Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б. Н. Ельцина
Институт математики
и компьютерных наук

П. Ю. ГЛАЗЫРИНА
М. В. ДЕЙКАЛОВА
Л. Ф. КОРКИНА

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Типовые задачи

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

П. Ю. Глазырина, М. В. Дейкалова,
Л. Ф. Коркина

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА
Типовые задачи

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по программе бакалавриата по направлениям подготовки
010100 «Математика», 010200 «Математика и компьютерные науки»,
010800 «Механика и математическое моделирование»
и по специальности 090301 «Компьютерная безопасность»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2012

УДК 517.983
Г525

Рецензенты:
кафедра общей математики
Южно-Уральского государственного университета
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор Л. Д. Менихес);
А. Р. Данилин, доктор физико-математических наук
(Институт математики и механики УрО РАН)

Глазырина, П. Ю.
Г525 Нормированные пространства. Типовые задачи : [учеб. пособие] / П. Ю. Глазырина, М. В. Дейкалова, Л. Ф. Коркина. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2012. – 108 с.
ISBN 978-5-7996-0723-4

Учебное пособие содержит набор задач по вводной части линейного функционального анализа (метрические, нормированные, гильбертовы пространства). Приводится необходимый теоретический материал, даны образцы решения некоторых задач.

Предназначено для проведения практических занятий, контрольных мероприятий и самостоятельной работы студентов математических факультетов дневной формы обучения.

УДК 517.983

ISBN 978-5-7996-0723-4

Предисловие

Учебное пособие содержит задачи по первой части курса функционального анализа (метрические, нормированные, гильбертовы пространства), читаемого студентам математико-механического факультета Уральского федерального университета. Задачи по второй части курса (теории операторов) собраны в учебном пособии авторов [1].

В начале пособия приведены классические нормированные пространства, изучаемые в курсе функционального анализа. Далее представлено восемь тем, в каждой из которых дана краткая сводка необходимого теоретического материала, а также приведены образцы решения некоторых задач. В конце пособия даны ответы к задачам и список литературы, использованной при их составлении. Эти же издания могут быть полезны при решении задач.

При составлении пособия были использованы методические разработки по функциональному анализу, составленные в прошлые годы на кафедре математического анализа и теории функций Уральского государственного университета им. А. М. Горького.

Условные обозначения, принятые в пособии:

✍ Советуем запомнить

☛ Советуем обратить внимание

✌ Окончание решения примера

☞ Начало формулировки задания, относящегося к нескольким задачам

✭ Задача повышенной трудности

Классические пространства

✍ $\mathbb{P}$ – поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ или поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

✍ ℓ_p^m $(1 \leqslant p < \infty)$ – пространство векторов $x = \{\xi_k\}_{k=1}^m$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, наделенное нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{m} |\xi_k|^p\right)^{1/p}$$

✍ c^m – пространство векторов $x = \{\xi_k\}_{k=1}^m$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с нормой

$$\|x\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |\xi_k|.$$

☛ Пространство c^m будем обозначать также ℓ_∞^m.

✍ ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ – пространство последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$, с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p}$$

✍ m – пространство ограниченных последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с нормой

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|.$$

☛ Пространство m будем обозначать также символом ℓ_∞.

✍ c – пространство сходящихся последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^\infty$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с нормой

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|.$$

✍ c_0 – пространство сходящихся к нулю последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с нормой

$$\|x\| = \max_{k \in \mathbb{N}} |\xi_k|.$$

✍ s – пространство последовательностей $x = \{\xi_k\} = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\xi_k \in \mathbb{P}$, с метрикой

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}, \quad y = \{\eta_k\} = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}, \ \eta_k \in \mathbb{P}.$$

✍ $C[a,b]$ – пространство функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{P}$, непрерывных на $[a,b]$, с нормой

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

✍ $C^k[a,b]$ – пространство функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{P}$, k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$, с нормой

$$\|x\| = \sum_{\ell=0}^{k} \max_{t \in [a,b]} |x^{(\ell)}(t)|.$$

✍ $\widetilde{L}_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ – пространство функций $x\colon [a,b] \to \mathbb{P}$, непрерывных на $[a,b]$, с нормой

$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

✍ Пусть E – измеримое по Лебегу подмножество $\mathbb{R}$.

$L_p(E)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ – пространство измеримых по Лебегу функций $x\colon E \to \mathbb{P}$ таких, что $|x(t)|^p$ суммируема на E, с нормой

$$\|x\| = \left(\int_E |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Функции x и y определяют один и тот же элемент $L_p(E)$, если $x(t) = y(t)$ для почти всех $t \in E$, т. е. x и y эквивалентны.

✍ Пусть E – измеримое по Лебегу подмножество $\mathbb{R}$.

$L_\infty(E)$ – пространство измеримых по Лебегу функций $x\colon E \to \mathbb{P}$ таких, что $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in E} |x(t)| < \infty$, с нормой

$$\|x\| = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in E} |x(t)|.$$

Функции x и y определяют один и тот же элемент $L_\infty(E)$, если $x(t) = y(t)$ для почти всех $t \in E$.

Величина ess sup (существенный супремум) функции x на множестве E определяется следующим образом:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in E} |x(t)| = \inf\big\{M > 0 : \operatorname{mes}\{t \in E\colon |x(t)| > M\} = 0\big\}.$$

В большинстве задач этого пособия $E = [a,b]$.

☛ Для пространств ℓ_p^m, ℓ_p, $\widetilde{L}_p[a,b]$, $L_p(E)$, если в задаче границы для индекса p не указаны явно, задачу нужно решить для всех p, $1 \leqslant p < \infty$. Нормы в этих пространствах будем часто обозначать $\|\cdot\|_p$.

Пространство $L_1(E)$ будем обозначать также $L(E)$.

✍ $\langle \mathbb{P}, \rho_{|\cdot|}\rangle$ – поле $\mathbb{P}$ с естественной метрикой

$$\rho_{|\cdot|}(x,y) = |x-y|.$$

✍ $\langle X, \rho_T\rangle$ – произвольное непустое множество X с *тривиальной* метрикой

$$\rho_T(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Тема 1. Метрика, норма

Определение 1.1. Пусть X – непустое множество. Отображение $\rho\colon X^2 \to \mathbb{R}$ называется *метрикой на* X, если для любых x, y, $z \in X$

1) $\rho(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;
3) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Определение 1.2. Если ρ – метрика на X, то пара $\langle X, \rho\rangle$ называется *метрическим пространством.*

Определение 1.3. Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ называется *нормой на* X, если для любых x, $y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{P}$

1) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Определение 1.4. Если $\|\cdot\|$ – норма на линейном пространстве X, то пара $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ называется *нормированным пространством.*

☛ Норму в пространстве X иногда будем обозначать $\|\cdot\|_X$, метрику – ρ_X. Там, где это не вызывает непонимания, вместо $\langle X, \rho\rangle$ или $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ будем писать метрическое (нормированное) пространство X.

Определение 1.5. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – метрическое пространство, $a \in X$, $r > 0$.

✓ Множество $B(a,r) = \{x \in X\colon \rho(x,a) < r\}$ называется *открытым шаром* с центром в точке a радиуса r.

✓ Множество $B[a,r] = \{x \in X\colon \rho(x,a) \leqslant r\}$ называется *замкнутым шаром* с центром в точке a радиуса r.

✓ Множество $S[a, r] = \{x \in X : \rho(x, a) = r\}$ называется *сферой* с центром в точке a радиуса r.

Определение 1.6. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство, $M \subset X$.

✓ Точка $x_0 \in M$ называется *внутренней точкой* множества M, если

$$\exists r > 0 \quad B(x_0, r) \subset M.$$

✓ Точка $x_0 \in X$ называется *предельной точкой* множества M, если

$$\forall r > 0 \quad M \cap \big(B(x_0, r) \setminus \{x_0\}\big) \neq \varnothing.$$

☛ Множество внутренних точек множества M обозначают $\overset{\circ}{M}$ и называют *внутренностью* множества M; множество предельных точек обозначают M'.

Определение 1.7. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство, $M \subset X$.

✓ Множество M называется *ограниченным* в $\langle X, \rho \rangle$, если оно содержится в некотором шаре. В частности, множество M называется *ограниченным* в нормированном пространстве $\langle X, \|\cdot\| \rangle$, если

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in M \quad \|x\| \leqslant r.$$

✓ Множество M называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней точкой этого множества, т. е.

$$\forall x \in M \ \exists r > 0 \quad B(x, r) \subset M.$$

✓ Множество M называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. если $M' \subset M$.

✓ Множество $\overline{M} = M \cup M'$ называется *замыканием* множества M.

✓ *Диаметром* множества M называется величина

$$\operatorname{diam} M = \sup\{\rho(x,y)\colon x, y \in M\}.$$

✓ *Расстоянием от точки $x_0 \in X$ до множества M* называется величина

$$\rho(x_0, M) = \inf\{\rho(x_0, y)\colon y \in M\}.$$

Если существует элемент $y \in M$ такой, что $\rho(x_0, y) = \rho(x_0, M)$, то говорят, что расстояние от x_0 до M *достигается* (*на элементе* y).

✓ *Расстоянием между множествами* $A, B \subset X$ называется величина

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x,y)\colon x \in A,\ y \in B\}.$$

Пример 1.1. Доказать замкнутость множества

$$M = \left\{x \in C^1[0,1]\colon x'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\right\}$$

в пространстве $C^1[0,1]$.

Решение. Пусть $x_0 \in M'$. Нам предстоит проверить, что $x_0'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x_\varepsilon \neq x_0$ такой, что $x_\varepsilon \in M \cap B(x_0, \varepsilon)$. В частности, для $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ существует $x_n \neq x_0$: $x_n \in M \cap B\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$. Имеет место свойство $x_n'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$ и справедливы оценки

$$\left|x_0'\left(\frac{1}{2}\right) - x_n'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \max_{t\in[0,1]} |x_0(t) - x_n(t)| + \\ + \max_{t\in[0,1]} |x_0'(t) - x_n'(t)| = \|x_0 - x_n\| < \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$x_0'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 = 2,$$

т. е. $x_0 \in M$. Таким образом, $M' \subset M$, т. е. множество M замкнуто.

Пример 1.2. Доказать, что множество

$$M = \{x \in \ell_1 \colon \xi_k > -1\}$$

открыто в пространстве ℓ_1 над полем $\mathbb{R}$.

Решение. Пусть $x_0 = \{\xi_k^0\} \in M$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k^0 = 0$ и $\xi_k^0 > -1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k > N \qquad \xi_k^0 > -\frac{1}{2},$$

а значит

$$a = \inf_k \xi_k^0 > -1.$$

Положим $r = a + 1$. Для всякого $x = \{\xi_k\} \in B(x_0, r)$ имеем

$$\xi_k^0 - \xi_k \leqslant |\xi_k^0 - \xi_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^0 - \xi_k| = \|x_0 - x\| < r.$$

Следовательно,

$$\xi_k = \xi_k - \xi_k^0 + \xi_k^0 > -r + \xi_k^0 = -1 + (\xi_k^0 - a) \geqslant -1,$$

т. е. $x \in M$, а значит $B(x_0, r) \subset M$. Итак, для всякого $x_0 \in M$ мы нашли $r > 0$ такое, что $B(x_0, r) \subset M$. Таким образом, множество M открыто.

Пример 1.3. Доказать, что множество

$$M = \{x \in C[a,b] \colon 3 \leqslant x(t) < 5\}$$

не открыто и не замкнуто в пространстве $C[a,b]$.

Решение. Множество M не является замкнутым в пространстве $C[a,b]$, если существует $x_0 \in C[a,b]$: $x_0 \in M'$ и $x_0 \notin M$. Очевидно, что $x_0(t) \equiv 5 \notin M$. Покажем, что $x_0 \in M'$. Для этого достаточно показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ $M \cap B(x_0, \varepsilon) \neq \varnothing$. Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию

$$x(t) = x_0(t) - \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 2\right\}, \quad t \in [a,b].$$

Ясно, что $x \in M$, так как $3 \leqslant x(t) < 5$. Из соотношений

$$|x(t) - x_0(t)| = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 2\right\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad t \in [a,b],$$

следует, что $\|x - x_0\| < \varepsilon$, т.е. $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Значит, $M \cap B(x_0, \varepsilon) \neq \varnothing$. Итак, множество M не замкнуто.

Рассмотрим функции $x_0(t) \equiv 3$ и $x(t) \equiv 3 - \frac{\varepsilon}{2}$, $t \in [a,b]$. Очевидно, что $x_0 \in M$, $x \notin M$ и $x \in B(x_0, \varepsilon)$, т.е. $B(x_0, \varepsilon) \not\subset M$. Следовательно, множество M не является открытым. ☙

Пример 1.4. Доказать, что множество

$$M = \{x \in \ell_\infty : \xi_k > -1\}$$

не является открытым в пространстве ℓ_∞.

Решение. Для доказательства достаточно найти точку $x_0 \in M$ такую, что для всякого $\varepsilon > 0$ шар $B(x_0, \varepsilon)$ содержит точки, не принадлежащие множеству M. Рассмотрим $x_0 = \left\{-\dfrac{k}{k+1}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Очевидно, что $x_0 \in \ell_\infty$ и $x_0 \in M$. Пусть $\varepsilon > 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$, рассмотрим $x_{k_0} = \{\xi_k^{k_0}\}$:

$$\xi_k^{k_0} = \begin{cases} -\dfrac{k}{k+1}, & k \neq k_0, \\ -1, & k = k_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $x_{k_0} \notin M$. Подберем k_0 так, чтобы $x_{k_0} \in B(x_0, \varepsilon)$, т.е.

$$\|x_0 - x_{k_0}\| = \sup_k \left|-\frac{k}{k+1} - \xi_k^{k_0}\right| = \left|1 - \frac{k_0}{k_0+1}\right| = \frac{1}{k_0+1} < \varepsilon.$$

Таким образом, найден $x_0 \in M$ и $x_0 \notin \overset{\circ}{M}$, следовательно, множество M не является открытым. ☙

☞ Доказать утверждения 1.1–1.5.

1.1. Если ρ – метрика на множестве X, то

$$\forall\, x, y \in X \quad \rho(x, y) \geqslant 0.$$

1.2. Если $\|\cdot\|$ – норма на линейном пространстве X, то

$$\forall\, x \in X \quad \|x\| \geqslant 0.$$

1.3. Нормированное пространство $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ является метрическим пространством с метрикой

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

1.4. В метрическом пространстве $\langle X, \rho\rangle$ справедливо неравенство четырехугольника:

$$\forall\, x, y, u, v \in X \quad |\rho(x, u) - \rho(y, v)| \leqslant \rho(x, y) + \rho(u, v).$$

1.5. В нормированном пространстве $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ справедливо неравенство

$$\forall\, x, y \in X \quad \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

1.6. Может ли нормированное пространство
а) состоять из одного элемента? б) быть счетным?

1.7. Пусть $X \neq \varnothing$. Можно ли на нем ввести метрику?

1.8. Пусть X – линейное пространство. Можно ли на нем ввести норму?

1.9. Пусть $\rho : X^2 \to \mathbb{R}$ -- метрика на множестве X. Доказать, что следующие функции тоже являются метриками на X:

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}, \qquad \rho_2(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\},$$

$$\rho_3(x,y) = \ln(1+\rho(x,y)).$$

1.10. Доказать, что функция

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 0, & n = m, \\ 1 + \dfrac{1}{n+m}, & n \neq m, \end{cases}$$

задает метрику на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

1.11. В множестве X всевозможных последовательностей натуральных чисел для элементов

$$x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}, \qquad y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$$

обозначим через $k_0(x,y)$ наименьший индекс, при котором $\xi_k \neq \eta_k$. Доказать, что

а) формула $\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1 + \dfrac{1}{k_0(x,y)}, & x \neq y, \end{cases}$

задает метрику на X;

б) аксиома треугольника выполняется в X в усиленной форме:

$$\rho(x,z) \leqslant \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\};$$

в) если $\rho(x,y) \neq \rho(y,z)$, то

$$\rho(x,z) = \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}.$$

1.12. Пусть функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}$. Каким условиям она должна удовлетворять, чтобы формула

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

задавала метрику на $\mathbb{R}$?

1.13. Указать необходимое и достаточное условие на отображение $f\colon X \to \mathbb{P}$, при котором формула из задачи 1.12 задает метрику на X.

1.14. При каких условиях на функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отображение $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такое, что

$$\rho(x, y) = \left| \int_x^y f(t)\, dt \right|,$$

будет метрикой на $\mathbb{R}$? Рассмотреть случаи

а) $f \in C(\mathbb{R})$; б)★ $\forall r > 0 \quad f \in L_1[-r, r]$.

1.15. Проверить справедливость аксиом метрики в линейном пространстве s. Доказать, что пространство s ненормируемо, т. е. в нем нельзя ввести норму так, чтобы выполнялось равенство $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

1.16. Является ли линейное пространство $\mathbb{P}^2$ нормированным, если для $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{P}^2$

а) $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|} + \sqrt{|\xi_2|}$;

б) $\|x\| = \sqrt[p]{|\xi_1|^p + |\xi_2|^p}$ при $0 < p < 1$;

в) $\|x\| = |\xi_1 - \xi_2| + |\xi_1|$;

г) $\|x\| = \max\{|\xi_1 + 2\xi_2|, |\xi_1 - \xi_2|\}$?

1.17. Пусть $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$. При каких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ следующие отображения задают норму на $\mathbb{R}^2$:

а) $\|x\| = \alpha|\xi_1| + \beta|\xi_2|$;

б) $\|x\| = \sqrt{\alpha^2\xi_1^2 + \beta^2\xi_2^2}$;

в) $\|x\| = \max\{\alpha|\xi_1|, \beta|\xi_2|\}$?

Построить шары $B[0,1]$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ с этими нормами.

1.18. Построить шары $B[0,1]$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, если для $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ нормы определены следующим образом:

а) $\|x\| = \max\{\sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2}, |\xi_3|\}$;

б) $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2} + |\xi_3|$;

в) $\|x\| = \max\left\{2|\xi_1|, \dfrac{1}{3}|\xi_2|, |\xi_3|\right\}$;

г) $\|x\| = 2|\xi_1| + \dfrac{1}{3}|\xi_2| + |\xi_3|$;

д) $\|x\| = \sqrt{4|\xi_1|^2 + \dfrac{1}{9}|\xi_2|^2 + |\xi_3|^2}$.

1.19. Пусть $x \in \ell_p^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Доказать, что

$$\|x\|_{\ell_\infty^n} = \lim_{p\to\infty} \|x\|_{\ell_p^n}.$$

1.20. Доказать, что в пространстве c_0

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k| = \max_k |\xi_k|,$$

т. е. верхняя грань обязательно достигается, а в пространствах c и m она может не достигаться.

1.21. Можно ли в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций определить норму следующим образом:

а) $\|x\| = |x(b) - x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

б) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

в) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

г) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \int_a^b |x(t)|\,dt;$

д) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$?

1.22. Можно ли в линейном пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций определить норму следующим образом:

а) $\|x\| = |x(a)| + |x'(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|;$

б) $\|x\| = |x(a)| + |x(b)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|;$

в) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|;$

г) $\|x\| = |x(a)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \left(\int_a^b |x''(t)|^2\,dt\right)^{1/2};$

д) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$?

1.23. Доказать, что в любом метрическом пространстве $\langle X,\rho\rangle$

$$\forall\, x\in X\ \forall\, r>0 \quad 0\leqslant \operatorname{diam} B(x,r)\leqslant 2r.$$

Привести пример метрического пространства $\langle X,\rho\rangle$ и такого элемента $x_0\in X$, что

$$\operatorname{diam} B(x_0,1) = \frac{1}{2}.$$

1.24. Доказать, что в любом нормированном пространстве X

$$\forall\, x\in X\ \forall\, r>0 \quad \operatorname{diam} B(x,r) = 2r.$$

1.25. Доказать, что в нормированном пространстве из условия $B(x_1,r_1)\subset B(x_2,r_2)$ следуют неравенства $r_1\leqslant r_2$ и $\|x_1-x_2\|\leqslant r_2-r_1$.

