ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

В ракетно-космической технике ракетные двигатели твердого топлива (РДТТ) прочно занимают одну из ведущих позиций. Несмотря на структурную простоту исполнения данного типа энергоустановок, протекающие в них процессы имеют сложную природу. Работа РДТТ характеризуется сочетанием множества процессов различной природы — физических, химических, термодинамических и процессов тепломассопереноса, развивающихся на фоне общей газодинамической обстановки в рабочем пространстве РДТТ.

Внутренняя газодинамика РДТТ сформировалась как самостоятельное и непрерывно развивающееся направление механики жидкости и газа. Прикладная значимость данного направления поддерживается необходимостью освоения новых конструктивных решений, внедрением новых материалов и топливных композиций, а также изменением рабочего диапазона параметров.

Для настоящего времени характерно подведение итогов проведенных работ. Появляются монографии, обобщающие исследования различных научных групп, опыт конструирования и расчетной диагностики. К такому типу принадлежит и данная работа, которая обобщает исследования авторов в течение длительного времени. Особое внимание уделяется теоретическому методу исследования газодинамики и теплообмена внутрикамерных процессов в РДТТ при помощи разработанного комплекса средств вычислительного моделирования, включающих в себя совокупность моделей различного уровня схематизации, реализующих их алгоритмов и программных модулей.

В монографии описываются оригинальные методы математического моделирования, разработанные авторами или при их непосредственном участии, а также приводятся результаты решения ряда практически важных задач для типичных конструктивных схем РДТТ. Представленный анализ позволяет обобщить полученные результаты и построить на их основе модели топологически схожих конструкций.

Книга разбита на главы, разделы и подразделы. Формулы, рисунки и таблицы нумеруются внутри каждой главы (указывается номер главы и порядковый номер рисунка или таблицы).

Во введении приводятся габаритно-массовые характеристики некоторых РДТТ. Подчеркивается необходимость совершенствования и разработки новых конструктивно-компоновочных схем и моделей термогазодинамических процессов в камерах сгорания и сопловых блоках.

В главе 1 рассматриваются вопросы, связанные с постановкой и реализацией вычислительного эксперимента для задач внутрикамерной газодинамики РДТТ. Технология численного эксперимента предполагает разработку физической и математической моделей решаемой задачи, построение дискретной модели и ее программную реализацию, а также эксплуатацию готового программного комплекса и анализ результатов расчетов. Разработка физической модели в существенной степени зависит от доступных ресурсов вычислительной техники, а содержание дискретной модели — от архитектуры компьютеров. При этом роль сравнительно простых математических моделей и имеющихся аналитических решений возрастает, поскольку они используются как при отладке программного комплекса, так и для проверки результатов численных расчетов.

В главе 2 приводятся точные решения уравнений Навье–Стокса, описывающих течения в каналах с проницаемыми стенками, которые характеризуются линейной зависимостью продольной скорости от одной из пространственных координат (решения с пространственным ускорением по продольной координате), и исследуются свойства этих решений. Оценивается роль вязкости, сжимаемости и турбулентности в формировании картины течения в условиях, характерных для внутрикамерного объема РДТТ. Полученные результаты используются для построения и обоснования математических моделей, описывающих двух- и трехмерные течения в каналах со вдувом.

В главе 3 рассматриваются вопросы, связанные с построением, реализацией и обоснованием математических моделей трехмерных течений в каналах с проницаемыми стенками. Обсуждаются модели различной степени сложности и трудоемкости. Для моделирования течений в достаточно длинных каналах с неизменной формой поперечного сечения по длине канала разрабатываются модели, в основу которых положен ряд упрощающих положений, связанных с наличием преимущественного направления развития потока (параболизованные модели). Математические модели более общего плана реализуются в рамках решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, замкнутых при помощи k–ε модели турбулентности, или в рамках современных подходов к моделированию турбулентных течений (моделирование крупных вихрей). Обсуждаются особенности численной реализации моделей и постановки граничных условий на проницаемой поверхности канала.

Работоспособность моделей, их тестирование и возможности разработанных средств численного моделирования демонстрируются на примере решения ряда модельных задач. Получены распределения скорости, давления и характеристик турбулентности в каналах, имеющих различную форму поперечного сечения в плане. Сравниваются резуль-

таты, полученные в рамках различных моделей, а также вычислительные ресурсы, необходимые для реализации каждого из подходов.

В главе 4 приводятся точные решения уравнений, описывающих движение пробной частицы, а также результаты численного моделирования движения частиц под влиянием факторов нетурбулентной природы. Точные решения, описывающие движение частиц, позволяют найти предельную траекторию частиц (сепаратрису) и исследовать особенности концентрации дисперсной фазы. Поверхность горения топлива моделируется поверхностью вдува смеси газа и частиц, параметры которых известны и не зависят от места вдува и наличия массовых сил.

В рамках стохастического лагранжевого подхода исследуется влияние размера частиц на закономерности их рассеивания в канале со вдувом. Влияние турбулентности учитывается при помощи введения случайных флуктуаций скорости несущего потока в уравнение движения пробной частицы. Проводится сравнение результатов расчетов, полученных при детерминистическом и стохастическом описаниях движения дисперсной фазы. Обсуждается влияние концентрации дисперсной фазы и размера частиц на механизм и интенсивность турбулентного переноса, а также демпфирующее влияние конденсированной фазы на акустические колебания параметров рабочего тела в камере сгорания.

В заключении формулируются основные выводы и некоторые направления дальнейших исследований.

Список литературы дается в конце книги в алфавитном порядке (сначала русскоязычные издания, затем публикации, вышедшие за рубежом на английском языке).

Авторы надеются, что полученные результаты и собранный материал поможет читателю уверенно ориентироваться в многочисленных публикациях на данную тему, а приведенные результаты будут способствовать развитию исследований в данной области.

Авторы выражают глубокую признательность академику РАН А. М. Липанову за поддержку и постоянное внимание к работе.

Авторы будут благодарны за замечания и уточнения, которые можно присылать на адрес кафедры плазмогазодинамики и теплотехники Балтийского государственного технического университета (190005 Санкт-Петербург, ул. 1-ая Красноармейская, д. 1) или на электронный адрес ve5303@mail.ru.

К.Н. Волков

В.Н. Емельянов

Введение

Данная монография посвящена развитию методов и подходов к моделированию внутренних течений в рабочем пространстве ракетных двигателей твердого топлива (РДТТ). Моделью течения продуктов разложения твердого топлива в камере сгорания РДТТ служит модель течения в канале с распределенным вдувом, что отражает наиболее существенную сторону процесса — подвод массы со стороны горящей поверхности заряда. Процессы, связанные с прогревом топлива, разложением его компонентов и их химическим реагированием, протекают в тонком поверхностном слое и в данной модели не учитываются.

Внутренняя газодинамика РДТТ представляет собой научное направление, появившееся в соответствии с запросами практики проектирования и оптимизации двигательных установок. Данное направление, с одной стороны, использует новейшие достижения в области вычислительной газодинамики, теории горения, механики двухфазных сред, турбулентности, а с другой стороны, определяет постановку новых задач механики жидкости и газа, особенностью которых является сочетание и взаимовлияние процессов различной физической природы.

Ракетные двигатели твердого топлива

Ракетные двигатели твердого топлива являются одним из основных типов двигателей современных ракетно-космических систем (ракеты-носители) и ракетного вооружения (баллистические ракеты, реактивные системы залпового огня). Они находят широкое применение в качестве маршевых двигателей, стартовых ускорителей и разгонных блоков, а также двигателей вспомогательного назначения (системы управления, разделения, торможения). Установка навесных РДТТ, включаемых при старте, является эффективным средством повышения мощности ракеты-носителя.

Характеристики некоторых маршевых РДТТ ракет-носителей приводятся в таблице. В таблице используются следующие сокращения: сопло — внешнее/утопленное (В/У), корпус — металлический/композитный (М/К).

Габаритно-массовые характеристики РДТТ изменяются в достаточно широких пределах: от ускорителей космической транспортной системы Space Shuttle (вес 570 т, диаметр корпуса 3,71 м, длина 38,2 м) до миниатюрных вспомогательных двигателей (вес топлива —

Таблица В.1. Характеристики маршевых РДТТ некоторых ракет-носителей

Параметр	Space Shuttle	Titan III	Titan IV	H II	Ariane V
Диаметр, м	3,71	3,05	3,2	1,8	3,05
Диаметр канала, м	1,5	1,1	1,05	0,62	1,15
Длина, м	35,2	21,6	24,6	17,23	24,4
Масса топлива, т	502,6	273	313	59	237,5
Сопло	У	В	У	У	У
Корпус	М	М	К	М	М
Число сегментов	4	7	3	4	3
Тип топлива	PBAN	PBAN	HTPB	HTPB	HTPB

десятки грамм, диаметр и длина двигателя — несколько сантиметров). В зависимости от назначения РДТТ имеет тягу от сотых долей ньютона до нескольких меганьютонов, а продолжительность работы — от долей секунды до нескольких минут.

В сравнении с другими типами ракетных двигателей РДТТ получили широкое распространение благодаря простоте конструкции и наземного обслуживания, высокой надежности, возможности длительного (до 15 лет и более) хранения в полностью снаряженном виде, постоянной готовности системы к пуску (в течение гарантийного срока не требуются регламентные работы), а также экономической эффективности за счет относительно невысокой стоимости.

Прогресс в развитии РДТТ связан с разработкой новых и совершенствованием существующих схемно-компоновочных решений, рецептур твердых топлив, теоретических и расчетных методов для комплексного моделирования рабочих процессов, а также с применением конструкционных и теплозащитных материалов, обладающих высокой удельной прочностью и теплоэрозионной стойкостью.

При этом необходимо обеспечить снижение веса конструкции, уменьшение разбросов внутрибаллистических и энергетических характеристик, увеличение удельного импульса тяги, плотности твердого топлива, давления в камере сгорания, повышения стабильности и надежности работы РДТТ. Конечная цель разработок состоит в увеличении дальности полета и доставляемой полезной нагрузки с учетом энергомассовых, надежностных и стоимостных критериев.

Внутрикамерные процессы

Работа РДТТ характеризуется взаимосвязью и взаимовлиянием физических, химических, термодинамических процессов и процессов

тепломассопереноса, развивающихся на фоне общей газодинамической обстановки в рабочем пространстве внутрикамерного объема.

Специфическими особенностями течений, развивающихся во внутренних полостях РДТТ, являются наличие частиц конденсированной фазы, межфазное взаимодействие, коагуляция и дробление частиц; до-, транс- и сверхзвуковые скорости потока; массоподвод от горящей поверхности заряда; пространственный характер течения продуктов сгорания при функционировании органов управления и наличии заряда сложной конфигурации; ударные волны вблизи элементов конструкции; вязкие течения в отрывных зонах; тепломассообмен на поверхности сопла; нестационарные физико-химические процессы.

Процессы «раздувания» заряда, или эрозионного горения, связаны с особенностями турбулентного переноса вблизи горящей поверхности. Выпадение частиц конденсированной фазы определяется особенностями поля скорости в канале, а работа внутренней тепловой защиты двигателя — характером приповерхностных течений.

В основе явления эрозионного горения твердого топлива лежит тепловой механизм, приводящий к увеличению скорости горения при обдуве поверхности заряда потоком продуктов сгорания вследствие увеличения теплового потока из газовой фазы реакционной зоны горения в конденсированную. Дополнительный тепловой поток в конденсированную фазу зоны горения и его распределение по поверхности заряда определяются (при прочих равных условиях) газодинамической структурой потока у поверхности канала.

На практике находят применение модели различной степени сложности и точности, выбор которых диктуется решением практических задач: профилирование до-, транс- и сверхзвуковой части сопла для до-

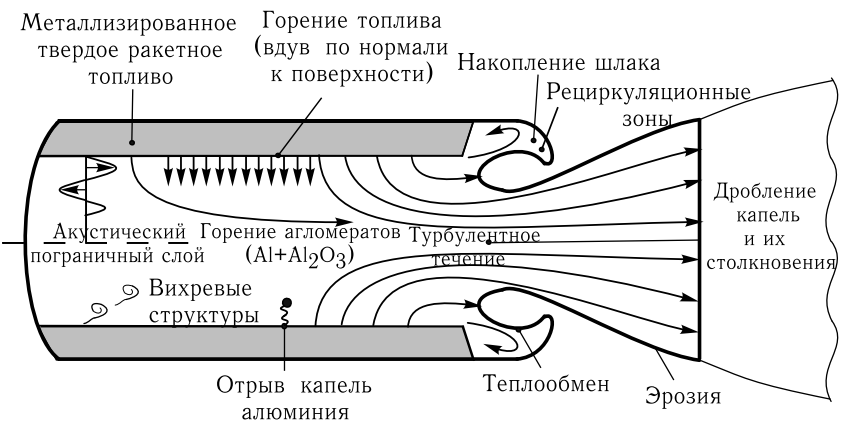


Рис. В.1. Газодинамические процессы в РДТТ

стижения оптимальных энергетических и весовых характеристик двигателя с учетом заданных габаритных ограничений (степень утопленности сопла, размещение опорного шарнира, толщина теплозащитного покрытия); расчет потерь удельного импульса тяги и коэффициента расхода сопла; исключение или минимизация осаждения частиц на стенки и накопления конденсированных продуктов сгорания в камере сгорания и предсопловом объеме; формирование исходных данных для последующего расчета конвективного и лучистого теплообмена, теплового состояния и эрозии теплозащитного покрытия камеры сгорания и сопла; расчет эффективности органов управления вектором тяги (поворотное управляющее сопло, газовые рули, вдув в закритическую часть сопла); моделирование нестационарных и переходных процессов (выход двигателя на режим, вылет сопловой заглушки, спад давления).

Использование вдува в технике

Исследование течений в каналах с проницаемыми стенками не ограничивается внутрикамерной газодинамикой РДТТ.

Плоские или цилиндрические каналы, с боковой поверхности которых подается газ или жидкость, имеют многие технические устройства, а вдув используется во многих технологических процессах (производство бумаги, охлаждение и сушка, разделение изотопов). С точки зрения газовой динамики, течение в таком канале формируется под влиянием поперечного потока от стенок канала, сжимаемости и вязкости рабочего тела, а также ускоряющего градиента давления, вызванного подводом массы и изменением проходного сечения канала.

Схема подачи газа с боковой поверхности канала и через его левый торец используется в охлаждающих устройствах полимерных волокон при их вытяжке (формовании). В этом случае левый торец канала соответствует зеркалу фильеры.

Пористое охлаждение представляет собой один из эффективных способов защиты стенок канала плазмотрона от тепловых потоков. Вдув газа через пористые стенки обеспечивает его подачу в зону дугового нагрева, что позволяет интенсифицировать энерговыделение в дуге за счет роста напряженности электрического поля, а также уменьшить тепловые потери на стенки канала и вернуть тепло в столб дуги. Плазмотроны с пористой межэлектродной вставкой (МЭВ) предоставляют широкие возможности для повышения мощности и эффективности подобных устройств. Применение пористых материалов с различной проницаемостью секций МЭВ допускает профилирование интенсивности вдува по длине канала и газодинамическое управление параметрами дугового потока.

Каналы со вдувом находят применение в высокотемпературных теплообменных устройствах, позволяя исключить появление термических напряжений, связанных с тепловым расширением пакета труб, и обеспечить надежную эксплуатацию теплообменных устройств на всех режимах работы при отсутствии постоянного обслуживания (например, для замкнутой газотурбинной установки с ядерным реактором ресурс работы составляет около 250 тысяч часов, а период работы без постоянного местного обслуживания — около 10 тысяч часов). Для эффективной компенсации теплового расширения используется пакет труб на основе трубы Фильда, состоящей из двух концентрических труб. Холодный теплоноситель течет по внутренней трубе, разворачивается в тупиковом конце и протекает далее по межтрубному кольцевому пространству. Горячий теплоноситель обтекает внешнюю поверхность трубы. Для повышения эффективности трубы Фильда и снижения паразитных тепловых потоков между цилиндрическим каналом внутренней трубы и кольцевым каналом внутренняя труба делается пористой со вдувом части теплоносителя в межтрубный кольцевой канал.

Газогенераторы на твердом топливе применяются для получения газа с требуемой температурой, давлением и химическим составом. Процессы, происходящие в камерах сгорания газогенераторов, не отличаются от процессов в камерах сгорания РДТТ, за исключением истечения газовой смеси. Камеры сгорания твердотопливных газогенераторов имеют достаточно простое геометрическое оформление, в связи с чем применять двух- и трехмерные математические модели не имеет смысла. Расчеты обычно проводятся в рамках нульмерной или одномерной математической модели.

Несмотря на широкое использование каналов со вдувом в различных технических устройствах, внимание к моделированию внутренних течений в каналах со вдувом во многом объясняется той ролью, которую они играют в прогнозировании характеристик и исследовании устойчивости рабочих процессов в РДТТ.

Исторический обзор

История развития РДТТ позволяет лучше понять особенности двигательных установок данного типа, проблемы, возникающие при их создании, достоинства и недостатки. Внутренняя баллистика развивалась в соответствии с фундаментальными открытиями, изобретениями и социальными заказами.

При рассмотрении развития ракет на твердом топливе обращает на себя внимание определяющая роль топлива. Появление нового топлива предопределяет создание нового топливно-конструктивного типа двигателя, знаменуя новый этап развития.

Твердотопливные двигатели ведут свою историю от пороховых ракет древности, в которых был впервые реализован принцип реактивного движения. Источником энергии первых ракетных двигателей был черный или дымный порох, состоящий из 75 % нитрата калия (KNO_3), 15% древесного угля и 10 % серы.

На протяжении долгого времени РДТТ не подвергались принципиальным изменениям и их развитие шло довольно медленными темпами. Основная причина этого заключалась в неблагоприятных физических характеристиках черного пороха. Дымный порох представляет собой ракетное топливо с весьма низким удельным импульсом, что обусловливается как его низкой калорийностью, так и высоким содержанием конденсированной фазы в продуктах сгорания.

Дальнейшее развитие ракет на твердом топливе связано с появлением бездымных коллоидных порохов на труднолетучем растворителе (баллиститное топливо). Различные составы бездымного пороха были созданы во Франции (П. Вьель), Швеции (А. Нобель), России (Д. Менделеев). Коллоидный порох представляет собой твердый раствор органических веществ, которые являются сложными эфирами азотной кислоты (например, раствор нитроцеллюлозы в нитроглицерине). Конечный продукт (двухкомпонентное топливо) поддается формованию под давлением, что позволяет изготавливать пороховые заряды путем прессования.

Создание бездымного пороха стимулировал интерес к РДТТ. Использование нового пороха не встретило особых препятствий в ствольной артиллерии, поскольку не требовало создания нового типа орудия. При выстреле пороховой заряд мгновенно превращается в газ с давлением в сотни мегапаскалей и снаряд с высокой скоростью выбрасывается из орудия.

Ракетная техника оказалась перед необходимостью разработки принципиально нового топливно-конструктивного типа двигателя. Создание топливных зарядов на основе бездымного пороха с использованием нелетучего растворителя оказалось трудной задачей. Несмотря на создание технологии изготовления одноканальных шашек, они нашли применение лишь в реактивных снарядах (системы залпового огня).

Ракетный двигатель на топливе нового типа обладал в $2{,}5 \div 3$ раза бóльшим удельным импульсом по сравнению с РДТТ на дымном порохе. Увеличение удельного импульса было достигнуто за счет более высокой калорийности баллиститных топлив (примерно вдвое выше, чем дымных), низкого содержания в продуктах сгорания конденсированной фазы, применения сверхзвукового сопла, использования высоких рабочих давлений в двигателе.

В ходе Второй мировой войны появилось твердое ракетное топливо нового типа, представляющее собой механическую смесь тонкоизмель-

ченного минерального окислителя и горючего-связки с возможным включением энергоповышающих добавок.

Начальный период развития смесевых топлив связан с их использованием в качестве топлива к стартовым ускорителям для самолетов при взлете. Данные системы не предъявляли жестких требований к энергетике топлива и стабильности его баллистических характеристик.

Потребности развития ракетной техники стимулировали поиск составов с более высокими энергетическими характеристиками и более благоприятными баллистическими показателями.

В дальнейшем стали использоваться более эффективные окислители, а в качестве горючего-связующего — различные полимеры типа каучуков. Топливо, представляющее после смешения компонентов вязкую массу, обеспечивает снаряжение двигателя заливкой с последующей полимеризацией связки после нагрева. В таком двигателе заряд прочно скреплен с корпусом, а горение происходит изнутри по каналу фигурного профиля (например, в виде звезды), создаваемого при заливке за счет помещаемого в двигатель стержня, который удаляется после нагрева. Для исключения горения по торцевым поверхностям на них наносят бронирующие покрытия.

Смесевые топлива устойчиво горят при давлениях в несколько мегапаскалей, что позволяет снизить массу конструкции РДТТ. Технология снаряжения двигателя топливом не накладывает ограничений ни на диаметр заряда, ни на его массу. Постоянство тяги или необходимое изменение ее во времени достигается применением топлив с разными скоростями горения и выбором соответствующей конфигурации поперечного сечения заряда.

Помимо окислителя (обычно перхлората аммония, 70 %), горючего-связующего (разного рода каучуки, 12 %) и порошкообразного металла (алюминий, 16 %), в топливо вводятся пластификаторы, отвердители (эпоксидный отвердитель, 1,5 %), катализаторы (окись железа, 0,5 %) и другие добавки, предназначенные для улучшения физических, механических и технологических свойств топлива, обеспечения полимеризации горючего-связующего, получения расчетных характеристик горения, увеличения допустимого срока хранения заряда.

Для топлив на основе перхлората аммония и обычных полимерных связующих характерна слабая зависимость скорости горения от давления и начальной температуры, а также сравнительно высокие энергетические характеристики. Скорость горения серийных топлив на основе перхлората аммония находится обычно в пределах от 4 до 20 мм/с.

Изобретение смесевого топлива и новой технологии изготовления зарядов произвели революцию в области РДТТ и ракетной техники. Дальнейший прогресс был связан с разработкой более совершенных

составов смесевых топлив, созданием конструкций реактивных сопел, применением новых конструкционных, теплоизоляционных и других материалов, усовершенствованием технологических процессов изготовления РДТТ.

За период 1960–1990 гг. масса комплекта маршевых двигателей увеличилась в $3 \div 4$ раза, масса конструкции маршевых двигателей относительно веса топлива снизилась более чем в 2 раза, а внутрикамерное рабочее давление выросло более чем втрое. Удельный импульс тяги маршевых двигателей был увеличен на $35 \div 40$ кгс·с/кг. В частности, твердотопливный ускоритель системы Space Shuttle имеет длину 38,2 м, диаметр корпуса 3,71 м, массу 568 т. Двигатель работает в течение 122 с, развивая полный импульс тяги почти 1300 МН·с при максимальной тяге 14 МН. Масса топливного заряда составляет 502 т (88,4 % от общей массы).

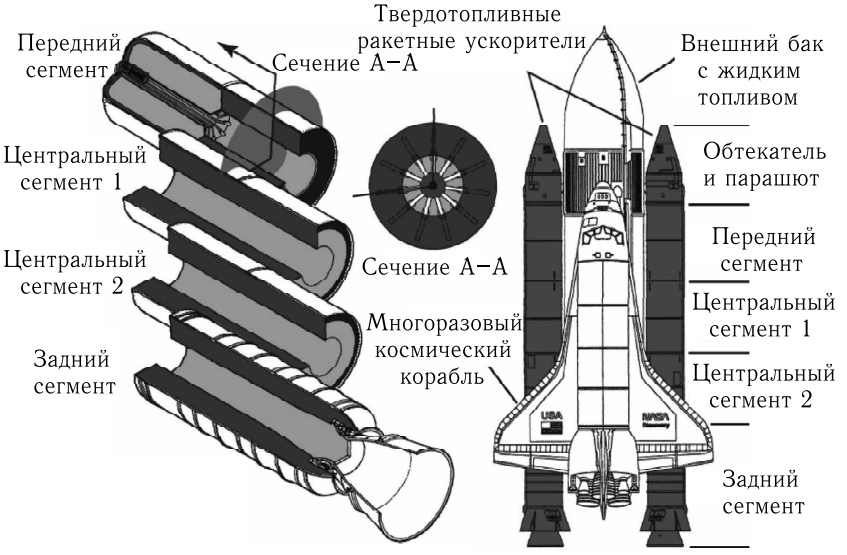


Рис. В.2. Схема двигательной установки системы Space Shuttle

Смесевое топливо распределяется между 4 секциями, которые изготавливаются отдельно и соединяются в одно целое при помощи механических замков. Сегментная конструкция разрешает проблемы, связанные с изготовлением и траспортировкой крупногабаритных РДТТ. Основная доля тяги создается за счет горения заряда по поверхностям центральных круглых каналов малой конусности. В передней секции заряд имеет начальный канал в виде 11 лучевой звезды. Благодаря такой конфигурации горящей поверхности, тяга вначале возрастает,

достигая максимума примерно через 20 с, затем в последующие 40 с снижается в 1,5 раза, после чего несколько возрастает, а начиная с 85 с полета вновь снижается (сначала плавно, а начиная с 110 с — резко). Характер изменения тяги обеспечивает достаточно высокое начальное ускорение, ограниченное динамическое давление на конструкцию в средней фазе полета и небольшую перегрузку (порядка $3g$) в конце полета.

В передней секции устанавливается небольшой РДТТ кратковременного действия, обеспечивающий воспламенение топливного заряда в течение 0,3 с. В задней секции крепится реактивное сопло массой около 10 т, вдвинутое на 1/4 своей длины в корпус двигателя.

При сгорании топливного заряда образуются продукты сгорания с температурой порядка 3400 К и давлением 4,4 МПа (максимальное давление в 1,5 раза больше). При расширении в сопле продукты сгорания развивают скорость, равную 2480 м/с у поверхности и 2600 м/с в вакууме скорость.

Для управления траекторией полета вокруг горловины сопла устанавливается универсальный гибкий подшипник диаметром около 2 м и массой свыше 3 т, обеспечивающий совместно с гидроприводом поворот сопла в двух осевых плоскостях на угол $\pm 8°$ и изменение вектора тяги. Соответствующим поворотом двух сопел достигается управление по тангажу, курсу и крену.

При модернизации маршевых РДТТ с целью увеличения тяговооруженности ракеты конструкторская мысль идет двумя путями: путем совершенствования заряда (улучшение свойств топлива, увеличение поверхности горения) и путем совершенствования соплового блока. Вместо простых зарядов с цилиндрическим каналом находят применение канально-щелевые заряды и заряды с каналами, имеющими звездообразное поперечное сечение.

