М.А. Головкин, В.А. Головкин,
В.М. Калявкин

ВОПРОСЫ ВИХРЕВОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

УДК 532.527
ББК 22.253
Г 61

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 09-01-07063

Головкин М. А., Головкин В. А., Калявкин В. М. **Вопросы вихревой гидромеханики** / Под ред. Головкина М. А.. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 264 с. — ISBN 978-5-9221-1154-6.

Представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований различных проблем вихревых и отрывных течений несжимаемой жидкости. Для идеальной жидкости выведены условия, которые необходимо выполнять на линии схода свободных поверхностей тангенциального разрыва скоростей с твердого тела при его произвольном нестационарном движении, и построены оригинальные методы расчета обтекания таких тел, дающие хорошее схождение с экспериментальными данными. Показана аналогия между силами, действующими на тело в идеальной несжимаемой жидкости и в стационарном магнитном или квазистационарном электромагнитном поле. Для широкого класса вихревых нестационарных вязких и невязких течений найдены мгновенные эквипотенцианальные поверхности, вдоль которых функция Бернулли является постоянной. Приведены методы и результаты физических исследований в гидро- и аэродинамических трубах нестационарного отрывного вихревого обтекания различных канонических тел.

Научным работникам и инженерам, работающим в области теоретической и прикладной аэрогидромеханики.

ГОЛОВКИН Михаил Алексеевич
ГОЛОВКИН Владимир Алексеевич
КАЛЯВКИН Владимир Михайлович

ВОПРОСЫ ВИХРЕВОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

Редактор *А.П. Скороход*
Оригинал-макет: *Е.В. Чернина*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*, *Н.В. Мазалева*

Подписано в печать . Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 21,45. Уч.-изд. л. 22,0. Тираж 400 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано в ГУП
«ИПК Чувашия», 428019
г. Чебоксары, пр-т И.Яковлева, 13

ISBN 978-5-9221-1154-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Представленная вниманию читателей книга посвящена весьма сложному для изучения, но активно развивающемуся в настоящее время и востребованному в современной практике разделу аэрогидромеханики — вихревым и отрывным течениям. В ней изложен ряд оригинальных теоретических и экспериментальных методов и результатов, носящих фундаментальный характер, которые ранее авторами были разрозненно опубликованы в отдельных журнальных статьях. Теоретические разделы книги отличаются математической строгостью, ясностью и законченностью изложения. Для экспериментальных разделов характерно проникновение в физическую сущность явлений, происходящих при вихревом и отрывном обтекании.

Значительная часть книги уделена исследованиям нестационарного или отрывного обтекания тел на базе модели идеальной несжимаемой жидкости со сходом свободной вихревой пелены в виде поверхности разрыва тангенциальных составляющих скоростей. Весьма важными для построения методов расчета и понимания физики отрыва являются представленные здесь аналитические результаты – условия на линии схода свободной вихревой пелены с поверхности тела при его произвольном нестационарном движении. Эти условия получены для любых задних кромок тела и включают в себя выполнение теоремы Томсона о сохранении циркуляции. Поскольку они выведены из требований ограниченности и непрерывности скорости, то в этом смысле они являются, по сути, условиями типа Чаплыгина–Жуковского для случая плоского или пространственного нестационарного обтекания. Построены оригинальные методы расчета обтекания произвольно движущихся тел, позволившие свести условие непротекания тела к решению интегральных уравнений Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя, для которых имеет место единственность решения. Исследованы свойства полученных уравнений в окрестности линии схода потока с поверхности тела. Проведенные численные расчеты отрывного обтекания плоских и осесимметричных тел показывают их хорошее соответствие экспериментальным данным.

Для широкого класса вихревых нестационарных течений вязкой или идеальной жидкости найдены мгновенные эквипотенциальные поверхности, вдоль которых функция Бернулли является постоянной, что соответствует, по сути, уравнению Бернулли для таких течений. Показана аналогия между силами и моментами, действующими на тело, обтекаемое стационарным потоком идеальной жидкости или помещенное в стационарное магнитное, а также квазистационарное электромагнитное поля.

В экспериментальном разделе книги с помощью уникального метода, позволяющего визуализировать неоднородности, обусловленные изменением плотности среды (воды) на $\sim 10^{-8}$ от исходной величины, приведены весьма интересные материалы по исследованию структуры отрыва на плоских телах типа кругового цилиндра, полуцилиндра, клина, а также по взаимодействию аэродинамического профиля с вихревым следом, идущим от расположенного перед ним колеблющимся другим профилем. Приведены результаты исследований различными методами в гидро- и аэродинамических трубах вихревого и отрывного обтекания полуэллипсоидов вращения, треугольного и прямоугольного крыльев и гистерезисных явлений в их вихревых структурах и аэродинамических характеристиках.

Настоящее издание будет полезно для широкого круга специалистов в области теоретической и прикладной аэрогидродинамики, а также для аспирантов и студентов, обучающихся по соответствующим специальностям.

Академик РАН,
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой
«Аэродинамика летательных аппаратов»
Московского авиационного института
(технического университета)
Ю.А. Рыжов

Введение

Вихри и вихревые отрывные течения, как правило, определяют природу сил, действующих на тело, обтекаемое потоком жидкости. По образному выражению Кюхемана [165], вихри это — «мышцы и жилы гидродинамики». Вихревая природа подъемной силы была вскрыта Н. Е. Жуковским [72] более столетия назад. Изучение же вихревых движений жидкости было начато основополагающей работой Гельмгольца [161] и имеет почти стопятидесятилетнюю историю. Говоря о вихревых движениях, нельзя не упомянуть знаменитую теорему Томсона (лорда Кельвина) [26] о постоянстве циркуляции. Значительный вклад в развитие теории вихревых движений внес А. Пуанкаре, недавно переиздана на русском языке его замечательная монография «Теория вихрей» [120]. Весьма интересна вышедшая на русском языке в 2000 году книга Ф. Дж. Сэффмэна «Динамика вихрей» [133], которая систематизирует знания в области вихревых движений в идеальной жидкости.

Несмотря на давнюю историю развития работ в этом направлении, в гидродинамике идеальной и вязкой несжимаемой жидкости обнаруживаются новые аналитические результаты. Ряд важных результатов по исследованию вихрей и вихревых движений жидкости содержится в вышедших сравнительно недавно книгах Алексеенко С. В., Куйбина П. А., Окулова В. Л. [1], Борисова А. В., Мамаева И. С., Соколовского М. А. [22], Гайфуллина А. М. [33], Петрова А. С. [111], Андронова П. Р., Гувернюка С. В., Дынниковой Г. Я. [2].

Современное развитие техники требует решения ряда практически важных задач, приводящих к необходимости исследования вихревых и отрывных течений жидкости. Многие режимы полета современных летательных аппаратов сопровождаются отрывным обтеканием различных их элементов: крыла и фюзеляжа самолета или вертолета, лопастей несущего винта вертолета, корпуса или головной части ракеты и так далее.

Отрывному обтеканию, зачастую, сопутствуют вибрации, обусловленные отрывом от поверхности тела вихрей с определенной частотой, что может приводить к возникновению автоколебаний конструкций. В то же время, вихревые отрывные явления используются в технике для получения положительных эффектов: так, например, крылья многих современных маневренных самолетов, которые проектируются с целью их эффективной работы на больших углах атаки в условиях отрывного обтекания, имеют в центропланной части, так называемые, наплывы, выполняющие роль генераторов отрывных стационарных вихрей, способствующих достижению больших значений коэффициента подъемной силы крыла. Выход маневренных самолетов на сверхбольшие углы атаки дает им существенные преимущества в воздушном бою. Эти режимы сопровождаются полностью отрывным обтеканием элементов самолета, что еще более остро ставит задачу исследований вихревых и отрывных течений и целенаправленного управления ими или их использования в аэродинамических компоновках. Важность вихревых и отрывных течений для техники и, в то же время, трудность их теоретических и расчетных исследований привели к широкому развитию экспериментальных исследований этих течений. Задача исследования вихревого отрывного обтекания тел еще более осложняется в случае, когда тело совершает произвольное (как поступательное, так и вращательное) неустановившееся движение, как это имеет место, например, на лопастях несущего винта вертолета, на режимах штопора самолета, взлета и посадки летательных аппаратов и на режимах выполнения ими маневров. В случае же, когда внешнее течение является вихревым (как, например, обтекание фюзеляжа самолета или вертолета осредненным вихревым потоком от винта), задача исследования становится еще более сложной. Необходимость исследования таких течений связана не только с определением аэродинамических нагрузок, действующих на тело, но и с вопросами выбора рациональных аэродинамических компоновок летательных аппаратов и других объектов техники с учетом условий работы их отдельных элементов и взаимной интерференции этих элементов в условиях такого обтекания. К этим вопросам вплотную прилегает задача выработки методов целенаправленного воздействия на вихревые и отрывные течения или их использования с целью улучшения аэродинамических характеристик летательных аппаратов.

В книге рассмотрены некоторые аналитические результаты в вихревой гидромеханике идеальной и вязкой жидкости, которые, насколько известно авторам, в литературе не изложены. Построены методы решения задач о вихревом отрывном нестационарном обтекании тел на базе модели идеальной несжимаемой жидкости. Проведены отдельные численные расчеты, показавшие хорошее соответствие с имеющимися точными и экспериментальными данными. Приведены результаты исследований явлений, происходящих при вихревом отрывном обтекании канонических тел, экспериментальными методами.

Обратимся к главе 1, где рассматриваются результаты теоретических исследований идеальной несжимаемой жидкости.

В §1.1 этой главы выведены условия на линии схода свободной вихревой пелены с поверхности тела при его произвольном нестационарном движении в идеальной несжимаемой жидкости. Показано, что скорость перемещения линии сопряжения свободной вихревой поверхности с твердой трехмерной поверхностью совпадает со скоростью последней частицы жидкости, расположенной между этими поверхностями. Таким образом, получено распространение на трехмерный случай известного для двумерного течения результата, используемого в расчетах С. Н. Постоловским, К. П. Ильичевым [115–118] и указанного также А. А. Никольским в курсе лекций «Вихревые отрывные течения идеальной жидкости», прочитанном им в Московском физико-техническом институте в 1970 году. Далее в этом параграфе для различных типов задних кромок (угловая, гладкая, точка возврата) выведены условия сопряжения свободной вихревой поверхности с поверхностью тела, соотношения для гидродинамических особенностей (векторов завихренности и циркуляций) и скорости сноса свободной вихревой поверхности с поверхности тела, которые необходимо выполнять при двумерном и пространственном нестационарном обтекании произвольных тел. Эти результаты включают в себя выполнение теоремы Томсона о постоянстве циркуляции, а поскольку они получены из требований ограниченности и непрерывности скорости, то в этом смысле они являются, по сути, условиями типа Чаплыгина–Жуковского для случая плоского или пространственного нестационарного обтекания. Из работ, затрагивающих близкие к этим, следует указать работу К. В. Манглера и Дж. Смита [167], где был проведен анализ сопряжения поверхности вихревого следа с поверхностью крыла конечного размаха только с угловой задней кромкой и лишь при стационарном обтекании. В работах С. Н. Постоловского [115–118] и упомянутом выше курсе лекций А. А. Никольского такое соотношение для скорости сноса линии тангенциального разрыва с поверхности тела было получено только для двумерного нестационарного течения. Интересно отметить, что в работе С. Н. Девнина [66] указано соотношение для изменения циркуляции в точке отрыва в случае двумерного течения с учетом вязкости, аналогичное соответствующим соотношениям, которые следуют из указанных работ С. Н. Постоловского и А. А. Никольского и из полученных авторами результатов исследований идеальной жидкости. Таким образом, представленные в §1.1 результаты обобщают на случай произвольного нестационарного движения тела в идеальной несжимаемой жидкости условия на линии схода свободной вихревой пелены. Этот параграф написан на основе исследований, изложенных в работах В. А. Головкина, М. А. Головкина [38, 39, 46, 61]. Здесь не рассматриваются вопросы формы свободной вихревой поверхности в локальной окрестности линии отрыва потока. Для плоских течений такие локальные решения для различных типов задних кромок построены Р. Ц. Аккербергом [148] и С. К. Бетяевым [16, 17], а для пространственных – В. А. Маланичевым [95].

В книге Дж. Бетчелора [26] введено специальное выражение для векторного потенциала от объемного (необязательно постоянного по объему) и поверхностного распределения завихренности, однако подробное исследование такого потенциала не проведено. Поэтому в §1.2 исследована взаимосвязь объемных и поверхностных вихреобразований и их потенциалов в механике идеальной жидкости. Выведены условия замкнутости поверхностных и объемных вихревых образований. Проведен анализ свойств скалярного и векторного потенциалов от вихрей, распределенных по объему или поверхности. Получена интегральная связь между скалярным и векторным потенциалом для вихревого объема, когда нормальная компонента завихренности на границе этого объема равна нулю, и гидродинамическим импульсом, введенным в книгах Дж. Бетчелора [26] и Ф. Дж. Сэффмэна [133]. Дано гидродинамическое обоснование вихревой модели в виде объемных (в частности, постоянной интенсивности) и поверхностных вихрей, которая, в частности, может использоваться при моделировании вращательного движения трехмерного тела. Получено выражение для векторного потенциала от системы объемных и поверхностных вихрей, удовлетворяющих условиям замкнутости, в виде интеграла по объему, аналогичное формуле Био–Савара для скорости от завихренной области (выражение же для скорости при этом аналогично выражению для вектора завихренности). Показано, что скалярный потенциал на внешней поверхности от такого распределения завихренности постоянен вдоль этой поверхности. Этот параграф основан на работе [60] М. А. Головкина.

В § 1.3 проведено исследование свойств интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно плотности потенциала двойного слоя в окрестности особых линий замкнутой поверхности. Математический аппарат решения уравнений Фредгольма второго рода достаточно глубоко разработан и излагается в целом ряде учебников по математической физике. Исследования этих уравнений проведено также в монографиях С. Г. Михлина [96], И. Г. Петровского [112], М. Л. Краснова [81], П. П. Забрейко и др. [73], а также в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [76]. Однако в указанных работах уравнения Фредгольма второго рода рассматриваются в достаточно общем виде и не исследована специфика их решений относительно плотности потенциала двойного слоя (или плотности диполей) вблизи особых линий поверхности (например, ребер), когда ядро этих уравнений является разрывным по переменной интегрирования, и при наличии при этом разрыва правой части уравнений. Ниже показано, что задача отрывного нестационарного обтекания произвольно движущихся тел в идеальной несжимаемой жидкости со сходом с поверхности тела свободной вихревой поверхности сводится к решению уравнений Фредгольма второго рода относительно плотности потенциала двойного слоя, или, иначе, к решению уравнений теории потенциала. В связи с численной реализацией этих уравнений возник ряд вопросов о поведении их решений вблизи особых линий (или точек – в двумерном случае) поверхности, когда правая часть этих уравнений также может быть разрывной, а также о повышении точности вычислений в окрестности таких особых линий и точек. Поэтому в § 1.3 на основе простого геометрического представления ядра уравнения показано, что предельные решения такого уравнения по обе стороны от особой линии могут быть выражены через предельные значения правых частей уравнения по обе стороны от этой линии, угол между участками поверхности, прилегающими к этой особой линии, и интеграл по поверхности, вычисленный в точке, принадлежащей особой линии. Исследован характер разрывов в решении таких уравнений в окрестности особых линий. Это позволяет повысить точность вычислений при численной реализации решений таких уравнений. Эти результаты базируются на статьях М. А. Головкина [46], [48], [62]. Кроме того, в этом параграфе кратко изложены прямой и итерационные методы решения таких уравнений, в том числе показана возможность представления решений в аналитическом виде через резольвенту уравнения на основе результатов, представленных, например, в книге Л. В. Канторовича и В. И. Крылова [76].

Обратимся к главе 2, где в § 2.1, § 2.3 построены методы решения задачи об отрывном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью произвольно движущегося двумерного или трехмерного тела со сходом с него свободной вихревой поверхности. Коснемся истории этой проблемы. Вопрос о возможности существования течений идеальной жидкости при наличии в ней разрывов тангенциальных компонентов скоростей рассматривал еще Л. Прандтль [171]. Такие течения для класса плоских и автомодельных трехмерных течений рассматривались также в работах А. А. Никольского [103–105] и его школы [16, 17, 129, 130] (С. К. Бетяев, Г. Г. Судаков, С. Б. Захаров и др.). В работах С. Н. Постоловского и К. П. Ильичева [115–118] была решена задача о расчете двумерного отрывного течения с перемещающейся вдоль контура точкой отрыва потока. В работах школы С. М. Белоцерковского, М. И. Ништа и др. [6, 10–14] на основе дискретной вихревой модели численно решено множество различных задач: об отрывном обтекании абсолютно тонкой пластины бесконечного размаха, круглой пластины, об отрывном обтекании тонкого крыла произвольной формы в плане, различных аэродинамических компоновок летательных аппаратов и т. д. В работе Г. А. Павловца [107] приведено доказательство отсутствия относительного течения жидкости в области, ограниченной твердой непроницаемой вихревой поверхностью, в случае стационарного обтекания плоских и трехмерных тел поступательным потоком, и получены соотношения для расчета такого обтекания при наличии подъемной силы. В работе Р. Джоджодихарджо и С. Виднала [151] задача о произвольном циркуляционном безотрывном обтекании крыла конечной толщины сведена к решению уравнения I-го рода относительно плотности диполей, а в работе Л. Морино и Ч. Ч. Куо [168] в линеаризованной постановке рассмотрена задача об обтекании крыла на основе применения формулы Грина. В книге С. М. Белоцерковского, В. Н. Котовского, М. И. Ништа и Р. М. Федорова [15] развит подход к моделированию двумерного обтекания объемных тел методом дискретных вихрей, при этом положение точки отрыва ищется из решения задачи пограничного слоя. В работе И. К. Лифанова [91] развита теория уравнений, которые решаются в упомянутой выше книге [15] и которые имеют сильные сингулярные особенности.

В отличие от этого в § 2.1, § 2.3 этой главы рассмотрены плоская и трехмерная нелинейные задачи о произвольном, в том числе вращательном неустановившемся движении тела в идеальной несжимаемой жидкости со сходом с его поверхности свободного вихревого следа в виде поверхности тангенциального разрыва скоростей. Выбрана форма представления потенциала возмущенных скоростей в виде потенциала двойного слоя, распределенного по поверхности тела и свободного следа, и известных в каждый фиксированный момент времени объемных и поверхностных вихрей, замыкающихся в трехмерном случае между собой, определяемых вращательной скоростью движения тела. Показано, что такая форма представления потенциала позволяет свести условие непроницаемости внешней поверхности тела к внутренней задаче Неймана, а затем, в силу теоремы единственности для внутренней задачи Неймана, к задаче Дирихле, при этом внутри тела как поступательная, так и вращательная компоненты относительной скорости отсутствуют. Из задачи Дирихле получено интегральное уравнение для плотности потенциала двойного слоя, распределенного по поверхности тела и следа, которое необходимо решать в каждый фиксированный момент времени. Проведено исследование свойств полученного интегрального уравнения и его производных по поверхностным координатам в местах сопряжения свободного следа с поверхностью тела. Показано, что разрывы в плотности потенциала двойного слоя и в его производных от свободного следа «передаются» на поверхность тела. Полученное интегральное уравнение сведено к решению хорошо обследованных интегральных уравнений Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя, для которых имеет место единственность решения. Приведены методы решения полученных уравнений. Показано, что давление на поверхности тела выражается непосредственно через гидродинамические особенности. Эти параграфы основаны на работах В. А. Головкина, М. А. Головкина [38, 39, 46].

В § 2.2, § 2.4 изложены численные методы решения плоской и трехмерной нелинейных нестационарных задач отрывного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью на примере тел с фиксированной линией схода потока с поверхности тела. При численной реализации решения применен прямой метод типа метода Крылова–Боголюбова, а в силу того, что задача непротекания сведена к решению хорошо обследованных уравнений Фредгольма второго рода, – также итерационный метод, изложенные в книге Л. В. Канторовича, В. И. Крылова [76]. При этом отмечается, что в любой неособой точке поверхности тела после численного нахождения решения может быть построено непрерывное на поверхности приближенное решение уравнения. Указаны способы нахождения неизвестной плотности диполей в следе в каждый фиксированный момент времени. Так как задача о движении тангенциального разрыва принадлежит к классу некорректных задач, то в работе В. Ф. Молчанова [97], аналогично работе Л. С. Франка и Л. А. Чудова [139], был предложен метод регуляризации для построения устойчивых численных схем расчета движения тангенциального разрыва в плоских автомодельных течениях. В данных параграфах этот алгоритм был несколько модифицирован и применен для расчета движения свободного вихревого следа в двумерных и осесимметричных отрывных течениях. Он позволяет, по крайней мере, в ближнем следе получать достаточно гладкие решения для геометрии поверхности тангенциального разрыва скоростей. Здесь дается также краткое описание программ расчета. Приведены примеры расчета двумерного нестационарного и отрывного обтекания аэродинамического профиля и тел типа полукруга, полуэллипса и клина, а также осесимметричного обтекания эллипсоида, полуэллипсоида, конуса и комбинации «конус-полубесконечный цилиндр». Показано хорошее схождение результатов расчета с известным точным решением и экспериментальными данными. Эти параграфы основываются на работах В. А. Головкина и М. А. Головкина [39, 43, 47, 156].

В § 2.5 метод, развитый в § 2.3 для расчета обтекания тел внешним потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости, распространен на случай обтекания тел внешним произвольным вихревым нестационарным потоком идеальной несжимаемой жидкости, поскольку ряд практически важных задач аэродинамики требует развития методов расчета обтекания тел непотенциальным, вихревым, внешним потоком жидкости. Примерами таких задач могут служить обтекание корпуса самолета или вертолета, находящегося в струе от винта, некоторого тела, помещенного в вихревой след от другого тела и т.д. В работах С. Д. Вильховченко [30], Ю. Л. Якимова [145], А. Г. Ярмицкого [146] для двумерных течений идеальной несжимаемой жидкости были получены решения задач обтекания тел, главным образом — кругового цилиндра, некоторыми вихревыми потоками специального вида. В работе А. Г. Ярмицкого [147] получена обобщенная формула для подъемной силы цилиндра, обтекаемого произвольным потоком идеальной несжимаемой жидкости, скорость которого на контуре может быть представлена в виде разложения в ряд Фурье по азимутальному углу. Полученный в этой статье результат обобщает результаты указанных выше работ. В [147] также приводится подробный обзор литературы по исследованию обтекания тел произвольным плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости. Позже появилась статья Г. Я. Дынниковой [70], которая обобщает результаты, полученные в указанных выше работах, и в которой получена формула для силы, действующей на тело при нестационарном вихревом отрывном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью. В отличие от указанных работ в § 2.5 условие непротекания поверхности сведено к уравнению для потенциала возмущенных скоростей, которое сводится к уравнениям Фредгольма второго рода относительно плотности диполей, распределенных по поверхности тела, аналогично § 2.3. Из уравнения движения найдено выражение для давления на внешней поверхности тела. Этот параграф основывается на работах М. А. Головкина [50, 157].

В главе 3 проведено исследование свойств уравнений Навье–Стокса и Эйлера и вопросов силового подобия между гидродинамическими и электромагнитными полями. Ранее в работах В. Н. Голубкина, Г. Б. Сизых [64] и М. А. Брутяна, В. Н. Голубкина, П. Л. Крапивского [25] на основе специального представления ротора вектора завихренности были найдены семейства поверхностей, вдоль которых в стационарных плоских и осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости в поле потенциальных массовых сил функция Бернулли сохраняется постоянной, сформулированы условия поведения завихренности между этими поверхностями. В отличие от этого в § 3.1 этой главы найдены ортогональные векторные преобразования, позволяющие определить поверхности, вдоль которых функция Бернулли является постоянной или вдоль которых давление постоянно — изобарические поверхности, для различных классов плоских, осесимметричных и пространственных течений: стационарные и нестационарные течения вязкой или идеальной жидкости как в потенциальном, так и в непотенциальном поле массовых сил. Таким образом, по сути, получено уравнение Бернулли для указанного широкого класса течений. Найдено компактное представление для уравнений движения. Определены выражения для потенциалов — давления и функции Бернулли, и найдены выражения для приращений этих потенциалов при переходе с одной эквипотенциальной поверхности на другую. Получено выражение для результирующей сил давления, действующей на объем жидкости, которое в плоском и осесимметричном случаях аналогично формуле Н. Е. Жуковского для подъемной силы. В литературе по аэрогидродинамике, включая монографии, посвященные уравнениям Навье–Стокса, например, в книгах О. А. Ладыженской [86], Р. Темама [135], С. М. Белоносова и К. А. Черноуса [8], эти вопросы не рассмотрены. Этот параграф написан на основе работ М. А. Головкина [54, 59, 159].

Подобие между уравнениями гидродинамики и электродинамики было указано еще А. Пуанкаре [120]. В последующем методы моделирования течений идеальной несжимаемой жидкости на основе аналогии между гидродинамическим и электромагнитным полями получили значительное развитие в работах Г. А. Рязанова [122], И. М. Тетельбаума [136], Н. Н. Сунцова [128], А. О. Дитмана, В. Д. Савчука, И. Р. Якубова [67], Л. М. Макарова и др. [94].

При этом во всех указанных работах моделирование ведется по кинематическим параметрам течения, например, за счет аналогии между скоростью гидродинамического поля и вектором напряженности электромагнитного поля или между соответствующими потенциалами. Вместе с тем, сила и момент, действующие на тело, находятся в этих работах путем интегрирования давления по поверхности тела, определенного из уравнения Бернулли. Однако, как показывает анализ, проведенный в § 3.2, подобие между указанными гидродинамическим полем и стационарным магнитным (или квазистационарным электромагнитным) полем имеет гораздо более глубокий характер. Так, несмотря на существенное отличие тензоров напряжений в указанных полях, плотность кинетической энергии гидродинамического поля аналогична плотности магнитной энергии. Пондемоторная сила, действующая на проводник с током – сила Ампера, полностью аналогична подъемной силе Н. Е. Жуковского. При соответствующем моделировании трехмерных течений аналогия сил, действующих на тело в указанных полях, также имеет место. Поэтому, в данном параграфе показано, что, например, моделирование и определение гидродинамических сил, действующих на тело в идеальной несжимаемой жидкости, возможно производить путем проведения непосредственных весовых измерений в стационарном магнитном поле. Это имеет практическое значение, поскольку гидромагнитные интеграторы, в которых происходит такое моделирование, являются, по сути, аналоговыми вычислительными машинами, они имеются до сих пор на некоторых предприятиях и используются для решения практических задач аэрогидродинамики. Кроме того, здесь получены обобщенные выражения для главных векторов силы и момента, действующих на тело в идеальной несжимаемой жидкости, в виде интегралов от векторного произведения скорости и ротора скорости — вихрей, распределенных по объему или поверхности тела, которые являются, по сути, обобщениями формулы Н. Е. Жуковского о подъемной силе и могут применяться при проведении практических расчетов. Следует отметить, что не удалось отыскать литературу, в которой затрагивались бы эти вопросы. Ни в указанной выше специальной литературе, ни в известных курсах физики Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица [88], Э. Парсела [109], Р. Фейнмана, Р. Лейтона, М. Сэнде [140], ни в работе В. А. Ацюковского [7], в которой сделана попытка единым образом описать физическую картину мира, ни в многочисленной литературе по механике сплошных сред, аэрогидродинамике или электродинамике эти вопросы не отражены. Параграф основывается на работах М. А. Головкина [56–59].

В главе 4 представлены экспериментальные методы и результаты исследований вихревого и отрывного обтекания канонических тел в гидро- и аэродинамических трубах.

В § 4.1 этой главы приведены результаты систематических исследований по визуализации течений в гидродинамической трубе ЦАГИ, проведенных с помощью оптического метода, основанного на использовании уникального прибора, разработанного Государственным оптическим институтом им. С. И. Вавилова (ГОИ). При визуализации течений особый интерес представляют так называемые бесконтактные оптические методы [28, 127], поскольку они не вносят искажений в естественную структуру потока. Однако, в гидродинамике малых скоростей применение этих методов затруднено вследствие недостаточной величины градиента плотности среды в потоке, обтекающем рассматриваемое тело. Обычно в подобных случаях визуализация течения осуществляется посредством искусственного изменения плотности среды с помощью различных приемов: местного нагрева, введения в поток инородного газа или инородных частиц и т. п. [3, 4, 21, 127]. Представленный в этом параграфе метод позволяет фиксировать в потоке неоднородности, обусловленные изменением плотности среды на $\sim 10^{-8}$ от исходной величины. Это дает возможность производить визуализацию течений вблизи тел за счет аналогии между динамическим и тепловым пограничными слоями даже вследствие естественного подогрева пограничного слоя при очень малых скоростях потока, измеряемых сантиметрами в секунду, и успешно применять этот метод в отсутствии сжимаемости среды — в воде. На основе этого метода получены четкие спектры обтекания такого сложного для изучения объекта, как цилиндр, на режимах разгона потока. Эти результаты позволили, в частности, уточнить λ-образную вихревую структуру в областях отрыва потока от тела, четко зафиксировать рождение вторичных и третичных вихревых образований, а также сам процесс начала образования отрывного течения за цилиндром. Полученные материалы существенно дополняют имевшуюся ранее информацию об отрывном обтекании цилиндра, приведенную, в частности, в книге Л. Прандтля, О. Титьенса [119], в статьях В. М. Божкова и др. [19, 20], в работах Х. Хонджи и С. Танеда [163, 176], М. Икаи [164]. В этом параграфе проведено также изучение обтекания аэродинамического профиля на стационарных и нестационарных режимах. Показано, что на режимах разгона вблизи него, как и при оптекании цилиндра, образуются λ-образные вихревые структуры. Тем самым дополнена и уточнена структура вихревого отрывного обтекания аэродинамического профиля, которая изучалась ранее, например, в работах В. М. Божкова и др. [21], Дж. Брэтт [149]. Получены уникальные визуализационные материалы по взаимодействию аэродинамического профиля с вихревым следом, идущим от расположенного перед ним, колеблющегося по углу атаки другого профиля. Изучена вихревая структура при обтекании полуцилиндра и правильной треугольной призмы на режимах разгона и торможения потока. Этот параграф основывается на работах В. А. Головкина, В. М. Калявкина и др. [40, 41, 44, 45].

В § 4.2 изложены результаты экспериментальных исследований отрывного обтекания усеченных эллипсоидов вращения с плоской донной поверхностью в гидродинамической трубе. Как известно, аэродинамические характеристики тел с донным срезом, например, тел типа фюзеляжа транспортных вертолетов и самолетов, зависят от характера отрывных течений в донной области (см., например, работу В. Макклуни и И. Маршалла [169]). Известен ряд экспериментальных работ по визуализации отрывных течений за цилиндрами, пластинами, уступами, около выступов, за телами типа клина и усеченного эллипса, а также работы по изучению обтекания конусов, моделей самолетов, моделей несущих вертолетных винтов. Эти результаты содержатся, например, в книге Л. Прандля и О. Титьенса [119], в статье Г. И. Петрова и Р. И. Штейнберга [110], в книгах М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [85], Дж. Бетчелора [26], П. Чжена [142, 143], в статьях В. М. Божкова, В. М. Захарченко, А. Д. Хонькина и др. [19–21], Г. Верле [177], Г. И. Головатюка и Я. И. Те-

терюкова [37], В. Г. Колкова [78], в альбоме Ван-Дайка [27]. При этом отсутствуют систематические исследования по визуализации обтекания тел с донным срезом. В отличие от перечисленных работ в данном параграфе представлены систематические исследования в гидродинамической трубе методом подкрашенных струй обтекания усеченных эллипсоидов с плоской донной поверхностью (с косым и прямым донным срезом). Приведены спектры обтекания для широкого диапазона изменения углов атаки и скольжения как при постоянной скорости набегающего потока, так и при его быстром разгоне и торможении. Для случая обтекания усеченного эллипсоида с косым срезом при стационарных внешних условиях обнаружено существование двух режимов обтекания: с двумя стационарными вихревыми жгутами и с периодически образующимися вихревыми кольцами. Дано объяснение с точки зрения индукции процесса образования таких вихревых колец. Проведено подробное исследование процесса развития вихревого следа за усеченным эллипсоидом с косым донным срезом. Отмечается, в частности, что поскольку усеченный эллипсоид с косым донным срезом является по сути упрощенной моделью фюзеляжа транспортного самолета или вертолета, то обнаруженные несимметрия и неоднозначность вихревых структур могут оказывать существенное влияние, в частности, на работу стабилизатора и вертикального оперения или рулевого винта вертолета, и это необходимо учитывать в практической аэродинамике. Этот параграф основывается на работах [3, 4] В. А. Головкина, М. А. Головкина и их коллег.

В § 4.3 проведено исследование нестационарных и гистерезисных явлений в положении областей взрыва «вихрей», образующихся в окрестности передних кромок треугольного крыла. В аэродинамике значительное внимание уделяется исследованиям явления «взрыва» вихря (иногда в литературе употребляется термин «распад» или «разрушение» вихря) — явления потери устойчивости течения в вихревом жгуте. Интерес к этой проблеме объясняется прежде всего тем обстоятельством, что явление взрыва вихрей может зачастую определяющим образом сказываться на аэродинамических характеристиках летательных аппаратов. В частности, взрывом вихрей могут быть обусловлены гистерезисные явления в подъемной силе, в характеристиках продольного момента по углу атаки, антидемпфирование, неблагоприятные изменения характеристик боковой статической и динамической устойчивости по углу скольжения и т.д. Это влияние на аэродинамические характеристики крыла или летательного аппарата обусловлено тем, что разрежение на несущей поверхности под ядром вихря ниже точки начала области его взрыва резко падает. Таким образом, появляется возможность по изменениям положения областей взрыва вихрей судить о поведении аэродинамических характеристик. Возникновение взрыва вихря обычно связывают с увеличением отношения окружной составляющей скорости в ядре вихря к продольной, а также с появлением положительного (неблагоприятного) градиента давления. Возрастание этих двух факторов способствует продвижению области взрыва вихря вверх по течению. Исследования явления взрыва вихрей в безградиентных потоках связаны с задачей безопасной эксплуатации самолетов на авиалиниях (особенно важны здесь вопросы поведения легкого самолета, попавшего в след от тяжелого). Имеется значительное число работ, посвященных проблеме потери устойчивости вихревых жгутов и явлениям, ее сопровождающим, главным образом, при стационарных внешних режимах обтекания. В работах В. А. Апаринова, А. А. Павлова, Г. И. Столярова, А. Н. Храброва [5], Дж. Бэтчелора [26], А. Н. Жука, А. И. Курьянова, Г. И. Столярова [71], С. Лейбовича [89], П. Чжена [142], Г. Е. Эриксона [152, 153] и Л. Е. Эриксона [154] приведены результаты исследования положения областей взрыва вихрей различными методами, а также проведено изучение влияния взрыва вихрей на аэродинамические характеристики крыльев и летательных аппаратов в гидро- и аэродинамических трубах при стационарных значениях углов атаки, скольжения и скорости набегающего потока. Достаточно полный обзор иностранной литературы по исследованиям различных проблем, связанных со взрывом вихрей, дан в [89]. В работе А. Г. Паркера [170] исследовано распределение давления на треугольном крыле в связи с перемещением областей взрыва вихрей при изменении скорости набегающего потока по синусоидальному закону. В отличие от перечисленных работ в § 4.3 с помощью визуализации обтекания треугольного крыла с углом стреловидности по передней кромке 70° в гидродинамической трубе проведено изучение нестационарных явлений в положении областей взрыва вихрей, образующихся вблизи передних кромок такого крыла, для широкого спектра нестационарных режимов изменения углов атаки, скольжения и скорости набегающего потока. Показано, что на ряде нестационарных режимов наблюдается весьма значительное отличие в законах перемещения областей взрыва вихрей по крылу при изменении углов атаки и скольжения по сравнению с положением этих областей при стационарном обтекании на тех же углах. При вращении крыла на уменьшение угла атаки обнаружено продвижение областей взрыва вихрей вверх по крылу вместо их перемещения вниз по крылу в условиях стационарного обтекания. Аналогичное явление имеет место при вращении крыла по углу скольжения. Показано, что изменение аэродинамических нагрузок на таком крыле, полученных при весовых испытаниях методом вынужденных колебаний, объясняется и хорошо коррелирует с перемещением области взрыва. Обнаружена сильная зависимость положения области взрыва, а следовательно, и аэродинамических характеристик при уменьшении скорости по времени и особенно при одновременном возрастании угла атаки и уменьшении скорости, что моделирует реальное движение маневренного самолета при выходе на большие углы атаки. Отмечается, что это принципиально важное обстоятельство ставит задачу создания соответствующих установок (например, аэродинамической трубы с переменной скоростью потока) или исследования таких режимов с помощью моделей на движущихся тележках. Параграф написан на основе статей [51, 52] М. А. Головкина и его коллег.

В § 4.4 проведено экспериментальное исследование отрывного обтекания прямого крыла при стационарных и квазистационарных внешних условиях. В настоящее время, особенно в связи с существенным расширением эксплуатационных углов атаки летательных аппаратов, все большее значение для авиационной практики приобретает изучение особенностей аэродинамики крыла на режимах отрывного обтекания. Имеется обширный список литературы, посвященной решению этой проблемы для различных классов крыльев как аналитическими и численными, так и экспериментальными методами.

Отметим лишь некоторые работы, в той или иной мере касающиеся круга затрагиваемых в данном исследовании вопросов. В книгах Г. Шлихтинга [144], П. Чжена [142, 143], Л. Д. Васильева [28], П. П. Красильщикова [82], в отчете Е. М. Такобса [175], в статьях В. М. Божкова и др. [19–21] приведены результаты экспериментальных исследований аэродинамических характеристик, а также проведена визуализация течения для прямоугольных крыльев различного удлинения. В работах А. И. Курьянова, Г. И. Столярова, Р. И. Штейнберга [83], В. Я. Нейланда, Г. И. Столярова, В. Г. Табачникова [99, 100], Ю. А. Рыжова, Г. И. Столярова, Ю. А. Колмакова, В. Г. Табачникова [77, 121] приведены результаты систематических исследований структуры обтекания прямоугольных крыльев удлинением $\lambda = 1$ и 5, имеющих при малых числах Рейнольдса существенные гистерезисные явления в коэффициентах подъемной силы, силы сопротивления и продольного момента. В работе А. Э. Винкельмана и Дж. Барлоу [29] показано, что диффузорный отрыв на крыльях достаточно большого удлинения имеет ячеистую структуру. Такая структура отрывных зон для случая плоского обтекания цилиндров и эллипсоидов вращения достаточно большого удлинения, а также для течений в диффузорах получена в работах В. Н. Трещевского и др. [138] и Г. Ф. Глотова, Э. К. Мороз [34]. Достаточно подробное исследование аэродинамических характеристик прямоугольных крыльев различного относительного удлинения с визуализацией течения, в том числе при наличии скольжения, приведены в недавно опубликованной статье Б. Ю. Занина, И. Д. Зверкова, В. В. Козлова, А. М. Павленко [74].

В отличие от этого в данном параграфе приводятся результаты экспериментальных исследований аэродинамики прямоугольных крыльев с удлинением $\lambda = 5$ при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 0{,}6 \cdot 10^6$, включающие весовые измерения и визуализацию различными способами течения на поверхности крыльев в широком диапазоне углов атаки. Показано, что при больших углах атаки течение имеет ячеистую структуру зон отрыва с носка, расположение и размер которых вдоль размаха носят, в значительной мере, случайный характер. При этом течение существенно нестационарно даже при стационарных внешних условиях. Отрывные зоны на виде в плане имеют форму трапеции, опирающейся своим малым основанием на носок крыла. Дано объяснение причин такой формы отрывных зон. Обнаружено, что на больших углах атаки в отсутствии скольжения могут возникать значительные моменты крена и рыскания, обусловленные несимметричной структурой течения относительно плоскости симметрии крыла. Исследованы гистерезисные явления в зависимостях коэффициентов аэродинамических сил и моментов, в том числе моментов крена и рыскания, от угла атаки крыла и связь изменений этих коэффициентов по времени с эволюциями зон отрыва. Обнаружен еще один практически важный результат, который необходимо учитывать в методике проведения исследований: при изменении порядка проведения испытаний (сначала установка угла атаки в диапазоне, где реализуются гистерезисные явления, а затем набор скорости до заданной величины — вместо обратного) реализуется режим отрывного обтекания с носка крыла, а не безотрывный режим, т. е. происходит попадание сразу на ветвь петли гистерезиса, соответствующую обратному ходу по углу атаки. Дана трактовка причины этого явления. Основой для этого параграфа послужили работы [31, 53, 158] М. А. Головкина и его коллег.

В книге используются адекватные обозначения для градиента ($\mathbf{grad}$ или ∇), дивергенции (div или $\nabla\cdot$), ротора ($\mathbf{rot}$ или $\nabla\times$), оператора Лапласа (Δ или ∇^2). Нумерация математических выражений в тексте следующая: первые две цифры означают номер параграфа; цифры после второй точки — номер математического выражения в этом параграфе. Нумерация рисунков в тексте двойная: первая цифра — перед точкой, означает номер главы; следующие за точкой цифры — номер рисунка в этой главе.

Введение и §§ 1.1–1.3, 2.3–2.5, 3.1, 3.2, 4.3, 4.4 в книге написаны М. А. Головкиным; § 2.1 — В. А. Головкиным; §§ 2.2, 4.2 — В. А. Головкиным и М. А. Головкиным; § 4.1 — В. М. Калявкиным и В. А. Головкиным.

Авторы выражают глубокую благодарность Н. В. Мазалевой, О. Л. Черновой и А. А. Масленникову за помощь в подготовке рукописи к изданию, а также всем коллегам и товарищам по работе, способствовавшим выполнению исследований, вошедших в данную книгу.

Авторы весьма признательны Российскому фонду фундаментальных исследований (грант 09–01–07063) за поддержку публикации книги.

Глава 1

НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В этой главе для идеальной несжимаемой жидкости показано, что скорость перемещения линии сопряжения свободной вихревой поверхности с твердой непроницаемой поверхностью совпадает со скоростью последней частицы жидкости, расположенной между этими поверхностями. Для различных типов задних кромок (угловая, гладкая, точка возврата) выведены условия сопряжения свободной вихревой поверхности с поверхностью тела, соотношения для гидродинамических особенностей (векторов завихренности и циркуляций) и скорости сноса свободной вихревой поверхности с поверхности тела, которые необходимо выполнять при пространственном нестационарном обтекании. Эти результаты включают в себя выполнение теоремы Томсона о постоянстве циркуляции, а поскольку они получены из требований ограниченности и непрерывности скорости, то в этом смысле они являются по сути условиями типа Чаплыгина–Жуковского для случая пространственного нестационарного обтекания. Полученные результаты применимы как для двумерных, так и пространственных течений.

Здесь также выведены условия замкнутости поверхностных и объемных вихревых образований идеальной несжимаемой жидкости. Проведен анализ свойств скалярного и векторного потенциалов от вихрей, распределенных по объему или поверхности. Получена интегральная связь между скалярным и векторным потенциалом для вихревого объема и гидродинамическим импульсом. Дано гидродинамическое обоснование вихревой модели в виде объемных (в частности, постоянной интенсивности) и поверхностных вихрей, используемой при моделировании вращательного движения трехмерного тела. Получено выражение для векторного потенциала от системы объемных и поверхностных вихрей, удовлетворяющих условиям замкнутости, в виде интеграла по объему, аналогичное формуле Био–Савара для скорости от завихренной области, при этом выражение для скорости аналогично выражению для вектора завихренности. Найден скалярный потенциал на внешней поверхности от такого распределения завихренности, который постоянен вдоль этой поверхности, что может упрощать нахождение распределения давления при решении частных задач.

В этой главе проведено также исследование свойств интегральных уравнений Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя в окрестности особых линий замкнутой поверхности (например, ребер), когда ядро этих уравнений является разрывным по переменной интегрирования при наличии при этом разрыва правой части уравнений. Показано, что предельные решения такого уравнения по обе стороны от особой линии могут быть выражены через предельные значения правых частей уравнения по обе стороны от этих линий, угол между участками поверхности, прилегающими к этой особой линии, и интеграл по поверхности, вычисленный в точке, принадлежащей особой линии. Исследован характер разрывов в решении таких уравнений в окрестности особых линий. Кратко изложены методы решения этих уравнений, в том числе показана возможность представления решения в аналитическом виде через резольвенту.

§ 1.1. Условия на линии схода свободной вихревой пелены с поверхности тела при его произвольном нестационарном движении в идеальной несжимаемой жидкости

1.1.1. Общая постановка задачи и некоторые исходные соотношения. Пусть трехмерное тело с кусочно-гладкой поверхностью S совершает произвольное нестационарное движение в безграничной идеальной несжимаемой жидкости. С поверхности тела по линии сопряжения τ, которая может перемещаться и может быть замкнутой, сходит свободная вихревая поверхность S_3 — поверхность разрыва тангенциальных составляющих вектора скорости. Часть поверхности S по одну сторону от τ будем обозначать S_1, по другую сторону — S_2 (см. рис. 1.1).

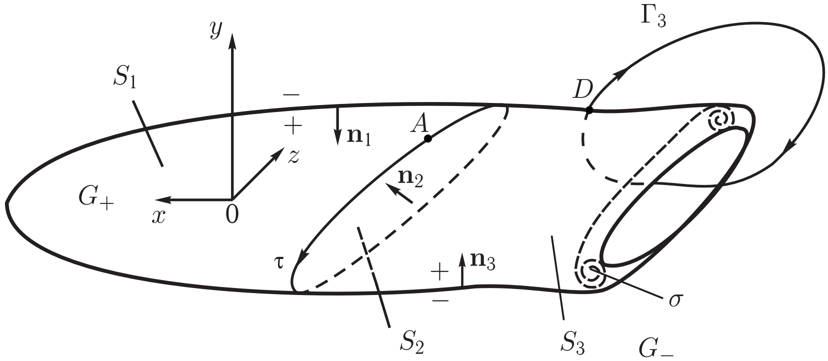


Рис. 1.1. Тело, совершающее произвольное движение в идеальной несжимаемой жидкости

Предполагается, что в окрестности линии τ поверхности S_i имеют касательные плоскости. Тогда плоскость Π, нормальная к τ, пересечет поверхность S_i по гладким в окрестности точки $A \in \tau$ линиям l_i (рис. 1.2). Пусть единичные векторы $\boldsymbol{l}_i$, $\mathbf{n}_i$, $\boldsymbol{\tau}_i$ образуют правую прямоугольную декартову систему координат, связанную с поверхностями S_i, причем вектор $\boldsymbol{l}_i$ направлен вдоль линии l_i, $\mathbf{n}_i$ нормален к поверхности S_i, а $\boldsymbol{\tau}_i$ нормален к $\boldsymbol{l}_i$ и $\mathbf{n}_i$ и лежит в плоскости, касательной к S_i. Тогда, если начала этих систем координат лежат в точке A, то векторы $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\tau}_3$ совпадают с касательной к линии τ, то есть с вектором $\boldsymbol{\tau}$, а нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ направлены внутрь тела. Область внутри тела будем обозначать G_+. Таким образом, в соответствии с принятой системой осей координат, направление движения вдоль линии $l_3 \subset S_3$ от линии τ (от тела) является отрицательным.

Предполагается, что в окрестности линии τ в области течения G_-, не включающей в себя поверхности S_i, отсутствуют другие поверхности танген-

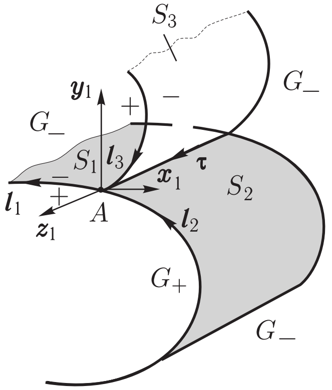


Рис. 1.2. Сопряжение поверхностей тела и следа в окрестности линии схода потока

циального разрыва скорости жидкости, то есть в окрестности линии τ в G_- скорости являются непрерывными функциями точки $M \in G_-$ вплоть до границ течения S_i. Будем предполагать также, что поле возмущенных скоростей в области G_- соленоидально. Пусть далее на свободной поверхности

$$p_{3+} - p_{3-} = 0, \quad u_{3n+} = u_{3n-} \quad \text{на} \quad S_3, \tag{1.1.1}$$

где p_{3+}, p_{3-} и u_{3n+}, u_{3n-} — соответственно предельные значения давления и нормальных к S_3 компонентов возмущенных скоростей с обеих сторон поверхности S_3. На внешней стороне поверхности S в G_-, которую будем обозначать S_-, выполняется граничное условие непротекания, означающее равенство нулю нормальной компоненты относительной скорости (в системе координат, связанной с телом):

$$v_n = 0 \quad \text{на} \quad S_-, \tag{1.1.2}$$

при этом в G_- существует потенциал внешнего поля Φ^V и потенциал возмущенных скоростей φ, удовлетворяющие уравнению Лапласа.

В дальнейшем в разд. 1.1.3–1.1.5 индексы 1, 2, 3 или i ($i = 1, 2, 3$) будут соответствовать поверхностям S_1, S_2, S_3, остальные же буквенные индексы, стоящие внизу, означают проекцию на соответствующее направление, а знаки «+» и «−», в зависимости от смысла, соответствуют G_+, G_- или же предельным значениям величин на поверхности S_i со стороны отрицательного или положительного направления нормали к ней $\mathbf{n}_i$.

Как известно [80], согласно формуле Стокса скорость, индуцируемая ограниченной линией τ' поверхностью S' с распределенным по ней двойным слоем переменной по S' плотности ν, выражается формулой

$$\boldsymbol{\upsilon}' = \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\tau'} \Gamma \frac{\boldsymbol{\tau}' \times \mathbf{r}'}{r'^3}\, d\tau' + \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S'} \frac{\boldsymbol{\gamma}^{\nu} \times \mathbf{r}'}{r'^3}\, dS'. \tag{1.1.3}$$

Здесь $\Gamma = 4\pi\nu$ — циркуляция скорости по любому контуру, охватывающему τ' в предположении отсутствия поверхности S'; $\mathbf{r}'$ — вектор, направляемый из точки интегрирования в фиксированную точку M; $\boldsymbol{\tau}'$ — единичный вектор касательной τ' в точке интегрирования; $\boldsymbol{\gamma}^{\nu}$ — вектор поверхностного распределения завихренности. Далее будем считать, что Γ и $\boldsymbol{\gamma}^{\nu}$ — функции, удовлетворяющие условию Липшица.

Аналогично работам [26, 68, 69] первый интеграл в (1.1.3) при стремлении точки M к точке $\tau_0' \in \tau'$ выражается формулой:

$$\overline{\mathfrak{v}}'' = \frac{\Gamma(\tau_0)}{2\pi} c_1 \frac{1}{r'} \mathbf{n}' + \left[\frac{\Gamma(\tau_0)}{2\pi} c_2 \frac{1}{r'} + \frac{\Gamma(\tau_0)}{4\pi} c_3 \ln \left| \frac{1}{r'} \right| \right] \mathbf{b}' + O(\overline{\mathfrak{v}}), \qquad (1.1.4)$$

где $\mathbf{n}'$ — главная нормаль, $\mathbf{b}'$ — бинормаль к τ'; c_1 и c_2 — некоторые константы; c_3 — кривизна линии τ' в точке τ_0'; $O(\overline{\mathfrak{v}})$ — некоторый конечный вектор скорости.

Известно, [68, 69, 93], что скорость, индуцируемая вихревым слоем $\boldsymbol{\gamma}^{\nu}$ (см. рис. 1.3), распределенным по поверхности S', на границе этого слоя (второй интеграл в (1.1.3)) равна:

$$\mathfrak{v}''' = \gamma_{\tau}^{\nu}(\tau_0) \ln \left| \frac{1}{r'} \right| \mathbf{n}'' + O(\overline{\mathfrak{v}}). \qquad (1.1.5)$$

Здесь $\gamma_{\tau}^{\nu} = \gamma_l^{\nu}(\tau_0) \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \gamma^{\nu}(\tau_0) \cos \alpha$ – проекция вектора $\boldsymbol{\gamma}^{\nu}$ на направление $\boldsymbol{\tau}'$, а $\gamma_l^{\nu}(\tau)$ — на направление $\boldsymbol{l}'$, нормальное $\boldsymbol{\tau}'$; $\mathbf{n}''$ — нормаль к поверхности S' в точке τ_0'; α — угол между вектором $\boldsymbol{\gamma}^{\nu}$ и касательной к линии τ'.

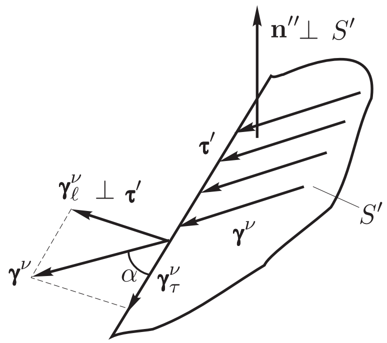


Рис. 1.3. Вихревой слой на границе поверхности S'

1.1.2. Скорость перемещения линии схода свободной вихревой пелены. Пусть линия схода τ лежит на гладком участке поверхности S. Под перемещением линии τ схода вихревой пелены будем понимать деформацию ее по нормали к ней самой в плоскости, касательной поверхностям S_1 или S_2, так как перемещение точки линии схода по касательной к этой линии не приводит к ее деформации.

Докажем, что скорость перемещения точки A, принадлежащей линии схода τ и отстоящей на конечное расстояние от ее концов, по нормали к этой линии, то есть скорость перемещения этой линии соприкосновения свободной поверхности разрыва тангенциальных компонентов скоростей с твердыми непроницаемыми поверхностями S_1 и S_2, совпадает со скоростью перемещения по этому направлению предельной частицы жидкости, расположенной между двумя сторонами поверхностей S_3 и, например, S_2. Для этого достаточно доказать, что проекция скорости жидкости на плоскость Π, нормальную τ

в точке $A \in \tau$, в секторе, образованном поверхностями S_3 и S_2, относительно точки A отсутствует.

Для доказательства применим к объему жидкости q (рис. 1.4), прилегающему к A и заключенному между S_2 и S_3, теорему Остроградского–Гаусса:

$$\int\int_q\int \mathrm{div}\boldsymbol{\upsilon}^A dq = \oiint_\delta \upsilon_n^A d\delta, \qquad (1.1.6)$$

где $\boldsymbol{\upsilon}^A$ — вектор скорости жидкости в этом объеме относительно точки A; $\delta = \bigcup\limits_{i=1}^{i=5} \delta_i$ — поверхность, ограничивающая этот объем; δ_4, δ_5 — поверхности, образованные плоскостями, перпендикулярными τ; δ_1 — поверхность,образованная плоскостью, проведенной параллельно касательной к τ в точке $A \in \tau$ под некоторым не равным нулю углом к S_3; $\delta_2 \subset S_2$, $\delta_3 \subset S_3$ — части поверхностей S_2 и S_3 соответственно, вырезаемые указанными выше плоскостями δ_1, δ_4 и δ_5; будем полагать, что угол β между δ_2 и δ_3: $\pi > \beta \geqslant 0$.

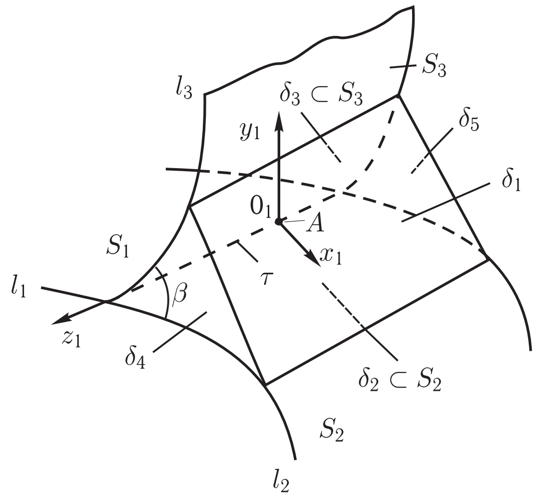


Рис. 1.4. Объем жидкости q, примыкающий к линии схода потока τ

Будем считать, что связанная с точкой A ортогональная система координат $0_1x_1y_1z_1$ выбрана таким образом, что ось 0_1z_1 направлена по касательной к τ в A, а ось 0_1y_1 — по нормали к δ_2. В силу того, что поле возмущенных скоростей вне S_1, S_2, S_2 потенциально, имеем $\mathrm{div}\boldsymbol{\upsilon}^A = 0$. Тогда из (1.1.6) получим:

$$\oiint_\delta \upsilon_n^A d\delta = 0. \qquad (1.1.7)$$

Здесь проекция скорости

$$\upsilon_{n_2}^A = 0, \qquad (1.1.8)$$

в силу условия непротекания (1.1.2).

Пусть скорость по направлению τ в двугранном углу, образованном поверхностями δ_3 и δ_2, с точностью до величин более высокого порядка малости представима в виде
$$v_\tau^A = a_0(x_1, y_1) + a_1(x_1, y_1) z_1,$$
где $a_0(x_1, y_1)$, $a_1(x_1, y_1)$ — функции x_1, y_1, ограниченные и непрерывные в окрестности точки A. Тогда поток вектора скорости через поверхности δ_4 и δ_5, входящий в (1.1.7), с точностью до величин более высокого порядка малости, может быть представлен следующим соотношением:
$$\iint\limits_{\delta_4} v_{n_4}^A d\delta_4 + \iint\limits_{\delta_5} v_{n_5}^A d\delta_5 = CXYZ \qquad (1.1.9)$$
где C — некоторая константа, а величины X, Y, Z — максимальные размеры объема q по направлениям осей x_1, y_1, z_1.

Пусть уравнение поверхности δ_3
$$F(x, y, z, t) = 0$$
в окрестности точки A представимо в виде:
$$y_1 - a_2(t)\left|x_1^{\beta_2}\right| - a_3 z_1^{\beta_3} = 0, \qquad (1.1.10)$$
где $\beta_3 > 1$, $\beta_2 > 0$, a_3 — некоторая константа, $a_2(t)$ — функция времени. Тогда, согласно [63], скорость $v_{n_3}^A$ относительно точки A, то есть скорость перемещения поверхности δ_3, выразится как:
$$v_{n_3}^A = \frac{dn_3}{dt} =$$
$$= -\frac{\partial F/\partial t}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\right)^2}} = \frac{a_2'(t)|x_1^{\beta_2}|}{\sqrt{1 + \left(\beta_2 a_2(t)\left|x_1^{\beta_2 - 1}\right|\right)^2 + \left(\beta_3 a_3 z_1^{\beta_3 - 1}\right)^2}}.$$
Так как $d\delta_3 = dl_3 dz_1$, то для всех возможных порядков длины дуги линии l_3: $l_3 \sim |y_1| \sim \left|a_2(t) x_1^{\beta_2}\right|$ при изменении β_2 в диапазоне $1 > \beta_2 > 0$;
$$l_3 \sim |x_1| \sim \left|\frac{y_1^{\beta_2}}{a_2(t)}\right| \qquad \text{при} \quad \beta_2 > 1;$$
$$l_3 \sim |x_1| \sim \left|\frac{y_1}{a_2(t)}\right| \qquad \text{при} \quad \beta_2 \ \sim 1v$$
— с точностью до величин более высокого порядка малости имеем
$$\iint v_{n_3}^A d\delta_3 = C_1 X^{\beta_2 + 1} Z, \qquad (1.1.11)$$
где C_1 — некоторая константа.

Так как уравнение линии l_2 в окрестности точки A с точностью до малых более высокого порядка может быть представлено в виде:
$$y_1 = a_4 x_1^{\beta_4},$$

где a_4 — некоторая константа, $\beta_4 > 0$, то для любого $\beta_2 > 0$, входящего в (1.1.10), максимальный размер поверхности δ_1 по оси $0_1 y_1$ может быть записан в виде
$$Y = C_2 X^{\beta_2} + C_4 X^{\beta_4},$$
и тогда с точностью до малых более высокого порядка площадь поверхности δ_1 можно представить в виде
$$\delta_1 = C_3 Y Z = C_3 Z (C_2 X^{\beta_2} + C_4 X^{\beta_4}), \tag{1.1.12}$$
где C_2, C_3, C_4 — некоторые константы.

Подставляя (1.1.8), (1.1.9), (1.1.11) в (1.1.7), используя теорему о среднем, учитывая (1.1.12) и производя сокращение, получим:
$$v_{n_1}^A = \frac{C_1 X}{C_3 \left(C_2 + C_4 X^{\beta_4 - \beta_2}\right)} + CX. \tag{1.1.13}$$
При стремлении объема q к нулю, то есть при $X \to 0$, первое слагаемое в (1.1.13) для любого $\beta_4 (\beta_4 > \beta_2,\ \beta_4 = \beta_2,\ \beta_4 < \beta_2)$ стремится к нулю, и, следовательно, $v_{n_1}^A \to 0$, что и требовалось доказать.

Итак, заключаем, что проекция вектора скорости жидкости на плоскость П нормальную τ, в точке A в углу, образованном поверхностями S_3 и S_2, относительно точки $A \in \tau$ отсутствует. Следовательно, скорость перемещения линии сопряжения τ свободной поверхности разрыва тангенциальных компонентов скорости с твердой поверхностью совпадает со скоростью перемещения предельной частицы жидкости, расположенной между этими поверхностями.

Аналогично с применением теоремы Остроградского–Гаусса доказывается, что проекция скорости жидкости относительно тела во внутреннем двугранном углу, образованном твердыми непроницаемыми стенками, на плоскость П, нормальную к линии, являющейся вершиной двугранного угла, равна нулю. Такое же доказательство можно проделать и для случая конической «вмятины» на теле. В этом случае полный вектор относительной скорости в углу равен нулю.

Рассмотрим еще некоторые следствия из доказанного положения.

Следствие 1. В случае, когда линия $l_1 l_2$ является гладкой, а проекция γ_τ на линию схода потока τ интенсивности вихрей $\boldsymbol{\gamma}_3$ в следе в окрестности точки A не равна нулю, то есть
$$\gamma_{\tau_3} = v_{l_{3_+}}^A - v_{l_{3_-}}^A \neq 0,$$
свободная поверхность следа должна подходить к твердой непроницаемой поверхности по касательной. В противном случае и в углу между линиями l_3 и l_2, и в углу между линиями l_3 и l_1 скорость в плоскости П относительно точки A по доказанному равна нулю. Тогда равны нулю и проекции на l_3 скорости жидкости относительно A с верхней $v_{l_{3_+}}^A$ и нижней $v_{l_{3_-}}^A$ сторон поверхности S_3, а, следовательно, и $\gamma_{\tau_3} = 0$, что противоречит предположению. Это утверждение следует также и из требования ограниченности и непрерывности скорости в области G_-, о чем будет сказано ниже.

Следствие 2. Пусть теперь линия $l_1 l_2$ является гладкой и поверхность следа S_3 подходит по касательной к поверхности тела, например, S_3 является как бы продолжением S_1, а скорость перемещения линии схода потока τ относительно тела равна нулю, причем в окрестности точки A имеем $\gamma_{\tau_3} \neq 0$.

Тогда обращается в нуль и проекция на плоскость П скорости жидкости между поверхностями S_2 и S_3.

Следствие 3. Если след S_3 сопрягается с угловой кромкой тела и в окрестности точки A интенсивность $\gamma_{\tau_3} \neq 0$, то он должен сопрягаться по касательной плоскости либо с поверхностью S_1, либо S_2, так как в противном случае в окрестности точки A проекция вектора завихренности $\gamma_{\tau_3} = 0$. Действительно, пусть S_3 сопряжена не по касательной. Положим для определенности, что угол (l_1, l_3) лежит в пределах $\pi > (l_1, l_3) > 0$. Поскольку по доказанному проекция скорости на плоскость П относительно точки A в углу (l_1, l_3) и во внутреннем углу (l_1, l_2) равна нулю, то в силу свойств вихревого слоя и требования непрерывности скорости в углу (l_2, l_3) должны выполняться соотношения:

$$\gamma_{\tau_3} \sin(l_2, l_3) = 0, \quad \gamma_{\tau_3} \cos(l_2, l_3) = \gamma_{\tau_2}.$$

Отсюда следует, что при (l_2, l_3) не равном нулю или π проекции векторов завихренности: $\gamma_{\tau_3} = 0$, $\gamma_{\tau_2} = 0$, а также равна нулю и проекция скорости на плоскость П. Что и доказывает сформулированное утверждение. Это также может быть получено и из требования ограниченности скоростей в области G_-. Очевидно, полученные результаты применимы и тогда, когда S является тонкой несущей поверхностью.

1.1.3. Условия для гидродинамических особенностей на линии схода свободной вихревой пелены. Получим соотношения, которые должны выполняться на линии сопряжения поверхности тела и свободной вихревой пелены в любой момент времени, вытекающие из требований ограниченности и непрерывности скорости.

Требования ограниченности скорости. Пусть по поверхностям S_i $(i = 1, 2, 3)$ распределен двойной слой. Запишем выражения для проекции на любое направление $\mathbf{m}$ вектора скорости, индуцируемой поверхностями S_i вне этих поверхностей в точке $M \to A \in \tau$. Воспользуемся для этого выражениями (1.1.3)–(1.1.5). Учитывая, что на линию τ опираются поверхности S_1, S_2, S_3, получим:

$$u_m = (\Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3)\left(\frac{c_1}{2\pi}\frac{1}{R}\mathbf{n}' \cdot \mathbf{m} + \frac{c_2}{2\pi}\frac{1}{R}\mathbf{b}' \cdot \mathbf{m} + \frac{c_3}{4\pi}\ln\frac{1}{R}\mathbf{b}' \cdot \mathbf{m}\right) + \\ + (\gamma_{\tau_1}\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{m} - \gamma_{\tau_2}\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{m} - \gamma_{\tau_3}\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{m})\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R} + O(\overline{\mathfrak{v}}) \quad (1.1.14)$$

Здесь $\mathbf{n}'$ — главная нормаль к линии τ в точке A, $\mathbf{b}'$ — бинормаль; R — расстояние от M до A; Γ_i — циркуляции в точке A, входящие в первый интеграл формулы (1.1.3); γ_{τ_i} — проекции векторов вихрей $\boldsymbol{\gamma}_i$, распределенных по поверхностям S_i, на направление $\boldsymbol{\tau}$ в точке A. За положительное направление векторов $\boldsymbol{\gamma}_i$ принято такое, при котором векторы $\boldsymbol{l}_i, \mathbf{n}_i, \boldsymbol{\gamma}_i$ составляют правую систему координат. Наличие разных знаков при Γ_i и γ_{τ_i} в (1.1.14) обусловлено следующим. Выражение для скорости (1.1.3) получено из формулы Стокса [80], в которой предполагается, что положительное направление нормали $\mathbf{n}''$ к поверхности S' и положительный обход по линии τ', т.е. по направлению $\boldsymbol{\tau}'$, составляют правый винт. Поэтому применение (1.1.4), (1.1.5) к поверхности S_1 (см. рис. 1.1), для которой нормаль $\mathbf{n}_1$ и $\boldsymbol{\tau}$ составляют правый винт, дает знак плюс перед Γ_1 и γ_{τ_1}, а к поверхностям S_2 и S_3, для которых $\mathbf{n}_2$, $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}_3$, $\boldsymbol{\tau}$ составляют левый винт — знаки минус перед Γ_2, Γ_3 и $\gamma_{\tau_2}, \gamma_{\tau_3}$. Так как проекции скорости, индуцируемой гидродинамическими особенностями, должны быть всюду в G_- вне S_i ограничены и так как особенность типа R^{-1} не может быть скомпенсирована особенностью типа $\ln R^{-1}$ при $R \to 0$, то в (1.1.14) в любой момент времени t должны выполняться следующие тождества по времени:

$$\Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3 \equiv 0, \tag{1.1.15}$$

$$\gamma_{\tau_1}\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{m} - \gamma_{\tau_2}\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{m} - \gamma_{\tau_3}\mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{m} \equiv 0. \tag{1.1.16}$$

Если бы по поверхностям S_i был распределен вихревой слой, то из (1.1.3), (1.1.14) было бы получено только соотношение (1.1.16). Соотношение же (1.1.15) для этого случая также должно выполняться в любой момент времени, что следует из теоремы Томсона о постоянстве циркуляции во все время движения жидкости [80]. Таким образом, выполнение соотношения (1.1.15) по сути соответствует выполнению указанной теоремы Томсона в любой момент времени.

Очевидно, что (1.1.16) тривиально выполняется при

$$\gamma_{\tau_1} \equiv \gamma_{\tau_2} \equiv \gamma_{\tau_3} \equiv 0,$$

что возможно, в соответствии с (1.1.5), при

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 = \pm\frac{\pi}{2},$$

то есть когда вихревые линии (см. рис. 1.3), лежащие на этих поверхностях, ортогональны τ, или в том случае, когда полные векторы завихренности на этих поверхностях равны нулю:

$$\boldsymbol{\gamma}_1 \equiv \boldsymbol{\gamma}_2 \equiv \boldsymbol{\gamma}_3 \equiv 0,$$

Условие (1.1.16) также тождественно выполняется и для следующих шести комбинаций двух последних тождеств:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \equiv \pm\frac{\pi}{2},\ \boldsymbol{\gamma}_2 \equiv \boldsymbol{\gamma}_3 \equiv 0; \quad && \alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \pm\frac{\pi}{2},\ \boldsymbol{\gamma}_3 \equiv 0;\\
&\alpha_2 \equiv \pm\frac{\pi}{2},\ \boldsymbol{\gamma}_1 \equiv \boldsymbol{\gamma}_3 \equiv 0; \quad && \alpha_1 \equiv \alpha_3 \equiv \pm\frac{\pi}{2},\ \boldsymbol{\gamma}_2 \equiv 0;\\
&\alpha_3 \equiv \pm\frac{\pi}{2},\ \boldsymbol{\gamma}_1 \equiv \boldsymbol{\gamma}_2 \equiv 0; \quad && \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \pm\frac{\pi}{2},\ \boldsymbol{\gamma}_1 \equiv 0.
\end{aligned}$$

Требования непрерывности скорости. Потребуем еще вблизи точки A вне S_i непрерывности скорости, которая геометрически означает, что в окрестности этой точки существуют лишь поверхности разрыва тангенциальных компонентов скорости S_i. Пусть $\mathbf{u}_i$ — индуцированная поверхностями S_i скорость вблизи поверхности S_i. Тогда в любой момент времени между

$$\left.\begin{aligned}
&S_1 \text{ и } S_2 \quad \mathbf{u}_{1+} \cdot \mathbf{m} - \mathbf{u}_{2+} \cdot \mathbf{m} = 0,\\
&S_2 \text{ и } S_3 \quad \mathbf{u}_{2+} \cdot \mathbf{m} - (\gamma_{l_2}\boldsymbol{\tau}_2 + \gamma_{\tau_2}\boldsymbol{l}_2) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{u}_{3+} \cdot \mathbf{m},\\
&S_3 \text{ и } S_1 \quad \mathbf{u}_{1+} \cdot \mathbf{m} - (\gamma_{l_1}\boldsymbol{\tau}_1 + \gamma_{\tau_1}\boldsymbol{l}_1) \cdot \mathbf{m} = \mathbf{u}_{3+} \cdot \mathbf{m} - (\gamma_{l_3}\boldsymbol{\tau}_3 + \gamma_{\tau_3}\boldsymbol{l}_3) \cdot \mathbf{m},
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.17}$$

здесь $\mathbf{m}$ — любое направление, причем в A: $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\tau}_3 = \boldsymbol{\tau}$. Разность и сумма двух последних соотношений, входящих в (1.1.17), с учетом первого из них могут быть представлены в виде:

$$(\gamma_{l_1} - \gamma_{l_2} - \gamma_{l_3})\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{m} + (\gamma_{\tau_1}\boldsymbol{l}_1 - \gamma_{\tau_2}\boldsymbol{l}_2 - \gamma_{\tau_3}\boldsymbol{l}_3)\cdot\mathbf{m} = 0, \qquad (1.1.18)$$

$$(\gamma_{l_1}+\gamma_{l_2}-\gamma_{l_3})\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{m}+(\gamma_{\tau_1}\boldsymbol{l}_1+\gamma_{\tau_2}\boldsymbol{l}_2-\gamma_{\tau_3}\boldsymbol{l}_3)\cdot\mathbf{m}-2(\mathbf{u}_{2+}-\mathbf{u}_{3+})\cdot\mathbf{m}=0. \qquad (1.1.19)$$

Из линейной независимости векторов $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{l}_i$ следует, что для выполнения (1.1.18) при любом $\mathbf{m}$ необходимо, чтобы

$$\gamma_{l_1} - \gamma_{l_2} - \gamma_{l_3} = 0, \qquad (1.1.20)$$

$$\gamma_{\tau_1}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathbf{m} - \gamma_{\tau_2}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathbf{m} - \gamma_{\tau_3}\boldsymbol{l}_3\cdot\mathbf{m} = 0, \qquad (1.1.21)$$

при этом выражение (1.1.19) будет выполнено в силу (1.1.20), (1.1.21) и свойств вихревого слоя.

Докажем, что выполнение соотношения (1.1.21) эквивалентно выполнению (1.1.16). Представим $\mathbf{m}$ в виде суммы двух ортогональных векторов:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_\Pi + \mathbf{m}_\tau,$$

где $\mathbf{m}_\tau$ — проекция $\mathbf{m}$ на $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{m}_\Pi$ — проекция $\mathbf{m}$ на плоскость П, проходящую через A и ортогональную $\boldsymbol{\tau}$. Так как $\mathbf{m}_\tau$ ортогонален $\boldsymbol{l}_i$ и $\mathbf{n}_i$ $(i = 1,2,3)$, соотношения (1.1.21), (1.1.16) приводятся к виду:

$$\gamma_{\tau_1}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathbf{m}_\Pi - \gamma_{\tau_2}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathbf{m}_\Pi - \gamma_{\tau_3}\boldsymbol{l}_3\cdot\mathbf{m}_\Pi = 0, \qquad (1.1.22)$$

$$\gamma_{\tau_1}\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{m}_\Pi - \gamma_{\tau_2}\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{m}_\Pi - \gamma_{\tau_3}\mathbf{n}_3\cdot\mathbf{m}_\Pi = 0. \qquad (1.1.23)$$

Запишем теперь вектор $\mathbf{m}_\Pi$ как:

$$\mathbf{m}_\Pi = C_1\boldsymbol{l}_3 + C_2\mathbf{n}_3,$$

где C_1, C_2 — любые числа, тогда (1.1.22), (1.1.23) можно представить в следующем виде:

$$C_1(\gamma_{\tau_1}\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_3 - \gamma_{\tau_1}\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{l}_3 - \gamma_{\tau_3}) + C_2(\gamma_{\tau_1}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathbf{n}_3 - \gamma_{\tau_2}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathbf{n}_3) = 0, \qquad (1.1.24)$$

$$C_1(\gamma_{\tau_1}\mathbf{n}_1\cdot\boldsymbol{l}_3 - \gamma_{\tau_1}\mathbf{n}_2\cdot\boldsymbol{l}_3) + C_2(\gamma_{\tau_1}\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_3 - \gamma_{\tau_2}\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_3 - \gamma_{\tau_3}) = 0. \qquad (1.1.25)$$

Так как C_1 и C_2 — любые произвольные числа, то необходимо, чтобы выражения, содержащиеся в скобках в (1.1.24), (1.1.25), обращались в нуль:

$$\begin{aligned} &\gamma_{\tau_1}\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_3 - \gamma_{\tau_2}\boldsymbol{l}_2\cdot\boldsymbol{l}_3 - \gamma_{\tau_3} = 0,\\ &\gamma_{\tau_1}\boldsymbol{l}_1\cdot\mathbf{n}_3 - \gamma_{\tau_2}\boldsymbol{l}_2\cdot\mathbf{n}_3 = 0, \end{aligned} \qquad (1.1.26)$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{\tau_1}\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_3 - \gamma_{\tau_2}\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_3 - \gamma_{\tau_3} = 0,\\ &\gamma_{\tau_1}\mathbf{n}_1\cdot\boldsymbol{l}_3 - \gamma_{\tau_2}\mathbf{n}_2\cdot\boldsymbol{l}_3 = 0. \end{aligned} \qquad (1.1.27)$$

Но $\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_3 = \boldsymbol{l}_i\cdot\boldsymbol{l}_3$, $\boldsymbol{l}_i\cdot\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_i\cdot\boldsymbol{l}_3$, $(i = 1,2,3)$, поэтому соотношения, стоящие в (1.1.26), эквивалентны соотношениям, стоящим в (1.1.27). Таким образом, выполнение соотношения (1.1.21) равносильно выполнению соотношения (1.1.16) и наоборот, что и требовалось доказать. Соотношения (1.1.27) можно записать еще в виде:

$$\begin{aligned} &\cos(n_1,n_3)\gamma_{\tau_1} - \cos(n_2,n_3)\gamma_{\tau_2} - \gamma_{\tau_3} = 0,\\ &\sin(n_1,n_3)\gamma_{\tau_1} - \sin(n_2,n_3)\gamma_{\tau_2} = 0. \end{aligned} \qquad (1.1.28)$$

Итак, требования ограниченности и непрерывности скорости вне S_1, S_2, S_3 в окрестности линии схода свободной вихревой пелены с поверхности тела приводят к необходимости выполнения в любой момент времени соотношений (1.1.15), (1.1.16), (1.1.20), причем выполнение (1.1.16) равносильно выполнению соотношений (1.1.27) или (1.1.28). Полученные соотношения согласуются с положениями разд. 1.1.2. Очевидно, приведенные результаты применимы и к случаю, когда поверхность тела S — тонкая несущая поверхность.

1.1.4. Скорость сноса свободной вихревой пелены с поверхности тела. Для определения скорости сноса свободной вихревой пелены S_3 в окрестности линии отрыва τ обратимся к интегралу Коши–Лагранжа, записанному в произвольной подвижной системе координат [9]:

$$\frac{p}{\rho} = f(t) + \frac{v_0^2}{2} - \frac{v^2}{2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{1.1.29}$$

где p — давление, ρ — плотность жидкости, $f(t)$ — произвольная функция времени, v_0 — переносная, а v — относительная скорости, φ — полный потенциал абсолютной скорости в подвижной системе. Применим (1.1.29) с обеих сторон точки $D \in S_3$ (см. рис. 1.1), движущейся вместе со свободным вихревым следом S_3; при $D \to A \in \tau$ с учетом первого граничного условия на S_3 (1.1.1) будем иметь:

$$\frac{\partial \Gamma_3}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}_{3+} + \mathbf{v}_{3-}}{2} \cdot (\mathbf{v}_{3+} + \mathbf{v}_{3-}) = 0 \quad \text{на} \quad S_3, \tag{1.1.30}$$

где $\Gamma_3 = \varphi_{3+} - \varphi_{3-}$ — циркуляция скорости по любому контуру, пересекающему свободную поверхность S_3 лишь в одной рассматриваемой точке D (см. рис. 1.1). В соответствии со свойствами вихревого слоя и принятой в разд. 1.1.1 системой единичных векторов $\boldsymbol{l}_3, \mathbf{n}_3, \boldsymbol{\tau}_3$ можно записать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathbf{v}_{3+} + \mathbf{v}_{3-}}{2} &= \mathbf{v}_3 = \frac{\partial \tau_3}{\partial t}\boldsymbol{\tau}_3 + \frac{\partial l_3}{\partial t}\boldsymbol{l}_3 \\ \mathbf{v}_{3+} - \mathbf{v}_{3-} &= -\boldsymbol{\gamma}_3 = \frac{\partial \Gamma_3}{\partial l_3}\boldsymbol{\tau}_3 + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \tau_3}\boldsymbol{l}_3, \end{aligned}\right\} \tag{1.1.31}$$

здесь τ_3 и l_3 — ортогональные поверхностные координатные линии на S_3.

Тогда, с учетом (1.1.31) соотношение (1.1.30) может быть представлено следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_3}{\partial t} - \mathbf{v}_3 \cdot \boldsymbol{\gamma}_3 = 0, \quad \text{или} \\ \frac{d\Gamma_3(\tau_3, l_3, t)}{dt} = \frac{\partial \Gamma_3}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial l_3}\frac{\partial l_3}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial t} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.32}$$

Поскольку в соответствии с (1.1.31):

$$v_{\tau_3} = \frac{\partial \tau_3}{\partial t}, \quad v_{l_3} = \frac{\partial l_3}{\partial t}, \quad \gamma_{\tau_3} = -\frac{\partial \Gamma_3}{\partial l_3}, \quad \gamma_{l_3} = -\frac{\partial \Gamma_3}{\partial \tau_3},$$

то (1.1.32) можно записать также в виде

$$\frac{\partial \Gamma_3}{\partial t} - v_{\tau_3}\gamma_{l_3} - v_{l_3}\gamma_{\tau_3} = 0. \tag{1.1.33}$$

Соотношения (1.1.32), (1.1.33) выполняются в любой системе координат, так как индивидуальная производная $d\Gamma_3/dt$ инвариантна относительно системы координат.

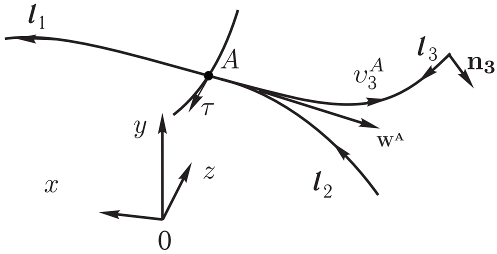


Рис. 1.5. Вектор скорости $\mathbf{w}^A$ перемещения точки $A \in \tau$ относительно связанной с телом системы координат $0xyz$ и вектор скорости $\boldsymbol{\upsilon}_3^A$ перемещения вихревой пелены относительно точки A

Представим вектор $\boldsymbol{\upsilon}_3$ (см. рис. 1.5) в виде суммы:

$$\boldsymbol{\upsilon}_3 = \mathbf{w}^A + \boldsymbol{\upsilon}_3^A, \tag{1.1.34}$$

где $\mathbf{w}^A$ — скорость перемещения линии схода свободной вихревой пелены в системе координат, связанной с телом, то есть скорость перемещения точки $A \in \tau$; $\boldsymbol{\upsilon}_3^A$ — скорость движения частиц жидкости вихревого следа относительно системы координат, связанной с точкой A. Согласно разд. 1.1.2 $w_\tau^A = 0$, а поверхность S_3 касается либо S_1, либо S_2, поэтому проекции (1.1.34) на τ_3 и l_3, входящие в (1.1.33), с учетом свойства вихревого слоя можно представить в следующем виде:

$$\upsilon_{l_3}^A = \pm\frac{\gamma_{\tau_3}}{2}, \tag{1.1.35}$$

$$\upsilon_{\tau_3} = \upsilon_{\tau_3}^A = \frac{\upsilon_{\tau_{3-}} + \upsilon_{\tau_{3+}}}{2} = \frac{\upsilon_{\tau_{1-}} + \upsilon_{\tau_{2-}}}{2}, \tag{1.1.36}$$

$$\upsilon_{l_3} = w^A + \upsilon_{l_3}^A. \tag{1.1.37}$$

Проекцию вектора завихренности γ_{l_3} в силу (1.1.20) и свойств вихревого слоя можно представить в виде

$$\gamma_{l_3} = \gamma_{l_1} - \gamma_{l_2} = \upsilon_{\tau_{3-}} - \upsilon_{\tau_{3+}} = \upsilon_{\tau_{1-}} - \upsilon_{\tau_{2-}}. \tag{1.1.38}$$

Тогда в системе координат, связанной с точкой A, учитывая принятые обозначения, (1.1.33) запишется в виде:

$$\frac{\partial\Gamma_3}{\partial t} - \upsilon_{\tau_3}^A\gamma_{l_3} - \upsilon_{l_3}^A\gamma_{\tau_3} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial\Gamma_3}{\partial t} + \frac{\upsilon_{\tau_{2-}}^2 - \upsilon_{\tau_{1-}}^2}{2} - \upsilon_{l_3}^A\gamma_{\tau_3} = 0. \tag{1.1.39}$$

В дальнейшем будем полагать, что в соответствии с принятой в разд. 1.1.1 системой координат

$$\upsilon_{l_3}^A \leqslant 0, \tag{1.1.40}$$

то есть, вихревая пелена сходит с поверхности тела. Тогда в системе координат, связанной с точкой A, с учетом (1.1.35), (1.1.40) из (1.1.39) получим:

$$-\gamma_{\tau_3}\left|\gamma_{\tau_3}\right| = 2\frac{\partial\Gamma_3}{\partial t} + \upsilon^2_{\tau_{2-}} - \upsilon^2_{\tau_{1-}},$$

откуда:

$$\operatorname{sign}\gamma_{\tau_3} = -\operatorname{sign}\left(2\frac{\partial\Gamma_3}{\partial t} + \upsilon^2_{\tau_{2-}} - \upsilon^2_{\tau_{1-}}\right) \qquad (1.1.41)$$

и, следовательно,

$$\gamma_{\tau_3} = -\sqrt{\left|2\frac{\partial\Gamma_3}{\partial t} + \upsilon^2_{\tau_{2-}} - \upsilon^2_{\tau_{1-}}\right|}\operatorname{sign}\left(2\frac{\partial\Gamma_3}{\partial t} + \upsilon^2_{\tau_{2-}} - \upsilon^2_{\tau_{1-}}\right), \qquad (1.1.42)$$

$$\upsilon^A_{l_3} = -\frac{|\gamma_{\tau_3}|}{2}. \qquad (1.1.43)$$

Итак, скорость сноса свободной вихревой пелены с поверхности тела полностью определяется соотношениями (1.1.34), (1.1.36), (1.1.37), (1.1.38), (1.1.42), (1.1.43). Эти соотношения применимы и к несущей поверхности. При относительной скорости внутри тела равной нулю в выражениях (1.1.38), (1.1.42) следует положить $\upsilon_{\tau_1-} = \gamma_{l_1}$, $\upsilon_{\tau_2-} = \gamma_{l_2}$.

Необходимо отметить следующее. При выводе формулы (1.1.30) и всех последующих выкладках принималось, что циркуляция скорости по любому контуру, пересекающему свободную поверхность S_3 лишь в одной рассматриваемой точке D (см. рис. 1.1), равна: $\Gamma_3 = \varphi_+ - \varphi_-$. Если принять обратный обход этого контура, и считать, что циркуляция $\Gamma_3 = \varphi_- - \varphi_+$, то (1.1.30) преобразуется к виду

$$\frac{\partial\Gamma_3}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{\upsilon}_{3-} + \boldsymbol{\upsilon}_{3+}}{2}(\boldsymbol{\upsilon}_{3-} - \boldsymbol{\upsilon}_{3+}) \quad \text{на} \quad S_3.$$

Тогда, так как в соответствии с принятой в разд. 1.1.1 системой единичных векторов

$$\boldsymbol{\upsilon}_{3-} - \boldsymbol{\upsilon}_{3+} = \boldsymbol{\gamma}_3,$$

то в первой формуле (1.1.32) перед вторым слагаемым будет стоять знак плюс, а проекции вектора $\boldsymbol{\gamma}_3$ на координатные линии τ и l согласно (1.1.31) будут равны соответственно

$$\gamma_{\tau_3} = \frac{\partial\Gamma_3}{\partial l_3}, \quad \gamma_{\tau_3} = \frac{\partial\Gamma_3}{\partial\tau_3}.$$

Вследствие этого в рассматриваемом случае ($\Gamma_3 = \varphi_- - \varphi_+$) в формулах (1.1.33), (1.1.39) перед вторым и третьим слагаемыми необходимо поменять знаки на противоположные. В итоге для $\Gamma_3 = \varphi_- - \varphi_+$ с учетом того, что (1.1.40) остается в силе, получим

$$\gamma_{\tau_3}\left|\gamma_{t_3}\right| = 2\frac{\partial\Gamma_3}{\partial t} + \upsilon^2_{\tau_{1-}} - \upsilon^2_{\tau_{2-}}.$$

Тогда вместо (1.1.41), (1.1.42) получим

$$\operatorname{sign}\gamma_{\tau_3} = \operatorname{sign}\left(2\frac{\partial\Gamma}{\partial t} + \upsilon^2_{\tau_{1-}} - \upsilon^2_{\tau_{2-}}\right),$$

$$\gamma_{\tau_3} = \sqrt{\left|2\frac{\partial\Gamma}{\partial t} + \upsilon^2_{\tau_{1-}} - \upsilon^2_{\tau_{2-}}\right|}\operatorname{sign}2\frac{\partial\Gamma}{\partial t} + \upsilon^2_{\tau_{1-}} - \upsilon^2_{\tau_{2-}},$$

а выражение (1.1.43) останется неизменным.

1.1.5. Сопряжение свободного вихревого следа с поверхностью тела. Перейдем к анализу различных случаев сопряжения тела со следом, соответствующих различным видам формы задней кромки тела, или крыла, обтекаемого потоком жидкости.

Угловая задняя кромка. Пусть точка A схода потока — угловая точка линии $l_1 l_2$, $\mathbf{n}_1 \neq \mathbf{n}_2$, угол β (рис. 1.6, *а–г*) изменяется в пределах $0 < \beta < \pi$, а линия схода потока τ является ребром на S. Если $\gamma_{\tau_3} = 0$ в точке A, то из условия непрерывности и ограниченности скорости в области G_- следует

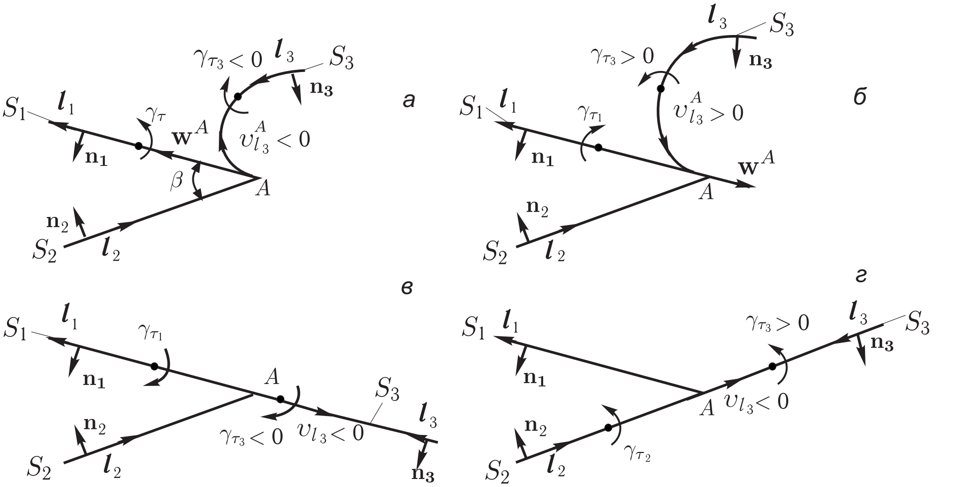


Рис. 1.6. Различные варианты сопряжения вихревой пелены с угловой кромкой тела

(см. разд. 1.1.3), что $\gamma_{\tau_1} = \gamma_{\tau_2} = 0$, а это тривиальный случай, и он рассматриваться не будет. Будем рассматривать случай, когда проекция вектора завихренности в следе на линию схода потока $\gamma_{\tau_3} \neq 0$. В соответствии со следствием 3 (см. разд. 1.1.2) при $\gamma_{\tau_3} \neq 0$ необходимо положить, что поверхность следа S_3 касается либо верхней S_1, либо нижней S_2 поверхности тела, т. е. либо $\mathbf{n}_1 || \mathbf{n}_3$, либо $\mathbf{n}_2 || \mathbf{n}_3$. При этом, как следует из (1.1.16) или (1.1.27), (1.1.28), в первом случае $\gamma_{\tau_2} = 0$, во втором $\gamma_{\tau_1} = 0$. Пусть сначала:

$$\gamma_{\tau_2} = 0, \quad \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{l}_3 = 0, \quad \text{то есть} \quad \mathbf{n}_3 || \mathbf{n}_1. \tag{1.1.44}$$

Тогда согласно (1.1.28)

$$\gamma_{\tau_3} - \gamma_{\tau_1} \cos(n_1, n_3) = 0. \tag{1.1.45}$$

В соответствии с (1.1.44) $\cos(n_1, n_3) = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = \boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_2 = \pm 1$. Если $\boldsymbol{l}_i \cdot \boldsymbol{l}_3 = -1$ (рис. 1.6, *а,б*), то необходимо принять, согласно разд. 1.1.4 и (1.1.44), что $w^A = v_{l_{1-}} = \gamma_{\tau_1} = -\gamma_{\tau_3}$. Поскольку во внешнем углу между l_2 и l_3 проекция скорости на плоскость Π, нормальную τ, равна нулю, то $v_{l_3} = \gamma_{\tau_3}/2$. На рис. 1.6, *а* точка A должна двигаться справа налево вдоль поверхности S_1; в противном случае необходимо принять, что $w^A = \gamma_{\tau_1} = \gamma_{\tau_3} = 0$, а поскольку в силу (1.1.28) тогда и $\gamma_{\tau_2} = 0$, то это соответствует тривиальному случаю, а он не рассматривается. В следующий за представленным на этом рисунке момент времени поверхность S_3 переме-

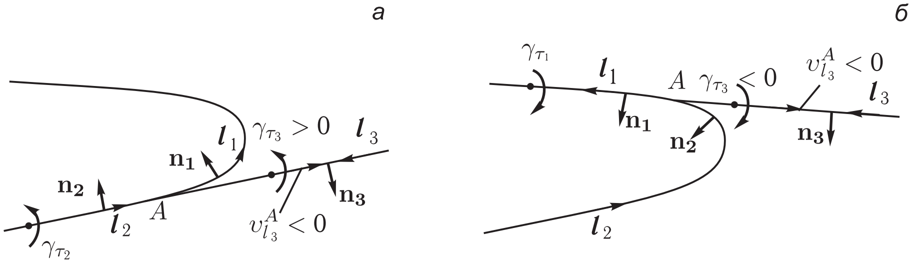


Рис. 1.7. Сход вихревой пелены с гладкой поверхности

стится вдоль поверхности S_1 тела, и в угловой точке из условия ограниченности скоростей либо должна зародиться новая поверхность тангенциального разрыва, либо должно соблюдаться тривиальное условие $\gamma_{\tau_1} = \gamma_{\tau_2} = \gamma_{\tau_3} = 0$. Таким образом, тип сопряжения, представленный на рис. 1.6, *а*, соответствует движению следа S_3 вдоль гладкой поверхности, и он будет рассмотрен ниже. При сопряжении, показанном на рис. 1.6, *б*, $\gamma_{\tau_3} > 0$, $v_{l_3}^A > 0$, т. е. вихревая пелена «входит» в поверхность тела, что противоречит (1.1.40), (1.1.42), (1.1.43), поэтому этот вариант сопряжения не рассматривается. Следует отметить, что при $\gamma_{\tau_3} \neq 0$ такой случай может иметь место лишь в единственный момент времени. Точка A в этом случае движется со скоростью $w^A = \gamma_{\tau_1}$ вдоль S_1, и поверхность S_3 не будет одновременно иметь общей как с S_1, так и S_2 линии τ в следующий момент времени. Это вызовет появление бесконечных скоростей в области течения G_-, что не допускается. Таким образом, необходимо положить: $\boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_3 = 1$, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_3$ (рис. 1.6, *в*). Тогда, согласно разд. 1.1.3, $w^A = \gamma_{\tau_2} = 0$ и в силу (1.1.45) $v_{l_{1-}} = \gamma_{\tau_1} = \gamma_{\tau_3}$, а следовательно, $v_{l_3} = v_{l_3}^A = \gamma_{\tau_3}/2$. Согласно соотношениям (1.1.41)–(1.1.43) это возможно лишь при $\gamma_{\tau_3} < 0$, т. е. при $\operatorname{sign}\Big(2(\partial \Gamma_3/\partial t) + v_{\tau_{2-}}^2 - v_{\tau_1}^2\Big) > 0$. Аналогично проводится анализ в случае, когда в выражениях (1.1.27), (1.1.28) $\gamma_{\tau_1} = 0$, $\mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{l}_3 = 0$, т. е. $\mathbf{n}_3 || \mathbf{n}_2$ (см. рис. 1.6, *г*). В итоге получаем:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1,\ \gamma_{\tau_{1-}} - \gamma_{\tau_3} \equiv 0,\ \gamma_{\tau_2} \equiv 0 \quad \text{при} & 2\dfrac{\partial \Gamma_3}{\partial t} + v_{\tau_{2-}}^2 - v_{\tau_1}^2 > 0; \\ \mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_2,\ \gamma_{\tau_2} - \gamma_{\tau_3} \equiv 0,\ \gamma_{\tau_1} \equiv 0 \quad \text{при} & 2\dfrac{\partial \Gamma_3}{\partial t} + v_{\tau_{2-}}^2 - v_{\tau_1}^2 < 0. \end{array}\right\} \qquad (1.1.46)$$

Условия (1.1.46) является следствием требований ограниченности скорости жидкости вблизи острой кромки при $\gamma_{\tau_3}(t) \neq 0$, непрерывности скоростей вне S_1, S_2, S_3 и схода вихревого следа S_3 в любой момент времени именно с острой кромки тела.

Поверхность тела — гладкая. Пусть точка A расположена на гладком участке линии $l_1 l_2 : \boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_2 = 1$ (рис. 1.7). Так как тривиальный случай нами не рассматривается, то из (1.1.28) получаем:

$$\gamma_{\tau_3} - (\gamma_{\tau_1} - \gamma_{\tau_2}) \cos(n_1, n_3) = 0.$$

Если $\cos(n_1, n_3) = \boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_3 = -1$, т. е. $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ (рис. 1.7, а), то необходимо принять согласно разд. 1.1.2

$$v_{l_{1-}} = v_{l_{3-}} = w^A,$$

где

$$w^A = v_{l_{1+}} + \gamma_{\tau_1} = v_{l_{2+}} + \gamma_{\tau_1},$$

а так как

$$v_{l_{3+}} = v_{l_{3-}} - \gamma_{\tau_3} = w^A - \gamma_{\tau_3},$$

то

$$v_{l_3} = \frac{v_{l_{3+}} + v_{l_{3-}}}{2} = w^A - \frac{\gamma_{\tau_3}}{2}.$$

Отсюда, в силу (1.1.34), (1.1.37), $v^A_{l_3} = -\gamma_{\tau_3}/2$. В соответствии с (1.1.40)–(1.1.42) в этом случае $2\partial\Gamma_3/\partial t + v^2_{\tau_{2-}} - v^2_{\tau_1} < 0$. Рассмотрев случай, когда $\boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_3 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = 1$ (рис. 1.7, *б*), получим следующий результат:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1,\ \gamma_{\tau_3} \equiv \gamma_{\tau_1} - \gamma_{\tau_2},\ \text{при}\quad 2\frac{\partial\Gamma_3}{\partial t} + v^2_{\tau_{2-}} - v^2_{\tau_1} > 0,\\ \mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_2,\ \gamma_{\tau_3} \equiv \gamma_{\tau_2} - \gamma_{\tau_1},\ \text{при}\quad 2\frac{\partial\Gamma_3}{\partial t} + v^2_{\tau_{2-}} - v^2_{\tau_1} < 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.47}$$

Когда же точка A неподвижна ($w^A = 0$), а скорость внутри тела равна нулю, $v_{l_{1+}} = v_{l_{2+}} = 0$, в соотношении (1.1.47), согласно следствию 2 разд. 1.1.2, либо $\gamma_{\tau_2} = w^A = 0$, либо $\gamma_{\tau_1} = w^A = 0$ и, таким образом, (1.1.47) преобразуется в (1.1.46).

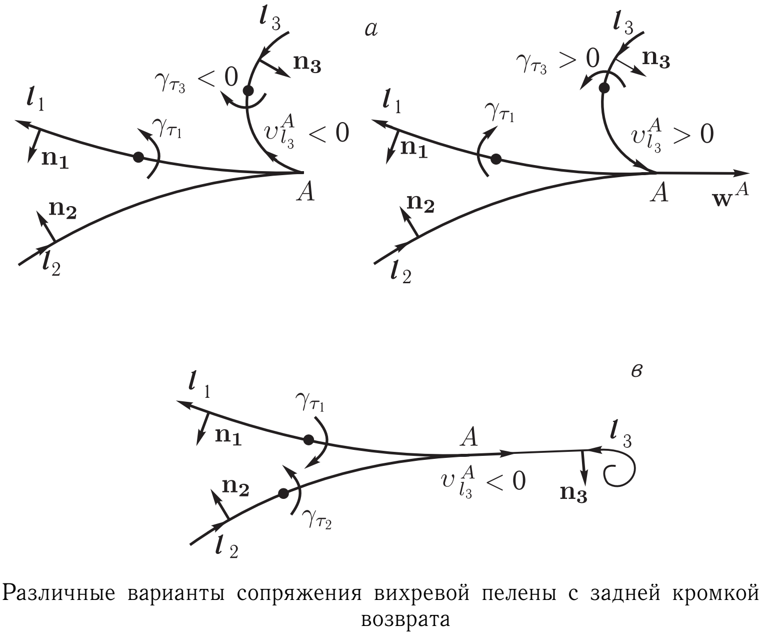


Рис. 1.8. Различные варианты сопряжения вихревой пелены с задней кромкой в виде точки возврата

Задняя кромка — точка возврата. Пусть точка A является точкой возврата линии $l_1 l_2$, а линия τ — ребром на поверхности тела S (рис. 1.8, *а*–*в*).

В этом случае $\boldsymbol{l}_2 \cdot \boldsymbol{l}_3 = -\boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_3$ и $\boldsymbol{l}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = -\boldsymbol{l}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = 0$. В соответствии с (1.1.27), (1.1.28) при $\gamma_{\tau_3} \neq 0$ имеем

$$\gamma_{\tau_3} - (\gamma_{\tau_1} + \gamma_{\tau_2}) \cos(n_1, n_3) = 0.$$

Случаи, изображенные на рис. 1.8, *а, б* при $\cos(n_1, n_3) = \boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_3 = -1$, совершенно аналогичны описанным ранее и показанным на рис. 1.6, *а, б* и поэтому они также не рассматриваются. Следовательно, необходимо положить $\cos(n_1, n_3) = \boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_3 = 1$. Тогда из записанного выше соотношения для γ_{τ_i} и свойств вихревого слоя получаем (рис.1.8, *в*):

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2, \quad \gamma_{\tau_3} \equiv \gamma_{\tau_1} + \gamma_{\tau_2} \tag{1.1.48}$$

Все полученные здесь соотношения применимы и к тонкой несущей поверхности.

При относительной скорости внутри тела (в области G_+), равной нулю, в выражениях (1.1.38), (1.1.42) $v_{\tau_{1-}} = \gamma_{l_1}$, $v_{\tau_{2-}} = \gamma_{l_2}$, а скорость перемещения линии схода вихревой пелены будет, в соответствии с разд. 1.1.2 и 1.1.5, выражаться как $w^A = \gamma_{\tau_1}$, либо как $w^A = \gamma_{\tau_2}$.

1.1.6. Плоские и осесимметричные течения. Все изложенные в этом параграфе результаты применимы к плоским или осесимметричным течениям. Для этого в полученных формулах и соотношениях необходимо положить касательные к линии схода потока компоненты скорости и нормальные к ней компоненты завихренности равными нулю. В частности, выражения для завихренности (1.1.39), (1.1.42) и скорости (1.1.43) движения частиц жидкости, принадлежащих вихревому следу, относительно системы координат, связанной с точкой отрыва потока A, приводятся к виду

$$\frac{\gamma_3^2}{2} = \frac{\partial \Gamma_3}{\partial t} \operatorname{sign} \frac{\partial \Gamma_3}{\partial t}, \tag{1.1.49}$$

$$\gamma_3 = -\operatorname{sign} \frac{\partial \Gamma_3}{\partial t} \sqrt{2 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial t}}\,, \tag{1.1.50}$$

$$v_{l_3}^A = -\frac{|\gamma_3|}{2} \leqslant 0. \tag{1.1.51}$$

Здесь и ниже для двухмерных или осесимметричных течений подстрочный индекс τ опускается. К этим течениям приложимы рис. 1.6–1.8 и соотношения (1.1.46)–(1.1.48).

Для угловой задней кромки из (1.1.46) получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1, \quad \gamma_1 - \gamma_3 \equiv 0, \quad \gamma_2 \equiv 0, \qquad \text{при} \quad \frac{\partial \Gamma_3}{\partial t} > 0,\\ &\mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_2, \quad \gamma_2 - \gamma_3 \equiv 0, \quad \gamma_1 \equiv 0, \qquad \text{при} \quad \frac{\partial \Gamma_3}{\partial t} < 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.52}$$

Для случая отрыва с гладкой поверхности и перемещающейся точки отрыва A из (1.1.47) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{n}_3 &= \mathbf{n}_1, \quad \gamma_3 \equiv \gamma_1 - \gamma_2, \qquad \text{при} \quad \frac{\partial \Gamma_3}{\partial t} > 0, \\ \mathbf{n}_3 &= -\mathbf{n}_2, \quad \gamma_3 \equiv \gamma_2 - \gamma_1, \qquad \text{при} \quad \frac{\partial \Gamma_3}{\partial t} < 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.1.53}$$

Как отмечалось выше, если точка A неподвижна,а скорость внутри тела равна нулю, то соотношение (1.1.53) переходит в (1.1.52).