1.26. Привести пример метрического пространства, в котором существуют шары $B(x_1, r_1)$ и $B(x_2, r_2)$ такие, что $r_1 < r_2$ и шар $B(x_2, r_2)$ лежит строго внутри шара $B(x_1, r_1)$.

1.27. Привести пример метрического пространства, в котором существуют шары,

а) имеющие несколько центров;

б) совпадающие с множеством всех своих центров.

1.28. Возможно ли, чтобы $B(x_1, r) = B(x_2, r)$ и $x_1 \neq x_2$ в нормированном пространстве X?

☞ Доказать справедливость утверждений 1.29–1.34 в метрическом пространстве $\langle X, \rho \rangle$ для $M, N \subset X$, $x \in X$.

1.29. Если M – ограниченное множество, то $\overline{M}$ – ограниченное множество и $\operatorname{diam} \overline{M} = \operatorname{diam} M$.

1.30. Множество M' замкнуто, т. е. $(M')' \subseteq M'$. Возможно ли здесь строгое включение?

1.31. Если $M \subset N$, то $\overline{M} \subset \overline{N}$.

1.32. $\rho(x, M) = 0 \iff x \in \overline{M}$.

1.33. $\rho(x, M) = \rho(x, \overline{M})$.

1.34. $\rho(M, N) = \rho(M, \overline{N}) = \rho(\overline{M}, N) = \rho(\overline{M}, \overline{N})$.

1.35. Пусть для множеств M, N из метрического пространства $\langle X, \rho \rangle$ выполняется соотношение $\overline{M} \subset \overline{N}$. Следует ли отсюда, что $M \subset N$?

1.36. Пусть M и N замкнуты в метрическом пространстве $\langle X, \rho \rangle$. Возможно ли, что $M \cap N = \varnothing$ и $\rho(M, N) = 0$?

1.37. В метрическом пространстве $\langle X, \rho_T \rangle$ описать все открытые и замкнутые множества.

☞ Доказать справедливость утверждений 1.38–1.41 в нормированном пространстве X для $x \in X$, $r > 0$.

1.38. $B[x,r]$, $S[x,r]$ – замкнутые множества.

1.39. $B(x,r)$ – открытое множество.

1.40. $\overset{\circ}{B}[x,r] = B(x,r)$.

1.41. $\overline{B(x,r)} = B[x,r]$.

1.42. Верны ли утверждения 1.38–1.41 в метрическом пространстве?

1.43. Описать все подмножества нормированного пространства X, которые являются одновременно открытыми и замкнутыми.

1.44. Будут ли следующие множества ограниченными, открытыми, замкнутыми в пространстве ℓ_1^2 над полем $\mathbb{R}$:

а) $M = [0,1] \times \mathbb{Q}$;

б) $M = \left\{\dfrac{2n-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \times (0,1)$;

в) $M = \big\{(\xi_1,\xi_2)\colon \min\{|\xi_1|, 5|\xi_2|\} = 1\big\}$;

г) $M = \big\{(\xi_1,\xi_2)\colon |\xi_1| < 1,\ |\xi_2| > 2\big\}$;

д) $M = \big\{(\xi_1,\xi_2)\colon -4 < \xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1 + 4\xi_2 \leqslant 4\big\}$?

1.45. Будут ли следующие множества ограниченными, открытыми, замкнутыми в $\langle X, \|\cdot\|\rangle$, $\mathbb{P} = \mathbb{R}$:

а) $M = \big\{x \in X\colon e^t < x(t) < 4\big\}$, $\quad X = C[0,1]$;

б) $M = \big\{x \in X\colon 0 < \xi_k < 2\big\}$, $\quad X = c_0$;

в) $M = \left\{x \in X\colon \displaystyle\int_0^1 x(t)\,dt = 1\right\}$, $\quad X = L_1[0,1]$;

г) $M = \big\{x \in X\colon x(0) = 1\big\}$, $\quad X = \widetilde{L}_1[0,1]$;

д) $M = \{x \in X : \xi_k \geqslant 0\}, \quad X = \ell_2;$

е) $M = \left\{x \in X : \xi_k < \dfrac{k+1}{k}\right\}, \quad X = \ell_1?$

1.46. Будут ли следующие множества открытыми, замкнутыми в пространстве $C[a,b]$:

а) $P_k = \left\{p : p = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j t^j,\ 0 \leqslant n \leqslant k\right\};$

б) $Q_k = \left\{p : p = \sum\limits_{j=0}^{k} c_j t^j,\ c_k \neq 0\right\};$

в) $P = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} P_k?$

1.47. Пусть $x_0 \in C[a,b]$, $\mathbb{P} = \mathbb{R}$. Могут ли множества

$$M = \{t \in [a,b] : x_0(t) < 1\},$$

$$N = \{t \in [a,b] : x_0(t) \leqslant 1\}$$

быть открытыми, замкнутыми в $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$?

1.48. Пусть $A \subset \mathbb{P}$. Будет ли множество

$$M_A = \{x \in C[a,b] : \forall\, t \in [a,b] \quad x(t) \in A\}$$

а) открытым в пространстве $C[a,b]$, если множество A открыто в пространстве $\langle \mathbb{P}, \rho_{|\cdot|} \rangle$;

б) замкнутым в пространстве $C[a,b]$, если множество A замкнуто в пространстве $\langle \mathbb{P}, \rho_{|\cdot|} \rangle$?

1.49. Доказать, что

а) параллелепипед $M = \{x \in \ell_2 : |\xi_k| \leqslant \alpha_k\}$ ограничен в пространстве ℓ_2 тогда и только тогда, когда $\{\alpha_k\} \in \ell_2$;

б) если все $\alpha_k \neq 0$, то эллипсоид

$$M = \left\{x \in \ell_2 \colon \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\xi_k}{\alpha_k}\right|^2 \leqslant 1\right\}$$

ограничен в пространстве ℓ_2 тогда и только тогда, когда $\{\alpha_k\} \in \ell_\infty$.

1.50. Доказать, что множество c_0 замкнуто в пространстве c, множество c замкнуто в пространстве ℓ_∞.

Тема 2. Сходимость и непрерывность в метрическом пространстве. Сравнение метрик и норм

Определение 2.1. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется *сходящейся*, если существует точка $x_0 \in X$ такая, что

$$\rho(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Определение 2.2. Пусть ρ_1, ρ_2 – метрики, заданные на одном множестве X. Говорят, что

✓ ρ_1 *не слабее* ρ_2 (ρ_2 *не сильнее* ρ_1), если из сходимости последовательности в пространстве $\langle X, \rho_1\rangle$ следует ее сходимость в пространстве $\langle X, \rho_2\rangle$, т. е.

$$\rho_1(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \rho_2(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

✓ ρ_1 *сильнее* ρ_2 (ρ_2 *слабее* ρ_1), если ρ_1 не слабее ρ_2 и

$$\exists\ \{x_n\}: \quad \rho_2(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{но} \quad \rho_1(x_n, x_0) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

✓ ρ_1 и ρ_2 *эквивалентны*, если ρ_1 не слабее ρ_2 и ρ_2 не слабее ρ_1, т. е.

$$\rho_1(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \rho_2(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Эти понятия переносятся и на нормы через метрики, ими порождаемые.

Определение 2.3. Пусть $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ – две нормы, заданные на одном линейном пространстве X. Говорят, что

✓ $\|\cdot\|_1$ *не слабее* $\|\cdot\|_2$ ($\|\cdot\|_2$ *не сильнее* $\|\cdot\|_1$) и пишут $\|\cdot\|_1 \succeq \|\cdot\|_2$, ($\|\cdot\|_2 \preceq \|\cdot\|_1$), если

$$\|x_n - x_0\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - x_0\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

✓ $\|\cdot\|_1$ *сильнее* $\|\cdot\|_2$ ($\|\cdot\|_2$ *слабее* $\|\cdot\|_1$) и пишут $\|\cdot\|_1 \succ \|\cdot\|_2$, ($\|\cdot\|_2 \prec \|\cdot\|_1$), если $\|\cdot\|_1 \succeq \|\cdot\|_2$ и

$$\exists\,\{x_n\}: \quad \|x_n - x_0\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{но} \quad \|x_n - x_0\|_1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0;$$

✓ $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ *эквивалентны*, если

$$\|x_n - x_0\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \|x_n - x_0\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Определение 2.4. Метрические пространства X и Y называются *гомеоморфными*, если существует биекция τ X на Y такая, что последовательность сходится в пространстве X тогда и только тогда, когда ее образ при биекции τ сходится в пространстве Y.

Теорема 2.1. *В конечномерном нормированном пространстве сходимость покоординатная.*

Пример 2.1. Сходится ли последовательность

$$x_n(t) = te^{-nt}$$

в пространствах а) $C[0,1]$; б) $C^1[0,1]$?

Решение. а) Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x в пространстве $C[0,1]$ эквивалентна равномерной сходимости последовательности функций $\{x_n(t)\}$ к функции $x(t)$ на отрезке $[0,1]$ (см. задачу 2.7). Значит, если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x$, то $x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$ поточечно на $[0,1]$. Найдем поточечный предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} te^{-nt} = 0 = x(t).$$

Функция $x(t) \equiv 0$ принадлежит пространству $C[0,1]$. Проверим, сходится ли x_n к 0 в этом пространстве:

$$\|x_n - 0\|_{C[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} |te^{-nt}| = \frac{1}{n}\cdot e^{-n\cdot\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, x_n сходится к 0 в пространстве $C[0,1]$.

б) Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x в пространстве $C^1[0,1]$ эквивалентна равномерной сходимости на отрезке $[0,1]$ последовательности функций $\{x_n(t)\}$ к функции $x(t)$ и последовательности функций $\{x'_n(t)\}$ к функции $x'(t)$ (см. задачу 2.9). Значит, если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x$, то $x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$ поточечно на $[0,1]$. Так как поточечно x_n сходится к 0 (см. п. «а») и $0 \in C^1[0,1]$, осталось проверить, сходится ли x_n к 0 в этом пространстве:

$$\|x_n - 0\|_{C^1[0,1]} = \max_{t\in[0,1]} |te^{-nt}| + \max_{t\in[0,1]} |(1-nt)e^{-nt}| =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot e^{-n\cdot\frac{1}{n}} + \left|1 - n\cdot\frac{2}{n}\right| e^{-n\cdot\frac{2}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-2} \neq 0.$$

Таким образом, в пространстве $C^1[0,1]$ последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела. ✌

Пример 2.2. Исследовать на сходимость последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < -\dfrac{1}{n}, \\ nt, & |t| \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 1, & \dfrac{1}{n} < t \leqslant 1, \end{cases}$$

в пространствах а) $C[-1,1]$; б) $L_p[-1,1]$, $1 \leqslant p < \infty$; в) $\widetilde{L}_1[-1,1]$.

Решение. а) Найдем поточечный предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & 0 < t \leqslant 1, \end{cases} = \operatorname{sgn} t.$$

Поскольку $x \notin C[-1,1]$, последовательность не сходится в этом пространстве.

б) Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому элементу y в пространстве $L_p[-1,1]$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, которая сходится к y почти всюду на $[-1,1]$ (см. задачу 2.10). Но последовательность $\{x_n\}$ сама поточечно сходится к $x(t) = \operatorname{sgn} t \in L_p[-1,1]$, а значит, и любая ее подпоследовательность поточечно сходится к x. Отсюда следует, что если $\{x_n\}$ сходится по норме в $L_p[-1,1]$ к элементу y, то $y = x$ в $L_p[-1,1]$ (см. задачу 2.11). Остается проверить, сходится ли $\{x_n\}$ к x по норме. Имеем

$$\|x_n - x\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |x_n(t) - x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |nt - \operatorname{sgn} t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int_{0}^{\frac{1}{n}} 2^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{4}{\sqrt[p]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Таким образом, в пространстве $L_p[-1,1]$ последовательность $\{x_n\}$ сходится.

в) Покажем, что в пространстве $\widetilde{L}_1[-1,1]$ последовательность $\{x_n\}$ не сходится. Допустим, что $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ в $\widetilde{L}_1[-1,1]$. Тогда для $x(t) = \operatorname{sgn} t$ имеем

$$0 \leqslant \|x - x_0\|_1 \leqslant \|x - x_n\|_1 + \|x_n - x_0\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отсюда следует, что $\|x - x_0\|_1 = 0$. Из непрерывности функций x и x_0 на множестве $[-1,0) \cup (0,1]$ и неравенств

$$0 \leqslant \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} |x(t) - x_0(t)|\, dt \leqslant \int_{-1}^{1} |x(t) - x_0(t)|\, dt = 0,$$

$$0 \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1} |x(t) - x_0(t)|\, dt \leqslant \int_{-1}^{1} |x(t) - x_0(t)|\, dt = 0,$$

справедливых для всех $n \in \mathbb{N}$, следует, что

$$x_0(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant t < 0, \\ 1, & 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Но тогда функция x_0 не является непрерывной на отрезке $[-1,1]$, т.е. $x_0 \notin \widetilde{L}_1[-1,1]$. Итак, последовательность $\{x_n\}$ не сходится в пространстве $\widetilde{L}_1[-1,1]$. ✌

Пример 2.3. Исследовать на сходимость последовательность $\{x_n\} = \{\xi_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$,

$$\xi_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}, & k \leqslant n, \\ \sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\dfrac{1}{\sqrt[3]{k+1}}, & k > n, \end{cases}$$

в пространствах c_0, c, ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Решение. Проверим, каким из этих пространств принадлежит $\{x_n\}$. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \xi_{nk} = \lim_{\substack{k>n \\ k\to\infty}} \xi_{nk} = \lim_{k\to\infty}\left(\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right) = 0.$$

Значит, $\{x_n\} \subset c_0 \subset c \subset l_\infty$.

Далее, для $k > n$ имеем

$$|\xi_{nk}| = \left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right| =$$

$$= 2\left|\sin\frac{\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}}{2\sqrt[3]{k+1}\sqrt[3]{k}}\right| \cdot \left|\cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} + \frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right)\right| \underset{k\to\infty}{\sim}$$

$$\sim 2\sin\frac{1}{2\sqrt[3]{k(k+1)}\left(\sqrt[3]{(k+1)^2} + \sqrt[3]{k(k+1)} + \sqrt[3]{k^2}\right)} \sim$$

$$\sim \frac{1}{3k^{4/3}}.$$

Так как $x_n \in \ell_p \iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_{nk}|^p \iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |\xi_{nk}|^p \iff$ сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{4p}{3}}$, а сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{4p}{3}}$ при $p \geqslant 1$ конечна, то $x_n \in \ell_p$.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ принадлежит пространствам $c_0, c, \ell_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$. Из сходимости по норме в этих пространствах следует покоординатная сходимость. Найдем покоординатный предел, если он существует.

Для всякого фиксированного k имеем

$$\lim_{n\to\infty} \xi_{nk} = \lim_{\substack{n > k \\ n \to \infty}} \xi_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = \xi_k.$$

Значит, покоординатно

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

и, если x_n сходится по норме, то сходится к этому x.

Проверим, каким пространствам принадлежит x. Так как

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{k}} = 0,$$

то $x \in c_0 \subset c \subset \ell_\infty$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$ сходится $\iff p > 3$, значит, $x \in \ell_p, 3 < p < \infty$ и $x \notin \ell_p, 1 \leqslant p \leqslant 3$. Следовательно, при $1 \leqslant p \leqslant 3$ последовательность $\{x_n\}$ не сходится в ℓ_p.

В пространствах c_0, c, ℓ_∞ последовательность $\{x_n\}$ сходится к x, поскольку справедливы следующие соотношения:

$$\|x_n - x\| = \sup_{k\in\mathbf{N}} |\xi_{nk} - \xi_k| = \sup_{k>n} \left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{k>n}\left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right| + \sup_{k>n}\left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right| + \sup_{k>n}\left|\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

В пространствах ℓ_p, $3 < p < \infty$, сходимость тоже есть, поскольку справедливы соотношения

$$\|x_n - x\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_{nk} - \xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Обе последние суммы стремятся к нулю при $n \to \infty$ как остатки сходящихся рядов, так как

$$\left|\sin\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin\frac{1}{\sqrt[3]{k+1}}\right| \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{3k^{4/3}},$$

а ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4p/3}}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{p/3}}$ при $p > 3$ сходятся. ✌

Пример 2.4. Исследовать на сходимость последовательность

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{n}, \\ t^{-1/\pi}, & \dfrac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

в пространствах $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < \infty$.

Решение. Поточечно последовательность функций $\{x_n(t)\}$ сходится к функции

$$x(t) = \begin{cases} t^{-1/\pi}, & 0 < t \leqslant 1, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Так как $x \notin L_p[0,1]$ при $\dfrac{p}{\pi} \geqslant 1$, то последовательность $\{x_n\}$ не сходится в пространствах $L_p[0,1]$ при $p \geqslant \pi$.

Пусть $1 \leqslant p < \pi$. Тогда $x \in L_p[0,1]$. Покажем, что $\{x_n\}$ сходится к x в этих пространствах. Действительно, x_n и x удовлетворяют следующим условиям:

1) $|x(\cdot)|^p, |x_n(\cdot) - x(\cdot)|^p \in L_1[0,1]$;
2) $|x_n(t) - x(t)|^p \leqslant |x(t)|^p, \quad t \in [0,1]$;
3) $|x_n(t) - x(t)|^p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad t \in [0,1]$.

Применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем

$$\|x_n - x\|^p = \int_0^1 |x_n(t) - x(t)|^p \, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 0 \, dt = 0.$$ ✌

☞ Доказать справедливость утверждений 2.1–2.8.

2.1. Пусть X – метрическое пространство, $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$, $x, y, x', x'' \in X$. Тогда

а) $\left(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x' \ \text{ и } \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x''\right) \implies x' = x''$;

б) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \implies \forall \{x_{n_k}\} \ \ x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$;

в) $\{x_n\}$ сходится $\implies$ $\{x_n\}$ ограничена;

г) $\left(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \ \text{ и } \ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y\right) \implies$
$\rho(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(x, y)$.

2.2. Пусть X – нормированное пространство, $x, y \in X$, $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$, $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{P}$, $\lambda \in \mathbb{P}$. Тогда

а) $\left(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \ \text{ и } \ y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y\right) \implies$
$x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x + y$;

б) $\left(\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \ \text{ и } \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x\right) \implies$
$\lambda_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda x$;

в) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \quad \Longrightarrow \quad \|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x\|$.

2.3. Сходимость последовательности в пространствах s и ℓ_p^m, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, эквивалентна покоординатной сходимости.

2.4. Конечномерные нормированные пространства X и Y одинаковой размерности и над одним полем *линейно гомеоморфны*, т. е. существует линейная биекция $\tau\colon X \to Y$ такая, что последовательность сходится в пространстве X тогда и только тогда, когда ее образ при биекции τ сходится в пространстве Y.

2.5. Любые две нормы на конечномерном линейном пространстве эквивалентны.

2.6. Сходимость последовательности в пространствах m, c_0, c равномерна по координатам.

2.7. Сходимость последовательности в пространстве $C[a,b]$ эквивалентна равномерной сходимости на отрезке $[a,b]$.

2.8. Сходимость последовательности $\{x_n\}$, $x_n = \{\xi_{nk}\}$ к элементу $x = \{\xi_k\}$ в пространствах ℓ_p эквивалентна выполнению следующих условий:

1) $\forall k \quad \xi_{nk} \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi_k$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_0(\varepsilon) \; \forall N \geqslant N_0(\varepsilon) \; \forall n \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |\xi_{nk}|^p < \varepsilon^p$.

2.9. Что означает сходимость последовательности в пространствах $C^k[a,b]$, $k \geqslant 1$?