Изначально в РДТТ применялась четырехсопловая компоновка для уменьшения строительной высоты ракеты и использования сопел в качестве органов управления и стабилизации. Течение продуктов сгорания в таких двигателях сопровождается увеличением давления в камере сгорания, а также увеличением уноса теплозащитного покрытия днища. Наличие несоосного входа продуктов сгорания в сопло вызывает увеличение массы тепловой защиты на заднем днище двигателя, потери удельного импульса тяги и несимметричный унос массы тепловой защиты газового тракта сопла. Для исключения обгорания концевой части (зоны среза) сопла и необходимости размещения сопел внутри хвостового или межступенчатого отсека ракеты степень их расширения ограничивается.

Четырехсопловые блоки с разрезными (для управления) соплами заменяются односопловым блоком с более высокой степенью расшире-

ния сопла (такие сопла в четырехсопловом варианте не вписываются в мидель ракеты) с вдвинутым соплом в камеру сгорания (сопло не вписывается по длине в строительную высоту ракеты), получая так называемое утопленное сопло с клапанами вдува для управления ракетой в полете. Применение частично (до 50 % от общей длины сопла) утопленных в корпус двигателя сопловых блоков позволяет увеличить степень расширения сопла от 4,0 до 5,5. Дальнейшее утапливание сопла в камеру сгорания приводит к резкому возрастанию потерь удельного импульса тяги, уменьшению запасов топлива и ухудшению массовых характеристик сопла и двигателя в целом.

Оптимальной конструкцией сопла является комбинация из утопленного и раздвигаемого сопла, снабженного выдвигаемыми телескопическими насадками. В сложенном (исходном) положении выдвигаемые телескопические насадки сопла размещаются у заднего днища двигателя и раскрываются во время работы двигателя после снятия фиксации исходного положения, образуя в выдвинутом (рабочем) положении с неподвижной частью сопла единый газодинамический тракт. Конструкция сопла РДТТ с изменяемой геометрией обеспечивает возможность реализации высокой степени расширения сопла, выполнение требований по повышению энергетических характеристик с одновременным выполнением габаритных ограничений на двигатель.

Для изменения направления вектора тяги утопленное сопло делается поворотным. Подвижное управляющее сопло наилучшим образом отвечает конструктивным особенностям и условиям работы сопел большого расширения в составе РДТТ.

Изменение направления вектора тяги достигается путем установки газовых рулей на выходе из сопла, несимметричным вводом газа в сопло, что приводит к повороту реактивной струи, отклонением (качанием) сопла в осевой плоскости и другими способами.

В результате, компоновка камер сгорания РДТТ претерпевает существенные изменения.

Коэффициент массового совершенства двигателей, представляющий собой отношение массы конструкции к массе твердотопливного заряда, находится на уровне $0{,}11 \div 0{,}12$, а коэффициент объемного заполнения камеры сгорания топливом (отношение объема заряда к внутреннему объему камеры сгорания) составляет 0,9. Масса соплового блока с органами управления у современных РДТТ достигает до $40 \div 50\,\%$ общей массы конструкции.

Процесс проектирования РДТТ заключается в преодолении противоречий, поскольку одновременно предъявляемые требования по максимальному удельному импульсу тяги, максимальному заполнению камеры сгорания твердым топливом при минимальной массе конструкции и удовлетворении требований к внутрибаллистическим характеристи-

кам и габаритным ограничениям определяют необходимость поиска оптимального варианта конструктивной схемы. Основными требованиями являются требования по габаритам и энергетическим характеристикам.

Разработка новых топливных композиций или модификация существующих является сложной задачей, поскольку факторы, способствующие улучшению одного качества, вызывают нежелательное изменение другого. Возможности повышения удельного импульса РДТТ за счет применения более эффективных топлив представляются довольно ограниченными.

Применению топлив, содержащих бериллий вместо алюминия (ожидается увеличение удельного импульса на 7 % за счет снижения молекулярной массы топлива в сочетании с повышением температуры сгорания), препятствует высокая токсичность бериллия и продуктов его сгорания, а также дороговизна бериллия. Дальнейшее увеличение удельного импульса (еще порядка на 7 %) представляется возможным за счет использования гидрида бериллия (BeH_2) вместо бериллия. Помимо токсичности, его применению препятствует нестабильность соединения и трудность приготовления достаточно плотных составов.

Следует отметить, что топлива, содержащие бериллий или его химические соединения, при большем удельном импульсе характеризуются меньшей плотностью. Бериллий уступает по этому показателю алюминию почти в 1,5 раза, а гидрид бериллия — более чем в 4 раза.

Энергетические характеристики топлив повышаются также за счет применения более активных окислителей и горючих-связующих. Использование в смесевом топливе перхлората нитрония (NO_2ClO_4) вместо перхлората аммония (NH_4ClO_4), который содержит почти в 2 раза меньше кислорода, обеспечивает прирост удельного импульса примерно на 10 %. Применению этого окислителя препятствует его гигроскопичность, плохая совместимость с освоенными связующими и взрывоопасность. Высокая чувствительность к внешним воздействиям препятствует применению в смесевых топливах и фтораминовых связующих, содержащих атомы фтора, азота и водорода.

Помимо удельного импульса, важными характеристиками твердых топлив являются плотность, механические свойства, стабильность, технологичность, способность к полимеризации при нормальной температуре (для этого используются различные катализаторы). Эффективным считается использование многофункциональных и комплексных добавок, позволяющих получать твердые топлива с оптимальным сочетанием свойств (изменение структуры известных компонентов, применение новых способов их изготовления и обработки, изменение химической технологии приготовления топлива).

Роль математического моделирования

Процессы в камере сгорания РДТТ как в нестационарные, так и в квазистационарные периоды работы являются сложной совокупностью большого числа физико-химических процессов. Их математическое моделирование предполагает рассмотрение таких явлений, как зажигание и горение навески воспламенительного состава, распространение продуктов горения по внутрикамерному объему, теплообмен продуктов сгорания с поверхностью топливного заряда, прогрев топлива, его зажигание и горение, истечение продуктов сгорания из камеры двигателя, напряженно-деформированное состояние корпуса и топливного заряда и его влияние на внутрикамерные процессы, изменение геометрии внутрикамерного объема и другие.

Уровень сложности математических моделей, используемых для прогнозирования изменения параметров работы двигателя, изменяется в широких пределах — от простейших моделей, позволяющих получить аналитические соотношения, применяемые в инженерных расчетах, до моделей, появление которых стимулировал прогресс вычислительной техники и ориентированных на использование численных методов. В результате для решения задач внутрикамерной газодинамики имеется набор математических моделей, алгоритмов и программ, подчиненных решению основной задачи и обеспечивающих эксплуатацию программных комплексов в широком диапазоне варьируемых параметров, а также реализованных совокупностью различных методик, применение которых представляется в равной степени правомерным для решаемых задач. При этом выполняется частичное перекрытие применимости различных численных методик при одинаковых исходных данных, а гибкое изменение физической постановки задачи позволяет исследовать характер протекающих процессов и выяснить роль различных факторов в формировании картины потока.

Роль численного моделирования постоянно возрастает, что обусловливается снижением коммерческой стоимости вычислительной техники, включая многопроцессорные системы обработки данных, и сокращением объемов дорогостоящего натурного эксперимента за счет увеличения объемов численного моделирования. Кроме того, численный эксперимент позволяет получить результаты, получение которых представляется трудоемким либо невозможным при натурном моделировании, а также предоставляет возможность установления физических закономерностей в исследуемых сложных процессах.

Технология численного эксперимента предполагает разработку физической и математической моделей решаемой задачи, построение дискретной моделей и ее программную реализацию, а также эксплуатацию готового программного комплекса и анализ результатов расчетов.

Разработка физической модели в существенной степени зависит от доступных ресурсов вычислительной техники, а содержание дискретной модели — от архитектуры компьютеров. При этом роль сравнительно простых математических моделей и имеющихся аналитических решений возрастает, поскольку они используются при отладке программного комплекса и для проверки результатов численных расчетов.

Для расчетов течений в каналах со вдувом используются специализированные CFD-коды, примерами которых служат код MSD (структурированные сетки) и код CEDRE (неструктурированные сетки), развитые во французском аэрокосмическом центре ONERA в рамках программы ASSM (Aerodynamics of Segmented Solid Motors), поддержанной CNES/CNRS [1]). Для экспериментальных исследований в ONERA созданы установки VECLA (плоские течения), VALDO (осесимметричные течения), C1xb (нестационарные режимы течения, двухфазные течения, вихревые структуры).

Следует отметить сравнительно медленное внедрение методов вычислительной газовой динамики (Computational Fluid Dynamics, CFD) и их использование для расчетов полномасштабных конфигураций РДТТ по сравнению с другими областями техники, например, с турбомашиностроением (газовые турбины, компрессоры).

Имеющиеся публикации

Ракетным двигателям твердого топлива посвящено значительное число монографий как научного плана, так и учебников и учебных пособий. В качестве одного из учебных пособий отметим книгу А. М. Липанова и А. В. Алиева [2]).

Можно отметить общую эволюцию существующих изданий. Для первых этапов были характеры работы, в которых для развития нового направления либо проецировались подходы внутренней баллистики артиллерийских систем [3]), либо предлагались простые нульмерные и одномерные подходы [4]), либо обосновывались более общие подходы на

---

[1]) *Fabignon Y., Kuentzmann P., Vuillot F., Prevost M., Bec R., Robert E., Marion-Duval P.* A survey of French research and technology program on the internal aerodynamics of segmented solid motors // ONERA Report. 2002. No. TP-02-22. 25 p.

[2]) *Липанов А. М., Алиев А. В.* Проектирование ракетных двигателей твердого топлива. М.: Машиностроение, 1995. 400 с.

[3]) *Орлов Б. В., Мазинг Ю. Г.* Термодинамические и баллистические основы проектирования РДТТ. М.: Машиностроение, 1979. 536 с.

[4]) *Шишков А. А.* Газодинамика пороховых ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1974. 148 с.

основе классической газодинамики [1]). В монографии Б. А. Райзберга, Б. Т. Ерохина, К.П. Самсонова [2]) дана теоретическая постановка задач внутренней газодинамики РДТТ.

С накоплением опыта расчета и отработки РДТТ стали появляться работы, обобщающие этот опыт. Среди них отметим книгу И. Х. Фахрутдинова и А. В. Котельникова [3]), а также книгу, вышедшую под общей редакцией Л. Н. Лаврова [4]). В числе этих работ интенсивно развивался теоретический подход, основанный на идеях вычислительного моделирования [5]).

Экспериментальные подходы решения задач этого класса рассматривались в ряде работ, из которых отметим книги Ю. В. Полежаева и А. А. Шишкова [6]), А. А. Шишкова, С. Д. Панина, Б. В. Румянцева [7]), М. И. Соколовского [8]), а также книгу, выпущенную под ред. Н. П. Кузнецова [9]).

Экспериментальные наработки авторского коллектива данной монографии обобщаются в книге С. К. Савельева, В. Н. Емельянова, Б. Я. Бендерского [10]), в которой излагаются результаты экспериментальных исследований по внутренней газодинамике РДТТ и управлению свойствами внутренних течений, выполненных в ЛМИ–БГТУ (течения в каналах РДТТ, газодинамика РДТТ с многосопловой крыш-

---

[1]) *Соркин Р. Е.* Газотермодинамика ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1967. 368 с.

[2]) *Райзберг Б. А., Ерохин Б. Т., Самсонов К. П.* Основы теории рабочих процессов в ракетных системах на твердом топливе. М.: Машиностроение, 1972. 384 с.

[3]) *Фахрутдинов И. Х., Котельников А. В.* Конструкция и проектирование ракетных двигателей твердого топлива. М.: Машиностроение, 1987. 325 с.

[4]) Конструкции ракетных двигателей на твердом топливе / Под общ. ред. *Л. Н. Лаврова*. М.: Машиностроение, 1993. 215 с.

[5]) *Ерохин Б. Т., Липанов А. М.* Нестационарные и квазистационарные режимы работы РДТТ. М : Машиностроение, 1977. 200 с.

[6]) *Полежаев Ю. В., Шишков А. А.* Газодинамические испытания тепловой защиты. М.: Промедек, 1992. 248 с.

[7]) *Шишков А. А., Панин С. Д., Румянцев Б. В.* Рабочие процессы в ракетных двигателях твердого топлива. М.: Машиностроение, 1989. 240 с.

[8]) *Соколовский М. И.* Управляемые энергетические установки на твердом ракетном топливе. М.: Машиностроение, 2003. 464 с.

[9]) Органы управления вектором тяги твердотопливных ракет: расчет, конструктивные особенности, эксперимент / Под ред. *Н. П. Кузнецова*. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 552 с.

[10]) *Савельев С. К., Емельянов В. Н., Бендерский Б. Я.* Экспериментальные методы исследования газодинамики РДТТ. Санкт-Петербург: Недра, 2007. 268 с.

кой и поворотным управляющим соплом, газодинамика вращающихся РДТТ с торцевыми зарядами и другие). Дается подробное описание как горячих стендовых установок, позволяющих воспроизвести особенности течений высокотемпературной среды (условия, приближенные к реальным условиям работы РДТТ), так и газодинамических стендов, работающих на низкотемпературном рабочем теле с имитацией горения вдувом газа (имеется возможность подробного исследования газодинамических полей, в том числе с учетом сложных пространственных эффектов).

Научный интерес к результатам, изложенным в упомянутых монографиях, не ослабевает, поскольку они предоставляют данные физического и математического моделирования газодинамических и теплообменных процессов в пространственных течениях сложной структуры, востребованные в смежных областях техники (теплообменные устройства, химическая технология, системы охлаждения) и имеющие значение для тестирования современных расчетных средств.

Повышение энергомассовых характеристик РДТТ вынуждает ученых и инженеров к более детальному исследованию внутрикамерных процессов. Ограниченные возможности газодинамических стендов и достаточно высокие затраты на их создание стимулировали разработку математических моделей разного уровня сложности для описания нестационарных и квазистационарных процессов в РДТТ.

Имеется ряд монографий, обобщающих исследования различных научных групп, опыт конструирования РДТТ и расчетной диагностики внутренних течений. Среди таких работ отметим книги И. М. Васенина, В. И. Архипова, В. Г. Бутова, А. А. Глазунова, В. Ф. Трофимова [1]) (Томский государственный университет, Томск), А. Д. Рычкова [2]) (Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск), В. П. Бобрышева, В. Д. Лисицы, Ф. Ф. Спиридонова [3]) (НПО «Алтай», Бийск), книгу, выпущенную под редакцией Л. Н. Лаврова [4])(НПО «Искра», Пермь).

---

[1]) *Васенин И. М., Архипов В. И., Бутов В. Г., Глазунов А. А., Трофимов В. Ф.* Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во ТГУ, 1986. 264 с.

[2]) *Рычков А. Д.* Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск: Наука, 1988. 222 с.

[3]) *Бобрышев В. П., Лисица В. Д., Спиридонов Ф. Ф.* Физико-математическое моделирование внутрикамерной газодинамики РДТТ. М.: ЦНИИНТИКПК, 1993. 128 с.

[4]) Конструкции ракетных двигателей на твердом топливе / Под ред. *Л. Н. Лаврова.* М.: Машиностроение, 1993. 214 с.

Особое место в ряду этих исследований занимают работы, выполненные научной школой УрО РАН, созданной академиком А. М. Липановым. Различные результаты, связанные с моделированием внутрикамерных процессов, изложены в книгах А. М. Липанова, Б. Т. Ерохина [1]) и В. В. Калинина, Ю. Н. Ковалева, А. М. Липанова [2]). Более поздние результаты приведены в книге Б. Т. Ерохина [3]) и книге А. М. Липанова, В. П. Бобрышева, А. В. Алиева, Ф. Ф. Спиридонова, В. Д. Лисицы [4]).

В книге А. В. Алиева [5]) рассматриваются внутрикамерные процессы в РДТТ различных конструкций и излагаются методы расчета внутрибаллистических параметров и напряженно-деформированного состояния прочноскрепленных с корпусом зарядов и корпусов. Обсуждаются методы исследования процессов горения твердого топлива и экспериментальной отработки РДТТ.

Результаты исследований автоколебаний газа, возникающих в установках с горением, излагаются в книге В. М. Ларионова и Р. Г. Зарипова [6]). Приводится общая концепция теории вибрационного горения как автоколебательного процесса, проблемы его теоретического описания и перспективы приложения теории к решению практических задач. На основе энергетического метода разработана обобщенная теоретическая модель, позволяющая с единых позиций рассматривать самовозбуждение продольных акустических колебаний газа в типовых устройствах. Предложена методика расчета границ неустойчивости, частот и амплитуд установившихся колебаний. Полученные результаты подтверждаются экспериментальными данными и служат основой для проектирования устройств вибрационного горения полезного назначения и разработки мер по устранению колебаний в камерах сгорания напряженных энергетических установок.

Значительный вклад в развитие методов комплексного расчетно-теоретического анализа термодинамических, газодинамических, тепло-

---

[1]) *Ерохин Б. Т., Липанов А. М.* Нестационарные и квазистационарные режимы работы РДТТ. М.: Машиностроение, 1977. 200 с.

[2]) *Калинин В. В., Ковалев Ю. Н., Липанов А. М.* Нестационарные процессы и методы проектирования узлов РДТТ. М.: Машиностроение, 1986. 216 с.

[3]) *Ерохин Б. Т.* Теория внутрикамерных процессов и проектирование РДТТ. М.: Машиностроение, 1991. 560 с.

[4]) Численный эксперимент в теории РДТТ / *Липанов А. М., Бобрышев В. П., Алиев А. В., Спиридонов Ф. Ф., Лисица В. Д.* / Под ред. *А. М. Липанова*. Екатеринбург: Наука, 1994. 302 с.

[5]) *Алиев А. В.* Внутренняя баллистика РДТТ. М.: Машиностроение, 2007. 504 с.

[6]) *Ларионов В. М., Зарипов Р. Г.* Автоколебания газа в установках с горением. Казань: Изд-во КГТУ, 2003. 228 с.

вых и физико-химических процессов в камерах сгорания РДТТ, лежащих в основе принятия проектно-конструкторских решений, внесли ученые и инженеры Исследовательского центра им. М. В. Келдыша (ранее НИИ тепловых процессов).

В книге, изданной по редакцией А. С. Коротеева [1]), обобщаются данные из отечественной и зарубежной литературы, а также излагаются результаты оригинальных исследований в области внутренней баллистики двухфазной газовой динамики, горения твердых топлив, тепломассообмена, механизмов разрушения и уноса применяемых теплозащитных материалов, нестационарных процессов при работе РДТТ. Рассматриваются методы решения задач двухфазных течений в камерах сгорания и соплах с учетом особенностей межфазного взаимодействия, дробления и коагуляции частиц, на основе которых строятся методики оптимального профилирования сопел и расчета энергетических потерь, сопряженные задачи тепломассообмена, теплового состояния, абляции и термодеструкции теплозащитных и эрозионностойких материалов. Описываются результаты исследований эффективности органов управления вектором тяги РДТТ. Разработанные подходы позволяют прогнозировать основные характеристики РДТТ (изменение давления в камере, состав и расход продуктов сгорания, удельный импульс и коэффициент расхода, параметры тепломассообмена, нагрев и унос теплозащитных материалов, профилирование контура сопла), а также проводить оптимизацию параметров, выбор тепловой защиты, конфигурации заряда, степени расширения и формы сопла, сравнивать эффективность различных топлив на ранних стадиях проектирования РДТТ.

Широкий круг исследований физических, химических и газодинамических процессов, связанных с горением твердого топлива, проведен в рамках шестилетней совместной американо-российской программы [2]), которая длилась с 1 октября 1995 по 30 сентября 2001. В программе участвовали 9 университетов США и 7 исследовательских групп из России, представляющие различные университеты и научные центры. Техническим директором программы являлся профессор M.W. Beckstead (Brigham Young University, USA), а программным директором — профессор F.E.C. Culick (California Institute of Technology, USA). В рамках программы разработаны методы физического и чис-

---

[1]) Газодинамические и теплофизические процессы в ракетных двигателях твердого топлива / Под ред. *А. С. Коротеева*. М.: Машиностроение, 2004. 512 с.

[2]) Investigations of novel energetic materials to stabilize rocket motors // Report of the Caltech Multidisciplinary University Research Initiative (MURI). California Institute of Technology, Jet Propulsion Center. 2002. 275 p.

ленного моделирования, а также созданы предметно-ориентированные программные комплексы для расчета и прогнозирования характеристик рабочих процессов и функциональных параметров РДТТ, позволяющие сократить расходы на их проектирование и отработку.

Статьи по тем или иным вопросам, связанным с моделированием внутрикамерных процессов, публикуются в периодических изданиях по механике жидкости и газа и тепломассообмену, а также в трудах национальных и международных конференций по газовой динамике и теплообмену, например, в трудах Международной конференции «Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и в ствольных системах» (International Conference on Internal Ballistics and Combustion Processes in Solid Propulsion Systems and Guns), организуемой Институтом прикладной механики УрО РАН (Ижевск), который возглавляет академик РАН А.М. Липанов, и в трудах международной школы-семинара «Внутрикамерные процессы, горение и газовая динамика дисперсных систем» (Intra-Chamber Processes, Combustion and Gas Dynamics of Dispersed Systems), проводимой Балтийским государственным техническим университетом (Санкт-Петербург). Среди конференций, проводимых за рубежом, отметим International Conference on Computational Ballistics, организуемую Wessex Institute of Technology (Southampton, UK), и серии конференций, проводимых под эгидой American Institute of Aeronautics and Astronautics (USA).

Данная монография в существенной степени отличается от имеющихся изданий. В ней основное внимание уделяется постановке, проведению и анализу результатов моделирования внутрикамерных процессов в РДТТ на системе специально созданных для этой цели серии математических моделей разного уровня схематизации и сложности. При этом учитываются и последние достижения фундаментальной науки в области моделирования турбулентных [1]) и двухфазных [2]) течений, а также в области разработки современных вычислительных технологий для моделирования внутренних течений [3]). Эти подходы модифицируются и адаптируются к задачам внутренней газодинамики РДТТ.

Демонстрируется два подхода к решению сложных задач газовой динамики и теплообмена. Один из них основан на применении чис-

---

[1]) *Волков К. Н., Емельянов В. Н.* Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 376 с.

[2]) *Волков К. Н., Емельянов В.Н.* Течения газа с частицами. М.: Физматлит, 2008. 564 с.

[3]) *Волков К. Н., Емельянов В. Н.* Течения и теплообмен в каналах и вращающихся полостях. Москва: Физматлит, 2010. 488 с.

ленных методов, а другой — на использовании анализа, выполненного с предварительным упрощением математической постановки задачи, исходя из ее известных особенностей.

Особенностью работы является также то обстоятельство, что она выполнена в рамках университетской науки, в отличие от работ, авторами которых являются непосредственные разработчики техники. Это делает возможным сконцентрироваться на выделении и исследовании общих закономерностей газодинамики и теплообмена, а не на конкретных конструктивных оформлениях заряда твердого топлива. Результаты, полученные в рамках данной работы, являются общими в плане научных приложений.

Модели, методы и подходы, приведенные в книге, разработаны авторами или при их непосредственном участии.

Проблема внутренней газодинамики энергоустановок рассматривалась членами авторского коллектива в течении длительного времени. Эволюция разработок шла от экспериментальных подходов через разработку экономичных средств вычислительного моделирования к применению современных численных методов и информационных технологий. На данном этапе было осознано, что в равной мере востребованы как упрощенные методики и подходы, так и сложные модели, учитывающие трехмерность, нестационарность и многодисциплинарность процессов в РДТТ. В монографии отражаются эти подходы, оцениваются их возможности и устанавливаются взаимосвязи.

Глава 1

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВНУТРИКАМЕРНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

Процессы в камере сгорания РДТТ как в нестационарные, так и в квазистационарные периоды его работы являются сложной совокупностью большого числа физико-химических процессов. Их математическое моделирование предполагает рассмотрение таких явлений, как зажигание и горение навески воспламенительного состава, распространение продуктов горения по внутрикамерному объему, теплообмен продуктов сгорания с поверхностью топливного заряда, прогрев топлива, его зажигание и горение, истечение продуктов сгорания из камеры двигателя, напряженно-деформированное состояние корпуса и топливного заряда и его влияние на внутрикамерные процессы, изменение геометрии внутрикамерного объема и другие.

Уровень сложности математических моделей, используемых для прогнозирования параметров работы двигателя, изменяется в широких пределах — от простейших моделей, позволяющих получить аналитические соотношения, которые применяются в инженерных расчетах, до моделей, появление которых стимулировал прогресс вычислительной техники и ориентированных на использование современных вычислительных технологий. В результате для решения задач внутрикамерной газодинамики получается набор математических моделей, алгоритмов и программ, подчиненных решению основной задачи и обеспечивающих эксплуатацию программного комплекса в широком диапазоне варьируемых параметров, а также реализованных совокупностью различных методик, применение которых представляется в равной степени правомерным для решаемых задач. При этом выполняется частичное перекрытие применимости различных численных методик при одинаковых исходных данных, а гибкое изменение физической постановки задачи позволяет исследовать характер протекающих процессов и выяснить роль различных факторов в формировании картины течения.

Роль численного моделирования постоянно возрастает, что обусловливается снижением коммерческой стоимости вычислительной техники, включая многопроцессорные системы обработки данных, и сокращением объемов дорогостоящего натурного эксперимента за счет увеличения объемов численного моделирования. Кроме того, числен-

ный эксперимент дает данные, получение которых представляется либо трудоемким либо невозможным при натурном моделировании. Имеется также возможность установления физических закономерностей в исследуемых сложных процессах.

В данной главе рассматриваются вопросы, связанные с постановкой и реализацией вычислительного эксперимента для задач внутрикамерной газодинамики РДТТ. Технология численного эксперимента предполагает разработку физической и математической моделей решаемой задачи, построение дискретной модели и ее программную реализацию, а также эксплуатацию готового программного комплекса и анализ результатов расчетов. Разработка физической модели в существенной степени зависит от доступных ресурсов вычислительной техники, а содержание дискретной модели — от архитектуры компьютеров. При этом роль сравнительно простых математических моделей и имеющихся аналитических решений возрастает, поскольку они используются как при отладке программного комплекса, так и проверки результатов численных расчетов.

