МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

П. Ю. Глазырина
М. В. Дейкалова
Л. Ф. Коркина

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
Типовые задачи

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по программе бакалавриата по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика»,
01.03.03 «Механика и математическое моделирование»,
02.03.01 «Математика и компьютерные науки»,
02.03.02 «Фундаментальная информатика
и информационные технологии»,
по программе специалитета по направлению подготовки
10.05.01 «Компьютерная безопасность»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2016

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
Институт математики и компьютерных наук

П. Ю. ГЛАЗЫРИНА
М. В. ДЕЙКАЛОВА
Л. Ф. КОРКИНА

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Типовые задачи

Учебное пособие

УДК 517.98 (076.1)
Г525

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра математического и функционального анализа
Южно-Уральского государственного университета
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук
В. Л. Дильман);
А. Р. Данилин, доктор физико-математических наук,
заведующий отделом уравнений математической физики
Института математики и механики УрО РАН

Глазырина, П. Ю.

Г525 Функциональный анализ : Типовые задачи : [учеб. пособие] / П. Ю. Глазырина, М. В. Дейкалова, Л. Ф. Коркина ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 214 с.

ISBN 978-5-7996-1771-4

Учебное пособие содержит набор задач по основным разделам функционального анализа. Приводятся необходимый теоретический материал, а также примеры решения некоторых задач.

Предназначено для проведения практических занятий, контрольных мероприятий и для самостоятельной работы студентов математических факультетов дневной формы обучения.

УДК 517.98 (076.1)

ISBN 978-5-7996–1771–4

Предисловие

В учебном пособии собраны задачи по основным разделам курса линейного функционального анализа (теории нормированных пространств и теории операторов), читаемого студентам математико-механического факультета Уральского федерального университета.

В начале пособия приведены классические нормированные пространства, изучаемые в курсе функционального анализа. Далее представлено 19 тем, в каждой из которых дана краткая сводка необходимого теоретического материала, а также приведены образцы решения некоторых задач. В теме 18 собраны задачи для итогового контроля, решение которых требует знания предшествующих тем. В конце пособия помещены ответы к задачам и список литературы, использованной при их составлении. Эти же книги могут быть полезны при решении задач.

При составлении пособия были использованы методические разработки по функциональному анализу, составленные в прошлые годы на кафедре математического анализа и теории функций Уральского государственного университета им. А. М. Горького.

Условные обозначения, принятые в пособии:

✍ Советуем запомнить

☛ Советуем обратить внимание

✌ Окончание решения примера

☞ Начало формулировки задания, относящегося к нескольким задачам

✯ Задача повышенной трудности

Перечень классических пространств

✍ $\mathbb{P}$ – поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

✍ ℓ_p^m $(1 \leqslant p < \infty)$ – пространство векторов $x = \{\xi_k\}_{k=1}^m$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, наделенное нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^m |\xi_k|^p\right)^{1/p}.$$

✍ c^m – пространство векторов $x = \{\xi_k\}_{k=1}^m$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с нормой

$$\|x\| = \max_{1\leqslant k\leqslant m} |\xi_k|.$$

☛ Пространство c^m будем обозначать также ℓ_∞^m.

✍ ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ – пространство последовательностей

$x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, таких, что $\sum\limits_{k=1}^\infty |\xi_k|^p < \infty$, с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p\right)^{1/p}.$$

✍ m – пространство ограниченных последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с нормой

$$\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|.$$

☛ Пространство m будем обозначать также символом ℓ_∞.

✍ c – пространство сходящихся последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с нормой

$$\|x\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|.$$

✍ c_0 – пространство сходящихся к нулю последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с нормой

$$\|x\| = \max_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|.$$

✍ s – пространство последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}, \quad y = \{\eta_k\} = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty},\ \eta_k \in \mathbb{P}.$$

✍ $C[a, b]$ – пространство функций $x\colon [a, b] \to \mathbb{P}$, непрерывных на $[a, b]$, с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

✍ $C^k[a, b]$ – пространство функций $x\colon [a, b] \to \mathbb{P}$, k раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$, с нормой

$$\|x\| = \sum_{\ell=0}^{k} \max_{t \in [a,b]} |x^{(\ell)}(t)|.$$

✍ $\widetilde{L}_p[a, b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ – пространство функций $x\colon [a, b] \to \mathbb{P}$, непрерывных на $[a, b]$, с нормой

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

✍ Пусть E – измеримое по Лебегу подмножество $\mathbb{R}$.

$L_p(E)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ – пространство измеримых по Лебегу функций $x\colon E \to \mathbb{P}$ таких, что $|x(t)|^p$ суммируема на E, с нормой

$$\|x\| = \left(\int_E |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Функции x и y определяют один и тот же элемент $L_p(E)$, если $x(t) = y(t)$ для почти всех $t \in E$, т. е. x и y эквивалентны.

✍ Пусть E – измеримое по Лебегу подмножество $\mathbb{R}$.

$L_\infty(E)$ – пространство измеримых по Лебегу функций $x\colon E \to \mathbb{P}$ таких, что $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in E} |x(t)| < \infty$, с нормой

$$\big\|x\big\| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in E} |x(t)|.$$

Функции x и y определяют один и тот же элемент $L_\infty(E)$, если $x(t) = y(t)$ для почти всех $t \in E$.

Величина $\operatorname{ess\,sup}$ (существенный супремум) функции x на множестве E определяется следующим образом:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in E} |x(t)| = \inf\big\{M > 0 : \operatorname{mes}\{t \in E\colon |x(t)| > M\} = 0\big\}.$$

В большинстве задач этого пособия $E = [a, b]$.

☛ Для пространств ℓ_p^m, ℓ_p, $\widetilde{L}_p[a, b]$, $L_p(E)$, если границы для индекса p не указаны явно, задачу нужно решить для всех p, $1 \leqslant p < \infty$. Нормы в этих пространствах будем часто обозначать $\|\cdot\|_p$.

Пространство $L_1(E)$ будем обозначать также $L(E)$.

✍ $\langle\mathbb{P}, \rho_{|\cdot|}\rangle$ – поле $\mathbb{P}$ с естественной метрикой

$$\rho_{|\cdot|}(x, y) = |x - y|.$$

✍ $\langle X, \rho_T\rangle$ – произвольное непустое множество X с *тривиальной* метрикой

$$\rho_T(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Тема 1. Метрические и линейные нормированные пространства, топология метрических пространств

Определение 1.1. Пусть X – непустое множество. Отображение $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$ называется *метрикой на* X, если для любых x, y, $z \in X$

1) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Определение 1.2. Если ρ – метрика на X, то пара $\langle X, \rho\rangle$ называется *метрическим пространством.*

Определение 1.3. Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ называется *нормой на* X, если для любых x, $y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{P}$

1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Определение 1.4. Если $\|\cdot\|$ – норма на линейном пространстве X, то пара $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ называется *нормированным пространством.*

☛ Норму в пространстве X иногда будем обозначать $\|\cdot\|_X$, метрику – ρ_X. Там, где это не вызывает непонимания, вместо $\langle X, \rho\rangle$ или $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ будем писать метрическое (нормированное) пространство X.

Определение 1.5. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – метрическое пространство, $a \in X$, $r > 0$.

✓ Множество $B(a, r) = \{x \in X\colon \rho(x, a) < r\}$ называется *открытым шаром* с центром в точке a радиуса r.

✓ Множество $B[a, r] = \{x \in X\colon \rho(x, a) \leqslant r\}$ называется *замкнутым шаром* с центром в точке a радиуса r.

✓ Множество $S[a, r] = \{x \in X\colon \rho(x, a) = r\}$ называется *сферой* с центром в точке a радиуса r.

Определение 1.6. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *сходящейся*, если существует точка $x_0 \in X$ такая, что

$$\rho(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Точка x_0 называется *пределом* последовательности $\{x_n\}$. В этом случае пишут

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\rho} x_0 \quad \text{или} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0.$$

Определение 1.7. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – метрическое пространство, $M \subset X$.

✓ Точка $x_0 \in M$ называется *внутренней точкой* множества M, если

$$\exists\, r > 0 \quad B(x_0, r) \subset M.$$

✓ Точка $x_0 \in X$ называется *предельной точкой* множества M, если
$$\forall\, r > 0 \quad M \cap \big(B(x_0, r) \setminus \{x_0\}\big) \neq \varnothing.$$

☛ Множество внутренних точек множества M обозначают $\overset{\circ}{M}$ и называют *внутренностью* множества M; множество предельных точек обозначают M'.

Определение 1.8. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – метрическое пространство, $M \subset X$.

✓ Множество M называется *ограниченным* в $\langle X, \rho\rangle$, если оно содержится в некотором шаре. В частности, множество M называется *ограниченным* в нормированном пространстве $\langle X, \|\cdot\|\rangle$, если
$$\exists\, r > 0 \quad \forall\, x \in M \quad \|x\| \leqslant r.$$

✓ Множество M называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней точкой этого множества, т. е.
$$\forall\, x \in M \;\exists\, r > 0 \quad B(x, r) \subset M.$$

✓ Множество M называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. если $M' \subset M$.

✓ Множество $\overline{M} = M \cup M'$ называется *замыканием* множества M.

✓ *Диаметром* множества M называется величина
$$\operatorname{diam} M = \sup\{\rho(x, y)\colon\, x, y \in M\}.$$

✓ *Расстоянием от точки $x_0 \in X$ до множества M* называется величина
$$\rho(x_0, M) = \inf\{\rho(x_0, y)\colon\, y \in M\}.$$

Если существует элемент $y \in M$ такой, что $\rho(x_0, y) = \rho(x_0, M)$, то говорят, что расстояние от x_0 до M *достигается* (*на элементе* y).

✓ *Расстоянием между множествами* $A, B \subset X$ называется величина

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y)\colon x \in A,\ y \in B\}.$$

Пример 1.1. Доказать замкнутость множества

$$M = \left\{x \in C^1[0,1]\colon x'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\right\}$$

в пространстве $C^1[0,1]$.

Решение. Пусть $x_0 \in M'$. Нам предстоит проверить, что $x_0'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_\varepsilon \neq x_0$ такой, что $x_\varepsilon \in M \cap B(x_0, \varepsilon)$. В частности, для $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ существует $x_n \neq x_0\colon\ x_n \in M \cap B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$. Имеет место свойство $x_n'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ и справедливы оценки

$$\left|x_0'\left(\frac{1}{2}\right) - x_n'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \max_{t\in[0,1]} |x_0(t) - x_n(t)| +$$
$$+ \max_{t\in[0,1]} |x_0'(t) - x_n'(t)| = \|x_0 - x_n\| < \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$x_0'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n'\left(\frac{1}{2}\right) = 2,$$

т. е. $x_0 \in M$. Таким образом, $M' \subset M$, т. е. множество M замкнуто. ✌

Пример 1.2. Доказать, что множество

$$M = \left\{x \in \ell_1\colon \xi_k > -1\right\}$$

открыто в пространстве ℓ_1 над полем $\mathbb{R}$.

Решение. Пусть $x_0 = \{\xi_k^0\} \in M$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k^0 = 0$ и $\xi_k^0 > -1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \quad \forall\, k > N \qquad \xi_k^0 > -\frac{1}{2},$$

а значит,

$$a = \inf_k \xi_k^0 > -1.$$

Положим $r = a + 1$. Для всякого $x = \{\xi_k\} \in B(x_0, r)$ имеем

$$\xi_k^0 - \xi_k \leqslant |\xi_k^0 - \xi_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^0 - \xi_k| = \|x_0 - x\| < r.$$

Следовательно,

$$\xi_k = \xi_k - \xi_k^0 + \xi_k^0 > -r + \xi_k^0 = -1 + (\xi_k^0 - a) \geqslant -1,$$

т. е. $x \in M$, а значит, $B(x_0, r) \subset M$. Итак, для всякого $x_0 \in M$ мы нашли $r > 0$ такое, что $B(x_0, r) \subset M$. Таким образом, множество M открыто.

Пример 1.3. Доказать, что множество

$$M = \bigl\{x \in C[a,b] \colon 3 \leqslant x(t) < 5\bigr\}$$

не открыто и не замкнуто в пространстве $C[a,b]$.

Решение. Множество M не является замкнутым в пространстве $C[a,b]$, если существует $x_0 \in C[a,b] \colon x_0 \in M'$ и $x_0 \notin M$. Очевидно, что $x_0(t) \equiv 5 \notin M$. Покажем, что $x_0 \in M'$. Для этого достаточно показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ $M \cap B(x_0, \varepsilon) \neq \varnothing$. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию

$$x(t) = x_0(t) - \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 2\right\}, \quad t \in [a,b].$$

Ясно, что $x \in M$, так как $3 \leqslant x(t) < 5$. Из соотношений

$$|x(t) - x_0(t)| = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 2\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad t \in [a,b],$$

следует, что $\|x - x_0\| < \varepsilon$, т. е. $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Значит, $M \cap B(x_0, \varepsilon) \neq \varnothing$. Итак, множество M не замкнуто.

Докажем, что M не открыто. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функции $x_0(t) \equiv 3$ и $x(t) \equiv 3 - \dfrac{\varepsilon}{2}$, $t \in [a, b]$. Очевидно, что $x_0 \in M$, $x \notin M$ и $x \in B(x_0, \varepsilon)$, т. е. $B(x_0, \varepsilon) \not\subset M$. Следовательно, множество M не является открытым. ✌

Пример 1.4. Доказать, что множество

$$M = \big\{x \in \ell_\infty \colon \xi_k > -1\big\}$$

не является открытым в пространстве ℓ_∞.

Решение. Для доказательства достаточно найти точку $x_0 \in M$ такую, что для всякого $\varepsilon > 0$ шар $B(x_0, \varepsilon)$ содержит точки, не принадлежащие множеству M. Рассмотрим $x_0 = \left\{-\dfrac{k}{k+1}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Очевидно, что $x_0 \in \ell_\infty$ и $x_0 \in M$. Пусть $\varepsilon > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, рассмотрим $x_{k_0} = \{\xi_k^{k_0}\}$:

$$\xi_k^{k_0} = \begin{cases} -\dfrac{k}{k+1}, & k \neq k_0, \\ -1, & k = k_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $x_{k_0} \notin M$. Подберем k_0 так, чтобы $x_{k_0} \in B(x_0, \varepsilon)$, т. е.

$$\|x_0 - x_{k_0}\| = \sup_k \left| -\frac{k}{k+1} - \xi_k^{k_0} \right| = \left| 1 - \frac{k_0}{k_0+1} \right| = \frac{1}{k_0+1} < \varepsilon.$$

Таким образом, найдена точка $x_0 \in M$ и $x_0 \notin \overset{\circ}{M}$, следовательно, множество M не является открытым. ✌

☞ Доказать утверждения 1.1–1.7.

1.1. Если ρ – метрика на множестве X, то

$$\forall\, x, y \in X \quad \rho(x, y) \geqslant 0.$$

1.2. Если $\|\cdot\|$ – норма на линейном пространстве X, то

$$\forall\, x \in X \quad \|x\| \geqslant 0.$$

1.3. Нормированное пространство $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x,y) = \|x-y\|.$$

1.4. Пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$. Точка $x_0 \in X$ является предельной точкой множества M тогда и только тогда, когда

$$\exists\,\{x_n\} \subset M \setminus \{x_0\}\colon \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0.$$

1.5. Пусть X – метрическое пространство, $M \subset X$. Множество M замкнуто тогда и только тогда, когда

$$\forall\,\{x_n\} \subset M \quad \Big(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 \in M\Big).$$

1.6. В метрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$ справедливо неравенство четырехугольника:

$$\forall\, x,y,u,v \in X \quad |\rho(x,u) - \rho(y,v)| \leqslant \rho(x,y) + \rho(u,v).$$

1.7. В нормированном пространстве $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ справедливо неравенство

$$\forall\; x,y \in X \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

1.8. Может ли нормированное пространство
а) состоять из одного элемента? б) быть счетным?

1.9. Пусть $X \neq \varnothing$. Можно ли на нем ввести метрику?

1.10. Пусть X – линейное пространство. Можно ли на нем ввести норму?

1.11. Пусть $\rho: \ X^2 \to \mathbb{R}$ – метрика на множестве X. Доказать, что следующие функции тоже являются метриками на X:

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}, \qquad \rho_2(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\},$$

$$\rho_3(x,y) = \ln(1+\rho(x,y)).$$

1.12. Доказать, что функция

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 0, & n = m, \\ 1 + \dfrac{1}{n+m}, & n \neq m, \end{cases}$$

задает метрику на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

1.13. В множестве X всевозможных последовательностей натуральных чисел для элементов

$$x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}, \qquad y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$$

обозначим через $k_0(x,y)$ наименьший индекс, при котором $\xi_k \neq \eta_k$. Доказать, что

а) формула $\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 + \dfrac{1}{k_0(x,y)}, & x \neq y, \end{cases}$

задает метрику на X;

б) аксиома треугольника выполняется в X в усиленной форме:

$$\rho(x,z) \leqslant \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\};$$

в) если $\rho(x,y) \neq \rho(y,z)$, то

$$\rho(x,z) = \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}.$$

1.14. Каким условиям должна удовлетворять непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы формула

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

задавала метрику на $\mathbb{R}$?

1.15. Указать необходимое и достаточное условие на отображение $f\colon X \to \mathbb{P}$, при котором формула из задачи 1.14 задает метрику на X.

1.16. Каким условиям должна удовлетворять функция f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, чтобы формула

$$\rho(x, y) = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right|$$

задавала метрику на $\mathbb{R}$? Рассмотреть случаи

а) $f \in C(\mathbb{R})$; б)✯ $\forall\, r > 0 \quad f \in L_1[-r, r]$.

1.17. Проверить справедливость аксиом метрики в линейном пространстве s. Доказать, что пространство s ненормируемо, т. е. в нем нельзя ввести норму так, чтобы выполнялось равенство $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

1.18. Является ли линейное пространство $\mathbb{P}^2$ нормированным, если для $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{P}^2$

а) $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|} + \sqrt{|\xi_2|}$;

б) $\|x\| = \sqrt[p]{|\xi_1|^p + |\xi_2|^p}$ при $0 < p < 1$;

в) $\|x\| = |\xi_1 - \xi_2| + |\xi_1|$;

г) $\|x\| = \max\{|\xi_1 + 2\xi_2|, |\xi_1 - \xi_2|\}$?

1.19. Пусть $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. При каких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ следующие отображения задают норму на $\mathbb{R}^2$:

а) $\|x\| = \alpha|\xi_1| + \beta|\xi_2|$;

б) $\|x\| = \sqrt{\alpha^2\xi_1^2 + \beta^2\xi_2^2}$;

в) $\|x\| = \max\{\alpha|\xi_1|, \beta|\xi_2|\}$?

Построить шары $B[0,1]$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ с этими нормами.

1.20. Построить шары $B[0,1]$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, если для $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ нормы определены следующим образом:

а) $\|x\| = \max\{\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}, |\xi_3|\}$;

б) $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2} + |\xi_3|$;

в) $\|x\| = \max\left\{2|\xi_1|, \dfrac{1}{3}|\xi_2|, |\xi_3|\right\}$;

г) $\|x\| = 2|\xi_1| + \dfrac{1}{3}|\xi_2| + |\xi_3|$;

д) $\|x\| = \sqrt{4|\xi_1|^2 + \dfrac{1}{9}|\xi_2|^2 + |\xi_3|^2}$.

1.21. Пусть $x \in \ell_p^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Доказать, что

$$\|x\|_{\ell_\infty^n} = \lim_{p\to\infty} \|x\|_{\ell_p^n}.$$

1.22. Доказать, что в пространстве c_0

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k| = \max_k |\xi_k|,$$

т. е. верхняя грань обязательно достигается, а в пространствах c и m она может не достигаться.

1.23. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций определить норму следующим образом:

а) $\|x\| = |x(b) - x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

б) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

в) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

г) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \int_a^b |x(t)|\,dt$;

д) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$?

1.24. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций определить норму следующим образом:

а) $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

б) $\|x\| = |x(a)| + |x(b)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

в) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

г) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \left(\int_a^b |x''(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$;

д) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$?

1.25. Доказать, что в любом метрическом пространстве $\langle X,\rho\rangle$

$$\forall\ x\in X\ \forall\ r>0\quad 0\leqslant \operatorname{diam} B(x,r)\leqslant 2r.$$

Привести пример метрического пространства $\langle X,\rho\rangle$ и такого элемента $x_0\in X$, что

$$\operatorname{diam} B(x_0,1)=\frac{1}{2}.$$

1.26. Доказать, что в любом нормированном пространстве X

$$\forall\ x\in X\ \forall\ r>0\quad \operatorname{diam} B(x,r)=2r.$$

1.27. Доказать, что в нормированном пространстве из условия $B(x_1,r_1)\subset B(x_2,r_2)$ следуют неравенства $r_1\leqslant r_2$ и $\|x_1-x_2\|\leqslant r_2-r_1$.

1.28. Привести пример метрического пространства, в котором существуют шары $B(x_1, r_1)$ и $B(x_2, r_2)$ такие, что $r_1 < r_2$ и шар $B(x_2, r_2)$ лежит строго внутри шара $B(x_1, r_1)$.

1.29. Привести пример метрического пространства, в котором существуют шары,

а) имеющие несколько центров;

б) совпадающие с множеством всех своих центров.

1.30. Возможно ли, чтобы $B(x_1, r) = B(x_2, r)$ и $x_1 \neq x_2$ в нормированном пространстве X?

☞ Доказать справедливость утверждений 1.31–1.37 в метрическом пространстве $\langle X, \rho \rangle$ для $M, N \subset X,\ x \in X$.

1.31. Если M – ограниченное множество, то $\overline{M}$ – ограниченное множество и $\operatorname{diam} \overline{M} = \operatorname{diam} M$.

1.32. Множество M' замкнуто, т. е. $(M')' \subset M'$. Возможно ли здесь строгое включение?

1.33. Если $M \subset N$, то $\overline{M} \subset \overline{N}$.

1.34. $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

1.35. $\rho(x, M) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overline{M}$.

1.36. $\rho(x, M) = \rho(x, \overline{M})$.

1.37. $\rho(M, N) = \rho(M, \overline{N}) = \rho(\overline{M}, N) = \rho(\overline{M}, \overline{N})$.

1.38. Пусть для множеств M, N из метрического пространства $\langle X, \rho \rangle$ выполняется соотношение $\overline{M} \subset \overline{N}$. Следует ли отсюда, что $M \subset N$?

1.39. Пусть M и N замкнуты в метрическом пространстве $\langle X, \rho \rangle$. Возможно ли, что $M \cap N = \varnothing$ и $\rho(M, N) = 0$?

1.40. В метрическом пространстве $\langle X, \rho_T \rangle$ описать все открытые и замкнутые множества.

☞ Доказать справедливость утверждений 1.41–1.44 в нормированном пространстве X для $x \in X,\ r > 0$.

1.41. $B[x,r],\ S[x,r]$ – замкнутые множества.

1.42. $B(x,r)$ – открытое множество.

1.43. $\overset{\circ}{B}[x,r] = B(x,r)$.

1.44. $\overline{B(x,r)} = B[x,r]$.

1.45. Верны ли утверждения 1.41–1.44 в метрическом пространстве?

1.46. Описать все подмножества нормированного пространства X, которые являются одновременно открытыми и замкнутыми.

1.47. Будут ли следующие множества ограниченными, открытыми, замкнутыми в пространстве ℓ_1^2 над полем $\mathbb{R}$:

а) $M = [0,1] \times \mathbb{Q}$;

б) $M = \left\{ \dfrac{2n-1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \times (0,1)$;

в) $M = \big\{ (\xi_1, \xi_2) \colon \min\{|\xi_1|, 5|\xi_2|\} = 1 \big\}$;

г) $M = \big\{ (\xi_1, \xi_2) \colon |\xi_1| < 1,\ |\xi_2| > 2 \big\}$;

д) $M = \big\{ (\xi_1, \xi_2) \colon -4 < \xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1 + 4\xi_2 \leqslant 4 \big\}$?

1.48. Будут ли следующие множества ограниченными, открытыми, замкнутыми в $\langle X, \|\cdot\| \rangle,\ \mathbb{P} = \mathbb{R}$:

а) $M = \big\{ x \in X \colon e^t < x(t) < 4 \big\}, \quad X = C[0,1]$;

б) $M = \big\{ x \in X \colon 0 < \xi_k < 2 \big\}, \quad X = c_0$;

в) $M = \left\{ x \in X \colon \displaystyle\int_0^1 x(t)\,dt = 1 \right\}, \quad X = L_1[0,1];$

г) $M = \big\{ x \in X \colon x(0) = 1 \big\}, \quad X = \widetilde{L}_1[0,1];$

д) $M = \big\{ x \in X \colon \xi_k \geqslant 0 \big\}, \quad X = \ell_2;$

е) $M = \left\{ x \in X \colon \xi_k < \dfrac{k+1}{k} \right\}, \quad X = \ell_1?$

1.49. Будут ли следующие множества открытыми, замкнутыми в пространстве $C[a,b]$:

а) $P_n = \left\{ p \colon p(t) = \sum\limits_{j=0}^{m} c_j t^j,\ 0 \leqslant m \leqslant n \right\};$

б) $Q_n = \left\{ p \colon p(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j t^j,\ c_n \neq 0 \right\};$

в) $P = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_n?$

1.50. Пусть $x_0 \in C[a,b]$, $\mathbb{P} = \mathbb{R}$. Могут ли множества

$$M = \{t \in [a,b] \colon x_0(t) < 1\},$$

$$N = \{t \in [a,b] \colon x_0(t) \leqslant 1\}$$

быть открытыми, замкнутыми в $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$?

1.51. Пусть $A \subset \mathbb{P}$. Будет ли множество

$$M_A = \big\{ x \in C[a,b] \colon \forall\, t \in [a,b] \quad x(t) \in A \big\}$$

а) открытым в пространстве $C[a,b]$, если множество A открыто в пространстве $\langle \mathbb{P}, \rho_{|\cdot|} \rangle$;

б) замкнутым в пространстве $C[a,b]$, если множество A замкнуто в пространстве $\langle \mathbb{P}, \rho_{|\cdot|} \rangle$?

1.52. Доказать, что

а) параллелепипед $M = \left\{x \in \ell_2 \colon |\xi_k| \leqslant \alpha_k\right\}$ ограничен в пространстве ℓ_2 тогда и только тогда, когда $\{\alpha_k\} \in \ell_2$;

б) если все $\alpha_k \neq 0$, то эллипсоид

$$M = \left\{x \in \ell_2 \colon \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\xi_k}{\alpha_k}\right|^2 \leqslant 1\right\}$$

ограничен в пространстве ℓ_2 тогда и только тогда, когда $\{\alpha_k\} \in \ell_\infty$.

1.53. Доказать, что множество c_0 замкнуто в пространстве c, множество c замкнуто в пространстве ℓ_∞.

Тема 2. Сходимость в метрическом пространстве. Сравнение метрик и норм

Определение 2.1. Пусть ρ_1, ρ_2 – метрики, заданные на одном множестве X. Говорят, что

✓ ρ_1 *не слабее* ρ_2 (ρ_2 *не сильнее* ρ_1), если из сходимости последовательности $\{x_n\}$ к точке x_0 в пространстве $\langle X, \rho_1\rangle$ следует ее сходимость к x_0 в пространстве $\langle X, \rho_2\rangle$, т. е.

$$\rho_1(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho_2(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

✓ ρ_1 *сильнее* ρ_2 (ρ_2 *слабее* ρ_1), если ρ_1 не слабее ρ_2 и

$$\exists\, \{x_n\} : \quad \rho_2(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{но} \quad \rho_1(x_n, x_0) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

✓ ρ_1 и ρ_2 *эквивалентны*, если ρ_1 не слабее ρ_2 и ρ_2 не слабее ρ_1, т. е.

$$\rho_1(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_2(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Эти понятия переносятся и на нормы через метрики, ими порождаемые.

Определение 2.2. Пусть $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ – две нормы, заданные на одном линейном пространстве X. Говорят, что

✓ $\|\cdot\|_1$ *не слабее* $\|\cdot\|_2$ ($\|\cdot\|_2$ *не сильнее* $\|\cdot\|_1$), и пишут $\|\cdot\|_1 \succeq \|\cdot\|_2$, ($\|\cdot\|_2 \preceq \|\cdot\|_1$), если
$$\|x_n - x_0\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x_0\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

✓ $\|\cdot\|_1$ *сильнее* $\|\cdot\|_2$ ($\|\cdot\|_2$ *слабее* $\|\cdot\|_1$), и пишут $\|\cdot\|_1 \succ \|\cdot\|_2$, ($\|\cdot\|_2 \prec \|\cdot\|_1$), если $\|\cdot\|_1 \succeq \|\cdot\|_2$ и
$$\exists\ \{x_n\}: \quad \|x_n - x_0\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{но} \quad \|x_n - x_0\|_1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

✓ $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ *эквивалентны*, если
$$\|x_n - x_0\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x_n - x_0\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Определение 2.3. Метрические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует отображение $\tau\colon X \to Y$ такое, что τ есть биекция X на Y и
$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\rho_X} x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tau(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\rho_Y} \tau(x_0).$$
Отображение τ называется *гомеоморфизмом* X на Y.

Определение 2.4. Линейные нормированные пространства X и Y называются *линейно гомеоморфными*, если существует линейное отображение $\tau\colon X \to Y$, которое является гомеоморфизмом X на Y. Отображение τ называется *линейным гомеоморфизмом* X на Y.

Теорема 2.1. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^m$ – линейно независимая система в нормированном пространстве X. Тогда*
$$x_n = \sum_{k=1}^m \xi_{n,k} e_k \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 = \sum_{k=1}^m \xi_k e_k$$
$$\Longleftrightarrow \quad \xi_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_k, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Следствие 2.1. *В конечномерном нормированном пространстве сходимость по норме эквивалентна покоординатной сходимости.*

Пример 2.1. Сходится ли последовательность

$$x_n(t) = te^{-nt}$$

в пространствах а) $C[0,1]$; б) $C^1[0,1]$?

Решение. а) Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x в пространстве $C[0,1]$ эквивалентна равномерной сходимости последовательности функций $\{x_n(t)\}$ к функции $x(t)$ на отрезке $[0,1]$ (см. задачу 2.9). Значит, если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x$, то $x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$ поточечно на $[0,1]$. Найдем поточечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} te^{-nt} = 0 = x(t).$$

Функция $x(t) \equiv 0$ принадлежит пространству $C[0,1]$. Проверим, сходится ли x_n к 0 в этом пространстве:

$$\|x_n - 0\|_{C[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} |te^{-nt}| = \frac{1}{n} \cdot e^{-n\cdot\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, x_n сходится к 0 в пространстве $C[0,1]$.

б) Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x в пространстве $C^1[0,1]$ эквивалентна равномерной сходимости на отрезке $[0,1]$ последовательности функций $\{x_n(t)\}$ к функции $x(t)$ и последовательности функций $\{x'_n(t)\}$ к функции $x'(t)$ (см. задачу 2.11). Значит, если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x$, то $x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$ поточечно на $[0,1]$. Так как поточечно x_n сходится к 0 (см. п. «а») и $0 \in C^1[0,1]$, осталось проверить, сходится ли x_n к 0 в этом пространстве:

$$\|x_n - 0\|_{C^1[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} |te^{-nt}| + \max_{t\in[0,1]} |(1-nt)e^{-nt}| =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot e^{-n\cdot\frac{1}{n}} + \left|1 - n \cdot \frac{2}{n}\right| e^{-n\cdot\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2} \neq 0.$$

Таким образом, в пространстве $C^1[0,1]$ последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела. ✌

Пример 2.2. Исследовать на сходимость последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < -\dfrac{1}{n}, \\ nt, & |t| \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 1, & \dfrac{1}{n} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

в пространствах а) $C[-1,1]$; б) $L_p[-1,1]$, $1 \leqslant p < \infty$; в) $\widetilde{L}_1[-1,1]$.

Решение. а) Найдем поточечный предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & 0 < t \leqslant 1, \end{cases} = \operatorname{sign} t.$$

Поскольку $x \notin C[-1,1]$, последовательность не сходится в этом пространстве.

б) Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому элементу y в пространстве $L_p[-1,1]$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая сходится к y почти всюду на $[-1,1]$ (см. задачу 2.12). Но последовательность $\{x_n\}$ сама поточечно сходится к $x(t) = \operatorname{sign} t \in L_p[-1,1]$, а значит, и любая ее подпоследовательность поточечно сходится к x. Отсюда следует, что если $\{x_n\}$ сходится по норме в $L_p[-1,1]$ к элементу y, то $y = x$ в $L_p[-1,1]$ (см. задачу 2.13). Остается проверить, сходится ли

$\{x_n\}$ к x по норме. Имеем

$$\|x_n - x\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |x_n(t) - x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |nt - \operatorname{sign} t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int_{0}^{\frac{1}{n}} 2^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{4}{\sqrt[p]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, в пространстве $L_p[-1,1]$ последовательность $\{x_n\}$ сходится.

в) Покажем, что в пространстве $\widetilde{L}_1[-1,1]$ последовательность $\{x_n\}$ не сходится. Допустим, что $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ в $\widetilde{L}_1[-1,1]$. Тогда для $x(t) = \operatorname{sign} t$ имеем

$$0 \leqslant \|x - x_0\|_1 \leqslant \|x - x_n\|_1 + \|x_n - x_0\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отсюда следует, что $\|x - x_0\|_1 = 0$. Из непрерывности функций x и x_0 на множестве $[-1,0) \cup (0,1]$ и неравенств

$$0 \leqslant \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} |x(t) - x_0(t)|\, dt \leqslant \int_{-1}^{1} |x(t) - x_0(t)|\, dt = 0,$$

$$0 \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} |x(t) - x_0(t)|\, dt \leqslant \int_{-1}^{1} |x(t) - x_0(t)|\, dt = 0,$$

справедливых для всех $n \in \mathbb{N}$, следует, что

$$x_0(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < 0, \\ 1, & 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Но тогда функция x_0 не является непрерывной на отрезке $[-1,1]$, т. е. $x_0 \notin \widetilde{L}_1[-1,1]$. Итак, последовательность $\{x_n\}$ не сходится в пространстве $\widetilde{L}_1[-1,1]$. ✌

Пример 2.3. Исследовать на сходимость последовательность $\{x_n\} = \{\xi_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\xi_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}, & k \leqslant n, \\ \sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{k+1}}, & k > n, \end{cases}$$

в пространствах c_0, c, ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Решение. Проверим, каким из этих пространств принадлежит $\{x_n\}$. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{nk} = \lim_{\substack{k > n \\ k \to \infty}} \xi_{nk} = \lim_{k\to\infty} \left(\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right) = 0.$$

Значит, $\{x_n\} \subset c_0 \subset c \subset l_\infty$.

Далее, для $k > n$ имеем

$$\begin{aligned} |\xi_{nk}| &= \left| \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right| = \\ &= 2\left| \sin\frac{\sqrt[3]{k+1} - \sqrt[3]{k}}{2\sqrt[3]{k+1}\sqrt[3]{k}} \right| \cdot \left| \cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} + \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right) \right| \underset{k\to\infty}{\sim} \\ &\sim 2\sin\frac{1}{2\sqrt[3]{k(k+1)}\left(\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{k^2}\right)} \sim \\ &\sim \frac{1}{3k^{4/3}}. \end{aligned}$$

Так как $x_n \in \ell_p \iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk}|^p \iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |\xi_{nk}|^p \iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{4p}{3}}$, а сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{k}\right)^{\frac{4p}{3}}$ при $p \geqslant 1$ конечна, то $x_n \in \ell_p$.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ принадлежит пространствам $c_0, c, \ell_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Из сходимости по норме в этих пространствах следует покоординатная сходимость. Найдем покоординатный предел, если он существует.

Для всякого фиксированного k имеем

$$\lim_{n\to\infty} \xi_{nk} = \lim_{\substack{n > k \\ n \to \infty}} \xi_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \xi_k.$$

Значит, покоординатно

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right\}_{k=1}^{\infty},$$

и если x_n сходится по норме, то сходится к этому x.

Проверим, каким пространствам принадлежит x. Так как

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = 0,$$

то $x \in c_0 \subset c \subset \ell_\infty$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$ сходится $\Longleftrightarrow p > 3$, значит, $x \in \ell_p, 3 < p < \infty$ и $x \notin \ell_p, 1 \leqslant p \leqslant 3$. Следовательно, при $1 \leqslant p \leqslant 3$ последовательность $\{x_n\}$ не сходится в ℓ_p.

В пространствах c_0, c, ℓ_∞ последовательность $\{x_n\}$ сходится к x, поскольку справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\| &= \sup_{k\in\mathbb{N}} |\xi_{nk} - \xi_k| = \sup_{k>n} \left| \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right| \leqslant \\
&\leqslant \sup_{k>n} \left| \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right| + \sup_{k>n} \left| \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right| + \sup_{k>n} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{2}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

В пространствах ℓ_p, $3 < p < \infty$, сходимость тоже есть, поскольку справедливы соотношения

$$\|x_n - x\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Обе последние суммы стремятся к нулю при $n \to \infty$ как остатки сходящихся рядов, так как

$$\left| \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} \right| \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{3k^{4/3}},$$

а ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{4p/3}}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{p/3}}$ при $p > 3$ сходятся. ✌

Пример 2.4. Исследовать на сходимость последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{n}, \\ t^{-1/\pi}, & \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

в пространствах $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$.

Решение. Поточечно последовательность функций $\{x_n(t)\}$ сходится к функции

$$x(t) = \begin{cases} t^{-1/\pi}, & 0 < t \leqslant 1, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Так как $x \notin L_p[0,1]$ при $\dfrac{p}{\pi} \geqslant 1$, то последовательность $\{x_n\}$ не сходится в пространствах $L_p[0,1]$ при $p \geqslant \pi$.

Пусть $1 \leqslant p < \pi$. Тогда $x \in L_p[0,1]$. Покажем, что $\{x_n\}$ сходится к x в этих пространствах. Действительно, x_n и x удовлетворяют следующим условиям:

1) $|x(t)|^p, |x_n(t) - x(t)|^p \in L_1[0,1]$;
2) $|x_n(t) - x(t)|^p \leqslant |x(t)|^p, \quad t \in [0,1]$;
3) $|x_n(t) - x(t)|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad t \in [0,1]$.

Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\|x_n - x\|^p = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 0\, dt = 0.$$ ✌

☞ Доказать справедливость утверждений 2.1–2.10.

2.1. Пусть X – метрическое пространство, $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$, $x, y, x', x'' \in X$. Тогда

а) $\left(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x' \quad \text{и} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x''\right) \implies x' = x''$;

б) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \implies \forall \{x_{n_k}\} \quad x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$;

в) $\{x_n\}$ сходится $\implies$ $\{x_n\}$ ограничена;

г) $\left(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \text{и} \quad y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y\right) \implies$
$\rho(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(x, y)$.

2.2. Пусть X – нормированное пространство, $x, y \in X$, $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$, $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{P}$, $\lambda \in \mathbb{P}$. Тогда

а) $\left(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \text{и} \quad y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y\right) \implies$
$x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x + y$;

б) $\left(\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \quad \text{и} \quad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\right) \implies$
$\lambda_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda x$;

в) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \Longrightarrow \quad \|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|.$

2.3. Сходимость последовательности в пространствах s и ℓ_p^m, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, эквивалентна покоординатной сходимости.

2.4. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, τ – линейная биекция X на Y. Пространства X и Y линейно гомеоморфны тогда и только тогда, когда существуют такие константы $c_1, c_2 > 0$, что для любого $x \in X$

$$c_1\|x\|_X \leqslant \|\tau(x)\|_Y \leqslant c_2\|x\|_X.$$

2.5. Конечномерные нормированные пространства X и Y одинаковой размерности и над одним полем *линейно гомеоморфны.*

2.6. Любые две нормы на конечномерном линейном пространстве эквивалентны.