2.10. Доказать, что если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в пространстве $L_1[a,b]$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $x_{n_k}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} x(t)$ почти всюду на $[a,b]$. Верно ли это утверждение в $L_p[a,b]$, $p > 1$?

2.11. Доказать, что если $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в пространстве $L_p[a,b]$ и существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такая, что $x_{n_k}(t) \xrightarrow[k\to\infty]{} y(t)$ почти всюду на $[a,b]$, то $x = y$ в $L_p[a,b]$.

2.12. В каких из пространств ℓ_p, c_0, c, m сходятся следующие последовательности:

а) $x_n = (1, 2, \ldots, n, 0, 0\ldots)$;

б) $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$;

в) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n^\alpha}}_{n}, 0, 0, \ldots\right)$;

г) $x_n = \left(1, \frac{1}{\ln 2}, \ldots, \frac{1}{\ln n}, 0, 0, \ldots\right)$;

д) $x_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, 1, 1, \ldots\right)$;

е) $x_n = \left(\frac{\sin 1}{2}, \frac{2\sin 2}{3}, \ldots, \frac{n\sin n}{n+1}, \sin(n+1), \sin(n+2), \ldots\right)$;

ж) $x_n = \left(1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n^\alpha}, 0, 0, \ldots\right)$?

2.13. Сходятся ли в пространстве $C[0,1]$ следующие последовательности:

а) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$; б) $x_n(t) = t^n - t^{2n}$?

2.14. Сходятся ли следующие последовательности в пространствах $C[0,1]$, $C^1[0,1]$, $L_1[0,1]$, $\widetilde{L}_1[0,1]$:

а) $x_n(t) = \frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1}$; б) $x_n(t) = \frac{t^n}{n}$;

в) $x_n(t) = \operatorname{arctg}\left(n\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)$; г) $x_n(t) = ne^{-nt}$?

2.15. Доказать, что последовательность $x_n(t) = \sin nt$ не сходится в пространстве $L_2[a, b]$.

2.16. Пусть X – нормированное пространство. Доказать, что

$$\|\cdot\|_1 \succeq \|\cdot\|_2 \iff \exists\, C > 0\ \forall\, x \in X \quad \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1.$$

2.17. Доказать, что $\ell_p \subseteq \ell_q$, если $1 \leqslant p < q < \infty$ и для $x \in \ell_p$ $\|x\|_{\ell_p} \geqslant \|x\|_{\ell_q}$.

2.18. Показать, что

$$\ell_1 \subseteq \ell_p \subseteq \ell_q \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell_\infty, \qquad 1 < p < q < \infty.$$

2.19. Привести примеры, подтверждающие, что вложения в предыдущей задаче строгие:

$$\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty, \qquad 1 < p < q < \infty.$$

2.20. Доказать, что

$$\|\cdot\|_{\ell_1} \succeq \|\cdot\|_{\ell_p} \succeq \|\cdot\|_{\ell_q} \succeq \|\cdot\|_{\ell_\infty}, \qquad 1 < p < q < \infty.$$

2.21. Привести примеры, подтверждающие, что отношения в предыдущей задаче строгие, т. е.

$$\|\cdot\|_{\ell_1} \succ \|\cdot\|_{\ell_p} \succ \|\cdot\|_{\ell_q} \succ \|\cdot\|_{\ell_\infty}, \qquad 1 < p < q < \infty.$$

2.22. Доказать, что $L_q[a, b] \subseteq L_p[a, b]$, если $1 \leqslant p < q < \infty$ и для $x \in L_q[a, b]$

$$\left(\int_a^b \frac{|x(t)|^p}{b-a}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b \frac{|x(t)|^q}{b-a}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2.23. Показать, что

$$C^k[a,b] \subseteq C[a,b] \subseteq L_q[a,b] \subseteq L_p[a,b] \subseteq L_1[a,b],$$

$$1 < p < q < \infty.$$

2.24. Привести примеры, подтверждающие, что вложения в предыдущей задаче строгие:

$$C^k[a,b] \subset C[a,b] \subset L_q[a,b] \subset L_p[a,b] \subset L_1[a,b],$$

$$1 < p < q < \infty.$$

2.25. Доказать, что

$$\|\cdot\|_{C^k[a,b]} \succeq \|\cdot\|_{C[a,b]} \succeq \|\cdot\|_{L_q[a,b]} \succeq \|\cdot\|_{L_p[a,b]} \succeq \|\cdot\|_{L_1[a,b]},$$

$$1 < p < q < \infty.$$

2.26. Привести примеры, подтверждающие, что отношения в предыдущей задаче строгие, т. е.

$$\|\cdot\|_{C^k[a,b]} \succ \|\cdot\|_{C[a,b]} \succ \|\cdot\|_{L_q[a,b]} \succ \|\cdot\|_{L_p[a,b]} \succ \|\cdot\|_{L_1[a,b]},$$

$$1 < p < q < \infty.$$

2.27. Сравнить нормы $\|\cdot\|_\infty$ и $\|\cdot\|_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ на множестве $L_\infty[a,b]$.

2.28. Исследовать на сходимость последовательности

а) $x_n = \{\xi_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$, $\quad \xi_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k+1}}, & 1 \leqslant k \leqslant n, \\ \dfrac{1}{\sqrt{k+2}}, & k > n, \end{cases}$

в пространствах из задачи 2.18;

б) $x_n(t) = n\left(\sqrt{t + \dfrac{1}{n}} - \sqrt{t}\right)$ в пространствах из задачи 2.23, если $[a,b] = [0,1]$;

в) $x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{n}(1-nt), & 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} < t \leqslant 1, \end{cases}$

в пространствах $L_p[0,1]$.

2.29. ★ Доказать, что последовательность $x_n(t) = \sin nt$ не сходится в пространствах $L_p[0,1]$.

2.30. а) При каких значениях α и p следующие последовательности сходятся к нулю в пространствах $L_p[0,1]$:

$$x_n(t) = n^\alpha e^{-nt}, \qquad y_n(t) = n^\alpha \sin nt?$$

б) При каких значениях α и p эти последовательности имеют предел в пространствах $L_p[0,1]$?

2.31. В пространстве $C^m[0,1]$ сравнить нормы

$$\|x\|_0 = \sum_{n=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} |x^{(n)}(t)|,$$

$$\|x\|_1 = \max_{0\leqslant n\leqslant m} \left(\max_{t\in[a,b]} |x^{(n)}(t)| \right),$$

$$\|x\|_2 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

2.32. Доказать эквивалентность следующих норм:

а) в пространстве непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций:

$$\|x\|_0 = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|,$$

$$\|x\|_1 = |x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|,$$

$$\|x\|_2 = \max_{t\in[a,b]} \left(|x(t)| + |x'(t)|\right),$$

$$\|x\|_3 = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \int_a^b |x(t)|\,dt;$$

б) в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций:

$$
\begin{aligned}
\|x\|_0 &= \sum_{n=0}^{2} \max_{t\in[a,b]} |x^{(n)}(t)|,\\
\|x\|_1 &= |x(a)| + |x'(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x''(t)|,\\
\|x\|_2 &= |x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x''(t)|,\\
\|x\|_3 &= \max_{t\in[a,b]} |x''(t)| + \left(\int_a^b |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2},\\
\|x\|_4 &= \max_{t\in[a,b]} |x'(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x''(t)|.
\end{aligned}
$$

2.33. Проверить, что отображения

$$
\begin{aligned}
\rho_1(x, y) &= \ln(1 + |x - y|),\\
\rho_2(x, y) &= |x - y + \operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn} y|,\\
\rho_3(x, y) &= \left|\int_x^y e^{-t^2}\, dt\right|
\end{aligned}
$$

из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$ являются метриками. Сравнить их.

2.34. На множестве ограниченных последовательностей сравнить метрики ρ_s и ρ_∞, где

$$
\begin{aligned}
\rho_s(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|},\\
\rho_\infty(x, y) &= \sup_k |\xi_k - \eta_k|.
\end{aligned}
$$

2.35. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – эквивалентные нормы на линейном пространстве X. Доказать, следующие утверждения:

а) если множество $M \subset X$ открыто (замкнуто) в смысле одной из этих норм, то M открыто (замкнуто) в смысле другой;

б) если множество $M \subset X$ ограничено в смысле одной из этих норм, то M ограничено в смысле другой.

2.36. Пусть на множестве X заданы две эквивалентные метрики. Какие из свойств множества $M \subset X$ сохраняются при переходе от одной метрики к другой: открытость, замкнутость, ограниченность?

2.37. Описать все метрические пространства, в которых всякое открытое множество является замкнутым.

Тема 3. Плотность, сепарабельность

Определение 3.1. Пусть M и N – подмножества метрического пространства X. Множество N называется *плотным* в множестве M, если $M \subseteq \overline{N}$. В частности, множество N называется *всюду плотным* в метрическом пространстве X, если $\overline{N} = X$.

Определение 3.2. Множество M называется *нигде не плотным* в метрическом пространстве X, если в $\overline{M}$ нет внутренних точек, т. е. $\overset{\circ}{\overline{M}} = \varnothing$.

Определение 3.3. Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем есть не более чем счетное всюду плотное множество.

Пример 3.1. Пусть N – множество алгебраических многочленов с нулевым свободным членом,

$$M = \{x \in C[0,1] \colon x(0) = 0\}.$$

Доказать, что множество N плотно в множестве M из пространства $C[0,1]$ над $\mathbb{R}$.

Решение. Множество N будет плотным в M, если для всякого $x \in M$ и всякой функции $\varepsilon > 0$ найдется $x_\varepsilon \in N \cap B(x,\varepsilon)$ или, что то же самое, для всякой $x \in M$ найдется последовательность $x_n \in N$ такая, что $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в пространстве $C[0,1]$.

Пусть $x \in M$. По теореме Вейерштрасса существует последовательность многочленов $\{p_n\}$, равномерно сходящаяся к x, т. е. сходящаяся по норме пространства $C[0,1]$ (см. задачу 2.7). Рассмотрим последовательность сдвинутых многочленов $x_n(t) = p_n(t) - p_n(0)$. Ясно, что $x_n(0) = 0$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ также сходится к x в $C[0,1]$. Действительно,

$$\|x_n - x\| = \|p_n - p_n(0) - x\| = \|p_n - x - (p_n(0) - x(0))\| \leqslant \\ \leqslant \|p_n - x\| + \|p_n(0) - x(0)\| \leqslant 2\|p_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Последовательность $\{x_n\}$ можно построить, например, следующим образом. Известно [2, гл. 4, § 5, теорема 1] что для всякой функции $x \in C[0,1]$ последовательность ее многочленов Бернштейна

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k}, \quad n \geqslant 0,$$

равномерно на $[0,1]$ сходится к x.

Далее, пусть $x \in M$, а $\{B_n\}$ – ее многочлены Бернштейна. Тогда

$$B_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k t^k (1-t)^{n-k} \in N,$$

так как $x\left(\frac{0}{n}\right) = 0$, т.е. $B_n \in N$. При этом $B_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|} x$, так как сходимость по норме в $C[0,1]$ эквивалентна равномерной сходимости. ☙

Пример 3.2. Доказать, что множество

$$M = \{x \in C[a,b] \colon x(a) = x(b)\}$$

всюду плотно в пространстве $L_p[a,b]$ над $\mathbb{R}$.

Решение. Множество M всюду плотно в пространстве $L_p[a,b]$, если $\overline{M} = L_p[a,b]$. Следовательно, нужно показать, что для всякого элемента $x \in L_p[a,b]$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует функция $z \in M$ такая, что $\|x - z\|_p < \varepsilon$.

Возьмем $x \in L_p[a,b]$ и $\varepsilon > 0$. Так как множество $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций плотно в пространстве $L_p[a,b]$ (см. задачу 3.6), то для x существует функция

$y \in C[a,b]$ такая, что $\|x-y\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Для y строим непрерывную на $[a,b]$ функцию z такую, что

$$z(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [a, b-\delta], \\ y(a), & t = b, \\ \text{линейна}, & t \in [b-\delta, b]. \end{cases}$$

Так как $z(b) = y(a) = z(a)$, то $z \in M$. Подберем δ так, чтобы $\|y-z\|_p < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Очевидно, что

$$\max_{t\in[a,b]} |z(t)| \leqslant \max_{t\in[a,b]} |y(t)| = \|y\|_{C[a,b]} = R.$$

Отсюда

$$\|y-z\|_p = \left(\int_a^b |y(t)-z(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{b-\delta}^b |y(t)-z(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant 2R\delta^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2},$$

если $\delta < \left(\dfrac{\varepsilon}{4R}\right)^p$. Итак, нашли $z \in M$ такую, что

$$\|x-z\|_p \leqslant \|x-y\|_p + \|y-z\|_p < \varepsilon.$$

Пример 3.3. Доказать, что множество c_0 сходящихся к нулю последовательностей нигде не плотно в пространстве c.

Решение. Надо доказать, что $\overset{\circ}{\overline{c_0}}$ есть пустое множество в пространстве c. Так как c_0 – замкнутое подмножество в c (см. задачу 1.50), то $\overset{\circ}{\overline{c_0}} = \overset{\circ}{c_0}$. Надо показать, что для всякого элемента $x_0 \in c_0$ и всякого $\varepsilon > 0$ шар $B(x_0, \varepsilon) \subset c$ не принадлежит множеству c_0.

Для $x_0 = \{\xi_k^0\} \in c_0$ имеем $\xi_k^0 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Значит, для $\varepsilon > 0$ найдется номер k_0 такой, что $|\xi_k^0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для $k > k_0$.

Рассмотрим $x = \{\xi_k\}$:

$$\xi_k = \begin{cases} \xi_k^0, & k \leqslant k_0, \\ \dfrac{\varepsilon}{4}, & k > k_0. \end{cases}$$

Тогда $x \notin c_0$, $x \in c$ и $x \in B(x_0, \varepsilon)$, так как $|\xi_k - \xi_k^0| \leqslant \dfrac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$. Следовательно, $B(x_0, \varepsilon) \not\subset c_0$. ✌

3.1. Пусть M и N – множества, всюду плотные в метрическом пространстве X. Возможно ли, что $M \cap N = \varnothing$?

3.2. Будут ли множество P_n всех алгебраических многочленов степени не выше n и множество P всех алгебраических многочленов

а) нигде не плотными в пространстве $C[a, b]$,

б) всюду плотными в пространстве $C[a, b]$?

3.3. Показать, что множество всех финитных последовательностей не является всюду плотным в пространствах c и ℓ_∞; всюду плотно в пространствах c_0 и ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$.

☞ Доказать утверждения 3.4–3.7.

3.4. Множество P всех алгебраических многочленов всюду плотно в пространстве $C^1[a, b]$.

3.5. Множество кусочно линейных непрерывных функций всюду плотно в пространстве $C[a, b]$ над $\mathbb{R}$.

3.6. Множество $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций всюду плотно в пространстве $L_p[a, b]$.

3.7. а) Множество алгебраических многочленов от t^2 всюду плотно в пространстве $C[0, 1]$;

б) множество алгебраических многочленов от t, равных нулю при $t = 1$, всюду плотно в множестве

$$M = \{x \in C[0,1] \colon x(1) = 0\};$$

в) множество

$$M = \{x \in C[0,1] \colon x(0) = 0\}$$

всюду плотно в пространствах $\widetilde{L}_1[0,1]$ и $L_1[0,1]$, но не является всюду плотным в пространстве $C[0,1]$;

г) множество

$$M = \left\{x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0\right\}$$

всюду плотно в пространстве ℓ_2;

д) множество

$$M = \left\{x \in L_2[0,1] \colon x(t) = 0,\ t \in \left[0, \frac{1}{3}\right]\right\}$$

нигде не плотно в пространстве $L_2[0,1]$;

е) множество тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad n \in \mathbb{N},$$

всюду плотно в пространствах $L_p[-\pi,\pi]$.

☞ Пусть X – метрическое пространство. Доказать утверждения 3.8–3.10.

3.8. Дополнение к нигде не плотному в X множеству всюду плотно. Справедливо ли обратное утверждение?

3.9. Дополнение к открытому всюду плотному в X множеству нигде не плотно.

3.10. Замыкание нигде не плотного в X множества нигде не плотно.

3.11. Привести пример метрического пространства X и множества в нем, которое не является нигде не плотным в X и не является всюду плотным в X.

☞ Доказать утверждения 3.12–3.19.

3.12. Метрическое пространство несепарабельно тогда и только тогда, когда в нем существует несчетное множество попарно непересекающихся шаров радиуса $r > 0$.

3.13. Пространства ℓ_p^n $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$, c_0, c, $C^{(k)}[a,b]$, $C[a,b]$, $L_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ сепарабельны.

3.14. Пространство ℓ_∞ несепарабельно.

3.15. Пространство s сепарабельно.

3.16. Мощность сепарабельного метрического пространства не может быть больше, чем континуум.

3.17. Конечномерное нормированное пространство сепарабельно.

3.18. Пусть L – замкнутое линейное подмножество в нормированном пространстве X, $L \neq X$. Тогда L нигде не плотно в X.

3.19. Пусть метрические пространства X и Y гомеоморфны. Тогда если одно из них сепарабельно, то сепарабельно и другое.

Тема 4. Полные метрические и нормированные пространства, пополнения

Определение 4.1. Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического (нормированного) пространства X называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall n, m > N(\varepsilon) \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Определение 4.2. Метрическое (нормированное) пространство X называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится. Полное метрическое пространство называют также *пространством Фреше*, полное нормированное пространство – *банаховым пространством.*

Определение 4.3. Метрические пространства X и Y называются *изометричными* ($X \cong Y$), если существует биекция $f\colon X \to Y$ такая, что

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2).$$

Нормированные пространства X и Y называются *линейно изометричными* ($X \cong Y$), если существует линейная биекция $f\colon X \to Y$ такая, что

$$\forall x \in X \quad \|f(x)\|_Y = \|x\|_X.$$

Теорема 4.1 (о пополнении пространства). *Для любого метрического пространства $\langle X, \rho_X\rangle$ существуют полное метрическое пространство $\langle Y, \rho_Y\rangle$ и подмножество $Y_1 \subset Y$ такие, что $\langle X, \rho_X\rangle \cong \langle Y_1, \rho_Y\rangle$ и $\overline{Y_1} = Y$.*

Для любого нормированного пространства $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ существуют полное нормированное пространство $\langle Y, \|\cdot\|_Y\rangle$ и линейное многообразие $Y_1 \subset Y$ такие, что $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle \cong \langle Y_1, \|\cdot\|_Y\rangle$ и $\overline{Y_1} = Y$.

Определение 4.4. Полное метрическое (нормированное) пространство Y из теоремы 4.1 называется *пополнением* метрического (нормированного) пространства X.

Пример 4.1. Пусть $X = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Проверить, что

$$\rho(x, y) = |\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 2y|$$

есть метрика на X. Доказать, что $\langle X, \rho\rangle$ – полное метрическое пространство.

Решение. Метрика ρ порождается убывающей функцией $f(t) = \operatorname{ctg} 2t$. Следовательно, f – биекция $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ на $\mathbb{R}$, а значит, $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Справедливость двух других аксиом метрики очевидна. Итак, $\langle X, \rho\rangle$ – метрическое пространство.

Полагая $f(x) = u$, $f(y) = v$, получаем

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)| = |u - v| = \rho_{|\cdot|}(u, v) = \rho_{|\cdot|}(f(x), f(y)).$$

Так как f – биекция X на $\mathbb{R}$ и $\rho(x, y) = \rho_{|\cdot|}(f(x), f(y))$, то метрические пространства $\langle X, \rho\rangle$ и $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|}\rangle$ изометричны. Пространство $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|}\rangle$ полное, значит, $\langle X, \rho\rangle$ – полное метрическое пространство (см. задачу 4.6). ✌

Пример 4.2. Показать, что пространство $\langle X, \rho\rangle$, где $X = (0, +\infty)$,

$$\rho(x, y) = |x \operatorname{sgn}(x - 1) - y \operatorname{sgn}(y - 1)|,$$

является неполным метрическим пространством. Найти его пополнение.