Для случая точки возврата из (1.1.48) получаем:

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2, \quad \gamma_3 \equiv \gamma_1 + \gamma_2. \tag{1.1.54}$$

Для случая плоских течений условие, что скорость перемещения точки отрыва свободной вихревой поверхности совпадает со скоростью последней частицы жидкости, заключенной между телом и следом, было изложено А. А. Никольским в курсе лекций «Вихревые и отрывные течения жидкости и газа», прочитанных им в Московском физико-техническом институте в 1970–1971 г.г. В этих лекциях было изложено также условие касания поверхностей свободного следа и тела в виде: $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1$, $\gamma_2 \equiv 0$, либо $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_2$, $\gamma_1 \equiv 0$. Формулы (1.1.49), (1.1.50), но без множителя $\operatorname{sign}(\partial \Gamma_3/\partial t)$ использовались для плоских течений С. Н. Постоловским [116]. Можно также отметить, что в книге С. Н. Девнина [66] для плоского течения приведено соотношение для изменения циркуляции в точке отрыва с учетом вязкости в виде $\partial \Gamma_3/\partial t = \gamma_3^2/2$, которое аналогично (1.1.49). В нем также отсутствует множитель $\operatorname{sign}(\partial \Gamma_3/\partial t)$.

§ 1.2. Взаимосвязь объемных и поверхностных вихреобразований и их потенциалов в гидромеханике

1.2.1. Некоторые следствия из теоремы Остроградского–Гаусса. Будем пользоваться теоремой Остроградского–Гаусса в ее изначальном (1.2.1) и обобщенных (1.2.2), (1.1.3) видах [23]:

$$\oiint_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau, \tag{1.2.1}$$

$$\oiint_{\sigma} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) d\sigma = \iiint_{\tau} \mathbf{rot}\, \mathbf{A} d\tau, \tag{1.2.2}$$

$$\oiint_{\sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma = \iiint_{\tau} \mathbf{grad}\, \varphi d\tau, \tag{1.2.3}$$

где σ — некоторая гладкая поверхность, ограничивающая объем τ, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности σ. На вектор $\mathbf{A}$ и скаляр φ накладываются условия существования и непрерывности, как самих этих функций, так и их производных на σ и внутри τ.

Выведем некоторые важные следствия из теоремы Остроградского–Гаусса, которые будут использоваться в дальнейшем.

а. Пусть некоторая векторная функция $\mathbf{u}$ может быть представлена в τ и на σ как

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,\varphi \tag{1.2.4}$$

и как

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}. \tag{1.2.5}$$

В виде (1.2.4), (1.2.5) в гидродинамике может быть представлена скорость от завихренной области вне этой области. Тогда, подставляя эти соотношения в (1.2.2), (1.2.3) и приравнивая их, получим

$$\oiint\limits_{\sigma} \varphi \mathbf{n} d\sigma = \oiint\limits_{\sigma} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) d\sigma. \tag{1.2.6}$$

Выражение (1.2.6) в дальнейшем будет использоваться для исследования свойств потенциалов и установления связи между скалярным φ и векторным $\mathbf{A}$ потенциалами от вихревых особенностей.

В двумерном случае векторный потенциал имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}\psi, \tag{1.2.7}$$

где $\mathbf{k}$ — орт вдоль оси $0z$, а ψ — в гидродинамике — функция тока. Тогда в плоскости $0xy$ (1.2.6) приобретает вид

$$\oint\limits_{l} \varphi \mathbf{n} dl = \oint\limits_{l} (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dl \quad \text{или} \quad \oint\limits_{l} \varphi \mathbf{n} dl = \oint\limits_{l} \psi \boldsymbol{l}\, dl, \tag{1.2.8}$$

Здесь l — некоторый замкнутый контур в плоскости $0xy$, $\mathbf{n}$ — нормаль к этому контуру, $\mathbf{A}$ — определяется из (1.2.7).

б. Выведем теорему Остроградского–Гаусса на поверхности. Пусть x^i — обобщенные криволинейные координаты [23] на некоторой незамкнутой поверхности S, ограниченной некоторой линией L с направляющим вектором $\mathbf{L}$, причем координатная линия x^1 направлена по нормали $\mathbf{n}_0$ к S. Выделим вокруг S некоторый объем τ с малой толщиной $\varepsilon = \sigma x^1$ так, что сверху он будет ограничен поверхностью S_1, снизу — S_2, сбоку — S_3. Пусть в объеме $A^1 = 0$, $\partial A^2/\partial x^1 = \partial A^3/\partial x^1 = 0$, где A^i проекции некоторого вектора $\mathbf{A}$ на обобщенные криволинейные координаты. Таким образом, и A^2, и A^3, и $\mathrm{div}\mathbf{A}$ — записанная в обобщенных координатах, зависят только от поверхностных координат x^2, x^3. Применим (1.2.1) к объему τ, ограниченному поверхностью $\sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$. С учетом того, что

$$\iint\limits_{S_1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS_1 = \iint\limits_{S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS_2 = 0,$$

получим:

$$\iiint\limits_{\tau} \mathrm{div}\mathbf{A} d\tau = \iint\limits_{S_3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS_3.$$

Запишем элементарные объем и площадь в виде $d\tau = \varepsilon dS$, $dS_3 = \varepsilon dL$. Тогда, с учетом соотношений

$$\varepsilon \operatorname{div}\mathbf{A} = \operatorname{div}(\mathbf{A}\varepsilon) - \mathbf{grad}\,\varepsilon \cdot \mathbf{A},$$
$$\mathbf{grad}\,\varepsilon \cdot \mathbf{A} = 0,$$

последнее интегральное выражение преобразуется к виду

$$\iint\limits_S \operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{A})dS = \oint\limits_L (\varepsilon\mathbf{A}) \cdot \mathbf{N}dL, \tag{1.2.9}$$

где $\mathbf{N}$ — нормаль к L, лежащая в плоскости, касательной к поверхности S. Вектор $\mathbf{B} = \varepsilon\mathbf{A}$ можно трактовать как вектор поверхностной плотности (конечный вектор, равный пределу при стремлении $\varepsilon \to 0$, $|\mathbf{A}| \to \infty$). Тогда (1.2.9) можно представить в виде

$$\iint\limits_S \operatorname{div}_S\mathbf{B}dS = \oint\limits_L \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}dL. \tag{1.2.10}$$

Но $\mathbf{N} = \mathbf{L} \times \mathbf{n}_0$, тогда с учетом свойства смешанного произведения:

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbf{L} \times \mathbf{n}_0) = (\mathbf{B} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{n}_0 = (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{L},$$

из (1.2.10) получаем другой вид формулы Остроградского-Гаусса для поверхности

$$\iint \operatorname{div}_S\mathbf{B}dS = \oint\limits_L (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}. \tag{1.2.11}$$

Выражение для поверхностной дивергенции $\operatorname{div}_S\mathbf{B}$ в обобщенных поверхностных координатах здесь не приводится. Оно может быть получено из выражения для дивергенции в обобщенных трехмерных криволинейных координатах (см. например, [23]). В этих координатах компонента B^1 вдоль координатной линии x^1 равна нулю.

Пусть на замкнутой или разомкнутой поверхности $\operatorname{div}_S\mathbf{B} = 0$. Тогда из (1.2.10), (1.2.11) следует, что для любых участков S_1' и S_2' поверхности $S = S_1' \cup S_2'$

$$\iint\limits_{S_1'} \operatorname{div}_S\mathbf{B}dS = -\iint\limits_{S_2'} \operatorname{div}_S\mathbf{B}dS. \tag{1.2.12}$$

В этом случае для контуров L_1' и L_2', ограничивающих эти поверхности, из (1.2.10), (1.2.11) получим

$$\begin{gathered} \oint\limits_{L_1'} (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L} = -\oint\limits_{L_2'} (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}, \\ \oint\limits_{L_1'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}dL = -\oint\limits_{L_2'} \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}dL. \end{gathered} \tag{1.2.13}$$

в. Установим локальную связь между объемным и поверхностным векторами. Как и в предыдущем подразделе выделим вокруг S некоторый объем τ с поверхностями S_1, S_2, S_3 с малой толщиной ε. Будем считать, что поле вектора $\mathbf{A}$ равно нулю в верхней части объема τ, отрезаемого поверхностью S. Причем, поле вектора $\mathbf{A}$ в нижней части объема, отрезаемого поверхностью S, таково, что его нормальная компонента к S уменьшается до нуля при стремлении к S. Компонента же вдоль S, обозначим ее $\mathbf{A}_S$, увеличивается при стремлении к S. Потребуем, чтобы поток вектора $\mathbf{A}$ через поверхность $\sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ был равен нулю. Учитывая, что $dS_3 = \varepsilon dL$, получим

$$\iint_{S_2} \mathbf{A}_+ \cdot \mathbf{n} dS_2 = -\oint_L (\varepsilon \mathbf{A}_S) \cdot \mathbf{N} dl,$$

где значок «+» соответствует значению вектора $\mathbf{A}$ на S_2. Вводя обозначение $\mathbf{B} = \varepsilon \mathbf{A}_S$, при стремлении $\varepsilon \to 0$, $|\mathbf{A}_S| \to \infty$ получим, опуская в дальнейшем значок «+» у вектора $\mathbf{A}$:

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_0 dS = -\oint_L \mathbf{B} \cdot \mathbf{N} dL, \quad \text{либо} \tag{1.2.14}$$

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_0 dS = -\oint_L (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{L}. \tag{1.2.15}$$

Выражения (1.2.14) и (1.2.15) означают, что суммарный поток вектора $\mathbf{A}$ через поверхность S и «поток» вектора $\mathbf{B}$ через контур L, ограничивающий поверхность S, равен нулю.

Из сравнения (1.2.10), (1.2.14) или (1.2.11), (1.2.15) следует

$$\iint_S \mathrm{div}_S \mathbf{B} dS = -\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_0 dS, \quad \text{или} \tag{1.2.16}$$

$$\mathrm{div}_S \mathbf{B} dS = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}_0 dS. \tag{1.2.17}$$

Таким образом, локальным источником или стоком поверхностного вектора $\mathbf{B}$ на S является поток объемного вектора $\mathbf{A}$ через эту поверхность S.

1.2.2. Связь векторного и скалярного потенциалов для трехмерного объемного распределения завихренности. Будем рассматривать случай, когда нормальная компонента завихренности к поверхности S, ограничивающей объем G_+, где распределена завихренность $\mathbf{\Omega}$, равна нулю. Область вне G_+ и S будем обозначать G_-. Внутреннюю сторону поверхности S при стремлении к S из G_+ будем обозначать S_+, внешнюю — при стремлении из G_- будем обозначать S_-. Соответствующие значения функций при стремлении к S_+ из G_+ будем обозначать подстрочным индексом «+», а при стремлении из G_- к S_- — индексом «–».

Пусть в конечной области G_+ распределены объемные вихри с интенсивностью

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{rot}\, \mathbf{u} \quad \text{в} \quad G_+ \tag{1.2.18}$$

таким образом, что на поверхности S, ограничивающей G_+, соблюдается условие

$$\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{1.2.19}$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S. Как известно скорость [26], индуцируемая этим объемным распределением, как в G_+, так и во внешней по отношению к G_+ и S области G_-, может быть найдена из равенства:

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{G_+} \frac{\mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}}{R^3} dG_+, \tag{1.2.20}$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{G_+} \frac{\mathbf{\Omega}}{R} dG_+ \tag{1.2.21}$$

есть векторный потенциал, удовлетворяющий при условии $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ в G_+ векторному уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{\Omega},$$

а в G_- — векторному уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0,$$

где $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$, (x_0, y_0, z_0) — точка, в которой вычисляется $\mathbf{A}$; (x, y, z) — точка, принадлежащая G_+.

Используя разложение $1/R$ при стремлении точки (x_0, y_0, z_0) к бесконечности, может быть получено следующее выражение [133] для главного члена разложения векторного потенциала (1.2.21):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_0) \sim -\frac{1}{4\pi r_0^3} \mathbf{r}_0 \times \mathbf{I} + O\left(\frac{c\mathbf{r}_0 \times \mathbf{I}}{r_0^4}\right), \tag{1.2.22}$$

где

$$\mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j} + z_0 \mathbf{k}, \quad r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2},$$

$\mathbf{I}$ — введенный в [26, 133] гидродинамический импульс:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \iiint\limits_{G_+} \mathbf{r} \times \mathbf{\Omega} dG, \tag{1.2.23}$$

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, c — некоторая конечная величина.

Скалярный потенциал в области G_- может быть найден, например, путем взятия интеграла по любому пути в G_- от скорости (1.2.20). При стремлении точки (x_0, y_0, z_0) к бесконечности он может быть представлен в виде [133]:

$$\varphi(\mathbf{r}_0) \sim -\frac{1}{4\pi r_0^3} \mathbf{I} \cdot \mathbf{r}_0 + O\left(\frac{c|\mathbf{I}|}{r_0^3}\right). \tag{1.2.24}$$

Рассмотрим объем τ (см. рис. 1.9), образованный внешней по отношению к объему G_+ поверхностью S_- и некоторой поверхностью сферы S_0 радиуса

r_0, окружающей тело, при $r_0 \to \infty$. Применяя к поверхности этого объема (1.2.6), получим

$$\iint\limits_{S_-} \varphi \mathbf{n} dS - \iint\limits_{S_-} \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS = -\iint\limits_{S_0} \varphi \mathbf{n} dS + \iint\limits_{S_0} \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS. \tag{1.2.25}$$

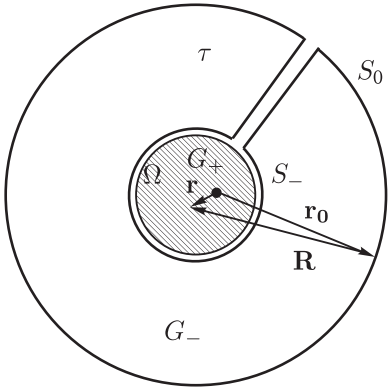


Рис. 1.9. К вычислению гидродинамического импульса

Проинтегрируем правую часть в (1.2.25) с учетом (1.2.22)–(1.2.24), для этого выберем сферические координаты $0z\varphi\vartheta$ таким образом, чтобы ось z была направлена по $\mathbf{I}$. Так как на сфере S_0 нормаль определяется как

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_0}{r_0}, \quad dS_0 = r_0^2 \, \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \quad x_0 = r_0 \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$y_0 = r_0 \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z_0 = r_0 \cos\vartheta,$$

получим, выполняя интегрирование по ортам $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, а потом складывая:

$$\iint\limits_{S_0} \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS = \frac{\mathbf{I}}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \sin^3\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{2}{3} \mathbf{I}, \tag{1.2.26}$$

$$-\iint\limits_{S_0} \varphi \mathbf{n} dS = \frac{\mathbf{I}}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta d\varphi = \frac{1}{2} \mathbf{I}. \tag{1.2.27}$$

Выражение (1.2.26) соответствует интегралу от скорости по всему объему $G = G_+ \cup G_-$, ограниченному сферой бесконечного радиуса, приведенному в [133], и совпадает с ним. Подставляя (1.2.26), (1.2.27) в (1.2.25), получим

$$\iint\limits_{S_-} \varphi \mathbf{n} dS - \iint\limits_{S_-} \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS = \mathbf{I}. \tag{1.2.28}$$

Выражение (1.2.28) устанавливает связь между скалярным φ и векторным потенциалом $\mathbf{A}$ на внешней поверхности S_- объема G_+, заполненного объемными вихрями $\boldsymbol{\Omega}$, и гидродинамическим импульсом $\mathbf{I}$. Следует иметь в виду, что нормаль $\mathbf{n}$ в (1.2.28) направлена внутрь объема G_+, так как в (1.2.6) и в (1.2.25) рассматривается внешняя нормаль к объему τ. Выражение (1.2.28) может быть использовано, например, для нахождения силы, действующей на тело, внутри которого распределены объемные вихри, через интеграл Коши–Лагранжа, поскольку оно выполняется и в случае, если от него взять частную производную по времени.

1.2.3. Случай трехмерного объемного и поверхностного распределения завихренности. В [26] введен векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_+}\frac{\boldsymbol{\Omega}}{R}dG - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{u}_+}{R}dS, \quad \text{где} \tag{1.2.29}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A} \quad \text{в} \quad G_+ \quad \text{и} \quad G_-, \tag{1.2.30}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{u} = \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{A} \quad \text{в} \quad G_+, \quad \boldsymbol{\Omega} = 0 \quad \text{в} \quad G_-, \tag{1.2.31}$$

S — поверхность, ограничивающая объем G_+, по которому распределены объемные вихри $\boldsymbol{\Omega}$; определение R аналогично разд. 1.2.2; $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S, $\mathbf{u}_+$ — значение скорости (1.2.30) на S_+. Очевидно, что вектор $\mathbf{n}\times\mathbf{u}_+$ можно рассматривать как вектор поверхностной завихренности

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n}\times\mathbf{u}_+. \tag{1.2.32}$$

Из (1.2.29), (1.2.30) может быть получено известное выражение для скорости, индуцируемой объемными $\boldsymbol{\Omega}$ и поверхностными вихрями $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_+}\frac{\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}}{R^3}dG - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{\boldsymbol{\gamma}\times\mathbf{R}}{R^3}dS. \tag{1.2.33}$$

Как известно [80], первый интеграл в (1.2.33) и его проекции непрерывны при переходе через S. Составляющие второго интеграла при переходе через S ведут себя следующим образом [9]: нормальная к S компонента существует в смысле главного значения Коши и непрерывна при переходе через S; компонента, касательная к S и направленная вдоль $\boldsymbol{\gamma}$, непрерывна при переходе через S; компонента, касательная к S, но ортогональная к $\boldsymbol{\gamma}$, претерпевает разрыв, равный $\boldsymbol{\gamma}$ (1.2.32).

Докажем, что эти объемные $\boldsymbol{\Omega}$ и поверхностные $\boldsymbol{\gamma}$ вихри удовлетворяют соотношениям (1.2.14), (1.2.15). Применим (1.2.14), (1.2.15) к этим векторам, получим:

$$\iint\limits_{S'}\boldsymbol{\Omega}_+\cdot\mathbf{n}dS' = -\oint\limits_{L'}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{N}dL', \tag{1.2.34}$$

$$\iint\limits_{S'}\boldsymbol{\Omega}_+\cdot\mathbf{n}dS' = -\oint\limits_{L'}(\mathbf{n}\times\boldsymbol{\gamma})\cdot d\mathbf{L}', \tag{1.2.35}$$

где S' — элемент поверхности S, а L' — контур, его ограничивающий; $\mathbf{N}$ — нормаль к L', лежащая в плоскости, касательной к S'. Подставим (1.2.32) в правую часть (1.2.35) и воспользуемся свойством двойного векторного произведения:

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_+) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_+) - \mathbf{u}_+(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}).$$

Тогда получим:

$$-\iint\limits_{L'} (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\gamma}) \cdot d\mathbf{L}' = -\oint\limits_{L'} \mathbf{u}_+ \cdot d\mathbf{L}'.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{S'} \boldsymbol{\Omega}_+ \cdot \mathbf{n} dS' = \oint\limits_{L'} \mathbf{u}_+ \cdot d\mathbf{L}', \tag{1.2.36}$$

что соответствует выполнению формулы Стокса в G_+ на S_+. Этот же результат может быть получен и из соотношения (1.2.34). Поскольку формула Стокса в G_+ вплоть до S_+ выполняется в силу непрерывности входящих в нее функций, то отсюда следует, что $\boldsymbol{\Omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$ удовлетворяют условиям (1.2.14), (1.2.15).

Выражения (1.2.34), (1.2.35) означают, что суммарный поток вектора $\boldsymbol{\Omega}$ через поверхность S' и вектора $\boldsymbol{\gamma}$ через контур L', ограничивающий поверхность S', равен нулю. Тогда из (1.2.16), (1.2.17) следует

$$\begin{gathered} \iint\limits_{S'} \mathrm{div}_S \boldsymbol{\gamma} dS' = -\iint\limits_{S'} \boldsymbol{\Omega}_+ \cdot \mathbf{n} dS' \quad \text{или} \\ \mathrm{div}_S \boldsymbol{\gamma} dS' = -\boldsymbol{\Omega}_+ \cdot \mathbf{n} dS'. \end{gathered} \tag{1.2.37}$$

Выражение (1.2.37) отражает тот факт, что локальным источником или стоком поверхностного вектора $\boldsymbol{\gamma}$ на S' является поток вектора $\boldsymbol{\Omega}$ через эту поверхность.

Сведем (1.2.29) к объемному интегралу. Проделаем это, воспользовавшись теоремой Остроградского–Гаусса в виде (1.2.2). Применив ее ко второму интегралу в (1.2.29), с учетом того, что

$$\mathbf{rot}\, \frac{1}{R}\mathbf{u} = \frac{1}{R}\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \mathbf{grad}\, \frac{1}{R} \times \mathbf{u},$$

получим:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{u}_+}{R} dS = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{G_+} \mathbf{rot}\, \frac{\mathbf{u}}{R} dG = \\ = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{G_+} \left(\frac{\mathbf{rot}\,\mathbf{u}}{R} + \mathbf{grad}\, \frac{1}{R} \times \mathbf{u} \right) dG. \end{aligned} \tag{1.2.38}$$

Подставляя (1.2.38) в (1.2.29), учитывая, что $\mathbf{grad}\, 1/R = -\mathbf{R}/R^3$, будем иметь

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{G_+} \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{u}}{R^3} dG. \tag{1.2.39}$$

Выражение (1.2.39) для векторного потенциала $\mathbf{A}$ аналогично с точностью до знака формуле (1.2.20) Био–Савара для скорости, индуцируемой объемным распределением вихрей, но вместо вектора завихренности в (1.2.39) стоит скорость $\mathbf{u}$. Очевидно, из (1.2.30), (1.2.31), (1.2.39) могут быть записаны следующие выражения для скорости и завихренности:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{rot}\iiint\limits_{G_+}\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{u}}{R^3}dG, \tag{1.2.40}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{u} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\iiint\limits_{G_+}\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{u}}{R^3}dG \quad \text{в} \quad G_+. \tag{1.2.41}$$

Таким образом, скорость может быть определена как из выражения (1.2.33), так и из (1.2.40). Так как (1.2.40) аналогично выражению для вектора завихренности, определяемого формулами (1.2.18), (1.2.20), (1.2.21), то в G_+ существует векторный потенциал

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_+}\frac{\mathbf{u}}{R}dG_+,$$

удовлетворяющий векторному уравнению Пуассона

$$\nabla^2\mathbf{B} = \mathbf{u}.$$

Кроме того, из этой аналогии следует, что при заданном распределении $\mathbf{u}$ в G_+ значение интеграла определяется значением $\mathbf{u}$ в заданной точке $(x_0, y_0, z_0) \in G_+$. Для непрерывности вектора $\boldsymbol{\Omega}$, определяемого из (1.2.41), необходимо, чтобы функция $\mathbf{u}$ в G_+ удовлетворяла условиям Липшица, т. е. чтобы существовали частные производные от $\mathbf{u}$ по координатам.

Проведенные выше преобразования потенциала (1.2.29) от объемного и поверхностного распределения завихренности и следующие из него соотношения можно наглядно представить в виде следующей цепочки:

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\begin{array}{l}\text{Соотношения (1.2.29), (1.2.32)}\\ \mathbf{A}=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_+}\frac{\boldsymbol{\Omega}}{R}dG-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{\boldsymbol{\gamma}}{R}dS, \quad \boldsymbol{\gamma}=\mathbf{n}\times\mathbf{u}_+\end{array}} \arrow[d] & & \\
\boxed{\mathbf{B}=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_+}\frac{\mathbf{u}}{R}dG_+} & \boxed{\begin{array}{c}\text{Соотношение (1.2.39)}\\ \mathbf{A}=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_+}\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{u}}{R^3}dG_+\end{array}} \arrow[l] \arrow[r] & \boxed{\mathbf{u}=\mathbf{rot}\,\mathbf{A}=\frac{1}{4\pi}\mathbf{rot}\iiint\limits_{G_+}\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{u}}{R^3}dG_+} \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{\nabla^2\mathbf{B}=\mathbf{u}} \\
 & & \boxed{\boldsymbol{\Omega}=\mathbf{rot}\,\mathbf{u}} &
\end{tikzcd}$$

Приведенные выше формулы аналогичны с точностью до знака следующим выражениям, которые следуют из формулы (1.2.21) для обычного векторного потенциала от объемных вихрей:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Соотношение (1.2.21)}\\ \mathbf{A}=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_+}\frac{\mathbf{\Omega}}{R}dG_+\end{array}} \longrightarrow \boxed{\mathbf{u}=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_+}\frac{\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}}{R^3}dG_+} \longrightarrow \boxed{\mathbf{\Omega}=\mathbf{rot}\,\mathbf{u}=\frac{1}{4\pi}\mathbf{rot}\iiint\limits_{G_+}\frac{\mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}}{R^3}dG_+} \longrightarrow \boxed{\nabla^2\mathbf{A}=-\mathbf{\Omega}}$$

Таким образом, $\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{u}$ из верхней цепочки подобны соответственно $\mathbf{A}, \mathbf{u}, \mathbf{\Omega}$ из нижней цепочки формул.

Исследуем поведение векторного потенциала (1.2.29) при стремлении точки (x_0, y_0, z_0), в которой он вычисляется, в бесконечность. Раскладывая в ряд $1/R$ аналогично [133], может быть получено следующее выражение для главного члена разложения векторного потенциала (1.2.29):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_0) \sim \frac{1}{4\pi r_0}\iiint\limits_{G_+}\mathbf{\Omega}\,dG - \frac{1}{4\pi r_0}\iint\limits_{S}\boldsymbol{\gamma}dS + \frac{1}{4\pi r_0^3}\iiint\limits_{G_+}(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r})\mathbf{\Omega}dG- \\ - \frac{1}{4\pi r_0^3}\iint\limits_{S}(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\gamma}\,dS + O\left(\frac{c\mathbf{r}_0\times\mathbf{J}}{r_0^4}\right), \quad (1.2.42)$$

где радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ — такой же, как в (1.2.22); значение $\mathbf{\Omega}$ определяется согласно (1.2.31) или (1.2.41), а величина $\boldsymbol{\gamma}$ — (1.2.32), выражение для $\mathbf{J}$ дано ниже. Применив ко второму интегралу в (1.2.42) формулу (1.2.2), получим

$$\iint\limits_{S}\boldsymbol{\gamma}\,dS = \iint\limits_{S}\mathbf{n}\times\mathbf{u}_+dS = \iiint\limits_{G_+}\mathbf{rot}\,\mathbf{u}dG = \iiint\limits_{G_+}\mathbf{\Omega}\,dG,$$

откуда следует, что сумма первых двух интегралов в (1.2.42) равна нулю. Преобразуем третий интеграл с использованием формулы

$$\mathbf{rot}\,(a\mathbf{b}) = a\mathbf{rot}\,\mathbf{b} + (\mathbf{grad}\,a)\times\mathbf{b},$$

тогда:

$$\iiint\limits_{G_+}(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r})\mathbf{\Omega}dS = \iiint\limits_{G_+}\mathbf{rot}\,[(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r})\mathbf{u}]dG_+ - \iiint\limits_{G_+}\mathbf{grad}\,(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r})\times\mathbf{u}dG_+. \quad (1.2.43)$$

Первый интеграл в правой части (1.2.43) с использованием (1.2.2) сводится к виду:

$$\iiint\limits_{G_+}\mathbf{rot}\,[(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r})\mathbf{u}]dG = \iint\limits_{S}\mathbf{n}\times[(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r})\mathbf{u}_+]dS = \iint\limits_{S}(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r})\boldsymbol{\gamma}\,dS. \quad (1.2.44)$$

$$\mathbf{grad}\,(\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{r}) = (\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{grad}\,)\mathbf{r} + (\mathbf{r}\cdot\mathbf{grad}\,)\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_0\times\mathbf{rot}\,\mathbf{r} + \mathbf{r}\times\mathbf{rot}\,\mathbf{r}_0,$$

три последние слагаемые равны нулю, преобразуется к виду:

$$-\iiint_{G_+} \mathbf{grad}\,(\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{r}) \times \mathbf{u} dG = -\mathbf{r}_0 \times \iiint_{G_+} \mathbf{u} dG = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{J}, \tag{1.2.45}$$

где

$$\mathbf{J} = \iiint_{G_+} \mathbf{u} dG_+. \tag{1.2.46}$$

Таким образом, с учетом преобразований, проделанных выше, подставляя (1.2.43)–(1.2.46) в (1.2.42), получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_0) \sim -\frac{1}{4\pi r_0^3}\mathbf{r}_0 \times \mathbf{J} + O\left(\frac{c\mathbf{r}_0 \times \mathbf{J}}{r_0^4}\right). \tag{1.2.47}$$

Из (1.2.47), в соответствии [133], может быть получено выражение для скалярного потенциала, обусловленного объемным и поверхностным распределением завихренности, аналогичное (1.2.24):

$$\varphi\,(\mathbf{r}_0) \sim -\frac{1}{4\pi r_0^3}\mathbf{J} \cdot \mathbf{r}_0 + O\left(\frac{c|\mathbf{J}|}{r_0^3}\right). \tag{1.2.48}$$

Проведя преобразования, совершенно аналогичные (1.2.25)–(1.2.27), может быть получено соотношение, подобное (1.2.28), связывающее скалярный и векторный потенциалы на внешней поверхности S_- объема G_+:

$$\iint_{S_-} \varphi\,\mathbf{n} dS - \iint_{S_-} \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS = \mathbf{J}. \tag{1.2.49}$$

Здесь так же, как и в (1.2.28), в левой части (1.2.49) нормаль направлена внутрь объема G_+, так как для объема τ в (1.2.25) и в (1.2.6) рассматривалась внешняя нормаль. В этом предположении получена и правая часть (1.2.49). Поэтому, изменяя в левой части знак, выражение (1.2.49) примет вид

$$-\iint_{S_-} \varphi\,\mathbf{n} dS + \iint_{S_-} \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS = \mathbf{J}. \tag{1.2.50}$$

Подставляя в (1.2.50) выражение (1.2.46), с учетом теоремы Остроградского–Гаусса в виде (1.2.2), получим, что первый интеграл в (1.2.50) должен быть равен нулю:

$$\iint_{S_-} \varphi\,\mathbf{n} dS = 0.$$

Докажем это, исходя из свойств скорости и потенциала на поверхности S_-. Действительно, скорость на S_+ определяется выражением (1.2.40). Пусть

$$\mathbf{u}_+ = \mathbf{u}_{n_+} + \mathbf{u}_{S_+}$$

ее значение в некоторой точке поверхности S_+ (см. рис. 1.10), $\mathbf{u}_{S_+}$ — ее составляющая на плоскость, касательную к S в этой точке, а $\mathbf{u}_{n+}$ — ее со-

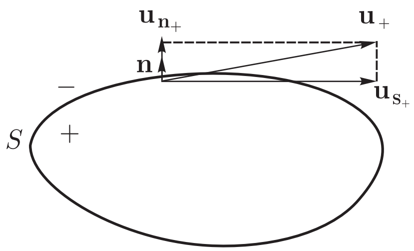


Рис. 1.10. Скорость с внутренней стороны поверхности S и ее составляющие

ставляющая на нормаль к поверхности S в этой точке. Тогда, в соответствии с (1.2.32), вектор завихренности на S будет выражаться как

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}_+ = \mathbf{n} \times \mathbf{u}_{S_+},$$

а в соответствии со свойством скорости, индуцируемой поверхностным интегралом в (1.2.33), скорость при стремлении к поверхности S_- со стороны объема G_- будет выражаться как

$$\mathbf{u}_{S_-} = \mathbf{u}_{S_+} + \mathbf{n} \times \boldsymbol{\gamma}.$$

Но в силу свойства двойного векторного произведения

$$\mathbf{n} \times \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u}_{S_+}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{S_+}) - \mathbf{u}_{S_+}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = -\mathbf{u}_{S_+},$$

откуда следует

$$\mathbf{u}_{S_-} = 0. \qquad (1.2.51, a)$$

Таким образом, касательная скорость на внешней поверхности S_-, индуцируемая указанным объемным и поверхностным распределениями завихренности, определяемая выражением (1.2.33), либо (1.2.40), равна нулю. Поскольку потенциал φ на S_-, обусловленный указанным объемным и поверхностным распределением завихренности, определяется с точностью до константы и может быть вычислен как интеграл от скорости по любому пути:

$$\varphi = \int_L \mathbf{u}_- \cdot d\mathbf{L} + \mathrm{const},$$

то выбирая путь L, лежащим на S_-, получим

$$\varphi = \int_L \mathbf{u}_{S_-} \cdot d\mathbf{L} + \mathrm{const} = \mathrm{const}. \qquad (1.2.51, б)$$

Тогда, как известно, $\int\limits_{S_-}\int \varphi \mathbf{n} dS = \mathrm{const} \int\limits_{S_-}\int \mathbf{n} dS = 0$, что и требовалось доказать.

Итак, скалярный потенциал φ на внешней поверхности S_- от объемного $\boldsymbol{\Omega}$ и поверхностного $\boldsymbol{\gamma}$ распределения завихренности постоянен вдоль этой поверхности S_{-}. Таким образом, (1.2.50) в рассматриваемом случае свелось к тривиальному выражению, соответствующему (1.2.2):

$$\iint\limits_{S_{-}} \mathbf{n} \times \mathbf{A} ds = \iiint\limits_{G_{+}} \mathbf{rot}\, \mathbf{A} dS.$$

Для случая вращения завихренной области как твердого тела объемный интеграл в (1.2.29) сводится к поверхностному, вычислять который бывает удобнее. Для этого перепишем (1.2.29) в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \quad \text{где} \tag{1.2.52}$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{4\pi} \iiint\limits_{G_{+}} \frac{1}{R} dG, \quad \mathbf{A}_2 = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \frac{\boldsymbol{\gamma}}{R} dS. \tag{1.2.53}$$

Преобразуем первый интеграл в (1.2.53), используя теорему Остроградского–Гаусса в виде (1.2.1). Пусть

$$\iiint\limits_{G_{+}} \frac{1}{R} dG = \iiint\limits_{G_{+}} \mathrm{div} \mathbf{C} dG, \quad \text{где}$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{C} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} = \frac{1}{R}.$$

Найдем вектор $\mathbf{C}$ и для этого положим

$$\frac{\partial C_x}{\partial x} = \frac{\partial C_y}{\partial y} = \frac{\partial C_z}{\partial z} = \frac{1}{3} \frac{1}{R}.$$

Тогда первообразная функция

$$C_x = \int\limits_x \frac{\partial C_x}{\partial x} dx = \frac{1}{3} \int\limits_x \frac{1}{R} dx = \frac{1}{3} \ln |(x - x_0) + R|$$

и аналогично

$$C_y = \frac{1}{3} \ln |(y - y_0) + R|, \quad C_z = \frac{1}{3} \ln |(z - z_0) + R|.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что при этом соотношение

$$\mathrm{div} \mathbf{C} = \frac{1}{R},$$

будет выполнено. Таким образом,

$$\mathbf{C} = \mathbf{i} C_x + \mathbf{j}\, C_y + \mathbf{k} C_z.$$

Используя (1.2.1), получим

$$\iiint\limits_{G_{+}} \frac{1}{R} dG = \frac{1}{3} \iint\limits_{S} [\ln |(x - x_0) + R| \cos(n, x) + \ln |(y - y_0) + R| \cos(n, y) + \\ + \ln |(z - z_0) + R| \cos(n, z)] dS \tag{1.2.54}$$

Соотношения (1.2.52)–(1.2.54) позволяют вычислять векторный потенциал $\mathbf{A}$ от объемного и поверхностного распределений завихренности только через поверхностные интегралы.

1.2.4. Двумерные течения. Пусть в области G_+ распределены объемные вихри с плотностью $\mathbf{\Omega}$. Область вне G_+ будем обозначать G_-. Начало декартовой системы осей координат $0xy$ поместим внутри области G_+. Как известно [137], потенциал φ в области G_- удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\varphi = 0$$

и может быть представлен в виде:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G_+}\Omega\vartheta dG_+ + C_1, \tag{1.2.55}$$

где C_1 — некоторая константа,

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

$(x,y)\in G_+$, $(x_0,y_0)\in G_-$ — точка, в которой вычисляется потенциал φ. Функция тока [137] как в G_+, так и в G_- может быть представлена в виде:

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{G_+}\Omega\ln\frac{1}{R}dG_+ + C_2, \tag{1.2.56}$$

где C_2 — некоторая константа, $R=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Функция тока ψ удовлетворяет в G_+ уравнению Пуассона $\nabla^2\psi=-\Omega$, а в G_- — уравнению Лапласа $\nabla^2\psi=0$.

Как известно, если ввести обозначения:

$$x = r\cos\vartheta,\quad y = r\sin\vartheta,\quad x_0 = r_0\cos\vartheta_0,\quad y_0 = r_0\sin\vartheta_0,$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2},\quad \vartheta_0=\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0},$$

то разложения ϑ и $\ln R^{-1}$ по малым параметрам x/r_0, y/r_0 при $r_0\to\infty$ дают следующие выражения для φ и ψ:

$$\varphi = \frac{\Gamma_0}{2\pi}\vartheta_0 + \frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{\sin\vartheta_0}{r_0} - \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{\cos\vartheta_0}{r_0} + \frac{\Gamma_3}{2\pi}\frac{\sin 2\vartheta_0}{r_0^2} - \frac{\Gamma_4}{2\pi}\frac{\cos 2\vartheta_0}{r_0^2} + \ldots, \tag{1.2.57}$$

$$\psi = -\frac{\Gamma_0}{2\pi}\ln r_0 + \frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{\cos\vartheta_0}{r_0} + \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{\sin\vartheta_0}{r_0} + \frac{\Gamma_3}{2\pi}\frac{\cos 2\vartheta_0}{r_0^2} + \frac{\Gamma_4}{2\pi}\frac{\sin 2\vartheta_0}{r_0^2} + \ldots, \tag{1.2.58}$$

$$\Gamma_0 = \iint\limits_{G_+}\Omega dG_+,\quad \Gamma_1 = \iint\limits_{G_+}\Omega x dG_+,\quad \Gamma_2 = \iint\limits_{G_+}\Omega y dG_+,$$

$$\Gamma_3 = \iint\limits_{G_+}\Omega(x^2-y^2) dG_+,\quad \Gamma_4 = \iint\limits_{G_+}\Omega xy dG_+,$$

Здесь Γ_0 — циркуляция скорости

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,\varphi,$$

обусловленная обходом области G_+ по замкнутому контуру l_-; Γ_1, Γ_2— аналогичны моментам первого порядка в гравитационном потенциале [137]; Γ_3, Γ_4 — аналогичны соответствующим осевому и центробежному моментам инерции.

Если обозначить через l длину односвязного замкнутого контура в G_-, не охватывающего G_+, то к нему возможно применение формулы (1.2.8). Применение в общем случае формулы (1.2.8) к контуру l, охватывающему G_+, недопустимо, поскольку интеграл от потенциала (1.2.55) в правой части (1.2.3) не существует в G_+. Кроме того, в силу двусвязности области G_-, он является неоднозначным (циклическим) в G_-, если контур охватывает G_+.

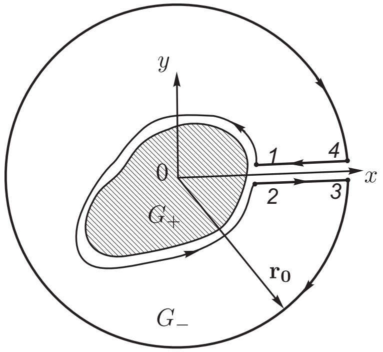


Рис. 1.11. К вычислению интегралов по контуру *1–2–3–4–1*

Рассмотрим контур *1–2–3–4–1* (рис.1.11), образованный: участком *1–2*, лежащим в G_-, охватывающим с внешней стороны область G_+ и лежащим на контуре l_-, причем точка *1* лежит над осью $0x$, а точка *2* — под осью $0x$; отрезком *2–3*, расположенным под осью $0x$ и простирающимся до некоторого расстояния r_0; окружности *3–4* радиуса r_0, причем направление обхода контура *3–4* противоположно обходу контура *1–2*; отрезком *4–1*, лежащим над осью $0x$, причем расстояние δ между участками *4–1* и *2–3* мало. Остановимся на вычислении следующего интеграла по этому контуру:

$$\oint\limits_{1-2-3-4-1} \varphi\mathbf{n}dl = \int\limits_{1-2} \varphi\mathbf{n}dl + \int\limits_{2-3} \varphi\mathbf{n}dl + \int\limits_{3-4} \varphi\mathbf{n}dl + \int\limits_{4-1} \varphi\mathbf{n}dl, \qquad (1.2.59)$$

при условии, что $\delta \to 0$, $r_0 \to \infty$. Интеграл от константы C_1 в (1.2.55) по замкнутому контуру *1–2–3–4–1*, как известно, равен нулю.

Вычислим сначала интеграл по участку *3–4*. С учетом (1.2.57) и того, что $dl = r_0 d\vartheta$, $\mathbf{n} = \dfrac{\mathbf{r}_0}{r_0} = \mathbf{i}\cos\vartheta_0 + \mathbf{j}\sin\vartheta_0$, при $r_0 \to \infty$ получим:

$$\oint\limits_{3-4} \varphi\mathbf{n}dl = \int\limits_0^{2\pi} \varphi(\cos\vartheta_0\mathbf{i} + \sin\vartheta_0\mathbf{j})r_0 d\vartheta = \Gamma_0 r_0\mathbf{j} + \frac{1}{2}\Gamma_1\mathbf{j} - \frac{1}{2}\Gamma_2\mathbf{i} + O\left(\frac{\mathbf{m}}{r_0}\right), \quad (1.2.60)$$

где $\mathbf{m} = c_1\mathbf{j}\Gamma_3 + c_2\mathbf{i}\Gamma_4$ — конечный вектор; c_1, c_2 — некоторые конечные величины. Вычислим интегралы по линиям *2–3* и *4–1*. Обозначим потенциал в точке *2* через φ_2, тогда значение потенциала в точке *1*: $\varphi_1 = \varphi_2 + \Gamma_0$. Потенциал φ на участке *2–3* может быть представлен как $\varphi_{(2-3)} = \varphi_2 + f$, а на участке *4–1*: $\varphi_{(4-1)} = \varphi_2 + f + \Gamma_0$, где f — непрерывная функция при переходе через ось $0x$. В результате при $\delta \to 0$ получим:

$$\int\limits_{2-3} \varphi \mathbf{n} dl + \int\limits_{4-1} \varphi \mathbf{n} dl = \int\limits_{x}^{r_0} \mathbf{j} \left(\varphi_{(2-3)} - \varphi_{(4-1)} \right) dx = -\Gamma_0 (r_0 - x) \mathbf{j}. \tag{1.2.61}$$

Тогда, подставляя (1.2.60), (1.2.61) в (1.2.59), получим

$$\int\limits_{1-2-3-4-1} \varphi \mathbf{n} dl = \int\limits_{1-2} \varphi \mathbf{n} dl + \frac{1}{2} \Gamma_1 \mathbf{j} - \frac{1}{2} \Gamma_2 \mathbf{i} + \Gamma_0 x \mathbf{j} + O\left(\frac{\mathbf{m}}{r_0} \right). \tag{1.2.62}$$

Иначе, если ввести гидродинамический импульс для плоских течений [133]

$$\mathbf{I} = \iint\limits_{G_+} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\Omega} dG, \quad \text{где} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{k}, \tag{1.2.63}$$

тогда, с учетом формул для Γ_1, Γ_2, входящих в (1.2.57), (1.2.58), выражение (1.2.62) можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_{1-2-3-4-1} \varphi \mathbf{n} dl = \int\limits_{1-2} \varphi \mathbf{n} dl + \frac{1}{2} \mathbf{I} + \Gamma_0 x \mathbf{j} + O\left(\frac{\mathbf{m}}{r_0} \right). \tag{1.2.64}$$

Вычислим теперь интеграл по контуру *1–2–3–4–1* от функции тока ψ, разбив его, аналогично (1.2.59), на четыре интеграла:

$$\oint\limits_{1-2-3-4-1} \psi \boldsymbol{l} dl = \int\limits_{1-2} \psi \boldsymbol{l} dl + \int\limits_{2-3} \psi \boldsymbol{l} dl + \int\limits_{3-4} \psi \boldsymbol{l} dl + \int\limits_{4-1} \psi \boldsymbol{l} dl. \tag{1.2.65}$$

С учетом (1.2.58) и того, что

$$\boldsymbol{l} = \mathbf{n} \times \mathbf{k} = \mathbf{j} \cos \vartheta_0 - \mathbf{i} \sin \vartheta_0,$$

получим

$$\int\limits_{3-4} \psi \boldsymbol{l} dl = \frac{1}{2} \Gamma_1 \mathbf{j} - \frac{1}{2} \Gamma_2 \mathbf{i} + O\left(\frac{\mathbf{m}}{r_0} \right). \tag{1.2.66}$$

В силу непрерывности ψ при переходе через ось $0x$

$$\int\limits_{2-3} \psi \boldsymbol{l} dl + \int\limits_{4-1} \psi \boldsymbol{l} dl = \int\limits_{2-3} \psi \boldsymbol{l} dl - \int\limits_{2-3} \psi \boldsymbol{l} dl = 0. \tag{1.2.67}$$

Из (1.2.65)–(1.2.67) с учетом (1.2.63) получим

$$\oint\limits_{1-2-3-4-1} \psi \boldsymbol{l} dl = \int\limits_{1-2} \psi \boldsymbol{l} dl + \frac{1}{2}\mathbf{I} + O\left(\frac{\mathbf{m}}{r_0}\right). \tag{1.2.68}$$

Подставляя (1.2.64), (1.2.68) в (1.2.8), получим

$$\int\limits_{l_-} \psi \boldsymbol{l} dl = \oint\limits_{l_-} \varphi \mathbf{n} dl + \Gamma_0 x \mathbf{j}. \tag{1.2.69}$$

В (1.2.64), (1.2.69) присутствует член $\Gamma_0 x \mathbf{j}$, зависящий от координаты x и направления $\mathbf{j}$. Эта зависимость обусловлена выбором контура *1–2–3–4–1* таким, что разрезы *2–3* и *4–1* проходят вдоль оси $0x$. В силу того, что разрезы *2–3* и *4–1* могут быть выбраны произвольными, то нетрудно убедиться, что при таком произвольном выборе интегралы в (1.2.64) и (1.2.65) определяются с точностью до величины $\Gamma_0 \int\limits_{4-1} \mathbf{n} dl$, т. е. зависят от точки начала разреза (точки *1*) на контуре l и его положения в пространстве. В частности, если начало осей координат расположить в точке начала разреза, то $x = 0$ и в (1.2.64), (1.2.69) $\Gamma_0 x \mathbf{j} = 0$. Это отмечается и в [133]. Очевидно, этот член в (1.2.64), (1.2.69) равен нулю, если циркуляция

$$\Gamma_0 = \iint\limits_{G_+} \Omega dG = 0.$$

Рассмотрим теперь плоский случай, аналогичный трехмерному (см. разд. 1.2.3), когда функция тока ψ и потенциал φ определяются объемным Ω и поверхностным γ распределением завихренности:

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{G_+} \Omega \vartheta dG_+ - \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{l} \gamma \vartheta dl + C_1 \quad \text{в} \quad G_-, \tag{1.2.70}$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{G_+} \Omega \ln \frac{1}{R} dG_+ - \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{l} \gamma \ln \frac{1}{R} dl + C_2 \quad \text{в} \quad G_- \quad \text{и} \quad G_+, \tag{1.2.71}$$

где $\gamma = \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial n}\right|_{l_+}$.

В этом случае, разлагая в (1.2.70), (1.2.71) ϑ и $\ln 1/R$ по малым параметрам x/r_0, y/r_0, как и при выводе (1.2.57), (1.2.58), и проводя такие же рассуждения, как и при выводе (1.2.69), может быть получено выражение, аналогичное (1.2.69), но в которое будет входить циркуляция

$$\Gamma_0 = \iint\limits_{G_+} \Omega dG_+ - \oint\limits_{l} \gamma dl. \tag{1.2.72}$$

Но по доказанному в разд. 1.2.3 в этом случае скорость на внешней стороне контура l_- равна нулю, а потенциал определяется с точностью до константы, и, таким образом, в (1.2.72) $\Gamma_0 = 0$, а выражение аналогичное (1.2.69), приобретает вид

$$\oint_{l_-} \varphi \mathbf{n} dl = \oint_{l_-} \psi \boldsymbol{l} dl = 0. \tag{1.2.73}$$

Если объем G_+ вращается как твердое тело, то аналогично трехмерному случаю интегралы в (1.2.70), (1.2.71) по области G_+ могут быть сведены к интегралам по контуру l.

Таким образом, дано гидродинамическое обоснование вихревой модели в виде объемных и поверхностных вихрей, которая может использоваться (в частности, при постоянной интенсивности объемных вихрей) для моделирования вращательного движения тела.

§ 1.3. Свойства интегральных уравнений Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя в окрестности особых линий замкнутой поверхности и их решение

Ниже, в главе 2 будут построены методы расчета вихревого отрывного обтекания тел, в которых условие непротекания поверхности тела сводится к решению уравнений Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя. Поэтому рассмотрим здесь некоторые свойства решений этих уравнений, которые, насколько известно авторам, в специальной литературе по интегральным уравнениям не излагаются.

1.3.1. Предельные решения уравнений по обе стороны от особой линии. Пусть τ — некоторая гладкая линия на замкнутой поверхности S трехмерного тела, и пусть A — некоторая точка, лежащая на этой линии (рис. 1.12).

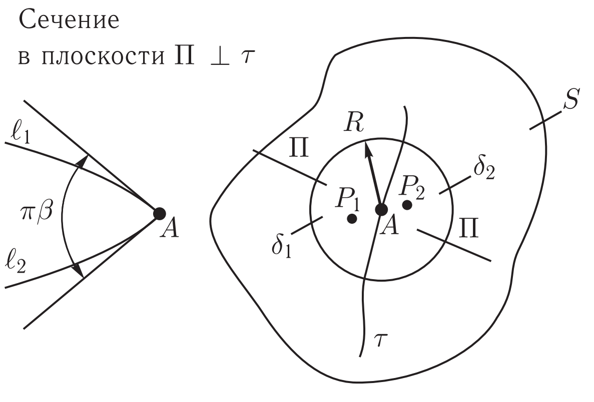


Рис. 1.12. Замкнутая поверхность S с особой линией τ на ней

Проведем из точки $A \in \tau$ сферу радиусом R и обозначим часть поверхности S слева от τ, вырезанную сферой, через δ_1, а справа от τ — через δ_2.

Пусть точки $P_1 \in \delta_1$, $P_2 \in \delta_2$ лежат всегда внутри сферы, и пусть δ_1 и δ_2 — поверхности Ляпунова. Пусть по поверхности S распределен двойной слой с плотностью ν; будем для определенности считать, что плотность ν в точках $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$ удовлетворяет условию Липшица.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма II-го рода [76, 137] относительно плотности ν:

$$\nu(P_0) - \iint_S \nu(P)K(P, P_0)dS_P = \frac{1}{2\pi}C(P_0), \tag{1.3.1}$$

здесь

$$K(P_0, P) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\Omega}{dS} \tag{1.3.2}$$

— ядро интегрального уравнения (1.3.1), $d\Omega$ — телесный угол, под которым элемент поверхности dS виден из точки P_0, $r = |P_0 - P|$ — расстояние между точками $P_0 \in S$ и $P \in S$, n — нормаль к поверхности S. Докажем, что уравнение (1.3.1) в точках $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$ можно представить в виде

$$\begin{gathered}\nu(P_i) = \frac{C(P_i) - C(P_j)\vartheta}{2\pi(1-\vartheta^2)} + \frac{1}{1+\vartheta}\iint_S \nu(P)K(P, A)dS_P,\\ (i = 1, j = 2), \quad (j = 1, i = 2),\end{gathered} \tag{1.3.3}$$

где $2\pi\vartheta$ — предельное значение телесного угла, под которым из точек $P_1 \to A$ или $P_2 \to A$ видны соответственно площадки δ_2 или δ_1 при стремлении радиуса R сферы к нулю. При этом принимается, что: $|\vartheta| < 1$; $2\pi\vartheta = 2\pi - 2\pi\beta$; $\pi\beta$ — угол между касательными к $l_1 \subset \delta_1$ и $l_2 \subset \delta_2$ в точке A; линии l_1, l_2 образованы пересечением плоскости Π, проходящей через точку A и ортогональной τ, и поверхностями δ_1 и δ_2 соответственно. Будем считать, что $\beta \neq 0$, т. е. точка A не является точкой возврата линии $l_1 l_2$, $2\pi\beta$ — телесный угол, под которым из точки A виден двугранный угол $\pi\beta$.

Действительно, разобьем интеграл (1.3.1) на интегралы по области $S/(\delta_1 \cup \delta_2)$ и интеграл по области $\delta_1 \cup \delta_2$. Учитывая, что в общем случае ядро $K(P_0, P)$ может иметь скачок по переменной P при переходе через τ из области δ_1 в область δ_2, что соответствует случаю $\beta \neq 1$, получим:

$$\begin{gathered}\lim_{P_i \to A}\iint_S \nu(P)K(P, P_i)dS_P = \\ = \lim_{P_i \to A}\left[\iint_{S/(\delta_1 \cup \delta_2)} \nu(P)K(P, P_i)dS_P + \iint_{\delta_1 \cup \delta_2} \nu(P)K(P, P_i)dS_P\right] = \\ = \iint_{S/(\delta_1 \cup \delta_2)} \nu(P)K(P, A)dS_P - \vartheta\nu(P_j) + O(R^{\eta_j}), \\ (i = 1, j = 2),\ (i = 2, j = 1),\end{gathered} \tag{1.3.4}$$

где $1 > \eta_j > 0$ — показатель поверхности Ляпунова δ_j. Подставляя соотношение (1.3.4) в уравнение (1.3.1), записанное для точек $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$, и учитывая, что радиус R сферы может быть выбран произвольно малым, при $R \to 0$ получим систему двух уравнений относительно $\nu(P_1)$ и $\nu(P_2)$:

$$\nu(P_1) + \vartheta\nu(P_2) = \frac{1}{2\pi}C(P_1) + \iint\limits_S \nu(P)K(P,A)dS_P;$$

$$\vartheta\nu(P_1) + \nu(P_2) = \frac{1}{2\pi}C(P_2) + \iint\limits_S \nu(P)K(P,A)dS_P.$$

Разрешив эту систему относительно $\nu(P_1)$ и $\nu(P_2)$, получим соотношение (1.3.3), что и требовалось доказать.

Соотношение (1.3.3) можно получить также, используя запись решения уравнения (1.3.1) с помощью метода последовательных приближений. Так как характеристическим значением для этого уравнения является $\lambda = -1$, то применение приема аналитического продолжения посредством домножения позволяет [76] представить решение в виде

$$\nu(P_0) = \frac{1}{2}\nu_0(P_0) + \frac{1}{2}[\nu_0(P_0) + \nu_1(P_0)] + \frac{1}{2}[\nu_1(P_0) + \nu_2(P_0)] + \ldots, \qquad (1.3.5)$$

где

$$\nu_0(P_0) = \frac{1}{2\pi}C(P_0), \quad \nu_{n+1}(P_0) = \iint\limits_S \nu_n(P)K(P,P_0)dS_P.$$

Если записать (1.3.5) для $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$ и выделить, учитывая (1.3.4), из записанных соотношений подпоследовательности

$$\begin{aligned} h_i &= \nu_0(P_i) - \nu_0(P_j)\vartheta + \nu_0(P_i)\vartheta^2 + \nu_0(P_j)\vartheta^3 + \ldots = \\ &= [\nu_0(P_i) - \nu_0(P_j)\vartheta] + [\nu_0(P_i) - \nu_0(P_j)\vartheta]\,\vartheta^2 + [\nu_0(P_i) - \nu_0(P_j)\vartheta]\,\vartheta^4 + \ldots = \\ &= [\nu_0(P_i) - \nu_0(P_j)\vartheta]\,(1 + \vartheta^2 + \vartheta^4 + \ldots), \qquad (1.3.6) \end{aligned}$$

$$(i = 1, j = 2), \quad (i = 2, j = 1),$$

где $|\vartheta| = |(1-\beta)| < 1$, то, очевидно, ряд, входящий в это выражение, есть бесконечно убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем ϑ^2, и тогда

$$h_i = \frac{\nu_0(P_i) - \nu_0(P_j)\vartheta}{1-\vartheta^2} = \frac{C(P_i) - C(P_j)\vartheta}{2\pi(1-\vartheta^2)}, \qquad (1.3.7)$$

$$(i = 1, j = 2), \quad (i = 2, j = 1),$$

Это соотношение соответствует первому слагаемому в (1.3.3). Можно показать, что оставшаяся после вычитания h_i из $\nu(P_0)$ (1.3.5) подпоследовательность сходится ко второму слагаемому в (1.3.3). Свойства (1.3.3), (1.3.7) уравнения (1.3.1) в окрестности особых линий поверхности могут использоваться для повышения точности решения интегрального уравнения (1.3.1) при численной реализации его решения, как прямыми методами, так и методом итераций.

1.3.2. Разрывы в решении уравнений. Рассмотрим теперь некоторые следствия, вытекающие из соотношения (1.3.3). Пусть A — точка гладкости линии $l_1 l_2$, т. е. $\vartheta = 1 - \beta = 0$, тогда для любой ограниченной в окрестности $\delta_1 \cup \delta_2$ правой части $C(P_i)$ $(i = 1, 2)$ уравнение (1.3.1) принимает обычный вид

$$\nu(P_i) = \frac{1}{2\pi} C(P_i) + \iint\limits_S \nu(P) K(P, P_i) dS_P. \tag{1.3.8}$$

Из (1.3.3) следует также, что разрыв в решении уравнения (1.3.1) в точках $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$ в общем случае равен

$$\nu(P_1) - \nu(P_2) = \frac{C(P_1) - C(P_2)}{2\pi(1 - \vartheta)} = \frac{C(P_1) - C(P_2)}{2\pi\beta}. \tag{1.3.9}$$

В том случае, когда A — точка гладкости линии $l_1 l_2$ $(\vartheta = 0, \beta = 1)$, записывая (1.3.8), (1.3.3) или (1.3.9) для точек $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$, получим:

$$\nu(P_1) - \nu(P_2) = \frac{C(P_1) - C(P_2)}{2\pi}, \tag{1.3.10}$$

и, таким образом, разрыв в решении уравнения (1.3.1) в этом случае определяется только разрывом его правой части, что следует из [96]; если в этом случае разрыв в правой части уравнения равен нулю, то и разрыв в решении равен нулю:

$$\nu(P_1) - \nu(P_2) = 0. \tag{1.3.11}$$

Аналогичный подход может быть использован и для выявления особенностей уравнения (1.3.1) в окрестности конической точки поверхности тела.

1.3.3. Предельное решение и разрывы в окрестности особых точек в плоском случае. В двумерном случае интегральное уравнение Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя, распределенного по замкнутому контуру S, имеет вид [76, 137]:

$$\nu(P_0) - \int\limits_S \nu(P) K(P, P_0) dS_P = \frac{1}{\pi} C(P_0), \tag{1.3.12}$$

где

$$K(P, P_0) = -\frac{1}{\pi}\frac{d\Omega}{dS} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y(P) - y(P_0)}{x(P) - x(P_0)} \tag{1.3.13}$$

— ядро уравнения, S — длина дуги контура; $y(P)$, $y(P_0)$, $x(P)$, $x(P_0)$— координаты точек $P \in S$ и $P_0 \in S$, угол Ω показаны на рис. 1.13.

Пусть точка $A \in S$ является угловой или лежит на гладком участке контура S, но не является точкой возврата. Проведем из A окружность радиуса R, так что она отсекает от контура S его участки δ_1 и δ_2. Пусть точки $P_1 \in \delta_1$, $P_2 \in \delta_2$ лежат внутри окружности радиуса R. Как и в разд. 1.3.1 полагаем, что δ_1 и δ_2 — поверхности Ляпунова, а плотность ν в точках $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$ удовлетворяют условиям Липшица. Обозначим, как и в разд. 1.3.1, через $\pi\beta$ угол между касательными к δ_1 и δ_2 в точке A и будем считать, что $\beta \neq 0$, т. е. точка A не является точкой возврата. Предельное значение угла Ω, под которым из точек $P_1 \to A$ или $P_2 \to A$ видны соответственно площадки δ_2 или δ_1 при стремлении радиуса R окружности к нулю, обозначим через $\pi\vartheta$ (рис. 1.13). Очевидно, оно определяется через значение угла $\pi\beta$ как: $\pi\vartheta = \pi - \pi\beta$, причем, как и в разд. 1.3.1, так как $\beta \neq 0$, то $|\vartheta| < 1$. Тогда, совершенно аналогично разд. 1.3.1, доказывается, что уравнение (1.3.12) в точках $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$ можно представить в виде

$$\nu(P_i) = \frac{C(P_i) - C(P_j)\vartheta}{\pi(1-\vartheta^2)} + \frac{1}{1+\vartheta}\iint_S \nu(P)K(P,A)dS. \tag{1.3.14}$$

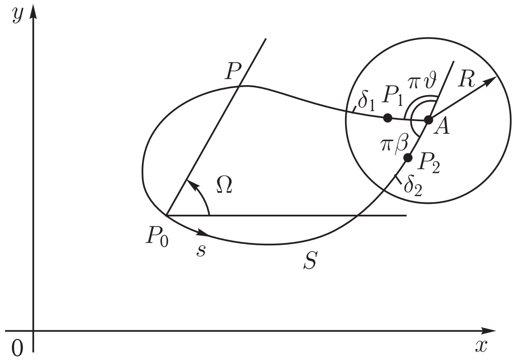


Рис. 1.13. Замкнутый контур S и углы в окрестности особой точки A

Если A — точка гладкости контура S, т. е. $\beta = 1$, $\vartheta = 1 - \beta = 0$, то выражение (1.3.14) в A принимает обычный вид, аналогичный (1.3.8), но в котором перед правой частью стоит множитель $1/\pi$.

Из (1.3.14), аналогично разд. 1.3.1, получаем, что разрыв в решении уравнения (1.3.12) в точках $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$ в общем случае равен

$$\nu(P_1) - \nu(P_2) = \frac{C(P_1) - C(P_2)}{\pi(1-\vartheta)} = \frac{C(P_1) - C(P_2)}{\pi\beta}. \tag{1.3.15}$$

В том случае, когда A — точка гладкости контура S, т. е. $\beta = 1$, $\vartheta = 0$, то записывая (1.3.14) или (1.3.15) для точек $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$ получим

$$\nu(P_1) - \nu(P_2) = \frac{C(P_1) - C(P_2)}{\pi}, \tag{1.3.16}$$

следовательно, разрыв в решении для этого случая определяется только разрывом правой части. Если в этом случае разрыв в правой части равен нулю, то и разрыв в решении также равен нулю.

1.3.4. Методы решения уравнений и аналитическая форма представления плотности потенциала. Уравнения (1.3.1), (1.3.12) по терминологии [96] являются уравнениями со слабой особенностью в ядре. Введем перед знаком этих уравнений параметр λ и представим их в виде

$$\nu(P_0) - \lambda \int_S \nu(P)K(P,P_0)dS_P = c(P_0), \tag{1.3.17}$$

где интегрирование выполняется либо по поверхности S, либо по контуру S. В трехмерном случае $c(P_0) = (1/2\pi)C(P_0)$, а ядро определяется выражением (1.3.2). В плоском случае $c(P_0) = (1/\pi)C(P_0)$, а ядро представляется в виде (1.3.13). В [96] показано, что значение $\lambda = 1$, которое соответствует уравнению (1.3.17), не является характеристическим числом этого интегрального уравнения. Поэтому уравнения (1.3.1), (1.3.12) имеют единственное решение при любой квадратично суммируемой правой части, т. е. в предположении, что интеграл

$$\int\limits_S |c(P_0)|^2 dS(P_0) \tag{1.3.18}$$

конечен.

Уравнение (1.3.17) может решаться прямым методом, например, методом Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [76] путем замены на систему алгебраических уравнений. В частности, поверхность S может разбиваться на площадки S_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, I)$, по которым плотность потенциала двойного слоя считается постоянной, а граничное условие выполняется в точках P_j $(j = 1, 2, 3, \ldots, I)$, лежащих на S_i. Тогда (1.3.1) и (1.3.12) сводятся к виду:

$$\nu(P_j) + \frac{1}{æ}\sum_{i=1}^{I} \nu(P_j)\Omega_j^i = \frac{1}{æ}C(P_j), \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, I), \tag{1.3.19}$$

где для (1.3.1) $æ = 2\pi$, Ω_j^i — телесный угол, под которым из точки P_j видна площадка S_i. Для (1.3.12) $æ = \pi$, Ω_j^i— угол, под которым из точки P_j видна площадка S_i.

При приближенном решении таких уравнений существенную роль играет распределение собственных значений. В [76] указано, что они вещественны, а характеристическим значением для точного уравнения (1.3.17) является $\lambda = -1$, так как постоянная $\nu(P) = \nu(P_0) = k$ является решением этого интегрального уравнения при $\lambda = -1$. Причем, в промежутке значений λ от -1 до 1 собственных значений нет. Это позволяет построить аналитические решения этих уравнений через резольвенту в виде ее разложения в ряд по степеням λ с применением различных приемов аналитического продолжения [76]: прием непосредственного продолжения, аналитического продолжения посредством замены переменной, прием аналитического продолжения посредством домножения. В частности, при применении приема аналитического продолжения посредством домножения получим

$$\nu(P_0) = c(P_0) + \int\limits_S R(P_0, P, 1)c(P)dS_P, \tag{1.3.20}$$

где

$$R(P_0, P, 1) = \frac{1}{2}[K_1 + (K_1 + K_2) + (K_2 + K_3) + \ldots], \tag{1.3.21}$$

$$K_1 = K(P, P_0), \qquad K_{n+1} = \int\limits_S K_n(P_0, P_n)K(P_n, P)dS_{P_n}. \tag{1.3.22}$$

Иногда целесообразнее искать решение этих уравнений методом последовательных приближений, причем при таком построении решений могут быть использованы [76] все приемы аналитического продолжения, упомянутые выше при построении резольвенты. Так, применение приема аналитического продолжения посредством домножения позволяет записать решение уравнений (1.3.17) в виде ряда:

$$\nu(P_0) = \frac{1}{2}\nu_0(P_0) + \frac{1}{2}[\nu_0(P_0) + \nu_1(P_0)] + \frac{1}{2}[\nu_1(P_0) + \nu_2(P_0)] + \ldots, \qquad (1.3.23)$$

где

$$\nu_0(P_0) = c(P_0), \qquad \nu_{n+1}(P_0) = \int\limits_S K_n(P_0, P)\nu(P)dS. \qquad (1.3.24)$$

При численном решении уравнения (1.3.17) или (1.3.1), (1.3.12) всеми указанными выше методами, в том числе при представлении решений в виде (1.3.20)–(1.3.22) или (1.3.23), (1.3.24), интегралы приходится заменять суммами, например, в виде (1.3.19), и определять решение в некоторых расчетных точках P_j или P_0. Следует отметить, что после того, как плотность потенциала двойного слоя в этих расчетных точках определена, то в любой неособой точке Q_0 поверхности S в области непрерывных значений правой части уравнения (1.3.1) или (1.3.12) она может быть представлена в виде

$$\nu(Q_0) = \frac{1}{\text{æ}}C(Q_0) - \frac{1}{\text{æ}}\sum_{i=1}^{I}\nu(P_i)\Omega^i_{Q_0}, \qquad (1.3.25)$$

где для (1.3.1) $\text{æ} = 2\pi$, $\Omega^i_{Q_0}$ — телесный угол, под которым виден элемент поверхности S_i из точки Q_0; для (1.3.12) $\text{æ} = \pi$, $\Omega^i_{Q_0}$ — угол, под которым из точки Q_0 видна площадка S_i. Таким образом, с помощью (1.3.25) может быть построено непрерывное на S приближенное решение уравнений (1.3.1), (1.3.12) в любой неособой точке Q_0 в области непрерывных значений правой части этих уравнений.

Построенные решения уравнения (1.2.17) имеют место для квадратично суммируемой правой части этого уравнения. Однако нетрудно показать, что даже если правая часть не удовлетворяет условию (1.2.18) квадратичной суммируемости, но так, что оно не выполняется только в отдельной точке области ее определения, то всюду в окрестности этой точки может быть построено решение этого уравнения. К уравнениям, которые рассматриваются в главе 2, это непосредственного отношения не имеет, так как правые части этих уравнений являются ограниченными функциями. Поэтому представленные ниже результаты могут представлять интерес при решении других задач.

Итак, пусть правая часть $c(P_0)$ уравнения (1.3.17) имеет особенность в точке $P_0 \to P'$ такую, что она может не удовлетворять условию ее квадратичной суммируемости (1.3.18) в этой точке. Например,

$$\lim_{P_0 \to P'} c(P_0) = \frac{A}{|P_0 - P'|^m}, \qquad (1.3.26)$$

где m — конечная величина, удовлетворяющая неравенству $\infty > m > 0$; $|P_0 - P'|$ — расстояние между точками P_0 и P'. Обозначим малую величину, входящую в (1.3.26), как

$$\varepsilon|P_0 - P'| = |P_0 - P'|^m. \qquad (1.3.27)$$

Домножив уравнение (1.3.17) на регуляризирующий множитель (1.3.27) и произведя замену переменных путем введения функций

$$\begin{aligned} \nu'(P_0, P') &= \nu(P_0)\varepsilon|P_0 - P'|, \\ \nu'(P, P') &= \nu(P)\varepsilon|P - P'|, \end{aligned} \tag{1.3.28}$$

получим следующее уравнение Фредгольма II-го рода, куда входит P' в качестве параметра:

$$\nu'(P_0, P') - \lambda \int_s \nu'(P_0, P')K(P, P_0, P')dS_P = c(P_0, P'). \tag{1.3.29}$$

Здесь ядро $K(P, P_0, P')$ уравнения (1.3.29) связано с ядром $K(P, P_0)$ уравнения (1.3.17) соотношением:

$$K(P, P_0, P') = K(P, P_0)\frac{\varepsilon|P_0 - P'|}{\varepsilon|P - P'|}, \tag{1.3.30}$$

а правая часть уравнения (1.3.29) определяется как

$$c(P_0, P') = c(P_0)\varepsilon|P_0 - P'|. \tag{1.3.31}$$

Уравнение (1.3.29) с правой частью (1.3.31) не имеет особенности в точке $P_0 \to P'$, причем характеристические числа уравнения (1.3.29) будут такими же, что и для исходного уравнения (1.3.17). Это следует из свойства определителей, согласно которому множитель, общий всем элементам какой-либо строки или столбца, можно выносить за знак определителя.

Действительно, согласно [126], характеристические числа λ исходного уравнения (1.2.17) определяются уравнением

$$D(\lambda) = 0, \tag{1.3.32}$$

где $D(\lambda)$ — знаменатель Фредгольма, который можно получить следующим образом.

Разобьем для простоты поверхность S на J равных частей $\delta = S/J$, по которым функции (плотность диполей и правые части) считаются постоянными. Следуя [126], сведем уравнения (1.3.17) к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\nu_i - \lambda \sum_{j=1}^{J} \nu_j K_{ij}\delta = c_i, (i = 1, 2, 3, \ldots, J), \tag{1.3.33}$$

где

$$\begin{aligned} \nu_i = \nu(P_{0_i}), \quad \nu_j = \nu(P_j), \quad c_i = c(P_{0_i}), \\ K_{ij} = K(P_j, P_i), \qquad (i, j = 1, 2, 3, \ldots, J). \end{aligned} \tag{1.3.34}$$

Определитель системы (1.3.33) имеет вид:

$$D_J(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda K_{11}\delta & -\lambda K_{12}\delta & \ldots & -\lambda K_{1J}\delta \\ -\lambda K_{21}\delta & 1 - \lambda K_{22}\delta & \ldots & -\lambda K_{2J}\delta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda K_{J1}\delta & -\lambda K_{J2}\delta & \ldots & 1 - \lambda K_{JJ}\delta \end{vmatrix} \tag{1.3.35}$$

Применение к определителю формулы разложения в ряд и переход к бесконечному числу J разбиения поверхности интегрирования позволяет получить знаменатель Фредгольма $D(\lambda)$ в виде степенного ряда:

$$D_J(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^m \frac{\lambda^j}{j!} dj, \tag{1.3.36}$$

где

$$dj = \int_S\!\!\int\int_S\!\!\int\int_S\!\!\int \ldots \int_S\!\!\int K\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \ldots & P_j \\ P_1 & P_2 & P_3 & \ldots & P_j \end{pmatrix} dS_{P_1} dS_{P_2} dS_{P_3} \ldots dS_{P_j}, \tag{1.3.37}$$

а матрица K представляет собой следующее выражение:

$$K\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \ldots & P_j \\ P_1 & P_2 & P_3 & \ldots & P_j \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} K(P_1,P_1) & K(P_1,P_2) & K(P_1,P_3) & \ldots & K(P_1,P_j) \\ K(P_2,P_1) & K(P_2,P_2) & K(P_2,P_3) & \ldots & K(P_2,P_j) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K(P_j,P_1) & K(P_j,P_2) & K(P_j,P_3) & \ldots & K(P_j,P_j) \end{vmatrix}, (j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.3.38}$$

Сведем теперь уравнение (1.3.29), вводя на поверхности S такую же сетку, как и для уравнения (1.3.17), по ячейкам которой функции считаются постоянными, к следующей системе алгебраических уравнений

$$\nu_i(P') - \lambda \sum_{j-1}^{J} \nu_j(P') K_{ij}(P')\delta = c_i(P'),\ (i = 1, 2, 3, \ldots, J). \tag{1.3.39}$$

Здесь поверхность S, также как и в (1.3.33), для простоты выкладок разбита на J равных частей $\delta = S/J$, и введены следующие обозначения для функций

$$\nu_i(P') = \nu(P_{0_i}, P'), \quad \nu_j(P') = \nu(P_j, P')$$
$$c_i(P') = c(P_{0_i}, P'),\ K_{ij}(P') = K(P_j, P_{0_i}, P'),\ (i, j = 1, 2, 3, \ldots, J).$$

При решении системы (1.3.39) по теореме Крамера знаменатель выразится в виде следующего определителя этой системы

$$D'_J(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda K_{11}(P')\delta & -\lambda K_{12}(P')\delta & \ldots & -\lambda K_{1J}(P')\delta \\ -\lambda K_{21}(P')\delta & 1 - \lambda K_{22}(P')\delta & \ldots & -\lambda K_{2J}(P')\delta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda K_{J1}(P')\delta & -\lambda K_{J2}(P')\delta & \ldots & 1 - \lambda K_{JJ}(P')\delta. \end{vmatrix} \tag{1.3.40}$$

Подставляя в (1.3.40) выражение (1.3.30), которое в конечно-разностном представлении может быть записано в виде

$$K_{ij}(P') = K_{ij}\frac{\varepsilon_i(P')}{\varepsilon_j(P')},$$

где

$$K_{ij} = K(P_j, P_i), \quad \varepsilon_i(P') = \varepsilon(P_i - P'),$$
$$\varepsilon_j(P') = \varepsilon(P_j - P'), \quad (i, j = 1, 2, 3, \ldots J),$$

будем иметь:

$$D'_J(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11}\dfrac{\varepsilon_1(P')}{\varepsilon_1(P')}\delta & -\lambda K_{12}\dfrac{\varepsilon_1(P')}{\varepsilon_2(P')}\delta & \ldots & -\lambda K_{1J}\dfrac{\varepsilon_1(P')}{\varepsilon_J(P')}\delta \\ -\lambda K_{21}\dfrac{\varepsilon_2(P')}{\varepsilon_1(P')}\delta & 1-\lambda K_{22}(P\dfrac{\varepsilon_2(P')}{\varepsilon_2(P')}\delta & \ldots & -\lambda K_{2J}\dfrac{\varepsilon_2(P')}{\varepsilon_J(P')}\delta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda K_{J1}\dfrac{\varepsilon_J(P')}{\varepsilon_1(P')}\delta & -\lambda K_{J2}\dfrac{\varepsilon_J(P')}{\varepsilon_2(P')}\delta & \ldots & 1-\lambda K_{JJ}\dfrac{\varepsilon_J(P')}{\varepsilon_J(P')}\delta \end{vmatrix}. \quad (1.3.41)$$

Выносся в (1.3.41) общие множители для строк и столбцов за знак определителя, получим:

$$D'_J(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda K_{11}\delta & -\lambda K_{12}\delta & \ldots & -\lambda K_{1J}\delta \\ -\lambda K_{21}\delta & 1-\lambda K_{22}\delta & \ldots & -\lambda K_{2J}\delta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda K_{1J}\delta & -\lambda K_{2J}\delta & \ldots & 1-\lambda K_{JJ}\delta \end{vmatrix} \cdot \frac{\prod\limits_{i=1}^{J}\varepsilon_i(P')}{\prod\limits_{j=1}^{J}\varepsilon_j(P')}, \quad (1.3.42)$$

где введены обозначения

$$\prod_{m=1}^{J}\varepsilon_m(P') = \varepsilon_1(P')\cdot\varepsilon_2(P')\cdot\varepsilon_3(P')\cdot\ldots\cdot\varepsilon_J(P'),\ (m=i, m=j).$$

Так как

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{J}\varepsilon_i(P')}{\prod\limits_{j=1}^{J}\varepsilon_j(P')} = 1,$$

то определитель (1.3.42) системы уравнений (1.3.39) полностью совпадает с определителем (1.3.35) системы уравнений (1.3.33). Следовательно, характеристические числа системы уравнения (1.3.39) также определяются уравнением (1.3.32) и выражениями (1.3.34)–(1.3.38), что и требовалось доказать.

Из доказанного следует, что к уравнению (1.3.29) применимы все изложенные выше методы построения решения для уравнения (1.3.17), то есть соотношения (1.3.19)–(1.3.25). После того, как эти решения ν' уравнения (1.3.29) найдены, решения ν уравнения (1.3.17) в любой точке поверхности S, в том числе в окрестности особой точки P', могут быть определены из соотношения (1.3.28). Очевидно, что эти результаты могут быть легко распространены на случай, когда имеется счетное число таких точек P', в которых правая часть уравнения (1.3.17) не удовлетворяет условию (1.3.18) ее квадратичной суммируемости.

Глава 2

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ОТРЫВНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРОИЗВОЛЬНО ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

В этой главе рассмотрены нелинейные двумерная и трехмерная задачи о произвольном неустановившемся движении тела в идеальной несжимаемой жидкости со сходом с его поверхности свободного вихревого следа в виде поверхности тангенциального разрыва скоростей. С учетом того, что тело совершает как поступательное, так и вращательное движение, выбрана форма представления потенциала абсолютных скоростей в виде потенциала двойного слоя, распределенного на поверхности тела и свободного следа, и известных в каждый фиксированный момент времени объемных и поверхностных вихрей, замыкающих в трехмерном случае объемные. Для трехмерного течения найдены различные варианты замыкания объемных вихрей поверхностными. В частности, показано, что этот вектор поверхностных вихрей может быть выражен через скорость вращательного движения тела. Показано, что такая форма представления потенциала позволяет свести внешнее условие непроницаемости поверхности тела к внутренней задаче Неймана, а затем на основании теоремы единственности для внутренней задачи Неймана перейти к внутренней задаче Дирихле, при этом внутри тела как поступательная, так и вращательная компоненты относительной скорости отсутствуют. Из задачи Дирихле получено интегральное уравнение для плотности потенциала двойного слоя, распределенного по поверхности тела и следа, которое необходимо решать в каждый фиксированный момент времени. Проведено исследование свойств полученного интегрального уравнения и его производных по поверхностным координатам в местах сопряжения свободного следа с поверхностью тела. Показано, что разрывы в плотности потенциала двойного слоя и в его производных от свободного следа «передаются» на поверхность тела. Полученное интегральное уравнение сведено к решению хорошо обследованных интегральных уравнений Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя, для которых имеет место единственность решения. Приведены методы решения полученных уравнений. Показано, что давление на поверхности тела выражается непосредственно через гидродинамические особенности. Приведены соотношения для решения уравнения движения свободного вихревого следа.

Изложена численная реализация метода решения плоской и трехмерной нелинейной нестационарной задачи отрывного обтекания идеальной несжимаемой жидкостью на примере тел с фиксированной линией схода потока с поверхности. Изложены численные алгоритмы нахождения неизвестной плотности диполей в следе в каждый фиксированный момент времени. Показано, что может быть получено непрерывное на поверхности тела приближенное решение. Приведены примеры расчета плоских задач: нестационарного и отрывного обтекания аэродинамического профиля, полуцилиндра, полуэллипса и клина. Численно решены задачи обтекания осесимметричного эллипсоида, полуэллипсоида, конуса и комбинации «конус-полубесконечный цилиндр». Показано хорошее схождение результатов расчета с известным точным решением и экспериментальными данными.

Далее эти методы, развитые для случая обтекания тел внешним потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости, распространены на случай обтекания тел внешним произвольным вихревым нестационарным внешним потоком идеальной несжимаемой жидкости. Выведено уравнение для потенциала возмущенных скоростей, которое также сведено к уравнениям Фредгольма II-го рода относительно плотности диполей, распределенных по поверхности тела и следа. Из уравнения движения жидкости найдено выражение для давления на внешней поверхности тела. Полностью определены кинематические и динамические соотношения, позволяющие решить численно задачу обтекания тела произвольным (вихревым нестационарным) потоком идеальной несжимаемой жидкости.

§ 2.1. Метод расчета плоских несжимаемых нестационарных вихревых течений

2.1.1. Исходные соотношения. Пусть начало декартовой системы координат x, y, связанной с произвольно движущимся кусочно-гладким профилем $S(x, y)$, находится на передней кромке профиля, а ось x направлена к его задней кромке (рис. 2.1). Произвольно движущийся профиль внесен

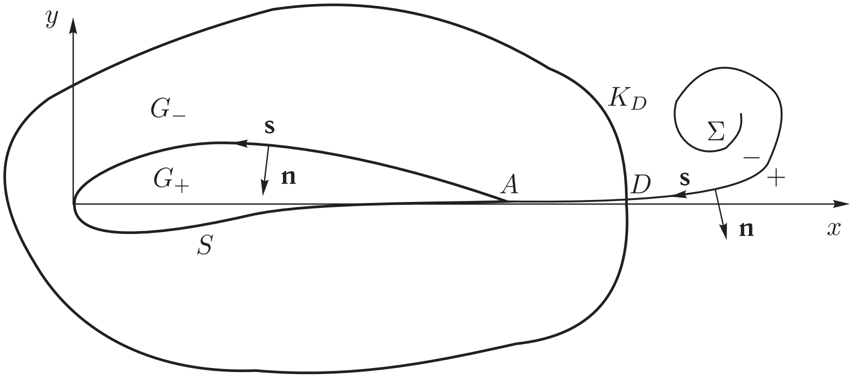


Рис. 2.1. Аэродинамический профиль S с поверхностью Σ разрыва тангенциальных компонент скорости

в безграничную идеальную несжимаемую жидкость, которая также совершает неустановившееся и невозмущенное рассматриваемым профилем движение со скоростью

$$\mathbf{V}(x, y, t) = \mathbf{grad}\,\Phi(x, y, t),$$

где $\Phi(x, y, t)$ — ее непрерывный во всем пространстве потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$.

Тогда вектор абсолютной скорости частиц жидкости

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \mathbf{V}(x, y, t) + \mathbf{u}(x, y, t),$$

где $\mathbf{u}(x, y, t)$ — вектор возмущенной скорости, обращающейся в нуль в бесконечно удаленной точке и имеющей потенциал $\varphi(x, y, t)$.

Контур S разбивает безграничное пространство на две области: внешнюю по отношению к контуру S и следу за ним Σ область G_- и внутреннюю область G_+ (рис.2.1). Далее величины, относящиеся к области G_-, снабжаются знаком «минус», а величины, относящиеся к области G_+, — знаком «плюс».

Если Δ — оператор Лапласа, p — давление жидкости, $\mathbf{v}_0$ — переносная скорость и $V = |\mathbf{V}|$, причем $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$, то рассматриваемая задача об определении потенциала является следующей задачей для уравнения Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0; \tag{2.1.1}$$

$$\varphi'_{n-} = v_{0n} - V_n \quad \text{на } S; \tag{2.1.1, a}$$

$$p_+ - p_- = 0, \quad \varphi'_{n+} = \varphi'_{n-} \quad \text{на } \Sigma. \tag{2.1.1, $б$}$$

Здесь и далее нижний буквенный индекс означает либо направление, либо переменную, а штрих — частную производную.

Рассматриваемая задача для уравнения Лапласа (2.1.1) при граничном условии на поверхности S (2.1.1, a) является внешней задачей Неймана в нестационарном случае с дополнительными условиями (2.1.1, $б$).

Далее потенциал φ представляется в виде суммы: потенциала двойного слоя $\varphi^{(\nu)}$ распространенного вдоль контура S и следа Σ, и потенциала $\varphi^{(\Omega)}$ от вихрей Ω, заполняющих область G_+:

$$\varphi_- = \varphi_-^{(\nu)} + \varphi_-^{(\Omega)}, \quad \text{где} \tag{2.1.2}$$

$$\varphi^{(\nu)}(x, y, t) = \int\limits_{S\cup\Sigma} \nu(s, t) \left(\ln\frac{1}{r}\right)'_n ds, \tag{2.1.3}$$

$$\varphi_-^{(\Omega)}(x, y, t) = \frac{\Omega(t)}{2\pi} \iint\limits_{G_+} \vartheta(M, P) d\xi d\eta. \tag{2.1.4}$$

Здесь: $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$ — расстояние между рассматриваемой точкой $M(x, y)$ и точкой интегрирования $P(\xi, \eta)$; $\nu(s, t)$ — плотность потенциала двойного слоя в точке $P(\xi, \eta)$ на контуре S и следе Σ; s и n — длина дуги и нормаль в этой точке, положительное направление которой показано на рис. 2.1; $\vartheta(M, P)$ — угол между осью $0x$ и направлением PM. След Σ примыкает к контуру S, заданному параметрически $[x = x(s), y = y(s)]$ в точке A (см. рис. 2.1), в которой переменная s принимает нулевое значение, $A = P[\xi(0), \eta(0)] = P(0)$. Причем $s > 0$, если $P \in S$, и $s < 0$, если $P \in \Sigma$.

Ввиду важности вопроса, выведем условия в точке схода свободной вихревой пелены с поверхности профиля в плоском случае другим способом, чем в § 1.1. Если плотность ν непрерывна на следе Σ и L — длина контура S, то в соответствии с известными равенствами

$$\left(\ln\frac{1}{r}\right)'_n = \vartheta'_s(M,P)\,; \quad \left(\ln\frac{1}{r}\right)'_s = -\vartheta'_n(M,P), \tag{2.1.5}$$

после интегрирования (2.1.3) по частям получим

$$\varphi^{(\nu)} = [\nu(L-0,t) - \nu(0+0,t) + \nu(0-0,t)]\ \vartheta(M,A) - \\ - \int\limits_{S\cup\Sigma} \nu'_s(s,t)\,\vartheta(M,P)ds. \tag{2.1.6}$$

Здесь и далее принято следующие обозначения: если s — произвольное значение аргумента, то

$$\nu(s\pm 0,t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\nu(s\pm\varepsilon,t);$$

аналогичные обозначения приняты ниже и для производных от плотности потенциала двойного слоя.

Выражение (2.1.6) справедливо как в области G_-, так и с точностью до несущественной для нас функции от времени, в области G_+. Вследствие того, что первый член равенства (2.1.6) дает $\lim\limits_{M\to A}\vartheta'_m(M,A) = \infty$, где m — произвольное направление, то из условия конечности скорости жидкости в точке A следует тождество

$$\nu(L-0,t) - \nu(0+0,t) + \nu(0-0,t)\ \equiv 0. \tag{2.1.7}$$

Выражение (2.1.7) аналогично тождеству (1.1.15) § 1.1, записанному для трехмерных течений, если в последнем для плоского случая положить:

$$\Gamma_1 = 2\pi\nu(0+0,t), \quad \Gamma_2 = 2\pi\nu(L-0,t), \quad \Gamma_3 = 2\pi\nu(0-0,t).$$

Последний член в выражении (2.1.6) с точностью до множителя 2π представляет собой потенциал вихревого слоя интенсивности $\gamma = -2\pi\nu'_s$. Как известно, в этом случае выражение для нормальной к линии Σ скорости в точке $M\to A$ имеет логарифмическую особенность, поэтому скорость по направлению m, обусловленная только двойным слоем, распределенным вдоль Σ, вблизи точки A может быть представлена в виде

$$\frac{\partial}{\partial m}\int\limits_{\Sigma}\nu'_s\vartheta(M,P)\,ds = -\cos(n_\Sigma,m)\nu'_s(0-0,t)\ln r + K, \tag{2.1.8}$$

где K — ограниченная функция, n_Σ — нормаль к Σ в точке A. Если точку A принять за начальную точку интегрирования и предположить, что на S плотность ν ограничена и терпит разрыв в этой точке, то по аналогии с (2.1.8) может быть представлена и производная от интеграла из (2.1.6) по контуру S. Отсюда следует, что для существования ограниченной в точке $M\to A$ скорости необходимо, чтобы

$$\cos(n_L,m)\nu'_s(L-0,t) - \cos(n_0,m)\nu'_s(0+0,t) + \\ + \cos(n_\Sigma,m)\nu'_s(0-0,t) \equiv 0, \tag{2.1.9}$$

где n_0 и n_L — нормали к контуру S при $s \to 0$ и $s \to L$. Тождество 2.1.9 аналогично тождеству (1.1.16) § 1.1, записанному для трехмерных течений, и переводится в него, если положить

$$\gamma_{\tau_1} = -2\pi\nu'_s\,(0+0,t)\,,\ \gamma_{\tau_2} = -2\pi\nu'_s\,(L-0,t)\,,\ \gamma_{\tau_3} = -2\pi\nu'_s\,(0+0,t)\,.$$

Если $\pi\beta$ — угол между нормалями n_L и n_0 то, как следует из 2.1.9 и непрерывности скоростей при $M \to A$ в области G_-, в точке A требуется выполнение следующих условий:

а) $\pi < \pi\beta < 2\pi$, A — острая кромка. Из условия Чаплыгина–Жуковского об ограниченности скорости жидкости у острой кромки, при $\nu'_s(0-0,t) \neq 0$ необходимо условие (2.1.9) дополнить следующими требованиями:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{либо} & \cos(n_\Sigma, m) = \cos(n_0, m); & \nu'_s(L-0,t) \equiv 0; \\ \text{либо} & \cos(n_\Sigma, m) = -\cos(n_L, m); & \nu'_s(0+0,t) \equiv 0; \end{array}\right\} \qquad (2.1.9, a)$$

б) $\pi\beta = 2\pi$, A — скругленная кромка. В этом случае точка схода потока должна перемещаться со временем вдоль контура S. Однако для аэродинамического профиля, когда радиус кривизны контура S в области задней кромки мал, можно приближенно полагать, что относительные скорости и перемещения малы, а точка схода потока находится в точке профиля с минимальным радиусом кривизны. Поскольку, как будет показано ниже (см. разд. 2.1.2), относительная скорость движения жидкости на S равна $-2\pi\nu'_s$, то условие (2.1.9) также дополняется требованиями $(2.1.9, a)$.

Применение интеграла Коши–Лагранжа с обеих сторон точки D следа (рис. 2.1), движущейся вдоль Σ со скоростью

$$u_s = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(U_{s_+} + U_{s_-}), \qquad (2.1.10)$$

где U_s — тангенциальная компонента абсолютной скорости, приводит первое на Σ граничное условие (2.1.1, *б*) к известному виду:

$$\frac{d\,\Gamma(s,t)}{dt} = \frac{\partial\Gamma}{\partial t} + \frac{\partial\Gamma}{\partial s}\frac{ds}{dt} = 0, \qquad (2.1.11)$$

где циркуляция скорости по контуру K_D (см. рис. 2.1) $\Gamma(s,t) = \varphi_+ - \varphi_-$.

Если $\nu^{(\Omega)} = -\dfrac{\Omega T}{2\pi}$, где T — площадь области G_+, то сумма потенциала $\varphi^{(\Omega)}$ (см. (2.1.4)) и потенциала двойного слоя с плотностью $\nu^{(\Omega)}$ (см. (2.1.3)) дают бесциркуляционное течение. Тогда в силу известного свойства потенциала двойного слоя

$$\Gamma = 2\pi\nu_* = 2\pi(\nu - \nu^{(\Omega)})$$

и, следовательно, из (2.1.11) получаем

$$\frac{d\nu_*}{dt} = \frac{\partial\nu_*}{\partial t} + \frac{\partial\nu_*}{\partial s}\frac{ds}{dt} = 0. \qquad (2.1.12)$$

Использование полученных соотношений следующим образом приводит к раскрытию неопределенности условий $(2.1.9, a)$. Согласно свойствам потенциала двойного слоя и условиям $(2.1.9, a)$ тангенциальная составляющая относительной скорости на самом следе Σ

$$v_s\,(0-0,t) = \pm\pi\nu_s'(0-0,t) = \mp\frac{\gamma(0-0,t)}{2}, \qquad (2.1.13)$$

где тот или иной знак соответствует первым или вторым условиям $(2.1.9, a)$. Поскольку индивидуальная производная (2.1.11) инвариантна относительно системы координат, то можно считать, что производные в ней берутся в системе координат, связанной с профилем, т. е.

$$\Gamma_s' = 2\pi(\nu_*)_s' = -\gamma, \qquad \frac{ds}{dt} = v_s,$$

тогда в силу (2.1.11) и (2.1.13) в точке A на Σ имеет место известное с точностью до знака соотношение $\gamma^2 = \pm 2\Gamma_t'$. Это соотношение возможно только в следующем виде:

$$\Gamma_t' = v_s\gamma\,(0-0,t)\,, \qquad (2.1.14)$$

Будем полагать, что в соответствии с принятой системой поверхностных координат

$$v_s \leqslant 0, \qquad (2.1.15)$$

т. е. вихревая пелена сходит с поверхности профиля, тогда (2.1.13) приводится к виду

$$v_s = -\frac{|\gamma\,(0-0,t)|}{2}. \qquad (2.1.16)$$

Подставляя (2.1.16) в (2.1.14) получим

$$-\gamma\,(0-0,t)\,\,|\gamma\,(0-0,t)| = 2\Gamma_t', \quad \text{откуда}$$

$$\operatorname{sign}\gamma(0-0,t) = -\operatorname{sign}\Gamma_t' \quad \text{и}$$

$$\gamma(0-0,t) = -\operatorname{sign}\Gamma_t'\sqrt{2\,|\Gamma_t'|}\,. \qquad (2.1.17)$$

Соотношения (2.1.15)–(2.1.17) соответствуют выражениям (1.1.49)–(1.1.51) § 1.1, полученным для более общего случая, когда точка отрыва A может перемещаться по контуру профиля.

В силу соотношения (2.1.17) условия (2.1.9), $(2.1.9, a)$ запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\text{при} \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial t} > 0: \quad \cos(n_\Sigma, m) = \cos(n_0, m),\\
&\qquad\qquad \nu_s'(0-0,t) - \nu_s'(0+0,t) \equiv 0, \quad \nu_s'(L-0,t) \equiv 0;\\
&\text{при} \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial t} < 0: \quad \cos(n_\Sigma, m) = -\cos(n_L, m),\\
&\qquad\qquad \nu_s'(0-0,t) - \nu_s'(L-0,t) \equiv 0, \quad \nu_s'(0+0,t) \equiv 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1.18)$$

Выражение (2.1.18) соответствует случаю угловой задней кромки в точке A, или когда точка отрыва A лежит на гладкой поверхности телесного профиля, но является неподвижной, оно полностью аналогично (1.1.52) из § 1.1.

2.1.2. Уравнения, определяющие потенциал возмущенных скоростей. Введем следующие функции тока:

а) функцию тока переносного движения

$$\chi = u_1(t)y - u_2(t)x - \frac{1}{2}u_3(t)(x^2 + y^2), \tag{2.1.19}$$

где $u_1(t)$, $u_2(t)$ — компоненты поступательной скорости; $u_3(t)$ — угловая скорость вращения профиля;

б) функцию тока невозмущенного движения Ψ;

в) функцию тока возмущенного движения $\psi = \psi^{(\nu)} + \psi^{(\Omega)}$, где $\psi^{(\nu)}$ — функция тока, соответствующая потенциалу $\varphi^{(\nu)}$, а

$$\psi^{(\Omega)} = \frac{\Omega(t)}{2\pi}\iint\limits_{D_+} \ln\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta = \frac{\Omega(t)}{2}\psi_0^{(\Omega)} \tag{2.1.20}$$

является функцией тока, соответствующей потенциалу $\varphi^{(\Omega)}$. Потенциал и функция тока, как известно, связаны соотношениями

$$\varphi'_n = -\psi'_s, \quad \varphi'_s = -\psi'_n. \tag{2.1.21}$$

Вследствие этого и в силу (2.1.2) граничное условие (2.1.1, a) на S запишется как

$$(\varphi^{(\nu)})'_{n_-} - (\psi^{(\Omega)})'_{s_-} = v_{0n} - V_n.$$

Поскольку все члены этого равенства непрерывны при переходе через S, то в силу (2.1.19) и (2.1.21) оно сводится к виду

$$(\psi^{(\nu)})'_{s_+} + (\psi^{(\Omega)})'_{s_+} = \chi'_s - \Psi'_s. \tag{2.1.22}$$

После интегрирования (2.1.22) по s получим

$$\psi_+^{(\nu)} + \psi_+^{(\Omega)} - \chi_+ + \Psi_+ = f(t) \quad \text{на} \quad S_+, \tag{2.1.23}$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени.

В области G_+ функция тока относительного движения

$$\Psi_+^0 = \psi_+^{(\nu)} + \psi_+^{(\Omega)} - \chi_+ + \Psi_+. \tag{2.1.24}$$

Если Δ — оператор Лапласа, то

$$\Delta\psi_+^{(\nu)} = \Delta\Psi_+ = 0, \;\; \Delta\chi_+ = -2\,u_3(t), \;\; \Delta\psi_+^{(\Omega)} = -\Omega(t).$$

Если положить как в [102]

$$\Omega(t) = 2u_3(t), \quad \text{то} \tag{2.1.25}$$

$$\Delta\Psi_+^0 = 0 \quad \text{в} \quad G_+,$$

а в силу (2.1.23) функция тока

$$\Psi_+^0 = f(t) \quad \text{на} \quad S_+,$$

т. е. не зависит от координат. Как известно, полученная задача Дирихле имеет своим решением $\Psi_+^0 \equiv f(t)$ в G_+. Так как Ψ_+^0 не зависит от координат, то в G_+ относительная скорость жидкости $\mathbf{v}_+ = 0$, откуда

$$v_{s_-} = v_{s_-} - v_{s_+} = \varphi_{s_-}^{(\nu)\prime} - \varphi_{s_+}^{(\nu)\prime} = -2\pi\nu_s'.$$

Равенство (2.1.25) приводит к переменности вихрей, заполняющих область G_+, что в соответствии с уравнением Фридмана [80] требует приложения в области G_+ непотенциальных массовых сил, уравновешивающих инерционные силы, вызванные вращением профиля. Выполнение этих требований в области G_+ допустимо, поскольку интересующее нас течение в области G_- при этом будет удовлетворять всем необходимым законам.

Докажем обратное утверждение. Пусть на внутренней стороне контура S тангенциальная составляющая относительной скорости

$$v_{s_+} = (\varphi^{(\nu)})'_{s_+} + (\psi^{(\Omega)})'_{n+} - q'_{s_+} = 0, \tag{2.1.26}$$

где

$$q(s_0,t) = q_0(s_0,t) - \Phi, \quad q_0(s_0,t) = u_1 x + u_2 y + u_3 \int\limits_0^{s_0} (xy'_s - yx'_s)\,ds, \tag{2.1.27}$$

s_0 — значение дуги, определяющее положение точки $P_0 = M \in S$. Если учесть, что

$$q'_s = \chi'_n - \Phi'_n,$$

то из (2.1.21), (2.1.24), (2.1.26) для Ψ_0 следует задача Неймана:

$$\Psi_+^0 = 0; \quad (\Psi^0)'_{n_+} = 0 \quad \text{на} \quad S_+.$$

Отсюда

$$\Psi_+^0 = f(t) \quad \text{в} \quad G_+,$$

тогда из (2.1.24) следует (2.1.22), и из непрерывности всех членов этого соотношения при переходе через S следует, что

$$\varphi'_{n_-} = v_{0n} - V_n,$$

что и требовалось доказать.

Итак, граничное условие (2.1.1, *б*) на S может быть заменено условием (2.1.26), которое после выполнения интегрирования по s с точностью до несущественной произвольной функции времени принимает вид

$$\varphi_+^{(\nu)} = q - \int\limits_0^{s_0} (\psi^{(\Omega)})'_{n_+}\,ds. \tag{2.1.28}$$

То есть необходимо отыскать внутри области G_+ потенциал $\varphi_+^{(\nu)}$ по его заданной величине на внутренней границе. Это суть внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа.

Таким образом, для рассматриваемого случая уравнения Лапласа *внешняя граничная задача Неймана* (2.1.1)–(2.1.1, *б*) сведена к *эквивалентной внутренней граничной задаче Дирихле*.

В силу (2.1.3) уравнение (2.1.28) приводится к следующему уравнению [137], определяющему плотность потенциала двойного слоя ν:

$$\pi\nu(s_0, t) + \int\limits_0^L \nu(s, t)\vartheta'_s(P_0, P)\, ds = F(s_0, t), \quad \text{где} \tag{2.1.29}$$

$$F(s_0, t) = q(s_0, t) - u_3(t)\left[\int\limits_0^{s_0} (\psi_0^{(\Omega)})'_n ds - \frac{1}{\pi}T\,\vartheta(P_0, A)\right] - \\ - \int\limits_\Sigma \nu_*(s, t)\,\vartheta'_s(P_0, P)ds. \tag{2.1.30}$$

Из свойств уравнения (2.1.29) и условий касания свободного вихревого следа с поверхностью обтекаемого тела следует, что разрывы первого рода в правой части уравнения и ее производных «переходят» в искомое решение этого уравнения. Подробно эти вопросы рассмотрены ниже в § 2.3 для более общего пространственного случая.

Из (2.1.20) и теоремы Стокса следует, что

$$(\psi_0^{(\Omega)})'_n = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_+}\left(\ln\frac{1}{r}\right)'_n d\xi_1 d\eta_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{s_0}(y'_s\eta'_s + x'_s\xi'_s)\ln\frac{1}{r}ds_1; \tag{2.1.31}$$

здесь индекс «1» относится к текущей точке интегрирования.

Если $\Delta\Sigma$ — часть следа Σ длиной ds, примыкающая к точке A, то последний интеграл в (2.1.30) может быть представлен в виде суммы

$$\nu_*(0-0, t)\{\vartheta(P_0, A) - \vartheta[P_0, P(-ds)]\} + \int\limits_{\Sigma/\Delta\Sigma}\nu_*(s_1, t)\vartheta'_s(P_0, P)ds_1. \tag{2.1.32}$$

Здесь в качестве значения ν_* на $\Delta\Sigma$ использовано значение $\nu_*(s, t)$ при $s \to 0$, поскольку, как показывает анализ условий (2.1.7), (2.1.9) и (2.1.9, a), только $\nu_* = \nu_*(0-0, t)$ удовлетворяет одновременно этим трем условиям. Таким образом, в силу (2.1.32) функция $F(s_0, t)$ может быть представлена в виде

$$F(s_0, t) = F^{(0)}(s_0, t) + \nu_*(0-0, t)F^{(1)}(s_0, t),$$

где значения функций $F^{(0)}$ и $F^{(1)}$ определяются из формул (2.1.30) и (2.1.32). Тогда в силу линейности уравнения (2.1.29)

$$\nu(s_0, t) = \nu^{(0)}(s_0, t) + \nu_*(0-0, t)\nu^{(1)}(s_0, t). \tag{2.1.33}$$

Из условий (2.1.18) следует, что

$$\nu_*(0-0,t) = -\frac{\nu_s^{(0)'}}{\nu_s^{(1)'}}, \tag{2.1.34}$$

где производные необходимо брать с той или иной стороны от точки A в зависимости от знака производной $\Gamma_t'(0-0,t)$ в соответствии с условиями (2.1.18). При этом в силу свойств интегрального уравнения (2.1.29) условия (2.1.7) и (2.1.9) также будут удовлетворены.