2.7. Пусть X – номированное пространство, X_0 – его конечномерное линейное подмножество. Тогда X_0 замкнуто в X.

2.8. Сходимость последовательности в пространствах m, c_0, c равномерна по координатам.

2.9. Сходимость последовательности в пространстве $C[a,b]$ эквивалентна равномерной сходимости на отрезке $[a,b]$.

2.10. Сходимость последовательности $\{x_n\}$, $x_n = \{\xi_{nk}\}$ к элементу $x = \{\xi_k\}$ в пространствах ℓ_p эквивалентна выполнению следующих условий:

1) $\forall\, k \quad \xi_{nk} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_k;$

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_0(\varepsilon) \;\forall\, N \geqslant N_0(\varepsilon) \;\forall\, n \;\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |\xi_{nk}|^p < \varepsilon^p.$

2.11. Что означает сходимость последовательности в пространствах $C^k[a,b]$, $k \geqslant 1$?

2.12. Доказать, что если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в пространстве $L_1[a,b]$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $x_{n_k}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} x(t)$ почти всюду на $[a,b]$. Верно ли это утверждение в $L_p[a,b]$, $p > 1$?

2.13. Доказать, что если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в пространстве $L_p[a,b]$ и существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $x_{n_k}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} y(t)$ почти всюду на $[a,b]$, то $x = y$ в $L_p[a,b]$.

2.14. В каких из пространств ℓ_p, c_0, c, m сходятся следующие последовательности:

а) $x_n = (1, 2, \ldots, n, 0, 0 \ldots)$;

б) $x_n = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$;

в) $x_n = \left(\underbrace{\dfrac{1}{n^\alpha}, \dfrac{1}{n^\alpha}, \ldots, \dfrac{1}{n^\alpha}}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$;

г) $x_n = \left(1, \dfrac{1}{\ln 2}, \ldots, \dfrac{1}{\ln n}, 0, 0, \ldots\right)$;

д) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}, 1, 1, \ldots\right)$;

е) $x_n = \left(\dfrac{\sin 1}{2}, \dfrac{2\sin 2}{3}, \ldots, \dfrac{n \sin n}{n+1}, \right.$
$$\left. \sin(n+1), \sin(n+2), \ldots\right);$$

ж) $x_n = \left(1, \dfrac{1}{2^\alpha}, \dfrac{1}{3^\alpha}, \ldots, \dfrac{1}{n^\alpha}, 0, 0, \ldots\right)$?

2.15. Сходятся ли в пространстве $C[0,1]$ следующие последовательности:

а) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$; б) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$?

2.16. Сходятся ли следующие последовательности в пространствах $C[0,1]$, $C^1[0,1]$, $L_1[0,1]$, $\widetilde{L}_1[0,1]$:

а) $x_n(t) = \dfrac{t^n}{n} - \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$; б) $x_n(t) = \dfrac{t^n}{n}$;

в) $x_n(t) = \operatorname{arctg}\left(n\left(t - \dfrac{1}{2}\right)\right)$; г) $x_n(t) = ne^{-nt}$?

2.17. Доказать, что последовательность $x_n(t) = \sin nt$ не сходится в пространстве $L_2[a,b]$.

2.18. Пусть X – нормированное пространство. Доказать, что

$$\|\cdot\|_1 \succeq \|\cdot\|_2 \iff \exists\, C > 0\ \forall\, x \in X \quad \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1.$$

2.19. Доказать, что $\ell_p \subset \ell_q$, если $1 \leqslant p < q < \infty$ и для $x \in \ell_p$ $\|x\|_{\ell_p} \geqslant \|x\|_{\ell_q}$.

2.20. Показать, что

$$\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty, \qquad 1 < p < q < \infty.$$

2.21. Привести примеры, подтверждающие, что вложения в предыдущей задаче строгие.

2.22. Доказать, что

$$\|\cdot\|_{\ell_1} \succeq \|\cdot\|_{\ell_p} \succeq \|\cdot\|_{\ell_q} \succeq \|\cdot\|_{\ell_\infty}, \qquad 1 < p < q < \infty.$$

2.23. Привести примеры, подтверждающие, что отношения в предыдущей задаче строгие, т. е.

$$\|\cdot\|_{\ell_1} \succ \|\cdot\|_{\ell_p} \succ \|\cdot\|_{\ell_q} \succ \|\cdot\|_{\ell_\infty}, \qquad 1 < p < q < \infty.$$

2.24. Доказать, что $L_q[a,b] \subset L_p[a,b]$, если $1 \leqslant p < q < \infty$ и для $x \in L_q[a,b]$

$$\left(\int_a^b \frac{|x(t)|^p}{b-a}\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b \frac{|x(t)|^q}{b-a}\, dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

2.25. Показать, что

$$C^k[a,b] \subset C[a,b] \subset L_q[a,b] \subset L_p[a,b] \subset L_1[a,b],$$

$$1 < p < q < \infty.$$

2.26. Привести примеры, подтверждающие, что вложения в предыдущей задаче строгие.

2.27. Доказать, что

$$\|\cdot\|_{C^k[a,b]} \succeq \|\cdot\|_{C[a,b]} \succeq \|\cdot\|_{L_q[a,b]} \succeq \|\cdot\|_{L_p[a,b]} \succeq \|\cdot\|_{L_1[a,b]},$$

$$1 < p < q < \infty.$$

2.28. Привести примеры, подтверждающие, что отношения в предыдущей задаче строгие, т. е.

$$\|\cdot\|_{C^k[a,b]} \succ \|\cdot\|_{C[a,b]} \succ \|\cdot\|_{L_q[a,b]} \succ \|\cdot\|_{L_p[a,b]} \succ \|\cdot\|_{L_1[a,b]},$$

$$1 < p < q < \infty.$$

2.29. Сравнить нормы $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ на множестве $L_\infty[a,b]$.

2.30. Исследовать на сходимость последовательности

а) $$x_n = \{\xi_{nk}\}_{k=1}^\infty, \quad \xi_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k+1}}, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ \dfrac{1}{\sqrt{k+2}}, & k > n, \end{cases}$$

в пространствах из задачи 2.20;

б) $x_n(t) = n\left(\sqrt{t+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{t}\right)$ в пространствах из задачи 2.25, если $[a,b]=[0,1]$;

в) $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}(1-nt), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} < t \leqslant 1, \end{cases}$

в пространствах $L_p[0,1]$.

2.31. ✩ Доказать, что последовательность $x_n(t) = \sin nt$ не сходится в пространствах $L_p[0,1]$.

2.32. а) При каких значениях $\alpha \in \mathbb{R}$ и p следующие последовательности сходятся к нулю в пространствах $L_p[0,1]$:

$$x_n(t) = n^\alpha e^{-nt}, \qquad y_n(t) = n^\alpha \sin nt?$$

б) При каких значениях α и p эти последовательности имеют предел в пространствах $L_p[0,1]$?

2.33. В пространстве $C^m[0,1]$ сравнить нормы

$$\|x\|_0 = \sum_{n=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} |x^{(n)}(t)|,$$

$$\|x\|_1 = \max_{0\leqslant n\leqslant m} \left(\max_{t\in[a,b]} |x^{(n)}(t)|\right),$$

$$\|x\|_2 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

2.34. Доказать эквивалентность следующих норм:

а) в пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций:

$$\|x\|_0 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|,$$
$$\|x\|_1 = |x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|,$$
$$\|x\|_2 = \max_{t\in[a,b]} \left(|x(t)| + |x'(t)|\right),$$
$$\|x\|_3 = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \int_a^b |x(t)|\,dt;$$

б) в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций:

$$\|x\|_0 = \sum_{n=0}^{2} \max_{t\in[a,b]} |x^{(n)}(t)|,$$
$$\|x\|_1 = |x(a)| + |x'(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x''(t)|,$$
$$\|x\|_2 = |x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x''(t)|,$$
$$\|x\|_3 = \max_{t\in[a,b]} |x''(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2},$$
$$\|x\|_4 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x''(t)|.$$

2.35. Проверить, что отображения

$$\rho_1(x,y) = \ln(1+|x-y|),$$
$$\rho_2(x,y) = |x-y+\operatorname{sign} x - \operatorname{sign} y|,$$
$$\rho_3(x,y) = \left|\int_x^y e^{-t^2}\,dt\right|$$

из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$ являются метриками. Сравнить их.

2.36. На множестве ограниченных последовательностей сравнить метрики ρ_s и ρ_∞, где

$$\rho_s(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|},$$
$$\rho_\infty(x,y) = \sup_k |\xi_k - \eta_k|.$$

2.37. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – эквивалентные нормы на линейном пространстве X. Доказать следующие утверждения:

а) если множество $M \subset X$ открыто (замкнуто) в смысле одной из этих норм, то M открыто (замкнуто) в смысле другой;

б) если множество $M \subset X$ ограничено в смысле одной из этих норм, то M ограничено в смысле другой.

2.38. Пусть ρ_1 и ρ_2 – метрики, заданные на X. Доказать, что ρ_1 не слабее ρ_2 тогда и только тогда, когда всякое множество открытое (замкнутое) в $\langle X, \rho_2 \rangle$ является открытым (замкнутым) в $\langle X, \rho_1 \rangle$.

2.39. Пусть на множестве X заданы две эквивалентные метрики. Какие из свойств множества $M \subset X$ сохраняются при переходе от одной метрики к другой: открытость, замкнутость, ограниченность?

2.40. Описать все метрические пространства, в которых всякое открытое множество является замкнутым.

2.41. Доказать, что на любом бесконечномерном линейном пространстве можно задать две несравнимые нормы.

Тема 3. Плотность, сепарабельность

Определение 3.1. Пусть M и N – подмножества метрического пространства X. Множество M называется *плотным* в множестве N, если $N \subset \overline{M}$. В частности, множество M называется *всюду плотным* в метрическом пространстве X, если $\overline{M} = X$.

Определение 3.2. Множество M называется *нигде не плотным* в метрическом пространстве X, если в $\overline{M}$ нет внутренних точек, т. е. $\overset{\circ}{\overline{M}} = \varnothing$.

Определение 3.3. Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем есть не более чем счетное всюду плотное множество.

Пример 3.1. Пусть M – множество алгебраических многочленов с нулевым свободным членом,

$$N = \{x \in C[0,1] \colon x(0) = 0\}.$$

Доказать, что множество M плотно в множестве N из пространства $C[0,1]$ над $\mathbb{R}$.

Решение. Множество M плотно в N, если $N \subset \overline{M}$, т. е. любой элемент $x \in N$ либо принадлежит M, либо является предельной точкой M. Это означает, что для каждого элемента $x \in N$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $x_\varepsilon \in M$ со свойством $x_\varepsilon \in B(x, \varepsilon)$ или, что то же самое, для каждого $x \in N$ найдется последовательность $\{x_n\} \subset M$ такая, что $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в пространстве $C[0,1]$.

Пусть $x \in N$. По теореме Вейерштрасса существует последовательность многочленов $\{p_n\}$, равномерно сходящаяся к x, т. е. сходящаяся по норме пространства $C[0,1]$ (см. задачу 2.9). Рассмотрим последовательность сдвинутых многочленов $x_n(t) = p_n(t) - p_n(0)$. Ясно, что $x_n(0) = 0$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ также сходится к x в $C[0,1]$. Действительно,

$$\begin{aligned}\|x_n - x\| = \|p_n - p_n(0) - x\| = \|p_n - x - (p_n(0) - x(0))\| \leqslant \\ \leqslant \|p_n - x\| + \|p_n(0) - x(0)\| \leqslant 2\|p_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Итак, множество M плотно в N.

Отметим, что нетрудно построить последовательность $\{x_n\}$ конструктивно. Для функции $x \in C[0,1]$ рассмотрим последовательность ее многочленов Бернштейна

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}, \quad n \geqslant 0.$$

Известно [2, гл. 4, § 5, теорема 1], что она равномерно на $[0,1]$ сходится к x. Далее, если $x \in N$, то

$$B_n(0) = x(0) = 0.$$

Следовательно, в этом случае $B_n \in M$ и $\{B_n\}$ сходится к x в $C[0,1]$. ✌

Пример 3.2. Доказать, что множество

$$M = \{x \in C[a,b] \colon x(a) = x(b)\}$$

всюду плотно в пространстве $L_p[a,b]$ над $\mathbb{R}$.

Решение. Множество M всюду плотно в пространстве $L_p[a,b]$, если $\overline{M} = L_p[a,b]$. Следовательно, нужно показать, что для каждой функции $x \in L_p[a,b]$ и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $z \in M$ такая, что $\|x - z\|_p < \varepsilon$.

Возьмем $x \in L_p[a,b]$ и $\varepsilon > 0$. Так как множество $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций плотно в пространстве $L_p[a,b]$ (см. задачу 3.6), то для x существует функция $y \in C[a,b]$ такая, что $\|x - y\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Для y построим непрерывную на $[a,b]$ функцию z следующего вида:

$$z(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [a, b-\delta], \\ y(a), & t = b, \\ \text{линейна}, & t \in [b-\delta, b]. \end{cases}$$

Так как $z(b) = y(a) = z(a)$, то $z \in M$. Подберем δ так, чтобы $\|y - z\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, что

$$\max_{t\in[a,b]} |z(t)| \leqslant \max_{t\in[a,b]} |y(t)| = \|y\|_{C[a,b]} = R.$$

Отсюда

$$\|y - z\|_p = \left(\int_a^b |y(t) - z(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{b-\delta}^b |y(t) - z(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant 2R\delta^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

если $\delta < \left(\dfrac{\varepsilon}{4R}\right)^p$. Итак, мы нашли функцию $z \in M$ такую, что

$$\|x - z\|_p \leqslant \|x - y\|_p + \|y - z\|_p < \varepsilon.$$

✌

Пример 3.3. Доказать, что множество c_0 сходящихся к нулю последовательностей нигде не плотно в пространстве c.

Решение. Надо доказать, что $\overset{\circ}{\overline{c_0}}$ есть пустое множество в пространстве c. Так как c_0 – замкнутое подмножество в c (см.

задачу 1.53), то $\overline{\overset{\circ}{c_0}} = \overset{\circ}{c_0}$. Надо показать, что для всякого элемента $x_0 \in c_0$ и всякого $\varepsilon > 0$ шар $B(x_0, \varepsilon) \subset c$ не принадлежит множеству c_0.

Для $x_0 = \{\xi_k^0\} \in c_0$ имеем $\xi_k^0 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Значит, для $\varepsilon > 0$ найдется номер k_0 такой, что $|\xi_k^0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для $k > k_0$.

Рассмотрим $x = \{\xi_k\}$:

$$\xi_k = \begin{cases} \xi_k^0, & k \leqslant k_0, \\ \dfrac{\varepsilon}{4}, & k > k_0. \end{cases}$$

Тогда $x \notin c_0$, $x \in c$ и $x \in B(x_0, \varepsilon)$, так как $|\xi_k - \xi_k^0| \leqslant \dfrac{3}{4}\,\varepsilon < \varepsilon$. Следовательно, $B(x_0, \varepsilon) \not\subset c_0$. ✌

3.1. Пусть M и N – множества, всюду плотные в метрическом пространстве X. Возможно ли, что $M \cap N = \varnothing$?

3.2. Будут ли множество P_n всех алгебраических многочленов степени не выше n и множество P всех алгебраических многочленов

а) нигде не плотными в пространстве $C[a, b]$,

б) всюду плотными в пространстве $C[a, b]$?

3.3. Показать, что множество всех финитных последовательностей не является всюду плотным в пространствах c и ℓ_∞; всюду плотно в пространствах c_0 и ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$.

☞ Доказать утверждения 3.4–3.7.

3.4. Множество P всех алгебраических многочленов всюду плотно в пространстве $C^1[a, b]$.

3.5. Множество кусочно линейных непрерывных функций всюду плотно в пространстве $C[a, b]$ над $\mathbb{R}$.

3.6. Множество $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций всюду плотно в пространстве $L_p[a,b]$, $1 \leqslant p < \infty$.

3.7. а) Множество алгебраических многочленов от t^2 всюду плотно в пространстве $C[0,1]$;

б) множество алгебраических многочленов от t, равных нулю при $t = 1$, всюду плотно в множестве

$$M = \{x \in C[0,1] \colon x(1) = 0\};$$

в) множество

$$M = \{x \in C[0,1] \colon x(0) = 0\}$$

всюду плотно в пространствах $\widetilde{L}_1[0,1]$ и $L_1[0,1]$, но не является всюду плотным в пространстве $C[0,1]$;

г) множество

$$M = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0 \right\}$$

всюду плотно в пространстве ℓ_2;

д) множество

$$M = \left\{ x \in L_2[0,1] \colon x(t) = 0,\ t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \right\}$$

нигде не плотно в пространстве $L_2[0,1]$;

е) множество тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad n \in \mathbb{N},$$

всюду плотно в пространствах $L_p[-\pi,\pi]$.

☞ Пусть X – метрическое пространство. Доказать утверждения 3.8–3.10.

3.8. Дополнение к нигде не плотному в X множеству всюду плотно. Справедливо ли обратное утверждение?

3.9. Дополнение к открытому всюду плотному в X множеству нигде не плотно.

3.10. Замыкание нигде не плотного в X множества нигде не плотно.

3.11. Привести пример метрического пространства X и множества в нем, которое не является нигде не плотным в X и не является всюду плотным в X.

☞ Доказать утверждения 3.12–3.19.

3.12. ✭ Метрическое пространство несепарабельно тогда и только тогда, когда в нем существует более чем счетное множество попарно непересекающихся шаров некоторого радиуса $r > 0$.

3.13. Пространства ℓ_p^n $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$, c_0, c, $C^{(k)}[a,b]$, $C[a,b]$, $L_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ сепарабельны.

3.14. Пространство ℓ_∞ несепарабельно.

3.15. Пространство s сепарабельно.

3.16. Мощность сепарабельного метрического пространства не может быть больше, чем континуум.

3.17. Конечномерное нормированное пространство сепарабельно.

3.18. Пусть L – замкнутое линейное подмножество в нормированном пространстве X, $L \neq X$. Тогда L нигде не плотно в X.

3.19. Пусть метрические пространства X и Y гомеоморфны. Тогда если одно из них сепарабельно, то сепарабельно и другое.

Тема 4. Полные метрические и нормированные пространства, пополнения

Определение 4.1. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического (нормированного) пространства X называется *фундаментальной*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)\ \forall\, n, m > N(\varepsilon) \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Определение 4.2. Метрическое (нормированное) пространство X называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится. Полное метрическое пространство называют также *пространством Фреше*, полное нормированное пространство – *банаховым пространством.*

Определение 4.3. Метрические пространства X и Y называются *изометричными* ($X \cong Y$), если существует биекция $f\colon X \to Y$ такая, что

$$\forall\, x_1, x_2 \in X \quad \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2).$$

Нормированные пространства X и Y называются *линейно изометричными* ($X \cong Y$), если существует линейная биекция $f\colon X \to Y$ такая, что

$$\forall\, x \in X \quad \|f(x)\|_Y = \|x\|_X.$$

Теорема 4.1 (о пополнении пространства). *Для любого метрического пространства $\langle X, \rho_X \rangle$ существуют полное метрическое пространство $\langle Y, \rho_Y \rangle$ и подмножество $Y_1 \subset Y$ такие, что $\langle X, \rho_X \rangle \cong \langle Y_1, \rho_Y \rangle$ и $\overline{Y_1} = Y$.*

Для любого нормированного пространства $\langle X, \|\cdot\|_X \rangle$ существуют полное нормированное пространство $\langle Y, \|\cdot\|_Y \rangle$ и линейное многообразие $Y_1 \subset Y$ такие, что $\langle X, \|\cdot\|_X \rangle \cong \langle Y_1, \|\cdot\|_Y \rangle$ и $\overline{Y_1} = Y$.

Определение 4.4. Полное метрическое (нормированное) пространство Y из теоремы 4.1 называется *пополнением* метрического (нормированного) пространства X.

Пример 4.1. Пусть $X = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Проверить, что

$$\rho(x, y) = |\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 2y|$$

есть метрика на X. Доказать, что $\langle X, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство.

Решение. Метрика ρ порождается убывающей функцией $f(t) = \operatorname{ctg} 2t$. Следовательно, f – биекция $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ на $\mathbb{R}$, а значит, $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Справедливость двух других аксиом метрики очевидна. Итак, $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство.

Полагая $f(x) = u$, $f(y) = v$, получаем

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)| = |u - v| = \rho_{|\cdot|}(u, v) = \rho_{|\cdot|}(f(x), f(y)).$$

Так как f – биекция X на $\mathbb{R}$ и $\rho(x, y) = \rho_{|\cdot|}(f(x), f(y))$, то метрические пространства $\langle X, \rho \rangle$ и $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$ изометричны. Пространство $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$ полное, значит, $\langle X, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство (см. задачу 4.6). ✌

Пример 4.2. Показать, что пространство $\langle X, \rho\rangle$, где $X = (0, +\infty)$,

$$\rho(x, y) = |x \operatorname{sign}(x-1) - y \operatorname{sign}(y-1)|,$$

является неполным метрическим пространством. Найти его пополнение.

Решение. Первая аксиома метрики верна, так как метрика ρ порождается функцией $f(t) = t \operatorname{sign}(t-1)$, которая является биекцией множества X на множество $M = (-1, 0] \cup (1, +\infty)$. Справедливость двух других аксиом метрики очевидна.

Полагая $f(x) = u$, $f(y) = v$, получаем

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)| = |u - v| = \rho_{|\cdot|}(u, v) = \rho_{|\cdot|}(f(x), f(y)).$$

Так как f – биекция X на M и $\rho(x, y) = \rho_{|\cdot|}(f(x), f(y))$, то метрические пространства $\langle X, \rho\rangle$ и $\langle M, \rho_{|\cdot|}\rangle$ изометричны. Пространство $\langle X, \rho\rangle$ полно тогда и только тогда, когда $\langle M, \rho_{|\cdot|}\rangle$ – полное метрическое пространство (см. задачу 4.6).

Так как $M \subset \mathbb{R}$, метрическое пространство $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|}\rangle$ полное, а M не является замкнутым множеством в этом пространстве, то пространство $\langle M, \rho_{|\cdot|}\rangle$ не является полным (см. задачу 4.4), а его пополнение – это пространство $\langle \overline{M}, \rho_{|\cdot|}\rangle = \langle [-1, 0] \cup [1, +\infty), \rho_{|\cdot|}\rangle$ (см. задачу 4.5). Следовательно, $\langle X, \rho\rangle$ не является полным метрическим пространством, а его пополнение – это пространство $\langle Y, \rho_{|\cdot|}\rangle$, где $Y = [-1, 0] \cup \cup [1, +\infty)$ (см. определение 4.4). ✌

Пример 4.3. Описать пополнение множества функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$, относительно нормы

$$\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |x'(t)|.$$

Решение. Введем следующие обозначения:

$$X = C^1[0, 1], \qquad Y = \left\{x \in C[0, 1] \colon x \in C^1\left[0, \tfrac{1}{2}\right]\right\},$$

$$\|x\|_X = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |x'(t)|.$$

Докажем, что пространство $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ не является полным, а $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ – полное нормированное пространство и является пополнением пространства $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$.

Пусть для $n > 4$

$$x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{n} - \sqrt{\dfrac{2}{n^2} - \left(t - \dfrac{3}{4}\right)^2}, & \left|t - \dfrac{3}{4}\right| \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ \left|t - \dfrac{3}{4}\right|, & t \in \left[0, \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{n}\right) \cup \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $x_n \in X$. Обозначим $x(t) = \left|t - \dfrac{3}{4}\right|$. Очевидно, $x \notin X$ и $x \in Y$. Так как

$$\|x_n - x\|_X = \max_{t:\left|t-\frac{3}{4}\right|\leqslant\frac{1}{n}} \left|\frac{2}{n} - \sqrt{\frac{2}{n^2} - \left(t - \frac{3}{4}\right)^2} - \left|t - \frac{3}{4}\right|\right| \leqslant \frac{3+\sqrt{2}}{n},$$

то $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x,\ n \to \infty$. Отсюда следует, что $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в пространстве $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ и сходится к $x \notin X$. Значит, $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ не является банаховым пространством.

Покажем, что пространство $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ банахово. Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в этом пространстве. Так как

$$\|x_n - x_m\|_{C[0,1]} \leqslant \|x_n - x_m\|_X,$$

то $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в банаховом пространстве $C[0,1]$. Следовательно,

$$x_n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} x \in C[0,1], \quad n \to \infty,$$

(см. задачу 2.9). Аналогично, так как

$$\|x_n - x_m\|_{C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]} \leqslant \|x_n - x_m\|_X,$$

то $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в банаховом пространстве $C^1\left[0, \frac{1}{2}\right]$, значит,

$$x_n \overset{\left[0,\frac{1}{2}\right]}{\rightrightarrows} y, \quad x_n' \overset{\left[0,\frac{1}{2}\right]}{\rightrightarrows} y' \in C\left[0, \tfrac{1}{2}\right], \quad n \to \infty$$

(см. задачу 2.11). Поскольку $x(t) = y(t)$ для $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, то на этом отрезке существует $x'(t) = y'(t)$ и $x \in Y$, а $\|x_n - x\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Итак, фундаментальная в пространстве $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ последовательность $\{x_n\}$ сходится по $\|\cdot\|_X$ к элементу $x \in Y$. Полнота пространства $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ доказана.

Докажем, что $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ – пополнение пространства $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ относительно нормы $\|\cdot\|_X$. Для этого нужно показать, что замыкание X по $\|\cdot\|_X$ есть Y.

Для любого $y \in Y$ существует последовательность $\{p_n\}$ алгебраических многочленов: $p_n \overset{\left[\frac{1}{2},1\right]}{\rightrightarrows} y$, $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность

$$y_n(t) = \begin{cases} y(t), & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ p_n(t) - p_n\left(\dfrac{1}{2}\right) + y\left(\dfrac{1}{2}\right) + & \\ + \left(y'\left(\dfrac{1}{2}\right) - p_n'\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) \dfrac{\sin c_n\left(t - \dfrac{1}{2}\right)}{c_n}, & t \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]; \end{cases}$$

здесь c_n – некоторая отличная от нуля величина, которая будет специальным образом выбрана ниже. Функции y_n непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, 1]$, т. е. $y_n \in X$.

На отрезке $\left[\frac{1}{2},1\right]$ выполняются следующие соотношения:

$$|y_n(t)-y(t)| = \left|\big(p_n(t)-y(t)\big) + \left(y\left(\frac{1}{2}\right) - p_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \left(y'\left(\frac{1}{2}\right) - p_n'\left(\frac{1}{2}\right)\right)\frac{\sin c_n(t-\frac{1}{2})}{c_n}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \big|p_n(t)-y(t)\big| + \left|y\left(\frac{1}{2}\right) - p_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| +$$
$$+ \left|y'\left(\frac{1}{2}\right) - p_n'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \cdot \frac{1}{|c_n|}.$$

Полагая
$$c_n = n\cdot\left(1 + \left|y'\left(\frac{1}{2}\right) - p_n'\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right),$$
получим
$$\max_{t\in\left[\frac{1}{2},1\right]} |y_n(t)-y(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
а значит, и
$$\max_{t\in[0,1]} |y_n(t)-y(t)| = \max_{t\in\left[\frac{1}{2},1\right]} |y_n(t)-y(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Итак, для всякого $y\in Y$ существует $\{y_n\}\in X$ такая, что
$$\|y_n-y\|_X = \max_{t\in[0,1]} |y_n(t)-y(t)| + \max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |y_n'(t)-y'(t)| =$$
$$= \max_{t\in[0,1]} |y_n(t)-y(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, $\overline{X} = Y$ относительно $\|\cdot\|_X$. ✌

☞ Доказать утверждения 4.1–4.10.

4.1. Всякая фундаментальная последовательность в метрическом пространстве ограничена.

4.2. Если $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в метрическом пространстве, то $\rho(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.

4.3. Метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда всякая фундаментальная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

4.4. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – полное метрическое пространство и $M \subset X$. Пространство $\langle M, \rho\rangle$ полно тогда и только тогда, когда множество M замкнуто в X.

4.5. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – полное метрическое пространство, $M \subset X$ и пространство $\langle M, \rho\rangle$ не является полным. Тогда пополнением этого пространства является пространство $\langle \overline{M}, \rho\rangle$.

4.6. Если X и Y – изометричные метрические пространства и одно из них полно, то полно и другое.

4.7. Пусть линейные нормированные пространства X и Y линейно гомеоморфны. Тогда, если одно из них является полным (сепарабельным), то и другое является полным (сепарабельным).

4.8. Нормированные пространства ℓ_p^n, c_0, c, ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $C[a, b]$, $C^k[a, b]$, $L_p[a, b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ полны.

4.9. Метрическое пространство s является полным.

4.10. Конечномерное нормированное пространство полно.

4.11. Показать, что пространство $\widetilde{L}_1[a, b]$ неполно. Найти его пополнение.

4.12. На множестве X финитных числовых последовательностей заданы нормы

а) $\|x\|_1 = \sup\limits_k |\xi_k|$, б) $\|x\|_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$.

Показать, что пространства $\langle X, \|\cdot\|_1\rangle$ и $\langle X, \|\cdot\|_2\rangle$ не являются полными. Найти их пополнения.

4.13. В цепочках пространств из задач 2.20, 2.25 найти пополнение предыдущего по норме последующего. Например, для пары $\ell_1 \subset \ell_p$ нужно найти пополнение пространства $X = \{x = \{\xi_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty\}$ по норме $\|x\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p)^{1/p}$.

4.14. Описать пополнение пространства вещественных алгебраических многочленов от переменной t, снабженного нормой

а) $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)|$;

б) $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |p'(t)|$;

в) ✯ $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)| + |p'(a)|$;

г) ✯ $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)| + \max\limits_{t\in[c,d]} |p'(t)|$;

д) $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |p''(t)|$;

е) ✯ $\|p\| = \max\limits_{k\in\{0\}\cup\mathbb{N}} \dfrac{|p^{(k)}(0)|}{k!}$;

ж)✯ $\|p\| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{|p^{(k)}(0)|}{k!} + \max\limits_{t\in[-1,1]} |p(t)|$.

4.15. Рассмотрим линейные пространства функций, определенных на вещественной прямой $\mathbb{R}$:

а) $C(\mathbb{R})$ – все ограниченные непрерывные функции;

б) $C_0(\mathbb{R})$ – все непрерывные функции, у которых $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$;

в) $C_1(\mathbb{R})$ – все финитные непрерывные функции (т. е. функции, равные нулю вне некоторого конечного интервала).

В этих пространствах введем норму

$$\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|.$$

Будут ли эти пространства полными? Будут ли они сепарабельными?

4.16. На множестве натуральных чисел положим

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n+m}, & n \neq m, \\ 0, & n = m. \end{cases}$$

Доказать, что $\langle \mathbb{N}, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство. Построить последовательность замкнутых вложенных шаров, имеющих пустое пересечение.

4.17. Доказать, что в полном линейном нормированном пространстве любая последовательность замкнутых вложенных шаров имеет непустое пересечение.

4.18. Пусть $f\colon M \to \mathbb{P}$ – инъективная функция, $\rho_f(x,y) = |f(x)-f(y)|$. Доказать, что пространство $\langle M, \rho_f \rangle$ полно тогда и только тогда, когда множество $f(M)$ замкнуто в пространстве $\langle \mathbb{P}, \rho_{|\cdot|} \rangle$.

4.19. Проверить, что $\langle X, \rho_f \rangle$, где $\rho_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$, – метрическое пространство. Является ли оно полным? Если нет, описать его пополнение:

а) $X = \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{arctg} x$;

б) $X = \mathbb{R},\ f(x) = x^5$;

в) $X = [0,\infty),\ f(x) = \ln(x+1)$;

г) $X = [0,\infty),\ f(x) = e^{-x}$;

д) $X = [-1,1),\ f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1,0], \\ x+1, & x \in (0,1); \end{cases}$

е) $X = [-1, 1),\ f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0), \\ x + 1, & x \in [0, 1); \end{cases}$

ж) $X = \mathbb{N},\ f(n) = \dfrac{1}{n}$.

Будут ли эквивалентны метрики для пар: «а» и «б»; «в» и «г»; «д» и «е»?

4.20. ✯ Доказать, что метрическое пространство $\langle \mathbb{N}, \rho \rangle$, где $\rho(m, n) = |e^{in} - e^{im}|$, не является полным. Найти его пополнение.

4.21. На множестве X заданы две эквивалентные метрики. Сохраняются ли свойства полноты и сепарабельности при переходе к эквивалентной метрике?

Тема 5. Непрерывные и равномерно непрерывные отображения. Сжимающие отображения

Определение 5.1. Пусть X и Y – метрические пространства. Отображение $F\colon X \to Y$ называется

✓ *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\, x \in X$$

$$\rho_X(x, x_0) < \delta(\varepsilon)\ \Rightarrow\ \rho_Y(Fx, Fx_0) < \varepsilon;$$

✓ *непрерывным на множестве* $M \subset X$, если оно непрерывно в каждой точке множества M;

✓ *равномерно непрерывным на множестве* $M \subset X$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\, x_1, x_2 \in M$$

$$\rho_X(x_1, x_2) < \delta(\varepsilon)\ \Rightarrow\ \rho_Y(Fx_1, Fx_2) < \varepsilon.$$

Определение 5.2. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство. Отображение $F\colon X \to X$ называется *сжимающим*, если

$$\exists\, \alpha \in [0,1)\ \forall\, x, y \in X \quad \rho(Fx, Fy) \leqslant \alpha \rho(x, y).$$

Определение 5.3. Пусть $F\colon X \to X$. Точка $x^* \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения F, если $Fx^* = x^*$.

Теорема 5.1 (теорема Банаха). *Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство, $F\colon X \to X$ – сжимающее отображение. Тогда существует единственная неподвижная точка отображения F.*

Пример 5.1. Доказать, что отображение

$$F\colon C[-1,1] \to L_1[-1,1],$$

действующее по правилу

$$(Fx)(t) = (2t-5)x(t) - 3\int_{-1}^{1} 2^{t-s} \sin x(s)\, ds,$$

равномерно непрерывно на $C[-1,1]$.

Решение. Представим отображение F в виде $F = G + H$, где

$$(Gx)(t) = (2t-5)x(t), \quad (Hx)(t) = -3\int_{-1}^{1} 2^{t-s} \sin x(s)\, ds.$$

Докажем, что отображения G и H равномерно непрерывны на $C[-1,1]$, тогда и отображение F будет равномерно непрерывным на $C[-1,1]$. Пусть $x_1, x_2 \in C[-1,1]$. Тогда

$$|(Gx_1)(t) - (Gx_2)(t)| = |(2t-5)(x_1(t) - x_2(t))| \leqslant$$
$$\leqslant |2t-5| \cdot |x_1(t) - x_2(t)| \leqslant 7\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]}$$

и, следовательно,

$$\|Gx_1 - Gx_2\|_{L_1[-1,1]} = \int_{-1}^{1} |(Gx_1)(t) - (Gx_2)(t)|dt \leqslant$$
$$\leqslant 14\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]}.$$

Из этой оценки следует равномерная непрерывность G на $C[-1,1]$. Для отображения H имеем

$$|(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t)| = \left|3\int_{-1}^{1} 2^{t-s}(\sin x_1(s) - \sin x_2(s))\,ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant 3\int_{-1}^{1} 2^{t-s}\cdot 2\left|\sin\frac{x_1(s)-x_2(s)}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x_1(s)+x_2(s)}{2}\right| ds \leqslant$$
$$\leqslant 6\cdot 2^t\int_{-1}^{1}|x_1(s)-x_2(s)|\,ds \leqslant 12\|x_1-x_2\|_{C[-1,1]}\cdot 2^t.$$

Таким образом,

$$\|Hx_1 - Hx_2\|_{L_1[-1,1]} = \int_{-1}^{1} |(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t)|dt \leqslant$$
$$\leqslant 12\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]}\int_{-1}^{1} 2^t\,dt \leqslant 48\cdot\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]}$$

и отображение H также равномерно непрерывно на $C[-1,1]$. ✌

Пример 5.2. Исследовать на равномерную непрерывность и непрерывность отображения

а) $(Fx)(t) = e^{-|x(t)|}$; б) $(Gx)(t) = x^2(t) - x(t) + 1$, действующие из $C[a,b]$ в $C[a,b]$.

Решение. Так как функции

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{и} \quad g(x) = x^2 - x + 1$$

непрерывны на $\mathbb{R}$, то порождаемые ими отображения F и G непрерывны в $C[a,b]$, а равномерная непрерывность этих отображений на $C[a,b]$ эквивалентна равномерной непрерывности функций f и g на $\mathbb{R}$ (см. задачу 5.5).

а) Функция f дифференцируема на $(-\infty, 0]$ и на $[0, +\infty)$. На каждом из этих множеств $|f'(x)| \leqslant 1$. Следовательно, функция f равномерно непрерывна на $(-\infty, 0]$ и на $[0, +\infty)$. В силу непрерывности f на $\mathbb{R}$, она равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Следовательно, отображение F равномерно непрерывно на $C[a,b]$.

б) Функция $g(x) = x^2 - x + 1$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, так как последовательности $x'_n = n$ и $x''_n = n + \dfrac{1}{n}$ обладают свойством $|x'_n - x''_n| = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но

$$|g(x'_n) - g(x''_n)| = |x'_n - x''_n| \cdot |x'_n + x''_n - 1| = \\ = \frac{1}{n}\left|2n + \frac{1}{n} - 1\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \neq 0.$$

Значит, и отображение G из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, порождаемое функцией g, не является равномерно непрерывным.

Приведем прямое доказательство непрерывности отображения G на $C[a,b]$ (без ссылки на задачу 5.5). Пусть $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in C[a,b]$, тогда для любой функции $x \in C[a,b]$ со свойством $\|x - x_0\| \leqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned}|(Gx)(t) - (Gx_0)(t)| &= |(x^2(t) - x(t) + 1) - (x_0^2(t) - x_0(t) + 1)| = \\ &= |x(t) - x_0(t)| \cdot |x(t) + x_0(t) - 1| \leqslant \\ &\leqslant |x(t) - x_0(t)| \cdot (|x(t) - x_0(t)| + 2|x_0(t)| + 1).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|Gx - Gx_0\| &= \max_{t\in[a,b]} |G(x)(t) - G(x_0)(t)| \leqslant \\ &\leqslant \|x - x_0\| \cdot (\|x - x_0\| + 2\|x_0\| + 1) \leqslant \\ &\leqslant (2 + 2\|x_0\|)\|x - x_0\|.\end{aligned}$$

Из этой оценки следует, что отображение G непрерывно на $C[a,b]$ $\left(\delta(\varepsilon) = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2 + 2\|x_0\|}\right\}\right)$. ✌

Пример 5.3. Доказать, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$23 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^{k+m}} \xi_k - \frac{2}{m} = \xi_m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

имеет единственное решение в пространстве ℓ_2.

Решение. Введем оператор $A\colon \ell_2 \to \ell_2$,

$$Ax = \left\{ 23 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^{k+m}} \xi_k \right\}_{m=1}^{\infty}.$$

Это оператор сжатия (см. задачу 5.16 «а»), так как

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \left(\frac{23}{5^{k+m}} \right)^2 = 23^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{25^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{25^m} = \frac{23^2}{24^2} < 1.$$

Полагая $y_0 = \left\{ \frac{2}{m} \right\}_{m=1}^{\infty}$, $Bx = Ax - y_0$, запишем исходную систему уравнений в операторном виде:

$$Bx = x. \tag{5.1}$$

Так как

$$\rho(Bx, By) = \|Bx - By\| = \|Ax - Ay\| = \rho(Ax, Ay)$$

и A – оператор сжатия, то и B – оператор сжатия. Следовательно, по теореме Банаха (см. теорему 5.1) операторное уравнение (5.1), а значит, и исходная система уравнений, имеет единственное решение в пространстве ℓ_2. ✌

5.1. Является ли непрерывным на своей области определения отображение $Fx = x(1)$, если

а) $F\colon C[0,1] \to \langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$; б) $F\colon \widetilde{L}_1[0,1] \to \langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$?