Решение. Первая аксиома метрики верна, так как метрика ρ порождается функцией $f(t) = t \operatorname{sgn}(t - 1)$, которая является биекцией множества X на множество $M = (-1, 0] \cup (1, +\infty)$.

Полагая $f(x) = u$, $f(y) = v$, получаем

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)| = |u - v| = \rho_{|\cdot|}(u, v) = \rho_{|\cdot|}(f(x), f(y)).$$

Так как f – биекция X на M и $\rho(x, y) = \rho_{|\cdot|}(f(x), f(y))$, то метрические пространства $\langle X, \rho\rangle$ и $\langle M, \rho_{|\cdot|}\rangle$ изометричны. Пространство $\langle X, \rho\rangle$ полно тогда и только тогда, когда $\langle M, \rho_{|\cdot|}\rangle$ – полное метрическое пространство (см. задачу 4.6).

Так как $M \subset \mathbb{R}$, метрическое пространство $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|}\rangle$ полное, а M не является замкнутым множеством в этом пространстве, то пространство $\langle M, \rho_{|\cdot|}\rangle$ не является полным (см. задачу 4.4), а его пополнение – это пространство $\langle \overline{M}, \rho_{|\cdot|}\rangle = \langle [-1, 0] \cup [1, +\infty), \rho_{|\cdot|}\rangle$ (см. задачу 4.5). Следовательно, $\langle X, \rho\rangle$ не является полным метрическим пространством, а его пополнение – это пространство $\langle Y, \rho_{|\cdot|}\rangle$, где $Y = [-1, 0] \cup$ $\cup [1, +\infty)$ (см. определение 4.4). ✌

Пример 4.3. Описать пополнение множества функций, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$, относительно нормы

$$\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |x'(t)|.$$

Решение. Введем следующие обозначения:

$$X = C^1[0, 1], \qquad Y = \left\{x \in C[0, 1] \colon x \in C^1[0, \tfrac{1}{2}]\right\},$$

$$\|x\|_X = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} |x'(t)|.$$

Докажем, что пространство $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ не является полным, а $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ – полное нормированное пространство и является пополнением пространства $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$.

Пусть для $n > 4$

$$x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{n} - \sqrt{\dfrac{2}{n^2} - \left(t - \dfrac{3}{4}\right)^2}, & \left|t - \dfrac{3}{4}\right| \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ \left|t - \dfrac{3}{4}\right|, & t \in \left[0, \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{n}\right) \cup \left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $x_n \in X$. Обозначим $x(t) = \left|t - \frac{3}{4}\right|$. Очевидно, $x \notin X$ и $x \in Y$. Так как

$$\|x_n - x\|_X = \max_{t:\left|t-\frac{3}{4}\right| \leqslant \frac{1}{n}} \left|\frac{2}{n} - \sqrt{\frac{2}{n^2} - \left(t - \frac{3}{4}\right)^2} - \left|t - \frac{3}{4}\right|\right| \leqslant \frac{3+\sqrt{2}}{n},$$

то $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$, $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в пространстве $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ и сходится к $x \notin X$. Значит, $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ не является банаховым пространством.

Покажем, что пространство $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ банахово. Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в этом пространстве. Так как

$$\|x_n - x_m\|_{C[0,1]} \leqslant \|x_n - x_m\|_X,$$

то $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в банаховом пространстве $C[0,1]$. Следовательно,

$$x_n \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} x \in C[0,1], \quad n \to \infty,$$

(см. задачу 2.7). Аналогично, так как

$$\|x_n - x_m\|_{C^1\left[0,\frac{1}{2}\right]} \leqslant \|x_n - x_m\|_X,$$

то $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в банаховом пространстве $C^1\left[0, \frac{1}{2}\right]$, значит,

$$x_n \overset{\left[0,\frac{1}{2}\right]}{\rightrightarrows} y, \quad x_n' \overset{\left[0,\frac{1}{2}\right]}{\rightrightarrows} y' \in C\left[0, \tfrac{1}{2}\right], \quad n \to \infty,$$

(см. задачу 2.9). Поскольку $x(t) = y(t)$ для $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, то на этом отрезке существует $x'(t) = y'(t)$ и $x \in Y$, а $\|x_n - x\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Итак, фундаментальная в пространстве $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ последовательность $\{x_n\}$ сходится по $\|\cdot\|_X$ к элементу $x \in Y$. Полнота пространства $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ доказана.

Докажем, что $\langle Y, \|\cdot\|_X\rangle$ – пополнение пространства $\langle X, \|\cdot\|_X\rangle$ относительно нормы $\|\cdot\|_X$. Для этого нужно показать, что замыкание X по $\|\cdot\|_X$ есть Y.

Для любого $y \in Y$ существует последовательность $\{p_n\}$ алгебраических многочленов: $p_n \overset{[\frac{1}{2},1]}{\rightrightarrows} y$, $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность

$$y_n(t) = \begin{cases} y(t), \quad t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ p_n(t) - p_n\left(\dfrac{1}{2}\right) + y\left(\dfrac{1}{2}\right) + \\ + \left(y'\left(\dfrac{1}{2}\right) - p_n'\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) \dfrac{\sin c_n\left(t - \dfrac{1}{2}\right)}{c_n}, \quad t \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]; \end{cases}$$

здесь c_n – некоторая отличная от нуля величина, которая будет специальным образом выбрана ниже. Функции y_n непрерывно дифференцируемы на отрезке $[0, 1]$, т. е. $y_n \in X$.

На отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} |y_n(t) - y(t)| = \Bigg|(p_n(t) - y(t)) &+ \left(y\left(\frac{1}{2}\right) - p_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \\ &+ \left(y'\left(\frac{1}{2}\right) - p_n'\left(\frac{1}{2}\right)\right) \frac{\sin c_n(t - \frac{1}{2})}{c_n}\Bigg| \leqslant \\ &\leqslant |p_n(t) - y(t)| + \left|y\left(\frac{1}{2}\right) - p_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \\ &+ \left|y'\left(\frac{1}{2}\right) - p_n'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \cdot \frac{1}{|c_n|}. \end{aligned}$$

Полагая

$$c_n = n \cdot \left(1 + \left|y'\left(\frac{1}{2}\right) - p_n'\left(\frac{1}{2}\right)\right|\right),$$

получим

$$\max_{t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]} |y_n(t) - y(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

а значит и

$$\max_{t\in[0,1]} |y_n(t) - y(t)| = \max_{t\in\left[\frac{1}{2},1\right]} |y_n(t) - y(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Итак, для всякого $y \in Y$ существует $\{y_n\} \in X$ такая, что

$$\|y_n - y\|_X = \max_{t\in[0,1]} |y_n(t) - y(t)| + \max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |y_n'(t) - y'(t)| =$$
$$= \max_{t\in[0,1]} |y_n(t) - y(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Следовательно, $\overline{X} = Y$ относительно $\|\cdot\|_X$. ☙

☞ Доказать утверждения 4.1–4.9.

4.1. Всякая фундаментальная последовательность в метрическом пространстве ограничена.

4.2. Если $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в метрическом пространстве, то $\rho(x_n, x_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$.

4.3. Метрическое пространство полно тогда и только тогда, когда всякая фундаментальная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.

4.4. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – полное метрическое пространство и $M \subset X$. Пространство $\langle M, \rho\rangle$ полно тогда и только тогда, когда множество M замкнуто в X.

4.5. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – полное метрическое пространство, $M \subset X$ и пространство $\langle M, \rho\rangle$ не является полным. Тогда пополнением этого пространства является пространство $\langle \overline{M}, \rho\rangle$.

4.6. Если X и Y – изометричные метрические пространства и одно из них полно, то полно и другое.

4.7. Нормированные пространства ℓ_p^n, c_0, c, ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, $C[a,b]$, $C^{(k)}[a,b]$, $L_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty)$ полны.

4.8. Метрическое пространство s является полным.

4.9. Конечномерное нормированное пространство полно.

4.10. Показать, что пространство $\widetilde{L}_1[a,b]$ неполно. Найти его пополнение.

4.11. На множестве X финитных числовых последовательностей заданы нормы

а) $\|x\|_1 = \sup\limits_k |\xi_k|$, б) $\|x\|_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_k|$.

Показать, что пространства $\langle X, \|\cdot\|_1\rangle$ и $\langle X, \|\cdot\|_2\rangle$ не являются полными. Найти их пополнения.

4.12. В цепочках пространств из задач 2.19, 2.24 найти пополнение предыдущего по норме последующего. Например, для пары $\ell_1 \subset \ell_p$ нужно найти пополнение пространства $X = \{x = \{\xi_k\} : \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < \infty\}$ по норме $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p}$.

4.13. Описать пополнение пространства вещественных алгебраических многочленов от переменной t, снабженного нормой

а) $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)|$;

б) $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |p'(t)|$;

в) ★ $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)| + |p'(a)|$;

г) ★ $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)| + \max\limits_{t\in[c,d]} |p'(t)|$;

д) $\|p\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |p(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |p''(t)|$;

е) ★ $\|p\| = \max\limits_{k} \dfrac{|p^{(k)}(0)|}{k!}$;

ж)★ $\|p\| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{|p^{(k)}(0)|}{k!} + \max\limits_{t\in[-1,1]} |p(t)|.$

4.14. Рассмотрим линейные пространства функций, определенных на вещественной прямой $\mathbb{R}$:

а) $C(\mathbb{R})$ – все ограниченные непрерывные функции;

б) $C_0(\mathbb{R})$ – все непрерывные функции, у которых $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$;

в) $C_1(\mathbb{R})$ – все финитные непрерывные функции (т. е. функции, равные нулю вне некоторого конечного интервала).

В этих пространствах введем норму

$$\|x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|.$$

Будут ли эти пространства полными? Будут ли они сепарабельными?

4.15. На множестве натуральных чисел положим

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n+m}, & n \neq m, \\ 0, & n = m. \end{cases}$$

Доказать, что $\langle \mathbb{N}, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство. Построить последовательность замкнутых вложенных шаров, имеющих пустое пересечение.

4.16. Доказать, что в полном линейном нормированном пространстве любая последовательность замкнутых вложенных шаров имеет непустое пересечение.

4.17. Пусть $f\colon M \to \mathbb{P}$ – инъективная функция, $\rho_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$. Доказать, что пространство $\langle M, \rho_f \rangle$ полно тогда и только тогда, когда множество $f(M)$ замкнуто в пространстве $\langle \mathbb{P}, \rho_{|\cdot|} \rangle$.

4.18. Проверить, что $\langle X, \rho_f \rangle$, где $\rho_f(x,y) = |f(x) - f(y)|$, – метрическое пространство. Является ли оно полным? Если нет, описать его пополнение:

а) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

б) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$;

в) $X = [0, \infty)$, $f(x) = \ln(x+1)$;

г) $X = [0, \infty)$, $f(x) = e^{-x}$;

д) $X = [-1, 1)$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0], \\ x+1, & x \in (0, 1); \end{cases}$

е) $X = [-1, 1)$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1, 0), \\ x+1, & x \in [0, 1); \end{cases}$

ж) $X = \mathbb{N}$, $f(n) = \dfrac{1}{n}$.

Будут ли эквивалентны метрики для пар: «а» и «б»; «в» и «г»; «д» и «е»?

4.19. Доказать, что метрическое пространство $\langle \mathbb{N}, \rho \rangle$, где $\rho(m,n) = |e^{in} - e^{im}|$, не является полным. Найти его пополнение.

4.20. На линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы. Доказать, что X является полным (сепарабельным) в смысле одной из этих норм тогда и только тогда, когда оно является полным (сепарабельным) в смысле эквивалентной нормы.

4.21. На множестве X заданы две эквивалентные метрики. Сохраняются ли свойства полноты и сепарабельности при переходе к эквивалентной метрике?

Тема 5. Непрерывные и равномерно непрерывные отображения. Сжимающие отображения

Определение 5.1. Пусть X и Y – метрические пространства. Отображение $F\colon X \to Y$ называется

✓ *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in X$$

$$\rho_X(x, x_0) < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow\ \rho_Y(Fx, Fx_0) < \varepsilon;$$

✓ *непрерывным на множестве* $M \subset X$, если оно непрерывно в каждой точке множества M;

✓ *равномерно непрерывным на множестве* $M \subset X$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x_1, x_2 \in M$$

$$\rho_X(x_1, x_2) < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow\ \rho_Y(Fx_1, Fx_2) < \varepsilon.$$

Определение 5.2. Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – метрическое пространство. Отображение $F\colon X \to X$ называется *сжимающим*, если

$$\exists \alpha \in [0, 1)\ \forall x, y \in X \quad \rho(Fx, Fy) \leqslant \alpha\rho(x, y).$$

Определение 5.3. Пусть $F\colon X \to X$. Точка $x^* \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения F, если $Fx^* = x^*$.

Теорема 5.1 (Банах). *Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – полное метрическое пространство, $F\colon X \to X$ – сжимающее отображение. Тогда существует единственная неподвижная точка отображения F.*

Пример 5.1. Доказать, что отображение

$$F\colon C[-1, 1] \to L_1[-1, 1],$$

действующее по правилу

$$(Fx)(t) = (2t - 5)x(t) - 3\int_{-1}^{1} 2^{t-s} \sin x(s)\, ds,$$

равномерно непрерывно на $C[-1, 1]$.

Решение. Представим отображение F в виде $F = G + H$, где

$$(Gx)(t) = (2t-5)x(t), \quad (Hx)(t) = -3\int_{-1}^{1} 2^{t-s}\sin x(s)\,ds.$$

Докажем, что отображения G и H равномерно непрерывны на $C[-1,1]$, тогда и отображение F будет равномерно непрерывным на $C[-1,1]$. Пусть $x_1, x_2 \in C[-1,1]$. Тогда

$$|(Gx_1)(t) - (Gx_2)(t)| = |(2t-5)(x_1(t) - x_2(t))| \leqslant$$
$$\leqslant |2t-5| \cdot |x_1(t) - x_2(t)| \leqslant 7\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]}$$

и, следовательно,

$$\|Gx_1 - Gx_2\|_{L_1[-1,1]} = \int_{-1}^{1} |(Gx_1)(t) - (Gx_2)(t)|dt \leqslant$$
$$\leqslant 14\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]}.$$

Из этой оценки следует равномерная непрерывность G на $C[-1,1]$. Для отображения H имеем

$$|(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t)| = \left|3\int_{-1}^{1} 2^{t-s}(\sin x_1(s) - \sin x_2(s))\,ds\right| \leqslant$$
$$\leqslant 3\int_{-1}^{1} 2^{t-s}\cdot 2\left|\sin\frac{x_1(s)-x_2(s)}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x_1(s)+x_2(s)}{2}\right| ds \leqslant$$
$$\leqslant 6\cdot 2^t\int_{-1}^{1} |x_1(s) - x_2(s)|\,ds \leqslant 12\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]}\cdot 2^t.$$

Таким образом,

$$\|Hx_1 - Hx_2\|_{L_1[-1,1]} = \int_{-1}^{1} |(Hx_1)(t) - (Hx_2)(t)|dt \leqslant$$
$$\leqslant 12\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]}\int_{-1}^{1} 2^t\,dt \leqslant 48\cdot\|x_1 - x_2\|_{C[-1,1]}$$

и отображение H также равномерно непрерывно на $C[-1,1]$. ✌

Пример 5.2. Исследовать на равномерную непрерывность и непрерывность отображения

а) $(Fx)(t) = e^{-|x(t)|}$; б) $(Gx)(t) = x^2(t) - x(t) + 1$,
действующие из $C[a,b]$ в $C[a,b]$.

Решение. Так как функции

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{и} \quad g(x) = x^2 - x + 1$$

непрерывны на $\mathbb{R}$, то порождаемые ими отображения F и G непрерывны в $C[a,b]$, а равномерная непрерывность этих отображений на $C[a,b]$ эквивалентна равномерной непрерывности функций f и g на $\mathbb{R}$ (см. задачу 5.5).

а) Функция f дифференцируема на $(-\infty, 0]$ и на $[0, +\infty)$. На каждом из этих множеств $|f'(x)| \leqslant 1$. Следовательно, функция f равномерно непрерывна на $(-\infty, 0]$ и на $[0, +\infty)$. В силу непрерывности f на $\mathbb{R}$, она равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$. Следовательно, отображение F равномерно непрерывно на $C[a,b]$.

б) Функция $g(x) = x^2 - x + 1$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, так как последовательности $x'_n = n$ и $x''_n = n + \dfrac{1}{n}$ обладают свойством $|x'_n - x''_n| = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но

$$\begin{aligned} |g(x'_n) - g(x''_n)| &= |x'_n - x''_n| \cdot |x'_n + x''_n - 1| = \\ &= \frac{1}{n}\left|2n + \frac{1}{n} - 1\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Значит, и отображение G из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, порождаемое функцией g, не является равномерно непрерывным.

Приведем прямое доказательство непрерывности отображения G на $C[a,b]$ (без ссылки на задачу 5.5). Пусть $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in C[a,b]$, тогда для любой функции $x \in C[a,b]$ со свойством $\|x - x_0\| \leqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned} |(Gx)(t) - (Gx_0)(t)| &= |(x^2(t) - x(t) + 1) - (x_0^2(t) - x_0(t) + 1)| = \\ &= |x(t) - x_0(t)| \cdot |x(t) + x_0(t) - 1| \leqslant \\ &\leqslant |x(t) - x_0(t)| \cdot (|x(t) - x_0(t)| + 2|x_0(t)| + 1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|Gx - Gx_0\| &= \max_{t\in[a,b]} |G(x)(t) - G(x_0)(t)| \leqslant \\ &\leqslant \|x - x_0\| \cdot (\|x - x_0\| + 2\|x_0\| + 1) \leqslant \\ &\leqslant (2 + 2\|x_0\|)\|x - x_0\|.\end{aligned}$$

Из этой оценки следует, что отображение G непрерывно на $C[a, b]$ $\left(\delta(\varepsilon) = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{2 + 2\|x_0\|}\right\}\right)$. ✌

Пример 5.3. Доказать, что бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$23 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^{k+m}}\xi_k - \frac{2}{m} = \xi_m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

имеет единственное решение в пространстве ℓ_2.

Решение. Введем оператор $A\colon \ell_2 \to \ell_2$,

$$Ax = \left\{23 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^{k+m}}\xi_k\right\}_{m=1}^{\infty}.$$

Это оператор сжатия (см. задачу 5.15 «а»), так как

$$\sum_{k,m=1}^{\infty} \left(\frac{23}{5^{k+m}}\right)^2 = 23^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{25^k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{25^m} = \frac{23^2}{24^2} < 1.$$

Полагая $y_0 = \left\{\dfrac{2}{m}\right\}_{m=1}^{\infty}$, $Bx = Ax - y_0$, запишем исходную систему уравнений в операторном виде:

$$Bx = x. \tag{5.1}$$

Так как

$$\rho(Bx, By) = \|Bx - By\| = \|Ax - Ay\| = \rho(Ax, Ay)$$

и A – оператор сжатия, то и B – оператор сжатия. Следовательно, по теореме Банаха (см. теорему 5.1) операторное уравнение (5.1), а значит и исходная система уравнений, имеет единственное решение в пространстве ℓ_2. ✌

5.1. Является ли непрерывным на своей области определения отображение $Fx = x(1)$, если

а) $F\colon C[0,1] \to \mathbb{R}$; б) $F\colon \widetilde{L}_1[0,1] \to \mathbb{R}$?

5.2. Исследовать на непрерывность и равномерную непрерывность отображение $(Fx)(t) = x^2(t)$ на области определения:

а) $F\colon C[0,1] \to C[0,1]$; б) $F\colon C[0,1] \to \widetilde{L}_1[0,1]$;

в) $F\colon \widetilde{L}_1[0,1] \to \widetilde{L}_1[0,1]$.