1.1. Построение физико-математической модели

Конструктивная схема двигателя во многом определяет характер протекающих процессов, а принятый уровень схематизации продуктов горения — сложность математической модели.

1.1.1. Конструктивные схемы. Основными конструктивными узлами и элементами РДТТ являются корпус, заряд твердого топлива, сопловой блок, органы управления вектором тяги, воспламенитель, узлы отсечки тяги и узлы аварийного выключения двигателя. Конструктивные компоненты РДТТ и соответствующие им математические модели приводятся на рис. 1.1.

Корпуса РДТТ имеют различную геометрическую форму (цилиндрическую, овальную, сферическую, торовую, коническую, комбинированную). В корпусе содержится прочно скрепленный с ним заряд твердого топлива. Корпус двигателя изготавливается либо из металла, либо из пластика.

Успехи в развитии крупногабаритных РДТТ связаны с освоением смесевых высокоэнергетических ракетных топлив, оформленных в виде блоков-зарядов, изготавливаемых заливкой топливной массы в корпус и прочно скрепленных с обечайкой двигателя. Внутренняя поверхность заряда создается формообразующими элементами в процессе полимеризации топливной массы.

Смесевое твердое топливо представляет собой механическую смесь тонкоизмельченного минерального окислителя (как правило, перхлора-

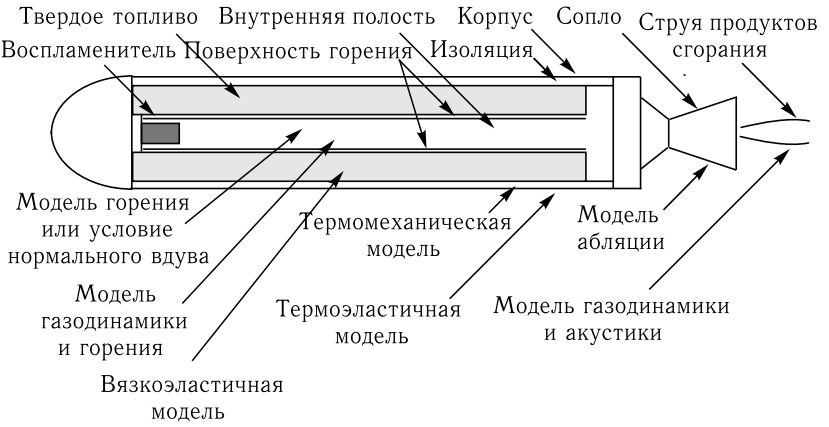


Рис. 1.1. Основные компоненты РДТТ и соответствующие им математические модели

та аммония), органического горючего-связки (различные типы каучуков) и металлических добавок (чаще всего мелкодисперсных частиц алюминия).

В зависимости от назначения и требований, предъявляемых к РДТТ, необходимо обеспечить определенную форму кривой изменения давления в камере двигателя, что достигается выбором формы заряда. Различают дегрессивную (давление с течением времени падает), нейтральную (давление постоянно) и прогрессивную (давление растет) форму заряда. Во многих случаях заданный закон газоподвода достигается сочетанием дегрессивно и прогрессивно горящих элементов.

Конструкции крупногабаритных РДТТ характеризуются разнообразием схемных решений и сложностью форм внутренних проточных трактов и каналов, позволяющих обеспечить требуемую поверхность горения.

Наиболее простыми формами зарядов являются сплошные заряды торцевого горения, обеспечивающие постоянство давления в камере сгорания (двигатели малой тяги и твердотопливные газогенераторы). В цилиндрических шашках с осевым сквозным каналом и бронированными торцами достигается постоянство поверхности горения. Для получения нейтрального горения сквозной канал дополняется продольными щелями, варьируя число которых и их относительную длину, добиваются необходимого изменения поверхности горения. Кривые давления с различной прогрессивностью получаются при использовании цилиндрических зарядов с внутренним каналом звездообразной формы с разным числом и формой лучей (маршевые двигатели баллистических

ракет). Высокий коэффициент заполнения двигателя топливом обеспечивают заряды с цилиндрически-коническим каналом и примыкающим к нему наклонным щелевым компенсатором. Для получения ступенчатой кривой изменения тяги применяются комбинированные формы зарядов (двухрежимные РДТТ).

Сопловой блок, служащий для разгона продуктов сгорания топлива и создания тяги путем преобразования тепловой энергии топлива в кинетическую, состоит из одного или нескольких сопел. Сопловой блок соединяется с задним днищем различным образом, а для небольших двигателей составляет с ним одно целое.

Конструкция соплового блока с учетом выбранного топлива и заданной траектории полета ракеты определяется необходимой тягой, удельным импульсом тяги, давлением в камере сгорания, временем работы двигателя и габаритными ограничениями. Четырехсопловые блоки малой длины обеспечивают управление вектором тяги по всем каналам (тангаж, рыскание, крен). Использование односоплового блока с центральным соплом, утопленным в камеру сгорания, позволяет повысить энергетические характеристики и сократить длину двигателя за счет продвижения сопла в камеру сгорания. В утопленном сопле (submerged nozzle) совмещаются функции создателя тяги и управляющего устройства, а его привлекательность связана с возможностью снижения потерь удельного импульса по сравнению с многосопловой конструкцией.

По конструкции внутрикамерного объема применяемые на практике двигательные установки делятся на несколько классов в зависимости от числа каналов и одно- или многосопловых блоков. В частности, в конструкции двигательных установок, содержащих один канал и одно сопло, выделяют передний объем, канал, предсопловой объем и неутопленное сопло. В этом случае область интегрирования состоит из четырех характерных объемов. При наличии щелей в окрестности переднего и соплового днищ область состоит из пяти объемов.

Управление вектором тяги по каналам тангажа, рыскания и крена осуществляется при помощи различных устройств (требуется создание боковых усилий, составляющих $1 \div 7\,\%$ от величины тяги). Органы управления разделяются на органы управления локального действия (щитки, дефлекторы, газовые рули, устройства для подачи жидкости или газа) и подвижные управляющие сопла. В органах управления локального действия при выработке управляющего усилия сопло остается неподвижным. При использовании поворотного управляющего сопла подвижная часть соплового тракта связывается с неподвижной частью при помощи шарнира.

1.1.2. Горение твердого топлива. Твердые топлива имеют достаточно широкую номенклатуру и отличаются друг от друга по характеристикам работы, что обусловлено их различным назначением. Одним из критериев, по которому характеризуются заряды, является их скорость горения: медленногорящие топлива ($2 \div 6$ мм/с), топлива со средней скоростью горения ($6 \div 15$ мм/с) и быстрогорящие топлива ($30 \div 60$ мм/с).

Горение смесевого твердого топлива представляет собой сложный процесс, включающий в себя ряд взаимосвязанных процессов химической, термодинамической и физической природы, и является самостоятельным научным направлением.

Наиболее распространенными твердыми топливами являются топлива с окислителем на основе ионов перхлората (ClO_4^-), в частности перхлората аммония (Ammonium perchlorate, AP).

Нитрат аммония (Ammonium nitrate, NG) дешевле перхлората аммония и является окислителем, совместимым с окружающей средой, поскольку он полностью газифицируется при горении и не выделяет соляную кислоту (HCl), ответственную за загрязнение окружающей среды и за видимость факела РДТТ вследствие конденсации водяного пара. Трудности использования нитрата аммония в качестве окислителя связаны с уменьшением удельного импульса, а также при разработке рецептур топлива с алюминием (низкая эффективность горения, поверхностная агломерация, фазовые переходы при температуре окружающей среды, гигроскопичность). Для регулирования зависимости скорости горения от давления используются катализаторы, а для увеличения скорости горения в состав топлива вводится энергетическое связующее. Применяются специфические добавки, способные стабилизировать фазовые переходы и ограничивающие гигроскопичность. Рассматриваются твердые топлива, основанные на системе двойного окисления (перхлорат аммония и нитрат аммония), что позволяет найти компромисс между двумя окислителями [180].

Типичные топлива для крупногабаритных РДТТ представляют собой смесь алюминиевого порошка с частицами относительно малого размера ($3 \div 30$ мкм), составляющими до 20 % массы топливной композиции, и кристаллов перхлората аммония ($40 \div 300$ мкм), обеспечивающих окислительный потенциал композиции (до 65 % массы заряда), диспергированных в матрице синтетического резиноподобного связующего (до 15 % массы заряда).

Алюминий наиболее часто используется в качестве энергетических добавок к компонентам твердого топлива (реакция окисления алюминия происходит с больши́м выделением энергии). В качестве замены алюминию рассматриваются возможности использования бериллия (продукты горения бериллия являются токсичными), циркония (поро-

шок циркония примерно в 2,5 раза плотнее порошка алюминия) и магния (достигается почти полное сгорание исходного металла), а также гибридов металлов, таких, как AlH_3, BeH_2 и ZrH_2 (они обеспечивают высокую энергетику топлива, но являются несовместимыми с многими полимерными материалами).

Каталитические добавки (catalysts, suppressants) используются в некоторых случаях для увеличения скорости горения (наряду с изменением дисперсности окислителя) и уменьшения чувствительности скорости горения к изменению давления и температуры. Находят применение как твердые добавки (например, оксид железа Fe_2O_3), так и жидкие. Увеличение дисперсности частиц катализатора способствует повышению скорости горения. Дополнительное увеличение скорости горения и снижение показателя степени в законе скорости горения дает использование комбинации нескольких катализаторов. Введение в смесевые топлива 1 % смеси, содержащей 84 % окиси меди и 16 % окиси хрома, увеличивает скорость горения на 30 %.

Замедление горения топлива осуществляется путем введения в его состав специальных соединений (двуокись магния, трехфтористый бром), называемых ингибиторами. Вводятся также добавки для подавления нежелательных эффектов при догорании факела РДТТ в атмосфере и уменьшения дымообразования.

В качестве баллистических добавок (ballistic modifier) и для стабилизации горения твердого топлива (combustion stabilizer) используется оксид титана (TiO_2).

Исследование горения твердого топлива представляет собой отдельное научное направление, в котором разработаны модели горения различной степени сложности [360].

При моделировании рабочих процессов в РДТТ горение топлива обычно схематизируется, причем уровень схематизации изменяется в зависимости от постановки задачи. В задачах выхода двигателя на режим, где существенными являются процессы подключения поверхности и распространения пламени по заряду, используются детализированные модели горения, требующие сопряжения газодинамической части задачи с задачей прогрева, воспламенения и горения топлива. В упрощенном подходе используется предположение о том, что процессы горения происходят в узкой области, прилегающей к поверхности заряда. С математической точки зрения, такое предположение приводит к постановке условия нормального вдува рабочего тела, параметры которого определяются из термодинамического расчета и условия равновесия.

Внедрение высокотемпературных топлив в РДТТ (с температурой горения $T > 4500$ K) для увеличения удельного импульса тяги ставит

под вопрос надежность использования углерод-углеродных композитных материалов в конструкциях сопловых блоков.

В качестве одного из вариантов решения данной проблемы находят применение двухсоставные заряды, состоящие из высокотемпературных и низкотемпературных топлив. Низкотемпературное топливо, расположенное вблизи соплового блока, создает более холодную область из продуктов сгорания — газовую завесу, которая омывает стенку и снижает ее температуру. Надежность работы сопла при этом увеличивается, а разгары проточной части уменьшаются. Недостатком двухсоставных зарядов является частичное снижение удельного импульса тяги. Для оптимизации удельного импульса и других внутрибаллистических характеристик двигателя необходимо точное знание динамики выгорания двухсоставного заряда.

Для решения проблем загрязнения атмосферы диоксинами используются бесхлорные неорганические (аммониевые соли динитрамина, соли нитроформа) или органические (октоген, гексоген) окислители.

1.1.3. Состав продуктов сгорания. Металлические добавки в виде высокодисперсного порошка (в основном, алюминия) входят в состав многих типов современных смесевых твердых топлив. Они призваны обеспечить достижение требуемого уровня энергетических характеристик и демпфирование неуправляемых акустических колебаний параметров рабочего тела в камерах сгорания. Следствием введения металла в рецептуру топлива является наличие конденсированной фазы в продуктах сгорания.

Дисперсность. Для исследования рабочих процессов в РДТТ важным является образование мелкодисперсных частиц окиси алюминия (Al_2O_3, частицы высокодисперсного оксида) диаметром $0{,}1 \div 20$ мкм, а также относительно крупных частиц металла (Al, частицы-агломераты) диаметром 100 мкм и более. Распределение частиц, образующихся в результате горения топлива, характеризуется бимодальным распределением по размерам (рис. 1.2).

Характеристики конденсированных продуктов сгорания, химический состав, концентрация и дисперсность частиц высокодисперсного оксида и частиц-агломератов зависят от свойств топлива (дисперсность и количество окислителя) и структуры его поверхностного слоя (карманы, межкарманные мостики, каркасный слой), взаимодействия и конкуренции различных механизмов агломерации (карманный, межкарманный и докарманный), а также давления в камере сгорания [7, 8, 194].

Источником образования частиц высокодисперсного оксида служит металл, не участвующий в агломерации, и металл агломератов. Сгорание неагломерирующего металла осуществляется в пределах

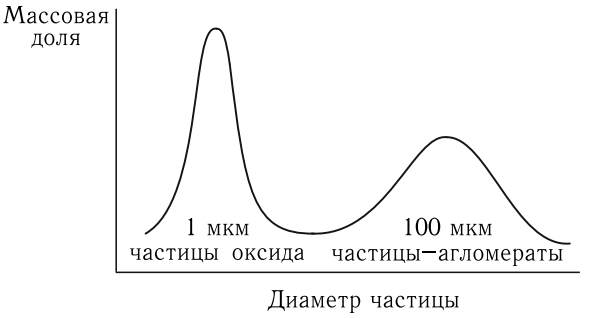


Рис. 1.2. Распределение частиц по размерам

поверхностного слоя горящего топлива, а металла агломератов — при движении частиц-агломератов в потоке продуктов сгорания. Различие в источниках появления высокодисперсного оксида является причиной образования частиц, отличающихся по своим размерам.

Для частиц-агломератов механизм образования окислов связан с гетерогенным окислением и последующим накоплением окиси на горящей поверхности исходного металла, а для мелкой — с парофазным механизмом и образованием ядер конденсации на некотором расстоянии от поверхности горящей частицы с их дальнейшим ростом вследствие броуновской коагуляции [7, 8, 194]. Микроскопический анализ конденсированной фазы показывает, что частицы мелкой фракции имеют правильную сферическую форму, но несколько деформированы.

При горении смесевого твердого топлива входящие в их состав частицы металлов претерпевают ряд сложных физико-химических превращений, начиная от плавления и агломерации капель на горящей поверхности заряда и заканчивая испарением, горением, дроблением и химическим взаимодействие металла и оксида с образованием газообразных продуктов реакции и их выносом в газовую фазу (рис. 1.3). Между температурой поверхности топлива (1200 К) и его начальной температурой (300 К) находятся две характерные температуры — температура плавления алюминия (933 К) и температура разложения связующего. Физико-химические процессы протекают в течение короткого промежутка времени и накладываются друг на друга, что затрудняет построение полной и универсальной модели явления, позволяющей прогнозировать размеры формирующихся частиц. Время горения частицы пропорционально ее начальному диаметру в степени $1 \div 2$.

В канале заряда многосекционных РДТТ с раскрепляющимися манжетами на манжету осаждаются частицы окиси алюминия и образуют на ее поверхности пелену. На краю манжеты происходит диспергирование этой пелены и формирование крупных капель размером до

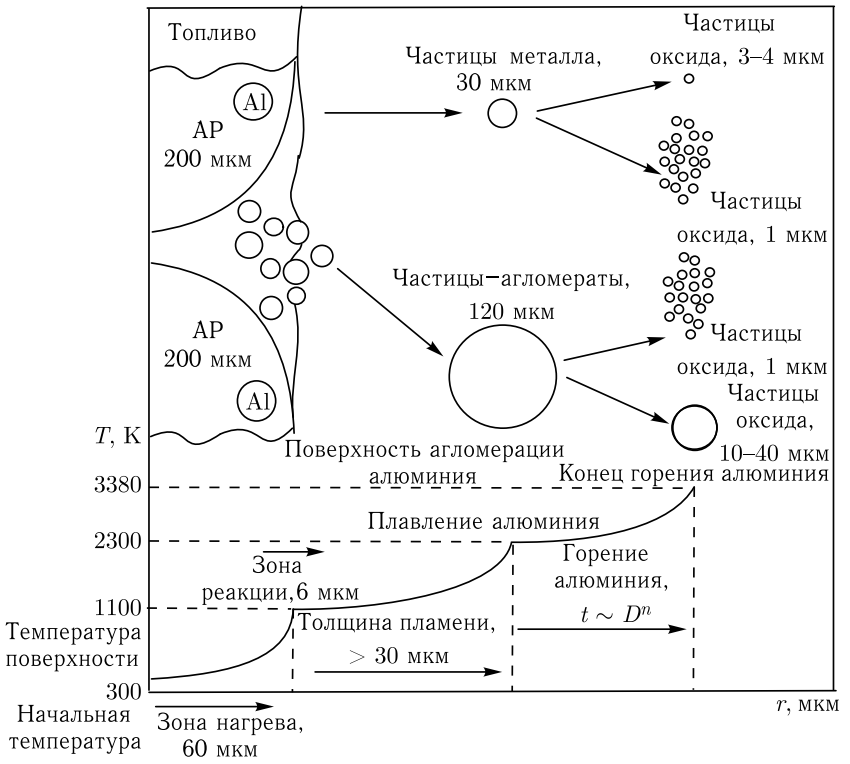


Рис. 1.3. Физико-химические превращения частиц алюминия

1 мм. Попадая в поток, эти капли коагулируют с мелкодисперсными частицами, увеличиваясь в размерах и частично дробясь, увеличивая долю конденсированных продуктов сгорания.

Время сгорания агломератов растет с увеличением их размера. В неблагоприятных условиях (маленькая камера сгорания, низкий окислительный потенциал газообразных продуктов горения) часть недогоревшего металла агломератов выносится потоком в сопло, что ухудшает тяговые характеристики сопла (расходный комплекс, коэффициент тяги, удельный импульс). Двухфазные потери удельного импульса пропорциональны массовой доле конденсированной фазы в продуктах сгорания и диаметру частиц в степени $1{,}5 \div 2{,}0$.

В частности, измерения размеров частиц в продуктах сгорания топлива в ускорителях системы Space Shuttle показывают, что до 80 % массы дисперсной фазы образовано частицами размером около 15 мкм, а 20 % — частицами размером порядка 115 мкм.

Распределение частиц окиси алюминия по размерам является ключевым фактором при исследовании стабильности горения твердого топлива. Для заданной частоты колебаний имеется размер частиц, оказывающий наиболее эффективное демпфирующее воздействие на развитие неустойчивости в камере сгорания. Демпфирующее воздействие конденсированной фазы пропорционально количеству мелких частиц, образующихся в результате горения. Частицы-агломераты являются слишком крупными, чтобы оказывать влияние на колебания рабочего тела. Горение агломератов приводит к тому, что источники энергии колебаний оказываются распределенными по объему камеры сгорания, а не локализованными на поверхности горения топлива или вблизи нее.

Строение агломератов. Одной из особенностей горения смесевого твердого топлива с добавками алюминия является слияние (агломерация) расплавленных частиц металла и его оксида в поверхностном слое горящего топлива в капли, размер которых на порядок превышает размеры исходных частиц металла.

Размер агломератов, покидающих поверхность горения, изменяется в широких пределах. Для смесевого топлива на основе бутилкаучуковой связки (плотность 1780 кг/м^3, содержание алюминия 18%) при давлении около 4 МПа и температуре продуктов сгорания 3400 К размер агломератов алюминия на поверхности горения изменяется от 65 до 444 мкм. При этом содержание алюминия в частице составляет 0,037 (при 65 мкм), 0,499 (при 167 мкм), 0,253 (при 233 мкм), 0,214 (при 333 мкм) и 0,460 (при 444 мкм).

В зависимости от особенностей внутреннего строения агломераты разделяются на два типа. К первому типу относятся «матричные» агломераты, состоящие из частиц оксида алюминия (Al_2O_3) сферической формы, в которые внедрены отдельные частицы алюминия. Агломераты второго типа представляют собой капли алюминия, на поверхности которых в том или ином количестве в виде частицы находится окись алюминия, называемая «нашлепкой» окиси (рис. 1.4). Содержание окиси в составной частице достигает 50% и более. Свойства таких образований близки к равновесным, при которых поверхностная энергия стремится к минимальному значению. Размер оксидных отложений на поверхности частицы металла зависит от состава газовой среды, в которой происходит горение.

На поверхности топлива образуется каркасный слой, состоящий из продуктов разложения связки и расплавленного алюминия, толщиной от 100 до 500 мкм (с понижением давления толщина каркасного слоя увеличивается до 700 мкм). В том случае, когда частицы окислителя существенно крупнее частиц металла, пространство между частицами окислителя заполнено горячим связующим, содержащим частицы металла. При горении такого состава ячейки горючего с вкраплениями

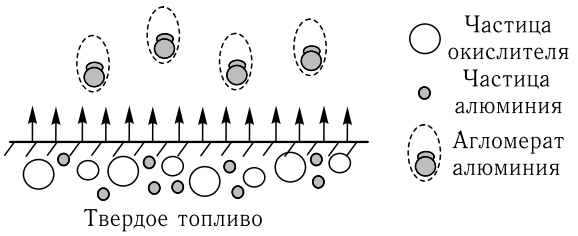


Рис. 1.4. Горение и агломерация частиц алюминия

металла и остатками связки отрываются от поверхности топлива, затем происходит выгорание связки и образование агломерата, размер которого определяется средним расстоянием между частицами окислителя (плотностью упаковки).

Химический анализ шлаков, остающихся в камере сгорания после огневых испытаний, указывает на наличие активного несгоревшего алюминия. Для различных топлив количество несгоревшего алюминия составляет до 1 % для крупногабаритных РДТТ и до $10 \div 15$ % для малогабаритных модельных двигателей и твердотопливных газогенераторов.

Появление остатков конденсированных продуктов сгорания в виде шлака у заднего днища вблизи утопленного сопла ухудшает баллистическую эффективность двигателя и создает дополнительные проблемы по обеспечению работоспособности теплозащитного покрытия у заднего дна.

Горение частиц. Разрабатываются специальные математические модели и алгоритмы для моделирования движения и горения составных агломератов в потоке продуктов сгорания твердого топлива [37, 48, 87, 88, 342]. Обзор моделей горения индивидуальной частицы алюминия приводится в работе [115]. В условиях микро- и обычной гравитации наблюдается несимметричное горение частицы алюминия и ее вращение [186]. В общем случае такие модели характеризуются достаточно большой сложностью и в существенной степени зависят от принятой схематизации процесса горения (рис. 1.5).

Температура воспламенения частиц алюминия обычно полагается равной температуре плавления оксида алюминия (2300 K), при которой происходит разрушение оксидной пленки, покрывающей частицу металла. Для наночастиц температура воспламенения меньше и достигает 900 K [366].

Частицы металла горят в диффузионном или кинетическом режиме [342]. В диффузионном режиме скорость горения лимитируется скоростью диффузии окислителя к поверхности частицы. В кинетическом режиме скорость горения зависит от скорости химических реакций.

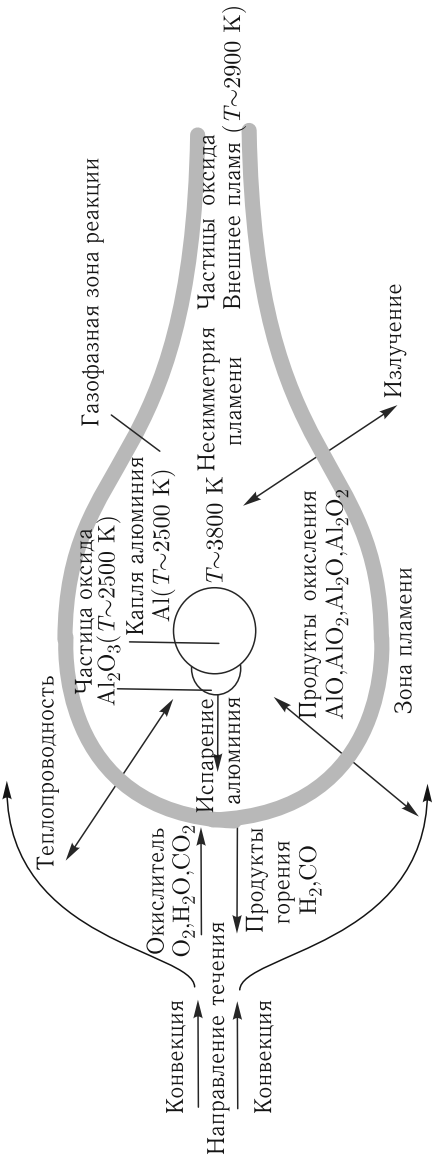


Рис. 1.5. Горение частицы алюминия

Реализация того или иного режима горения определяется числом Дамкелера (Damkőhler number). Большие частицы при высоких давлениях горят в диффузионном режиме, а мелкие частицы при низких давлениях — в кинетическом. Обдувающий поток приводит к переходу одного режима горения в другой.

Число Кнудсена $\mathrm{Kn} = 2l/d_p$ определяет режим течения около частицы. При атмосферном давлении течение около частиц менее 100 нм характеризуются числом Кнудсена $\mathrm{Kn} > 1$, соответствующим свободномолекулярному режиму течения, что приводит к дополнительном усложнению математической модели. При уменьшении размера частицы числа Био и Фурье уменьшаются, указывая на равномерное распределение температуры внутри частицы. Вместе с тем, методы молекулярной динамики показывают, что внутри наночастиц диаметром порядка 1 нм существует градиент давления [132].

1.1.4. Рабочие процессы. Рабочие процессы в камере сгорания РДТТ в различные периоды его работы представляют собой сложную совокупность различных физико-химических процессов. К основным составляющим рабочих процессов в РДТТ относятся прогрев, воспламенение и горение твердого топлива, течение продуктов сгорания в камере и сопле, тепловое, химическое, эрозионное взаимодействие продуктов сгорания с конструкционными и теплозащитными материалами проточного тракта, погасание топлива (выгорание остатков) и опорожнение камеры сгорания. При этом требуется учитывать напряженно-деформированное состояние корпуса и топливного заряда и его влияние на внутрикамерные процессы, а также изменение геометрии внутрикамерного объема при работе двигателя.