Интегральное уравнение (2.1.29) допускает представление решения в виде (2.1.33), где $\nu^{(0)}$ и $\nu^{(1}$ — решения интегральных уравнений Фредгольма II-го рода с правыми частями $F^{(0)}(s_0,t)$ и $F^{(1)}(s_0,t)$ в каждый фиксированный момент времени t. Свойства решений этих уравнений в окрестности особых точек контура и методы их решения были представлены в § 1.3. В частности [76], эти решения могут быть представлены в следующем виде

$$\nu^{(i)}(s_0,t) = \frac{1}{\pi}F^{(i)}(s_0,t) + \frac{1}{\pi}\int\limits_s F^{(i)}(s,t)R(s_0,s,1)ds\,; \quad i=0,1, \tag{2.1.35}$$

где резольвента интегрального уравнения

$$R(s_0,s,1) = \frac{1}{2}\left[K_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(K_n + K_{n+1})\right];$$

$$K_1 = -\frac{1}{\pi}\vartheta_s'(s_0,s);\ K_{n+1} = \int\limits_s K_n(s_n,s)\,K_1(s_0,s_n)\,ds_n.$$

Представление решения в виде (2.1.35) позволяет, определив лишь однажды для заданного контура S резольвенту R, записывать решение уравнения (2.1.29) для произвольного закона движения контура S в любой момент времени, если форма следа Σ, соответствующая этому моменту, определена.

2.1.3. Деформация вихревого следа. Уравнение (2.1.12) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial\nu_*}{\partial t} + \frac{\partial\nu_*}{\partial x}\upsilon_x + \frac{\partial\nu_*}{\partial y}\upsilon_y = 0, \tag{2.1.36}$$

где $\upsilon_x = dx/dt$, $\upsilon_y = dy/dt$.

Функция

$$\nu_* = w\left(x - \int\limits_{t_0}^{t}\upsilon_x dt,\ y - \int\limits_{t_0}^{t}\upsilon_y dt\right) \tag{2.1.37}$$

является решением уравнения (2.1.36). В (2.1.37) t_0 означает момент времени, которому соответствуют известные величины $x = x_0$ и $y = y_0$, так что

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} \upsilon_x dt, \quad y = y_0 + \int_{t_0}^{t} \upsilon_y dt, \quad \text{где} \tag{2.1.38}$$

$$\upsilon_x = \varphi'_x|_\Sigma + V_x - \upsilon_{0x}, \quad \upsilon_y = \varphi'_y\big|_\Sigma + V_y - \upsilon_{0y}. \tag{2.1.39}$$

Здесь υ_{0x}, υ_{0y} и Vx, Vy — компоненты переносной и невозмущенной скоростей; $\varphi'_x|_\Sigma$ и $\varphi'_y\big|_\Sigma$ — компоненты возмущенной скорости, выражаемые несобственными интегралами, которые необходимо вычислять на самом следе (подробнее см. § 2.2).

2.1.4. Давление на поверхности. Давление жидкости на поверхность контура S определяется интегралом Коши–Лагранжа, записанным в подвижной системе координат xy:

$$\frac{p_-}{\rho} = F(t) + \frac{\upsilon_0^2}{2} - \frac{\upsilon_-^2}{2} - \varphi'_{t-} - \Phi'_t,$$

где ρ — плотность жидкости; $F(t)$ — произвольная функция времени. Если в бесконечно удаленной точке жидкость покоится, то $F(t) = p_\infty/\rho$. Поскольку, как следует из разд. 2.1.2,

$$\upsilon_{s_+} = 0 \quad \text{и} \quad \upsilon_{s_+} - \upsilon_{s_-} = 2\pi\nu'_s(s,t), \quad \text{то}$$

$$\upsilon_- = \upsilon_{s_-} = -2\pi\nu'_s(s,t).$$

Кроме того, так как

$$\left(\psi^{(\Omega)}\right)'_{n_+} = \left(\psi^{(\Omega)}\right)'_{n_-} = \left(\varphi^{(\Omega)}\right)'_{s_-},$$

то из условия (2.1.28) и формулы (2.1.2) следует, что

$$\varphi_- = q(s,t) - 2\pi\nu(s,t).$$

Таким образом, на внешней стороне контура S

$$\frac{p_-}{\rho} = F(t) + \frac{\upsilon_0^2}{2} - q'_{0t} + 2\pi\nu'_t - \frac{1}{2}(2\pi\nu'_s)^2, \tag{2.1.40}$$

или, если учесть, что на самом контуре S скорость $ds/dt = -\pi\nu'_s$, то

$$\frac{p_-}{\rho} = F(t) + \frac{\upsilon_0^2}{2} - q'_{0t} + 2\pi\frac{d\nu}{dt}.$$

Как можно видеть, в формуле (2.1.40) отсутствует член Φ'_t, входящий в исходный интеграл Коши–Лагранжа, поскольку он скомпенсировался аналогичным членом, входящим в выражение для $q(s,t)$. Это объясняется тем, что движущимся телом не затрачивается энергия на изменение потенциала Φ по времени.

Полученные формулы значительно упрощают определение давления жидкости на поверхность профиля, поскольку выражают его величину непосредственно через производные от плотности потенциала двойного слоя в рассматриваемой точке контура S.

§ 2.2. Численное решение плоских задач

2.2.1. Основные соотношения. Пусть, как и в § 2.1, тело бесконечного размаха с постоянным сечением, ограниченным контуром $S(x,y)$, движется с произвольной поступательной скоростью

$$\boldsymbol{v}_0(t) = \mathbf{grad}\,\Phi^{v}, \quad \text{где}$$
$$\Phi^{v} = v_{01}x + v_{02}y, \quad v_{01} = v_0\cos\alpha, \quad v_{02} = v_0\sin\alpha,$$

направление которой составляет с хордой угол $\beta(t) = \pi + \alpha(t)$, где α — угол атаки (см. рис. (2.2)). Окружающая контур S жидкость покоится на бесконечном удалении от него.

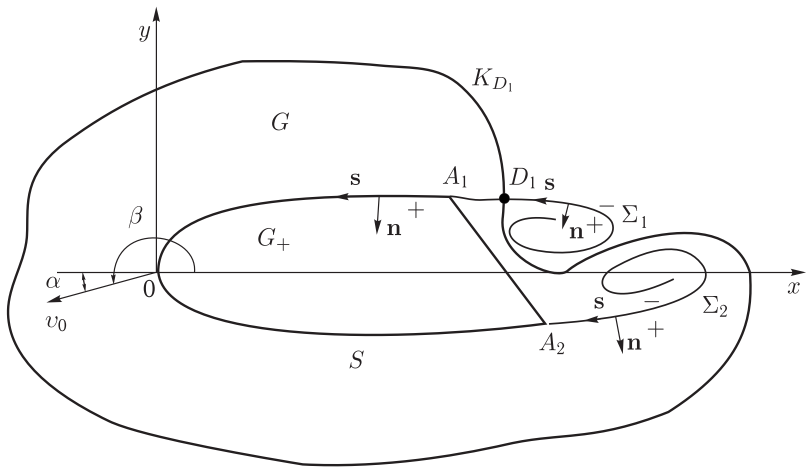


Рис. 2.2. Тело S с двумя точками схода поверхностей Σ_1 и Σ_2 тангенциального разрыва скоростей

Рассматривается течение с отходящими от тела S в заданных точках A_1 и A_2 линиями Σ_1 и Σ_2 тангенциального разрыва скорости. В § 2.1 показано, что задача расчета такого течения на базе модели идеальной несжимаемой жидкости сводится к решению следующих уравнений.

а. Интегральное уравнение относительно плотности потенциала двойного слоя ν, распределенного по поверхностям S, Σ_1 и Σ_2 в каждый фиксированный момент времени t:

$$\left.\begin{aligned} &\pi\nu(s_0,t)+\int\limits_S \nu(S,t)\,\vartheta'_S(s_0,s)dS=F(s_0,t),\\ &F(s_0,t)=\upsilon_{01}(t)x(s_0)+\upsilon_{02}(t)y(s_0)-\int\limits_{\sum_1\bigcup\sum_2}\nu_*\vartheta'_S(s_0,s)ds. \end{aligned}\right\} \tag{2.2.1}$$

Здесь s — точка интегрирования; s_0 — фиксированная точка; υ_{01}, υ_{02} — компоненты скорости поступательного движения тела; ν_* — плотность диполей в следе Σ_1 и Σ_2; $\vartheta'_S(s_0,s)$ — угол между осью $0x$ и прямой, проведенной из точки s в точку s_0 так, что $\vartheta'_S(s_0,s)=\dfrac{\partial}{\partial_S}\operatorname{arctg}\dfrac{y(s_0)-y(s)}{x(s_0)-x(s)}$; штрих означает производную по переменной, отмеченной буквенным индексом.

В связи с требованием ограниченности и непрерывности скорости течения вблизи точки A_k $(k=1,2)$ отрыва потока (см. рис 2.3) на функцию ν и ее производные накладываются следующие условия:

$$\left.\begin{aligned} &\nu(s_{A_k}-0,t)-\nu(s_{A_k}+0,t)+\nu_{*k}(0-0,t)=0;\\ &n_{\sum k}=n_{k_1},\quad \nu'_S(s_{A_k}-0,t)=0,\quad \nu'_S(s_{A_k}+0,t)=\nu'_S(0-0,t)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \text{при } \frac{\partial\Gamma_k}{\partial t}>0;\\ &n_{\sum k}=n_{k_2},\quad \nu'_S(s_{A_k}+0,t)=0,\quad \nu'_S(s_{A_k}-0,t)=\nu'_S(0-0,t)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \text{при } \frac{\partial\Gamma_k}{\partial t}<0; \end{aligned}\right\} \tag{2.2.2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\upsilon_{S_k}(0-0,t)=-\sqrt{\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\Gamma_k}{\partial t}\right|}\leqslant 0;\\ &\gamma_k(0-0,t)=-2\pi(\nu_{*k})'_S=-\Gamma'_S=-\sqrt{2\left|\frac{\partial\Gamma_k}{\partial t}\right|}\operatorname{sign}\frac{\partial\Gamma_k}{\partial t}\ (k=1,2). \end{aligned}\right\} \tag{2.2.3}$$

Здесь $\nu_*(0-0,t)$ — предельные значения плотности $\nu_*(s,t)$ на Σ_k в точке A_k $(k=1,2)$ при $s\to 0$; s_{A_k} — длина дуги контура S в точке A_k; n_{k_1} и n_{k_2} — нормали в точках контура $s_{A_k}+0$ и $s_{A_k}-0$, соответствующих $s\to s_{A_k}$ сверху и снизу; Γ_k — циркуляция скорости по контуру K_{D_k} (см. рис. 2.2), пересекающему только линию Σ_k в рассматриваемой точке.

б. Нелинейные интегральные уравнения движения следа:

$$\left.\begin{aligned} x_k[s_0(\Gamma,t),t]=x_k[s_0(\Gamma,t_0),t_0]+\int\limits_{t_0}^{t}\upsilon_{x_k}[s(\Gamma,t_1),t_1]dt_1,\\ y_k[s_0(\Gamma,t),t]=y_k[s_0(\Gamma,t_0),t_0]+\int\limits_{t_0}^{t}\upsilon_{y_k}[s(\Gamma,t_1),t_1]dt_1. \end{aligned}\right\} \tag{2.2.4}$$

Здесь $s(\Gamma,t)$ — длина дуги следа, соответствующая фиксированному значению Γ, $s(\Gamma,t_0)=0$.

Компоненты относительной скорости υ_{x_k}, υ_{y_k} записываются в виде

$$\upsilon_{x_k}(s_0,t)=\varphi'_{x_k}(s_0,t)-\upsilon_{0_k}(t);\quad \upsilon_{y_k}(s_0,t)=\varphi'_{y_k}(s_0,t)-\upsilon_{0_k}(t), \tag{2.2.5}$$

где φ — потенциал абсолютных возмущенных скоростей.

Давление на поверхности тела выражается через производные от плотности диполей:

$$\frac{p_-}{\rho}=f(t)+\frac{\upsilon_0^2}{2}-\frac{\partial\Phi^\upsilon}{\partial t}+2\pi\nu'_t-2\pi^2\nu_s'^2. \tag{2.2.6}$$

Здесь p — давление жидкости на поверхности S; $f(t)$ — произвольная функция времени; ρ — плотность жидкости.

Выражения для сил и момента, действующих на тело, имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}X&=\int\limits_S p_-\cos(n,x)ds=\int\limits_S p_-x'_n ds=-\int\limits_S p_-dy;\\ Y&=\int\limits_S p_-\cos(n,y)ds=\int\limits_S p_-y'_n ds=\int\limits_S p_-dx;\\ M&=\int\limits_S p_-[\cos(n,y)x-\cos(n,x)y]ds=\int\limits_S p_-xdx+p_-ydy.\end{aligned}\right\} \tag{2.2.7}$$

Коэффициенты давления, сил и момента в поточной системе координат вводятся следующим образом:

$$\overline{p}=\frac{p_--p_\infty}{\rho\overline{\upsilon}_0^2/2},\quad C_{x_a}=\frac{X}{\rho\overline{\upsilon}_0^2/2b},\quad C_{y_a}=\frac{Y}{\rho\overline{\upsilon}_0^2/2b},\quad m_z=\frac{M}{\rho\overline{\upsilon}_0^2/2b^2}, \tag{2.2.8}$$

здесь $\overline{\upsilon}_0$ — модуль характерной скорости (при стационарном движении тела это его поступательная скорость); p_∞ — давление в бесконечно удаленной от тела точке.

2.2.2. Численная схематизация метода. Как показано в § 2.1, в силу линейности уравнения (2.2.1) его решение можно искать в виде:

$$\nu(s_0,t)=\nu^{(0)}(s_0,t)+\sum_{k=1}^{2}\nu_{*k}(0-0,T)\nu^{(k)}(s_0,t), \tag{2.2.9}$$

где $\nu^{(0)}$ и $\nu^{(k)}$ — решения уравнения (2.2.1) с правыми частями:

$$\left.\begin{aligned}&F^{(0)}(s_0,t)=\upsilon_{01}(t)x(s_0)+\upsilon_{02}y(s)-\int\limits_{\Sigma_1\cup\Sigma_2/\Delta\Sigma_1\cup\Delta\Sigma_2}\nu_*(s,t)\vartheta'_S(s_0,s)ds,\\ &F^{(1)}=\vartheta(s_0,A_1)-\vartheta\left(s_0,-\Delta\Sigma_1\right),\quad F^{(2)}=\vartheta(s_0,A_2)-\vartheta\left(s_0,-\Delta\Sigma_2\right).\end{aligned}\right\} \tag{2.2.10}$$

Здесь $\nu_{*k}(0-0,T)$ — предельное значение плотности $\nu_{*k}(s,t)$ в последний расчетный момент времени T на площадке $\Delta\Sigma_k$ в точке A_k при $\Delta\Sigma_k\to 0$; $[\vartheta(s_0,A_1)-\vartheta(s_0,-\Delta\Sigma_1)]$ и $[\vartheta(s_0,A_2)-\vartheta(s_0,-\Delta\Sigma_2)]$ — углы, под которыми видны из точки s_0 площадки следа $\Delta\Sigma_1$ и $\Delta\Sigma_2$, образовавшиеся в последний расчетный момент времени T и прилегающие к точкам A_1 и A_2.

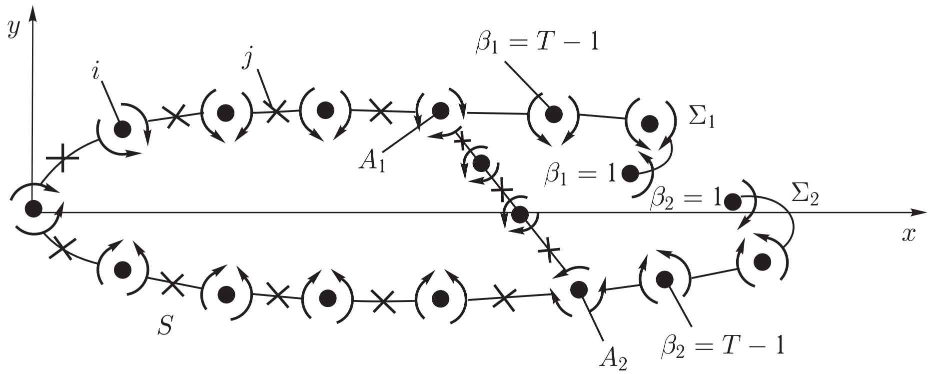


Рис. 2.3. Схематизация поверхностей тела S и свободных вихревых следов Σ_1 и Σ_2 участками j с постоянной интенсивностью диполей, или, что равносильно, вихрями i, β_1, β_2 по краям этих участков

Если ввести на S, Σ_1 и Σ_2 сетку, разбив поверхность S на P, а Σ_1 и Σ_2 на T частей, и заменить интегралы, входящие в (2.2.1) и (2.2.10), суммами (рис. 2.3), то решения $\nu^{(0)}$ и $\nu^{(k)}$, входящие в (2.2.9), в соответствии с §1.3, можно представить как:

$$\nu^{(m)}(s_j,t) = \frac{1}{2}\nu_0^{(m)}(s_j,t) + \\ + \frac{1}{2}\left[\nu_0^{(m)}(s_j,t) + \nu_1^{(m)}(s_j,t)\right] + \ldots \ (m = 0,1,2), \quad (2.2.11)$$

где

$$\nu_0^{(m)}(s_j,t) = \frac{1}{\pi}\Big\{ v_{01}(s_j)x(s_j) + v_{02}(s_j)y(s_j) - \\ - \sum_{k=1}^{2}\sum_{\beta_k=1}^{T-1} \nu^{\beta_k}\left[\vartheta(s_j, s_{\beta_k+1}) - \vartheta(s_j, s_{\beta_k})\right]\Big\}, m = 0,$$

$$\nu_0^m(s_j,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{2}[\vartheta(s_j,A_k) - \vartheta(s_j, s_{T-1}^k)], \quad m \neq 0,$$

$$\nu_{n+1}^m(s_j,t) = \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{p}\nu_n^m(s_j,t)[\vartheta(s_j,s_{i+1}) - \vartheta(s_j,s_i)].$$

Значение $\nu_{*k}(0-0,T)$ определялось из соотношений (2.2.2), (2.2.3), (2.2.9). Здесь $s_{T-1}^k = -\Delta\Sigma_k$, где k — номер, присвоенный свободному тангенциальному разрыву.

При вычислении положения дискретных вихрей, моделирующих свободные тангенциальные разрывы, применялся регуляризирующий оператор:

$$\widehat{x}_t^{\beta_k} = (1 - C)x_t^{\beta_k} + \frac{C}{2}(x_t^{\beta_k+1} + x_t^{\beta_k-1}), \quad (k = 1, 2),$$

где вектор

$$x_t^{\beta_k} = \{x_k\left[s_0(\Gamma_{\beta_k}, t), t\right], \quad y_k\left[s_0(\Gamma_{\beta_k}, t), t\right]\}.$$

Принятый оператор аналогичен оператору из работы [97] и при $C = 1/2$ совпадает с ним. Для уменьшения погрешности, вносимой регуляризирующим оператором при неравномерном шаге по дуге следа, принималось, что параметр C зависит от опущенной из точки β_k высоты h треугольника с вершинами в точках следа β_{k-1}, β_k, β_{k+1}. Более подробно эти вопросы отражены в § 2.4.

2.2.3. Результаты расчетов. Рассмотрим примеры расчетов плоских течений. Были проведены расчеты обтекания полукруглого и полуэлиптического цилиндров и клиньев с различными углами раствора. Результаты расчетов коэффициентов сопротивления клиньев с углами раствора $\varepsilon = 45^\circ$ получены при больших значениях расчетного времени, что дало возможность получить достаточно точное значение средней величины сопротивления клина.

Рассмотрим расчет отрывного нестационарного обтекания полукруглого цилиндра; угол атаки ($\alpha = 2^\circ$) принимался не равным нулю с целью исследования развития асимметричного течения за телом. На рис. 2.4 представлены результаты расчета структуры потока за полуцилиндром в сравнении со спектрами течения, полученными в гидродинамической трубе методом естественной оптической визуализации (см. ниже, § 4.1 главы 4). На рисунке принята за безразмерное время величина $\overline{\tau}$, равная $(t \cdot v_0)/D$, где v_0 — величина скорости, установившаяся после разгона потока, D — диаметр цилиндра, t — размерное время.

Можно отметить, что в начальные моменты времени за полукруглым цилиндром существует течение, близкое к симметричному ($\overline{\tau} \approx 1{,}6 \div 4{,}0$), вихревой след сворачивается в близкие к спиральным образования, что находится в хорошем соответствии с экспериментальными спектрами. Видно некоторое «припухание» вихревого следа, так что площадь «миделевого» сечения следа, находящегося примерно на уровне ядер спиральных вихреобразований, больше площади миделевого сечения тела. При $\overline{\tau} \approx 4$ в «хвостовой» части следа наблюдается вторичное сворачивание вихревой пелены в вихревые образования, что хорошо согласуется с экспериментальными спектрами. Далее можно видеть, как постепенно нарастает асимметрия течения в следе и происходит вытеснение вихревого сгустка ($\overline{\tau} = 6$) из донной области. Дальнейшее развитие асимметричного течения приводит к тому, что спиралеобразность верхнего вихря нарушается, а затем нижний вихрь вытесняет верхний ($\overline{\tau} = 8$), занимая все большую часть донной области. При $\overline{\tau} = 8 \div 9{,}2$ происходит отход верхнего вихря от донной поверхности и зарождение на верхней острой кромке нового вихря со структурой, близкой к спиральной. Причем, отошедший верхний вихрь, взаимодействуя с нижним вихрем, близким к спиралеобразному и «разбухшему» до размера, превышающего размер миделевого сечения донышка полуцилиндра, увлекает за собой часть вихрей,

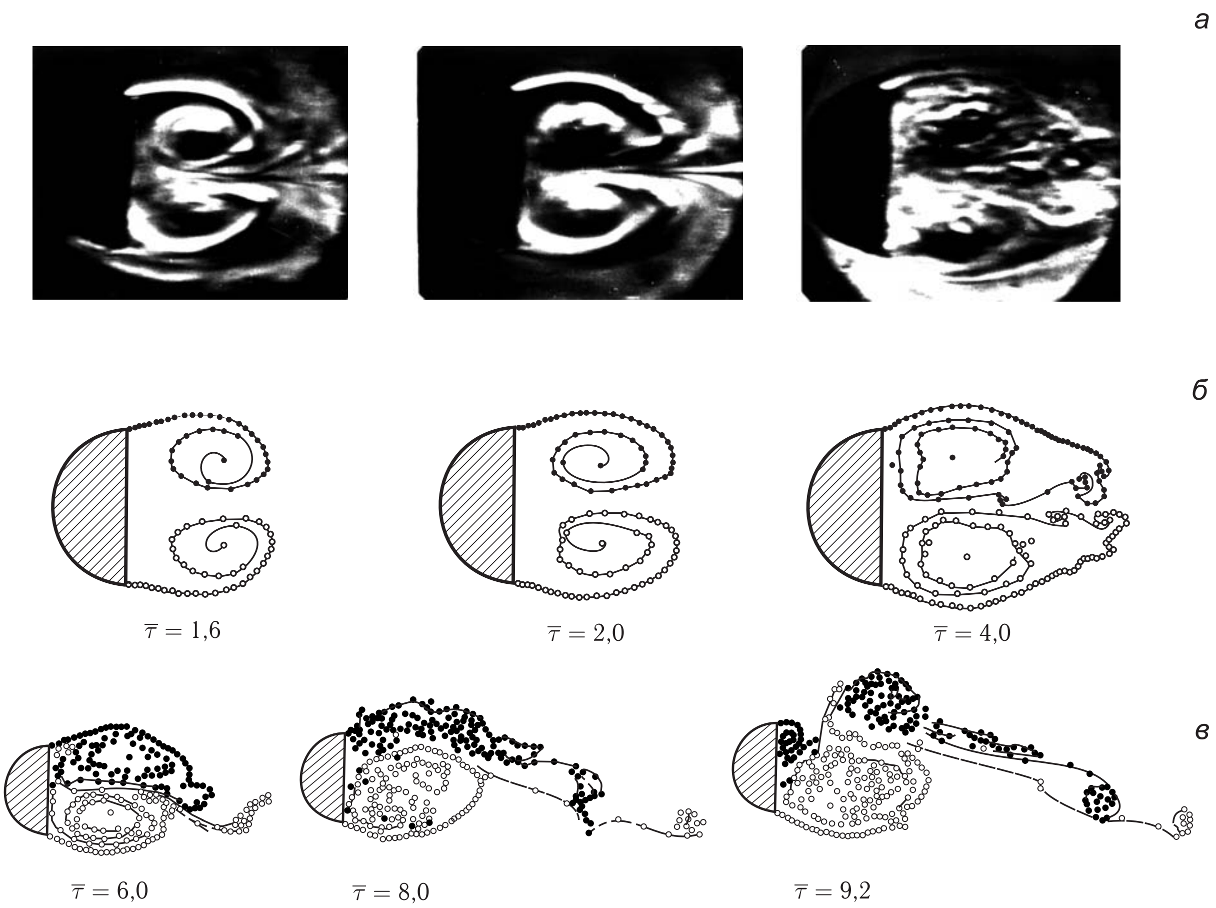


Рис. 2.4. Развитие плоского отрывного течения за полуцилиндром (эксперимент и расчет): *а* — экспериментальные фотографии вихревых образований за полуцилиндром; *б* — расчет вихревого следа в безразмерные моменты времени $\overline{\tau} = 1{,}6$, $2{,}0$, $4{,}0$, соответствующие экспериментальным фотографиям; *в* —вихревой след в моменты времени $\overline{\tau} = 6{,}0$, $8{,}0$, $9{,}2$; точками (•) показаны дискретные вихри, моделирующие свободную вихревую пелену, сходящую с верхней угловой кромки, (○) — с нижней угловой кромки

находящихся в непосредственной близости от него и образовавшихся около нижней острой кромки ($\overline{\tau} = 9{,}2$).

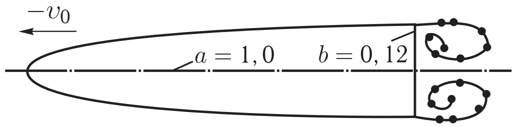


Рис. 2.5. Начальный момент развития плоского отрывного течения за полуэллиптическим цилиндром

На рис. 2.5 представлена начальная стадия развития течения за разгоняющимся по закону $v_0 = t$ полуэллиптическим цилиндром с полуосями эллипса $a = 1$, $b = 0{,}12$.

Рассмотрим симметричное обтекание клина с углом раствора $\varepsilon = 45^\circ$, установленного под нулевым углом атаки и приведенного мгновенно в движение с единичной скоростью. Такое течение, по сути, моделирует обтекание выступа в виде полуклина, установленного на бесконечной плоской поверхности. На рис. 2.6 представлены вихревые структуры течения за клином в безразмерные моменты времени $\overline{\tau} = 1{,}8$ и $3{,}6$, близкие к начальному, и соответствующие этим моментам времени эпюры распределения давления и скорости[1] по поверхности клина. Отметим обнаруженный в расчетах линейный характер нарастания скорости при перемещении рассматриваемой точки от центра донной поверхности клина, где находится точка торможения потока, к ее краю, вплоть до $(0{,}5 \div 0{,}75)b$, где b — половина ширины донной поверхности. На участке $(0{,}5 \div 0{,}8)b$ скорость жидкости на донной поверхности достигает максимального значения, а в окрестности ее угловой точки обращается в ноль в соответствии с условиями в точке схода потока (см. § 2.1).

На боковой поверхности клина ($\overline{\tau} = 3{,}6$) при симметричном обтекании скорость в направлении от вершины к донной поверхности непрерывно нарастает вплоть до $l = 0{,}7$ по закону, близкому к линейному, а вблизи этой поверхности ($l \approx 0{,}7 \div 0{,}5$) скорость изменяется мало. Такому выполаживанию эпюры скоростей, видимо, способствует указанное выше некоторое «припухание» свободного вихревого следа. Элементы следа, расположенные выше касательной к боковой поверхности клина, индуцируют в этой области скорости, направленные от донной поверхности к вершине тела, и, таким образом, осуществляется подтормаживание потока на боковой поверхности тела вблизи точки схода.

Следует отметить, что в начальные моменты времени на донной поверхности клина достигается большое разрежение, причем существенный вклад в него вносят не только скорость, но и производная по времени от гидродинамических особенностей, о чем можно сделать заключение, рассматривая эпюры скоростей и давления на донной поверхности клина ($\overline{\tau} = 1{,}8$), причем

[1] Скорость считается положительной, если она совпадает с направлением обхода поверхности тела, указанным на рис. 2.6, *а*, и отрицательной, если она противоположна этому направлению.

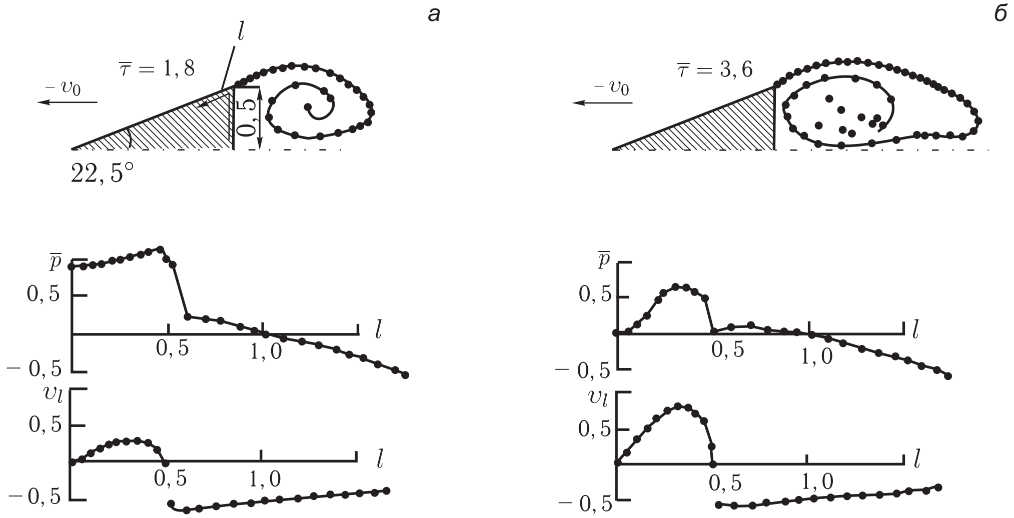


Рис. 2.6. Расчет симметричного отрывного обтекания клина. Точками показаны результаты расчета симметричного отрывного обтекания клина в безразмерные моменты времени: $\overline{\tau} = 1{,}8$ — (*а*), $\overline{\tau} = 3{,}6$ — (*б*); $\overline{p}$ и v_l — эпюры распределения давления и скорости по поверхности клина

характер изменения коэффициента давления по донной поверхности клина подобен изменению нагрузки на бесконечно тонкой пластине, установленной поперек потока, в симметричном режиме обтекания[14]. С течением времени коэффициент давления в точке торможения (в центре донной поверхности) клина становится равным нулю ($\overline{\tau} = 3{,}6$), а затем принимает положительные значения, но в исследованном диапазоне безразмерного времени не достигает значений, равных единице, вследствие нестационарности течения.

Рассмотрим теперь несимметричное обтекание клина, установленного под углом атаки $\alpha = 4{,}5^\circ$ и мгновенно приведенного в движение с единичной скоростью. В этом расчете моделировалась вихревая пелена, сошедшая с верхнего и нижнего острых углов клина, а вихревая пелена на переднем остром угле не зарождалась, так как известно, что при достаточно малых углах атаки из-за сильной конфузорности в области передней острой кромки отрывающийся от нее поток быстро присоединяется. Расчет производился с шагом по безразмерному времени $\Delta\overline{\tau} = 0{,}06$.

Структуры вихревого следа в безразмерные моменты времени $\overline{\tau} = 3{,}6 \div 39{,}6$ представлены на рис. 2.7. В начальные моменты времени за клином, как и за полуцилиндром (рис. 2.4), существует течение, близкое к симметричному. Затем такое течение постепенно нарушается и развивается течение, сопровождающееся образованием в следе «дорожки» Кармана; это отчетливо видно из рис. 2.7 при $\overline{\tau} = 39{,}6$. Причем следует отметить, что вблизи донной поверхности удается получить вихри, имеющие достаточно четкую спиралеобразную структуру практически для всех обследованных моментов времени, что обеспечивает достаточно плавное изменение суммарных и распределенных нагрузок.

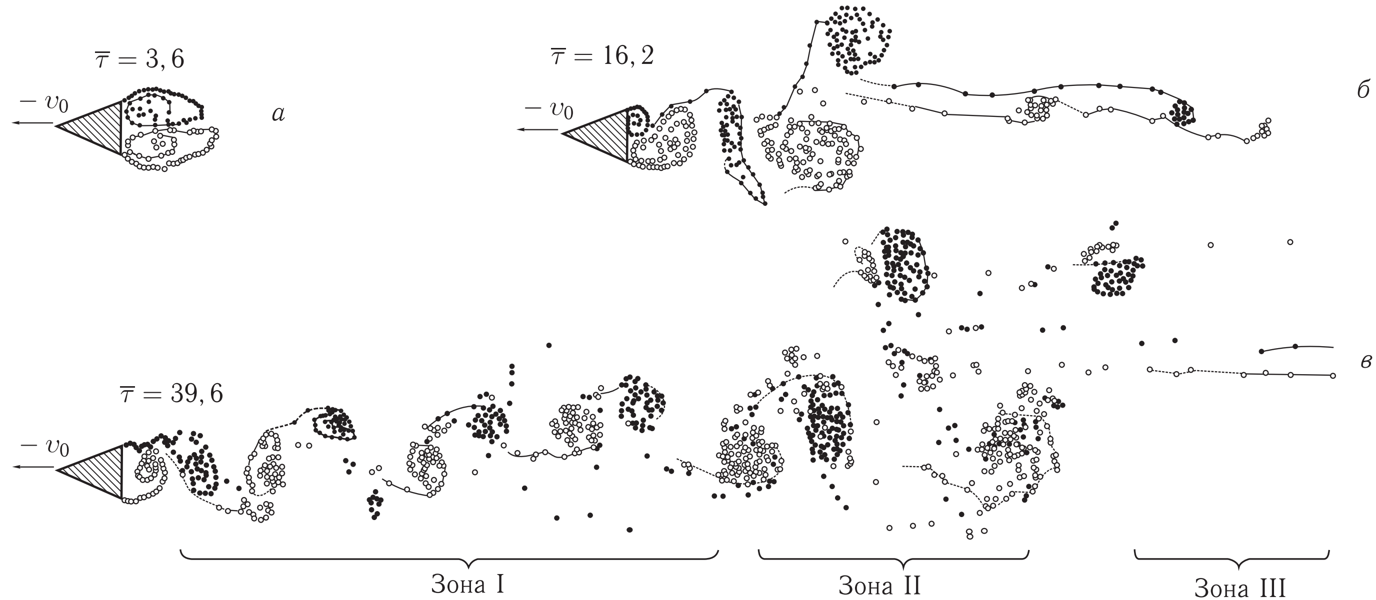


Рис. 2.7. Несимметричное обтекание клина. Структуры вихревого следа в безразмерные моменты времени: *а* — $\overline{\tau} = 3{,}6$; *б* — $\overline{\tau} = 16{,}2$; *в* — $\overline{\tau} = 39{,}6$. Точками (•) показаны вихри, сходящие с верхней угловой кромки, кружками (○) — с нижней угловой кромки. Зонами I–III (*в*) показаны фрагменты вихревых структур, образовавшихся в различные моменты времению. В зоне I видно развитие вихревой «дорожки» Кармана

В асимметричном следе за клином можно выделить, как и в расчетах обтекания бесконечно тонкой пластины[14], характерные зоны в следе (см. рис. 2.7, $\overline{\tau} = 39{,}6$): зону III, образовавшуюся в результате отхода отдельных малых вихреобразований в начальные моменты времени; зону II, в которой происходит взаимодействие вихревых образований (вихрей), сошедших с верхней и нижней поверхностей клина в начальные моменты времени; зону I, расположенную ближе к донной поверхности клина, с течением в виде «дорожки» Кармана. Причем, параметр дорожки $h/l \approx 0{,}3$ (где l — ее шаг, а h — ширина) и h получаются достаточно близкими к экспериментальным данным, [1] содержащимся в [66] и [110], а оценка реальной скорости перемещения дорожки, проведенная с безразмерного момента времени $\overline{\tau} = 32{,}4$ по $\overline{\tau} = 39{,}6$, показывает, что она практически совпадает со скоростью перемещения вихревой дорожки, даваемой формулой, содержащейся в [66], $u = \dfrac{\Gamma}{2l\sqrt{2}}$, и равна примерно 0,33. Здесь циркуляция отдельного вихря дорожки оценивалась по результатам численного расчета, приведенным на рис. 2.8. На этом рисунке Γ_1 — циркуляция вихревого следа в верхней угловой точке клина, Γ_2 — в нижней угловой точке клина. Причем, оценка величины среднего во времени потока завихренности, сходящего с поверхности клина в одной из его угловых точек $|\partial\,\Gamma/\partial t| = \gamma^2/2$, проведенная по результатам расчета (см. рис. 2.8), показывает, что эта величина примерно равна 0,98 и весьма близка к ее экспериментальному значению, приведенному в [66, 110]. На рис. 2.8 величины γ_1 и γ_2 — предельные значения интенсивностей свободной вихревой пелены при стремлении к верхней и нижней точкам схода потока соответственно.

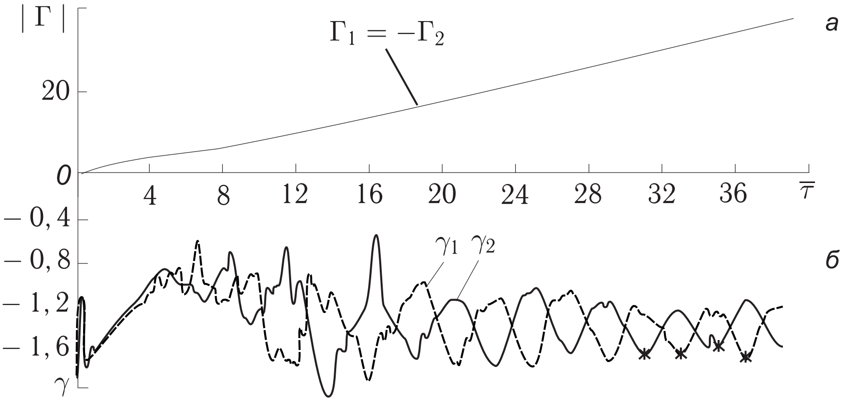


Рис. 2.8. Циркуляции вихревого следа Γ_1, Γ_2 (*а*) и интенсивности свободной вихревой пелены γ_1, γ_2 (*б*) при подходе к верхней и нижней точкам схода (обозначены соответственно индексами «1» и «2»)

Характеризующее периодичность отхода вихрей от поверхности тела число Струхаля $Sh = fb/v_0$ приблизительно равно 0,25, где $f = 1/T$ — частота

[1] Ширина и шаг «дорожки» Кармана вычислялись между «центрами тяжести» вихревых образований.

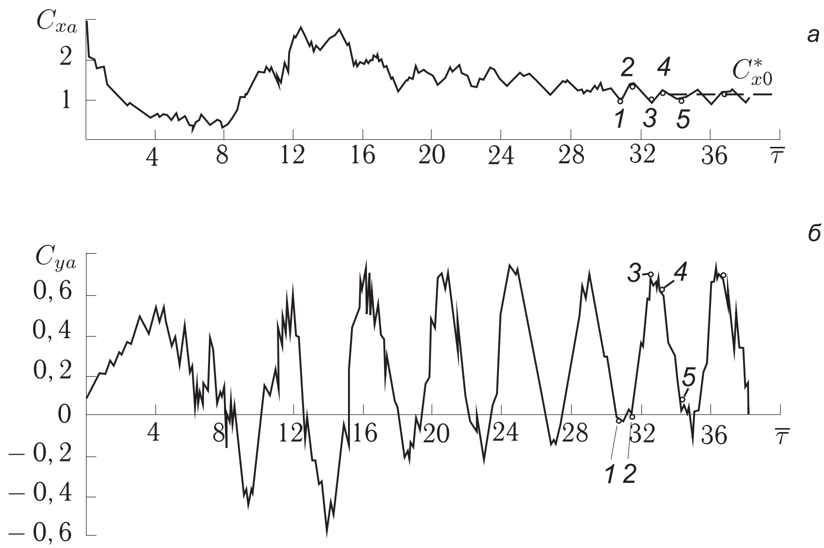


Рис. 2.9. Изменение во времени коэффициентов сопротивления $C_{xa}(\overline{\tau})$ и подъемной силы $C_{ya}(\overline{\tau})$ в скоростной системе координат. Точками (*1–5*) показаны минимумы и максимумы C_{xa} и C_{ya} изображенные на рис. 2.11

отхода вихрей, что удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [110]. Эта величина также хорошо согласуется с частотой изменения рассчитанных интегрированием давления по поверхности тела коэффициентов аэродинамических сил и момента и с изменением положения центра давления по времени, представленными на рис. 2.9 и 2.10, где C_{xa} и C_{ya} — коэффициенты сопротивления и подъемной силы в скоростной системе координат, m_z — коэффициент момента, вычисленный относительно начала координат, совпадающий с носком клина. Центр давления вводился как $y_{\text{Д}} = -m_z/C_x$. Среднее значение коэффициента сопротивления C_{xa} хорошо согласуется со средним экспериментальным [1] значением $C^*_{xa} \approx 1{,}15$ [162].

Следует отметить, что частота изменения коэффициента сопротивления в два раза больше частоты изменения коэффициента подъемной силы, коэффициента момента и положения центра давления. Это объясняется тем, что сопротивление клина возрастает при формировании как верхнего, так и нижнего вихрей, образующихся в результате сворачивания вихревой пелены, сходящей с острых кромок клина, в то время как подъемная сила и момент, действующие на клин, возрастают при формировании и развитии нижнего вихря и уменьшаются, когда развивается верхний вихрь. Совершенно аналогично объясняется изменение по времени положение центра давления. Явление изменения сопротивления плоской пластины, установленной под

[1] В работе[162] коэффициент сопротивления клина приведен для угла атаки $\alpha = 0$, в проведенных численных расчетах угол атаки равнялся 4,5°, однако известно, что при таком изменении угла атаки сопротивление плохообтекаемых тел практически не меняется; ниже та же величина коэффициента C^*_{xa} получена в расчете и при $\alpha = 0$.

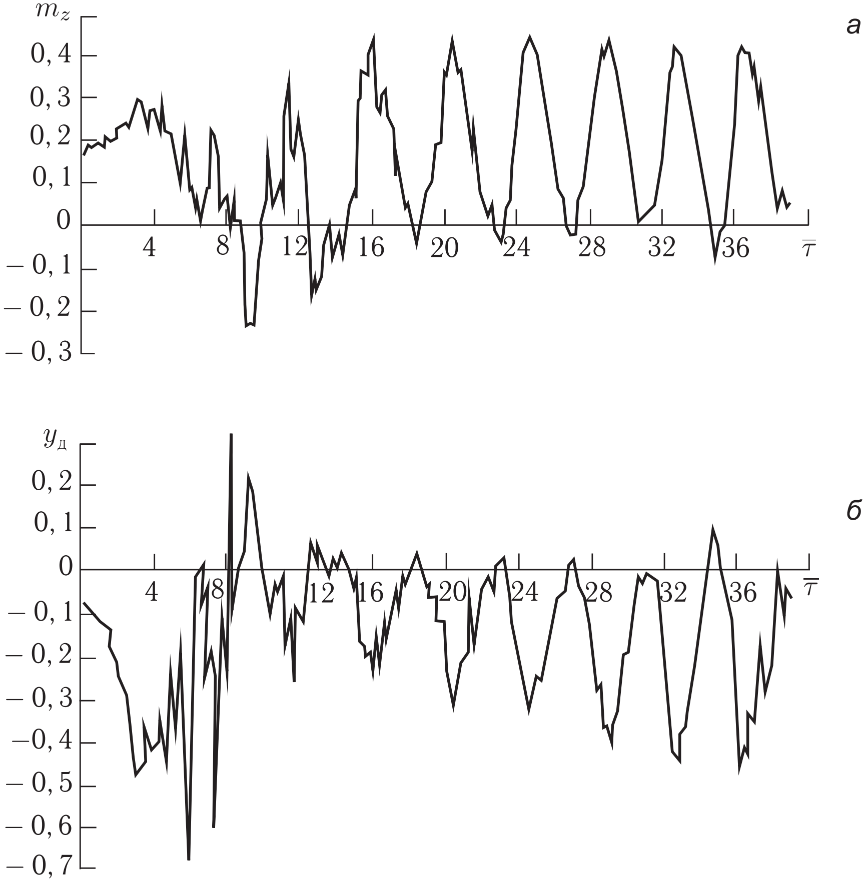


Рис. 2.10. Изменение во времени коэффициентов продольного момента $m_z(\overline{\tau})$ — (*а*) и $y_{д}(\overline{\tau})$ — (*б*) центра давления

прямым углом к потоку, с частотой по времени в два раза большей, чем изменение ее центра давления, было отмечено в [14].

Этот периодический процесс изменения аэродинамических характеристик следует рассмотреть более подробно с привлечением картин изменения распределения давления и скорости по поверхности клина. Достаточно четкая повторяемость ближнего вихревого следа за клином показана на рис. 2.11, где для моментов времени, отмеченных на рис. 2.9 точками $1, 2, \ldots 5$, даны вихревые следы за один период изменения коэффициента C_{ya} или за два периода изменения C_{xa}. Там же показано распределение коэффициента давления и скорости по поверхности клина за этот период времени. Можно видеть, как перестраивается картина распределения давления практически на обратную с момента $\overline{\tau} = 30{,}9$, соответствующего минимуму коэффициентов C_{xa} и C_{ya}, до момента $\overline{\tau} = 34{,}5$, соответствующего второму минимуму C_{xa} и максимуму C_{ya}. Максимум коэффициента C_{xa} достигается в том случае, когда ядро быстро формирующегося нижнего или верхнего вихрей смещается

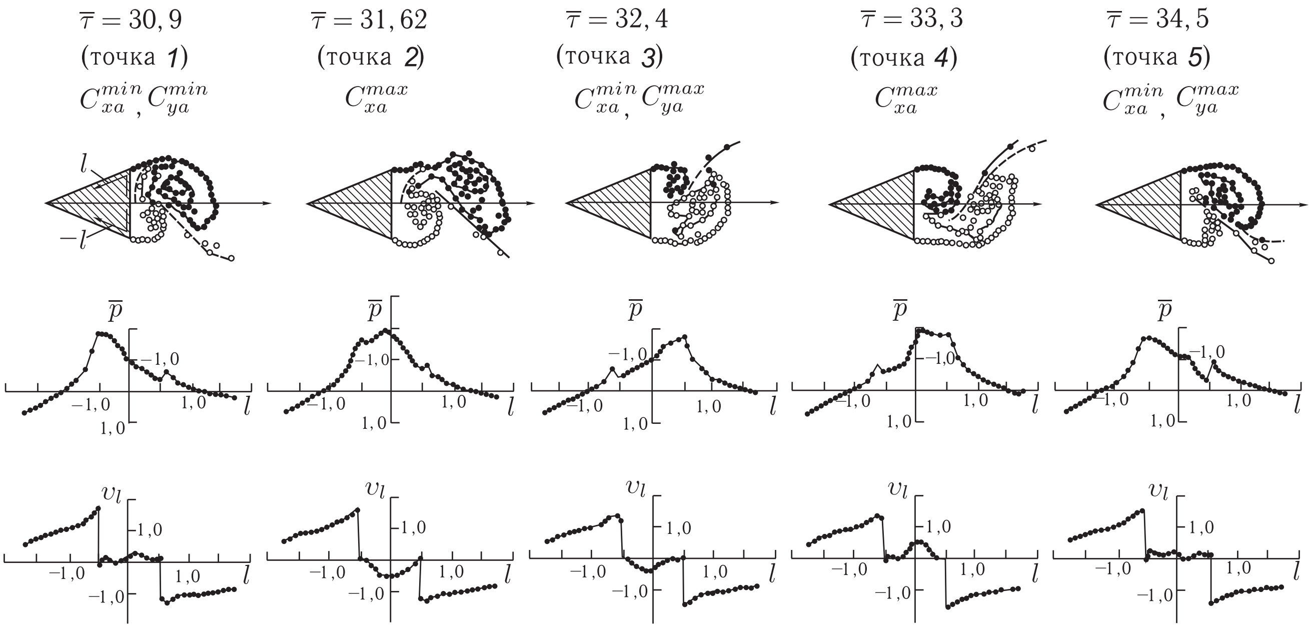


Рис. 2.11. Периодическое перестроение по времени структуры ближнего следа (*а*) за клином и соответствующие изменения коэффициента давления $\overline{p}(l)$ — (*б*) и скорости $v(l)$ —(*в*) на клине. Точки (*1–5*) — (*а*) при $\overline{\tau}$ = 30,9, 31,62, 32,4, 33,3, 34,5 соответствуют минимумам и максимумам C_{xa} и C_{ya} на рис. 2.9

к оси симметрии клина, что соответствует наибольшему среднему по донной поверхности клина разрежению.

Следует отметить, что давление на донной поверхности клина, особенно вблизи угловых точек, в значительной мере определяется не столько скоростью потока, сколько производной от потенциала по времени. Это отчетливо видно из сравнения эпюр скоростей и эпюр давлений в соответствующие моменты безразмерного времени. Так, безразмерная скорость вблизи нижней угловой точки на донной поверхности всегда близка к нулю, а коэффициент давления в этой области достигает значения — 2,0 (см., например, $\overline{\tau} = 30{,}9$, рис. 2.11). Нестационарный процесс изменения давления и скорости в отдельных точках поверхности клина по времени показаы на рис. 2.12 и 2.13.

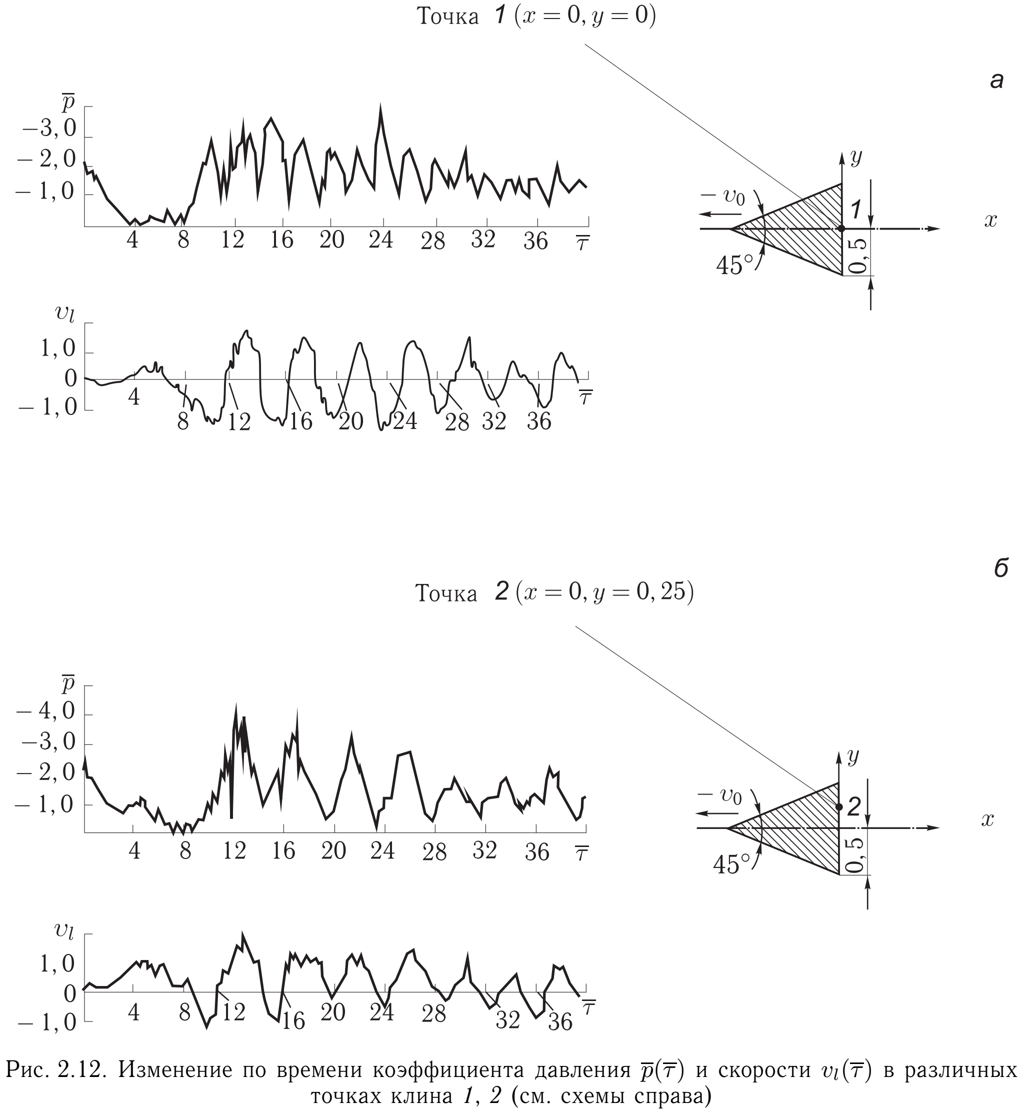


Рис. 2.12. Изменение по времени коэффициента давления $\overline{p}(\overline{\tau})$ и скорости $v_l(\overline{\tau})$ в различных точках клина *1*, *2* (см. схемы справа)

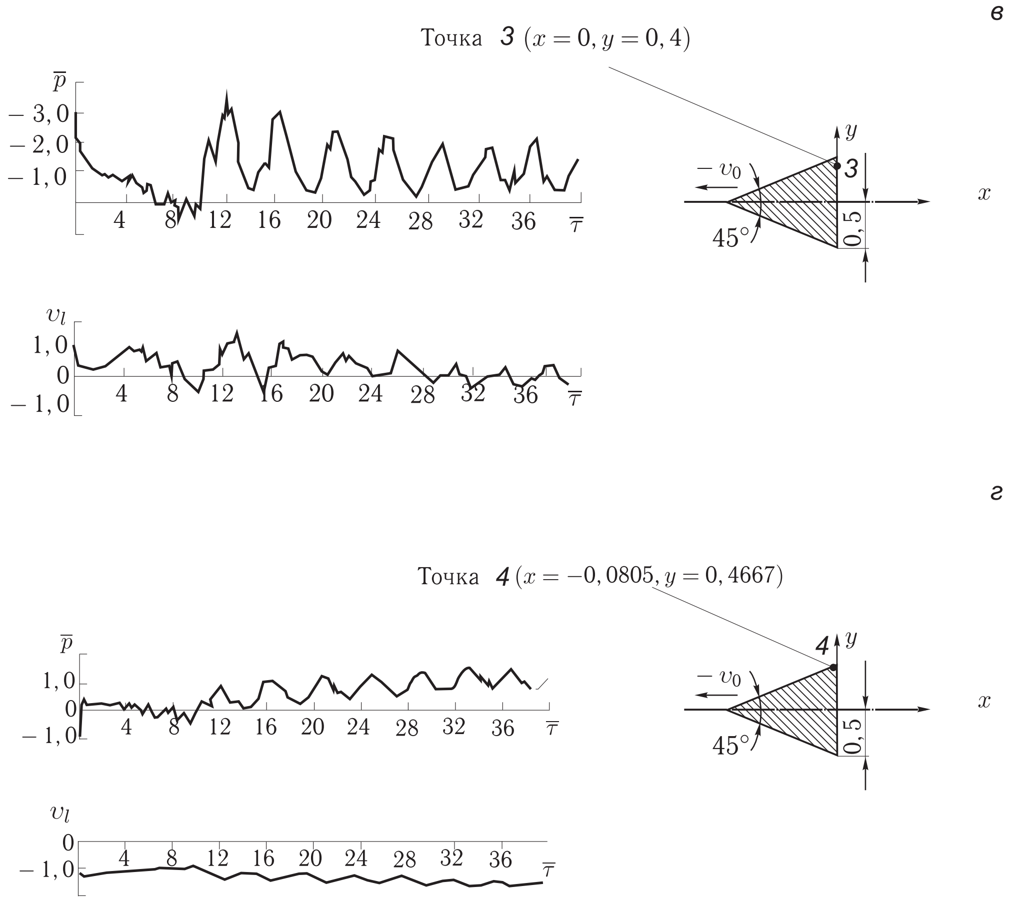


Рис. 2.13. Изменение по времени коэффициента давления $\overline{p}(\overline{\tau})$ и скорости $v_l(\overline{\tau})$ в различных точках клина *3*, *4* (см. схемы справа)

Отсюда также видно, что вблизи середины донной поверхности давление меняется с частотой в два раза большей, чем скорость, причем вклад скорости в давление в этой области значителен, в отличие от областей, примыкающих к краям донной поверхности.

Близкие результаты по величине устанавливающегося осредненного коэффициента сопротивления, параметрам вихревой дорожки, частоте отхода вихрей и т. п. получены и при расчете несимметричного обтекания клина с углом раствора $\varepsilon = 45^\circ$, когда угол атаки клина при достаточно больших значениях $\overline{\tau}$ мгновенно принимался равным нулю. Расчеты производились для случая, когда клин мгновенно приводился в движение с единичной скоростью, а угол атаки изменялся по закону:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = 4{,}5^\circ - 3{,}75\overline{\tau}, && 0 < \overline{\tau} < 1{,}2, \\ &\alpha = 0, && \overline{\tau} \geqslant 1{,}2, \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.12)$$

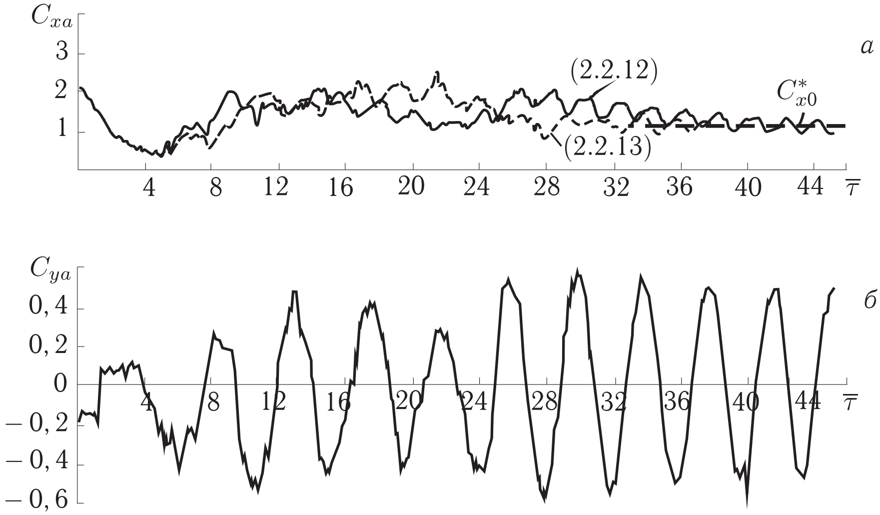


Рис. 2.14. Изменение по безразмерному времени коэффициента сопротивления C_{xa} — (*а*) при различных законах изменения угла атаки в начальные моменты времени ($\overline{\tau}$), соответствующих (2.2.12) и (2.2.13); изменение коэффициента подъемной силы C_{ya} — (*б*) приведено для закона изменения угла атаки (2.2.13)

или

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = 4{,}5^\circ - 1{,}5^\circ\overline{\tau}, \qquad 0 < \overline{\tau} < 3,\\ &\alpha = 0, \qquad\qquad\qquad\quad \overline{\tau} \geqslant 3. \end{aligned}\right\} \tag{2.2.13}$$

Получено, что такое различие в характере изменения угла атаки в начальные моменты времени практически не сказывается на решении задачи при достаточно больших значениях $\overline{\tau}$, что указывает на устойчивость численного решения задачи относительно начальных данных. Это иллюстрируется на рис. 2.14, *а*, где показано установление средних по времени значений коэффициентов сопротивления клина для этих двух случаев обтекания. На рис. 2.14, *б* приведена зависимость коэффициента подъемной силы от безразмерного времени для случая изменения угла атаки по закону (2.2.13). Для этого же случая на рис. 2.15 показан периодический процесс перестроения структуры ближнего вихревого тела за клином, а на рис. 2.16 — мгновенное поле скоростей в точках следа, соответствующее $\overline{\tau} = 33$.

Численными расчетами отрывного обтекания клина установлено также следующее: процесс сворачивания вихревой пелены в концентрированный вихрь начинается вблизи тех точек следа, где интенсивность вихревой пелены в момент схода с поверхности тела достигает по абсолютной величине максимума, а производная от вихревой интенсивности по времени меняет знак. Это можно видеть на рис. 2.17, где представлены процессы изменения во времени предельных значений интенсивности вихревой пелены при подходе к точкам схода потока (верхней γ_1 и нижней γ_2) со стороны следа, и рис. 2.15, где показан процесс формирования вихревых образований при обтекании клина при изменении значений угла атаки по закону, представленному формулой (2.2.12). Указанные точки следа отмечены на рис. 2.15 крестиками, соответствующие им точки на рис. 2.17 показаны звездочками. Такие же особенности

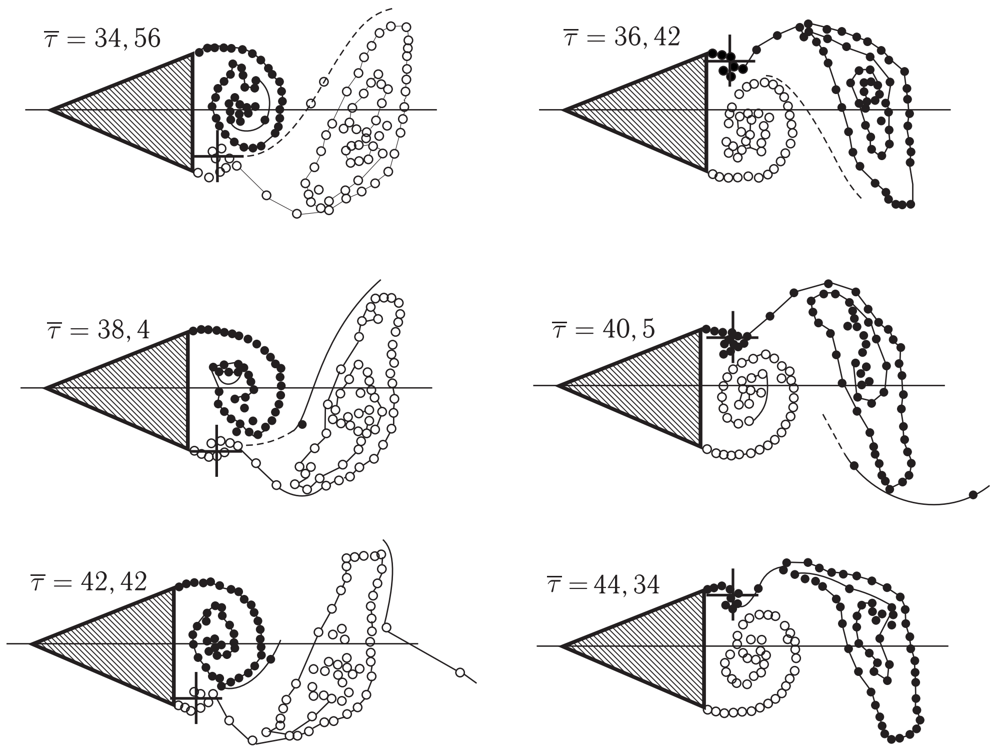


Рис. 2.15. Перестроение структуры ближнего следа за клином при $\overline{\tau} = 34{,}56 \div 44{,}34$. Центры крестиков (+) соответствуют точкам следа, где интенсивность вихревой пелены в момент схода с поверхности тела достигает максимума по абсолютной величине, а производная от вихревой интенсивности меняет знак. Соответствующие им точки отмечены на рис. 2.17 звездочками. В этих точках начинается процесс сворачивания вихревой пелены в концентрированный вихрь

Рис. 2.16. Мгновенное поле скоростей за клином в момент времени $\overline{\tau} = 33$, полученное расчетом. Стрелками показаны направления местной скорости в области вихревых образований

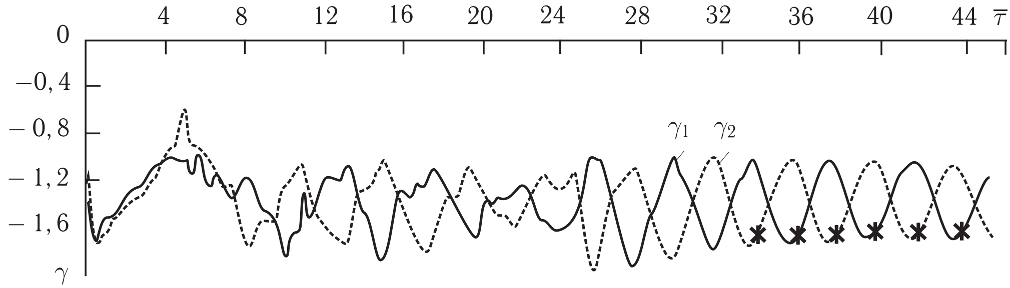


Рис. 2.17. Изменение по времени интенсивности вихревой пелены Σ_1, Σ_2 в зависимости от $\overline{\tau}$ при подходе к верхней и нижней точкам схода. Звездочками указаны точки, соответствующие отмеченным крестиками при $\overline{\tau} = 34{,}56 \div 44{,}34$ на рис. 2.15

течения наблюдаются и при изменении угла атаки клина по закону (2.2.13), и при обтекании под постоянным углом атаки $\alpha = 4{,}5^\circ$ (см. рис. 2.8, *б*, где аналогичные точки указаны звездочками).

На рис. 2.18 представлены результаты расчетов обтекания профиля NACA–0015, совершающего гармонические поступательные колебания вдоль оси y около нулевого угла атаки по закону $h = A\cos(k\overline{\tau})$, где A — отнесенное к хорде вертикальное перемещение профиля, k — число Струхаля ($k = 2\pi\omega b/|u_1|$), ω — частота колебаний, $\overline{\tau} = |u_1|t/b$, b — хорда профиля, u_1 и u_2 — компоненты, соответственно, горизонтальной и вертикальной составляющей поступательной скорости (см. формулу (2.1.19)). Расчетные результаты хорошо соответствуют экспериментальным данным по визуализации течения в следе за профилем, приведенным в работе [149].

На рис. 2.19 приведен график расчетных значений коэффициента нормальной силы $c_y = f(h)$ при $k = 0{,}134$, $A = 0{,}152$. Можно отметить, что расчетная зависимость $c_y(h)$ достаточно хорошо соответствует экспериментальным данным, приведенным в [166]. Здесь же представлены эпюры давления, полученные в результате решения задачи на основе гипотезы стационарности и с помощью изложенного численного метода, и соответствующие моменту прохождения профиля сверху вниз через нейтральное положение для случая, представленного на рис. 2.18, *б*. Видно, что решение задачи на основе гипотезы стационарности приводит в данном случае к значительной ошибке в величине давления жидкости на поверхность профиля.

а) $A = 0{,}018$; $k = 1{,}3$; $u_1 = -1{,}0$; $u_2/u_1 = 0{,}0234\sin k\overline{\tau}$

б) $A = 0{,}018$; $k = 4{,}3$; $u_1 = -1{,}0$; $u_2/u_1 = 0{,}0787\sin k\overline{\tau}$

в) $A = 0{,}018$; $k = 17$; $u_1 = -1{,}0$; $u_2/u_1 = 0{,}31\sin k\overline{\tau}$

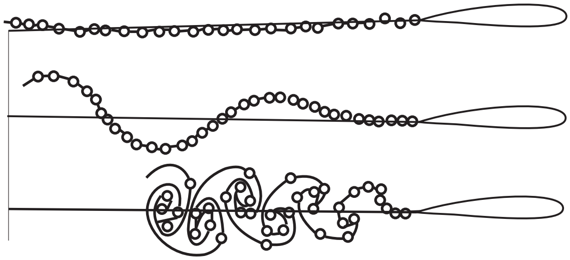


Рис. 2.18. Вихревая структура следа за колеблющимся по различным законам аэродинамическим профилем

На рис. 2.20 представлена вихревая структура, полученная в результате расчета отрывного обтекания аэродинамического профиля, установленного под углом атаки 60° в момент, соответствующий безразмерной величине времени $\overline{\tau} = 9{,}7$. При этом моделировался отрыв потока на передней и задней кромках профиля.

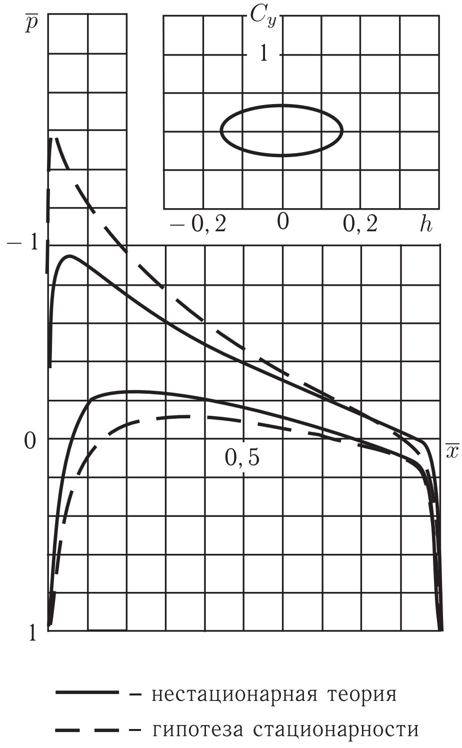


Рис. 2.19. Расчетные значения коэффициента нормальной силы колеблющегося профиля и распределение давления по профилю

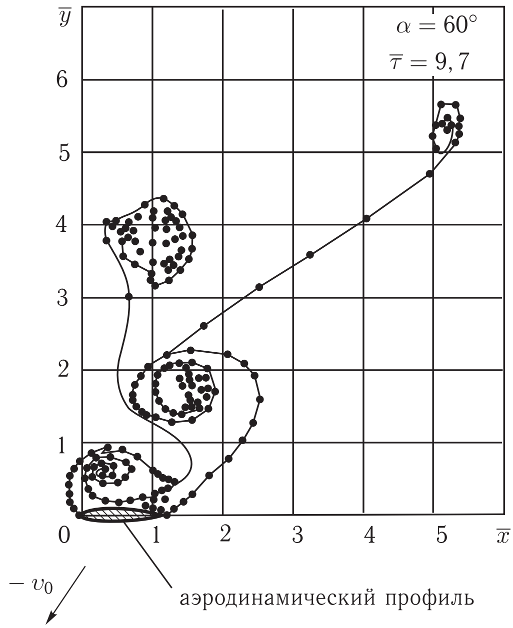


Рис. 2.20. Расчет отрывного обтекания аэродинамического профиля (свободная вихревая пелена сходит с его носка и задней кромки)

Приведенные примеры численного решения ряда задач об отрывном нестационарном обтекании тел демонстрируют удовлетворительное совпадение результатов численных расчетов с экспериментальными данными и показывают эффективность предложенного метода при исследовании особенностей отрывных и нестационарных течений идеальной несжимаемой жидкости.

§ 2.3. Метод решения задачи об отрывном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью произвольно движущегося трехмерного тела

2.3.1. Постановка задачи и вводные замечания. Пусть тело с кусочно-гладкой поверхностью $S(x, y, z)$ (прямоугольная система координат

$0xyz$ связана с телом) произвольно движется в безграничной идеальной несжимаемой жидкости с переносной скоростью

$$\boldsymbol{\upsilon}_0 = \mathbf{W} + \boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega} \tag{2.3.1}$$

где

$$\mathbf{W} = \mathbf{grad}\, \Phi^W(x, y, z, t) \tag{2.3.2}$$

— вектор поступательной скорости,

$$\boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}(x, y, z), \tag{2.3.3}$$

— вектор скорости вращательного движения тела с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$, t— время. Жидкость также может совершать неустановившееся, невозмущенное телом движение со скоростью

$$\mathbf{V} = \mathbf{grad}\, \Phi^V(x, y, z, t). \tag{2.3.4}$$

Если вектор возмущенной телом скорости, обращающейся в нуль на бесконечном удалении от тела, обозначить

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad}\, \varphi(x, y, z, t), \tag{2.3.5}$$

то вектор абсолютной скорости частиц жидкости будет равен

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \mathbf{u}. \tag{2.3.6}$$

Будем считать, что с поверхности тела в виде поверхности разрыва тангенциальных составляющих скоростей сходит след $S_3(x, y, z, t)$, сопряженный с телом по гладкой и замкнутой линии схода τ, которая разбивает поверхность S на две части: S_1 и S_2. Поверхность S делит безграничное пространство G на внешнюю по отношению к S и S_3, односвязную область G_- и внутреннюю G_+ (см. рис. 1.1). Причем нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к S_1 и S_2 направлены в G_+, а положительное направление нормали $\mathbf{n}_3$, показано на рис. 1.1. В дальнейшем в этом параграфе буквенные индексы, стоящие внизу, означают проекцию на соответствующее направление, а знаки «$-$» и «$+$», в зависимости от смысла, соответствуют G_-, G_+, или же предельным значениям величин на поверхности S_i со стороны отрицательного или положительного направления нормали к ней $\mathbf{n}_i$. Задача отыскания потенциала φ для соленоидального поля скоростей, как известно, сводится к следующей внешней задаче Неймана для уравнения Лапласа:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\varphi = 0 \ \text{в}\ G_-; && \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_- = \upsilon_{0n} - V_n && \text{на } S_-, \\ &p_+ - p_- = 0; && \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_+ = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_- && \text{на } S_3, \end{aligned}\right\} \tag{2.3.7}$$

где υ_{0n} — нормальная компонента переносной скорости движения тела, определяемой выражениями (2.3.1)–(2.3.3), V_n — нормальная компонента невозмущенной скорости жидкости, определяемая формулой (2.3.4).

Задача (2.3.7) дополняется начальными данными, определяющими: начальное положение линии $\tau|_{t=t_0}$ сопряжения свободного следа с поверхностью тела; начальную геометрию поверхности $S_3|_{t=t_0}$ разрыва тангенциальных компонентов скорости; начальное распределение вектора завихренности $\gamma_3|_{t=t_0}$ по поверхности S_3, характеризующего интенсивность разрыва касательных к следу скоростей.

Кроме того, на линии схода τ необходимо выполнять соотношения, полученные в § 1.1 из условия ограниченности и непрерывности скоростей. В частности, если линия τ лежит на гладком участке и подвижна, то скорость w^A перемещения линии отрыва по нормали к ней самой совпадает со скоростью последней частицы жидкости, заключенной между поверхностью тела и следом. При этом для любых типов сопряжений поверхности тела со следом, рассмотренных в § 1.1, необходимо выполнение соотношений (1.1.15), (1.1.20), а скорость сноса свободной вихревой пелены определяется соотношениями (1.1.34), (1.1.37), (1.1.42), (1.1.43) для сопряжения с гладкой поверхностью тела или угловой кромкой. Причем, когда τ является угловой задней кромкой, или τ лежит на гладкой поверхности, но является неподвижной, необходимо выполнение либо верхнего, либо нижнего соотношения (1.1.46). Когда τ является подвижной и лежит на гладком участке поверхности тела, то необходимо выполнение одного из соотношений (1.1.47) § 1.1.

В дальнейшем, если поверхность тела S имеет ребра, будут рассматриваться случаи, когда они в своих сечениях не имеют точек возврата, поскольку полученные ниже уравнения в таких областях вырождаются.

2.3.2. Выбор формы представления потенциала возмущенных скоростей. Будем сначала предполагать, что поверхность S тела гладкая. Учитывая, что в общем случае тело может совершать вращательное движение (2.3.3) с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$, причем

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}(t), \tag{2.3.8}$$

заполним область G_+ вихрями с интенсивностью

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\upsilon}^{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(t) = 2\boldsymbol{\omega}(t), \quad (x, y, z) \in G_+, \tag{2.3.9}$$

зависящей только от времени. Так как внешнее возмущенное течение при этом должно оставаться потенциальным, то необходимо положить

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\upsilon}^{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(t) = 0, \quad (x, y, z) \in G_-, \tag{2.3.10}$$

При этом скорость $\boldsymbol{\upsilon}^{\Omega}$ от вихрей, заполняющих область G_+, могла бы быть найдена из соотношения

$$\boldsymbol{\upsilon}^{\Omega} = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{\varphi}^{\Omega}, \tag{2.3.11}$$

где

$$\boldsymbol{\varphi}^{\Omega} = \frac{\boldsymbol{\Omega}(t)}{4\pi} \iiint\limits_{G_+} \frac{dG_+}{r} \tag{2.3.12}$$

— векторный потенциал, удовлетворяющий векторному уравнению Пуассона

$$\Delta\boldsymbol{\varphi}^{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}(t) \quad \text{в} \quad G_+ \tag{2.3.13}$$

и векторному уравнению Лапласа

$$\Delta\boldsymbol{\varphi}^{\Omega} = 0 \quad \text{в} \quad G_-. \tag{2.3.14}$$

Но это приводит к противоречию, заключающемуся в том, что циркуляция скорости, обусловленной этими объемными вихрями, непрерывна при непрерывном переводе контура интегрирования $L_- \subset G_-$ в $L_+ \subset G_+$ в силу непрерывности скорости $\boldsymbol{\upsilon}^\Omega$. Интеграл же по поверхности, натянутой на этот контур, которому должна равняться циркуляция скорости в силу теоремы Стокса, оказывается разрывным в силу условий (2.3.9) и (2.3.10).

Действительно, пусть контур $L \subset G$ замкнут и пусть выполняются условия (2.3.9) и (2.3.10). Рассмотрим интегралы по контурам $L_- \subset G_-$ и $L_+ \subset G_+$: $\int\limits_{L_-} \boldsymbol{\upsilon}^\Omega_- \cdot d\boldsymbol{l}$ и $\int\limits_{L_+} \boldsymbol{\upsilon}^\Omega_+ \cdot d\boldsymbol{l}$. Так как теорема Стокса выполняется отдельно в каждой из областей G_- и G_+, то, применяя ее для вычисления этих интегралов с учетом условий (2.3.9) и(2.3.10), получим:

$$\int\limits_{L_-} \boldsymbol{\upsilon}^\Omega_- \cdot d\boldsymbol{l} = 0, \qquad \int\limits_{L_+} \boldsymbol{\upsilon}^\Omega_+ \cdot d\boldsymbol{l} = \iint\limits_{\delta} \Omega_n d\delta, \tag{2.3.15}$$

соответственно, где $\delta \subset G_+$ — какая-либо поверхность, опирающаяся на контур L_+.

В § 1.2 был изложен способ ликвидации указанного противоречия путем замыкания объемных вихрей поверхностными, однако он не является единственным, что отмечается и в [26]. Поэтому, ввиду важности вопроса, рассмотрим для случая вращения внутреннего объема как твердого тела способы замыкания постоянных по объему G_+ вихрей $\boldsymbol{\Omega}(t)$ в каждый фиксированный момент времени t поверхностными вихрями и объясним эту неединственность.

Поверхностные вихри определяются через скорость на внутренней границе тела. Обратимся к § 1.2, где для гладкой поверхности S тела был построен векторный потенциал (1.2.29) для любого, необязательно постоянного, распределения завихренности по объему G_+, с замыканием этих объемных вихрей поверхностными вихрями (1.2.32), распределенными по S. Очевидно, все соотношения, полученные в разд. 1.2.3 применимы и к частному случаю вращения внутреннего объема как твердого тела. Введем обозначение $\boldsymbol{\upsilon}_1$ для скорости, индуцируемой объемными $\boldsymbol{\Omega}(t)$ и поверхностными вихрями (1.2.32) § 1.2, переобозначив их как $\boldsymbol{\gamma}_1^\omega$,тогда (1.2.32), (1.2.33) § 1.2 запишутся в виде:

$$\boldsymbol{\gamma}_1^\omega = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\upsilon}_{1+} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\upsilon}_{1_{S_+}}, \tag{2.3.16}$$

$$\boldsymbol{\upsilon}_1 = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{G_+} \frac{\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{R}}{R^3} dG - \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{S} \frac{\boldsymbol{\gamma}_1^\omega \times \mathbf{R}}{R^3} dS, \tag{2.3.17, a}$$

здесь $\boldsymbol{\upsilon}_{1_{S_+}}$ — проекция $\boldsymbol{\upsilon}_{1_+}$ на S. Вихри $\boldsymbol{\Omega}(t)$ и $\boldsymbol{\gamma}_1^\omega$ удовлетворяют, очевидно, локальным условиям их замкнутости (1.2.34), (1.2.35) и теореме Стокса (1.2.36) в G_+. Подставив (2.3.16) в (2.3.17, a), при стремлении к поверхности тела S_+ изнутри объема G_+ получим следующее интегральное уравнение для определения скорости $\boldsymbol{\upsilon}_{1_+}$, а следовательно, и $\boldsymbol{\gamma}_1^\omega$ (2.3.16) в каждый фиксированный момент времени

$$\boldsymbol{\upsilon}_{1+} + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} \frac{(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\upsilon}_{1+}) \times \mathbf{R}}{R^3} dS = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_+} \frac{\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{R}}{R^3} dG. \qquad (2.3.17, б)$$

Причем, стоящий в правой части (2.3.17, $б$) интеграл на основании теоремы Остроградского–Гаусса может быть сведен к поверхностному аналогично интегралам в (2.3.76) разд. 2.3.6 данного параграфа. Очевидно, в области G_- скорость $\boldsymbol{\upsilon}_1$ обладает потенциалом:

$$\boldsymbol{\upsilon}_{1-} = \mathbf{grad}\,\varphi_1. \qquad (2.3.18, a)$$

Замечательным свойством скорости $\boldsymbol{\upsilon}_1$ является то обстоятельство, что ее касательная к S компонента $\boldsymbol{\upsilon}_{1_S}$ — в соответствии с разд. 1.2.3 на внешней поверхности тела S_- обращается в ноль:

$$\boldsymbol{\upsilon}_{1_{S_-}} = \mathbf{grad}\,\varphi_{1_-} = 0 \quad \text{на} \quad S_-, \qquad (2.3.18, б)$$

и в соответствии с (1.2.51, $б$) § 1.2 обладает постоянным потенциалом (но только) по S_-

$$\varphi_{1_-} = \mathrm{const} \quad \text{на} \quad S_-, \qquad (2.3.19)$$

что может упростить нахождение давления на поверхности тела при решении частных задач.

Недостатком представления поверхностной завихренности в виде (2.3.16) является необходимость решения на каждом шаге по времени интегрального уравнения (2.3.17, $б$). Кроме того, применение (2.3.16), (2.3.17, a), (2.3.17, $б$) на негладкой поверхности в окрестности угловых кромок тела затруднительно или невозможно, ввиду того, что сама поверхностная завихренность и скорость могут не удовлетворять условиям Липшица, т.е. могут не быть непрерывными и дифференцируемыми, поскольку в соответствии с (1.1.5) § 1.1 даже для завихренности, удовлетворяющей условиям Липшица, имеет место логарифмическая особенность в скорости.

Поверхностные вихри определяются через скорость вращательного движения тела. Рассмотрим другой способ замыкания объемных вихрей $\boldsymbol{\Omega}(t)$ поверхностными вихрями, который позволяет сразу определить вектор поверхностной завихренности через вращательную составляющую скорости движения тела. Вернемся к рассмотрению интегралов (2.3.15) в предположении, что контуры $L_- \subset S_-$ и $L_+ \subset S_+$ находятся вблизи гладкого участка поверхности S.

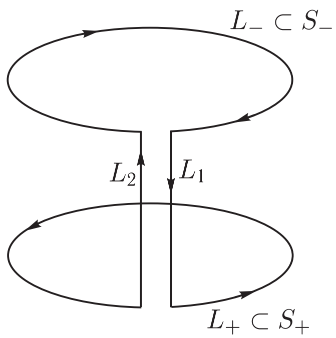


Рис. 2.21.
Контур L_-, L_1, L_+, L_2

Соединим контуры $L_- \subset S_-$ и $L_+ \subset S_+$ (рис.2.21) двумя бесконечно близкими отрезками L_1 и L_2 и рассмотрим интеграл по образованному таким образом контуру L_-, L_1, L_+, L_2 от скорости $\boldsymbol{\upsilon}^{\Omega}$, определяемой соотношениями(2.3.10)–(2.3.14). Учитывая (2.3.15), и, что

$$\int\limits_{L_1} \boldsymbol{\upsilon}^{\Omega} \cdot d\boldsymbol{l} + \int\limits_{L_2} \boldsymbol{\upsilon}^{\Omega} \cdot d\boldsymbol{l} = 0,$$

получим

$$\oint\limits_{L} \left(\boldsymbol{\upsilon}_{+}^{\Omega} - \boldsymbol{\upsilon}_{-}^{\Omega}\right) \cdot d\boldsymbol{l} = \int\limits_{\delta}\int \Omega_n d\delta. \tag{2.3.20}$$

Интеграл в левой части соотношения (2.3.20) можно представить в виде

$$\oint\limits_{L} \left(\boldsymbol{\upsilon}_{+}^{\Omega} - \boldsymbol{\upsilon}_{-}^{\Omega}\right) \cdot d\boldsymbol{l} = \oint\limits_{L} (\boldsymbol{\gamma}_2^{\omega} \times \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{l}, \tag{2.3.21}$$

где $\boldsymbol{\gamma}_2^{\omega}$ — вектор поверхностной плотности вихрей, характеризующий разрыв касательных скоростей. Таким образом, в силу соотношений (2.3.20) и (2.3.21) мы приходим к выводу, что тангенциальная скорость на поверхности S должна претерпевать разрыв, и, следовательно, по поверхности S необходимо распределить вихри с плотностью $\boldsymbol{\gamma}_2^{\omega}$, которую представим в следующем виде:

$$\boldsymbol{\gamma}_2^{\omega} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\upsilon}_S^{\omega}, \tag{2.3.22}$$

где $\boldsymbol{\upsilon}_S^{\omega}$ — проекция $\boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega}$ на S. Покажем, что условия (2.3.20) и (2.3.21) будут выполнены. Действительно, в силу свойств двойного векторного произведения

$$\boldsymbol{\gamma}^{\omega} \times \mathbf{n} = \boldsymbol{\upsilon}_S^{\omega}. \tag{2.3.23}$$

Подставляя (2.3.23) в правую часть соотношения (2.3.21), применив к нему теорему Стокса, получим

$$\oint\limits_{L} \boldsymbol{\upsilon}_S^{\omega} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint\limits_{L} \boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega} \cdot d\boldsymbol{l} = 2\int\limits_{\delta}\int \omega_n d\delta. \tag{2.3.24}$$

Подставляя в (2.3.24) условие (2.3.9), убеждаемся, что соотношение (2.3.20) при этом выполняется, что и требовалось доказать.

Выражения (2.3.20), (2.3.21) показывают, что объемные вихри $\boldsymbol{\Omega}(t)$ и введенные поверхностные вихри $\boldsymbol{\gamma}_2^{\omega}$ (2.3.22), также как и введенные ранее поверхностные вихри $\boldsymbol{\gamma}_1^{\omega}$ (2.3.16), удовлетворяют локальным условиям их замкнутости § 1.2: (1.2.14), (1.2.15) или (1.2.34), (1.2.35).

Эта неединственность возможности замыкания объемных вихрей $\boldsymbol{\Omega}(t)$ поверхностными объясняется тем, что указанные выше условия их замкнутости формально сводятся к условию выполнения теоремы Стокса для скорости $\boldsymbol{\upsilon}_{1_+}$ (2.3.17, a) или скорости $\boldsymbol{\upsilon}_{0+}^{\omega}$ (2.3.3) в G_+ вплоть до S_+. Скорость $\boldsymbol{\upsilon}_{1_+}$ имеет как вихревую, так и потенциальную составляющие, причем интеграл от последней по контуру равен нулю. Скорость $\boldsymbol{\upsilon}_{0+}^{\omega}$ имеет только вихревую компоненту. Наложенные требования (2.3.8), (2.3.9) приводят к тому, что интегралы по контурам от этих скоростей равны потоку вектора завихренности через поверхность, натянутую на этот контур, и равны между собой.

Суммарная скорость $\boldsymbol{\upsilon}_2$ от объемных $\boldsymbol{\Omega}(t)$ и поверхностных вихрей $\boldsymbol{\gamma}_2^\omega$ (2.3.22) может быть найдена из соотношения, аналогичного (2.3.17, a):

$$\boldsymbol{\upsilon}_2 = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_+} \frac{\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{R}}{R^3} dG - \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} \frac{\boldsymbol{\gamma}_2^\omega \times \mathbf{R}}{R^3} dS, \tag{2.3.25}$$

где поверхностная завихренность в каждый момент времени определяется выражением (2.3.22). Для случая гладкой поверхности S тела скорость $\boldsymbol{\upsilon}_2$ (2.3.25), как и скорость $\boldsymbol{\upsilon}_1$ (2.3.17, a), в соответствии с (1.2.31) § 1.2 удовлетворяет условию

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\upsilon}_{i_+} = \boldsymbol{\Omega}(t) = 2\boldsymbol{\omega}(t), \quad i = 1 \text{ или } 2, \text{ в } G_+. \tag{2.3.26}$$

Это условие нам потребуется для преобразования в дальнейшем уравнения для потенциала возмущенных скоростей. Интеграл в (2.3.25) по объему G_+ может быть сведен к поверхностным интегралам, аналогично разд. 2.3.6 данного параграфа. Выражение для скорости (2.3.25) не является интегральным уравнением, в отличие от (2.3.17, a),(2.3.17, $б$), так как $\boldsymbol{\Omega}(t)$ и $\boldsymbol{\gamma}_2^\omega$, входящие в него, являются в каждый фиксированный момент известными, что упрощает в ряде случаев нахождение скоростей, индуцируемых объемными и поверхностными вихрями. Так как на поверхностную плотность вихрей $\boldsymbol{\gamma}_2^\omega$ (2.3.22), в отличие от $\boldsymbol{\gamma}_1^\omega$ (2.3.16), может быть наложено требование выполнения условий Липшица, то она в окрестности угловых кромок тела может быть представлена в виде (1.1.5) § 1.1. Это дает возможность применить проведенный в § 1.1 анализ и ликвидировать возникающие особенности в окрестностях угловых кромок из условий ограниченности и непрерывности скоростей. Скорость $\boldsymbol{\upsilon}_2$ (2.3.25) обладает в G_- потенциалом φ_{2_-}

$$\boldsymbol{\upsilon}_{2_-} = \mathbf{grad}\,\varphi_{2_-} \quad \text{в} \quad G_-. \tag{2.3.27}$$

Потенциал φ_{2_-} может быть найден, например, как интеграл по любому пути от вектора скорости (2.3.25).

Здесь мы рассмотрели два способа замыкания объемных вихрей поверхностными для случая гладкой поверхности S. Но вследствие того, что локальные условия их замкнутости фактически сводятся к требованию локального выполнения теоремы Стокса при стремлении к поверхности тела изнутри завихренного объема, то возможны и другие варианты замыкания, так как добавление к скорости потенциальной составляющей не влияет на выполнение теоремы. В частности, может быть рассмотрена комбинация этих двух способов.

Итак, для гладкой поверхности тела S, в силу того, что возмущенное течение в области G_- потенциально, и в силу сказанного выше, потенциал возмущенного течения может быть представлен в виде

$$\varphi_- = \varphi_-^\nu + \varphi_{i-}, \quad (i = 1 \text{ или } 2), \quad \text{в } G_-, \tag{2.3.28}$$

где φ^ν — потенциал двойного слоя, распределенного по поверхностям S и S_3, с плотностью ν; φ_i — потенциал, который, как отмечалось выше, может быть представлен двумя описанными способами: при $i = 1$ — это потенциал (2.3.18, a) возмущенной скорости (2.3.17, a) в области G_- от вихрей $\boldsymbol{\Omega}(t)$, заполняющих область G_+, и вихревого слоя на поверхности S с интенсивностью $\boldsymbol{\gamma}_1^\omega$ (2.3.16); при $i = 2$ — это потенциал (2.3.27) возмущенной скорости (2.3.25) от вихрей $\boldsymbol{\Omega}(t)$ и вихревого слоя (2.3.23). Потенциалы φ_{i-} для заданного момента времени могут быть определены по соответствующим скоростям и представлены в виде интегралов по поверхности S.

В случае, когда поверхность S может иметь угловые кромки, потенциал возмущенного течения будем искать в виде

$$\varphi_- = \varphi_-^\nu + \varphi_{2-} \quad \text{в} \quad G_-, \tag{2.3.29}$$

где φ_2 — потенциал (2.3.27) возмущенной скорости $\mathbf{v}_2$ (2.3.25).

Обозначим через $\mathbf{v}^\nu$ скорость, индуцированную двойным слоем. Она, очевидно, обладает потенциалом φ^ν как в области G_-, так и в области G_+:

$$\mathbf{v}^\nu = \mathbf{grad}\,\varphi^\nu \quad \text{в} \quad G_+ \quad \text{и} \quad G_-. \tag{2.3.30}$$

Суммарная скорость, обусловленная потенциалом (2.3.29), в области G_- будет выражаться как

$$\mathbf{v}^\Sigma = \mathbf{grad}\,\varphi_- \quad \text{в} \quad G_-. \tag{2.3.31}$$

Поскольку мы перейдем от внешней задачи (2.3.7) на поверхности S_- к внутренней, а составляющая скорости $\mathbf{v}_2$ от вихревого слоя $\boldsymbol{\gamma}_2^\omega$ (см. второй интеграл в (2.3.25)) в окрестности угловой кромки может иметь логарифмические особенности типа (1.1.5) § 1.1, то встает вопрос существования ротора этой скорости (2.3.26) в G_+. Можно показать, что несмотря на эти логарифмические особенности в скорости, условие (2.3.26) для скорости $\mathbf{v}_2$ будет выполняться и вблизи угловой кромки тела, так как внутри тела в G_+ существует потенциал составляющей скорости от поверхностного распределения завихренности $\boldsymbol{\gamma}_2^\omega$, аналогично потенциалу обтекания плоской пластины под углом атаки [92].

Но этот вопрос может быть вообще обойден, если рассматривать в области G_+ суммарную скорость $\mathbf{v}^\Sigma$, индуцированную объемными $\boldsymbol{\Omega}(t)$, поверхностными $\boldsymbol{\gamma}_2^\omega$ вихрями и двойным слоем, распределенным по S и S_3. Действительно, при выполнении требований (1.1.20), (1.1.46) § 1.1, которые следуют из условия ограниченности и непрерывности скоростей в G_- и G_+, необходимо рассматривать суммарную интенсивность поверхностных вихрей, обусловленных вихревым слоем $\boldsymbol{\gamma}_2^\omega$ (2.3.22), замыкающим объемные вихри $\boldsymbol{\Omega}$, и вихревым слоем $\boldsymbol{\gamma}^\nu$, индуцированным двойным слоем

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^\nu + \boldsymbol{\gamma}_2^\omega. \tag{2.3.32}$$

Тогда суммарная скорость

$$\mathbf{v}^\Sigma = \mathbf{v}^\nu + \mathbf{v}_2. \tag{2.3.33}$$

будет всегда и в G_-, и в G_+ ограничена, а в G_+ будет существовать ротор скорости $\mathbf{v}^\Sigma$, который в силу потенциальности скорости $\mathbf{v}^\nu$ (2.3.30), будет равен

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{v}^\Sigma = \boldsymbol{\Omega}(t) = 2\boldsymbol{\omega}(t) \quad \text{в} \quad G_+. \tag{2.3.34}$$

Соотношения (2.3.32)–(2.3.34) и проведенное доказательство, очевидно, приложимы и к случаю, когда поверхность S тела является гладкой. Поскольку представление потенциала возмущенного течения в виде (2.3.29) является более общим, то в дальнейшем и для гладкой, и негладкой поверхностей будем рассматривать, если это не оговорено особо, именно его.

Итак, в соотношения (1.1.20), (1.1.42), (1.1.43), (1.1.46), (1.1.47) будет входить теперь поверхностная интенсивность (2.3.32), при этом введение поверхностных и объемных вихрей никак не повлияет на условие (1.3.15), которое тождественно выполнению теоремы Томсона, так как система поверхностных и объемных вихрей выбрана таким образом, что они в след не сходят. Это видно из рассмотрения интеграла от скорости, выражаемой соотношениями (2.3.17, a), (2.3.25), по замкнутому контуру $L'' \subset S_-$, который равен нулю.

В заключение отметим, что равенство (2.3.9) означает, что интенсивность вихрей, заполняющих объем G_+, меняется во времени. В силу уравнения Фридмана [80] $\mathbf{helm}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{p}$ это требует приложения непотенциальных массовых сил $\mathbf{p}$, уравновешивающих инерционные силы, вызываемые вращением. Но выполнение этих требований в области G_+ допустимо, поскольку интересующее нас течение в области G_- при этом будет удовлетворять всем необходимым законам.

2.3.3. Преобразование уравнения для потенциала возмущенных скоростей. Вернемся к задаче (2.3.7) для потенциала возмущенных скоростей. Будем считать, что условия § 1.1, полученные из требований ограниченности и непрерывности скоростей в G_+ и в G_-, выполнены. С учетом соотношений (2.3.29), (2.3.1)–(2.3.6) граничное условие на S_- в (2.3.7) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \varphi_-}{\partial n} - \upsilon_{0n}^{\omega} - \frac{\partial \Phi^W}{\partial n} + \frac{\partial \Phi^V}{\partial n} = 0, \quad (x,y,z) \in S_-, \tag{2.3.35}$$

Все члены этого уравнения непрерывны при переходе через поверхность S. Действительно, нормальные компоненты: υ_{0n}^{ω} скорости (2.3.3), $W_n = \partial\Phi^W/\partial n$ скорости (2.3.2), $V_n = \partial\Phi^V/\partial n$ скорости (2.3.4) непрерывны по их определению. Нормальная компонента скорости $\boldsymbol{\upsilon}^{\Sigma}$ (2.3.31) возмущенного течения $\upsilon_n^{\Sigma} = \partial\varphi_-/\partial n$, определяемая выражениями (2.3.30), (2.3.33), (2.3.25), также непрерывна при переходе через S в силу: непрерывности нормальной производной от потенциала двойного слоя [137]; непрерывности первых производных, т. е. скорости (2.3.11), от объемного векторного потенциала (2.3.12) [137]; непрерывности нормальной компоненты скорости от вихревого слоя [9]. Следовательно, уравнение (2.3.35) выполняется и при $(x,y,z) \in S_+$. Причем скорости $\mathbf{W}$ (2.3.2) и $\mathbf{V}$ (2.3.4) и в G_+ имеют потенциалы, однако скорость υ_+^{Σ} (2.3.33) на поверхности S_+ будет непотенциальной функцией. В соответствии с (2.3.34),(2.3.8) и (2.3.9)

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\upsilon}_+^{\Sigma} = \boldsymbol{\Omega}(t) = 2\boldsymbol{\omega}(t) \quad \text{при} \quad (x,y,z) \in G_+,$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega} = 2\boldsymbol{\omega}(t) \quad \text{при} \quad (x,y,z) \in G_+,$$

тогда

$$\mathbf{rot}\,(\boldsymbol{\upsilon}_+^{\Sigma} - \boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega}) = 0 \quad \text{при} \quad (x,y,z) \in G_+.$$

Это выражение, как известно, есть необходимое и достаточное условие потенциальности вектора $(\boldsymbol{\upsilon}^{\Sigma} - \boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega})$. Таким образом,

$$(\boldsymbol{\upsilon}_+^{\Sigma} - \boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega}) = \mathbf{grad}\, F \quad \text{при} \quad (x, y, z) \in G_+, \tag{2.3.36}$$

где

$$F = \varphi^{\nu} + F_0 \quad \text{при} \quad (x, y, z) \in G_+ \tag{2.3.37}$$

— потенциал скорости $\boldsymbol{\upsilon}_+^{\Sigma} - \boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega}$, F_0 — потенциал скорости $\boldsymbol{\upsilon}_{2+} - \boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega}$ в G_+:

$$\boldsymbol{\upsilon}_{2+} - \boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega} = \mathbf{grad}\, F_0, \quad (x, y, z) \in G_+, \tag{2.3.38}$$

который в силу (2.3.36), (2.3.37) существует в области G_+.

Учитывая (2.3.29), (2.3.36)–(2.3.38) и обозначив потенциал скорости перемещения частиц жидкости относительно системы координат $0xyz$, связанной с телом, в области G_+ через

$$\Phi = \varphi_+^{\nu} + F_0 - \Phi^W + \Phi^V, \tag{2.3.39}$$

из соотношения (2.3.35) получим:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_+ = 0 \quad \text{при} \quad (x, y, z) \in G_+. \tag{2.3.40}$$

В соответствии с теоремой Остроградского–Гаусса (1.2.1):

$$\oint\!\!\oint_{S_+} \boldsymbol{\upsilon}_+ \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_{G_+} \mathrm{div} \boldsymbol{\upsilon}_+ dG, \tag{2.3.41}$$

где

$$\boldsymbol{\upsilon}_+ = \mathbf{grad}\, \Phi \tag{2.3.42}$$

— относительная скорость жидкости в области G_+, потенциал Φ (2.3.39) в G_+ с учетом (2.3.40) удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi = 0. \tag{2.3.43}$$

Таким образом, проблема отыскания решения задачи (2.3.7) на S_- свелась к внутренней задаче Неймана для уравнения Лапласа (2.3.43) с граничным условием (2.3.40) на поверхности S_+. Тогда, по теореме единственности для внутренней задачи Неймана [137] в каждый фиксированный момент времени

$$\Phi \equiv c(t), \quad (x, y, z) \in G_+, \tag{2.3.44}$$

где $c(t)$ — функция, являющаяся константой, в G_+, зависящей только от времени, и относительная скорость жидкости $\boldsymbol{\upsilon}_+$ (2.3.42) в области G_+ отсутствует:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\upsilon}_+ \equiv 0, (x, y, z) \in G_+. \tag{2.3.45}$$

Докажем обратное утверждение, что требование (2.3.45) $\boldsymbol{\upsilon}_+ \equiv 0$ в области G_+ тождественно задаче (2.3.7) с граничным условием на поверхности S_-. Пусть $\boldsymbol{\upsilon}_+ \equiv 0$, тогда из определения потенциала получим условие (2.3.44): $\Phi \equiv c(t)$ в G_+ и, следовательно, будет выполнено условие (2.3.40) на G_+.

Тогда вследствие непрерывности производных, входящих в (2.3.40), будет выполнено условие непротекания поверхности S_- (2.3.35) или (2.3.7) на S_-, что и требовалось доказать.

Из условия (2.3.45) и непрерывности скоростей $\mathbf{W}$, $\boldsymbol{\upsilon}_0^\omega$, $\mathbf{V}$, $\boldsymbol{\upsilon}^\Omega$, выраженных соответственно соотношениями (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4), (2.3.11), с учетом поведения на границе касательной к поверхности тела S производной от потенциала двойного слоя и касательной к поверхности скорости от вихревого слоя следует, что относительная скорость на внешней поверхности тела G_- представляется непосредственно через вектор поверхностной плотности вихрей (2.3.32):

$$\boldsymbol{\upsilon}_{S_-} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\gamma}. \tag{2.3.46}$$

Действительно, из условия (2.3.45) следует, что вектор касательной к поверхности тела скорости $\boldsymbol{\upsilon}_{S_-}$ на внешней стороне S_- тела путем тождественных преобразований может быть представлен как:

$$\boldsymbol{\upsilon}_{S_-} = \boldsymbol{\upsilon}_{S_-} - \boldsymbol{\upsilon}_{S_+}, \quad \text{на} \quad S_-, \tag{2.3.47}$$

где $\boldsymbol{\upsilon}_{S_+}$ — вектор касательной скорости с внутренней стороны поверхности S_+, равный нулю. Скорости $\mathbf{W}$, $\boldsymbol{\upsilon}_0^\omega$, $\mathbf{V}$, $\boldsymbol{\upsilon}^\Omega$, а следовательно и их касательные компоненты к S, непрерывны при переходе через поверхность S. Касательная компонента скорости $\boldsymbol{\upsilon}^\nu$ (2.3.30) от поверхностного распределения двойного слоя при переходе через S в соответствии со свойствами скорости от потенциала двойного слоя (1.1.3) § 1.1 претерпевает разрыв $\boldsymbol{\gamma}^\nu$, а касательная к S компонента вектора скорости в (2.3.25), обусловленной поверхностным распределением завихренности $\boldsymbol{\gamma}_2^\omega$, претерпевает разрыв $\boldsymbol{\gamma}_2^\omega$. Тогда из (2.3.47) следует, что

$$\boldsymbol{\upsilon}_{S_-} = \mathbf{n} \times \left(\boldsymbol{\gamma}^\nu + \boldsymbol{\gamma}_2^\omega\right), \quad \text{на} \quad G_-, \tag{2.3.48}$$

а это с учетом (2.3.32) приводит к (2.3.46).