5.3. Показать, что отображение $(Fx)(t) = x'(t) - 3x(t)$ непрерывно на своей области определения, если $F\colon C^1[a,b] \to C[a,b]$, и не является непрерывным, если $F\colon C^1[a,b] \subset C[a,b] \to C[a,b]$.

5.4. Пусть X, Y – метрические пространства, $F\colon X \to Y$. Докажите, что F не является равномерно непрерывным на X тогда и только тогда, когда найдутся последовательности $\{x'_n\}$, $\{x''_n\} \subset X$ такие, что $\rho_X(x'_n, x''_n) \to 0$, а $\rho_Y(Fx'_n, Fx''_n) \not\to 0$ при $n \to \infty$.

5.5. Пусть отображение $F\colon C[a,b] \to C[a,b]$ определено формулой $(Fx)(t) = f(x(t))$, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Доказать, что отображение F непрерывно (равномерно непрерывно) на $C[a,b]$ тогда и только тогда, когда функция f непрерывна (равномерно непрерывна) на $\mathbb{R}$.

5.6. Исследовать на равномерную непрерывность на $C[0,2]$ отображение $F\colon C[0,2] \to C[0,2]$, если

а) $(Fx)(t) = \sqrt[3]{x(t)}$;

б) $(Fx)(t) = x^3(t)$;

в) $(Fx)(t) = \operatorname{arctg} x(t)$;

г) $(Fx)(t) = \cos x^2(t)$;

д) $(Fx)(t) = \dfrac{x^2(t)}{1 + x^4(t)}$;

е) $(Fx)(t) = \displaystyle\int_0^2 (t+s)\ln(1+3x^2(s))\,ds$.

Исследовать на равномерную непрерывность на $C[0,2]$ отображения «а»–«е», если $F\colon C[0,2] \to \widetilde{L}_1[0,2]$.

5.7. Исследовать на непрерывность на области определения отображения

а) $F\colon C^1[0,3] \subset C[0,3] \to C[0,3]$,
$(Fx)(t) = x(2) - 5\displaystyle\int_0^t 2^s x'(s)ds$;

б) $F\colon C^1[0,1] \to C^1[0,1]$,
$(Fx)(t) = 3x(t) + \displaystyle\int_0^t \ln(1+s)\,x(s)\,ds$;

в) $F\colon C^1[0,1] \subset C[0,1] \to C^1[0,1]$,
$(Fx)(t) = 3x(t) + \displaystyle\int_0^t \ln(1+s)\,x(s)\,ds$;

г) $F\colon C[0,1] \to C^1[0,1]$,
$(Fx)(t) = \cos t \cdot \displaystyle\int_t^1 (s^2+4)\,x(s)\,ds$.

5.8. Будет ли отображение $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сжимающим на множестве $M \subset \mathbb{R}$, если $Fx = x^3$, метрика на $\mathbb{R}$ естественная,

а) $M = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$; б) $M = [0,2]$; в) $M = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$?

5.9. Пусть вещественная функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Доказать, что f – сжимающее отображение в пространстве $\langle \mathbb{R}, \rho_{|\cdot|} \rangle$ тогда и только тогда, когда существует $\alpha \in [0,1)$ такое, что $|f'(x)| \leqslant \alpha$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

5.10. Пусть вещественная функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Доказать, что уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение на $\mathbb{R}$, если

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| < 1 \qquad \text{или} \qquad \inf_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| > 1.$$

Являются ли эти условия необходимыми для существования единственного решения?

5.11. Доказать, что уравнение $2xe^x = 1$ имеет единственное решение, принадлежащее промежутку $(0, 1)$.

5.12. Достаточно ли для существования неподвижной точки отображения f в полном метрическом пространстве выполнения условия $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ для всех $x \neq y$?

☞ Доказать утверждения 5.13–5.20.

5.13. Пусть $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x$. Для любых x, y существует постоянная $\alpha < 1$ такая, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha|x - y|$, но отображение f не имеет неподвижных точек.

5.14. Пусть $A\colon \ell_p^n \to \ell_p^n$, $Ax = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}\xi_j \right\}_{k=1}^{n}$. Тогда A – сжимающее отображение в пространстве ℓ_p^n, если

а) $\sum\limits_{k,j=1}^{n} |a_{kj}|^2 < 1$ при $p = 2$;

б) $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}| < 1$ при $p = \infty$;

в) $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{kj}| < 1$ при $p = 1$.

5.15. Пусть $A\colon \ell_p \to \ell_p$, $Ax = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{kj}\xi_j \right\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда A – сжимающее отображение в пространстве ℓ_p, если а) $\sum\limits_{k,j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 < 1$ при $p = 2$;

б) $\sup\limits_{k} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$ при $p = \infty$;

в) $\sup\limits_{j} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$ при $p = 1$.

5.16. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений

$$\xi_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}\xi_k + \eta_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

имеет единственное решение $x = \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ для любого $y = \{\eta_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$, если выполнено условие

а) $\sum\limits_{k,j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 < 1$ при $p = 2$;

б) $\sup\limits_{k} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$ при $p = \infty$;

в) $\sup\limits_{j} \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{kj}| < 1$ при $p = 1$.

5.17. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство и отображение $f\colon X \to X$ таково, что некоторая его степень $g = f^n$ является сжимающим отображением. Тогда уравнение $fx = x$ имеет единственное решение.

5.18. Пусть A – интегральный оператор Вольтерра

$$Ax(t) = \int_a^t K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

ядро $K(t, s)$ непрерывно на треугольнике

$$\Delta = \{(t, s)\colon t \in [a, b],\ s \in [a, t]\}.$$

Тогда существует такое $m \in \mathbb{N}$, что A^m является сжимающим отображением в пространстве $C[a, b]$.

5.19. Пусть ядро $K(t,s)$ непрерывно на $[a,b]\times[a,b]$ и

$$\int_a^b |K(t,s)|ds \leqslant d < 1, \quad t \in [a,b].$$

Тогда интегральное уравнение Фредгольма

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)\,x(s)\,ds = y(t)$$

имеет единственное решение $x \in C[a,b]$ для любой функции $y \in C[a,b]$.

5.20. Уравнение

$$x(t) = t^2 + \int_0^3 \sin\left(s + \frac{t}{10}\cdot x(s)\right) ds$$

имеет единственное непрерывное на $[0,3]$ решение $x(t)$.

5.21. Являются ли отображения $A\colon X \to X$ сжимающими, если

а) $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-t|x(s)|}\,ds, \quad X = C[0,1]$;

б) $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^1 e^{-t|x(s)|}\,ds, \quad X = L_2[0,1]$;

в) $(Ax)(t) = \displaystyle\int_0^2 t\cdot\sin x(s)\,ds, \quad X = C[0,2]$;

г) $(Ax)(t) = \lambda\displaystyle\int_0^1 t^2s^2x(s)\,ds, \quad X = C[0,1]$?

5.22. В пространстве $C[0,1]$ решить уравнение

$$x(t) = \lambda\int_0^t x(s)ds + t^2, \quad \lambda \neq 0.$$

5.23. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка в себя имеет неподвижную точку.

5.24. Пусть B и C – отображения полного метрического пространства в себя, B и C коммутируют, B – сжимающее. Доказать, что уравнение $Cx = x$ имеет решение.

Тема 6. Компактность, предкомпактность

☛ Во всех определениях и теоремах этой темы через X обозначено метрическое пространство $\langle X, \rho \rangle$.

Определение 6.1. Метрическое пространство X называется *компактным*, если из любого открытого покрытия X можно выделить конечное подпокрытие.

Множество $M \subset X$ называется *компактным*, если компактно подпространство $\langle M, \rho \rangle$, им порожденное.

Определение 6.2. Множество $M \subset X$ называется *секвенциально компактным*, если

$$\forall \{x_n\} \subset M \quad \exists \{x_{n_k}\} \quad \exists x_0 \in M \qquad x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0.$$

Теорема 6.1. *В метрическом пространстве компактность эквивалентна секвенциальной компактности.*

Теорема 6.2 (необходимые условия компактности). *Если множество $M \subset X$ компактно, то M ограничено и замкнуто, а $\langle M, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство.*

Определение 6.3. Множество $M \subset X$ называется *предкомпактным*, если $\overline{M}$ компактно.

Теорема 6.3. *Множество $M \subset X$ предкомпактно тогда и только тогда, когда*

$$\forall \{x_n\} \subset M \quad \exists \{x_{n_k}\} \quad \exists x_0 \in X \qquad x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0.$$

Определение 6.4. Множество $A \subset X$ называется *ε-сетью для множества $M \subset X$*, если

$$\forall x \in M \quad \exists a \in A \quad \rho(x, a) < \varepsilon.$$

Определение 6.5. Множество $M \subset X$ называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть для M.

Теорема 6.4. *Пусть X – полное метрическое пространство, $M \subset X$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *M предкомпактно;*

2) *M вполне ограничено;*

3) *из любой последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность.*

Теорема 6.5 (Хаусдорф, критерий компактности в метрическом пространстве). *Множество $M \subset X$ компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и $\langle M, \rho \rangle$ – полное метрическое пространство.*

Следствие 6.1. *Для того чтобы множество $M \subset X$ было предкомпактным, необходимо, а в случае полноты X и достаточно, чтобы M было вполне ограничено.*

Определение 6.6. Семейство Φ отображений $F\colon X \to \mathbb{P}$ называется *равномерно ограниченным*, если

$$\exists\, K > 0 \quad \forall\, F \in \Phi \quad \forall\, x \in X \qquad |Fx| \leqslant K.$$

Определение 6.7. Пусть X – компактное метрическое пространство. Семейство Φ непрерывных на X отображений $F\colon X \to \mathbb{P}$ называется *равностепенно непрерывным*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall\, F \in \Phi \quad \forall\, x_1, x_2 \in X$$

$$\rho(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |Fx_1 - Fx_2| < \varepsilon.$$

Пусть X – компактное метрическое пространство. Обозначим $C(X)$ пространство непрерывных на X отображений $F\colon X \to \mathbb{P}$ с нормой

$$\|F\| = \max_{x \in X} |Fx|.$$

Теорема 6.6 (Арцела – Асколли, критерий предкомпактности в $C(X)$). *Пусть X – компактное метрическое пространство. Семейство отображений $\Phi \subset C(X)$ предкомпактно $\Longleftrightarrow$ Φ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Теорема 6.7. *Пусть X, Y – метрические пространства, отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно на X и множество $M \subset X$ компактно. Тогда множество $f(M)$ компактно.*

Пример 6.1. Пусть $M = \{x \in C^1[a,b]\colon |x'(t)| \leqslant c_0\}$. Доказать, что множество M предкомпактно в пространстве $C[a,b]$ тогда и только тогда, когда существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что для всех $x \in M$

$$\left|\int_a^b x(t)dt\right| \leqslant c_1.$$

Решение. *Необходимость.* Из предкомпактности множества M следует его ограниченность (см. теорему 6.2), т. е. существование постоянной $K > 0$ такой, что для всех $x \in M$

$$\|x\| = \max_{[a,b]} |x(t)| \leqslant K.$$

Отсюда получаем оценку

$$\left|\int_a^b x(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |x(t)|\, dt \leqslant K(b-a) = c_1$$

для всех $x \in M$.

Достаточность. Для доказательства предкомпактности множества M воспользуемся теоремой Арцела–Асколли (см. теорему 6.6).

Равностепенная непрерывность семейства функций M следует из оценки

$$|x(t_1) - x(t_2)| = |x'(\xi)| \cdot |t_1 - t_2| \leqslant c_0|t_1 - t_2| < \varepsilon$$

для $\delta \leqslant \dfrac{\varepsilon}{c_0}$, справедливой для всех $x \in M$ и любых $t_1, t_2 \in [a,b]$ (применили формулу Лагранжа, $\xi \in (a,b)$).

Докажем, что семейство функций M равномерно ограничено. Согласно теореме о среднем для непрерывной функции $x \in M$ существует точка $\eta \in [a,b]$ такая, что

$$x(\eta) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x(s)ds.$$

Из формулы Ньютона – Лейбница для $t \in [a,b]$ получаем

$$x(t) = \int_\eta^t x'(s)ds + x(\eta) = \int_\eta^t x'(s)ds + \frac{1}{b-a}\int_a^b x(s)ds.$$

Значит,

$$|x(t)| \leqslant \int_a^b |x'(s)|\,ds + \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b x(s)\,ds\right| \leqslant c_0(b-a) + \frac{c_1}{b-a},$$

т. е. семейство функций M равномерно ограничено.

По теореме Арцела – Асколли множество M предкомпактно в $C[a,b]$. ✠

Пример 6.2. Пусть $M = \{\ln(2+t^\alpha)\}_{\alpha\in(0,2]}$. Будет ли это множество предкомпактным (компактным) в пространствах $C[0,1]$ и $L_1[0,1]$?

Решение. Воспользуемся теоремой 6.3. Пусть $\{x_n\} \subset M$. Тогда x_n имеет вид $x_n(t) = \ln(2+t^{\alpha_n})$, где $\alpha_n \in (0,2]$. Из ограниченной последовательности $\{\alpha_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \alpha_0 \in [0,2]$.

Если $\alpha_0 \neq 0$, то при $k \to \infty$ последовательность функций $\{x_{n_k}\}$ поточечно сходится к функции $y_1(t) = \ln(2+t^{\alpha_0}) \in M$.

Если $\alpha_0 = 0$, то последовательность функций $\{x_{n_k}\}$ поточечно сходится к функции

$$y_2(t) = \begin{cases} \ln 2, & t = 0, \\ \ln 3, & t \in (0,1], \end{cases}$$

которая не принадлежит пространству $C[0,1]$. Отсюда следует, что в этом случае последовательность $\{x_{n_k}\}$ и любая ее подпоследовательность не являются равномерно сходящимися на отрезке $[0,1]$, а значит и сходящимися в пространстве $C[0,1]$.

Итак, множество M не предкомпактно в $C[0,1]$, так как существует последовательность $\{\widetilde{x}_n\} \in M$ (например,

$\widetilde{x}_n(t) = \ln(2+t^{1/n})$), из которой нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся в пространстве $C[0,1]$. Отсюда следует, что множество M не компактно в $C[0,1]$.

Докажем, что множество M предкомпактно в пространстве $L_1[0,1]$. Действительно, как показано выше, из любой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к функции y_1 или y_2 при $k \to \infty$. Функции $y_1, y_2 \in L_1[0,1]$. При этом последовательности $\{x_{n_k}(t) - y_j(t)\}$ $(j = 1$ или $2)$ всюду на $[0,1]$ поточечно сходятся к 0, $|x_{n_k}(t) - y_j(t)| \leqslant 2\ln 3$, функция $y(t) \equiv 2\ln 3$ интегрируема на $[0,1]$. Поэтому согласно теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла

$$\|x_{n_k} - y_j\|_{L_1[0,1]} = \int_0^1 |x_{n_k}(t) - y_j(t)|\,dt \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_0^1 0\,dt = 0.$$

Итак, множество M предкомпактно в пространстве $L_1[0,1]$, так как из любой последовательности $\{x_n\} \subset M$ можно выделить сходящуюся в $L_1[0,1]$ подпоследовательность.

Покажем, что множество M не компактно в $L_1[0,1]$. Действительно, если бы M было компактно, то оно было бы и секвенциально компактно (теорема 6.1), а значит, из последовательности $\widetilde{x}_n(t) = \ln\left(2 + t^{1/n}\right)$ можно было бы выделить подпоследовательность, сходящуюся по норме к некоторой функции из M. Но так как $\{\widetilde{x}_n\}$ сходится по норме в $L_1[0,1]$ и поточечно на $[0,1]$ к функции y_2, то и любая ее подпоследовательность сходится по норме и поточечно на $[0,1]$ к y_2. Следовательно, y_2 должна быть эквивалентна некоторой функции из M (см. задачу 2.11). Но y_2 не эквивалентна ни одной функции из M. Следовательно, M не компактно. ☙

Пример 6.3. Доказать, что для предкомпактности множества M в пространстве ℓ_1 необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M \quad \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\xi_k| < \varepsilon.$$

Решение. Для доказательства можно воспользоваться следствием 6.1 из теоремы Хаусдорфа, так как пространство ℓ_1 полное.

Необходимость. Предположим, что множество M предкомпактно в пространстве ℓ_1. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует набор $\{y_j\}_{j=1}^m \subset \ell_1 \colon M \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon)$. Отсюда следует, что множество M ограничено. Для $y_j = \{\eta_k^j\}$ существует $N_\varepsilon^j \in \mathbb{N} \colon \sum\limits_{k=N_\varepsilon^j}^{\infty} |\eta_k^j| < \varepsilon$. Положим $N_\varepsilon = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} \{N_\varepsilon^j\}$. Для всякого элемента $x \in M$ существует $y_j \colon \|x - y_j\| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\xi_k| \leqslant \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\xi_k - \eta_k^j| + \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\eta_k^j| \leqslant$$
$$\leqslant \|x - y_j\| + \sum_{k=N_\varepsilon^j}^{\infty} |\eta_k^j| < 2\varepsilon.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Известно, что

$$\exists\, C > 0 \quad \forall\, x \in M \quad \|x\| \leqslant C$$

и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M \quad \sum_{k=N_\varepsilon}^{\infty} |\xi_k| < \varepsilon.$$

Докажем, что множество M предкомпактно.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольное. Каждому $x \in M$ поставим в соответствие элемент

$$x_\varepsilon = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N_\varepsilon}, 0, 0, \ldots).$$

Справедливы неравенства

$$\|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon, \qquad \|x_\varepsilon\| \leqslant \|x\| \leqslant C.$$

Пусть Y – подпространство пространства ℓ_1, элементами которого являются последовательности

$$y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{N_\varepsilon}, 0, 0, \ldots).$$

Пространство Y конечномерно, а множество $M_\varepsilon = \bigcup\limits_{x \in M} \{x_\varepsilon\}$ является его ограниченным подмножеством. В силу задачи 6.17 множество M_ε предкомпактно в пространстве Y. Следовательно, существует набор $\{y_j\}_{j=1}^m \subset Y$ такой, что $M_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon)$ (здесь $B(y_j, \varepsilon) \subset Y$). Покажем, что $\{y_j\}_{j=1}^m$ есть 2ε-сеть для множества M в пространстве ℓ_1.

Для любого $x \in M$ существует y_j такой, что $\|y_j - x_\varepsilon\| < \varepsilon$ и

$$\|x - y_j\| \leqslant \|x - x_\varepsilon\| + \|x_\varepsilon - y_j\| < 2\varepsilon.$$

Таким образом, M вполне ограничено, а значит предкомпактно. Достаточность доказана. ☙

6.1. Привести пример метрического пространства $\langle X, \rho \rangle$ и множества $M \subset X$ таких, что

а) M вполне ограниченно, но не предкомпактно;

б) M предкомпактно, но не компактно.

6.2. Будет ли предкомпактным (компактным) множество M из метрического пространства X, если

а) M конечно;

б) M – сходящаяся последовательность;

в) M – фундаментальная последовательность (рассмотреть два случая: X – полное, X – не полное)?

6.3. Пусть на множестве X заданы метрики ρ_1 и ρ_2, причем $\rho_1 \succeq \rho_2$. Доказать, что из предкомпактности (компактности) множества M в метрическом пространстве $\langle X, \rho_1 \rangle$ следует предкомпактность (компактность) M в метрическом пространстве $\langle X, \rho_2 \rangle$.

6.4. Выяснить, при каких условиях на мощность множества X пространство $\langle X, \rho_T \rangle$ является

а) полным; б) сепарабельным; в) компактным.

☞ Доказать утверждения 6.5–6.14.