Рабочие процессы в РДТТ характеризуются высоким уровнем давления (до 12 МПа в современных маршевых двигателях) и температуры продуктов сгорания (до 4000 К), широким диапазоном изменения скорости потока (до 1000 м/с в камере сгорания и свыше 3000 м/с в сопле), наличием конденсированных продуктов сгорания (до 45 %), а также взаимным влиянием термодинамических, газодинамических и тепломассообменных процессов, развивающихся на различных временны́х масштабах. Время горения заряда твердого топлива составляет около 120 с (для ускорителя ракеты Ariane 5).

Важная роль в исследовании внутрикамерных процессов отводится моделированию газодинамических и тепломассообменных процессов.

Наряду с газовой фазой, в продуктах сгорания содержатся жидкие, а также твердые мелкодисперсные частицы, весовая концентрация которых достигает 40 %. Проточный тракт РДТТ от камеры сгорания до среза сопла подвергается воздействию высокотемпературного двухфазного потока продуктов сгорания. Двухфазный поток во внутрен-

них трактах РДТТ претерпевает сложную эволюцию, заключающуюся в изменении давления, температуры и химического состава продуктов сгорания, а также массовой доли и дисперсности частиц конденсированной фазы.

Поведение плотных двухфазных потоков (массовая доля частиц находится в диапазоне $0{,}4 \div 0{,}8$) качественно отличается от течений газовзвеси с низкой концентрацией дисперсной фазы. Такие двухфазные потоки реализуются в топливах высокофорсированных РДТТ.

Интерес представляет также моделирование различных нештатных ситуаций, отказов и аварий, связанных с газотермодинамикой внутренних процессов. К ним следует отнести задачи прогнозирования последствий разрушения заряда, нарушения бронировки, сопровождающегося вскрытием дополнительной горящей поверхности, течений в дефектах заряда и другие.

Важное место отводится исследованию устойчивости рабочих процессов в РДТТ, связанных с механизмами самовозбуждения колебаний рабочего тела в камере сгорания (вибрационное горение, гидродинамическое возбуждение, импульсное возбуждение, резонансное взаимодействие колебаний основного потока с механическими и акустическими колебаниями системы) и разработке методов подавления этих колебаний на стадии проектирования и испытаний.

Колебания параметров потока продуктов сгорания увеличивают теплонапряженность внутрикамерного объема, ускоряют теплопередачу к стенкам, а также улучшают полноту сгорания топлива по сравнению с устойчивым (стационарным) режимом горения. Основным источником низкочастотных колебаний в газовой полости РДТТ является гидродинамическая неустойчивость крупномасштабных вихревых структур, периодическая перестройка которых имеет место в застойной зоне около заднего днища.

Неустойчивость рабочих процессов в РДТТ в общем случае имеет акустическую и неакустическую природу.

Высокие уровни давления и температуры в камере сгорания, широкий диапазон скоростей и сложный многофазный состав продуктов сгорания, делающий среду практически непрозрачной, затрудняют постановку физического эксперимента.

Для моделирования рабочих процессов в РДТТ и расчета их основных характеристик, управления свойствами внутренних течений разработаны теоретические и численные методы различного уровня сложности, а также пакеты прикладных программ, основанные на результатах экспериментальных исследований и огневых стендовых испытаний натурных двигателей.

1.1.5. Внутренняя баллистика. Основная задача внутренней баллистики РДТТ состоит в определении давления в камере сгорания и массового расхода рабочего тела через сопло как функции времени.

Скорость горения смесевых топлив в соответствии с их механизмом горения определяется кинетическими (скорости химических реакций) и диффузионными (поступление в зону реакции реагирующих веществ) факторами.

Скорость горения зависит от природы топлива, давления, при котором осуществляется горение, начальной температуры заряда, скорости движения газа вдоль поверхности горения и других факторов, воздействующих на теплообмен и скорость реакций в конденсированной или газовой фазах.

Для большинства топлив наблюдается возрастание скорости горения при повышении давления, что обусловлено увеличением интенсивности теплоотдачи к поверхности топлива. Скорость реакций, протекающих в конденсированной фазе и сопровождающихся выходом газообразных веществ, при этом увеличивается. Одновременно увеличение концентрации газообразных реагирующих веществ приводит к росту скорости экзотермических реакций в газовой фазе. Высокотемпературная зона пламени приближается к поверхности твердого топлива за счет сокращения размеров зоны газификации.

Уменьшение давления оказывает обратное влияние на процесс горения — становится меньше приток теплоты из зоны пламенных реакций, и возрастает относительный вклад теплоты, необходимой для поддержания горения, из газокапельной зоны. При некотором минимальном давлении зона пламени исчезает, процесс горения поддерживается за счет теплоты реакций в предпламенной темной зоне и может прекратиться. Поскольку реакции на поверхности топлива продолжаются, а температура остается достаточной для газификации твердой фазы, может последовать новая вспышка топлива.

Роль гетерогенных и гомогенных реакций в общем комплексе явлений при горении неодинакова для разных давлений. В связи с этим нельзя ожидать одного и того же закона изменения скорости горения в широком диапазоне давлений даже для одного и того же топлива.

Зависимость скорости горения от давления определяется природой топлива. Для смесевых твердых топлив существенное влияние при этом оказывают размеры частиц окислителя и их распределение по размерам.

Для большинства топлив функция $u(p)$, описывающая зависимость скорости горения от давления, монотонно возрастает и удовлетворительно описывается степенной зависимостью

$$u(p) = u_1\, p^{\nu},$$

где u_1 — постоянная, ν — показатель степени.

Для топлив, содержащих до 18 % алюминия, перхлорат аммония и связку на основе каучука (Hydroxy-terminated polybutadiene, HTPB; Polybutadiene acrylonitrile, PBAN), характерный диапазон изменения показателя степени составляет $0{,}28 \div 0{,}32$. Топлива с низкими показателями степени позволяют уменьшить разброс внутрибаллистических характеристик и являются предпочтительными при широком диапазоне изменения температуры. Топлива с высокими показателями степени желательны для РДТТ, имеющих систему регулирования, что позволяет обеспечить заданный диапазон регулирования при сравнительно малых изменениях конструктивных параметров двигателя (например, площади критического сечения сопла).

Параметр u_1 зависит от состава топлива (рецептуры топлив, изготовленных на разных предприятиях и в разное время, имеют отклонения от номинального состава), начальной температуры топлива (используется гиперболическая или линейная зависимость), скорости течения рабочего тела вдоль горящей поверхности заряда (эрозионный эффект, состоящий в увеличении скорости горения топлива при увеличении скорости потока).

Вследствие низкой теплопроводности твердого топлива изменение температуры заряда от начальной, которую он имел перед горением, до температуры на поверхности горения происходит в тонком прогретом слое. Температура основной массы заряда практически не изменяется во время работы двигателя в связи с малым временем горения заряда. Начальная температура заряда определяет начальные условия для прохождения волны горения, в частности, гетерогенные химические реакции в прогретом слое существенно зависят от температуры.

При увеличении температуры заряда на 10 К скорость горения увеличивается в среднем на $2 \div 5$ %.

Скорость горения твердого топлива зависит также от технологии изготовления заряда. Например, скорость горения прессованного двухосновного топлива зависит от направления и давления прессования и качества пластификации. Скорость горения топлива в направлении, параллельном направлению прессования, на $10 \div 15$ % выше, чем в перпендикулярном направлении.

Скорость горения смесевых твердых топлив возрастает с увеличением размера двигателя, что вызывается изменением радиационного нагрева от горячих газообразных продуктов горения.

1.2. Особенности внутренних течений

Работа РДТТ характеризуется взаимосвязью и взаимовлиянием физических, химических, термодинамических процессов и процессов

тепломассопереноса, развивающихся на фоне общей газодинамической обстановки в рабочем пространстве внутрикамерного объема.

1.2.1. Течения в каналах со вдувом. Внутренняя полость камеры сгорания крупногабаритных двигателей представляет собой сложную систему каналов, стенки которых образованы горящей поверхностью заряда твердого топлива и внутренней поверхностью корпуса. Процессы, связанные с прогревом топлива, разложением его компонентов и их химическим взаимодействием протекают в тонком приповерхностном слое. Структура пламени представляется в виде контактного разрыва, расположенного параллельно горящей поверхности, при переходе через который полностью завершаются химические реакции и образуется однородная газовая смесь.

Математической моделью течения продуктов сгорания служит модель течения в канале с проницаемыми стенками, которая отражает наиболее существенную сторону процесса — подвод массы со стороны горящей поверхности заряда.

Каналы с проницаемыми (массоподводящими) стенками присутствуют во всех конструктивных решениях РДТТ и поэтому выделяются в самостоятельный конструктивный элемент (рис. 1.6). В каналах развиваются течения, определяющие работоспособность конструкции, уровень теплообмена, особенности переноса частиц конденсированной фазы и их инерционное осаждение на стенки камеры сгорания и сопла, формирование зон повышенной концентрации частиц, а также условия течения на входе в сопло.

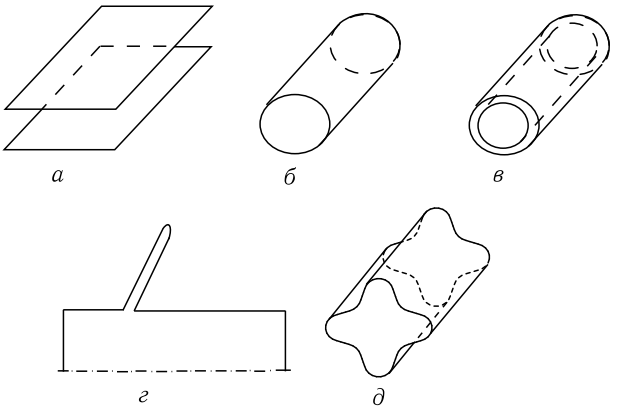


Рис. 1.6. Каналы со вдувом

Простейшей геометрической моделью, учитывающей влияние вдува, служит течение между двумя параллельными пластинами (рис. 1.6 *а*),

с поверхности которых производится вдув одинаковой (симметричный вдув) или различной (несимметричный вдув) интенсивности.

Модель течения в цилиндрической канале с круглой формой поперечного сечения в плане (рис. 1.6 *б*) используется для расчета распределения скорости в центральном канале заряда.

Течение в кольцевом канале со вдувом (рис. 1.6 *в*) используется в качестве модели течения между стенкой канала заряда и поверхностью утопленного сопла.

Для компенсации изменения поверхности горения заряда твердого топлива в процессе работы двигателя и поддержания требуемой зависимости давления в камере сгорания от времени применяются каналы с кольцевыми выточками (рис. 1.6 *г*), а также каналы с звездообразной формой поперечного сечения (рис. 1.6 *д*).

Для течений в плоском и круглом канале со вдувом имеются теоретические решения, построенные различными методами (модель, основанная на поиске подобных решений, и модель слоистой гидравлики). Согласно этим решениям, профили продольной скорости в различных поперечных сечениях канала являются универсальными и описываются косинусоидальным распределением.

Для течений в каналах со вдувом граничные условия на стенке (условия нормального вдува) формулируются одинаковым образом как для вязкой, так и невязкой жидкости. Граничные условия не вносят сингулярных возмущений в решение (как это имеет место в случае пограничного слоя на непроницаемой поверхности), и вязкость регулярным образом влияет на решение.

Точное решение, имеющееся для течения невязкой жидкости в канале с круглой формой поперечного сечения в плане, достаточно хорошо воспроизводит особенности течений в каналах со вдувом, имеющих неизменную форму поперечного сечения по длине канала. При этом вязкость и турбулентность течения, а также малая конусность канала незначительно влияют на форму профиля продольной скорости. Наличие у канала непроницаемого дна хотя и искажает косинусоидальный профиль продольной скорости, но такое влияние ограничивается лишь малыми расстояниями от левой границы расчетной области.

Перечисленные обстоятельства определяют поток с косинусоидальным распределением продольной скорости и линейным ускорением по продольной координате как некий эталон для исследования течений в каналах зарядов РДТТ.

Камеры сгорания крупногабаритных РДТТ имеют разнообразные геометрические оформления, что связано как с решением компоновочных задач, так и с необходимостью обеспечения требуемой условиями их работы поверхности горения (заданная форма кривой время/давление).

Цилиндрический канал при горении увеличивает свою поверхность. Для компенсации увеличивающейся во времени поверхности массоподвода в конструкцию заряда вводятся дегрессивно горящие элементы, например, кольцевые проточки и пропилы, позволяющие получить на стационарном режиме работы двигателя давление в камере, близкое к постоянному.

Широкое применение находят каналы с многощелевой (звездообразной) формой поперечного сечения. Каналы такого сечения используются в зарядах ускорителей Space Shuttle, Titan IV, Ariane V, H 1 и других.

Для канально-щелевого заряда интенсивность потока, истекающего из щели, зависит от геометрического оформления щелевого пропила. Течение в щелевом компенсаторе двумерное, а данные о распределении скорости в полости щели используются для определения предельных размеров толщины щелевого зазора и обеспечения горения заряда по внутренней поверхности таким образом, чтобы изолировать стенки канала от теплового и эрозионного воздействий газового потока.

Секции щелевых компенсаторов сопрягаются с различными канальными цилиндрическими участками.

При нахождении щелевой секции в дальнем от сопловой крышки участке канала поток из нее поступает в канал, образуя течение с профилем скорости более наполненным, чем косинусоидальный. Вниз по потоку от щелевого компенсатора распределение продольной скорости приближается к виду, характерному для цилиндрического канала со вдувом.

В случае расположения щелевых пропилов в той части заряда, которая обращена к сопловой крышке, высокоскоростной канальный поток взаимодействует с потоками, сформированными щелями, с образованием распределения скорости, изменяющегося по продольной координате.

Динамика развития профиля продольной скорости в щелевой части заряда, который имеет сравнительно короткую предшествующую цилиндрическую часть (менее скоростной канальный поток), показывает, что отличие распределения скорости от косинусоидального является более выраженным по сравнению со случаем, когда цилиндрическая часть заряда оказывается достаточно протяженной.

При отсутствии сопряжения участков канала с различной геометрической конфигурацией поперечного сечения (весь канал формируется как щелевой или звездообразный) и неизменной форме поперечного сечения по длине канала профиль продольной скорости является универсальным и хорошо согласуется с косинусоидальным распределением, имеющим место в цилиндрическом канале со вдувом. Соответствие

профиля скорости косинусоидальному распределению широко используется при разработке приближенных методов расчета.

К глухим каналам в РДТТ относятся специально сформированные в конструкции двигателя застойные зоны, кольцевые проточки, узкие зазоры между корпусом двигателя и торцами заряда в окрестности соплового днища.

1.2.2. Эрозионное горение. По мере удаления от переднего торца заряда и при приближении к соплу расход газа и его скорость увеличиваются. Скорость горения одного и того же топлива в одинаковых условиях (давление в камере сгорания и начальная температура) увеличивается, если вдоль поверхности горения движутся продукты сгорания.

Причина эрозионного горения (erosive burning) топлива состоит в интенсификации процессов тепломассопереноса. При увеличении скорости газов, обтекающих поверхности горения, турбулентное ядро потока перемещается в зону химических реакций и газификации компонентов топлива. В результате такого перемещения происходит турбулизация зоны горения и ее приближение к поверхности топлива. Усиленный подвод теплоты к поверхности горения интенсифицирует химические реакции в конденсированной и газовой фазах и приводит к увеличению скорости горения.

Схема перехода ламинарного режима течения в турбулентный приводится на рис. 1.7, построенном на основе данных [116, 352]. За ламинарным участком течения, существующим в интервале $0 < x/h < 20$, следует переходный участок при $20 < x/h < 30$, в котором возникающие флуктуации скорости не оказывают существенного влияния на формирование профиля средней скорости, и участок турбулентного течения при $30 < x/h < x/L$, на котором профиль средней осевой скорости становится более наполненным.

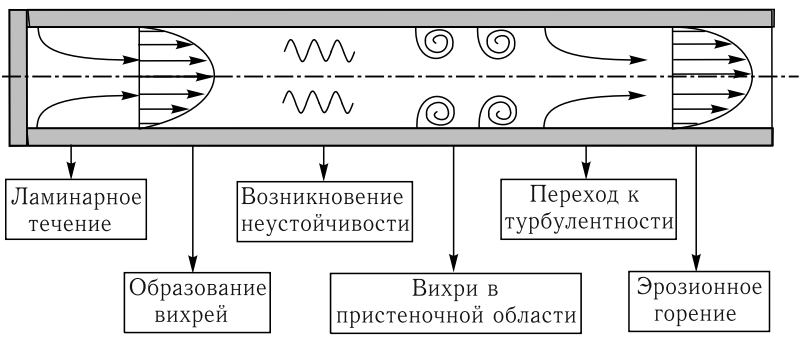


Рис. 1.7. Ламинарно-турбулентный переход в канале со вдувом

Чаще всего эрозионное горение возникает сразу после запуска, когда площадь поперечного сечения канала заряда мала. По мере выгорания топлива площадь поперечного сечения каналов увеличивается, скорость газового потока уменьшается и эрозионное горение исчезает.

Модели, описывающие эффект эрозионного горения, основаны на применении либо современных методов моделирования турбулентных течений с учетом химических реакций в газовой и конденсированной фазах [358], либо на использовании данных физического эксперимента, обработанных в виде зависимости скорости эрозионного горения от давления и числа Маха на оси канала [297]. Проблематичность использования критериальных соотношений состоит в том, что они получаются для статических испытаний малоразмерных двигателей, что приводит к завышенной скорости эрозионного горения. Локальные модели эрозионного горения используют в качестве характерного параметра локальный градиент скорости, параллельной поверхности горения [358].

Разработка РДТТ с высокой скоростью потока в канале заряда, в частности бессопловых двигателей (nozzleless motor), требует достаточно точных методов расчета скорости эрозионного горения. Существующие расчетные модели эрозионного горения основаны, как правило, на теории химически реагирующего пограничного слоя и отличаются друг от друга полнотой учета газодинамических и химических процессов в зоне горения. Пока эти методы не дают достаточно корректного описания эрозионного горения, что объясняется недостаточной изученностью этого явления и отсутствием надежной теории турбулентности.

1.2.3. Течения в предсопловом объеме. По технологическим соображениям в современных РДТТ дозвуковая часть сопла обычно вдвинута (утоплена) в канал заряда. Использование утопленного сопла уменьшает продольный размер двигателя, но порождает комплекс проблем, связанных с обтеканием сопла высокотемпературным потоком и являющихся следствием сложной газодинамической обстановки в предсопловом объеме.

Повышение коэффициента весового совершенства двигателя связано с размещением дополнительного количества топлива в том же объеме оболочки двигателя. Для односопловой конструкции это достигается за счет увеличения степени утопленности сопла в заряд, а для двигателя с четырехсопловой крышкой — за счет модификации торцевого оформления заряда и пережатия предсоплового объема.

Размещение дополнительного объема топлива в предсопловом объеме и связанное с этим уменьшение расстояния между торцом и сопловым дном не приводит к повышению уровня максимальной скорости

на поверхности крышки, но вызывает почти двукратное увеличение градиента скорости в центре днища по сравнению со свободной схемой.

Заполнение топливом предсоплового объема приводит к изменению поля полного давления в горле сопла, а течение на торце заряда в начальный период работы характеризуется газодинамическими неоднородностями, проявляющимися в виде точек стекания и растекания.

Для расчета характеристик течения над вдвинутой частью сопла (между горящей поверхностью заряда и утопленной входной частью сопла) в начальный момент времени работы РДТТ используется модель течения в кольцевом цилиндрическом канале с проницаемыми стенками. По мере выгорания топлива диаметр канала и кольцевой зазор над вдвинутой частью сопла увеличиваются. При этом скоростной напор потока в канале превышает скоростной напор встречного потока из кольцевого зазора, и картина течения над вдвинутой частью сопла изменяется. Нарушение симметрии сопровождается несимметричным затеканием потока из канала в кольцевую область и пространственным обтеканием сопловой крышки.

При решении проблемы обеспечения теплозащиты особое внимание уделяется точкам максимума теплоотдачи. В утопленном сопле под воздействие двухфазного потока попадает лобовая поверхность входной части сопла, что ставит задачу организации течения в этой области, исключающего повышенные эрозионные воздействия.

В ряде случаев наблюдаются очаговые поражения теплозащиты (локальные углубления правильной формы размером до десятков миллиметров), которые связаны с химической реакцией, протекающей на границе контакта обугленного слоя и оксида металла, находящегося в агломерате, который удерживается на поверхности теплозащиты, или с локализованным выпадением частиц. Эти задачи инициируют изучение проблемы развития пространственных пограничных слоев на поверхности сопловой крышки и течений в окрестности особых точек.

Данные физического эксперимента [76] показывают, что существует два режима обтекания утопленного сопла: режим с оттеснением канального потока от поверхности сопла (режим 1) и режим с проникновением канального потока к поверхности утопленного сопла (режим 2). Реализация того или иного режима течения зависит от соотношения между скоростными напорами потоков из надсопловой и канальной частей заряда (смена режима течения происходит при превышении некоторого критического значения). Режимы обтекания утопленного сопла характеризуются различными уровнями теплового взаимодействия газа с поверхностью сопла, а также определяют качественные особенности переноса частиц конденсированной фазы.

В режиме 1 вся поверхность сопла омывается потоком, поступающим из надсопловой части заряда. В режиме 2 поток, приходящий

из канала заряда, частично оттесняет надсопловой поток и достигает поверхности сопла, образуя локализованные области с точками и зонами торможения. Надсопловой поток проникает в сопло в промежутках между зонами присоединения канального потока.

При использовании звездообразного или канально-щелевого оформления заряда реализуется режим с проникновением канального потока к поверхности сопла. Течение носит трехмерный характер даже в случае осесимметричной компоновки двигателя. Трехмерность проявляется как результат неустойчивости осесимметричной формы течения к технологическим и расходным возмущениям (эксцентриситет, неравномерный массоподвод, технологические погрешности установки сопла).

Местные повышения коэффициента теплоотдачи связаны с появлением на поверхности сопла критических точек и линий присоединения потока. На лобовой поверхности сопла количество зон натекания соответствует числу лучей звезды или щелевых пропилов. При малоскоростном потоке из заряда или большом расходе надсоплового потока зоны натекания проявляются достаточно слабо, но с увеличением скоростного напора канального течения они становятся более выраженными. В зонах, омываемых надсопловым потоком, теплообмен менее интенсивен, но общий уровень теплообмена по сравнению со случаем осесимметричного канала увеличивается в $2 \div 3$ раза.

Теплообмен в надсопловом зазоре подобен теплообмену в критической точке, для которого характерна пропорциональность корню квадратному из числа Рейнольдса ($\mathrm{Nu} \sim \mathrm{Re}^{1/2}$). Теплообмен носит ламинарный характер, но его уровень оказывается в несколько раз выше, чем по теоретическим оценкам, что обычно объясняется влиянием турбулентности внешнего потока. Эта закономерность нарушается при больши́х временах работы двигателя, когда надсопловой зазор раскрывается и в околосопловом пространстве меняется режим течения.

В некоторых случаях возникает необходимость дополнительной защиты зоны сопряжения обечайки двигателя с сопловой крышкой, которая подвергается повышенному тепловому воздействию по сравнению с исходной конструктивной схемой, в которой погружение сопла внутрь двигателя отсутствует.

При погружении части заряда в предсопловой объем, стесняющий пространство и пережимающий потоки, изменяется распределение давления по поверхности крышки и торца, в частности, на торце под сопловым входом появляется зона разрежения. Условия затекания потока в сопло ухудшаются, что обусловлено появлением в горле сопла обширной зоны с потерями полного давления. Установка газоотражательного козырька, направляющего поток в сопло, приводит к некоторому выравниванию давления в предсопловом объеме. На поверхности

заряда образуются структуры, характерные для трехмерного отрыва пограничного слоя (линии стекания и растекания).

Крупномасштабные вихревые структуры, сформировавшиеся в канале заряда, сносятся потоком в предсопловой объем и взаимодействуют с поверхностью утопленного сопла. В предсопловом объеме генерируются вихри L1 и L2 (рис. 1.8 *а*). Вихрь P, сталкиваясь с поверхностью утопленного сопла, расщепляется на два вихря меньших размеров, P1 и P2 (рис. 1.8 *б*). Взаимодействие вихря P с пограничным слоем на поверхности утопленного сопла приводит к формированию вторичного вихря S, который вращается в направлении, противоположном направлению вращения основного вихря P. Во многом имеется аналогия с взаимодействием вихревого кольца с плоской стенкой [279]. Вихрь P2 подпитывает вихрь L1, который формируется в рециркуляционной зоне предсоплового объема. Интенсивность вихря L1 в среднем остается постоянной (с одной стороны, интенсивность вихря L1 уменьшается за счет вязкой диссипации, а с другой, увеличивается за счет слиянияс вихрем P2).

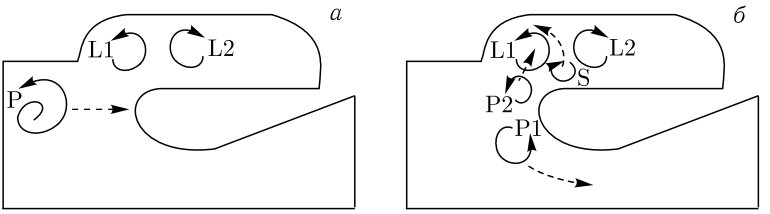


Рис. 1.8. Взаимодействие вихревых структур с поверхностью утопленного сопла

В период запуска двигателей с зарядами зонтичного типа или утопленным сопловым блоком в камере сгорания формируются застойные зоны, в которых воспламенение заряда твердого топлива существенно замедляется. При использовании модели идеального газа не удается правильно рассчитать теплообменные процессы в застойных зонах. Достоверность осесимметричных расчетов оценить затруднительно из-за сильного влияния схемной вязкости, которое имеет место при низких скоростях течения.

1.2.4. Сопловые течения. В ракетных двигателях широко используются сверхзвуковые сопла Лаваля, имеющие плавно сужающуюся дозвуковую часть, горловину и расширяющуюся область сверхзвукового течения. Для улучшения энергомассовых характеристик сопла имеют форму, отличающуюся от классической. Встречаются сопла, утопленные в камеру сгорания, с конструкционными уступами и стыками разноуносимых материалов.