5.2. Исследовать на непрерывность и равномерную непрерывность отображение $(Fx)(t) = x^2(t)$ на области определения:

а) $F\colon C[0,1] \to C[0,1]$; б) $F\colon C[0,1] \to \widetilde{L}_1[0,1]$;

в) $F\colon \widetilde{L}_1[0,1] \to \widetilde{L}_1[0,1]$.

5.3. Показать, что отображение $(Fx)(t) = x'(t) - 3x(t)$ непрерывно на своей области определения, если $F\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$, и не является непрерывным, если $F\colon C^1[a,b] \subset C[a,b] \to C[a,b]$.

5.4. Пусть X, Y – метрические пространства, $F\colon X \to Y$. Докажите, что F не является равномерно непрерывным на X тогда и только тогда, когда найдутся последовательности $\{x'_n\}$, $\{x''_n\} \subset X$ такие, что $\rho_X(x'_n, x''_n) \to 0$, а $\rho_Y(Fx'_n, Fx''_n) \not\to 0$ при $n \to \infty$.

5.5. Пусть отображение $F\colon C[a,b] \to C[a,b]$ определено формулой $(Fx)(t) = f(x(t))$, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Доказать, что отображение F непрерывно (равномерно непрерывно) на $C[a,b]$ тогда и только тогда, когда функция f непрерывна (равномерно непрерывна) на $\mathbb{R}$.

5.6. Исследовать на равномерную непрерывность на $C[0,2]$ отображение $F\colon C[0,2] \to C[0,2]$, если

а) $(Fx)(t) = \sqrt[3]{x(t)}$;

б) $(Fx)(t) = x^3(t)$;

в) $(Fx)(t) = \operatorname{arctg} x(t)$;

г) $(Fx)(t) = \cos x^2(t)$;

д) $(Fx)(t) = \dfrac{x^2(t)}{1 + x^4(t)}$;

е) $(Fx)(t) = \displaystyle\int_0^2 (t+s)\ln(1 + 3x^2(s))\,ds$.

5.7. Исследовать на равномерную непрерывность на $C[0,2]$ отображения «а»–«е» из задачи 5.6, если $F\colon C[0,2] \to \widetilde{L}_1[0,2]$.

5.8. Исследовать на непрерывность на области определения отображения

а) $F\colon C^1[0,3] \subset C[0,3] \to C[0,3]$,
$$(Fx)(t) = x(2) - 5\int_0^t 2^s x'(s)ds;$$

б) $F\colon C^1[0,1] \to C^1[0,1]$,
$$(Fx)(t) = 3x(t) + \int_0^t \ln(1+s)\,x(s)\,ds;$$

в) $F\colon C^1[0,1] \subset C[0,1] \to C^1[0,1]$,
$$(Fx)(t) = 3x(t) + \int_0^t \ln(1+s)\,x(s)\,ds;$$

г) $F\colon C[0,1] \to C^1[0,1]$,
$$(Fx)(t) = \cos t \cdot \int_t^1 (s^2+4)\,x(s)\,ds.$$

5.9. Будет ли отображение $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сжимающим на множестве $M \subset \mathbb{R}$, если $Fx = x^3$, метрика на $\mathbb{R}$ естественная,

а) $M = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$; б) $M = [0,2]$; в) $M = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$?

5.10. Пусть вещественная функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Доказать, что f – сжимающее отображение в пространстве $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|}\rangle$ тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in [0,1)$ такое, что $|f'(x)| \leqslant \alpha$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

5.11. Пусть вещественная функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Доказать, что уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение на $\mathbb{R}$, если
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < 1 \qquad \text{или} \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| > 1.$$

Являются ли эти условия необходимыми для существования единственного решения?

5.12. Доказать, что уравнение $2xe^x = 1$ имеет единственное решение, принадлежащее промежутку $(0, 1)$.

5.13. Достаточно ли для существования неподвижной точки отображения f в полном метрическом пространстве выполнения условия $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ для всех $x \neq y$?

☞ Доказать утверждения 5.14–5.21.

5.14. Пусть $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x$. Для любых x, y существует постоянная $\alpha < 1$ такая, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|$, но отображение f не имеет неподвижных точек.

5.15. Пусть $A\colon \ell_p^n \to \ell_p^n$, $Ax = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\xi_j \right\}_{k=1}^{n}$. Тогда A – сжимающее отображение в пространстве ℓ_p^n, если

а) $\sum\limits_{k,j=1}^{n} |a_{kj}|^2 < 1$ при $p = 2$;

б) $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}| < 1$ при $p = \infty$;

в) $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{kj}| < 1$ при $p = 1$.

5.16. Пусть $A\colon \ell_p \to \ell_p$, $Ax = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{kj}\xi_j \right\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда A – сжимающее отображение в пространстве ℓ_p, если

а) $\sum\limits_{k,j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 < 1$ при $p = 2$;

б) $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$ при $p = \infty$;

в) $\sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$ при $p = 1$.

5.17. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}\xi_j + \eta_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

имеет единственное решение $x = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ для любого $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$, если выполнено условие

а) $\sum\limits_{k,j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 < 1$ при $p = 2$;

б) $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$ при $p = \infty$;

в) $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$ при $p = 1$.

5.18. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство и отображение $f\colon X \to X$ таково, что некоторая его степень $g = f^n$ является сжимающим отображением. Тогда уравнение $fx = x$ имеет единственное решение.

5.19. Пусть A – интегральный оператор Вольтерра:

$$Ax(t) = \int_a^t K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

ядро $K(t, s)$ непрерывно на треугольнике

$$\Delta = \{(t, s)\colon t \in [a, b],\ s \in [a, t]\}.$$

Тогда существует такое $m \in \mathbb{N}$, что A^m является сжимающим отображением в пространстве $C[a, b]$.

5.20. Пусть ядро $K(t, s)$ непрерывно на $[a, b] \times [a, b]$ и

$$\int_a^b |K(t, s)| ds \leqslant d < 1, \quad t \in [a, b].$$

Тогда интегральное уравнение Фредгольма

$$x(t) - \int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds = y(t)$$

имеет единственное решение $x \in C[a,b]$ для любой функции $y \in C[a,b]$.

5.21. Уравнение

$$x(t) = t^2 + \int_0^3 \sin\left(s + \frac{t}{10} \cdot x(s)\right) ds$$

имеет единственное непрерывное на $[0,3]$ решение $x(t)$.

5.22. Являются ли отображения $A\colon X \to X$ сжимающими, если

а) $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-t|x(s)|}\, ds, \quad X = C[0,1];$

б) $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-t|x(s)|}\, ds, \quad X = \widetilde{L}_2[0,1];$

в) $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^2 t \cdot \sin x(s)\, ds, \quad X = C[0,2];$

г) $(Ax)(t) = \lambda \displaystyle\int_0^1 t^2 s^2 x(s)\, ds, \quad X = C[0,1]?$

5.23. В пространстве $C[0,1]$ решить уравнение

$$x(t) = \lambda \int_0^t x(s) ds + t^2, \quad \lambda \neq 0.$$

5.24. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

5.25. Пусть B и C – отображения полного метрического пространства в себя, B и C коммутируют, B – сжимающее. Доказать, что уравнение $Cx = x$ имеет решение.

Тема 6. Компактность, предкомпактность

☛ Во всех определениях и теоремах этой темы через X обозначено метрическое пространство $\langle X, \rho \rangle$.

Определение 6.1. Метрическое пространство X называется *компактным*, если из любого открытого покрытия X можно выделить конечное подпокрытие.

Множество $M \subset X$ называется *компактным*, если компактно подпространство $\langle M, \rho \rangle$, им порожденное.

Определение 6.2. Множество $M \subset X$ называется *секвенциально компактным*, если

$$\forall \, \{x_n\} \subset M \quad \exists \, \{x_{n_k}\} \quad \exists \, x_0 \in M \qquad x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0.$$

Теорема 6.1. *В метрическом пространстве компактность эквивалентна секвенциальной компактности.*

Теорема 6.2 (необходимые условия компактности). *Если множество $M \subset X$ компактно, то M ограничено и замкнуто, а $\langle M, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство.*

Определение 6.3. Множество $M \subset X$ называется *предкомпактным*, если $\overline{M}$ компактно.

Теорема 6.3. *Множество $M \subset X$ предкомпактно тогда и только тогда, когда*

$$\forall \, \{x_n\} \subset M \quad \exists \, \{x_{n_k}\} \quad \exists \, x_0 \in X \qquad x_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0.$$

Определение 6.4. Множество $A \subset X$ называется *ε-сетью для множества $M \subset X$*, если

$$\forall \, x \in M \quad \exists \, a \in A \quad \rho(x, a) < \varepsilon.$$

Определение 6.5. Множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для M.

Теорема 6.4. *Пусть X – полное метрическое пространство, $M \subset X$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *M предкомпактно*;

2) *M вполне ограничено*;

3) *из любой последовательности, принадлежащей M, можно выделить фундаментальную подпоследовательность.*

Теорема 6.5 (теорема Хаусдорфа, критерий компактности в метрическом пространстве). *Множество $M \subset X$ компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и $\langle M, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство.*

Следствие 6.1. *Для того чтобы множество $M \subset X$ было предкомпактным, необходимо, а в случае полноты X и достаточно, чтобы M было вполне ограниченно.*

Определение 6.6. Семейство Φ отображений $f \colon X \to \mathbb{P}$ называется *равномерно ограниченным*, если

$$\exists \, K > 0 \quad \forall \, f \in \Phi \quad \forall \, x \in X \qquad |f(x)| \leqslant K.$$

Определение 6.7. Пусть X – метрическое пространство с метрикой ρ. Семейство Φ непрерывных на X отображений $f\colon X \to \mathbb{P}$ называется *равностепенно непрерывным*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, f \in \Phi \quad \forall\, x_1, x_2 \in X$$

$$\rho(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Пусть X – компактное метрическое пространство. Обозначим $C(X)$ пространство непрерывных на X отображений $f\colon X \to \mathbb{P}$ с нормой

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|.$$

Теорема 6.6 (теорема Арцела–Асколли, критерий предкомпактности в $\boldsymbol{C(X)}$). *Пусть X – компактное метрическое пространство. Семейство отображений $\Phi \subset C(X)$ предкомпактно $\Longleftrightarrow$ Φ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Теорема 6.7. *Пусть X, Y – метрические пространства, отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно на X и множество $M \subset X$ компактно. Тогда множество $f(M)$ компактно.*

Пример 6.1. Пусть $M = \{x \in C^1[a, b]\colon |x'(t)| \leqslant c_0\}$. Доказать, что множество M предкомпактно в пространстве $C[a, b]$ тогда и только тогда, когда существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что для всех $x \in M$

$$\left| \int_a^b x(t)dt \right| \leqslant c_1.$$

Решение. *Необходимость.* Из предкомпактности множества M следует его ограниченность (см. теорему 6.2), т. е. существование постоянной $K > 0$ такой, что для всех $x \in M$

$$\|x\| = \max_{[a,b]} |x(t)| \leqslant K.$$

Отсюда получаем оценку

$$\left|\int_a^b x(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |x(t)|\,dt \leqslant K(b-a) = c_1$$

для всех $x \in M$.

Достаточность. Для доказательства предкомпактности множества M воспользуемся теоремой Арцела – Асколли (см. теорему 6.6).

Равностепенная непрерывность семейства функций M следует из оценки

$$|x(t_1) - x(t_2)| = |x'(\xi)| \cdot |t_1 - t_2| \leqslant c_0|t_1 - t_2| < \varepsilon$$

для $\delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{c_0}$, справедливой для всех $x \in M$ и любых $t_1, t_2 \in [a, b]$ (применили формулу Лагранжа, $\xi \in (a, b)$).

Докажем, что семейство функций M равномерно ограничено. Согласно теореме о среднем для непрерывной функции $x \in M$ существует точка $\eta \in [a, b]$ такая, что

$$x(\eta) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x(s)ds.$$

Из формулы Ньютона – Лейбница для $t \in [a, b]$ получаем

$$x(t) = \int_\eta^t x'(s)ds + x(\eta) = \int_\eta^t x'(s)ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b x(s)ds.$$

Значит,

$$|x(t)| \leqslant \int_a^b |x'(s)|\,ds + \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b x(s)\,ds\right| \leqslant c_0(b-a) + \frac{c_1}{b-a},$$

т. е. семейство функций M равномерно ограничено.

По теореме Арцела – Асколли множество M предкомпактно в $C[a, b]$. ✌

Пример 6.2. Пусть $M = \{\ln(2 + t^\alpha)\}_{\alpha\in(0,2]}$. Будет ли это множество предкомпактным (компактным) в пространствах $C[0, 1]$ и $L_1[0, 1]$?

Решение. Воспользуемся теоремой 6.3. Пусть $\{x_n\} \subset M$. Тогда x_n имеет вид $x_n(t) = \ln(2 + t^{\alpha_n})$, где $\alpha_n \in (0, 2]$. Из ограниченной последовательности $\{\alpha_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \alpha_0 \in [0, 2]$.

Если $\alpha_0 \neq 0$, то при $k \to \infty$ последовательность функций $\{x_{n_k}\}$ поточечно сходится к функции $y_1(t) = \ln(2 + t^{\alpha_0}) \in M$.

Если $\alpha_0 = 0$, то последовательность функций $\{x_{n_k}\}$ поточечно сходится к функции

$$y_2(t) = \begin{cases} \ln 2, & t = 0, \\ \ln 3, & t \in (0, 1], \end{cases}$$

которая не принадлежит пространству $C[0, 1]$. Отсюда следует, что в этом случае последовательность $\{x_{n_k}\}$ и любая ее подпоследовательность не являются равномерно сходящимися на отрезке $[0, 1]$, а значит и сходящимися в пространстве $C[0, 1]$.

Итак, множество M непредкомпактно в $C[0, 1]$, так как существует последовательность $\{\widetilde{x}_n\} \in M$ (например, $\widetilde{x}_n(t) = \ln(2+t^{1/n})$), из которой нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся в пространстве $C[0, 1]$. Отсюда следует, что множество M некомпактно в $C[0, 1]$.

Докажем, что множество M предкомпактно в пространстве $L_1[0, 1]$. Действительно, как показано выше, из любой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к функции y_1 или y_2 при $k \to \infty$. Функции $y_1, y_2 \in L_1[0, 1]$. При этом последовательности $\{x_{n_k}(t) - y_j(t)\}$ $(j = 1$ или $2)$ всюду на $[0, 1]$ поточечно сходятся к 0, $|x_{n_k}(t) - y_j(t)| \leqslant 2\ln 3$, функция $y(t) \equiv 2\ln 3$ интегрируема на $[0, 1]$. Поэтому согласно теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла

$$\|x_{n_k} - y_j\|_{L_1[0,1]} = \int_0^1 |x_{n_k}(t) - y_j(t)|\, dt \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^1 0\, dt = 0.$$

Итак, множество M предкомпактно в пространстве $L_1[0, 1]$, так как из любой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить сходящуюся в $L_1[0, 1]$ подпоследовательность.

Покажем, что множество M некомпактно в $L_1[0,1]$. Действительно, если бы M было компактно, то оно было бы и секвенциально компактно (теорема 6.1), а значит, из последовательности $\widetilde{x}_n(t) = \ln\left(2 + t^{1/n}\right)$ можно было бы выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме к некоторой функции из M. Но так как $\{\widetilde{x}_n\}$ сходится по норме в $L_1[0,1]$ и поточечно на $[0,1]$ к функции y_2, то и любая ее подпоследовательность сходится по норме и поточечно на $[0,1]$ к y_2. Следовательно, y_2 должна быть эквивалентна некоторой функции из M (см. задачу 2.13). Но y_2 не эквивалентна ни одной функции из M. Следовательно, M некомпактно. ✌

Пример 6.3. Доказать, что для предкомпактности множества M в пространстве ℓ_1 необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M \quad \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\xi_k| < \varepsilon.$$

Решение. Для доказательства можно воспользоваться следствием 6.1 из теоремы Хаусдорфа, так как пространство ℓ_1 полное.

Необходимость. Предположим, что множество M предкомпактно в пространстве ℓ_1. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует набор $\{y_j\}_{j=1}^m \subset \ell_1\colon M \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon)$. Отсюда следует, что множество M ограничено. Для $y_j = \{\eta_k^j\}$ существует $N_\varepsilon^j \in \mathbb{N}\colon \sum\limits_{k=N_\varepsilon^j}^{\infty} |\eta_k^j| < \varepsilon$. Положим $N_\varepsilon = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \{N_\varepsilon^j\}$. Для всякого элемента $x \in M$ существует $y_j\colon \|x - y_j\| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\xi_k| \leqslant \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\xi_k - \eta_k^j| + \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\eta_k^j| \leqslant$$

$$\leqslant \|x - y_j\| + \sum_{k=N_\varepsilon^j}^{\infty} |\eta_k^j| < 2\varepsilon.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Известно, что

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, x \in M \quad \|x\| \leqslant C$$

и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M \quad \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\xi_k| < \varepsilon.$$

Докажем, что множество M предкомпактно.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Каждому $x \in M$ поставим в соответствие элемент

$$x_\varepsilon = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N_\varepsilon}, 0, 0, \ldots).$$

Справедливы неравенства

$$\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon, \quad \|x_\varepsilon\| \leqslant \|x\| \leqslant C.$$

Пусть Y – подпространство пространства ℓ_1, элементами которого являются последовательности

$$y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{N_\varepsilon}, 0, 0, \ldots).$$

Пространство Y конечномерно, а множество $M_\varepsilon = \bigcup\limits_{x \in M} \{x_\varepsilon\}$ является его ограниченным подмножеством. В силу задачи 6.17 множество M_ε предкомпактно в пространстве Y. Следовательно, существует набор $\{y_j\}_{j=1}^m \subset Y$ такой, что $M_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon)$ (здесь $B(y_j, \varepsilon) \subset Y$). Покажем, что $\{y_j\}_{j=1}^m$ есть 2ε-сеть для множества M в пространстве ℓ_1.

Для любого $x \in M$ существует y_j такой, что $\|y_j - x_\varepsilon\| < \varepsilon$ и

$$\|x - y_j\| \leqslant \|x - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - y_j\| < 2\varepsilon.$$

Таким образом, M вполне ограничено, а значит, предкомпактно. Достаточность доказана. ✌

6.1. Привести пример метрического пространства $\langle X, \rho \rangle$ и множества $M \subset X$ таких, что

а) M вполне ограниченно, но непредкомпактно;

б) M предкомпактно, но некомпактно.

6.2. Будет ли предкомпактным (компактным) множество M из метрического пространства X, если

а) M конечно;

б) M – сходящаяся последовательность;

в) M – фундаментальная последовательность (рассмотреть два случая: X – полное, X – не полное)?

6.3. Пусть на множестве X заданы метрики ρ_1 и ρ_2, причем $\rho_1 \succeq \rho_2$. Доказать, что из предкомпактности (компактности) множества M в метрическом пространстве $\langle X, \rho_1 \rangle$ следует предкомпактность (компактность) M в метрическом пространстве $\langle X, \rho_2 \rangle$.

6.4. Выяснить, при каких условиях на мощность множества X пространство $\langle X, \rho_T \rangle$ является

а) полным; б) сепарабельным; в) компактным.

☞ Доказать утверждения 6.5–6.14.

6.5. Для предкомпактности множества M в метрическом пространстве X необходимо, а в случае полноты X – и достаточно, существование для всякого $\varepsilon > 0$ предкомпактной ε-сети, т. е. предкомпактного множества $N \subset X$ такого, что

$$M \subset \bigcup_{x \in N} B(x, \varepsilon).$$

6.6. Если $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ – ε-сеть для множества M из метрического пространства X, то найдется множество $\{\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2, \ldots, \widetilde{a}_k\} \subset M$, являющееся 2ε-сетью для M.

6.7. Множество $M \subset \ell_p^n$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в ℓ_p^n.

6.8. Множество $M \subset c_0$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в c_0 и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M$$

$$|\xi_n| < \varepsilon.$$

6.9. Множество $M \subset c_0$ предкомпактно $\iff$

$$\exists\, x_0 = \{\xi_k^0\} \in c_0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M \quad |\xi_n| \leqslant |\xi_n^0|.$$

6.10. Множество $M \subset c$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в c и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m > N \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M$$

$$|\xi_n - \xi_m| < \varepsilon.$$

6.11. Множество $M \subset \ell_p$, $1 \leqslant p < \infty$, предкомпактно $\iff$ оно ограничено в ℓ_p и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon.$$

6.12. ✯ *Критерий М. Рисса.* Множество $M \subset L_p[a,b]$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в $L_p[a,b]$ и равностепенно непрерывно в среднем, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, h,\ |h| < \delta, \quad \forall\, x \in M$$

$$\int_a^b |x(t+h) - x(t)|^p \, dt < \varepsilon$$

(считаем $x(t) = 0$, если $t \notin [a,b]$).

6.13. ✯ *Критерий А. Н. Колмогорова.* Множество $M \subset L_p[a,b]$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в $L_p[a,b]$ и

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\ h,\ 0 < h < \delta, \quad \forall\ x \in M$$

$$\int_a^b |x_h(t) - x(t)|^p\, dt < \varepsilon,$$

где

$$x_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(\tau)\, d\tau$$

(считаем $x(t) = 0$, если $t \notin [a,b]$).

6.14. ✯ Множество $M \subset L_p(\mathbb{R})$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в $L_p(\mathbb{R})$ и равностепенно непрерывно в среднем, т. е.

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\ h,\ |h| < \delta, \quad \forall\ x \in M$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t+h) - x(t)|^p\, dt < \varepsilon$$

и

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ A = A(\varepsilon) > 0 \quad \forall\ x \in M$$

$$\int_{-\infty}^{-A} |x(t)|^p\, dt + \int_A^{\infty} |x(t)|^p\, dt < \varepsilon.$$

6.15. Доказать, что в метрическом пространстве

а) если множество M предкомпактно, то оно ограничено;

б) множество M компактно тогда и только тогда, когда оно предкомпактно и замкнуто.

6.16. Пусть метрические пространства X и Y гомеоморфны и τ – гомеоморфизм X на Y. Доказать, что множество M предкомпактно в X тогда и только тогда, когда множество $\tau(M)$ предкомпактно в Y.

6.17. Доказать, что предкомпактность (компактность) множества в конечномерном нормированном пространстве эквивалентна его ограниченности (ограниченности и замкнутости).

6.18. Пусть M – некоторое множество алгебраических многочленов степени не выше n. Указать условия на коэффициенты многочленов, необходимые и достаточные для предкомпактности множества M в пространстве $C[a,b]$.

6.19. Доказать, что множество $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограниченно, замкнуто, непредкомпактно в пространстве $L_2[a,b]$.

6.20. Являются ли следующие множества предкомпактными (компактными) в пространствах $C[0,1]$ и $L_p[0,1]$:

а) $M = \{t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$; б) $M = \{(\alpha t)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

в) $M = \{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$; г) $M = \{\sin \alpha t\}_{\alpha\in[a,b]}$;

д) $M = \{\sin \alpha t\}_{\alpha\in[a,b)}$;

е) $M = \{\sin(t+\alpha)\}_{\alpha\in[a,b)}$; ж)✯ $M = \{\sin(t+n)\}_{n\in\mathbb{N}}$;

з) $M = \left\{e^{t-\alpha}\right\}_{\alpha\in[0,+\infty)}$;

и) $M = \left\{\operatorname{arctg}\alpha\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\right\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$;

к) $M = \left\{n\left(\sqrt[3]{t+\dfrac{1}{n}}-\sqrt[3]{t}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$?

6.21. Являются ли следующие множества предкомпактными (компактными) в пространстве $C[a,b]$:

а) $\left\{x\in C^1[a,b]\colon |x(t)|\leqslant B_0,\ |x'(t)|\leqslant B_1\right\}$;

б) $\left\{x\in C^1[a,b]\colon |x(a)|\leqslant B_0,\ |x'(t)|\leqslant B_1\right\}$;

в) $\left\{x\in C^2[a,b]\colon |x(t)|\leqslant B_0,\ |x'(t)|\leqslant B_1,\ |x''(t)|\leqslant B_2\right\}$;

г)✯ $\{x \in C^2[a,b]\colon |x(t)| \leqslant B_0,\ |x''(t)| \leqslant B_1\}$;

д) $\{x \in C^2[a,b]\colon |x'(t)| \leqslant B_0,\ |x''(t)| \leqslant B_1\}$;

е) $\{x \in C[a,b]\colon |x(t)| \leqslant B_0,$

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant L|t_1 - t_2|\};$$

ж) $\Big\{x \in C[a,b]\colon$

$$x(t) = \int_a^t y(\tau)\,d\tau,\ y \in \widetilde{L}_1[a,b],\ |y(\tau)| \leqslant B\Big\}?$$

6.22. Доказать предкомпактность следующих множеств в пространстве $C[0,1]$ над полем $\mathbb{P} = \mathbb{R}$:

а)✯ $\left\{x \in C^1[0,1]\colon \displaystyle\int_0^1 (|x'(t)|^2 + |x(t)|^2)\,dt \leqslant B\right\}$;

б) $\Big\{x \in C^1[0,1]\colon$

$$\int_0^1 |x'(t)|^p dt \leqslant 1,\ 1 < p < \infty,\ |x(0)| \leqslant 1\Big\}.$$

6.23. Являются ли следующие множества предкомпактными в пространстве $L_2[0,1]$:

а) $M = \{t^\alpha\}_{\alpha > -\frac{1}{2}}$;

б) $M = \{(\ln t)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$;

в) $M = \Big\{x \in L_2[0,1]\colon$

$$x(t) = \int_0^t y(\tau)\,d\tau,\ \int_0^1 |y(\tau)|^2 d\tau \leqslant 1\Big\}?$$

6.24. Являются ли следующие множества предкомпактными в пространстве $L_2(\mathbb{R})$:

а) $M = \left\{\dfrac{1}{1 + (t+\alpha)^2}\right\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$;

б) $M = \left\{ \dfrac{|t|^{\beta}}{1+(t+\alpha)^2} \right\}_{|\alpha|<1,\, \beta\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)}$?

6.25. Пусть X – одно из пространств c_0, c, ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$,

$$M = \left\{ x \in X \colon |\xi_k| \leqslant k^{-\frac{1}{3}} \right\}.$$

Будет ли множество M компактным в X?

6.26. Доказать, что множество

$$M = \left\{ x \in \ell_3 \colon \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^3 \ln(k+1) \leqslant 1 \right\}.$$

компактно в пространствах c_0, c, ℓ_p $(3 \leqslant p \leqslant \infty)$.

6.27. Доказать, что множество

$$M = \left\{ x \in \ell_p \colon |\xi_k| \leqslant |\xi_k^0| \right\}$$

компактно в пространствах ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ $\iff$ $x_0 = \{\xi_k^0\} \in \ell_p$.

6.28. Доказать, что множество

$$M = \left\{ x \in \ell_p \colon \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p |\alpha_k| \leqslant 1,\ \alpha_k \neq 0,\ k \in \mathbb{N} \right\}$$

компактно в пространствах ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, $\iff$ $\alpha_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.

6.29. Доказать, что множество M предкомпактно в пространстве s $\iff$

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, C_k > 0 \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M \quad |\xi_k| \leqslant C_k.$$

6.30. Пусть A и B – подмножества нормированного пространства X. Доказать, что а) A и B – компакты $\Rightarrow$ множество $A+B$ – компакт;

б) A и B – предкомпакты $\Rightarrow$ множество $A+B$ – предкомпакт;

в) A – компакт, B замкнуто $\Rightarrow$ множество $A+B$ замкнуто. Будет ли $A+B$ замкнутым, если A и B замкнуты?

6.31. Всегда ли достигается расстояние между точкой и замкнутым множеством в полном нормированном пространстве?

6.32. Пусть A – компактное, а B – замкнутое множества в метрическом пространстве $\langle X, \rho \rangle$ и $A \cap B = \varnothing$. Доказать, что $\rho(A, B) > 0$.

6.33. Пусть A и B – компактные множества в метрическом пространстве, $A \cap B = \varnothing$. Доказать, что расстояние между ними достигается на некоторой паре точек, т. е.

$$\exists\; x \in A,\; y \in B \quad \rho(A, B) = \rho(x, y).$$

6.34. Докажите, что в нормированном пространстве расстояние от точки до любого конечномерного линейного подмножества достигается.

Тема 7. Выпуклые множества, подпространства в нормированных пространствах

Определение 7.1. Множество M называется

✓ *выпуклым* в линейном пространстве, если

$$\forall\, x, y \in M \quad \forall\, \alpha \in (0,1) \quad \alpha x + (1-\alpha) y \in M;$$

✓ *строго выпуклым* в нормированном пространстве, если

$$\forall\, x, y \in M \quad \forall\, \alpha \in (0,1) \quad \alpha x + (1-\alpha) y \in \overset{\circ}{M}.$$

Определение 7.2. Нормированное пространство X называется *строго выпуклым*, если его единичный шар $B[0,1]$ – строго выпуклое множество.

Определение 7.3. Нормированное пространство X называется *строго нормированным*, если в нем

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|, \quad x \neq 0,\ y \neq 0, \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \lambda > 0 \quad y = \lambda x.$$

Теорема 7.1. *Нормированное пространство строго нормированно* $\Longleftrightarrow$ *оно строго выпукло.*

Определение 7.4. Пусть X – нормированное пространство. Множество $M \subset X$ называется *линейным многообразием*, если

$$\forall\, x, y \in M \quad x + y \in M \quad \text{(линейность)},$$

$$\forall\, x \in M \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{P} \quad \alpha x \in M \quad \text{(однородность)}.$$

Замкнутое линейное многообразие называется *подпространством* X.

Определение 7.5. Пусть M – подмножество линейного пространства X. *Линейной оболочкой* $\langle M \rangle$ множества M называется наименьшее линейное многообразие, содержащее M.

Линейная оболочка любого непустого множества $M \subset X$ обязательно существует и совпадает с пересечением всех линейных многообразий, содержащих M. Линейную оболочку множества M составляет множество всевозможных линейных комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ конечных наборов элементов $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset M$ и коэффициентов $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{P}$.

Определение 7.6. Пусть M – подмножество линейного пространства X. *Выпуклой оболочкой* $\operatorname{conv} M$ множества M называется наименьшее выпуклое множество, содержащее M.

Выпуклая оболочка любого непустого множества $M \subset X$ обязательно существует и совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих M. Выпуклую оболочку множества M составляет множество всевозможных выпуклых комбинаций $\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k x_k$ конечных наборов элементов $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset M$ и коэффициентов $\{\theta_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}$ таких, что $\theta_k \geqslant 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n,$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k = 1.$

Пример 7.1. Будут ли следующие множества выпуклыми в пространстве $\mathbb{R}^n$:

а) $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^3 \leqslant 1 \right\}$;

б) $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^{\frac{1}{3}} \leqslant 1 \right\}$?

Решение. а) Заметим, что

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \|x\|_{\ell_3^n}.$$

Значит, $M = B[0,1] \subset \ell_3^n$. Покажем, что это выпуклое множество.

Пусть $x', x'' \in M$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда для $x = \alpha x' + (1-\alpha)x''$ имеем

$$\|x\|_{\ell_3^n} = \|\alpha x' + (1-\alpha)x''\|_{\ell_3^n} \leqslant \alpha \|x\|_{\ell_3^n} + (1-\alpha)\|x''\|_{\ell_3^n} \leqslant 1,$$

т. е. $x \in B[0,1]$ и множество M выпукло.

б) Покажем, что множество M не является выпуклым. Возьмем $x' = (1,0,0,\ldots,0)$, $x'' = (0,0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Тогда

$$x = \alpha x' + (1-\alpha)x'' = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{2} \right)$$

и

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{2}{3}} > 1,$$

т. е. $x \notin M$, а значит, множество M не выпукло. ✌

Пример 7.2. Будет ли множество

$$M = \left\{ x \in L_2[-1,1] \colon \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}\, x(t)\, dt = 0 \right\}$$

подпространством в пространстве

а) $L_2[-1,1]$; б) $L_1[-1,1]$?

Решение. Из включения $L_2[-1,1] \subset L_1[-1,1]$ (см. задачу 2.26) следует, что $M \subset L_2[-1,1] \subset L_1[-1,1]$.

Множество M – линейное многобразие, так как для любых $x_1, x_2 \in M$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{P}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))dt = 0.$$

Докажем, что множество M замкнуто в пространстве $L_2[-1,1]$ и не замкнуто в пространстве $L_1[-1,1]$.

а) Пусть $\{x_n\} \subset M$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в пространстве $L_2[-1,1]$. Неравенство Коши – Буняковского дает следующую оценку:

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}\,x(t)\,dt\right| = \left|\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}\,(x(t)-x_n(t))\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{|t|}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^{1} |x(t)-x_n(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}\right\| \cdot \|x - x_n\|.$$

Следовательно, $x \in M$ и множество M замкнуто в пространстве $L_2[-1,1]$, а значит является подпространством в $L_2[-1,1]$.

б) Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subset M$,

$$x_n(t) = \begin{cases} -|t|^{-\frac{3}{4}}, & t \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right), \\ 0, & t \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ |t|^{-\frac{3}{4}}, & t \in \left(\frac{1}{n}, 1\right], \end{cases}$$

и элемент $x(t) = \operatorname{sign} t \cdot |t|^{-\frac{3}{4}} \in L_1[-1,1]$. В пространстве $L_1[-1,1]$

$$\|x_n - x\| = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |t|^{-\frac{3}{4}}\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Однако $x \notin L_2[-1,1]$, а значит, $x \notin M$. Это означает, что множество M не замкнуто, следовательно, оно не является подпространством в $L_1[-1,1]$. ✌

Пример 7.3. Доказать, что пространство $C[a,b]$ не является строго нормированным.

Решение. Достаточно привести пример отрезка $[x_1, x_2]$, который принадлежит единичной сфере $S[0,1]$ пространства $C[a,b]$ (см. задачу 7.15). Рассмотрим две функции:

$$x_1(t) = \frac{t-a}{b-a}, \quad x_2(t) \equiv 1.$$

Обе функции линейные и $x_1(a) = 0$, $x_1(b) = 1$, следовательно, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, т. е. $x_1, x_2 \in S[0,1]$. Для функции

$$\varphi_\alpha(t) = \alpha x_1(t) + (1-\alpha)x_2(t) = \alpha \frac{t-a}{b-a} + (1-\alpha), \quad \alpha \in [0,1],$$

имеем $\varphi_\alpha(a) = 1-\alpha$, $\varphi_\alpha(b) = 1$. Так как φ_α – линейная функция, то $\|\varphi_\alpha\| = 1$. Следовательно, $\varphi_\alpha \in S[0,1]$ для любого $\alpha \in [0,1]$. Значит, $[x_1, x_2] \in S[0,1]$ и пространство $C[a,b]$ не является строго нормированным. ✌

7.1. Доказать, что пересечение любого семейства выпуклых множеств из линейного пространства – выпуклое множество. Является ли выпуклым объединение двух выпуклых множеств?

7.2. Пусть $\{M_k\}_{k=1}^n$ – семейство выпуклых множеств из линейного пространства над полем $\mathbb{P}$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{P}$. Доказать, что множество

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k M_k$$

выпукло.

7.3. Множество $x_0 + L$, где L – линейное многообразие из линейного пространства, называется *афинным многообразием.* Доказать, что всякое афинное многообразие является выпуклым множеством. Будет ли оно линейным многообразием?

7.4. Доказать, что замыкание выпуклого множества из нормированного пространства – выпуклое множество. Является ли замкнутой выпуклая оболочка замкнутого множества?

7.5. Доказать, что внутренность выпуклого множества из нормированного пространства выпукла.

7.6. Доказать, что шары $B[x_0, r]$, $B(x_0, r)$ из нормированного пространства выпуклы. Будет ли выпуклым множеством сфера $S[x_0, r]$?

7.7. Доказать, что аксиома треугольника в определении нормы эквивалентна выпуклости шара $B[0, 1]$.

7.8. В пространстве ℓ_1 найти плотное выпуклое множество, не совпадающее с ℓ_1.

7.9. Будут ли следующие множества выпуклыми в вещественном пространстве $C[a, b]$:

а) алгебраические многочлены степени точно n;

б) алгебраические многочлены степени не выше n;

в) непрерывные возрастающие функции;

г) непрерывные монотонные функции;

д) $M = \{x \in C[a, b] \colon \ \|x\|^p_{L_p[a,b]} \leqslant r\}$;

е) $M = \{x \in C[a, b] \colon x(t) < x_0(t), \ t \in [a, b]\}$, где x_0 – некоторая функция из $C[a, b]$?

7.10. Доказать, что следующие множества являются выпуклыми в пространстве ℓ_2:

а) параллелепипед

$$\{x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon |\xi_k| \leqslant \alpha_k, \ \{\alpha_k\} \in \ell_2\};$$

б) эллипсоид

$$\left\{x \in \ell_2\colon \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\xi_k}{\alpha_k}\right|^2 \leqslant 1,\ \{\alpha_k\} \in \ell_\infty,\ \alpha_k \neq 0\right\}.$$

Компактны ли они?

7.11. Пусть X_0 – конечномерное линейное подмножество в нормированном пространстве X. Доказать, что X_0 – подпространство в X.

7.12. Пусть L_1, L_2 – подпространства в нормированном пространстве X, причем L_1 конечномерно. Доказать, что множество $L_1 + L_2$ является подпространством в X.

7.13. Будут ли следующие множества подпространствами в пространстве $C[-1,1]$ над полем $\mathbb{R}$:

а) монотонные функции из $C[-1,1]$;

б) четные функции из $C[-1,1]$;

в) алгебраические многочлены степени не выше n;

г) алгебраические многочлены;

д) непрерывно дифференцируемые функции;

е) $\{x \in C[-1,1]\colon x(0) = 0\}$;

ж) $\left\{x \in C[-1,1]\colon \int_{-1}^{1} x(t)\,dt = 0\right\}$;

з) $\left\{x \in C[-1,1]\colon \int_{-1}^{1} \frac{x(t)}{t}\,dt = 0\right\}$;

и)✯ $\Big\{x \in C[-1,1]\colon \exists\, B_x > 0\ \forall\, t_1, t_2 \in [-1,1]$

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leqslant B_x |t_1 - t_2|^\alpha\Big\}$$

для некоторого $0 < \alpha \leqslant 1$?

7.14. Будет ли множество M подпространством в пространстве X, если а)$\star$ $M = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_p \colon \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0 \right\}$,

$X = \ell_p,\ p = 1,\ p = 2,\ p = \infty;$

б) $M = c_0,\ X = c;$

в) $M = c,\ X = \ell_\infty;$

г) $M = \ell_1,\ X = c_0;$

д) $M = \left\{ x = \{\xi_k\}_{k=1}^n \colon \xi_k \geqslant 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n \right\},\ X = \ell_2^n;$

е) $M = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, \xi_k = c \right\},\ X = \ell_2;$

ж) $M = L_q[a,b],\ X = L_p[a,b],\ 1 \leqslant p < q < \infty$?

7.15. Доказать, что нормированное пространство является строго нормированным $\Longleftrightarrow$ сфера $S[0,1]$ не содержит никакого отрезка.

7.16. Покажите, что пространства $\ell_p^n,\ \ell_p,\ L_p[a,b]$ – строго нормированные пространства при $1 < p < \infty$ и не являются строго нормированными, если $p = 1$ или $p = \infty$.