Те же результаты могут быть получены и в случае представления потенциала возмущенных скоростей в виде (2.3.28) для гладкой поверхности S, когда $i = 1$. Тогда при переходе во внутреннюю область G_+ можно не вводить суммарную скорость (2.3.33), а воспользоваться тем обстоятельством, что ротор (2.3.26) скорости $\boldsymbol{\upsilon}_{1_+}$, который выражается формулой (2.3.17, a), заведомо существует в G_+. В этом случае относительная скорость на внешней поверхности S_- тела также будет выражаться в виде (2.3.46), но в поверхностный вектор завихренности (2.3.32) будет вместо вектора $\boldsymbol{\gamma}_2^\omega$ входить вектор $\boldsymbol{\gamma}_1^\omega$ (2.3.16). Таким образом, произойдет некоторое перераспределение вихревых особенностей.

Покажем, что отмеченные в § 1.2 свойства (1.2.51, a), (1.2.51, $б$) скорости $\boldsymbol{\upsilon}_1$ и ее потенциала φ_{1_-} на внешней поверхности тела, принципиально не повлияют на выражение относительной скорости (2.3.46) или (2.3.48) на внешней поверхности тела.

Действительно, проведя те же рассуждения, как и выше при получении формулы (2.3.48), но не выделяя из скорости $\boldsymbol{\upsilon}_1$ в (2.3.17, a) скорость $\boldsymbol{\upsilon}^\Omega$, обусловленную объемными вихрями, из (2.3.47) получим

$$\boldsymbol{\upsilon}_{S_-} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\gamma}^{\nu} + (\boldsymbol{\upsilon}_{1S_-} - \boldsymbol{\upsilon}_{1S_+}). \tag{2.3.49}$$

В соответствии с $(1.2.51, a)$ здесь $\boldsymbol{\upsilon}_{1S_-} = 0$. Умножим векторно (2.3.16) на единичную нормаль, тогда в силу свойства двойного векторного произведения получим:

$$\mathbf{n} \times \boldsymbol{\gamma}_1^{\omega} = \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\upsilon}_{1S_+}) = \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\upsilon}_{1S_+}) - \boldsymbol{\upsilon}_{1S_+}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = -\boldsymbol{\upsilon}_{1S_+}.$$

Подставляя это выражение в (2.3.49), будем иметь

$$\boldsymbol{\upsilon}_{S_-} = \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\gamma}^{\nu} + \boldsymbol{\gamma}_1^{\omega}), \tag{2.3.50}$$

что соответствует (2.3.46) или (2.3.48).

Таким образом, как и для известной задачи [107] стационарного обтекания крыла, где поверхности следа и тела моделировались поверхностными вихрями, и как и в двумерной задаче о произвольно движущемся профиле, рассмотренной выше в § 2.1, специальный выбор потенциала возмущенных скоростей в виде (2.3.28) для гладкого тела, и в виде (2.3.29) для тела с гладкой поверхностью или угловыми кромками, обеспечивает отсутствие относительного движения во внутренней области тела при решении задачи (2.3.7) об отрывном нестационарном пространственном обтекании произвольно движущегося тела. При этом скорость на внешней поверхности тела выражается непосредственно через поверхностную плотность вихрей.

Итак, граничное условие (2.3.35) может быть заменено условием (2.3.44) для Φ (2.3.39), которое выполняется вплоть до S_+ , и на S_+ является задачей Дирихле. Обозначим через

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

расстояние между точкой $P_0(x,y,z) \in S$ и точками $P(\xi,\eta,\zeta) \in S$ или $P(\xi,\eta,\zeta) \in S_3$, и представим потенциал двойного слоя φ^{ν} в G_+ или G_- в каждый фиксированный момент времени в виде [137]:

$$\varphi^{\nu}(P_0) = \iint\limits_{S \bigcup S_3} \nu(P,t) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} dS, \quad P_0 \in G_+ \quad \text{или} \quad G_-. \tag{2.3.51}$$

Тогда, при стремлении к внутренней границе G_+ потенциал двойного слоя (2.3.51) может быть представлен в виде [137]:

$$\varphi^{\nu}_+(P_0) = \varphi^{\nu}(P_0) + 2\pi\nu(P_0).$$

Условие (2.3.44) с учетом (2.3.39) с точностью до несущественной функции времени приводится к интегральному уравнению, определяющему плотность потенциала двойного слоя ν в точке $P_0 \in S$ в любой момент времени t:

$$\nu(P_0,t) - \iint\limits_{S} \nu(P,t)\, K(P_0,P)\, dS_P = \psi(P_0,t), \tag{2.3.52}$$

где

$$\psi(P_0,t) = \frac{\Phi^W}{2\pi} - \frac{\Phi^V}{2\pi} - \frac{F_0}{2\pi} + \iint\limits_{S_3} \nu(P,t)\, K(P_0,P_3)\, dS_{P_3}, \tag{2.3.53}$$

где $K(P_0, P) = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{r}$ — ядро этого интегрального уравнения.

Итак, выбор формы представления потенциала в виде (2.3.28), или для более общего случая негладкой поверхности в виде (2.3.29), позволил свести задачу (2.3.35), т. е. условие непротекания поверхности S_- в (2.3.7), к решению интегрального уравнения (2.3.52).

2.3.4. Решение полученного уравнения для плотности потенциала двойного слоя и его свойства. Таким образом, выполнение условия непротекания поверхности тела в (2.3.7) для задачи о произвольном движении трехмерного тела в идеальной несжимаемой жидкости свелось к решению интегрального уравнения (2.3.52) при условиях, наложенных на искомую функцию и ее производные (см. § 1.1 соотношения (1.1.15), (1.1.20), (1.1.34), (1.1.36), (1.1.37), (1.1.38), (1.1.42), (1.1.43) и (1.1.46) или (1.1.47)). В правой части (2.3.53) этого уравнения в каждый фиксированный момент времени t потенциалы Φ^W и Φ^V, определяемые соотношениями (2.3.2) и (2.3.4), являются известными функциями. Потенциал F_0, определяемый соотношением (2.3.38), также может быть вычислен в каждый момент времени, например, как интеграл по любому пути [79] в G_+ от вектора скорости $\mathfrak{v}_{2+} - \mathfrak{v}_0^\omega$ или от $\mathfrak{v}_{1+} - \mathfrak{v}_0^\omega$ для случая гладкой поверхности S. В интеграле, стоящем в правой части (2.3.53) уравнения (2.3.52), считаем, что вплоть до предыдущего момента времени распределение плотности потенциала двойного слоя по поверхности следа S_3 и сама геометрия следа S_3 известны, исходя из решения уравнения движения поверхности S_3 как свободной вихревой поверхности тангенциального разрыва скоростей. К этому уравнению приводит необходимость выполнения граничных условий на поверхности S_3 в исходной задаче (2.3.7), о чем подробнее будет сказано в разд. 2.3.6 данного параграфа. Таким образом, в правой части (2.3.53) уравнения (2.3.52) в каждый рассматриваемый момент времени t содержится неизвестная функция. В точках поверхности S_3, стремящихся к линии схода τ, предельные значения плотности потенциала двойного слоя $\nu_3(t)$ неизвестны и связаны с плотностью потенциала двойного слоя на поверхностях S_1 и S_2 соотношением (1.1.15) § 1.1. Как будет показано ниже, это соотношение уравнением (2.3.52) выполняется независимо от того, касается поверхность следа поверхности тела или нет. Поэтому для нахождения этой функции необходимо привлекать условия касательности поверхностей следа и тела и могут привлекаться другие условия, накладываемые на производные от этой функции, изложенные в § 1.1.

Свойства полученного уравнения для плотности потенциала. Докажем, что соотношение (1.1.15) § 1.1 удовлетворяется уравнением (2.3.52), в силу его свойств. В § 1.3 доказано, что разрыв в решении уравнения Фредгольма II-го рода для плотности потенциала двойного слоя, аналогичном (2.3.52), у которого в правой части вместо ψ стоит известная функция $C(P_0)$, в точках $P_1 \in S_1$ и $P_2 \in S_2$ при $P_1 \to A$, $P_2 \to A$, $A \in \tau$ (где τ — некоторая линия на поверхности S) равен (см. формулу (1.3.9) § 1.3):

$$\nu(P_1) - \nu(P_2) = \frac{C(P_1) - C(P_2)}{2\pi\beta},$$

где $\pi\beta \neq 0$ — угол между l_1 и l_2. Совершенно аналогично § 1.3 получим, понимая τ как линию схода, что разрыв в решении уравнения (2.3.52) равен

$$\nu(P_1) - \nu(P_2) = \nu_3 \frac{\alpha(P_1) - \alpha(P_2)}{\beta}.$$

Здесь $2\pi\alpha(P_1)$ и $2\pi\alpha(P_2)$ — предельные значения углов, под которыми видна площадка δ_3, вырезаемая сферой радиуса R в поверхности S_3, из точек $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$, по аналогии с § 1.3. Но с учетом направления нормали $\mathbf{n}_3$ и знака телесного угла $\alpha(P_1) - \alpha(P_2) = \beta$, откуда и следует соотношение (1.1.15) § 1.1, что и требовалось доказать.

Таким образом, соотношение (1.1.15) не накладывает ограничений на угол, под которым вихревая пелена сходит с поверхности тела. Выражение

$$\nu(P_1) - \nu(P_2) = \nu_3$$

означает, что разрыв потенциала в следе передается на поверхность тела.

Докажем теперь, что условие (1.1.20) для проекций векторов завихренности, ортогональных линии схода τ, уравнением (2.3.52) также удовлетворяется независимо от того, касается свободный вихревой след S_3 поверхности тела или нет. Действительно, из (2.3.46), которое является по сути следствием уравнения (2.3.52), для компонент скорости вдоль линии схода τ в точках $P_1 \in S_{1\_}$ и $P_2 \in S_{2\_}$ имеют место следующие выражения:

$$\upsilon_\tau(P_1) = \gamma_l(P_1), \quad \upsilon_\tau(P_2) = \gamma_l(P_2).$$

При $P_1 \to A \in \tau$ и $P_2 \to A \in \tau$ из этих соотношений с учетом того, что компонента завихренности в следе, ортогональная τ, выражается в силу свойств вихревого слоя как

$$\gamma_{l_3} = \upsilon_\tau(P_1) - \upsilon_\tau(P_2),$$

получаем

$$\gamma_l(P_1) - \gamma_l(P_2) = \gamma_{l_3},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь для случая сопряжения следа с гладкой поверхностью (рис. 1.7) условия (1.1.47) § 1.1 для проекций векторов завихрености на линию схода потока τ. Докажем, что условия для γ_{τ_i} также будут выполнены в силу свойств уравнения (2.3.52), если выполнены условия касания следа, тела и условия сноса свободного вихревого слоя с поверхности тела (1.1.42), (1.1.43) § 1.1. Пусть, например, $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1$. Тогда вследствие (2.3.46) для компонент скорости вдоль линий $l_1 \subset S_1$, $l_2 \subset S_2$ в точках $P_1 \in l_1$ и $P_2 \in l_2$ имеют место выражения

$$\upsilon_l(P_1) = \gamma_\tau(P_1), \quad \upsilon_l(P_2) = \gamma_\tau(P_2).$$

При $P_1 \to A \in \tau$ и $P_2 \to A \in \tau$ из этих соотношений с учетом свойств вихревого слоя получим

$$\gamma_\tau(P_1) - \gamma_\tau(P_2) = \gamma_{\tau_3},$$

что и доказывает сформулированное выше утверждение. Совершенно аналогично может быть рассмотрен случай $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_2$ соотношения (1.1.47).

Рассмотрим теперь случай угловой задней кромки (рис. 1.6, *в*, *г*). Пусть след S_3 сопрягается по касательной, например, с поверхностью S_1 ($\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1$), и выполнены условия (1.1.42), (1.1.43) сноса свободного вихревого слоя с поверхности тела. Покажем, что в этом случае условия для γ_{τ_i} в верхней строке соотношений (1.1.46) будут выполнены, и разрыв тангенциальных скоростей в следе «передается» на тело. Для доказательства этого можно продифференцировать по частям уравнение (2.3.52) по двум ортогональным направлениям τ и l. Полученные таким образом соотношения эквивалентны уравнениям работы [107]. Если в этих уравнениях рассмотреть пределы для значений γ_{τ_i} при $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$, которые имеют место логарифмические особенности (1.1.5), то можно получить следующие два уравнения относительно γ_{τ_i}:

$$[\gamma_\tau(P_1) - \gamma_{\tau_3}] + \gamma_\tau(P_2)\sin\beta\ln r_1 = O_1(c_1),$$
$$\gamma_\tau(P_2) + [\gamma_\tau(P_1) - \gamma_{\tau_3}]\sin\beta\ln r_2 = O_2(c_2),$$

где $r_1 = |P_1 - A|$, $r_2 = |P_2 - A|$ — расстояния между точками P_1, A и P_2, A соответственно; β — угол между линиями $l_1 \subset S_1$, $l_2 \subset S_2$ (см. рис. 1.6); $O_1(c_1)$ и $O_2(c_2)$ — некоторые конечные величины. Разрешив эту систему относительно $\gamma_\tau(P_1) - \gamma_{\tau_3}$ и $\gamma_\tau(P_2)$ в пределе при $P_1 \to A$ и $P_2 \to A$ получим

$$\gamma_{\tau_1} - \gamma_{\tau_3} = 0, \quad \gamma_{\tau_2} = 0,$$

что и требовалось доказать. Случай $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_2$, см. рис. 1.6,*г* и нижние соотношения в (1.1.46), может быть рассмотрен совершенно аналогично.

Таким образом, установлено, что разрыв потенциала в вихревом следе в силу свойств самого полученного уравнения «передается» на поверхность тела. Кроме того, если выполнено условие касательности поверхности следа к поверхности тела и условия (1.1.42), (1.1.43) сноса свободного вихревого следа с тела, то разрывы тангенциальных скоростей в следе также «передаются» на тело.

Решение уравнений для плотности потенциала. Таким образом, поскольку в правой части (2.3.53) уравнения (2.3.52) содержится неизвестная функция ν_3, алгоритм решения уравнения (2.3.52) может быть следующим. Это уравнение сводится к системе алгебраических уравнений относительно плотности потенциала двойного слоя, при этом на каждом шаге по времени выполняется, в соответствии с (1.1.46) или (1.1.47) касание поверхности тела и следа в зависимости от знака γ_{τ_3} в (1.1.42), а также условия (1.1.43), (1.1.34), (1.1.36), (1.1.37). Но для более точного вычисления в пределе условий, накладываемых на плотность диполей и ее производные, могут привлекаться также все другие соотношения для ν_i и γ_{li} — (1.1.15), (1.1.20) и для γ_{τ_i} в (1.1.46) или (1.1.47) § 1.1.

Однако поскольку порядок системы обычно достаточно велик, целесообразно свести отыскание решения уравнения (2.3.52) к нахождению решений интегральных уравнений Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя. Для них доказана теорема единственности [76], а их решения могут быть представлены в аналитическом виде или отысканы итеративными методами. Для этого интеграл, входящий в выражение (2.3.53), представим в виде сумм:

$$\iint\limits_{\Delta S_3} \nu(P,t)\, K(P_0, P_3)\, dS_{p_3} + \iint\limits_{S_3/\Delta S_3} \nu(P,t)\, K(P_0, P_3)\, dS_{p_3} =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \nu_3^{(i)}(t)\, \psi^{(i)}(P_0,t) + \iint\limits_{S_3/\Delta S_3} \nu(P,t)\, K(P_0, P_3)\, dS_{p_3}, \quad (2.3.54)$$

где ΔS_3 — часть следа шириной dl (см. рис. 2.22), примыкающая к линии схода τ; I — число участков поверхности ΔS_3 вдоль τ, по которым плотность

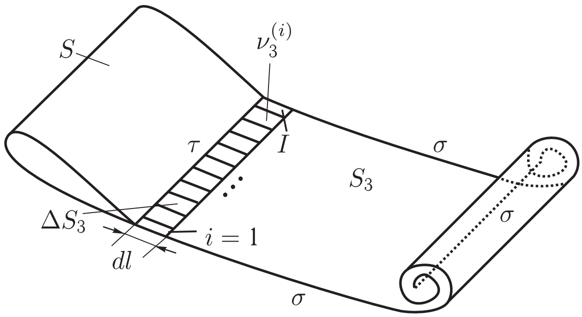


Рис. 2.22. Схематизация свободной вихревой пелены S_3 вблизи линии схода потока τ

$\nu_3^{(i)}$ считается постоянной; $\nu_3^{(i)}$ — среднее значение плотности диполей на участке i; $\psi^{(i)}(P_0,t) = \Omega^{(i)}(P_0,t)/(2\pi)$; $\Omega^{(i)}(P_0,t)$ — телесный угол, под которым видна площадка i из точки $P_0 \in S$. С учетом соотношения (2.3.54) выражение (2.3.53) может быть записано в следующем виде:

$$\psi(P_0,t) = \psi^{(0)}(P_0,t) + \sum_{i=1}^{I} \nu_3^{(i)}(t)\, \psi^{(i)}(P_0,t), \quad (2.3.55)$$

где значения $\psi^{(0)}(P_0,t)$ и $\psi^{(i)}(P_0,t)$ ясны из выражений (2.3.53) и (2.3.54). В итоге решение уравнения (2.3.52) может быть представлено в виде:

$$\nu(P_0,t) = \nu^{(0)}(P_0,t) + \sum_{i=1}^{I} \nu_3^{(i)}(t)\, \nu^{(i)}(P_0,t)\, d\tau, \quad (2.3.56)$$

где $\nu^{(i)}(P_0,t)$ — в силу линейности уравнения (2.3.52) являются решениями этого уравнения с правыми частями $\psi^{(i)}(P_0,t)$, $(i = 0, \ldots I)$, (2.3.55).

Решения $\nu^{(i)}(P_0,t)$ в соответствии с § 1.3 могут быть представлены в аналитическом виде посредством резольвенты:

$$\nu^{(i)}(P_0,t) = \psi^{(i)}(P_0,t) +$$

$$+ \iint\limits_{S} R(P, P_0, 1)\, \psi^{(i)}(P,t)\, dS_P, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots I), \quad (2.3.57)$$

где резольвента $R(P, P_0, 1)$ определяется формулами (1.3.21), (1.3.22) § 1.3.

Когда форма следа определена, т. е. определены функции $\psi^{(i)}$, представление решений $\nu^{(i)}$ через резольвенту позволяет записывать сразу решение в виде (2.3.57). Это особенно удобно и значительно экономит расчетное время на компьютере, когда требуется рассчитывать нестационарное обтекание тела достаточно далеко по безразмерному времени, а также в случае, когда необходимо проводить несколько расчетов обтекания одного и того же тела, совершающего нестационарное движение по различным законам, или обтекаемого под различными углами атаки и скольжения.

Иногда целесообразнее искать решение этих уравнений методом последовательных приближений, причем при таком построении решений могут быть использованы все приемы аналитического продолжения, упомянутые в § 1.3. Так применение приема аналитического продолжения посредством домножения позволяет записать решения $\nu^{(i)}$ в соответствии с формулами (1.3.23), (1.3.24) § 1.3 в виде:

$$\nu^{(i)}(P_0,t) = \frac{1}{2}\nu_0^{(i)}(P_0,t) + \\ + \frac{1}{2}\left[\nu_0^{(i)}(P_0,t) + \nu_1^{(i)}(P_0,t)\right] + \ldots \quad (i = 0, 1, 2, \ldots I), \quad (2.3.58)$$

где

$$\nu_0^{(i)}(P_0,t) = \psi^{(i)}(P_0,t), \quad \nu_{n+1}^{(i)}(P_0,t) = \iint\limits_S K(P_0,P)\,\nu_n^{(i)}(P,t)\,dS.$$

Таким образом, в случае отыскания решения уравнения (2.3.52) через резольвенту или итеративным методом, его решение может быть представлено выражением (2.3.56). После того как найдены решения $\nu^{(i)}$, входящие в выражение (2.3.56), плотность диполей в следе ν_3 может быть определена с привлечением соотношений § 1.1: (1.1.42), (1.1.43), (1.1.46) или (1.1.47), (1.1.15), (1.1.34), (1.1.36), (1.1.37), (1.1.38).

Примеры численной реализации построения решения уравнения (2.3.52) и нахождения неизвестной плотности ν_3 потенциала двойного слоя для тел с фиксированной линией следа свободной вихревой поверхности S_3 приведены в § 2.4

2.3.5. Давление жидкости на поверхности тела. Сила и момент, действующие на тело. Давление жидкости на внешней поверхности S_- тела определяется интегралом Коши–Лагранжа, записанным в подвижной системе координат, связанной с телом [125]:

$$\frac{p_-}{\rho} = F(t) + \frac{v_0^2}{2} - \frac{v_{S_-}^2}{2} - \frac{\partial\varphi_-}{\partial t} - \frac{\partial\Phi^V}{\partial t}, \quad (2.3.59)$$

где ρ — плотность жидкости, $F(t)$ — произвольная функция времени; v_0 — модуль вектора переносной скорости (2.3.1); v_{S_-} — модуль вектора скорости на внешней поверхности S_- тела, определяемой в соответствии с (2.3.46), (2.3.48), (2.3.32); Φ^V — потенциал невозмущенного телом движения (2.3.4) жидкости; φ_- — потенциал возмущенной телом скорости (2.3.5) на внешней поверхности S_- тела, который представляется формулой (2.3.29). Запишем потенциал (2.3.29) в виде:

$$\varphi_- = \varphi_-^\nu + \varphi_{2-} = \varphi_-^\nu + \int\limits_{l_0'}^{l'} \boldsymbol{\upsilon}_{2-} \cdot dl \quad \text{в} \quad G_-, \tag{2.3.60}$$

где $l_0' \in G_-$ — фиксированная точка, $l' \in G_-$ — переменная точка, причем путь интегрирования $l_0'l' \subset G_-$. Выразим потенциал φ_-^ν в (2.3.60) через потенциал φ_+^ν на внутренней поверхности S_+ тела, воспользовавшись его свойствами при стремлении к границе:

$$\begin{aligned} \varphi_+^\nu &= \varphi_0^\nu + 2\pi\nu \quad \text{на} \quad S_+, \\ \varphi_-^\nu &= \varphi_0^\nu - 2\pi\nu \quad \text{на} \quad S_-, \end{aligned}$$

откуда следует:

$$\varphi_-^\nu = \varphi_+^\nu - 4\pi\nu. \tag{2.3.61}$$

Подставляя φ_+^ν из (2.3.39) с учетом (2.3.44), (2.3.38) в (2.3.61), получим:

$$\begin{aligned} \varphi_-^\nu = -F_0 + \Phi^W - \Phi^V - 4\pi\nu + c\,(t) = \\ = -\int\limits_{l_0''}^{l''} (\boldsymbol{\upsilon}_{2+} - \boldsymbol{\upsilon}_0^\omega) \cdot d\boldsymbol{l} + \Phi^W - \Phi^V - 4\pi\nu + c\,(t)\,, \end{aligned} \tag{2.3.62}$$

где $l_0'' \in G_+$ — фиксированная точка, $l'' \in S_+$ — переменная точка, причем путь интегрирования $l_0''l'' \subset G_+$. Поскольку пути интегрирования по области G_- в (2.3.60) и по области G_+ в (2.3.62) могут быть выбраны произвольными, то согласовав их и считая, что $l_0'l' \subset S_-$, $l_0''l'' \subset S_+$, а $l_0 l \subset S$, подставив (2.3.62) в (2.3.60) с точностью до константы, зависящей только от времени, получим:

$$\varphi_- = \Phi^W - \Phi^V - 4\pi\nu + \int\limits_{l_0}^{l} (-\boldsymbol{\upsilon}_{2+} + \boldsymbol{\upsilon}_{2-}) \cdot d\boldsymbol{l} + \int\limits_{l_0}^{l} \boldsymbol{\upsilon}_0^\omega \cdot d\boldsymbol{l} \tag{2.3.63}$$

Первый интеграл в (2.3.63) в соответствии со свойствами скорости $\boldsymbol{\upsilon}_2$ (2.3.25) может быть представлен как

$$\int\limits_{l_0}^{l} (-\boldsymbol{\upsilon}_{2+} + \boldsymbol{\upsilon}_{2-}) \cdot d\boldsymbol{l} = -\int\limits_{l_0}^{l} (\boldsymbol{\gamma}_2^\omega \times \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{l}.$$

Второй интеграл в (2.3.63) с учетом (2.3.22), (2.3.23) выражается в виде

$$\int_{l_0}^{l} \boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{l_0}^{l} \boldsymbol{\upsilon}_s^{\omega} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{l_0}^{l} (\boldsymbol{\gamma}_2^{\omega} \times \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{l}.$$

Таким образом, интегралы в (2.3.63) взаимно уничтожаются, и с точностью до константы потенциал возмущенной скорости на поверхности S_- представляется в виде

$$\varphi_- = \Phi^W - \Phi^V - 4\pi\nu. \tag{2.3.64}$$

Итак, подставляя (2.3.64) в (2.3.59), учитывая, что $\upsilon_{S_-}^2 = \gamma^2$, где γ — модуль вектора завихренности (2.3.32), получим

$$\frac{p_-}{\rho} = F(t) + \frac{\upsilon_0^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\partial \Phi^W}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial \nu}{\partial t}. \tag{2.3.65}$$

Таким образом, давление жидкости на поверхности тела, как и в плоском случае (см. § 2.1), выражается непосредственно через гидродинамические особенности.

Отметим следующее. Если в случае гладкой поверхности S тела искать потенциал возмущенных скоростей в виде (2.3.28) при $i = 1$, то, как указывалось, само значение потенциала φ_{1_-} от скорости $\boldsymbol{\upsilon}_1$ (2.3.17, a) в соответствии с (2.3.19) является константой на S_-, зависящей только от времени, которую можно не учитывать при определении давления. Тогда на G_- вместо (2.3.60) и по аналогии с (2.3.62) получим с точностью до константы зависящей только от времени

$$\varphi_- = \varphi_-^{\nu} = -\overline{F}_0 + \Phi^W - \Phi^V - 4\pi\nu =$$
$$= -\int_{l_0''}^{l''} (\boldsymbol{\upsilon}_{1+} - \boldsymbol{\upsilon}_0^{\omega}) \cdot d\boldsymbol{l} + \Phi^W - \Phi^V - 4\pi\nu. \tag{2.3.66}$$

Подставляя (2.3.50), (2.3.66) в (2.3.59) будем иметь следующее выражение для давления на поверхности S_-

$$\frac{p_-}{\rho} = F(t) + \frac{\upsilon_0^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\partial \Phi^W}{\partial t} + \frac{\partial \overline{F}_0}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial \nu}{\partial t}. \tag{2.3.67}$$

Значение потенциала $\overline{F}_0$ в (2.3.67) ясно из выражения (2.3.66), а путь интегрирования, как и в (2.3.62), лежит в области G_+ или на S_+.

Выражение для давления (2.3.67) отличается от выражения (2.3.65) наличием члена $\partial \overline{F}_0 / \partial t$. Это отличие объясняется перераспределением особенностей между двойным слоем и вводимыми вихревыми слоями при представлении их в виде (2.3.29) и в виде (2.3.28) при $i = 1$. Действительно, в соответствии с (2.3.48), (2.3.50) в рассматриваемый момент времени в заданной точке сама суммарная величина скорости или поверхностной завихрености одинакова при $i = 1$ и при $i = 2$. Величины же каждой из этих компонент завихренности и соответствующие им плотности потенциала двойного слоя различны.

Необходимо отметить также следующее: в выражении (2.3.65) и в (2.3.67) отсутствует член $\partial\Phi^V/\partial t$, входящий в исходное соотношение (2.3.59) и отвечающий за изменение потенциала невозмущенного телом движения (2.3.4) по времени, поскольку тело непосредственно не затрачивает энергии на его изменение по времени. Это обстоятельство указывает на принципиальное различие прямого и обращенного движения в нестационарной постановке.

Выражения для проекций главных векторов силы и момента на оси связанной с телом системы координат имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&X=\int\limits_S p_-\cos(n,x)\,dS;\ Y=\int\limits_S p_-\cos(n,y)\,dS;\ Z=\int\limits_S p_-\cos(n,z)\,dS;\\
&M_x=\int\limits_S p_-\left[\cos(n,y)\,z-\cos(n,z)\,y\right]dS;\\
&M_y=\int\limits_S p_-\left[\cos(n,x)\,z-\cos(n,z)\,x\right]dS;\\
&M_z=\int\limits_S p_-\left[\cos(n,y)\,x-\cos(n,x)\,y\right]dS,
\end{aligned}\right\} \tag{2.3.68}$$

где $\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$, $\cos(n,z)$ — косинусы углов между нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности S тела и осями координат. Коэффициент давления, коэффициенты проекций главных векторов силы и момента вводятся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{p}=\frac{p_--p_\infty}{q};\quad c_x=\frac{X}{qb^2};\quad c_y=\frac{Y}{qb^2};\quad c_z=\frac{Z}{qb^2};\\
&m_x=\frac{M_x}{qb^3};\quad m_y=\frac{M_y}{qb^3};\quad m_z=\frac{M_z}{qb^3},
\end{aligned}\right\} \tag{2.3.69}$$

здесь p_∞ — давление в бесконечно удаленной от тела точке, b — некоторый характерный размер, V_0 — некоторая характерная скорость движения тела, а $q=\rho V_0^2/2$ — характерный скоростной напор.

2.3.6. Уравнения движения свободного вихревого следа. При решении нестационарной задачи (2.3.7) необходимо выполнять требование непрерывности давления и нормальных составляющих скоростей при переходе через поверхность свободного следа — поверхность тангенциального разрыва. Эти требования приводят к уравнению движения свободного вихревого следа по времени, записанному в переменных Лагранжа для точки $P_3(x,y,z)\in S_3$, движущейся как жидкая частица, для которой циркуляция в (1.1.30) или (1.1.32) § 1.1 по контуру (см. рис. 1.1) $\Gamma_3=\mathrm{const}$:

$$\mathbf{R}(t)-\int\limits_{t_0}^{t}\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{R},t)\,dt=\mathbf{R}(t_0). \tag{2.3.70}$$

Это векторное нелинейное уравнение эквивалентно следующей системе нелинейных интегральных уравнений:

$$x(t) - \int_{t_0}^{t} \upsilon_x dt = x_0, \quad y(t) - \int_{t_0}^{t} \upsilon_y dt = y_0, \quad z(t) - \int_{t_0}^{t} \upsilon_z dt = z_0, \tag{2.3.71}$$

где $\upsilon_x = dx/dt$, $\upsilon_y = dy/dt$, $\upsilon_z = dz/dt$ — компоненты вектора относительной скорости (в системе координат $0xyz$, рис. 1.1) жидкости в точке P_3; $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — компоненты радиус-вектора $\mathbf{R}$, направленного из точки начала системы координат в точку P_3; x_0, y_0, z_0 — координаты положения точки P_3 в момент времени t_0. При этом граничные условия на S_3, входящие в (2.3.7), будут выполнены. Это следует из свойства непрерывности нормальных компонентов скоростей от вихревого слоя, а также из соотношения (1.1.30) или (1.1.32) § 1.1, которое является следствием непрерывности давления при переходе через S_3, и в силу инвариантности производной $d\Gamma/dt$ относительно системы координат, может быть, записано в виде

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = 0. \tag{2.3.72}$$

Подстановкой в (2.3.72) значения $\Gamma(x_0, y_0, z_0)$, где x_0, y_0, z_0 определяются (2.3.71), можно убедиться, что эта функция является решением уравнения (2.3.72), и, следовательно, требование непрерывности давления будет выполнено, если выполнены соотношения (2.3.71). Уравнение (2.3.70) дополняется начальными данными, указанными в разд. 2.3.1.

Вектор относительной скорости частиц жидкости в точках $P_3(x, y, z) \in S_3$ в силу соотношений (2.3.1)–(2.3.6) выражается как

$$\boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{U} - \boldsymbol{\upsilon}_0 = \mathbf{V} + \mathbf{u} - \boldsymbol{\upsilon}_0, \tag{2.3.73}$$

где $\mathbf{U}$ — вектор (2.3.6) абсолютной скорости, $\boldsymbol{\upsilon}_0$ — вектор (2.3.1) переносного движения тела, $\mathbf{V}$ — вектор (2.3.4) невозмущенной телом скорости движения жидкости, $\mathbf{u}$ — вектор (2.3.5) возмущенной телом скорости движения жидкости. Вектор $\mathbf{u}$, в силу (2.3.28), (2.3.29), (2.3.17, a), (2.3.25), может быть представлен в виде

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\upsilon}^{\Omega} + \boldsymbol{\upsilon}^{\gamma+\nu} + \boldsymbol{\upsilon}^{\nu}_{S_3}, \tag{2.3.74}$$

где $\boldsymbol{\upsilon}^{\Omega}$ — вектор скорости, обусловленной вихрями, заполняющими область G_+; $\boldsymbol{\upsilon}^{\gamma+\nu} = \boldsymbol{\upsilon}^{\gamma} + \boldsymbol{\upsilon}^{\nu}$ — вектор скорости, обусловленной распределением по поверхности S тела вихрей (2.3.16) или (2.3.22) $\boldsymbol{\gamma}^{\omega}_i$ ($i = 1$ или 2) и диполей с плотностью ν; $\boldsymbol{\upsilon}^{\nu}_{S_3}$ — вектор скорости, обусловленной распределением диполей по поверхности следа S_3.

Компоненты вектора скорости $\boldsymbol{\upsilon}^{\Omega}$, входящие в (2.3.17, a), (2.3.25), определяются в соответствии с (2.3.11)–(2.3.14) интегралами по объему, но могут быть сведены к поверхностным интегралам. Запишем проекции вектора (2.3.11):

$$\upsilon_x^\Omega = \frac{\partial\varphi_z^\Omega}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_y^\Omega}{\partial z}, \quad \upsilon_y^\Omega = \frac{\partial\varphi_x^\Omega}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_z^\Omega}{\partial x}, \quad \upsilon_z^\Omega = \frac{\partial\varphi_y^\Omega}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_x^\Omega}{\partial y}, \tag{2.3.75}$$

где φ_x^Ω, φ_y^Ω, φ_z^Ω — проекции векторного потенциала (2.3.12) на координатные оси x, y, z. Учитывая, что проекции векторного потенциала определяются через интеграл по объему G_+ (2.3.12), для вычисления производных, входящих в (2.3.75), воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса. Тогда получим:

$$\left.\begin{aligned}
\iiint\limits_{G_+} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} dG_+ &= -\iiint\limits_{G_+} \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{r} dG_+ = \oiint\limits_{S} \frac{\cos(n,\xi)}{r} dS,\\
\iiint\limits_{G_+} \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} dG_+ &= -\iiint\limits_{G_+} \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{1}{r} dG_+ = \oiint\limits_{S} \frac{\cos(n,\eta)}{r} dS,\\
\iiint\limits_{G_+} \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} dG_+ &= -\iiint\limits_{G_+} \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{1}{r} dG_+ = \oiint\limits_{S} \frac{\cos(n,\zeta)}{r} dS.
\end{aligned}\right\} \tag{2.3.76}$$

Подставляя (2.3.76) в соотношения (2.3.75), получим:

$$\left.\begin{aligned}
\upsilon_x^\Omega &= \frac{1}{4\pi}\Omega_z \iint\limits_S \frac{\cos(n,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} dS -\\
&\qquad - \frac{1}{4\pi}\Omega_y \iint\limits_S \frac{\cos(n,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} dS;\\
\upsilon_y^\Omega &= \frac{1}{4\pi}\Omega_x \iint\limits_S \frac{\cos(n,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} dS -\\
&\qquad - \frac{1}{4\pi}\Omega_z \iint\limits_S \frac{\cos(n,\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} dS;\\
\upsilon_z^\Omega &= \frac{1}{4\pi}\Omega_y \iint\limits_S \frac{\cos(n,\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} dS -\\
&\qquad - \frac{1}{4\pi}\Omega_x \iint\limits_S \frac{\cos(n,\eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} dS.
\end{aligned}\right\} \tag{2.3.77}$$

Как отмечалось выше, соотношение (1.1.15) § 1.1 при решении задачи (2.3.7) настоящим методом выполняется, и интеграл по линии схода τ в выражении для скорости, обусловленный распределением особенностей по телу и следу, в соответствии с (1.1.3), (1.1.14) § 1.1 будет равен нулю. Тогда компоненты вектора скорости $\boldsymbol{\upsilon}^{\gamma+\nu}$ выражаются в силу (1.1.3) через известные соотношения [9]:

$$\left.\begin{aligned}
v_x &= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \gamma_\tau \frac{(\eta-y)\cos(l,z)-(\zeta-z)\cos(l,y)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{3/2}}dS+\\
&\qquad+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \gamma_l \frac{(\eta-y)\cos(\tau,z)-(\zeta-z)\cos(\tau,y)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{3/2}}dS,\\
v_y &= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \gamma_\tau \frac{(\zeta-z)\cos(l,x)-(\xi-x)\cos(l,z)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{3/2}}dS+\\
&\qquad+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \gamma_l \frac{(\zeta-z)\cos(\tau,x)-(\xi-x)\cos(\tau,z)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{3/2}}dS,\\
v_z &= \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \gamma_\tau \frac{(\xi-x)\cos(l,y)-(\eta-y)\cos(l,x)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{3/2}}dS+\\
&\qquad+\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \gamma_l \frac{(\xi-x)\cos(\tau,y)-(\eta-y)\cos(\tau,x)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{3/2}}dS,
\end{aligned}\right\}\tag{2.3.78}$$

здесь γ_τ и γ_l — проекции вектора (2.3.32), или того же вектора, но в который вместо $\boldsymbol{\gamma}_2^\omega$ (2.3.22) входит вектор $\boldsymbol{\gamma}_1^\omega$ (2.3.16), на поверхностные координатные линии τ и l.

В силу (1.1.3) вектор $\mathbf{v}_{S_3}^\nu$ можно представить в виде $\mathbf{v}_{S_3}^\nu = \mathbf{v}_\int + \mathbf{v}_{\iint}$, где $\mathbf{v}_{\iint}$ представляет собой интеграл по поверхности следа S_3, а вектор $\mathbf{v}_\int$ представляет собой интеграл по линии, ограничивающей поверхность следа (см. (1.1.3) § 1.1), за исключением линии схода потока, так как выше указывалось, что (1.1.15) выполняется. Так как нормальная к следу компонента вектора скорости $\mathbf{v}_{\iint}$ должна браться в смысле главного значения Коши, то для вычисления этого вектора в точке P_3 введем связанную с точкой P_3 ортогональную систему координат $0'x'y'z'$, в которой ось z' направим по нормали к S_3, а x' направим, например, по τ. Тогда компоненты этого вектора в системе координат $0'x'y'z'$ вычисляются по формулам (2.3.78), в которых x, y, z заменены на x', y', z', а интегрирование производится по поверхности S_3, причем интегралы $v_{z'}$ вычисляются в смысле главного значения Коши. Компоненты вектора $\mathbf{v}_{\iint}$ в системе координат $0xyz$ выразятся как:

$$\left.\begin{aligned}
v_x &= v_{x'}\cos(x,x') + v_{y'}\cos(x,y') + v_{z'}\cos(x,z')\,,\\
v_y &= v_{x'}\cos(y,x') + v_{y'}\cos(y,y') + v_{z'}\cos(y,z')\,,\\
v_z &= v_{x'}\cos(z,x') + v_{y'}\cos(z,y') + v_{z'}\cos(z,z')\,.
\end{aligned}\right\}\tag{2.3.79}$$

Компоненты вектора $\mathbf{v}_f$ выразятся соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
v_x &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma}\Gamma\frac{(\eta-y)\cos(\sigma,z)-(\zeta-z)\cos(\sigma,y)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{3/2}}\,d\sigma,\\
v_y &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma}\Gamma\frac{(\zeta-z)\cos(\sigma,x)-(\xi-x)\cos(\sigma,z)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{3/2}}\,d\sigma,\\
v_z &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\sigma}\Gamma\frac{(\xi-x)\cos(\sigma,y)-(\eta-y)\cos(\sigma,x)}{\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right]^{3/2}}\,d\sigma.
\end{aligned}\right\}\tag{2.3.80}$$

Здесь контур σ, если линия τ схода свободного вихревого следа замкнутая, является также замкнутым и представляет собой, с учетом (1.1.3), «конец» следа (см. рис. 1.1). Если линия схода τ незамкнутая (см. рис. 2.22), контур σ также является разомкнутым и представляет собой границу следа за исключением линии схода потока с поверхности тела.

Таким образом, выражениями (2.3.70)–(2.3.80) полностью представлено уравнение движения следа, которое необходимо решать на каждом шаге по времени.

§ 2.4. Применение метода теории потенциала при численных расчетах трехмерных отрывных нестационарных течений идеальной несжимаемой жидкости

2.4.1. Численное решение уравнения относительно плотности потенциала двойного слоя. Для краткости изложения здесь приводятся численные соотношения лишь для поступательного движения, и поэтому потенциал возмущенного движения выбирается в виде потенциала двойного слоя, распределенного по поверхности тела и следа, а гидродинамические особенности — объемные и поверхностные вихри, компенсирующие вращательное движение жидкости внутри тела, не вводятся.

Пусть твердое тело с кусочно-гладкой поверхностью $S(x,y,z)$ (рис. 1.1) движется в безграничной идеальной несжимаемой жидкости с поступательной переносной скоростью

$$\mathbf{V} = \mathbf{grad}\,\Phi(x,y,z,t), \tag{2.4.1}$$

причем прямоугольная декартова система координат $0xyz$ связана с телом. Здесь t — время, Φ — потенциал переносной скорости, который определяется как

$$\Phi = V_x x + V_y y + V_z z, \tag{2.4.2}$$

V_x, V_y, V_z — проекции вектора $\mathbf{V}$ на оси x, y, z соответственно.

Пусть с поверхности тела S в виде поверхности разрыва тангенциальных компонентов скорости сходит след $S_3(x,y,z,t)$, сопряженный с телом по гладкой линии схода τ, которая может быть замкнутой. Линия схода потока τ разбивает поверхность S на две части: S_1 и S_2.

В § 2.3 показано, что задача об отрывном трехмерном обтекании потоком идеальной несжимаемой жидкости тела с острой задней кромкой сводится к решению в каждый фиксированный момент времени:

— линейного интегрального уравнения относительно плотности потенциала двойного слоя, распределенного по поверхностям S и S_3,

$$2\pi\nu(P_0,t) - \iint\limits_{S} \nu(P,t)K(P_0,P)dS_P = \Phi + \iint\limits_{S_3} \nu(P_3,t)K(P_0,P_3)dS_{P_3}, \quad (2.4.3)$$

при условиях § 1.1, наложенных на функцию ν и ее производные:

$$\nu_1 - \nu_2 - \nu_3 = 0; \quad (2.4.4)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1,\ \left.\frac{\partial\nu}{\partial l}\right|_2 = 0, \quad \left.\frac{\partial\nu}{\partial l}\right|_1 - \left.\frac{\partial\nu}{\partial l}\right|_3 = 0,\ \text{если } H > 0, \\ \mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_2,\ \left.\frac{\partial\nu}{\partial l}\right|_1 = 0, \quad \left.\frac{\partial\nu}{\partial l}\right|_2 - \left.\frac{\partial\nu}{\partial l}\right|_3 = 0,\ \text{если } H < 0; \end{aligned}\right\} \quad (2.4.5)$$

$$H = 8\pi\frac{\partial\nu}{\partial t} + 16\pi^2\left[\left(\left.\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\right|_2\right)^2 - \left(\left.\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\right|_1\right)^2\right]; \quad (2.4.6)$$

$$\left.\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\right|_1 - \left.\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\right|_2 = \left.\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\right|_3; \quad (2.4.7)$$

$$\left.\frac{\partial\nu}{\partial l}\right|_3 = -\frac{\sqrt{|H|}}{4\pi}\mathrm{sign}H; \quad (2.4.8)$$

$$\upsilon_{l_3} = -2\pi\left|\left.\frac{\partial\nu}{\partial l}\right|_3\right|, \quad \upsilon_{\tau_3} = 2\pi\left(\left.\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\right|_1 + \left.\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\right|_2\right); \quad (2.4.9)$$

— нелинейного интегрального уравнения (2.3.70) движения следа:

$$\mathbf{R}(t) - \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{R},t)dt = \mathbf{R}(t_0). \quad (2.4.10)$$

Скорость на поверхности тела при этом согласно (2.3.48) выражается в виде:

$$\boldsymbol{\upsilon}_{S_-} = \mathbf{n}\times 4\pi\left(\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\boldsymbol{l} + \frac{\partial\nu}{\partial l}\boldsymbol{\tau}\right), \quad (2.4.11)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{l}$ — направляющие векторы ортогональных координатных линий на S.

Здесь (2.4.4) соответствует условию (1.1.15) , выражения (2.4.5) условиям (1.1.46), выражение (2.4.7) условию (1.1.20), а (2.4.6), (2.4.8) соответствуют (1.1.42), формулы (2.4.9) данного параграфа следуют из (1.1.43), (1.1.36) § 1.1.

В указанных соотношениях приняты следующие обозначения: $K(P_0,P) = -\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(P_0,P)}$ — ядро интегрального уравнения (2.4.3); $r = |P_0 - P|$ — расстояние между точкой $P_0 \in S$ и $P \in S$; $\mathbf{n}$ — нормаль к S; ν_i — предельное значение плотности диполей при стремлении к некоторой точке $A \in \tau$ со стороны поверхности S_i $(i = 1,2,3)$; $\mathbf{n}_i$ — нормаль к поверхности S_i в точке A; l — поверхностная координатная линия, ортогональная τ; $\left.\frac{\partial\nu}{\partial l}\right|_i$, $\left.\frac{\partial\nu}{\partial\tau}\right|_i$ — предельные значения производных при стремлении к точке A со стороны поверхности S_i; v_{l_3}, v_{τ_3} — проекции вектора скорости перемещения вихревой пелены в точке A на направления l и τ соответственно; $\mathbf{R}(t)$ — радиус-вектор, направляемый из точки начала системы координат в точку $P_3 \in S_3$; t_0 — начальный момент времени; $\mathbf{v}(R,t)$ — скорость, равная векторной сумме переносной скорости движения тела (2.4.1) и скорости, обусловленной распределением особенностей по S и S_3.

Соотношения (2.4.4)–(2.4.9) являются следствием требований ограниченности и непрерывности скоростей в области течения. Как указано в § 2.3, в силу свойств уравнения (2.4.3), условие (2.4.4) им выполняется.

Задача (2.4.3)–(2.5.10) дополняется начальными данными, задающими начальный вид поверхности разрыва тангенциальных компонентов скорости $S_3|_{t=t_0}$ и распределение по ней вектора завихренности

$$\boldsymbol{\gamma}|_{t=t_0} = 4\pi \left(\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\boldsymbol{l} + \frac{\partial \nu}{\partial l}\boldsymbol{\tau}\right)\Big|_{t=t_0}$$

в начальный момент времени t_0, характеризующего интенсивность разрыва касательных к следу S_3 скоростей (здесь $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{l}$ – направляющие векторы ортогональных координатных линий на S_3).

Давление на поверхности тела, согласно § 2.3, выражается через производные от гидродинамических особенностей:

$$\frac{p_-}{\rho} = F\left(t\right) + \frac{V^2}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + 4\pi\frac{\partial \nu}{\partial t} - 8\pi^2\left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial l}\right)^2\right]. \tag{2.4.12}$$

Здесь τ и l — некоторые поверхностные ортогональные линии на поверхности S; p_- — давление жидкости на поверхности S_-; $F(t)$ — произвольная функция времени; ρ — плотность жидкости.

Компоненты главных векторов силы и момента и соответствующие коэффициенты определяются согласно соотношениям (2.3.68), (2.3.69).

Решение методом итераций. Так как при решении пространственной задачи обтекания порядок алгебраической системы, к которой сводится уравнение (2.4.3), может быть достаточно велик, то целесообразно, как указывалось в § 2.3, свести уравнение (2.4.3), в правой части которого находится неизвестная функция ν_3, к уравнениям Фредгольма II-го рода, решение которых может быть найдено методом итераций. Если так же, как в § 2.3 (см. рис. 2.22), выделить полосу ΔS_3, примыкающую к линии схода потока τ (рис. 2.23), разбить интеграл в правой части (2.4.3) на интегралы по областям $S_3/\Delta S_3$ и по ΔS_3, заменить интеграл по ΔS_3 конечной суммой, разбивая поверхность ΔS_3 на элементарные площадки ΔS^b, то получим следующее выражение для правой части уравнения (2.4.3):

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi\left(P_0, t\right) = \Psi^{(0)}\left(P_0, t\right) + \sum_{b=1}^{B} \nu_{3,b}^{T} \Psi^{(b)}\left(P_0, t\right), \quad \text{где} \\
&\Psi^{(0)}\left(P_0, t\right) = \Phi + \iint\limits_{S_3/\Delta S_3} \nu\left(P, t\right)\; K\left(P_0, P_3\right)\; dS_{P_3}, \quad \Psi^{(b)}\left(P_0, t\right) = \Omega_{P_0}^{T,b},
\end{aligned}\right\} \tag{2.4.13}$$

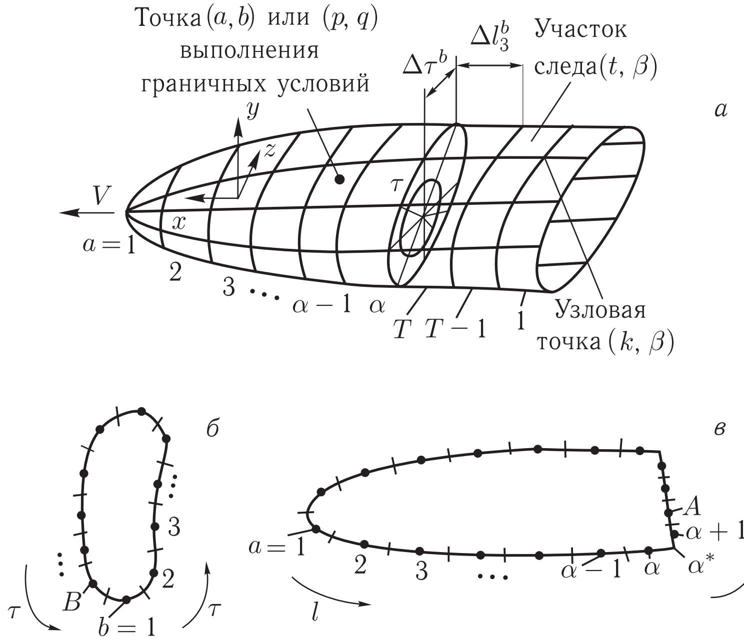


Рис. 2.23. Расчетная сетка на теле и в следе (a), сечение тела по направлению τ (*б*), сечение тела по направлению l (*в*)

$\nu_{3,b}^T$ — среднее значение ν на площадке ΔS^b следа, образованной в последний расчетный момент времени $t = T$ (это среднее значение при стремлении площадки к нулю стремится к предельному значению плотности диполей ν_3 на τ со стороны S_3, причем эта плотность является неизвестной функцией); B — число площадок ΔS^b вдоль τ; $\Omega_{P_0}^{T,b}$ — телесный угол, под которым видна площадка ΔS^b из точки P_0, образовавшаяся в последний момент времени T. Считаем, что геометрия площадки ΔS^b известна из предыдущего шага по времени и определяется по соотношениям (2.4.8), (2.4.9), о чем будет далее сказано в разд. 2.4.4 данного параграфа.

В силу линейности уравнения (2.4.3) его решение в соответствии с (2.3.56) можно записать в виде

$$\nu\left(P_0, t\right) = \nu^{(0)}\left(P_0, t\right) + \sum_{b=1}^{B} \nu_{3,b}^T \nu^{(b)}\left(P_0, t\right), \qquad (2.4.14)$$

где $\nu^{(0)}$ и $\nu^{(b)}$ — решения уравнения (2.4.3) с правыми частями $\Psi^{(0)}$ и $\Psi^{(b)}$ (2.4.13) соответственно. Применение приема аналитического продолжения посредством домножения в соответствии с (2.3.58) позволяет записать решение уравнения (2.4.3) с правыми частями $\Psi^{(0)}$ и $\Psi^{(b)}$ в виде

$$\nu^{(m)}\left(P_0, t\right) = \frac{1}{2}\nu_0^{(m)}\left(P_0, t\right) + \\ + \frac{1}{2}\left[\,\nu_0^{(m)}\left(P_0, t\right) + \nu_1^{(m)}\left(P_0, t\right)\right] + .., \quad (m = 0, 1, 2, .., B). \qquad (2.4.15)$$

В выражении (2.4.15)

$$\nu_0^{(m)}(P_0,t)=\frac{1}{2\pi}\Psi^{(m)},\quad \nu_{n+1}^{(m)}(P_0,t)=\iint\limits_S \nu_n^{(m)}(P_0,t)\ K(P_0,P)\,dS_P. \quad (2.4.16)$$

Заменим все интегралы, входящие в (2.1.15) и (2.1.16), интегральными суммами, для чего введем на поверхностях S и S_3 сетку. Разобьем S и S_3 в направлении τ на B полос. В направлении l поделим поверхность S на A полос, а поверхность S_3 на T полос. Причем каждая из этих T полос соответствует образованию свободной вихревой пелены в конкретный момент времени t. Таким образом, полоса под номером T — полоса, образовавшаяся в последний момент времени (см. рис. 2.23). Эта разбивка полосы T полностью совпадает с той, что была проведена при выводе формул (2.4.13). Считаем, что в окрестности линии схода потока эти линии τ и l на теле ортогональные, а на S_3 они могут быть неортогональными. В результате поверхность S разобьется на $A\times B$, а S_3 на $T\times B$ элементарных площадок ΔS^b, по которым плотность диполей ν будем считать постоянной. Такая схематизация, как известно [92], равносильна замене участков поверхности, по которым $\nu=\mathrm{const}$, замкнутыми вихревыми шнурами (рис. 2.24) постоянной интенсивности $\Gamma=4\pi\nu$. Аналог этого в электродинамике — теорема Ампера [134]. Точки P_0 и P, в которых на

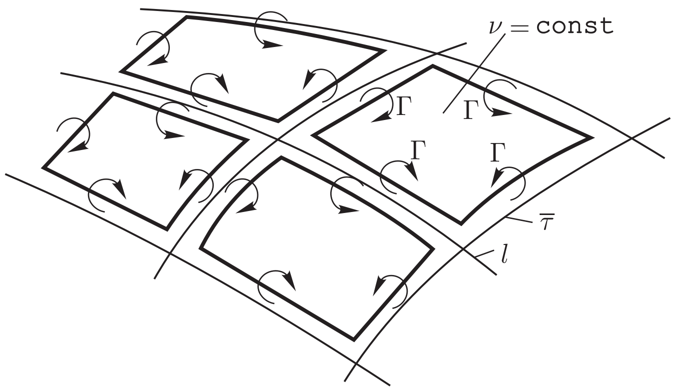


Рис. 2.24. Схематизация поверхности тела или следа участками, по которым плотность диполей ν постоянна, эквивалентна замене этих участков замкнутыми вихревыми жгутами (вихревыми рамками) с постоянной циркуляцией $\Gamma=4\pi\nu$

поверхности S тела удовлетворяются граничные условия, будем располагать в некоторой внутренней точке каждой такой площадки. Пусть точкам P_0 будут соответствовать индексы a,b а точкам P — p,q (см. рис. 2.23). Тогда решение (2.4.15) можно представить в виде:

$$\nu_{a,b}^{(m)}=\frac{1}{2}\nu_{0_{a,b}}^{(m)}+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\nu_{0_{a,b}}^{(m)}+\nu_{1_{a,b}}^{(m)}\right]+\frac{1}{2}\left[\nu_{1_{a,b}}^{(m)}+\nu_{2_{a,b}}^{(m)}\right]+\ldots,\quad (m=0,1,2,\ldots,B), \quad (2.4.17)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\nu^{(m)}_{0_{a,b}} = \frac{1}{2\pi}\left[V_x^{a,b}x^{a,b} + V_y^{a,b}y^{a,b} + V_z^{a,b}z^{a,b} - \sum_{t=1}^{T-1}\sum_{\mu=1}^{B}\nu_{t,\mu}\Omega^{t,\mu}_{a,b}\right] \text{ при } m = 0,\\
&\nu^{(m)}_{0_{a,b}} = \frac{1}{2\pi}\Omega^{T,\mu}_{a,b} \quad \text{при} \quad m \neq 0;\\
&\nu^{(m)}_{n+1_{a,b}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{\mathrm{A}}\sum_{q=1}^{\mathrm{B}}\nu^{(m)}_{n_{p,q}}\Omega^{p,q}_{a,b};
\end{aligned}\right\} \tag{2.4.18}$$

$V_x^{a,b}$, $V_y^{a,b}$, $V_z^{a,b}$ — проекции скорости поступательного движения тела в точке a, b на оси x, y, z (см. рис. 2.23) соответственно; $\Omega^{t,\mu}_{a,b}$, $\Omega^{T,\mu}_{a,b}$, $\Omega^{p,q}_{a,b}$ — телесные углы, под которыми видны из точки (a, b) соответственно участок t, μ свободного следа, участок T, μ следа и участок поверхности тела с точкой p, q.

Возможны различные варианты построения алгоритма нахождения неизвестной плотности диполей $\nu^T_{3,b}$ в момент времени T. В частности, может быть реализована следующая последовательность вычислений. В предположении гладкости изменения всех функций по времени считаем, что из предыдущего момента времени $T-1$ для каждого участка поверхности ΔS^b известна величина H (2.4.6), которую в конечно-разностном представлении с использованием линейной интерполяции производных по направлению линий схода потока τ можно записать, например, в следующем виде:

$$H^b = 8\pi\frac{\nu^{\mathrm{T}-1}_{3,b} - \nu^{\mathrm{T}-2}_{3,b}}{\Delta_t t} + 4\pi^2\left[\left(\frac{\nu^{T-1}_{\alpha+1,b+1} - \nu^{T-1}_{\alpha+1,b}}{\Delta\tau^{\alpha+1,b+1}_{\alpha+1,b}} + \frac{\nu^{T-1}_{\alpha+1,b} - \nu^{T-1}_{\alpha+1,b-1}}{\Delta\tau^{\alpha+1,b}_{\alpha+1,b-1}}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\nu^{T-1}_{\alpha,b+1} - \nu^{T-1}_{\alpha,b}}{\Delta\tau^{\alpha,b+1}_{\alpha,b}} + \frac{\nu^{T-1}_{\alpha,b} - \nu^{T-1}_{\alpha,b-1}}{\Delta\tau^{\alpha,b}_{\alpha,b-1}}\right)^2\right]. \tag{2.4.19}$$

Здесь принято, что точкам и функциям перед угловой линией придается значок α (см. рис. 2.23), а за ней номер — $\alpha+1$, таким образом: $\Delta\tau^{\alpha,b+1}_{\alpha,b}$, $\Delta\tau^{\alpha,b}_{\alpha,b-1}$ — это расстояния между точками $(\alpha, b+1)$, (α, b) и (α, b), $(\alpha, b-1)$ соответственно; $\Delta\tau^{\alpha+1,b+1}_{\alpha+1,b}$, $\Delta\tau^{\alpha+1,b}_{\alpha+1,b-1}$ — расстояния между точками $(\alpha+1, b+1)$, $(\alpha+1, b)$ и $(\alpha+1, b)$, $(\alpha+1, b-1)$ соответственно; $\Delta_t t$ — отрезок времени между моментами $T-1$ и $T-2$.

Запишем (2.4.4), (2.4.7) для площадки ΔS^b в конечно-разностном виде в момент времени T:

$$\nu^T_{\alpha,b} - \nu^T_{\alpha+1,b} - \nu^T_{3,b} = 0, \tag{2.4.20}$$

$$\frac{\nu^T_{\alpha,b+1} - \nu^T_{\alpha,b-1}}{\Delta\tau^{\alpha,b+1}_{\alpha,b-1}} - \frac{\nu^T_{\alpha+1,b+1} - \nu^T_{\alpha+1,b-1}}{\Delta\tau^{\alpha+1,b+1}_{\alpha+1,b-1}} - \frac{\nu^T_{3,b+1} - \nu^T_{3,b-1}}{\Delta\tau^{T,b}} = 0. \tag{2.4.21}$$

Условие (2.4.21) соответствует (2.4.7), записанному с использованием линейной интерполяции, величина $\Delta\tau^{T,b}$ в этом выражении это ширина площадки ΔS^b следа вдоль линии схода потока τ. При выборе расчетной сетки на теле вблизи линии схода потока ортогональной, так что координатные линии τ проходят параллельно линии схода потока τ, и ее измельчении, а также при достаточно малом шаге по времени, очевидно

$$\Delta\tau_{\alpha,b-1}^{\alpha,b+1} \approx \Delta\tau_{\alpha+1,b-1}^{\alpha+1,b+1} \approx \Delta\tau^{T,b} \approx \Delta\tau^{b},$$

где $\Delta\tau^b$ — ширина площадки ΔS^b вдоль линии схода потока τ. Так как в § 2.3 было показано, что условие (2.4.20) уравнением (2.4.3) выполняется, то из (2.4.20) и последнего равенства следует, что и (2.4.21) будет выполнено.

Казалось бы, для определения неизвестной плотности диполей в следе $\nu_{3,b}^T$ можно воспользоваться (2.4.20) и (2.4.14), однако получающееся из этих соотношений уравнение вырождается и становится однородным при стремлении точек (α, b) и $(\alpha+1, b)$ к линии схода потока, т. е. при измельчении сетки. Действительно, запишем выражения (2.4.14) для точек (α, b) и $(\alpha+1, b)$, возьмем их разность и воспользуемся (2.4.20), тогда получим систему уравнений

$$\nu_{3,m}^T + \sum_{b=1}^{B} \nu_3^T \left(\nu_{\alpha+1,m}^{T(b)} - \nu_{\alpha,m}^{T(b)}\right) = \nu_{\alpha,m}^{T(0)} - \nu_{\alpha+1,m}^{T(0)}, (m = 1, 2, 3, \ldots, B). \quad (2.4.22)$$

Но правая часть $\Psi^{(0)}$ (2.4.13) непрерывна при переходе через линию схода потока, обозначим ее α^* (см. рис 2.23), поэтому при стремлении точек (α, m) и $(\alpha+1, m)$ к линии схода потока α^* разрыв в решении уравнения (2.4.3) в соответствии с (1.3.9) также будет стремиться к нулю:

$$\lim_{\substack{\alpha\to\alpha^* \\ \alpha+1\to\alpha^*}} \left(\nu_{\alpha,m}^{T(0)} - \nu_{\alpha+1,m}^{T(0)}\right) \to 0.$$

В результате (2.4.22) сводится к однородному уравнению, имеющему бесчисленное количество решений в пределе при $\alpha \to \alpha^*$, $\alpha+1 \to \alpha^*$.

Воспользуемся для нахождения неизвестной плотности диполей в следе $\nu_{3,b}^T$ соотношениями (2.4.5), будем сначала считать, что на участке ΔS^b, примыкающем к линии $\alpha^* : \mathbf{n}_3^b = \mathbf{n}_1^b$, $H > 0$. Тогда в конечных разностях эти выражения для производных от плотности диполей можно представить в следующем виде:

$$\nu_{\alpha+1,b}^T - \nu_{\alpha+2,b}^T = 0, \quad \frac{\nu_{\alpha-1,b}^T - \nu_{\alpha,b}^T}{\Delta l_{\alpha-1,b}^{\alpha,b}} = \frac{\nu_{3,b}^T - \nu_{3,b}^{T-1}}{\Delta l_{\alpha^*,b}^{T,b}}. \quad (2.4.23)$$

Записывая (2.4.14) для точек $(\alpha-1, b)$, (α, b) и подставляя полученное выражение в (2.4.23), получим уравнение для определения неизвестной плотности диполей в следе:

$$\nu_{3,m}^T + c_1^m \sum_{b=1}^{B} \nu_{3,b}^T \left(\nu_{\alpha,m}^{T(b)} - \nu_{\alpha-1,m}^{T(b)}\right) = \nu_{3,m}^{T-1} + c_1^m \left(\nu_{\alpha-1,m}^{T(0)} - \nu_{\alpha,m}^{T(0)}\right). \quad (2.4.24)$$

Здесь введено обозначение $c_1^m = \dfrac{\Delta l_{\alpha^*,b}^{T,b}}{\Delta l_{\alpha-1,b}^{\alpha,b}}$, где $\Delta l_{\alpha^*,b}^{T,b}$ — расстояние на участке следа ΔS^b по нормали к линии схода потока α^* до края участка ΔS^b, образовавшегося в последний момент времени T. Совершенно аналогично, когда на участке $\Delta S^b : \mathbf{n}_3^b = -\mathbf{n}_2^b$, $H^b < 0$, из (2.4.5) получим:

$$\nu_{\alpha-1,b}^T - \nu_{\alpha,b}^T = 0, \qquad \frac{\nu_{\alpha+1,b}^T - \nu_{\alpha+2,b}^T}{\Delta l_{\alpha+2,b}^{\alpha+1,b}} = \frac{\nu_{3,b}^T - \nu_{3,b}^{T-1}}{\Delta l_{\alpha^*,b}^{T,b}}. \tag{2.4.25}$$

Из второго выражения (2.4.25) получается уравнение, аналогичное (2.4.24), для определения неизвестной плотности диполей в следе:

$$\nu_{3,m}^T + c_2^m \sum_{b=1}^{B} \nu_{3,b}^T \left(\nu_{\alpha+2,m}^{T(b)} - \nu_{\alpha+1,m}^{T(b)}\right) = \nu_{3,m}^{T-1} + c_2^m \left(\nu_{\alpha+1,m}^{T(0)} - \nu_{\alpha+2,m}^{T(0)}\right), \tag{2.4.26}$$

здесь $c_2^m = \dfrac{\Delta l_{\alpha^*,b}^{T,b}}{\Delta l_{\alpha+2,b}^{\alpha+1,b}}$. В результате из (2.4.24), (2.4.26) формируется система из $m = 1, 2, 3, \ldots, B$ уравнений для нахождений $\nu_{3,m}^T$ на каждом из участков ΔS^b следа, прилегающих к телу. Таким образом, построен метод определения неизвестной плотности диполей в следе.

Может быть построен несколько иной алгоритм нахождения неизвестной плотности диполей в следе, если ввести $\nu_{1,b}^T$, $\nu_{2,b}^T$, $\nu_{3,b}^T$ — предельные значения плотности диполей на самой линии схода потока с поверхности тела на участке «b». Тогда (2.4.4), (2.4.7) запишутся в виде

$$\nu_{1,b}^T - \nu_{2,b}^T - \nu_{3,b}^T = 0, \tag{2.4.27}$$

$$\left(\nu_{1,b+1}^T - \nu_{1,b-1}^T\right) - \left(\nu_{2,b+1}^T - \nu_{2,b-1}^T\right) = \left(\nu_{3,b+1}^T - \nu_{3,b-1}^T\right). \tag{2.4.28}$$

Условие (2.4.28) записано с использованием линейной интерполяции вдоль линии схода потока. Очевидно, оно выполняется, так как по доказанному в § 2.3 всегда выполняется (2.4.27) в силу свойств уравнения (2.4.3). Будем считать сначала, что на участке $\Delta S^b : \mathbf{n}_3^b = \mathbf{n}_1^b$, $H^b > 0$. Тогда первые два условия для производных в (2.4.5) могут быть записаны в следующем виде:

$$\nu_{2,b}^T - \nu_{\alpha+1,b}^T = 0\,; \qquad \frac{\nu_{\alpha,b}^T - \nu_{1,b}^T}{\dfrac{\Delta l_{\alpha-1,b}^{\alpha^*,b}}{2}} = \frac{\nu_{3,b}^T - \nu_{3,b}^{T-1}}{\Delta l_{\alpha^*,b}^{T,b}}. \tag{2.4.29}$$

Здесь принято, что расчетные точки на теле вблизи линии схода выбраны таким образом, что делят отрезки вдоль координатной линии l между угловой линией α^* и ей предшествующей пополам. Тогда из (2.4.29) и (2.4.27) получим:

$$\left.\begin{aligned} &(1 + 2c_3^m)\,\nu_{3,m}^T + 2c_3^m \sum_{b=1}^{B} \nu_{3,b}^T \left(\nu_{\alpha+1,m}^{T(b)} - \nu_{\alpha,m}^{T(b)}\right) = \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = \nu_{3,m}^{T-1} + 2c_3^m \left(\nu_{\alpha,m}^{T(0)} - \nu_{\alpha+1,m}^{T(0)}\right) \\ &\nu_{2,m}^T = \nu_{\alpha+1,m}^T, \quad \nu_{1,m}^T = \nu_{2,m}^T + \nu_{3,m}^T, \quad \mathbf{n}_3^b = \mathbf{n}_1^b, \quad H^b > 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.4.30}$$

где $c_3^m = \dfrac{\Delta l_{\alpha^*,b}^{T,b}}{\Delta l_{\alpha-1,b}^{\alpha^*,b}}$. Для случая $\mathbf{n}_3^b = -\mathbf{n}_2^b$, $H^b < 0$ совершенно аналогично с учетом (2.4.5) получим

$$\left.\begin{aligned} &(1+2c_4^m)\,\nu_{3,m}^T + 2c_4^m \sum_{b=1}^{B} \nu_{3,b}^T \left(\nu_{\alpha,m}^{T(b)} - \nu_{\alpha+1,m}^{T(b)}\right) = \\ &\qquad\qquad = \nu_{3,m}^{T-1} + 2c_4^m \left(\nu_{\alpha+1,m}^{T(0)} - \nu_{\alpha,m}^{T(0)}\right), \\ &\nu_{1,m}^T = \nu_{\alpha,m}^T, \quad \nu_{2,m}^T = \nu_{1,m}^T + \nu_{3,m}^T, \quad \mathbf{n}_3^b = -\mathbf{n}_2^b, \quad H^b < 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.4.31}$$

где $c_4^m = \dfrac{\Delta l_{\alpha^*,b}^{T,b}}{\Delta l_{\alpha+1,b}^{\alpha^*,b}}$. Из первых соотношений в(2.4.30), (2.4.31) формируется система из $m = 1, 2, 3, \ldots, B$ уравнений для определения неизвестной плотности $\nu_{3,m}^T$ диполей в следе, а из двух нижних определяются предельные значения плотности диполей на теле.

Таким образом, построены численные методы решения уравнения (2.4.3) путем сведения этого уравнения к уравнениям Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя и решения их методом итераций.

Решение прямым методом. В том случае, когда порядок алгебраической системы, к которой сводится уравнение (2.4.3), не очень велик, решение его можно реализовать и прямым методом. Запишем алгебраическую систему уравнений, к которым сводится (2.4.3), перенеся в левую часть уравнения член, содержащий неизвестную плотность диполей в следе:

$$2\pi\nu_{a,b} + \sum_{p=1}^{A}\sum_{q=1}^{B} \nu_{p,q}\Omega_{a,b}^{p,q} + \sum_{\mu=1}^{B} \nu_{3,\mu}^T \Omega_{a,b}^{T,\mu} = \Psi_{a,b}^{(0)} \tag{2.4.32}$$
$$(a = 1, 2, \ldots, A),\ (b = 1, 2, \ldots, B).$$

Система уравнений (2.4.32) решается для каждого фиксированного момента времени t. Правая часть в (2.4.32) — функция $\Psi_{a,b}^{(0)}$ в силу (2.4.2), (2.4.3), (2.4.13), (2.4.18) выражается следующим образом:

$$\Psi_{a,b}^0 = V_x^{a,b}x^{a,b} + V_y^{a,b}y^{a,b} + V_z^{a,b}z^{a,b} - \sum_{t=1}^{T-1}\sum_{\mu=1}^{B} \nu_{t,\mu}\Omega_{a,b}^{t,\mu}. \tag{2.4.33}$$

Входящая в левую часть уравнения (2.4.32) неизвестная функция $\nu_{3,\mu}^T$ может быть выражена разными способами. В частности, она может быть представлена через искомую плотность диполей на теле в соответствии с (2.4.4) непосредственно как

$$\nu_{3,\mu}^T = \nu_{\alpha,\mu}^T - \nu_{\alpha+1,\mu}^T. \tag{2.4.34}$$

При этом, как отмечалось в § 2.3, если выполнено условие касательности поверхности тела и следа в виде: $\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1$ при $H > 0$ и $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{n}_2$ при $H < 0$, то условия для производных от плотности диполей, входящие в (2.4.5), также в пределе будут выполнены в силу свойств уравнения (2.4.3).

Для более точного выполнения условия (2.4.5) неизвестную функцию $\nu_{3,\mu}^{T}$ в левой части (2.4.32) можно представить на основе выражений (2.4.23), (2.4.25) как:

$$\left.\begin{aligned} &\nu_{3,\mu}^{T} = \nu_{3,\mu}^{T-1} + c_1^{\mu}\left(\nu_{\alpha-1,\mu}^{T} - \nu_{\alpha,\mu}^{T}\right) && \text{при}\quad H^{\mu} > 0, \quad \mathbf{n}_3^{\mu} = \mathbf{n}_1^{\mu} \\ &\nu_{3,\mu} = \nu_{3,\mu}^{T-1} + c_2^{\mu}\left(\nu_{\alpha+1,\mu}^{T} - \nu_{\alpha+2,\mu}^{T}\right) && \text{при}\quad H^{\mu} < 0, \quad \mathbf{n}_3^{\mu} = -\mathbf{n}_2^{\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{2.4.35}$$

Если введены предельные значения плотности диполей не только в следе, но и на теле, как это сделано в (2.4.27), то для неизвестной функции $\nu_{3,\mu}^{T}$ в (2.4.32) на основе выражения (2.4.29), записанного для случая $\mathbf{n}_3^{\mu} = \mathbf{n}_1^{\mu}$, $H^{\mu} > 0$, и ему аналогичного для случая $\mathbf{n}_3^{\mu} = -\mathbf{n}_2^{\mu}$, $H^{\mu} < 0$, получим:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при}\quad H^{\mu} > 0, \quad \nu_{3,\mu}^{T} = \frac{\nu_{3,\mu}^{T-1} - 2c_3^{\mu}\left(\nu_{\alpha+1,\mu}^{T} - \nu_{\alpha,\mu}^{T}\right)}{2c_3^{\mu}+1}; \; \nu_{2,\mu}^{T} = \nu_{\alpha+1,\mu}^{T}; \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu_{1,\mu}^{T} = \nu_{2,\mu}^{T} + \nu_{3,\mu}^{T}; \\ &\text{при}\quad H^{\mu} < 0 \quad \nu_{3,\mu}^{T} = \frac{\nu_{3,\mu}^{T-1} - 2c_4^{\mu}\left(\nu_{\alpha+1,\mu}^{T} - \nu_{\alpha,\mu}^{T}\right)}{2c_4^{\mu}+1}; \; \nu_{1,\mu}^{T} = \nu_{\alpha,\mu}^{T}; \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \nu_{2,\mu}^{T} = \nu_{1,\mu}^{T} - \nu_{3,\mu}^{T}. \end{aligned}\right\} \tag{2.4.36}$$

Как видно из (2.4.36), первые соотношения для $\nu_{3,\mu}^{T}$ в его строчках отличаются только коэффициентами (c_3^{μ} или c_4^{μ}).

При решении уравнения (2.4.3) прямым методом (2.4.32) были реализованы различные описанные выше способы нахождения неизвестной плотности диполей в следе (2.4.34)–(2.4.36). Более точное выполнение условий, накладываемых на искомое распределение плотности диполей на теле и ее производных, дает способ, представленный соотношением (2.4.36).

Непрерывное на поверхности тела приближенное решение. Следует отметить, что после того, как плотность диполей в расчетных точках (a, b) на теле определена по соотношениям (2.4.14)–(2.4.18) или из (2.4.32), в любой неособой точке поверхности тела Q_0 она может быть представлена в соответствии с § 1.3 в виде

$$\nu\left(Q_0\right) = \frac{1}{2\pi}\Psi\left(Q_0\right) - \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{A}\sum_{q=1}^{B}\nu_{p,q}\Omega_{Q_0}^{p,q}, \tag{2.4.37}$$

где $\Omega_{Q_0}^{p,q}$ — телесный угол, под которым виден элемент поверхности с расчетной точкой (p, q) из точки Q_0. Таким образом, с помощью (2.4.37) может быть построено непрерывное на S приближенное решение уравнения (2.4.3).

2.4.2. О вычислении телесных углов. Приведем соотношения для вычисления телесных углов, которые используются при построении численного решения уравнения (2.4.3) в виде (2.4.17), (2.4.18) или в виде (2.4.32).

Телесный угол, под которым виден элемент поверхности тела $S_{p,q}$ или следа $S_{t,\beta}$ из точки P_0, которая не принадлежит этим элементам, может быть определен как сумма площадей сферических треугольников на сфере единичного радиуса, помещенной в точку P_0 (или точку (ab)) (рис. 2.25):

$$\Omega_{a,b}^{p,q} = \sum_{d=1}^{D} S_d.$$

При этом каждый d-й сферический треугольник является проекцией на сферу элементарного d-го «треугольного» участка поверхности, полученного в результате разбиения четырехугольных элементов поверхностей тела $S_{p,q}$ или следа $S_{t,\beta}$ (рис. 2.23). Пусть проекция d-го элемента поверхности $P_1P_2P_3$ на поверхность сферы единичного радиуса — треугольник со сторонами a_1, b_1, c_1 (см. рис. 2.25), а A_1, B_1, C_1 — углы этого сферического треугольника, лежащие против дуг a_1, b_1, c_1 соответственно, причем $P_0 \notin P_1P_2P_3$. Пусть координаты точек P_0, P_1, P_2, P_3 соответственно: (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1),

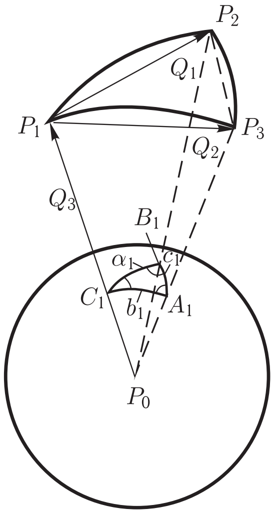


Рис. 2.25. Схема к расчету телесных углов

(x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). Тогда, используя теоремы косинусов и синусов сферической геометрии [24], находим:

$$\left.\begin{aligned} \cos A_1 &= \frac{\cos a_1 - \cos b_1 \cdot \cos c_1}{\sin b_1 - \sin c_1}, \\ \sin B_1 &= \frac{\sin b_1 \cdot \sin A_1}{\sin a_1}, \\ \sin C_1 &= \frac{\sin c_1 \cdot \sin A_1}{\sin a_1}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.38)$$

где

$$\cos a_1 = \frac{(P_2P_0)^2 + (P_1P_0)^2 - (P_2P_1)^2}{2\,(P_2P_0)\ (P_1P_0)}, \quad \cos b_1 = \frac{(P_3P_0)^2 + (P_1P_0)^2 - (P_3P_1)^2}{2\,(P_3P_0)\ (P_1P_0)},$$

$$\cos c_1 = \frac{(P_3P_0)^2 + (P_2P_0)^2 - (P_3P_2)^2}{2\,(P_3P_0)\ (P_2P_0)},$$

$$P_iP_j = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \qquad i, j = 0, 1, 2, 3.$$

Используя (2.4.38), определяем сферический избыток

$$\delta = (A_1 + B_1 + C_1) - \pi,$$

а так как мы имеем дело со сферой единичного радиуса, то площадь S_d, т. е. величина телесного угла, под которым виден элемент поверхности $P_1P_2P_3$ из точки $P_0 \notin P_1P_2P_3$, будет равна этому сферическому избытку:

$$S_d = |\Omega| = |\delta|.$$

Если задаться определенной системой векторов (см. рис.2.25):

$$\mathbf{Q}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \mathbf{Q}_2 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$
$$\mathbf{Q}_3 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),$$

то знак телесного угла [1] определяется знаком смешанного произведения этих векторов:

$$\mathrm{sign}\,\Omega = \mathrm{sign}[\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_3].$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$\Omega = |\delta| \cdot \mathrm{sign}[\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_3], \quad \delta = (A_1 + B_1 + C_1) - \pi. \tag{2.4.39}$$

В том случае, если элемент поверхности $P_1P_2P_3$ неплоский и включает в себя точку P_0, величина телесного угла, под которым виден элемент поверхности $P_1P_2P_3$, очевидно, равна разности между телесным углом, отсекаемым от всего пространства касательной плоскостью к $P_1P_2P_3$ в точке P_0 и телесным углом $\Omega_{P_0}^{P_1P_2P_3}$,под которым виден плоский треугольник $P_1P_2P_3$. Телесный угол в этом случае будет определятся как

$$\Omega = -\left(2\pi - \left|\Omega_{P_0}^{P_1P_2P_3}\right|\right) \cdot \mathrm{sign}\Omega_{P_0}^{P_1P_2P_3}. \tag{2.4.40}$$

Если смешанное произведение $\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{Q}_3$ равно нулю, то это означает, что векторы $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_3$ лежат в одной плоскости (или хотя бы один из них равен нулю), и телесный угол, под которым виден элемент поверхности $P_1P_2P_3$, равен нулю.

2.4.3. Давление жидкости на поверхности тела. Давление жидкости в неособых точках (p, q) поверхности тела S_- в соответствии с (2.4.12) определяется как

$$\frac{p_{-p,q}}{\rho} = F(t) + \frac{V^2}{2} - \frac{\Delta_t \Phi_{p,q}}{\Delta_t t} + 4\pi \frac{\Delta_t \nu_{p,q}}{\Delta_t t} - \frac{1}{2}\gamma_{p,q}^2, \tag{2.4.41}$$

где $\Delta_t \Phi_{p,q} = \Phi_{p,q}(t) - \Phi_{p,q}(t-1)$ — изменение потенциала поступательной скорости движения тела (2.4.2) за период времени $\Delta_t(t)$ в точках (p, q) поверхности тела; $\Delta_t \nu_{p,q} = \nu_{p,q}(t) - \nu_{p,q}(t-1)$ — изменение за этот период времени плотности диполей $\nu_{p,q}$ в точке (p, q). Если необходимо найти плотность диполей в неособой точке поверхности на пересечении координатных линий τ и l, то ее в каждый расчетный момент времени можно найти как среднеарифметическое от плотности диполей на элементарных площадках

[1] Знак телесного угла при заданном положении нормалей считается положительным, если видна внутренняя сторона, и отрицательным, если видна внешняя сторона элемента поверхности $P_1P_2P_3$.

поверхности, примыкающих к этой точке, или же с использованием соотношения (2.4.37). Вектор завихренности на поверхности тела $\boldsymbol{\gamma}_{p,q}$ может быть найден как $\boldsymbol{\gamma}_{p,q} = \gamma_\tau^{p,q}\boldsymbol{l} + \gamma_l^{p,q}\boldsymbol{\tau}$. Для краткости запишем соотношение для $\gamma_{p,q}^2$ в случае, если l и τ — ортогональные координатные линии на поверхности S. С использованием линейной интерполяции получим

$$\gamma_{p,q}^2 = 4\pi^2\left(\frac{\nu_{p+1,q}-\nu_{p,q}}{\Delta l_{p,q}^{p+1,q}} + \frac{\nu_{p+1,q+1}-\nu_{p,q+1}}{\Delta l_{p,q+1}^{p+1,q+1}}\right)^2 + \\ + 4\pi^2\left(\frac{\nu_{p,q+1}-\nu_{p,q}}{\Delta \tau_{p,q}^{p,q+1}} + \frac{\nu_{p+1,q+1}-\nu_{p+1,q}}{\Delta \tau_{p+1,q}^{p+1,q+1}}\right)^2. \quad (2.4.42)$$

В соответствии с(2.3.68), (2.3.69) § 2.3 численным интегрированием давления по поверхности тела находятся силы и моменты, действующие на обтекаемое тело, или их аэродинамические коэффициенты.

2.4.4. О расчете движения следа. Движение свободного вихревого следа описывается векторным нелинейным интегральным уравнением (2.4.10), которое эквивалентно следующей системе нелинейных интегральных уравнений:

$$x(t) - \int_{t_0}^{t} \upsilon_x dt = x_0, \quad y(t) - \int_{t_0}^{t} \upsilon_y dt = y_0, \quad z(t) - \int_{t_0}^{t} \upsilon_z dt = z_0, \quad (2.4.43)$$

где

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \quad \upsilon_z = \frac{dz}{dt}$$

— компоненты вектора $\boldsymbol{\upsilon}$ относительной скорости движения точки следа $P_3(x, y, z) \in S_3$, движущейся как жидкая частица, в которой циркуляция по некоторому контуру, пронизывающему S_3, постоянна: $\Gamma_3 = \text{const}$; x_0, y_0, z_0 — координаты точки P_3 в начальный момент времени t_0.

Для решения системы уравнений (2.4.43) воспользуемся, как это обычно принято[14], их линеаризацией на малом отрезке времени $\Delta_t t$. При этом деформация следа будет определяться в точках (k, β) следа (см. рис. 2.23) за период времени $\Delta_t t$ как произведение отрезка времени $\Delta_t t$ на сумму вектора скорости движения тела и вектора индуктивной скорости, обусловленной двойным слоем, распределенным по поверхности тела S и следа S_3. Тогда (2.4.10), (2.4.43) запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R}_t^{k,\beta} &= \mathbf{R}_{t-1}^{k,\beta} + \Delta_t t \boldsymbol{\upsilon}_{t-1}^{k,\beta}, & X_t^{k,\beta} &= X_{t-1}^{k,\beta} + \Delta_t t \upsilon_{x,t-1}^{k,\beta}, \\ Y_t^{k,\beta} &= Y_{t-1}^{k,\beta} + \Delta_t t \upsilon_{y,t-1}^{k,\beta}, & Z_t^{k,\beta} &= Z_{t-1}^{k,\beta} + \Delta_t t \upsilon_{z,t-1}^{k,\beta}. \end{aligned}\right\} \quad (2.4.44)$$

Здесь $X_t^{k,\beta}, Y_t^{k,\beta}, Z_t^{k,\beta}$ и $X_{t-1}^{k,\beta}, Y_{t-1}^{k,\beta}, Z_{t-1}^{k,\beta}$ — координаты точки (k, β) следа (см. рис. 2.23) в моменты времени t и $t-1$ соответственно; $\Delta_t t$ — шаг по времени от момента $t-1$ до t. Скорости от поверхностного распределения завихренности по телу и следу, входящие в (2.4.44), определяются в соответствии с (2.3.78), (2.3.79), и они могут быть сведены[14] к вычислению скоростей от отрезков вихрей. Тогда входящая в (2.4.44) величина $\upsilon_{x,t-1}^{k,\beta}$ может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}\upsilon_{x,t-1}^{k,\beta} = V_{x,t}^{k,\beta} + \sum_{p=1}^{A}\sum_{q=1}^{B}\left(\nu_{p,q+1} - \nu_{p,q}\right)\overline{\upsilon}_x\left(k,\beta,q+1,q,p\right) + \\ + \sum_{q=1}^{B}\sum_{p=1}^{A}\left(\nu_{p+1,q} - \nu_{p,q}\right)\overline{\upsilon}_x\left(k,\beta,p+1,p,q\right) + \\ + \sum_{æ=1}^{T-1}\sum_{q=1}^{B}\left(\nu_{æ,q+1} - \nu_{æ,q}\right)\overline{\upsilon}_x\left(k,\beta,q+1,q,æ\right) + \\ + \sum_{q=1}^{B}\sum_{æ=1}^{T-1}\left(\nu_{æ+1,q} - \nu_{æ,q}\right)\overline{\upsilon}_x\left(k,\beta,æ+1,æ,q\right). \quad (2.4.45)\end{aligned}$$

Выражения для проекций вектора скорости на оси координат y, z: $\upsilon_{y,t-1}^{k,\beta}$, $\upsilon_{z,t-1}^{k,\beta}$ аналогичны (2.4.45). Домноженные на 4π выражения в (2.4.45):

$$4\pi(\nu_{p,q+1} - \nu_{p,q}),\ \ 4\pi(\nu_{p+1,q} - \nu_{p,q}) \quad \text{и} \quad 4\pi(\nu_{æ,q+1} - \nu_{æ,q}),\ \ 4\pi(\nu_{æ+1,q} - \nu_{æ,q})$$

— циркуляции отрезков вихрей по направленям l и τ на теле и следе соответственно. Поделенные на 4π функции в (2.4.45):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4\pi}\overline{\upsilon}_x\left(k,\beta,q+1,q,p\right),\ \ \frac{1}{4\pi}\overline{\upsilon}_x\left(k,\beta,p+1,p,q\right) \quad \text{и}\\ &\frac{1}{4\pi}\overline{\upsilon}_x\left(k,\beta,q+1,q,æ\right),\ \ \frac{1}{4\pi}\overline{\upsilon}_x\left(k,\beta,æ+1,æ,q\right)\end{aligned}$$

— скорости в точке (k,β) свободной поверхности в момент времени $t-1$, обусловленные размещенными на теле и следе отрезками вихрей по направлению l и τ с единичной циркуляцией; $V_{x,t}^{k,\beta}$ — проекция поступательной скорости (2.4.1) на ось x в точке (k,β) в расчетный момент времени t. Проекции индуктивной скорости, обусловленной отрезками (по направлению l и τ) вихрей тела и следа могут быть вычислены, например, по алгоритму, приведенному в[14], для индуктивной скорости по формуле Био–Савара от произвольно ориентированного в пространстве вихревого отрезка с постоянной (единичной) циркуляцией. Входящим в (2.3.45) суммам $\sum\limits_{æ=1}^{T-1}\sum\limits_{q=1}^{B}$ и $\sum\limits_{q=1}^{B}\sum\limits_{æ=1}^{T-1}$ соответствует интеграл по поверхности следа, который для нормальной составляющей скорости к поверхности следа существует в смысле главного значения Коши. Скорость от вихревых отрезков, проходящих через точку, перемещение которой необходимо определить, принимается равной нулю.

Как известно, свободные тангенциальные разрывы скоростей являются неустойчивыми [18], а задача отыскания решения линеаризованного уравнения движения вихревой пелены является некорректной в смысле численной ее реализации [97]. Поэтому, когда это было необходимо, в расчетах осесимметричного обтекания тел к соотношениям (2.3.44) применялся регуляризующий оператор, подобный операторам из [97, 139], позволяющий гасить высокочастотные возмущения

$$\mathbf{R}_t^k = (1-C)\mathbf{R}_t^k + \frac{1}{2}C(\mathbf{R}_t^{k+1} + \mathbf{R}_t^{k-1}). \tag{2.4.46}$$

Этот оператор отличается от оператора, применяемого в работе [97], наличием параметра C . Параметр C был введен для уменьшения погрешности, вносимой оператором из [97], при расчете координат точек следа с существенно неравномерным шагом по поверхности следа. В численных расчетах принималось, что C является функцией высоты h треугольника с вершинами в точках $k-1, k, k+1$, проведенной из точки k на сторону $k-1$, $k+1$, причем, если h меньше некоторой величины $H_1 (h < H_1)$, то $C = C_1 = 1/2$ и оператор (2.4.46) переходит в оператор из [97]; если h больше некоторой величины $H_2 (h > H_2)$, то $C = C_2 = 0{,}1$; если $H_2 > h > H_1$, то C меняется линейно в зависимости от h в пределах от $C = C_1$ до $C = C_2$. Численные эксперименты показали, что оператор (2.4.46) позволяет получить достаточно гладкие решения уравнения движения следа, причем повторное его применение мало влияет на форму поверхности следа.

Координаты вихрей, сошедших с поверхности тела в последний расчетный момент времени T, определяются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&X_T^{T,\beta} = X^{\alpha^*,\beta} + \left[v_\tau^\beta \cos\left(\tau^{\alpha^*,\beta}, x\right) + v_l^\beta \cos(l,x)\right] \Delta_t t;\\
&Y_T^{T,\beta} = Y^{\alpha^*,\beta} + \left[v_\tau^\beta \cos\left(\tau^{\alpha^*,\beta}, y\right) + v_l^\beta \cos(l,y)\right] \Delta_t t;\\
&Z_T^{T,\beta} = Z^{\alpha^*,\beta} + \left[v_\tau^\beta \cos\left(\tau^{\alpha^*,\beta}, z\right) + v_l^\beta \cos(l,z)\right] \Delta_t t;\\
&(\beta = 1, 2, \ldots, B),
\end{aligned}\right\} \tag{2.4.47}$$

где $X^{\alpha^*,\beta}$, $Y^{\alpha^*,\beta}$, $Z^{\alpha^*,\beta}$ — координаты точки (α^*, β) линии схода потока с поверхности тела. Входящие в (2.4.47) косинусы являются косинусами углов между линией схода потока τ или ортогональной ей линией $l \subset S$ в точках (α^*, β) (см. рис.2.23) и осями координат. Причем если $H^\mu > 0$ (2.4.19), т. е. $l \subset S_1$, то линия l параллельна отрезку $\Delta l_{\alpha^*-1,\beta}^{\alpha^*,\beta}$. Если $H^\mu < 0$, т. е. $l \subset S_2$, то нужно принимать, что l направлена параллельно $\Delta l_{\alpha^*+1,\beta}^{\alpha^*,\beta}$ (см. рис. 2.23). Компоненты скорости сноса вихрей с поверхности тела v_τ^μ и v_l^μ в последний момент времени T в соответствии с (2.4.8), (2.4.9) в узловых точках с использованием линейной интерполяции по поверхностным координатам, например, когда введены предельные значения для плотности диполей в следе и на теле, как это сделано в выражениях (2.4.27)–(2.4.31), могут быть представлены в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\upsilon_l^{\beta} = -\frac{1}{2}\sqrt{|H^{\beta}|}\,\mathrm{sign}H^{\beta};\\ &H^{\beta} = 4\pi\frac{\nu_{3,\beta}^{T} - \nu_{3,\beta}^{T-1} + \nu_{3,\beta+1}^{T} - \nu_{3,\beta+1}^{T}}{\Delta_t t} +\\ &\qquad + 16\pi^2\left[\left(\frac{\nu_{2,\beta+1} - \nu_{2,\beta}}{\Delta\tau_{\alpha^*,\beta}^{\alpha^*,\beta+1}}\right)^2 - \left(\frac{\nu_{1,\beta+1} - \nu_{1,\beta}}{\Delta\tau_{\alpha^*+1,\beta}^{\alpha^*+1,\beta+1}}\right)^2\right];\\ &\upsilon_{\tau}^{\mu} = 2\pi\frac{\nu_{1,\beta+1} - \nu_{1,\beta} + \nu_{2,\beta+1} - \nu_{2,\beta}}{\Delta\tau_{\alpha^*,\beta}^{\alpha^*,\beta+1}}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.48)$$

Здесь α^*, в соответствии с рис. 2.23, — номер координатной линии τ (линии схода) на теле, от которой отходит след S_3, $\Delta\tau_{\alpha^*,\beta}^{\alpha^*,\beta+1}$ — шаг по направлению τ между расчетными точками.

2.4.5. Краткое описание программ расчета отрывного нестационарного обтекания тел. По описанному выше алгоритму были разработаны программы расчета трехмерного отрывного нестационарного обтекания тел с фиксированной линией схода потока с поверхности тела. С целью решения задачи чисто осесимметричного обтекания тел, для отработки методики расчета и сокращения в этом случае времени счета в программе была предусмотрена возможность с помощью метки, вводимой в блок начальных данных, производить расчет осесимметричного течения с сокращенной (за счет осевой симметрии) матрицей, к которой сводится уравнение (2.4.3). Программа построена по блочному принципу, блок-схема программы представлена на рис. 2.26.

Программа состоит из основной программы и 11 подпрограмм. Основными исходными данными задачи являются: координаты точек поверхности обтекаемого тела или уравнение поверхности тела, число участков разбиения $A \times B$ (см. рис. 2.23), номер α^* линии, к которой примыкает поверхность следа, закон изменения поступательной скорости движения тела $V(t)$ по времени и расчетный шаг по времени $\Delta_t t$, начальные координаты поверхности S_3 тангенциального разрыва.

Основная программа осуществляет вызов подпрограмм и на каждом расчетном шаге по времени производит решение системы алгебраических уравнений и определение неизвестной плотности диполей в следе, при этом использовался как итерационный метод решения с помощью соотношений (2.4.13)–(2.4.18), так и с помощью соотношений (2.4.32), (2.4.33). Кроме того, в основной программе осуществляется вывод результатов расчета на внешнее устройство: нагрузки, действующие на тело, распределение давления, скорость и плотность диполей на поверхности тела, координаты точек следа, расчетный момент времени и так далее. В основной программе также производится с определенным шагом по расчетному времени обращение к подпрограмме ЗАПИСЬ, которая осуществляет запись на внешнее магнитное устройство всей памяти компьютера, занятой основной программой и подпрограммами. Это производится с целью проведения расчета обтекания

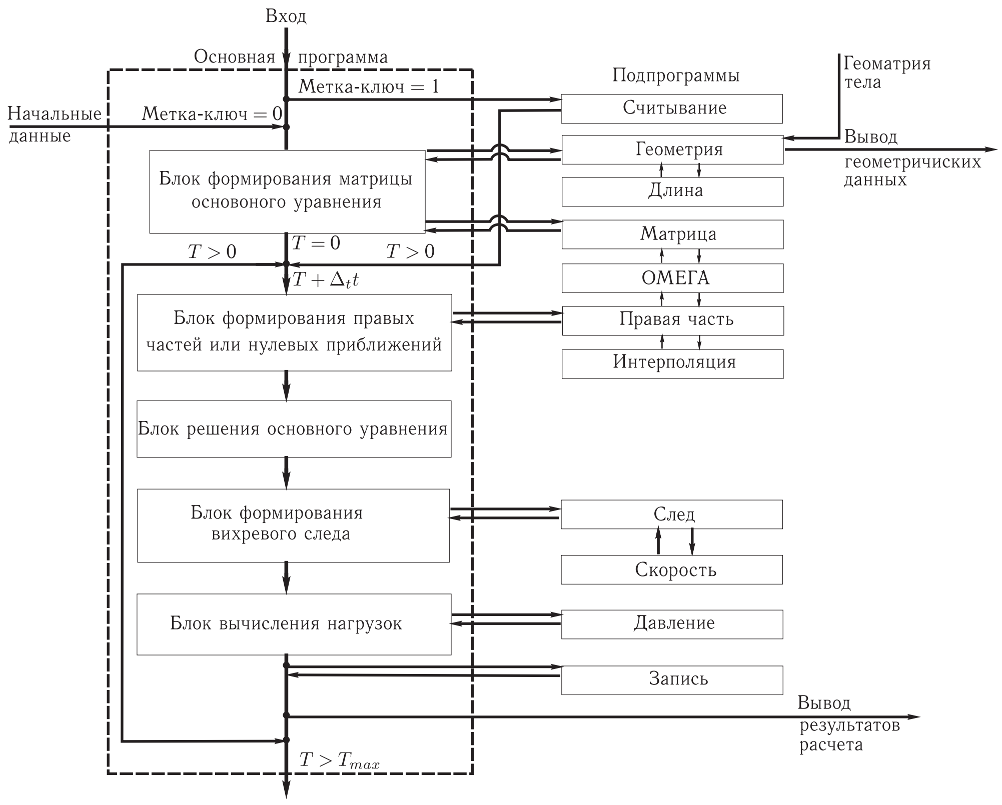


Рис. 2.26. Блок-схема программы расчета

тела по «кускам», т. е. при прерванном по какой-либо причине счете позволяет его продолжить. Для продолжения счета в программе достаточно поменять значение метки-ключа, характеризующей тип режима работы программы (работа сначала или продолжение счета), с величины 0 на 1 и ввести программу в компьютер повторно. Тогда в основной программе произойдет обращение к подпрограмме СЧИТЫВАНИЕ, которая осуществляет считывание с внешнего магнитного устройства в память компьютера результатов, записанных с помощью подпрограммы ЗАПИСЬ. Далее счет будет продолжен, но уже без обращения к двум вспомогательным подпрограммам — ГЕОМЕТРИЯ и МАТРИЦА (о назначении этих подпрограмм будет сказано ниже). Рассмотрим теперь работу подпрограмм, придерживаясь при этом последовательности их вызова в основную программу, для случая проведения расчета обтекания тела сначала, т. е. с первого расчетного момента времени.

В подпрограмме ГЕОМЕТРИЯ задаются или вычисляются координаты точек поверхности тела, а также вводятся все исходные данные. Кроме того, в этой подпрограмме происходит вычисление площадей элементарных ячеек, на которые разбита поверхность обтекаемого тела; они необходимы при вычислении давления. Подпрограмма ГЕОМЕТРИЯ производит также вычисление длин линейных элементов между расчетными точками, которые необходимы при численном дифференцировании плотностей диполей по поверхности тела. Для этого она обращается к подпрограмме ДЛИНА, которая производит вычисление длин отрезков. Все выходные данные подпрограммы ГЕОМЕТРИЯ могут записываться на внешнее магнитное устройство.

Подпрограмма МАТРИЦА осуществляет формирование матрицы коэффициентов (телесных углов $\Omega^{p,q}_{a,b}$ (2.4.18), (2.4.32)) исходного уравнения и, если матрица большая, запись отдельных кусков этой матрицы на внешнее магнитное устройство. Для вычисления коэффициентов матрицы она обращается к подпрограмме ОМЕГА, осуществляющей вычисление телесных углов, под которыми видны элементы поверхности, по соотношениям (2.4.38)–(2.4.40).

Подпрограмма ПРАВАЯ ЧАСТЬ формирует либо правые части $\Psi^{(0)}_{a,b}$ (2.4.32) уравнения (2.4.3), либо $\nu^{(m)}_{0_{a,b}}$ (2.4.18) — нулевые приближения при решении этого уравнения методом итераций (2.4.17) на каждом шаге по времени. Для вычисления телесных углов $\Omega^{T,\mu}_{a,b}, \Omega^{t,\mu}_{a,b}$ она также обращается к подпрограмме ОМЕГА. Для более точного вычисления правых частей уравнений вблизи линии схода потока она обращается к подпрограмме ИНТЕРПОЛЯЦИЯ, которая путем интерполяции поверхности следа вблизи линии схода позволяет повысить точность вычисления $\Omega^{T,\mu}_{a,b}$.

Подпрограмма СЛЕД осуществляет вычисление деформаций свободной поверхности тангенциального разрыва по соотношениям (2.4.44)–(2.4.48), при этом для вычисления по соотношениям [14] входящих в (2.4.45) скоростей, индуцируемых телом и свободным следом, она обращается к подпрограмме СКОРОСТЬ. В подпрограмме СЛЕД предусмотрена возможность применения регуляризующих операторов, подобных оператору в работе [97], например (2.4.46).

Подпрограмма ДАВЛЕНИЕ производит вычисление давления на поверхности тела по соотношениям (2.4.41)–(2.4.42) и коэффициентов аэродинамических сил и моментов по соотношениям (2.3.68),(2.3.69) разд. 2.3.5.

2.4.6. Некоторые результаты расчетов осесимметричных течений. С помощью описанных численного метода и программ были проведены расчеты обтекания различных тел: безотрывное обтекание эллипсоида вращения; отрывное осесимметричное обтекание полуэллипсоида, конуса и комбинации «конус — полубесконечный цилиндр».

Вопросы методики расчета. С целью отработки методики расчета и сравнения результатов расчета с известным точным решением, было получено численное решение задачи о бесциркуляционном обтекании эллипсоида вращения, что соответствует решению уравнения (2.4.3) с правой частью, равной Φ. Решение искалось методом исследовательных приближений в виде (2.4.17). При различном «разбиении» поверхности эллипсоида на элементарные участки было получено хорошее соответствие результатов проведенных расчетов с точным решением [87]. На рис. 2.26 приведено сравнение результатов расчета потенциала, скорости и коэффициента давления на поверхности эллипсоида вращения с полуосями $a = 1$, $b = c = 0{,}5$ при обтекании его потоком со скоростью на бесконечности $V = 1$, при числе ячеек по окружности 24, по образующей 20. Проведены расчеты как с равномерной, так и неравномерной

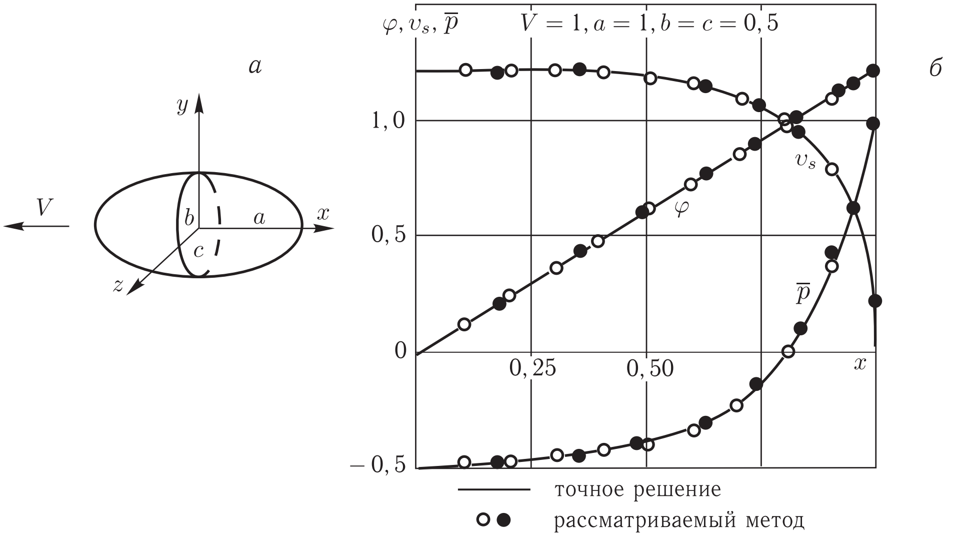


Рис. 2.27. Бесциркуляционное обтекание эллипсоида вращения (*а*). Сравнение результатов расчета потенциала $\varphi(x)$, скорости $v_S(x)$ и коэффициента давления $\overline{p}(x)$ на поверхности эллипсоида вращения (*б*)

сеткой вдоль образующей (темные и светлые точки); процесс итераций продолжался до достижения относительной точности решения 0,01 по плотности потенциала двойного слоя, число итераций при этом равнялось 9. Видно хорошее совпадение результатов.