В процессе работы происходит унос материала сопла, что приводит к потере устойчивости потока в пристенной области. В течениях продуктов сгорания в сопле наблюдаются различные виды газодинамической устойчивости. В закритической области в месте стыка разноуносимых материалов, где реализуется течение с положительным градиентом давления, на поверхности с криволинейной образующей возникают устойчивые продольные вихри (вихри Тейлора–Гертлера), образуя попарно винтовое течение с осью вращения вдоль образующей сопла.

В сверхзвуковой области (при $M > 1$) при отрицательном градиенте давления вблизи стенки сопла наблюдаются следы в виде ромбовидных узоров пересекающихся характеристик [50]. Данный вид устойчивого течения относится к сверхзвуковому течению с образованием волн Маха, а угол наклона отпечатков соответствует углу наклона характеристик.

С увеличением скорости под воздействием внешних сил поток вблизи стенки постепенно «раскачивается» и теряет послойную устойчивость, приобретая волнообразный характер (волны Толмина–Шлихтинга). Волны имеют весьма регулярный гофрообразный характер с явной периодичностью и практически постоянным значением амплитуды [76].

Неравномерности течения в канале и предсопловом объеме приводят к появлению газодинамических неоднородностей в сопловом потоке [75].

В области сопряжения криволинейной околозвуковой части сопла с коническим выходным участком появляется зона торможения потока, возникающая вследствие разрыва кривизны контура сопла и проявляющаяся в локальном подъеме давления на его поверхности. При осесимметричной установке сопла зона торможения также является симметричной, а отклонение сопла или его линейное смещение приводят к изменению уровня давления на противолежащих образующих сопла.

Для щелевого или звездообразного центрального канала неравномерности полного давления проявляются и при симметричном положении сопла. Отклонение сопла приводит к перестройке поля полного давления, являющейся следствием сложной пространственной картины течения в околосопловом пространстве.

Имеет место локальное повышение статического давления на сверхзвуковой образующей сопла непосредственно за его критическим сечением в области сопряжения радиусной и конической частей сопла. Зона торможения порождает волны сжатия, которые на некотором расстоянии от поверхности сопла формируют ударную волну (сопловой скачок уплотнения). При отклонении сопла интенсивность сопловых скачков усиливается и происходит смещение точки их интерференции.

В соплах с малым радиусом критического сечения ($10 \div 20$ мм) наблюдается повышение концентрации частиц на оси потока (жгутование). Наличие частиц конденсированной фазы способствует физическому сглаживанию скачков уплотнения. Среднемассовый размер частиц возрастает в дозвуковой части сопла, достигая максимума вблизи критического сечения. В сверхзвуковой части сопла среднемассовый размер частиц плавно падает из-за их дробления. Вдоль стенки сверхзвуковой части профилированного сопла имеется зона чистого газа, в которой выпадение частиц отсутствует.

Принятая конструктивная схема управляющего сопла ограничивает изменение геометрических характеристик дозвукового оформления соплового блока. Снижение теплового и эрозионного воздействия потока, а также подавление газодинамических неравномерностей в сопловом течении достигается за счет изменения радиусов сопряжений отдельных конструктивных элементов и их выноса.

Значительным техническим достижением является создание сопел изменяемой формы. Расширяющаяся часть сопла состоит из нескольких сегментов, при перемещении которых сопло раздвигается наподобие телескопической трубы. До включения двигателя сопло находится в сложенном положении, что позволяет сократить массу и размеры переходных отсеков ракеты. Постепенное раскрытие сопла по мере подъема ракеты обеспечивает расширение реактивной газовой струи до давления, близкого к окружающему, что является условием получения максимального удельного импульса.

1.2.5. Течения, наводимые органами управления. Направление вектора тяги регулируется при помощи внедрения в сверхзвуковую часть сопла твердого препятствия (газовые рули, периферийные рули, интерцепторы), вдува продуктов сгорания в закритическую часть сопла и использования поворотного управляющего сопла.

Имеющиеся системы и органы управления вектором тяги характеризуются надежностью, быстродействием, малым потреблением энергии, небольшой массой и не приводят к заметным потерям удельного импульса, обусловленным нарушением потока в сопле и отклонением реактивной струи (применяются эластичные и жидкостные подшипники).

Наиболее разработанный метод регулирования тяги состоит в изменении площади горловины сопла путем механического перемещения профилированной иглы (центрального тела), установленной на оси сопла. Поскольку изменение проходного сечения сопла приводит к противоположному изменению давления в камере, то зависимость тяги от перемещения иглы имеет сложный характер.

Поток взаимодействует с препятствием, приводя к возникновению сложной системы скачков уплотнения и отрывных зон, перераспреде-

лению давления на поверхности сопла и появлению боковой управляющей силы. Взаимодействие высокотемпературного потока с препятствием вызывает его прогрев, эрозию и изменение формы. Такая система регулирования тяги приводит к усложнению и утяжелению конструкции.

Исследование пространственных течений, индуцируемых органами управления, проводится лишь вблизи соответствующих элементов конструкции. В остальной части сопла (до точки начала повышения давления), используются методы расчета двумерных внутренних двухфазных течений.

В дополнение к системе управления вектором тяги на основе поворотного сопла, находит применение система управления за счет использования продуктов сгорания, отводимых из камеры сгорания РДТТ, в качестве управляющего газа. Основная трудность состоит в создании клапанов, способных работать в высокотемпературной среде.

Газовые рули используются для создания боковых усилий и вращательных моментов в течение относительно небольшого промежутка времени. Они изготавливаются из эрозионностойких материалов на основе сплавов тугоплавких металлов и углерод–углеродных композиционных материалов, обладающих высокой прочностью и минимальными скоростями эрозионного разрушения в высокотемпературных двухфазных сверхзвуковых потоках продуктов сгорания.

При вдуве струи в сверхзвуковую часть сопла управление вектором тяги осуществляется при помощи восьми клапанов, расположенных попарно во взаимно перпендикулярных плоскостях. Продольные оси клапанов одной пары пересекаются под углом, превосходящим угловое расстояние между центрами отверстий, что обеспечивает управление по углам крена, тангажа и рыскания. Клапан вдува позволяет регулировать расход газа от некоторого нулевого значения до максимального в соответствии с заложенной программой. Звуковой режим истечения из отверстий обеспечивается соответствующим отношением между полным давлением вдуваемого газа и статическим давлением набегающего потока в сечении вдува.

1.2.6. Течения, наводимые поворотом управляющего сопла. Управление по углам тангажа и рыскания технически осуществляется поворотом соплового блока в некотором устройстве (шаровой шарнир, двойной упругий подвес). Для обеспечения управления требуются усилия, не превышающие 10 % от основной тяги, которые создаются отклонением сопла на угол $5 \div 7°$. Конструкция поворота сопла, использующая жидкостный подшипник, позволяет отклонять сопло со скоростью 40 град/с, прилагая весьма малое усилие.

Течение в поворотном управляющем сопле существенно зависит от условий на входе в сверхзвуковую часть, и в зависимости от этих условий, а также от длины и формы сверхзвукового сопла, формируется структура течения на наветренной и подветренной частях.

Существенная неоднородность потока в сопле, инициируемая поворотом сопла, может существенно (до 3,5 %) уменьшить коэффициент расхода сопла в начальные моменты работы РДТТ.

Линейное и угловое отклонение сопла для создания управляющих усилий приводит к несимметрии геометрии околосоплового пространства и обусловливает возникновение интенсивных вторичных течений, проникновение потока в область раскрепляющей манжеты заднего дна, перераспределение тепловых потоков в сопле.

При повороте сопла относительно оси камеры сгорания его дозвуковая утопленная часть входит в так называемую наветренную область. При этом на наветренной стороне сопла реализуется положительный градиент давления. Поток, натекая на наветренную лобовую часть сопла, растекается в радиальном направлении относительно зеркальной границы.

При отклонении сопла в окрестности задней крышки образуется сложная пространственная картина течения. Поток из канала заряда на наветренной части сопла натекает на его кромку, образуя на ней область растекания. При этом одна часть газа поступает непосредственно в сопло, а другая — в область над утопленным соплом. Стекание газа, образующегося в надсопловой области и затекающего в нее из канала, происходит на подветренной стороне сопла, что приводит к возрастанию скорости обтекания внешней утопленной части сопла (в $2 \div 4$ раза) и заднего днища. Основной поток, обтекающий сопло, взаимодействует со встречным потоком, поджимая его и приводя к образованию вихревого жгута, сосредоточенного с подветренной стороны сопла. Интенсифицируются процессы тепломассообмена и осаждение частиц конденсированной фазы на внешнюю поверхность утопленной части сопла и заднего днища. На лобовую кромку сопла осаждаются частицы, вылетающие из канальной части заряда, а не из надсопловой.

Учитывая осесимметричность течения в большей части канала, моделирование пространственного течения начинается с некоторого сечения, расположенного ближе к переднему днищу. Его положение уточняется по результатам предварительных расчетов с учетом размера зоны влияния повернутого сопла.

В ряде случаев изменение геометрии компоновки (диаметра центрального канала, расстояния от торца заряда до сопла) приводит к инверсии картины обтекания входной части утопленного сопла (для зарядов, имеющих канал звездообразной формы). В одном случае повышенные уносы (поперечные канавки) на лобовой части поворотного

управляющего сопла наблюдаются в окрестности плоскостей по щелям, а в другом — между щелями.

Экспериментальное параметрическое исследование [50, 76] выявило три основные принципиально различные картины течения: 1 — дискретно-перемежающаяся с лобовым натеканием основного потока по лучам и дискретным вытеканием встречного потока между лучами; 2 — дискретно-перемежающаяся с лобовым натеканием основного потока между лучами и дискретным вытеканием из надсоплового канала по лучам; 3 — сплошная с вытеканием встречного потока по всему кольцевому каналу. Возникновение той или иной картины (1, 2, 3) определяет угол α между границей струи из центрального канала и касательной к входной кромке сопла: при $\alpha > 90^\circ$ реализуется картина 1, при $\alpha < 90^\circ$ — картина 2, а при $\alpha = 90^\circ$ — картина 3.

1.2.7. Течения, наводимые элементами отбора и сброса газа. В ряде конструктивных решений управление сопловым течением (например, изменение его энергетики) осуществляется за счет отбора или сброса газа в околосопловое пространство.

Отбор газа, производимый через узлы, расположенные в районе сопряжения сопла с сопловой крышкой, изменяет характер обтекания сопла потоком, поступающим из канала заряда. В области отбора газа создаются условия для глубокого проникновения канального потока в надсопловую область.

Несимметрия потока, возникающая при сбросе газа в камеру сгорания из газогенератора, приводит к сворачиванию в вихревое образование встречных потоков, поступающих из канала заряда и надсоплового пространства.

Расходная неравномерность в предсопловом объеме, порождаемая за счет отбора или вдува газа, действует наподобие геометрической.

1.2.8. Течения в заманжетной полости. Наличие полости между поверхностью заряда и сопловой крышкой (максимальный размер полости не превышает нескольких миллиметров) связан с необходимостью разгрузить возможные напряжения в заряде, которые возникают при усадке скрепленного с крышкой заряда. Для свободновложенных зарядов подобные проблемы имеют место в полости, образованной зазором между зарядом и обечайкой корпуса.

Течения в заманжетном пространстве наводятся как за счет поступления в полость части надсоплового потока из-за местных стеснений, вызванных смещением сопла, так и из-за прорыва в зону задней крышки потока из центрального канала заряда.

В случае симметричного газоподвода, когда интуитивно ожидается работа заманжетной полости как застойной зоны, возникают режимы течения с интенсивной закруткой потока, причем в заманжетном

пространстве наблюдаются вихри, взаимодействующие друг с другом с проявлением линий стекания и растекания.

Интенсивность теплообмена в заманжетном пространстве зависит от факторов, определяющих несимметрию и связанную с ней интенсификацию течения в этой области.

1.2.9. Течения во вращающихся двигателях. Необходимость исследования закрученных течений диктуется разработкой двигателей, стабилизируемых в полете вращением, а также проведением экспериментальных работ на моделях РДТТ на центрифугах и прочих устройствах, имитирующих действие перегрузок.

Уравнения движения газа, записанные с учетом влияния центробежного и кориолисова ускорений, показывают, что скорость газа не зависит от поступательных и центробежных ускорений, хотя влияние кориолисовых сил сохраняется. Например, в случае одномерного течения в канале, вращающемся вокруг продольной оси, вращение не меняет поля скорости газа. В остальных случаях имеет место влияние вращения на кинематику течения. В круглом осесимметричном канале, вращающемся вокруг продольной оси, возникает дополнительная азимутальная компонента вектора скорости газа при неизменной осевой и радиальной компонентах. В более общем случае влияние кориолисовых сил приводит к появлению пространственных структур течения в геометрически осесимметричных задачах и возникновению циркуляционных зон [98].

При высокой скорости вращения во внутрикамерном объеме двигателя с торцевым зарядом возникает сложное вихревое течение газообразных продуктов сгорания.

На оси двигателя (при использовании односоплового блока) формируется интенсивный закрученный жгут, скорость вращения которого на порядок превышает скорость вращения корпуса. Взаимодействие вихревого жгута с поверхностью горения приводит к образованию эрозионного конуса горения на оси заряда, что обусловливает увеличение поверхности горения и рост внутрикамерного давления.

Перегрузки приводят к уменьшению перепада давления в камере сгорания, а при больши́х числах Фруда — к росту давления по длине канала. При увеличении внутрикамерного давления и скорости вращения двигателя наблюдается усиление эрозионного раздувания поверхности горения торцевого заряда.

1.2.10. Течения в условиях действия массовых сил. Заряды РДТТ при эксплуатации подвергаются воздействию различных физических и силовых полей. Это вызывает изменение формы и геометрии заряда, ухудшение механических характеристик топлива, появление трещин, изменение энергетики твердого топлива.

В обычных условиях влияние массовых и объемных сил не учитывается, что объясняется их малостью по сравнению с инерционными силами и силами давления.

Эксплуатация высокоманевренных ракет ставит вопрос о работоспособности тепловой защиты корпуса при разворотах ракеты, сопровождающихся поперечными нагрузками. Подобные явления не моделируются при наземных стендовых испытаниях и наблюдаются лишь в полетных условиях, что повышает роль математического моделирования в решении задач внутрикамерной газодинамики вращающихся РДТТ.

При наличии боковых перегрузок (порядка $5g$) траектории крупных частиц отклоняются от линий тока, а некоторые частицы не отрываются от поверхности заряда (критерием является критический уровень боковой перегрузки, который находится из условия равенства аэродинамической и инерционной сил).

Для относительно небольших диаметров камеры сгорания ($D < 0{,}6$ м) наблюдается фокусировка траекторий частиц в окрестности плоскости действия боковой перегрузки (в плоскости маневра ракеты), что приводит к увеличению плотности тока осаждения частиц на оголенную поверхность теплозащитного покрытия корпуса, вызывая его интенсивную эрозию. Коэффициент осаждения зависит от фракционного состава частиц конденсированной фазы, отношения скорости горения топлива к средней скорости продуктов сгорания в канале заряда, абсолютного уровня боковой перегрузки и отношения n_y/n_x. Ширина зоны осаждения невелика и составляет $3 \div 5\,\%$ от внутреннего диаметра камеры сгорания. Действие боковых перегрузок сказывается на всем проточном тракте РДТТ, но в наибольшей степени проявляется в камере сгорания, где скорость потока является минимальной, а время пребывания частиц — максимальным.

Реализуется два режима осаждения частиц из двухфазного потока: выпадение частиц из объема камеры сгорания на стенку под действием массовых сил и осаждение частиц на поверхность заряда с образованием неустойчивой пелены в плоскости действия боковой перегрузки, которая при определенных условиях распадается на крупные фрагменты.

В случае длительного действия постоянных или переменных нагрузок, характерных для условий эксплуатации зарядов, смесевые твердые топлива проявляют сложное механическое поведение (незатухающая память, размягчение, нелинейное объемное изменение при сдвиге). При циклическом нагружении имеет место накопление повреждений. Важным является установить пределы безопасной эксплуатации двигателя и определить допустимые режимы нагружения.

1.2.11. Тепловая защита. Надежность работы и энергомассовое совершенство РДТТ определяются правильным выбором материалов и конструкцией внутреннего теплозащитного покрытия (ТЗП) корпуса.

Начальная масса внутреннего ТЗП составляет примерно 10% от массы конструкции. Результаты испытаний показывают, что $40 \div 50\%$ массы покрытия разрушается в процессе работы. Оставшаяся часть покрытия, выполняя роль теплоизолятора, обеспечивает необходимое температурное состояние корпуса.

Требования, предъявляемые к теплозащитным материалам (ТЗМ), состоят в уменьшении коэффициента температуропроводности и разброса теплозащитных свойств. Повышению эффективности ТЗМ способствует использование материалов с высокой теплотой разложения, выделяющих при разложении газообразные продукты с низкой молекулярной массой и высокой теплоемкостью, применение специальных добавок, инициирующих вспухание коксового остатка и вспучивание прогретого слоя ТЗП.

Внутренние ТЗП корпусов крупногабаритных РДТТ представляют собой многослойный пакет различных материалов, каждый из которых выполняет определенные функции (герметизирующий эластичный подслой, антидиффузионный слой, защитно-крепящий слой, компенсационная манжета и основная теплозащита).

Толщина ТЗП, обеспечивающая надежную работу конструкции при малых скоростях обтекания (порядка 10 м/с), пропорциональна корню квадратному от времени воздействия продуктов сгорания на материал. Для уменьшения начальной массы ТЗП используются заряды такой формы, при которой время активного воздействия продуктов сгорания на те участки корпуса, где располагается основная масса ТЗП, является минимальным. Идеальной является форма заряда, при которой вскрытие поверхности большой части корпуса происходит лишь в конце работы двигателя. В этом случае из-за невысокой скорости прогрева силовой оболочки, имеющей достаточную толщину, коэффициент запаса прочности на участке спада давления уменьшается медленнее, чем давление в камере сгорания.

Расчет внутренней тепловой защиты корпусов РДТТ включает расчеты толщин, массы и скорости уноса ТЗП, теплового состояния конструкции и тепловых потерь в камере сгорания РДТТ.

На участках проточного тракта имеются зоны, где скорость уноса ТЗП существенно (до нескольких раз) превышает величину, рассчитанную в предположении химического воздействия на материалы покрытия активных компонент газовой фазы продуктов сгорания. В сверхзвуковой области к ним относятся зоны стыков деталей (особенно из материалов с различной эрозионной стойкостью), концевые участки раструбов и высотных сопловых насадков, рули для управления

вектором тяги. В дозвуковой области такими участками являются зоны растекания по поверхности ТЗП двухфазного потока, поступающего в предсопловую область из канала заряда (критическая точка многосоплового днища, сопловое днище, входные кромки утопленной части сопла). Для этих областей повышение уноса массы материалов обусловливается осаждением частиц конденсированной фазы. В зоне контакта с теплозащитным покрытием частицы конденсированной фазы оказывают на него дополнительное тепловое, химическое и механическое воздействие. Количественный эффект такого воздействия и степень реализации каждой из его составляющих зависят от скорости потока, весового содержания частиц, функции распределения частиц по размерам, кривизны линий тока газа, эрозионной стойкости материала поверхности.

Наиболее теплонапряженным элементом конструкции является сопло и его горловина, подвергающаяся наибольшему тепловому и эрозионному воздействию. В случае разгара горловины сопла происходит резкое падение давления и тяги с последующим полным отказом РДТТ.

Задача теплозащиты соплового блока современных РДТТ решается путем выбора и разработки теплозащитных и эрозионностойких материалов (пассивная тепловая защита).

Стремление повысить энергетику топлив за счет увеличения весового содержания металла привела к ситуации, когда возможности штатных теплозащитных материалов оказались практически исчерпанными, а проблема защиты входной поверхности сопла потребовала разработки новых подходов. К таким подходам относится газодинамическая оптимизация профиля с целевой функцией снижения эрозионного воздействия потока на поверхность сопла. Имеет место существенное влияние особенностей дозвукового течения на вынос частиц на стенку сверхзвуковой части сопла, а также влияние формы (радиусы скругления) дозвукового входа.

1.2.12. Продольные вихревые структуры. При торможении потока перед преградой конечных размеров образуется система подковообразных вихрей (horseshoe vortex). Топологическая структура такого течения в плоскости симметрии приводится на рис. 1.9.

Причиной зарождения в сопловом тракте РДТТ продольных вихревых структур служит искривление линий тока и отрыв потока при обтекании технологических выступов, уступов и микронеоднородностей на поверхности сопла.

Радиусы кривизны линий тока относительно малы и сопоставимы с масштабом искажения и размером области рециркуляционного течения, поэтому возникающие центробежные силы оказываются значи-

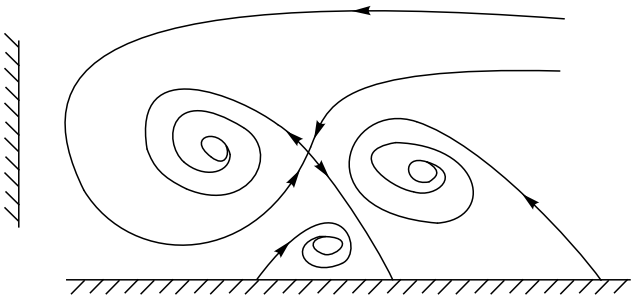


Рис. 1.9. Схема сворачивания потока в систему подковообразных вихрей при его торможении перед преградой конечных размеров

тельными и не уравновешиваются силами давления. Двумерное течение теряет устойчивость, что выражается в формировании продольных периодических вихревых структур, которые развиваются внутри сдвиговых слоев. По своей физической природе данное явление аналогично классическим парным вихрям Тейлора–Гертлера.

Зарождающиеся в области присоединения вихревые пары распространяются не только вниз по течению, но и внутрь отрывной области. Интенсивность вторичных течений внутри отрывной зоны сопоставима с их интенсивностью в присоединившемся слое. Наличие вихрей в отрывной области и их высокая интенсивность объясняются тем, что, хотя уровень средней скорости возвратного течения меньше, чем в основном потоке (в $2 \div 3$ раза), кривизна линий тока, лежащих ниже разделяющей линии тока, существенно больше. Развитие отрывных структур внутри отрывной области оказывает стабилизирующее влияние на картину пространственного течения, связанное с тем, что возникающие периодические возмущения давления и скорости переносятся вверх по потоку в рециркуляционной зоне, а затем возмущенный поток периодическим образом эжектируется основным отрывным слоем. Периодические возмущения формируют начальные флуктуации давления и скорости еще до потери устойчивости двумерного слоя. Далее эти флуктуации усиливаются вследствие искривления линий тока с тем же периодом. Отмеченное свойство устойчивости вихревой структуры проявляется в том, что вихри, однажды зародившись, остаются вмороженными в сдвиговый слой, а их масштаб не изменяется при малых изменениях условий обтекания.

Широкое применение смесевых топлив поднимает задачу обеспечения эрозионной стойкости элементов конструкции, подверженных воздействию высокотемпературного двухфазного потока продуктов сгорания. Зонами, в которых наблюдается повышенный эрозионный износ ТЗП, являются лобовая поверхность утопленного сопла и сверхзвуко-

вой раструб профилированного сопла. Их защита обеспечивается подбором высокостойких материалов или спрямлением выходного участка раструба.

В некоторых РДТТ отмечаются зоны локализованного уноса ТЗП в виде узких и достаточно глубоких борозд, ориентированных вдоль сопла. Такой характер уноса ТЗП объясняется механизмом инерционного выпадения частиц из крупномасштабных продольных вихревых структур, формирующихся в предсопловом объеме и сопловом тракте. Продольные вихревые структуры имеют вид пары согласованных вихревых жгутов и являются устойчивыми газодинамическими образованиями, развивающимися в равномерных и ускоряющихся потоках на расстояниях, во много раз превышающих их поперечный масштаб.

В силу своей инерционности, частицы отклоняются от линий тока, искривляющихся перед препятствием, и проникают в отрывную область, где происходит их накопление (зашлаковывание). Частицы вовлекаются в движение тороидальным вихрем и переносятся им вдоль сопла, а их траектории имеют спиралевидный характер. В определенном сечении происходит пересечение траекторий частиц со стенкой сопла и их выпадение на стенку, локализованное в виде узких зон.

1.2.13. Сепарация частиц. Особенностью двухфазных течений в РДТТ является возможность сепарации частиц при искривлении контура проточной части камеры сгорания или сопла. При этом возникают области высоких концентраций частиц как вблизи стенок, так и вдоль оси двигателя. Эффект образования концентрированных двухфазных потоков вблизи оси камеры сгорания называется параксиальным эффектом (эффект жгутования). При этом траектории частиц являются параллельными оси канала.

Геометрия массоподводящей поверхности, изменяющаяся в процессе работы, оказывает влияние на осаждение частиц конденсированной фазы. Каждому моменту времени соответствуют определенные участки поверхности горения, отвечающие за инерционный вынос на поверхность сопла той или иной фракции конденсированной фазы.

Многообразие геометрических оформлений канала заряда определяет специфику инерционного выноса частиц на стенки.

Выпадая на поверхность дозвуковых участков проточного тракта двигателя и стенки сопла, жидкие и твердые частицы конденсированных продуктов сгорания оказывают дополнительное тепловое воздействие на материал и вызывают его разрушение, обусловленное совокупностью химических процессов и термомеханических воздействий.

В результате горения твердого топлива образуются частицы высокодисперсного оксида (smoke) и частицы-агломераты. Зашлаковывание внутрикамерного объема РДТТ происходит в результате соударений

частиц окиси алюминия с утопленной частью сопла или как следствие попадания частиц в рециркуляционные области потока (например, за счет турбулентных пульсаций скорости газового потока). Указанные процессы приводят к накоплению продуктов сгорания твердого топлива в предсопловом объеме (slag pool) и формированию жидкой пленки (liquid film) на поверхности сопла (рис. 1.10).