7.17. Покажите, что пространства $c_0,\ c,\ C[a,b], C^k[a,b]$ не являются строго нормированными.

7.18. Пусть X – строго выпуклое нормированное пространство, множество $M \subset X$ выпукло, $x_0 \in X \setminus M$ и

$$N = \{x \in M \colon \rho(x_0, M) = \rho(x_0, x)\} \neq \varnothing.$$

Доказать, что мощность множества N равна единице.

7.19. Привести пример нормированного пространства X, выпуклого множества $M \subset X$ и точки $x_0 \in X \setminus M$ таких, что расстояние от точки x_0 до множества M реализуется неединственным образом.

7.20. Достигается ли расстояние от элемента x_0 до множества M, а если достигается, то будет ли ближайший элемент единственным?

а) $X = C[-1,1],\ x_0(t) = 1,$

$M = \{x \in C[-1,1] \colon x(0) = 0\}\,;$

б) $X = \widetilde{L}_2[-1,1],\ x_0(t) = 1,$

$M = \left\{x \in \widetilde{L}_2[-1,1] \colon x(0) = 0\right\};$

в) $X = L_2[-1,1],\ x_0(t) = e^t,$

$$M = \left\{x \in L_2[-1,1] \colon x(t) = \sum_{k=1}^{10} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)\right\};$$

г) $X = \ell_1^2,\ x_0 = (1,0),$

$M = \left\{x = (\xi_1, \xi_2) \in \ell_1^2 \colon \xi_1 = 0\right\};$

д) $X = \ell_1^2,\ x_0 = (1,0),$

$M = \left\{x = (\xi_1, \xi_2) \in \ell_1^2 \colon \xi_1 = \xi_2\right\}.$

7.21. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – эквивалентные нормы на линейном пространстве X, пространство X строго выпукло в смысле одной из этих норм. Будет ли оно строго выпукло в смысле другой?

Тема 8. Евклидовы и гильбертовы пространства

Определение 8.1. Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $(\cdot,\cdot)\colon X^2 \to \mathbb{P}$ называется *скалярным произведением* на X, если

1) $\forall\, x \in X \quad (x,x) \geqslant 0$;

2) $(x,x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$;

3) $\forall\, x,y,z \in X \quad \forall\, \lambda,\mu \in \mathbb{P} \quad (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z)$ (линейность по первому аргументу);

4) $\forall\, x,y \in X \quad (x,y) = \overline{(y,x)}$ (здесь черта означает комплексное сопряжение).

Определение 8.2. Линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством.*

Теорема 8.1. *Для любых двух элементов x, y евклидова пространства X выполняется неравенство Коши–Буняковского*
$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)};$$
выражение $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ задает норму на X.

Определение 8.3. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым пространством.*

Определение 8.4. Пусть X – нормированное пространство.

- ✓ Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется *нормированной*, если
$$\forall\ \alpha \quad \|e_\alpha\| = 1.$$
- ✓ Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется *полной* в X, если $\overline{\langle\{e_\alpha\}\rangle} = X$.
- ✓ Система векторов $\{e_\alpha\}_{n\in\mathbb{N}}$ в бесконечномерном нормированном пространстве X называется *базисом*, если
$$\forall\ x \in X \quad \exists!\ \{\lambda_n\} \subset \mathbb{P}\colon \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Определение 8.5. Пусть X – евклидово пространство. Говорят, что элементы $x, y \in X$ *ортогональны*, и пишут $x \perp y$, если $(x, y) = 0$. Множество элементов, ортогональных множеству $M \subset X$, обозначают $M^\perp$, т. е.
$$M^\perp = \{x \in X\colon \forall\ y \in M \quad x \perp y\}.$$
Если $x \in M^\perp$, пишут также $x \perp M$.

Если M – подпространство X, то множество $M^\perp$ называют *ортогональным дополнением* M *(до* X*)*.

Определение 8.6. Пусть X – евклидово пространство.

- ✓ Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется *ортогональной*, если
$$\forall\ \alpha, \beta \quad (\alpha \neq \beta \implies e_\alpha \perp e_\beta).$$

✓ Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется *ортонормированной*, если она ортогональная и нормированная, т. е.

$$\forall\, \alpha, \beta \quad (e_\alpha, e_\beta) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Таким образом, если $\{e_\alpha\}$ – ортогональная система и все $e_\alpha \neq 0$, то $\left\{ \dfrac{e_\alpha}{\|e_\alpha\|} \right\}$ – ортонормированная система.

✓ Система векторов $\{e_\alpha\} \subset X$ называется *тотальной*, если

$$(\forall\ \alpha \ \ x \perp e_\alpha) \implies x = 0.$$

Теорема 8.2 (теорема Шмидта об ортогонализации). *Для любой счетной линейно независимой системы векторов $\{x_n\}$ в евклидовом пространстве X существует ортонормированная система векторов $\{e_n\}$ такая, что*

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \quad \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle.$$

Ортогонализация проводится по следующей схеме. Полагаем $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$. Если построены элементы $e_1, \ldots, e_n$, то

$$\widetilde{e}_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (x_{n+1}, e_k) e_k, \quad e_{n+1} = \frac{\widetilde{e}_{n+1}}{\|\widetilde{e}_{n+1}\|}.$$

Определение 8.7. Пусть M – линейное многообразие в евклидовом пространстве X. *Ортогональной проекцией вектора x на M* называется вектор $y \in M$ такой, что $(x - y) \perp M$. Ортогональную проекцию x на M будем обозначать $\mathrm{Pr}_M\,(x)$.

Определение 8.8. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство, $x \in X$ и $M \subset X$. Величина

$$\rho(x, M) = \inf\{\rho(x, y) \colon y \in M\}$$

называется *расстоянием от элемента x до множества M* или *наилучшим приближением элемента x множеством M*. Если существует элемент $y \in M$ такой, что $\rho(x, y) = \rho(x, M)$, то говорят, что расстояние от x до M *достигается*, а y называют *элементом наилучшего приближения элемента x множеством M*.

Теорема 8.3. *Если M – конечномерное подпространство евклидова пространства X, то для любого $x \in X$ существует элемент наилучшего приближения $y \in M$; при этом $y = \mathrm{Pr}_M\,(x)$.*

Теорема 8.4. *Если M – подпространство гильбертова пространства X, то для любого $x \in X$ существует элемент наилучшего приближения $y \in M$; при этом $y = \mathrm{Pr}_M\,(x)$.*

Определение 8.9. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве X. *Рядом Фурье элемента $x \in X$ (по ортонормированной системе $\{e_n\}$)* называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\, e_n, \quad \text{где} \quad c_n(x) = (x, e_n).$$

Теорема 8.5 (экстремальное свойство коэффициентов ряда Фурье). *Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве X, то*

$$\widehat{x}_m = \sum_{n=1}^{m} c_n(x)\, e_n = \mathrm{Pr}_{\langle e_1, e_2, \ldots, e_m\rangle}\,(x).$$

Таким образом, $\widehat{x}_m$ – элемент наилучшего приближения вектора x элементами из $\langle e_1, e_2, \ldots, e_m\rangle$.

Теорема 8.6. *Если M – подпространство гильбертова пространства X, то $X = M \oplus M^{\perp}$.*

Теорема 8.7. *Пусть $\{e_n\}$ – счетная ортонормированная система в евклидовом пространстве. Следующие условия эквивалентны*:

1) $\{e_n\}$ *замкнута, т. е.* $\forall\, x \in X \quad \|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2$;

2) $\{e_n\}$ – *базис в* X;

3) $\{e_n\}$ *полна в* X.

Утверждение 8.1. *В любом евклидовом пространстве существуют максимальные (по включению) ортонормированные системы.*

Теорема 8.8 [1, с. 65, теорема 2.7.1]. *Пусть* $\{e_\gamma\}$ – *максимальная ортонормированная система в гильбертовом пространстве* X. *Тогда*

1) $\{e_\gamma\}$ – *тотальная в* X (*и, следовательно, полная*);

2) $\forall\, x \in X$ *множество* $\Gamma(x) = \{\gamma\colon (x, e_\gamma) \neq 0\}$ *не более чем счетно*;

3) $\forall\, x \in X \quad x = \sum_{\gamma\in\Gamma(x)} (x, e_\gamma) e_\gamma$.

Замечание. Теорема 8.8 позволяет назвать максимальную ортонормированную систему $\{e_\gamma\}$ в гильбертовом пространстве X базисом.

Пример 8.1. В пространстве ℓ_2 найти ортогональное дополнение до подпространства

$$L = \Big\{x = \{\xi_k\} \in \ell_2\colon \xi_1 - 2\xi_3 + 3\xi_4 = 0\Big\},$$

ортогональную проекцию элемента $x_0 = \left\{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ на L, расстояние от x_0 до L и до $L^\perp$.

Решение. Из определения подпространства L следует, что

$$L = \{z_0\}^\perp, \quad \text{где} \quad z_0 = (1, 0, -2, 3, 0, 0, \ldots).$$

Докажем, что $L^{\perp} = \langle z_0 \rangle$. Используя задачу 8.16, получаем, что $\{z_0\}^{\perp} = \overline{\langle z_0 \rangle}^{\perp}$. Так как одномерное линейное множество замкнуто в пространстве ℓ_2, то (см. задачу 8.21)

$$L^{\perp} = \{z_0\}^{\perp\perp} = \overline{\langle z_0 \rangle}^{\perp\perp} = \overline{\langle z_0 \rangle} = \langle z_0 \rangle.$$

Найдем ортогональную проекцию элемента x_0 на L. Заметим, что L – подпространство в ℓ_2 (см. задачу 8.13). Значит, $\ell_2 = L \oplus L^{\perp} = L \oplus \langle z_0 \rangle$, а $x_0 = y + z$, где $y \in L, z \in \langle z_0 \rangle$. Следовательно,

$$\mathrm{Pr}_L\,(x_0) = y = x_0 - \alpha z_0.$$

Чтобы найти α, запишем скалярное произведение

$$0 = (y, z_0) = (x_0, z_0) - \alpha(z_0, z_0),$$

отсюда

$$\alpha = \frac{(x_0, z_0)}{(z_0, z_0)} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{14} = -\frac{1}{63}.$$

Итак,

$$\mathrm{Pr}_L\,(x_0) = \left\{ \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right\}_{k=1}^{\infty} + \frac{1}{63}(1, 0, -2, 3, 0, 0, \ldots).$$

Для нахождения $\rho(x_0, L)$ применим теорему Пифагора (см. задачу 8.12 «а»): $\|x_0\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$. Так как

$$\|x_0\|^2 = \frac{1}{8}, \quad \|z\|^2 = \|\alpha z_0\|^2 = \frac{1}{63^2} \cdot 14 = \frac{2}{567},$$

то

$$\rho(x_0, L) = \|z\| = \sqrt{\frac{2}{567}},$$

$$\rho(x_0, L^{\perp}) = \|y\| = \sqrt{\|x_0\|^2 - \|z\|^2} = \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{2}{567}} = \frac{1}{18}\sqrt{\frac{551}{14}}. \quad ✌$$

Пример 8.2. В пространстве $L_2[-1,1]$ найти элемент наилучшего приближения для $x(t) = 1 + t^{-\frac{1}{3}}$ подпространством $L = \langle t, t^2, t^3 \rangle$.

Решение. Множество L – подпространство гильбертова пространства $L_2[-1,1]$, поэтому по теореме 8.3 существует $y \in L$ – элемент наилучшего приближения вектора x элементами из L и $y = Pr_L(x)$. Ортонормируем линейно независимую систему $\{t, t^2, t^3\}$ в пространстве $L_2[-1,1]$. Новую систему обозначим $\{e_1, e_2, e_3\}$. Тогда $L = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ и по теореме 8.5

$$y = \mathrm{Pr}_L\,(x) = \sum_{k=1}^{3} (x, e_k) e_k.$$

Найдем y. Пусть $x_k(t) = t^k$, $k = 1, 2, 3$. Элементы x_1 и x_2 ортогональны. Подберем $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ так, чтобы элемент $\widetilde{x}_3 = x_3 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ был ортогонален x_1 и x_2, т. е. чтобы выполнялись соотношения

$$0 = (\widetilde{x}_3, x_1) = \int_{-1}^{1} (t^3 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2)\, t\, dt = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\,\alpha_1,$$

$$0 = (\widetilde{x}_3, x_2) = \int_{-1}^{1} (t^3 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2)\, t^2\, dt = \frac{2}{5}\,\alpha_2.$$

Отсюда $\alpha_1 = -\dfrac{3}{5}$, $\alpha_2 = 0$ и $\widetilde{x}_3 = t^3 - \dfrac{3}{5}\,t$. Система функций $\{x_1, x_2, \widetilde{x}_3\}$ ортогональна. Чтобы нормировать ее, вычислим нормы:

$$\|x_1\| = \left(\int_{-1}^{1} t^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \|x_2\| = \left(\int_{-1}^{1} t^4\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}},$$

$$\|\widetilde{x}_3\| = \left(\int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5}\, t \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

В результате отсюда получаем ортонормированную систему $\{e_1, e_2, e_3\}$, где

$$e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t, \quad e_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}\, t^2, \quad e_3 = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(t^3 - \frac{3}{5}\, t\right).$$

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$(x, e_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} \left(1 + t^{-\frac{1}{3}}\right) t\, dt = \frac{6}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}\,,$$

$$(x, e_2) = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{1} \left(1 + t^{-\frac{1}{3}}\right) t^2\, dt = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}\,,$$

$$(x, e_3) = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}} \int_{-1}^{1} \left(1 + t^{-\frac{1}{3}}\right) \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right) dt = -\frac{24}{55}\sqrt{\frac{7}{2}}\,.$$

Итак,

$$y = \frac{9}{5}\, t + \frac{5}{3}\, t^2 - \frac{42}{11}\left(t^3 - \frac{3}{5}\, t\right) = \frac{45}{11}\, t + \frac{5}{3}\, t^2 - \frac{42}{11}\, t^3.$$ ✌

☞ В евклидовом пространстве проверить тождества 8.1–8.3.

8.1. Равенство параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

8.2. $4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$, если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$.

8.3. Полярное тождество

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\,\|x + iy\|^2 - i\,\|x - iy\|^2\,,$$

если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.

☞ Доказать утверждения 8.4–8.7.

8.4. ✯ В нормированном пространстве X можно ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой в X, т. е. такое, что $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in X$ выполняется равенство параллелограмма (см. задачу 8.1).

8.5. Скалярное произведение в евклидовом пространстве непрерывно по совокупности переменных.

8.6. Пусть X – евклидово пространство, последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset B[0,1] \subset X$ таковы, что $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Тогда $\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

8.7. Евклидово пространство является строго нормированным.

8.8. Проверить, что следующие линейные пространства над полем $\mathbb{P}$ являются гильбертовыми:

а) ℓ_2^n, если $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k$;

б) ℓ_2, если $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k$;

в) $L_2[a,b]$, если $(x,y) = \displaystyle\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$;

г) $L_2(\mathbb{R})$, если $(x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}\,dt$;

д) H_c – линейное пространство функций, определенных на $\mathbb{R}$, отличных от нуля на не более чем счетном множестве точек и таких, что $\sum\limits_t |x(t)|^2 < \infty$ со скалярным произведением $(x,y) = \sum\limits_t x(t)\overline{y(t)}$.

8.9. Доказать, что пространство H_c (см. задачу 8.8) несепарабельно.

8.10. Показать, что в нормированных пространствах c_0, c, $C[a,b]$, ℓ_p^n, ℓ_p, $L_p[a,b]$, $L_p(\mathbb{R})$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p \neq 2$, нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормами этих пространств.

8.11. Доказать, что следующие линейные пространства над полем $\mathbb{P}$ являются евклидовыми, но не гильбертовыми:

а) пространство непрерывных на $[a,b]$ функций со скалярным произведением

$$(x,y) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt;$$

б) пространство суммируемых по модулю последовательностей со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\,\overline{\eta_k};$$

в) $\widetilde{W}_2^1[a,b]$ – пространство непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций со скалярным произведением

$$(x,y) = \int_a^b \left(x(t)\,\overline{y(t)} + x'(t)\,\overline{y'(t)}\right)\,dt.$$

8.12. Пусть X – евклидово пространство, $x,y \in X$. Доказать, что

а) если $x \perp y$, то $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (теорема Пифагора);

б) если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то справедлива теорема, обратная теореме Пифагора;

в) если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то теорема, обратная теореме Пифагора, несправедлива;

г) если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то $x \perp y$ тогда и только тогда, когда $\|\lambda x + \mu y\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

☞ Пусть X – евклидово пространство, $M, N \subset X$. Доказать утверждения 8.13–8.17.

8.13. $M^\perp$ – подпространство в X.

8.14. Если $M \subset N$, то $M^\perp \supset N^\perp$.

8.15. $M \subset M^{\perp\perp}$ и $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$.

8.16. $M^\perp = \overline{\langle M \rangle}^\perp$.

8.17. Пусть $\overline{\langle M \rangle} = X$. Тогда из условия $x \perp M$ следует, что $x = 0$.

8.18. Пусть X – гильбертово пространство, $M \subset X$. Доказать, что $\overline{\langle M \rangle} = X$ тогда и только тогда, когда $M^\perp = \{0\}$.

8.19. ✯ Пусть X – неполное евклидово пространство. Показать, что из равенства $M^\perp = \{0\}$, вообще говоря, не следует, что $\overline{\langle M \rangle} = X$.

8.20. ✯ Доказать, что всякое неполное евклидово пространство X содержит подпространство X_0 такое, что $X_0 \neq X$ и $X_0^\perp = \{0\}$.

8.21. Пусть X – гильбертово пространство, $M \subset X$. Доказать, что $M^{\perp\perp} = \overline{\langle M \rangle}$.

8.22. ✯ Привести пример евклидова пространства X и множества $M \subset X$, для которого $M^{\perp\perp} \neq \overline{\langle M \rangle}$.

8.23. Пусть M и N – подпространства в гильбертовом пространстве X, $M \perp N$. Доказать, что $M + N$ – подпространство в X.

8.24. Найти замыкание множества M в пространстве $L_2[-1,1]$, если

а) $M = \langle \{t^{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle$; б) $M = \langle \{t^{2k-2}\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle$.

8.25. В пространстве ℓ_2 рассмотрим подпространства

$$M = \Big\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon x = (\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, 0, \ldots) \Big\},$$

$$N = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon x = \left(\xi_1, \xi_1, \xi_3, \frac{\xi_3}{3}, \xi_5, \frac{\xi_5}{5}, \ldots \right) \right\}.$$

Показать, что $\overline{M+N} = \ell_2$, но $M+N \neq \ell_2$, т. е. множество $M+N$ не является подпространством в ℓ_2.

8.26. В пространстве $L_2[0,1]$ найти $M^{\perp}$, если M – множество

а) многочленов от t;

б) многочленов от t^2;

в) алгебраических многочленов с нулевым свободным членом;

г) алгебраических многочленов с нулевой суммой коэффициентов;

д) функций из пространства $L_2[0,1]$, которые равны нулю почти всюду на отрезке $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$;

е) функций $x \in L_2[0,1]$ таких, что $\displaystyle\int_0^1 x(t)\,dt = 0$.

8.27. В пространстве $\widetilde{L}_2[-1,1]$ найти $M^{\perp}$, если M – множество функций из $\widetilde{L}_2[-1,1]$, равных нулю

а) при $t \leqslant 0$; б) при $t = 0$.

8.28. В пространстве ℓ_2 найти $M^{\perp}$, если

а) $M = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum\limits_{k=1}^{10} \xi_k = 0 \right\}$;

б) $\quad M = \Big\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon$

$$\xi_2 - 3\xi_3 - \xi_5 = 0,\ \xi_1 + 2\xi_2 + 4\xi_3 = 0 \Big\};$$

в) $\quad M = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0 \right\};$

г) ✯ $\quad M = \left\{ x_n = \left(1, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{2n}}, \frac{1}{2^{3n}}, \ldots \right),\ n \in \mathbb{N} \right\}.$

8.29. Пусть H_0 – подпространство в гильбертовом пространстве H, $x \in H$ и $x = y + z$, где $y \in H_0$, $z \in H_0^{\perp}$. Доказать, что

$$\rho(x, H_0) = \rho(x, y) = \|z\|\,,$$

$$\rho(x, H_0^{\perp}) = \rho(x, z) = \|y\|\,.$$

8.30. Пусть H_0 – одномерное подпространство в гильбертовом пространстве H, $x_0 \in H_0$, $x_0 \neq 0$. Доказать, что для любого $x \in H$

$$\rho(x, H_0^{\perp}) = \frac{|(x, x_0)|}{\|x_0\|}.$$

8.31. В пространстве $L_2[0,1]$ найти $\rho(x, H_1)$, если $x(t) = t^2$,

$$H_1 = \left\{ x \in L_2[0,1] \colon \int_0^1 x(t)\,dt = 0 \right\}.$$

8.32. В пространстве ℓ_2 найти $\rho(x, H_1)$, если $x = (1, 0, 0, \ldots)$,

$$H_1 = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum_{k=1}^{10} \xi_k = 0 \right\}.$$

8.33. Найти ортогональную проекцию элемента

$$x_0 = \left\{ \frac{1}{k} \right\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$$

на подпространство L, а также расстояния $\rho(x_0, L)$ и $\rho(x_0, L^{\perp})$, если а) $L = \Big\{x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \xi_1 - 3\xi_3 + \xi_5 = 0\Big\}$;

б) $L = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$, где

$$x_1 = (1, 0, -1, 0, 0, \ldots),$$
$$x_2 = (0, 1, 0, -1, 0, 0, \ldots),$$
$$x_3 = (0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, \ldots).$$

8.34. В пространстве $L_2[-1, 1]$ построить ортогональную проекцию элемента $x \in L_2[-1, 1]$ на подпространство четных функций.

8.35. Для $x \in L_2[-1, 1]$ найти многочлен наилучшего приближения $p \in P_n$, $n = 0, 1, 2$, если

а) $x(t) = e^t$; б) $x(t) = t^3$.

8.36. ✭ Построить пример евклидова пространства X, линейного многообразия $L \subset X$ и элемента $x \in X$, для которых не существует ортогональной проекции x на L.

8.37. Доказать, что в сепарабельном евклидовом пространстве всегда существует ортонормированный базис.

8.38. Доказать, что во всяком гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.

8.39. Найти ортонормированный базис в пространстве H_c (см. задачу 8.8 «д»).

☞ Доказать утверждения 8.40–8.46.

8.40. Система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \left\{\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \left\{\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

является ортонормированным базисом в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$.

8.41. Система функций $\{\cos nt\}_{n=0}^{\infty}$ является ортогональным базисом в пространстве $L_2[0,\pi]$ над $\mathbb{R}$. Замыкание в $L_2[-\pi,\pi]$ множества $\langle\{\cos nt\}_{n=0}^{\infty}\rangle$ есть множество четных функций в $L_2[-\pi,\pi]$.

8.42. Система функций $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ является ортогональным базисом в пространстве $L_2[0,\pi]$ над $\mathbb{R}$. Замыкание в $L_2[-\pi,\pi]$ множества $\langle\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}\rangle$ есть множество нечетных функций в $L_2[-\pi,\pi]$.

8.43. В пространстве $L_2[a,b]$ над полем $\mathbb{P}=\mathbb{R}$ есть ортонормированные базисы, состоящие из

а) алгебраических многочленов;

б) ступенчатых функций;

в) тригонометрических многочленов;

г) функций, лежащих в заданном плотном в $L_2[a,b]$ линейном многообразии.

8.44. Система функций $\left\{e^{2\pi int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является ортонормированным базисом в пространстве $L_2[0,1]$ над $\mathbb{C}$.

8.45. Ортогональное дополнение к системе функций $\left\{e^{2\pi int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L_2[a,b]$ над $\mathbb{C}$

1) состоит из нуля при $|a-b|\leqslant 1$;

2) отлично от нуля при $|a-b|>1$.

8.46. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим систему функций Радемахера

$$x_0(t)=1,\quad x_n(t)=\begin{cases}(-1)^k, & t\in\left(\dfrac{k}{2^n},\dfrac{k+1}{2^n}\right),\\ 0, & t=\dfrac{k}{2^n},\end{cases}$$

если $n\in N$, $k=0,1,2,2^2,\ldots,2^{n-1}$. Эта система ортонормирована в пространстве $L_2[0,1]$, но не является базисом.

8.47. Показать, что система *многочленов Лежандра*

$$p_n(t) = c_n \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,$$

получающаяся при ортогонализации системы функций $1, t, t^2, \ldots$ в пространстве $L_2[-1,1]$, является ортогональным базисом в пространстве $L_2[-1,1]$.

8.48. В пространстве $L_2[-1,1]$ найти $M^{\perp}$, если $M = \{\cos \pi t, t\}$.

8.49. В линейном пространстве функций, измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}$ и таких, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} |x(t)|^2 dt$$

конечен, положим

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} x(t)\, y(t)\, dt.$$

Полученное пространство $L_{2,q}(\mathbb{R})$ будет гильбертовым с весом $q(t) = e^{-t^2}$. Ортогонализация системы функций $1, t, t^2, \ldots$ в пространстве $L_{2,q}(\mathbb{R})$ с весом $q(t)$ дает систему многочленов Чебышева–Эрмита, полную в $L_{2,q}(\mathbb{R})$. Найти первые три многочлена этой системы.

8.50. В линейном пространстве функций, измеримых по Лебегу на $[0, +\infty)$ и таких, что интеграл

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t} |x(t)|\, dt$$

конечен, положим

$$(x, y) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t} x(t)\, y(t)\, dt.$$

Полученное пространство $L_{2,p}(0,+\infty)$ будет гильбертовым с весом $p(t) = e^{-t}$. Ортогонализация системы функций $1, t, t^2, \ldots$ в пространстве $L_{2,p}(0,+\infty)$ с весом $p(t) = e^{-t}$ дает систему многочленов Чебышева–Лагерра, полную в $L_{2,p}(0,+\infty)$. Найти первые три многочлена этой системы.

Тема 9. Функционалы и операторы в линейных нормированных пространствах

Пусть X, Y – линейные нормированные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{P}$. Отображение A, действующее из пространства X в пространство Y, называют *оператором*, а если $Y = \mathbb{P}$, то A называют *функционалом.* Через $D(A)$ будем обозначать область определения A и сокращенно писать $A\colon D(A) \subset X \to Y$; если $D(A) = X$, будем писать $A\colon X \to Y$.

Определение 9.1. Оператор (функционал) A называется

✓ *непрерывным в точке* $x_0 \in D(A)$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, x \in D(A)$$
$$\|x - x_0\|_X < \delta \;\Rightarrow\; \|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon;$$

✓ *непрерывным*, если он непрерывен в каждой точке $D(A)$;

✓ *ограниченным*, если A переводит каждое ограниченное множество из $D(A)$ в ограниченное;

✓ *линейным*, если $D(A)$ – линейное многообразие и для любых $x_1, x_2 \in D(A)$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{P}$

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2.$$

Теорема 9.1. *Оператор (функционал) A непрерывнен в точке $x_0 \in D(A)$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$*

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \quad \Longrightarrow \quad Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax_0.$$

Теорема 9.2. *Для линейного оператора A следующие условия эквивалентны:*

1) *A непрерывен;*

2) *A непрерывен в точке $x = 0$;*

3) *A ограничен;*

4) *существует $K > 0$ такое, что $\|Ax\| \leqslant K\|x\|$ для всех $x \in D(A)$.*

Теорема 9.3 (неравенство Гельдера). *Пусть числа $p, q \in (1, \infty)$ являются сопряженными показателями, т. е. связаны соотношением $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тогда для любых функций $f \in L_p(E)$, $g \in L_q(E)$ их произведение fg суммируемо ($fg \in L(E)$) и имеет место неравенство Гельдера*

$$\left| \int\limits_E f(x)g(x)\,dx \right| \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

Если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, неравенство Гельдера обращается в равенство тогда и только тогда, когда функции f и g удовлетворяют хотя бы одному из следующих двух условий:

(Γ') *существует константа C_1 такая, что*

$$f = C_1 |g|^{q-1} \operatorname{sign} g \quad \text{п. в. на } E;$$

(Γ'') *существует константа C_2 такая, что*

$$g = C_2 |f|^{p-1} \operatorname{sign} f \quad \text{п. в. на } E.$$

Множество линейных непрерывных операторов, определенных на X со значениями в Y, будем обозначать $\mathcal{L}(X, Y)$. Если $Y = X$, то будем кратко писать $\mathcal{L}(X)$ вместо $\mathcal{L}(X, X)$. Отметим, что $\mathcal{L}(X, Y)$ есть линейное пространство над $\mathbb{P}$. Пространство $\mathcal{L}(X, \mathbb{P})$ линейных непрерывных функционалов на X называется *сопряженным к пространству* X и обозначается X^*.

Пример 9.1. Пусть оператор $A\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$ действует по правилу

$$(Ax)(t) = x(a) + x'(a)(t-a).$$

Проверить, является ли A линейным, ограниченным, непрерывным?

Решение. Линейность A легко проверить по определению. По теореме 9.2 свойства ограниченности и непрерывности для A эквивалентны, поэтому достаточно проверить лишь одно из них. В данном случае проще исследовать A на ограниченность.

Пусть E – произвольное ограниченное множество из $D(A) = C^1[a,b]$. Докажем, что множество $A(E) = \{Ax : x \in E\}$ также ограничено.

Ограниченность E означает, что найдется число K такое, что для всех $x \in E$ $\|x\| \leqslant K$, т. е. в данном случае

$$\|x\| = \|x\|_{C^1[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| \leqslant K. \tag{9.1}$$

Используя неравенство (9.1), оценим $\|Ax\|$. По условию

$$\|Ax\| = \|Ax\|_{C[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |(Ax)(t)| = \max_{t\in[a,b]} |x(a) + x'(a)(t-a)|.$$

Для любого $t \in [a,b]$ справедлива следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned}
|x(a) + x'(a)(t-a)| &\leqslant |x(a)| + |x'(a)||t-a| \leqslant \\
&\leqslant |x(a)| + |x'(a)|(b-a) \leqslant \\
&\leqslant \max\{1, b-a\} \cdot (|x(a)| + |x'(a)|) \leqslant \\
&\leqslant \max\{1, b-a\} \cdot \max_{t\in[a,b]}\{|x(t)| + |x'(t)|\} \leqslant \\
&\leqslant \max\{1, b-a\} \cdot \|x\| \leqslant \max\{1, b-a\} \cdot K.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\|Ax\| = \max_{t\in[a,b]} |x(a) + x'(a)(t-a)| \leqslant \max\{1, b-a\} \cdot K.$$

Следовательно, множество $A(E)$ ограничено.

Итак, оператор A – линейный, ограниченный и непрерывный. ✌

Пример 9.2. Функционал $f\colon \widetilde{L}_2[0,1] \to \mathbb{R}$ действует по правилу

$$f(x) = |x(1)|.$$

Проверить, является ли f линейным, ограниченным, непрерывным?

Решение. Очевидно, f не является линейным, поскольку если $\lambda < 0$ и $x(1) \neq 0$, то $f(\lambda x) = |\lambda x(1)| \neq \lambda |x(1)| = \lambda f(x)$.

1. Докажем сначала, что f разрывен в точке $x_0(t) \equiv 0$. Поскольку $f(x_0) = |x_0(1)| = 0$, мы должны построить последовательность функций $\{x_n\} \subset \widetilde{L}_2[0,1]$ такую, что $\|x_n - x_0\| \to 0$, а $f(x_n) = |x_n(1)| \not\to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность

$$x_n(t) = t^n, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Ясно, что $f(x_n) = 1$. С другой стороны,

$$\|x_n\| = \|x_n\|_{\widetilde{L}_2[0,1]} = \left(\int_0^1 t^{2n}\,dt\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, f терпит разрыв в точке x_0, а значит, не является непрерывным на всем пространстве $\widetilde{L}_2[0,1]$.

Докажем, что f не является непрерывным в любой другой точке из $\widetilde{L}_2[0,1]$. Для этого рассмотрим последовательность

$$\widetilde{x}_n(t) = x_0(t) + (-1)^n t^n.$$

Имеем

$$\|\widetilde{x}_n - x_0\| = \|(-1)^n t^n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

а

$$f(\widetilde{x}_n) = |x_0(1) + (-1)^n| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(x_0) = |x_0(1)|.$$

2. Докажем теперь, что f не ограничен. Для этого модифицируем последовательность $\{x_n\}$ следующим образом:

$$\overline{x}_n(t) = \frac{x_n(t)}{\|x_n\|}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда $\|\overline{x}_n\| = 1$ и, следовательно, множество $\{\overline{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено. С другой стороны, множество $\left\{ f(\overline{x}_n) = \dfrac{1}{\|x_n\|} : n \in \mathbb{N} \right\}$, очевидно, не ограничено.

Можно доказать неограниченность f и несколько иначе. Функционал f есть суперпозиция линейного функционала $g\colon \widetilde{L}_2[0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x(1)$ и функционала (функции) $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(y) = |y|$. Функция ϕ непрерывна в точке $x = 0$. Отсюда следует, что g разрывен в точке 0, поскольку в противном случае f, как суперпозиция непрерывных функционалов, был бы непрерывным в точке 0. Поскольку g линейный и разрывный, то g не ограничен. Это означает, что образ единичного шара $B = \{x \in \widetilde{L}_2[0,1]\colon \|x\| \leqslant 1\}$ при отображении g, т. е. множество $g(B) = \{x(1)\colon x \in B\}$ не ограничено. Но $g(B)$ ограничено или не ограничено одновременно с множеством $f(B) = \{|x(1)|\colon x \in B\}$. Следовательно, множество $f(B)$ не ограничено и функционал f не ограничен. ✌

Пример 9.3. Проверить, является ли оператор J, заданный формулой $Jx = x$, ограниченным и непрерывным, если

а) $D(J) = X = L_q[0,1], \quad Y = L_p[0,1], \quad p < q$;

б) $D(J) = L_q[0,1], \quad X = L_p[0,1], \quad Y = L_q[0,1], \quad p < q$.

Решение. Очевидно, что оператор вложения одного линейного нормированного пространства в другое является линейным. Следовательно, в силу теоремы 9.2 ограниченность и непрерывность этого оператора эквивалентны.

а) Оператор J является ограниченным и непрерывным, так как при $p < q$ имеет место строгое вложение $L_q[a,b] \subset L_p[a,b]$, причем $\|\cdot\|_q$ сильнее нормы $\|\cdot\|_p$, а значит, выполняется условие 4 теоремы 9.2.

б) Заметим, что функция $x(t) = t^{-\alpha}$ при $\dfrac{1}{q} \leqslant \alpha < \dfrac{1}{p}$ принадлежит пространству $L_p[0,1]$, но не принадлежит пространству $L_q[0,1]$. Для произвольного α с таким свойством рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ t^{-\alpha}, & t \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Она принадлежит обоим пространствам и поточечно сходится к x при $n \to \infty$. При этом

$$\|x_n - x\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \|x_n\|_q \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Следовательно, оператор J не является непрерывным, а значит, и ограниченным. ✌

☞ В задачах **9.1–9.9** X – линейное нормированное пространство. Проверить, является ли функционал $f : D(f) \subset X \to \mathbb{P}$ линейным, ограниченным, непрерывным.

9.1. $f(x) = \displaystyle\int_0^1 |x(t)|\,dt$,

а) $D(f) = X = C[0,1]$; б) $D(f) = X = L_p[0,1]$.

9.2. $f(x) = \left|x\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|$,

а) $D(f) = X = C[0,1]$; б) $D(f) = X = \widetilde{L}_2[0,1]$.

9.3. $f(x) = x'(t_0)$, $t_0 \in [0,1]$,

а) $D(f) = X = C^1[0,1]$;

б) $D(f)$ – множество полиномов, $X = C[0,1]$;

в) $D(f) = C^1[0,1]$, $X = L_p[0,1]$.

9.4. $f(x) = \int_0^1 x'(t)\cos t\,dt,\;\; D(f) = C^1[0,1],\;\; X = C[0,1].$

9.5. $f(x) = \int_0^1 x'(t)\sin t\,dt,\;\; D(f) = C^1[0,1],\;\; X = L_p[0,1].$

9.6. $f(x) = x'(0) + 5,\;\; D(f) = C^1[0,1],\;\; X = C[0,1].$

9.7. $f(x) = \sup\limits_k \xi_k,\;\; D(f) = X = m$ над $\mathbb{R}$.

9.8. $f(x) = \max\limits_{t\in[0,1]} x(t),$

а) $D(f) = X = C[0,1]$ над $\mathbb{R}$;

б) $D(f) = C[0,1]$, $X = L_p[0,1]$ над $\mathbb{R}$.

9.9. $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k,$

$$M = \left\{ x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} :\; \text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \text{ сходится} \right\},$$

а) $D(f) = X = \ell_1$; б) $D(f) = M,\;\; X = m$;

в) $D(f) = \ell_p \cap M,\;\; X = \ell_p,\;\; 1 < p < \infty.$

9.10. Пусть X – бесконечномерное линейное нормированное пространство. Привести пример оператора $A\colon X \to X$, который не является линейным и ограниченным, но непрерывен на X.

9.11. Оператор A определен на пространстве ℓ_2 формулой $Ax = \{\alpha_k \xi_k\},\;\; x = \{\xi_k\}$. Найти необходимые и достаточные условия на последовательность $\alpha = \{\alpha_k\}$, при которых $A \in \mathcal{L}(\ell_2)$.

☞ В задачах **9.12–9.25** X, Y – линейные нормированные пространства. Проверить, является ли оператор $A\colon D(A) \subset X \to Y$ линейным, ограниченным, непрерывным.

9.12. $(Ax)(t) = tx'(t)$,

а) $A\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$;

б) $D(A) = C^1[a,b]$, $X = Y = C[a,b]$.

9.13. $(Ax)(t) = x^2(t)$,

а) $A\colon C[a,b] \to C[a,b]$;

б) $D(A) = \big\{x \in L_p[a,b] : x^2(t) \in L_p[a,b]\big\}$,
$X = Y = L_p[a,b]$.

9.14. $(Ax)(t) = \sqrt{|x(t)|}$,

а) $A\colon C[a,b] \to C[a,b]$; б) $A\colon L_p[a,b] \to L_p[a,b]$.

9.15. ✯ $(Ax)(t) = \sqrt[k]{|x(t)|}$, $k \in \mathbb{N}$, $A\colon L_p[a,b] \to L_p[a,b]$.

9.16. $Ax = \{\xi_k^2\}_{k=1}^{\infty}$,

а) $A\colon c \to c$; б) $A\colon \ell_p \to \ell_p$.

9.17. $Ax = \{\sqrt{|\xi_k|}\,\}_{k=1}^{\infty}$,

а) $A\colon c_0 \to c_0$; б) $A\colon m \to m$;

в) $D(A) = \big\{x = \{\xi_k\} \in \ell_p : Ax \in \ell_p\big\}$, $X = Y = \ell_p$.

9.18. $Ax = \{\operatorname{sign} \xi_k\}$, $A\colon m \to m$, $\mathbb{P} = \mathbb{R}$.

9.19. $(Ax)(t) = e^t x(t) + x(0)$, $A\colon \widetilde{L}_1[0,1] \to \widetilde{L}_1[0,1]$.

9.20. $Ax = \{|\xi_k|\}_{k=1}^{\infty}$,

а) $A\colon \ell_p \to \ell_p$; б) $A\colon c \to c$.

9.21. $Ax = \{|\xi_k|^m\}_{k=1}^{\infty}$, $m \in \mathbb{N}$,

а) $A\colon \ell_p \to \ell_p$; б) $A\colon c \to c$.

9.22. $Ax = \{|\xi_k|^\alpha\}_{k=1}^{\infty}$, $\alpha > 0$,

а)✯ $D(A) = \big\{x = \{\xi_k\} \in \ell_p : Ax \in \ell_p\big\}$, $X = Y = \ell_p$;

б) $A\colon c \to c$.