При расчетах осесимметричного отрывного нестационарного обтекания тел проводились методические оценки влияния размеров ячеек сетки на поверхности тела на форму свободной вихревой пелены и распределение давления. Так, при исследовании обтекания конуса образующая конуса и радиус его донышка разбивались в одном случае на 20, а в другом — на 30 участков. Было установлено, что увеличение числа разбиения практически не влияло на результаты расчетов движения следа и распределения давления. Поэтому с целью экономии компьютерного времени в расчетах осесимметричного обтекания конуса и полуэллипсоида число участков разбиения принималось равным 20 (10 — по боковой поверхности и 10 — по радиусу донышка). Причем, при вычислении матрицы основного уравнения и правых частей при решении осесимметричной задачи в виде (2.4.17), (2.4.18) или (2.4.32), (2.4.33) кольцевые элементы поверхностей тела и следа, по которым плотность диполей постоянна, для повышения точности расчета разбивались всегда на 36 частей по окружности. В блок вычисления скоростей для определения деформации свободной вихревой пелены достаточно далеко по безразмерному времени вводилась оценка расстояния от точки вычисления скорости до вихря, индуцирующего эту скорость. По оценке расстояния устанавливалось число участков разбиения по окружности вихревого следа — оно равнялось: 72 при $0{,}2R \geqslant r > 0$; 36 — при $0{,}5R \geqslant r > 0{,}2$; 24 — при $R \geqslant r > 0{,}5R$; 16 — при $r > R$. Здесь r — расстояние между точкой вычисления скорости и точкой расположения вихря, индуцирующего эту скорость; эти точки принадлежат одной плоскости, проходящей через ось тела вращения; R — радиус миделевого сечения тела. Проведенные методические расчеты показали, что при практически такой же точности расчетов, которая получается при постоянной разбивке всех (и ближних, и дальних) вихрей на 72 части по окружности, примененный способ позволяет добиться значительного сокращения компьютерного времени счета.

Расчетный шаг по безразмерному времени $\overline{\tau} = Vt/(2R)$ выбирался таким образом, чтобы, с одной стороны, он был настолько большим, что обеспечивалась бы возможность проведения расчетов течения за телами достаточно далеко по безразмерному времени, а с другой стороны, чтобы он был достаточно малым и, таким образом, мало влиял на форму следа и нагрузки на теле. Было установлено, что шаг $\Delta\overline{\tau} \approx 0{,}05$ близок, в этом смысле, к оптимальному; это согласуется с работой [14], где методическими расчетами для бесконечно тонких тел было показано, что расчетный шаг по времени $\Delta\overline{\tau}$ целесообразно задавать обратно пропорциональным числу вихрей на хорде ($\Delta\overline{\tau} \approx 1/n$), что и соответствует в нашем случае числу расчетных площадок по диаметру донышка осесимметричных тел, равному примерно 20.

Примеры расчета осесимметричных отрывных течений. Рассмотрим теперь результаты расчетов нестационарного отрывного осесимметричного обтекания тел. Пусть полуэллипсоид вращения с полуосями $a = 0{,}84$, $b = c = 0{,}2$ мгновенно приведен в движение с единичной скоростью. Результаты расчета структуры вихревого следа за ним в момент времени, близкий к началь-

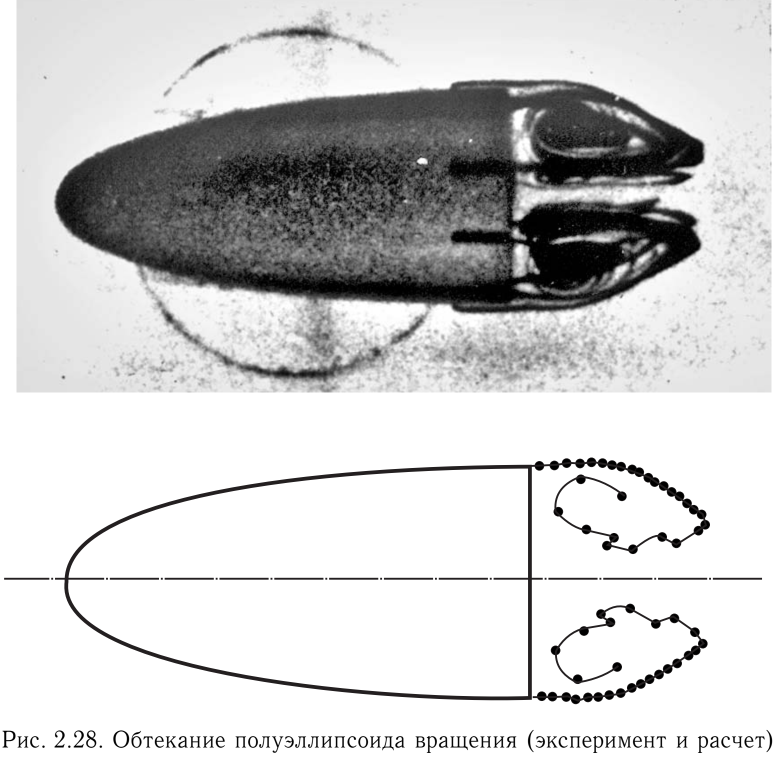


Рис. 2.28. Обтекание полуэллипсоида вращения (эксперимент и расчет)

ному, сравниваются с экспериментальным спектром течения на рис. 2.28. Экспериментальные спектры обтекания этого полуэллипсоида были получены в гидродинамической трубе методом подкрашенных струй и приведены в §4.2. Можно видеть удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных данных. В расчете, как и в эксперименте, наблюдается некоторое «припухание» вихревого следа, так что «миделево» сечение следа на некотором расстоянии от «донышка» тела несколько превышает миделево сечение эллипсоида вследствие индуктивного воздействия на внешнюю часть вихревого следа его внутренних витков. Процесс сворачивания вихревой пелены, сходящей с поверхности полуэллипсоида, в торообразные спиральные вихревые образования более подробно показан на рис. 2.29.

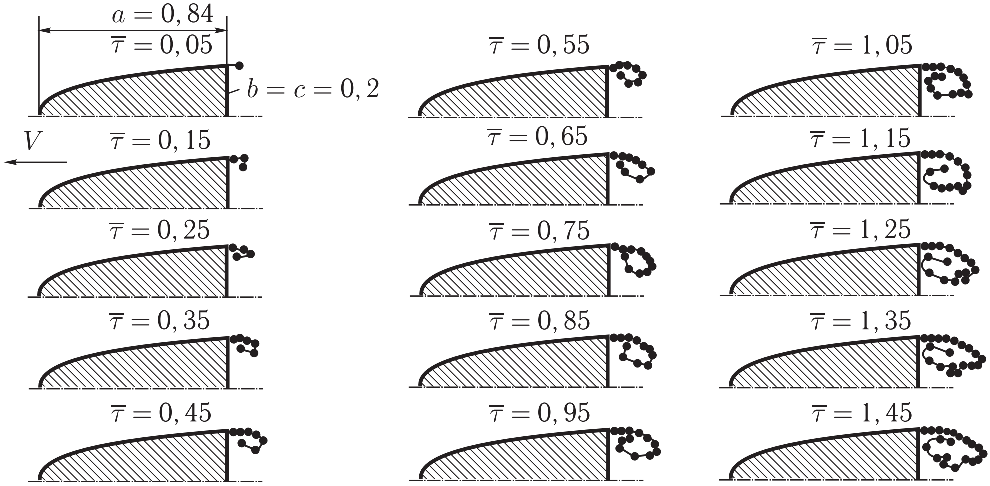


Рис. 2.29. Процесс развития вихревого следа за полуэллипсоидом вращения по безразмерному времени $\overline{\tau}$ в интервале $0,05 \div 1,45$ в торообразные спиральные вихревые образования

Результаты расчета осесимметричного обтекания комбинации «конус — полубесконечный цилиндр», мгновенно приведенной в движение с постоянной единичной скоростью, представлены на рис. 2.30 (угол при вершине конуса 90°). Показаны структуры вихреобразования вблизи угловой точки сочленения конуса и цилиндра и распределение давления в моменты времени, близкие к начальному.

Развитие осесимметричного свободного вихревого следа за конусом с углом при вершине 45°, мгновенно приведенным в движение с постоянной скоростью, показано на рис. 2.31. Видно характерное сворачивание свободной вихревой пелены следа в тороидальные спиральные образования. Метод позволяет рассчитывать достаточно большое число витков вихревой пелены за телом (около четырех). Начиная с момента безразмерного времени $\overline{\tau} \approx 3$, «хвостовая» часть внешнего витка вихревого следа заметно вытягивается по направлению потока, а при $\overline{\tau} \approx 4,8$ становится заметным вторичное сворачивание вихревой пелены в хвостовой части внешнего витка следа. Близкие к этому вторичные сворачивания вихревой пелены в «хвостовой» части следа наблюдаются в опытах при двумерном обтекании полуцилиндра (см. рис. 2.4).

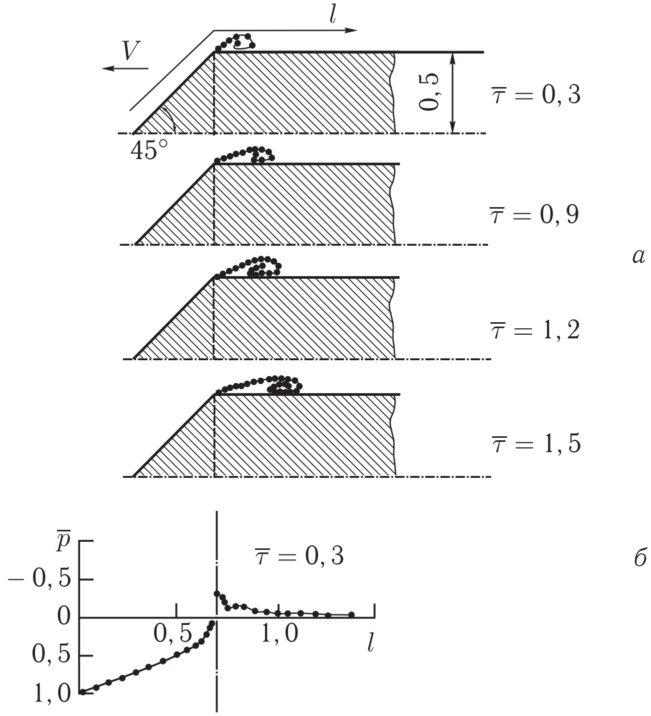


Рис. 2.30. Расчет отрывного обтекания комбинации «конус — полубесконечный цилиндр»: *а* — процесс развития вихревого следа в интервале безразмерного времени $\overline{\tau} =$ 0,3 $\div$ 1,5; *б* — коэффициент давления $\overline{p}(l)$ при $\overline{\tau} = 0{,}3$

Заметим, что «ядро спирали» расположено примерно на уровне миделевого сечения конуса. Строение вихревого следа с ростом $\overline{\tau}$ становится более сложным, за конусом образуется обширная завихренная зона ($\overline{\tau} \approx 6{,}0 \div 8{,}7$). Следует отметить также, что за конусом вблизи его оси индуцируется весьма значительная по величине скорость, направленная в сторону донышка, на что указывает большой шаг между вихрями, моделирующими вихревую пелену в области, примыкающей к донышку. Мгновенные векторные поля скоростей за конусом в безразмерные моменты времени $\overline{\tau} = 4{,}8$ и 7,2 представлены на рис. 2.32. Характерные эпюры распределения скорости [1] и давления по поверхности конуса при его осесимметричном обтекании в момент времени, близкий к начальному ($\overline{\tau} = 1{,}5$), и при достаточно развитом осесимметричном обтекании ($\overline{\tau} = 6$) приведены на рис. 2.33. Отметим обнаруженный в расчетах линейный характер нарастания скорости от центра донышка конуса, где находится точка торможения потока, к его краю вплоть до $0{,}5R$–$0{,}75R$, где R — радиус донышка. Аналогичное явление наблюдается и при обтекании клина, установленного под нулевым углом атаки и мгновенно приведенного в движение с постоянной скоростью (см. § 2.2). На участке $0{,}5R$–$0{,}75R$

[1] Скорость считается положительной, если она совпадает с направлением обхода поверхности тела, указанным на рис. 2.32, *а* и отрицательной, если она противоположна этому направлению.

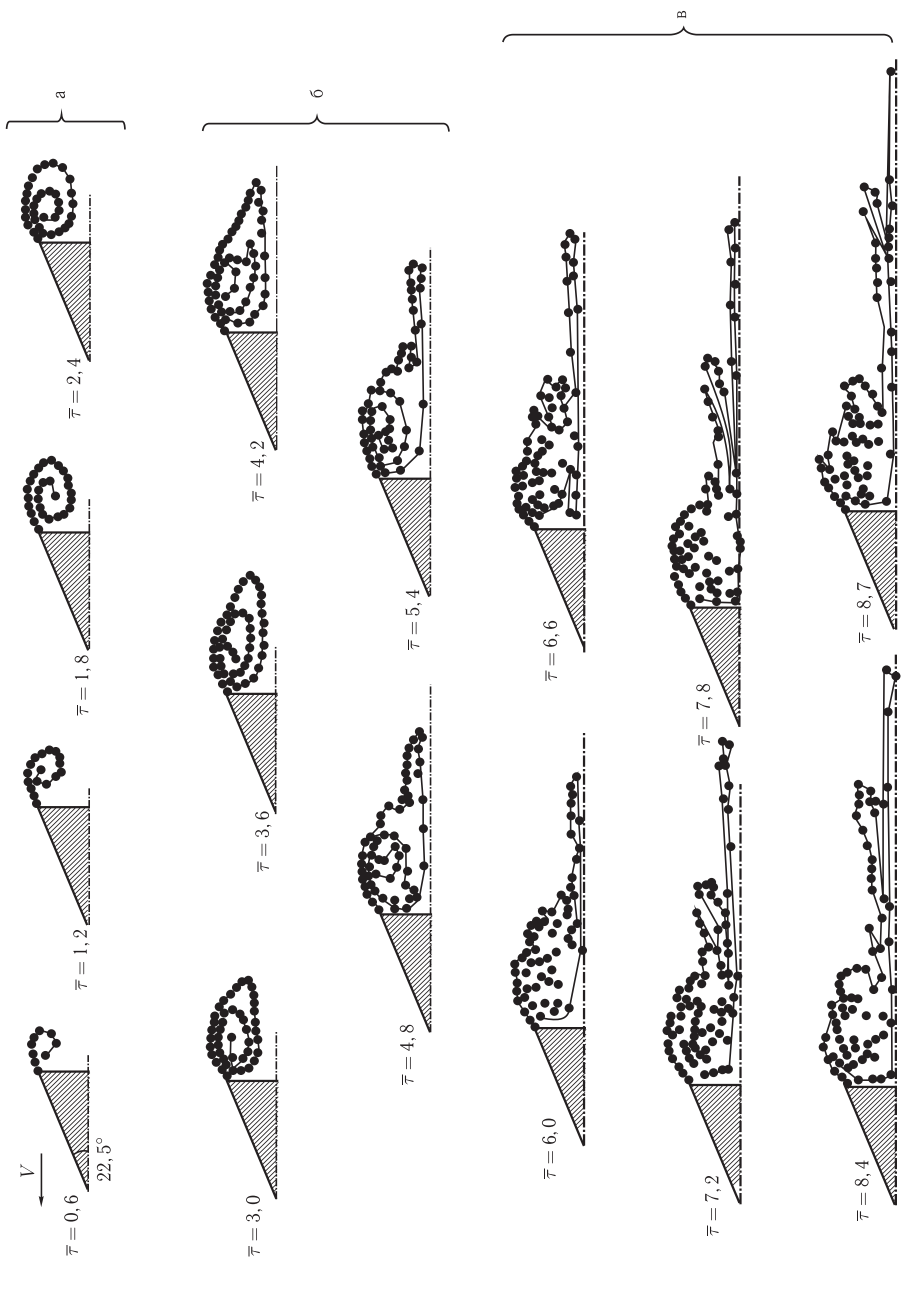


Рис. 2.31. Расчет развития вихревого осесимметричного течения за конусом с углом раствора 45° (точками моделируется свободная вихревая пелена): *а* — характерное сворачивание свободной вихревой пелены в тороидные спиральные образования ($\overline{\tau} = 0,6 \div 2,4$); *б* — вытягивание внешнего витка вихревого следа и вторичное сворачивание вихревой пелены ($\overline{\tau} = 3,0 \div 5,4$); *в* — за конусом образуется обширная завихренная зона ($\overline{\tau} = 6,0 \div 8,7$).

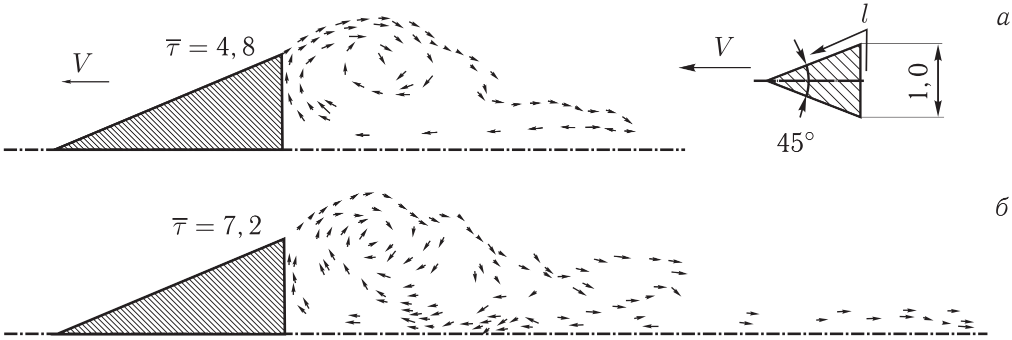


Рис. 2.32. Мгновенные поля скоростей в следе за конусом (стрелками показаны местные скорости): *а* — $\overline{\tau} = 4{,}8$; *б* — $\overline{\tau} = 7{,}2$

скорость на поверхности донышка конуса достигает максимального значения, а в окрестности угловой точки на донышке обращается в нуль в соответствии с соотношением (2.4.5). На боковой поверхности конуса ($\overline{\tau} = 6$) скорость от вершины конуса к его донышку непрерывно нарастает вплоть до $l \approx 0{,}7$, а вблизи донышка ($l \approx 0{,}7 \div 0{,}5$) мало меняется вдоль образующей (см. рис. 2.33). Такому «выполаживанию» эпюры скоростей, видимо, способствует указанное выше некоторое «припухание» свободного вихревого следа: элементы следа, расположенные выше касательной к боковой поверхности конуса, индуцируют скорости, направленные от донышка к вершине конуса, и, таким образом, осуществляется некоторое торможение потока на боковой поверхности тела вблизи точки схода. Следует отметить, что в начальные моменты времени на донной поверхности конуса (см. рис. 2.33) достигаются большие разрежения, причем существенный вклад в давление вносит не только скорость, но и производная по времени от гидродинамических особенно-

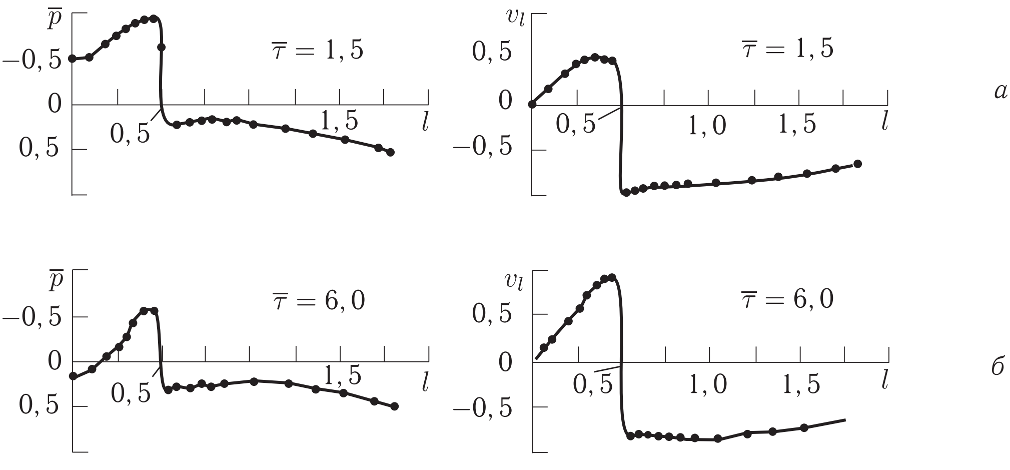


Рис. 2.33. Эпюры распределения скорости v_l и давления $\overline{p}$ по поверхности конуса при его осесимметричном обтекании в момент времени, близкий к начальному (*а*) — $\overline{\tau} = 1{,}5$, и при достаточно развитом отрывном обтекании (*б*) — $\overline{\tau} = 6{,}0$

стей (см. формулу (2.4.41)). Это можно видеть из эпюр скоростей и давлений на донной поверхности конуса ($\overline{\tau} = 1{,}5$), причем характер изменения коэффициента давления по радиусу донышка конуса подобен изменению нагрузки на бесконечно тонком диске при его осесимметричном обтекании, полученному расчетом в работе [14]. С течением времени коэффициент давления в точке торможения (в центре донышка) и вблизи угловой точки на донной поверхности конуса становится равным нулю, а затем принимает положительные значения, но в исследованном диапазоне безразмерного времени не достигает значения 1 из-за существенной нестационарности течения. Расчетное значение коэффициента сопротивления конуса C_x, как и при расчетах осесимметричного обтекания плоского, вогнутого и выпуклого бесконечно тонких круглых дисков [14], с течением времени стремится к экспериментальному среднему по времени значению $C_x^* \approx 0,48$ [162] (см. рис. 2.34).

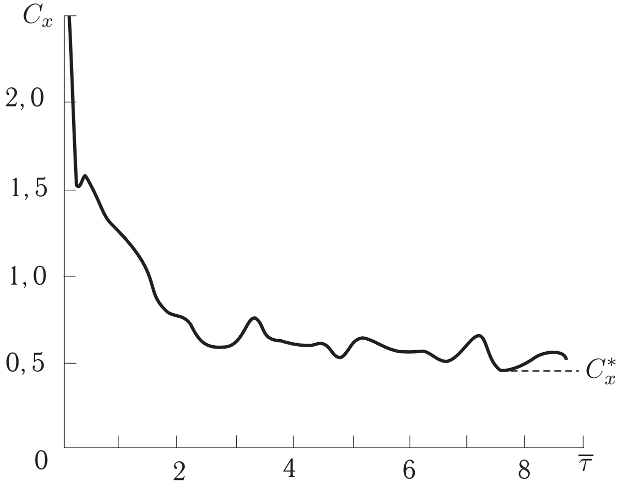


Рис. 2.34. Расчетное значение коэффициента сопротивления конуса C_x при его осесимметричном обтекании

Следует отметить, что в реальном течении всегда существуют возмущения, которые приводят со временем к потере устойчивости, разрушению чисто осесимметричного течения и выравниванию среднего по времени давления по донышку. Расчет такого течения может быть произведен путем решения неосесимметричной задачи обтекания тела на основе рассмотренного общего метода решения задачи отрывного нестационарного обтекания тела и разработанных программ, например, путем введения неосесимметричных малых возмущений в задачу обтекания (малые неосесимметричные деформации вихревой пелены и др.) или путем расчета обтекания тела (конуса, полуэллипсоида и др.) под небольшим, не равным нулю, углом атаки. Следует, однако, подчеркнуть, что принятая осесимметричная модель обтекания тел достаточно хорошо описывает осесимметричное обтекание тела в начальные моменты при его мгновенном разгоне от нулевой до некоторой постоянной скорости, о чем свидетельствует хорошее соответствие расчетных и экспериментальных спектров течения; известно, что осесимметричное течение при таком разгоне сохраняется достаточно долго даже при сравнительно сильных неосесимметричных возмущениях, вносимых в поток (см. §4.2). Осесимметричная модель течения также дает хорошие результаты и при движении осесимметричного тала с большими ускорениями, о чем свидетельствует удовлетворительное соответствие экспериментальных и расчетных данных исследования нагрузок на бесконечно тонком диске [106]. Можно предположить, что при реальном обтекании комбинации «конус — полубесконечный цилиндр» режим осесимметричного течения будет сохраняться дольше, чем в случае обтекания изолированного конуса, из-за увеличения устойчивости течения вследствие экранного эффекта и диссипации энергии, обусловленных наличием цилиндра в области отрывной зоны.

§ 2.5. Распространение метода теории потенциала на случай обтекания тел произвольным (вихревым нестационарным) внешним потоком идеальной несжимаемой жидкости

2.5.1. Исходные соотношения. Пусть твердое, непроницаемое тело конечной толщины, ограниченное кусочно-гладкой поверхностью S, обтекается потоком идеальной несжимаемой жидкости, имеющим скорость невозмущенного данным телом течения $\mathbf{W}$. Вектор скорости, возмущенной данным телом, обозначим через $\boldsymbol{\upsilon}$. Граничное условие на поверхности тела S выразится как

$$(\mathbf{W}+\boldsymbol{\upsilon})\cdot\mathbf{n}=0, \qquad (2.5.1)$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к S. Считаем, что в общем случае движение пространственное; векторы $\boldsymbol{\upsilon}$ и $\mathbf{W}$ являются функциями координат и времени. Предполагается, что $\boldsymbol{\upsilon}$ на бесконечном расстоянии от тела стремится к нулю и обладает потенциалом:

$$\boldsymbol{\upsilon}=\nabla\varphi_1.$$

Вектор скорости $\mathbf{W}$ складывается из потенциального вектора

$$\mathbf{V}=\nabla\varphi_2$$

и соленоидального вектора $\mathbf{u}$, который определяется соотношениями [26, 79]:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{u}=\nabla\times\boldsymbol{\varphi}^{\omega}, \quad \boldsymbol{\varphi}^{\omega}=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G}\frac{\boldsymbol{\omega}dG}{R},\\ &\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\mathbf{u}, \quad \Delta\boldsymbol{\varphi}^{\omega}=-\boldsymbol{\omega}, \end{aligned}\right\} \qquad (2.5.2)$$

или законом Био–Савара

$$\mathbf{u}=-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G}\frac{\mathbf{R}\times\boldsymbol{\omega}}{R^3}dG. \qquad (2.5.2,a)$$

Здесь G — весь объем жидкости, занятый вихрями, Δ — оператор Лапласа, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, $|\mathbf{R}|=R=|P-P_0|$ — расстояние между точкой P_0, в которой вычисляется векторный потенциал или скорость, и точкой $P_0\in G$. Вектор $\mathbf{u}$ непотенциален, если $P_0\in G$, и может быть потенциальным, когда $P \notin G$. На функцию $\boldsymbol{\omega}$ — вектор завихренности — накладываются условия, обеспечивающие существование интеграла в (2.5.2), и в частности, для трехмерной области G, простирающейся в бесконечность, это может быть [79]

$$|\boldsymbol{\omega}| < \frac{A}{|\mathbf{R}|^{2+\lambda}} \quad \text{при} \quad |\mathbf{R}| \to \infty,$$

где $A > 0$ — некоторая конечная величина; $0 < \lambda < 1$.

Таким образом, суммарная скорость определяется как

$$\mathbf{U} = \mathbf{W} + \boldsymbol{\upsilon} = \mathbf{V} + \mathbf{u} + \boldsymbol{\upsilon}. \tag{2.5.3}$$

Поле скорости (2.5.3) удовлетворяет уравнению движения (см. [26]):

$$\mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \nabla H, \tag{2.5.4}$$

где

$$H = \frac{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}{2} + \frac{p}{\rho};$$

p — давление; ρ — плотность жидкости.

В том случае, когда поле скоростей в окрестности поверхности тела S во все время движения t потенциально, что имеет место, если к S не примыкают объемы с особенностями или примыкают лишь свободные поверхности S_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, разрыва касательных скоростей, эта задача совершенно аналогична задаче, рассмотренной в § 2.3, и сводится:

— к решению интегральных уравнений Фредгольма II-го рода относительно плотности потенциала двойного слоя, распределенного по поверхностям S и S_i, при некоторых условиях, накладываемых на плотность потенциала двойного слоя, на линиях сопряжения этих поверхностей;

— к решению в каждый момент времени нелинейных интегральных уравнений движения поверхностей S_i.

2.5.2. Метод решения задачи. Если поле скоростей в окрестности S непотенциально, то необходимо решать уравнение движения (2.5.4) при граничном условии (2.5.1). Однако и в данном случае эта задача может быть решена аналогично § 2.3.

Как известно, решение поставленной задачи можно свести к решению чисто кинематической задачи о перемещении завихренности во внешней к поверхности S области G_- и к динамической задаче определения гидродинамических реакций на внешней поверхности тела S_-. Кинематическое условие для завихренности — уравнение Гельмгольца — получается путем вычисления операции ротора от уравнения движения (2.5.4) и имеет вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}) = 0. \tag{2.5.5}$$

Уравнение (2.5.5) можно решать различными методами, например путем построения пространственной вихревой сетки из дискретных вихрей и транспортировки элементов этой сетки со скоростью $\mathbf{U}$ как жидких частиц, аналогично известному (см., например, § 2.3) решению в лагранжевых координатах уравнений движения поверхностей тангенциальных разрывов S_i, которые также существуют в области течения и могут примыкать к S.

Если, когда в какой-то части поверхности S

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} \neq 0,$$

на вектор завихренности $\boldsymbol{\omega}$ необходимо наложить некоторые дополнительные условия на границе, так как в этом случае задача недоопределена. Будем считать, что в отличие от § 2.3 наоборот — во внутренней области тела G_+, ограниченной поверхностью S,

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0, \tag{2.5.6}$$

во внешней же области согласно (2.5.2)

$$\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \tag{2.5.7}$$

Рассматривая интегралы по замкнутым контурам $L_- \subset S_-$ и $L_+ \subset S_+$, где S_- и S_+ — внешняя и внутренняя стороны поверхности S, обращенные соответственно в G_- и G_+, от скорости $\mathbf{u}$, обусловленной объемными вихрями (см. соотношения (2.5.2) или (2.5.2, a)), и применяя к ним формулу Стокса, получим аналогично § 1.2, § 2.3, что по S в этом случае необходимо распределить поверхностные вихри. Они могут быть представлены в виде

$$\boldsymbol{\gamma}^{\omega} = \mathbf{n} \times \mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}_S, \tag{2.5.8}$$

где $\mathbf{u}_S$ — проекция $\mathbf{u}$ на S. Можно совершенно аналогично § 2.3 показать, что при этом условия (2.5.6) и (2.5.7) будут выполнены в силу формулы Стокса и непрерывности $\mathbf{u}$ при переходе через S, так как производные от объемного векторного потенциала $\boldsymbol{\varphi}^{\omega}$ в (2.5.2) непрерывны на границе.

Если по поверхности S и поверхностям тангенциальных разрывов S_i, которые могут примыкать к S, распределить двойной слой и потенциал возмущенной телом и следом скорости искать в виде потенциала двойного слоя, то в силу непрерывности (2.5.1) при переходе с S_- на S_+ и в силу существования в области G_+ потенциала скорости $\mathbf{U}$ задача отыскания потенциала возмущенной скорости $\boldsymbol{\upsilon}$, совершенно аналогично § 2.3, сводится к интегральному уравнению для плотности потенциала двойного слоя ν:

$$2\pi\nu\,(P_0,t) - \iint\limits_S \nu\,(P,t)\,K\,(P_0,P)\,dS = \psi\,(P_0,t)\,, \tag{2.5.9}$$

$$\psi\,(P_0,t) = -\varphi_2 - \overline{F} + \iint\limits_{S_k} \nu\,(P,t)\,K\,(P_0,P)\,dS + \iint\limits_{S_m} \nu\,(P,t)\,K\,(P_0,P)\,dS, \quad \text{где}$$

$$k = 1,2,\ldots N; \qquad m = 1,2,\ldots M.$$

Здесь S_k, S_m — поверхности тангенциальных разрывов, соответственно примыкающие и не примыкающие к S; $K(P_0,P) = -\dfrac{\partial}{\partial n}\dfrac{1}{r}$; r — расстояние от точки $P_0 \in S$ до точек $P \in S$ или $P \in S_k$, $P \in S_m$; n — нормаль в точке P к S, S_k или S_m. Функция $\overline{F}$ в G_+ является потенциалом, обусловленным вихрями $\boldsymbol{\omega}$ в G_- и поверхностными вихрями $\boldsymbol{\gamma}^{\omega}$. Она аналогична потенциалу F_0 в (2.3.53) и может быть найдена как интеграл по любому пути в G_+ от вектора скорости, обусловленного объемными $\boldsymbol{\omega}$ и поверхностными $\boldsymbol{\gamma}^{\omega}$ вихрями, и подобно [79] сведена к поверхностному интегралу.

Так как поле скоростей, индуцируемое объемными вихрями , непрерывно, то на линиях схода потока с поверхности тела выполняются те же условия для плотности потенциала двойного слоя и ее производных по направлениям, что и в § 1.1, § 2.3. При этом скорость на внешней поверхности тела G_- также представляется в виде

$$\boldsymbol{\upsilon}_{S_-} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\gamma},$$

где $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}^{\nu} + \boldsymbol{\gamma}^{\omega}$ — вектор поверхностной завихренности, обусловленный двойным слоем $\boldsymbol{\gamma}^{\nu}$ и введенным вихревым слоем $\boldsymbol{\gamma}^{\omega}$ (2.5.8). Уравнение (2.5.9) может решаться методами, описанными в § 1.3, § 2.3.

2.5.3. Давление жидкости на поверхности тела. Поле давлений в G_- в общем случае будет определяться теперь уже не интегралом Коши–Лагранжа, как в § 2.3, где в этой области существовал потенциал абсолютных скоростей жидкости, а уравнением (2.5.4), так как в рассматриваемом случае абсолютная скорость движения жидкости непотенциальна:

$$\nabla \left(\frac{p_-}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \right) = \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}.$$

Учитывая, что векторы $\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\upsilon}$, входящие в (2.5.3), являются потенциальными, и используя формулу полного дифференциала для нахождения потенциала, будем иметь:

$$\frac{p_-}{\rho} = F(t) - \frac{\upsilon_{S_-}^2}{2} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \int_{l_0}^{l_1} \left(\mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \cdot dl,$$

где точки $l_0 \in S_-$, $l_1 \in S_-$, а путь $l_0 l_1 \subset G_-$ или S_-. Совершенно аналогично § 2.3, учитывая свойства потенциалов, входящих в правую часть ψ уравнения (2.5.9), при переходе через поверхность S получим:

$$\frac{p_-}{\rho} = F(t) + \frac{\partial \overline{F}}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma} + \int_{l_0}^{l_1} \left(\mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{l}. \tag{2.5.10}$$

Таким образом, принципиально (2.5.10) отличается от выражения для давления, полученного в § 2.3, наличием интеграла по пути $l_0 l_1$. Входящие в (2.5.10) функции $\mathbf{u}$ и $\boldsymbol{\omega}$ определяются соотношениями (2.5.2). В некоторых частных случаях интеграл в (2.5.10) может быть вычислен. Если интегрирование в (2.5.10) производить по мгновенным линиям тока $l_0 l_1 \subset S_-$ скорости $\mathbf{U}$, то интеграл от $\mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega}$ по пути $l_0 l_1$ будет равен нулю. В этом случае при плоском течении $\mathbf{U}$ и $\boldsymbol{\omega}$ ортогональны, а вектор $\boldsymbol{l}$ совпадает с $\mathbf{U}$, поэтому интеграл $\int_{l_0}^{l_1} \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{l}$ также обращается в нуль. В общем случае при численной реализации решения задачи обтекания тела вихревым потоком в силу того, что необходимо решать уравнение Гельмгольца, а функции $\mathbf{U}$ и $\boldsymbol{\omega}$ в окрестности поверхности S_- будут определены, интегрирование в (2.5.10) можно производить численно и не по линиям тока скорости $\mathbf{U}$.

Таким образом, полностью найдены кинематические и динамические соотношения, позволяющие решить численно задачу обтекания тела произвольным (вихревым нестационарным) внешним потоком идеальной несжимаемой жидкости.

Глава 3

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА И ЭЙЛЕРА ДЛЯ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ И ВОПРОСЫ СИЛОВОГО ПОДОБИЯ МЕЖДУ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИМИ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

В этой главе для различных классов плоских, осесимметричных и трехмерных стационарных и нестационарных вихревых течений идеальной и вязкой несжимаемой жидкости в поле потенциальных и непотенциальных массовых сил получены соотношения, позволяющие определить изобарические поверхности и семейства поверхностей уровня, вдоль которых функция Бернулли сохраняется постоянной. Таким образом, по сути, получено обобщение уравнения Бернулли для указанного широкого класса течений. Дано компактное представление уравнений Навье–Стокса и Эйлера движения жидкости через градиент от давления или от функции Бернулли и вектор завихренности. Найдено приращение потенциалов (давления и функции Бернулли) при переходе с одной эквипотенциальной поверхности на другую. Получено выражение для силы давления, действующей на объем жидкости, которое в плоском и осесимметричном случаях аналогично формуле Н. Е. Жуковского для подъемной силы.

Кроме того, здесь проведен сравнительный анализ стационарных уравнений гидродинамики и соотношений стационарного магнитного или квазистационарного электромагнитного поля. Показано, что, несмотря на отсутствие аналогии между тензорами напряжений в идеальной несжимаемой жидкости и в указанных электромагнитных полях, существует аналогия между силами и моментами, действующими на тела, помещенные в соответствующие гидродинамическое или электромагнитное поля. Показана возможность определения гидродинамических реакций, действующих на тело в идеальной несжимаемой жидкости, путем применения теории подобия к результатам непосредственного весового измерения главных векторов силы и момента, действующих на тело, помещенное в стационарное магнитное поле. Доказана аналогия между формулой Н. Е. Жуковского о подъемной силе и формулой Ампера для силы, действующей на проводник с током в стационарном магнитном или квазистационарном электромагнитном поле. Получены обобщенные выражения для главных векторов силы и момента, действующих на тело в идеальной несжимаемой жидкости, в виде интегралов от векторного произведения скорости и ротора скорости — вихрей, распределенных по объему или поверхности тела, которые являются обобщением формулы Н. Е. Жуковского на случай объемного и поверхностного распределения завихренности.

§ 3.1. Ортогональные векторные преобразования и фундаментальные свойства уравнений Навье–Стокса и Эйлера для вихревых течений несжимаемой жидкости

3.1.1. Исходные уравнения и их преобразование. В общем случае будут рассматриваться уравнения Навье–Стокса нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в поле как потенциальных, так и непотенциальных массовых сил:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \nu\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\omega} - \mathbf{f} = -\nabla \mathrm{H}, \tag{3.1.1}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{V}, \quad \mathrm{H} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \Pi, \tag{3.1.2}$$

где $\mathbf{V}$ — вектор скорости, t — время, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор завихренности, ν — кинематический коэффициент вязкости, p — давление, ρ — плотность жидкости, Π — потенциал массовых сил, $\mathbf{f}$ — вектор интенсивности непотенциальной части массовых сил, H — функция Бернулли. Полученные ниже результаты будут, очевидно, применимы и для различных частных случаев этих уравнений, например: для уравнений Эйлера движения идеальной несжимаемой жидкости, совпадающих с рассмотренной выше системой, если в (3.1.1) положить $\nu = 0$; для стационарных вязких и невязких течений, а также при наличии только потенциальной или только непотенциальной части массовых сил.

Входящие в (3.1.1) слагаемые будем обозначать $\mathbf{Q}(i)$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(1)} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}, \quad \mathbf{Q}^{(2)} = \nu\, \mathbf{rot}\, \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{Q}^{(3)} = -\mathbf{f}, \\ \mathbf{Q}^{(4)} = \nabla\frac{V^2}{2} = V\nabla V, \quad \mathbf{Q}^{(5)} = \nabla\Pi. \end{aligned}\right\} \tag{3.1.3}$$

Рассматриваются области течения, где вектор завихренности не равен нулю, $\boldsymbol{\omega} \neq 0$.

Плоские и осесимметричные течения. Будем использовать некоторую обобщенную ортогональную систему координат $0mnk$ с единичными ортами по направлениям m, n, k соответственно: $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{k}$. В этой системе входящие в (3.1.1), (3.1.2) операторы выражаются как

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{V} = V_m\mathbf{m} + V_n\mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{V} = \omega\mathbf{k}, \quad \omega = |\boldsymbol{\omega}| = \omega_k, \\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega} = [\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega}]_m\,\mathbf{m} + [\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega}]_n\,\mathbf{n}, \quad \nabla = \mathbf{m}\frac{\partial}{\partial m} + \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial n}. \end{aligned}\right\} \tag{3.1.4}$$

В плоском течении будет также использоваться ортогональная система координат $0xyz$ ($0xy$ — плоскость течения), переход к которой от системы $0mnk$ осуществляется заменой $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{k}, m, n, k$ на $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, x, y, z$ соответственно. В частности, вектор $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}$ (3.1.4) в системе $0xyz$ будет

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega} = \frac{\partial\omega}{\partial y}\mathbf{i} - \frac{\partial\omega}{\partial x}\mathbf{j}. \tag{3.1.5}$$

В осесимметричном течении будет еще использоваться цилиндрическая система осей координат $0zr\varphi$ ($0zr$ — плоскость течения), где z — осевое направление, r — радиальное, φ — угловая координата, с единичными ортами по указанным направлениям $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$, соответственно. Переход от системы $0mnk$ к системе $0zr\varphi$ осуществляется путем замен $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{k}, m, n, k$ на $\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$, z, r, φ, соответственно. Входящий в (3.1.4) вектор $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}$ в этом случае будет

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\omega)}{\partial r}\mathbf{e}_z - \frac{\partial \omega}{\partial z}\mathbf{e}_r. \tag{3.1.6}$$

По ходу изложения будут вводиться также другие координатные системы.

Остановимся на некоторых преобразованиях, которые будут использоваться в дальнейшем. Раскрывая двойное векторное произведение, найдем для любых двух ортогональных векторов $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$ тождество:

$$\mathbf{I} = -\frac{1}{J^2}\mathbf{J} \times (\mathbf{J} \times \mathbf{I}), \quad J = |\mathbf{J}|\,. \tag{3.1.7}$$

Плоское и осесимметричное течения характерны тем, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ ортогонален всем остальным векторам, входящим в уравнение (3.1.1). Поэтому каждый такой вектор $\mathbf{Q}^{(i)}$ (3.1.3):

$$\mathbf{Q}^{(i)} = Q_m^{(i)}\mathbf{m} + Q_n^{(i)}\mathbf{n}, \tag{3.1.8}$$

может быть в соответствии с (3.1.7) представлен в виде

$$\mathbf{Q}^{(i)} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{\mathbf{Q}}^{(i)}, \tag{3.1.9}$$

$$\overline{\mathbf{Q}}^{(i)} = -\frac{1}{\omega^2}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}^{(i)}) = \frac{1}{\omega}(Q_n^{(i)}\mathbf{m} - Q_m^{(i)}\mathbf{n}). \tag{3.1.10}$$

Выражения(3.1.9), (3.1.10) могут быть получены также в результате проектирования вектора $\mathbf{Q}^{(i)}$ на ортогональные векторы $\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$. Для этого вектор $\mathbf{Q}^{(i)}$ запишем в виде:

$$\mathbf{Q}^{(i)} = a^{(i)}\mathbf{V}_+ b^{(i)}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}, \tag{3.1.11}$$

где согласно (3.1.4)

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \omega(V_m\mathbf{n} - V_n\mathbf{m}). \tag{3.1.12}$$

Скалярные функции $a^{(i)}$ и $b^{(i)}$ определяются следующим образом. Подставим (3.1.12) и выражение для $\mathbf{V}$ из (3.1.4) в (3.1.11) и приравняем правые части (3.1.8) и (3.1.11). Приравнивая затем коэффициенты при соответствующих ортах, получим систему двух линейных уравнений относительно $a^{(i)}$ и $b^{(i)}$, разрешая которую, найдем

$$a^{(i)} = \frac{1}{V^2}(Q_m^{(i)}V_m + Q_n^{(i)}V_n), \quad b^{(i)} = \frac{1}{\omega V^2}(Q_n^{(i)}V_m - Q_m^{(i)}V_n). \tag{3.1.13}$$

Применяя к векторам $\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\omega}$ тождество (3.1.7): $\mathbf{V} = -(1/\omega^2)\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V})$, и подставляя выражение (3.1.13) в (3.1.11), получим (3.1.9), (3.1.10). Подобный прием оказался эффективным для трехмерных течений.

Перейдем теперь собственно к преобразованиям уравнения движения. Применим тождество (3.1.9) к слагаемым $\mathbf{Q}^{(i)}$ (3.1.3), входящим в уравнение (3.1.1). Вынося $\boldsymbol{\omega}$, запишем (3.1.1) в виде:

$$\nabla \mathbf{H} = \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{V} + \sum_{i=1}^{3} \overline{\mathbf{Q}}^{(i)}, \tag{3.1.14}$$

или

$$\nabla p = \rho \mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{V} + \sum_{i=1}^{5} \overline{\mathbf{Q}}^{(i)}. \tag{3.1.15}$$

Уравнение движения в форме (3.1.14), или (3.1.15) отражает фундаментальное свойство плоских или осесимметричных вихревых течений: в вихревом течении всегда может быть найден такой вектор $\mathbf{U}$ (или $\rho\mathbf{W}$), что векторное произведение $\mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega}$ (или $\rho\mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega}$) будет равно градиенту функции Бернулли (или градиенту давления). По виду выражение (3.1.15) аналогично формуле Н. Е. Жуковского для подъемной силы и может быть названо в связи с этим уравнением движения в форме Жуковского.

Рассмотрим частные случаи плоского и осесимметричного стационарных течений в поле потенциальных массовых сил. В силу (3.1.3), (3.1.5), (3.1.6), (3.1.10) в этих случаях $\mathbf{U}$ в (3.1.14) приобретает вид:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{V} - \nu \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \omega}{\partial y}\mathbf{j}\right) = \mathbf{V} - \nu \nabla \ln|\boldsymbol{\omega}|, \\ \mathbf{U} &= \mathbf{V} - \nu \frac{1}{\omega}\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\mathbf{e}_z + \frac{1}{r}\frac{\partial(\omega r)}{\partial r}\mathbf{e}_r\right) = \mathbf{V} - \nu\, \nabla \ln|\omega r|. \end{aligned}\right\} \tag{3.1.16}$$

Таким образом, (3.1.14) в этих случаях полностью совпадает с результатами из [25, 64]. Уравнение (3.1.14) было получено в этих статьях исходя из специального представления вектора $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega}$: $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \times \nabla \ln|\boldsymbol{\omega}|$ — для плоского и $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\omega} \times \nabla \ln|\boldsymbol{\omega} r|$ — для осесимметричного течений. Развитые в данной работе подходы позволили записать уравнение движения жидкости в виде (3.1.14) для более широкого класса течений, а также в виде (3.1.15), аналогичном формуле Жуковского.

Трехмерные течения. Операторы, входящие в (3.1.1), (3.1.2), в системе координат $0xyz$ в этом случае имеют вид:

$$\left.\begin{gathered} \mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}, \qquad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{V} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}, \\ \omega_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}, \\ \mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega} = [\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega}]_x\,\mathbf{i} + [\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega}]_y\,\mathbf{j} + [\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega}]_z\,\mathbf{k}, \quad \nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \\ [\mathbf{rot}\ \boldsymbol{\omega}]_x = \frac{\partial \omega_z}{\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z}, \quad [\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}]_y = \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \quad [\mathbf{rot}\,\boldsymbol{\omega}]_z = \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y}. \end{gathered}\right\} \tag{3.1.17}$$

При этом вектор $\boldsymbol{\omega}$ в общем случае не ортогонален векторам $\mathbf{Q}^{(i)}$. Поэтому здесь при преобразованиях уравнения движения будем использовать прием, продемонстрированный выше, основанный на проектировании слагаемых $\mathbf{Q}^{(i)}$ (3.1.3) на ортогональные векторы. Введем ортогональную систему векторов

$$\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}, \quad \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}), \tag{3.1.18}$$

тогда любой вектор $\mathbf{Q}^{(i)}$ в (3.1.3)

$$\mathbf{Q}^{(i)} = Q_x^{(i)}\mathbf{i} + Q_y^{(i)}\mathbf{j} + Q_z^{(i)}\mathbf{k}, \quad i = 1, \ldots, 5, \tag{3.1.19}$$

где $Q_x^{(i)}$, $Q_y^{(i)}$, $Q_z^{(i)}$ — его проекции на оси x, y, z, может быть представлен в виде

$$\mathbf{Q}^{(i)} = a^{(i)}\boldsymbol{\psi} + b^{(i)}\boldsymbol{\theta} + c^{(i)}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \overline{\mathbf{Q}}^{(i)} + c^{(i)}\boldsymbol{\omega}, \tag{3.1.20}$$

где

$$\overline{\mathbf{Q}}^{(i)} = a^{(i)}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + b^{(i)}\mathbf{V};$$

$a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$ — скалярные функции, которые определяются по формулам перехода от системы координат $0xyz$ к системе (3.1.18). Найдем эти функции. Согласно (3.1.17), (3.1.18)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta} &= \vartheta_x\mathbf{i} + \vartheta_y\mathbf{j} + \vartheta_z\mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\psi} &= \psi_x\mathbf{i} + \psi_y\mathbf{j} + \psi_z\mathbf{k}, \end{aligned} \tag{3.1.21}$$

где

$$\begin{aligned} &\vartheta_x = \omega_y V_z - \omega_z V_y, \qquad &&\vartheta_y = \omega_z V_x - \omega_x V_z, \qquad &&\vartheta_z = \omega_x V_y - \omega_y V_x, \\ &\psi_x = \omega_y \vartheta_z - \omega_z \vartheta_y, \qquad &&\psi_y = \omega_z \vartheta_x - \omega_x \vartheta_z, \qquad &&\psi_z = \omega_x \vartheta_y - \omega_y \vartheta_x, \end{aligned}$$

Подставим выражение $\boldsymbol{\omega}$ из (3.1.17) и (3.1.21) в (3.1.20), затем приравняем коэффициенты при одинаковых ортах в (3.1.19) и (3.1.20). Получим систему трех линейных уравнений относительно $a^{(i)}$, $b^{(i)}$, $c^{(i)}$, разрешая которую найдем

$$a^{(i)} = \frac{\Delta_1^{(i)}}{\Delta}, \quad b^{(i)} = \frac{\Delta_2^{(i)}}{\Delta}, \quad c^{(i)} = \frac{\Delta_3^{(i)}}{\Delta},$$

где

$$\Delta = -\omega_x\vartheta_y\psi_z - \vartheta_x\psi_y\omega_z - \psi_x\omega_y\vartheta_z + \omega_x\psi_y\vartheta_z + \vartheta_x\omega_y\psi_z + \psi_x\vartheta_y\omega_z.$$

Величины $\Delta_1^{(i)}$, $\Delta_2^{(i)}$, $\Delta_3^{(i)}$ находятся из соотношений, аналогичных Δ, в которых соответственно ψ_x, ψ_y, ψ_z; ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z и ω_x, ω_y, ω_z заменены на $Q_x^{(i)}$, $Q_y^{(i)}$, $Q_z^{(i)}$.

Записывая теперь слагаемые (3.1.3) согласно (3.1.20), представим уравнение движения жидкости (3.1.1) в виде

$$\nabla \mathrm{H} = \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} + D\boldsymbol{\omega} \tag{3.1.22}$$

или

$$\nabla p = \rho\mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} + \rho C\boldsymbol{\omega}, \tag{3.1.23}$$

где

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} + \sum_{i=1}^{3} \overline{\mathbf{Q}}^{(i)}, \quad D = -\sum_{i=1}^{3} c^{(i)}; \quad \mathbf{W} = \mathbf{V} + \sum_{i=1}^{5} \overline{\mathbf{Q}}^{(i)}, \quad C = -\sum_{i=1}^{5} c^{(i)}. \tag{3.1.24}$$

В отличие от плоского и осесимметричного случаев в (3.1.22) и (3.1.23) входят члены $D\boldsymbol{\omega}$ и $\rho C\boldsymbol{\omega}$, обусловленные проекциями векторов $\mathbf{Q}^{(i)}$ на $\boldsymbol{\omega}$, которые в общем случае трехмерного течения не равны нулю.

3.1.2. Свойства уравнений плоского и осесимметричного течений. Исследуем свойства потенциалов Н и p. Для этого уравнение движения жидкости, представленное выражениями (3.1.14) и (3.1.15), запишем в виде уравнения

$$\nabla E^{(j)} = \boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}, \quad j = 1, 2, \tag{3.1.25}$$

где

$$\text{при} \quad j = 1 : E^{(1)} = \mathrm{H}, \quad \boldsymbol{\Phi}^{(1)} = \mathbf{U}; \quad \text{при} \quad j = 2 : E^{(2)} = p, \quad \boldsymbol{\Phi}^{(2)} = \rho\mathbf{W}.$$

Найдем эквипотенциальные линии потенциала $E^{(j)}$. Для этого умножим скалярно (3.1.25) на $\boldsymbol{\Phi}^{(j)}$. В силу того, что правая часть уравнения будет тождественно равна нулю, получим:

$$\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \cdot \nabla E^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \tag{3.1.26}$$

откуда, используя определение производной по направлению, будем иметь

$$E^{(j)} = \mathrm{const}, \quad j = 1, 2, \tag{3.1.27}$$

вдоль мгновенных векторных линий вектора $\boldsymbol{\Phi}^{(j)}$. Таким образом, эквипотенциальные линии потенциала $E^{(j)}$ являются мгновенными векторными линиями вектора $\boldsymbol{\Phi}^{(j)}$ в каждый фиксированный момент времени t. Этот же результат может быть получен также несколько иным путем. Умножим векторно (3.1.25) на $\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}$, так как правая часть будет тогда тождественно равна нулю, то:

$$\nabla E^{(j)} \times (\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}) = 0;$$

раскрывая это двойное векторное произведение и учитывая, что

$$\nabla E^{(j)} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\omega} \neq 0,$$

получим (3.1.26), (3.1.27).

Если положить $j = 1$, то (3.1.27) приобретает вид

$$\mathrm{H} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \Pi = \mathrm{const}$$

вдоль мгновенных векторных линий вектора $\mathbf{U}$. Это выражение можно трактовать как уравнение Бернулли для общего случая плоских и осесимметричных нестационарных течений как в поле потенциальных, так и непотенциальных массовых сил. В стационарном случае при потенциальных массовых силах это соотношение полностью совпадает с результатами, полученными в [25, 64]. Если положить $j = 2$, то в силу (3.1.27)

$$p = \mathrm{const}$$

вдоль мгновенных векторных линий вектора $\mathbf{W}$, т. е. они являются изобарами.

Потенциал $E^{(j)}$ в (3.1.25) в каждый фиксированный момент времени может быть найден через интеграл по любому пути:

$$E^{(j)}(L) = E^{(j)}(L_0) + \int\limits_L \mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{L}, \quad j = 1, 2, \qquad (3.1.28)$$

где L_0 — начальная точка пути, $d\mathbf{L} = \mathbf{L}dL$, $\mathbf{L}$ — единичный вектор касательной в любой точке пути L. Здесь и в дальнейшем понимается, если это не оговорено особо, что все функции и константы, входящие в (3.1.28), являются функциями времени t. Если $\mathbf{N}$ — единичная нормаль к $\mathbf{L}$ в плоскости течения в любой точке линии L, то в силу того, что

$$\mathbf{L} = \mathbf{N} \times \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega},$$

и свойства скалярного произведения двух векторных произведений

$$\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = (\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \left(\mathbf{N} \times \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}\right) = \omega \mathbf{\Phi}^{(j)} \cdot \mathbf{N}. \qquad (3.1.29)$$

Подставляя (3.1.29) в (3.1.28), получим другое выражение для потенциала

$$E^{(j)}(L) = E^{(j)}(L_0) + \int\limits_L \omega \mathbf{\Phi}^{(j)} \cdot \mathbf{N} dL, \quad j = 1, 2. \qquad (3.1.30)$$

Выберем теперь путь интегрирования таким, чтобы он состоял из отрезка $l^{(j)}$ вдоль мгновенных векторных линий вектора $\mathbf{\Phi}^{(j)}$, единичный вектор вдоль этих линий будем обозначать

$$\boldsymbol{l}^{(j)} = \frac{\mathbf{\Phi}^{(j)}}{\Phi^{(j)}},$$

и отрезка $n^{(j)}$ по нормали

$$\mathbf{n}^{(j)} = \boldsymbol{l}^{(j)} \times \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} = \frac{\mathbf{\Phi}^{(j)}}{\Phi^{(j)}} \times \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}$$

к ним. Введем для этого ортогональную координатную сетку $l^{(j)}$, $n^{(j)}$. Тогда, в силу того, что

$$\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{l}^{(j)} = 0,$$

здесь $d\boldsymbol{l}^{(j)} = \boldsymbol{l}^{(j)} dl^{(j)}$, или

$$\omega \mathbf{\Phi}^{(j)} \cdot \mathbf{N} dl^{(j)} = 0,$$

с учетом того, что $d\mathbf{n}^{(j)} = \mathbf{n}^{(j)} dn^{(j)}$, выражения (3.1.28) или (3.1.30) запишутся в виде

$$E^{(j)}\big(T^{(j)}\big) = E\big(T_0^{(j)}\big) + \int\limits_{T_1^{(j)}}^{T^{(j)}} \Phi^{(j)} \omega dn^{(j)}, \quad j = 1, 2, \qquad (3.1.31)$$

где $T_0^{(j)} = L_0 = (l_0^{(j)}, n_0^{(j)})$ — начальная, $T_1^{(j)} = (l_1^{(j)}, n_1^{(j)})$ — конечная точка отрезка пути, лежащего на одной мгновенной векторной линии;

$T(j) = L = (l^{(j)}, n^{(j)})$ — конечная точка пути интегрирования, лежащая на другой мгновенной векторной линии вектора $\mathbf{\Phi}^{(j)}$.

Найдем приращение
$$\Delta E^{(j)} = E_2^{(j)} - E_1^{(j)}$$
потенциала при переходе с одной эквипотенциальной мгновенной линии $E_1^{(j)} = \mathrm{const}_1$, или векторной линии вектора $\mathbf{\Phi}_1^{(j)}$, на другую — $E_2^{(j)} = \mathrm{const}_2$, или векторную линию вектора $\mathbf{\Phi}_2^{(j)}$ (см. рис. 3.1). Для этого применим (3.1.28) или (3.1.30) к замкнутому контуру $M^{(j)}$, образованному отрезками

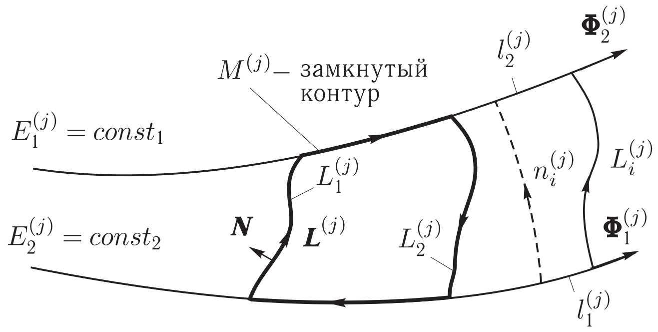


Рис. 3.1. Векторная трубка вектора $\mathbf{\Phi}^{(j)}$

мгновенных векторных линий векторов $\mathbf{\Phi}_1^{(j)}$ и $\mathbf{\Phi}_2^{(j)}$, и некоторыми двумя произвольными, необязательно плоскими, сечениями $L_1^{(j)}$ и $L_2^{(j)}$ этой векторной трубки. Для определенности здесь и в дальнейшем, будем считать положительным обход контура по часовой стрелке. В силу того, что по определению потенциала в (3.1.28) или (3.1.30) интеграл по замкнутому контуру равен нулю, и так как интегралы вдоль векторных линий вектора $\mathbf{\Phi}^{(j)}$ также равны нулю, получим

$$\Delta E^{(j)} = \int\limits_{L_1^{(j)}} \mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{L}^{(j)} = \int\limits_{L_1^{(j)}} \omega \mathbf{\Phi}^{(j)} \cdot \mathbf{N} dL^{(j)} = \int\limits_{L_2^{(j)}} \mathbf{\Phi} \times \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{L}^{(j)} =$$
$$= \int\limits_{L_2^{(j)}} \omega \mathbf{\Phi}^{(j)} \cdot \mathbf{N} dL^{(j)}, \quad j = 1, 2.$$

Так как последнее выражение может быть получено для любых сечений $L_i^{(j)}$ мгновенной векторной трубки вектора $\mathbf{\Phi}^{(j)}$, то его можно переписать в более общем виде

$$\Delta E^{(j)} = \int\limits_{L_i^{(j)}} \mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{L}^{(j)} = \int\limits_{L_i^{(j)}} \omega \mathbf{\Phi}^{(j)} \cdot \mathbf{N} dL^{(j)} = \mathrm{const}, \tag{3.1.32}$$
$$j = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $L_i^{(j)}$ — произвольные, в том числе пересекающиеся, необязательно плоские сечения мгновенной векторной трубки вектора $\mathbf{\Phi}^{(j)}$.

Если выбрать путь интегрирования вдоль координатных линии $l^{(j)}$, $n^{(j)}$, то имея в виду (3.1.31), выражение (3.1.32) можно записать в виде

$$\Delta E^{(j)} = \int\limits_{n_i^{(j)}} \Phi^{(j)} \omega d n^{(j)} = \mathrm{const}, \quad j = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.1.33}$$

где $n_i^{(j)}$ — сечения векторной трубки вектора $\mathbf{\Phi}^{(j)}$ по направлению координатной линии $n^{(j)}$ в фиксированный момент времени t.

Для элементарной мгновенной векторной трубки вектора $\mathbf{\Phi}^{(j)}$ из (3.1.32) получаем

$$\Delta E^{(j)} = \Phi^{(j)} \omega \sigma^{(j)} \cos\bigl(\mathbf{\Phi}^{(j)}, \mathbf{N}\bigr) = \Phi^{(j)} \omega \sigma_N^{(j)} = \mathrm{const}, \quad j = 1, 2 \tag{3.1.34}$$

по сечениям этой векторной трубки; здесь $\sigma^{(j)}$ — текущее произвольное, а $\sigma_N^{(j)}$ — нормальное сечение мгновенной векторной трубки вектора $\mathbf{\Phi}^{(j)}$.

Если теперь в (3.1.28)–(3.1.34) $j = 1$, то

$$E^{(1)} = \mathrm{H}, \qquad \mathbf{\Phi}^{(1)} = \mathbf{U},$$

и полученные соотношения представляют собой выражения в фиксированный момент времени для функции Бернулли Н и для приращения констант Бернулли

$$\Delta \mathrm{H} = \mathrm{H}_2 - \mathrm{H}_1,$$

между двумя мгновенными линиями, вдоль которых $\mathrm{H}_1 = \mathrm{const}_1$, $\mathrm{H}_2 = \mathrm{const}_2$ — мгновенными векторными линиями вектора $\mathbf{U}$. Если в (3.1.28)–(3.1.34) $j = 2$, то

$$E^{(2)} = p, \qquad \mathbf{\Phi}^{(2)} = \rho \mathbf{W},$$

тогда эти соотношения дают выражения для давления p и приращения давления

$$\Delta p = p_2 - p_1,$$

между двумя изобарическими линиями, вдоль которых $p_1 = \mathrm{const}_1$, $p_2 = \mathrm{const}_2$ — мгновенными векторными линиями вектора $\rho \mathbf{W}$.

Итак, согласно (3.1.32)–(3.1.34) прирост констант Бернулли (или давления) при переходе с одной мгновенной векторной линии $\mathbf{U}$, вдоль которой функция Бернулли постоянна (или линии $\rho \mathbf{W}$, вдоль которой давление постоянно), на другую, составляющие мгновенную векторную трубку вектора $\mathbf{U}$ (или $\rho \mathbf{W}$), равен потоку вектора $\mathbf{U}$ (или $\rho \omega \mathbf{W}$) через сечение этой векторной трубки и постоянен вдоль этой трубки.

Соотношения (3.1.32)–(3.1.34) могут быть получены также из уравнения типа Гельмгольца–Фридмана для завихренности, которое образуем, взяв операцию ротора от (3.1.25):

$$\mathbf{rot}\, \bigl[\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}\bigr] = 0, \quad j = 1, 2. \tag{3.1.35}$$

При этом, уравнения (3.1.35) при $j=1$ и 2 адекватны, так как в правой части уравнения (3.1.15) содержатся потенциальные векторы $\mathbf{Q}^{(4)}$ и $\mathbf{Q}^{(5)}$, взятие операции ротора от которых приводит к уравнению (3.1.35) при $j=1$, то есть

$$\mathbf{rot}\,[\mathbf{U}\times\boldsymbol{\omega}]=0.$$

Применяя формулу Стокса к введенному выше замкнутому контуру $M^{(j)}$ с учетом того, что в соответствии с (3.1.25) циркуляция вектора $\mathbf{\Phi}^{(j)}\times\boldsymbol{\omega}$ по такому контуру равна нулю и что интегралы вдоль векторной трубки также равны нулю, получим (3.1.32)–(3.1.34). Те же результаты могут быть получены аналогично [25, 64]: в плоском случае (3.1.35) вследствие независимости $\mathbf{\Phi}^{(j)}\times\boldsymbol{\omega}$ от координаты z может быть представлено в скалярном виде

$$\operatorname{div}\big(\omega\mathbf{\Phi}^{(j)}\big)=0,$$

а в осесимметричном, вследствие равенства

$$\frac{1}{r}\mathbf{rot}\left[\mathbf{\Phi}^{(j)}\times\boldsymbol{\omega}\right]=-\mathbf{e}_{\varphi}\operatorname{div}\left(\frac{\omega}{r}\mathbf{\Phi}^{(j)}\right),$$

в виде

$$\operatorname{div}\left(\frac{\omega}{r}\mathbf{\Phi}^{(j)}\right)=0.$$

Тогда применяя формулу Остроградского–Гаусса к элементарным объемам в сечении с контуром $M^{(j)}$ и протяженностью в плоском случае вдоль оси z, равной единице, а в осесимметричном вдоль окружности радиуса r, равной $r\varphi$, где φ — малый угол, прилегающий к плоскости $0zr$, опять получим (3.1.32)–(3.1.34). Причем для элементарной мгновенной векторной трубки вектора $\mathbf{\Phi}^{(j)}$ в осесимметричном случае при рассмотрении кольцевого объема выражение (3.1.34) может быть записано в других эквивалентных формах:

$$r\varphi\sigma_N^{(j)}\frac{\omega}{r}\Phi^{(j)}=\text{const},\quad 2\pi r\sigma_N^{(j)}\frac{\omega}{r}\Phi^{(j)}=\text{const},\quad j=1,2,$$

которые аналогично [25] могут также трактоваться как сохранение потока вектора $(\omega/r)\mathbf{\Phi}^{(j)}$ через сечение $r\varphi\sigma_N^{(j)}$ или $2\pi r\sigma_N^{(j)}$ такой векторной трубки.

3.1.3. Свойства уравнений пространственного течения. Запишем (3.1.22), (3.1.23) в виде

$$\nabla E^{(j)}=\mathbf{\Phi}^{(j)}\times\boldsymbol{\omega}+F^{(j)}\boldsymbol{\omega},\quad j=1,2,\tag{3.1.36}$$

где

$$\begin{array}{llll}\text{при}\quad j=1: & E^{(1)}=\mathrm{H}, & \mathbf{\Phi}^{(1)}=\mathbf{U}, & F^{(1)}=D,\\ \text{при}\quad j=2: & E^{(2)}=p, & \mathbf{\Phi}^{(2)}=\rho\mathbf{W}, & F^{(2)}=\rho C.\end{array}$$

Геометрически вектор $E^{(j)}$ представлен на рис. 3.2.

Исследуем свойства функции Бернулли H и давления p. Найдем эквипотенциальные поверхности потенциала $E^{(j)}$. В (3.1.36) вектор $\mathbf{\Phi}^{(j)}\times\boldsymbol{\omega}$ ортогонален вектору $\boldsymbol{\omega}$ по определению векторного произведения. Введем еще в рассмотрение вектор

$$\boldsymbol{l}^{(j)}=(\mathbf{\Phi}^{(j)}\times\boldsymbol{\omega})\times\boldsymbol{\omega},$$

ортогональный векторам $\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}$ (рис.3.2), который в силу свойств двойного векторного произведения может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{l}^{(j)} = (\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{(j)}) - \boldsymbol{\Phi}^{(j)}\omega^2, \quad j = 1, 2. \tag{3.1.37}$$

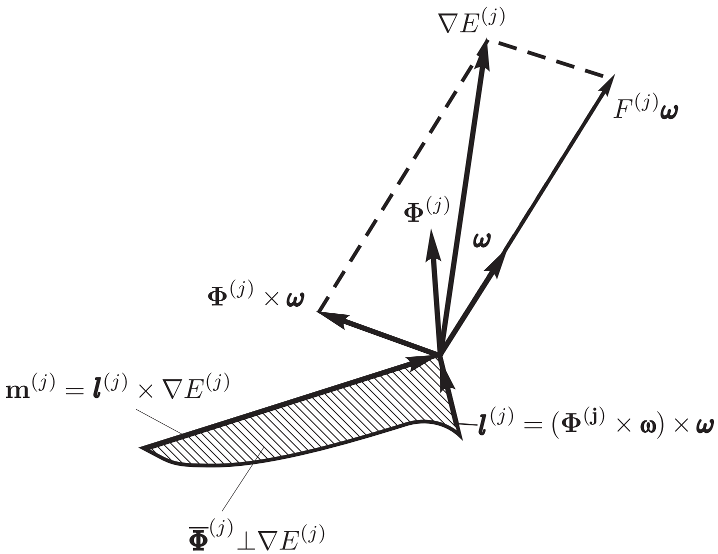


Рис. 3.2. Построение эквипотенциальной поверхности $\overline{\boldsymbol{\Phi}}^{(j)}$, ортогональной вектору $\nabla E^{(j)}$

Правая часть уравнения (3.1.36) представляет собой линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}$, следовательно, вектор (3.1.37) ортогонален вектору $\nabla E^{(j)}$ (3.1.36). Получить вектор (3.1.37), ортогональный векторам $\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}$, а следовательно, и $\nabla E^{(j)}$ можно также и непосредственно из (3.1.36). Домножим его векторно на $\boldsymbol{\omega}$ или $\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}$, а затем на $\boldsymbol{\omega} \times \nabla E^{(j)}$, или, соответственно, на $(\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}) \times \nabla E^{(j)}$. В результате получим тождества:

$$\Big(\boldsymbol{\omega} \times \nabla E^{(j)}\Big) \times \Big[\big(\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}\big) \times \boldsymbol{\omega}\Big] = 0, \quad j = 1, 2,$$

или

$$\Big[\big(\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}\big) \times \nabla E^{(j)}\Big] \times \Big[\big(\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}\big) \times \boldsymbol{\omega}\Big] = 0, \quad j = 1, 2,$$

каждое из которых дает вектор $\boldsymbol{l}^{(j)}$ (3.1.37).

Образуем еще вектор

$$\mathbf{m}(j) = \boldsymbol{l}^{(j)} \times \nabla E^{(j)},$$

ортогональный $\boldsymbol{l}^{(j)}$ и $\nabla E^{(j)}$ (рис.3.2), преобразовав его с учетом (3.1.36), (3.1.37) и свойств двойного векторного произведения к виду

$$\mathbf{m}^{(j)} = \boldsymbol{l}^{(j)} \times \nabla E^{(j)} = -\boldsymbol{\omega}\big(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Phi}^{(j)}\big)^2 - \boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} F^{(j)}\omega^2. \tag{3.1.38}$$

Очевидно, что линейная комбинация из векторов (3.1.37), (3.1.38)

$$\overline{\boldsymbol{\Phi}}^{(j)} = \alpha \boldsymbol{l}^{(j)} + \beta \mathbf{m}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \tag{3.1.39}$$

где α и β — некоторые числа, также будет ортогональна вектору $\nabla E^{(j)}$ (3.1.36). Если в (3.1.39) α и β — любые числа, то семейство векторов (3.1.39) определяет поверхность, ортогональную вектору $\nabla E^{(j)}$ (рис.3.2). Следует отметить, что в качестве базовых векторов в (3.1.39) могли быть взяты векторы, аналогичные (3.1.37), (3.1.38), выраженные через единичные векторы:

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}, \quad \frac{\boldsymbol{\Phi}^{(j)}}{\Phi^{(j)}}, \quad \boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \frac{\boldsymbol{\omega}}{\left|\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}\right|}.$$

Для этого можно, например, поделить (3.1.37) на $\omega^2|\boldsymbol{\Phi}^{(j)}|$, а (3.1.38) на $\omega|\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega}|^2$. Для нахождения семейства векторов (3.1.39) достаточно найти по известным соотношениям мгновенные векторные линии векторов (3.1.37) и (3.1.38).

Умножив скалярно (3.1.36) на (3.1.39), увидим, что правая часть тождественно обращается в нуль:

$$\overline{\boldsymbol{\Phi}}^{(j)} \cdot \left(\boldsymbol{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} + F^{(j)}\boldsymbol{\omega}\right) = 0,$$

и, следовательно,

$$\overline{\boldsymbol{\Phi}}^{(j)} \cdot \nabla E^{(j)} = 0, \quad j = 1, 2, \tag{3.1.40}$$

откуда по определению производной по направлению

$$E^{(j)} = \text{const}, \quad j = 1, 2 \tag{3.1.41}$$

вдоль мгновенных поверхностей, определяемых семейством мгновенных векторных линий вектора $\overline{\boldsymbol{\Phi}}^{(j)}$.

В случае ортогональности вектора $\boldsymbol{\omega}$ векторам $\mathbf{V}$ и $\mathbf{Q}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ (3.1.3), что всегда имеет место в плоском и осесимметричном течениях, поверхность уровня (3.1.39) с учетом того, что входящие в (3.1.20) функции $c^{(i)} = 0$, преобразуется к виду

$$\overline{\boldsymbol{\Phi}}^{(j)} = \alpha\boldsymbol{\Phi}^{(j)} + \beta\boldsymbol{\omega}, \quad j = 1, 2.$$

Этому выражению соответствуют полученные выше линии уровня вектора $\boldsymbol{\Phi}^{(j)}$ в (3.1.26) и (3.1.27).

Если $j = 1$, то из (3.1.36)–(3.1.41) получим $\overline{\boldsymbol{\Phi}}^{(1)} \cdot \nabla \mathrm{H} = 0$ и

$$\mathrm{H} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \Pi = \text{const} \tag{3.1.42}$$

вдоль мгновенных поверхностей, определяемых семейством мгновенных векторных линий вектора $\overline{\boldsymbol{\Phi}}^{(1)}$. Выражение (3.1.42) можно трактовать как обобщение уравнения Бернулли на общий случай пространственных нестационарных течений вязкой или невязкой жидкости как в поле потенциальных, так и непотенциальных массовых сил.

В частном случае стационарного течения идеальной несжимаемой жидкости при наличии только потенциальных массовых сил $\overline{\mathbf{\Phi}}^{(1)} = \mathbf{U} = \mathbf{V}$, $F^{(1)} = 0$. Тогда вектор $\overline{\mathbf{\Phi}}^{(1)}$ (3.1.39) приобретает вид

$$\overline{\mathbf{\Phi}}^{(1)} = \alpha' \mathbf{V} + \beta' \boldsymbol{\omega},$$

где α' и β' — любые числа. Таким образом, такое семейство векторов $\overline{\mathbf{\Phi}}^{(1)}$ определяет поверхность, ортогональную вектору

$$\nabla \mathrm{H} = \mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega},$$

вдоль которой, как известно, выполняется уравнение Бернулли

$$\mathrm{H} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \Pi = \mathrm{const}.$$

Если в (3.1.36)–(3.1.41) $j = 2$, получим

$$\overline{\mathbf{\Phi}}^{(2)} \cdot \nabla p = 0$$

и

$$p = \mathrm{const}, \tag{3.1.43}$$

вдоль мгновенных поверхностей, определяемых семейством мгновенных векторных линий вектора $\overline{\mathbf{\Phi}}^{(2)}$. Таким образом, семейство мгновенных векторов $\overline{\mathbf{\Phi}}^{(2)}$ определяет согласно (3.1.43) мгновенные изобарические поверхности.

Потенциал $E^{(j)}$ в (3.1.36) в каждый фиксированный момент t может быть представлен через интеграл по любому пути:

$$E^{(j)}(L) = E^{(j)}(L_0) + \int\limits_L \left(\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} + F^{(j)} \boldsymbol{\omega}\right) \cdot d\mathbf{L}, \quad j = 1, 2, \tag{3.1.44}$$

где L_0 — начальная точка пути, $d\mathbf{L} = \mathbf{L} d\mathbf{L}$, $\mathbf{L}$ — единичный вектор касательной в любой точке пути L. Здесь подразумевается, что все величины, входящие в (3.1.44), являются функциями времени. Введем ортогональную криволинейную координатную сетку $l^{(j)}$, $m^{(j)}$, $n^{(j)}$ с единичными векторами

$$\overline{\boldsymbol{l}}^{(j)} = \frac{\boldsymbol{l}^{(j)}}{|\boldsymbol{l}^{(j)}|}, \quad \overline{\mathbf{m}}^{(j)} = \frac{\mathbf{m}^{(j)}}{|\mathbf{m}^{(j)}|}, \quad \overline{\mathbf{n}}^{(j)} = \frac{\mathbf{n}^{(j)}}{|\mathbf{n}^{(j)}|}, \quad j = 1, 2,$$

где $\mathbf{n}^{(j)}$ по определению векторов $\boldsymbol{l}^{(j)}$ (3.1.37) и $\mathbf{m}^{(j)}$ (3.1.38) будет равен

$$\mathbf{n}^{(j)} = \boldsymbol{l}^{(j)} \times \mathbf{m}^{(j)} = \nabla E^{(j)}.$$

Выберем в (3.1.44) путь интегрирования таким образом, чтобы он всегда проходил по эквипотенциальной поверхности, определяемой выражением (3.1.39), и по нормали к таким поверхностям. Тогда, вводя обозначения:

$$d\overline{\boldsymbol{l}}^{(j)} = \overline{\boldsymbol{l}}^{(j)} dl^{(j)}, \quad d\overline{\mathbf{m}}^{(j)} = \overline{\mathbf{m}}^{(j)} dm^{(j)}, \quad d\overline{\mathbf{n}}^{(j)} = \overline{\mathbf{n}}^{(j)} dn^{(j)},$$

учитывая, что

$$\nabla E^{(j)} \cdot d\overline{\boldsymbol{l}}^{(j)} = 0, \quad \nabla E^{(j)} \cdot d\overline{\mathbf{m}}^{(j)} = 0, \quad \frac{\nabla E^{(j)} \cdot \nabla E^{(j)}}{\left|\nabla E^{(j)}\right|} = \left|\nabla E^{(j)}\right|;$$

выражение (3.1.44) запишем в виде

$$E^{(j)}(T^{(j)}) = E^{(j)}(T_0^{(j)}) + \int\limits_{T_1^{(j)}}^{T^{(j)}} \left|\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} + F^{(j)}\boldsymbol{\omega}\right| dn^{(j)}, \quad j = 1, 2. \tag{3.1.45}$$

Здесь $T_0^{(j)} = L_0 = (l_0^{(j)}, m_0^{(j)}, n_0^{(j)})$ — точка начала, а $T_1^{(j)} = (l_1^{(j)}, m_1^{(j)}, n_1^{(j)})$ — точка конца отрезка пути, лежащего на одной эквипотенциальной поверхности, $T^{(j)} = L = (l^{(j)}, m^{(j)}, n^{(j)})$ — текущая точка конца пути интегрирования, лежащая на другой эквипотенциальной поверхности.

Найдем приращение потенциала

$$\Delta E^{(j)} = E_2^{(j)} - E_1^{(j)},$$

при переходе с одной эквипотенциальной поверхности $E_1^{(j)} = \mathrm{const}_1$ или с семейства мгновенных векторных линий вектора $\overline{\mathbf{\Phi}}_1^{(j)}$, на другую $E_2^{(j)} = \mathrm{const}_2$, или семейство $\overline{\mathbf{\Phi}}_2^{(j)}$. Для этого применим (3.1.44) к замкнутому контуру $M^{(j)}$, аналогично показанному на рис. 3.1, образованному двумя произвольными отрезками линий, лежащими на $\overline{\mathbf{\Phi}}_1^{(j)}$ и $\overline{\mathbf{\Phi}}_2^{(j)}$, и двумя произвольными линиями $L_1^{(j)}$ и $L_2^{(j)}$, соединяющими эти отрезки. Обход контура по часовой стрелке будем считать положительным. Так как по определению потенциала интеграл по $M^{(j)}$ равен нулю, и будут равны нулю интегралы вдоль $\overline{\mathbf{\Phi}}_1^{(j)}$ и $\overline{\mathbf{\Phi}}_2^{(j)}$, то

$$\Delta E^{(j)} = \int\limits_{L_1^{(j)}} \left(\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} + F^{(j)}\boldsymbol{\omega}\right) \cdot d\mathbf{L}^{(j)} = \int\limits_{L_2^{(j)}} \left(\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} + F^{(j)}\boldsymbol{\omega}\right) \cdot d\mathbf{L}^{(j)}, \;\; j = 1, 2.$$

Так как последнее выражение может быть получено для любых таких линий $L_i^{(j)}$, $i = 1, 2, 3, ...$, то его можно переписать в более общем виде:

$$\Delta E^{(j)} = \int\limits_{L_i^{(j)}} \left(\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} + F^{(j)}\boldsymbol{\omega}\right) \cdot d\mathbf{L}^{(j)} = \mathrm{const}, \quad j = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.1.46}$$

здесь $L_i^{(j)}$ — произвольные линии, соединяющие поверхности $\overline{\mathbf{\Phi}}_1^{(j)}$ и $\overline{\mathbf{\Phi}}_2^{(j)}$.

Если выбирать путь интегрирования вдоль $\overline{\mathbf{\Phi}}_1^{(j)}$ и $\overline{\mathbf{\Phi}}_2^{(j)}$ и по нормали к ним, то, имея в виду (3.1.45), выражение (3.1.46) можно переписать в виде:

$$\Delta E^{(j)} = \int\limits_{T_1^{(j)}}^{T_2^{(j)}} \left|\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} + F^{(j)}\boldsymbol{\omega}\right| dn_i^{(j)} = \mathrm{const}, \; j = 1, 2; \; i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.1.47}$$

где $T_1^{(j)} = (l_1^{(j)}, m_1^{(j)}, n_i^{(j)})$ — точка начала пути, лежащая на $\overline{\mathbf{\Phi}}_1^{(j)}$,

$T_2^{(j)} = (l_2^{(j)}, m_2^{(j)}, n_i^{(j)})$ — точка конца пути, лежащая на $\overline{\mathbf{\Phi}}_2^{(j)}$.

Для двух эквипотенциальных поверхностей, отстоящих на малое расстояние $\sigma_N^{(j)}$, из (3.1.46) или (3.1.47) получим:

$$\Delta E^{(j)} = \left|\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} + F^{(j)}\boldsymbol{\omega}\right| \sigma^{(j)} \cos\left(\boldsymbol{\sigma}^{(j)}, \boldsymbol{\sigma}_N^{(j)}\right) = \\ = \left|\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} + F^{(j)}\boldsymbol{\omega}\right| \sigma_N^{(j)} = \mathrm{const}, \quad j = 1, 2, \quad (3.1.48)$$

здесь $\sigma^{(j)}$ — отрезок любой линии, секущей $\overline{\mathbf{\Phi}}_1^{(j)}$ и $\overline{\mathbf{\Phi}}_2^{(j)}$, расположенный между $\overline{\mathbf{\Phi}}_1^{(j)}$ и $\overline{\mathbf{\Phi}}_2^{(j)}$; $(\boldsymbol{\sigma}^{(j)}, \boldsymbol{\sigma}_N^{(j)})$ — угол между $\sigma^{(j)}$ и $\sigma_N^{(j)}$.

Если $j = 1$, то соотношения (3.1.44)–(3.1.48) дают соответствующие выражения для функции Бернулли H и для приращений констант Бернулли $\Delta\mathrm{H}$ при переходе с одной мгновенной поверхности $\mathrm{H}_1 = \mathrm{const}_1$, т. е. $\overline{\mathbf{\Phi}}_1^{(1)}$, на поверхность $\mathrm{H}_2 = \mathrm{const}_2$, т. е. $\overline{\mathbf{\Phi}}_2^{(1)}$. При $j = 2$ (3.1.44)–(3.1.48) дают формулы для давления p и для приростов давления p при переходе с одной мгновенной изобарической поверхности $p_1 = \mathrm{const}_1$, определяемой семейством векторов $\overline{\mathbf{\Phi}}_1^{(2)}$, на другую $p_2 = \mathrm{const}_2$, $\overline{\mathbf{\Phi}}_2^{(2)}$.

В случае плоского и осесимметричного течений $F^{(j)} = D = C = 0$, вектор $\boldsymbol{\omega}$ ортогонален $\mathbf{\Phi}^{(j)}$, т. е. $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$, и полученные выражения приводятся к соотношениям раздела 3.1.2.

Выражения (3.1.46)–(3.1.48) могут быть также получены из уравнения типа Гельмгольца–Фридмана. Возьмем операцию ротора от (3.1.36), получим

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} + F^{(j)}\boldsymbol{\omega}\right) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.1.49)$$

При этом уравнения (3.1.49) при $j = 1$ и $j = 2$, как и в разд. 3.1.2, адекватны. Применим формулу Стокса к замкнутому контуру $M^{(j)}$. Тогда, согласно (3.1.49) циркуляция вектора

$$\mathbf{\Phi}^{(j)} \times \boldsymbol{\omega} + F^{(j)}\boldsymbol{\omega},$$

по $M^{(j)}$ равна нулю, а интегралы по отрезкам контура, лежащим на $\overline{\mathbf{\Phi}}_1^{(j)}$ и $\overline{\mathbf{\Phi}}_2^{(j)}$, также равны нулю, получим (3.1.46)–(3.1.48).

3.1.4. Результирующая сил давления. Правые части в (3.1.15), (3.1.23) представляют собой объемные силы. В соответствии с теоремой Остроградского–Гаусса результирующая сил давления, действующая на объем G, ограниченный поверхностью S, равна:

$$\mathbf{P} = \iiint_G \nabla p dG = \oint_S p\mathbf{N} dS, \quad (3.1.50)$$

где $\mathbf{N}$ — нормаль к S, которую будем считать направленной внутрь объема G.

Плоское и осесимметричное течения. Вычислим сначала результирующую сил давления, действующую на объем, вырезанный двумя сечениями в элементарной мгновенной векторной трубке вектора $\mathbf{W}$. Верхнюю грань такого объема, образованную векторной линией вектора $\mathbf{W}$, обозначим dl_1, нижнюю dl_2. Боковые грани сечений, проходящие по координатным линиям $n^{(2)}$, обозначим через dn_1 и dn_2. Введем местную декартову прямоугольную систему координат $0x_1y_1$ такую, что оси x_1 и y_1 являются касательными соответственно к $l^{(2)}$ и $n^{(2)}$ (эти обозначения см. в разд. 3.1.2) в точке $(l_0^{(2)}, n_0^{(2)})$ пересечения граней dl_1 и dn_1. Будем в общем случае полагать, что уравнения линий $l^{(2)}$ и $n^{(2)}$ в окрестности точки 0 представимы соответственно в виде:

$$y_1 \approx a_1 x_1^{1+\mu_1}, \quad x_1 \approx a_2 y_1^{1+\mu_2},$$

где $\mu_i > 0$, a_i $(i = 1, 2)$ — некоторые константы; в случае конечной кривизны этих линий $\mu_i \geqslant 1$. Тогда дифференциалы длин дуг dl_1 и dn_1 выразятся как

$$dl_1 \approx dx_1 + O(dx_1)^{2\mu_1+1}, \quad dn_1 \approx dy_1 + O(dy_1)^{2\mu_2+1}.$$

Элементарный объем в жидкости может быть выбран так, чтобы $dl_1 \approx dn_1 \approx \approx dR$, где R — некоторый характерный размер, и тогда $dl_2 \approx dl_1$, $dn_2 \approx dn_1$.

Рассмотрим сначала плоское течение. Применим выражение (3.1.50) к элементарному объему единичной протяженности вдоль оси z, при этом будем использовать формулу для давления (3.1.31):

$$p(T^{(2)}) = p(T_0^{(2)}) + \rho \int\limits_{T_1^{(2)}}^{T_2^{(2)}} W\omega dn^{(2)},$$

где $T_0^{(2)} = (l_0^{(2)}, n_0^{(2)})$. Интеграл от константы $p(T_0^{(2)})$ по замкнутому контуру равен нулю. Конечные суммы по боковым граням dn_1 и dn_2 с точностью до величин $O[\overline{\mathbf{N}}c\,(dR)^{2\mu_2+2}]$ взаимно уничтожаются, а суммы по граням dl_1 и dl_2 с учетом направления нормалей к ним дают выражение:

$$d\mathbf{P} = \rho W\omega dx_1 dy_1 \mathbf{N}_2 + O[\overline{\mathbf{N}}c\,(dR)^{2\mu+2}], \tag{3.1.51}$$

здесь

$$O[\overline{\mathbf{N}}c\,(dR)^{2\mu+2}] = O[\overline{\mathbf{N}}c_3\,(dR)^{2\mu_2+2}] + O[\mathbf{N}_2 c_2\,(dR)^{2\mu_2+2}] + O[\mathbf{N}_2 c_1\,(dR)^{2\mu_1+2}],$$

где $\mathbf{N}_2$ — нормаль к dl_2, $\overline{\mathbf{N}}$ — произвольный единичный вектор, c, $c_i (i = 1, 2, 3)$ — некоторые конечные величины. Введем по формуле Стокса циркуляцию по замкнутому контуру dl_1, dn_1, dl_2, dn_2:

$$\mathbf{V} \cdot (d\boldsymbol{l}_1 + d\mathbf{n}_1 + d\boldsymbol{l}_2 + d\mathbf{n}_2) = \omega dx_1 dy_1 + O(dR)^{2\mu+2},$$

где

$$O(cdR)^{2\mu+2} = O(c_1 dR)^{2\mu_1+2} + O(c_2 dR)^{2\mu_2+2}, \ d\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{l}_i dl_i, \ d\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i dn_i, \ i = 1, 2.$$

Тогда:

$$d\mathbf{P} = \rho\mathbf{W} \times d\boldsymbol{\Gamma} + O[\overline{\mathbf{N}}c(dR)^{2\mu+2}], \tag{3.1.52}$$

где циркуляция скорости

$$d\Gamma = \omega dx_1 dy_1,$$

а вектор

$$\mathbf{d}\boldsymbol{\Gamma} = d\Gamma \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}.$$

В проекциях на оси x, y (3.1.52) можно представить в виде:

$$dP_x = \rho W d\Gamma \sin(\mathbf{W}, \mathbf{i}) + O[\overline{\mathbf{N}}c\,(dR)^{2\mu+2}],$$
$$dP_y = \rho W d\Gamma \cos(\mathbf{W}, \mathbf{i}) + O[\overline{\mathbf{N}}c\,(dR)^{2\mu+2}].$$

В осесимметричном случае, аналогично, принимая протяженность объема с гранями dz_1, dr_1, dz_2, dr_2 равной $rd\varphi$, где r — расстояние от оси симметрии до начала этого объема, φ— угол, примыкающий к плоскости $0zr$ системы координат $0zr\varphi$, получим:

$$\left.\begin{aligned}
&d\mathbf{P} = \rho W\omega dz_1 dr_1 \mathbf{N}_2 r d\varphi + O[\overline{\mathbf{N}}c\,(dR)^{2\mu+2}],\\
&d\mathbf{P} = \rho \mathbf{W} \times d\mathbf{\Gamma} r d\varphi + O[\overline{\mathbf{N}}c\,(dR)^{2\mu+2}],\\
&dP_z = \rho W d\Gamma r d\varphi \sin(\mathbf{W}, \mathbf{e}_z) + O[\overline{\mathbf{N}}c\,(dR)^{2\mu+2}],\\
&dP_r = \rho W d\Gamma r d\varphi \cos(\mathbf{W}, \mathbf{e}_z) + O[\overline{\mathbf{N}}c\,(dR)^{2\mu+2}].
\end{aligned}\right\} \qquad (3.1.53)$$

Итак, на объем жидкости, вырезанный в элементарной мгновенной векторной трубке вектора $\mathbf{W}$, действует результирующая сил давления (3.1.51), (3.1.52) или (3.1.53), главный член которой аналогичен силе Н. Е. Жуковского. В оценках силы (3.1.51)–(3.1.53) присутствуют члены порядка $O[\overline{\mathbf{N}}c(dR)^{2\mu+2}]$, образовавшиеся исключительно выбором объема между двумя векторными линиями вектора $\mathbf{W}$, которые в случае бесконечной кривизны векторных линий вектора $\mathbf{W}$ могут не являться приближенно малыми.

В общем случае из левой части формулы (3.1.50) следует, что на любой объем G действует результирующая сил давления:

$$\mathbf{P} = \rho \iint\limits_G \mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} dG, \qquad (3.1.54)$$

а на элементарный объем dG

$$d\mathbf{P} = \rho \mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} dG. \qquad (3.1.55)$$

В плоском случае элементарный объем единичной протяженности вдоль оси z равен $dG = dxdy$, а в осесимметричном — $dG = dzdr \cdot rd\varphi$, где $rd\varphi$ — протяженность элементарного объема по окружности. Элементарная циркуляция, аналогично предыдущему для плоского случая:

$$d\Gamma = \mathbf{V} \cdot (d\mathbf{x}_1 + d\mathbf{y}_1 + d\mathbf{x}_2 + d\mathbf{y}_2) = \omega dxdy,$$

а для осесимметричного случая

$$d\Gamma = \mathbf{V} \cdot (d\mathbf{z}_1 + d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{z}_2 + d\mathbf{r}_2) = \omega dzdr,$$

где

$$d\mathbf{x}_i = \mathbf{i} dx_i, \quad d\mathbf{y}_i = \mathbf{j}\, dy_i, \quad d\mathbf{z}_i = \mathbf{e}_z dz_i, \quad d\mathbf{r}_i = \mathbf{e}_r dr_i.$$

Здесь dx_i, dy_i, dz_i, dr_i, $(i = 1, 2)$ — стороны площадки $dxdy$ или соответственно $dzdr$. Тогда, если ввести вектор

$$d\mathbf{\Gamma} = d\Gamma \frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega},$$

то выражение (3.1.55) для плоского и, соответственно, осесимметричного случаев можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned}&d\mathbf{P} = \rho\mathbf{W}\times d\mathbf{\Gamma},\quad dP_x = \rho W\Gamma\sin(\mathbf{W},\mathbf{i}),\quad dP_y = \rho W\Gamma\cos(\mathbf{W},\mathbf{i}),\\ &d\mathbf{P} = \rho\mathbf{W}\times d\mathbf{\Gamma} r d\varphi,\ dP_z = \rho W\Gamma\sin(\mathbf{W},\mathbf{e}_z) r d\varphi,\ dP_r = \rho W\Gamma\cos(\mathbf{W},\mathbf{e}_z) r d\varphi,\end{aligned}\right\}\qquad(3.1.56)$$

Итак, на объем жидкости действует результирующая сил давления (3.1.54), (3.1.55) или (3.1.56), аналогичная силе Н. Е. Жуковского.

Пространственное течение. Введем ортогональную криволинейную координатную сетку l, m, n такую, что линии l, m лежат на изобарических поверхностях, определяемых семейством векторов $\overline{\mathbf{\Phi}}^{(2)}$, а n ортогональна им. В частном случае эти линии могут совпадать с введенными ранее линиями $l^{(2)}$, $\overline{m}^{(2)}$, $n^{(2)}$ с единичными векторами $\overline{\boldsymbol{l}}^{(2)}$, $\overline{\mathbf{m}}^{(2)}$, $\overline{\mathbf{n}}^{(2)}$. Расположим в точке (l_0, m_0, n_0) местную прямоугольную систему координат $0x_1y_1z_1$, направив оси x_1, y_1, z_1 соответственно по касательным к l, m, n. Будем считать, что в окрестности точки O уравнения линий l, m, n можно представить с точностью до малых более высокого порядка в виде:

$$l: y_1 \approx a_1 x_1^{1+\mu_1},\quad z_1 \approx a_2 x_1^{1+\mu_2};\qquad m: x_1 \approx a_3 z_1^{1+\mu_3},\quad y_1 \approx a_4 z_1^{1+\mu_4};$$
$$n:\ x_1 \approx a_5 y_1^{1+\mu_5},\quad z_1 \approx a_6 y_1^{1+\mu_6};$$

где $\mu_i > 0$, a_i — некоторые константы; если l, m, n имеют конечную кривизну, то $\mu_i \geqslant 1$. Выберем в окрестности точки O элементарный криволинейный параллелепипед с ребрами, образованными линиями l, m, n. Ребра, проходящие через O, обозначим dl, dm, dn, и введем некоторый характерный размер R, такой что $dl \approx dm \approx dn \approx R$.

Применим правую часть формулы (3.1.50) для вычисления силы $d\mathbf{P}$ к этому параллелепипеду. Подставим в нее площади граней параллелепипеда, вычисленные через коэффициенты первой дифференциальной формы Гаусса, и выражение для давления (3.1.45):

$$p(T^{(2)}) = p(T_0^{(2)}) + \rho\int\limits_{T_1^{(2)}}^{T_2^{(2)}} |\mathbf{W}\times\boldsymbol{\omega} + C\boldsymbol{\omega}|\, dn^{(2)},$$

где $T_0^{(2)} = (l_0, m_0, n_0)$. Тогда получим следующее: интеграл от константы по замкнутой поверхности равен нулю, конечные суммы по противоположным боковым граням с точностью до величин $O\left[\overline{\mathbf{N}}\sum\limits_{i=1,2,5,6} c_i (dR)^{2\mu_i+3}\right]$ взаимно уничтожаются, в итоге с учетом направления нормалей имеем:

$$d\mathbf{P} = \rho\,|\mathbf{W}\times\boldsymbol{\omega} + C\boldsymbol{\omega}|\,\mathbf{N}_2\, dl\, dm\, dn + O[\overline{\mathbf{N}}c(dR)^{2\mu+3}].\qquad(3.1.57)$$

Здесь и ниже c, c_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, 6)$ — некоторые конечные величины,

$$O[\overline{\mathbf{N}}c(dR)^{2\mu+3}] = O\left[\overline{\mathbf{N}}\sum_{i=1,2,5,6} c_i (dR)^{2\mu_i+3}\right] + O\left[\mathbf{N}_2\sum_{i=1}^{4} c_i (dR)^{2\mu_i+3}\right],$$

$\mathbf{N}_2$ — нормаль к нижней поверхности, $\overline{\mathbf{N}}$ — произвольный единичный вектор. В оценке (3.1.57), как и в случае плоского и осесимметричного течений, присутствуют члены порядка $O[\overline{\mathbf{N}}c(dR)^{2\mu_i+3}]$, обусловленные исключительно выбором объема между двумя эквипотенциальными поверхностями, определяемыми семейством векторов $\overline{\mathbf{\Phi}}^{(2)}$, которые в случае бесконечной кривизны поверхности могут не являться пренебрежимо малыми. Иначе, с учетом того, что

$$\mathbf{N}_2 = \frac{\mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} + C\boldsymbol{\omega}}{|\mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} + C\boldsymbol{\omega}|},$$

главный член в (3.1.57) сводится к виду

$$d\mathbf{P} = \rho(\mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} + C\boldsymbol{\omega})dldmdn. \tag{3.1.58}$$

Для нахождения равнодействующей сил давления, действующей на любой объем жидкости G, можно воспользоваться левой частью выражения (3.1.50) и формулой (3.1.23), откуда следует

$$\mathbf{P} = \rho \int\!\!\!\int_G\!\!\!\int (\mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} + C\boldsymbol{\omega})dG, \tag{3.1.59}$$

или для элементарного объема $dG = dx_1dy_1dz_1$

$$d\mathbf{P} = \rho(\mathbf{W} \times \boldsymbol{\omega} + C\boldsymbol{\omega})dx_1dy_1dz_1. \tag{3.1.60}$$

В частных случаях плоского или осесимметричного течений с учетом того, что в этих случаях $C = 0$, а $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{W}$ ортогональны, соотношения (3.1.57)–(3.1.60) приводятся к (3.1.51)–(3.1.56).

Если течение стационарно, то все функции и константы в рассмотренных выше разделах не зависят от времени.

Следует отметить, что выражения для давлений и сил, действующих на элемент жидкости, являются по сути проинтегрированными по пути или площади уравнениями движения жидкости и их порядок ниже, чем исходных уравнений движения.

Все выводы и соотношения, очевидно, применимы и при стремлении со стороны области, где $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, к отдельным точкам, линиям, поверхностям или областям, в которых $\boldsymbol{\omega} = 0$.

Полученные результаты и аналитические соотношения могут быть применены как для проверки численных решений уравнений Навье–Стокса и Эйлера, так и при построении новых методов расчета таких уравнений.

§ 3.2. Гидродинамические и электромагнитные поля — общность и различие в силовых воздействиях и формулы для главных векторов силы и момента в случае объемного и поверхностного распределений завихренности

3.2.1. Некоторые исходные соотношения и замечания. Как для гидродинамического, так и для электромагнитного полей будем использовать систему единиц измерений СИ. Это позволяет получить одни и те же константы в гидродинамических величинах и их электромагнитных аналогах.

Запишем интегралы, представляющие собой закон Био–Савара: для гидродинамики — формулы для возмущенных скоростей, для электромагнитного поля — формулы для возмущенного вектора магнитной напряженности [80, 134]:

$$\mathbf{U}^{(i)} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{L^{(i)}} \frac{\Gamma^{(i)}\mathbf{L}^{(i)} \times \mathbf{r}^{(i)}}{{r^{(i)}}^3} dL^{(i)}, \quad \Gamma^{(i)} = \oint\limits_{l^{(i)}} \mathbf{U}^{(i)} \cdot d\boldsymbol{l}^{(i)}, \quad i = 1, 2; \tag{3.2.1}$$

$$\mathbf{U}^{(i)} = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{G_+^{(i)}} \frac{\boldsymbol{\omega}^{(i)} \times \mathbf{r}^{(i)}}{{r^{(i)}}^3} dG_+^{(i)}, \quad \boldsymbol{\omega}^{(i)} = \mathbf{rot}\,\mathbf{U}^{(i)}, \quad i = 1, 2; \tag{3.2.2}$$

$$\mathbf{U}^{(i)} = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\sigma^{(i)}} \frac{\boldsymbol{\gamma}^{(i)} \times \mathbf{r}^{(i)}}{{r^{(i)}}^3} d\sigma^{(i)}, \quad \boldsymbol{\gamma}^{(i)} = \mathbf{Rot}\,\mathbf{U}^{(i)} = [\mathbf{U}_-^{(i)} - \mathbf{U}_+^{(i)}],\ i = 1, 2 \tag{3.2.3}$$

Здесь и далее $\mathbf{r}(i)$ — радиус-вектор, направляемый из точки $M^{(i)}$, в которой вычисляется интеграл $\mathbf{U}^{(i)}$, в точку $N^{(i)}$ интегрирования; $r^{(i)}$ — его модуль. Значение $i = l$ соответствует гидродинамическому, $i = 2$ — электромагнитному полю.