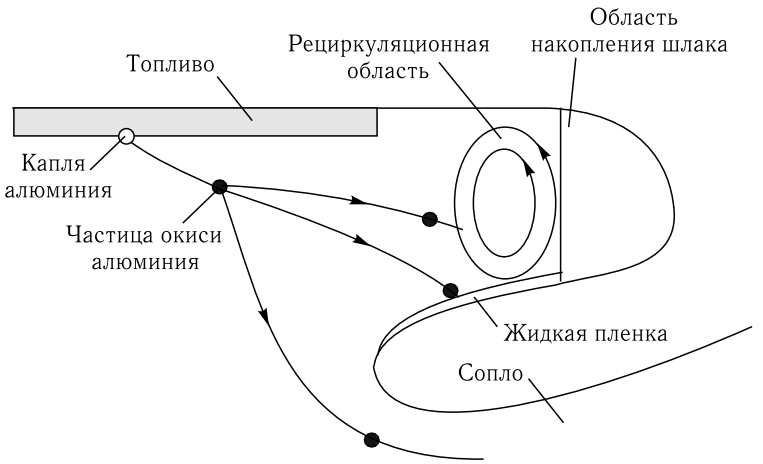


Рис. 1.10. Зашлаковывание внутрикамерного объема

Суммарный вес шлака, образующегося при статических испытаниях твердотопливных ускорителей системы Space Shuttle, изменяется от 426 до 1407 кг.

Важную роль в движении частиц алюминия, их сепарации и дисперсии играет пристеночная турбулентность [225].

1.2.14. Неустойчивость рабочих процессов. При неустойчивом рабочем процессе в камере сгорания РДТТ возникают неуправляемые автоколебания параметров рабочего тела.

Колебательной системой являются продукты сгорания (гомогенные или двухфазные), заполняющие свободный объем камеры сгорания [84]. Изменения параметров с отклонениями от их средних значений происходят в продольном и поперечном (радиальном и тангенциальном) направлениях. Неустойчивый рабочий процесс в камере сгорания РДТТ является нежелательным явлением, оказывающим отрицательное влияние на работу двигателя.

Колебательный процесс развивается в свободном объеме камеры, ограниченном подвижной границей (поверхностью горения топлива),

стенками камеры и выходным сечением сопла. Колебания поддерживаются за счет тепловой энергии, выделяющейся при горении. В этом случае выделяющаяся энергия должна быть достаточной для компенсации ее потерь в объеме газа (демпфирование колебаний частицами конденсированной фазы, диссипация энергии за счет вязкости и теплопроводности, химических реакций) и на его границах (демпфирующее действие топливного заряда, конструктивных элементов камеры и сужающейся части сопла, вынос энергии колебаний через сопло). Поступление энергии в колебательную систему определяется скоростью горения топлива, которая зависит от газодинамических и теплофизических параметров потока в свободном объеме. Взаимосвязь между параметрами колебательной системы (объем газа) и источником энергии (поверхность горения) определяет многообразные механизмы обратной связи, регулирующей поступление энергии в колебательную систему.

Изначально акустическая неустойчивость связывалась с взаимодействием потока с поверхностью горения. Следующим шагом явились исследования, связанные с выявлением источников и стоков акустической энергии. В частности, вихреобразование в газовом потоке при обтекании несгоревшей бронировки многосекционного топливного заряда в камере сгорания приводит к увеличению амплитуды колебаний давления газа в $1{,}5 \div 3$ раза. Выявление источников и стоков акустической энергии в ряде случаев позволило решить проблему по снижению амплитуды колебаний давления в камере сгорания.

В газовой полости РДТТ возникают крупномасштабные вихревые структуры потока продуктов сгорания, которые в силу своей неустойчивости порождают гидродинамический источник акустических колебаний. Утопленное сопло перераспределяет поток, оказывая влияние на образование и распад крупномасштабных вихрей. В головной части газовой полости РДТТ крупномасштабный вихрь обусловливается входными параметрами продуктов сгорания с горящей поверхности заряда. Автоколебания вызываются гидродинамической неустойчивостью, связанной с периодической по времени перестройкой крупномасштабных вихревых структур около днища.

Автоколебания при неустойчивом горении происходят с частотой, близкой к одной из собственных акустических частот камеры сгорания. Значения собственных акустических частот колебаний в продольном и поперечном направлениях обратно пропорциональны характерным линейным размерам объема, в котором имеет место колебательный процесс. Характерные линейные размеры этого объема намного меньше акустической длины волны. В этом случае при колебательном процессе происходит одновременное изменение параметров смеси во всем объеме камеры сгорания. Такие колебания относятся к диапазону низких ча-

стот (обычно это колебания с частотой $f = 1 \div 100$ Гц). Автоколебания с длиной волны, меньшей или соизмеримой с характерными линейными размерами объема (например, камеры сгорания), относятся к высокочастотным (частоты более 1000 Гц). В РДТТ также наблюдаются и автоколебания промежуточной частоты ($100 < f < 1000$ Гц). Кроме того, возможны колебания давления неакустической природы при понижении давления в камере сгорания ниже минимально допустимого по условиям устойчивого горения.

Возбуждение автоколебаний может быть мягким и жестким. В некоторых случаях импульс возмущения давления, вызванный, например, вылетом куска топлива через сопло, инициирует переход нормального горения к неустойчивому с частотой, характерной для одной из мод продольных колебаний. Такой тип неустойчивости наблюдается в двигателях с большим отношением длины к диаметру (обычно $L/D > 10$). Для возникновения самоподдерживающихся продольных колебаний необходим значительный импульс возмущения (жесткое возбуждение), в отличие от высокочастотных поперечных колебаний, возникающих самопроизвольно, начиная с малых амплитуд.

Колебательные режимы работы РДТТ являются причиной выхода из строя элементов системы управления летательного аппарата, реализации нерасчетных режимов работы изделия, вплоть до разрушения двигателя и ракеты в целом.

Предельным случаем неустойчивости процесса является скачкообразное увеличение давления, температуры и плотности, когда горение переходит в детонацию. Самопроизвольный переход горения в детонацию происходит в результате возникновения сильной ударной волны, которая инициирует взрывчатое превращение топлива в слое, подвергнутом сжатию. Если интенсивность ударной волны, возникающей при детонации слоя вещества, достаточна, чтобы вызвать такой процесс в соседнем слое, то детонация может стать стационарной.

Для предотвращения автоколебаний в газовой полости размещается динамический резонансный поглотитель колебаний для ослабления обратной акустической связи, изменяется частота колебаний источника при помощи разделителей потока в окрестности сопла и глубина застойной зоны.

Колебательные режимы обнаруживаются лишь на этапе огневых стендовых испытаний, поэтому их устранение требует внесения изменений в конструкцию уже созданного опытного образца. Такие изменения являются дорогостоящими и требуют значительного увеличения сроков отработки изделия.

Проблема продольной акустической неустойчивости связана с возникновением колебаний давления и тяги. Наиболее неизученным явля-

ется перекачка энергии колебательных процессов горения от поверхности твердого топлива в колебания газа в камере сгорания.

1.2.15. Динамика распространения послестартового облака. Существенное внимание уделяется оценкам возможного экологического воздействия образцов ракетно-космической техники на персонал и население прилегающих территорий [50]. Характер и масштабы техногенного воздействия определяются составом и динамикой послестартового облака, метеорологической обстановкой и рельефом подстилающей поверхности в окрестности стартовой позиции.

Суммарное количество выбросов РДТТ на несколько порядков ниже, чем от других антропогенных факторов. Однако пространственно-временна́я интенсивность выбросов достаточно велика. Продукты истечения выносятся не только в приземный слой, но и в верхние слои атмосферы. При пусках ракет образуется приземное облако продуктов сгорания, которое содержит различные примеси. В выхлопах РДТТ присутствуют газообразные и дисперсные примеси. Примеси постепенно осаждаются из облака на землю под действием силы тяжести или концентрируются в приземном слое.

При каждом пуске аппарата Space Shuttle в атмосферу выбрасывается порядка 1000 т продуктов сгорания твердого топлива, содержащих свыше 100 т газообразного хлористого водорода. Значительная часть этих продуктов сосредотачивается в облаке, которое перемещается в горизонтальном направлении под действием ветра на высоте ниже $1 \div 1{,}5$ км, причем нижняя часть этого облака находится вблизи земли.

Для окружающей среды представляют опасность не только продукты сгорания, но и вещества, вовлеченные в технологические процессы изготовления твердых топлив.

1.2.16. Газодинамические процессы в задачах утилизации зарядов. В связи с истечением гарантийных сроков хранения ракет и необходимостью уничтожения дефектных зарядов, возникает проблема утилизации больши́х количеств твердых ракетных топлив.

Длительная эксплуатация РДТТ, подлежащих ликвидации, приводит к потенциальным факторам риска, связанным с возможной дефектностью топлива и заряда [60]. Топлива при хранении изменяют свои механические характеристики, а прочность связи на границе скрепления заряда уменьшается, что приводит к появлению дефектов типа трещин по внутренней поверхности канала и отслоению по зонам крепления с корпусом. Поверхностные дефекты типа трещины приводят к образованию нерасчетной поверхности горения и высокому давлению в корпусе.

Наиболее простой и относительно безопасный способ утилизации состоит в сжигании зарядов при атмосферном давлении на открытых

или закрытых стендах [49]. Процесс сжигания организуется в условиях специализированных предприятий с максимальным улавливанием продуктов горения для последующей нейтрализации вредных для окружающей среды веществ и продуктов, которые находят вторичное применение. При этом каждая тонна топлива в среднем дает 330 кг твердых и 670 кг газообразных, в том числе 400 кг токсичных продуктов сгорания.

Сжигание заряда на закрытом стенде исключает распространение высокотемпературных и вредных продуктов сгорания топлива в окружающую среду [61].

Проблема количественной оценки концентраций образующихся при сжигании крупных зарядов вредных газообразных и конденсированных продуктов сгорания и анализа пространственно-временно́го поведения концентраций этих веществ имеет значение как для оценки степени экологической опасности, так и для разработки способ ее минимизации.

Сжигание зарядов сложной геометрии с демонтированными сопловым блоком и днищами накладывает свои особенности на газодинамику течения продуктов сгорания, а также на их состав и структуру. Существенными особенностями реализующихся течений являются низкое давление, при котором сгорает топливо, значительная газодинамическая напряженность течения, высокие перепады скорости потока вдоль оси канала. Критическое сечение, в котором скорость течения равняется местной скорости звука, устанавливается внутри канала. При этом перепад давления по каналу и нагрузки на заряд возрастают. Существенными факторами являются нестационарность процесса горения, полнота сгорания, особенности образования и эволюции конденсированной фазы. Увеличение неоднородности внутрикамерного давления вызывает развитие сдвиговых нарушений целостности топлива.

Для снижения нагрузки на заряд перепад внутрикамерного давления уменьшается за счет флегматизации поверхности канала на основе эпоксидной смолы, модифицированной каучуком. Для типичной канально-щелевой конструкции флегматизация 18 % прилегающей к переднему торцу поверхности канала снижает перепад давления в 2 раза.

Достаточно сложной проблемой, которую приходится решать совместно с расчетом газодинамического поля течения, является расчет подключения к горению элементов поверхности твердого топлива. Обычно считается, что элемент поверхности мгновенно зажигается после достижения температурой поверхности критического значения.

При утилизации РДТТ имеют место случаи нестационарной непрогнозируемой работы утилизационных установок, которые сопровождаются созданием аварийных ситуаций и возникновением экологических проблем.

Изменение начальной температуры заряда твердого топлива, вызванное условиями хранения или эксплуатации, может привести к перестройке механизма горения, выдвигая в качестве ведущих химические реакции, не игравшие до этого определяющей роли. Смена механизма проявляется обычно в изменении показателя степени в зависимости скорости горения от давления в определенном интервале давлений и сопутствующем изменении температурной чувствительности.

Твердые топлива, а также бронирующие, теплоизоляционные и другие полимерные материалы подвержены старению (необратимому изменению свойств вследствие происходящих в полимерах химических и физических процессов). При длительном хранении снаряженных РДТТ ухудшаются энергетические и внутрибаллистические параметры заряда, повышается чувствительность топлива к внешним воздействиям, снижается прочность различных структурных элементов и происходят другие нежелательные изменения.

Трещины и поры в заряде, а также отслоение заряда от корпуса в отдельных местах приводят к нерасчетному увеличению тяги с соответствующим уменьшением времени работы (вследствие увеличения площади горящей поверхности), прогарам корпуса и взрыву.

Смесевое топливо относится к вязкоупругим материалам и характеризуется малым модулем упругости, большим относительным удлинением, достаточно высокой прочностью на разрыв и выраженным пределом текучести. Смесевое топливо теряет твердость и прочность с повышением температуры, становится жестким и хрупким при низких температурах.

Другой способ утилизации твердых топлив состоит в химической утилизации топлива с его предварительной разделкой (гидроразмыв, механическое извлечение топлива). Предпринимаются попытки расщепить смесевое топливо на отдельные компоненты (окислитель, горючее-связующее, алюминий). Предлагается использовать остаток алюминия и горючего-связующего или измельченное топливо при изготовлении взрывчатых веществ.

Утилизация РДТТ методом сжигания представляет сложную научно-техническую проблему в связи с их многообразием по габаритам и тактико-техническим характеристикам. Особенно важным и определяющим параметром является обеспечение экологической безопасности.

Математические модели расчета физических процессов, имеющих место при утилизации РДТТ методом сжигания, рассматриваются в книге [91]. Особое внимание уделяется оценкам показателей обеспечения технической и экологической безопасности процессов.

1.3. Моделирование газодинамических процессов

Газодинамические процессы играют определяющую роль в исследовании внутрикамерных процессов в камерах сгорания РДТТ в различные моменты работы двигателя. Основные допущения при решении задач газовой динамики состоят в указании размерности процесса и идеализации теплофизических свойств продуктов сгорания. При построении модели следует учитывать геометрические (размерность задачи) и физические (модели физических процессов) факторы.

1.3.1. Размерность модели. Допущение о размерности течения принимается в соответствии с предварительным исследованием газодинамических процессов в характерных областях камеры сгорания. Идеализация геометрической формы корпуса и заряда (например, пренебрежение наличием в теле заряда конструктивных особенностей типа кольцевых проточек и отверстий) позволяет понизить размерность решаемой задачи.

Квазистационарные модели. Расходное соотношение ($\rho_s v_s = \rho v$), записанное на поверхности горения заряда, показывает, что при линейной скорости горения $v_s = 1$ м/с, плотности топлива $\rho_s = 2000$ кг/м^3, рабочем давлении в камере сгорания $p = 5$ МПа и температуре продуктов сгорания $T = 3500$ К скорость оттока рабочего тела от поверхности заряда на $2 \div 3$ порядка превышает скорость изменения геометрических размеров канала.

Время установления параметров течения в сопле определяется отношением характерного размера сопла к скорости звука и для крупногабаритного сопла составляет примерно 10^{-3} с. Характерные времена большинства процессов в РДТТ превышают время установления.

Исключая периоды выхода на режим и спада давления при окончании работы, текущий момент работы РДТТ описывается в рамках квазистационарной модели, имеющей геометрические характеристики, соответствующие данному моменту времени. Нестационарные процессы возникают вследствие влияния различных физических факторов и конструктивных параметров (акустические процессы, скачкообразное изменение поверхности горения). Учет нестационарности представляет интерес при численном исследовании неустойчивых процессов горения, например при наличии низко- и высокочастотных колебаний давления в камере сгорания, при горении топлива в узких и ограниченных объемах.

Нестационарные модели используются для решения задач, связанных с выходом двигателя на режим, вскрытием сопловой заглушки, неустойчивых режимов горения при наличии низко- или высокоча-

стотных колебаний давления, а также задач моделирования течений в межступенчатом отсеке при разделении ступеней.

Для исследования квазистационарного движения продуктов сгорания в проточных трактах используются модели течений различной степени сложности. Правомерность использования того или иного приближения для описания реальных процессов в двигателе требует предварительного сопоставления результатов, полученных в рамках совокупности математических моделей для простых течений.

Нульмерные модели. Нульмерные (термодинамические) модели используют допущение о возможности осреднения параметров газа по внутреннему объему камеры сгорания (скоростями продуктов сгорания и производными газодинамических параметров по пространственным координатам пренебрегается). При этом возникает также необходимость принятия допущений, конкретизирующих теплообмен продуктов сгорания со стенками (физический принцип воздействия и вклад различных составляющих теплового потока в его суммарную величину). Осреднение газодинамических параметров по внутрикамерному объему сводит исходную задачу к интегрированию системы ОДУ с соответствующими начальными условиями или системе алгебраических уравнений. Эти уравнения не имеют особенностей, поэтому их решение выполняется любым методом интегрирования ОДУ. Расчет скорости выполняется с использованием уравнений движения в одномерной постановке.

Нульмерные модели находят применение для исследования горения пиротехнических составов, а также расчета теплофизических и энергетических характеристик топлив воспламенительных составов. Достоинством нульмерных моделей является их простота, позволяющая получить замкнутые расчетные соотношения. Применение нульмерных моделей ограничивается невозможностью точного нахождения распределений скорости и других параметров по внутрикамерному объему. Происходит накопление ошибок, связанных с определением тепловых потоков и моментов подключения к горению отдельных поверхностей заряда. Погрешность становится существенной при исследовании процессов в кратковременно функционирующих двигателях (их работа определяется волновыми процессами в камере сгорания).

Одномерные модели. Применение одномерных моделей обеспечивает более точный расчет внутрибаллистических характеристик РДТТ по сравнению с нульмерными моделями. При записи уравнений газовой динамики производными по поперечным координатам пренебрегается. Единственность решения обеспечивается заданием начальных и граничных условий.

Одномерные модели используются для описания процессов в корпусе системы воспламенения. Достоинством одномерных моделей являет-

ся разумное сочетание точности и времени счета. Одномерные модели неприменимы при расчете течений в каналах РДТТ с зарядами сложной формы (щелевые заряды, заряды с открытыми торцами в переднем и сопловом объемах).

Неоднородность и неравновесность двухфазного потока в период до воспламенения топливного заряда оказывают влияние на характер распространения пламени по поверхности топлива. Одномерные модели используются для нахождения характеристик потока в канале заряда лишь после его полного воспламенения.

Двумерные модели. Проточные тракты РДТТ характеризуются наличием осевой симметрии, что объясняет широкое распространение двумерных моделей. Двумерные модели позволяют рассчитать скорости продуктов сгорания в осевом и радиальном направлениях, а также учесть некоторые особенности, обусловленные несимметричностью конструкции.

Двумерные модели применяются для описания течений в плоских (щелевые пропилы в топливном заряде) и осесимметричных (канал заряда и сопло) областях. При моделировании течений в щелевых каналах изменением газодинамических параметров по толщине пропилов пренебрегается или проводится их осреднение. В зарядах с щелевыми пропилами или звездообразной формой поперечного сечения допускается приведение канала к эквивалентному цилиндру с той же площадью поперечного сечения и при том же периметре боковой поверхности.

Выделение подобластей, обладающих свойством плоской или осевой симметрии (канал заряда, щелевые пропилы в заряде), сокращает объем вычислительной работы. Решение уравнений, записанных в приближении плоской или осевой симметрии, осложняется тем, что границы расчетной области представляют собой сложные криволинейные поверхности (передний и сопловой объем, кольцевые щели). Для обеспечения точности счета не ниже той, которая достигается при расчетах течений в областях с прямолинейными границами, и упрощения постановки граничных условий используется преобразование координат, приводящее криволинейную расчетную область в прямоугольную.

Применение двумерных моделей позволяет оценить процессы воспламенения заряда, силовое воздействие среды на корпус и топливный заряд, а также уточнить информацию для прочностного анализа конструкции и ее напряженно-деформированного состояния.

Зонные модели. Промежуточным звеном при переходе от двух- к трехмерным моделям являются зонные модели, в которых допускается присутствие участков различной размерности, состыкованных друг с другом.

Недостаток зонных моделей состоит в необходимости состыковки подобластей, имеющих различную топологическую структуру.

Трехмерные модели. Развитие компьютерной техники делает возможным уточнение распределений газо- и термодинамических параметров в камере сгорания и моделирование существенно трехмерных течений.

Несмотря на то, что осесимметричная компоновка обеспечивает наиболее благоприятные условия работы РДТТ, имеется ряд обстоятельств, в силу которых приходится уходить от полной осесимметричности и создавать условия для развития во внутрикамерном объеме трехмерных течений. Трехмерные течения возникают в щелевых и звездообразных каналах, а также при смещении поворотного управляющего сопла от осесимметричного положения. Трехмерные течения в надсопловой области образуются и при нулевом угле отклонения сопла за счет технологических погрешностей при изготовлении узлов и сборке конструкции, неравномерного массоподвода со стенок, неустойчивости потока.

Пространственные модели газовой динамики, построенные с использованием уравнений Эйлера, применяются для расчетов течений в пористых средах, например в областях, заполненных зерненным пороховым составом. Вводится коэффициент, учитывающий пористость зерненного состава, и источниковые члены, учитывающие массо- и теплообмен среды с выгорающим пороховым составом и трение продуктов сгорания о твердые поверхности зерен.

Принципиальные методические трудности в формулировке моделей, описывающих пространственные течения вязкого теплопроводного газа в областях сложной геометрии, и численных схем, реализующих расчет таких течений, отсутствуют. Для снижения трудоемкости расчетов и требований к вычислительным ресурсам представляет интерес построение упрощенных моделей. Упрощенные подходы развиваются на основе предварительных данных о характере и свойствах течения.

Для моделирования течений в длинных цилиндрических каналах левая граница расчетной области переносится ближе к выходу из канала. Граничные условия в этом сечении задаются на основе точных решений параболизованных уравнений, описывающих вихревые течения невязкой или вязкой жидкости.

1.3.2. Уровень физической сложности. Для описания течений в проточных трактах РДТТ используются модели различного уровня сложности, отражающие ту или степень схематизации реальной картины течения.

Среди физических факторов, значимость которых устанавливается принимаемыми допущениями, следует отметить сжимаемость, вязкость и теплопроводность продуктов сгорания, эффекты турбулентного тепломассопереноса в газовой фазе, наличие частиц конденсированной

фазы в продуктах сгорания и их взаимодействие между собой, взаимодействие газовой фазы со стенками камеры сгорания и поверхностью топлива.

Изменение состава газа в канале заряда происходит за счет поступления в канал продуктов сгорания навески воспламенительного состава и после подключения к горению топливного заряда. Смесь газов в камере сгорания рассматривается либо как единый компонент, либо моделируется совокупностью нескольких континуумов. Теплофизические свойства среды являются функциями давления, температуры, относительных массовых концентраций компонент. Обычно считается, что в камере сгорания содержится химические нереагирующие между собой газ, первоначально заполняющий камеру, продукты сгорания воспламенительного состава и продукты сгорания топлива. Для уточнения результатов численного моделирования полагается, что между отдельными компонентами смеси протекают химические реакции. При наличии частиц конденсированной фазы вводятся дополнительные континуумы. Имеются трудности, связанные с определением закона распределения частиц по фракциям в начальный момент времени и кинетических параметров, характеризующих химические реакции.

Возможность «холодного» (на основе модели идеального газа с постоянными теплофизическими свойствами) моделирования внутренних течений основана на том, что основная доля реакций с выделением тепла происходит в непосредственной близости от поверхности горения топлива. Течение в основной части газодинамического тракта считается течением нереагирующего газа. Подвод рабочего тела за счет горения имитируется распределенным вдувом по нормали к поверхности.

Простейшей и наиболее широко используемой на практике математической моделью является модель, в которой предполагается, что продукты сгорания представляют собой идеальный газ. При использовании модели идеального газа влияние вязких эффектов устанавливается с привлечением данных физического эксперимента.

Для исключения давления вводятся функция тока и завихренность. Функция тока вводится таким образом, чтобы удовлетворить уравнению неразрывности. Давление из уравнений изменения количества движения исключается при помощи перекрестного дифференцирования, что приводит к уравнению переноса завихренности.

Уравнение переноса вихря, в котором отсутствуют вязкие члены, допускает простой интеграл (теорема Гамильтона), согласно которому $\omega/r^n = \text{const}$. При этом требует решения лишь уравнение для функции тока. Вихрь во внутренних точках определяется через его значения на границе области в точке, соответствующей той же линии тока. Это служит основой для создания эффективных расчетных схем, в которых

первое приближение строится на основе модели невязкой жидкости, представленной в переменных функция тока–вихрь скорости.

Модели, основанные на использовании уравнений Эйлера, не учитывают сложности течения продуктов сгорания в камере сгорания. Не принимаются во внимание вязкость и теплопроводность продуктов сгорания, наличие в продуктах сгорания не только газообразных компонентов смеси, но и конденсированных частиц, находящихся в жидком или твердом состояниях. Учет этих свойств продуктов сгорания важен при оценке энергетических показателей РДТТ и осуществляется при помощи включения в правые части газодинамических уравнений дополнительных источниковых членов нелинейного типа.

Для периода выхода двигателя на режим важным процессом является прогрев топливного заряда горячими продуктами сгорания, что приводит к необходимости учета их вязких и теплопроводных свойств. Вязкие эффекты учитываются при моделировании течений в узких и длинных каналах заряда. В предсопловом объеме расчеты проводятся на основе уравнений невязкой жидкости, а пограничный слой рассчитывается отдельно.

В камере сгорания и дозвуковой части сопла скорости потока существенно дозвуковые, а плотность изменяется незначительно, что позволяет использовать модель несжимаемой жидкости.

Методы расчета течения газа в сопле Лаваля и утопленном сопле основаны на решении системы уравнений, описывающей движение сжимаемого газа.

Развитие внутрибаллистического процесса в камере сгорания двигателя на начальном участке его работы сопровождается волновыми явлениями. В довоспламенительный период в канале заряда наблюдается волновая структура потока, разрушающаяся по мере зажигания поверхности топлива. Продольные скорости газа и частиц существенно превышают их скорости в поперечном направлении.

Двухфазные течения моделируются либо в рамках многоскоростной и многотемпературной теории взаимопроникающих континуумов либо на основе дискретно-траекторного метода пробных частиц [44].

В областях с малыми скоростями течения и малыми числами Рейнольдса реализуется ламинарный режим течения (например, на переднем днище камеры РДТТ или в проточном тракте малогабаритного двигателя с диаметром критического сечения в несколько миллиметров).

Движение продуктов сгорания в камере двигателя происходит при высоких числах Рейнольдса, соответствующих турбулентному режиму, для которого свойственна зависимость вязкости и теплопроводности от локальных характеристик потока. Это в существенной степени осложняет решение задачи и приводит к разработке моделей турбулентности. Модели турбулентности обычно классифицируются по числу

дифференциальных уравнений, решаемых в дополнение к уравнениям Навье–Стокса (алгебраические модели, модели с одним, двумя и бóльшим числом уравнений). Большинство моделей турбулентности используют концепцию вихревой вязкости Буссинеска, которая связывает слагаемые, описывающие турбулентный перенос количества движения и энергии, с локальными градиентами физических переменных.