9.23. $(Ax)(t) = x(a) + x'(a)(t-a)$,

$D(A) = C^1[a,b]$, $X = Y = C[a,b]$.

9.24. $(Ax)(t) = \dfrac{|x(t)| - x(t)}{2}$,

$A\colon C[0,2] \to L_2[0,2]$.

9.25. $(Ax)(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{x^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}$,

а) $D(A) = C^m[a,b]$, $X = Y = C[a,b]$;

б) $A\colon C^m[a,b] \to C[a,b]$.

9.26. Докажите, что во всяком бесконечномерном линейном нормированном пространстве X можно определить разрывный линейный функционал f с $D(f) = X$.

Тема 10. Нормы линейных функционалов и операторов

Определение 10.1. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства над полем $\mathbb{P}$, $A\colon X \to Y$ – линейный ограниченный оператор. *Нормой* оператора A называется величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|.$$

Справедливы равенства

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} =$$
$$= \inf\{K : \forall\, x \in X \quad \|Ax\| \leqslant K\|x\|\}.$$

Если в пространстве X существует элемент x такой, что $\|x\| = 1$ и $\|Ax\| = \|A\|$, то говорят, что норма A *достижима*, если же такого элемента не существует, норма A *недостижима*.

Пример 10.1. Оператор $A\colon C[0,2] \to C[0,2]$ задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\, ds.$$

Найти норму A, выяснить, является ли она достижимой.

Решение. Сначала оценим $\|A\|$ сверху:

$$\begin{aligned} \|Ax\| = \max_{t\in[0,2]} \left|\int_0^t x(s)\,ds\right| \leqslant \max_{t\in[0,2]} \int_0^t |x(s)|\,ds \leqslant \\ \leqslant \max_{t\in[0,2]} \max_{s\in[0,1]} |x(s)| \int_0^t 1\,ds = \max_{t\in[0,2]} \|x\| t = \|x\|\cdot 2. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Таким образом, мы получили оценку $\|Ax\| \leqslant 2\,\|x\|$, следовательно $\|A\| \leqslant 2$. Если взять $x(t) \equiv 1$, все неравенства (10.1) обратятся в равенства. Значит, $\|A\| = 2$, норма достигается. ✌

Пример 10.2. Функционал $f\colon C[0,3] \to \mathbb{R}$ задан формулой

$$f(x) = \int_0^2 tx(t)\,dt - \int_2^3 tx(t)\,dt.$$

Найти норму f, выяснить, является ли она достижимой.

Решение. Мы можем записать f в виде

$$f(x) = \int_0^3 \varphi(t)\cdot x(t)\,dt, \quad \text{где} \quad \varphi(t) = \begin{cases} t, & t\in[0,2], \\ -t, & t\in(2,3]. \end{cases}$$

Сначала оценим $\|f\|$ сверху:

$$\begin{aligned} |f(x)| = \left|\int_0^3 \varphi(t)\cdot x(t)\,dt\right| \overset{(*)}{\leqslant} \int_0^3 |\varphi(t)\cdot x(t)|\,dt \overset{(**)}{\leqslant} \\ \leqslant \max_{t\in[0,3]} |x(t)| \int_0^3 |\varphi(t)|\,dt = \|x\|\cdot\frac{9}{2}. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Следовательно, $\|f\| \leqslant \dfrac{9}{2}$. Проанализируем, возможна ли ситуация, когда оба неравенства в (10.2) обратятся в равенство. Неравенство $(*)$ обращается в равенство, когда функция $\varphi(t)\cdot x(t)$ сохраняет знак п. в. на $[0,3]$, что для непрерывной функции x возможно, только если $x(t) \geqslant 0$, $t \in [0,2)$, и $x(t) \leqslant 0$, $t \in (2,3]$. Неравенство $(**)$ обращается в равенство, когда $|x(t)| = \mathrm{const}$ на $[0,3]$. Таким образом, «идеальная» функция должна иметь вид

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,2), \\ -1, & t \in (2,3]. \end{cases}$$

Функция x не определена в точке $t = 2$. При этом ясно, что доопределить функцию x так, чтобы она стала непрерывной в этой точке, невозможно. Рассмотрим последовательность функций

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, 2 - \dfrac{1}{n}\right], \\ n(2-t), & t \in \left(2 - \dfrac{1}{n}, 2 + \dfrac{1}{n}\right), \\ -1, & t \in \left[2 + \dfrac{1}{n}, 3\right]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\|x_n\| = 1$, а $|f(x_n)| \to \dfrac{9}{2}$ при $n \to \infty$. Поскольку

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geqslant |f(x_n)| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{9}{2},$$

то $\|f\| \geqslant \dfrac{9}{2}$, а значит, $\|f\| = \dfrac{9}{2}$.

Из приведенных выше рассуждений следует, что не существует такого элемента x, для которого $\|x\| = 1$ и $|f(x)| = \dfrac{9}{2}$, следовательно, норма не достигается. ✌

Пример 10.3. Оператор $A\colon L_1[0,1] \to C[0,1]$ задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^1 (e^t + e^{-s})x(s)\,ds.$$

Найти норму A.

Решение. Сначала оценим $\|A\|$ сверху:

$$\|Ax\| = \max_{t\in[0,1]} \left| \int_0^1 (e^t + e^{-s})x(s)\,ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 (e^t + e^{-s})|x(s)|\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t\in[0,1]} \max_{s\in[0,1]} (e^t + e^{-s}) \int_0^1 |x(s)|\,ds = (e+1)\|x\|.$$

Итак, $\|A\| \leqslant e+1$. Выражение $(e^t + e^{-s})$ достигает своего максимума по s в точке $s = 0$. Рассмотрим последовательность функций, сосредоточенных в окрестности 0:

$$x_n(s) = \begin{cases} 1, & s \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0, & s \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Ясно, что $\|x_n\| = \dfrac{1}{n}$. При этом

$$\|Ax_n\| = \max_{t\in[0,1]} \int_0^{\frac{1}{n}} (e^t + e^{-s})\,ds =$$
$$= \max_{t\in[0,1]} \left(\frac{e^t}{n} - e^{-1/n} + 1 \right) = \frac{e}{n} - e^{-1/n} + 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{e}{n} - e^{-1/n} + 1\right) = e+1.$$

Таким образом, $\|A\| \geqslant e+1$. Оценка сверху и оценка снизу совпали, значит, $\|A\| = e+1$. ✌

☞ В задачах **10.1–10.8** вычислить норму функционала.

10.1. $f(x) = \displaystyle\int_0^3 (s^3 - 9s)x(s)\,ds$,

а) $X = C[0,3]$; б) $X = L_1[0,3]$.

10.2. $f(x) = \int_{-1}^{3} (s^3 - 9s)x(s)\,ds,$

а) $X = C[-1, 3]$; б) $X = L_1[-1, 3]$.

10.3. $f(x) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 s \cdot \cos s \cdot x(s)\,ds,$

а) $X = C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; б) $X = L_1\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $X = L_p\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $1 < p < \infty$.

10.4. $f(x) = 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} x(s)ds - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x(s)ds,$

а) $X = C[0, 1]$; б) $X = L_1[0, 1]$.

Выяснить, является ли норма достижимой.

10.5. $f(x) = 2\int_{0}^{\frac{1}{3}} x(s)ds - \int_{\frac{2}{3}}^{1} x(s)ds,$

а) $X = C[0, 1]$; б) $X = L_1[0, 1]$.

Выяснить, является ли норма достижимой.

10.6. $f(x) = \alpha x(0) + \beta \int_{0}^{1} x(t)dt,$ $X = C[0, 1]$.

10.7. $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\xi_n,$ а) $X = c_0$; б) $X = m$.

Выяснить, является ли норма достижимой.

10.8. $f(x) = \int_{0}^{1} \sqrt{t}x(t^2)dt,$

а) $X = C[0, 1]$; б) $X = L_2[0, 1]$;

в) $X = L_3[0, 1]$.

10.9. Пусть $f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{x(s)}{\sqrt[3]{s}}\,ds$. Для каких значений p,

$1 \leqslant p \leqslant \infty$, f является непрерывным функционалом в пространстве $L_p[-1,1]$? Найти норму f.

☞ В задачах **10.10–10.23** вычислить норму оператора.

10.10. $(Ax)(t) = \displaystyle\int_1^2 (2t+s)x(s)ds,$

а) $A\colon C[1,2] \to C[0,1]$; б) $A\colon L_1[1,2] \to C[0,1]$;

в) $A\colon L_1[1,2] \to L_1[0,1]$.

10.11. $(Ax)(t) = \displaystyle\int_1^2 (2t-s)x(s)ds,$

а) $A\colon C[1,2] \to C[0,1]$; б) $A\colon L_1[1,2] \to C[0,1]$;

в) $A\colon L_1[1,2] \to L_1[0,1]$.

10.12. $(Ax)(t) = x\left(\dfrac{t^2}{2}\right),$

а) $A\colon C[0,2] \to C[0,2]$; б) $A\colon C[0,2] \to L_1[0,2]$.

10.13. $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t (t-s)x(s)ds, \quad A\colon C[0,\pi] \to C[0,\pi].$

10.14. $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots), \quad A\colon \ell_p \to \ell_p.$

10.15. $Ax = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots), \quad A\colon \ell_p \to \ell_p.$

10.16. $Ax = (\xi_2, \xi_3, \xi_1+\xi_2, \xi_4, \xi_5, \ldots),$

а) $A\colon \ell_1 \to \ell_1$; б)✯ $A\colon \ell_2 \to \ell_2$; в) $A\colon m \to m$.

10.17. $A\colon \ell_p \to \ell_p,$

а) $Ax = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \xi_n\right\}_{n=1}^{\infty}$;

б) $Ax = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \xi_n\right\}_{n=1}^{\infty}$.

10.18. $Ax = \{ne^{-n/3}\xi_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad A\colon \ell_1 \to \ell_1.$

10.19. $Ax = \{\alpha_n \xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $|\alpha_n| \leqslant c$, $A\colon \ell_p \to \ell_q$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$.

10.20. $Jx = x$,

а) $J\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$;

б) $J\colon L_q[a,b] \to L_p[a,b]$, $\quad 1 \leqslant p < q \leqslant \infty$;

в) $J\colon \ell_p \to \ell_q$, $\quad 1 \leqslant p < q \leqslant \infty$.

10.21. $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$,

а) $A\colon C[a,b] \to C[a,b]$, $\quad \varphi \in C[a,b]$;

б) $A\colon L_2[a,b] \to L_1[a,b]$, $\quad \varphi \in L_2[a,b]$;

в) $A\colon L_p[a,b] \to L_p[a,b]$,

$$\varphi(t) = \begin{cases} 5\cos t, & t \in \mathbb{Q} \cap [a,b], \\ -3\sin t, & t \in \mathbb{I} \cap [a,b]. \end{cases}$$

10.22. $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$, $\qquad A\colon L_p[0,2] \to L_p[0,2]$,

а) $\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \dfrac{3}{2}\right], \\ 1, & t \in \left(\dfrac{3}{2}, 2\right]; \end{cases}$ $\qquad$ б) $\varphi(t) = t^2$;

в) $\varphi(t) = t(t-1)(t-2)$.

10.23. $(Ax)(t) = x'(t)$, $\quad A\colon C^1[0,1] \to C[0,1]$.

10.24. Для каких α оператор $(Ax)(t) = x(t^\alpha)$ линеен и непрерывен в X? Найти норму A, если он ограничен.

а) $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$; $\qquad$ б) $A\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$.

10.25. Для каких α, β оператор $(Ax)(t) = t^\beta x(t^\alpha)$ линеен и ограничен в $L_2[0,1]$? Найти его норму A, если он ограничен.

10.26. Функционал $f : X \to \mathbb{R}$ задан формулой $f(x) = \displaystyle\int_a^b \varphi(s)x(s)\,ds$, $\varphi \in C[a,b]$. Докажите, что а) если $X = C[a,b]$, то $\|f\| = \displaystyle\int_a^b |\varphi(s)|\,ds$;

б) если $X = L_1[a,b]$, то $\|f\| = \max\limits_{s\in[a,b]} |\varphi(s)|$.

10.27. Оператор A задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_c^d K(t,s)x(s)\,ds, \quad K(t,s) \in C\big([a,b]\times[c,d]\big).$$

Докажите, что

а) если $A : C[c,d] \to C[a,b]$, то

$$\|A\| = \sup_{t\in[a,b]} \int_c^d |K(t,s)|\,ds;$$

б) если $A : L_1[c,d] \to C[a,b]$, то

$$\|A\| = \sup_{t\in[a,b],\, s\in[c,d]} |K(t,s)|;$$

в) если $A : L_1[c,d] \to L_1[a,b]$, то

$$\|A\| = \sup_{s\in[c,d]} \int_a^b |K(t,s)|\,dt.$$

10.28. Пусть X – нормированное, а Y – банахово пространства и A_0 – линейный оператор с $D(A_0) \subset X$ и $R(A_0) \subset Y$, причем $\overline{D(A_0)} = X$ и на $D(A_0)$ оператор ограничен. Докажите, что оператор A_0 можно продолжить по непрерывности на все пространство X, т. е. существует оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ такой, что $Ax = A_0x$ для любого $x \in D(A_0)$, причем $\|A\| = \|A_0\|$ и продолжение единственно.

10.29. Оператор A задан формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^1 K(t,s)x'(s)\,ds,$$

где функция $K(t,s)$ и ее производная $K'_s(t,s)$ непрерывны на $[0,1]\times[0,1]$, $D(A) = C^1[0,1]$, $X = Y = C[0,1]$. Продолжите оператор A по непрерывности на $C[0,1]$.

Тема 11. Сходимость последовательности линейных операторов

Определение 11.1. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства. Говорят, что последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ сходится к оператору $A\colon X \to Y$

✓ *поточечно* (*или сильно*), если для любого $x \in X$

$$\|A_n x - Ax\|_Y \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

✓ *равномерно*, если она сходится к A по норме, т. е.

$$\|A_n - A\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Если последовательность операторов $\{A_n\}$ сходится к оператору A равномерно, то она сходится к A и поточечно.

Определение 11.2. Говорят, что последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *сходится* (поточечно или равномерно), если существует оператор $A\colon X \to Y$, удовлетворяющий соответствующему условию из определения 11.1.

Теорема 11.1 (критерий поточечной сходимости). *Пусть X – банахово пространство, Y – нормированное пространство. Последовательность операторов $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ сходится поточечно к оператору $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ тогда и только тогда, когда*

1) (*числовая*) *последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена*;

2) *найдется множество $M \subset X$ такое, что $\overline{\langle M\rangle} = X$ и $A_n x \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$ для любого $x \in M$ (здесь $\langle M\rangle$ – линейная оболочка M, а черта означает замыкание множества).*

Пример 11.1. Сходится ли последовательность функционалов

$$f_n(x) = \int_0^1 y_n(t)\,x(t)\,dt, \tag{11.1}$$

где

$$y_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}; \\ \dfrac{n}{2}\left(t - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2}, & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}; \\ 1, & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

а) поточечно в $L[0,1]$; б) поточечно в $C[0,1]$;
в) равномерно в $C[0,1]$; г) равномерно в $L[0,1]$?

Решение. а) Пусть $x \in L[0,1]$. Проверим, что для последовательности функций $\{y_n(t)\,x(t)\}$ выполняются условия теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Функции $y_n(t)\,x(t)$ измеримы, имеют суммируемую мажоранту: $|y_n(t)\,x(t)| \leqslant |x(t)|$ и для всех $t \in [0,1]$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n(t)\,x(t) = y(t)\,x(t)$, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{1}{2}, & t = \dfrac{1}{2}; \\ 1, & \dfrac{1}{2} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Поэтому по теореме Лебега

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 y_n(t)\,x(t)\,dt = \int_0^1 y(t)\,x(t)\,dt.$$

Положим

$$f(x) = \int_0^1 y(t)\,x(t)\,dt. \tag{11.2}$$

Очевидно, что $f \in (L[0,1])^*$. Таким образом, в пространстве $L[0,1]$ последовательность $\{f_n\}$ поточечно сходится к f.

б) Если $x \in C[0,1]$, то так же, как в предыдущем пункте, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, которая задается формулой (11.2). Этот функционал непрерывен и в пространстве $C[0,1]$, т. е. $f \in (C[0,1])^*$. Таким образом, последовательность $\{f_n\}$ поточечно сходится к f в пространстве $C[0,1]$.

в) Покажем, что $\{f_n\}$ равномерно сходится к f в $C[0,1]$. Справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} |(f_n - f)(x)| \leqslant \int_0^1 |y_n(t) - y(t)|\,|x(t)|\,dt \leqslant \\ \leqslant \|x\|_{C[0,1]} \cdot \int_0^1 |y_n(t) - y(t)|\,dt = \\ = \|x\|_{C[0,1]} \cdot \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |y_n(t) - y(t)|\,dt = \frac{1}{2n}\,\|x\|_{C[0,1]}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|f_n - f\| \leqslant \dfrac{1}{n}$, т. е. $\{f_n\}$ равномерно сходится к f в $C[0,1]$.

г) Если последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно, то ее равномерный предел должен совпадать с поточечным пределом. В пункте «а» мы доказали, что поточечно $\{f_n\}$ сходится к функционалу f, определенному формулой (11.2). Оценим

$\|f_n - f\|$. Для этого рассмотрим последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}; \\ n, & \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ -n, & \dfrac{1}{2} < t \leqslant \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}; \\ 0, & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Ясно, что $\|x_n\| = 2$ и

$$\|f_n - f\| \geqslant \left|(f_n - f)\left(\frac{x_n}{2}\right)\right| = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |y_n(t) - y(t)| \cdot \frac{n}{2}\, dt = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, $\|f_n - f\| \not\to 0$ при $n \to \infty$ и последовательность $\{f_n\}$ не сходится равномерно в пространстве $L[0,1]$.

Отметим, что в будущем можно вычислять (оценивать) $\|f_n - f\|$, применяя теорему 12.4. По этой теореме

$$\|f_n - f\| = \|y_n - y\|_{L_\infty[0,1]} = \frac{1}{2}.$$ ✌

Пример 11.2. Сходится ли последовательность операторов

$$A_n x = \left(\frac{\xi_n}{n}, \frac{\xi_{n+1}}{n+1}, \ldots, \frac{\xi_{2n}}{2n}, 0, 0 \ldots\right), \qquad A_n : c_0 \to \ell_1,$$

поточечно? Сходится ли она равномерно?

Решение. Если последовательность операторов $\{A_n\}$ сходится к некоторому оператору A поточечно, то для всех $x \in c_0$ $\|A_n x - Ax\|_{\ell_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Из сходимости по норме в пространстве ℓ_1 следует покоординатная сходимость. Покоординатно $A_n x \to 0$, значит, оператор A может быть только нулевым.

Убедимся, что последовательность $\{A_n\}$ поточечно сходится к оператору $A = 0$. Действительно,

$$\|A_n x - 0x\|_{\ell_1} = \sum_{k=n}^{2n} \left|\frac{\xi_k}{k}\right| \leqslant \max_{n\leqslant k\leqslant 2n} |\xi_k| \cdot \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{n\leqslant k\leqslant 2n} |\xi_k| \cdot \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

так как $x \in c_0$.

Если бы последовательность операторов $\{A_n\}$ сходилась к некоторому оператору B равномерно, она сходилась бы к этому же оператору поточечно. Мы уже доказали, что $\{A_n\}$ поточечно сходится к $A = 0$, следовательно, B может быть только нулевым, но $\{A_n\}$ не сходится к нулевому оператору равномерно. Чтобы показать это, рассмотрим следующую последовательность $\{x_n\} \in c_0$:

$$x_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2n}, 0, 0, \dots), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Имеем

$$\|A_n - 0\| = \|A_n\| \geqslant \|A_n x_n\| = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n+1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}.$$ ✌

Пример 11.3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость последовательность функционалов $\{f_n\} \subset C^*[0, 2]$,

$$f_n(x) = \int_0^2 \frac{n}{n^2t^2 + 1}\, x(t)\, dt.$$

Решение. Докажем поточечную сходимость последовательности $\{f_n\}$, используя теорему 11.1. Имеем (см. задачу 10.26)

$$\|f_n\| = \int_0^2 \frac{n}{n^2t^2 + 1}\, dt = \operatorname{arctg} 2n \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Множество многочленов плотно в $C[0,2]$, т. е. $\overline{\langle M\rangle} = C[0,2]$, если $M = \{t^k\}_{k=0}^{\infty}$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f_n(t^k) = \int_0^2 \frac{nt^k}{n^2t^2+1}\,dt \leqslant \max_{t\in[0,2]} |t^{k-1}| \cdot \int_0^2 \frac{nt}{n^2t^2+1}\,dt = \\ = 2^{k-1} \cdot \frac{\ln(4n^2+1)}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Для $k=0$ имеем

$$f_n(t^0) = \int_0^2 \frac{n}{n^2t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} 2n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, на множестве M

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \frac{\pi}{2}\,x(0).$$

Согласно критерию поточечной сходимости последовательность $\{f_n\}$ поточечно сходится к f на $C[0,2]$.

Равномерной сходимости на $C[0,2]$ нет. Действительно, пусть

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - n^2t, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{n^2}, \\ 0, & \dfrac{1}{n^2} \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

Тогда $\|x_n\| = 1$,

$$\|f_n - f\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x) - f(x)| \geqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| = \\ = \left| \int_0^{\frac{1}{n^2}} \frac{n}{n^2t^2+1}\,x_n(t)\,dt - \frac{\pi}{2}\,x_n(0) \right| = \\ = \left| \int_0^{\frac{1}{n^2}} \frac{n}{n^2t^2+1}\,x_n(t)\,dt - \frac{\pi}{2} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi}{2},$$

так как

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n^2}} \frac{n}{n^2t^2+1}\,x_n(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^{\frac{1}{n^2}} \frac{n}{n^2t^2+1}\,dt =$$

$$= \operatorname{arctg} nt \Big|_0^{\frac{1}{n^2}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$ ✌

11.1. Доказать, что последовательность операторов

$$\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\ell_2), \qquad A_n x = \left(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots, \frac{\xi_n}{n}, 0, 0, \dots\right)$$

равномерно сходится к оператору A: $Ax = \left\{\dfrac{\xi_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

11.2. Сходится ли последовательность операторов

$\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\ell_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $A_n x = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, \xi_1, \xi_2, \dots)$

поточечно? Сходится ли она равномерно?

11.3. Сходится ли последовательность операторов $\{A_n\}$, где $A_n x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$, поточечно, если

а) $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\ell_p)$; б) $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(c_0)$; в) $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(c)$?

Сходится ли $\{A_n\}$ равномерно?

11.4. Пусть $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty$,

$$A_n x = (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \dots, \alpha_n \xi_n, 0, 0, \dots).$$

При каких α последовательность $\{A_n\}$ сходится равномерно в пространстве X?

а) $X = \ell_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$; б) $X = c$; в) $X = c_0$.

При каких α последовательность $\{A_n\}$ сходится в пространстве X поточечно?

11.5. Доказать, что последовательность операторов

$$\{A_n\} \subset \mathcal{L}(C[0,1]), \quad (A_n x)(t) = \int_0^t \sum_{k=0}^{n} \frac{s^k}{k!}\, x(s)\, ds$$

равномерно сходится к оператору A:

$$(Ax)(t) = \int_0^t e^s x(s)\, ds.$$

11.6. Пусть $A_n\colon D(A_n) \subset C[0,1] \to C[0,1]$, $D(A_n) = C^1[0,1]$, $\mathbb{P} = \mathbb{R}$ и

$$(A_n x)(t) = n\left[x\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(t+\frac{1}{n}\right)\right) - x\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)t\right)\right].$$

Доказать, что

а) A_n – линейный непрерывный оператор при любом $n \in \mathbb{N}$;

б) последовательность операторов $\{A_n\}$ поточечно сходится к оператору D, $(Dx)(t) = x'(t)$;

в) последовательность операторов $\{A_n\}$ не сходится равномерно.

11.7. Сходится ли последовательность $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(L_1[0,2])$,

$$(A_n x)(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leqslant t \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}, \\ 0, & 1 - \dfrac{1}{n} < t \leqslant 2, \end{cases}$$

равномерно? Сходится ли $\{A_n\}$ поточечно?

11.8. ✩ Доказать, что последовательность операторов $(A_n x)(t) = x\left(t^{\frac{n+1}{n}}\right)$ в пространстве $C[0,1]$ поточечно сходится к единичному оператору, но не сходится равномерно.

11.9. При каких α последовательность функционалов $\{f_n\} \subset (C[0,1])^*$,

$$f_n(x) = \int_0^1 n^\alpha t^n x(t)\,dt,$$

сходится равномерно? При каких α последовательность $\{f_n\}$ сходится поточечно?

11.10. Выяснить характер сходимости последовательности функционалов $\{f_n\}$:

а) $f_n(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt \, dt, \quad X = L_2[-\pi, \pi];$

б) $f_n(x) = x\left(\dfrac{1}{n}\right), \quad X = C[0, 1];$

в) $f_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (t^n - t^{n+1}) x(t) \, dt, \quad X = L_p[0, 1];$

г) $f_n(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} x(t) \operatorname{arctg} nt \, dt, \quad X = C[-1, 1];$

д) $f_n(x) = \displaystyle\int_{-1}^{1} x(t) \operatorname{arctg} nt \, dt, \quad X = L[-1, 1].$

11.11. Пусть X – одно из пространств ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, c, c_0. В каких пространствах последовательность $\{f_n\} \subset X^*$ сходится равномерно, в каких – поточечно, если

а) $f_n(x) = \xi_n;$ б) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k}{k}$?

Тема 12. Линейные непрерывные функционалы

Теорема 12.1 (теорема Хана – Банаха. Продолжение линейного непрерывного функционала с сохранением нормы). *Пусть* $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ *– линейное нормированное пространство над полем* $\mathbb{P}$, X_0 *– линейное многообразие в* X *и* f_0 *– линейный непрерывный функционал на* $\langle X_0, \|\cdot\|\rangle$. *Тогда* f_0 *может быть продолжен до некоторого линейного непрерывного функционала* f *на* X *с сохранением нормы, т. е. так, что*

$$\|f_0\|_{X_0^*} = \|f\|_{X^*}.$$

Теорема 12.2 (геометрический смысл нормы линейного функционала). *Пусть* X *– нормированное пространство. Если* $f \in X^*$, $f \neq 0$, *то*

$$\rho(0, f^{-1}(1)) = \frac{1}{\|f\|}.$$

Определение 12.1. Пусть X – линейное нормированное пространство, $f \in X^*$, $c \in \mathbb{P}$. *Гиперплоскостью* в X называется множество

$$f^{-1}(c) = \{x \in X : f(x) = c\}.$$

Геометрическая интерпретация теоремы Хана–Банаха. Уравнение $f_0(x) = 1$ задает в пространстве $\langle X_0, \|\cdot\|\rangle$ гиперплоскость L_0, которая является плоскостью в $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ и лежит на расстоянии $1/\|f_0\|$ от нуля. Продолжая функционал f_0 без увеличения нормы на все пространство $\langle X, \|\cdot\|\rangle$, мы получаем функционал $f \in X^*$, порождающий гиперплоскость $L = f^{-1}(1)$ в X. При этом L содержит в себе L_0 и тоже лежит на расстоянии $1/\|f_0\|$ от нуля в X.

Теорема 12.3. *Пусть $X = c_0$ или $X = c$, $Y = \ell_1$; или $X = \ell_p$, $Y = \ell_q$ $\left(1 \leqslant p < \infty, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$. Справедливы следующие утверждения.*

Для любого $f \in X^*$ существует единственный элемент $y = \{\eta_k\} \in Y$ такой, что для всех $x = \{\xi_k\} \in X$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k. \tag{12.1}$$

Обратно, любой элемент $y \in Y$ порождает функционал $f \in X^*$ по формуле (12.1). *В обоих случаях $\|f\| = \|y\|_Y$.*

Теорема 12.4. *Для любого $f \in (L_p[a,b])^*$ $(1 \leqslant p < \infty)$ существует единственный элемент $y \in L_q[a,b]$ $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1\right)$ такой, что*

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt, \qquad x \in L_p[a,b]. \tag{12.2}$$

Обратно, любой элемент $y \in L_q[a,b]$ порождает функционал $f \in (L_p[a,b])^*$ по формуле (12.2). *В обоих случаях $\|f\| = \|y\|_{L_q[a,b]}$.*

Кратко теоремы 12.3 и 12.4 можно сформулировать так:

✓ $(c_0)^* \cong \ell_1$;

✓ $c^* \cong \ell_1$;

✓ $(\ell_p)^* \cong \ell_q,\ 1 \leqslant p < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1;$

✓ $(L_p[a,b])^* \cong L_q[a,b],\ 1 \leqslant p < \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Символ $\cong$ означает изоморфизм нормированных пространств, т. е. существование между этими пространствами линейной биекции, сохраняющей нормы.

Нетрудно проверить, что $(\ell_p^n)^* \cong \ell_q^n,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Теорема 12.5. *Пусть H – гильбертово пространство. Для любого $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$ такой, что*

$$f(x) = (x, y), \qquad x \in H. \tag{12.3}$$

Обратно, любой элемент $y \in H$ порождает функционал $f \in H^*$ по формуле (12.3)*. В обоих случаях $\|f\| = \|y\|_H$.*

Изоморфизм τ между H^* и H будет сопряженно-линейным, т. е.

$$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{P}\ \forall\ \varphi, \psi \in H^* \quad \tau(\alpha\varphi + \beta\psi) = \overline{\alpha}\tau(\varphi) + \overline{\beta}\tau(\psi).$$

Определение 12.2. Пусть X – линейное нормированное пространство, $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$. Последовательность элементов $\{x_n\}$ называется

✓ *сильно сходящейся к x*, если она сходится к x по норме;

✓ *слабо сходящейся к x*, если для любого $f \in X^*$ числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x)$.

Определение 12.3. Пусть X – линейное нормированное пространство, $\{f_n\} \subset X^*$, $f \in X^*$, $X^{**} = (X^*)^*$ – второе сопряженное к X.

Последовательность функционалов $\{f_n\}$ называется

✓ *сильно сходящейся к f*, если она сходится к f по норме;

✓ **слабо сходящейся к* f, если она сходится к f поточечно;

✓ *слабо сходящейся к* f, если для любого $\mathcal{F} \in X^{**}$ числовая последовательность $\{\mathcal{F}(f_n)\}$ сходится к $\mathcal{F}(f)$.

Определение 12.4. Пусть X – линейное нормированное пространство, f – линейный функционал, $f\colon D(f) \subset X \to \mathbb{P}$. Множество $f^{-1}(0) = \{x \in D(f)\colon f(x) = 0\}$ называется *ядром* функционала f и обозначается $\operatorname{Ker} f$. *Коразмерностью ядра* функционала f ($\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f$) называется размерность алгебраического дополнения ядра функционала в линейном пространстве $D(f)$.

Пример 12.1. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $x = (\xi_1, \xi_2) \in X$,

$$\|x\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}; \qquad X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2\colon \xi_2 = 0\};$$

функционал f_0 задан на подпространстве X_0 формулой $f_0(x) = 2\xi_1$. Найти функционал f, который является продолжением функционала f_0 с X_0 на X с сохранением нормы.

Решение. 1. Найдем норму искомого функционала:

$$\|f\| = \|f_0\| = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ x \neq 0}} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\xi_1 \in \mathbb{R} \\ \xi_1 \neq 0}} \frac{|2\xi_1|}{\max\{|\xi_1|, |0|\}} = 2.$$

Известно, что расстояние от гиперплоскости

$$f^{-1}(1) = \{x \in X\colon f(x) = 1\} \tag{12.4}$$

до начала координат выражается формулой (см. задачу 12.2)

$$\rho(0, f^{-1}(1)) = \frac{1}{\|f\|} = \frac{1}{2}. \tag{12.5}$$

2. Выберем базис в X:

$$e_1 = (1, 0), \qquad e_2 = (0, 1).$$

Любой элемент $x = (\xi_1, \xi_2) \in X$ можно представить в виде

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2.$$

Тогда любой линейный функционал, определенный на X, имеет вид

$$f(x) = \xi_1 f(e_1) + \xi_2 f(e_2) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2.$$

Таким образом, чтобы найти f, надо найти η_1 и η_2. Согласно (12.4), гиперплоскость $f^{-1}(1)$ задается уравнением $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = 1$. Следовательно, чтобы определить η_1 и η_2, достаточно построить гиперплоскость, обладающую свойством (12.5) и содержащую $f_0^{-1}(1)$.

3. Справедливо следующее включение:

$$f_0^{-1}(1) \subset f^{-1}(1).$$

Найдем $f_0^{-1}(1)$, т. е. точку $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0) \in X_0$ со свойством $f_0(x_0) = 1$. Имеем

$$f_0(x_0) = 2\xi_1^0 = 1, \qquad \xi_2^0 = 0.$$

Таким образом, $x_0 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. При этом

$$\|x_0\| = \max\left\{\left|\frac{1}{2}\right|, |0|\right\} = \frac{1}{2},$$

т. е. $x_0 \in S\left[0, \frac{1}{2}\right]$, а точнее, $x_0 \in S\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap f^{-1}(1)$.

4. Уравнение $\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = 1$ на плоскости задает прямую. Если прямая, проходящая через точку x_0, пересекает шар $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$, расстояние от тех ее точек, которые находятся внутри шара, до начала координат меньше, чем $\frac{1}{\|f_0\|}$. Таким образом, гиперплоскость $f^{-1}(1)$ не должна пересекать шар $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$. В данном случае гиперплоскость – это прямая

линия, касательная к шару $B\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ в точке x_0; ее уравнение мы можем вывести из геометрических соображений. Оно имеет вид $\xi_1 = \dfrac{1}{2}$ или $2\xi_1 = 1$. Следовательно (см. (12.4)), $f(x) = 2\xi_1$, $x \in X$. ✌

Пример 12.2. Пусть $X = \mathbb{R}^2$, $x = (\xi_1, \xi_2) \in X$,

$$\|x\| = 2|\xi_1| + 3|\xi_2|; \qquad X_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \xi_1 = 0\};$$

функционал f_0 задан на подпространстве X_0 формулой $f_0(x) = \xi_2$. Найти функционал f, который является продолжением функционала f_0 с X_0 на X с сохранением нормы.

Решение. Найдем норму искомого функционала:

$$\|f\| = \|f_0\| = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ x \neq 0}} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\xi_2 \in \mathbb{R} \\ \xi_2 \neq 0}} \frac{|\xi_2|}{2|0| + 3|\xi_2|} = \frac{1}{3}.$$

Далее, рассуждая как в предыдущей задаче, найдем $f_0^{-1}(1)$, т. е. точку $x_0 = (\xi_1^0, \xi_2^0) \in X_0$ со свойством $f_0(x_0) = 1$. Имеем

$$f_0(x_0) = \xi_2^0 = 1, \qquad \xi_1^0 = 0.$$

Таким образом, $x_0 = (0, 1)$. При этом

$$\|x_0\| = 2 \cdot |0| + 3 \cdot |1| = 3,$$

т. е. $x_0 \in S[0, 3]$, а точнее, $x_0 \in S[0, 3] \cap f^{-1}(1)$.

В пространстве с заданной нормой через точку $x_0 = (0, 1)$ можно провести много прямых, не пересекающих шар $B(0, 3)$. Поэтому продолжение функционала f_0 в данном случае не единственно. Из геометрических соображений выводим, что множество таких прямых описывается уравнением

$$\xi_2 = k\xi_1 + 1, \qquad -\frac{2}{3} \leqslant k \leqslant \frac{2}{3}.$$

Следовательно, искомый функционал имеет вид

$$f(x) = -k\xi_1 + \xi_2, \qquad -\frac{2}{3} \leqslant k \leqslant \frac{2}{3}.$$ ✌

12.1. Пусть $X=\mathbb{R}^2$. Описать $Y\cong X^*$, если

а) $\|x\|=\sqrt{a^2\xi_1^2+b^2\xi_2^2}\qquad(a>0,\ b>0)$;

б) $\|x\|=\max\{|a\,\xi_1|,|b\,\xi_2|\}\qquad(a>0,\ b>0)$;

в) $\|x\|=|a\,\xi_1|+|b\,\xi_2|\qquad(a>0,\ b>0)$;

г) $\|x\|=|2\,\xi_1-\xi_2|+|2\,\xi_1+\xi_2|$;

д) $\|x\|=\max\{|\xi_1-3\,\xi_2|,|\xi_2|\}$;

е) $\|x\|=\sqrt{2\,|\xi_1-\xi_2|^2+|\xi_1+\xi_2|^2}$.

12.2. Путь X – линейное нормированное пространство, $f\in X^*$, $f\neq 0$, $C\in\mathbb{P}$. Доказать, что

$$\rho(x_0,f^{-1}(C))=\frac{|f(x_0)-C|}{\|f\|}.$$

12.3. Найти продолжение линейного непрерывного функционала с одномерного подпространства в двумерном вещественном нормированном пространстве с сохранением нормы:

1) $\|x\|=\sqrt{8\,\xi_1^2+\dfrac{1}{4}\,\xi_2^2},\quad X_0=\{x\in\mathbb{R}^2:\ \xi_2=2\,\xi_1\}$,

$f_0(x)=-6\,\xi_1$;

2) $\|x\|=\max\{|\xi_1|,|\xi_1-2\,\xi_2|\},\quad f_0(x)=\xi_2$,

а) $X_0=\{x\in\mathbb{R}^2:\ \xi_2=3\,\xi_1\}$;

б) $X_0=\{x\in\mathbb{R}^2:\ \xi_2=\xi_1\}$;

3) $\|x\|=|\xi_1+\xi_2|+|2\,\xi_1-4\,\xi_2|,\quad f_0(x)=9\,\xi_1$,

а) $X_0=\{x\in\mathbb{R}^2:\ \xi_2=0\}$;

б) $X_0=\{x\in\mathbb{R}^2:\ \xi_1-2\,\xi_2=0\}$.

12.4. Указать условие единственности продолжения (с сохранением нормы) функционала с одномерного подпространства двумерного вещественного нормированного пространства.

12.5. Доказать, что норма линейного непрерывного функционала достижима тогда и только тогда, когда достижимо расстояние от нуля до гиперплоскости $f^{-1}(1)$.

12.6. Пусть $f \in X^*$, $f \neq 0$. Доказать, что $\operatorname{Ker} f$ – замкнутое линейное многообразие, $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

12.7. Пусть f – неограниченный линейный функционал, заданный на всюду плотном линейном подмножестве нормированного пространства X. Доказать, что $\operatorname{Ker} f$ плотно в X, $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$ на $D(f)$.

12.8. В пространствах $C[0,3]$ и $L_1[0,3]$ найти расстояние от элемента x_0 до гиперплоскости M. Достижимо ли это расстояние?

а) $M = \left\{x : \int_0^3 x(t)\,dt = 1\right\}, \quad x_0 = 2^t;$

б) $M = \left\{x : \int_0^2 t\,x(t)\,dt - \int_2^3 t\,x(t)\,dt = 0\right\}, \quad x_0 = t^2.$

12.9. В линейном нормированном пространстве X найти расстояние от элемента x_0 до множества M:

а) $X = L_2[0,1], \quad M = \left\{x(t) : \int_0^1 t^{-\frac{1}{3}} x(t)\,dt = 0\right\},$ $x_0(t) = t;$

б) $X = C[0,1], \quad M = \left\{x(t) : x(0) + \int_0^1 x(t)\,dt = 2\right\},$ $x_0(t) = \cos t;$

в) $X = C[0,1], \quad M = \{x(t) : x(0) = x(1)\},$ $x_0(t) = \sin t;$

г) $X = L_1\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right], \quad x_0(t) = t + 1,$

$$M = \left\{x(t) : \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x(t)\,\sin t\,dt > 1\right\};$$

д) $X = \ell_1, \quad M = \left\{ x : \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\, \xi_n \leqslant \frac{1}{2} \right\},$

$x_0 = \left\{ \frac{1}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty};$

е) $X = c_0,\ M = \left\{ x : \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\, \xi_n = 1 \right\},$

$x_0 = \left\{ \frac{1}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}.$

12.10. Исследовать на сильную и слабую сходимость в c_0 и ℓ_p последовательность элементов $x_n = \{\delta_{nk}\}_{n=1}^{\infty}$.