Пусть сначала $i = 1$. Тогда в (3.2.1): $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}$ — скорость, индуцированная вихревой нитью $L^{(1)}$, $\mathbf{L}^{(1)}$ — ее единичный направляющий вектор, $\Gamma^{(1)} = \Gamma$ — циркуляция скорости по контуру $l^{(1)}$, охватывающему нить, $\boldsymbol{l}^{(1)}$ — направляющий вектор вдоль этого контура. В (3.2.2): $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}$ — скорость, индуцированная непрерывно распределенными по области $G_+^{(1)}$ объемными вихрями

$$\boldsymbol{\omega}^{(1)} = \boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{U}.$$

В (3.2.3): $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}$ — скорость, индуцированная непрерывно распределенным по поверхности $\sigma^{(1)}$ бесконечно тонким вихревым слоем

$$\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{Rot}\,\mathbf{U};$$

$\mathbf{U}_-^{(1)} = \mathbf{U}_-$ и $\mathbf{U}_+^{(1)} = \mathbf{U}_+$ — значения скорости при стремлении к $\sigma^{(1)}$ соответственно со стороны положительного или отрицательного значения нормали.

Пусть теперь $i = 2$. Тогда в (3.2.1): $\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{H}$ — вектор магнитной напряженности, индуцированный нитью $L^{(2)}$ тока $\Gamma^{(2)} = I$, определяемый циркуляцией вектора $\mathbf{H}$ по контуру $l^{(2)}$ с направляющим вектором $\boldsymbol{l}^{(2)}$, охватывающим $L^{(2)}$. В (3.2.2): $\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{H}$ — вектор магнитной напряженности, индуцированный распределенным по объему $G_+^{(2)}$ объемным вектором тока с объемной плотностью

$$\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \mathbf{j} = \mathbf{rot}\,\mathbf{H}.$$

В (3.2.3): $\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля, индуцированный распределенным по поверхности $\sigma^{(2)}$ поверхностным вектором тока

$$\boldsymbol{\gamma}^{(2)} = \mathbf{i} = \mathbf{Rot}\,\mathbf{H};$$

$\mathbf{U}_-^{(2)} = \mathbf{H}_-$ и $\mathbf{U}_+^{(2)} = \mathbf{H}_+$ — значения напряженности магнитного поля при стремлении к $\sigma^{(2)}$ соответственно со стороны положительного и отрицательного значения нормали.

Свойства интегралов (3.2.1)–(3.2.3) достаточно хорошо изучены [9, 26, 68, 69, 80, 93]. В частности, первый интеграл (3.2.1) при стремлении точки $M^{(i)}$ к $N^{(i)}$ (см. § 1.1) имеет особенности типа

$$\frac{1}{r}k_1\Gamma^{(j)}\mathbf{m}^{(i)} \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{r}k_2\Gamma^{(i)} + k_3\Gamma^{(i)}\ln\frac{1}{r}\right)\mathbf{b}^{(i)};$$

здесь $\mathbf{n}^{(i)}$ и $\mathbf{b}^{(i)}$ соответственно главная нормаль и бинормаль к линии $L^{(i)}$ в точке $N^{(i)}$; k_1, k_2, k_3 — некоторые константы. Все компоненты интеграла (3.2.2) непрерывны внутри области $G_+^{(i)}$ и при переходе через ее границу. Интеграл в (3.2.3) обладает следующими свойствами вне границ области $\sigma^{(i)}$: нормальная к $\sigma^{(i)}$ составляющая существует в смысле главного значения Коши и непрерывна при переходе через $\sigma^{(i)}$; составляющая интеграла вдоль вектора $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ непрерывна при переходе через $\sigma^{(i)}$; составляющая, ортогональная вектору $\boldsymbol{\gamma}^{(i)}$ и касательной к $\sigma^{(i)}$ в точке $N^{(i)}$, терпит разрыв $|\boldsymbol{\gamma}^{(i)}| = \gamma$ при переходе через $\sigma^{(i)}$ и выражается как:

$$U_{+\perp}^{(i)} = U_{0\perp}^{(i)} - \frac{\gamma^{(i)}}{2}, \quad U_{-\perp}^{(i)} = U_{0\perp}^{(i)} + \frac{\gamma^{(i)}}{2}, \tag{3.2.4}$$

где $U_{0\perp}^{(i)}$, $U_{+\perp}^{(i)}$, $U_{-\perp}^{(i)}$ — соответственно ее значения в точке $N^{(i)}$, принадлежащей $\sigma^{(i)}$, при стремлении к $\sigma^{(i)}$ сверху ($\sigma_+^{(i)}$) и снизу ($\sigma_-^{(i)}$). На границе $\sigma^{(i)}$ при $M^{(i)} \to N^{(i)}$ нормальная к $\sigma^{(i)}$ составляющая (3.2.3) имеет особенность типа

$$\gamma^{(i)}\cos\left(\boldsymbol{\lambda}^{(i)}, \boldsymbol{\gamma}^{(i)}\right)\ln\frac{1}{r},$$

где $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$ — направляющий вектор линии, ограничивающей поверхность $\sigma^{(i)}$.

Рассматриваемые ниже стационарные уравнения гидродинамики и стационарного магнитного или квазистационарного электромагнитного поля предполагают отсутствие в средах непрерывно распределенных моментов объемных и поверхностных сил.

3.2.2. Уравнения движения жидкости. Тензоры напряжений и энергия. Силы внутри жидкости. Рассмотрим два типа жидкостей: произвольную вязкую несжимаемую жидкость с симметричным тензором напряжений и идеальную несжимаемую жидкость. Течение будем считать стационарным.

Произвольная несжимаемая жидкость. Запишем главные векторы количества движения

$$\mathbf{K} = \iiint\limits_{\tau} \mathbf{V}\delta m,$$

и момента количества движения

$$\mathbf{N} = \iiint\limits_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{V}\delta m,$$

для системы материальных частиц с элементарной массой δm в объеме τ, где $\mathbf{V}$ — скорость частиц. В соответствии с теоремами об изменении количества движения и момента количества движения индивидуальные производные от $\mathbf{K}$ и $\mathbf{N}$ по времени t равны соответственно сумме главных векторов внешних объемных и поверхностных сил и сумме главных моментов этих сил:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\tau}\mathbf{V}\delta m = \iiint\limits_{\tau}\mathbf{f}'\delta\tau + \oiint\limits_{\sigma}\mathbf{p}_n\delta\sigma, \tag{3.2.5}$$

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\tau}\mathbf{r}\times\mathbf{V}\delta m = \iiint\limits_{\tau}\mathbf{r}\times\mathbf{f}'\delta\tau + \oiint\limits_{\sigma}\mathbf{r}\times\mathbf{p}_n\delta\sigma. \tag{3.2.6}$$

Здесь $\mathbf{f}'$ — внешние объемные силы; σ — поверхность, ограничивающая объем τ; $\mathbf{p}_n$ — вектор напряжений на площадке $\delta\sigma$ с внешней нормалью $\mathbf{n}$. Как известно [92, 125], уравнение (3.2.5) в случае стационарного течения в пренебрежении объемными силами $\mathbf{f}'$ сводится с применением теоремы Остроградского–Гаусса к уравнению движения жидкости:

$$\rho(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = \mathbf{Div}\,\mathrm{P}, \tag{3.2.7}$$

где оператор $\mathbf{Div}$ является дивергенцией тензора напряжений

$$P = \begin{Vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yx} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{p}_n = \mathbf{n}\cdot P. \tag{3.2.8}$$

При этом из (3.2.6) следует симметрия тензора (3.2.8):

$$p_{xy} = p_{yx} \quad p_{xz} = p_{zx}, \quad p_{yz} = p_{zy},$$

и, таким образом, тензор P определяется шестью компонентами. Величина $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$, входящая в (3.2.7), является конвективной частью ускорения и, в силу известных из векторного анализа соотношений [23, 79], может быть представлена в виде

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V} + \mathbf{grad}\,\frac{V^2}{2}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\,\mathbf{V}. \tag{3.2.9}$$

Тогда, с учетом (3.2.9) уравнение (3.2.7) может быть записано в виде

$$-\rho\mathbf{V}\times\boldsymbol{\omega} + \mathbf{grad}\,\frac{\rho V^2}{2} = \mathbf{Div}\,P. \tag{3.2.10}$$

Идеальная несжимаемая жидкость. По определению [92, 125] идеальной несжимаемой жидкостью называют такую среду, в которой вектор напряжения $\mathbf{p}_n$ на любой площадке с нормалью $\mathbf{n}$ ортогонален этой площадке, $\mathbf{p}_n||\mathbf{n}$. Тензорная поверхность в этом случае является сферой, и главные компоненты тензора напряжений равны между собой:

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p,$$

где p — давление. Знак p выбран таким образом, чтобы давление сжатия было положительной величиной. Любые три взаимно перпендикулярных направления в этом случае являются главными, и поэтому в любой ортогональной декартовой системе координат матрица компонент тензора напряжений P может быть представлена как

$$P = \begin{Vmatrix} p_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{Vmatrix} = -p \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{3.2.11}$$

Таким образом, тензор напряжений в идеальной несжимаемой жидкости задается одним числом p, и уравнения движения в форме (3.2.7) и (3.2.10) могут быть соответственно записаны в виде уравнения Эйлера

$$\rho(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\mathbf{grad}\, p, \tag{3.2.12}$$

или в форме Громеки–Ламба

$$\rho \mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{grad}\, \frac{\rho V^2}{2} = \mathbf{grad}\, p. \tag{3.2.13}$$

Семейство векторов

$$\boldsymbol{\Phi} = \alpha \mathbf{V}_{+} \beta \boldsymbol{\omega},$$

где α и β — любые числа, в силу равенства

$$\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{grad} \left(p + \frac{\rho V^2}{2} \right) = 0,$$

определяет семейство эквипотенциальных поверхностей, ортогональных вектору $\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}$, вдоль которых выполняется уравнение Бернулли:

$$p + \frac{\rho V^2}{2} = \mathrm{const}. \tag{3.2.14}$$

При этом функция Бернулли, стоящая в правой части уравнения (3.2.14), может изменяться при переходе с одной такой поверхности $\boldsymbol{\Phi}$ на другую. Если $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{rot}\, \mathbf{V} = 0$ во всей области течения, то функция Бернулли постоянна во всей области течения. Уравнение Бернулли (3.2.14) может рассматриваться как закон сохранения полной механической энергии, где давление p — объемная плотность потенциальной энергии, а скоростной напор $q = \rho V^2/2$ — объемная плотность кинетической энергии жидкости.

Силы внутри жидкости. Левые части в (3.2.10), (3.2.13) представляют собой объемные силы, действующие внутри самой жидкости. С помощью применения следующих формул, представляющих собой обобщения [23] теоремы Остроградского–Гаусса:

$$\iiint\limits_{\tau} \mathbf{grad}\, p\, d\tau = \oiint\limits_{\sigma} p\, \mathbf{n}\, d\sigma, \quad \iiint\limits_{\tau} \mathbf{Div}\, P d\tau = \oiint\limits_{\sigma} P \cdot \mathbf{n}\, d\sigma, \tag{3.2.15}$$

(3.2.10) и (3.2.13), очевидно, с учетом (3.2.11) могут быть сведены к одному выражению для силы, действующей на элементарный объем $d\tau$:

$$d\mathbf{P} = -\left(\rho \mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{grad}\, \frac{\rho V^2}{2} \right) d\tau. \tag{3.2.16}$$

С помощью преобразований, указанных в § 3.1, уравнения (3.2.10), (3.2.13) могут быть сведены для плоскопараллельных и осесимметричных течений в вязком или невязком случае, соответственно, к видам

$$\rho\mathbf{W}\times\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{Div}\,P, \quad \rho\mathbf{W}\times\boldsymbol{\omega} = \mathbf{grad}\,p, \tag{3.2.17}$$

где

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}\,(1+b) + a\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V} = \mathbf{V} - (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{grad}\,V)\,\frac{V}{\omega^2}.$$

Для трехмерных, соответственно, вязких и невязких течений указанные уравнения могут быть сведены к виду:

$$\rho(\mathbf{W}\times\boldsymbol{\omega} + c\,\boldsymbol{\omega}) = -\mathbf{Div}\,P, \quad \rho(\mathbf{W}\times\boldsymbol{\omega} + c\,\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{grad}\,p, \tag{3.2.18}$$

где

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}\,(1+b) + a\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}.$$

Входящие в $\mathbf{W}$ в формулах (3.2.17), (3.2.18) скалярные функции $a, b, -c$ являются проекциями $V\mathbf{grad}\,V$ на векторы $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V})$, $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}$ и $\boldsymbol{\omega}$ соответственно. В § 3.1 были получены выражения для силы, действующей на элементарный объем жидкости. Применяя (3.2.15) к (3.2.17) и (3.2.18), условно внося знак минус под оператор $\mathbf{Div}$, получим силу, действующую:
— в плоскопараллельном течении на любой элементарный объем единичной протяженности с сечением $dxdy$

$$d\mathbf{P} = \rho\mathbf{W}\times\boldsymbol{\omega}dxdy = \rho\mathbf{W}\times d\boldsymbol{\Gamma}; \tag{3.2.19}$$

— в осесимметричном течении на элементарный объем $dzdrrd\varphi$, где r — расстояние от оси симметрии до сечения $dzdr$, φ — угол, примыкающий к плоскости $z0r$,

$$d\mathbf{P} = \rho\mathbf{W}\times\boldsymbol{\omega}dx\,dyrd\varphi = \rho\mathbf{W}\times d\boldsymbol{\Gamma}rd\varphi; \tag{3.2.20}$$

— в трехмерных течениях на элементарный объем $dxdydz$:

$$d\mathbf{P} = \rho(\mathbf{W}\times\boldsymbol{\omega} + c\,\boldsymbol{\omega})dxdydz; \tag{3.2.21}$$

здесь

$$d\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\omega}dxdy = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}dxdy = \frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}d\Gamma,$$

Γ — в соответствии с формулой Стокса — циркуляция скорости $\mathbf{V}$ по контуру, ограничивающему сечение $dx\,dy$ в плоском случае, и, соответственно, сечение $dz\,dr$ — в осесимметричном случае.

Таким образом, (3.2.19)–(3.2.21) обобщают полученные в § 3.1 выражения на случай вязких жидкостей широкого класса. Аналогично эти выражения могут быть обобщены на случай нестационарных течений, в том числе при наличии непотенциальных массовых сил, при этом в вектор $\mathbf{W}$ войдут соответствующие дополнительные члены.

3.2.3. Соотношения для электромагнитного поля. Энергия и объемные силы. Тензоры напряжений. Будем рассматривать магнитное поле постоянных токов — стационарное магнитное поле, а также квазистационарное электромагнитное поле, которое, естественно, удовлетворяет уравнениям поля Максвелла. Но в них, из-за малости скорости изменения входящих в эти уравнения величин, пренебрегается токами смещения [108, 134]. В результате, это поле близко к полю постоянных токов, и к нему приложим закон электромагнитной индукции Фарадея. При этом будем считать, что среда обладает линейными свойствами, т. е. магнитная проницаемость среды не зависит от поля. Это обстоятельство позволяет записать вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ через вектор напряженности $\mathbf{H}$ магнитного поля в виде

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \tag{3.2.22}$$

где μ — магнитная проницаемость среды. Такими средами, в частности, являются: вакуум, диа- и парамагнетики, а также ферромагнетики, но последние — только при весьма малых значениях вектора магнитной индукции.

Магнитная энергия поля и объемные силы. Магнитная энергия $\overline{W}$ электромагнитного поля и ее объемная плотность w с учетом (3.2.22), как известно [108, 134], могут быть представлены в виде:

$$\overline{W} = \int\int\limits_{\overline{V}}\int w d\overline{V}, \quad w = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}}{2} = \frac{\mu H^2}{2}, \tag{3.2.23}$$

здесь $\overline{V}$ — все пространство. Исходя из того, что вариация магнитной энергии при бесконечно малом виртуальном перемещении находящихся в магнитном поле тел равна механической работе объемных сил, может быть найдено полное выражение для объемной плотности сил $\mathbf{f}$ [108]:

$$\mathbf{f} = -\mathbf{B}\times\mathbf{j} - \frac{H^2}{2}\mathbf{grad}\,\mu + \frac{1}{2}\mathbf{grad}\left(H^2 g\frac{d\mu}{dg}\right), \quad \mathbf{j} = \mathbf{rot}\,\mathbf{H}. \tag{3.2.24}$$

Здесь g — объемная плотность среды. Последний член в правой части (3.2.24) представляет собой так называемые стрикционные силы, и для многих сред, особенно для случая, когда изучаемое тело помещено в вакуум, жидкую или газообразную среду, ими для определения суммарных силы и момента можно пренебречь [108, 134], что и будет предполагаться в дальнейшем. Второй член в правой части (3.2.24) в отсутствии магнетиков также равен нулю, очевидно он равен нулю и в областях, где μ постоянна. Первый член в правой части (3.2.24) представляет собой объемную плотность сил Ампера, действующих на ток $\mathbf{j}$. С привлечением соотношения, аналогичного (3.2.9), и учитывая сказанное, (3.2.24) может быть представлено в виде

$$\mathbf{f} = \mu(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H} - \mathbf{grad}\,\frac{\mu H^2}{2}. \tag{3.2.25}$$

Легко показать, что независимо от того, равен или не равен нулю $\mathbf{grad}\,\mu$ во втором члене в правой части выражения (3.2.24), выражение (3.2.25) не изменит своего вида. Просто в случае, если $\mathbf{grad}\,\mu = 0$, входящая в $\mathbf{grad}\,(\mu H^2/2)$ магнитная проницаемость является независимой от координат.

Тензоры напряжений. Тензоры механических напряжений были введены в теорию электромагнитного поля Максвеллом. В отличие от подхода, который был использован для гидродинамических полей, тензоры напряжений в теории магнитного поля вводятся непосредственно из выражения для объемной плотности сил $\mathbf{f}$ за счет некоторых тождественных преобразований.

Рассмотрим объем G среды, ограниченный поверхностью S. Тогда главный вектор внутренних объемных сил, действующих на тела внутри объема G, может быть представлен аналогично теории упругости в виде

$$\iiint\limits_G \mathbf{f}dG = \oiint\limits_S \mathbf{t}_n dS, \tag{3.2.26}$$

где $\mathbf{t}_n$ — напряжения на площадке dS с внешней нормалью $\mathbf{n}$. Матрица тензора напряжений в этом случае аналогична (3.2.8) и имеет вид

$$T = \begin{Vmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{t}_n = \mathbf{n} \cdot T. \tag{3.2.27}$$

Для эквивалентной замены объемных сил напряжениями необходимо, чтобы при замене оставалась неизменной не только равнодействующая (3.2.26) сил, но и момент этих сил:

$$\iiint\limits_G \mathbf{r} \times \mathbf{f}dG = \oiint\limits_S \mathbf{r} \times \mathbf{t}_n dS. \tag{3.2.28}$$

Как известно, (3.2.28) накладывает требование симметрии тензора (3.2.27):

$$t_{xy} = t_{yx}, \quad t_{xz} = t_{zx}, \quad t_{yz} = t_{zy},$$

а с применением теоремы Остроградского–Гаусса (3.2.26) сводится к выражению

$$\mathbf{f} = \mathbf{Div}\, T. \tag{3.2.29}$$

Отвлекаясь от природы сил, введенные здесь статические выражения (3.2.26), (3.2.28) можно рассматривать как частный случай динамических — (3.2.5), (3.2.6), если левые части в последних положить равными нулю, а объемные силы $\mathbf{f}'$, стоящие в них под интегралами, считать не внешними, а внутренними.

С учетом (3.2.25) выражение (3.2.29) может быть представлено в виде

$$\mu(\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{H} - \mathbf{grad}\,\frac{\mu H^2}{2} = \mathbf{Div}\, T. \tag{3.2.30}$$

Если в области $\mathbf{grad}\,\mu = 0$, то из (3.2.24) и (3.2.30) следует, что в ней

$$-\mu\mathbf{H} \times \mathbf{j} = \mathbf{Div}\, T. \tag{3.2.31}$$

Сравнивая (3.2.30) с (3.2.7) и (3.2.31) с (3.2.10), можно отметить, что левые части этих выражений, представляющие собой объемные плотности сил магнитного или, соответственно, гидродинамического поля, формально отличаются наличием или отсутствием градиента.

Из (3.2.30) Максвеллом с помощью тождественных преобразований была найдена [134] матрица T тензора напряжений, она имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &T = \begin{Vmatrix} \mu\left(H_x^2 - \dfrac{1}{2}H^2\right) & \mu H_x H_y & \mu H_x H_z \\ \mu H_y H_x & \mu\left(H_y^2 - \dfrac{1}{2}H^2\right) & \mu H_y H_z \\ \mu H_z H_x & \mu H_z H_y & \mu\left(H_z^2 - \dfrac{1}{2}H^2\right) \end{Vmatrix}, \\ &\mathbf{t}_n = \mu H_n \mathbf{H} - \frac{\mu H^2}{2}\mathbf{n}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.32}$$

Этот тензор представляет собой симметричный тензор второго ранга. Преобразование его к главным осям, одна из которых — ось 0_1x_1, направлена параллельно вектору $\mathbf{H}$, а две другие — 0_1y_1 и 0_1z_1, ортогональны вектору $\mathbf{H}$, дает тензор T':

$$T' = \begin{Vmatrix} \dfrac{\mu H^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\mu H^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{\mu H^2}{2} \end{Vmatrix} = \frac{\mu H^2}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \tag{3.2.33}$$

Таким образом, вдоль вектора $\mathbf{H}$ имеет место растягивающее напряжение $\mu H^2/2$, а поперек $\mathbf{H}$ — сжимающее напряжение $\left(-\mu H^2/2\right)$. В итоге, нормальные напряжения (см. рис. 3.3) с учетом (3.2.32), (3.2.33) в зависимости от направления нормали $\mathbf{n}'$ к поверхностям, соответственно перпендикулярным и параллельным вектору $\mathbf{H}$, могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{t}_n = \frac{\mu H^2}{2}\mathbf{n}', \quad (\mathbf{n}' || \mathbf{H}); \quad \mathbf{t}_n = -\frac{\mu H^2}{2}\mathbf{n}', \quad (\mathbf{n}' \perp \mathbf{H}). \tag{3.2.34}$$

Итак, в отличие от введенных выше тензоров напряжений гидродинамического поля, система напряжений в магнитном поле может быть сведена

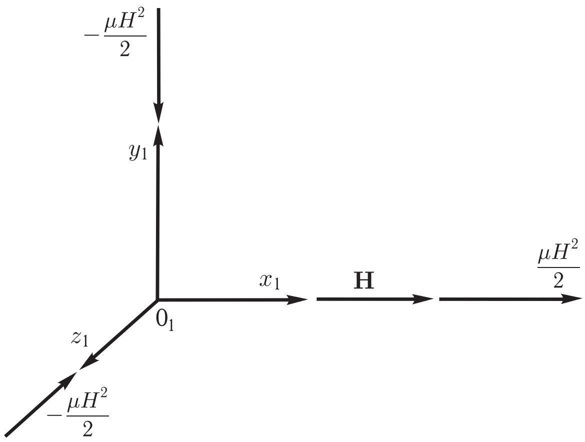


Рис. 3.3. Нормальные напряжения, действующие в электромагнитном поле по главным осям

к некоторому упругому состоянию среды, которая вдоль и поперек вектора $\mathbf{H}$ испытывает указанные напряжения (3.2.33), (3.2.34). Как можно видеть, эти напряжения по абсолютной величине равны плотности w магнитной энергии (3.2.23), взятой с соответствующим знаком.

3.2.4. Гидродинамические задачи и их электромагнитные аналоги. Кратко рассмотрим типичные граничные задачи стационарного обтекания тел идеальной несжимаемой жидкостью:

задача 1 — бесциркуляционное плоскопараллельное или трехмерное потенциальное обтекание;

задача 2 — циркуляционное потенциальное плоскопараллельное течение;

задача 3 — трехмерное течение со сходом с тела следа в виде поверхностей тангенциального разрыва скоростей (это течения с постоянной константой Бернулли вдоль всей поверхности обтекаемого тела за исключением выколотых точек или линий);

задача 4 — плоскопараллельное вихревое обтекание тела, когда вдоль поверхности тела константа Бернулли не изменяется.

Течения жидкости. Область внутри тела будем обозначать $G_+^{(1)}$, всю область течения вне тела и следа $G_-^{(1)}$. Поверхность тела будем обозначать $S^{(1)}$, эту поверхность со стороны области $G_+^{(1)}$ будем обозначать $S_+^{(1)}$, со стороны области $G_-^{(1)}$, соответственно, $S_-^{(1)}$. Положительное направление нормали $\mathbf{n}^{(1)}$к $S^{(1)}$ — внешнее, направленное в $G_-^{(1)}$. Если с поверхности тела сходят поверхности тангенциальных разрывов скоростей по линиям (линии) $\lambda^{(1)}$, то их будем обозначать $Q^{(1)}$.

Рассмотрим сначала задачи 1-3. Обозначим через $\mathbf{W}^{(1)} = \mathbf{V}_\infty^{(1)}$ невозмущенную телом (или телом и следом $Q^{(1)}$) скорость, $\mathbf{U}^{(1)}$ — возмущенную ими скорость, а через $\mathbf{V}^{(1)}$ — суммарную скорость. В $G_-^{(1)}$ вне $S^{(1)}$ и $Q^{(1)}$ завихренность

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{V}^{(1)} = \boldsymbol{\omega}^{(1)} = 0.$$

Все указанные скорости могут быть выражены как:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{W} = \mathbf{V}_\infty^{(1)} = \mathbf{grad}\,\varphi_{V_\infty}^{(1)}, \qquad \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{grad}\,\varphi_U^{(1)}, \\ \mathbf{V}^{(1)} = \mathbf{W}^{(1)} + \mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{grad}\,\varphi_V^{(1)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.2.35}$$

где $\varphi_{V_\infty}^{(1)}, \varphi_U^{(1)}, \varphi_V^{(1)} = \varphi_{V_\infty}^{(1)} + \varphi_U^{(1)}$ — потенциалы, удовлетворяющие уравнению Лапласа, причем возмущенная скорость $\mathbf{U}^{(1)}$ стремится к нулю на бесконечности перед телом. На $S^{(1)}$ ставится условие непротекания

$$\mathbf{V}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)} = 0, \quad \text{или} \quad (\mathbf{W}^{(1)} + \mathbf{U}^{(1)}) \cdot \mathbf{n}^{(1)} = 0. \tag{3.2.36}$$

Следует иметь в виду, что для плоскопараллельных течений потенциалы φ_U, φ_V являются циклическими, а на острой кромке тела ставится условие Чаплыгина–Жуковского об ограниченности скорости.

В трехмерных течениях (задача 3) со сходом свободных поверхностей на $Q^{(1)}$ ставятся условия отсутствия деформаций поверхностей $Q^{(1)}$ и равенства давлений сверху и снизу $Q^{(1)}$, что равносильно следующим выражениям

$$V_{n_+}^{(1)} = V_{n_-}^{(1)} = 0, \quad p_+ = p_-. \tag{3.2.37}$$

Здесь индекс n означает проекцию $\mathbf{V}^{(1)}$ на единичную нормаль $\mathbf{n}$ к $Q^{(1)}$, знаки плюс и минус означают, соответственно, что величины взяты при стремлении к $Q^{(1)}$ с верхней или нижней стороны. В этом случае необходимо решать (например, итерационным методом) нелинейную задачу построения следа $Q^{(1)}$, а в окрестности линии $\lambda^{(1)}$ выполнять условия конечности скорости, которые были сформулированы Манглером и Смитом [167] и обобщены для нестационарных течений и различных типов задних кромок в § 1.1. При таком нелинейном подходе вихревые линии вектора завихренности $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ (3.2.3) на $Q^{(1)}$ должны направляться по местным линиям тока, при этом первое из условий в (3.2.37) будет выполнено, поскольку в силу указанного построения следа $Q^{(1)}$ нормальные к вектору $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ компоненты скорости на нем самом будут отсутствовать. Покажем, что при этом будет выполнено и второе условие в (3.2.37). Векторы скорости при стремлении к $Q^{(1)}$ сверху и снизу с учетом (3.2.4) могут быть представлены как:

$$\mathbf{V}_+^{(1)} = \mathbf{V}_0^{(1)} - \mathbf{m}\frac{\gamma^{(1)}}{2}, \quad \mathbf{V}_-^{(1)} = \mathbf{V}_0^{(1)} + \mathbf{m}\frac{\gamma^{(1)}}{2}, \tag{3.2.38}$$

где в этом случае $\mathbf{V}_0^{(1)} = V_0^{(1)}\boldsymbol{\gamma}^{(1)}/\gamma^{(1)}$ — скорость в точке, принадлежащей $Q^{(1)}$, а единичный вектор $\mathbf{m}$ определяется как:

$$\mathbf{m} = \frac{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \times \mathbf{n}}{\left|\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \times \mathbf{n}\right|}.$$

Применяя (3.2.14) сверху и снизу следа $Q^{(1)}$, с учетом отртогональности $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ и $\mathbf{m}^{(1)}$ в (3.2.38) получим, что второе условие в (3.2.37) выполнено.

В гидродинамике задачу обтекания решают либо в потенциалах, либо ищут поле возмущенных скоростей $\mathbf{U}^{(1)}$ в виде распределения особенностей типа вихрей по объему $G_+^{(1)}$ (3.2.2) или по поверхности $S^{(1)}$ тела (либо по поверхности тела $S^{(1)}$ и следа $Q^{(1)}$) (3.2.3). Тогда из (3.2.36) с учетом (3.2.2), (3.2.3) могут быть получены векторные интегральные уравнения относительно $\boldsymbol{\omega}$ либо $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\frac{\mathbf{n}^{(1)}}{4\pi} \cdot \iiint\limits_{G_+^{(1)}} \frac{\boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)}}{{r^{(1)}}^3} dG_+^{(1)} = -\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{V}_\infty^{(1)} - \frac{\mathbf{n}^{(1)}}{4\pi} \iint\limits_{Q^{(1)}} \frac{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)}}{{r^{(1)}}^3} dQ^{(1)}; \tag{3.2.39}$$

$$\frac{\mathbf{n}^{(1)}}{4\pi} \cdot \iint\limits_{S^{(1)}} \frac{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)}}{{r^{(1)}}^3} dS^{(1)} = -\mathbf{n}^{(1)} \cdot \mathbf{V}_\infty^{(1)} - \frac{\mathbf{n}^{(1)}}{4\pi} \iint\limits_{Q^{(1)}} \frac{\boldsymbol{\gamma}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)}}{{r^{(1)}}^3} dQ^{(1)}. \tag{3.2.40}$$

В работе [107] показано, что в случае моделирования возмущенных скоростей только поверхностными вихрями, при переходе во внутреннюю область тела $G_+^{(1)}$ скорость внутри него равна нулю, и задача сводится к решению уравнений Фредгольма II-го рода относительно проекций вектора $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ завихренности, распределенной по поверхности $S^{(1)}$. При этом на $S_-^{(1)}$ скорость $\mathbf{V}_-^{(1)}$ при стремлении к $S^{(1)}$ со стороны области течения $G_-^{(1)}$ связана с $\boldsymbol{\gamma}^{(1)}$ соотношением

$$\boldsymbol{\gamma}^{(1)} = \mathbf{n}^{(1)} \times \mathbf{V}_-^{(1)}. \tag{3.2.41}$$

В смысле выполнения условия (3.2.41) и распределения завихренности эта гидродинамическая задача аналогична рассматриваемому ниже моделированию задач гидродинамики с использованием квазистационарных электромагнитных полей.

Обратимся теперь к задаче обтекания тела плоскопараллельным вихревым потоком (задача 4). В этом случае невозмущенная телом скорость

$$\mathbf{W}^{(1)} = \mathbf{V}_\infty^{(1)} + \mathbf{u}^{(1)},$$

складывается из потенциальной части, определяемой вектором

$$\mathbf{V}_\infty^{(1)} = \mathbf{grad}\, \varphi_{V_\infty}^{(1)},$$

и непотенциальной (3.2.2), которая для плоскопараллельного случая может быть записана в виде

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{G_-^{(1)}} \frac{\boldsymbol{\omega}^{(1)} \times \mathbf{r}^{(1)}}{{r^{(1)}}^2} dG_-^{(1)}. \tag{3.2.42}$$

На вектор $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$ накладывается условие [79], обеспечивающее существование интеграла в (3.2.42):

$$\left|\boldsymbol{\omega}^{(1)}\right| < \frac{A}{\left|\mathbf{r}^{(1)}\right|^{1+\varepsilon}},$$

при $|\mathbf{r}^{(1)}| \to \infty$, где $A < 0$ — некоторая константа, $0 < \varepsilon < 1$. Тогда, аналогично рассмотренным выше задачам 1–3 из (3.2.36) могут быть получены интегральные уравнения типа (3.2.39), (3.2.40), но с более низкой размерностью пространства интегрирования, в правой части которых будет отсутствовать интеграл по $Q^{(1)}$, но будет входить проекция скорости $\mathbf{u}^{(1)}$ (3.2.42) на нормаль к телу $\mathbf{n}^{(1)}$. Можно отметить, что и в этом случае задача может быть сведена к решению уравнения Фредгольма II-го рода относительно плотности завихренности, распределенной по поверхности тела, которая также будет определяться на $S_-^{(1)}$ соотношением (3.2.41).

Главные векторы силы и момента, действующие на тело, во всех рассмотренных задачах могут определяться путем интегрирования давления (3.2.14) по поверхности $S^{(1)}$ тела.

Электромагнитное моделирование рассмотренных гидродинамических задач. Обсудим существующие подходы к моделированию указанных гидродинамических задач. Будем рассматривать стационарное и квазистационарное электромагнитные поля и среды, указанные в начале разд. 3.2.3. Для квазистационарных полей будем рассматривать области (размеры изучаемых тел) $D \ll \lambda$, где λ — длина электромагнитной волны. Как известно [67], для частот поля от килогерц до мегагерц заряды и токи концентрируются в тонком поверхностном слое

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}\,,$$

где $\omega = (2\pi/\lambda)V_\text{ф}$ — частота поля, $V_\text{ф}$ — фазовая скорость распространения электромагнитных волн, μ — магнитная проницаемость тела, σ — его электропроводность. Это явление называется скин-эффектом. Все геометрические параметры исследуемого тела или следа, моделирующего поверхность тангенциального разрыва, будем считать подобными с телом или следом гидродинамического поля, за ними сохраняются те же буквенные обозначения, но придается надстрочный индекс (2). Будем, за исключением оговоренных случаев, считать, что магнитная проницаемость μ тела и среды, в которую оно помещено, одинаковы.

Рассмотрим аналогии с гидродинамическими задачами 1-4. Запишем электромагнитные величины: $\mathbf{W}^{(2)}$ — невозмущенная телом (или телом и следом $Q^{(2)}$) напряженность магнитного поля,$\mathbf{U}^{(2)}$ — возмущенная ими напряженность магнитного поля, $\mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{H}$ — суммарный вектор напряженности магнитного поля. В $G_-^{(2)}$ вне $S^{(2)}$ и $Q^{(2)}$:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{V}^{(2)} = \mathbf{rot}\,\mathbf{H} = \boldsymbol{\omega}^{(2)} = \mathbf{j} = 0,$$
$$\mathbf{W}^{(2)} = \mathbf{V}_\infty^{(2)} + \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{H}_\infty + \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{grad}\,\varphi_{H_\infty} + \mathbf{u}^{(2)}.$$

Пусть

$$\boldsymbol{\gamma}^{(2)} = \mathbf{i} = \mathbf{rot}\,\mathbf{H}$$

— поверхностная плотность тока, $\mathbf{u}^{(2)}$ — непотенциальная часть невозмущенного телом вектора напряженности магнитного поля, аналогичная (3.2.42), которая для задач 1-3 равна нулю. Тогда соотношения (3.2.35)–(3.2.42), за исключением второго[1]) в (3.2.37), после соответствующей замены индексов (1) на (2) переходят в соотношения для магнитного поля.

Особенно удобно производить решение граничной задачи — аналога (3.2.35)–(3.2.37) с использованием квазистационарного поля, поскольку возникающие на поверхности тела $S^{(2)}$ токи приводят к автоматическому выполнению условия (3.2.36). При моделировании плоскопараллельного течения дополнительно к условию (3.2.36) необходимо выполнить условие, аналогичное условию Чаплыгина–Жуковского на задней кромке. Для этого необходимо

[1]) В электромагнитном поле нет этого условия. Однако, если при электромагнитном моделировании на следе будет выполнено условие — аналог первого соотношения в (3.2.37), то, как было показано выше, и в гидродинамической задаче второе условие в (3.2.37) — для давления, будет выполнено автоматически.

подобрать такой полный ток $\Gamma^{(2)} = I$ (3.2.1), чтобы вектор $\mathbf{H}$ на этой кромке был ограничен, причем частота этого тока должна совпадать с частотой $\mathbf{H}$. При моделировании трехмерного циркуляционного обтекания тела к поверхности тела по линии (линиям) $\lambda^{(2)}$ необходимо «пристыковать» след $Q^{(2)}$. Его моделирование может осуществляться либо дискретно с помощью отдельных полубесконечных проводников [67], либо с помощью тонкой фольги [94]. По этим проводникам пропускается ток, частота которого совпадает с частотой изменения вектора $\mathbf{H}$, при этом в каждой точке следа $Q^{(2)}$ вектор поверхностной плотности тока $\boldsymbol{\gamma}^{(2)} = \mathbf{i}$ (3.2.3) должен совпадать по направлению с $\mathbf{V}_0^{(2)} = \mathbf{H}_0$ — аналогом $\mathbf{V}_0^{(1)}$ (3.2.38). В окрестности линии $\lambda^{(2)}$ должны быть выполнены специальные условия ограниченности вектора $\mathbf{H}$, аналогичные указанным выше для задач гидродинамики. Функционал для поиска решения, удовлетворяющего этим условиям, и итерационная процедура построения такого решения описаны в [67]. Там же описана методика определения $\mathbf{H}$ на поверхности тела и следа с использованием специальных соленоидов. При таком моделировании задач гидродинамики на поверхности тела $S_-^{(2)}$ будет выполнено условие, аналогичное (3.2.41):

$$\mathbf{i} = \mathbf{n}^{(2)} \times \mathbf{H}_-.$$

При использовании стационарного магнитного поля условие — аналог (3.2.41) может быть также получено при пропускании постоянных токов только по поверхности тела (в направлении $0z$ в случае двумерных полей) или поверхности тела и следа (для трехмерных полей). Итерационный процесс поиска решения, удовлетворяющего условиям, аналогичным (3.2.36), (3.2.37), в этом случае является более сложным. При этом, аналогично предыдущему, должна быть также организована процедура выполнения условий на линии $\lambda^{(2)}$, а в трехмерном случае — еще и деформации следа $Q^{(2)}$.

При моделировании задачи 4 во внешней области $G_-^{(2)}$ необходимо пропустить ток $\boldsymbol{\omega}^{(2)} = \mathbf{j}$, который индуцирует вектор $\mathbf{u}^{(2)}$ и удовлетворяет условиям, аналогичным указанным для (3.2.42). Иногда условие непроницаемости тела в электромагнитной аналогии моделируется за счет существенно меньшей величины магнитной проницаемости тела по сравнению с магнитной проницаемостью внешней по отношению к телу среды [128].

В известной литературе не указаны электромагнитные аналоги гидродинамической силы и момента, а при электромагнитном моделировании гидродинамическая сила и момент находятся за счет аналогии между $\mathbf{V}$ и $\mathbf{H}$ непосредственным интегрированием распределения давления по поверхности тела, найденного из уравнения Бернулли (3.2.14).

3.2.5. Силы и моменты, действующие на тела. Запишем сначала выражения для силы и момента, действующих на тела, помещенные в поток идеальной несжимаемой жидкости. Рассматривается класс задач 1–4, указанных в разд. 3.2.4, в которых функция Бернулли постоянна по крайней мере вдоль поверхности тела, за исключением «выколотых» точек или линий. Причем, вдоль всей поверхности тела выполнены соответствующие условия ограниченности скорости. Как известно, в этом случае в силу того, что интеграл по поверхности тела от константы Бернулли обращается в нуль, выражения для главных векторов силы и момента могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{R} = \iint\limits_{S^{(1)}} q\mathbf{n}^{(1)} dS^{(1)}, \quad \mathbf{M} = \iint\limits_{S^{(1)}} q\mathbf{r}^{(1)} \times \mathbf{n}^{(1)} dS^{(1)}, \quad q = \frac{\rho V_-^2}{2}. \tag{3.2.43}$$

Тогда для рассмотренного выше класса задач, моделирующих указанные в разд.3.2.4 гидродинамические течения, с учетом соотношений (3.2.23), (3.2.26), (3.2.33), (3.2.34) могут быть записаны электромагнитные аналоги выражений (3.2.43):

$$\mathbf{F} = -\iint\limits_{S^{(2)}} w\mathbf{n}^{(2)} dS^{(2)}, \quad \mathbf{N} = -\iint\limits_{S^{(2)}} w\mathbf{r}^{(2)} \times \mathbf{n}^{(2)} dS^{(2)}, \quad w = \frac{\mu H_-^2}{2}. \tag{3.2.44}$$

Получим формулы пересчета гидродинамических реакций с соответствующих реакций, действующих на тело в электромагнитном поле, и, наоборот, с использованием теории подобия. Будем считать, что тела, помещенные в жидкость и электромагнитное поле, геометрически подобны и имеют линейные размеры l_V, l_H соответственно

$$\frac{l_H}{l_V} = M_1.$$

Соответствующие масштабы для отношения магнитной проницаемости внешней среды и плотности жидкости, модулей вектора магнитной напряженности и вектора скорости обозначим как:

$$\frac{\mu}{\rho} = M_2, \quad \frac{H}{V} = M_3.$$

Тогда из (3.2.43), (3.2.44) следует

$$\mathbf{R} = -M_1^2 M_2 M_3^2 \mathbf{F}, \quad \mathbf{M} = -M_1^3 M_2 M_3^2 \mathbf{N}. \tag{3.2.45}$$

В случае использования разных физических систем единиц измерения в (3.2.45) появятся еще дополнительные коэффициенты — масштабы, характеризующие соответствующие отношения констант. Формулы (3.2.45) позволяют определять гидродинамические реакции непосредственно из экспериментов в электромагнитном поле, в частности, в результате весового определения сил, действующих на тело в стационарном магнитном поле. Заметим, что выражения (3.2.44), (3.2.45) в известной литературе по электромагнитным и гидродинамическим аналогиям не указаны и не использовались, а для нахождения сил и моментов, действующих в гидродинамике, при моделировании течений применялись непосредственно формулы (3.2.43) с учетом аналогии между V и H.

Можно отметить, что в электродинамике для определения главных векторов силы и момента непосредственно из (3.2.24), (3.2.26), с учетом того, что по области интегрирования $\mu = \mathrm{const}$, могут быть записаны также следующие выражения через объемную плотность тока:

$$\mathbf{F} = -\mu \iiint\limits_{G_+^{(2)}} \mathbf{H} \times \mathbf{j} dG_+^{(2)}, \quad \mathbf{N} = -\mu \iiint\limits_{G_+^{(2)}} \mathbf{r} \times (\mathbf{H} \times \mathbf{j}) dG_+^{(2)}. \qquad (3.2.46)$$

В случае, если токи $\mathbf{i}$ распределены только в поверхностном слое тела, выражения для $\mathbf{F}$ и $\mathbf{N}$ принимают вид:

$$\mathbf{F} = -\mu \iint\limits_{S^{(2)}} \mathbf{H}_0 \times \mathbf{i} dS^{(2)}, \quad \mathbf{N} = -\mu \iint\limits_{S^{(2)}} \mathbf{r} \times (\mathbf{H}_0 \times \mathbf{i}) dS^{(2)}. \qquad (3.2.47)$$

При распределении токов по объему $G_+^{(2)}$ и в тонком поверхностном слое $S^{(2)}$ сила и момент будут определяться суммой соответствующих интегралов (3.2.46), (3.2.47). Следует подчеркнуть, что в гидродинамике выражения для сил и момента, соответствующие (3.2.46), (3.2.47), не используются, хотя они и могли бы быть выведены непосредственно из теории подобия за счет указанной выше аналогии. Однако, отмеченное в разд. 3.2.2, 3.2.3 отсутствие аналогии в тензорах напряжений, [1] действующих внутри жидкости и в электромагнитном поле, видимо, затрудняло обобщение этих формул электродинамики на гидродинамические реакции. В разд. 3.2.6 соответствующие формулы для силы и момента, действующих на тело, помещенное в поток идеальной несжимаемой жидкости, будут доказаны непосредственно без привлечения теории подобия.

О классических формулах Ампера и Н. Е. Жуковского. Отмеченное отличие в тензорах напряжений, видимо, мешало считать подобными формулы Ампера для силы, действующей на проводник с током в магнитном поле, и формулу Н. Е. Жуковского для подъемной силы профиля крыла.

Формула для силы $d\mathbf{F}$, действующей на элемент $d\mathbf{L}^{(2)}$ проводника $L^{(2)}$,

$$d\mathbf{F} = -\mu I \mathbf{H}_\infty \times d\mathbf{L}^{(2)}, \quad I = \oint\limits_{l^{(2)}} \mathbf{H} \cdot d\boldsymbol{l}^{(2)}, \qquad (3.2.48)$$

была получена Ампером экспериментально в 1820 году. Для проводника единичной протяженности $L^{(2)} = 1$ она может быть записана также в виде:

$$\mathbf{F} = -\mu \mathbf{H}_\infty \times \mathbf{I}, \quad \mathbf{I} = \frac{I\mathbf{L}^{(2)}}{\left|\mathbf{L}^{(2)}\right|}. \qquad (3.2.49)$$

В формулах Ампера (3.2.48), (3.2.49) вектор $\mathbf{H}_\infty$ не обязательно ортогонален $\mathbf{L}^{(2)}$.

Тензоры напряжений в электромагнитном поле были введены Максвеллом в 1860-е годы при разработке теории эфира.

[1] При этом, очевидно, отсутствует аналогия и в силах, действующих на элементарный объем проводника и внутри самой жидкости. В гидродинамике в соответствии с разд. 3.2.2 эта сила выражается формулами (3.2.16), или (3.2.19)–(3.2.21), в правые части которых входит вектор $V\mathbf{grad}\,V$. В электродинамике эта сила Ампера в соответствии с (3.2.46) может быть записана в виде формулы $d\mathbf{F} = -\mu\mathbf{H} \times \mathbf{j} dG_+$, в которую не входит аналог вектора $V\mathbf{grad}\,V$.

Формула Н. Е. Жуковского о подъемной силе профиля была получена им в 1906 году, и является, по сути, следствием теоремы сохранения количества движения. В несколько видоизмененной по отношению к первоначальной форме она может быть представлена следующим образом:

$$\mathbf{R} = \rho \mathbf{V}_\infty \times \boldsymbol{\Gamma}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \Gamma \frac{\mathbf{L}^{(1)}}{|\mathbf{L}^{(1)}|}, \quad \Gamma = \oint\limits_{l^{(1)}} \mathbf{V} \cdot d\boldsymbol{l}^{(1)}, \tag{3.2.50}$$

здесь Γ — циркуляция скорости вокруг профиля. Формула (3.2.50) записана для профиля или вихря единичной протяженности $L^{(1)} = 1$. Она может быть также переписана в виде формулы для отрезка вихря длины $dL^{(1)}$:

$$d\mathbf{R} = \rho \Gamma \mathbf{V}_\infty \times d\mathbf{L}^{(1)}. \tag{3.2.51}$$

Формулы Н. Е. Жуковского (3.2.50), (3.2.51) в своем изначальном виде предполагали ортогональность векторов $\mathbf{V}_\infty$ и $\mathbf{L}^{(1)}$, хотя можно доказать, что они справедливы и в случае их неортогональности, что и будет проделано ниже в разд.3.2.6. Видно, что с точностью до знака (3.2.50), (3.2.51) аналогичны (3.2.48), (3.2.49), в случае ортогональности в последних векторов $\mathbf{H}_\infty$ и $\mathbf{L}^{(2)}$.

И формула Ампера (3.2.48), (3.2.49), и формула Н. Е. Жуковского (3.2.50), (3.2.51) справедливы, вообще говоря, только для прямолинейного отрезка тока или вихря. При переходе к криволинейным отрезкам тока или вихря в силу описанных свойств интеграла (3.2.1) в нелинейной постановке на ток или вихрь будет действовать бесконечно большая сила.

3.2.6. Формулы для главных векторов силы и момента в случае объемного и поверхностного распределения завихренности. Везде предполагается, что выполнено условие непротекания (3.2.36). Как и ранее полагается, что функция Бернулли постоянна вдоль поверхности $S_-^{(1)}$, за исключением «выколотых» точек и линий, при этом вблизи линий схода потока выполнены соответствующие условия ограниченности скорости. Для всех рассматриваемых ниже случаев записи формул достаточно доказать, что они сводятся к формулам, которые следуют из (3.2.43):

$$\mathbf{R} = \rho \iint\limits_{S^{(1)}} \frac{V_-^2}{2} \mathbf{n}^{(1)} dS^{(1)}, \quad \mathbf{M} = \rho \iint\limits_{S^{(1)}} \frac{V_-^2}{2} \mathbf{r}^{(1)} \times \mathbf{n}^{(1)} dS^{(1)}. \tag{3.2.52}$$

В общем случае будем рассматривать как двумерные, так и трехмерные течения. Рассмотрим различные случаи распределения завихренности.

По поверхности тела распределен тонкий вихревой слой. Докажем, что в этом случае выражения для силы и момента могут быть записаны в виде

$$\mathbf{R} = \rho \iint\limits_{S^{(1)}} \mathbf{V}_0 \times \boldsymbol{\gamma} dS^{(1)}, \quad \mathbf{M} = \rho \iint\limits_{S^{(1)}} \mathbf{r}^{(1)} \times [\mathbf{V}_0 \times \boldsymbol{\gamma}] dS^{(1)}. \tag{3.2.53}$$

Действительно, как отмечалось в разд. 3.2.4, в этом случае в области G_+ скорость $\mathbf{V}_+ = 0$, а в соответствии с(3.2.38), (3.2.41):

$$\mathbf{V}_0 = \frac{\mathbf{V}_-}{2} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{2} \times \mathbf{n}.$$

Подставляя это выражение в (3.2.53) получим, что они сводятся к (3.2.52), что и требовалось доказать.

Следует отметить, что формулы, аналогичные (3.2.53), но записанные в дифференциалах, могут быть применены также и для тонкой несущей поверхности, но только не на ее границе, и, по сути, они будут выражать теорему Н. Е. Жуковского в малом [9]. Неприменимость (3.2.53) в общем случае на границе тонкой несущей поверхности обусловлена логарифмической особенностью в нормальной к поверхности скорости (3.1.3), которая при интегрировании должна дать дополнительные — подсасывающую силу и момент.

По объему тела распределены объемные вихри. Покажем, что в этом случае главные векторы силы и момента, действующие на тело, могут быть представлены в виде:

$$\mathbf{R} = \rho \iiint\limits_{G_+^{(1)}} \mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega} dG_+^{(1)}, \quad \mathbf{M} = \rho \iiint\limits_{G_+^{(1)}} \mathbf{r}^{(1)} \times [\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}] dG_+^{(1)}. \tag{3.2.54}$$

Введем обозначение для плотности внутренних сил

$$\mathbf{b} = \rho \mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}.$$

Тогда, по аналогии с теорией упругости и с (3.2.26), (3.2.28), объемные интегралы в (3.2.54) могут быть записаны через поверхностные:

$$\mathbf{R} = \iiint\limits_{G_+^{(1)}} \mathbf{b} dG_+^{(1)} = \iint\limits_{S^{(1)}} \mathbf{p}'_n dS^{(1)}, \quad \mathbf{M} = \iiint\limits_{G_+^{(1)}} \mathbf{r} \times \mathbf{b} dG_+^{(1)} = \iint\limits_{S^{(1)}} \mathbf{r} \times \mathbf{p}'_n dS^{(1)}, \tag{3.2.55}$$

где $\mathbf{p}'_n$ — некоторые поверхностные напряжения на площадке $dS^{(1)}$ с внешней нормалью $\mathbf{n}^{(1)}$ при стремлении к $S^{(1)}$ из $G_+^{(1)}$. Матрица тензора напряжений в этом случае аналогична (3.2.27) и имеет вид

$$P' = \begin{Vmatrix} p'_{xx} & p'_{xy} & p'_{xz} \\ p'_{yx} & p'_{yy} & p'_{yz} \\ p'_{zx} & p'_{zy} & p'_{zz} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{p}'_n = \mathbf{n} \cdot P', \tag{3.2.56}$$

где

$$p'_{xy} = p'_{yx}, \quad p'_{xz} = p'_{zx}, \quad p'_{yz} = p'_{zy}.$$

По теореме Остроградского–Гаусса выражение для $\mathbf{b}$ в (3.2.55) в этом случае можно свести к виду:

$$\mathbf{b} = \mathbf{Div}\, P', \tag{3.2.57}$$

где

$$\left.\begin{aligned} & b_x = \frac{\partial p'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p'_{xz}}{\partial z}, \quad b_y = \frac{\partial p'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p'_{yz}}{\partial z}, \\ & b_z = \frac{\partial p'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p'_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p'_{zz}}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.58}$$

Далее нахождение компонент тензора P' практически сводится к максвелловскому [134] для тензора T (3.2.29). В силу (3.2.9) выражение для $\mathbf{b}$ может быть представлено в виде:

$$\mathbf{b} = -\rho(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}{+}\mathbf{grad}\,\frac{\rho V^2}{2}, \tag{3.2.59}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &b_x = -\rho\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)V_x + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\rho V^2}{2}, \quad b_y = -\rho\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)V_y + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\rho V^2}{2},\\ &b_z = -\rho\left(\mathbf{V}\cdot\nabla\right)V_z + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho V^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.60}$$

Покажем, что первая компонента (3.2.60) вектора (3.2.59) сводится к первой компоненте (3.2.58) вектора (3.2.57), для этого воспользуемся известным из векторного анализа преобразованием

$$\mathrm{div}(c\mathbf{a}) = c\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{grad}\,c,$$

где c — некоторый скаляр, $\mathbf{a}$ — некоторый вектор. Тогда

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)V_x = \mathbf{V}(\nabla\cdot V_x) = \mathrm{div}(\mathbf{V}V_x) - V_x\mathrm{div}\mathbf{V},$$

но

$$\mathrm{div}\mathbf{V} = 0,$$

откуда следует

$$(\mathbf{V}\cdot\nabla)V_x = \mathrm{div}(\mathbf{V}V_x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(V_xV_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(V_yV_x\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(V_zV_x\right). \tag{3.2.61}$$

Подставляя (3.2.61) в первое из выражений (3.2.60), убеждаемся, что оно совпадает с первым из выражений в (3.2.58), если положить

$$p'_{xx} = -\rho V_x^2 + \frac{\rho V^2}{2}, \quad p'_{xy} = -\rho V_xV_y, \quad p'_{xz} = -\rho V_xV_z.$$

Аналогичные выражения могут быть получены и для остальных компонент тензора (3.2.56). Таким образом, матрица тензора (3.2.56) может быть сведена к следующему выражению

$$\left.\begin{aligned} &P' = \begin{Vmatrix} -\rho\left(V_x^2 - \dfrac{V^2}{2}\right) & -\rho V_xV_y & -\rho V_xV_z\\ -\rho V_yV_x & -\rho\left(V_y^2 - \dfrac{V^2}{2}\right) & -\rho V_yV_z\\ -\rho V_zV_x & -\rho V_zV_y & -\rho\left(V_z^2 - \dfrac{V^2}{2}\right) \end{Vmatrix},\\ &\mathbf{p}'_n = -\rho V_n\mathbf{V}{+}\frac{\rho V^2}{2}\mathbf{n}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.62}$$

Тензор (3.2.62) с точностью до знака аналогичен максвелловскому, переход к главным осям, одна из которых — 0_1x_1 направлена вдоль вектора $\mathbf{V}$, а другие — 0_1y_1, 0_1z_1 ей ортогональны, дает тензор

$$P' = \begin{Vmatrix} -\dfrac{\rho V^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\rho V^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\rho V^2}{2} \end{Vmatrix} = \frac{\rho V^2}{2} \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \qquad (3.2.63)$$

Итак, в $G_+^{(1)}$ вдоль вектора $\mathbf{V}$ имеет место сжимающее напряжение $(-\rho V^2/2)$, а поперек $\mathbf{V}$ — растягивающие напряжения $\rho V^2/2$. Нормальные напряжения (3.2.56), с учетом (3.2.62), (3.2.63) в зависимости от направления нормали $\mathbf{n}'$ к поверхностям, соответственно перпендикулярным и параллельным вектору $\mathbf{V}$ (см. рис.3.4), могут быть записаны аналогично (3.2.34) в виде

$$\mathbf{p}'_n = -\frac{\rho V^2}{2}\mathbf{n}', \quad (\mathbf{n}' \| \mathbf{V}), \quad \mathbf{p}'_n = \frac{\rho V^2}{2}\mathbf{n}', \quad (\mathbf{n}' \perp \mathbf{V}). \qquad (3.2.64)$$

Таким образом, на $S_+^{(1)}$ в силу (3.2.63), (3.2.64) выражения (3.2.55) при выполнении условия непроницаемости поверхности $S^{(1)}$ дают

$$\mathbf{R} = \rho \iint\limits_{S^{(1)}} \frac{V_+^2}{2}\mathbf{n}^{(1)} dS^{(1)}, \quad \mathbf{M} = \rho \iint\limits_{S^{(1)}} \frac{V_+^2}{2}\mathbf{r}^{(1)} \times \mathbf{n}^{(1)} dS^{(1)}. \qquad (3.2.65)$$

Но в силу указанных свойств интеграла (3.2.2) скорости непрерывны при переходе из области $G_+^{(1)}$ в область $G_-^{(1)}$, поэтому $V_+ = V_-$, и, следовательно, (3.2.65) сводится к (3.2.52), что и требовалось доказать.

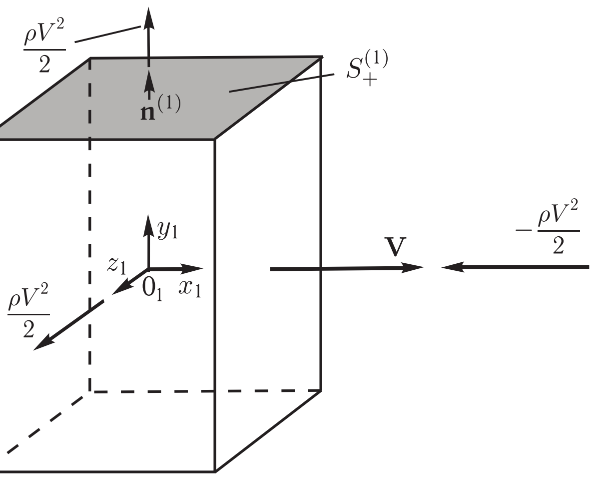


Рис. 3.4. Нормальные гидродинамические напряжения, действующие внутри неподвижного вихревого объема по главным осям вблизи внутренней поверхности $S_+^{(1)}$ тела

Внутри тела распределены объемные вихри, а по его поверхности — тонкий вихревой слой. Докажем, что в этом случае сила и момент сводятся к сумме интегралов (3.2.53) и (3.2.54):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R} &= \rho\iiint\limits_{G_+^{(1)}} \mathbf{V}\times\boldsymbol{\omega}\,dG_+^{(1)} + \rho\iint\limits_{S^{(1)}} \mathbf{V}_0\times\boldsymbol{\gamma}\,dS^{(1)},\\ \mathbf{M} &= \rho\iiint\limits_{G_+^{(1)}} \mathbf{r}^{(1)}\times[\mathbf{V}\times\boldsymbol{\omega}]dG_+^{(1)} + \rho\iint\limits_{S^{(1)}} \mathbf{r}^{(1)}\times[\mathbf{V}_0\times\boldsymbol{\gamma}]dS^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.66}$$

С учетом (3.2.65) выражения (3.2.66) сводятся к интегралам:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R} &= \rho\iint\limits_{S^{(1)}} \left(\frac{V_+^2}{2}\mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{V}_0\times\boldsymbol{\gamma}\right)dS^{(1)},\\ \mathbf{M} &= \rho\iint\limits_{S^{(1)}} \mathbf{r}\times\left(\frac{V_+^2}{2}\mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{V}_0\times\boldsymbol{\gamma}\right)dS^{(1)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.67}$$

Покажем, что

$$\left(\frac{V_+^2}{2}\right)\mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{V}_0\times\boldsymbol{\gamma} = \left(\frac{V_-^2}{2}\right)\mathbf{n}^{(1)}.$$

Разложим векторы $\mathbf{V}_+$, $\mathbf{V}_-$ и $\mathbf{V}_0$ на компоненты, параллельные вектору $\boldsymbol{\gamma}$ и ортогональные этому вектору:

$$\mathbf{V}_+ = \mathbf{V}_{+||} + \mathbf{V}_{+\perp}; \quad \mathbf{V}_- = \mathbf{V}_{-||} + \mathbf{V}_{-\perp}; \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{0||} + \mathbf{V}_{0\perp}.$$

Тогда, с учетом свойств (3.2.2)–(3.2.4):

$$\mathbf{V}_{0||} = \mathbf{V}_{+||} = \mathbf{V}_{-||} = \mathbf{V}_{||}, \quad V_{+\perp} = V_{-\perp} - \gamma, \quad V_{0\perp} = V_{-\perp} - \frac{\gamma}{2},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{V_+^2}{2}\mathbf{n}^{(1)} + \mathbf{V}_0\times\boldsymbol{\gamma} &= \frac{V_{||}^2 + V_{-\perp}^2 - 2V_{-\perp}\gamma + \gamma^2}{2}\mathbf{n}^{(1)} + V_{-\perp}\gamma\mathbf{n}^{(1)} - \frac{\gamma^2}{2}\mathbf{n}^{(1)} = \\ &= \frac{V_{||}^2 + V_{-\perp}^2}{2}\mathbf{n}^{(1)} = \frac{V_-^2}{2}\mathbf{n}^{(1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, подынтегральные выражения (3.2.67), (3.2.66) свелись к подынтегральному выражению (3.2.52), что и требовалось доказать.

Полученные выше общие формулы для векторов силы и момента (3.2.53), (3.2.54), (3.2.66) применимы для всех рассмотренных выше задач 1–4, хотя, как известно, в задаче 1 сила, действующая на тело, будет равна нулю.

Сведение выражений для сил к классической формуле Н. Е. Жуковского для плоскопараллельного течения и к случаю скользящего крыла бесконечного размаха. Выражения для сил (3.2.53), (3.2.54), или обобщенное (3.2.66) сводятся к формуле Н. Е. Жуковского (3.2.50) для подъемной силы в плоскопараллельном течении для профиля или вихря единичной протяженности вдоль оси $0z$. Действительно, пусть в (3.2.66)

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{U}', \quad \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{U}'', \tag{3.2.68}$$

где $\mathbf{U}'$ и $\mathbf{U}''$ — возмущенные скорости, индуцированные соответственно объемным по $G_+^{(1)}$ и поверхностным по $S^{(1)}$ распределением завихренности, определяемые выражениями (3.2.2), (3.2.3). Тогда, подставляя (3.2.68) в (3.2.66) с учетом того, что интегралы:

$$\rho \iint\limits_{G_+^{(1)}} \mathbf{U}' \times \boldsymbol{\omega} dG_+^{(1)}, \quad \rho \int\limits_{S^{(1)}} \mathbf{U}'' \times \boldsymbol{\gamma} dS^{(1)}, \tag{3.2.69}$$

в плоскопараллельном случае равны нулю, получим:

$$\mathbf{R} = \rho \mathbf{V}_\infty \times \mathbf{\Gamma}, \tag{3.2.70}$$

где

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{\Gamma \boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|}, \quad \text{или} \quad \mathbf{\Gamma} = \frac{\Gamma \gamma}{|\boldsymbol{\gamma}|}, \quad \Gamma = \iint\limits_{G_+^{(1)}} \omega dG_+^{(1)} + \int\limits_{S^{(1)}} \gamma dS^{(1)}.$$

Поскольку

$$\frac{\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{|\boldsymbol{\gamma}|} = \frac{\mathbf{L}^{(1)}}{\left|\mathbf{L}^{(1)}\right|},$$

то очевидно, что полученная формула (3.2.70) для $\mathbf{R}$ совпадает с (3.2.50), что и требовалось доказать.

Традиционно в классической формуле Н. Е. Жуковского обычно предполагается ортогональность векторов $\mathbf{V}_\infty$ и $\mathbf{L}^{(1)}$. Однако нетрудно показать, что она справедлива и в случае неортогональности $\mathbf{V}$ и $\mathbf{L}^{(1)}$ (скользящее крыло бесконечного размаха). Будем предполагать, что во всем объеме G_+ объемные векторы завихренности $\boldsymbol{\omega}$ параллельны друг другу, это касается и поверхностных вихрей $\boldsymbol{\gamma}$ на S. Для доказательства представим векторы, входящие в (3.2.68), в виде:

$$\mathbf{V}_\infty = \mathbf{V}_{\infty\perp} + \mathbf{V}_{||}, \quad \mathbf{U}' = \mathbf{U}'_\perp + \mathbf{U}'_{||} + \mathbf{U}'_{\perp\times||}, \quad \mathbf{U}'' = \mathbf{U}''_\perp + \mathbf{U}''_{||} + \mathbf{U}'_{\perp\times||}.$$

Здесь подстрочный индекс «$\perp$» означает компоненту соответствующего вектора, параллельную плоскости векторов $\mathbf{V}_\infty$ и $\boldsymbol{\omega}$ (или $\mathbf{V}_\infty$ и $\boldsymbol{\gamma}$) и ортогональную $\boldsymbol{\omega}$ (или $\boldsymbol{\gamma}$); индекс «$||$» означает компоненту вектора, параллельную $\boldsymbol{\omega}$ (или $\boldsymbol{\gamma}$); индекс «$\perp \times ||$» означает компоненту, ортогональную компонентам с индексами «$\perp$» и «$||$». Тогда, подставляя указанные разложения в (3.2.66), получим, что:

$$\mathbf{V}_{\infty||} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V}_{\infty||} \times \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{U}'_{||} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{U}'_{||} \times \boldsymbol{\gamma} = 0,$$

а интегралы

$$\rho \iint\limits_{G_+} \left(\mathbf{U}'_\perp + \mathbf{U}'_{\perp\times||}\right) \times \boldsymbol{\omega} dG_+, \quad \rho \int\limits_{S} \left(\mathbf{U}''_\perp + \mathbf{U}''_{\perp\times||}\right) \times \boldsymbol{\gamma} dS,$$

аналогичны (3.2.69) и обращаются в нуль. В итоге получим:

$$\mathbf{R} = \rho V_{\infty\perp} \Gamma \mathbf{k}, \tag{3.2.71}$$

где

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{V}_{\infty\perp} \times \boldsymbol{\omega}}{|\mathbf{V}_{\infty\perp} \times \boldsymbol{\omega}|}, \quad \text{или} \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{V}_{\infty\perp} \times \boldsymbol{\gamma}}{|\mathbf{V}_{\infty\perp} \times \boldsymbol{\gamma}|}.$$

Но

$$V_{\infty\perp} = V_{\infty} \sin\beta,$$

где β — угол между векторами $\mathbf{V}_\infty$ и $\boldsymbol{\omega}$ (или $\mathbf{V}_\infty$ и $\boldsymbol{\gamma}$), причем, он, равен углу между $\mathbf{V}_\infty$ и $\mathbf{L}^{(1)}$. Следовательно, (3.2.71) может быть записано в виде:

$$\mathbf{R} = \rho \mathbf{V}_\infty \times \boldsymbol{\Gamma}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = \frac{\Gamma \mathbf{L}^{(1)}}{\left|\mathbf{L}^{(1)}\right|}.$$

Для отрезка вихря длины $d\mathbf{L}^{(1)}$ эта формула может быть представлена в виде:

$$d\mathbf{R} = \rho \Gamma \mathbf{V}_\infty \times d\mathbf{L}^{(1)}.$$

Итак, формула Н. Е. Жуковского в виде (3.2.50) или (3.2.51) справедлива и в случае неортогональности векторов $\mathbf{V}_\infty$ и $\mathbf{L}^{(1)}$, и, таким образом, имеет место полная аналогия между формулой Ампера и формулой Н. Е. Жуковского.

Можно отметить, что и вывод формулы Ампера в виде (3.2.48) или (3.2.49) может быть проведен совершенно аналогично из выражений (3.2.46), (3.2.47), или им подобных — при переменности μ по области интегрирования. Причем, в силу равенства нулю интегралов, аналогичных (3.2.69), из такого вывода, в частности, следует, что сила, действующая на проводник, не зависит от магнитной проницаемости самого проводника, а зависит только от магнитной проницаемости внешней среды.

Глава 4

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ВИХРЕВОГО И ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ В ГИДРО- И АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ТРУБАХ

В этой главе приведены результаты систематических исследований в гидродинамической трубе (ГДТ) ЦАГИ ГДТ–400 с помощью оптического метода, основанного на использовании уникального прибора, разработанного Государственным оптическим институтом имени С. И. Вавилова (ГОИ). Основная часть материалов собрана вместе из опубликованных ранее периодических изданий, но некоторые результаты ранее нигде не были опубликованы и приводятся здесь впервые. Показаны достаточно широкие возможности этого метода. Он позволяет получить: общую картину течения, возникающую вследствие изменений оптических свойств среды, вызванных обтекаемым телом; локальные спектры течения, искусственно выделяемые путем местного подогрева поверхности модели, а также картины течения с визуализацией внешнего потока тепловой гребенкой. Рассматриваются результаты, полученные на режимах течения около различных тел при резком разгоне и торможении набегающего потока. Приведены картины взаимодействия вихревого следа колеблющегося профиля с неподвижным профилем и т. п.

Также приведены результаты исследований обтекания усеченных эллипсоидов с плоской донной поверхностью (с косым и прямым донным срезом) в гидродинамической трубе методом подкрашенных струй. Представлены спектры обтекания для широкого диапазона изменения углов атаки и скольжения как при постоянной скорости набегающего потока, так и при быстром разгоне и торможении. Обнаружено, для случая обтекания усеченного эллипсоида с косым срезом при стационарных внешних условиях, существование двух режимов обтекания: с двумя стационарными вихревыми жгутами и с периодически образующимися вихревыми кольцами. Дано объяснение с точки зрения индукции процесса образования таких вихревых колец. Проведено подробное исследование процесса развития вихревого следа за усеченным эллипсоидом с косым донным срезом. Отмечается, что поскольку усеченный эллипсоид с косым донным срезом является по сути упрощенной моделью фюзеляжа транспортного самолета или вертолета, то обнаруженные несимметрия и неоднозначность вихревых структур могут оказывать существенное влияние, в частности, на работу стабилизатора, вертикального оперения или рулевого винта вертолета. Это необходимо учитывать в практической аэродинамике.

Далее в этой главе с помощью визуализации обтекания треугольного крыла с углом стреловидности по передней кромке $\chi = 70\,^\circ$ в гидродинамической трубе проведено изучение нестационарных явлений в положении областей взрыва вихрей, образующихся вблизи передних кромок такого крыла. Представлены результаты исследований для широкого спектра нестационарных режимов изменения углов атаки, скольжения и скорости набегающего потока. Показано, что на ряде нестационарных режимов наблюдается весьма значительное отличие в законах перемещения областей взрыва вихрей по крылу при изменении углов атаки и скольжения по сравнению с положением этих областей при стационарном обтекании на тех же углах. При вращении крыла на уменьшение угла атаки обнаружено продвижение областей взрыва вихрей вверх по крылу вместо их перемещения вниз по крылу в условиях стационарного обтекания. Аналогичное явление имеет место при вращении крыла по углу скольжения. Показано, что изменение аэродинамических нагрузок на таком крыле, полученных при весовых испытаниях методом вынужденных колебаний, объясняется и хорошо коррелирует с перемещением области взрыва. Обнаружена сильная зависимость положения области взрыва, а следовательно, и аэродинамических характеристик от уменьшения скорости по времени, в том числе, от одновременного возрастания угла атаки и уменьшения скорости, что моделирует реальное движение маневренного самолета при выходе на большие углы атаки. Отмечается, что это принципиально важное обстоятельство ставит задачу создания соответствующих установок (например, аэродинамической трубы с переменной скоростью потока) или исследования таких режимов с помощью моделей на движущихся тележках.

Кроме того, здесь приводятся результаты экспериментальных исследований аэродинамики прямоугольных крыльев с удлинением $\lambda = 5$ при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} = 0{,}6 \cdot 10^6$, включающие весовые измерения и визуализацию различными способами течения на поверхности крыльев, в широком диапазоне углов атаки. Показано, что при больших углах атаки течение имеет ячеистую структуру зон отрыва с носка, расположение и размер которых вдоль размаха носят, в значительной мере, случайный характер, и существенно нестационарно даже при стационарных внешних условиях. При этом отрывные зоны на виде в плане имеют форму трапеции, опирающейся своим малым основанием на носок крыла. Дано объяснение причин такой формы отрывных зон. Обнаружено, что на больших углах атаки в отсутствие скольжения могут возникать значительные моменты крена и рыскания, обусловленные несимметричной структурой течения относительно плоскости симметрии крыла. Исследованы гистерезисные явления в зависимостях коэффициентов аэродинамических сил и моментов, в том числе моментов крена и рысканья, от угла атаки крыла и связь изменений этих коэффициентов по времени с эволюциями зон отрыва. Обнаружен еще один практически важный результат, который необходимо учитывать в методике проведения исследований. При изменении порядка проведения испытаний (сначала установка угла атаки в диапазоне, где реализуются гистерезисные явления, а затем набор скорости до заданной величины — вместо обратного) реализуется режим отрывного обтекания с носка крыла, а не безотрывный режим, т. е. происходит попадание сразу на ветвь петли гистерезиса, соответствующую обратному ходу по углу атаки. Дана трактовка причины этого явления.

§ 4.1. Оптическая визуализация вихревых и отрывных течений в гидродинамической трубе

4.1.1. Принцип действия оптического визуализирующего устройства в гидродинамической трубе. В данном разделе изучаются возможности оптического метода визуализации течений в ГДТ не только контактным, но и бесконтактным методами. Вертикальная ГДТ–400 ЦАГИ имеет длину рабочей части 1700 мм и квадратное поперечное сечение 400×400 мм^2. Направление потока: сверху вниз. Скорость потока воды изменяется в пределах $V = 1 \div 30$ см/с. Общий вид ГДТ–400 ЦАГИ с визуализирующим оптическим устройством и установленной в рабочей части трубы моделью прямоугольного крыла представлен на рис. 4.1.

Исследования проводились с помощью визуализирующего оптического устройства (ВОУ), схема которого изображена на рис. 4.2. ВОУ состоит из: приемно-осветительного блока, в который входят источник света *1*, кон-

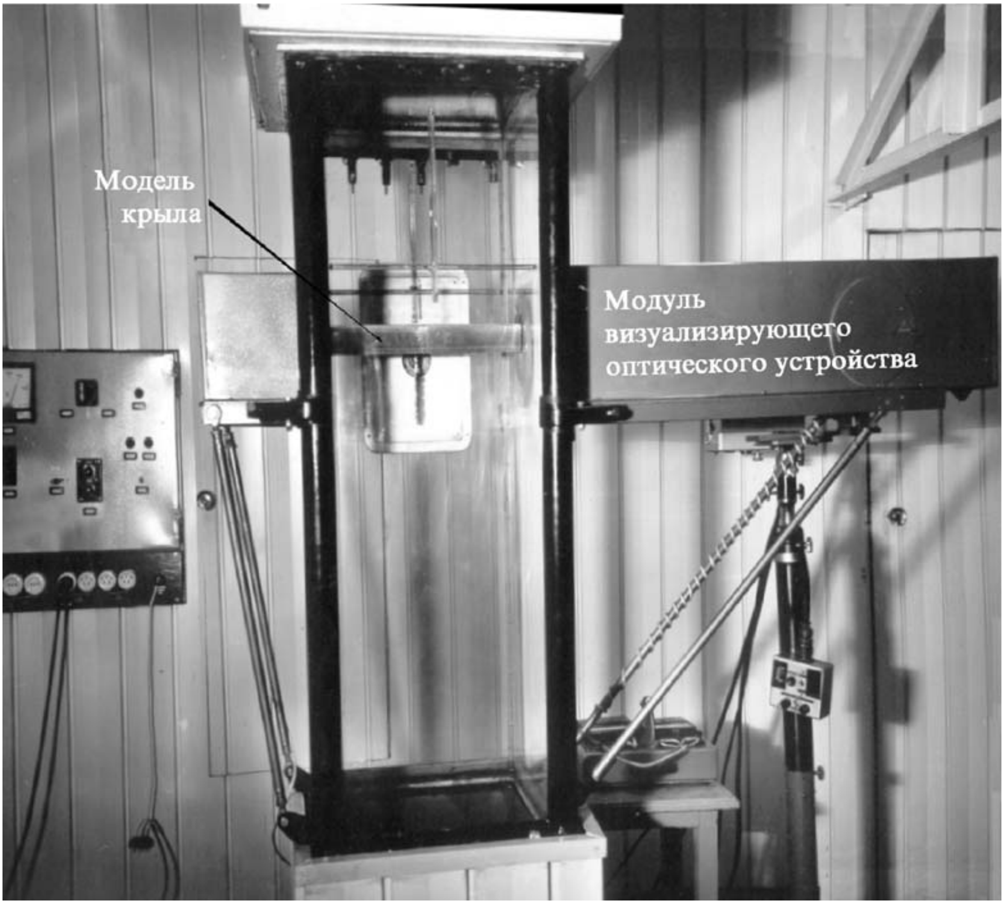


Рис. 4.1. Гидродинамическая труба ГДТ–400 ЦАГИ с моделью крыла и визуализирующим оптическим устройством

денсоры *2*, *3*, световая диафрагма *4* и образованная кромками зеркальных ножей *5*, *6* визуализирующая диафрагма *7*; двухлинзового объектива *8*; двух иллюминаторов *9*, *10*, вмонтированных в изготовленные из органического стекла стенки рабочей части ГДТ и выполненных в виде плоско-параллельных пластин из оптического стекла с просветляющим покрытием; автоколлимационного зеркала *11* с наружным отражающим покрытием; регистрирующего устройства *12*.

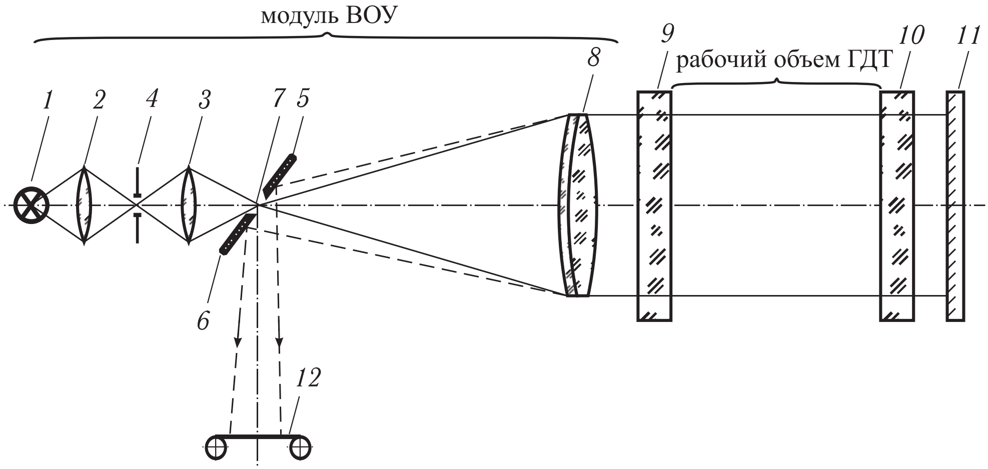


Рис. 4.2. Принципиальная схема визуализирующего оптического устройства

В основу работы ВОУ, как и обычного прибора Теплера, положен принцип шлирен-системы, заключающийся в том, что часть световых лучей, отклоненных вследствие появления в рабочем объеме оптических неоднородностей, отражается от поверхности зеркальных ножей и попадает на экран регистрирующего устройства.

Как известно, визуализация течений с помощью обычного прибора Теплера [90], использующегося в практике аэродинамических исследований, основана на регистрации оптических неоднородностей сжимаемой среды, обусловленных изменением ее плотности. В указанных выше условиях проводимых в ГТД экспериментов в потоке практически несжимаемой жидкости (воды) числа Маха весьма малы. Физические основы появления в результате обтекания тел оптических неоднородностей достаточной интенсивности, которые могут быть зафиксированы с помощью ВОУ, являются иными. Для выяснения этого вопроса были проведены расчетные исследования обтекания водой плоской пластины под нулевым углом атаки, которые показали, что возникающий на ней динамический пограничный слой индуцирует соответствующий температурный пограничный слой, величина и распределение температуры которого и обеспечивают необходимое для работы ВОУ изменение плотности воды на относительную величину порядка $\Delta\rho/\rho \approx 10^{-8}$, где ρ плотность воды. Эта величина соответствует режиму максимальной чувствительности ВОУ и она существенно выше, чем у обычного прибора Теплера. Таким образом, температурные параметры пограничного слоя и свободных вихревых слоев, а также и других слоев резкого изменения параметров потока, определяют возможности визуализации течений с помощью рассматриваемого визуализирующего оптического устройства.

Кроме того, наряду с указанными выше оптическими неоднородностями (первого типа), обусловленными обтеканием тела, в режиме максимальной чувствительности ВОУ можно выявить оптические неоднородности другой природы (второго типа), которые изначально присутствуют в среде вследствие, например, ее температурной неоднородности. В тех случаях, когда необходимо свести к минимуму присутствие неоднородностей второго типа, использовались два приема: во-первых, перед началом пуска гидродинамической трубы вода выдерживалась в спокойном состоянии для выравнивания конвективных и температурных полей; во-вторых, применялась искусственная визуализация течения путем преднамеренного снижения чувствительности ВОУ и подогрева центрального сечения модели.

4.1.2. Некоторые особенности методики применения визуализирующего оптического устройства в гидродинамической трубе. Рассмотрим кратко некоторые особенности методики оптической визуализации вихревых и отрывных течений в ГДТ–400 ЦАГИ.

При исследовании плоских течений модель устанавливается в рабочей части ГДТ с помощью небольших плоских державок так, что они находятся в пристеночном пограничном слое трубы, а торцевые поверхности модели через гладкие фторопластовые проладки достаточно плотно прилегают к поверхности иллюминаторов. Таким образом, протекание жидкости между торцевыми поверхностями модели и стенками рабочей части ГДТ отсутствует.

С целью выделения местного течения из общей картины обтекания тела в некоторых случаях в центральном сечении, как и в работе [21], заподлицо с поверхностью модели устанавливался нагревательный элемент, обеспечивающий изменение коэффициента преломления среды в узкой окрестности исследуемого сечения. Для расширения возможностей визуализации использовалась также тепловая гребенка, по аналогии с [27], осуществляющая подогрев нескольких струек, набегающих на обтекаемое тело, с помощью герметически запаянных в трубочки и нагреваемых электрическим током проволочек. Положение тепловой гребенки относительно модели могло изменяться в любом из трех ортогональных направлений: вдоль оси трубы (по направлению потока), по размаху модели и по направлению, перпендикулярному к первым двум.

Для регистрации процессов обтекания моделей ВОУ использовалось в комплекте с видео-, кино- или фотоаппаратурой типа АНФ-21 М. Последняя аппаратура применялась как в автоматическом режиме (с частотой съемки 2 кадра в секунду), так и в ручном режиме съемки отдельными кадрами по выбору оператора.

Сочетание возможностей ВОУ с методическими особенностями, присущими эксперименту в ГДТ–400 ЦАГИ, позволяет применять следующие способы визуализации:

— естественная визуализация течения, реализующаяся без всякого дополнительного вмешательства исследователя в процесс обтекания; в этом случае визуализация течения осуществляется вследствие изменения оптических свойств среды, вызванного исключительно только присутствием обтекаемого тела; вследствие малых изменений коэффициента преломления воды в этом случае ВОУ должно быть настроено на наибольшую чувствительность; при этом получается интегральная картина течения, поскольку результат определяется суммарным воздействием оптических неоднородностей по пути оптического луча в исследуемой области среды;

— искусственная визуализация локального течения, осуществляемая посредством подогрева узкой области на поверхности модели с помощью вмонтированного в модель нагревательного элемента; в этом случае в окрестности выделенной области градиенты плотности жидкости заметно возрастают, что дает возможность, несколько уменьшив чувствительность аппаратуры, отсеивать элементы интегральной картины течения с целью более четкого выделения локального спектра обтекания;

— искусственная визуализация внешнего течения около модели с помощью тепловой гребенки; в этом способе, как и в предыдущем, можно также использовать возможности уменьшения чувствительности ВОУ;

— комбинированные способы визуализации течения; меняя чувствительность ВОУ и регулируя силу тока в электрических нагревательных элементах, можно с помощью сочетания интегральных, локальных и внешних картин течения получать различные комбинированные спектры обтекания.

Для иллюстрации упомянутых выше способов визуализации на рис. 4.3, *а–в* приведены фотографии спектров обтекания кругового цилиндра: *а* — интегральная картина течения; *б* — локальная картина течения; *в* — картина внешнего течения в комбинации с естественной визуализацией. Представленные спектры получены примерно в одинаковые моменты времени после быстрого разгона потока от нулевого до постоянного значения скорости, соответствующего числу Рейнольдса $\mathrm{Re} = 2100$ (за характерный линейный размер для цилиндра здесь и далее принят его диаметр).

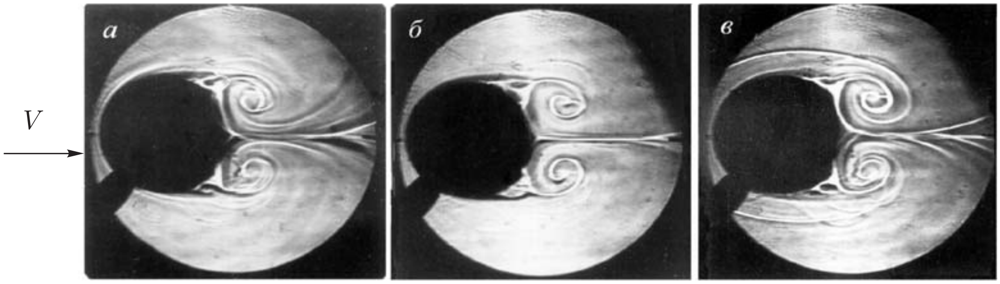


Рис. 4.3. Начальная фаза течения около цилиндра

Важно отметить, что на рассматриваемой начальной стадии развития отрыва потока интегральная и локальная картины течения весьма сходны между собой. Это говорит в данном случае, во-первых, о достаточно синхронном развитии явлений в различных по размаху сечениях модели, хотя небольшое рассогласование обтекания отдельных сечений все-таки наблюдается, что проявляется в некотором уменьшении четкости изображения вихрей, зафиксированных в интегральном спектре (рис. 4.3, *а*),по сравнению с локальной картиной течения (рис. 4.3, *б*). Заметим, во-вторых, что близость локального спектра к интегральному спектру обтекания экспериментально подтверждает теоретически обоснованный результат [21] о малости искажений, вносимых в течение нагревательным элементом в центральном сечении, а также указывает на незначительное влияние пристеночных и других возмущений на интегральную картину течения около всей модели. Визуализация внешнего течения в комбинации с естественной визуализацией (рис. 4.3, *в*) позволяет выделить из набегающего на модель в рассматриваемом сечении потока часть жидкости и проследить в дальнейшем, как эта масса жидкости захватывается обтекаемым телом и увлекается в его кормовую область. Описанный процесс, как известно, составляет основу механизма образования сопротивления при отрывном обтекании тел. На кормовой части поверхности цилиндра наблюдается вторичный отрыв возвратного течения, обусловленного основным вихревым движением жидкости. Подробнее процесс развития вторичного отрывного течения на круговом цилиндре будет рассмотрен далее.

На рис. 4.4, *а* показан локальный спектр течения для более поздней фазы развития отрывных разгонных вихрей. Возможности оптического метода позволили в данном случае четко проследить спиралевидную структуру вихрей, соответствующую теоретической схеме их строения. На рис. 4.4, *в* зафиксировано течение за цилиндром на той же стадии развития, что и в предыдущем случае. Отличие состоит в том, что наряду с подогревом центрального сечения модели было осуществлено увеличение чувствительности ВОУ, что позволило увидеть спиралеобразный вихрь в центральном сечении (локальный спектр) сквозь «вуаль» интегральной картины течения, образовавшейся в результате рассогласованного по размаху модели обтекания отдельных сечений.

Спектр, иллюстрирующий формирование вихревой дорожки Кармана, показан на рис. 4.4, *в*. Виден развитый вихрь, образованный частицами жидкости, сошедшими с верхней поверхности цилиндра. И в этом случае наблюдается вторичный отрыв возвратного течения, обусловленный этим вихрем и возникающий на кормовой части поверхности цилиндра вблизи его горизонтальной плоскости симметрии. На нижней поверхности цилиндра прослеживается зарождение вихря противоположного направления вращения.

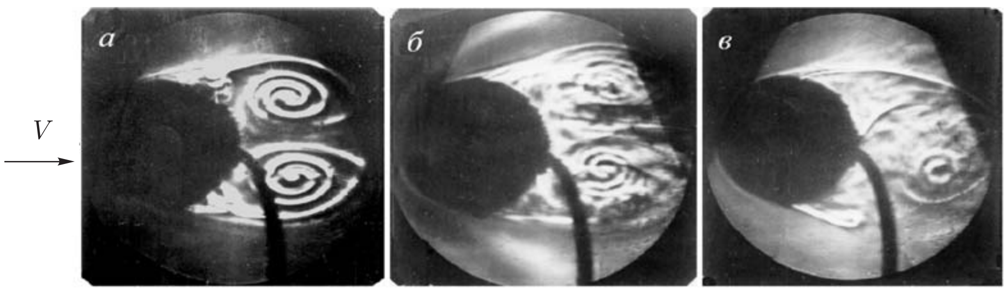


Рис. 4.4. Развитая фаза течения около цилиндра

Стадия несимметричного течения за цилиндром была исследована оптическим методом в аэродинамической трубе [20].

Полученные результаты показывают широкие возможности и эффективность применения метода оптической визуализации при изучении течений в ГДТ как для исследования общей интегральной картины обтекания, так и для детализации и выявления ее отдельных особенностей.

Прослеживая движение оптических неоднородностей, обнаруженных в потоке при визуализации области течения, можно изучать не только качественные картины обтекания, но и количественные характеристики потока. Неоднородности обоих типов в данной работе использовались для определения количественных параметров течения вблизи обтекаемого тела (близлежащие неоднородности). Кроме того, неоднородности второго типа, удаленные от тела, использовались для оценки величины скорости невозмущенного потока. Для определения количественных параметров течения использовались отпечатанные фотографии с кадров кинолент, на которых измерялись текущие положения выбранных точек (меток) неоднородностей, и при известной частоте киносъемки вычислялись скорости их перемещения. Использовался также и несколько другой подход. Фотографии сканировались в компьютер и измерения производились методами компьютерной графики. С одной стороны, как при любом копировании несколько теряется информативность снимков, а, с другой стороны, возрастают возможности повышения точности измерений путем оперативного изменения масштабов картины в целом и ее отдельных фрагментов. При обоих подходах действуют определенные факторы, влияющие на точность получения количественных результатов. Это, в основном, два фактора затрудняющие нанесение меток на выбранные неоднородности и определение их координат:

— деформация и постепенное размывание (диффузия) неоднородностей;

— индивидуальные особенности исследователей, занимающихся идентификацией неоднородностей.

Проведенные в данной работе систематические измерения указанными двумя различными способами в разное время и разными сотрудниками показали, что разброс измеренных значений координат меток и скоростей их перемещения не превышает 10% от максимальных значений измеряемых величин. Таким образом, как и любой другой метод визуализации, примененный метод оптической визуализации при всех его преимуществах не может претендовать на высокую точность результатов количественных оценок. Однако, в первом приближении для определенных выводов, вытекающих из анализа полученных картин визуализации, получаемой точности измерений вполне достаточно.

Реализованный в экспериментах переходный процесс разгона набегающего потока от нуля ($V = 0$) до заданного установившегося значения скорости $V = V_0$ производился практически по закону:

$$\frac{V}{V_0} = \begin{cases} \left[1 + \sin\left(\pi\dfrac{\overline{\tau}}{\overline{\tau}_1} - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]/2 & \text{при } 0 \leqslant \overline{\tau} \leqslant \overline{\tau}_1 \\ 1 & \text{при } \overline{\tau} > \overline{\tau}_1. \end{cases}$$

Здесь и далее $\overline{\tau} = tV_0/L$ — безразмерное время, t — размерное время, $\overline{\tau}_1 \approx 1$ — безразмерное время выхода потока на постоянное значение, L —характерный линейный размер ($L = D$ — диаметр цилиндра и полуцилиндра, $L = b$ — хорда аэродинамического профиля, $L = s$ — длина стороны поперечного сечения правильной трехгранной призмы).

Типовой профиль изменения скорости потока при его резком разгоне представлен на рис. 4.5. Видно, что измеренные по достаточно удаленным от цилиндра неоднородностям первого типа значения скорости переходного процесса достаточно близки к кривой, описанной приведенным соотношением. В подтверждение выше сказанного относительно точности количественных результатов можно видеть, что отклонения измеренных значений скорости невозмущенного потока от расчетной кривой не превышают величин порядка $\pm 0{,}1 V_0$.

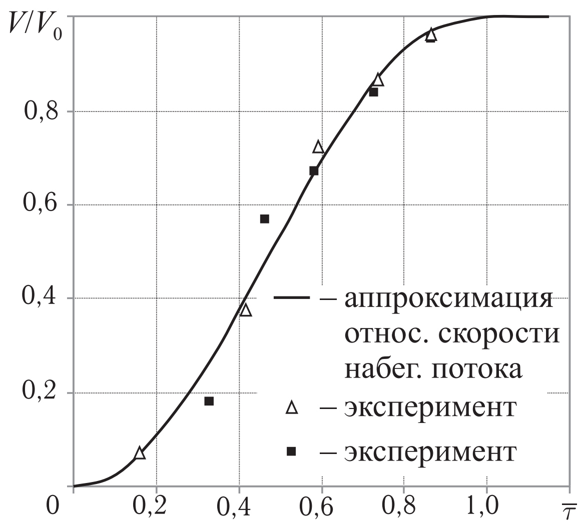


Рис. 4.5. Изменение относительной скорости разгоняющегося потока по безразмерному времени

Значения скорости установившегося потока V_0 в гидродинамической трубе, в основном, соответствовали диапазону чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} = V_0 \mathrm{L}/\nu = 1800–2100$ для цилиндра, полуцилиндра, профиля и призмы, где $\nu = 1{,}01 \times 10^{-6}$ м^2/с — коэффициент кинематической вязкости воды. Для цилиндра были реализованы также и более высокие значения, до Re=14000. Следует отметить, что на стадии интенсивного разгона поток в ГДТ не турбулизируется до значительных величин числа Re, определенного по конечной установившейся скорости потока V_0. Турбулизация потока происходит при падении величины ускорения и установлении постоянной величины средней скорости течения.

4.1.3. Обтекание круглого цилиндра. Обтекание круглого цилиндра изучалось многими авторами. Некоторые результаты таких исследований приведены в работах [28, 85, 90, 110, 119, 144, 163, 176, 177].

Тем не менее, фазы отрывного обтекания цилиндра на режимах быстрого разгона и торможения, когда инерционные силы в жидкости весьма велики, изучены недостаточно. Поэтому были проведены дополнительные физические исследования начальной стадии формирования течения. Следует заметить, что поскольку в нестационарных процессах правило обращения потока не действует, то рассматриваемые результаты необходимо понимать именно с учетом этого обстоятельства. То есть полученные результаты, строго говоря, относятся именно к режимам разгона и торможения потока, а не тела, хотя некоторые, особенно кинематические, свойства течения могут иметь и более общий характер.

В связи с этим, целью этих исследований являлось обнаружение новых характерных особенностей, возникающих при обтекании круглого цилиндра и других тел на упомянутых режимах быстрого разгона или торможения потока при весьма малых значениях времени. Особенно важно для рассматриваемой задачи то, что высокая чувствительность этого метода дает возможность избежать внесения каких-либо дополнительных возмущений в исследуемое течение и тем самым зафиксировать лишь те возмущения, которые возникают при обтекании тела. Кроме того, метод позволяет уточнить особенности обтекания за счет искусственной визуализации картины течения.

Режимы разгона потока. Выявленные в процессе испытаний основные характерные особенности возникновения и развития течений около круглого цилиндра, переходящие затем в развитые вихревые структуры, демонстрируются на рис. 4.6–4.16.

На рис. 4.6 представлены кадры киносъемки развития отрывного течения за цилиндром при резком разгоне потока. Для получения спектров с минимумом посторонних помех здесь применена искусственная визуализация течения с подогревом центрального сечения модели. На первом кадре (см. рис. 4.6, *а*) — наблюдается практически симметричное течение. Видно несколько характерных особенностей. Весьма слабо визуализируется линия *1* вдоль плоскости симметрии. Выше и ниже нее по две плавных линии *2*, *3*, отходящих от поверхности цилиндра с расходящимися от плоскости симметрии «хвостами». Эти линии разрыва параметров течения разделяют области жидкости с разными свойствами и показывают, что в кормовой части цилиндра существует два встречных, направленных к плоскости симметрии, движения масс жидкости. На втором кадре (см. рис. 4.6, *б*) видно, что внешняя линия *3*, продвигаясь к плоскости симметрии, «поджимает» часть жидкости к поверхности цилиндра. В результате вблизи точки отхода этой линии от поверхности цилиндра образуется некое подобие жидкого выступа *4* с которого далее и происходит срыв *5* потока (рис. 4.6, *в*, *г*) с последующим формированием крупных вихревых структур. Далее в области жидкого выступа *4* (рис. 4.6, *д,е*) некоторая часть жидкости, ограниченная линиями особенностей, ближайшими к плоскости симметрии, образует зоны *6*, по форме близкие к криволинейным треугольным (дельтавидным) зонам. В дальнейшем по мере усиления вихрей и поджатия к этим зонам новых масс жидкости в этой области развивается вторичный отрыв *7* потока (рис. 4.6, *ж,з*). Подробнее процесс развития течения в дельтавидной области будет рассмотрен далее. Плавно изогнутые визуализированные линии *8* образуют в кормовой

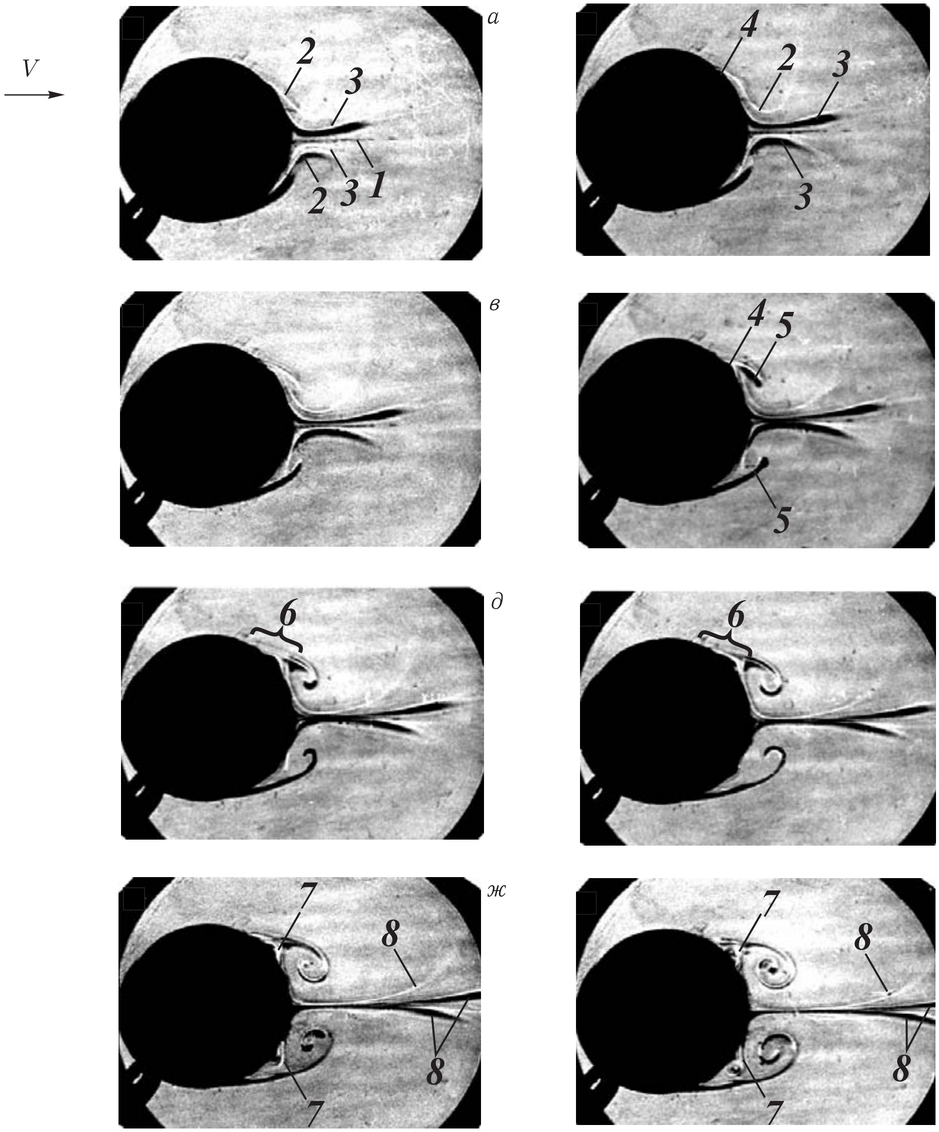


Рис. 4.6. Возникновение и развитие начальной симметричной фазы отрывного течения около круглого цилиндра при разгоне набегающего потока (до числа $\mathrm{Re} = 14000$)

области вблизи плоскости симметрии веерообразную структуру. В процессе развития отрывного симметричного течения его устойчивость теряется, и оно переходит в периодическое течение (рис. 4.4, *в*) с образованием вихревой дорожки Кармана.

Для получения дополнительной информации были рассмотрены процессы развития течения при резком разгоне набегающего потока с помощью метода естественной визуализации. Для этого прибор был настроен на максимальную чувствительность. Из полученных в эксперименте материалов был отобран режим, при котором в начальный момент времени $\overline{\tau} = 0$, когда движения жидкости еще нет, в поле зрения объектива прибора видны неподвижные группы неоднородностей второго типа, по движению которых в последующие моменты времени можно давать некоторые качественные и количественные оценки происходящих процессов. Фрагменты кинограммы развития начальной фазы резко ускоряющегося течения около цилиндра с проявляющимися в кормовой части охватывающими его во встречном движении активными массами жидкости, отделенными от остальной более спокойной среды видимыми криволинейными границами оптических неоднородностей, представлены на рис. 4.7. Эти неоднородности возникли в жидкости естественным путем, без использования каких-либо искусственных приемов визуализации. При $\overline{\tau} = 0$

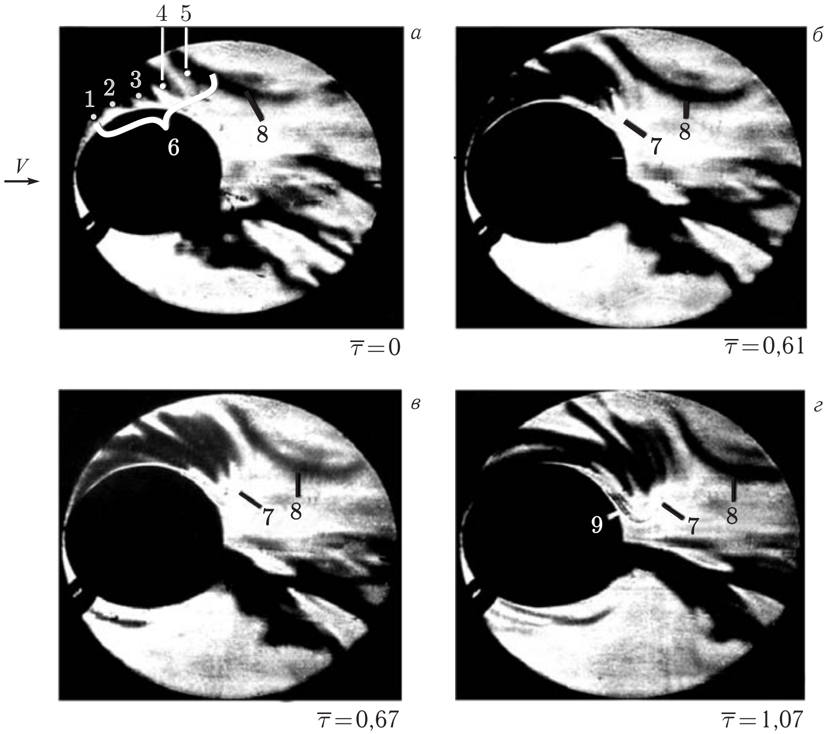


Рис. 4.7. Естественная визуализация начальной стадии развития течения за круглым цилиндром при интенсивном разгоне потока

(рис. 4.7, *а*) над цилиндром видна область, включающая в себя неоднородности второго типа *1*, *2*, *3*, *4* и *5* в виде затемненной зоны с пилообразным фронтом *6*. По перемещению вершин этого пилообразного фронта можно определить траектории и скорости движения частиц жидкости. Эти частицы находятся вблизи верхней поверхности цилиндра и разгоняются в первую очередь. Далее они внедряются в застойную кормовую часть, интенсивно вытесняя оттуда малоподвижные части среды. В момент времени $\overline{\tau} = 0{,}61$ (рис. 4.7, *б*) наблюдается образование некоторой клиновидной границы в виде светлой линии *7*, один конец которой опирается на поверхность цилиндра, а второй является свободным. Возникшая граница *7* затем при $\overline{\tau} = 0{,}67$ и $\overline{\tau} = 1{,}07$, рис. 4.7, *в*, *г*, приобретает форму, аналогичную полученной методом искусственного подогрева центрального сечения модели (см. на рис. 4.6, *а*, *б* линию *2*). Это указывает на адекватность обоих методов визуализации, а также подчеркивает синхронность развития данной стадии исследуемого процесса по размаху модели. Рассматриваемая граница *7* очерчивает область, заполненную относительно подвижными частицами жидкости с повышенной кинетической энергией, движущимися за цилиндром по траекториям, направленным к плоскости симметрии. В то же время, движение жидкости вне этой границы *7*, судя по перемещению оптической неоднородности дугообразного вида *8* (вверху справа), происходит практически вдоль набегающего потока с достаточно малой поперечной скоростью. Из этого можно сделать вывод, что визуализированная линия *7* является границей разрыва параметров потока между двумя указанными областями течения. Условно назовем эту границу основной. Следует отметить, что рассматриваемая граница распространяется не только вниз по потоку в направлении движения вдоль продольной оси $0x$, но и со значительной компонентой, направленной поперек набегающего потока. Эти процессы приводят к постепенному уменьшению ее кривизны (см. линию *2* на рис. 4.6, *а*–*г*). Под основной границей на рис. 4.7 можно заметить вторую, более слабую границу *9*.