6.5. Для предкомпактности множества M в метрическом пространстве X необходимо, а в случае полноты X и достаточно существования для всякого $\varepsilon > 0$ предкомпактной ε-сети, т. е. предкомпактного множества $N \subset X$ такого, что

$$M \subset \bigcup_{x \in N} B(x, \varepsilon).$$

6.6. Если множество M для некоторого $\varepsilon > 0$ имеет ε-сеть, то можно построить 2ε-сеть из элементов M.

6.7. Множество $M \subset \ell_p^n$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в ℓ_p^n.

6.8. Множество $M \subset c_0$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в c_0 и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, n > N \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M$$

$$|\xi_n| < \varepsilon.$$

6.9. Множество $M \subset c_0$ предкомпактно $\iff$

$$\exists\, x_0 = \{\xi_k^0\} \in c_0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M \quad |\xi_n| \leqslant |\xi_n^0|.$$

6.10. Множество $M \subset c$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в c и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m > N \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M$$

$$|\xi_n - \xi_m| < \varepsilon.$$

6.11. Множество $M \subset \ell_p$, $1 \leqslant p < \infty$, предкомпактно $\iff$ оно ограничено в ℓ_p и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} |\xi_k|^p < \varepsilon.$$

6.12. *Критерий М. Рисса.* Множество $M \subset L_p[a,b]$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в $L_p[a,b]$ и равностепенно непрерывно в среднем, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, h,\ |h| < \delta, \quad \forall\, x \in M$$

$$\int_a^b |x(t+h) - x(t)|^p\, dt < \varepsilon$$

(считаем $x(t) = 0$, если $t \notin [a,b]$).

6.13. *Критерий А. Н. Колмогорова.* Множество $M \subset L_p[a,b]$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в $L_p[a,b]$ и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, h,\ 0 < h < \delta, \quad \forall\, x \in M$$

$$\int_a^b |x_h(t) - x(t)|^p\, dt < \varepsilon,$$

где

$$x_h(t) = \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} x(\tau)\, d\tau$$

(считаем $x(t) = 0$, если $t \notin [a,b]$).

6.14. Множество $M \subset L_p(\mathbb{R})$ предкомпактно $\iff$ оно ограничено в $L_p(\mathbb{R})$ и равностепенно непрерывно в среднем, т. е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, h,\ |h| < \delta, \quad \forall\, x \in M$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t+h) - x(t)|^p\, dt < \varepsilon$$

и

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, A \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in M$$

$$\int_{-\infty}^{-A} |x(t)|^p\, dt + \int_{A}^{\infty} |x(t)|^p\, dt < \varepsilon.$$

6.15. Доказать, что в метрическом пространстве

а) если множество M предкомпактно, то оно ограниченно;

б) если множество M компактно, то оно замкнуто, а $\langle M, \rho\rangle$ – полное метрическое пространство;

в) множество M компактно тогда и только тогда, когда оно предкомпактно и замкнуто.

6.16. Пусть метрические пространства X и Y гомеоморфны и τ – гомеоморфизм X на Y. Доказать, что множество M предкомпактно в X тогда и только тогда, когда множество $\tau(M)$ предкомпактно в Y.

6.17. Доказать, что предкомпактность (компактность) множества в конечномерном нормированном пространстве эквивалентна его ограниченности (ограниченности и замкнутости).

6.18. Пусть M – некоторое множество алгебраических многочленов степени не выше n. Указать условия на коэффициенты многочленов, необходимые и достаточные для предкомпактности множества M в пространстве $C[a,b]$.

6.19. Доказать, что множество $\{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограниченно, замкнуто, не предкомпактно в пространстве $L_2[a,b]$.

6.20. Являются ли следующие множества предкомпактными (компактными) в пространствах $C[0,1]$ и $L_p[0,1]$:

а) $M = \{t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$; б) $M = \{(\alpha t)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

в) $M = \{\sin nt\}_{n\in\mathbb{N}}$; г) $M = \{\sin \alpha t\}_{\alpha\in[a,b]}$;

д) $M = \{\sin \alpha t\}_{\alpha \in [a,b)}$;

е) $M = \{\sin(t+\alpha)\}_{\alpha \in [a,b)}$; ж) ★ $M = \{\sin(t+n)\}_{n \in \mathbb{N}}$;

з) $M = \left\{e^{t-\alpha}\right\}_{\alpha \in [0,+\infty)}$;

и) $M = \left\{\operatorname{arctg} \alpha \left(t - \dfrac{1}{2}\right)\right\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$;

к) $M = \left\{n \left(\sqrt[3]{t + \dfrac{1}{n}} - \sqrt[3]{t}\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$?

6.21. Являются ли следующие множества предкомпактными (компактными) в пространстве $C[a,b]$:

а) $\left\{x \in C^1[a,b] \colon |x(t)| \leqslant B_0,\ |x'(t)| \leqslant B_1\right\}$;

б) $\left\{x \in C^1[a,b] \colon |x(a)| \leqslant B_0,\ |x'(t)| \leqslant B_1\right\}$;

в) $\left\{x \in C^2[a,b] \colon |x(t)| \leqslant B_0,\ |x'(t)| \leqslant B_1,\ |x''(t)| \leqslant B_2\right\}$;

г)★ $\left\{x \in C^2[a,b] \colon |x(t)| \leqslant B_0,\ |x''(t)| \leqslant B_1\right\}$;

д) $\left\{x \in C^2[a,b] \colon |x'(t)| \leqslant B_0,\ |x''(t)| \leqslant B_1\right\}$;

е) $\left\{x \in C[a,b] \colon |x(t)| \leqslant B_0,\ |x(t_1)-x(t_2)| \leqslant L|t_1-t_2|\right\}$;

ж) $\left\{x \in C[a,b] \colon x(t) = \displaystyle\int_a^t y(\tau)\,d\tau,\ y \in L_1[a,b],\ |y(\tau)| \leqslant B\right\}$?

6.22. Доказать предкомпактность следующих множеств в пространстве $C[0,1]$:

а)★ $\left\{x \in C^1[a,b] \colon \displaystyle\int_0^1 (|x'(t)|^2 + |x(t)|^2)\,dt \leqslant B\right\}$;

б) $\left\{x \in C^1[a,b] \colon \displaystyle\int_0^1 |x'(t)|^p dt \leqslant 1,\ 1 < p < \infty,\ |x(0)| \leqslant 1\right\}$.

6.23. Являются ли следующие множества предкомпактными в пространстве $L_2[0,1]$:

а) $M = \{t^\alpha\}_{\alpha > -\frac{1}{2}}$;

б) $M = \{(\ln t)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$;

в) $M = \Big\{x \in L_2[0,1]\colon$
$$x(t) = \int_0^t y(\tau)\,d\tau,\ \int_0^1 |y(\tau)|^2 d\tau \leqslant 1\Big\}?$$

6.24. Являются ли следующие множества предкомпактными в пространстве $L_2(\mathbb{R})$:

а) $M = \left\{\dfrac{1}{1+(t+\alpha)^2}\right\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$;

б) $M = \left\{\dfrac{t^\beta}{1+(t+\alpha)^2}\right\}_{|\alpha|<1,\,\beta\in(-\frac{1}{4},\frac{1}{2})}$?

6.25. Пусть X – одно из пространств c_0, c, ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$,
$$M = \left\{x \in X\colon |\xi_k| \leqslant k^{-\frac{1}{3}}\right\}.$$

Будет ли множество M компактным в X?

6.26. Доказать, что множество
$$M = \left\{x \in \ell_3\colon \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^3 \ln(k+1) \leqslant 1\right\}.$$

компактно в пространствах c_0, c, ℓ_p $(3 \leqslant p \leqslant \infty)$.

6.27. Доказать, что множество
$$M = \{x \in \ell_p\colon |\xi_k| \leqslant |\xi_k^0|\}$$

компактно в пространствах ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ $\iff$ $x_0 = \{\xi_k^0\} \in \ell_p$.

6.28. Доказать, что множество

$$M = \left\{ x \in \ell_p \colon \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p |\alpha_k| \leqslant 1, \ \alpha_k \neq 0, \ k \in \mathbb{N} \right\}$$

компактно в пространствах ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, $\Longleftrightarrow$ $\alpha_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.

6.29. Доказать, что множество M предкомпактно в пространстве s $\Longleftrightarrow$

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, C_k > 0 \quad \forall\, x = \{\xi_k\} \in M \quad |\xi_k| \leqslant C_k.$$

6.30. Пусть A и B – подмножества нормированного пространства X. Доказать, что

а) A и B – компакты $\Rightarrow$ множество $A + B$ – компакт;

б) A и B – предкомпакты $\Rightarrow$ множество $A + B$ – предкомпакт;

в) A – компакт, B замкнуто $\Rightarrow$ множество $A + B$ замкнуто. Будет ли $A + B$ замкнутым, если A и B замкнуты?

6.31. Всегда ли достигается расстояние между точкой и замкнутым множеством в полном нормированном пространстве?

6.32. Пусть A – компактное, а B – замкнутое множества в метрическом пространстве $\langle X, \rho \rangle$ и $A \cap B = \varnothing$. Доказать, что $\rho(A, B) > 0$.

6.33. Пусть A и B – компактные множества в метрическом пространстве. Доказать, что расстояние между ними достигается на некоторой паре точек.

6.34. Докажите, что в нормированном пространстве расстояние от точки до любого конечномерного линейного подмножества достигается.

Тема 7. Выпуклые множества, подпространства в нормированных пространствах

Определение 7.1. Множество M называется

✓ *выпуклым* в линейном пространстве, если

$$\forall\, x, y \in M \quad \forall\, \alpha \in (0,1) \quad \alpha x + (1-\alpha) y \in M;$$

✓ *строго выпуклым* в нормированном пространстве, если

$$\forall\, x, y \in M \quad \forall\, \alpha \in (0,1) \quad \alpha x + (1-\alpha) y \in \overset{\circ}{M}.$$

Определение 7.2. Нормированное пространство X называется *строго выпуклым*, если его единичный шар $B[0,1]$ строго выпуклое множество.

Определение 7.3. Нормированное пространство X называется *строго нормированным*, если в нем

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|, \quad x \neq 0,\ y \neq 0, \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \lambda > 0 \quad y = \lambda x.$$

Теорема 7.1. *Нормированное пространство строго нормированно* $\Longleftrightarrow$ *оно строго выпукло.*

Определение 7.4. Пусть X – нормированное пространство. Множество $M \subset X$ называется *линейным многообразием*, если

$$\forall\, x, y \in M \quad x + y \in M \quad \text{(линейность)},$$

$$\forall\, x \in M \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{P} \quad \alpha x \in M \quad \text{(однородность)}.$$

Замкнутое линейное многообразие называется *подпространством* X.

Определение 7.5. Пусть M – подмножество линейного пространства X. *Линейной оболочкой* $\langle M \rangle$ множества M называется наименьшее линейное многообразие, содержащее M.

Линейная оболочка любого непустого множества $M \subset X$ обязательно существует и совпадает с пересечением всех линейных многообразий, содержащих M. Линейную оболочку множества M составляет множество всевозможных линейных комбинаций $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$ конечных наборов элементов $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset M$ и коэффициентов $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{P}$.

Определение 7.6. Пусть M – подмножество линейного пространства X. *Выпуклой оболочкой* $\operatorname{conv} M$ множества M называется наименьшее выпуклое множество, содержащее M.

Выпуклая оболочка любого непустого множества $M \subset X$ обязательно существует и совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержащих M. Выпуклую оболочку множества M составляет множество всевозможных выпуклых комбинаций $\sum_{k=1}^{n} \theta_k x_k$ конечных наборов элементов $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset M$ и коэффициентов $\{\theta_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{R}$ таких, что $\theta_k \geqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и $\sum_{k=1}^{n} \theta_k = 1$.

Пример 7.1. Будут ли следующие множества выпуклыми в пространстве $\mathbb{R}^n$:

а) $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^3 \leqslant 1 \right\}$;

б) $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|^{\frac{1}{3}} \leqslant 1 \right\}$?

Решение. а) Заметим, что

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^3 \right)^{\frac{1}{3}} = \|x\|_{\ell_3^n}.$$

Значит, $M = B[0,1] \subset \ell_3^n$. Покажем, что это выпуклое множество.

Пусть $x', x'' \in M$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда для $x = \alpha x' + (1-\alpha)x''$ имеем

$$\|x\|_{\ell_3^n} = \|\alpha x' + (1-\alpha)x''\|_{\ell_3^n} \leqslant \alpha\|x\|_{\ell_3^n} + (1-\alpha)\|x''\|_{\ell_3^n} \leqslant 1,$$

т. е. $x \in B[0,1]$ и множество M выпукло.

б) Покажем, что множество M не является выпуклым. Возьмем $x' = (1,0,0,\ldots,0)$, $x'' = (0,0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Тогда

$$x = \alpha x' + (1-\alpha)x'' = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{2}\right)$$

и

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2^{\frac{2}{3}} > 1,$$

т. е. $x \notin M$, а значит множество M не выпукло.

Пример 7.2. Будет ли множество

$$M = \left\{x \in L_2[-1,1]\colon \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}\, x(t)\, dt = 0\right\}$$

подпространством в пространстве

а) $L_2[-1,1]$; б) $L_1[-1,1]$?

Решение. Из включения $L_2[-1,1] \subset L_1[-1,1]$ (см. задачу 2.24) следует, что $M \subset L_2[-1,1] \subset L_1[-1,1]$.

Множество M – линейное многобразие, так как для любых $x_1, x_2 \in M$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{P}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}(\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t))dt = 0.$$

Докажем, что множество M замкнуто в пространстве $L_2[-1,1]$ и незамкнуто в пространстве $L_1[-1,1]$.

а) Пусть $\{x_n\} \subset M$ и $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ в пространстве $L_2[-1,1]$. Неравенство Коши – Буняковского дает следующую оценку:

$$\left|\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}\, x(t)\, dt\right| = \left|\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}\, (x(t) - x_n(t))\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{|t|}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^{1} |x(t) - x_n(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|\frac{1}{\sqrt[4]{|t|}}\right\| \cdot \|x - x_n\|.$$

Следовательно, $x \in M$ и множество M замкнуто в пространстве $L_2[-1,1]$, а значит является подпространством в $L_2[-1,1]$.

б) Рассмотрим последовательность $\{x_n\} \subset M$,

$$x_n(t) = \begin{cases} -|t|^{-\frac{3}{4}}, & t \in \left[-1, -\dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & t \in \left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right], \\ |t|^{-\frac{3}{4}}, & t \in \left(\dfrac{1}{n}, 1\right], \end{cases}$$

и элемент $x(t) = \operatorname{sgn} t \cdot |t|^{-\frac{3}{4}} \in L_1[-1,1]$. В пространстве $L_1[-1,1]$

$$\|x_n - x\| = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |t|^{-\frac{3}{4}}\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Однако $x \notin L_2[-1,1]$, а значит, $x \notin M$. Это означает, что множество M незамкнуто, следовательно, оно не является подпространством в $L_1[-1,1]$. ✠

Пример 7.3. Доказать, что пространство $C[a,b]$ не является строго нормированным.

Решение. Достаточно привести пример отрезка $[x_1, x_2]$, который принадлежит единичной сфере $S[0,1]$ пространства $C[a,b]$ (см. задачу 7.15). Рассмотрим две функции:

$$x_1(t) = \frac{t-a}{b-a}, \quad x_2(t) \equiv 1.$$

Обе функции линейные и $x_1(a) = 0$, $x_1(b) = 1$, следовательно, $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$, т.е. $x_1, x_2 \in S[0,1]$. Для функции

$$\varphi_\alpha(t) = \alpha x_1(t) + (1-\alpha)x_2(t) = \alpha\frac{t-a}{b-a} + (1-\alpha), \quad \alpha \in [0,1],$$

имеем $\varphi_\alpha(a) = 1 - \alpha$, $\varphi_\alpha(b) = 1$. Так как φ_α – линейная функция, то $\|\varphi_\alpha\| = 1$. Следовательно, $\varphi_\alpha \in S[0,1]$ для любого $\alpha \in [0,1]$. Значит, $[x_1, x_2] \in S[0,1]$ и пространство $C[a,b]$ не является строго нормированным. ✌

7.1. Доказать, что пересечение любого семейства выпуклых множеств из линейного пространства – выпуклое множество. Является ли выпуклым объединение двух выпуклых множеств?

7.2. Пусть $\{M_k\}_{k=1}^n$ – семейство выпуклых множеств из линейного пространства над полем $\mathbb{P}$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{P}$. Доказать, что множество

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k M_k$$

выпукло.

7.3. Множество $x_0 + L$, где L – линейное многообразие из линейного пространства, называется *афинным многообразием*. Доказать, что всякое афинное многообразие является выпуклым множеством. Будет ли оно линейным многообразием?

7.4. Доказать, что замыкание выпуклого множества из нормированного пространства – выпуклое множество. Является ли замкнутой выпуклая оболочка замкнутого множества?

7.5. Доказать, что внутренность выпуклого множества из нормированного пространства выпукла.

7.6. Доказать, что шары $B[x_0,r]$, $B(x_0,r)$ из нормированного пространства выпуклы. Будет ли выпуклым множеством сфера $S[x_0,r]$?

7.7. Доказать, что аксиома треугольника в определении нормы эквивалентна выпуклости шара $B[0,1]$.

7.8. В пространстве ℓ_1 найти плотное выпуклое множество, не совпадающее с ℓ_1.

7.9. Будут ли следующие множества выпуклыми в вещественном пространстве $C[a,b]$:

а) алгебраические многочлены степени точно n;

б) алгебраические многочлены степени не выше n;

в) непрерывные возрастающие функции;

г) непрерывные монотонные функции;

д) $M = \{x \in C[a,b]\colon \|x\|^p_{L_p[a,b]} \leqslant r\}$;

е) $M = \{x \in C[a,b]\colon x(t) < x_0(t),\ t \in [a,b]\}$, где x_0 – некоторая функция из $C[a,b]$?

7.10. Доказать, что следующие множества являются выпуклыми в пространстве ℓ_2:

а) параллелепипед

$$\{x = \{\xi_k\} \in \ell_2\colon |\xi_k| \leqslant \alpha_k,\ \{\alpha_k\} \in \ell_2\};$$

б) эллипсоид

$$\left\{x \in \ell_2\colon \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\xi_k}{\alpha_k}\right|^2 \leqslant 1,\ \{\alpha_k\} \in \ell_\infty,\ \alpha_k \neq 0\right\}.$$

Компактны ли они?

7.11. Пусть X_0 – конечномерное линейное подмножество в нормированном пространстве X. Доказать, что X_0 – подпространство в X.

7.12. Пусть L_1, L_2 – подпространства в нормированном пространстве X, причем L_1 конечномерно. Доказать, что множество $L_1 + L_2$ является подпространством в X.

7.13. Будут ли следующие множества подпространствами в пространстве $C[-1,1]$ над полем $\mathbb{R}$:

а) монотонные функции из $C[-1,1]$;

б) четные функции из $C[-1,1]$;

в) алгебраические многочлены степени не выше n;

г) алгебраические многочлены;

д) непрерывно дифференцируемые функции;

е) $\{x \in C[-1,1] \colon x(0) = 0\}$;

ж) $\left\{x \in C[-1,1] \colon \int_{-1}^{1} x(t)\,dt = 0\right\}$;

з) $\left\{x \in C[-1,1] \colon \int_{-1}^{1} \frac{x(t)}{t}\,dt = 0\right\}$;

и)★ $\left\{x \in C[-1,1] \colon \exists\, B_x > 0\ \forall\, t_1, t_2 \in [-1,1]\right.$

$$\left. |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant B_x |t_1 - t_2|^{\alpha}\right\}$$

для некоторого $0 < \alpha \leqslant 1$?