12.11. При каких $a > 0$ последовательность $\{t^n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится сильно в $C[0, a]$, при каких – слабо?

12.12. Показать, что последовательность $x_n(t) = \sin nt$ не сходится сильно в $L_2[0, \pi]$ и в $C[0, \pi]$. Сходится ли она слабо?

12.13. Доказать, что последовательность элементов

$$x_n(t) = \begin{cases} n, & t \in \left[0, \dfrac{1}{n^p}\right], \\ 0, & t \in \left(\dfrac{1}{n^p}, 1\right], \end{cases}$$

слабо сходится в $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$, а сильно не сходится.

12.14. Исследовать на сильную, слабую и *слабую сходимость последовательность функционалов $f_n \in X^*$, если

а) $X = L_2[-\pi, \pi], \quad f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{int} dt;$

б) $f_n(x) = \xi_n, \quad X = c_0 \quad$ и $\quad X = \ell_p \quad (1 < p < \infty);$

в) $f_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{n} \frac{\xi_n}{n}, \quad X = \ell_p \quad (1 < p < \infty).$

12.15. Пусть $\{f_n\} \subset X^*$. Указать связь между различными видами сходимости: сильная, слабая и *слабая. Показать, что они, вообще говоря, неэквивалентны.

12.16. Пусть $X = C^1[-1,1]$, $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{2\varepsilon}\big(x(\varepsilon) - x(-\varepsilon)\big)$, $f(x) = x'(0)$. Доказать, что f_ε *слабо сходится к f при $\varepsilon \to 0$, а сильно не сходится.

Тема 13. Сопряженные операторы

Пусть X – линейное нормированное пространство, $x^* \in X^*$, значение функционала x^* на элементе x будем обозначать $\langle x, x^* \rangle$, т. е. $\langle x, x^* \rangle \equiv x^*(x)$.

Определение 13.1. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Сопряженным к* A называется оператор $A^*\colon Y^* \to X^*$, который функционалу $y^* \in Y^*$ ставит в соответствие функционал $(A^* y^*) \in X^*$ по правилу

$$\langle x, A^* y^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle, \quad x \in X. \tag{13.1}$$

Известно, что $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ и $\|A^*\| = \|A\|$.

Определение 13.2. Пусть H_1, H_2 – гильбертовы пространства, $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. *Эрмитово сопряженным* к A называется оператор $A^{\otimes}\colon H_2 \to H_1$, действующий по правилу

$$(x, A^{\otimes} y) = (Ax, y), \qquad x \in H_1,\ y \in H_2. \tag{13.2}$$

Если $A \in \mathcal{L}(H_1)$ совпадает с $A^{\otimes}$, то A называется *самосопряженным* или *эрмитовым.*

Известно, что $A^{\otimes} \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ и $\|A^{\otimes}\| = \|A\|$.

Подчеркнем, что в отличие от сопряженного оператора эрмитово сопряженный оператор действует в исходных пространствах H_2, H_1, а не в сопряженных к ним.

При решении задач удобно работать не в самих сопряженных пространствах, а в изоморфных им пространствах функций или последовательностей, см. теоремы 12.3, 12.4. Пусть μ – изоморфизм X^* на X', а ν – изоморфизм Y^* на Y'. Оператору $A^*\colon Y^* \to X^*$ поставим в соответствие оператор $A'\colon Y' \to X'$ по формуле

$$A'y' = \mu A^* \nu^{-1} y', \quad y' \in Y'.$$

Положим $y' = \nu y^*$, тогда $A'y' = \mu A^* y^*$ и

$$A^* y^* = \mu^{-1} A' \nu y^*, \quad y^* \in Y^*,$$

т. е. $A^* = \mu^{-1} A' \nu$.

Если H_1, H_2 – гильбертовы пространства, $\widetilde{\mu}$ – сопряженно-линейная изометрия H_1^* на H_1, описанная в теореме 12.5, а $\widetilde{\nu}$ – соответствующая сопряженно-линейная изометрия H_2^* на H_2, то $A^* = \widetilde{\mu}^{-1} A^{\otimes} \widetilde{\nu}$.

☛ Ответы к задачам даны в терминах A' и X', Y', соответствующие изоморфизмы μ, ν описаны в теоремах 12.3, 12.4. В том случае, когда оба пространства гильбертовы, в ответе приведен эрмитово сопряженный оператор.

Пример 13.1. Пусть $A\colon L_5[0,1] \to L_3[0,1]$, $(Ax)(t) = e^t x(t)$. Найти сопряженный оператор.

Решение. Оператор A^* действует из $(L_3[0,1])^*$ в $(L_5[0,1])^*$. По теореме 12.4 пространство $(L_5[0,1])^*$ изоморфно пространству $L_{5/4}[0,1]$ $\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5} = 1\right)$, а пространство $(L_5[0,1])^*$ – пространству $L_{5/4}[0,1]$ $\left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5} = 1\right)$, т. е. существуют линейные изометрии ν, μ, переводящие $(L_3[0,1])^*$ на $L_{3/2}[0,1]$ и $(L_5[0,1])^*$ на $L_{5/4}[0,1]$ соответственно. Таким образом, можно изобразить схему:

$$
\begin{array}{rcccl}
x \in & L_5[0,1] & \xrightarrow{A} & L_3[0,1] & \ni Ax \\
x^* = A^* y^* \in & (L_5[0,1])^* & \xleftarrow{A^*} & (L_3[0,1])^* & \ni y^* \\
& \Big\downarrow \mu & & \Big\downarrow \nu & \\
\mu A^* y^* = A' y \in & L_{5/4}[0,1] & \xleftarrow{A'} & L_{3/2}[0,1] & \ni \nu y^* = y
\end{array}
$$

Сопряженный оператор определяется с помощью равенства (13.1). Зная общий вид линейного функционала в пространстве $L_3[0,1]$, можем записать

$$
\langle Ax, y^* \rangle = \int_0^1 (Ax)(t) \cdot (\nu y^*)(t)\, dt = \int_0^1 e^t x(t) y(t)\, dt. \qquad (13.3)
$$

С другой стороны, в пространстве $L_5[0,1]$

$$
\langle x, A^* y^* \rangle = \int_0^1 x(t)(\mu A^* y^*)(t)\, dt = \int_0^1 x(t)(A' y)(t)\, dt. \qquad (13.4)
$$

Подставив в (13.1) правые части (13.3) и (13.4), для всех $x \in X$ получим равенство

$$
\int_0^1 x(t) e^t y(t)\, dt = \int_0^1 x(t)(A' y)(t)\, dt.
$$

Следовательно,

$$
(A' y)(t) = e^t y(t).
$$

✌

Пример 13.2. Пусть $A\colon \ell_2 \to \ell_2^3$, $Ax = (\xi_1 - \xi_2, \xi_5 + 3\xi_3, \xi_6)$, $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. Найти сопряженный оператор.

Решение. Пространства ℓ_2 и ℓ_2^3 являются гильбертовыми, поэтому ищем эрмитово сопряженный оператор $A^{\otimes}$. Схема в этом случае имеет вид

$$
\begin{array}{rcccl}
x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in & \ell_2 & \xrightarrow{A} & \ell_2^3 & \ni Ax = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \\
(\nu_1, \nu_2, \ldots) = A^{\otimes} y \in & \ell_2 & \xleftarrow{A^{\otimes}} & \ell_2^3 & \ni y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3).
\end{array}
$$

Применяем формулу (13.2):

$$
\begin{aligned}
(Ax, y) &= \sum_{k=1}^{3} \mu_k \overline{\eta_k} = (\xi_1 - \xi_2)\overline{\eta_1} + (\xi_5 + 3\xi_3)\overline{\eta_2} + \xi_6 \overline{\eta_3} = \\
&= \xi_1 \overline{\eta_1} + \xi_2 \overline{(-\eta_1)} + \xi_3 \overline{3\eta_2} + \xi_5 \overline{\eta_2} + \xi_6 \overline{\eta_3} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \, \overline{\nu_k} = (x, A^{\otimes} y).
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
A^{\otimes} y = (\eta_1, -\eta_1, 3\eta_2, 0, \eta_2, \eta_3, 0, 0, \ldots).
$$ ✌

Пример 13.3. Пусть $A\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $(Ax)(t) = x(t + t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$. Найти сопряженный оператор. Является ли A самосопряженным?

Решение. Пространство $L_2(\mathbb{R})$ является гильбертовым. В этом случае ищем эрмитово сопряженный оператор $A^{\otimes}\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ по формуле (13.2):

$$
\begin{aligned}
(Ax, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (Ax)(t) \cdot \overline{y(t)} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + t_0) \overline{y(t)} \, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t - t_0)} \, dt = (x, A^{\otimes} y) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{(A^{\otimes} y)(t)} \, dt.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\big(A^{\otimes} y\big)(t) = y(t - t_0).
$$

Если $t_0 \neq 0$, то $A^{\otimes} \neq A$ и A – несамосопряженный. ✌

Пример 13.4. Пусть оператор A действует из пространства $L_2[0, 1]$ в пространство $L_2[1, 3]$ по правилу

$$
(Ax)(t) = \int_0^1 (t + e^s) x(s) \, ds.
$$

Найти сопряженный оператор.

Решение. Эрмитово сопряженный оператор A находим по формуле (13.2). Он действует из пространства $L_2[1,3]$ в $L_2[0,1]$. Пусть $x \in L_2[0,1]$, а $y \in L_2[1,3]$. Имеем с использованием теоремы Фубини [4, гл. V, § 6, теорема 5]

$$\begin{aligned}
(Ax,y) &= \int_1^3 (Ax)(s)\cdot\overline{y(s)}\,ds = \int_1^3 \left(\int_0^1 (s+e^\tau)x(\tau)\,d\tau\right)\overline{y(s)}\,ds = \\
&= \int_1^3 \left(\int_0^1 (s+e^\tau)x(\tau)\overline{y(s)}\,d\tau\right)ds = \\
&= \int_0^1 \left(\int_1^3 (s+e^\tau)x(\tau)\overline{y(s)}\,ds\right)d\tau = \\
&= \int_0^1 x(\tau)\overline{\left(\int_1^3 (s+e^\tau)y(s)\,ds\right)}\,d\tau = (x, A^{\otimes}y) = \\
&= \int_0^1 x(\tau)\overline{(A^{\otimes}y)(\tau)}\,d\tau.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$(A^{\otimes}y)(t) = \int_1^3 (s+e^t)y(s)\,ds.$$ ✌

☞ В задачах **13.1–13.20** найти сопряженный оператор. Выяснить, является ли исходный оператор самосопряженным в случае, если он действует в гильбертовых пространствах.

13.1. $A:\ell_2\to\ell_2^2,\quad Ax = (\xi_1-\xi_2, \xi_5+3\xi_3)$.

13.2. $A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax = (\xi_2,\xi_4,\xi_6,0,0,\ldots)$.

13.3. $A: L_2[0,1]\to L_2[-1,0],\quad Ax(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{t\pm s}x(s)\,ds$.

13.4. $A, B:\ell_2\to\ell_2$,

а) $Ax = (0,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots)$; б) $Bx = (\xi_2,\xi_3,\xi_4,\ldots)$.

13.5. $A:\ell_2\to\ell_2,\quad Ax = \{\alpha_k\xi_k\}_{k=1}^\infty,\quad |\alpha_k|\leqslant c$.

13.6. $A\colon \ell_2 \to \ell_2$,

$$Ax = \left(2\xi_3 - \xi_1, \xi_2 + 4\xi_1, 6\xi_1, \frac{3}{4}\,\xi_4, \frac{4}{5}\,\xi_5, \dots, \frac{n}{n+1}\,\xi_{n+1}, \dots\right).$$

13.7. $A : L_2[-3,3] \to L_2[-3,3], \quad Ax(t) = \displaystyle\int_t^3 (4st - 5s^2)x(s)\,ds.$

13.8. $A : \ell_2 \to c_0, \quad Ax = x.$

13.9. $A : \ell_1 \to \ell_1, \quad Ax = (\xi_1 + \xi_2, \xi_3 + \xi_4, \xi_5 + \xi_6, \dots).$

13.10. $A : L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad Ax(t) = e^{it}x(t).$

13.11. $A : L_3[0,1] \to L_5[0,1], \quad Ax(t) = \displaystyle\int_0^t ts^2 x(s)\,ds.$

13.12. $A : L_2\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to L_2\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \quad Ax(t) = (3 + \cos 2t)x(t).$

13.13. $A\colon \ell_p^n \to \ell_q^m, \;\; Ax = \left\{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} a_{k\ell}\xi_\ell\right\}_{k=1}^{m}.$

13.14. $Ax = (\alpha_n\xi_n, \alpha_{n+1}\xi_{n+1}, \dots), \;\; \{\alpha_k\} \in m,$

а) $A\colon \ell_1 \to \ell_4$; б) $A\colon \ell_1 \to c_0$.

13.15. $A\colon \ell_2 \to \ell_3, \;\; Ax = (0, 0, 0, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \dots).$

13.16. $Ax = \left\{\displaystyle\sum_{\ell=1}^{5} \Big(2^i k + (2+i)\ell\Big)\xi_\ell\right\}_{k=1}^{3},$

а) $A\colon \ell_3^5 \to \ell_5^3$; б) $A\colon \ell_2^5 \to \ell_2^3$.

13.17. $A\colon L_3[0,1] \to L_3[0,1], \;\; (Ax)(t) = x(\sqrt{t}).$

13.18. $A\colon L_4[1,2] \to L_2[2,3], \;\; (Ax)(t) = \cos(\pi t)\displaystyle\int_1^2 x(s)\,ds.$

13.19. $A\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}), \;\; (Ax)(t) = e^{it}x(3t-2).$

13.20. $A\colon \ell_1 \to \ell_2, \;\; Ax = x.$

13.21. Пусть $A, A_0 \in \mathcal{L}(X, Y)$, $B, B_0 \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, $C \in \mathcal{L}(Z, X)$, $D \in \mathcal{L}(H_3, H_1)$, пространства H_1, H_2, H_3 гильбертовы. Докажите, что

$$\begin{array}{ll}
(\lambda A)^* = \lambda A^*, & (\lambda B)^{\otimes} = \overline{\lambda} B^{\otimes}, \\
(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}, & (B^{-1})^{\otimes} = (B^{\otimes})^{-1} \\
\multicolumn{2}{l}{(\text{если } \exists\, A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X),\ \exists\, B^{-1} \in \mathcal{L}(H_2, H_1)),} \\
(A + A_0)^* = A^* + A_0^*, & (B + B_0)^{\otimes} = B^{\otimes} + B_0^{\otimes}, \\
(AC)^* = C^* A^*, & (BD)^{\otimes} = D^{\otimes} B^{\otimes}.
\end{array}$$

Тема 14. Обратные операторы

Определение 14.1. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства, оператор $A\colon D(A) \subset X \to Y$ называется *обратимым*, если для любого $y \in Im(A)$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение.

Если A обратим, то каждому $y \in Im(A)$ можно поставить в соответствие единственный элемент $x \in D(A)$, являющийся решением уравнения $Ax = y$. Оператор, осуществляющий это соответствие, называется *обратным к* A и обозначается A^{-1}.

Линейный оператор A, действующий из X в Y, обратим тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Ker} A = \{0\}, \tag{14.1}$$

где $\operatorname{Ker} A = \{x \in X\colon\ Ax = 0\}$ – ядро оператора A.

Нетрудно проверить, что если A – линейный оператор и A^{-1} – обратный к A, то A^{-1} также линеен.

Теорема 14.1 (теорема Банаха о непрерывности обратного оператора). *Пусть X и Y – банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, A – биекция X на Y. Тогда существует обратный оператор A^{-1} и он непрерывен.*

Пример 14.1. Выяснить, обратим ли оператор A, действующий в пространстве X. Если обратим, найти A^{-1}.

а) $X = C[0,1], \quad (Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t x(s)\,ds.$

б) $X = \ell_p, \quad Ax = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, \ldots).$

в) $X = m, \quad Ax = (\xi_1, \xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2, \ldots).$

Решение. а) Оператор, заданный формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds,$$

является линейным в $C[0,1]$. Обозначим $y(t) = Ax(t)$. Если функция $x \in \operatorname{Ker} A$, то $y(t) \equiv 0$. Так как функция y – это интеграл с переменным верхним пределом, то для $x \in \operatorname{Ker} A$ получаем

$$x(t) = y'(t) \equiv 0.$$

Следовательно, оператор A обратим. При этом обратный оператор задается формулой

$$A^{-1}y(t) = y'(t).$$

Найдем область определения A^{-1}. Покажем, что $D(A^{-1})$ или, то же самое, $Im(A)$ совпадает с множеством

$$M = \{y \in C^1[0,1]:\ y(0) = 0\}.$$

Действительно, если $x \in C[0,1]$, то функция $y(t) = Ax(t)$ непрерывно дифференцируема как интеграл с переменным верхним пределом и $y(0) = \displaystyle\int_0^0 x(s)\,ds = 0$, т. е. $D(A^{-1}) \subset M$. С другой стороны, для $y \in M$ имеем $x(t) = y'(t)$; следовательно,

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)\,ds = \int_0^t y'(s)\,ds = y(t) - y(0) = y(t),$$

т. е. $M \subset D(A^{-1})$. Таким образом, действительно, $D(A^{-1}) = M$.

б) Обозначим $y = Ax = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots)$. Ясно, что оператор A, заданный формулой $Ax = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, \ldots)$, является линейным в ℓ_p. Проверим, обратим ли он. Если $Ax = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots)$, то $x = (0, 0, 0, \ldots)$ и в силу (14.1) A обратим. Обратный оператор задается формулой

$$A^{-1}y = (\eta_2, \eta_4, \eta_6, \ldots).$$

Покажем, что $D(A^{-1}) = Im(A) = M$, где

$$M = \{y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots) \in \ell_p : \ \eta_{2j-1} = 0, \ j \in \mathbb{N}\}. \tag{14.2}$$

Действительно, для $x \in \ell_p$ последовательность $y = Ax \in \ell_p$, поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_{2j}|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p,$$

т. е. $D(A^{-1}) \subset M$. Обратно, для $y \in M$ последовательность $x = A^{-1}y = (\eta_2, \eta_4, \eta_6, \ldots) \in \ell_p$, поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_{2k}|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p,$$

т. е. $M \subset D(A^{-1})$. Таким образом, равенство $D(A^{-1}) = M$ проверено.

в) Оператор, заданный формулой $Ax = (\xi_1, \xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2, \ldots)$, не является линейным в пространстве m. По определению оператор обратим, если для любого $y \in Im(A)$ уравнение

$$Ax = y \tag{14.3}$$

имеет единственное решение. Рассмотрим произвольный

$$y \in Im(A) = \{y = \{\eta_k\} \in m : \ \eta_k \geqslant 0, \ k \geqslant 2\}, \quad \text{если} \quad \mathbb{P} = \mathbb{R},$$

$$y = \{\eta_k\} \in Im(A) = m, \quad \text{если} \quad \mathbb{P} = \mathbb{C}.$$

Тогда $x_1 = (\eta_1, \sqrt{\eta_2}, \sqrt{\eta_3}, \ldots)$ и $x_2 = (\eta_1, -\sqrt{\eta_2}, -\sqrt{\eta_3}, \ldots)$ являются решениями уравнения (14.3). Следовательно, оператор A необратим. ✌

☞ В задачах **14.1–14.12** выяснить, является ли оператор обратимым. Если обратим, найти обратный. Будет ли обратный оператор непрерывным?

14.1. $A, B\colon \ell_1 \to \ell_1$, $Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$, $Bx = (\xi_2, \xi_3, \ldots)$.

14.2. $A\colon C[-1,1] \to C[-1,1]$,
$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{t} (1 + \operatorname{sign} s)\, x(s)\, ds.$$

14.3. $A\colon \ell_2 \to \ell_2$, $Ax = \{\lambda_n \xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\sup\limits_n |\lambda_n| < \infty$.

14.4. $A\colon D(A) \subset C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x'(t)$,

а) $D(A) = C^1[0,1]$;

б) $D(A) = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$;

в) $D(A) = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = x'(1)\}$;

г) $D(A) = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = kx(1)\}$.

14.5. $A\colon \ell_1 \to \ell_1$, $Ax = (\xi_1, \xi_2^3, \xi_3^5, \ldots, \xi_k^{2k-1}, \ldots)$.

14.6. $(Ax)(t) = \sqrt{t}x(t)$,

а) $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$; б) $A\colon L_1[0,1] \to L_1[0,1]$.

14.7. $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t) + \displaystyle\int_0^1 e^{s+t} x(s)\, ds$.

14.8. $A\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$, $(Ax)(t) = (t^2+1)x(t)$.

14.9. $A\colon L_3[a,b] \to L_1[a,b]$, $(Ax)(t) = x^3(t)$.

14.10. $A\colon \ell_1 \to \ell_2$, $Ax = x$.

14.11. $A\colon D(A) \subset \ell_2 \to \ell_1,\;\; D(A) = \{x \in \ell_2 : Ax \in \ell_1\}$,

$Ax = \{n\xi_n\}$.

14.12. $A\colon D(A) \subset C[0,1] \to C[0,1],\;\; (Ax)(t) = x''(t)$,

$D(A) = \{x \in C^2[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}$.

14.13. Пусть $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, X – банахово пространство, A – инъективно. Докажите, что A^{-1} непрерывен тогда и только тогда, когда $Im(A)$ – банахово пространство.

Тема 15. Спектр линейного оператора

Пусть X – банахово пространство над полем $\mathbb{C}$, A – линейный оператор, $A\colon D(A) \subset X \to X$, E – тождественный оператор из X в X.

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярной точкой оператора* A, если $\operatorname{Ker}(A - \lambda E) = \{0\}$, $Im(A - \lambda E) = X$, оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ ограничен, т. е. оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ существует и $(A - \lambda E)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Множество всех регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством оператора* A и обозначается $\rho(A)$.

Множество $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ называется *спектром оператора* A и обозначается $\sigma(A)$.

Операторная функция $R_A : \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$, определенная формулой $R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$, называется *резольвентой оператора* A.

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением оператора* A, если существует элемент $e_\lambda \in X$ такой, что $e_\lambda \neq 0$ и $Ae_\lambda = \lambda e_\lambda$. При этом e_λ называется *собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ.*

Множество собственных значений оператора A называется *дискретным спектром* оператора A (или *точечным спектром*) и обозначается $\sigma_d(A)$. Ясно, что все собственные значения оператора A принадлежат $\sigma(A)$.

Часто спектр оператора A делят на три части:
$\sigma_d(A)$ – *точечный*,
$\sigma_c(a) = \{\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_d(A) : \overline{Im(A-\lambda E)} = X\}$ – *непрерывный*,
$\sigma_r(a) = \{\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_d(A) : \overline{Im(A-\lambda E)} \neq X\}$ – *остаточный*.

Теорема 15.1. *Пусть X – банахово пространство над $\mathbb{C}$, $A \in \mathcal{L}(X)$.*

1. *Если $|\lambda| > \|A\|$, то $\lambda \in \rho(A)$ и при этом*

$$R_A(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n.$$

2. *Спектр $\sigma(A)$ замкнут и* $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} \leqslant \|A\|$.
3. $\sigma(A) \neq \varnothing$.

Определение 15.1. Пусть X и Y – нормированные пространства. Оператор $A\colon D(A) \subset X \to Y$ называется *замкнутым*, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset D(A)$ из условий $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ и $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$ следует, что $x_0 \in D(A)$ и $Ax_0 = y_0$.

Теорема 15.2. *Если $\rho(A) \neq \varnothing$, то A замкнут.*

Пример 15.1. Пусть

$$\varphi(t) = \begin{cases} \operatorname{tg} t, & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right], \\ 0, & t \in \left[-\dfrac{\pi}{4}, 0\right), \end{cases} \qquad (Ax)(t) = \varphi(t) \cdot x(t),$$

а) $X = C\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$; б) $X = L_2\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Найти спектр и резольвенту оператора A. Провести классификацию точек спектра.

Решение. Множество значений функции $\varphi(t)$ есть отрезок $[0,1]$. Если $\lambda \notin [0,1]$, то уравнение $(A-\lambda E)x = y$ разрешимо для всякого y и в пространстве $C\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, и в пространстве $L_2\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Его решение $x(t) = (\varphi(t)-\lambda)^{-1}y(t)$, при этом для обоих пространств справедлива оценка

$$\|x\| \leqslant \max_{t\in\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]} |(\varphi(t)-\lambda)^{-1}| \cdot \|y\|.$$

Значит, для всякого $\lambda \notin [0,1]$ существует оператор $(A-\lambda E)^{-1}$, определенный и ограниченный на X; т. е. эти значения λ являются регулярными; другими словами, $\mathbb{C} \setminus [0,1] \subset \rho(A)$.

Если $\lambda = 0$, то уравнение $(A-\lambda E)x = 0$ имеет нетривиальное решение как в случае «а», так и в случае «б». Например,

$$x(t) = \begin{cases} -t, & t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right), \\ 0, & t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Поэтому $0 \in \sigma_d(A)$.

Пусть $\lambda \in (0,1]$ и точка $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ такова, что $\operatorname{tg} t_0 = \lambda$. Уравнение $(A-\lambda E)\,x = 0$ имеет единственное решение $x(t) \equiv 0$ в $C\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ и $x(t)$ эквивалентно 0 в $L_2\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Следовательно, точки полуинтервала $(0,1]$ не могут быть точками дискретного (точечного) спектра оператора A.

Уравнение $(A-\lambda E)\,x = y$ неразрешимо при $y(t) \equiv 1$ ни в случае «а», ни в случае «б». В случае «а» его формальное решение

$$x(t) = (\varphi(t)-\lambda)^{-1} = \begin{cases} -\lambda^{-1}, & t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right), \\ (\operatorname{tg} t - \lambda)^{-1}, & t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \setminus \{t_0\} \end{cases}$$

терпит разрыв в точке t_0 со свойством $\operatorname{tg}(t_0) = \lambda$. В случае «б», как нетрудно видеть, функция $|x(t)|^2$ неинтегрируема по Риману в несобственном смысле на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, а значит, неинтегрируема и по Лебегу. Поэтому она не принадлежит и $L_2\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. Следовательно, $(0,1]\subset\sigma(A)$.

Итак, $\sigma(A)=[0,1],\ \sigma_d(A)=\{0\}$,

$$(R_A(\lambda)y)(t)=(\varphi(t)-\lambda)^{-1}y(t).$$

Осталось среди точек $(0,1]$ выделить точки непрерывного и остаточного спектра. Если $\lambda\in(0,1]$, то все функции $y(t)\in Im(A-\lambda E)$ равны 0 в точке t_0 ($\operatorname{tg}t_0=\lambda$). Отсюда мы заключаем, что в пространстве $C\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ замыкание $\overline{Im(A-\lambda E)}$ не совпадает с $C\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$. Поэтому полуинтервал $(0,1]$ является остаточным спектром A, т. е. $(0,1]=\sigma_r(A)$.

Убедимся, что в пространстве $L_2\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ точки $(0,1]$ являются точками непрерывного спектра оператора A. Для этого достаточно показать, что для любого $y\in L_2\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ найдется последовательность $\{y_n\}\subset(A-\lambda E)X$ такая, что $y_n\to y$ при $n\to\infty$. Пусть $\lambda\in(0,1)$. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}\subset L_2\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$:

$$x_n(t)=y(t)\cdot\begin{cases}-\lambda^{-1}, & t\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right);\\[2mm] (\operatorname{tg}t-\lambda)^{-1}, & t\in\left[0,t_0-\frac{1}{n}\right]\cup\left[t_0+\frac{1}{n},\frac{\pi}{4}\right];\\[2mm] 0, & t\in\left(t_0-\frac{1}{n},t_0+\frac{1}{n}\right),\end{cases}$$

для достаточно больших n. Имеем

$$y_n(t)=\Big((A-\lambda E)x_n\Big)(t)=$$
$$=\begin{cases}y(t), & t\in\left[-\frac{\pi}{4},t_0-\frac{1}{n}\right]\cup\left[t_0+\frac{1}{n},\frac{\pi}{4}\right];\\[2mm] 0, & t\in\left(t_0-\frac{1}{n},t_0+\frac{1}{n}\right),\end{cases}$$

$$\|y - y_n\|^2 = \int_{t_0-\frac{1}{n}}^{t_0+\frac{1}{n}} |y(t)|^2\,dt.$$

В силу свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега последнее выражение стремится к 0 при $n \to \infty$. Отсюда $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$. Значит, в случае «б» точки интервала $(0,1)$ принадлежат непрерывному спектру оператора A.

Аналогично доказывается, что $\lambda = 1 \in \sigma_c(A)$. Таким образом, $\sigma_c(A) = (0,1]$. ✌

Пример 15.2. Пусть $Ax = \left\{ \dfrac{n+1}{n}\,\xi_n \right\}_{n=1}^{\infty}$,

а) $X = \ell_1$; б) $X = \ell_\infty$.

Найти спектр и резольвенту оператора A. Провести классификацию точек спектра.

Решение. Найдем сначала дискретный спектр оператора A. Для этого решим однородное уравнение

$$Ax - \lambda x = 0 \tag{15.1}$$

или, эквивалентно, систему уравнений

$$\left(\frac{n+1}{n} - \lambda\right)\xi_n = 0, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{15.2}$$

Если $\lambda \neq \dfrac{n+1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то эта система имеет только тривиальное решение. Если же $\lambda = \dfrac{n_0+1}{n_0}$ для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$, то существует нетривиальное решение системы (15.2):

$$\xi_n = \begin{cases} 1, & n = n_0, \\ 0, & n \neq n_0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N},$$

т. е. уравнение (15.1) имеет нетривиальное решение $x = \{\delta_{n_0 k}\}_{k=1}^{\infty}$ для $\lambda = \dfrac{n_0+1}{n_0}$. Следовательно, для любого $\lambda = \dfrac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, уравнение (15.1) имеет нетривиальное решение $x = \{\delta_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$. Значит, $\sigma_d(A) = \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ в обоих случаях.

Пусть теперь $\lambda \notin \sigma_d(A)$. Для $y = \{\eta_n\} \in X$ решим неоднородное уравнение

$$Ax - \lambda x = y$$

или, эквивалентно, систему уравнений

$$\left(\frac{n+1}{n} - \lambda\right)\xi_n = \eta_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Формальное решение этой системы есть

$$x = \{\xi_n\} = \left\{\frac{\eta_n}{\dfrac{n+1}{n} - \lambda}\right\} = (A - \lambda E)^{-1} y.$$

Это решение принадлежит пространству X, если

$$\text{а) } \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\eta_n|}{\left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right|} < \infty; \quad \text{б) } \|x\| = \sup_n \frac{|\eta_n|}{\left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right|} < \infty.$$

Пусть $d = \inf\limits_n \left|\dfrac{n+1}{n} - \lambda\right|$. Поскольку $\dfrac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, то если $\lambda \neq 1$, то $d > 0$ и $\|x\| \leqslant \dfrac{\|y\|}{d} < \infty$ в обоих случаях. Таким образом, если $\lambda \neq 1$ и $\lambda \neq \dfrac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, то неоднородное уравнение $Ax - \lambda x = y$ разрешимо для всякого $y \in X$. Так как оператор $A - \lambda E$ – линейная непрерывная биекция банахова пространства X на X, то по теореме Банаха оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ непрерывен на X. Значит, λ является регулярным значением.

Пусть $\lambda = 1$. Поскольку спектр – множество замкнутое, то из того, что $\sigma_d(A) = \left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, можно сразу заключить, что

λ – точка спектра. Итак,

$$\sigma(A) = \{1\} \cup \left\{ \frac{n+1}{n} \right\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad R_A(\lambda)y = \left\{ \frac{\eta_n}{\dfrac{n+1}{n} - \lambda} \right\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Определим, принадлежит ли $\lambda = 1$ остаточному или непрерывному спектру. Формально имеем $(A-E)^{-1}y = \{n\eta_n\}$. Так как множество финитных последовательностей плотно в ℓ_1 и принадлежит образу $Im(A-\lambda E)$, то замыкание $\overline{Im(A-\lambda E)} = \ell_1$. Значит, в случае «а» $1 \in \sigma_c(A)$.

В случае «б»

$$y = (A-E)x = \left\{ \frac{\xi_n}{n} \right\} \in c_0.$$

Как известно, c_0 есть замкнутое подпространство ℓ_∞ и $c_0 \neq \ell_\infty$. Отсюда $\overline{Im(A-\lambda E)} \subset c_0 \neq \ell_\infty$. Поэтому в случае «б» $1 \in \sigma_r(A)$. ✌

☞ В задачах **15.1–15.11** найти спектр и резольвенту оператора $A \in \mathcal{L}(X)$. Провести классификацию точек спектра.

15.1. $X = \ell_2,\ Ax = (\xi_1 - \xi_2, \xi_1 + \xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots, \xi_n, \ldots)$.

15.2. $X = \ell_1,\ Ax = \left\{ \frac{1}{n}\,\xi_n \right\}$.

15.3. $X = \ell_p\ (1 \leqslant p \leqslant \infty),\ Ax = (\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots)$.

15.4. ✯ $X = \ell_p\ (1 \leqslant p \leqslant \infty),\ Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$.

15.5. $X = C\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right],\ (Ax)(t) = \sin t \cdot x(t)$.

15.6. $X = L_1[0,1],\ (Ax)(t) = \sqrt{t} \cdot x(t)$.

15.7. $X = C[0, 2\pi],\ (Ax)(t) = e^{it} \cdot x(t)$.

15.8. $X = L_2[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \begin{cases} 5x(t), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{3}, \\ 0, & \dfrac{1}{3} < t \leqslant 1. \end{cases}$$

15.9. $X = C[1,2]$, $(Ax)(t) = \displaystyle\int_1^t x(s)\,ds.$

15.10. $X = C[0,1]$, $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^1 (t-s)x(s)\,ds.$

15.11. ✯ $X = C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(0) + t \cdot x(1)$.

☞ В задачах **15.12–15.15** доказать, что оператор $A\colon D(A) \subset X \to X$ замкнут, найти его спектр; в задачах **15.12–15.14** найти резольвенту в тех случаях, когда она существует.

15.12. $X = \ell_2$, $Ax = \{n\xi_n\}$, $D(A) = \{x \in \ell_2 : Ax \in \ell_2\}$.

15.13. $X = L_1[0,1]$, $(Ax)(t) = \dfrac{x(t)}{\sqrt{t}}$,

$D(A) = \{x \in L_1[0,1] : Ax \in L_1[0,1]\}$.

15.14. $X = C[a,b]$, $(Ax)(t) = x'(t)$,

а) $D(A) = C^1[a,b]$; б) $D(A) = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = 0\}$;

в) $D(A) = \{x \in C^1[a,b] : x(a) = x(b)\}$.

15.15. $X = C[0,\pi]$, $(Ax)(t) = x''(t)$,

а) $D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] : x(0) = x(\pi) = 0\}$;

б) $D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] : x'(0) = x'(\pi) = 0\}$;

в) $D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] : x(0) = x(\pi),\ x'(0) = x'(\pi)\}$;

г) $D(A) = \{x \in C^2[0,\pi] : x(0) = x'(0) = 0\}$.

15.16. Пусть $Ax = x$, а) $A\colon C[a,b] \to C[a,b]$;

б) $A\colon C^1[a,b] \subset C[a,b] \to C[a,b]$.

Замкнут ли оператор A? Найти его спектр, определить характер точек спектра.

☞ Доказать утверждения **15.17–15.22**.

15.17. Пусть $A\colon D(A) \subset X \to X$, A – линейный оператор, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Тогда

а) $\sigma(A + \lambda_0 E) = \sigma(A) + \lambda_0$;

б) $\sigma(\lambda_0 A) = \lambda_0 \sigma(A)$, если $\lambda_0 \neq 0$.

15.18. Пусть $A\colon D(A) \subset X \to X$, A – линейный оператор, существует оператор A^{-1}. Тогда $\sigma_d(A^{-1}) = \big(\sigma_d(A)\big)^{-1}$, где $\big(\sigma_d(A)\big)^{-1} = \left\{\dfrac{1}{\lambda} :\ \lambda \in \sigma_d(A)\right\}$.

15.19. Если $A \in \mathcal{L}(X)$ и $0 \notin \sigma(A)$, то $\sigma(A^{-1}) = 1/\sigma(A)$.

15.20. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$. Тогда если существует последовательность $\{x_n\} \subset X$ такая, что $\|x_n\| = 1$ и $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, то $\lambda \in \sigma(A)$.

15.21. Пусть $A \in \mathcal{L}(X)$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда

а) $\sigma_d(A^n) = \big(\sigma_d(A)\big)^n$, где $\big(\sigma_d(A)\big)^n = \{\lambda^n :\ \lambda \in \sigma_d(A)\}$;

б) $\sigma(A^n) = \big(\sigma(A)\big)^n$, где $\big(\sigma(A)\big)^n = \{\lambda^n :\ \lambda \in \sigma(A)\}$.

15.22. Пусть $A \in \mathcal{L}(H)$, H – гильбертово пространство. Тогда

а) $\sigma(A^{\otimes}) = \overline{\sigma(A)}$;

б) $\lambda \in \sigma_d(A) \implies \overline{\lambda} \in \sigma_d(A^{\otimes}) \cup \sigma_r(A^{\otimes})$;

в) $\lambda \in \sigma_r(A) \implies \overline{\lambda} \in \sigma_d(A^{\otimes})$;

г) $\sigma_c(A^{\otimes}) = \overline{\sigma_c(A)}$.

15.23. Возможно ли, что $A \in \mathcal{L}(X)$, $A^2 = 0$, $\lambda \in \sigma_d(A)$, $\lambda \neq 0$?

15.24. Построить линейный оператор, для которого спектром является данное замкнутое множество в комплексной плоскости.

15.25. Построить линейный оператор, для которого множество собственных значений совпадает с заданным множеством в комплексной плоскости.

Тема 16. Вполне непрерывные (компактные) операторы

Определение 16.1. Пусть X, Y – линейные нормированные пространства. Оператор $A\colon X \to Y$ называется *компактным*, если он каждое ограниченное множество переводит в предкомпактное.

Непрерывный компактный оператор называется *вполне непрерывным*.

Любой компактный оператор является ограниченным.

Для линейных операторов понятия *компактный* и *вполне непрерывный* совпадают.

Линейный оператор A компактен тогда и только тогда, когда предкомпактно множество $A(B[0,1])$.

Линейная комбинация вполне непрерывных (компактных) операторов является вполне непрерывным (компактным) оператором.

Теорема 16.1. *Пусть X – линейное нормированное пространство, Y – банахово пространство, $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ –*

последовательность компактных операторов. Если последовательность $\{A_n\}$ *сходится по норме к оператору* A, *то* A – *линейный компактный оператор.*

Теорема 16.2. *Пусть* X, Y, Z – *линейные нормированные пространства. Если* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, *а* $B \in \mathcal{L}(Y,Z)$ *и хотя бы один из них компактен, то оператор* BA *компактен.*

Следствие 16.1. *Пусть* X, Y – *бесконечномерные линейные нормированные пространства, оператор* $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ *компактен и* $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. *Тогда* A^{-1} – *неограниченный линейный оператор.*

Теорема 16.3. *Если* X – *бесконечномерное банахово пространство над полем* $\mathbb{C}$ *и* $A \in \mathcal{L}(X)$ – *вполне непрерывный оператор, то* $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \{0\}$, $\sigma_d(A)$ *не более чем счетный.*

Пример 16.1. Будет ли оператор $A\colon C\,[0,\pi] \to C\,[0,\pi]$, действующий по правилу

$$(Ax)(t) = \sin(3t) \cdot x(t),$$

вполне непрерывным?