На рис. 4.8 построены положение и форма границы *9*, полученные измерением координат точек этой границы для трех значений безразмерного времени $\overline{\tau} = 0{,}33$; 0,47 и 1,07, для режима, представленного на рис. 4.7.

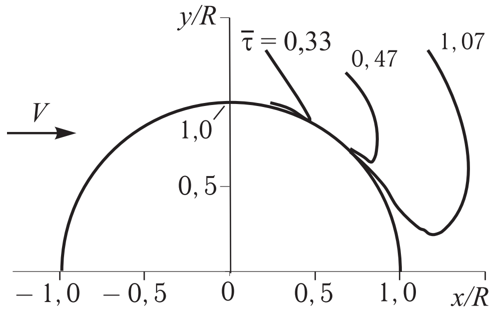


Рис. 4.8. Положения основной границы раздела течений в различные безразмерные моменты времени

Результаты проведенной таким же способом обработки указанного выше пилообразного фронта *6* оптических неоднородностей второго типа приведены на рис. 4.9. Номерами *1*, *2*, *3* и *4* помечены соответствующие вершины зубцов пилообразного фронта *6* из рис. 4.7. Даны два положения рассматриваемых точек: в начальный момент времени $\overline{\tau} = 0$, соответствующий рис. 4.7, *а*, и в момент $\overline{\tau} = 1{,}07$, соответствующий рис. 4.7, *г*. Там же показаны положения точки *5*, расположенной в области мало возмущенной жидкости в те же самые моменты относительного времени.

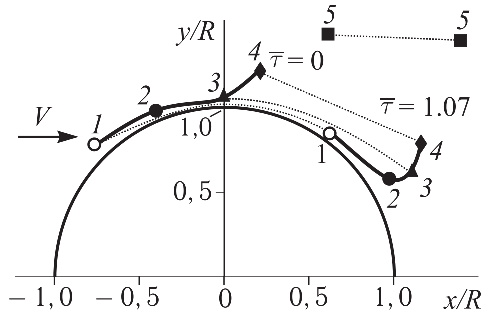


Рис. 4.9. Траектории движения зафиксированных частиц жидкости

На рис. 4.10 для момента относительного времени $\overline{\tau} = 1{,}07$, когда процессы разгона потока (см. рис. 4.5) и заполнения кормовой области за цилиндром активной жидкостью практически завершены (рис. 4.7,*г*), сопоставлены:

— две траектории наиболее удаленных от цилиндра выбранных пилообразных оптических неоднородностей, точки *3* и *4* на рис. 4.9;

— линия отмеченных частиц, визуализированная струйками тепловой гребенки, установленной выше по потоку;

— расчетные линии тока, полученные по теории плавного безотрывного обтекания цилиндра идеальной жидкостью.

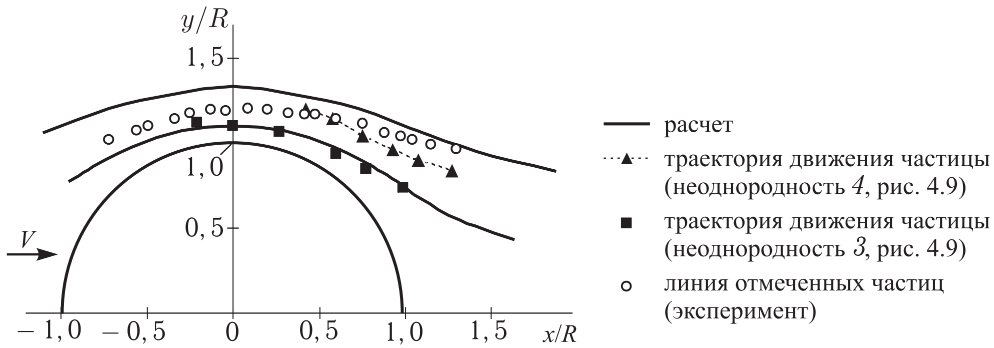


Рис. 4.10. Сопоставление экспериментальных данных с расчетом по теории идеальной жидкости ($\overline{\tau} = 1{,}07$)

Видно, что траектории движения рассмотренных неоднородностей близки к расчетным линиям тока для установившегося обтекания цилиндра идеальной жидкостью. Таким образом, движение активных масс жидкости, обладающих высокой кинетической энергией, в этой области течения быстро становится близким к течению идеальной среды, то есть среды, где определяющую роль играют инерционные силы. К рассмотренному моменту времени, как показывает данный эксперимент, максимальное значение скорости на цилиндре также практически достигает своего теоретического значения, равного $2V_0$ в области азимутального угла 90°, отсчитываемого от оси $0x$. Рассмотрим теперь движение отмеченных тепловой гребенкой частиц. Изначально эти частицы принадлежали жидкости, расположенной перед цилиндром выше по потоку. Вследствие того, что кормовая область за цилиндром к моменту подхода первых отмеченных частиц уже заполнена активной массой жидкости, они продолжают движение преимущественно вниз по потоку, замещая активные массы, ушедшие в кормовую область. Они отделены от менее подвижной части среды упомянутой выше границей неоднородностей. Более поздние отмеченные частицы, как видно из рис. 4.10, уже движутся практически вдоль расчетных линий тока.

В кормовой области течения картина иная. Здесь, как и следовало ожидать, частицы неоднородностей при ускорении потока движутся со скоростями, не соответствующими расчетным значениям, определенным по теории установившегося движения идеальной жидкости. На рис. 4.11 дано сопоставление относительных продольных компонент скорости u/V_0, направленных вдоль оси $0x$, на уровне $y/R = 0{,}284$. Видно, что при одинаковых вдоль оси $0x$ расстояниях продольная компонента скорости существенно ниже ее расчетной величины. В начальный момент времени рассматриваемая частица жидкости находится на относительном расстоянии $x/R = 1{,}5$ и имеет нулевую скорость. Затем частица разгоняется, и за время, соответствующее величине $\overline{\tau} = 1{,}07$, при котором скорость набегающего потока уже вышла на установившееся значение, она удаляется на расстояние $x/R = 2{,}2$. Причем экспериментальное значение скорости течения все еще на $\sim 15\%$ ниже расчетной величины. Таким образом, на этом режиме в кормовой части цилиндра отрывное течение, в его обычном понимании, пока еще не сформировалось, а сами параметры потока не достигают параметров установившегося безотрывного течения, хотя в области азимутального угла 90°, как было видно на рис. 4.10, картины реального и расчетного течений к этому моменту становятся близкими.

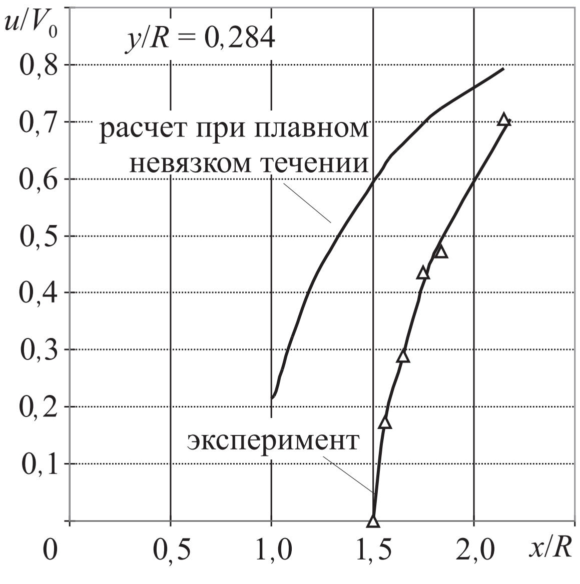


Рис. 4.11. Относительная компонента продольной скорости течения за цилиндром

На рис. 4.12 и 4.13 показаны продольные компоненты скорости течения жидкости в кормовой области цилиндра в зависимости от безразмерного времени и относительной координаты x/R для различных начальных положений неоднородностей. Поскольку имеющихся экспериментальных данных для определения поля скоростей в эйлеровых координатах было недостаточно, то скорости здесь рассматриваются в лагранжевых координатах, то есть для оптических неоднородностей с определенными заданными начальными координатами. В связи с этим сечению x/R на рис. 4.13 будут соответствовать скорости частиц, попавших в это сечение в разные моменты времени, что, следовательно, и не соответствует скоростям в эйлеровых координатах.

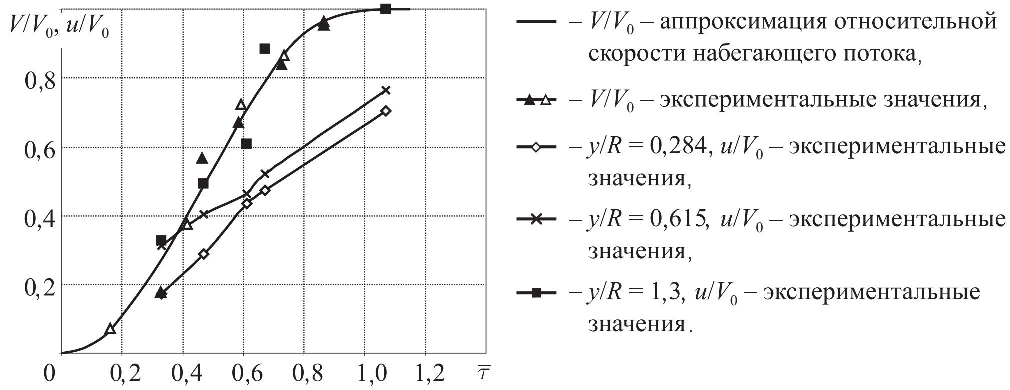


Рис. 4.12. Относительная компонента продольной скорости течения за цилиндром в зависимости от безразмерного времени

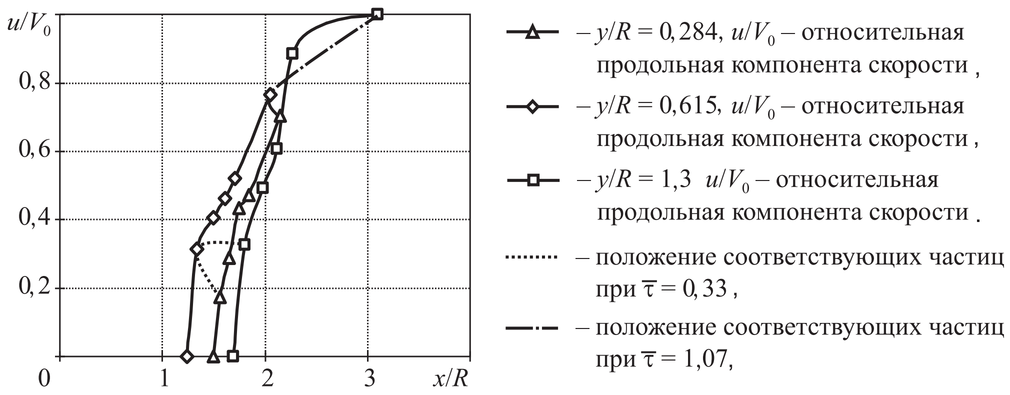


Рис. 4.13. Относительная компонента продольной скорости течения за цилиндром в зависимости от относительной координаты x/R

Из рис. 4.13 видно так же, что частица жидкости с начальными координатами $x/R = 1{,}7$ и $y/R = 1{,}3$, находящаяся в мало возмущенном потоке, разгоняется за время, соответствующее величине $\overline{\tau} = 1{,}07$, как и следовало ожидать, до заданной установившейся скорости набегающего потока V_0, которая в невозмущенном потоке достигается при величине $\overline{\tau} \approx 1$. Для частиц же жидкости, более близко расположенных к плоскости симметрии, с начальными координатами $x/R = 1{,}3$ и $y/R = 0{,}615$, а также $x/R = 1{,}5$ и $y/R = 0{,}284$, продольная компонента скорости местного течения за кормой цилиндра к этому времени остается существенно, на 25–30%, меньше величины скорости набегающего потока. Таким образом, количественные параметры и, главное, структура течения в кормовой области существенно отличаются от расчетной схемы обтекания цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью.

Следует также отметить, что на рассматриваемой начальной стадии развития течения на некотором удалении от цилиндра вниз по потоку (по крайней мере, при $x/R \geqslant 1{,}5$) поперечные компоненты скорости течения v/R практически равны нулю.

Вернемся теперь к процессу формирования возвратного течения вблизи кормовой поверхности цилиндра при резком разгоне набегающего потока. Рассмотрим этот процесс более детально.

Методические особенности эксперимента в гидродинамической трубе позволили эффективно реализовать одно из важных достоинств оптического метода: возможность следить за возникновением и развитием слоев разрыва параметров течения, тем самым более полно проследить процесс вихреобразования и развития отрыва потока, выявить последовательность формирования различных элементов структуры течения.

С течением времени подвижные массы жидкости в кормовом пространстве, сближаясь между собой во встречном движении, все больше заполняют пространство за цилиндром, что приводит к возвратному движению жидкости на его кормовой поверхности (см. рис. 4.14, *а*–*е*). Представленные кадры киносъемки показывают процесс формирования вторичного и третичного течений при отрыве потока с поверхности цилиндра на режиме резкого разгона набегающего потока.

После начала отрыва потока и образования отрывных разгонных вихрей, показанных ранее на рис. 4.6, *в*, происходит формирование в кормовой части цилиндра возвратного течения (рис. 4.14, *а*), обусловленного существованием разгонных вихрей *1* (рис. 4.14, *а* примерно соответствует рис. 4.6, *д*). На поверхности цилиндра (рис. 4.14, *а*) можно заметить образование темной, близкой к треугольной, области *2* относительно заторможенного течения, сливающейся с изображением модели, появление которой обусловлено взаимодействием вторичного возвратного течения с «преградой» в виде первичного оторвавшегося течения. Этот момент характеризует начало развития вторичного отрыва потока ($\overline{\tau} = \overline{\tau}_0$). Далее (см. рис. 4.14, *б*, $\overline{\tau} = \overline{\tau}_0 + 0{,}2$) вторичный отрыв проявляется более явно, оформляясь затем (см. рис. 4.14, *в*, $\overline{\tau} = \overline{\tau}_0 + 0{,}49$) в виде вихря *3* противоположного направления вращения по отношению к направлению вращения разгонного вихря *1*. Формирующийся вторичный вихрь в процессе развития, в свою очередь, взаимодействует с основным течением, а именно с первоначальным вихревым слоем, сошедшим с поверхности цилиндра и образовавшим разгонный вихрь *1*. Это проявляется в развивающемся по времени местном искривлении *4* первичного слоя (рис. 4.14, *в*), приводящем к возникновению нового производного (третичного) течения, которое в дальнейшем формируется в третичный вихрь *5* (рис. 4.14, *г*–*д*, $\overline{\tau} = \overline{\tau}_0 + 0{,}79$ и $\overline{\tau} = \overline{\tau}_0 + 1{,}18$) того же направления вращения, что и разгонный вихрь *1*. На данном этапе развития течения вторичный *3* и третичный *5* вихри являются основными, наиболее крупными вихревыми структурами дельтавидной области, занимающими примерно равные ее части. В процессе развития форма спиралей, образующих эти вихри, вследствие взаимодействия друг с другом и с внешним течением видоизменяется: из обычной округлой (рис. 4.14, *в*) она превращается в более угловатую. Формируется дельтавидная вихревая область *6* (рис. 4.14, *е*). Эта стадия сформировавшейся структуры дельтавидной области была получена так же другим методом визуализации и описана в [85]. На поверхности цилиндра, вблизи вторичного и третичного вихрей, можно заметить также появление более мелких структур, проявляющихся в виде затемненных зон *7*, *8* (рис. 4.14, *в*–*д*) и являющихся производными течениями более высокого порядка. Далее, в моменты времени, предшествующие нарушению симметричности течения за цилиндром, рельефность внутреннего строения дельтавидной области уменьшается и структура ее становится более однородной (рис. 4.14, *е*, $\overline{\tau} = \overline{\tau}_0 + 3{,}15$). Затем симметрия течения и дельтавидные области разрушаются и возникает периодическое движение (рис. 4.4, *в*).

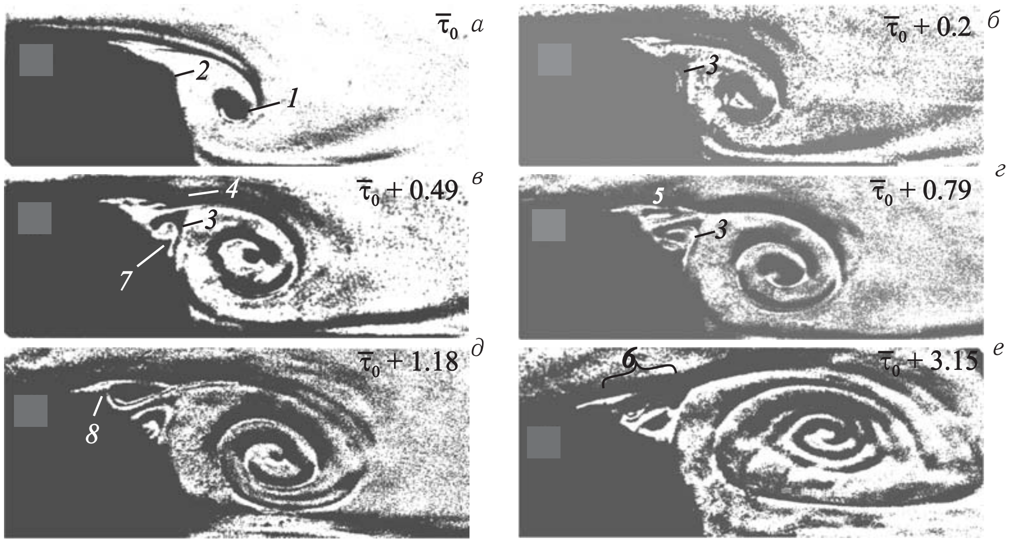


Рис. 4.14. Формирования вторичного и третичного течений и дельтавидной области при отрыве потока с поверхности цилиндра на режиме резкого разгона набегающего потока

Повторяемость полученных результатов подтверждена другими реализациями аналогичных режимов течения. В частности, на рис. 4.15 видно, что течение здесь аналогично, показанному на рис. 4.14. Видно, что спираль разгонного отрывного вихря образована достаточно тонкими вихревыми слоями, сорвавшимися с поверхности цилиндра, которые вблизи дельтавидной области состоят из различных слоев, обусловленных внешним течением и течением внутри отрывной зоны. Рассматривая эти слои, можно установить, из каких областей среды «черпаются» частицы жидкости, составляющие структуру вихрей. На рис. 4.15 так же отчетливо видно, что в результате взаимодействия вторичного вихревого течения со слоем первичного оторвавшегося свободного потока образуется третичное течение, являющееся, по сути, отрывом потока с первичного свободного слоя и развивающееся внутри дельтавидной области.

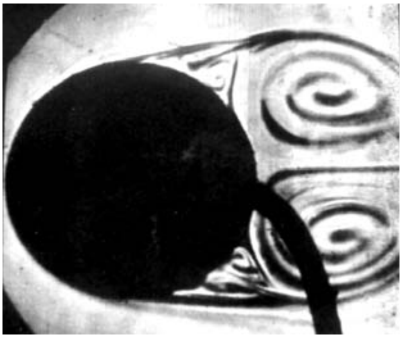


Рис. 4.15. . Структура дельтавидной области и отрывных разгонных вихрей при резком разгоне набегающего потока

На основании материалов киносъемки, полученных в данных экспериментах, построена закономерность нарастания количества витков разгонных отрывных вихрей по времени. Обозначим величиной ϑ угол, характеризующий в полярных координатах длину наблюдаемой на кадрах спирали. Если за начало отсчета принять вертикальную линию, соответствующую значению $\vartheta = \vartheta_0 = \pi/2$, то увеличение со временем количества не обязательно полных витков спирали

$$K(\vartheta) = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2\pi},$$

характеризуется линейной зависимостью, показанной на рис. 4.16. В выполненных экспериментах отчетливая реализация витков спирали зафиксирована в количестве до пяти. Линейный характер данной зависимости сохраняется при всех величинах скорости набегающего потока, имевших место в проведенных экспериментах. Таким образом, число Струхаля, характеризующее безразмерную частоту образования витков спирали, является константой, то есть число

$$\mathrm{Sh} = 2\pi \frac{dK}{dt}\frac{D}{V} = 2\pi \frac{dK}{d\overline{\tau}} = \frac{d\vartheta}{dt}\frac{D}{V} = \frac{d\vartheta}{d\overline{\tau}} = \mathrm{const}.$$

Приведенный график дает величину $dK/d\overline{\tau} = 4/3$. Отсюда следует значение числа Струхаля $\mathrm{Sh} = (8/3)\pi$. В реальном эксперименте один виток спирали на данном режиме образуется за время

$$\Delta t = \frac{3}{4}\frac{D}{V}\ \text{c}.$$

Режим торможения потока. На рис. 4.17, *а–г* представлены спектры малоизученного режима течения около цилиндра при быстром торможении набегающего потока. Торможение от постоянного, установившегося значения скорости ($\mathrm{Re} = 2100$) до нуля происходило так же, как и в случае разгона потока – примерно по линейному закону, но с ускорением, в два раза большим.

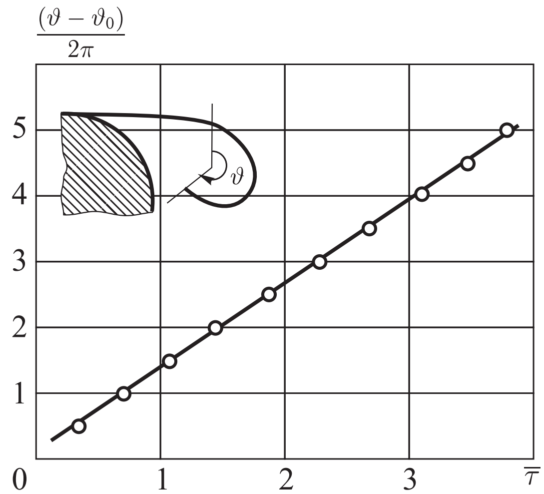


Рис. 4.16. Развитие симметричного отрывного вихря при резком разгоне потока

Применялся метод естественной визуализации, то есть, без использования нагревательного элемента, поскольку основной задачей являлось изучение поведения внешних границ области течения, а не детальное исследование элементов течения в отдельном сечении.

За начальный момент времени $\overline{\tau}_0$ на рис. 4.17, *а* принят момент, непосредственно предшествующий началу торможения. Следует заметить, что в данном случае ближайшие к цилиндру вихри дорожки Кармана находятся за границей кадра и поэтому не наблюдаются. Тем не менее, снятый на кинопленку материал при воспроизведении на экране дает возможность и в этом случае увидеть вихревые движения в следе за цилиндром и возвратные течения жид-

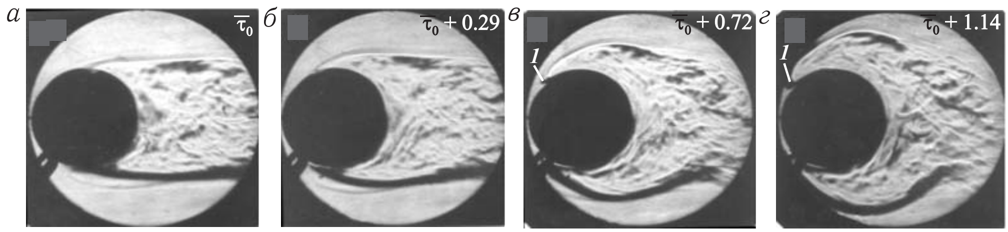


Рис. 4.17. Резкое торможение потока

кости вблизи его кормовой поверхности. Из фотографии рис. 4.17, *а* видно, что при установившейся скорости потока интегральная по размаху модели картина области ближнего следа за цилиндром ограничена достаточно тонкими свободными слоями. Как только начался процесс торможения потока, свободный слой вблизи точки его отрыва от поверхности цилиндра выгибается (рис. 4.17, *б*, $\overline{\tau} = \overline{\tau}_0 + 0{,}29$) по направлению внешней нормали к границе отрывной зоны. Возвратный поток, обтекая цилиндр, начинает вклиниваться в область жидкости, находящейся перед цилиндром. Далее (рис. 4.17, *в*, *г*, $\overline{\tau} = \overline{\tau}_0 + 0{,}72$ и $\overline{\tau}_0 + 1{,}14$) под действием возвратного течения жидкости, обусловленного сохраняющимися еще некоторое время вихрями в следе за цилиндром, эта тенденция усиливается. Возвратный поток, обтекая цилиндр, еще более интенсивно вклинивается в область жидкости перед цилиндром. На его поверхности можно наблюдать точки отрыва *1* возвратного течения, к которым примыкают границы деформированной отрывной зоны. Граница состоит из сформировавшегося под воздействием возвратного потока свободного вихревого слоя и образовавшегося ранее при прямом обтекании цилиндра свободного слоя, который претерпевает существенные изменения. Эти слои замыкаются в почти «угловой» носовой точке *1* границы (рис. 4.17, *в*, *г*).

Выявленные в процессе исследования новые особенности обтекания кругового цилиндра неустановившимся потоком позволяют более глубоко понимать механику возникновения и развития отрывных течений.

4.1.4. Обтекание аэродинамического профиля на стационарных и нестационарных режимах. Рассмотрим нестационарные режимы течения около аэродинамического профиля NACA–0012, связанные как с переменностью скорости набегающего потока, так и с колебаниями профиля по углу атаки.

Для фиксации в кинокадрах угла атаки α_0, около которого осуществлялись периодические колебания профиля, на оптическом иллюминаторе рабочей части ГДТ был установлен лимб с тонкой металлической нитью, закрепленной по его диаметру и располагающейся под заданным углом α_0. Изображение этой нити *1* указывало на начальное положение хорды профиля, стрелка *2* в верхней левой части снимка указывала на отсутствие скорости набегающего потока (см. рис. 4.18, 4.19).

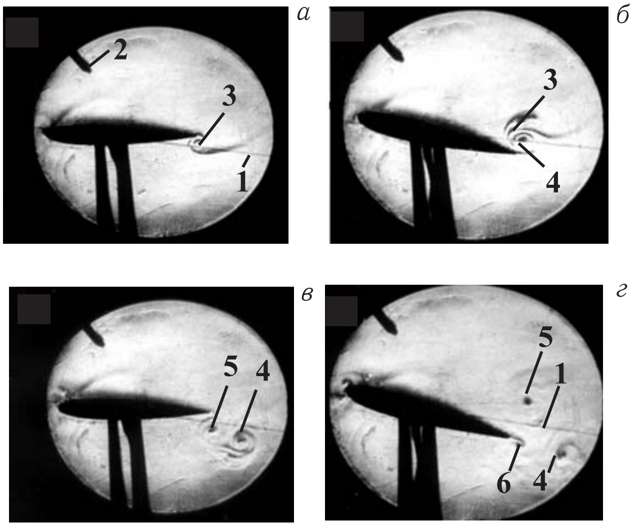


Рис. 4.18. Колебание профиля относительно 1/3 хорды при отсутствии скорости набегающего потока

Обтекание колеблющегося аэродинамического профиля при отсутствии скорости набегающего потока ($V_0 = 0$). Эти эксперименты были проведены для сопоставления картины течения около заостренной (задней) кромки и около сглаженной (передней) кромки профиля, поскольку одним из интересных является вопрос о том, насколько срыв потока с гладкой передней кромки колеблющегося профиля похож на сход потока с его острой задней кромки. Эффекты, связанные с наличием набегающего потока, при этом были исключены.

Реализовано два варианта опыта: обычные колебания по углу атаки относительно оси, расположенной на 1/3 хорды от носка профиля (углы колебания $\pm 10^\circ$, круговая частота $\omega = 6{,}75\,\text{с}^{-1}$, рис. 4.18); колебания с той же частотой относительно оси, проходящей через острую заднюю кромку профиля (углы колебания $\pm 18^\circ$, рис. 4.19). Последний вариант колебания относительно задней кромки выбран с тем, чтобы свести к минимуму возмущения среды, исходящие от острой задней кромки, а углы колебаний увеличены, чтобы усилить эффекты отрыва с гладкой передней кромки. Поскольку изначально среда неподвижна, то все явления связаны исключительно с собственным движением профиля, включая его предысторию.

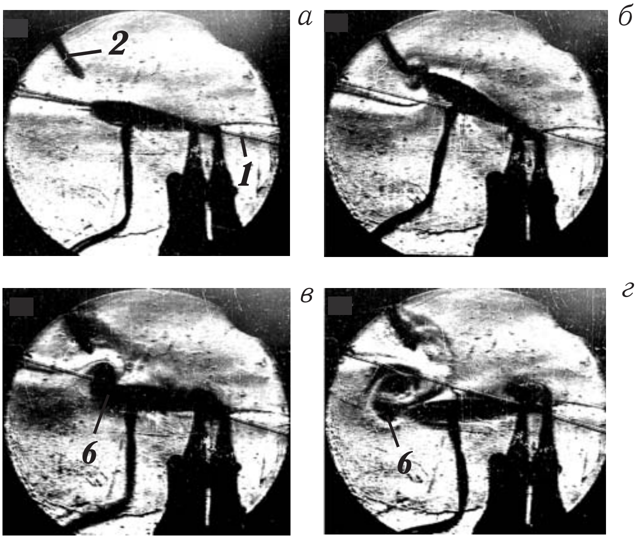


Рис. 4.19. Колебание профиля относительно задней кромки при отсутствии скорости набегающего потока

На рис. 4.18, *а* видно, что при движении задней кромки вверх около нее зарождается вихрь *3*, направление вращения которого противоположно направлению вращения профиля. Это указывает на появление вокруг профиля циркуляции скорости противоположного знака, по сравнению со знаком циркуляции образовавшихся свободных вихрей. При последующем движении задней кромки вниз (рис. 4.18, *б*) около нее сформировался вихрь *4* противоположного знака по отношению к вихрю *3*. Оба вихря *3* и *4*, сошедшие с задней кромки, образуют над верхней поверхностью профиля некую грибовидную структуру. При очередном движении острой кромки вверх (рис. 4.18, *в*), формируется вихрь *5*, того же направления вращения, что и вихрь *3*. Вихри *4* и *5*, в свою очередь, образуют грибовидную форму, аналогично предыдущему случаю. Затем, при движении задней кромки вниз вблизи нее формируется вихрь *6* (рис. 4.18, *г*) и так далее. Аналогичные системы вихрей, хотя и более слабых, формируются на этих режимах и в области передней кромки.

При колебании профиля относительно задней кромки (рис. 4.19), в области передней кромки развивается грибовидная вихревая структура *6*.

Из приведенных материалов видно, что сходящие с гладкой передней кромки при колебании профиля относительно его задней кромки грибовидные вихреобразования, качественно аналогичны вихреобразованиям, возникающим у его задней острой кромки при колебаниях относительно 1/3 хорды (сравнить, например, рис. 4.19, *г* и рис. 4.18, *в*).

Обтекание аэродинамического профиля при резком разгоне потока. Начальная фаза обтекания профиля, установленного под углом атаки $\alpha = 15°$, иллюстрируется снимками, представленными на рис. 4.20, *а*– *д*, полученными методом естественной оптической визуализации.

Видно (рис. 4.20, *а*), что вблизи скругленного носка профиля в некоторый момент времени $\overline{\tau}_0$ после начала движения жидкости наблюдается течение, аналогичное рассмотренному течению около цилиндра. Возникшая криволинейная граница *1* продвигается вдоль верхней поверхности к задней кромке профиля ($\overline{\tau} = \overline{\tau}_0 + 0{,}2$; $\overline{\tau} = \overline{\tau}_0 + 0{,}4$; рис. 4.20, *б*, *в*). Она ограничивает клиновидную область с заключенной внутри нее массой активной жидкости.

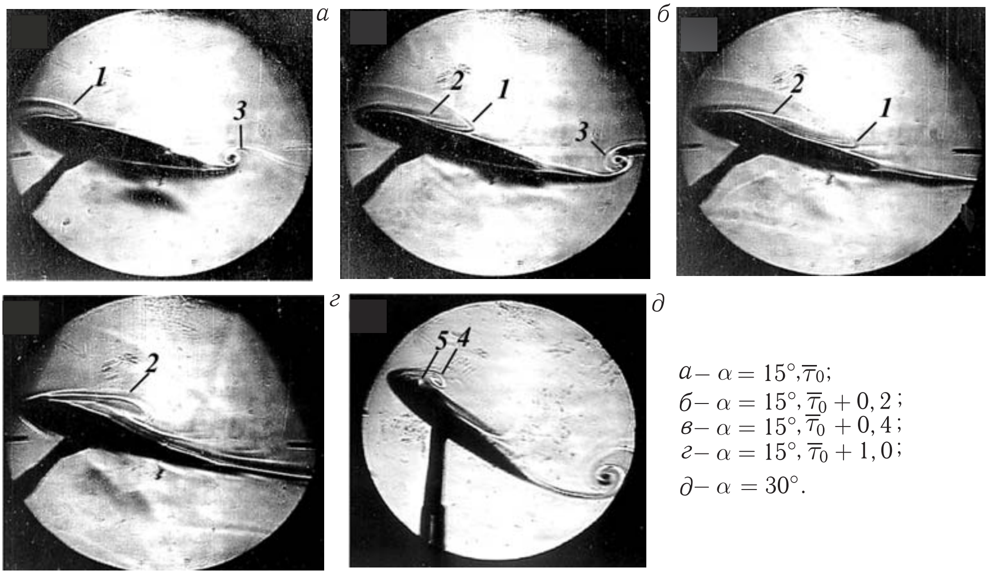


Рис. 4.20. Обтекание профиля разгоняющимся потоком

Можно видеть, что внутри этой основной границы наблюдается еще линия особенностей *2*, ограничивающая некое жидкое тело, в котором с течением времени ($\overline{\tau} = \overline{\tau}_0 + 0{,}4$ и $\overline{\tau} = \overline{\tau}_0 + 1$, рис. 4.20, *в,г*,) развивается отрыв потока. Около острой задней кромки профиля образуется охватывающее его встречное течение массы жидкости, приводящее к образованию начального вихря Прандтля (рис. 4.20, *а*). Следует заметить, что и в этом случае, как составная структура начального вихря, в жидкости наблюдается возникший тонкий слой *3*, очерчивающий границы рассматриваемой массы жидкости.

Для большего угла атаки ($\alpha = 30^\circ$) стадия развития срыва *4* потока с образованием в процессе ускорения набегающего потока вблизи гладкой поверхности носка профиля жидкой дельтовидной области *5* показана на рис. 4.20, *д*. Этот процесс весьма схож с тем, что наблюдался при обтекании цилиндра (сравнить рис. 4.20, *д* с рис. 4.15).

Обтекание колеблющегося по углу атаки аэродинамического профиля по негармоническому закону. Приведены спектры, полученные для колеблющегося по углу атаки аэродинамического профиля в потоке, движущемся с постоянной скоростью. Рассмотрены переходный процесс установления течения после возникновения колебаний и процесс установившегося периодического течения около колеблющегося профиля.

Для выделения особенностей течения около центрального сечения модели использовался слабый подогрев узкой полоски поверхности отсека крыла (метод искусственной визуализации), а также визуализация внешнего течения с помощью тепловой гребенки. Колебания отсека крыла с помощью специального механизма осуществлялись около оси, расположенной от передней кромки профиля на расстоянии $(1/3)b$, где $b = 50$ мм – хорда профиля. Механизм колебания с электроприводом находился вне рабочей части ГДТ. Подвижные и неподвижные державки отсека крыла для уменьшения их влияния на поле течения имели малую (в направлении размаха модели) толщину (порядка $0{,}01b$) и располагались в торцевых сечениях модели в непосредственной близости от стенок рабочей части ГДТ в следе друг за другом. Значения скорости установившегося потока V в гидродинамической трубе соответствовали числам Рейнольдса $1500 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 10000$ (за характерный линейный размер принята величина хорды профиля). Колебания модели осуществлялись относительно угла атаки $\alpha_0 = 12^\circ$ по негармоническому закону, при котором максимальные значения угла атаки α профиля сохранялись в течение определенной части периода колебаний постоянными (рис. 4.21), где полуразмах колебаний $\Delta\alpha = 9^\circ$, величина $\psi = \omega t$, $\omega = 8{,}88\,\mathrm{c}^{-1}$ – круговая частота колебания профиля, t — время. Точкам на графике $\alpha(\psi)$, обозначенным буквами «*а*–*н*», соответствуют представленные на рис. 4.22 спектры. На рассмотренном режиме реализованы числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = 2500$ и Струхаля $\mathrm{Sh} = \omega b/V = 8{,}88$.

При обтекании неподвижного профиля до начала колебаний (рис. 4.22, *а*) наблюдается практически стационарная отрывная зона с четко обозначенными границами и слабым перемешиванием жидкости внутри нее. На рис. 4.22, *б*–*з* (на графике $\alpha(\psi)$, рис. 4.21 им соответствуют точки $\psi = 0{,}11\pi$; $0{,}23\pi$; $0{,}56\pi$; $0{,}91\pi$; $1{,}08\pi$; $1{,}86\pi$; $2,00\pi$) приведены спектры обтекания профиля, полученные в течение первого (после начала движения) периода колебания.

При возникновении колебаний профиля вблизи его задней кромки (см. рис. 4.22, *б*–*г*), наблюдается процесс развития свободных вихрей, качественно сходный с процессом вихреобразования в начальный момент при $V = 0$ (рис. 4.18, *а*, *б*). Дополнительно к вихрю *1*, который существовал в отсутствие колебаний, появляется небольшой вращающийся по часовой стрелке вихрь *2*,

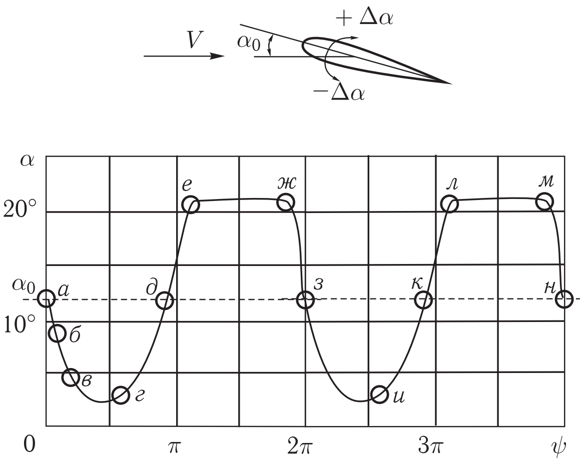


Рис. 4.21. Закон изменения угла атаки α модели крыла по частоте ψ

который виден на рис. 4.22, *в*, иллюстрирующем течение около профиля перед минимумом кривой $\alpha(\psi)$. При дальнейшем движении профиля, сопровождающемся увеличением угла атаки (рис. 4.22, *д*), наблюдается возникновение еще одного вихря – *3*, вращающегося против часовой стрелки.

Необходимо отметить, что даже при уменьшении угла атаки α профиля от $12°$, рис. 4.22, *а*, до $3°$, рис. 4.22, *г*, положение точки отрыва потока и форма верхней границы отрывной зоны мало изменяются. В дальнейшем, рис. 4.22, *д*, вследствие взаимодействия с отошедшими от задней кромки свободными вихрями *1* и *2*, эта граница деформируется. С увеличением угла атаки профиля до $\alpha = 21°$, рис. 4.22, *е*, точка *4* отрыва потока перемещается вдоль верхней поверхности профиля вниз по течению, и ширина срывной зоны уменьшается. В этом случае перемещение носовой части верхней поверхности профиля при его колебании препятствует развитию отрыва потока. Усилившийся свободный вихрь 3, рис. 4.22, *е*, искривляет верхнюю границу таким образом, что она замыкает отрывную зону на задней кромке профиля, рис. 4.22, *е,ж*.

При движении профиля в сторону уменьшения угла атаки, рис. 4.22 *з*, перемещения носовой части верхней поверхности способствуют возникновению отрыва потока в носке профиля. В результате этого на носке профиля вновь на втором периоде колебаний развиваются отрывные явления, приводящие к созданию двух вихрей *5* и *6*, рис. 4.22, *и*. Эти вихри, усиливаясь, объединяются и на участках $\dot{\alpha} > 0$ и $\dot{\alpha} = \text{const}$, здесь $\dot{\alpha} = (d\alpha)/d\psi$, перемещаются на втором периоде колебаний в направлении к задней кромке профиля (рис. 4.22, *и–м*) $\psi = 0{,}56\pi$; $0{,}91\pi$; $1{,}08\pi$; $1{,}86\pi$. Следует отметить, что здесь даже при малых углах атаки (см. рис. 4.22, *и*, где $\alpha = 3°$) на носке колеблющегося профиля нарушена плавность течения, в то время как на неподвижном профиле, установленном под тем же углом атаки, как известно, наблюдается плавное обтекание. Затем (рис. 4.22,*м*), при максимальном значении угла атаки $\alpha \approx 21{,}5°$ верхняя поверхность носовой части профиля снова на большом протяжении обтекается практически без срыва потока. С этим

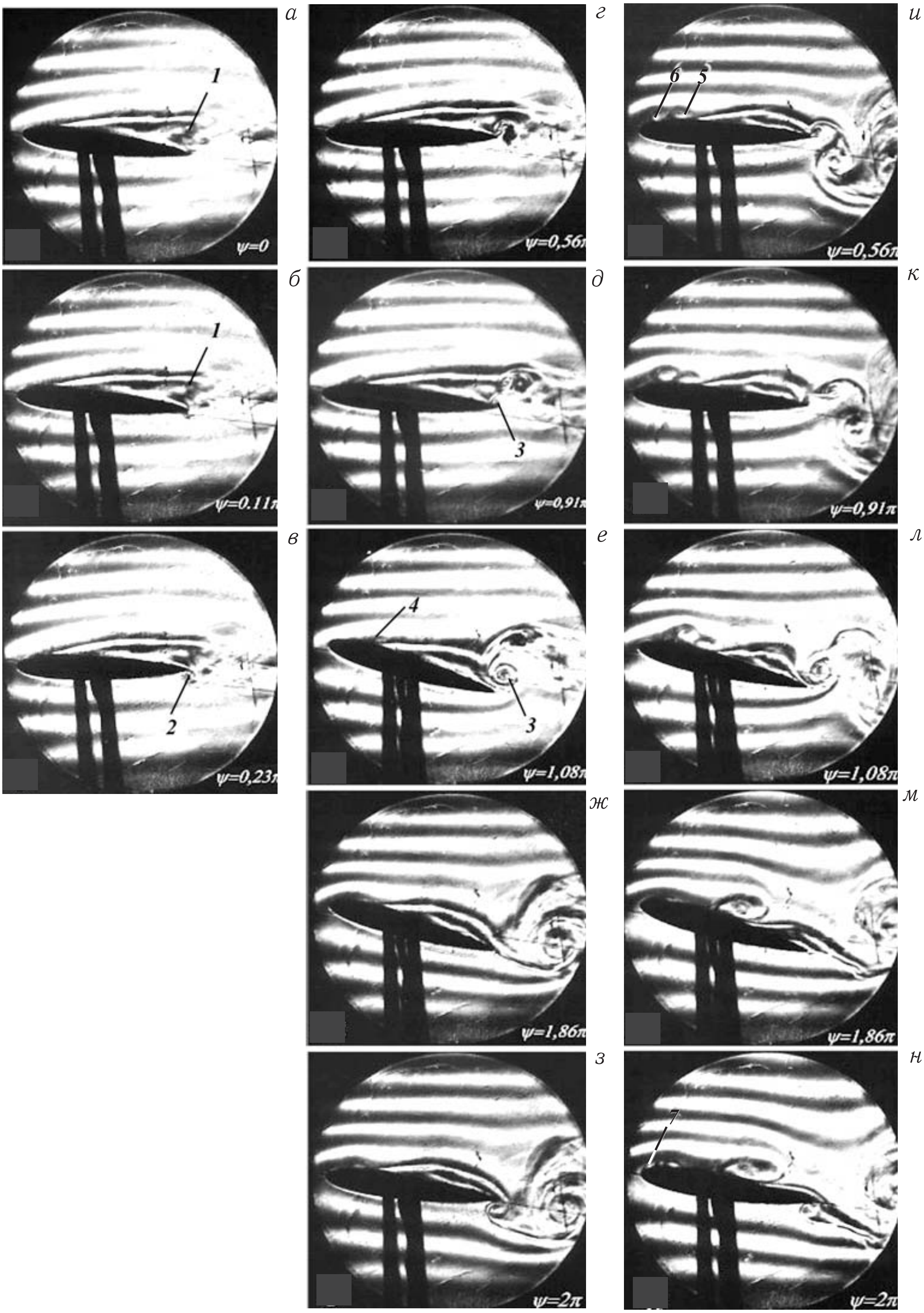


Рис. 4.22. Обтекание колеблющегося по углу атаки профиля по негармоническому закону

явлением связано возникновение для колеблющегося профиля коэффициентов подъемной силы C_y, существенно превышающих максимальные значения C_y для обтекаемого постоянным потоком неподвижного профиля.

При уменьшении угла атаки вблизи носка профиля, рис. 4.22, *н*, $\psi = 2\pi$, вновь появляются вихри 7, аналогичные вихрям *5* и *6*. Упоминавшаяся ранее застойная отрывная зона над верхней поверхностью профиля с течением времени все больше сокращается и практически исчезает. Различиями характера течения около верхней поверхности профиля при и и объясняется появление петель гистерезиса в зависимостях коэффициентов сил и моментов от угла атаки колеблющегося профиля.

4.1.5. Взаимодействие аэродинамического профиля с вихревым следом от колеблющегося по углу атаки профиля при постоянной скорости набегающего потока. Рассматривается случай, когда находящийся выше по потоку профиль, колеблющийся относительно оси, расположенной на 1/3 его хорды, является генератором вихревого следа, набегающего на неподвижный профиль, установленный ниже по течению. Хорда первого (колеблющегося) профиля составляет $b = 50$ мм, а второго (неподвижного профиля) равна 30 мм. Неподвижный профиль мог устанавливаться под различными углами атаки путем поворота его относительно оси, проходящей через точки крепления профиля. Превышение оси первого профиля над осью второго составляло 10 мм. Расстояние от задней кромки первого профиля до носка второго составляло 22 мм. На профиле-генераторе вихрей среднее сечение подогревалось, а для визуализации внешнего течения использовалась тепловая гребенка, расположенная относительно профиля выше по потоку.

На рис. 4.23, *а* представлен спектр стационарного течения, когда первый профиль-генератор вихрей не совершает колебаний, и профили установлены под углами атаки $\alpha_{01} = 5^\circ$ для первого профиля и $\alpha_{02} = 9^\circ$ для второго.

Профиль-генератор вихрей совершает колебания по углу атаки по закону, близкому к гармоническому, с амплитудой $\Delta\alpha = 10^\circ$ и безразмерной частотой (частота колебаний $f = 0{,}96$ кол./с, $b = 5$ см, $V = 5$ см/с). Число Рейнольдса, определенное для профиля-генератора вихрей, $\mathrm{Re} \approx 2500$, а безразмерное время $\overline{\tau} = tV/b$. Кадры, приведенные на рис. 4.23, *а–ж*, соответствуют безразмерным моментам времени: $\overline{\tau} = 0$; 0,417; 0,833; 1,04; ,25; 1,46; 1,88.

Следует заметить, что в начальный момент времени второй профиль имеет циркуляцию присоединенного вихря, направленную по часовой стрелке. Поэтому, он, воздействуя на первый сгенерированный свободный вихрь, отбрасывает его вверх (рис. 4.23, *б*, *в*). В свою очередь, первый свободный вихрь профиля-генератора вихрей создает скос потока на втором профиле, уменьшающий его присоединенную циркуляцию. В результате этого второй свободный вихрь не отбрасывается вверх, а перемещается вдоль верхней поверхности неподвижного профиля (рис. 4.23, *г*, *д*).

К моментам времени, соответствующим рис. 4.23, *е* и рис. 4.23, *ж*, практически установилось периодическое течение. Картины течения на рис. 4.23, *в* и рис. 4.23, *ж*, в основном, идентичны. Хотя можно заметить, что вследствие наличия более развитых свободных вихревых структур на рис. 4.23, *ж* наблю-

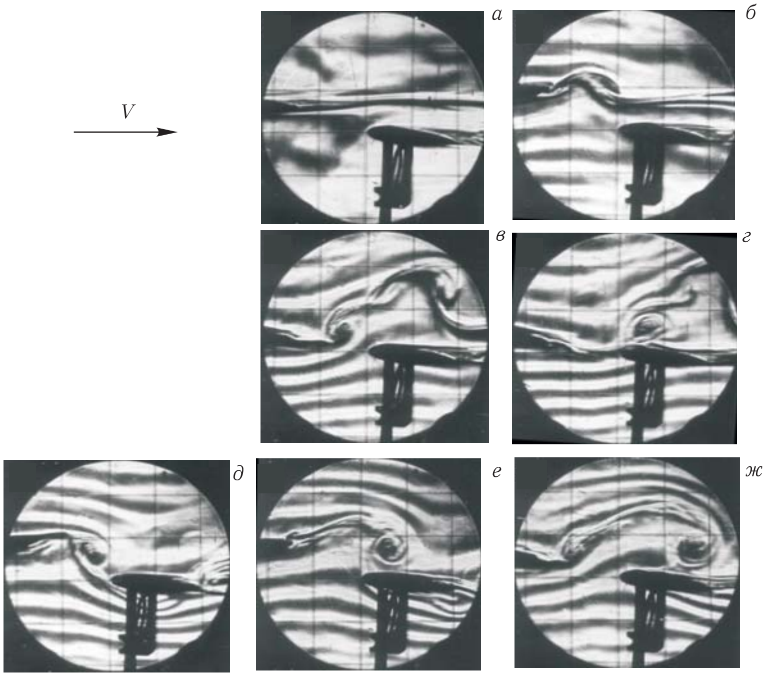


Рис. 4.23. Профиль в следе от колеблющегося профиля

дается менее интенсивное, чем на рис. 4.23, *в*, отбрасывание вверх свободных вихрей, идущих с впереди расположенного колеблющегося профиля.

4.1.6. Обтекание полуцилиндра. Развитие течения около полуцилиндра с острыми кромками показано на рис. 4.24. Эти спектры обтекания получены способом естественной визуализации. Здесь также наблюдается распространение в жидкости тонких слоев, ограничивающих массы жидкости, находящихся в охватывающем тело встречном движении ($\overline{\tau} = \overline{\tau}_0$, рис. 4.24, *а*). Как и в случае обтекания острой кромки профиля, это движение приводит к возникновению вблизи острых кромок полуцилиндра интенсивных разгонных вихрей, аналогичных начальному вихрю Прандтля. В дальнейшем ($\overline{\tau} = \overline{\tau}_0 + 0{,}43$, рис. 4.24, *б*), как и за цилиндром (см. рис. 4.6), в кормовой области полуцилиндра интенсивно образуются веерообразные линии возмущений, сходящиеся к плоскости симметрии течения.

Интерес представляет также характер течения при резком торможении потока после того, как отрывное течение за полуцилиндром установилось, рис. 4.25. Видно, что ближняя граница *1* отрывной зоны за полуцилиндром при резком торможении потока сильно деформируется ограниченными ею активными массами жидкости, которые устремляются вперед, огибая острые кромки полуцилиндра. При этом на острых кромках образуются достаточно мощные вихревые структуры *2* . Интересно развивается течение на круговой цилиндрической поверхности. Предварительно заторможенная часть жидкости из кормовой области полуцилиндра устремилась вперед, но набегающий поток еще не остановился. При встречном взаимодействии двух потоков вбли-

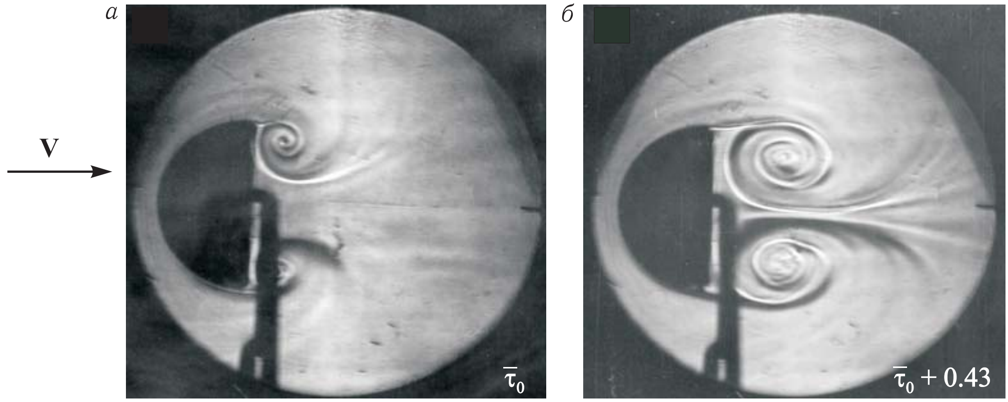


Рис. 4.24. Резкий разгон набегающего потока

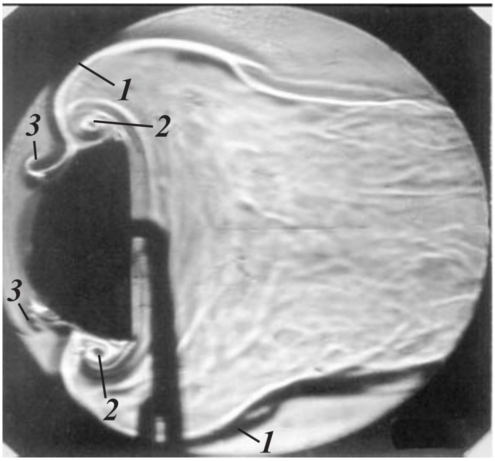


Рис. 4.25. Резкое торможение потока

зи круговой поверхности полуцилиндра возникают течения с образованием вихревых структур *3*, обратного по отношению к вихревым структурам *2* направления вращения.

4.1.7. Обтекание правильной треугольной призмы. На рис. 4.26, *а–г* зафиксировано начало развития движения жидкости около правильной треугольной призмы при резком разгоне набегающего потока.

Приведенные спектры получены естественной визуализацией течения около тела с искусственной визуализацией набегающего потока с помощью тепловой гребенки, установленной на некотором расстоянии перед исследуемой моделью.

Наблюдаемые перед призмой, рис. 4.26, *а*, подогретые тепловой гребенкой струйки *1* жидкости визуализируют практически симметричный набегающий на тело поток, частицы которого переместились после начала движения на величину порядка длины s стороны нормального сечения призмы. На это указывает центральная струйка, практически симметрично обтекающая

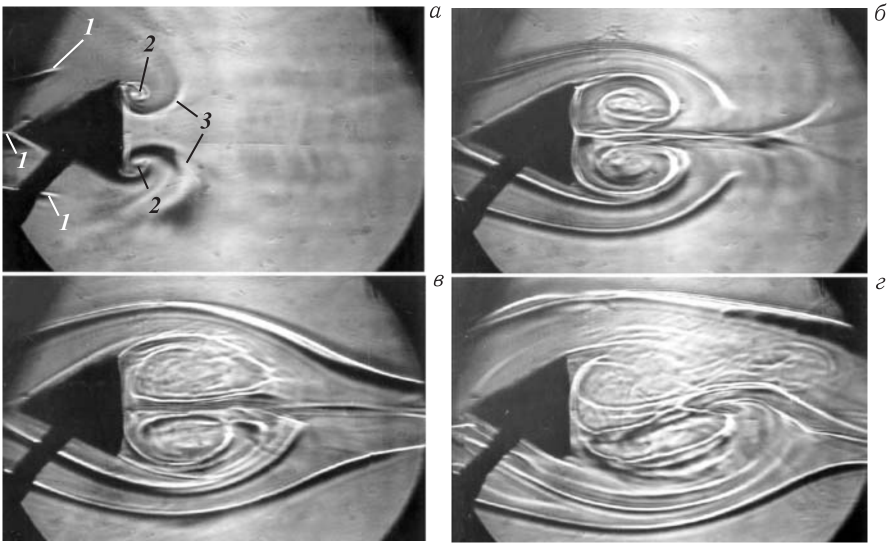


Рис. 4.26. Резкий разгон набегающего потока

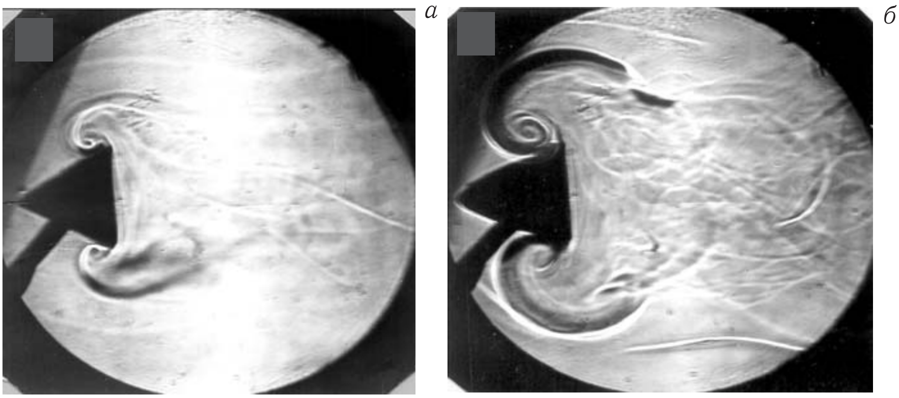


Рис. 4.27. Резкое торможение потока

носовое ребро призмы. За это время в области донной части модели успело развиться охватывающее клин движение масс жидкости, сопровождающееся и в данном случае энергичным образованием разгонных вихрей *2* и слоев *3* с сильным изменением оптических свойств среды. Эти слои слабо выражены на расстояниях порядка s и имеют значительную интенсивность вблизи тела.

Интерес представляет также характер течения при резком торможении потока после того, как отрывное течение за призмой установилось. Спектры этого течения в два последовательных момента времени представлены на рис. 4.28, *а*, *б*.

Видно, что ближняя граница отрывной зоны за призмой при резком торможении потока интенсифицируется ограниченными ею активными массами жидкости, которые устремляются вперед, огибая острые кромки призмы. При этом на острых кромках образуются достаточно мощные вихревые структуры.

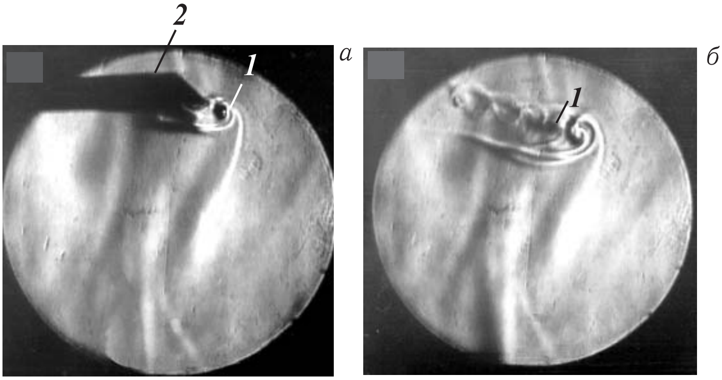


Рис. 4.28. Режим начала вращения лопасти в неподвижной среде

Интересно отметить, что граница между набегающим потоком и жидкостью в отрывной застойной зоне в окрестности тела проявляется со временем более существенно, что говорит об усилении ее интенсивности, в то время как граница остальной части отрывного следа достаточно размыта. В частности, поскольку используется метод естественной визуализации, в спутной отрывной зоне за клином, на рис. 4.27 не прослеживается дорожка Кармана, которая, безусловно, должна была бы существовать в моменты времени, предшествующие началу торможения потока. Однако дорожка Кармана не видна из-за некоторой несогласованности развития явлений по размаху модели, то есть срыв потока в разных сечениях модели на этом режиме происходит не одновременно. Как было видно ранее, четкая синхронность отрыва потока в различных сечениях по размаху модели наблюдается в начальные моменты времени развития отрывного течения, когда набегающий поток интенсивно разгоняется.

4.1.8. Течение в окрестности концевой части модели лопасти винта. Показана возможность визуализации оптическим методом пространственного течения в окрестности конца вращающейся лопасти.

Исследование проводилось на модели винта с радиусом $R = 7{,}8$ см в однолопастном варианте. Лопасть прямоугольной формы в плане с хордой $b = 15$ мм оснащена нагревательными элементами в относительных сечениях $r/R = 0{,}82$; 0,87 и 0,92. Круговая частота вращения лопасти $\omega = 0{,}021\,\text{с}^{-1}$ ($\omega R = 0{,}164$ см/с). Формирование и развитие вихревой системы около концевой части лопасти сначала было исследовано на стадиях начала вращения модели на режиме работы на месте ($V_0 = 0$). Спектры течения показаны на рис. 4.28, *а*, *б*. Отчетливо наблюдается сформированный концевой вихрь *1* лопасти *2*.

На рис. 4.29 зафиксирована вихревая система *1* концевой части лопасти *2* на начальном этапе вращения на режиме осевого обтекания, при относительной скорости набегающего потока $V_0/\omega R = 0{,}408$.

Видно, что в данном случае структура концевого вихря лопасти винта менее регулярна по сравнению с предыдущим случаем начала вращения винта на месте при отсутствии набегающего потока.

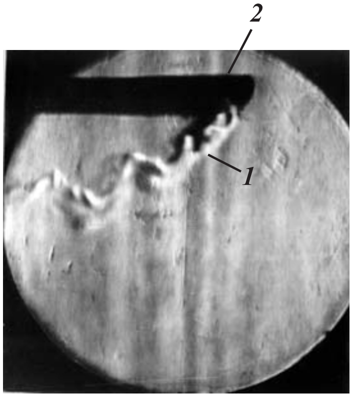


Рис. 4.29. Режим работы лопасти в осевом потоке

4.1.9. Заключительные замечания и выводы. Представленные материалы демонстрируют эффективность применения оптического метода визуализации в гидродинамической трубе.

Приведенные данные показывают, что при быстром разгоне потока из состояния покоя наблюдаются развивающиеся в процессе разгона тонкие слои оптических неоднородностей со значительными градиентами параметров течения.

Визуализация рассматриваемых границ течений осуществляется вследствие изменения коэффициента преломления среды. В наиболее общем представлении рассматриваемые тонкие слои являются границами, разделяющими потоки или массы жидкости с существенно разными параметрами, то есть границами разрыва параметров потоков. Одним из таких разрывов является, очевидно, тангенциальный разрыв скоростей, то есть тонкий вихревой слой, возникший между контактирующими массами жидкости с различными уровнями кинетической энергии. Необходимое изменение плотности воды (обычно принимаемой в гидродинамике малых скоростей за несжимаемую среду), как отмечено выше, объясняется действием сил вязкости, обусловливающим соответствующее изменение температуры воды, в частности, в температурном пограничном слое, достаточное для необходимого изменения плотности воды и ее коэффициента преломления. Не исключена существенная роль и других параметров течения. Например, в случае охватывающего цилиндр встречного движения фронта активных масс жидкости к плоскости симметрии потока за его кормовой поверхностью проявляется отчетливый тонкий слой, расположенный вдоль продольной плоскости симметрии, природа которого недостаточно ясна.

Использованный бесконтактный метод визуализации позволяет констатировать, что наблюдаемые явления обусловлены особенностями рассматриваемых течений и не являются следствием побочных эффектов, привнесенных извне.

На основании полученных в ГДТ–400 ЦАГИ материалов по оптической визуализации ранней стадии развития двумерных течений около круглого цилиндра, полуцилиндра, аэродинамического профиля, треугольной призмы и модели лопасти несущего винта на режимах быстрого разгона (ускорения) и торможения набегающего потока обнаружены неизвестные ранее особенности этих течений:

1. Около каждого из рассматриваемых тел происходит охватывающее его с двух сторон, направленное интенсивное встречное движение масс жидкости, отделенных от менее подвижной среды достаточно тонкими и гладкими границами оптических неоднородностей, связанных с резкими изменениями параметров течения в разделенных ими областях. Кроме того, наблюдаются следующие явления:

— указанные границы, соприкасающиеся одним концом с поверхностью тела, быстро развиваются в поперечном по отношению к набегающему потоку направлении;

—в определенных условиях в кормовой зоне, по мере развития течения между этими границами, слои неоднородностей, продвигаясь к плоскости симметрии модели тела, формируются в веерообразные структуры.

2. Для круглого цилиндра получены количественные данные. Они показывают, что при быстром разгоне набегающего потока в окрестности отсчитанного от продольной оси симметрии азимутального угла $\psi = \pm 90^\circ$ траектории частиц жидкости довольно быстро (за безразмерное время $\overline{\tau} \approx 1{,}07$, близкое к времени установления скорости набегающего потока $\overline{\tau} \approx 1$) становятся близкими к линиям тока, определенным по теории стационарного безотрывного обтекания цилиндра идеальной несжимаемой жидкостью. При этом, однако, величины скоростей движения частиц жидкости в кормовой области течения и, главное, структура течения в этой области существенно отличаются от расчетной схемы:

— развитие известных мощных вихревых структур, характерных для отрывного обтекания цилиндра, происходит позднее;

— ниже по направлению набегающего потока, вне границ активного движения жидкости, в первые моменты времени течение существенно отличается от рассчитанного по упомянутой теории и на некотором расстоянии от поверхности цилиндра, практически, не имеет поперечной компоненты скорости.

3. Проведенный анализ материалов по визуализации рассматриваемых течений позволил выявить закономерности, реализующиеся на стадиях обтекания различных тел при резком ускорении и торможении набегающего потока.

§ 4.2. Отрывное обтекание усеченных эллипсоидов вращения с плоской донной поверхностью

4.2.1. Методика проведения исследований. Исследование обтекания проводилось в гидродинамической трубе с сечением рабочей части 150×150 мм методом подкрашенных струй. Испытывались тела, поверхность которых образована частью эллипсоида вращения с малой осью $d = 40$ мм и большой — 168 мм и плоскостью, проходящей через конец малой оси эллипсоида и наклоненной к его большой оси под углом 45° (усеченный эллипсоид с косым донным срезом) или 90° (полуэллипсоид). С целью выявления влияния державок на обтекание тел модели крепились в рабочей части гидротрубы с помощью державок различного типа (передней, боковой или задней). Для анализа отбирались те материалы испытаний, для которых не заметно влияние типа державки на картину течения. Державки были изготовлены из трубок с наружным диаметром 4 мм. По ним осуществлялась подача водных растворов анилиновых красителей в полости моделей. Подкрашенные струйки выпускались из дренажных отверстий на поверхности тела и иногда из гребенки насадков, расположенной выше по потоку. В процессе испытаний с помощью двух зеркал, установленных по бокам рабочей части гидротрубы, производилась одновременная киносъемка трех проекций модели в потоке.

Испытания велись при различных значениях углов атаки α, скольжения β и скорости потока в трубе $V = 0 \div 44$ см/с. Исследовалось обтекание моделей как при постоянной скорости набегающего потока, так и при его разгоне и торможении. Разгон и торможение осуществлялись путем быстрого открытия или закрытия дроссельной заслонки гидротрубы. При разгоне скорость набегающего на тело потока быстро изменялась от нулевого до некоторого постоянного, наперед заданного значения. Перед началом разгона потока в гидротрубе, т. е. при $V = 0$, к дренажным отверстиям подавался раствор красителя с целью визуализации течения за телом в начальный момент времени.

В дальнейшем при анализе за начало отсчета времени принимался устанавливаемый по кинокадрам момент, соответствующий началу деформации выпущенных струек краски. Установившиеся режимы течения соответствовали значениям чисел $\mathrm{Re} = 700 \div 15000$ (за характерный размер принималась длина малой оси эллипсоида d). Выше значения $V = 8$ см/с ($\mathrm{Re} = 2200$) поток в рабочей части гидротрубы становился турбулентным.

4.2.2. Обтекание усеченного эллипсоида с косым донным срезом. Рассмотрим сначала режимы течения при постоянной скорости набегающего потока. На рис. 4.30 (см. цв. вклейку) приведены спектры течения вблизи усеченного эллипсоида при различных значениях скорости невозмущенного потока, углов атаки и скольжения. Фотографии боковых проекций были получены с помощью зеркал. На рис. 4.30, *а* (см. цв. вклейку), представлен режим течения при $\alpha = 10^\circ$, причем на фронтальной проекции заметно, что след за телом несимметричен. Он периодически отклоняется от продольной плоскости тела с шагом $h = h/d \approx 3{,}5$, где h — шаг, измеренный в опыте.

При $\alpha = 0$ могут реализоваться два режима течения: несимметричный с шагом $h \approx 3{,}5$ (рис. 4.30, *б*), аналогичный течению при $\alpha = 10^\circ$, и симметричный (рис. 4.30, *в* на цв. вклейке), когда за телом образуется след с перемежающимися вихревыми жгутами и «кольцами». При этом «кольца» расположены с шагом $h \approx 3{,}5$, а левый и правый вихревые жгуты имеют противоположное направление вращения, что указывает на наличие отрицательной подъемной силы на теле и существование в следе соответствующего компонента индуктивной скорости. Это подтверждается заметным на боковой проекции отклонением вихревых жгутов от направления вектора скорости набегающего потока. На некотором расстоянии от донного среза модели вихревые жгуты, деформируясь, периодически образуют конфигурации, близкие к кольцам, плоскости которых примерно параллельны плоскости донного среза. Эти кольца сносятся затем вниз по потоку с шагом $h \approx 3{,}5$.

На режиме течения, соответствующем углу атаки $\alpha = -10^\circ$, также отчетливо наблюдается периодическое сворачивание вихревых жгутов в «кольца» (рис. 4.30, *г* на цв. вклейке), а картина течения в целом аналогична картине, соответствующей симметричному режиму при $\alpha = 0$. Однако в данном случае относительный шаг между «кольцами» существенно меньше $\overline{h} \approx 2$.

На рис. 4.30, *д*, *е*, *ж*, *з* (см. цв. вклейку) иллюстрируются режимы течения, характерные для значений $-25^\circ < \alpha \leqslant -15^\circ$.

В отличие от случая $\alpha = -10^\circ$ на рассматриваемых углах атаки при ламинарном внешнем потоке (рис. 4.30, *д*, *ж* на цв. вклейке) в следе за телом наблюдаются четко обозначенные практически стационарные вихревые жгуты. Искривление вихревых жгутов в верхней части фотоснимков на боковой проекции, по-видимому, объясняется влиянием стенки гидротрубы. При $\alpha = -25^\circ$, рис. 4.30, *ж*(см. цв. вклейку), краска выпускалась только с одной стороны тела. Здесь отчетливо видно, что поток сходит по касательной к боковой поверхности тела. При скоростях, соответствующих турбулентному внешнему потоку, на режиме $\alpha = -15^\circ$ и $V = 30$ см/с (рис. 4.30, *е* на цв. вклейке) в результате турбулентного перемешивания вихревые жгуты несколько размываются, а при $\alpha = -25^\circ$ и $V = 44$ см/с (рис. 4.30, *з* на цв. вклейке) на расстоянии около двух калибров от тела они, кроме того, трансформируются, образуя кольцеобразные вихревые сгустки.

При обтекании тела ламинарным потоком со скольжением $\beta = 15^\circ$ и при $\alpha = -15^\circ$ на фронтальной проекции заметно отклонение вихревых жгутов вправо (рис. 4.30, *и* на цв. вклейке), что свидетельствует о наличии боковой составляющей индуктивной скорости в следе и боковой силы на теле.

При $\alpha = -35^\circ$ могут реализоваться, как и при $\alpha = 0$, два режима течения в следе: течение с практически стационарными вихревыми жгутами и течение с перемежающимися вихревыми жгутами и «кольцами» (рис. 4.30, *к*, *л*), причем «кольца» на рис. 4.30, *л* имеют шаг $h \approx 3/4$. Таким образом, $\alpha = -35^\circ$ является граничным значением угла атаки, при котором наблюдается перестройка течения. Как было видно из полученных киноматериалов, это граничное значение может существенно изменяться при наличии внешних возмущений в потоке.

На рис. 4.30, *м*, *н* показаны режимы, соответствующие $\alpha = \pm 90^\circ$. За телом образуется зона завихренного течения, из которой периодически вырываются вихревые сгустки и сносятся вниз по потоку.

Рассмотрим обтекание усеченного эллипсоида при разгоне и торможении набегающего потока. Введем предварительно безразмерное время $\overline{\tau} = tV/d$, где t — время, V — скорость набегающего потока в конце режима разгона.

На рис. 4.31 представлен режим ($\alpha = \beta = 0$) разгона потока, $V = 0 \div 10$ см/с, с последующим торможением. Сначала ($\overline{\tau} = 2{,}5 \div 3{,}0$) за донным срезом тела образуются два вихревых жгута, замкнутые вихревой перемычкой, которая на данной фотографии практически не видна из-за отсутствия краски в ее ядре. Однако перемычку можно было наблюдать в киноматериалах, полученных в опыте. Затем ($\overline{\tau} = 5 \div 12{,}5$) вихревые жгуты вытягиваются вдоль потока, и режим течения практически устанавливается.

В результате резкого торможения набегающего потока за телом образуется вихревое кольцо ($\overline{\tau} = 15$), которое смещается на некоторое расстояние вверх по потоку, «нанизываясь» на тело ($\overline{\tau} = 17{,}5$). Оставаясь далее в кормовой части тела, но несколько выше плоскости среза, оно, расширяясь, быстро диффундирует.

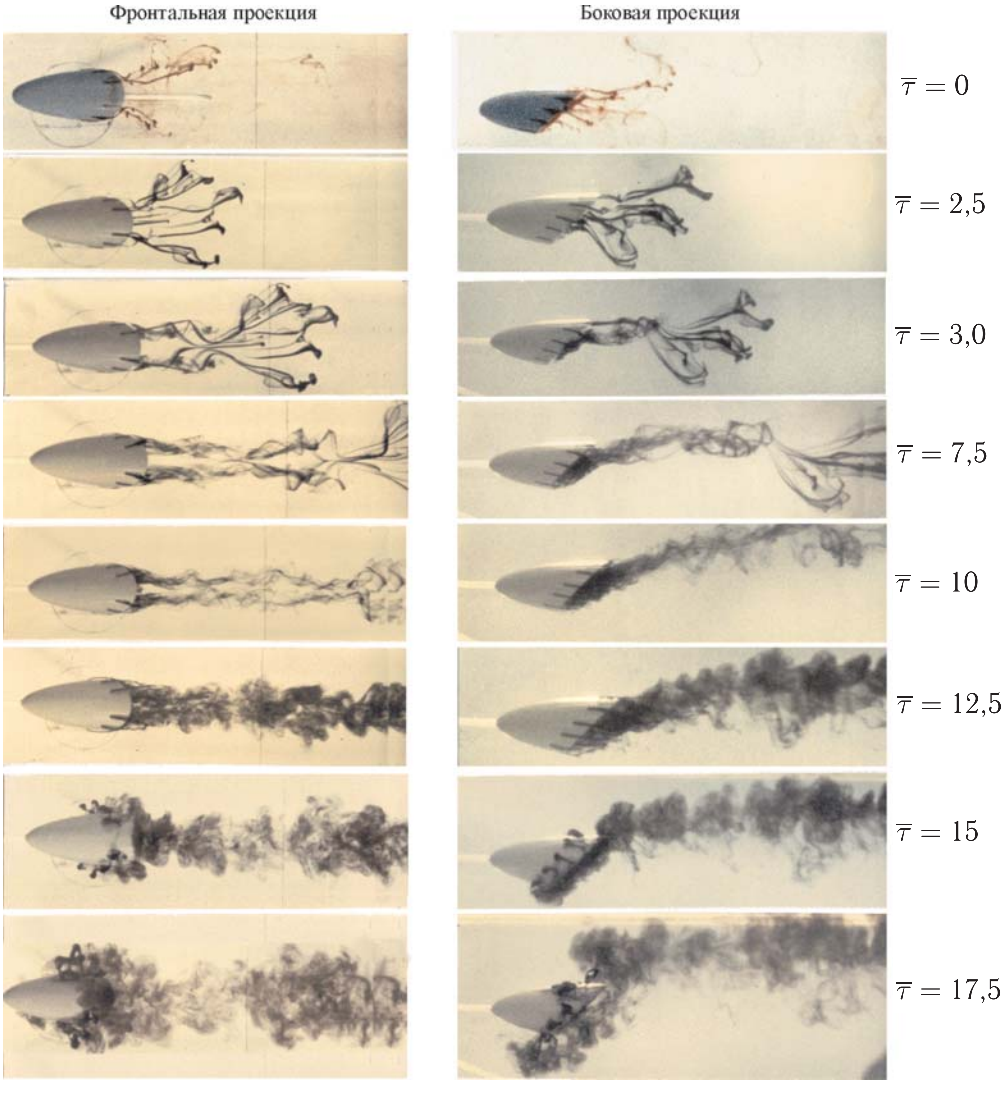


Рис. 4.31. Обтекание усеченного эллипсоида при разгоне набегающего потока, $\alpha = \beta = 0$

Рассмотрим теперь режим разгона потока ($V = 0 \div 8$ см/с), набегающего на усеченный эллипсоид с косым донным срезом, при $\alpha = 15°$, $\beta = 0$ (рис. 4.32 на цв. вклейке). Такой режим характеризуется поочередным образованием в следе за телом нескольких вихревых колец. Это явление схематически можно представить следующим образом (рис. 4.33). Аналогично предыдущему режиму на начальном отрезке времени (рис. 4.32, $\overline{\tau} = 2$ и рис. 4.33, *а*) непосредственно за телом образуется практически плоское вихревое кольцо *1–2*, которое «фиксируется» у донного среза. Через некоторое время это вихревое кольцо вытягивается по местному направлению потока (рис. 4.32, $\overline{\tau} = 4$ и рис. 4.33, *б*), образуя два боковых вихревых жгута и замыкающую их перемычку. Боковые жгуты, воздействуя на перемычку, индуцируют на ней такую скорость v_i, что перемычка деформируется в направлении нормали к плоскости боковых вихревых жгутов. Такая деформация приводит к искривлению этих жгутов вблизи перемычки. На искривленном участке вихревых жгутов в точках *3* и *3′* индуцируются скорости $\overline{v}_i$, приводящие к их взаимному удалению вблизи перемычки (рис. 4.32, $\overline{\tau} = 4$, фронтальная проекция и рис. 4.33, *в*). На этих расширившихся участках в точках *3* и *3′* примыкающие к телу отрезки вихревых жгутов вызывают скорость v_i, способствующую образованию «ложки» (рис. 4.32, $\overline{\tau} = 4$, боковая проекция и рис. 4.33, *в*). В свою очередь, ближе к донному срезу тела, в точках *2* и *2′*, у основания «ложки», каждый из боковых вихревых жгутов имеет такое искривление ($\overline{\tau} = 4$, боковая проекция), что индуктивная скорость v_i приводит к их взаимному сближению и образованию «шейки» (рис. 4.32, $\overline{\tau} = 4$, фронтальная проекция и рис. 4.33, *в*).

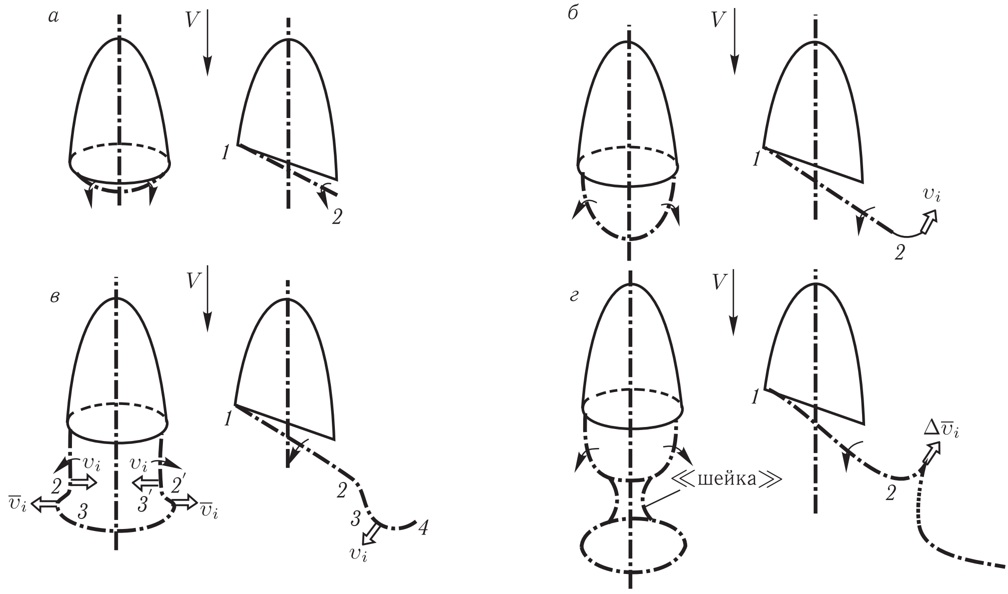


Рис. 4.33. Схема образования вихревых колец

В области «шейки» происходит интенсивное взаимодействие боковых вихрей, имеющих противоположное значение завихренности, что приводит к их взаимному сложению и, таким образом, исчезновению на этом участке. В результате такого взаимодействия оставшаяся часть боковых жгутов выше «шейки» замыкается между собой, а ниже по потоку образуется вихревое кольцо (рис. 4.32, $\overline{\tau} = 8$ и рис. 4.33, *г*), плоскость которого примерно параллельна плоскости донного среза тела. Вновь образовавшаяся перемычка лежит несколько выше плоскости этого кольца, так как она расположена в непосредственной близости к боковым вихревым жгутам, которые вновь индуцируют на ней скорость Δv_i, вызывающую ее смещение относительно плоскости боковых жгутов, большую, чем на отошедшем вихревом кольце. Далее в рассматриваемом случае процесс образования колец повторяется несколько раз, хотя на других режимах может образоваться и одно начальное вихревое кольцо.

4.2.3. Режимы течения за полуэллипсоидом с прямым донным срезом. При значении угла атаки $\alpha = 0$ и разгоне набегающего потока за донным срезом полуэллипсоида (см. рис. 4.34 на цв. вклейке) образуется кольцеобразный спирального сечения начальный вихрь (рис. 4.34, *а*). Затем через некоторое время течение за полуэллипсоидом устанавливается (рис. 4.34, *б*), за телом развивается завихренная зона, из которой вырываются частицы окрашенной жидкости. Далее аналогичный режим течения будет рассмотрен подробнее.

На рис. 4.34, *в*, *г* показаны начальная и конечная стадии развития следа за телом при $\alpha = -25^\circ$ и разгоне набегающего потока. Видно, что при установившемся режиме течения (рис. 4.34, *г*) вихревые жгуты перемежаются кольцами ($\overline{h} \approx 2{,}1$). В этом случае течение за полуэллипсоидом напоминает течение за усеченным эллипсоидом с косым донным срезом при малых отрицательных углах атаки. В случае установившегося режима течения при ламинарном набегающем потоке увеличение числа Re от 10^3 до $1{,}5 \cdot 10^3$ (см. рис. 4.34, *г*, *д*) практически не влияет на форму следа за телом. Следующая фотография (рис. 4.34, *е*) иллюстрирует характер течения в непосредственной близости к поверхности полуэллипсоида. Течение визуализировалось с помощью гребенки насадков, установленной выше по потоку.

Из приведенного на рис. 4.34, *ж* снимка видно, что при $\alpha = -35^\circ$ течение за полуэллипсоидом и вблизи его поверхности аналогично течению при $\alpha = -25^\circ$.

Рассмотрим теперь обтекание полуэллипсоида при разгоне набегающего потока ($\alpha = \beta = 0$, $V = 0 \div 2{,}8$ см/с рис. 4.35 на цв. вклейке). При $\overline{\tau} = 0 \div 1{,}4$ происходит «зарождение» начального кольцеобразного вихря. В последующие моменты времени ($\overline{\tau} = 2{,}1 \div 8{,}4$) происходит дальнейшее развитие начального вихря. Сечение вихря и расстояние его ядра от донного среза увеличиваются. Вихрь «захватывает» все большую массу жидкости. Симметричное положение его и форма нарушаются. Осевая линия ядра вихря становится не параллельной плоскости донного среза полуэллипсоида. Начальный вихрь существенно деформируется, затем из придонной области в каком-либо направлении выбрасывается замкнутый кольцеобразный вихрь ($\overline{\tau} = 11{,}2 \div 12{,}6$). Этот вихрь уносится потоком, а непосредственно за телом продолжает развиваться вихревая зона, из которой вырываются небольшие сгустки завихренной жидкости (см. $\overline{\tau} = 19{,}6$). Затем режим течения устанавливается ($\overline{\tau} = 23{,}1 \div 26{,}6$).

Следует отметить, что процесс зарождения и развития начального вихря за полуэллипсоидом с прямым донным срезом при $\alpha = \beta = 0$ качественно мало зависит от величины скорости набегающего потока, устанавливающейся в конце разгона.

Поскольку, в частности, усеченный эллипсоид с косым донным срезом является по сути упрощенной моделью фюзеляжа транспортного самолета или вертолета, то обнаруженные несимметрия и неоднозначность вихревых структур могут оказывать существенное влияние, в частности, на работу вертикального и горизонтального оперения и рулевого винта вертолета, и это необходимо учитывать в практической аэродинамике.

§ 4.3. Нестационарные и гистерезисные явления в положении областей «взрыва» вихрей, образующихся в окрестности передних кромок треугольного крыла

В аэродинамике значительное внимание уделяется исследованиям явления «взрыва» вихря (иногда в литературе употребляется термин «распад» или «разрушение» вихря) — явления потери устойчивости течения в вихревом жгуте. Интерес к этой проблеме объясняется прежде всего тем обстоятельством, что явление взрыва вихрей может, зачастую, определяющим образом сказываться на аэродинамических характеристиках летательных аппаратов. В частности, взрывом вихрей могут быть вызваны: гистерезисные явления в подъемной силе, в характеристиках продольного момента по углу атаки, антидемпфирование, неблагоприятные изменения характеристик боковой статической и динамической устойчивости по углу скольжения и т. д. Это влияние на аэродинамические характеристики крыла или летательного аппарата обусловлено тем, что разрежение на несущей поверхности резко падает под ядром вихря ниже точки начала области его взрыва. Таким образом, по изменениям положения областей взрыва вихрей появляется возможность судить о поведении аэродинамических характеристик. Возникновение взрыва вихря обычно связывают с увеличением отношения окружной составляющей скорости в ядре вихря к продольной, а также с появлением положительного (неблагоприятного) градиента давления. Возрастание этих двух факторов способствует продвижению области взрыва вихря вверх по течению.

4.3.1. Методика исследований и оборудование. Исследования по визуализации проводились в гидродинамической трубе с размером рабочей части 40×40 см при скоростях набегающего потока $V = 5 \div 25$ см/с на модели треугольного крыла с углом стреловидности по передней кромке $\chi = 70^\circ$ с центральной хордой $b = 21$ см. В гидродинамической трубе имелась возможность быстрого изменения скорости потока за счет открытия или дросселирования заслонки. Определение положения области взрыва вихрей осуществлялось с помощью метода подкрашенных струй. Визуализирующая жидкость («молоко») выпускалась из отверстий, расположенных на поверхности крыла вблизи его вершины, и попадала в ядра вихревых жгутов. Крыло имело толщину 6 мм, плоскую верхнюю поверхность и острые кромки с углом раствора клина 45° в нормальных к кромкам сечениях. Безразмерное положение оси вращения крыла по углам атаки и скольжения $\overline{x}_0 = x_0/b$, где x_0 — расстояние, измеряемое от вершины крыла вдоль центральной хорды до оси вращения в сантиметрах, было равно 0,55. Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \mathrm{Vb}/\nu$, где ν — коэффициент кинематической вязкости воды, изменялось в пределах $0{,}85 \cdot 10^4 \div 4{,}25 \cdot 10^4$. Предварительно проведенные эксперименты показали, что положение областей взрыва вихрей на стационарных режимах обтекания практически не зависит от числа Re. Это согласуется с результатами работы [152], где приведены подобные данные для таких крыльев от чисел Re в несколько тысяч до миллионов. А так как положение областей взрыва вихрей над крылом определяется, главным образом, градиентом давления и интенсивностью этих вихрей, то следует ожидать, что при нестационарном движении влияние числа Re еще более уменьшится, так как при этом в уравнениях движения жидкости возрастают инерционные члены. В опытах наблюдались две формы потери устойчивости — взрыва вихрей — пузыревидная и спиралевидная, причем на ряде режимов происходит преобразование одной формы в другую. Течение вблизи областей взрыва вихрей носит нестационарный характер даже при стационарных внешних условиях обтекания крыла, при этом точки начала областей взрыва вихрей совершают некоторые перемещения вблизи среднего положения. Следует также отметить, что во время экспериментов при отсутствии скольжения как на стационарных, так и на нестационарных режимах обтекания иногда наблюдалась некоторая асимметрия в положении областей взрывов правого и левого вихрей. В тех случаях, когда имелась такая асимметрия, на графиках приводятся среднеарифметические значения координат областей взрыва этих вихрей.

В аэродинамической трубе методом вынужденных колебаний испытывалась модель треугольного крыла с углом стреловидности по передней кромке $\chi = 70^\circ$, выполненного в виде плоской пластины толщиной 1,25 см и величиной центральной хорды $b = 108{,}8$ см. Передняя кромка пластины была скруглена, при этом радиус скругления составлял половину ее толщины. Задняя кромка со стороны верхней и нижней поверхности крыла имела симметричное клиновидное заострение, которое начиналось на расстоянии 5 см от ее края. Испытания проводились в диапазоне углов атаки $\alpha = -4^\circ \div 60^\circ$ при амплитуде колебаний по углу атаки $\vartheta_\alpha = 3^\circ \div 5^\circ$ и частоте $f = 0{,}5 \div 2$ Гц. Колебания производились относительно того же положения оси вращения $\overline{x}_0$, что и при испытаниях в гидродинамической трубе. Число Рейнольдса при испытаниях $\mathrm{Re} = (2 \div 2{,}28) \cdot 10^6$ (подсчитано по средней аэродинамической хорде). В процессе испытаний с помощью тензометрических весов определялись нормальная сила и продольной момент, действующие на крыло. При вычислении коэффициентов силы и момента за характерные площадь и размер принимались соответствующие площадь крыла и средняя аэродинамическая хорда.

4.3.2. Стационарные режимы обтекания крыла. С целью сравнения с нестационарными режимами обтекания предварительно была проведена визуализация на стационарных режимах для углов атаки $\alpha = 10 \div 60^\circ$ в расширенном диапазоне углов скольжения $-40^\circ \leqslant \beta \leqslant 40^\circ$ и определены величины $\overline{x} = x/b$, $\overline{x}_{\text{н}} = x_{\text{н}}/b$, $\overline{x}_{\text{п}} = x_{\text{п}}/b$, где x — расстояние, отсчитываемое от вершины крыла вдоль центральной хорды до начала области взрыва вихря в отсутствии

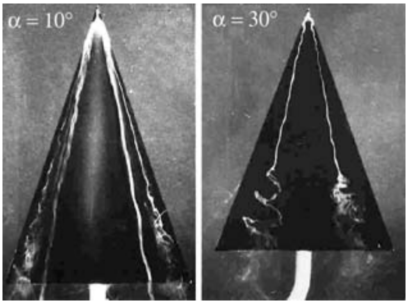


Рис. 4.36. Визуализация вихревых жгутов над треугольным крылом при $\alpha = 10^\circ$ и $\alpha = 30^\circ$

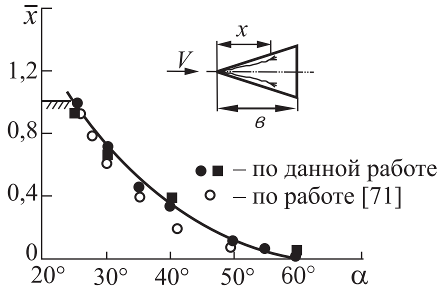


Рис. 4.37. Положение области взрыва первичных вихревых жгутов при $\beta = 0$

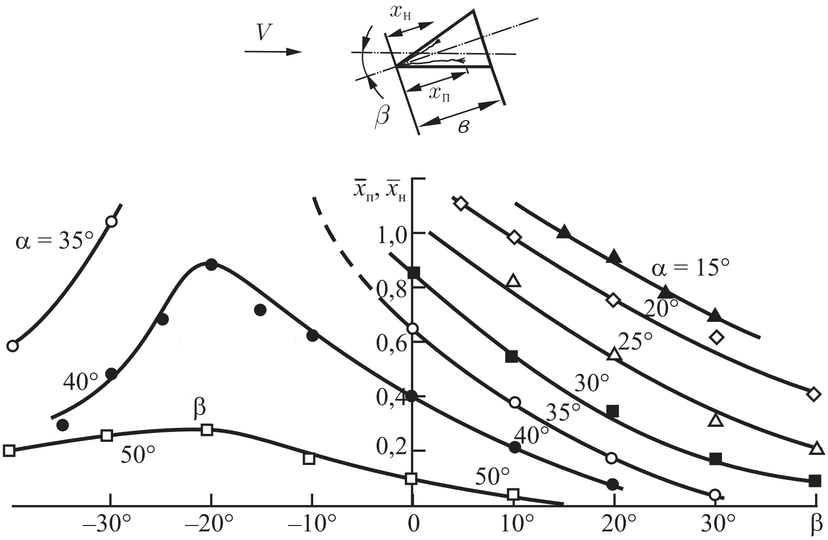


Рис. 4.38. Изменение положения областей взрыва первичных вихрей на стационарных режимах обтекания скользящего крыла: слева — положение области взрыва подветренного вихря, справа — положение области взрыва наветренного вихря

скольжения; $x_{\text{н}}$, $x_{\text{п}}$ — соответственно аналогичные расстояния до области взрыва наветренного и подветренного вихрей при наличии скольжения.

При $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 0$ (рис. 4.36) визуализируется известная схема обтекания треугольного крыла с двумя интенсивными «первичными» вихрями и так называемыми «вторичными», более слабыми вихрями, имеющими обратные по отношению к первичным направления вращения и расположенными ближе к передней кромке крыла. Взрыв первичных вихрей происходит значительно ниже по потоку задней кромки крыла, взрыв же вторичных – выше задней кромки. На больших углах атаки краситель не попадает в ядра вторичных вихрей, поэтому они не визуализируются и в дальнейшем не рассматриваются. Взрыв первичных вихрей в области задней кромки крыла наблюдается на стационарных режимах при $\alpha = 25^\circ \div 28^\circ$ (рис.4.37), что хорошо согласуется с результатами работ [152–154], а при $\alpha = 60^\circ$ происходит непосредственно у вершины крыла.

При наличии скольжения (рис.4.38) наблюдается сильная несимметрия в положении областей взрыва наветренного $\overline{x}_{н}$ и $\overline{x}_{п}$ подветренного вихрей: наветренный взрывается по потоку выше подветренного. Причем, с увеличением β от 0 до $90^\circ - \chi = 20^\circ$ область взрыва подветренного вихря располагается все ниже по потоку, а при дальнейшем увеличении угла скольжения она смещается в обратную сторону, вверх по потоку к вершине крыла. Таким образом, зависимость положения $\overline{x}_{п}$ начала области взрыва подветренного вихря от угла β имеет точку максимума при $\beta = 90^\circ - \chi = 20^\circ$. Это, видимо, обусловлено тем, что при приближении к $\beta = 20^\circ$ подветренная кромка становится как бы боковой, при этом продольная составляющая скорости в ядре вихря возрастает, что приводит к сдвигу области взрыва вихря вниз по потоку. При дальнейшем увеличении β этот подветренный вихрь не экранируется крылом, деформируется под воздействием внешнего потока и, видимо, в результате самоиндукции взрывается.

4.3.3. Апериодические и периодические законы перехода с одного постоянного значения угла атаки на другой. Рассмотрим сначала апериодические законы перехода крыла с одного постоянного значения угла атаки α на другой, близкие по времени к линейным, при постоянной скорости набегающего потока, реализованные для различных значений безразмерной скорости вращения крыла $\dot{\alpha} = d\alpha/d\overline{\tau}$, где безразмерное время $\overline{\tau} = Vt/b$, t — время в секундах.

На рис. 4.39 представлены результаты обработки экспериментов для перехода крыла с $\alpha = 10^\circ$ на $\alpha = 40^\circ$ и наоборот — с $\alpha = 40^\circ$ на $\alpha = 10^\circ$. При этих законах производная $\dot{\alpha} = (d\alpha)/(d\overline{\tau})$, где α берется в радианах, в экспериментах принимала значения соответственно: 0,05; 0,10; 0,29 и $-0{,}05$;$-0{,}10$; $-0{,}29$. Значения $\dot{\alpha} = 0{,}1$ и $-0{,}1$ соответствуют производной по размерному времени $(d\alpha)/(d\overline{\tau}) = \dot{\alpha}(V/b)$, взятой при $V = 100$ м/с, $b = 10$ м и равной в этом случае ± 1/с. Эта величина близка к параметрам маневренных самолетов. Бо̀льшие по абсолютной величине $\dot{\alpha}$ могут соответствовать, например, меньшей скорости маневрирования V такого летательного аппарата. При значении $\alpha = 10^\circ$ взрыв вихрей происходит существенно ниже задней кромки крыла. С увеличением угла атаки ($\dot{\alpha} > 0$) области взрыва вихрей приближаются к задней кромке заметно раньше по углу атаки, чем при стационарном обтекании ($\dot{\alpha} = 0$). Можно видеть, что при $\dot{\alpha} > 0$ после пересечения задней кромки крыла, области взрыва движутся вверх по крылу с некоторым отставанием по сравнению со случаем стационарного обтекания, причем оно тем больше, чем больше величина $\dot{\alpha}$. Причины этого отставания, видимо, главным образом объясняются тем обстоятельством, что в результате вращения крыла с $\dot{\alpha} > 0$ выше его оси вращения создается дополнительное давление, ниже — разрежение. Таким образом, вдоль осей вихрей реализуется дополнительный градиент давления, способствующий более позднему, ниже по потоку, взрыву вихрей, чем при таком же значении угла атаки в случае стационарного обтекания. Созданию такого же дополнительного градиента должны способствовать разгонные вихри, образующиеся вблизи задней кромки крыла при $\dot{\alpha} > 0$.

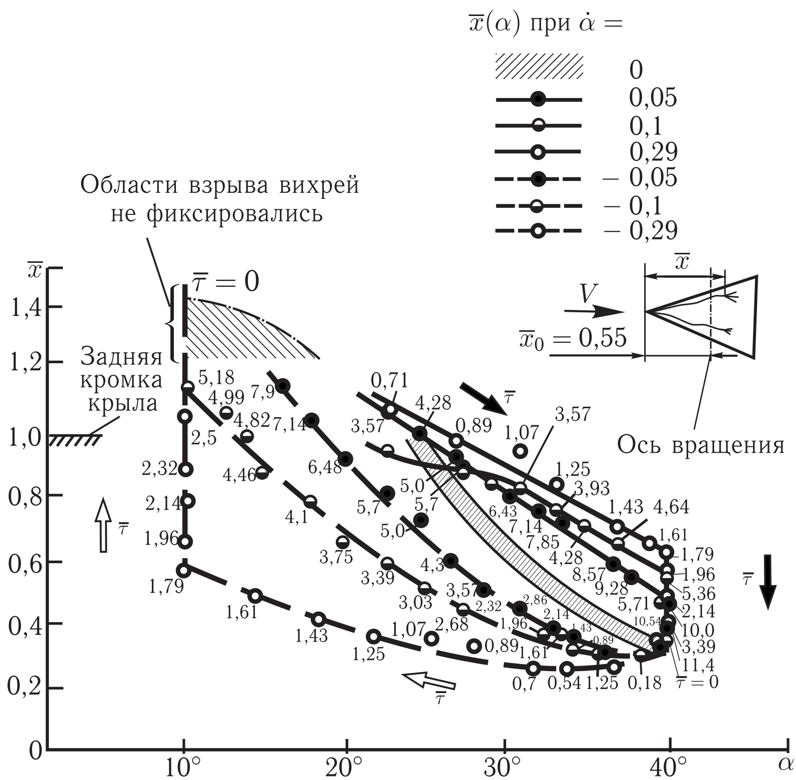


Рис. 4.39. Изменение положения области взрыва вихрей при апериодическом изменении угла атаки α от 10° до 40° и наоборот для различных значений безразмерной скорости $\dot{\alpha}$ вращения крыла. Значение безразмерного времени $\overline{\tau}$ указано цифрами около точек

Ниже задней кромки по потоку дополнительное разрежение, видимо, быстро уменьшается — реализуется неблагоприятный дополнительный градиент давления, что наряду с возмущениями, обусловленными указанными разгонными вихрями, сносимыми вниз по потоку, и способствует более раннему по углу атаки, чем для случая $\dot{\alpha} = 0$, приближению к задней кромке областей взрыва вихрей на углах атаки $\alpha < 25^\circ$ (см. рис. 4.39).