7.14. Будет ли множество M подпространством в пространстве X, если

а)★ $M = \left\{x = \{\xi_k\} \in \ell_p \colon \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0\right\}$,

$X = \ell_p$, $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$;

б) $M = c_0$, $X = c$;

в) $M = c$, $X = \ell_\infty$;

г) $M = \ell_1$, $X = c_0$;

д) $M = \left\{x = \{\xi_k\}_{k=1}^{n} \colon \xi_k \geqslant 0,\ 1 \leqslant k \leqslant n\right\}$, $X = \ell_2^n$;

е) $M = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,\xi_k = c \right\}, \ X = \ell_2;$

ж) $M = L_q[a,b], \ X = L_p[a,b], \ 1 \leqslant p < q < \infty?$

7.15. Доказать, что нормированное пространство является строго нормированным $\Longleftrightarrow$ сфера $S[0,1]$ не содержит никакого отрезка.

7.16. Покажите, что пространства ℓ_p^n, ℓ_p, $L_p[a,b]$ – строго нормированные пространства при $1 < p < \infty$ и не являются строго нормированными, если $p = 1$ или $p = \infty$.

7.17. Покажите, что пространства c_0, c, $C[a,b], C^k[a,b]$ не являются строго нормированными.

7.18. Пусть X – строго выпуклое нормированное пространство, множество $M \subset X$ выпукло, $x_0 \in X \setminus M$ и

$$N = \{x \in M \colon \rho(x_0, M) = \rho(x_0, x)\} \neq \varnothing.$$

Доказать, что мощность множества N равна единице.

7.19. Привести пример нормированного пространства X, выпуклого множества $M \subset X$ и точки $x_0 \in X \setminus M$ таких, что расстояние от точки x_0 до множества M реализуется неединственным образом.

7.20. Достигается ли расстояние от элемента x_0 до множества M, а если достигается, единственный ли ближайший элемент?

а) $X = C[-1,1], \ x_0(t) = 1,$

$M = \{x \in C[-1,1] \colon x(0) = 0\};$

б) $X = \widetilde{L}_2[-1,1], \ x_0(t) = 1,$

$M = \left\{x \in \widetilde{L}_2[-1,1] \colon x(0) = 0\right\};$

в) $X = L_2[-1,1]$, $x_0(t) = e^t$,

$$M = \left\{ x \in L_2[-1,1] \colon x(t) = \sum_{k=1}^{10} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right\};$$

г) $X = \ell_1^2$, $x_0 = (1,0)$,

$$M = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2) \in \ell_1^2 \colon \xi_1 = 0 \right\};$$

д) $X = \ell_1^2$, $x_0 = (1,0)$,

$$M = \left\{ x = (\xi_1, \xi_2) \in \ell_1^2 \colon \xi_1 = \xi_2 \right\}.$$

7.21. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ – эквивалентные нормы на линейном пространстве X, пространство X строго выпукло в смысле одной из этих норм. Будет ли оно строго выпукло в смысле другой?

Тема 8. Евклидовы и гильбертовы пространства

Определение 8.1. Пусть X – линейное пространство над полем $\mathbb{P}$. Отображение $(\cdot,\cdot)\colon X^2 \to \mathbb{P}$ называется *скалярным произведением* на X, если

1) $\forall\, x \in X \quad (x,x) \geqslant 0$;

2) $(x,x) = 0 \iff x = 0$;

3) $\forall\, x,y,z \in X \quad \forall\, \lambda,\mu \in \mathbb{P} \quad (\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z)$ (линейность по первому аргументу);

4) $\forall\, x,y \in X \quad (x,y) = \overline{(y,x)}$ (здесь черта означает комплексное сопряжение).

Определение 8.2. Линейное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым пространством.*

Теорема 8.1. *Для любых двух элементов x, y евклидова пространства X выполняется неравенство Коши–Буняковского*

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)};$$

выражение $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ задает норму на X.

Определение 8.3. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым пространством.*

Определение 8.4. Пусть X – евклидово пространство.

✓ Говорят, что элементы $x, y \in X$ *ортогональны* и пишут $x \perp y$, если $(x,y) = 0$. Множество элементов, ортогональных множеству $M \subset X$, обозначают $M^\perp$, т. е.

$$M^\perp = \{x \in X : \forall\, y \in M \quad x \perp y\}.$$

Если $x \in M^\perp$, пишут также $x \perp M$.

- ✓ Если M – подпространство X, то множество $M^{\perp}$ называют *ортогональным дополнением M (до X)*.

- ✓ Система ненулевых векторов $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X$ называется *ортогональной*, если

$$\forall\, \alpha,\beta \in A \quad (\alpha \neq \beta \quad \Longrightarrow \quad e_\alpha \perp e_\beta).$$

- ✓ Система векторов называется *ортонормированной*, если она ортогональна и нормирована, т. е. если $\{e_\alpha\}$ – ортогональная система, то $\left\{\dfrac{e_\alpha}{\|e_\alpha\|}\right\}$ – ортонормированная система.

- ✓ Ортонормированная (ортогональная) система $\{e_\alpha\}$ называется *ортонормированным* (*ортогональным*) *базисом* евклидова пространства X, если

$$\forall\, x \in X\ \exists\, \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_{\alpha_n}.$$

Теорема 8.2 (Шмидта об ортогонализации). *Для любой счетной линейно независимой системы векторов $\{x_n\}$ в евклидовом пространстве X существует ортонормированная система векторов $\{e_n\}$ такая, что*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n\rangle.$$

Ортогонализация проводится по следующей схеме. Полагаем $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$. Если построены элементы $e_1, \ldots, e_n$, то

$$\widetilde{e}_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (x_{n+1}, e_k) e_k, \qquad e_{n+1} = \frac{\widetilde{e}_{n+1}}{\|\widetilde{e}_{n+1}\|}.$$

Определение 8.5. Пусть M – линейное многообразие в евклидовом пространстве X. *Ортогональной проекцией вектора x на M* называется вектор $y \in M$ такой, что $(x-y) \perp M$. Ортогональную проекцию x на M будем обозначать $\mathrm{Pr}_M\,(x)$.

Определение 8.6. Пусть $\langle X, \rho \rangle$ – метрическое пространство, $x \in X$ и $M \subset X$. Величина

$$\rho(x, M) = \inf\{\rho(x, y) \colon y \in M\}$$

называется *расстоянием от элемента x до множества M* или *наилучшим приближением элемента x множеством M*. Если существует элемент $y \in M$ такой, что $\rho(x, y) = \rho(x, M)$, то говорят, что расстояние от x до M *достигается*, а y называют *элементом наилучшего приближения элемента x множеством M*.

Теорема 8.3. *Если M – подпространство евклидова пространства X, то для любого $x \in X$ существует элемент наилучшего приближения $y \in M$; при этом $y = \mathrm{Pr}_M\,(x)$.*

Определение 8.7. Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве X. *Рядом Фурье элемента $x \in X$ (по ортонормированной системе $\{e_n\}$)* называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\, e_n, \quad \text{где} \quad c_n(x) = (x, e_n).$$

Теорема 8.4 (экстремальное свойство коэффициентов ряда Фурье). *Если $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в евклидовом пространстве X, то*

$$\widehat{x}_m = \sum_{n=1}^{m} c_n(x)\, e_n = \mathrm{Pr}_{\langle e_1, e_2, \ldots, e_m \rangle}\,(x).$$

Таким образом, $\widehat{x}_m$ – элемент наилучшего приближения вектора x элементами из $\langle e_1, e_2, \ldots, e_m \rangle$.

Теорема 8.5. *Если M – подпространство гильбертова пространства X, то $X = M \oplus M^{\perp}$.*

Пример 8.1. В пространстве ℓ_2 найти ортогональное дополнение до подпространства

$$L = \Big\{x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \xi_1 - 2\xi_3 + 3\xi_4 = 0\Big\},$$

ортогональную проекцию элемента $x_0 = \left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ на L, расстояние от x_0 до L и до $L^\perp$.

Решение. Из определения подпространства L следует, что

$$L = \{z_0\}^\perp, \quad \text{где} \quad z_0 = (1, 0, -2, 3, 0, 0, \ldots).$$

Докажем, что $L^\perp = \langle z_0 \rangle$. Используя задачу 8.14, получаем, что $\{z_0\}^\perp = \overline{\langle z_0 \rangle}^\perp$. Так как одномерное линейное множество замкнуто в пространстве ℓ_2, то (см. задачу 8.20)

$$L^\perp = \{z_0\}^{\perp\perp} = \overline{\langle z_0 \rangle}^{\perp\perp} = \overline{\langle z_0 \rangle} = \langle z_0 \rangle.$$

Найдем ортогональную проекцию элемента x_0 на L. Заметим, что L – подпространство в ℓ_2 (см. задачу 8.13). Значит, $\ell_2 = L \oplus L^\perp = L \oplus \langle z_0 \rangle$, а $x_0 = y + z$, где $y \in L, z \in \langle z_0 \rangle$. Следовательно,

$$\mathrm{Pr}_L\,(x_0) = y = x_0 - \alpha z_0.$$

Чтобы найти α, запишем скалярное произведение

$$0 = (y, z_0) = (x_0, z_0) - \alpha(z_0, z_0),$$

отсюда

$$\alpha = \frac{(x_0, z_0)}{(z_0, z_0)} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{14} = -\frac{1}{63}.$$

Итак,

$$\mathrm{Pr}_L\,(x_0) = \left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\}_{k=1}^{\infty} + \frac{1}{63}(1, 0, -2, 3, 0, 0, \ldots).$$

Для нахождения $\rho(x_0, L)$ применим теорему Пифагора (см. задачу 8.12 «а»): $\|x_0\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$. Так как

$$\|x_0\|^2 = \frac{1}{8}, \quad \|z\|^2 = \|\alpha z_0\|^2 = \frac{1}{63^2} \cdot 14 = \frac{2}{567},$$

то

$$\rho(x_0, L) = \|z\| = \frac{2}{567},$$

$$\rho(x_0, L^{\perp}) = \|y\| = \sqrt{\|x_0\|^2 - \|z\|^2} = \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{2}{567}} = \frac{1}{18}\sqrt{\frac{551}{14}}.$$ ✖

Пример 8.2. В пространстве $L_2[-1, 1]$ найти элемент наилучшего приближения для $x(t) = 1 + t^{-\frac{1}{3}}$ подпространством $L = \langle t, t^2, t^3 \rangle$.

Решение. Множество L – подпространство гильбертова пространства $L_2[-1, 1]$, поэтому по теореме 8.3 существует $y \in L$ – элемент наилучшего приближения вектора x элементами из L и $y = Pr_L(x)$. Ортонормируем линейно независимую систему $\{t, t^2, t^3\}$ в пространстве $L_2[-1, 1]$. Новую систему обозначим $\{e_1, e_2, e_3\}$. Тогда $L = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ и по теореме 8.4

$$y = \mathrm{Pr}_L(x) = \sum_{k=1}^{3} (x, e_k) e_k.$$

Найдем y. Пусть $x_k(t) = t^k$, $k = 1, 2, 3$. Элементы x_1 и x_2 ортогональны. Подберем $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ так, чтобы элемент $\widetilde{x}_3 = x_3 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ был ортогонален x_1 и x_2, т. е. чтобы выполнялись соотношения

$$0 = (\widetilde{x}_3, x_1) = \int_{-1}^{1} (t^3 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2)\, t\, dt = \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\alpha_1,$$

$$0 = (\widetilde{x}_3, x_2) = \int_{-1}^{1} (t^3 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2)\, t^2\, dt = \frac{2}{5}\alpha_2.$$

Отсюда $\alpha_1 = -\frac{3}{5}$, $\alpha_2 = 0$ и $\widetilde{x}_3 = t^3 - \frac{3}{5}t$. Система функций $\{x_1, x_2, \widetilde{x}_3\}$ ортогональна. Чтобы нормировать ее, вычислим нормы

$$\|x_1\| = \left(\int_{-1}^{1} t^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \|x_2\| = \left(\int_{-1}^{1} t^4\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}},$$

$$\|\widetilde{x}_3\| = \left(\int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

В результате отсюда получаем ортонормированную систему $\{e_1, e_2, e_3\}$, где

$$e_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,t, \quad e_2 = \sqrt{\frac{5}{2}}\,t^2, \quad e_3 = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right).$$

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$(x, e_1) = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}\left(1 + t^{-\frac{1}{3}}\right)t\,dt = \frac{6}{5}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$(x, e_2) = \sqrt{\frac{5}{2}}\int_{-1}^{1}\left(1 + t^{-\frac{1}{3}}\right)t^2\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{2}},$$

$$(x, e_3) = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\int_{-1}^{1}\left(1 + t^{-\frac{1}{3}}\right)\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)dt = -\frac{24}{55}\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Итак,

$$y = \frac{9}{5}t + \frac{5}{3}t^2 - \frac{42}{11}\left(t^3 - \frac{3}{5}t\right) = \frac{45}{11}t + \frac{5}{3}t^2 - \frac{42}{11}t^3.$$ ✌

☞ В евклидовом пространстве проверить тождества 8.1–8.3.

8.1. Равенство параллелограмма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

8.2. $2(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$, если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$.

8.3. Полярное тождество

$$4(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\,\|x + iy\|^2 - i\,\|x - iy\|^2,$$

если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$.

☞ Доказать утверждения 8.4–8.7.

8.4. ★ В нормированном пространстве X можно ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой в X, т. е. такое, что $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in X$ выполняется равенство параллелограмма (см. задачу 8.1).

8.5. Скалярное произведение в евклидовом пространстве непрерывно по совокупности переменных.

8.6. Пусть X – евклидово пространство, последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\} \subset B[0, 1] \subset X$ таковы, что $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Тогда $\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

8.7. Евклидово пространство является строго нормированным.

8.8. Проверить, что следующие линейные пространства над полем $\mathbb{P}$ являются гильбертовыми:

а) ℓ_2^n, если $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \overline{\eta}_k$;

б) ℓ_2, если $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k$;

в) $L_2[a, b]$, если $(x, y) = \displaystyle\int_a^b x(t)\overline{y(t)}\,dt$;

г) $L_2(\mathbb{R})$, если $(x, y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\overline{y(t)}\,dt$;

д) H_c – линейное пространство функций, определенных на $\mathbb{R}$, отличных от нуля на не более чем счетном множестве точек и таких, что $\sum\limits_t |x(t)|^2 < \infty$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_t x(t)\overline{y(t)}$.

8.9. Доказать, что пространство H_c (см. задачу 8.8) несепарабельно.

8.10. Показать, что в нормированных пространствах c_0, c, $C[a, b]$, ℓ_p^n, ℓ_p, $L_p[a, b]$, $L_p(\mathbb{R})$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $p \neq 2$, нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормами этих пространств.

8.11. Доказать, что следующие линейные пространства над полем $\mathbb{P}$ являются евклидовыми, но не гильбертовыми:

а) пространство непрерывных на $[a, b]$ функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt;$$

б) пространство суммируемых по модулю последовательностей со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\,\overline{\eta_k};$$

в) $\widetilde{W}_2^1[a, b]$ – пространство непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_a^b \left(x(t)\,\overline{y(t)} + x'(t)\,\overline{y'(t)}\right)\,dt.$$

8.12. Пусть X – евклидово пространство, $x, y \in X$. Доказать, что а) если $x \perp y$, то $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (теорема Пифагора);

б) если $\mathbb{P} = \mathbb{R}$, то справедлива теорема, обратная теореме Пифагора;

в) если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то теорема, обратная теореме Пифагора, несправедлива;

г) если $\mathbb{P} = \mathbb{C}$, то $x \perp y$ тогда и только тогда, когда $\|\lambda x + \mu y\|^2 = \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

☞ Пусть X евклидово пространство, $M, N \subset X$. Доказать утверждения 8.13–8.17, 8.19, 8.20.

8.13. $M^\perp$ – подпространство в X.

8.14. $M^\perp = \overline{\langle M \rangle}^\perp$ и $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$.

8.15. Если $M \subset N$, то $M^\perp \supset N^\perp$.

8.16. Пусть $\overline{\langle M \rangle} = X$. Тогда из условия $x \perp M$ следует, что $x = 0$.

8.17. Пусть X – гильбертово пространство. Тогда $\overline{\langle M \rangle} = X$ тогда и только тогда, когда из условия $x \perp M$ следует, что $x = 0$.

8.18. Показать, что в неполном евклидовом пространстве X не верно, что $\overline{\langle M \rangle} = X$, если из условия $x \perp M$ следует, что $x = 0$.

8.19. Всякое неполное евклидово пространство X содержит замкнутое подпространство X_0 такое, что $X_0 \neq X$ и $X_0^\perp = \{0\}$.

8.20. Пусть X – гильбертово пространство. Тогда $M^{\perp\perp} = \overline{\langle M \rangle}$.

8.21. Привести пример евклидова пространства X и множества $M \subset X$, для которого $M^{\perp\perp} \neq \overline{\langle M \rangle}$.

8.22. Пусть M и N – подпространства в гильбертовом пространстве X, $M \perp N$. Доказать, что $M + N$ – подпространство в X.

8.23. Доказать, что для любого $\sigma \in (0, \pi)$ и любого $N \in \mathbb{N}$ система $M = \{e^{int}\}_{n=N}^{\infty}$ полна в $L_2[-\sigma, \sigma]$, т. е. $\overline{\langle M \rangle} = L_2[-\sigma, \sigma]$.

8.24. В пространстве ℓ_2 рассмотрим подпространства

$$M = \Big\{x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon x = (\xi_1, 0, \xi_3, 0, \xi_5, 0, \ldots)\Big\},$$

$$N = \left\{x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon x = \left(\xi_1, \xi_1, \xi_3, \frac{\xi_3}{3}, \xi_5, \frac{\xi_5}{5}, \ldots\right)\right\}.$$

Показать, что $\overline{M + N} = \ell_2$, но $M + N \neq \ell_2$, т. е. множество $M + N$ не является подпространством в ℓ_2.

8.25. В пространстве $L_2[0, 1]$ найти $M^{\perp}$, если M – множество

а) многочленов от t;

б) многочленов от t^2;

в) алгебраических многочленов с нулевым свободным членом;

г) алгебраических многочленов с нулевой суммой коэффициентов;

д) функций из пространства $L_2[0, 1]$, которые равны нулю почти всюду на отрезке $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$;

е) функций $x \in L_2[0, 1]$ таких, что $\displaystyle\int_0^1 x(t)\, dt = 0$.

8.26. В пространстве $\widetilde{L}_2[-1, 1]$ найти $M^{\perp}$, если M – множество функций из $\widetilde{L}_2[-1, 1]$, равных нулю

а) при $t \leqslant 0$; б) при $t = 0$.

8.27. В пространстве ℓ_2 найти $M^{\perp}$, если

а) $M = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum\limits_{k=1}^{10} \xi_k = 0 \right\}$;

б) $M = \Big\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon$
$$\xi_2 - 3\xi_3 - \xi_5 = 0,\ \xi_1 + 2\xi_2 + 4\xi_3 = 0 \Big\};$$

в) $M = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k = 0 \right\}$;

г) $M = \left\{ x_n = \left(1, \dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^{2n}}, \dfrac{1}{2^{3n}}, \ldots \right),\ n \in \mathbb{N} \right\}$.

