сейсмическая гиротропия // Исследование распространения сейсмических волн в анизотропных средах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние. 1992. С. 6-45.

15. *Goldin S.V.* Geometric Fundamentals of Seismic Imaging: A Geometric Theory of the Upper Level // Amplitude-preserving seismic reflection imaging / Proceedings of the Workshop held in Seeheim, Germany, February 2-5, 1997. London: Geophysical Press LTD. 1998. P. 45-71

Научное издание

Гольдин Сергей Васильевич

ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ СЕЙСМИКУ

Учебное пособие

2-е издание, исправленное

Книга с внесенными исправлениями для переиздания подготовлена:
к.ф.-м.н. *А.А. Дучковым* и к.г.-м.н. *Л.Г. Киселёвой*
Технический редактор *Т.С. Курганова*

Подписано в печать 01.03. 2016 г. Формат 60×84 1/8. Печать цифровая. Бумага офсетная.
Уч.-изд. л. 24,2. Тираж 100 экз. Заказ № 001

Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука.
630090, Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 3.

Отпечатано в отделе информационных технологий, ИНГГ СО РАН
630090, Новосибирск, просп. Акад. Коптюга, 3.

ИНГГ
СО РАН