Турбулентность сказывается как на газодинамических характеристиках потока, так и выступает в качестве интенсифицирующего фактора теплообмена в предсопловом объеме и сопловом блоке. Процессы раздувания или эрозионного горения связаны с особенностями турбулентного переноса вблизи горящей поверхности, а работа внутренней теплозащиты определяется характером приповерхностных течений.

Достоинство математических моделей, учитывающих в уравнениях движения смеси продуктов сгорания эффекты вязкости, теплопроводности и турбулентного переноса, состоит в отсутствии необходимости привлечения экспериментальных или других данных, определяющих взаимодействие продуктов сгорания с поверхностью заряда и стенками камеры сгорания. При учете в моделях газовой динамики вязких и теплопроводных свойств продуктов сгорания не возникает необходимости в разработке дополнительных моделей для расчета тепловых потоков в направлении границ течения (они определяются решением уравнений газовой динамики с соответствующими граничными условиями).

Основная тенденция развития численного моделирования в приложении к задачам внутрикамерной газодинамики РДТТ состоит в комплексном подходе, учитывающем взаимосвязь и взаимовлияние различных процессов, сопровождающих работу двигателя [225].

Модели отдельных процессов и вычислительные средства решения частных задач приводятся в работе [178].

1.4. Моделирование тепловых процессов и процессов зажигания

Тепловые потоки, формирующиеся в свободном объеме камеры сгорания при движении продуктов горения, определяют время прогрева поверхности топливного заряда и других элементов конструкции. Прогрев узлов РДТТ происходит за счет конвективных, лучистых и кондуктивных тепловых потоков.

1.4.1. Суммарный тепловой поток. Процессы теплообмена в РДТТ протекают в широком диапазоне температур ($3000 \div 4000$ К) и давлений ($5 \div 20$ МПа в камере сгорания и $0{,}01 \div 0{,}1$ МПа в сопле), следствием чего является реализация различных режимов теплообмена

как на отдельных участках проточного тракта, так и в зависимости от времени работы двигателя.

Нахождение параметров теплообмена сводится к решению задачи, учитывающей конвективный и радиационный теплообмен, а также теплообмен, обусловленный взаимодействием частиц конденсированной фазы с материалами тепловой защиты камеры и сопла.

На практике используется упрощенный подход, основанный на независимом описании теплофизических и физико-химических процессов, реализующихся при различных механизмах теплообмена. Суммарный тепловой поток находится как сумма тепловых потоков, обусловленных конвективным, радиационным и межфазным теплообменом. Справедливость такого подхода подтверждается экспериментальными данными, используемыми для замыкания физико-математической модели, и оценкой отдельных составляющих теплового потока по тракту двигателя.

Имеющиеся оценки показывают, что в проточных каналах, в которых скорость продуктов сгорания не превышает 100 м/с, и при температуре продуктов сгорания не выше 3500 К, преобладающий вклад в суммарный тепловой поток вносит конвективный теплообмен. Роль радиационного теплообмена возрастает в областях непроточного типа (застойные зоны, глухие каналы) и при температурах продуктов сгорания от 3500 К и выше. При выпадении частиц конденсированной фазы на поверхность топлива и стенки камеры сгорания (например, на заднее днище и утопленную часть сопла) становится значительным вклад кондуктивного теплового потока, составляющего до 50% от общего теплового потока.

1.4.2. Конвективная теплопередача. Конвективные тепловые потоки обусловлены естественно-конвективным и вынужденно-конвективным движениями продуктов сгорания и во многих случаях являются основной причиной нагрева топливного заряда и корпуса. Наибольшего уровня конвективные потоки достигают в проточных схемах внутрикамерного объема.

В случае непроницаемой поверхности (топливо не горит и не газифицируется) уровень теплового потока к стенке определяется параметрами газовой фазы и температурой обтекаемой поверхности. При обтекании проницаемой поверхности учитываются параметры вдуваемого газа.

Конвективный теплообмен происходит в ламинарном или турбулентном режиме, что требует применения соответствующих моделей. Обычно для областей проточного типа используется допущение о механизме теплопередачи за счет вынужденной конвекции. В застойных областях и областях между раскрепляющимися манжетами зарядов

и корпусом теплопередача осуществляется за счет естественной конвекции.

Для расчетов конвективных тепловых потоков находят применение три уровня физико-математических моделей.

1. Модели, связанные с рассмотрением пространственных течений вязкого сжимаемого и теплопроводного газа или реагирующей смеси газов. Модели данного уровня являются одной из моделей газодинамических процессов. Для расчета теплопередачи на границе расчетной области в уравнения изменения количества движения и температуры включаются дополнительные члены, обусловленные вязкостью продуктов сгорания и их теплопроводностью. Турбулентный характер развития потока в канале заряда требует подключения соответствующих моделей турбулентности.
2. Модели, использующие приближение пограничного слоя. Для построения модели принимаются допущения, справедливые для течений в пограничном слое и длинном узком канале (течение происходит при $\mathrm{Re} \gg 1$ и развивается в области с поперечным размером значительно меньше продольного). В качестве моделей турбулентности используются модели, модифицированные для расчета сложных течений с градиентом давления и вдувом (отсосом) газа в пограничный слой с учетом шероховатости и кривизны обтекаемой поверхности. Для решения уравнений применяются численные методы или методы интегральных соотношений (вводятся переменные Дородницына и производится интегрирование по поперечной координате). Ограниченность моделей пограничного слоя состоит в требовании безотрывности течения, которое не обеспечивается по всему контуру внутреннего объема.
3. Модели, основанные на критериальных соотношениях для интегральных параметров потока. Критериальные соотношения получаются либо при помощи принятия дополнительных упрощающих допущений в рамках модели пограничного слоя, либо путем обобщения данных физического или численного эксперимента. Недостаток подхода заключается в трудности распространения полученных соотношений на широкий круг задач (несжимаемое/сжимаемое течение, ламинарный/турбулентный режим, свободная/вынужденная конвекция). Имеются критериальные соотношения, позволяющие рассчитать коэффициенты теплоотдачи в окрестности переднего и соплового днища, в области, сформированной щелями, в застойных зонах и в других областях. Многие критериальные соотношения получены для случая обтекания непроницаемой поверхности (поверхность корпуса, поверхность неразлагающегося теплозащитного покрытия, поверхность негорящего топлива). При реализации частичного или полного

разложения материала, обтекаемого продуктами сгорания, для корректировки используются коэффициенты, учитывающие вдув продуктов разложения в пограничный слой.

На практике метод расчета конвективного теплообмена основан на теории турбулентного пограничного слоя. К числу факторов, которые учитываются при решении практических задач, относятся изменение состояния стенок канала в процессе истечения газовой смеси; их прогрев и разрушение, сопровождаемое однородным или дискретным вдувом продуктов разрушения в пристеночную область; увеличение степени шероховатости рабочей поверхности; переменность теплофизических свойств газовой смеси (зависимость теплоемкости, теплопроводности и вязкости смеси от температуры и химического состава).

Внутренний объем камеры сгорания характеризуется сложной формой с уступами, кольцевыми проточками и наличием других конструктивных элементов. Для щелевых и звездообразных каналов допускается приведение канала к эквивалентному цилиндру с той же площадью поперечного сечения и при том же периметре боковой поверхности. Для канала с поперечным сечением в виде четырехлучевой звезды коэффициент теплоотдачи совпадает с величиной, определенной для эквивалентного цилиндра, а для щелевого канала с четырьмя щелями коэффициент теплообмена в щели составляет около 70 % от его уровня в канальной части заряда.

1.4.3. Теплообмен излучением. К лучистым тепловым потокам относятся составляющие суммарного теплового потока, связанные с излучающей и поглощающей способностью продуктов сгорания, поверхности топлива и корпуса двигателя.

Высокая температура продуктов сгорания обуславливает вклад потока лучистой энергии, которая переносится по свободному объему камеры сгорания и поглощается твердыми, жидкими или газообразными материалами, размещенными в камере.

Тепловое излучение продуктов сгорания генерируется в инфракрасном диапазоне трех- и многоатомными молекулами газов. Поток излучения поглощается газами и конденсированными частицами, содержащимися в продуктах сгорания, что снижает уровень теплового потока, падающего на нагреваемую поверхность. Отражательная способность поверхности приводит к дополнительному снижению суммарного уровня лучистого теплового потока, поступающего в твердый материал.

При описании лучистого теплообмена указываются особенности физического процесса теплопередачи (спектр частот излучения, сведения о прозрачности продуктов сгорания, способность поглощения и излучения тепла продуктами сгорания и стенками камеры сгорания).

При моделировании радиационного теплообмена предполагается, что продукты сгорания и обтекаемые поверхности излучают и поглощают в непрерывном спектре (используются интегральные законы излучения). Процесс теплообмена за счет излучения рассматривается в направлении к стенкам камеры сгорания и поверхности топлива.

Интегральная плотность потока излучения абсолютно черного тела определяется законом Стефана–Больцмана. В застойных зонах и глухих каналах учитывается передача лучистой энергии вдоль по газовой фазе объемным высвечиванием.

Интенсивность переноса теплового излучения различается по длине проточного тракта. Особенность радиационного теплообмена заключается в том, что частицы конденсированной фазы продуктов сгорания, обладая поглощающими и излучающими свойствами, интенсивно рассеивают излучение. Расчет радиационного теплообмена осложняется разнообразием конструкций двигателей и геометрий излучающего объема, обусловленных формами зарядов топлива и его выгоранием, широким диапазоном изменения рабочих параметров в камере сгорания.

Для дисперсной среды лучистый теплообмен определяется как свойствами индивидуальных частиц, так и коллективным эффектом, зависящим от концентрации частиц.

В камерах сгорания излучающая дисперсная среда обладает высоким коэффициентом ослабления, поэтому радиационный тепловой поток в стенку определяют температура и свойства среды в пределах тонкого излучающего слоя, что позволяет ограничиться одномерным приближением. В соплах плотность продуктов сгорания уменьшается и поток излучения определяется не только излучением продуктов сгорания в данном сечении, но и излучающей оптически плотной высокотемпературной областью, расположенной выше по потоку, что приводит к решению задачи переноса излучения в двумерной постановке.

Расчет радиационного теплообмена в поглощающей и рассеивающей средах осуществляется путем решения интегро-дифференциального уравнения относительно спектральной интенсивности излучения, коэффициентами которого являются радиационные характеристики продуктов сгорания (коэффициенты поглощения и рассеяния, индикатриса рассеяния). Коэффициенты уравнения зависят от поля скорости, температуры и концентрации газовой и конденсированной фаз продуктов сгорания, а также распределения частиц окислов металлов по размерам. Оптические свойства газовой фазы описываются на основе приближенной модели (модель полос поглощения). При определении поглощения и рассеивания излучения частицами используется теория Ми. Электромагнитные свойства частиц окислов металлов определяют комплексный показатель преломления и степень черноты теплозащитного покрытия.

Использование различных приближений для индикатрисы рассеяния упрощает интегральное слагаемое в уравнении переноса. Наиболее распространенным является приближение изотропного рассеяния. Изотропное приближение непригодно для описания рассеяния в дисперсных системах, когда размеры частиц имеют тот же порядок, что и длина волны излучения. Находят применение приближение линейно анизотропного рассеяния, когда индикатриса рассеяния представляется в виде линейной функции косинуса угла рассеяния, и транспортное приближение, в котором анизотропное рассеяние заменяется изотропным, а среда характеризуется коэффициентами рассеяния и ослабления, зависящими от фазовой функции рассеяния.

1.4.4. Кондуктивная теплопередача. Кондуктивные тепловые потоки связаны с теплопроводностью продуктов сгорания и выпадением частиц конденсированной фазы, содержащихся в продуктах сгорания, на поверхность топливного заряда и корпуса двигателя. Кондуктивный тепловой поток, обусловленный молекулярной теплопроводностью, обычно не учитывается.

На практике для расчета кондуктивного теплового потока находят применение модели, построенные на основе экспериментальных данных. Численные методики, позволяющие вычислить кондуктивный тепловой поток, являются достаточно трудоемкими и требуют применения сложных математических моделей. Наиболее корректной моделью расчета кондуктивного теплового потока является модель течения двухфазного вязкого теплопроводного газа.

Численные расчеты показывают, что кондуктивный тепловой поток в несколько раз превосходит конвективный тепловой поток в период до зажигания топлива. Расчет кондуктивного теплового потока осложняется тем, что зажигание топливного заряда возникает не в окрестности системы воспламенения, а в сечениях, удаленных внутрь канала. В дальнейшем распространение фронта зажигания топлива происходит в обе стороны от данного сечения. Координата сечения, в котором воспламеняется топливо, зависит от расходных характеристик системы воспламенения, геометрии расчетной области и размеров зерен воспламенительного состава.

Трудность отделения кондуктивной составляющей теплового потока от других составляющих в реальных условиях работы двигателя (особенно при исследовании нестационарных процессов при выходе двигателя на режим квазистационарной работы) является одним из факторов, осложняющих определение суммарного теплового потока, поступающего от продуктов сгорания к поверхности заряда и корпуса.

1.4.5. Прогрев, воспламенение и горение топлива. Неравномерность прогрева поверхности топливного заряда продуктами сго-

рания воспламенительного состава оказывает существенное влияние на распространение пламени по поверхности топлива. Постепенность подключения к горению открытой поверхности заряда, обусловленная процессами в газовой (теплопередача от продуктов сгорания к поверхности топлива) и конденсированной (прогрев заряда, воспламенение топлива, нестационарное горение в течение некоторого периода времени после зажигания, стационарное горение после завершения переходных процессов) фазах, влияет на изменение внутрибаллистических характеристик в камере двигателя.

При прогреве топливного заряда (без перемещения поверхности заряда), начиная с некоторой температуры, в поверхностном слое топлива индуцируются химические реакции, которые приводят к фазовым переходам из твердой в жидкую и газообразную фазы. В конденсированной системе при прогреве, помимо фазовых переходов, наблюдаются стадии горения с выделением тепла. В смесевых топливных композициях горение осложняется существенной неоднородностью распространения волны горения, связанной с наличием в составе топлива частиц окислителя и металлов, размеры которых превосходят толщину реакционной зоны или толщину прогретого слоя.

В период прогрева и горения топлива химические реакции в газовой фазе и вдув летучих компонентов разложения топлива в пограничный слой оказывают слабое влияние на тепловой поток, поступающий вглубь топливного заряда. Задача о прогреве топливного заряда сводится к решению уравнения теплопроводности с граничными условиями, определяющими тепловой поток из газовой фазы в конденсированную систему. Для упрощения принимается, что система обладает свойством симметрии относительно продольной координаты. Тепловой эффект фазовых переходов и химических реакций между компонентами считается пропорциональным поверхности контакта горючего и металла с окислителем. Поскольку коэффициент теплопроводности металла и окислителя является достаточно высоким, прогрев этих включений происходит практически мгновенно по всему объему до температуры, соответствующей поступающему суммарному тепловому потоку. Достаточно большой размер включений по отношению к толщине прогретого слоя топливного заряда приводит к изменению площади поперечного сечения связующего вдоль координаты, направленной вглубь топлива.

Учет отличия теплофизических свойств различных компонентов топлива в общем случае приводит к решению пространственной задачи горения топлива. Решение задачи осложняется влиянием эффектов поглощения топливом лучистой энергии на изменение температуры и скорости его горения.

По мере приближения к этапу зажигания топлива связь между процессами в газовой и конденсированной фазах возрастает. Такая связь

является несущественной, если химические реакции, обусловливающие горение топлива, реализуются в конденсированной системе (твердофазная модель горения). Связь процессов становится существенной тогда, когда ведущая химическая реакция, обусловливающая горение топлива, реализуется в газовой фазе (газофазная модель горения). При этом возникает необходимость включения в модель воспламенения и горения топлива уравнений, описывающих процессы в газовой фазе, с учетом конкретизации состава продуктов в газовой фазе, а также перечня и характера протекающих в ней химических реакций. Сшивка решений в газовой и конденсированной фазах производится на основе уравнений баланса потоков массы и энергии на границе раздела фаз.

В рамках твердофазной модели, используемой для расчета прогрева баллиститных и смесевых топлив и определения скорости их горения, принимается, что теплопередача внутрь топлива осуществляется за счет механизма теплопроводности, химические реакции протекают без образования газовой фазы и фазовых превращений, а теплофизические характеристики топлива и параметры химической кинетики не зависят от температуры реагирующего топлива [21]. Для упрощения решения задачи обычно считается, что длительность действия источника нагрева на топливо больше времени воспламенения. Для определения момента зажигания топлива применяются алгебраические модели.

После зажигания горение топлива в течение времени, сравнимого по порядку со временем релаксации прогретого слоя, происходит в нестационарном режиме. В дальнейшем скорость горения мало отличается от квазистационарного уровня, определяемого простыми алгебраическими соотношениями, которые связывают скорость горения топлива с внутрикамерным давлением, начальной температурой материала топлива, скоростью потока продуктов сгорания на границе пограничного слоя. Квазистационарные соотношения оказываются неприемлемыми при горении топлива при больши́х скоростях нарастания или спада рабочего давления в камере, а также в узких зазорах вблизи границ топлива с другими материалами.

С введением в состав топлив порошков металлов тепловыделение за счет горения металла происходит в области, прилегающей к поверхности горения, что приводит к увеличению суммарного теплового потока в топливо и скорости газофазных реакций за счет общего повышения температуры в зоне горения, и, как следствие, к увеличению скорости горения [55].

Математическая модель задачи зажигания конденсированного вещества включает в себя уравнение теплопроводности с учетом экзотермических реакций и уравнения химической кинетики. Тепловое воздействие на заряд со стороны горячих продуктов сгорания моделируется

постановкой граничных условий 3-го рода на поверхности твердого топлива и равенства нулю теплового потока на бесконечности.

Массовая скорость горения топлива как функция параметров потока определяется с поправками на начальную температуру заряда, нестационарность и эрозионный эффект. Поправочный коэффициент зависимости скорости горения от начальной температуры состава задается в виде дробнолинейной, экспоненциальной или степенной зависимости. Поправка на нестационарность скорости горения рассчитывается на основе феноменологической модели Зельдовича–Новожилова [69]. В рамках этой теории скорость горения определяется мгновенным значением давления над поверхностью топлива и градиентом температуры на поверхности горения, который вычисляется из решения задачи нестационарной теплопроводности внутри топлива. Коэффициент эрозии рассчитывается по соотношениям, предложенным в работе [21].

Прогрев незащищенной несущей конструкции и теплозащитного покрытия рассчитывается на основе моделей, описываемых алгебраическими уравнениями или ОДУ.

В задачах воспламенения твердого топлива влияние газовой фазы учитывается принятием предположения о том, что тепловой поток, поступающий из газовой фазы вглубь твердого топлива, остается постоянным. Во многих случаях условия в газовой фазе оказывают существенное влияние на зажигание и распространение пламени по поверхности топлива.

В гетерогенной модели горения предполагается, что ведущая химическая реакция экзотермического типа реализуется на поверхности топлива (в тонком поверхностном слое топлива) и происходит между окислителем газовой фазы и горючим конденсированной фазы либо по кинетическому, либо по диффузионному механизму. Кислород к поверхности доставляется из газовой фазы (окислитель содержится в окружающей среде и поступает в газовую фазу в результате испарения окислителя с поверхности твердого топлива. Такие модели используются при исследовании процессов горения в металлизированных смесевых топливах, а их математическая реализация упрощается по сравнению с газофазными моделями.

В газофазной модели зажигания учитывается влияние химических реакций, протекающих в газовой фазе. Под воздействием тепловых потоков происходит разогрев поверхностного слоя топлива. При этом происходит испарение и диффузия окислителя и горючего, которые взаимодействуют в газовой фазе. Существенное влияние на протекающие процессы оказывает состояние окружающей среды. Газофазные модели используются для исследования процессов воспламенения полимерных материалов.

1.5. Моделирование изменения внутреннего объема камеры сгорания

Изменение внутреннего объема РДТТ в период выхода двигателя на режим и на основном участке функционирования связывается с условиями функционирования и напряженно-деформированным состоянием его узлов, что оказывает влияние на рабочие процессы в камере сгорания и внутрибаллистические характеристики (изменение скорости горения топлива и свободного объема камеры сгорания).

1.5.1. Влияние напряженно-деформированного состояния. Напряжение и деформация конструкции возникают от воздействия внутрикамерного давления продуктов сгорания и за счет разницы температур между температурой, при которой эксплуатируется топливный заряд, и равновесной температурой, при которой двухслойная конструкция корпус–заряд свободна от напряжений. В определенных условиях следует учитывать инерционные нагрузки, обусловленные продольным ускорением (обычно они не превосходят $5 \div 15\,g$).

Для РДТТ с прочноскрепленными зарядами коэффициент относительной деформации под воздействием внутрикамерного давления на стационарном режиме работы двигателя составляет до 50 %. Для кратковременных нестационарных процессов (выход двигателя на режим) этот коэффициент существенно меньше [95].

Имеющиеся оценки развития деформаций в звездообразном заряде из смесевого топлива в начальный период работы двигателя показывают, что к концу периода нарастания уровня рабочего давления в камере сгорания относительная деформация канала заряда составляет около $20 \div 30\,\%$. В то же время, скорость деформации относительно велика и сравнима со скоростью выхода двигателя на режим.

В некоторых случаях напряженно-деформированное состояние связывается со скоростью горения топлива через кинетические параметры его химических реакций [95]. Максимальная скорость горения топлива из-за воздействия сжимающих или растягивающих напряжений не превосходит более чем на 5 % уровень, соответствующий стационарному процессу.

Некоторые физико-математические модели напряженно-деформированного состояния заряда и корпуса, используемые при исследовании процессов выхода двигателя на режим квазистационарной работы, приводятся в работе [95] (для зарядов вкладного типа и для зарядов, прочноскрепленных с корпусом).

В общем случае модели вязкоупругости для тела произвольной формы включают более 15 уравнений (12 уравнений для компонент тензора напряжений и тензора деформаций, 3 уравнения равновесия,

реологические соотношения). На практике принимаются допущения об отсутствии деформаций корпуса (рассматривается только напряженно-деформированное состояние заряда), геометрическая форма корпуса и заряда идеализируются, а влиянием различных конструктивных особенностей (кольцевые проточки, щели, отверстия в корпусе) пренебрегается.

В каналах достаточно большого удлинения для упрощения решения задачи используется приближение плоской деформации. В результате решения задачи находятся квазистационарные радиальные перемещения внутренней поверхности топливного заряда и относительные деформации. Для канала с щелевой или звездообразной формой поперечного сечения выражения для относительных деформаций модифицируются при помощи введения коэффициентов концентраций, значения которых устанавливаются на основе данных физического или численного эксперимента. Для зарядов сложной формы аналитические соотношения для относительных деформаций и перемещений устанавливаются на основе эмпирического материала.

Принцип суперпозиции решения позволяет свести задачу о сложном напряженно-деформированном состоянии при воздействии нескольких силовых факторов к совокупности подзадач, решаемых при условии нагружения тела каждым из силовых факторов в отдельности. Итоговые перемещения и напряжения нагруженного тела определяются суммированием соответствующих значений, полученных при решении отдельных подзадач. Ограничение в применении принципа суперпозиции состоит в его справедливости для материалов, подчиняющихся линейным законам упругости.

Для дополнительного упрощения задачи физико-механические свойства нагружаемых материалов считаются изотропными.

Предположение о мгновенности распространения возмущений по телу заряда или корпусу позволяет решить задачу в квазистационарной постановке.

В некоторых случаях деформирование корпуса РДТТ рассматривается в качестве эффективного средства регулирования параметров работы двигателя на начальном участке. Деформация корпуса в период выхода двигателя на режим благоприятно влияет на распространение пламени вдоль поверхности топлива, размещенного в торцевых полостях. Жесткость корпуса задается и обеспечивается при его изготовлении из композиционных материалов.

Трехмерные расчеты с учетом газодинамики внутренних течений, горения топлива и напряженно-деформированного состояния показывают, что во многих случаях воздействие напряженно-деформированного состояния заряда и корпуса не является определяющим [201].

1.5.2. Влияние условий функционирования. Изменение внутреннего объема в результате функционирования двигателя приводит к изменению площади сечений, через которые протекают продукты сгорания, и перемещению боковых границ расчетной области. В частности, кольцевой зазор между корпусом двигателя и наружной поверхностью заряда является достаточно малым, и возможны неблагоприятные ситуации, в которых площадь этого зазора существенно уменьшается.

Конкретный вид моделей, учитывающих изменение внутреннего объема камеры сгорания, зависит от принятой модели газовой динамики.

При решении задачи в нульмерной постановке задается лишь закон изменения внутреннего объема интегрирования с течением времени (например, в дифференциальной форме).

В рамках одномерной постановки задачи применяются модели, описывающие изменение формы поперечного сечения с течением времени (протяженность области интегрирования не изменяется, так же, как и формулировка граничных условий), или модели, учитывающие изменение протяженности расчетной области при неизменной площади поперечного сечения (характер постановки граничных условий изменяется, что приводит к усложнению вычислительной процедуры).

При решении задач газовой динамики в двух- или трехмерной постановке модели изменения внутрикамерного объема описывают перемещение границ расчетной области с течением времени. Интегрирование уравнений газовой динамики осуществляется при этом в области с подвижными границами (используются подвижные сетки).

На квазистационарном участке работы двигателя важным фактором, оказывающим влияние на параметры внутрибаллистического процесса, является изменение формы камеры сгорания, обусловленное выгоранием топлива. Данная задача совпадает с задачей Гюйгенса о распространении волнового фронта, а ее решение сводится к определению положения волнового фронта, представляющего собой огибающую поверхности волн от источников одинаковой интенсивности, равномерно распределенных по односвязной регулярной поверхности. Задача представляется нетривиальной, поскольку перемещение волнового фронта сопровождается появлением точек возврата, складок, сборок и другими топологическими особенностями. Начальная горящая поверхности топлива не является регулярной, а скорость горения зависит как от времени, так и от пространственных координат. Кроме того, в некоторых случаях поверхность горения является многосвязной, а степень связности меняется в процессе развития.

Поверхность горения рассматривается в виде совокупности N регулярных участков, уравнения формы которых в декартовой системе

координат имеют вид

$$\varphi_i(t, x, y, z) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

Из условия $d\varphi_i/dt = 0$ следует, что

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} q_j = 0 \tag{1.1}$$

или

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\right)^2 = q^2 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right)^2, \tag{1.2}$$

где q_j — компонента вектора скорости вдоль координатного направления x_j, q — модуль вектора скорости горения. Предполагается, что все условия, обеспечивающие существование частных производных, входящих в уравнения (1.1) и (1.2), выполняются.