8.28. Пусть H_0 – подпространство в гильбертовом пространстве H, $x \in H$ и $x = y + z$, где $y \in H_0$, $z \in H_0^{\perp}$. Доказать, что
$$\rho(x, H_0) = \rho(x, y) = \|z\|,$$
$$\rho(x, H_0^{\perp}) = \rho(x, z) = \|y\|.$$

8.29. Пусть H_0 – одномерное подпространство в гильбертовом пространстве H, $x_0 \in H_0$, $x_0 \neq 0$. Доказать, что для любого $x \in H$
$$\rho(x, H_0^{\perp}) = \frac{|(x, x_0)|}{\|x_0\|}.$$

8.30. В пространстве $L_2[0,1]$ найти $\rho(x, H_1)$, если $x(t) = t^2$,
$$H_1 = \left\{ x \in L_2[0,1] \colon \int_0^1 x(t)\, dt = 0 \right\}.$$

8.31. В пространстве ℓ_2 найти $\rho(x, H_1)$, если $x = (1, 0, 0, \ldots)$,
$$H_1 = \left\{ x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \sum_{k=0}^{10} \xi_k = 0 \right\}.$$

8.32. Найти ортогональную проекцию элемента

$$x_0 = \left\{\frac{1}{k}\right\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$$

на подпространство L, а также расстояния $\rho(x_0, L)$ и $\rho(x_0, L^{\perp})$, если

а) $L = \Big\{x = \{\xi_k\} \in \ell_2 \colon \xi_1 - 3\xi_3 + \xi_5 = 0\Big\}$;

б) $L = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$, где

$$x_1 = (1, 0, -1, 0, 0, \ldots),$$
$$x_2 = (0, 1, 0, -1, 0, 0, \ldots),$$
$$x_3 = (0, 0, 1, 0, -1, 0, 0, \ldots).$$

8.33. В пространстве $L_2[-1,1]$ построить ортогональную проекцию элемента $x \in L_2[-1,1]$ на подпространство четных функций.

8.34. Для $x \in L_2[-1,1]$ найти многочлен наилучшего приближения $p \in P_n$, $n = 0, 1, 2$, если

а) $x(t) = e^t$; б) $x(t) = t^3$.

8.35. Построить пример евклидова пространства X, линейного многообразия $L \subset X$ и элемента $x \in X$, для которых не существует ортогональной проекции x на L.

8.36. Доказать, что в сепарабельном евклидовом пространстве всегда существует ортонормированный базис.

8.37. Доказать, что во всяком гильбертовом пространстве существует ортонормированный базис.

8.38. Привести пример евклидова пространства, в котором нет ни одного ортонормированного базиса.

8.39. Найти ортонормированный базис в пространстве H_c (см. задачу 8.8 «д»).

☞ Доказать утверждения 8.40–8.45.

8.40. Система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \left\{\frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \left\{\frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

является ортонормированным базисом в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$, если $\mathbb{P}=\mathbb{R}$.

8.41. Система функций $\left\{e^{2\pi int}\right\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированным базисом в пространстве $L_2[0,1]$ над $\mathbb{C}$.

8.42. Система функций $\{\cos nt\}_{n=0}^{\infty}$ является ортогональным базисом в пространстве $L_2[0,\pi]$ над $\mathbb{R}$. Замыкание множества $\overline{\langle\{\cos nt\}_{n=0}^{\infty}\rangle}$ есть множество четных функций в $L_2[-\pi,\pi]$.

8.43. Система функций $\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}$ является ортогональным базисом в пространстве $L_2[0,\pi]$ над $\mathbb{R}$. Замыкание множества $\overline{\langle\{\sin nt\}_{n=1}^{\infty}\rangle}$ есть множество нечетных функций в $L_2[-\pi,\pi]$.

8.44. В пространстве $L_2[a,b]$ есть ортонормированные базисы, состоящие из

а) алгебраических многочленов;

б) ступенчатых функций;

в) тригонометрических многочленов;

г) функций, лежащих в заданном плотном линейном многообразии.

8.45. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим систему функций Радемахера

$$x_n(t) = \begin{cases} (-1)^k, & t\in\left(\dfrac{k}{2^n},\dfrac{k+1}{2^n}\right), \\ 0, & t=\dfrac{k}{2^n}, \end{cases}$$

если $n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 0, 1, 2, 2^2, \dots, 2^{n-1}$. Эта система ортонормирована в пространстве $L_2[0, 1]$, но не является базисом.

8.46. Найти замыкание множества M в пространстве $L_2[-1, 1]$, если

а) $M = \langle \{t^{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle$; б) $M = \langle \{t^{2k-2}\}_{k\in\mathbb{N}} \rangle$.

8.47. Многочлены $p_n(t)$, получающиеся при ортогонализации системы функций $1, t, t^2, \dots$ в пространстве $L_2[-1, 1]$, называют *многочленами Лежандра*. Показать, что

$$p_n(t) = c_n \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,$$

и система многочленов Лежандра является ортогональным базисом в пространстве $L_2[-1, 1]$.

8.48. В пространстве $L_2[-1, 1]$ найти $M^\perp$, если $M = \{\cos \pi t, t\}$.

8.49. В линейном пространстве функций, измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}$ и таких, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} |x(t)|^2 dt$$

конечен, положим

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} x(t)\, y(t)\, dt.$$

Полученное пространство $L_{2,q}(\mathbb{R})$ будет гильбертовым с весом $q(t) = e^{-t^2}$. Ортогонализация системы функций $1, t, t^2, \dots$ в пространстве $L_{2,q}(\mathbb{R})$ с весом $q(t)$ дает систему многочленов Чебышева–Эрмита, полную в $L_{2,q}(\mathbb{R})$. Найти первые три многочлена этой системы.

8.50. В линейном пространстве функций, измеримых по Лебегу на $[0, +\infty)$ и таких, что интеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} |x(t)|\, dt$$

конечен, положим

$$(x, y) = \int_0^{+\infty} e^{-t} x(t)\, y(t)\, dt.$$

Полученное пространство $L_{2,p}(0, +\infty)$ будет гильбертовым с весом $p(t) = e^{-t}$. Ортогонализация системы функций $1, t, t^2, \ldots$ в пространстве $L_{2,p}(0, +\infty)$ с весом $p(t) = e^{-t}$ дает систему многочленов Чебышева – Лагерра, полную в $L_{2,p}(0, +\infty)$. Найти первые три многочлена этой системы.

Ответы

Тема 1

1.6. а) Да; б) нет. **1.7.** Да. **1.8.** Да.

1.12. f строго монотонна. **1.13.** f инъективно.

1.14. а) f знакопостоянна и ни на каком интервале не обращается в 0;

б) f эквивалентна знакопостоянной функции и ни на каком интервале не эквивалентна 0.

1.16. а), б) Нет; в), г) да.

1.17. а), в) $\alpha, \beta > 0$; б) $\alpha, \beta \neq 0$.

1.21. а), в) Нет; б), г), д) да.

1.22. а), б), г), д) Да; в) нет.

1.28. Нет. **1.30.** Да. **1.35.** Нет. **1.36.** Да.

1.37. В пространстве $\langle X, \rho_T \rangle$ все множества открыты и замкнуты одновременно.

1.42. Утверждения 1.38, 1.39 – да; 1.40, 1.41 – не всегда.

1.43. $\varnothing$, X.

1.44. а) Не ограниченное, не открытое, не замкнутое;
б), д) ограниченное, не открытое, не замкнутое;
г) не ограниченное, открытое, не замкнутое;
в) не ограниченное, не открытое, замкнутое.

1.45. а) Ограниченное, открытое, не замкнутое;
б) ограниченное, не открытое, не замкнутое;
в), д) не ограниченное, не открытое, замкнутое;
г) не ограниченное, не открытое, не замкнутое;
е) не ограниченное, открытое, не замкнутое.

1.46. а) Не открытое, замкнутое;
б), в) не открытое, не замкнутое.

1.47. M может быть как открытым, так и замкнутым;
N замкнуто (в том числе пустое множество).

1.48. а), б) Да.

Тема 2

2.9. Эквивалентна равномерной сходимости самой последовательности и последовательностей производных с 1-й по k-ю.

2.10. Да.

2.12. а) Ни в каких; б) во всех, кроме ℓ_1;
в) ни в каких, если $\alpha \leqslant 0$; в c_0, c, m, если $\alpha > 0$; в ℓ_p, если $\alpha p > 1$;
г) в c_0, c, m; д) в c, m; е) в m;
ж) ни в каких, если $\alpha \leqslant 0$; в c_0, c, m, если $\alpha > 0$; в ℓ_p, если $\alpha p > 1$.

2.13. а) Да; б) нет.

2.14. а) Да, во всех; б) да, во всех, кроме $C^1[0,1]$;
в) нет, во всех, кроме $L_1[0,1]$;
г) нет.

2.27. $\|\cdot\|_\infty$ сильнее $\|\cdot\|_p$.

2.28. а) Сходится в c_0, c, ℓ_p, $3 < p \leqslant \infty$;
б), в) сходится в $L_p[0,1]$, $1 \leqslant p < 2$.

2.30. а), б) x_n – при $\alpha p < 1$, y_n – при $\alpha < 0$.

2.31. $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны, $\|\cdot\|_2$ слабее их.

2.33. ρ_1 и ρ_3 эквивалентны, ρ_2 сильнее ρ_1 и ρ_3.

2.34. ρ_∞ сильнее ρ_s.

2.36. Открытость и замкнутость.

2.37. Все метрические пространства, метрика в которых эквивалентна тривиальной метрике ρ_T.

Тема 3

3.1. Да.

3.2. Множество P_n нигде не плотно в $C[a,b]$; множество P всюду плотно в $C[a,b]$.

3.8. Нет.

Тема 4

4.10. $L_1[a,b]$. **4.11.** а) c_0; б) ℓ_1.

4.12. Пространства $\langle c_0, \|\cdot\|_c\rangle$ и $\langle c, \|\cdot\|_m\rangle$ являются полными. Для остальных пар $X \subset Y$ пополнением для $\langle X, \|\cdot\|_Y\rangle$ является $\langle Y, \|\cdot\|_Y\rangle$.

4.13. а) $C[a,b]$, $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$;

б) $C^1[a,b]$, $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x'(t)|$;

в) $C[a,b] \times \mathbb{R}$, для $x = (\varphi(t), c) \in C[a,b] \times \mathbb{R}$
$\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |\varphi(t)| + |c|$;

г) пространство функций x, непрерывных на $[a,b]$, непрерывно дифференцируемых на $[c,d]$, и если $[a,b]\cap[c,d] = \varnothing$, то $x(b) = x(c)$ при $b < c$ и $x(a) = x(d)$ при $d < a$; $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[c,d]} |x'(t)|$;

д) $C^2[a,b]$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]} |x''(t)|$;

е) c_0 с нормой $\|x\| = \max\limits_{k} |\xi_k|$;

ж) множество $x = \{\xi_k\}_{k=0}^{\infty} \in \ell_1$ с нормой
$$\|x\| = \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k| + \max_{t\in[-1,1]} \left|\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k t^k\right|.$$

4.14. а) Полное, несепарабельное;
б) полное, сепарабельное;
в) неполное, сепарабельное.

4.15. $\left\{B\left[n, 1+\dfrac{1}{2n}\right]\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

4.18. б), в) Полные, остальные нет;
а) пополнение $\left\langle\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \rho_{|\cdot|}\right\rangle$;
г) пополнение $\langle[0,1], \rho_{|\cdot|}\rangle$;
д), е) пополнение $\langle[-1,0]\cup[1,2], \rho_{|\cdot|}\rangle$;
ж) пополнение $\left\langle\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \{0\}, \rho_{|\cdot|}\right\rangle$.
Метрики для пар «а» и «б», «в» и «г» эквивалентны, для пары «д» и «е» - нет.

4.19. $\{z\in\mathbb{C}\colon |z|=1\}$, $\rho(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$.

4.21. Сепарабельность сохраняется, полнота может не сохраняться.

Тема 5

5.1. а) Да; б) нет.

5.2. а), б) Непрерывно, не является равномерно непрерывным; в) не является непрерывным, не является равномерно непрерывным.

5.6. а), в), д), е) Равномерно непрерывно;
б), г) не является равномерно непрерывным.

5.7. а), б), г) Непрерывно; в) не является непрерывным.

5.8. а) Да; б) нет; в) нет. **5.10.** Нет.

5.12. Нет (см. задачу 5.13).

5.21. а), в) Нет; б) да; г) да при $|\lambda| < 3$.

5.22. $x(t) = -\dfrac{2t}{\lambda} - \dfrac{2}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^2} e^{\lambda t}$.

Тема 6

6.1. а) $X = \langle (0,1], \rho_{|\cdot|} \rangle$, $M = \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$;

б) $X = \langle (0,1], \rho_{|\cdot|} \rangle$, $M = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

6.2. а) Компактно;

б) предкомпактно; компактно $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \{x_n\} = M$;

в) если X – полное, то M – предкомпактно; компактно $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \{x_n\} = M$; если X – неполное, то M необязательно предкомпактно.

6.4. а) Всегда; б) счетно; в) конечно.

6.18. Коэффициенты многочленов ограничены в совокупности.

6.20. а) В $C[0,1]$ не предкомпактно;
в $L_p[0,1]$ предкомпактно, но не компактно;

б) в $C[0,1]$ предкомпактно $\Longleftrightarrow |\alpha| < 1$;
компактно $\Longleftrightarrow \alpha = 0$;
в $L_p[0,1]$ предкомпактно $\Longleftrightarrow |\alpha| \leqslant 1$;
компактно $\Longleftrightarrow \alpha = 0$;

в) во всех не предкомпактно;

г) во всех компактно; д) не предкомпактно;

е) предкомпактно; компактно $\iff b - a \geqslant 2\pi$;

ж), з) во всех предкомпактно, но не компактно;

и) в $C[0,1]$ не предкомпактно;

в $L_p[0,1]$ предкомпактно, но не компактно;

к) в L_p при $1 \leqslant p < \frac{3}{2}$ предкомпактно, но не компактно, в остальных не предкомпактно.

6.21. а)–г) Предкомпактны, но не компактны;
д) не предкомпактно; е), ж) компактно.

6.23. а), б) Нет; в) да. **6.24.** а) Нет; б) да.

6.25. Компактно в c_0, c, ℓ_p, $p > 3$.

6.30. Не всегда. **6.31.** Не всегда.

Тема 7

7.1. Может быть невыпуклым.

7.3. Да, если $x_0 = 0$; нет, если $x_0 \neq 0$.

7.4. Может быть незамкнутой.

7.6. Нет, если $X \neq \{0\}$.

7.8. Все финитные последовательности.

7.9. а), г) Нет; б), в), д), е) да.

7.10. а) Да; б) не всегда.

7.13. а), г), д), з), и) Нет; б), в), е), ж) да.

7.14. а) Да при $p = 1$; нет при $p = 2$, $p = \infty$;

б), в) да; г), д), ж) нет;

е) да, если $c = 0$; нет, если $c \neq 0$.

7.20. а), д) Ближайших точек бесконечно много;

б) не достигается;

в), г) существует единственная ближайшая точка.

7.21. Не всегда.

Тема 8

8.25. а)–г) $M^{\perp} = \{0\}$;

д) $\left\{x \in L_2[0,1] \colon x(t) = 0 \text{ п. в. на } \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$;

е) $\{x \in L_2[0,1] \colon x(t) \sim \mathrm{const}\}$.

8.26. а) $\{x \in C[-1,1] \colon x(t) = 0,\ t \in [0,1]\}$; б) $M^{\perp} = \{0\}$.

8.27. а) $M = \langle x_0 \rangle$, где $x_0 = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{10}, 0, 0, \ldots)$;

б) $M^{\perp} = \langle a, b \rangle$, $a = (1,\ 2,\ 4,\ 0,\ 0,\ \ldots)$,

$b = (0,\ 1,\ -3,\ 0,\ -1,\ 0,\ \ldots)$;

в), г) $M^{\perp} = \{0\}$.

8.30. $\frac{1}{3}$. **8.31.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

8.32. а) $\operatorname{Pr}_L x_0 = x_0 - \frac{1}{55}(1, 0, -3, 0, 1, 0, 0, \ldots)$,

$$\rho(x_0, L) = \frac{1}{5\sqrt{11}}, \quad \rho(x_0, L^{\perp}) = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{275}}.$$

б) $\Pr_L x_0 = \left(\frac{22}{45}, \frac{1}{8}, -\frac{8}{45}, -\frac{1}{8}, -\frac{14}{45}, 0, 0, \ldots\right)$,

$$\rho(x_0, L) = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} - \frac{8611}{21600}}, \quad \rho(x_0, L^\perp) = \frac{\sqrt{8611}}{60\sqrt{6}}.$$

8.33. $\frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$.

8.34. а) $p_0(t) = \frac{e^2-1}{2e}$, $p_1(t) = \frac{e^2-1}{2e} + \frac{3}{e}t$,

$$p_2(t) = \frac{33}{4e} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{e}t + \left(\frac{15e}{4} - \frac{105}{4e}\right)t^2;$$

б) $p_0(t) = 0$, $p_1(t) = \frac{3}{5}t$, $p_2(t) = \frac{3}{5}t$.

8.39. Семейство $\{e_\alpha(t)\}_{\alpha\in\mathbb{R}}$, где $e_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & t = \alpha, \\ 0, & t \neq \alpha. \end{cases}$

8.46. а) Множество четных функций;

б) множество нечетных функций.

8.48. $\langle \{\cos nt\}_{n=0,2,3,\ldots} \cup \{t^{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle$.

8.49. $p_0(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}$, $p_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}t$, $p_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)$.

8.50. $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t - 1$, $p_2(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 2)$.

Библиографические ссылки

1. *Глазырина П. Ю., Дейкалова М. В., Коркина Л. Ф.* Линейные операторы. Типовые задачи: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2010.

2. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. СПб.: Изд-во «Лань», 1999.

Список использованной литературы

[1] *Антоневич А. Б.* Задачи и упражнения по функциональному анализу / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – Минск: Высш. шк., 1978.

[2] *Арестов В. В.* Введение в теорию функций действительного переменного: Мера и интеграл Лебега на прямой: учеб. пособие / В. В. Арестов, П. Ю. Глазырина. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2011.

[3] *Березин Ф. А.* Сборник задач и упражнений по функциональному анализу / Ф. А. Березин, А. Д. Гвишиани, Е. А. Горин, А. А. Кириллов. – М.: Изд-во МГУ, 1977.

[4] *Данилин А. Р.* Функциональный анализ / А. Р. Данилин. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2007.

[5] *Канторович Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Наука, 1977.

[6] *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М.: Наука, 1976.

[7] *Люстерник Л. А.* Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Наука, 1965.

[8] *Треногин В. А.* Задачи и упражнения по функциональному анализу / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. – М.: Наука, 1984.

Оглавление

Учебное издание

Глазырина Полина Юрьевна
Дейкалова Марина Валерьевна
Коркина Людмила Федоровна

НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Типовые задачи

Учебное пособие

Заведующий редакцией	М. А. Овечкина
Редактор	Т. А. Федорова
Корректор	Т. А. Федорова
Оригинал-макет	М. В. Дейкалова

План выпуска 2012 г. Подписано в печать 12.07.2012.
Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 4,0. Усл. печ. л. 6,3. Тираж 240 экз. Заказ 1381.

Издательство Уральского университета
620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.

Тел.: + (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс +7 (343) 358-93-06
E-mail: press.info@usu.ru

Глазырина Полина Юрьевна

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Уральского федерального университета. Имеет признанные в мире результаты по точным неравенствам для алгебраических и тригонометрических полиномов. Читает лекции и ведет практические занятия по основным предметам кафедры: математическому анализу, теории функций вещественного переменного, теории функций комплексного переменного, функциональному анализу, гармоническому анализу и ряду специальных курсов и семинаров.

Дейкалова Марина Валерьевна

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Уральского федерального университета. Область научных интересов – теория приближения функций и экстремальные свойства алгебраических многочленов на евклидовой сфере и отрезке и тригонометрических полиномов на оси. Имеет в этой тематике глубокие результаты. Читает лекции и ведет практические занятия по математическому анализу, теории функций комплексного переменного, функциональному анализу, руководит специальным семинаром по экстремальным свойствам полиномов.

Коркина Людмила Федоровна

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и теории функций Уральского федерального университета. Талантливый педагог и методист. В пособии отражен ее многолетний опыт преподавания математического анализа, теории функций вещественного переменного, функционального анализа, руководства специальными семинарами по нормированным кольцам и спектральной теории операторов. Имеет значительные научные результаты в теории некорректных задач, исследовании операторных функций в нормативных пространствах.