Решение. Докажем, что оператор A не является вполне непрерывным. Построим ограниченное множество (последовательность) функций $\{x_n\}$ так, чтобы множество $\{Ax_n\}$ не являлось предкомпактным. По теореме Арцела множество функций M предкомпактно в пространстве $C[a,b]$ тогда и только тогда, когда M равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Мы будем строить множество $\{x_n\}$ так, чтобы множество $\{Ax_n\}$ не являлось равностепенно непрерывным.

Возьмем произвольную точку $t_0 \in (0,\pi)$, в которой $\sin(3t_0) \neq 0$. Определим последовательность непрерывных функций $\{x_n\}$ следующим образом: $x_n(t) = 0$ вне промежутка $\left(t_0 - \dfrac{1}{n}, t_0 + \dfrac{1}{n}\right)$, $x_n(t_0) = \dfrac{1}{\sin(3t_0)}$, а на отрезках $\left[t_0 - \dfrac{1}{n}, t_0\right]$, $\left[t_0, t_0 + \dfrac{1}{n}\right]$ функция x_n линейна.

Множество $\{Ax_n\}$ не является равностепенно непрерывным, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки $t', t'' \in [0, \pi]$ и функция $Ax_n(t)$ со свойством

$$|t' - t''| < \delta, \quad \text{а} \quad |(Ax_n)(t') - (Ax_n)(t'')| \geqslant \varepsilon.$$

Положим $\varepsilon = 1$, $t' = t_0$, $t'' = t_0 + \dfrac{\delta}{2}$ и выберем номер n из условия $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\delta}{2}$. Тогда

$$\big|(Ax_n)(t') - (Ax_n)(t'')\big| = 1 - 0 = \varepsilon.$$

Следовательно, оператор A не является вполне непрерывным.

✌

Пример 16.2. Будет ли оператор $A\colon L[0,1] \to L[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \sqrt{t} \cdot x(t),$$

вполне непрерывным?

Решение. Докажем, что оператор A не является вполне непрерывным. Для этого достаточно привести пример множества M, ограниченного в $L[0,1]$ и такого, что его образ $N = A(M)$ непредкомпактен в $L[0,1]$. Рассмотрим множество функций $N = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$y_n(t) = \begin{cases} 2^n, & t \in E_n, \\ 0, & t \in [0,1] \setminus E_n, \end{cases} \qquad E_n = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right].$$

Убедимся, что множество N ограничено, но непредкомпактно. Действительно, $\|y_n\| = \displaystyle\int_{E_n} 2^n \, dt = 1$, и, следовательно, N ограничено. Далее, если $n > m$ (для определенности), то $E_n \subset E_m$ и

$$\|y_n - y_m\| = \int_{E_n} (2^n - 2^m) \, dt + \int_{E_m \setminus E_n} 2^m \, dt >$$
$$> \int_{E_n} (2^n - 2^m) \, dt = 1 - \frac{2^m}{2^n} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Поскольку расстояние между любыми двумя элементами последовательности $\{y_n\}$ больше $\frac{1}{2}$, из нее нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность; значит, множество N не предкомпактно. Возьмем в качестве множества M прообраз N, т. е.

$$M = \left\{ \frac{y_n}{\sqrt{t}} \right\}.$$

Нам осталось проверить, что M ограничено. Функция $\frac{1}{\sqrt{t}}$ на промежутке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, а значит, и на каждом множестве E_n, ограничена числом 2. Отсюда легко заключаем, что

$$\left\| \frac{y_n}{\sqrt{t}} \right\| = \int_{E_n} \left| \frac{y_n(t)}{\sqrt{t}} \right| dt \leqslant 2\|y_n\| = 2.$$

Таким образом, мы доказали, что оператор A не является предкомпактным. ✌

Пример 16.3. Доказать, что оператор $A\colon C[0,1] \to L[0,1]$,

$$(Ax)(t) = \int_0^t x(s)\,ds,$$

вполне непрерывен.

Решение. Оператор A можно представить в виде суперпозиции двух линейных операторов: $A = J \cdot A_0$, где

$$(A_0x)(t) = \int_0^t x(s)\,ds, \qquad A_0\colon C[0,1] \to C[0,1],$$
$$(Jy)(t) = y(t), \qquad J\colon C[0,1] \to L[0,1].$$

Покажем, что оператор J непрерывен, а оператор A_0 вполне непрерывен. Отсюда по теореме 16.2 будет следовать, что оператор A вполне непрерывен.

Непрерывность оператора J легко следует из оценки

$$\|Jy\| = \int_0^1 |y(t)|\,dt \leqslant \max_{t\in[0,1]} |y(t)| = \|y\|.$$

Докажем, что оператор A_0 вполне непрерывен. Пусть M – ограниченное подмножество из $C[0,1]$. Убедимся, что для его образа, т. е. для множества $N = A_0(M)$, выполняются условия теоремы Арцела, и, значит, оно предкомпактно. Пусть число $R > 0$ таково, что для любого $x \in M$ выполняется неравенство $\|x\| \leqslant R$. Тогда для $y \in N = A_0(M)$ имеем

$$\|y\| = \max_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t x(s)\,ds\right| \leqslant R,$$

т. е. множество N ограничено. Далее, семейство функций N равностепенно непрерывно, поскольку

$$|y(t') - y(t'')| = \left|\int_{t'}^{t''} x(s)\,ds\right| \leqslant R|t'' - t'| < \varepsilon,$$

если $|t'' - t'| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{R}$. Итак, мы проверили, что множество N предкомпактно. Таким образом, вполне непрерывность оператора A_0, а значит и оператора A, доказана. ✌

☞ В задачах **16.1–16.10** выяснить, является ли оператор вполне непрерывным.

16.1. $(Ax)(t) = \displaystyle\int_2^5 e^{ts}x(s)\,ds$,

а) $A\colon C[2,5] \to C[2,5]$; б) $A\colon L_2[2,5] \to L_2[2,5]$;

в) $A\colon C[2,5] \to L_1[2,5]$; г) $A\colon L_1[2,5] \to C[2,5]$.

16.2. $(Ax)(t) = x(t^{2/3})$, $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$.

16.3. $Ax = \left\{\dfrac{\xi_k}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$, $A\colon \ell_1 \to \ell_2$.

16.4. $(Ax)(t) = \operatorname{tg} t \cdot x(t),\ A\colon C\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to C\left[0, \frac{\pi}{4}\right].$

16.5. $(Ax)(t) = \ln(1+t) \cdot x(t), \quad A\colon C^1[0,2] \to C[0,2].$

16.6. $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(ts) \cdot x(s)\, ds + 3x(t),\ A\colon C[0,1] \to C[0,1].$

16.7. $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(ts) \cdot x(s)\, ds + x\left(\frac{1}{2}\right),$

$A\colon C[0,1] \to C[0,1].$

16.8. $Ax = x,$

а) $A\colon C[a,b] \to L_2[a,b]$; б) $A\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$;

в) $A\colon \ell_1 \to \ell_2$.

16.9. $Ax = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, 0, \xi_4, \ldots), \quad A\colon \ell_p \to \ell_p.$

16.10. $Ax = (0, \xi_1, 0, \xi_2, 0, \xi_3, 0, 0, 0 \ldots), \quad A\colon \ell_p \to \ell_p.$

16.11. Доказать, что оператор $(Ax)(t) = \displaystyle\int_c^d K(t,s)x(s)\, ds$ с ядром $K(t,s) \in C\big([a,b]\times[c,d]\big)$ является вполне непрерывным, если

а) $A\colon C[c,d] \to C[a,b]$; б) $A\colon C[c,d] \to L_p[a,b]$;

в) $A\colon L_p[c,d] \to C[a,b]$; г) $A\colon L_p[c,d] \to L_q[a,b]$.

16.12. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$, оператор A – вполне непрерывный, оператор B не является вполне непрерывным. Будет ли оператор $A+B$ вполне непрерывным?

16.13. Для каких $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператор $Ax = \{\alpha_k \xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $A\colon \ell_p \to \ell_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ вполне непрерывен?

☞ В задачах **16.14–16.17** выяснить, является ли оператор A вполне непрерывным.

16.14. ✫ $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^1 \frac{x(s)}{|t-s|^{\alpha}}\, ds,\ A\colon C[0,1] \to C[0,1].$

16.15. $(Ax)(t)=\begin{cases} x(t), & t\in[1,2]\,; \\ 0, & t\in[0,3]\setminus[1,2]\,; \end{cases}$ $\quad A\colon L_2[0,3]\to L_2[0,3]$.

16.16. $(Ax)(t)=x'(t), \quad A\colon C^1[a,b]\to C[a,b]$.

16.17. $(Ax)(t)=x''(t), \quad A\colon C^2[a,b]\to C[a,b]$.

☞ В задачах **16.18–16.22** выяснить, является ли оператор A компактным, вполне непрерывным.

16.18. $(Ax)(t)=|x(t)|$,

а) $A\colon C[a,b]\to C[a,b]$; б) $A\colon L_p[a,b]\to L_p[a,b]$.

16.19. $(Ax)(t)=\cos(x(t)), \ A\colon C[a,b]\to C[a,b]$.

16.20. $(Ax)(t)=x^2(t), \ A\colon C^1[a,b]\to C[a,b]$.

16.21. $Ax=\{\xi_k^2\}_{k=1}^{\infty}, \ A\colon \ell_p\to\ell_p$.

16.22. $Ax=\left\{\dfrac{\xi_k^2}{k^2}\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad A\colon \ell_2\to\ell_2$.

16.23. $A\colon C[0,1]\to\langle\mathbb{R},\|\cdot\|_{|\cdot|}\rangle$, Ax равно наибольшему значению аргумента t, при котором $x(t)$ принимает наибольшее значение.

16.24. $Ax=\{\operatorname{sign}\xi_k\}$, $A\colon m\to m$, $\mathbb{P}=\mathbb{R}$.

Тема 17. Интегральные уравнения

Пусть X – банахово пространство, $A : X \to X$ – компактный линейный оператор. Рассмотрим четыре уравнения:

$$(1)\quad x = Ax + y; \qquad\qquad (1^*)\quad x^* = A^*x^* + y^*;$$
$$(1^\circ)\quad z = Az; \qquad\qquad (1^{*\circ})\quad z^* = A^*z^*.$$

Следующие теоремы Фредгольма устанавливают связь между свойствами решений этих четырех уравнений.

Теорема 17.1 (альтернатива Фредгольма). *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *уравнение* (1) *разрешимо при любом* y;
2) *уравнение* (1°) *имеет только нулевое решение*;
3) *уравнение* (1^*) *разрешимо при любом* y;
4) *уравнение* $(1^{*\circ})$ *имеет только нулевое решение.*

Теорема 17.2. *Однородные уравнения* (1°) *и* $(1^{*\circ})$ *имеют одно и то же и притом конечное число линейно независимых решений.*

Теорема 17.3. *Уравнение* (1) *разрешимо для тех и только для тех* y, *которые ортогональны каждому решению* z^* *уравнения* $(1^{*\circ})$, *т. е.* $\langle y, z^* \rangle = 0$.

Уравнение (1^*) *разрешимо для тех и только для тех* y^*, *которые ортогональны каждому решению* z *уравнения* (1°), *т. е.* $\langle z, y^* \rangle = 0$.

Важными частными случаями уравнения (1) являются интегральные уравнения Фредгольма

$$x(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds + y(t) \tag{17.1}$$

и Вольтерра

$$x(t) = \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds + y(t).$$

Ясно, что для уравнения Фредгольма оператор A задается равенством $(Ax)(t) = \displaystyle\int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds$, а для уравнения Вольтерра – равенством $(Ax)(t) = \displaystyle\int_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds$. Функция $K(t,s)$ называется *ядром* интегрального оператора A.

Если ядро $K \in L_2([a,b]^2)$, то A – компактный оператор в $L_2[a,b]$. Если ядро K непрерывно по совокупности переменных, то A – компактный оператор в $C[a,b]$.

Некоторые методы решения интегральных уравнений

1. Уравнения с вырожденным ядром

Ядро $K(t,s)$ называется *вырожденным*, если оно представимо в виде

$$K(t,s) = \sum_{\ell=1}^{n} P_\ell(t)Q_\ell(s).$$

Можно считать, что $\{P_\ell\}_{\ell=1}^n$ – линейно независимая система функций.

Уравнение (17.1) в этом случае можно записать следующим образом:

$$x(t) = \sum_{\ell=1}^{n} P_\ell(t) \int_a^b Q_\ell(s)x(s)\,ds + y(t). \tag{17.2}$$

Обозначим $\int_a^b Q_\ell(s)x(s)\,ds = q_\ell$. Тогда, если решение уравнения (17.1) существует, оно имеет вид

$$x(t) = \sum_{\ell=1}^{n} q_\ell P_\ell(t) + y(t). \tag{17.3}$$

Подставив это выражение для x в уравнение (17.1), получим для неизвестных коэффициентов $\{q_\ell\}_{\ell=1}^n$ систему линейных уравнений. Решение уравнения (17.1) сводится к решению системы n линейных уравнений. Этот метод решения называют «методом неопределенных коэффициентов».

2. Уравнения Вольтерра

Пусть $P \in C^1[a,b]$ и $P(t) \neq 0,\ t \in [a,b]$; $Q \in C[a,b]$, тогда для уравнений Вольтерра вида

$$x(t) = P(t)\int_a^t Q(s)\,x(s)\,ds + y(t)$$

в пространстве $C[a,b]$ нахождение решения эквивалентно решению следующей задачи Коши, если $y \in C^1[a,b]$:

$$\left(\frac{x(t)-y(t)}{P(t)}\right)' = Q(t)\,x(t), \qquad x(a) = y(a).$$

3. Нахождение решений в виде ряда

Уравнение

$$x = \lambda Ax + y \tag{17.4}$$

в случае непрерывной обратимости оператора $E - \lambda A$ равносильно соотношению $x = (E-\lambda A)^{-1}y$. Поэтому если $\|\lambda A\| < 1$, то

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n y. \tag{17.5}$$

Известно, что если A – оператор Вольтерра и ядро $K(t,s) \in C([a,b]^2)$ или $K \in L_2([a,b]^2)$, то в $C[a,b]$ и в $L_2[a,b]$

соответственно оператор $E - \lambda A$ непрерывно обратим и существуют такие число $\alpha > 0$ и номер N, что для всех $n > N$ справедлива оценка $\|\lambda^n A^n\| \leqslant \alpha^n/n!$. Следовательно, ряд (17.5) сходится и его сумма является решением уравнения (17.4).

Пример 17.1. Решить интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_{-1}^{1} (ts - t^2 s^2)\, x(s)\, ds = t^2 + t^4$$

и найти спектр соответствующего интегрального оператора в пространстве $C[-1,1]$.

Решение. Ядро интегрального оператора

$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1} (ts - t^2 s^2)\, x(s)\, ds$$

вырожденное, поэтому уравнение можно решать методом неопределенных коэффициентов. Вынесем функции, зависящие от t, за знак интеграла и запишем исходное уравнение в виде

$$x(t) = \lambda \left(t \int_{-1}^{1} s x(s)\, ds - t^2 \int_{-1}^{1} s^2 x(s)\, ds \right) + t^2 + t^4. \qquad (17.6)$$

Отсюда следует, что если решение уравнения (17.6) существует, то оно имеет вид

$$x(t) = \lambda (t \cdot c_1 - t^2 \cdot c_2) + t^2 + t^4. \qquad (17.7)$$

Подставив (17.7) в (17.6), получим тождество (на $[-1,1]$)

$$\begin{aligned} &\lambda(c_1 t - c_2 t^2) + t^2 + t^4 \equiv \\ &\qquad \equiv \lambda \Bigg(t \int_{-1}^{1} \big(s\lambda(c_1 s - c_2 s^2) + s(s^2 + s^4) \big)\, ds - \\ &\qquad - t^2 \int_{-1}^{1} \big(s^2 \lambda(c_1 s - c_2 s^2) + s^2(s^2 + s^4) \big)\, ds \Bigg) + t^2 + t^4. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при t и t^2, получим два уравнения:

$$c_1 - \int_{-1}^{1} \big(\lambda s(c_1 s - c_2 s^2) + s(s^2 + s^4)\big)\, ds = 0,$$

$$-c_2 + \int_{-1}^{1} \big(\lambda s^2(c_1 s - c_2 s^2) + s^2(s^2 + s^4)\big)\, ds = 0.$$

Вычислив интегралы, получим систему линейных уравнений для нахождения c_1 и c_2:

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{2}{3}\lambda\right) c_1 = 0, \\ \left(1 + \dfrac{2}{5}\lambda\right) c_2 = \dfrac{24}{35}. \end{cases}$$

Определитель системы $\Delta(\lambda) = \left(1 - \dfrac{2}{3}\lambda\right)\left(1 + \dfrac{2}{5}\lambda\right)$ обращается в 0 при $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$ и $\lambda_2 = -\dfrac{5}{2}$.

Если $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$, то система имеет единственное решение $c_1 = 0$, $c_2 = \dfrac{24}{35}\left(1 + \dfrac{2}{5}\lambda\right)^{-1}$, а решением исходного уравнения является функция

$$x(t) = -\frac{24\lambda}{35 + 14\lambda} t^2 + t^2 + t^4.$$

Если $\lambda = \dfrac{3}{2}$, то система, а значит и интегральное уравнение, имеет неединственное решение:

$$c_1 = c, \qquad c_2 = \frac{3}{7}; \qquad x(t) = ct + \frac{5}{14} t^2 + t^4.$$

Если $\lambda = -\dfrac{5}{2}$, то система, а значит и интегральное уравнение, неразрешимы.

Осталось найти спектр оператора A. Оператор A является вполне непрерывным, так как его ядро непрерывно на

$[0,1] \times [0,1]$. Из теоремы 16.3 следует, что $\sigma(A) = \sigma_d(A) \cup \{0\}$. Итак, надо найти собственные значения оператора A, т. е. решить уравнение $Ax - \lambda x = 0$. Решив его методом неопределенных коэффициентов, мы получим значения $\mu_1 = \lambda_1^{-1} = \dfrac{2}{3}$, $\mu_2 = \lambda_2^{-1} = -\dfrac{2}{5}$. Таким образом,

$$\sigma(A) = \left\{0, \frac{2}{3}, -\frac{2}{5}\right\}.$$

✌

Пример 17.2. В пространстве $C[0, a]$ решить интегральное уравнение

$$x(t) = e^{t^2+2t} + 2\int_0^t e^{t^2-s^2} x(s)\, ds \tag{17.8}$$

методом нахождения решения в виде ряда (см. (17.5)).

Решение. Уравнение (17.8) содержит интегральный оператор, который задается формулой

$$(Ax)(t) = \int_0^t e^{t^2-s^2} x(s)\, ds = \int_0^t K_1(t,s)\, x(s)\, ds,$$

$$K_1(t,s) = e^{t^2-s^2}.$$

Тогда функция

$$K_2(t,s) = \int_s^t e^{t^2-\tau^2} e^{\tau^2-s^2}\, d\tau = e^{t^2-s^2}(t-s)$$

является ядром оператора A^2, функция

$$K_3(t,s) = \int_s^t e^{t^2-\tau^2} e^{\tau^2-s^2}(\tau - s)\, d\tau = e^{t^2-s^2}\frac{(t-s)^2}{2!}$$

есть ядро оператора A^3, функция

$$K_n(t,s) = e^{t^2-s^2}\frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$$

есть ядро оператора A^n. Отсюда

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n A^n x\right)(t) =$$
$$= x(t) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{t^2-s^2} \frac{\lambda^{n-1}(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, x(s)\, ds =$$
$$= x(t) + \lambda \int_0^t e^{t^2-s^2} e^{\lambda(t-s)} x(s)\, ds.$$

Уравнение (17.8) есть уравнение вида $x = \lambda Ax + y$, где $\lambda = 2$, $y = e^{t^2+2t}$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n$ сходится, значит, решением уравнения (17.8) является функция

$$x(t) = e^{t^2+2t} + 2\int_0^t e^{t^2-s^2} e^{2(t-s)} e^{s^2+2s} ds = e^{t^2+2t}(1+2t).$$ ✌

Пример 17.3. В пространстве $C[-1,1]$ решить интегральное уравнение

$$x(t) = e^t + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (ts + t^2 s^2) x(s)\, ds$$

методом нахождения решения в виде ряда (см. (17.5)).

Решение. Здесь

$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{1} K_1(t,s)\, x(s)\, ds, \qquad K_1(t,s) = ts + t^2 s^2.$$

Ядро оператора A^2 имеет вид

$$K_2(t,s) = \int_{-1}^{1} (t\tau + t^2\tau^2)(\tau s + \tau^2 s^2)\, d\tau =$$
$$= \int_{-1}^{1} (t\tau^2 s + t^2 \tau^4 s^2)\, d\tau = \frac{2}{3}\, ts + \frac{2}{5}\, t^2 s^2,$$

ядро A^3 имеет вид

$$K_3(t,s) = \int_{-1}^{1} (t\tau + t^2\tau^2) \left(\frac{2}{3}\,\tau s + \frac{2}{5}\,\tau^2 s^2\right) d\tau = \\ = \left(\frac{2}{3}\right)^2 ts + \left(\frac{2}{5}\right)^2 t^2 s^2,$$

ядро A^n имеет вид

$$K_n(t,s) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} ts + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} t^2 s^2.$$

Отсюда для $n \geqslant 1$

$$(\lambda^n A^n x)(t) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(\left(\frac{2}{3}\,\lambda\right)^{n-1} ts + \left(\frac{2}{5}\,\lambda\right)^{n-1} t^2 s^2 \right) x(s)\, ds$$

и

$$\|\lambda^n A^n\| \leqslant 2|\,\lambda| \left(\left(\frac{2}{3}\,|\lambda|\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{5}\,|\lambda|\right)^{n-1} \right).$$

Следовательно, если $|\lambda| < \dfrac{3}{2}$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n$ сходится и

$$\big((E - \lambda A)^{-1} x\big)(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A^n x \right)(t) = \\ = x(t) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-1}^{1} \left(\left(\frac{2}{3}\,\lambda\right)^{n-1} ts + \left(\frac{2}{5}\,\lambda\right)^{n-1} t^2 s^2 \right) x(s)\, ds = \\ = x(t) + \lambda \int_{-1}^{1} \left(\frac{ts}{1 - \frac{2}{3}\,\lambda} + \frac{t^2 s^2}{1 - \frac{2}{5}\,\lambda} \right) x(s)\, ds.$$

Решением исходного уравнения является функция

$$x(t) = \left(E - \frac{1}{2}\,A\right)^{-1} (e^t) = e^t + \frac{3}{2e}\,t + \frac{5(e^2 - 5)}{8e}\,t^2.$$ ✌

☞ В задачах **17.1–17.8** найти решение интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds = y(t)$$

и спектр соответствующего интегрального оператора в пространстве $C[a,b]$.

17.1. $K(t,s) = t^2 - ts, \quad y(t) = t^2 + t, \quad [a,b] = [-1,1].$

17.2. $K(t,s) = t - s, \quad y(t) = t, \quad [a,b] = [0,1].$

17.3. $K(t,s) = \sin(2t+s), \quad y(t) = \pi - 2t, \quad [a,b] = [0,\pi].$

17.4. $K(t,s) = \sin s + s\cos t, \quad y(t) = 1 - \dfrac{2t}{\pi}, \quad [a,b] = [0,\pi].$

17.5. $K(t,s) = \sin(t-2s), \quad y(t) = \cos 2t, \quad [a,b] = [0,\pi].$

17.6. $K(t,s) = \sin(t-s), \quad y(t) = \cos t, \quad [a,b] = [0,\pi].$

17.7. $K(t,s) = \sin t\cos s - \sin 2t\cos 2s + \sin 3t\cos 3s,$

$y(t) = \cos t, \quad [a,b] = [0,2\pi].$

17.8. $K(t,s) = e^{2t+s}, \quad y(t) = t, \quad [a,b] = [-1,1], \quad \lambda = \dfrac{3}{2}.$

17.9. Пусть $K_i(t,s) \in C([a,b]\times[a,b]), \ i = 1,2,$

$$(A_i x)(t) = \int_a^t K_i(t,s)\,x(s)\,ds,$$

$$(B_i x)(t) = \int_a^b K_i(t,s)\,x(s)\,ds.$$

Доказать, что

$$(A_1A_2x)(t) = \int_a^t K(t,s)\,x(s)\,ds$$

с ядром

$$K(t,s) = \int_s^t K_1(t,\tau)K_2(\tau,s)\,d\tau;$$

$$(B_1B_2x)(t) = \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds$$

с ядром

$$K(t,s) = \int_a^b K_1(t,\tau)K_2(\tau,s)\,d\tau.$$

☞ Решить интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = y(t) + \lambda\int_0^t K(t,s)\,x(s)\,ds$$

в пространстве $C[0,b]$, решив соответствующее ему дифференциальное уравнение (задачи **17.10–17.14**) при $\lambda = 1$ и методом нахождения решения в виде ряда (см. (17.5)) (задачи **17.15–17.18**).

17.10. а) $K(t,s) = 1, \quad y(t) = \dfrac{t^2}{2} + t;$

б) $K(t,s) = -1, \quad y(t) = \dfrac{t^2}{2}.$

17.11. $K(t,s) = s^2, \quad y(t) = t^3 + 2.$

17.12. $K(t,s) = s - t,$ а) $y(t) = t;$ б) $y(t) = \cos t.$

17.13. $K(t,s) = 4(t-s), \quad y(t) = e^t.$

17.14. $K(t,s) = 2e^{t-s}, \quad y(t) = \sin t.$

17.15. $K(t,s) = \dfrac{1+t^2}{1+s^2}, \quad y(t) = 1 + t^2.$

17.16. $K(t,s) = t - s, \quad y(t) = 1, \quad \lambda > 0.$

17.17. $K(t,s) = \dfrac{2+\cos t}{2+\cos s}, \quad y(t) = e^{\lambda t}\sin t.$

17.18. $K(t,s) = 2^{\sin t - \sin s}$, $y(t) = 2^{\sin t}$.

☞ В задачах **17.19–17.21** решить интегральное уравнение Фредгольма

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,s)\, x(s)\, ds = y(t)$$

методом нахождения решения в виде ряда (см. (17.5)).

17.19. $K(t,s) = te^s$, $y(t) = e^{-2t}$, $[a,b] = [1,2]$.

17.20. $K(t,s) = 1 + (2t-1)(2s-1)$, $y(t) = t^2$, $[a,b] = [0,1]$.

17.21. $K(t,s) = \sin t \sin s + \cos t \cos s$, $y(t) = \sin \dfrac{t}{2}$,

$[a,b] = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Тема 18. Исследование некоторых операторов

Дополнительно к изложенному в предыдущих темах теоретическому материалу при решении задач могут оказаться полезными следующие факты.

Пусть H, H_1 – гильбертовы пространства, $A \in \mathcal{L}(H, H_1)$. Тогда $\|A\|^2 = \|A^{\otimes} A\|$.

Если $A \in \mathcal{L}(H)$, $A = A^{\otimes}$ и A – компактный оператор, то $\|A\| = \max\{|\lambda| \colon \lambda \in \sigma_d(A)\}$.

18.1. Пусть $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, $A\colon L_{2k+1}[0,1] \to L_1[0,1]$, $k \in \mathbb{N}$,

$$(Ax)(t) = x^{2k+1}(t).$$

Найти оператор A^{-1}. Будут ли операторы A и A^{-1} непрерывными, ограниченными, равномерно непрерывными, компактными, вполне непрерывными?

18.2. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в гильбертовом пространстве H, $\xi_k = (x, e_k)$ для $x \in H$, $A_j \colon H \to \ell_2$, $j = 1, 2$, $A_1 x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $A_2 x = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\eta_k = \begin{cases} 0, & k = 2\ell - 1,\ \ell \in \mathbb{N}; \\ \xi_\ell/\ell, & k = 2\ell. \end{cases}$ Доказать, что операторы A_1 и A_2 непрерывны. Будут ли они вполне непрерывными? Найти $\|A_j\|$, $A_j^{\otimes}$, $j = 1, 2$, и A_j^{-1}, если они существуют.

18.3. Пусть H – гильбертово пространство, H_1 – его подпространство; $H_2 = H_1^{\perp}$, $A_j \in \mathcal{L}(H_j)$, $j = 1, 2$, $A = A_1 + A_2$. Доказать, что $\|A\| = \max\{\|A_1\|, \|A_2\|\}$.

☞ В задачах **18.4–18.10** провести исследование операторов:

1. Являются ли они непрерывными, замкнутыми, ограниченными, компактными, вполне непрерывными?

2. Существует ли A^{-1}? Если да, то найти его.

3. Найти норму для ограниченных операторов.

4. Найти спектр оператора A (кроме 18.5, 18.9).

5. В задачах 18.4, 18.7, 18.8, 18.10 найти сопряженный оператор.

18.4. $A\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1], \quad (Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t x(s)\,ds.$

18.5. $A\colon L[0,1] \to C[0,1], \quad (Ax)(t) = \displaystyle\int_0^t x(s)\,ds - 3x(t).$

18.6. $A\colon D(A) \subset C[0,1] \to C[0,1],$

$D(A) = \{x \in C^1[0,1],\ x(0) = 0\},$

$(Ax)(t) = x'(t) + \varphi(t)\,x(t),\ \ \varphi \in C[0,1].$

18.7. $A\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1],$

$$(Ax)(t) = \int_0^1 (s \ln t - t \ln s)\,x(s)\,ds.$$

18.8. $A\colon \ell_2 \to \ell_2,$

$$Ax = \left(0, \frac{\xi_1}{2}, \frac{\xi_2}{3}, \ldots, \frac{\xi_k}{k+1}, \ldots\right);$$

$$B\colon D(B) \subset \ell_2 \to \ell_2,\ D(B) = \{x \in \ell_2\colon Bx \in \ell_2\},$$
$$Bx = (2\xi_2, 3\xi_3, \ldots, k\xi_k, \ldots).$$

18.9. $A\colon C[-1,1] \to C[-1,1]$,
$$(Ax)(t) = \int_{-1}^{t} x(s)\,ds - \int_0^1 sx(s)\,ds.$$

18.10. $A\colon \ell_2 \to \ell_2,\ Ax = (\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_4, \ldots).$

Тема 19. Обобщенные функции

Определение 19.1. *Носителем функции* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{P}$ называется множество $\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R} \colon \varphi(x) \neq 0\}}$.

Множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем обозначают $\mathcal{D}$. Функции, принадлежащие $\mathcal{D}$, образуют линейное пространство. В пространстве $\mathcal{D}$ определим сходимость. Последовательность $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}$ сходится к функции $\varphi \in \mathcal{D}$, если существует компакт K такой, что носители всех функций φ_n и функции φ содержатся в K и для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ последовательность $\varphi_n^{(m)} \overset{K}{\rightrightarrows} \varphi^{(m)}$ при $n \to \infty$. Пространство с такой сходимостью называется *пространством основных функций* и обозначается также $\mathcal{D}$.

Обобщенной функцией или *распределением на* $\mathbb{R}$ называется всякий линейный секвенциально непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathcal{D}$. Множество обобщенных функций обозначают $\mathcal{D}'$.

На множестве $\mathcal{D}'$ рассматривают *слабую сходимость, т. е. последовательность обобщенных функций $\{f_n\} \subset \mathcal{D}'$ сходится к $f \in \mathcal{D}'$, если

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle \varphi, f_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \varphi, f \rangle.$$

Пространство $\mathcal{D}'$ с такой сходимостью называется *пространством обобщенных функций произвольного роста.*

Всякая интегрируемая на любом отрезке (компакте) функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{P}$ порождает обобщенную функцию $\{f\}$ по формуле

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle \varphi, \{f\} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, dx.$$

Такие обобщенные функции называются *регулярными.* Все остальные обобщенные функции называются *сингулярными.*

Определение 19.2. *Произведение функции $\alpha \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ на обобщенную функцию f* определяется формулой

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle \varphi, \alpha \cdot f \rangle = \langle \alpha \cdot \varphi, f \rangle.$$

Определение 19.3. *Производной $D^m f$ порядка m обобщенной функции f* называется функционал, определяемый формулой

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}' \quad \langle \varphi, D^m f \rangle = (-1)^m \langle D^m \varphi, f \rangle.$$

Нетрудно проверить, что $D^m f$ – снова обобщенная функция.

Теорема 19.1 (свойства операции дифференцирования).

1. *D^m – линейный секвенциально непрерывный оператор, действующий в $\mathcal{D}'$.*

2. *Всякая обобщенная функция имеет производные всех порядков.*

3. *Если функция f непрерывно (кусочно непрерывно) дифференцируема, то $D\{f\} = \{Df\}$.*

4. *Если функция α бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}$, то*

$$D(\alpha \cdot f) = D\alpha \cdot f + \alpha \cdot Df.$$

Теорема 19.2 (о существовании первообразной обобщенной функции). *Пусть* $f \in \mathcal{D}'$. *Тогда существует* $g \in \mathcal{D}'$ *такая, что* $Dg = f$. *При этом если* $Dg = Dg_1$, *то* $g - g_1 = \mathrm{const}$.

Примеры обобщенных функций:

1) δ-функция:

$$\langle \varphi, \delta \rangle = \varphi(0);$$

$\delta(x-c)$ – сдвинутая δ-функция:

$$\langle \varphi, \delta(x-c) \rangle = \varphi(c);$$

2) χ – функция Хевисайда:

$$\langle \varphi, \chi \rangle = \int_0^\infty \varphi(x)\, dx;$$

3) функция $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$:

$$\left\langle \varphi, \mathcal{P}\frac{1}{x} \right\rangle = V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int_{-R_\varphi}^{-\varepsilon} \varphi(x)\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{R_\varphi} \varphi(x)\frac{dx}{x} \right) = \int_{-R_\varphi}^{R_\varphi} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\, dx,$$

где R_φ такое, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R_\varphi, R_\varphi]$.

Пример 19.1. Найти производную от распределения

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 1; \\ x, & x \leqslant 1. \end{cases}$$

Распределение f является регулярным, поэтому по определению производной мы получаем равенства

$$\langle \varphi, Df \rangle = -\langle D\varphi, f \rangle = -\langle \varphi', f \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) f(x)\, dx.$$

Возьмем этот интеграл по частям и учтем, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=0$:

$$-\int_{\mathbb{R}}\varphi'(x)f(x)\,dx=-\int_{-\infty}^{1}\varphi'(x)x\,dx-\int_{1}^{\infty}\varphi'(x)\ln x\,dx=$$

$$=-\varphi(x)x\Big|_{-\infty}^{1}+\int_{-\infty}^{1}\varphi(x)\,dx-\varphi(x)\ln x\Big|_{1}^{\infty}+\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx=$$

$$=-\varphi(1)+\int_{-\infty}^{1}\varphi(x)\,dx+\int_{1}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Положим $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>1;\\ 1, & x\leqslant 1,\end{cases}$ тогда производная f запишется в виде $Df(x)=-\delta(x-1)+g(x)$.

19.1. Найти производные первого порядка от распределений

а) $\chi(t)$; б) $\operatorname{sign} t$; в) $\delta(t-t_0)$; г) $|t|$; д) $\ln|t|$;

е) $\chi(t)\cos t$; ж) $f(t)=\begin{cases}e^t, & t>0;\\ 1, & t\leqslant 0;\end{cases}$

з) $f(t)=\begin{cases}\ln(t+1), & t\geqslant 0;\\ e^t, & t<0.\end{cases}$

19.2. Найти производные третьего порядка от распределений

а) $f(t)=\begin{cases}2e^t, & t\leqslant 0;\\ 1+2t, & t>0;\end{cases}$

б) $f(t)=|t^3-1|$; в) $f(t)=|t|\cdot\sin t$; г) $|t^2-4|$.

19.3. Найти производные порядка m от распределений

а) $\delta(t)$; б) $|t|$; в) $\chi(t)\cos t$; г) $\chi(t)t^{m+k}$.

19.4. Найти пределы следующих функций в пространстве $\mathcal{D}'$ при $\varepsilon\to+0$:

а) $f_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & |t|\leqslant\varepsilon;\\ 0, & |t|>\varepsilon;\end{cases}$

б) $f_\varepsilon(t) = \dfrac{\varepsilon}{\pi(t^2+\varepsilon^2)}$; в) $f_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{t}\sin\dfrac{t}{\varepsilon}$.

19.5. Решить уравнения в пространстве D':

а) $t \cdot f(t) = 0$; б) $(t-1)\cdot f(t) = 0$;

в) $t \cdot f(t) = 1$; г) $(t-1)\cdot t \cdot f(t) = 0$.

19.6. Решить дифференциальные уравнения в пространстве D':

а) $t \cdot f'(t) = 1$; б) $t^2 \cdot f'(t) = 1$; в) $t^2 \cdot f'(t) = \delta(t)$;

г) $f'(t) - t\cdot f(t) = \delta''(t)$; д) $f'(t) + t \cdot f(t) = \delta'(t)$.

Ответы

Тема 1

1.8. а) Да; б) нет. **1.9.** Да. **1.10.** Да.

1.14. f строго монотонна. **1.15.** f инъективно.

1.16. а) f знакопостоянна и ни на каком интервале не равна тождественно 0;

б) f эквивалентна знакопостоянной функции и ни на каком интервале не эквивалентна 0.

1.18. а), б) Нет; в), г) да.

1.19. а), в) $\alpha, \beta > 0$; б) $\alpha, \beta \neq 0$.

1.23. а), в) Нет; б), г), д) да.

1.24. а), б), г), д) Да; в) нет.

1.30. Нет. **1.32.** Да. **1.38.** Нет. **1.39.** Да.

1.40. В пространстве $\langle X, \rho_T \rangle$ все множества открыты и замкнуты одновременно.

1.45. Утверждения 1.41, 1.42 – да; 1.43, 1.44 – не всегда.

1.46. $\varnothing$, X.

1.47. а) Неограниченное, неоткрытое, незамкнутое;
б), д) ограниченное, неоткрытое, незамкнутое;
в) неограниченное, неоткрытое, замкнутое;
г) неограниченное, открытое, незамкнутое.

1.48. а) Ограниченное, открытое, незамкнутое;
б) ограниченное, неоткрытое, незамкнутое;
в), д) неограниченное, неоткрытое, замкнутое;
г) неограниченное, неоткрытое, незамкнутое;
е) неограниченное, открытое, незамкнутое.

1.49. а) Неоткрытое, замкнутое;
б), в) неоткрытое, незамкнутое.

1.50. M может быть как открытым, так и замкнутым;
N замкнуто (в том числе пустое множество).

1.51. а), б) Да.

Тема 2

2.11. Эквивалентна равномерной сходимости на отрезке $[a, b]$ самой последовательности и последовательностей производных с 1-й по k-ю.

2.12. Да.

2.14. а) Ни в каких; б) во всех, кроме ℓ_1;
в) ни в каких, если $\alpha \leqslant 0$; в c_0, c, m, если $\alpha > 0$; в ℓ_p, если $\alpha p > 1$;
г) в c_0, c, m; д) в c, m; е) в m;
ж) ни в каких, если $\alpha \leqslant 0$; в c_0, c, m, если $\alpha > 0$; в ℓ_p, если $\alpha p > 1$.

2.15. а) Да; б) нет.

2.16. а) Да, во всех; б) да, во всех, кроме $C^1[0, 1]$;
в) нет, во всех, кроме $L_1[0, 1]$;
г) нет.

2.29. $\|\cdot\|_\infty$ сильнее $\|\cdot\|_p$.