Пусть теперь крыло начинает вращаться на уменьшение угла атаки с $\alpha = 40^\circ$. В начале движения области взрыва вихрей находятся выше оси вращения. На верхней поверхности крыла выше этой оси создается дополнительное разрежение, ниже оси — дополнительное давление. Возникает дополнительный положительный градиент давления, который способствует продвижению областей взрыва вихрей вверх, в сторону вершины крыла (рис. 4.39, $\alpha = 40^\circ \div 35^\circ$). Такое продвижение областей взрыва обусловлено, видимо, также нарастанием поперечной скорости в ядрах вихрей, а, следовательно, и их интенсивности в результате вращения крыла. При дальнейшем уменьшении угла атаки после достижения определенного минимального значения $\overline{x}$ точки взрыва вихрей начинают двигаться в противоположную сторону — вниз по потоку, так как область с неблагоприятным градиентом давления,

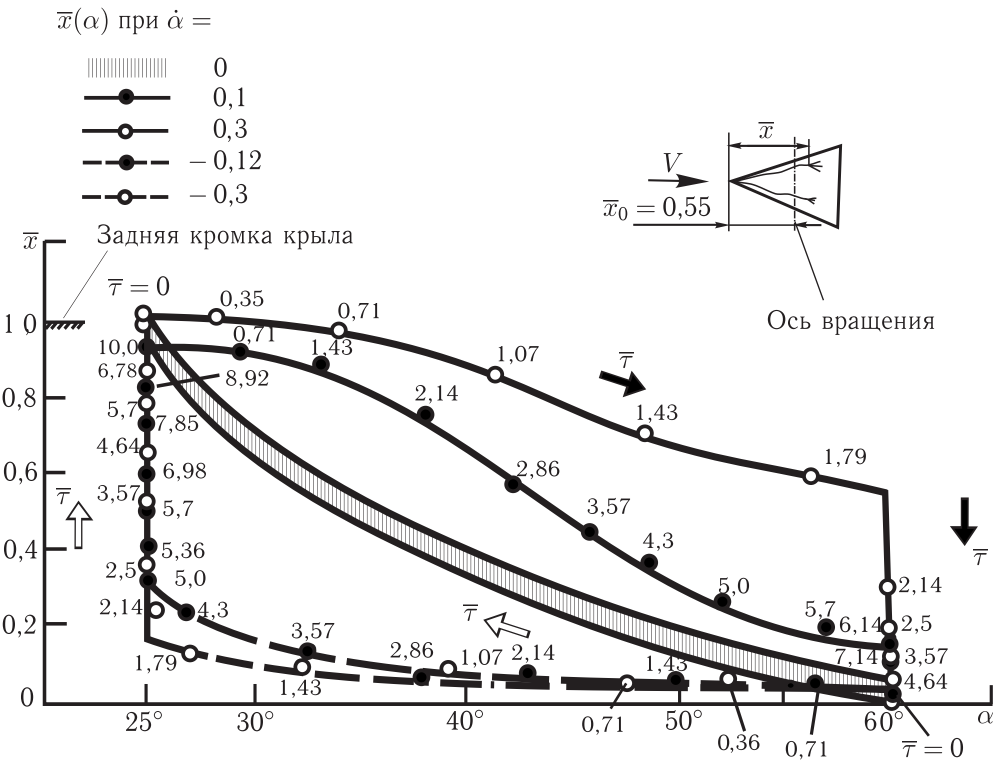


Рис. 4.40. Изменение положения области взрыва вихрей при апериодическом изменении угла атаки α от 25° до 60° и наоборот для различных значений безразмерной скорости $\dot{\alpha}$ вращения крыла. Значение безразмерного времени $\overline{\tau}$ указано цифрами около точек

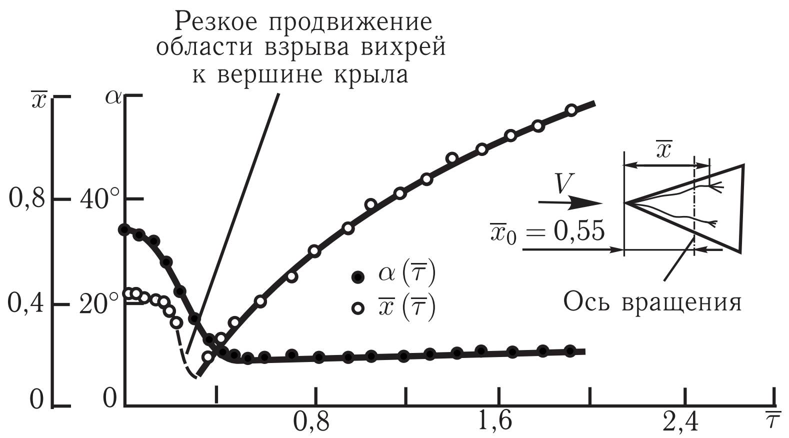


Рис. 4.41. Изменение положения области взрыва вихрей при быстром апериодическом изменении угла атаки крыла. Имеет место резкое продвижение области взрыва вихрей к вершине крыла

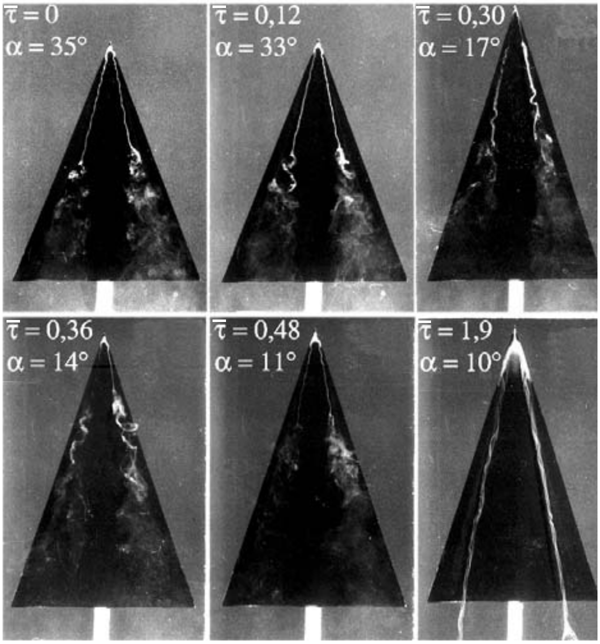


Рис. 4.42. Визуализация вихревых жгутов при быстром апериодическом изменении угла атаки крыла по монотонному гармоническому закону, указанному на рис. 4.41. При $\overline{\tau} = 0{,}30$, $\alpha = 17^\circ$ вмдно резкое продвижение области взрыва вихрей к вершине крыла

обусловленным наличием задней кромки, с уменьшением угла атаки смещается вниз по потоку. Причем отличия от стационарного режима тем больше, чем больше $|\dot{\alpha}|$.

Разница между положением областей взрыва вихрей на стационарном и нестационарном режимах обтекания в процессе перехода крыла с одного фиксированного значения α на другое с течением времени возрастает и достигает максимального значения при прекращении вращения крыла. После остановки вращения проходит еще довольно длительное время, прежде чем восстанавливается картина течения, соответствующая стационарному режиму.

Очевидно, отмеченные выше гистерезисные явления в положении областей взрыва вихрей при нестационарных движениях крыла могут весьма существенно влиять на его аэродинамические характеристики, например, такие, как коэффициенты продольного момента и подъемной силы и их производные по углу атаки и времени, а также сопровождаться значительными запаздываниями в установлении стационарных характеристик такого крыла. Особенно велико влияние на динамические характеристики летательных аппаратов описанных гистерезисных явлений может быть при их возникновении на органах управления, скорость отклонения которых значительна.

Рассмотрим теперь движение крыла от $\alpha = 25^\circ$ до 60° и наоборот при $\dot{\alpha} = 0{,}1$; $0{,}3$ и $-0{,}12$; $-0{,}3$ соответственно (рис. 4.40) Области взрыва вихрей при $\alpha = 25^\circ$ находятся вблизи задней кромки крыла. При увеличении угла атаки от $\alpha = 25^\circ$ в начальные моменты времени положение областей взрыва вихрей слабо реагирует на увеличение угла атаки. Это, видимо, обусловлено тем обстоятельством, что в моменты, близкие к началу движения, в окрестности задней кромки крыла развивается разгонный вихревой жгут. В результате вверх от него по крылу создается отрицательный градиент давления, который способствует затягиванию продвижения областей взрыва в сторону вершины крыла.

При уменьшении угла атаки с $\alpha = 60^\circ$ до $\alpha = 25^\circ$ при $\dot{\alpha} = -0{,}3$; $-0{,}12$ области взрыва вихрей вплоть до $\dot{\alpha} = 35^\circ \div 40^\circ$ находятся практически в вершине крыла. Судя по поведению областей взрыва, можно ожидать, что при этом коэффициент продольного момента крыла будет длительное время сохраняться таким же, как и при $\alpha = 60^\circ$, или мало меняться по сравнению с ним. При прекращении вращения крыла области взрыва вихря достаточно медленно достигают своего стационарного положения на $\alpha = 25^\circ$. Это время как для $\dot{\alpha} = -0{,}3$, так и для $\dot{\alpha} = -0{,}12$ составляет приблизительно $\overline{\tau} = 8$, что в 5 раз больше, чем время изменения угла атаки при $\dot{\alpha} = -0{,}3$ и в 3 раза — при $\dot{\alpha} = -0{,}12$.

Результаты исследования поведения областей взрыва вихрей при резком изменении угла атаки от $\alpha = 35^\circ$ до $\alpha = 10^\circ$ по монотонному гармоническому закону представлены на рис. 4.41, 4.42. В начале ($\overline{\tau} = 0$) спектры соответствуют обтеканию неподвижного крыла. В последующие моменты времени $0 < \overline{\tau} < 0{,}24$ с нарастанием скорости вращения крыла области взрыва вихрей перемещаются в сторону вершины крыла. При $\overline{\tau} = 0{,}24 \div 0{,}3$, соответствующих максимальной скорости вращения крыла, области взрыва вихря скачкообразно сдвигаются вверх по потоку. В дальнейшем ($\overline{\tau} > 0{,}3$) области взрыва вихрей смещаются вниз по потоку за заднюю кромку крыла. Это явление аналогично описанному выше для режимов уменьшения α по линейному закону (см. рис. 4.39), при этом скачкообразный характер изменения положения областей взрыва вихрей обусловлен, видимо, очень большой максимальной скоростью вращения крыла ($\dot{\alpha}_{\max} = 1{,}32$).

На рисунках 4.43, 4.44, и 4.45 приведены результаты исследования при колебаниях крыла по закону $\alpha = 30^\circ + 5^\circ \cos\omega\overline{\tau}$ с частотами ω, равными 4,57; 2,01 и 1,06. Выход на колебательный режим осуществлялся от значения $\alpha = 35^\circ$. Видно, что для установления периодических колебаний областей взрыва вихрей относительно среднего значения, соответствующего стационарному обтеканию на $\alpha = 30^\circ$, необходимо некоторое время, практически не зависящее от частоты. Характер установившихся колебаний областей взрыва вихрей близок к гармоническому. Если провести усреднение по нескольким периодам, то законы движения областей взрыва вихрей имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\overline{x} = 0{,}72 - 0{,}095\sin(4{,}57\overline{\tau} - \Delta\varphi), &&\Delta\varphi = 2{,}99 \text{ — для } \omega = 4{,}57;\\
&\overline{x} = 0{,}68 - 0{,}08\sin(2{,}01\overline{\tau} - \Delta\varphi), &&\Delta\varphi = 1{,}94 \text{ — для } \omega = 2{,}01;\\
&\overline{x} = 0{,}73 - 0{,}09\sin(1{,}06\overline{\tau} - \Delta\varphi), &&\Delta\varphi = 0{,}89 \text{ — для } \omega = 1{,}06.
\end{aligned}$$

На рис. 4.45, *а* эта усредненная зависимость $\overline{x}(\overline{\tau})$ изображена штриховой линией. Фазовые кривые $\overline{x}(\alpha)$ реализованных колебательных процессов показаны на рис. 4.43, *б*, 4.44, *б*, и 4.45, *б*. Отношение осей эллипсов, а также их наклон определяются сдвигом фаз $\Delta\varphi$ колебаний $\overline{x}$ и α, который, в свою

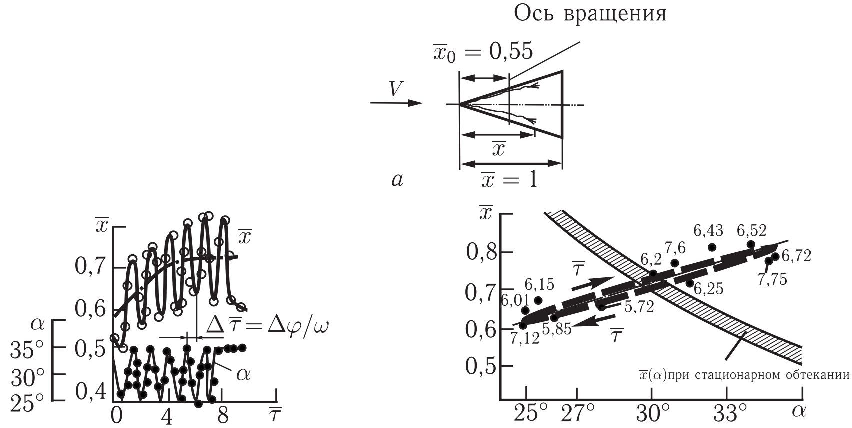


Рис. 4.43. Изменение положения взрыва вихрей при периодическом изменении угла атаки крыла с частотой $\omega = 4{,}57$: *а* — изменение угла атаки по времени и процесс выхода колебаний области взрыва на установившийся режим; *б* — фазовая диаграмма $\overline{x}(\alpha)$ на установившемся режиме колебаний

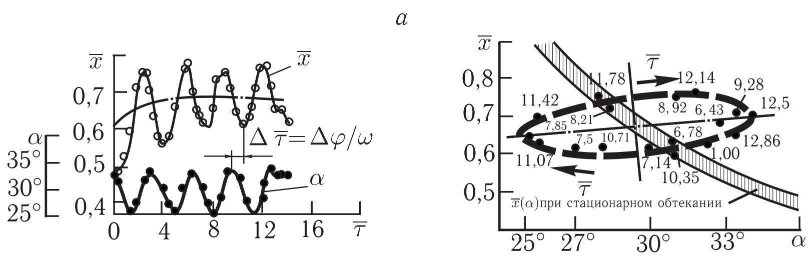


Рис. 4.44. Изменение положения взрыва вихрей при периодическом изменении угла атаки крыла с частотой $\omega = 2{,}01$: *а* — изменение угла атаки по времени и процесс выхода колебаний области взрыва на установившийся режим; *б* — фазовая диаграмма $\overline{x}(\alpha)$ на установившемся режиме колебаний

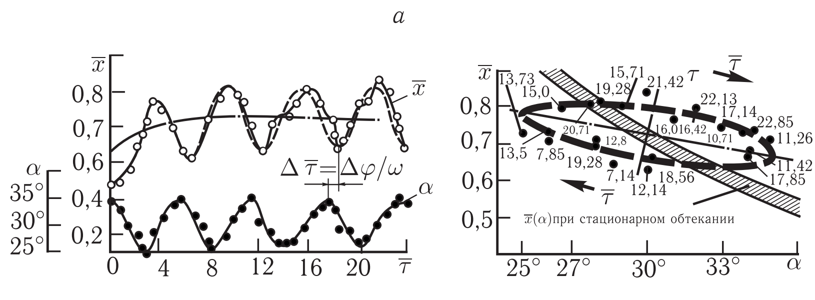


Рис. 4.45. Изменение положения взрыва вихрей при периодическом изменении угла атаки крыла с частотой $\omega = 1{,}06$: *а* — изменение угла атаки по времени и процесс выхода колебаний области взрыва на установившийся режим; *б* — фазовая диаграмма $\overline{x}(\alpha)$ на установившемся режиме колебаний

очередь, зависит от частоты ω (рис. 4.43, *а*, 4.44, *а*, и 4.45, *а*). Причем, с уменьшением частоты колебаний большая ось эллипса приближается к стационарной зависимости $\overline{x}(\alpha)$.

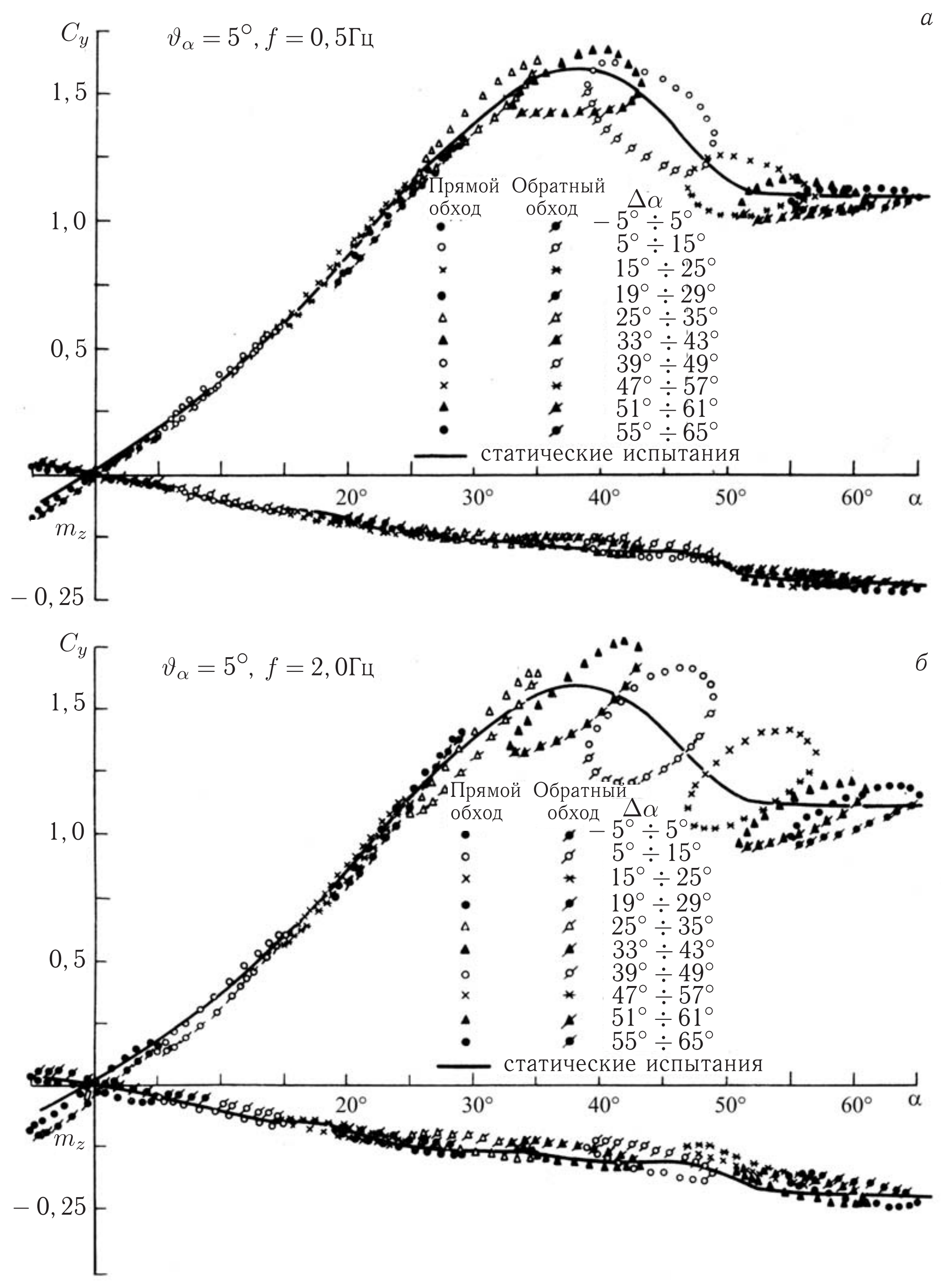


Рис. 4.46. Результаты весовых измерений на треугольном крыле, полученные в испытаниях методом вынужденных колебаний с амплитудой $\vartheta_\alpha = 5^\circ$: *а* — при частоте $f = 0{,}5$ Гц; *б* — при частоте $f = 2{,}0$ Гц

На рис. 4.46 представлены коэффициенты нормальной силы $C_y(\alpha)$ и продольного момента $m_z(\alpha)$ треугольного крыла, построенные по результатам весовых измерений в аэродинамической трубе в испытаниях методом вынужденных колебаний. Образование эллиптических петель в зависимости $C_y(\alpha)$ на больших углах атаки объясняется и хорошо коррелирует с рассмотренным выше перемещением области взрыва.

4.3.4. Влияние изменения скорости потока. Гидродинамическая труба, в которой производились исследования, позволяла путем открытия или дросселирования заслонки быстро изменять скорость внешнего потока, что невозможно в обычных аэродинамических трубах. В экспериментах по визуализации было выявлено воздействие изменения скорости набегающего потока по времени на положение области взрыва вихрей. Было обнаружено, что при увеличении безразмерной скорости набегающего потока от $\overline{V} = V/V_0 = 1{,}0$, где $V_0 = 7{,}5\,\text{см/с}$, до ее конечного значения $\overline{V} = 2{,}19$ за время $\overline{\tau} = 5,3$ ($\dot{V} = d\overline{V}/d\overline{\tau} = 0{,}22$) по закону, близкому к линейному (рис. 4.47, *а*), область взрыва вихрей несколько изменяет свое положение в моменты времени, близкие к начальным, а затем быстро приближается к ее стационарному положению при $\dot{V} = 0$. При уменьшении же скорости (рис. 4.47, *б*) вследствие создания благоприятного градиента давления вдоль ядер вихревых жгутов область взрыва удаляется за крыло, а затем после прекращения изменения скорости весьма медленно возвращается в исходное положение. Это запаздывание может составлять примерно 100–120 единиц безразмерного времени $\overline{\tau}$. Очевидно, такие большие запаздывания можно ожидать и в переходных процессах изменения аэродинамических сил и моментов.

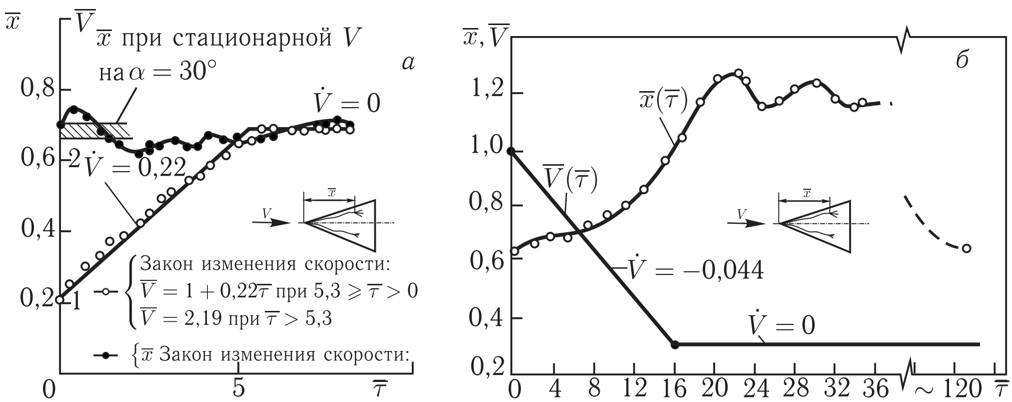


Рис. 4.47. Изменение положения по времени области взрыва вихрей на треугольном крыле, установленном под углом $\alpha = 30°$: *а* — при возрастании; *б* — при уменьшении скорости потока

4.3.5. Влияние одновременного изменения угла атаки и скорости набегающего потока. Летательный аппарат при увеличении угла атаки обычно тормозится, а при разгоне он должен уменьшить свой угол атаки. Для выявления действия одновременного изменения двух параметров – угла атаки и скорости набегающего потока – на положение областей взрыва вихрей в экспериментах были реализованы следующие режимы обтекания. При

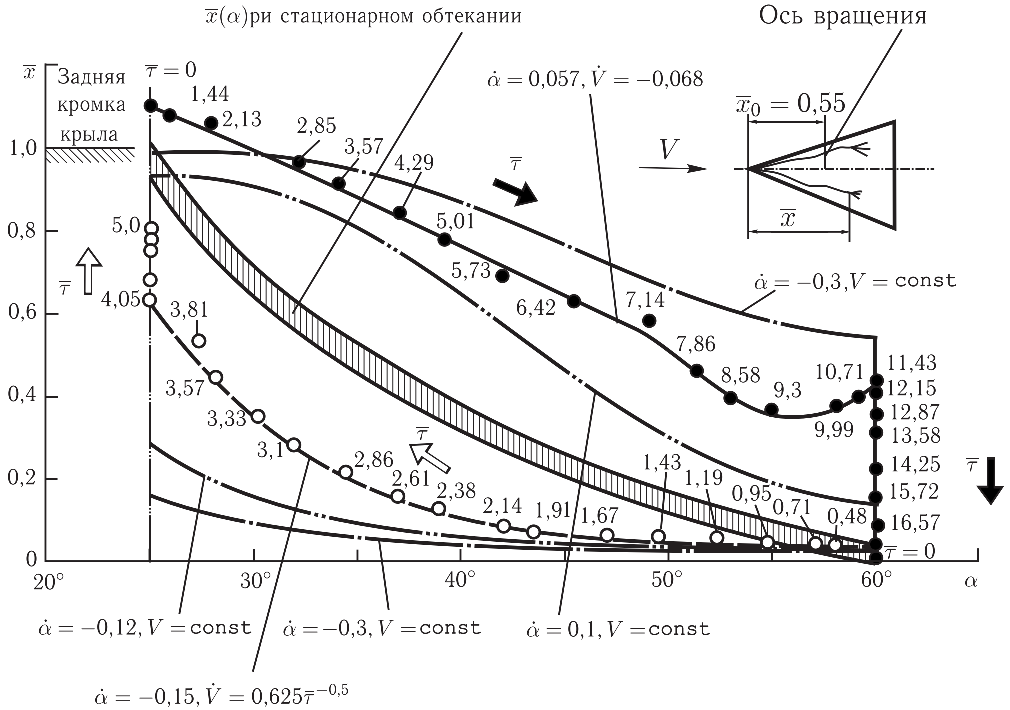


Рис. 4.48. Изменение положения области взрыва вихрей при одновременном изменении угла атаки и скорости набегающего потока

увеличении угла атаки α от 25° до 60° безразмерная скорость изменялась по линейному закону от $\overline{V} = V/V_0 = 1{,}0$ до $0{,}32$:

$$\overline{V} = 1 - 0{,}068\overline{\tau},$$

за безразмерное время $\overline{\tau} = V_0 t/b \approx 10$, что соответствовало $\dot V = d\overline{V}/d\overline{\tau}$, при этом $\dot\alpha = d\alpha/d\overline{\tau} = 0{,}057$, где V_0 — характерная скорость, за которую здесь принимается начальная величина скорости, в данном случае равная 15 см/с. При уменьшении угла атаки по линейному закону от $\alpha = 60^\circ$ до 25° с безразмерная скорость изменялась от $\overline{V} = 1{,}0$ до $\overline{V} = 3{,}5$ по закону

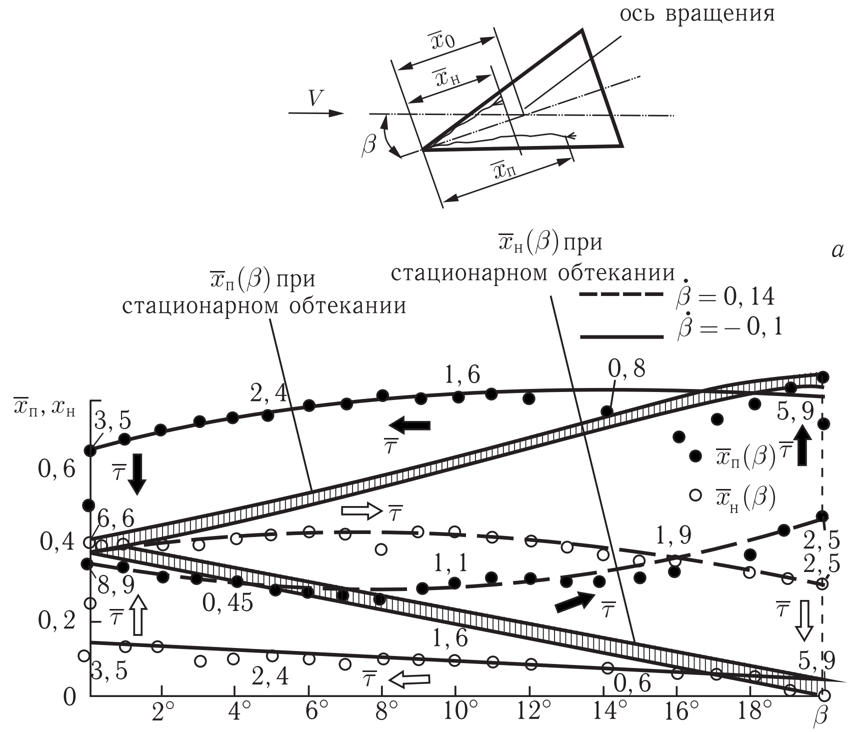
$$\overline{V} = 1 + 1{,}25\overline{\tau}^{0{,}5},$$

за безразмерное время $\overline{\tau} = 4{,}05$, здесь $V_0 = 5$ см/с. Можно отметить (рис. 4.48), что на режиме увеличения угла атаки с торможением в диапазоне углов атаки $\alpha = 55^\circ \div 60^\circ$ производные $\partial\overline{x}/\partial\overline{\tau}$ и $\partial\overline{x}/\partial\alpha$ меняют свои знаки на обратный, и с ростом α область взрыва вихрей смещается вниз по крылу. Аналогичный характер изменения положения областей взрыва реализуется и для случая изменения по линейному закону угла атаки с 10° до 40° с одновременным торможением потока [52]. Это может привести к изменению продольного момента, а также к увеличению времени, необходимого для восстановления стационарного течения после остановки крыла по отношению к соответствующему режиму обтекания при постоянной скорости набегающего потока $\overline{V}_0$ и при той же размерной скорости изменения угла атаки по времени. Это обстоятельство является весьма важным, особенно для высокоманевренных летательных аппаратов. Отмеченные особенности поведения областей взрыва вихрей, обусловленные изменениями скорости потока, в некоторой степени могут быть объяснены с квазистационарных позиций, если в каждый момент времени для вычисления производной

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{d\overline{\tau}} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{b}{V_0}$$

брать за V_0 скорость в данный момент времени и учесть рассмотренное в п. 4.3.4 (см. рис. 4.47) влияние уменьшения скорости набегающего потока на положение области взрыва при фиксированных значениях угла атаки.

4.3.6. Влияние нестационарного изменения угла скольжения. Рассмотрим теперь режимы обтекания крыла при $\alpha = 40^\circ$ и изменении угла скольжения β по времени по линейным законам от $\beta = 0$ до $\beta = 20^\circ$ и обратно с различными значениями производной $\dot{\beta} = d\beta/d\overline{\tau}$, где β берется в радианах (рис. 4.49, *а*,*б*). Обратимся сначала к рис. 4.49, *а*, где угловые скорости $\dot{\beta}$ больше. На режиме увеличения угла скольжения ($\dot{\beta} = 0{,}14$) точка начала области взрыва наветренного вихря с начальной координатой $\overline{x}_{\text{н}} \approx 0{,}4$ перемещается сначала вниз по потоку, достигает максимального расстояния до вершины крыла при $\beta \approx 7^\circ$ и после этого движется вверх по потоку, в безразмерный момент времени $\overline{\tau} = 2{,}5$ при $\beta = 20^\circ$ достигает знечения $\overline{x}_{\text{н}} \approx 0{,}3$, а затем при $\overline{\tau} = 5{,}9$ практически достигает вершины крыла. Область взрыва подветренного вихря, с той же координатой начала $\overline{x}_{\text{п}} \approx 0{,}4$, наоборот, приближается к вершине и, пройдя минимум расстояния до нее при $\beta \approx 7^\circ$, движется вниз по потоку, достигая с некоторым запаздынием в момент $\overline{\tau} = 5{,}9$ положения $\overline{x}_{\text{п}} \approx 0{,}8$, соответствующего стационарному обтеканию при $\alpha = 40^\circ$ и $\beta = 20^\circ$. Отмеченное обратное по сравнению со стационарным обтеканием продвижение областей взрыва вихрей обусловлено, видимо, следующим. В момент начала увеличения угла β на крыле появляются дополнительные скорости, вызванные его вращением. В результате действительный местный угол скольжения в области, прилегающей к вершине крыла, является отрицательным, в то время как угол скольжения β крыла (без учета вращения) положителен. В соответствии с этим в начальный момент область взрыва подветренного вихря движется к вершине крыла, а область взрыва наветренного вихря — к задней кромке, то есть, в направлении, противоположном направлению изменения координат $\overline{x}_{\text{н}}$ и $\overline{x}_{\text{п}}$ областей взрыва вихрей при $\dot{\beta} = 0$. При дальнейшем увеличении β действительный местный угол скольжения становится положительным, оставаясь при этом меньшим, чем угол скольжения крыла β без учета вращения. Области взрыва подветренного и наветренного вихрей при этом также изменяют направление своего движения и с некоторым отставанием (относительно их положений при стационарных значениях β) движутся к задней кромке и к вершине крыла соответственно. При сравнении режимов обтекания с разными скоростями видно, что это обратное продвижение областей взрыва вихрей с уменьшением $|\dot{\beta}|$ происходит при меньших знечениях β (сравнить рис. 4.49, *а* и *б*).



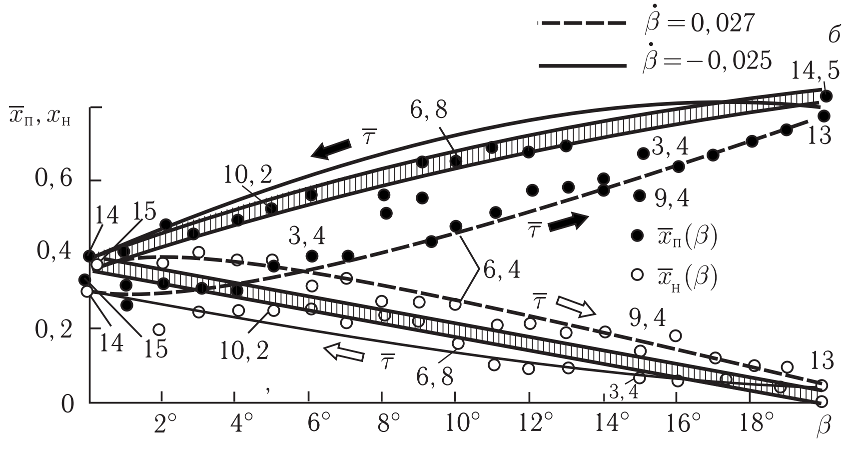


Рис. 4.49. Влияние нестационарности изменения угла скольжения β от 0 до 20° и наоборот при $\alpha = 40°$ на положение областей взрыва наветренного $\overline{x}_н$ и подветренного $\overline{x}_п$ вихревых жгутов для различных значений безразмерной угловой скорости $\dot{\beta}$: *а* — при $\dot{\beta} = 0{,}14$ и $\dot{\beta} = -0{,}1$; *б* — при $\dot{\beta} = 0{,}027$ и $\dot{\beta} = -0{,}025$

При уменьшении угла скольжения от $\beta = 20^\circ$ до 0 время установления области взрыва до стационарного положения после прекращения движения крыла, т. е. запаздывание, для подветренного вихря больше, почти в два раза (см. $\beta = 0$, $\dot{\beta} = -0{,}1$ на рис.4.49, *а*) При малых абсолютных величинах $|\dot{\beta}|$ (рис. 4.49, *б*) отличия от стационарных значений $\overline{x}_{\text{н}}$, $\overline{x}_{\text{п}}$ являются существенно менее значительными, а гистерезисные явления после прекращения движения движения крыла практически отсутствуют.

Полученные результаты могут быть использованы для прогнозирования аэродинамических характеристик треугольных крыльев при нестационарных движениях, а также полезны для анализа весовых испытаний таких крыльев в аэродинамических трубах.

4.3.7. Основные результаты исследований и выводы. Таким образом, на примере обтекания треугольного крыла с углом стреловидности по передней кромке 70° в гидродинамической трубе, с помощью визуализации структуры потока, проведено исследование гистерезисов в положении области взрыва вихревых жгутов, образующихся вблизи передних кромок такого крыла. Изучение проведено для широкого спектра нестационарных режимов изменения угла атаки, скольжения и скорости набегающего потока. Проведены также исследования на стационарных режимах обтекания, которые выявили немонотонный характер зависимости положения области взрыва подветренного вихревого жгута от угла скольжения.

Показано, что на режимах апериодического увеличения угла атаки с обследованными значениями $\dot{\alpha}$ наблюдаются сильные запаздывания в движении области взрыва вверх по крылу по отношению к положению, которое она занимала бы на соответствующих стационарных режимах обтекания, что может сопровождаться, особенно в первые моменты движения, нарастанием дополнительной компоненты момента пикирования. Это отличие тем больше, чем больше скорость изменения угла атаки крыла по безразмерному времени. При этом время, необходимое на восстановление стационарного течения после остановки вращения крыла, может для больших $\dot{\alpha}$ заметно превышать время, которое пошло на изменение угла атаки крыла.

На режимах перехода крыла с большого положительного угла атаки на малый выявлены следующие особенности обтекания. Когда область взрыва находится еще не в самой вершине крыла, в первые моменты движения в сторону уменьшения угла атаки обнаружено продвижение области взрыва вверх по крылу вместо естественного с точки зрения стационарной аэродинамики движения вниз по крылу. Это может приводить к нарастанию в первые моменты движения крыла дополнительного момента на кабрирование. При очень больших скоростях $\dot{\alpha}$ указанное продвижение области взрыва носит скачкообразный характер. Если уменьшение угла атаки начинается с очень большого угла ($\alpha = 60^\circ$), когда на стационарном режиме область взрыва находится в самой вершине, то взрыв практически не смещается из нее вплоть до углов атаки $\alpha \approx 30^\circ$ (заметим, что на стационарном режиме при $\alpha = 30^\circ$ область взрыва находится на расстоянии $\overline{x} = 0{,}65$ от вершины крыла), даже для сравнительно не очень высоких по абсолютной величине значений производной $\dot{\alpha}$. Время, требующееся на восстановление стационарного режима обтекания после остановки крыла, на таких режимах очень велико. Так, для случая перевода крыла с $\alpha = 60^\circ$ на $\alpha = 25^\circ$ с безразмерной скоростью $\dot{\alpha} = -0{,}12$, это время восстановления примерно в 2 раза превышает время, затрачиваемое на перевод крыла, а при $\dot{\alpha} = -0{,}3$ — в 5 раз.

При колебаниях крыла по углу атаки по законам, близким к гармоническим, с амплитудой 5° относительно среднего положения $\alpha = 30^\circ$ с различными частотами, область взрыва вихрей также совершает по времени перемещения, близкие к гармоническим с некоторым сдвигом фаз. При этом показано, что изменение аэродинамических нагрузок на таком крыле, полученных при испытаниях методом вынужденных колебаний, объясняются и хорошо коррелируют с перемещением области взрыва.

В случае движения крыла по углу скольжения при постоянных значениях углов атаки показано, что на всех исследованных режимах изменения β наблюдаются значительные запаздывания в перемещении по оси x областей взрыва вихрей по отношению к положениям, которые они занимают на соответствующих стационарных режимах обтекания. При увеличении угла скольжения от нуля до 20° при $\alpha = 40^\circ$ обнаружено значительное смещение областей взрыва вихрей по оси x в направлении, обратном изменению их положения при увеличении угла β стационарным образом.

Увеличение скорости набегающего потока по времени при фиксированных значениях угла атаки слабо влияет на перемещение области взрыва вихрей. Уменьшение же скорости может приводить к сильному смещению области взрыва вниз по потоку и к весьма значительному запаздыванию установления ее стационарного положения после прекращения изменения скорости по времени.

При одновременном увеличении угла атаки с постоянной скоростью и уменьшении скорости набегающего потока по линейному закону обнаружено, что разница в положении области взрыва при таком нестационарном обтекании и на стационарном режиме, при определенных условиях по мере роста угла атаки, может начать возрастать. Это может привести к нарастанию дополнительного момента пикирования, а также к увеличению времени, необходимого для восстановления стационарного течения после остановки крыла, по сравнению с таким же временем в режиме обтекания с постоянной скоростью набегающего потока.

Последние выводы о сильной зависимости положения области взрыва, а следовательно и аэродинамических характеристик, от изменения скорости по времени и особенно при одновременном изменении скорости и угла атаки являются принципиально важными. Поскольку обычные аэродинамические трубы не имеют возможности быстрого изменения по времени скорости потока, то это обстоятельство ставит задачу создания соответствующих установок (например, аэродинамической трубы с переменной скоростью потока) или исследования таких режимов с помощью моделей летательных аппаратов на движущихся тележках, например, в гидродинамическом канале.

§ 4.4. Отрывное обтекание прямого крыла при стационарных и квазистационарных внешних условиях

4.4.1. Методы проведения исследований и обработки результатов. Экспериментальное оборудование. Исследования проводились в аэродинамической трубе со степенью турбулентности не более 0,5% при скорости потока $V = 30$ м/с на крыльях прямоугольной формы в плане, с удлинением $\lambda = 5$, имеющих хорду $b = 0{,}3$ м и специализированные профили, основные характеристики которых приведены в таблице:

Крыло с профилем	$\overline{c}$, %	$\overline{x}_c$, %	$\overline{f}$, %	$\overline{x}_f$, %	$\overline{r}$, %
1	20	35	2,4	53	6
2	12	18	3,3	35	1,25

Здесь $\overline{c}$ и $\overline{f}$ максимальные относительная толщина и вогнутость, а $\overline{x}_c$ и $\overline{x}_f$ — соответственно их положения на хорде, $\overline{r}$ — относительный радиус носка. Указанные величины отсчитываются в процентах хорды. Крылья имели полированную поверхность. В дальнейшем иллюстрированный материал приводится, в основном, для крыла с профилем *1*. Для крыла с профилем *2* были получены аналогичные результаты. Испытания проводились при отсутствии скольжения в диапазоне углов атаки $\alpha = 0 \div 30^\circ$ как при увеличении угла атаки от $\alpha_{\min} = 0$ до 30° («прямой ход»), так и при уменьшении α от $\alpha_{\max}$ до $\alpha_{\min}$ («обратный ход»). Исследования велись при фиксированных значениях угла атаки и при его непрерывном квазистационарном изменении по времени, т. е. при весьма малых значениях безразмерной скорости изменения угла атаки $\dot{\alpha} = d\alpha/d\overline{\tau} = 0{,}00017$, где $\overline{\tau} = Vt/b$ — безразмерное время, t — время в секундах, α — угол атаки в радианах.

Измерения средних по времени величин аэродинамических сил и моментов, действующих на крыло, проводились с помощью шестикомпонентных тензометрических весов и информационно-измерительной системы на основе специализированного компьютера. При этом, за период, соответствующий безразмерному времени $\Delta\tau = 800$, осуществлялось 1000 измерений сил и моментов, и их средние значения вычислялись как средние арифметические результатов всех измерений на этом интервале времени. Нестационарные компоненты сил и моментов как при фиксированных значениях α, так и при квазистационарном его изменении записывались с помощью осциллографа. В процессе расшифровки осциллограмм отфильтровывались высокочастотные периодические составляющие, обусловленные собственными колебаниями экспериментальной установки. Поскольку амплитуда инерционных нагрузок, обусловленных собственными колебаниями, достаточно велика, то полученные результаты не могут с достаточной степенью надежности быть использованы для точного определения величины аэродинамических сил и моментов. Однако, они наглядно показывают нестационарный, в значительной мере случайный характер изменения аэродинамических нагрузок. В связи с этим для получения количественных результатов испытаний на таких режимах необходимо использовать методы статистической обработки, в частности, спектрального анализа. Целью же данной работы было исследование качественной стороны поведения аэродинамических нагрузок при больших закритических углах атаки.

Визуализация средней по времени структуры течения осуществлялась с помощью метода масляных капель или пленки, поскольку нанесение последней на поверхность крыла менее трудоемко. Для исследования нестационарных процессов перестройки течения на крыльях они обклеивались шелковинками, и на этих режимах проводилась киносъемка с частотой 64 кадра в секунду. Следует отметить, что при наличии шелковинок пограничный слой, видимо, полностью турбулентный, за исключением области, примыкающей к самому носку профиля крыла.

Проводились также исследования при наличии специальных турбулизаторов на крыльях. Турбулизатор представлял собой тонкую нить диаметром 0,15 мм, приклеенную на носок крыла вдоль всего размаха.

Здесь используются стандартные обозначения для коэффициентов сил и моментов.

4.4.2. Средняя по времени структура течения вблизи поверхности крыла. Визуализация структуры течения на поверхности крыла при умеренных углах атаки выявила существование нескольких характерных зон по хорде крыла (рис. 4.50). Их наличие может трактоваться следующим образом. Вблизи передней критической точки, где поверхностное трение f весьма велико, масляная пленка или капли практически полностью сдвигаются (зона *1*). Ниже по потоку напряжение трения уменьшается (зона *2*), и полного сдвига пленки не происходит. После перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный (положение области перехода хорошо согласуется с результатами [49]) напряжение трения резко возрастает, и в зоне *3*, соответствующей области перехода и начальному участку области турбулентного пограничного слоя, масляная пленка также полностью сдвигается. После того, как касательные напряжения станут опять меньше некоторой определенной величины f^*, полного «сдува» пленки не происходит (зона *4*), и в этой зоне отчетливо прослеживаются предельные линии тока. В области диффузорного отрыва (зона *5*) напряжение трения резко уменьшается, а сдвига пленки или капель практически не происходит. С ростом угла атаки эта область увеличивается, причем в центральных сечениях крыла линия отрыва располагается ближе к носку, чем в концевых, что обусловлено индукцией концевых вихрей крыла.

Следует отметить, что на достаточно больших углах атаки в окрестности носка крыла, видимо, может возникать ламинарный отрыв типа «пузыря», о чем свидетельствует появление линий обратных или продольных — вдоль передней кромки токов, которые фиксировались с помощью масляных капель и показаны на рис. 4.51 цифрой *1*.

Описанная выше структура течения, показанная на рис 4.50, существует до некоторого критического угла атаки $\alpha_{\text{кр}} \approx 20^\circ$, после достижения которого наступают резкая перестройка течения и соответственно резкое уменьшение подъемной силы.

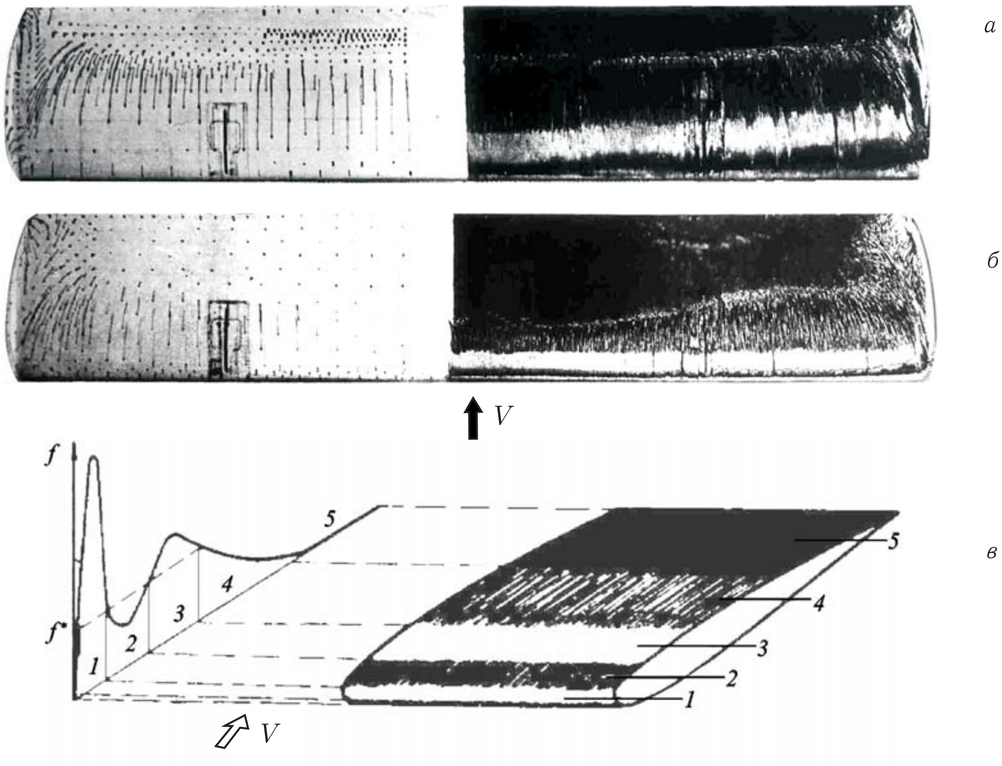


Рис. 4.50. К трактовке результатов визуализации обтекания крыла методами масляных капель и пленки: a — $\alpha = 10^\circ$ (слева нанесены капли, справа — пленка), $б$ — $\alpha = 15^\circ$ (слева нанесены капли, справа — пленка), $в$ — изменение силы поверхностного трения f по хорде крыла и ее связь с визуализацией течения

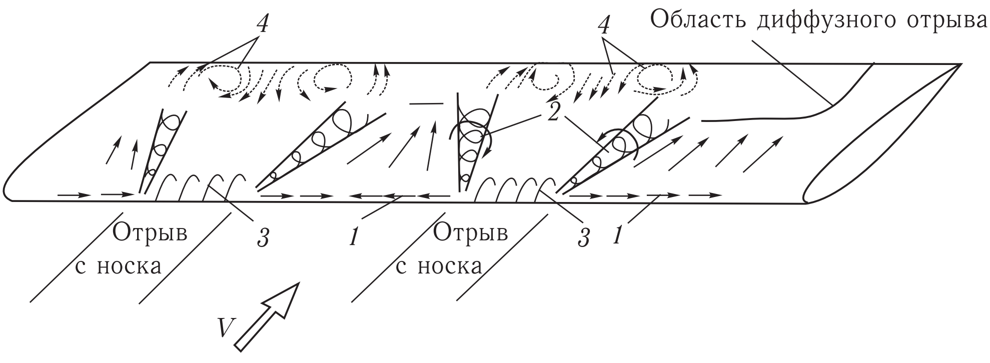


Рис. 4.51. Схема течения обтекания крыла на отрывных режимах

В диапазоне $20^\circ \leqslant \alpha \leqslant 23^\circ$ наблюдаются существенные пространственность и неустойчивость течения, которые проявляются следующим образом (рис. 4.52, $а$ — $в$). При выходе на фиксированный угол атаки α, лежащий в указанном диапазоне, при прямом ходе происходит резкая, практически

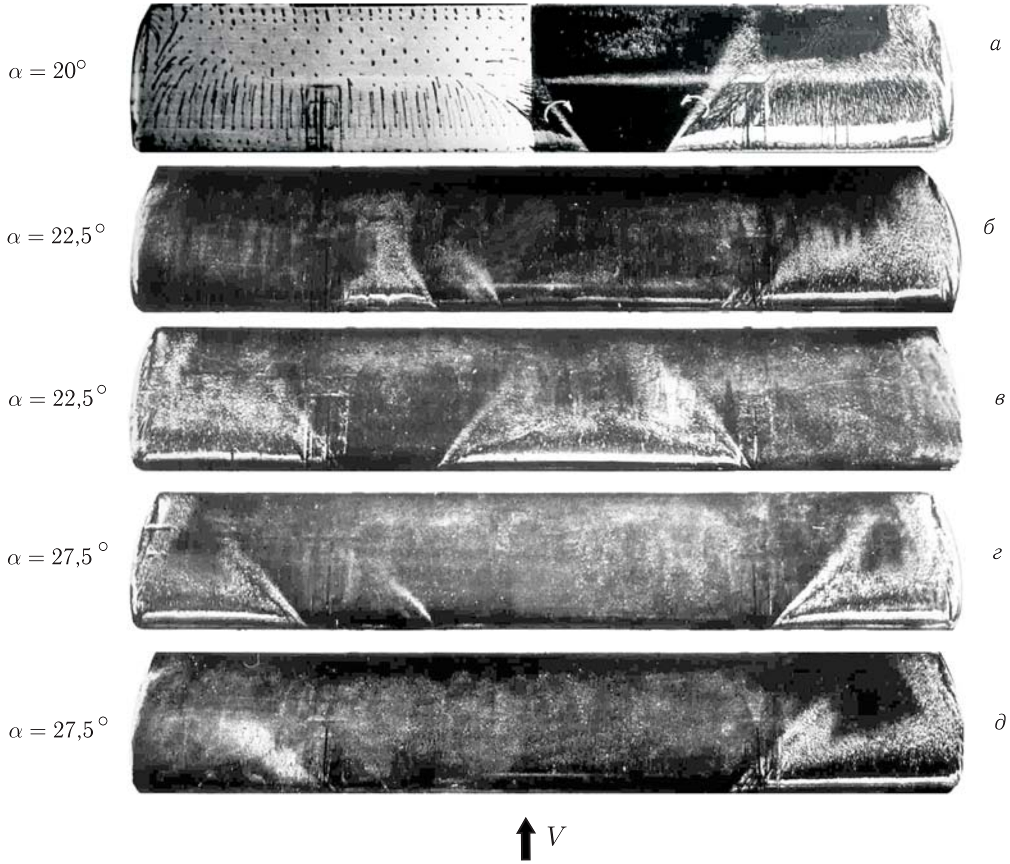


Рис. 4.52. Результаты визуализации обтекания крыла на отрывных режимах методом масляных капель и масляной пленки при различных углах атаки: *а* — появление отрыва с носка крыла, $\alpha = 20^\circ$; *б,в* — при угле атаки $\alpha = 22{,}5^\circ$ имеет место различный, практически антисимметричный, характер обтекания крыла; *г,д* — различный характер структуры течения при угле атаки $\alpha = 27{,}5^\circ$

мгновенная перестройка течения. На части крыла в одном или нескольких местах по размаху происходит отрыв с носка профиля, и эти одна или несколько отрывных зон соединяются с указанной выше областью диффузорного отрыва. Эти зоны имеют форму треугольника, когда отрыв происходит лишь в одной точке носка крыла, или трапеций, соответственно вершина или меньшее основание которых лежат в носке крыла, а основание или большее основание опираются на область диффузорного отрыва. Иногда наблюдались режимы течения, когда эти зоны частично «перекрываются», «накладываются» друг на друга, образуя между собой область безотрывного обтекания.

По боковым сторонам таких треугольников или трапеций образуется течение типа вихревых жгутов *2*, направление вращения жгутов определялось по направлению предельных линий тока на поверхности крыльев и с помощью аэродинамического щупа и показано на рис. 4.51 и рис. 4.52, *а* при $\alpha = 20^\circ$. Эти вихри, очевидно, являются продолжением поперечных вихреобразований *3*, развивающихся в результате отрыва с носка профиля. Структура течения на этих режимах схематически показана на рис. 4.51.

Треугольная (трапециевидная) форма отрывной зоны обусловлена взаимодействием указанных выше вихревых жгутов с поверхностью крыла. Механизм этого взаимодействия может быть объяснен следующим образом. Как известно, влияние поверхности можно заменить влиянием отраженных вихрей, расположенных симметрично относительно этой поверхности. Взаимная индукция действительного и отраженного вихрей приводит к возникновению скорости вдоль размаха крыла и соответственно к расширению зоны отрыва по потоку. При увеличении времени нахождения крыла в потоке на таких режимах обтекания внутри зоны отрыва проявлялись предельные линии тока *4*, демонстрирующие характерную спиралевидную структуру течения с образованием точек типа фокуса, полученную в [77] (рис. 4.51). Следует особо подчеркнуть, что на этом режиме при выходе на один и тот же угол атаки при прямом ходе изменения α обычно не удавалось получить идентичных картин обтекания: количество, размеры и расположение зон отрыва изменяются случайным образом (рис. 4.52, *б, в*, $\alpha = 22{,}5^\circ$).

При достижении $\alpha \gtrsim 25^\circ$ область отрыва с носка крыльев расширяется, занимая бо́льшую часть размаха крыла, причем это расширение также происходит не всегда симметрично относительно плоскости симметрии крыла (рис. 4.52, *г, д*, $\alpha = 27{,}5^\circ$). На указанных рисунках видно, что в первом случае зоны отрыва с носка расположены симметрично, а во втором — правая (на рисунке) часть приконцевых сечений крыла обтекается без отрыва с носка, а левая часть крыла полностью охвачена отрывом с носка профиля.

При обратном ходе по углу атаки происходит перестройка течения в порядке, обратном прямому ходу, однако восстановление безотрывного обтекания носка крыла наблюдается при значительно меньших углах атаки ($\alpha_\text{в} \approx 14^\circ$ для крыла $\overline{c} = 20\%$ и $\alpha_\text{в} \approx 15^\circ$ для крыла $\overline{c} = 12\%$), чем соответствующие появлению отрыва с носка при прямом ходе. Эти гистерезисные явления, как будет показано ниже, сопровождаются гистерезисом не только в изменении коэффициентов подъемной силы и продольного момента, но и в коэффициентах момента крена и рыскания.

Интересно отметить также следующий практически важный результат: при увеличении скорости потока от нуля до заданного значения при фиксированном угле атаки $\alpha_\text{в} < \alpha < \alpha_\text{кр}$ реализуются режимы отрывного обтекания носка крыльев, а не безотрывный режим, что, видимо, обусловлено более ранним появлением отрыва при малых скоростях потока во время набора скорости в аэродинамической трубе, т. е. при низких числах Рейнольдса. Это необходимо учитывать в методике постановки и проведения экспериментальных исследований.

При установке турбулизатора структура течения заметно (хотя и не полностью) симметризуется, причем, по крайней мере, до $\alpha \approx 27^\circ$ отрыв с носка не наблюдается, а зона диффузорного отрыва достаточно близко придвигается к носку крыла. При большем значении угла атаки ($\alpha \geqslant 27{,}5^\circ$) даже при наличии турбулизатора на значительной части размаха крыла, за исключением его приконцевых сечений, происходит отрыв потока с носка крыла.

4.4.3. Визуализация нестационарного течения в окрестности крыла. Рассмотрим сначала режим квазистационарного изменения угла атаки с очень малой угловой скоростью $\dot\alpha = 0{,}00017$. Спектры обтекания крыла, полученные при непрерывной киносъемке в процессе изменения угла атаки крыла при прямом ходе по α, представлены на рис. 4.53. Видно, что при $\alpha = 15{,}4^\circ$ ре-

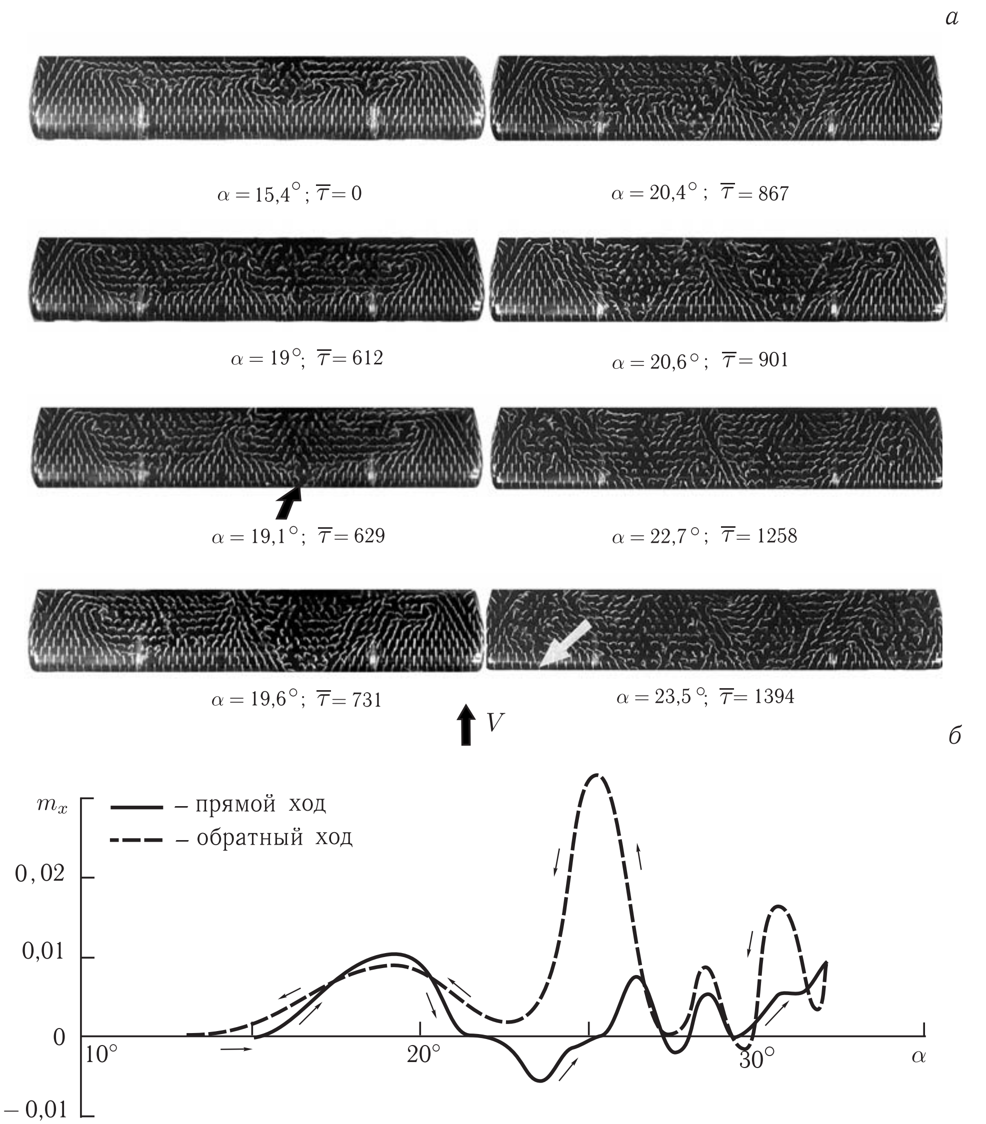


Рис. 4.53. Визуализация обтекания крыла методом шелковинок при квазистационарном изменении угла атаки (*а*) и изменение коэффициента момента крена крыла в зависимости от угла атаки (*б*)

ализуется режим течения с диффузорным отрывом в примыкающей к задней кромке области. Эта отрывная область имеет сложную структуру, в которой можно выделить три зоны, где наблюдается нерегулярное течение. С ростом угла атаки эти зоны увеличиваются, приближаются к носку крыла, причем между ними реализуется безотрывное обтекание. Начиная с $\alpha = 18{,}2^\circ$, правая и центральная зоны отрыва объединяются в одну, и реализуется течение, аналогичное «грибообразным» зонам, описанным в работе [29].

Интересно отметить, что при очень малом изменении угла атаки с $\alpha = 19^\circ$ до $19{,}1^\circ$ появляется отрыв с носка крыла в очень узкой зоне по размаху (указано стрелкой). При дальнейшем, очень малом увеличении угла атаки ($\alpha = 19{,}15^\circ$, здесь не показано) этот отрыв с носка крыла исчезает и появляется опять лишь при $\alpha = 19{,}6^\circ$. Причем эта отрывная зона имеет форму трапеции и существенно более протяженная по размаху крыла, чем имевшая место отрывная зона при $\alpha = 19{,}1^\circ$. Эта зона появляется практически мгновенно, так что киносъемка со скоростью 64 кадра/с не позволила проследить «динамику» возникновения этой зоны. На спектрах для углов атаки, лежащих в диапазоне $\alpha \approx 19^\circ \div 20^\circ$, видно, что эта зона отрыва с носка крыла и зона диффузорного отрыва в левой части крыла могут смещаться в ту или другую сторону вдоль размаха и изменять свой размер. Причем при $\alpha = 20{,}1^\circ$ (здесь не показано) зона диффузорного отрыва в левой части крыла существенно приблизилась к его носку. При дальнейшем увеличении угла атаки на $\alpha = 20{,}4^\circ$ в окрестности центральной части крыла появляется вторая зона отрыва с носка. На спектрах для $\alpha = 20{,}6^\circ \div 22{,}7^\circ$ видно, что эти зоны также могут расширяться и перемещаться вдоль размаха крыла. При $\alpha = 22{,}7^\circ$ область безотрывного обтекания между двумя указанными выше зонами отрыва с носка крыла почти пропадает, а в приконцевых сечениях крыла зарождаются области отрыва, которые при $\alpha = 23{,}5^\circ$ трансформируются в отрывные зоны с носка крыла (см. стрелку на рис. 4.53, a). При дальнейшем увеличении угла атаки также реализуется течение, которое имеет ячеистую структуру, т. е. между зонами отрыва с носка имеются области с присоединенным течением.

При обратном ходе по углу атаки наблюдается перестройка течения, обратная прямому ходу по α. Причем, при наличии шелковинок пограничный слой на крыле, видимо, является повсюду турбулентным, за исключением самого носка крыла, где начинаются шелковинки. В отличие от крыла со специальным турбулизатором здесь заметен гистерезис в обтекании. Так, например, полное присоединение течения в окрестности носка крыла наступает лишь при $\alpha = 16{,}5^\circ$, тогда как при прямом ходе изменения угла атаки отрыв с носка наступает при $\alpha = 19{,}1^\circ$.

При сравнении приводимых спектров, полученных методами шелковинок, масляных капель и масляной пленки, следует иметь в виду, что: во-первых, как уже отмечалось, шелковинки турбулизируют пограничный слой и, следовательно, несколько изменяют картину течения; во-вторых, структуры, полученные методами масляных пленки и капель, являются осреднением истинной картины течения по большому промежутку времени.

Рассмотрим теперь течение в окрестности крыла при фиксированном закритическом значении угла атаки $\alpha > \alpha_{\text{кр}}$. На рис. 4.54, a для примера приведены спектры обтекания крыла при $\alpha = 22^\circ$. Видно, что даже при внешних стационарных условиях обтекания, наблюдается существенная нестационар-

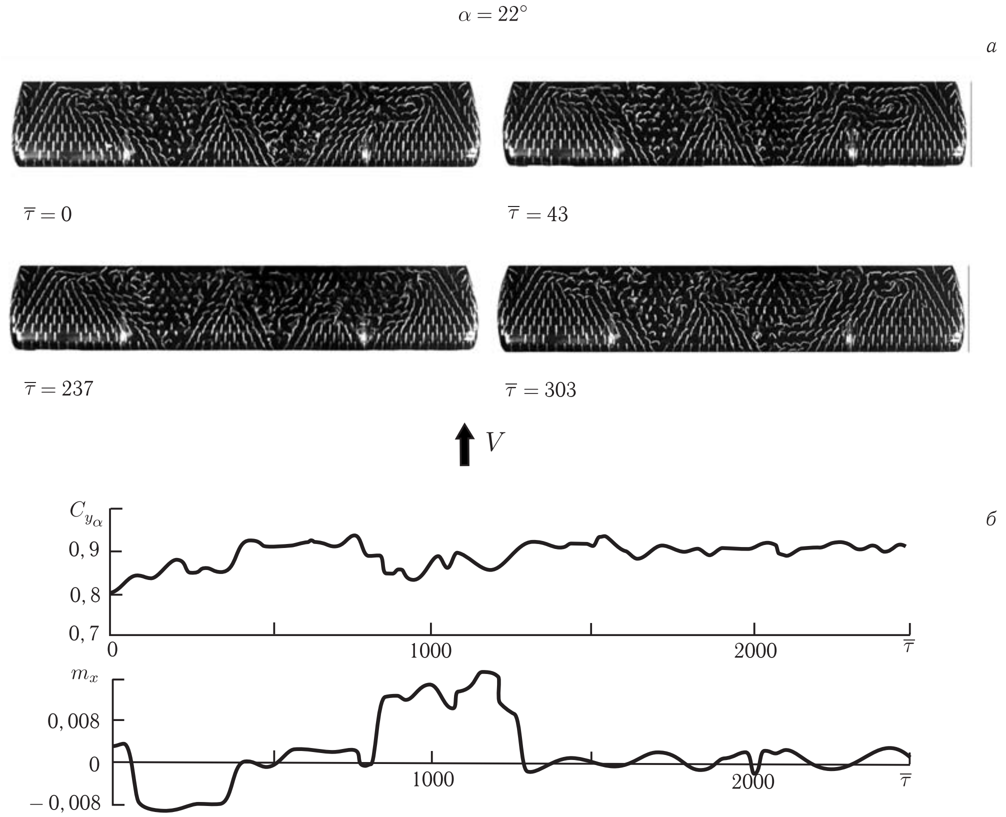


Рис. 4.54. Изменение по времени структуры обтекания (*а*) и аэродинамических коэффициентов (*б*) при фиксированном значении угла атаки

ность, перестройка течения. Так, при $\overline{\tau} = 0$ реализуется течение с двумя отрывными зонами с носка крыла. С течением времени в правой части крыла развивается еще одна область диффузорного отрыва, которая при $\overline{\tau} = 237$ трансформируется в третью отрывную зону с носка крыла. Далее течение в этой области в носке крыла становится присоединенным (см., например, $\overline{\tau} = 303$), и опять реализуется течение с двумя отрывными зонами с носка крыла.

Причем можно видеть, что при $\overline{\tau} = 303$ правая отрывная зона с носка существенно расширяется, а зона диффузорного отрыва в правой части крыла — уменьшается.

4.4.4. Средние по времени компоненты сил и моментов, действующих на крыло. Осредненные по указанной выше методике компоненты сил и моментов для крыла без турбулизаторов представлены на рис 4.55. Для каждого крыла производилось несколько повторных измерений. При этом в области значений углов атаки $\alpha > \alpha_{\text{кр}}$ наблюдается существенное расхождение (разброс) экспериментальных данных, обусловленное нестационарностью и неустойчивостью течения на этих углах атаки. В качестве примера на указанном рисунке представлены результаты двух повторных экспериментов.

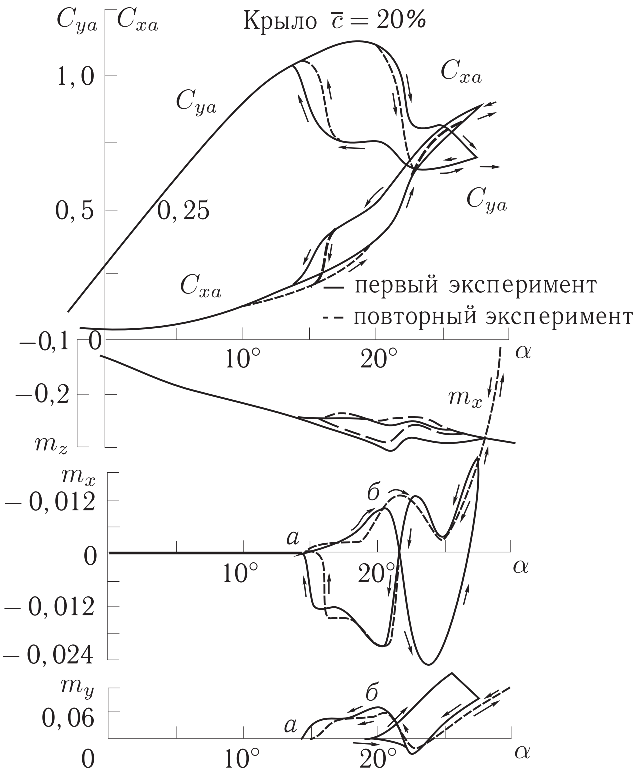


Рис. 4.55. Средние по времени гистерезисы в аэродинамических характеристиках

Из этого рисунка также видно, что эти крылья имеют гистерезисные петли в зависимостях $C_{ya}(\alpha)$, $C_{xa}(\alpha)$, $m_z(\alpha)$, обычно имеющие место для таких «толстых» крыльев при значениях чисел Re, соответствующих условиям данного эксперимента [121].

В то же время в настоящих исследованиях было установлено, что на углах атаки $\alpha \geqslant 14^\circ \div 16^\circ$ появляются существенные значения моментов крена и рысканья (участок *а–б*). Если же угол атаки, при котором осуществляется переход к обратному ходу, не превышает угла $\alpha_{\text{кр}}$, то гистерезисных явлений не наблюдается. И лишь при переходе на углы, большие $\alpha_{\text{кр}}$, при прямом и обратном ходе по α наблюдается еще и гистерезис в зависимостях $m_x(\alpha)$ и $m_y(\alpha)$. Как показали результаты визуализации течения, появление моментов крена и рысканья при прямом ходе по α на участке *а–б* обусловлено несимметрией диффузорного отрыва по размаху крыла. Поскольку на указанных углах атаки пограничный слой весьма неустойчив, то такая несимметрия может быть вызвана рядом причин, например: микронеровностями поверхности крыла, небольшими различиями в погрешностях контуров профилей крыла, возникающими при его изготовлении, некоторой неоднородностью потока трубы и т. п.

Как отмечалось выше, при углах атаки $\alpha > \alpha_{\text{кр}}$ наблюдается появление несимметричного отрыва с носка крыла. Это и вызывает резкое изменение величины моментов крена и рысканья. При этом, на этих углах атаки может наблюдаться весьма большой разброс средних по времени значений моментов крена и рысканья вследствие неоднозначности структуры течения на этих режимах. На еще больших углах атаки величины моментов крена и рысканья могут значительно возрасти (рис 4.55) вследствие того, что на этих режимах может реализовываться течение, при котором на части одной консоли крыла существует полный отрыв с носка, а на другой — присоединенное течение (см. рис. 4.52).

При обратном ходе изменения угла атаки на режиме $\alpha < \alpha_{\text{кр}}$ может наблюдаться весьма сильное отличие в величинах коэффициентов моментов крена и рысканья от прямого хода, причем в окрестности $\alpha_{\text{кр}}$ имеет место резкое изменение величины этих коэффициентов. При дальнейшем уменьшении угла атаки происходит резкое уменьшение моментов крена и рысканья и последующее присоединение течения в носке крыла. Для данных крыльев это происходит в окрестности $\alpha_{\text{в}} \approx 14^\circ \div 15^\circ$. Исследования показали, что турбулизатор полностью убирает гистерезис в зависимости $C_{ya}(\alpha)$ для обоих крыльев. Однако значительные величины боковых моментов, особенно на больших углах атаки, остаются. Это, как показала проведенная визуализация, может быть обусловлено некоторой несимметрией диффузорного отрыва по размаху крыла, а также несимметрией появления отрыва с носка крыла.

Весовые измерения и визуализация показали, что на крыле с наклеенными шелковинками также наблюдаются гистерезисные явления, однако менее ярко выраженные, чем для исходного крыла, что, видимо, связано с турбулизирующим влиянием шелковинок. Так, например, для крыла без шелковинок максимальная разность в C_{ya} при прямом и обратном ходе достигает 0,35, а с шелковинками — около 0,1. Величины моментов крена и рысканья, как и для крыла без шелковинок, могут быть весьма большими.

4.4.5. Нестационарные силы и моменты, действующие на крыло. Измерения мгновенных компонентов сил и моментов, действующих на крылья без турбулизаторов (и без шелковинок) при стационарном внешнем потоке и квазистационарном изменении угла атаки с очень малой угловой скоростью $\dot{\alpha} = 0{,}00017$ показали, что характер гистерезиса в зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки обычно примерно соответствует результатам, полученным при стационарном изменении угла атаки, т. е. при измерении средних величин этих коэффициентов на указанных выше отрезках времени. Однако мгновенные значения величин моментов крена и рыскания могут существенно отличаться от соответствующих стационарных измерений.

Указанные существенные отличия обусловлены нестационарностью и неустойчивостью режимов обтекания крыла на этих углах атаки, которые были продемонстрированы ранее визуализацией течения с помощью шелковинок (см. рис. 4.53, *а*). Одновременно с этой визуализацией проводились измерения нестационарных сил и моментов, действующих на крыло. Результаты измерения величины момента крена в таком эксперименте представлены на рис. 4.53, *б*. Из совместного анализа спектров обтекания и характера изменения момента крена при увеличении угла атаки в диапазоне $\alpha \approx 15^\circ \div 19^\circ$ видно, что рост момента крена на этих углах атаки обусловлен диффузорным отрывом и распределением областей этого отрыва по размаху крыла. При появлении отрыва с носка крыла происходит резкое уменьшение величины момента крена. При достижении угла атаки $\alpha = 21{,}5^\circ$ отрывные зоны с носка достаточно симметричны относительно плоскости симметрии крыла, чему соответствует практически нулевой момент крена (рис. 4.53, *б*).

При обратном ходе изменения угла атаки наблюдается аналогичная связь картины течения с результатами измерений. Присоединение «сорванного» с носка крыла потока происходит при $\alpha = 16{,}5^\circ$, при этом структура диффузорного отрыва остается еще несимметричной, поэтому и при меньших углах атаки сохраняется положительный момент крена.

Обратимся теперь к результатам измерения нестационарных компонентов сил и моментов при фиксированных значениях углах атаки и скорости потока. Характерные зависимости C_{ya} и m_x от безразмерного времени на углах атаки, соответствующих отрыву с носка профиля, приведены на рис. 4.54, *б*. Видно существенное изменение по времени этих величин. Причины этих, фактически случайных, изменений коэффициентов подъемной силы и поперечного момента обусловлены описанной выше «динамикой» поведения отрывных зон на крыльях, нестационарной природой отрывных течений. Из анализа рисунка ясны причины расхождения осредненных на интервале $\Delta\tau = 800$ значений коэффициентов сил и моментов при повторении опытов на таких больших углах атаки. К обработке такого рода экспериментальных данных следует применять вероятностные методы, вычисляя некоторые среднестатистические значения измеряемых величин. Можно также отметить, что перестройка течения и, соответственно, весьма большие изменения аэродинамических коэффициентов могут происходить за очень малые промежутки времени. Так, например, коэффициент m_x за период с $\overline{\tau} = 800$ до $\overline{\tau} = 850$ изменяется с величины 0 до значения 0,012 (см. рис. 4.54, *б*).

Обнаруженные особенности характера обтекания прямоугольных крыльев и изменения компонентов сил и моментов по углу атаки и во времени следует принимать во внимание в аэродинамике летательных аппаратов, а также в методике постановки и проведения экспериментальных исследований.

Список литературы

1. *Алексеенко С.В., Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Введение в теорию концентрированных вихрей. — Новосибирск, Институт теплофизики СО РАН, 2003.
2. *Андронов П.Р., Гувернюк С.В., Дынникова Г.Я.* Вихревые методы расчета нестационарных гидродинамических нагрузок. — М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Институт механики, 2006.
3. *Анимица В.А., Головкин В.А., Головкин М.А., Колков В.Г.* Исследование отрывного обтекания усеченных эллипсоидов вращения с плоской донной поверхностью // Ученые записки ЦАГИ, — М.: 1977. т.VIII, №3.
4. *Анимица В.А., Головкин В.А., Головкин М.А., Колков В.Г.* Исследования отрывного обтекания тел с донным срезом и схематизированной модели фюзеляжа вертолета // Общество «Знание», РСФСР. Материалы семинара «Физические методы исследований прозрачных неоднородностей». — М.: 1978.
5. *Апаринов В.А., Павлов А.А., Столяров Г.И., Храбров А.Н.* Исследование вихревой структуры крыла сложной формы в плане и ее устойчивости при стационарном обтекании // Труды ЦАГИ, 1982. вып. 2174.
6. *Аубакиров Т.О., Белоцерковский С.М., Желанников А.И., Ништ М.И.* Нелинейная теория крыла и ее приложения. — Алматы, Гылым, 1997.
7. *Ацюковский В.А.* Общая эфиродинамика. Моделирование структур вещества и полей на основе представлений о газоподобном эфире. — М.: Энергоатомиздат, 1990.
8. *Белоносов С. М., Черноус К. А.* Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса. — М.: Наука, 1985.
9. *Белоцерковский С.М.* Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. — М.: Наука, 1965.
10. *Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. — М.: Наука, 1971.
11. *Белоцерковский С.М., Ништ М.И.* О двух режимах срывного обтекания пластины // ДАН СССР, 1973. т. 213, №4.
12. *Белоцерковский С.М., Ништ М.И.* Нестационарная нелинейная теория тонкого крыла произвольной формы в плане // Изв. АН СССР, МЖГ, 1974. № 4.
13. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К., Ништ М.И.* Метод дискретных вихрей в задачах аэрогидродинамики и теории многомерных сингулярных уравнений // Труды VI Международной конференции по численным методам в гидродинамике. Тбилиси, 20–25 июня 1978 г. Сб. докл., т. 2, — М.: Ротапринт ИПМат АН СССР, 1978.
14. *Белоцерковский С.М., Ништ М.И.* Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. — М.: Наука, 1978.
15. *Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М.* Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. — М.: Наука, 1988.
16. *Бетяев С.К., Захаров С.Б., Молчанов В.Ф., Судаков Г.Г.* Некоторые задачи теории отрывных течений идеальной жидкости и газа // Труды XI чтений, посвященных разработке научного наследия и развитию идей К.Э. Циолковского. Секция «Авиация и воздухоплавание». — М.: ИИЕТ АН СССР, 1978.

17. *Бетяев С.К.* Эволюция вихревых пелен // В сб.: Динамика сплошной среды со свободными поверхностями. — Чебоксары, 1980.

18. *Биркгоф Г.* Неустойчивость течений Гельмгольца и Тейлора. В сб. Гидродиническая неустойчивость. — М.: Мир, 1964.

19. *Божков В.М., Васильев Л.Е., Жигулев С.В.* Особенности поперечного дозвукового обтекания круглого цилиндра // Изв. АН СССР, МЖГ, 1980. № 2.

20. *Божков В.М.* Визуальное изучение вихреобразования в следе за цилиндром // Тезисы докладов III конференции по прикладной аэродинамике. Киев, 1973.

21. *Божков В.М., Захарченко В.М., Мозольков А.С., Хонькин А.Д.* Метод визуализации дозвуковых течений и его применение к исследованию обтекания профилей // Ученые записки ЦАГИ, 1972. т. III, .№ 5.

22. *Борисов А.В., Мамаев И.С., Соколовский М.А.* Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей. — Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2003.

23. *Борисенко А. И., Тарапов И.К.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. — М.: Высшая школа, 1966.

24. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. — М.–Л.: ОГИЗ, 1948.

25. *Брутян М.А., Голубкин В.Н., Крапивский П. Л.* Об уравнении Бернулли для осесимметричных течений вязкой жидкости // Ученые записки ЦАГИ, 1988. т. XIX. № 2.

26. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973.

27. *Ван–Дайк.* Альбом течений жидкости и газа. — М.: Мир, 1986.

28. *Васильев Л.Л.* Теневые методы. — М.: Наука, 1969.

29. *Винкельман А.Э., Барлоу Дж.* Схема обтекания прямоугольного в плане крыла при срыве // Ракетная техника и космонавтика, 1980. т. XVIII, № 8.

30. *Вильховченко С.Д.* Гидродинамическое воздействие на контур со стороны потока идеальной несжимаемой жидкости с постоянной завихренностью // Изв. АН СССР, МЖГ, 1978. № 1.

31. *Вождаев Е.С., Головкин М.А., Горбань В.П., Ефремов А.А., Симусева Е.В., Столяров Г.И.* Исследования различными методами некоторых особенностей нестационарной и стационарной аэродинамики крыльев на больших углах атаки в гидро- и аэродинамических трубах // IV Всесоюзная школа по методам аэродинамических исследований (тезисы докладов). 22–28 июня, 1986 г., СО АН СССР, ИТПМ, Новосибирск, 1986.

32. *Вождаев Е.С., Васин И.С., Вождаев В.С., Головкин В.А., Головкин М.А., Муравьев Г.Г.* Вихревые системы на режимах штопора и методы улучшения характеристик штопора самолетов // Ученые записки ЦАГИ, 2006. т. XXXVII, № 1–2.

33. *Гайфуллин А.М.* Исследование вихревых структур, образующихся при обтекании тел жидкостью или газом. — М.: Изд. отдел ЦАГИ, 2006.

34. *Глотов Г.Ф., Мороз Э.К.* Продольные вихри в сверхзвуковых течениях с отрывными зонами // Ученые записки ЦАГИ, 1977. т. VIII, № 4.

35. *Гогиш Л.В., Нейланд В.Я., Степанов Г.Ю.* Теория двухмерных отрывных течений. В кн.: Итоги науки и техники. Гидромеханика, т.VIII — М.: ВИНИТИ, 1975.

36. *Гогиш Л.В., Степанов Г.Ю.* Турбулентные отрывные течения. — М.: Наука, 1979.

37. *Головатюк Г.И., Тетерюков Я.И.* Вихревая система модели фюзеляжа на закритических углах атаки // Ученые записки ЦАГИ, 1971. т. II, № 5.

38. *Головкин В.А.* Нелинейная задача о неустановившемся обтекании произвольного профиля со свободно деформирующимся вихревым следом // Ученые записки ЦАГИ, 1972. т. III, №3.

39. *Головкин В.А., Головкин М.А.* Численное решение задачи о нестационарном и отрывном обтекании тел произвольной формы идеальной несжимаемой жидкостью // Труды VI Международной конференции по численным методам в гидродинамике. Тбилиси, 20-25 июня 1978 г. — М.: Ротапринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР, 1978. Сб. докладов, т. II.

40. *Головкин В.А., Гончаров Э.Г., Калявкин В.М., Колков В.Г., Копылов А.П., Красовский Э.И.* Оптическая визуализация плоских нестационарных отрывных течений в гидродинамической трубе // Ученые записки ЦАГИ, 1980. т. XI, №5.

41. *Головкин В.А., Калявкин В.М., Колков В.Г.* Оптическая Визуализация обтекания кругового цилиндра на режимах разгона и торможения потока // Изв. АН СССР, МЖГ, 1981. № 2.

42. *Головкин В.А.* О силах и моменте, действующих на произвольно движущееся тело, обтекаемое с отрывом потока (плоская задача) // Труды ЦАГИ, 1982. вып. 2152.

43. *Головкин В.А., Головкин М.А.* Расчет двумерных отрывных течений методами теории потенциала // Труды ЦАГИ, 1982. вып. 2152.

44. *Головкин В.А., Калявкин В.М.* Исследование обтекания колеблющегося по негармоническому закону аэродинамического профиля методом оптической визуализации // Труды ЦАГИ, 1990. вып. 2463.

45. *Головкин В.А., Калявкин В.М., Масленников А.А.* Исследование методом оптической визуализации начальной стадии развития плоских отрывных течений около различных тел в ускоряющемся потоке // Ученые записки ЦАГИ, 2003. т. XXXIV, № 1–2.

46. *Головкин М. А.* Метод решения задачи об отрывном обтекании идеальной несжимаемой жидкостью произвольно движущегося трехмерного тела // Ученые записки ЦАГИ, 1977. т. VIII, № 2.

47. *Головкин М.А.* Применение метода теории потенциала при численных расчетах отрывных нестационарных трехмерных и осесимметрических течений идеальной несжимаемой жидкости // Труды ЦАГИ, 1982. вып. 2152.

48. *Головкин М.А.* Некоторые свойства интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно плотности потенциала двойного слоя в окрестности особых линий замкнутой поверхности // Труды ЦАГИ, 1982. вып. 2152.

49. *Головкин М.А., Горбань В.П., Дорохов В.Б., Лутовинов. В.М., Пономарева В.С., Поскачей А.А., Сухарев В.И., Троицкий В.В., Шестаев С.М.* Исследование перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный с помощью тепловизионной системы // Ученые записки ЦАГИ, 1983. т. XIV, №2.

50. *Головкин М.А.* Метод расчета обтекания тел произвольным (вихревым нестационарным) потоком идеальной несжимаемой жидкости // Ученые записки ЦАГИ, т. XVII, №6, 1986.

51. *Головкин М.А., Горбань В.П., Ефремов А.А., Симусева Е.В.* Нестационарные явления в положении областей «взрывов» вихрей, образующихся в окрестности передних кромок треугольного крыла // Ученые записки ЦАГИ, 1986. т. XVII, №5.

52. *Головкин М.А., Горбань В.П., Ефремов А.А., Симусева Е.В.* Гистерезисные явления в положении областей «взрыва» вихрей при нестационарных движениях треугольного крыла // Труды ЦАГИ, 1986. вып. 2319.

53. *Головкин М.А., Горбань В.П., Симусева Е.В., Стратонович А.Н.* Обтекание прямого крыла при стационарных и квазистационарных внешних условиях // Ученые записки ЦАГИ, 1987. т. XVIII, №3.

54. *Головкин М.А.* Ортогональные векторные преобразования и фундаментальные свойства уравнений Навье–Стокса и Эйлера для вихревых течений несжимаемой жидкости //Ученые записки ЦАГИ, 1991. т. XXII, №1,

55. *Головкин М.А., Ефремов А.А., Иоселевич А.С., Жук А.Н., Столяров Г.И., Татиашвилли Л.Г.* Некоторые особенности аэродинамических характеристик треугольных крыльев на больших углах атаки при дозвуковом нестационарном обтекании // Труды ЦАГИ, 1994. вып. 2536.

56. *Головкин М.А.* О некоторых обобщениях формулы Н.Е. Жуковского о подъемной силе и ее связи с формулой Ампера // 5-й Международный научно-технический симпозиум «Авиационные технологии 21 века», 17–22 августа 1999 г., г. Жуковский, Россия, изд. ЦАГИ, 1999.

57. *Головкин М.А.* Обобщения формулы Н.Е. Жуковского о подъемной силе для различных случаев распределения завихренности и ее связь с формулой Ампера // IX Международный симпозиум «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики», 29 июня–2 июля 2000 г., Орел. Изд. Орловского государственного университета, 2000.

58. *Головкин М.А.* Гидродинамические и электромагнитные поля – общность и различие в силовых воздействиях и некоторые обобщения формулы Н.Е. Жуковского //Ученые записки ЦАГИ, 2000. т.XXXI, №1–2,

59. *Головкин М.А.* О решении некоторых фундаментальных проблем гидромеханики // Материалы VII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред», п. Ярополец, МАИ, 12–16 февраля 2001, — М.: Графрос, 2001.

60. *Головкин М.А.* Взаимосвязь объемных и поверхностных вихреобразований и их потенциалов в гидромеханике // Ученые записки ЦАГИ, 2005. т. XXXVI, № 3–4.

61. *Головкин М.А.* Условия на линии схода свободной вихревой пелены с поверхности тела при его произвольном нестационарном движении в идеальной несжимаемой жидкости // Ученые записки ЦАГИ, т. XXXVII, № 1–2, 2006.

62. *Головкин М.А.* О некоторых свойствах интегральных уравнений Фредгольма второго рода // Ученые записки ЦАГИ, 2006. т. XXXVII, № 4.

63. *Голубев В.В.* Лекции по теории крыла. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.

64. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* О некоторых общих свойствах плоскопараллельных течений вязкой жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ,1987. № 3.

65. *Горлин С.М.* Экспериментальная аэродинамика. — М.: Высшая школа, 1970.

66. *Девнин С.И.* Аэрогидродинамический расчет плохообтекаемых судовых конструкций. —- Л.: Судостроение, 1967.

67. *Дитман А.О. Савчук В.Д., Якубов И.Р.* Методы аналогий в аэродинамике летательных аппаратов. —- М.: Машиностроение, 1987.

68. *Дородницын А.А.* Обобщение теории несущей линии на случай крыла с изогнутой осью и осью неперпендикулярной потоку // ПММ, 1944. т. VIII.

69. *Дородницын А.А.* Избранные научные труды, т. I, II. — М.: ВЦ РАН, 1997.

70. *Дынникова Г.Я.* Силы, действующие на тело, при нестационарном вихревом обтекании идеальной несжимаемой жидкостью // Изв. РАН, МЖГ, 2001. №2.

71. *Жук А.Н., Курьянов А.И., Столяров Г.И.* Гистерезис нормальной силы крыла сложной формы в плане при неустановившемся движении // Ученые записки ЦАГИ, 1977. т. XII, №5.

72. *Жуковский Н.Е.* Собрание сочинений. —М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.

73. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.

74. *Занин Б.Ю., Зверков И.Д., Козлов В.В., Павленко А.М.* Вихревая структура отрывных течений на моделях крыльев при малых скоростях потока // Изв. РАН, МЖГ, 2008. № 6.

75. *Казачков Л. Я.* Нестационарное обтекание многорядной двумерной решетки профилей гидромашин в слое переменной толщины. —М.: Энергомашиностроение, 1970. № 6.

76. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. — М.–Л.: Физматгиз, 1962.

77. *Колмаков Ю.А., Рыжов Ю.А., Столяров Г.И., Табачников В.Г.* Исследование структуры обтекания прямоугольного крыла $\lambda = 5$ на больших углах атаки // Труды ЦАГИ, 1985. вып. 2290,

78. *Колков В.Г.* Исследование вихревой системы несущего винта вертолета // Ученые записки ЦАГИ, т. I, 1970. № 4.

79. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. — М.–Л.: ОНТИ, 1937.

80. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. — М.–Л.: ОГИЗ, ГОСТЕХИЗДАТ, 1948.

81. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. — М.: Наука, 1975.

82. *Красильщиков П.П.* Практическая аэродинамика крыла // Труды ЦАГИ, 1973. вып. 1459.

83. *Курьянов А.И., Столяров Г.И., Штейнберг Р.И.* О гистерезисе аэродинамических характеристик // Ученые записки ЦАГИ, 1979. т. X, №3.

84. *Кюхеман Д.* Аэродинамическое проектирование самолетов. — М.: Машиностроение, 1983.

85. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М.: Наука, 1973.

86. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Физматгиз, 1961.

87. *Ламб Г.* Гидродинамика. — М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.

88. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 1–9. — М.: Наука, 1967.

89. *Лейбович С.* Распад вихря. В кн.: Вихревые движения жидкости. Устойчивость и отрыв пограничного слоя, свободные и квантовые вихри // Серия: Механика. Новое в зарубежной науке. Вып. 21. Под ред. А.Ю. Ишлинского, Г.Г. Черного. — М.: Мир, 1979.

90. *Липман Г.В., Рошко А.* Элементы газовой динамики. — М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1960.

91. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. — М.: ТОО «Янус», 1995.

92. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1970.

93. *Майкапар Г. И.* К теории тонкого крыла. Приложение вихревой теории винта // Труды ЦАГИ, 1947. вып. 613.

94. *Макаров Л.М., Железняк В.Н., Мальцев В.Н., Пирогов В. В.* Моделирование методом магнитной аэродинамической аналогии трехмерного обтекания летательных аппаратов с учетом работы силовых установок // Ученые записки ЦАГИ, 1985. т. XVI, № 6.

95. *Маланичев В.А.* Локальные решения в окрестности линии отрыва потока идеальной жидкости //Ученые записки ЦАГИ, 1986. т. XVII, №4.

96. *Михлин С.Г.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. — М.: Физматгиз, 1959.

97. *Молчанов В.Ф.* Некоторые вопросы расчета течений с тангенциальными разрывами // Ученые записки ЦАГИ,1975. т. VI, №4.

98. *Нейланд В.Я., Степанов Г.Ю.* Ламинарные и турбулентные отрывные течения. Современные проблемы теоретической и прикладной механики // Труды IV Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике. — Киев, Наукова думка, 1978.

99. *Нейланд В.Я., Столяров Г.И.* Об одном виде отрывного течения на прямоугольном крыле малого удлинения // Ученые записки ЦАГИ, 1982. т. XIII, № 1.

100. *Нейланд В.Я., Столяров Г.И., Табачников В.Г.* Влияние относительной толщины прямоугольного крыла малого удлинения ($\lambda = 1,0$) и числа Рейнольдса на режимы перестройки структуры обтекания // Ученые записки ЦАГИ, 1985. т. XVI, № 3.

101. *Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. — М.: Физматлит, 2004.

102. *Некрасов А.И.* Теория крыла в нестационарном потоке. — М.–Л.: Изд. АН СССР, 1947.

103. *Никольский А.А.* О второй форме движения идеальной жидкости около обтекаемого тела (исследование отрывных вихревых потоков) — ДАН СССР, 1957. т. 116, №2.

104. *Никольский А.А.* О силовом воздействии «второй» формы гидродинамического движения на плоские тела (динамика плоских отрывных потоков) — ДАН СССР, 1957. т. 116, № 3.

105. *Никольский А.А.* Законы подобия для трехмерного стационарного отрывного обтекания тел жидкостью и газом // Ученые записки ЦАГИ, 1970. т. I, №1.

106. *Ништ М.И., Судаков А.Г.* О влиянии ускорения на отрывное обтекание диска // ДАН СССР, 1978. т. 243, №1.

107. *Павловец Г.А.* Методы расчета обтекания сечений крыла идеальным несжимаемым потоком // Труды ЦАГИ, 1971. вып. 1344.

108. *Пановский В., Филипс М.* Классическая электродинамика. — М.: Физматгиз, 1963.

109. *Парсел Э.* Берклеевский курс физики. Т. II. Электричество и магнетизм. —- М.: Наука, 1983.

110. *Петров Г.И., Штейнберг Р.И.* Исследование потока за плохо обтекаемыми телами // Труды ЦАГИ, 1940. вып. 482.

111. *Петров А.С.* Теория аэродинамических сил при дозвуковых скоростях / Учебное пособие. — М.: МФТИ, 2007.

112. *Петровский И.Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. — М.–Л.: ОГИЗ, 1948.

113. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1974.

114. *Поляхов Н.Н.* Теория нестационарных движений несущей поверхности. —- Л.: Изд-во ЛГУ, 1960.

115. *Постоловский С.Н.* Возникновение вихрей в идеальной несжимаемой жидкости // НИИинформтяжмаш, Энергетическое машиностроение, 1968. №3-68-10.

116. *Постоловский С.Н.* К расчету вихревого обтекания тел плоским потоком несжимаемой жидкости // Труды ЦКТИ, вып. 102. Компрессорные и дутьевые машины. —- Л.: 1970.

117. *Постоловский С.Н., Ильичев К.П.* Расчет вихревого обтекания тел потоком несжимаемой среды при высоких значениях чисел Re // НИИинформтяжмаш, Энергетическое машиностроение, турбостроение, 1971. № 3-70-20.

118. *Постоловский С.Н., Ильичев К.П.* Расчет нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ, 1971. №6.

119. *Прандтль Л., Титьенс О.* Гидро- и аэромеханика. — М.–Л.: ГТТИ, 1933. т. 1; — М.–Л.: ОНТИ, 1935. т. 2.

120. *Пуанкаре А.* Теория вихрей. – Москва – Ижевск, R and C Dynamics, 2000.

121. *Рыжов Ю.А., Столяров Г.И., Табачников В.Г.* Критические режимы перестройки структуры обтекания прямоугольного крыла при дозвуковом нестационарном обтекании // Ученые записки ЦАГИ, 1996. т. XXVII, №3-4.

122. *Рязанов Г.А.* Электрическое моделирование с применением вихревых полей. — М.: Наука, 1969.

123. *Самойлович Г.С.* Нестационарное обтекание и аэроупругие колебания решеток турбомашин. — М.: Физматгиз, 1969.

124. *Сарен В.Э.* Решетка произвольных вибрирующих профилей в потоке несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ, 1968. № 3.

125. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. —- М.: Наука, 1970. т. 1.

126. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Том. IV, часть первая. — М.: Наука, 1974.

127. *Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости.* Сб. под ред. С. Гольдштейна. — М.: Изд. иностр. лит-ры, 1948. т. I, т. II.

128. *Сунцов Н.Н.* Методы аналогий в аэрогидродинамике. — М.: Физматгиз, 1958.

129. *Судаков Г.Г.* Расчет отрывных течений около конических крыльев малой толщины // Ученые записки ЦАГИ, 1974. т. V, № 6.

130. *Судаков Г.Г.* Расчет отрывных течений около толстых конических крыльев малого удлинения // Труды ЦАГИ, 1976. вып. 1747.

131. *Сычев В.В.* О ламинарном отрыве // Изв. АН СССР, МЖГ, 1972. № 3.

132. *Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вик. В., Королев Г.Л.* Асимптотическая теория отрывных течений. — М.: Наука, 1987.

133. *Сэффмэн Ф. Дж.* Динамика вихрей. — М.: Научный мир, 2000.

134. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989.

135. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.

136. *Тетельбаум И.М.* Электрическое моделирование. — М.: Физматгиз, 1959.

137. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.

138. *Трещевский В.Н., Волков Л.Д., Короткин А. И.* Аэродинамический эксперимент в судостроении. —- Л.: Судостроение, 1976.

139. *Франк Л.С., Чудов Л.А.* Разностные методы решения некорректной задачи Коши. В сб.: Численные методы в газовой динамике. — М.: Изд. МГУ, 1965.

140. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэнде М.* Фейнмановские лекции по физике. — М.: Мир, 1977. т. I–IX,

141. *Чаплыгин С.А.* О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое тело // Труды ЦАГИ, 1926. вып. 19.

142. *Чжен П.* Отрывные течения. т. I–III. — М.: Мир, 1972–1973.

143. *Чжен П.* Управление отрывом потока. — М.: Мир, 1979.

144. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1969.

145. *Якимов Ю.Л.* Движение цилиндра в произвольном плоском потоке идеальной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ, 1970. № 2.

146. *Ярмицкий А.Г.* Обтекание кругового цилиндра потоками несжимаемой жидкости с линейной связью между вихрем и функцией тока // Изв. АН СССР, МЖГ, 1968. № 5.

147. *Ярмицкий А.Г.* Формула Жуковского для подъемной силы цилиндра в произвольном установившемся потоке идеальной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ, 1981. № 2.

148. *Ackerberg R.C.* Boundary-layer Separation at a Free Streamline // J. Fluid Mech, 1970. v. 44, part 2.

149. *Bratt J.B.* Flow Patterns in the Wake of an Oscillating aerofoil // ARC, R & M, 1953. №2773 (13, 001).

150. *Clapworthy G.J., Mangler K.W.* The Behaviour of a Conical Vortex Sheet on a Slender Wing near thq Leading Edge // ARC, R & M, 1977. №3790.

151. *Djojodihardgo R.H., Widnall S.E.* A numerical method for the calculation of nonlinear unsteady lifting potential flow problems // AIAA Paper, 1969. №69–23.

152. *Erickson G.E.* Water tunnel flow visualization insight into complex three dimensional flow fields // AIAA Paper, 1979. № 1530.

153. *Erickson G.E.* Flow studies of slender wings vortices // AIAA Paper,1984. №1423.

154. *Ericsson L.E.* The fluid mechanics of slender wing rock // J. Aircraft, 1984. v. XIV, №5.

155. *Geising J.P.* Nonlinear Two-dimensional Unsteady Potential Flow with Lift // J. Aircraft, 1968. v. II, March–April,

156. *Golovkin V.A., Golovkin M.A.* Numerical solution for unsteady separated invested incompressible flow past an arbitrary body. // Sixth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Proceedings of the Conference Held in Tbilisi (U.S.S.R.). June 21-24, 1978. Edited by H. Cabannes, M. Hold and V. Rusanov. Springer-Verlag, — Berlin Heidelberg–New York, 1979.

157. *Golovkin M.A.* Method of calculation of the streaming of solids by arbitrary any vortex non-stationary stream of ideal incompressible liquid // Fluid Mechanics-Soviet Research, 1986. v. VII, №3.

158. *Golovkin M.A., Corban V.P., Simusiova E.V., Stratonovich A.N.* Streaming of the rectangular wing at stationary and quasi-stationary external conditions environment // Fluid Mechanics — Soviet Research, v. XIV, №2, 1987.

159. *Golovkin M.A.* Orthogonal Vectorial transformation and fundamental characteristics of equations for vortex streams of incompressible liquid // TsAGI Journal, 1994. №3.

160. *Hess J., Smith A.* Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies // J. Ship. Res.,1964. v. VIII, №2.

161. *Helmholtz H.* Liber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den wirbelbewegumgen entsprechen // Crelles J. 1958. v. 55. 25 p.

162. *Hoerner S.F.* Fluid-dynamic drag. — Published by the author, 1965.

163. *Honji H, Taneda S.* Unstaedy flow past a circular cylinder // J. Phys. Soc. Japan, 1969. v. XXVII.

164. *Ikai M.* Some problems on aerodynamic // J. of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, 1972. v. XX, №226.

165. *Küchemann D.* Report on the I.U.T.A.M. Symposium on concentrated vortex motions in fluids // J. Fluid Mech., 1965. v. XXI. p. 1–20.

166. *Liiva J.* Unsteady aerodynamic and stall effects on helicopter rotor blade airfoil sections // AIAA Paper, 1968. №68–58.

167. *Mangler K.W., Smith J.H* B. Behaviour of the vortex sheet at the trailing edge of a lifting wing // Aeronautical J., 1970. v. XI,

168. *Morino L., Kuo Ch.Ch.* Subsonic potential aerodynamics for complete configurations; A General Theg // AIAA J.,1974. v. XII, №2.

169. *Mc. Cluney B., Marshall I.* Drag development of the Belfast //J. Aircraft Engineering, 1967.v. X.

170. *Parker A.G.* Measurement on a delta wing in unsteady flow // J. Aircraft, 1977. v. XIV, №6.

171. *Prandtl L.* Über die Entstehung von Wirbel in der idealen Flussigkeit // Vortrage aus Hydro und Aerodynamik,— Berlin, 1924.

172. *Pullin R.I.* The large-scale structure of unsteady self-similar rolled-up rortex sheets // J. Fluid Mech., 1978. v. 88, part 3.

173. *Spillman T.T.* The use of wing tip sails to reduce vortex drag // Aeronautical J.,1978. v. 82, №813.

174. *Taylor A.B.* Winglet and long-duct nacelle aerodynamic development for DC-10 derivatives // NASA CP 2036. v. II.

175. *Takobs E.M.* The aerodynamics characteristics of eight very thick airfoils from tests in the variable density wind tunnel // NASA, 1931. Rep. 391.

176. *Taneda S.* Visualization experiments on unsteady viscous flow around cylinder and plates // Presented at UITAM Symposium on Unsteady Boundary Layers. Laval University, May, 1971.

177. *Werlê H.* Hydrodynamic flow visualization // Annual Review of Fluid Mechanics, 1973. v. 5.

Annotation

The book is published at the support of
Russian fund of fundamental research
to the project 09-01-07063

Golovkin M.A., Golovkin V.A., and Kalyavkin V.M. **The problems of vortex hydromechanics.** — M.: PHYSMATLIT, 2009.

The results of theoretical and experimental investigations of various problems of vortex and separated flows of incompressible fluid are presented. For ideal fluid the conditions are determined which should be met at the line of shedding of free tangentional velocity discontinuity surfaces from solid body during its arbitrary non-stationary movement. Original methods for calculation of flow about such bodies producing good agreement with experimental data are developed. Analogy is shown between forces acting on the body in ideal incompressible fluid and in stationary magnetic or quasi-stationary electromagnetic field. Instantaneous equipotential surfaces are found along which Bernoulli function is constant for a wide class of vortex non-stationary viscous and nonviscous flows. The results of physical investigations of non-stationary separated vortex flow about different classical bodies in hydro- and aerodynamic wind tunnels are presented.

The book is intended for scientists and engineers in the field of theoretical and applied aerohydromechanics.

Table 1. Ill. 110. Bibl. 177.

Contents