2.30. а) Сходится в c_0, c, ℓ_p, $3 < p \leqslant \infty$;
б), в) сходится в $L_p[0, 1]$, $1 \leqslant p < 2$.

2.32. а), б) x_n – при $\alpha p < 1$, y_n – при $\alpha < 0$.

2.33. $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны, $\|\cdot\|_2$ слабее их.

2.35. ρ_1 и ρ_3 эквивалентны, ρ_2 сильнее ρ_1 и ρ_3.

2.36. ρ_∞ сильнее ρ_s.

2.39. Открытость и замкнутость.

2.40. Все метрические пространства, метрика в которых эквивалентна тривиальной метрике ρ_T.

Тема 3

3.1. Да.

3.2. Множество P_n нигде не плотно в $C[a,b]$; множество P всюду плотно в $C[a,b]$.

3.8. Нет.

Тема 4

4.11. $L_1[a,b]$. **4.12.** а) c_0; б) ℓ_1.

4.13. Пространства $\langle c_0, \|\cdot\|_c\rangle$ и $\langle c, \|\cdot\|_m\rangle$ являются полными. Для остальных пар $X \subset Y$ пополнением для $\langle X, \|\cdot\|_Y\rangle$ является $\langle Y, \|\cdot\|_Y\rangle$.

4.14. а) $C[a,b]$, $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$;

б) $C^1[a,b]$, $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

в) $C[a,b] \times \mathbb{R}$, для $x = (\varphi(t), c) \in C[a,b] \times \mathbb{R}$ $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |\varphi(t)| + |c|$;

г) пространство функций x, непрерывных на $[a,b]$, непрерывно дифференцируемых на $[c,d]$, и если $[a,b] \cap [c,d] = \varnothing$, то $x(b) = x(c)$ при $b < c$ и $x(a) = x(d)$ при $d < a$; $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[c,d]} |x'(t)|$;

д) $C^2[a,b]$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

е) c_0 с нормой $\|x\| = \max\limits_k |\xi_k|$;

ж) множество $x = \{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \ell_1$ с нормой
$$\|x\| = \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k| + \max_{t\in[-1,1]} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k t^k\right|.$$

4.15. а) Полное, несепарабельное;
б) полное, сепарабельное;
в) неполное, сепарабельное.

4.16. $\left\{B\left[n, 1+\dfrac{1}{2n}\right]\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

4.19. б), в) Полные, остальные нет;
а) пополнение $\left\langle \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \rho_{|\cdot|} \right\rangle$;
г) пополнение $\langle [0,1], \rho_{|\cdot|} \rangle$;
д), е) пополнение $\langle [-1,0] \cup [1,2], \rho_{|\cdot|} \rangle$;
ж) пополнение $\left\langle \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}, \rho_{|\cdot|} \right\rangle$.
Метрики для пар «а» и «б», «в» и «г» эквивалентны, для пары «д» и «е» – нет.

4.20. $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$.

4.21. Сепарабельность сохраняется, полнота может не сохраняться.

Тема 5

5.1. а) Да; б) нет.

5.2. а), б) Непрерывно, не является равномерно непрерывным; в) не является непрерывным, не является равномерно непрерывным.

5.6. а), в), д), е) равномерно непрерывно;
б), г) не является равномерно непрерывным.

5.7. а), в), д), е) равномерно непрерывно;
б), г) не является равномерно непрерывным.

5.8. а), б), г) Непрерывно; в) не является непрерывным.

5.9. а) Да; б) нет; в) нет. **5.11.** Нет.

5.13. Нет (см. задачу 5.14).

5.22. а), в) Нет; б) да; г) да, тогда и только тогда, когда $|\lambda| < 3$.

5.23. $x(t) = -\dfrac{2t}{\lambda} - \dfrac{2}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^2}\, e^{\lambda t}$.

Тема 6

6.1. а) $X = \left\langle (0,1], \rho_{|\cdot|} \right\rangle,\ M = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$;

б) $X = \left\langle (0,1], \rho_{|\cdot|} \right\rangle,\ M = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

6.2. а) Компактно;

б) предкомпактно; компактно $\iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \{x_n\} = M$;

в) если X – полное, то M – предкомпактно; компактно $\iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \{x_n\} = M$; если X – неполное, то M необязательно предкомпактно.

6.4. а) Всегда; б) конечно или счетно; в) конечно.

6.18. Коэффициенты многочленов ограничены в совокупности.

6.20. а) В $C[0,1]$ непредкомпактно;
в $L_p[0,1]$ предкомпактно, но некомпактно;

б) в $C[0,1]$ предкомпактно $\iff$ $|\alpha| < 1$;
компактно $\iff$ $\alpha = 0$;
в $L_p[0,1]$ предкомпактно $\iff$ $|\alpha| \leqslant 1$;
компактно $\iff$ $\alpha = 0$;

в) во всех непредкомпактно;

г) во всех компактно;

д) предкомпактно, некомпактно;

е) предкомпактно; компактно $\iff$ $b - a \geqslant 2\pi$;

ж), з) во всех предкомпактно, но некомпактно;

и) в $C[0,1]$ непредкомпактно;

в $L_p[0,1]$ предкомпактно, но некомпактно;

к) в L_p при $1 \leqslant p < \dfrac{3}{2}$ предкомпактно, но некомпактно,
в остальных непредкомпактно.

6.21. а)–г), ж) Предкомпактны, но некомпактны;
д) непредкомпактно; е) компактно.

6.23. а), б) Нет; в) да. **6.24.** а) Нет; б) да.

6.25. Компактно в c_0, c, ℓ_p, $p > 3$.

6.30. Не всегда. **6.31.** Не всегда.

Тема 7

7.1. Может быть невыпуклым.

7.3. Да, если $x_0 \in L$; нет, если $x_0 \notin L$.

7.4. Может быть незамкнутой.

7.6. Нет, если $X \neq \{0\}$.

7.8. Все финитные последовательности.

7.9. а), г) Нет; б), в), д), е) да.

7.10. а) Да; б) не всегда.

7.13. а), г), д), з), и) Нет; б), в), е), ж) да.

7.14. а) Да, при $p = 1$; нет, при $p = 2$, $p = \infty$;

б), в) да; г), д), ж) нет;

е) да, если $c = 0$; нет, если $c \neq 0$.

7.20. а), д) Ближайших точек бесконечно много;

б) не достигается;

в), г) существует единственная ближайшая точка.

7.21. Не всегда.

Тема 8

8.24. а) Множество четных функций;

б) множество нечетных функций.

8.26. а)–г) $M^\perp = \{0\}$;

д) $\left\{x \in L_2[0,1]\colon x(t) = 0 \text{ п. в. на } \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$;

е) $\big\{x \in L_2[0,1]\colon x(t) \sim \mathrm{const}\big\}$.

8.27. а) $\big\{x \in C[-1,1]\colon x(t) = 0,\ t \in [0,1]\big\}$; б) $M^\perp = \{0\}$.

8.28. а) $M = \langle x_0 \rangle$, где $x_0 = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1,}_{10} 0, 0, \ldots)$;

б) $M^\perp = \langle a, b \rangle$, $a = (1,\ 2,\ 4,\ 0,\ 0,\ \ldots)$,

$b = (0,\ 1,\ -3,\ 0,\ -1,\ 0,\ \ldots)$;

в), г) $M^\perp = \{0\}$.

8.31. $\frac{1}{3}$. **8.32.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

8.33. а) $\Pr_L x_0 = x_0 - \frac{1}{55}(1, 0, -3, 0, 1, 0, 0, \ldots)$,

$$\rho(x_0, L) = \frac{1}{5\sqrt{11}}, \quad \rho(x_0, L^{\perp}) = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{275}}.$$

б) $\Pr_L x_0 = \left(\frac{22}{45}, \frac{1}{8}, -\frac{8}{45}, -\frac{1}{8}, -\frac{14}{45}, 0, 0, \ldots\right)$,

$$\rho(x_0, L) = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - \frac{8611}{21600}}, \quad \rho(x_0, L^{\perp}) = \frac{\sqrt{8611}}{60\sqrt{6}}.$$

8.34. $\frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$.

8.35. а) $p_0(t) = \frac{e^2-1}{2e}$, $p_1(t) = \frac{e^2-1}{2e} + \frac{3}{e}\,t$,

$$p_2(t) = \frac{33}{4e} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{e}\,t + \left(\frac{15e}{4} - \frac{105}{4e}\right)t^2;$$

б) $p_0(t) = 0$, $p_1(t) = \frac{3}{5}\,t$, $p_2(t) = \frac{3}{5}\,t$.

8.39. Семейство $\{e_\alpha(t)\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$, где $e_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & t = \alpha, \\ 0, & t \neq \alpha. \end{cases}$

8.48. $\overline{\langle \{\cos nt\}_{n=0,2,3,\ldots} \cup \{p_{2n+1}(t)\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle}$, здесь p_{2n+1} – многочлены Лежандра.

8.49. $p_0(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$, $p_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\,t$, $p_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)$.

8.50. $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t - 1$, $p_2(t) = \frac{1}{2}\,(t^2 - 4t + 2)$.

Тема 9

9.1. а), б) Нелинейный, ограниченный, непрерывный.

9.2. а) Нелинейный, ограниченный, непрерывный;
б) нелинейный, неограниченный, разрывный.

9.3. а) Линейный, ограниченный, непрерывный;
б), в) линейный, неограниченный, разрывный.

9.4. Линейный, ограниченный, непрерывный.

9.5. Линейный, неограниченный, разрывный.

9.6. Нелинейный, неограниченный, разрывный.

9.7. Нелинейный, ограниченный, непрерывный.

9.8. а) Нелинейный, ограниченный, непрерывный;
б) нелинейный, неограниченный, разрывный.

9.9. а) Линейный, ограниченный, непрерывный;
б), в) линейный, неограниченный, разрывный.

9.11. Непрерывен $\Longleftrightarrow \{\alpha_k\} \in m$.

9.12. а) Линейный, ограниченный, непрерывный;
б) линейный, неограниченный, разрывный.

9.13. а) Нелинейный, ограниченный, непрерывный;
б) нелинейный, неограниченный, разрывный.

9.14. а), б) Нелинейный, ограниченный, непрерывный.

9.15. Нелинейный, ограниченный, непрерывный.

9.16. а), б) Нелинейный, ограниченный, непрерывный.

9.17. а), б) Нелинейный, ограниченный, непрерывный;
в) нелинейный, неограниченный, разрывный.

9.18. Нелинейный, ограниченный, разрывный.

9.19. Линейный, неограниченный, разрывный.

9.20. а), б) Нелинейный, ограниченный, непрерывный.

9.21. а), б) Нелинейный, ограниченный, непрерывный.

9.22. а) Нелинейный, при $\alpha \geqslant 1$ ограниченный, непрерывный;
при $0 < \alpha < 1$ неограниченный, разрывный;
б) нелинейный, ограниченный, непрерывный.

9.23. Линейный, неограниченный, разрывный.

9.24. Нелинейный, ограниченный, непрерывный.

9.25. а) Линейный, неограниченный, разрывный;
б) линейный, ограниченный, непрерывный.

Тема 10

10.1. а) $\|f\| = \dfrac{81}{4}$; б) $\|f\| = 6\sqrt{3}$.

10.2. а) $\|f\| = \dfrac{49}{2}$; б) $\|f\| = 6\sqrt{3}$.

10.3. а) $\|f\| = \dfrac{1}{4}$; б) $\|f\| = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$;
в) $\|f\| = \left(\dfrac{1}{2}\, B\left(\dfrac{3q+1}{2}, \dfrac{q+1}{2}\right)\right)^{1/q}, \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

10.4. а) $\|f\| = \dfrac{3}{2}$, недостижима; б) $\|f\| = 2$, достижима.

10.5. а) $\|f\| = 1$, достижима; б) $\|f\| = 2$, достижима.

10.6. $\|f\| = |\alpha| + |\beta|$.

10.7. а) $\|f\| = 1$, недостижима; б) $\|f\| = 1$, достижима.

10.8. а) $\|f\| = \dfrac{2}{3}$; б) $\|f\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; в) $\|f\| = \dfrac{2}{5^{2/3}}$.

10.9. $\dfrac{3}{2} < p \leqslant \infty, \quad \|f\| = \left(\dfrac{6}{3-q}\right)^{1/q}, \quad \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

10.10. а) $\|A\| = \dfrac{7}{2}$; б) $\|A\| = 4$; в) $\|A\| = 3$.

10.11. а) $\|A\| = \dfrac{3}{2}$; б) $\|A\| = 2$; в) $\|A\| = 1$.

10.12. а) $\|A\| = 1$; б) $\|A\| = 2$.

10.13. $\|A\| = \dfrac{\pi^2}{2}$. **10.14.** $\|A\| = 1$. **10.15.** $\|A\| = 1$.

10.16. а) $\|A\| = 2$; б) $\|A\| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; в) $\|A\| = 2$.

10.17. а) $\|A\| = e$; б) $\|A\| = 4$.

10.18. $\|A\| = \dfrac{3}{e}$. **10.19.** $\|A\| = \sup|\alpha_n|$.

10.20. а) $\|J\| = 1$; б) $\|J\| = (b-a)^{1/p-1/q}$; в) $\|J\| = 1$.

10.21. а) $\|A\| = \|\varphi\|_{C[a,b]}$; б) $\|A\| = \|\varphi\|_{L_2[a,b]}$;
в) $\|A\| = \|\varphi\|_{L_\infty[a,b]} = 3\max\{|\sin t| : t \in [a,b]\}$.

10.22. а) $\|A\| = 1$; б) $\|A\| = 4$; в) $\|A\| = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

10.23. $\|A\| = 1$.

10.24. а) $\alpha \geqslant 0$, $\|A\| = 1$; б) $0 < \alpha \leqslant 1$, $\|A\| = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

10.25. $0 < \alpha \leqslant 2\beta + 1$, $\|A\| = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

10.29. $K(t,1)x(1) - K(t,0)x(0) - \displaystyle\int_0^1 x(s)K'_s(t,s)\,ds$.

Тема 11

11.2. Не сходится поточечно; не сходится равномерно.

11.3. а), б) Сходится поточечно, не сходится равномерно; в) не сходится поточечно; не сходится равномерно.

11.4. В $\ell_p, 1 \leqslant p < \infty$, и в c_0 сходимость поточечная $\Longleftrightarrow$ $\alpha \in m$; сходимость равномерная $\Longleftrightarrow \alpha \in c_0$.

В ℓ_∞ и в c сходимость поточечная и равномерная $\Longleftrightarrow$ $\alpha \in c_0$.

11.7. Не сходится равномерно; сходится поточечно.

11.9. При $\alpha < 1$ сходится поточечно и равномерно; при $\alpha = 1$ сходится поточечно, не сходится равномерно.

11.10. а), б), д) Сходится поточечно, не сходится равномерно; в), г) сходится поточечно и равномерно.

11.11. а) Сходится поточечно, не сходится равномерно в ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$, c, c_0; не сходится в ℓ_∞;
б) сходится поточечно и равномерно в ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$; не сходится в ℓ_∞, c, c_0.

Тема 12

12.1. Пусть $e_1,\ e_2$ – базис в X, $\eta_1 = f(e_1),\ \eta_2 = f(e_2)$;

а) $\|f\| = \sqrt{\left|\dfrac{\eta_1}{a}\right|^2 + \left|\dfrac{\eta_2}{b}\right|^2}$;

б) $\|f\| = \left|\dfrac{\eta_1}{a}\right| + \left|\dfrac{\eta_2}{b}\right|$;

в) $\|f\| = \max\left\{\left|\dfrac{\eta_1}{a}\right|, \left|\dfrac{\eta_2}{b}\right|\right\}$;

г) $\|f\| = \left|\dfrac{\eta_1}{4}\right| + \left|\dfrac{\eta_2}{2}\right|$;

д) $\|f\| = |\eta_1| + |3\eta_1 + \eta_2|$;

е) $\|f\| = \sqrt{\left|\dfrac{\eta_1 - \eta_2}{2\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\dfrac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right|^2}$.

12.3. 1) $f(x) = -\dfrac{16}{3}\,\xi_1 - \dfrac{1}{3}\,\xi_2$;

2) а) $f(x) = -\dfrac{3}{5}\,\xi_1 + \dfrac{6}{5}\,\xi_2$;

б) $f(x) = \tau\xi_1 + (1-\tau)\xi_2, \quad |\tau| \leqslant 1$.

3) а) $f(x) = 9\xi_1 - 9\xi_2$;

б) $f(x) = (9+\lambda)\xi_1 - 2\lambda\xi_2,\ \lambda \in [-15, 9]$.

12.8. а) $\dfrac{7\ln 2 - 1}{3}$ в $C[0,3]$, достижимо;

$7\ln 2 - 1$ в $L_1[0,3]$, достижимо;

б) $\dfrac{49}{18}$ в $C[0,3]$, недостижимо;

$\dfrac{49}{12}$ в $L_1[0,3]$, недостижимо.

12.9. а) $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$; б) $\dfrac{1-\sin 1}{2}$; в) $\dfrac{\sin 1}{2}$;

г) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right)$; д) $\dfrac{1}{2}$; е) $\dfrac{8}{7}$.

12.10. В ℓ_1 не сходится сильно, не сходится слабо;

в c_0, ℓ_p $(1 < p < \infty)$ сильно не сходится, слабо сходится.

12.11. При $a \in (0,1)$ сходится сильно и слабо;

при $a \geqslant 1$ сильно не сходится, слабо не сходится.

12.12. Сходится слабо в $L_2[0,\pi]$, не сходится слабо в $C[0,\pi]$.

12.14. а) Не сходится сильно, сходится слабо и *слабо;

б) в c_0 не сходится сильно и слабо, сходится *слабо;

в ℓ_p не сходится сильно, сходится слабо и *слабо;

в) сходится сильно, слабо и *слабо.

12.15. Из сильной сходимости следует слабая, а из слабой – *слабая.

Тема 13

13.1. $A^{\otimes}\colon \ell_2^2 \to \ell_2$, $A^{\otimes}y = (\eta_1, -\eta_1, 3\eta_2, 0, \eta_2, 0, 0, \ldots)$.

13.2. $A^{\otimes}\colon \ell_2 \to \ell_2$, $A^{\otimes}y = (0, \eta_1, 0, \eta_2, 0, \eta_3, 0, 0, \ldots)$.

13.3. $A^{\otimes}\colon L_2[-1,0] \to L_2[0,1]$, $(A^{\otimes}y)(t) = \int_{-1}^{0} e^{s\pm t} y(s)\,ds$.

13.4. $A^{\otimes}, B^{\otimes}\colon \ell_2 \to \ell_2$, $A^{\otimes} = B$, $B^{\otimes} = A$.

13.5. $A^{\otimes}\colon \ell_2 \to \ell_2$, $Ay = \{\overline{\alpha}_k \eta_k\}_{k=1}^{\infty}$, A самосопряженный, если $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

13.6. $A^{\otimes}\colon \ell_2 \to \ell_2$,
$A^{\otimes}y = \big(4\eta_2 - \eta_1 + 6\eta_3, \eta_2, 2\eta_1, \frac{3}{4}\eta_4, \frac{4}{5}\eta_5, \ldots\big)$.

13.7. $A^{\otimes}\colon L_2[-3,3] \to L_2[-3,3]$,

$$\left(A^{\otimes}x\right)(t) = \int_{-3}^{t} (4ts - 5t^2) y(s)\,ds.$$

13.8. $A'\colon \ell_1 \to \ell_2$, $Ay = y$.

13.9. $A'\colon \ell_\infty \to \ell_\infty$, $Ay = (\eta_1, \eta_1, \eta_2, \eta_2, \ldots)$.

13.10. $A^{\otimes}\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, $(A^{\otimes}y)(t) = e^{-it}y(t)$.

13.11. $A'\colon L_{5/4}[0,1] \to L_{3/2}[0,1]$, $(A'y)(t) = \displaystyle\int_t^1 st^2 y(s)\,ds$.

13.12. A самосопряженный.

13.13. $A'\colon \ell_{q'}^{m} \to \ell_{p'}^{n}$ $\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1,\ \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1\right)$,

$$A'y = \left\{ \sum_{k=1}^{m} a_{k\ell}\eta_k \right\}_{\ell=1}^{n}, \text{ если } p \neq 2 \text{ или } q \neq 2;$$

$$A^{\otimes}y = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \overline{a_{k\ell}}\eta_k \right\}_{\ell=1}^{n}, \text{ если } p = q = 2,$$

и A самосопряженный, если $n = m$, $\overline{a_{k\ell}} = a_{\ell k}$.

13.14. а) $A'\colon \ell_{4/3} \to \ell_\infty$; б) $A'\colon \ell_1 \to \ell_\infty$,

$$A'y = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \alpha_n \eta_1, \alpha_{n+1}\eta_2, \ldots).$$

13.15. $A'\colon \ell_{3/2} \to \ell_2$, $A'y = (0, 0, 0, \eta_4, \eta_5, \ldots)$.

13.16. а) $A'\colon \ell_{5/4} \to \ell_{3/2}$, $A'y = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{3} \Big(2^i k + (2+i)\ell\Big)\eta_k \right\}_{\ell=1}^{5}$;

б) $A^{\otimes}\colon \ell_2^3 \to \ell_2^5$, $A^{\otimes}y = \left\{ \sum\limits_{k=1}^{3} \Big(2^{-i} k + (2-i)\ell\Big)\eta_k \right\}_{\ell=1}^{5}$.

13.17. $A'\colon L_{3/2}[0,1] \to L_{3/2}[0,1]$, $(A'y)(t) = 2ty(t^2)$.

13.18. $A'\colon L_2[2,3] \to L_{4/3}[1,2]$, $(A'y)(t) = \int_2^3 \cos(\pi s) y(s)\, ds$.

13.19. $A^{\otimes}\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$,

$$(A^{\otimes}y)(t) = \frac{1}{3} e^{-i(t/3)} y\left(\frac{t}{3} + \frac{2}{3}\right).$$

13.20. $A'\colon \ell_2 \to \ell_\infty$, $A'y = y$.

Тема 14

14.1. $A^{-1}y = (\eta_2, \eta_3, \ldots)$, $D(A^{-1}) = \{y \in \ell_1\colon y = (0, \eta_2, \eta_3, \ldots)\}$, A^{-1} непрерывен; B необратим.

14.2. Необратим.

14.3. Обратим, если $\lambda_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $A^{-1}y = \left\{ \dfrac{\eta_n}{\lambda_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$, A^{-1} непрерывен тогда и только тогда, когда $\inf |\lambda_n| > 0$.

14.4. а) Необратим;

б) $D(A^{-1}) = C[0,1]$, $(A^{-1}y)(t) = \int_0^t y(s)\, ds$,

A^{-1} непрерывен;

в) $D(A^{-1}) = C[0,1]$, $(A^{-1}y)(t) = y(1) + \int_0^t y(s)\,ds$,

A^{-1} непрерывен;

г) если $k = 1$, то необратим;
если $k \neq 1$, то $D(A^{-1}) = C[0,1]$,

$(A^{-1}y)(t) = \dfrac{k}{1-k}\displaystyle\int_0^1 y(s)\,ds + \int_0^t y(s)\,ds$,

A^{-1} непрерывен.

14.5. Обратим, если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$,

$D(A^{-1}) = \Big\{ y \in \ell_1 : \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^{\frac{1}{2k-1}} < \infty \Big\}$,

$A^{-1}y = (\eta_1, \ldots, \eta_k^{\frac{1}{2k-1}}, \ldots)$, A^{-1} разрывен;

необратим, если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.

14.6. а) Обратим, $D(A^{-1}) = \Big\{ y \in C[0,1] \colon \exists \lim\limits_{t \to +0} \dfrac{y(t)}{\sqrt{t}} \Big\}$,

$$(A^{-1}y)(t) = \begin{cases} \dfrac{y(t)}{\sqrt{t}}, & t \in (0,1]; \\ \lim\limits_{t \to +0} \dfrac{y(t)}{\sqrt{t}}, & t = 0, \end{cases}$$

A^{-1} разрывен,

б) обратим, $D(A^{-1}) = \Big\{ y \in L_1[0,1] \colon \dfrac{y(t)}{\sqrt{t}} \in L_1[0,1] \Big\}$,

$(A^{-1}y)(t) = \dfrac{y(t)}{\sqrt{t}}$, A^{-1} разрывен.

14.7. Обратим, $D(A^{-1}) = C[0,1]$,

$(A^{-1}y)(t) = y(t) - \dfrac{2}{e^2+1}\displaystyle\int_0^1 e^{s+t} y(s)\,ds$,

A^{-1} непрерывен.

14.8. Обратим, $D(A^{-1}) = C^1[a,b]$, $\quad (A^{-1}y)(t) = \dfrac{y(t)}{t^2+1}$,

A^{-1} разрывен.

14.9. Если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то обратим, $\quad D(A^{-1}) = L_1[a,b]$,

$(A^{-1}y)(t) = \sqrt[3]{y(t)}$, $\quad A^{-1}$ непрерывен.

14.10. Обратим, $\quad D(A^{-1}) = \ell_1$, $\quad A^{-1}y = y$, $\quad A^{-1}$ разрывен.

14.11. Обратим, $\quad D(A^{-1}) = \ell_1$, $\quad A^{-1}y = \left\{\dfrac{\eta_n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$,

A^{-1} непрерывен.

14.12. Обратим, $\quad D(A^{-1}) = C[0,1]$,

$$(A^{-1}y)(t) = \int_0^t (t-s)y(s)\,ds - t\int_0^1 (1-s)y(s)\,ds,$$

A^{-1} непрерывен.

Тема 15

15.1. $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \{1, 1+i, 1-i\}$, $\qquad R_A(\lambda)y =$

$$= \left(\frac{(1-\lambda)\eta_1 + \eta_2}{(1-\lambda)^2+1}, \frac{(1-\lambda)\eta_2 - \eta_1}{(1-\lambda)^2+1}, \frac{\eta_3}{1-\lambda}, \frac{\eta_4}{1-\lambda}, \ldots\right).$$

15.2. $\sigma(A) = \left\{\dfrac{1}{n}\right\} \cup \{0\}$, $\sigma_d(A) = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\sigma_c(A) = \{0\}$,

$R_A(\lambda)y = \left\{\dfrac{\eta_n}{1/n - \lambda}\right\}$.

15.3. $\sigma(A) = B[0,1]$;

если $1 \leqslant p < \infty$, то $\sigma_d(A) = B(0,1)$, $\quad \sigma_c(A) = S[0,1]$;

если $p = \infty$, то $\sigma_d(A) = B[0,1]$;

$$R_A(\lambda)y = \left\{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_{k+n-1}}{\lambda^k}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

15.4. $\sigma(A) = B[0,1]$;

если $1 < p < \infty$, то $\sigma_r(A) = B(0,1)$, $\quad \sigma_c(A) = S[0,1]$;

если $p = 1$ или $p = \infty$, то $\sigma_r[0,1] = B[0,1]$;

$$R_A(\lambda)y = \left\{ -\sum_{k=1}^{n} \frac{\eta_k}{\lambda^{n-k+1}} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

15.5. $\sigma(A) = \sigma_r(A) = [0,1], \quad \big(R_A(\lambda)y\big)(t) = (\sin t - \lambda)^{-1} \cdot y(t).$

15.6. $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0,1], \quad \big(R_A(\lambda)y\big)(t) = (\sqrt{t} - \lambda)^{-1} \cdot y(t).$

15.7. $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{e^{it},\ t \in [0, 2\pi)\}$,

$$\big(R_A(\lambda)y\big)(t) = (e^{it} - \lambda)^{-1} \cdot y(t).$$

15.8. $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \{0, 5\}$,

$$\big(R_A(\lambda)y\big)(t) = \begin{cases} (5-\lambda)^{-1} \cdot y(t), & y \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]; \\[2ex] (-\lambda)^{-1} \cdot y(t), & y \in \left(\dfrac{1}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

15.9. $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{0\}$,

$$\big(R_A(\lambda)y\big)(t) = -\frac{1}{\lambda}\, y(t) - \frac{1}{\lambda^2} \int_1^t e^{(t-s)/\lambda} y(s)\, ds.$$

15.10. $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \left\{0, \dfrac{i}{\sqrt{12}}, \dfrac{-i}{\sqrt{12}}\right\}$,

$$\big(R_A(\lambda)y\big)(t) = -\frac{1}{\lambda}\, y(t) + \frac{1}{\lambda\left(\lambda^2 + \frac{1}{12}\right)} \times$$

$$\times \int_0^1 \left[\left(t + \frac{1}{2} - \lambda\right) s - t\left(\frac{1}{2} + \lambda\right) - \frac{1}{3}\right] y(s)\, ds.$$

15.11. $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \{0, 1\}$,

$$\big(R_A(\lambda)y\big)(t) = -\frac{1}{\lambda}\, y(t) + \frac{1-\lambda-t}{\lambda(1-\lambda)^2}\, y(0) + \frac{t}{\lambda(1-\lambda)}\, y(1).$$

15.12. $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \mathbb{N}, \quad R_A(\lambda)y = \left\{\dfrac{\eta_n}{\lambda - n}\right\}.$

15.13. $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [1, \infty)$,

$$\big(R_A(\lambda)y\big)(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \lambda\right)^{-1} y(t).$$

15.14. а) $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \mathbb{C}$;

б) $\sigma(A) = \varnothing$, $\quad \big(R_A(\lambda)y\big)(t) = \displaystyle\int_a^t e^{\lambda(t-s)} y(s)\, ds$;

в) $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \left\{\dfrac{2\pi k i}{a-b} : k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$$\big(R_A(\lambda)y\big)(t) = \int_a^t e^{\lambda(t-s)} y(s)\, ds + \\ + \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda a} - e^{\lambda b}} \int_a^b e^{\lambda(b-s)} y(s)\, ds.$$

15.15. а) $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \{-k^2 : k \in \mathbb{N}\}$;

б) $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \{-k^2 : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$;

в) $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \{-4k^2 : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$;

г) $\sigma(A) = \varnothing$.

15.16. а) $\sigma(A) = \sigma_d(A) = \{1\}$, A замкнут;

б) $\sigma(A) = \mathbb{C}$, $\sigma_d(A) = \{1\}$, $\sigma_c(A) = \mathbb{C} \setminus \{1\}$, A не замкнут.

15.23. Невозможно.

Тема 16

16.1. а), б), в), г) Да. **16.2.** Нет. **16.3.** Да. **16.4.** Нет.

16.5. Да. **16.6.** Нет. **16.7.** Да.

16.8. а) Нет; б) да; в) нет.

16.9. Нет. **16.10.** Да. **16.12.** Нет. **16.13.** $\alpha_k \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$.

16.14. Да, при $\alpha < 1$. **16.15.** Нет. **16.16.** Нет. **16.17.** Нет.

16.18. Нет; нет. **16.19.** Нет; нет. **16.20.** Да; да.

16.21. Нет; нет. **16.22.** Да; да. **16.23.** Да; нет.

16.24. Нет; нет.

Тема 17

17.1. $x(t) = \dfrac{3}{3-2\lambda}\,t^2 + \dfrac{3}{3+2\lambda}\,t, \;\; \lambda \neq \pm\dfrac{3}{2},$

$\sigma(A) = \left\{0, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right\}.$

17.2. $x(t) = \dfrac{12+6\lambda}{12+\lambda^2}\,t - \dfrac{4\lambda}{12+\lambda^2}, \;\; \lambda \neq \pm 2\sqrt{3}i,$

$\sigma(A) = \left\{0, \dfrac{i}{2\sqrt{3}}, -\dfrac{i}{2\sqrt{3}}\right\}.$

17.3. $x(t) = \dfrac{12\lambda}{3-4\lambda}\sin 2t + \pi - 2t$ при $\lambda \neq \dfrac{3}{4}, -\dfrac{3}{2},$

$x(t) = -2\sin 2t + C\cos 2t + \pi - 2t$ при $\lambda = -\dfrac{3}{2},$

$\sigma(A) = \left\{0, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}\right\}.$

17.4. $x(t) = -\dfrac{\pi^2\lambda}{6(1+2\lambda)}\cos t + 1 - \dfrac{2t}{\pi}$ при $\lambda \neq \pm\dfrac{1}{2},$

$x(t) = \left(\dfrac{\pi^2}{16}C - \dfrac{\pi^2}{24}\right)\cos t + \dfrac{C}{2} + 1 - \dfrac{2t}{\pi}$ при $\lambda = \dfrac{1}{2},$

$\sigma(A) = \{0, 2, -2\}.$

17.5. $x(t) = \dfrac{3\pi\lambda}{2(3+2\lambda)}\sin t + \cos 2t$ при $\lambda \neq -\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{4},$

$$x(t) = -\frac{3}{4}\,(\pi \sin t + C \cos t) + \cos 2t \text{ при } \lambda = -\frac{3}{4},$$

$$\sigma(A) = \left\{0, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right\}.$$

17.6. $x(t) = \dfrac{2}{4+\pi^2\lambda^2}\,(\pi\lambda \sin t + 2\cos t),\ \ \lambda \neq \pm\dfrac{\pi}{2}\,i,$

$$\sigma(A) = \left\{0, \frac{2}{\pi}\,i, -\frac{2}{\pi}\,i\right\}.$$

17.7. $x(t) = \pi\lambda \sin t + \cos t,\ \ \sigma(A) = \{0\}.$

17.8. $x(t) = \dfrac{3e^{2t-1}}{1-\operatorname{sh} 3} + t,\ \ \sigma(A) = \left\{\dfrac{2}{3}\operatorname{sh} 3, 0\right\}.$

17.10. а) $x(t) = 2e^t - t - 2;$ б) $x(t) = t.$

17.11. $x(t) = 5e^{t^3/3} - 3.$

17.12. а) $x(t) = \sin t;$ б) $x(t) = \cos t - \dfrac{t}{2}\sin t.$

17.13. $x(t) = e^{2t} + \dfrac{1}{3}\,e^{-2t} - \dfrac{1}{3}\,e^t.$

17.14. $x(t) = \dfrac{1}{5}\,e^{3t} + \dfrac{2}{5}\sin t - \dfrac{1}{5}\cos t.$

17.15. $x(t) = (1+t^2)e^{\lambda t}.$

17.16. $x(t) = \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\,t.$

17.17. $x(t) = e^{\lambda t}\sin t + \lambda e^{\lambda t}(2+\cos t)\ln\dfrac{3}{2+\cos t}.$

17.18. $x(t) = 2^{\sin t}e^{\lambda t}.$

17.19. $x(t) = e^{-2t} + \lambda\dfrac{e^{-1}-e^{-2}}{1-\lambda e^2}\,t$ при $|\lambda| < e^{-2}.$

17.20. $x(t) = t^2 + \dfrac{\lambda}{3(1-\lambda)} + \dfrac{\lambda(2t-1)}{2(3-\lambda)}$ при $|\lambda| < 1.$

17.21. $x(t) = \sin\dfrac{t}{2} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{\lambda}{1-\lambda\pi/2}\sin t$ при $|\lambda| < \dfrac{2}{\pi}$.

Тема 19

19.1. а) $\delta(t)$; б) $2\delta(t)$; в) $\langle\varphi, \delta'(t-t_0)\rangle = -\varphi'(t_0)$; г) $\operatorname{sign} t$;
д) $\mathcal{P}\dfrac{1}{t}$; е) $\delta(t) - \chi(t)\sin t$; ж) $e^t\chi(t)$;
з) $-\delta(t) + \begin{cases} (t+1)^{-1}, & t \geqslant 0; \\ e^t, & t < 0. \end{cases}$

19.2. а) $2e^t\chi(-t) - 2\delta(t) - \delta''(t)$;
б) $6\operatorname{sign}(t-1) + 12\delta(t-1) + 6\delta'(t-1)$;
в) $4\delta(t) - \operatorname{sign} t(3\sin t + t\cos t)$;
г) $8(\delta'(t-2) + \delta'(t+2)) - 4(\delta(t+2) - \delta(t-2))$.

19.3. а) $\langle\varphi, \delta^{(m)}(t)\rangle = (-1)^m\varphi^{(m)}(0)$;
б) $|t|^{(m)} = 2\delta^{(m-2)}(t)$ $(m \geqslant 2)$;
в) $$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}m\right)\chi(t) + \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1}(-1)^k\delta^{(2\ell-2k-1)}(t), \\ \qquad \text{при} \quad m = 2\ell; \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{k-1}\delta^{(2\ell-2k)}(t), \\ \qquad \text{при} \quad m = 2\ell-1. \end{cases}$$
г) $\dfrac{(m+k)!}{k!}\chi(t)t^k$.

19.4. а) $\delta(t)$; б) $\delta(t)$; в) $\pi\delta(t)$.

19.5. а) $C\delta(t)$; б) $C\delta(t-1)$; в) $C\delta(t) + \mathcal{P}\dfrac{1}{t}$;
г) $C_1\delta(t) + C_2\delta(t-1)$.

Библиографические ссылки

1. *Данилин А. Р.* Функциональный анализ. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2012.

2. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. СПб. : Изд-во «Лань», 1999.

Список использованной литературы

Антоневич А. Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. Минск : Высш. шк., 1978.

Арестов В. В. Введение в теорию функций действительного переменного: Мера и интеграл Лебега на прямой : учеб. пособие / В. В. Арестов, П. Ю. Глазырина. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2011.

Березин Ф. А. Сборник задач и упражнений по функциональному анализу / Ф. А. Березин, А. Д. Гвишиани, Е. А. Горин, А. А. Кириллов. М. : Изд-во МГУ, 1977.

Глазырина П. Ю. Линейные операторы. Типовые задачи : учеб. пособие / П. Ю. Глазырина, М. В. Дейкалова, Л. Ф. Коркина. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2010.

Глазырина П. Ю. Нормированные пространства. Типовые задачи : учеб. пособие / П. Ю. Глазырина, М. В. Дейкалова, Л. Ф. Коркина. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2012.

Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. М. : Наука, 1977.

Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. М. : Наука, 1976.

Краснов М. А. Интегральные уравнения / М. А. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. М. : Наука, 1968.

Люстерник Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. М. : Наука, 1965.

Треногин В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. М. : Наука, 1984.

Оглавление

Учебное издание

Глазырина Полина Юрьевна
Дейкалова Марина Валерьевна
Коркина Людмила Федоровна

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
Типовые задачи

Учебное пособие

Заведующий редакцией	М. А. Овечкина
Редактор	Н. В. Чапаева
Корректор	Н. В. Чапаева
Оригинал-макет	М. В. Дейкалова

План выпуска 2016 г. Подписано в печать 12.07.2016.
Формат $60\times84\frac{1}{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 9,5. Усл. печ. л. 12,6. Тираж 150 экз. Заказ 213.
Издательство Уральского университета
620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Тел.: + (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

Для заметок

Для заметок

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА 2015
9 785799 617714

Глазырина Полина Юрьевна

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Уральского федерального университета. Имеет признанные в мире результаты по точным неравенствам для алгебраических и тригонометрических полиномов. Читает лекции и ведет практические занятия по основным предметам кафедры: математическому анализу, теории функций вещественного переменного, теории функций комплексного переменного, функциональному анализу, гармоническому анализу и ряду специальных курсов и семинаров.

Дейкалова Марина Валерьевна

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Уральского федерального университета. Область научных интересов – теория приближения функций и экстремальные свойства алгебраических многочленов на евклидовой сфере и отрезке и тригонометрических полиномов на оси; имеет в этой тематике глубокие результаты. Читает лекции и ведет практические занятия по математическому анализу, теории функций комплексного переменного, функциональному анализу.

Коркина Людмила Федоровна

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Уральского федерального университета. Имеет значительные научные результаты в теории некорректных задач, исследовании операторных функций в нормированных пространствах. Талантливый педагог и методист. В пособии отражен ее многолетний опыт преподавания математического анализа, теории функций вещественного переменного, функционального анализа, руководства специальными семинарами по нормированным кольцам и спектральной теории операторов.