Уравнение (1.1) является разновидностью уравнения Гамильтона–Якоби, а уравнение (1.2) представляет собой уравнение эйконала для волнового фронта. В обоих случаях развитие горящей поверхности заряда моделируется задачей Коши для гиперболической системы уравнений. Для ее решения находит применение метод характеристик.

Решение задачи состоит в отыскании траекторий, ортогональных к участкам поверхности, вдоль которых переносится информация о текущих локальных характеристиках (степени регулярности) движущейся поверхности горения. На практике в качестве функций φ_i обычно используются уравнения поверхности не выше 2-го порядка (плоскость, сфера, конус, параболоид вращения и другие). Знание этих траекторий позволяет определить неизвестные коэффициенты в уравнениях, а также линии сопряжения соседних участков поверхности $\varphi_i = \varphi_i(t, x, y, z)$ в произвольный момент времени.

1.6. Моделирование акустических и колебательных процессов

Акустическая неустойчивость рабочих процессов имеет газодинамическую нелинейную природу и связана с появлением периодических низко- и высокочастотных колебаний давления в камере сгорания и тяги двигательной установки. Частота акустических колебаний обычно совпадает (или близка) с акустическими модами камеры сгорания в продольном, радиальном и тангенциальном направлениях. Отрицательное влияние акустической неустойчивости рабочих процессов на элементы конструкции возрастает при увеличении удлинения канала заряда.

Низкочастотные акустические колебания давления в камере сгорания и тяги с примерным диапазоном частот $f = 20 \div 2000$ Гц проявляются, в основном, в продольном направлении. Высокочастотные колебания давления, начиная с частоты $f \sim 2000$ Гц и выше, имеют место в радиальном и тангенциальном направлениях.

Источником низкочастотных акустических колебаний в газовой полости РДТТ является гидродинамическая неустойчивость крупномасштабных вихревых структур или застойных зон основного потока продуктов сгорания, которые находятся около днища камеры (между боковой поверхностью канала и утопленным соплом). Утопленное сопло перераспределяет поток и оказывает влияние на образование и распад крупномасштабных вихревых структур.

Длина волны колебаний намного больше размеров, свойственных камере сгорания, так что двигатель рассматривается как совокупность инерционных и упругих элементов. Наиболее значимый вклад в низкочастотную неустойчивость вносит работа инерционно-массовых сил потока продуктов сгорания при его нерегулярном взаимодействии с камерой сгорания и соплом.

Высокочастотная акустическая неустойчивость является следствием взаимодействия резонансных волн, генерируемых в камере сгорания, с горящей поверхностью заряда. Частота колебаний соответствует одной из собственных частот камеры сгорания как акустического резонатора. Для устранения высокочастотных колебаний усиливается поглощение акустической энергии на стенках камеры сгорания путем соответствующей облицовки или установки поглотителей, действующих по принципу резонатора Гельмгольца.

Конденсированные частицы, образующиеся при сгорании топлива, представляют собой основной источник потерь акустической энергии, которая поступает из зоны горения топлива.

Постановка физического эксперимента для исследования низкочастотной акустической неустойчивости требует натурного масштабного моделирования, а измерения параметров рабочего процесса в камере сгорания связаны с техническими и финансовыми трудностями. Для исследования низкочастотной акустической неустойчивости в РДТТ используются методы математического моделирования.

1.7. Основные уравнения и расчетные соотношения

Уравнения, описывающие ламинарное или турбулентное течение продуктов сгорания, записываются в различной форме для несжимаемой и сжимаемой жидкости, что отражает эволюционное развитие средств численного моделирования внутренних течений.

1.7.1. Модель вихревого течения невязкой жидкости. Во многих случаях пренебрежение вязкими эффектами позволяет получить достаточно точное приближение структуры реального течения в канале со вдувом. Для течений в каналах со вдувом граничные условия для идеальной жидкости имеют такую же форму, что и граничные условия для вязкой жидкости. Условия нормального вдува порождают вихрь скорости, который сносится вниз по потоку и формирует вихревой профиль скорости.

Другое обстоятельство, определяющее привлекательность этой модели, состоит в том, что удается учесть сложную геометрию расчетной области, характерную для внутрикамерного объема РДТТ. Для расчета характеристик течения в области сложной геометрии обычно используется криволинейная согласованная с границами области в физическом пространстве система координат и порожденная ею криволинейная разностная сетка.

Граничные условия для вихря на массоподводящей поверхности ставятся исходя из идей Тома и Вудса. При использовании криволинейных сеток форма записи этих условий усложняется, что, тем не менее, не сказывается на эффективности вычислений. Вычислительная неустойчивость, присущая граничным условиям для вихря, преодолевается при помощи релаксационной процедуры с параметром нижней релаксации около 0,5.

1.7.2. Модель вязкой жидкости. В декартовой системе координат (x, y, z) нестационарное течение вязкого сжимаемого газа описывается следующим уравнением, записанным в консервативных переменных

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = H_{\text{р}}. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) дополняется уравнением состояния совершенного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho \left[e - \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) \right].$$

Вектор консервативных переменных Q и вектора потоков F_x, F_y, F_z имеют следующий вид

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ \rho e \end{pmatrix},$$

$$F_x = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x v_x + p - \tau_{xx} \\ \rho v_x v_y - \tau_{xy} \\ \rho v_x v_z - \tau_{xz} \\ (\rho e + p) v_x - v_x \tau_{xx} - v_y \tau_{xy} - v_z \tau_{xz} + q_x \end{pmatrix},$$

$$F_y = \begin{pmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x - \tau_{yx} \\ \rho v_y v_y + p - \tau_{yy} \\ \rho v_y v_z - \tau_{yz} \\ (\rho e + p) v_y - v_x \tau_{yx} - v_y \tau_{yy} - v_z \tau_{yz} + q_y \end{pmatrix},$$

$$F_z = \begin{pmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x - \tau_{zx} \\ \rho v_z v_y - \tau_{zy} \\ \rho v_z v_z + p - \tau_{zz} \\ (\rho e + p) v_z - v_x \tau_{zx} - v_y \tau_{zy} - v_z \tau_{zz} + q_z \end{pmatrix}.$$

Здесь t — время; ρ — плотность; r — радиус; v_x, v_y, v_z — составляющие скорости в координатных направлениях x, y, z соответственно; p — давление; e — полная энергия единицы массы; T — температура; γ — отношение удельных теплоемкостей.

Представление источникового члена $H_{\text{р}}$, учитывающего влияние дисперсной фазы, зависит от принятой модели двухфазного течения и подробно рассматривается в работе [44].

Компоненты тензора вязких напряжений и составляющие вектора теплового потока находятся из соотношений

$$\tau_{ij} = \mu_e \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad q_i = -\lambda_e \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

При моделировании турбулентных течений в рамках решения уравнений Рейнольдса уравнение (1.3) дополняется уравнениями k–ε модели турбулентности. При этом эффективная вязкость μ_e вычисляется как сумма молекулярной μ и турбулентной μ_t вязкостей, а эффективная теплопроводность λ_e выражается через вязкость и число Прандтля

$$\mu_e = \mu + \mu_t, \quad \lambda_e = c_p \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right).$$

Турбулентному числу Прандтля присваивается постоянное значение (для воздуха $\text{Pr}_t = 0{,}9$).

При использовании метода моделирования крупных вихрей уравнение (1.3) дополняется соотношениями, позволяющими вычислить подсеточную вязкость. При этом эффективная вязкость μ_e вычисляется

как сумма молекулярной μ и подсеточной μ_s вязкости, а эффективная теплопроводность λ_e выражается через вязкость и число Прандтля

$$\mu_e = \mu + \mu_s, \quad \lambda_e = c_p \left(\frac{\mu}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_s}{\mathrm{Pr}_s} \right).$$

Подсеточному числу Прандтля присваивается постоянное значение (для воздуха $\mathrm{Pr}_s = 0{,}9$). В качестве подеточной модели используется модель Смагоринского [307] и RNG-модель [364].

Для получения значений молекулярной вязкости в зависимости от температуры используется закон Сазерленда

$$\frac{\mu}{\mu_*} = \left(\frac{T}{T_*} \right)^{3/2} \frac{T_* + S_0}{T + S_0},$$

где $\mu_* = 1{,}68 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с), $T_* = 273$ К и $S_0 = 110{,}5$ К для воздуха. Молекулярному числу Прандтля присваивается постоянное значение (для воздуха $\mathrm{Pr} = 0{,}72$).

1.7.3. Модель турбулентности. Для внутренних течений в каналах РДТТ характерно турбулентное движение рабочего тела, а процессы сложной физической природы протекают на фоне общей газодинамической обстановки в рабочем пространстве РДТТ. Турбулентность сказывается как на характеристиках потока, так и выступает в качестве интенсифицирующего фактора теплообмена на поверхностях предсоплового объема и соплового блока. Для моделирования эффектов турбулентного переноса используется высоко- и низкорейнольдсовые версии k–ε модели турбулентности.

Основные уравнения. В двухпараметрической k–ε модели турбулентности в дополнение к осредненным по Рейнольдсу уравнениям Навье–Стокса, записанным для несжимаемой или сжимаемой жидкости, решаются уравнения переноса кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации, которые имеют следующий вид [241]

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + (\rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, k = \nabla \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P - \rho\varepsilon, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + (\rho \boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \varepsilon = \nabla \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + \frac{\varepsilon}{k} \Big(c_{\varepsilon 1} P - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon \Big). \tag{1.5}$$

Турбулентная вязкость вычисляется по формуле Колмогорова–Прандтля $\mu_t = c_\mu \rho k^2/\varepsilon$. Постоянным модели присваиваются следующие значения: $c_\mu = 0{,}09$, $\sigma_k = 1{,}0$, $\sigma_\varepsilon = 1{,}3$, $c_{\varepsilon 1} = 1{,}44$, $c_{\varepsilon 2} = 1{,}92$.

Для расширения границ применимости k–ε модели вводятся поправка Като–Лаундера [233] к слагаемому, описывающему порождение турбулентности, поправка на кривизну линий тока [90, 94, 243] и поправка на сжимаемость [223]. Учет влияния сил плавучести произво-

дится при помощи включения в уравнения (1.4) и (1.5) дополнительных слагаемых градиентного типа.

В модели [241] член производства турбулентности находится из соотношения

$$P = \mu_t |S|.$$

При численной реализации вместо P обычно используется величина $\min\{P, 10\rho\varepsilon\}$. Для учета вращения потока вводится поправка Като–Лаундера [233]

$$P = \mu_t |S|^{1/2} |\Omega|^{1/2}.$$

Применение k–ε модели для моделирования внутренних течений и тестирование модели рассматриваются в работе [45].

Граничные условия. При использовании k–ε модели характеристикам турбулентности на проницаемой поверхности канала либо присваиваются произвольные малые значения ($k \sim 10^{-2}$ м^2/с^2, $\varepsilon \sim 10^{-3}$ м^2/с^3), либо они связываются со скоростью вдува ($k_w \sim 0{,}75 v_w^2$) [301]. Увеличение уровня псевдо-турбулентности на проницаемой поверхности канала приводит к более раннему переходу к турбулентному режиму течения [105].

Результаты, полученные в работе [38], свидетельствуют о нечувствительности распределений характеристик турбулентности в рабочей области к методу постановки граничных условий на поверхности массоподвода. Постановка однородных граничных условий ($k_w = 0$, $\varepsilon_w = 0$) не приводит к изменению структуры течения в канале по сравнению с граничными условиями, предписываемыми пристеночными функциями [95].

Данные физического эксперимента в плоскопараллельном канале с односторонним вдувом показывают, что граничные условия на стенке канала оказывают существенное влияние на формирование картины течения [181, 182] (относительное удлинение канала составляет 25). Число Рейнольдса, составленное по скорости вдува, равняется 3500, а число Рейнольдса в выходном сечении канала — $5{,}25 \cdot 10^4$. Профиль продольной скорости в поперечном сечении канала имеет более наполненную форму по сравнению с профилем скорости, соответствующим вихревому течению невязкой несжимаемой жидкости. На малых расстояниях от левой границы канала (при $x/h \sim 5$) профиль продольной скорости имеет два максимума (локальный максимум располагается приблизительно на гидравлической оси канала). По мере удаления от левого торца канала локальный максимум исчезает (при $x/h \sim 15$). Несмотря на то, что профиль продольной скорости является более наполненным по сравнению с теоретическим решением, распределения скорости, полученные для различных скоростей вдува со стенки

и нормированные на максимальную скорость в поперечном сечении, достаточно хорошо согласуются друг с другом (имеется локальное подобие).

Эффекты, связанные с кривизной линий тока. Модификация k–ε модели для вращающихся течений и течений с кривизной линий тока заключается в коррекции полуэмпирических постоянных путем их умножения на некоторые поправочные функции, зависящие от турбулентного числа Ричардсона [90, 243]. Обсуждение таких поправок проводится в работе [45].

Эффекты сжимаемости. Для учета сжимаемости в уравнениях (1.4) и (1.5) скорость диссипации кинетической энергии турбулентности представляется в виде суммы соленоидальной и сжимаемой составляющих [223]. Сжимаемая составляющая выражается в виде $\varepsilon_c = 0{,}3\,\varepsilon \mathrm{M}_t^4$, где M_t — турбулентное число Маха ($\mathrm{M}_t = k^{1/2}/c$).

Во многих случаях эффекты сжимаемости оказывают сравнительно слабое влияние на характеристики турбулентности внутри расчетной области [45].

Низкорейнольдсовые эффекты. Стандартная k–ε модель, описываемая уравнениями (1.4) и (1.5), справедлива для полностью развитого турбулентного потока и неточно описывает течение в пристеночной области (при $y^+ < 10$), где турбулентные флуктуации подавляются стенкой [241]. Для расчета течений в пограничных слоях k–ε модель дополняется методом пристеночных функций, требующим организации итерационного процесса для нахождения динамической скорости с приемлемой степенью точности.

Низкорейнольдсовые версии k–ε модели обеспечивают описание потока вплоть до стенки и устраняют недостатки модели [241], но требуют использования подробной сетки вблизи стенки ($y^+ < 1$) из-за высоких градиентов диссипативной функции.

В уравнения для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации включаются дополнительные члены, описывающие молекулярный перенос, которые не учитываются при высоких числах Рейнольдса. В формулу для турбулентной вязкости вводится демпфирующая функция f_μ, а в уравнениях для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации используются демпфирующие функции $f_{\varepsilon 1}$ и $f_{\varepsilon 2}$, зависящие от турбулентного числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_t = k^2/(\nu\varepsilon)$ [31]. Функция f_μ служит ограничителем турбулентной вязкости. Функции $f_{\varepsilon 1}$ и $f_{\varepsilon 2}$ учитывают в пристеночной области увеличение члена, описывающего порождение скорости диссипации, а также обеспечивают ограниченность производной от диссипативной функции на стенке.

Низкорейнольдсовые модели турбулентности различаются демпфирующими функциями, выражениями для модифицированных источни-

ковых членов, значениями постоянных, а также граничными условиями для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации [31, 45].

Влияние вдува. Вдув газа приводит к уменьшению демпфирующего влияния стенки, поэтому для расчета масштаба турбулентности в пристеночной области обычно используются модифицированные соотношения [335].

Для моделирования течений в каналах с интенсивным вдувом, склонного к ламинаризации вследствие стабилизирующего влияния отрицательного градиента давления, используются следующие пристеночные функции [80]

$$f_\mu = 1 - \exp\left(-0{,}002\,\mathrm{Re}_t\right),$$

$$f_{\varepsilon 1} = 1 + \left(\frac{0{,}05}{f_\mu}\right)^3,$$

$$f_{\varepsilon 2} = 1 - 0{,}15\exp(-\mathrm{Re}_t^2).$$

В зависимости от безразмерной скорости вдува $v_w^+ = v_w/v_\tau$ различают случаи слабого и сильного вдува. При слабом вдуве $v_w^+ = O(1/10)$ и течение в канале описывается при помощи двухслойной концепции турбулентного пограничного слоя [315]. При этом существует универсальный закон стенки, хотя толщина ламинарного подслоя уменьшается по сравнению со случаем непроницаемой стенки. Интенсивностью турбулентности вдуваемого потока пренебрегается. В случае сильного вдува $v_w^+ = O(1)$ и турбулентные флуктуации скорости, возникающие около проницаемой стенки, проникают в центральную часть канала, что приводит к иной структуре турбулентного пограничного слоя и существованию зоны оттеснения потока от стенки [59, 129].

Случай слабого вдува исследован достаточно полно. Результаты прямого численного моделирования и моделирования крупных вихрей, относящиеся к структуре турбулентности вблизи стенки со слабым вдувом, представлены в работе [283].

Для моделирования течений в каналах со слабым вдувом используются демпфирующие функции. В работе [137] предложена модификация демпфирующей функции Ван Дриста, учитывающая уменьшение толщины ламинарного подслоя. Модифицированное представление демпфирующих функций предлагается в работе [293], в которой используется низкорейнольдсовая версия k–ε модели турбулентности, построенная в работе [275]. Демпфирующие функции модели имеют

вид [293]

$$f_\mu = \left\{1 + \frac{3{,}45}{\left[\mathrm{Re}_t \exp\left(5{,}9v^+\right)\right]^{1/2}}\right\} \mathrm{th}\left(\frac{y^+}{70}\right), \tag{1.6}$$

$$f_{\varepsilon 2} = \left\{1 - \exp\left[-\frac{y^+}{4{,}9}\exp\left(5{,}9v^+\right)\right]\right\}^2. \tag{1.7}$$

Турбулентные флуктуации исчезают на стенке, поэтому асимптотическое поведение характеристик турбулентности является таким же, как и в случае твердой стенки, давая $f_\mu = O(1/y)$ и $f_{\varepsilon 2} = O(y^2)$ при $y \to 0$.

Случай сильного вдува изучен в меньшей степени. В работах [140] и [293] используются k–l и k–ε модели турбулентности, а также модифицированные версии k–ε модели [251, 363].

Сильный вдув оказывает сравнительно слабое влияние на функцию f_μ, описываемую соотношением (1.6), поведение которой контролируется гиперболическим тангенсом [156] (как и при слабом вдуве). Надлежащее демпфирование обеспечивается вдали от стенки (при высоких y^+). В то же время, функция $f_{\varepsilon 2}$, описываемая соотношением (1.7), практически во всей пристеночной области принимает значения, близкие к единице, не обеспечивая демпфирования вблизи стенки. При этом низкорейнольдсовые эффекты не являются пренебрежимо малыми, поскольку турбулентное число Рейнольдса вблизи стенки имеет порядок $O(10)$, и приближение, справедливое при высоких числах Рейнольдса, неприменимо [156]. Исследование асимптотического поведения функций f_μ и $f_{\varepsilon 2}$ показывает, что $f_\mu = O(1)$ и $f_{\varepsilon 2} = O(1)$ при больши́х y^+.

Для учета низкорейнольдсовых эффектов вблизи проницаемой поверхности канала используется модифицированное представление демпфирующей функции, входящей в уравнение для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности [156]:

$$f_{\varepsilon 2} = \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+v^+}{3{,}3}\right)\right]^2 + \left[\frac{1 - \exp\left(-y^+v^+\right)}{y^+v^+}\right]^2. \tag{1.8}$$

Поведение различных демпфирующих функций вблизи стенки показывает рис. 1.11. Линия 1 соответствует демпфирующей функции, используемой в модели [275] для твердой стенки, а линия 2 — демпфирующей функции из модели [293], пригодной в случае слабого вдува (при $v^+ = 0{,}05$). Линия 3 показывает изменение демпфирующей функции, предложенной в модели [156] для случая сильного вдува (при $v^+ = 1$). Новая демпфирующая функция, описываемая соотношением (1.8), имеет корректное поведение вблизи стенки, а максимальное демпфирующее воздействие достигается в области, расположенной на

некотором удалении от проницаемой стенки (в зоне оттеснения), что соответствует представлениям о структуре течения в каналах со вдувом [59].

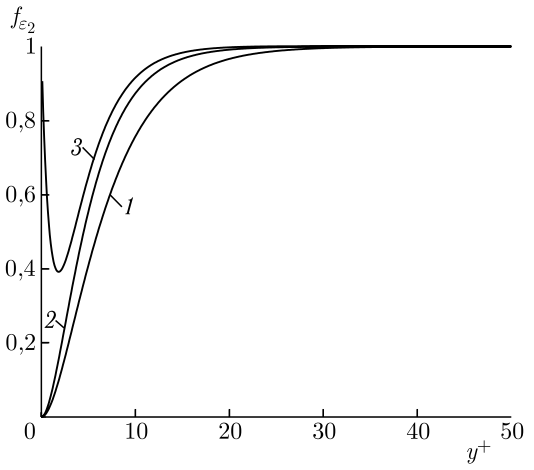


Рис. 1.11. Поведение различных демпфирующих функций вблизи стенки

Для моделирования течений в канале со вдувом в работе [156] используется алгебраическая модель Болдуина–Ломакса, а также стандартная и модифицированная низкорейнольдсовые версии k–ε модели турбулентности. Дифференциальные модели турбулентности дают более точные результаты по сравнению с алгебраической моделью, применение которой затрудняет сложная геометрия расчетной области и формирование рециркуляционных зон. В отличие от пульсационных характеристик турбулентности, влияние подхода к моделированию низкорейнольдсовых эффектов является достаточно слабым в отношении распределений средних характеристик потока. Низкорейнольдсовая версия k–ε модели для сильного вдува приводит к более высоким значениям кинетической энергии турбулентности вблизи стенки по сравнению со стандартной k–ε моделью.

Решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, замкнутых при помощи высокорейнольдсовой версии k–ε модели турбулентности в сочетании с пристеночными функциями, позволяет получить достаточно точные результаты для каналов с двухсторонним вдувом при различных оформлениях поперечного сечения канала (круглое, квадратное, звездообразное) [38, 39, 145, 155, 157, 158, 239].

Для каналов с односторонним вдувом k–ε модель не дает удовлетворительного положения точки перехода ламинарного режима течения в турбулентный, а также уровня турбулентных пульсаций скорости

[145, 155] (их величина в окрестности проницаемой стенки возрастает при увеличении скорости вдува). Вблизи непроницаемой стенки рассогласование расчетных и экспериментальных данных по интенсивности турбулентности достигает $15 \div 20\,\%$ [239]. Для постановки граничных условий на проницаемой стенке канала обычно используется модифицированный закон стенки для пограничного слоя со вдувом [315].

Применимость моделей турбулентности для описания осесимметричных течений в каналах со вдувом, а также зависимость решения от способа постановки граничных условий для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации при использовании k–ε модели обсуждается в работе [95] (расчеты проводятся на неравномерных сетках 31×41 и 41×51 со сгущением вблизи границ). Наилучшее согласование с данными [365] достигается при использовании низкорейнольдсовой версии k–ε модели турбулентности.

Течение в канале имеет тенденцию к ламинаризации вследствие отрицательного градиента давления, обусловленного ускорением потока. Ядро потока является ламинарным, резкое увеличение вихревой вязкости наблюдается в области сдвига вблизи поверхности горения, где продукты сгорания, движущиеся по нормали к поверхности, вынуждены развернуться в узкой приповерхностной зоне. Изменение граничных условий от однородных до условий, предписываемых функциями стенки, не приводит к изменению структуры потока.

Полученные результаты для каналов с различной формой поперечного сечения свидетельствуют о возможности моделирования внутрикамерных течений в рамках модели эффективной вязкости ($\mu = \mathrm{const}$), в которой в качестве эффективной вязкости выбирается значение, приводимое в паспорте на топливо [95]. Необходимость использования той или иной модели турбулентности возникает при моделировании эффектов эрозионного горения топлива или тепломассообмена.

В работах [117] и [289] для моделирования течений в каналах со вдувом используются модели турбулентности 1-го и 2-го порядка.

Модели турбулентности 3-го и 4-го порядка, в частности v^2–f модель турбулентности, позволяют получить результаты, согласующиеся с данными прямого численного моделирования [67, 158] (расчеты проводились для течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале при наличии однородного вдува через одну из стенок и отсоса через противоположную). Средние характеристики потока слабо зависят от флуктуаций скорости на проницаемой поверхности [158].

Нестационарность процесса. Постоянные модели турбулентности обычно подбираются путем сравнения расчетных и экспериментальных данных, полученных для стационарных условий. Применимость имеющихся моделей турбулентности для описания нестационарных течений

(например, течений в каналах со вдувом в условиях внешних вынужденных колебаний давления) не является очевидной [40].

Данные [159] показывают, что хотя интенсивность турбулентности и компоненты тензора рейнольдсовых напряжений в существенной степени изменяются при наличии внешних вынужденных колебаний, но отношение сдвиговых напряжений к интенсивности турбулентности остается приблизительно постоянным и равным соответствующему значению, имеющему место в стационарном потоке. При малых частотах вынужденных колебаний использование моделей турбулентности, калиброванных для стационарного случая, представляется вполне оправданным и приемлемым. В том случае, когда амплитуда и частота колебаний превышают некоторые критические значения, взаимодействие поля турбулентности с внешними колебаниями приобретает все более важное значение, а традиционные модели турбулентности становятся неприменимыми [288]. При этом только внутренняя область пограничного слоя оказывается подверженной влиянию внешних колебаний. Внешняя область пограничного слоя ведет себя так же, как в стационарном потоке [130]. Модели турбулентности во внутренней области пограничного слоя нуждаются в модификации.

Никорейнольдсовая модель турбулентности для расчета течений в условиях внешних вынужденных колебаний развита в работе [197]. При формулировке пристеночных функций вместо координаты y^+ используются локальные характеристики турбулентного потока (локальная скорость и локальное число Рейнольдса). Модель позволяет корректно рассчитать профиль скорости и коэффициент трения в пограничном слое в широком диапазоне амплитуд внешних колебаний. Двухслойная версия этой модели предложена в работе [335], в которой вводится модифицированное представление масштаба турбулентности вблизи стенки, учитывающее нестационарность потока, и использована в работе [130] для исследования акустических процессов в канале с проницаемыми стенками. Результаты расчетов демонстрируют хорошее согласование с данными измерений [240]. Модификация этой модели на случай течения газа с частицами предложена в работе [274].

Для расчетов течений в каналах со вдувом используется двухслойная модель турбулентности [335], в которой источники внешних нестационарных возмущений учитываются при помощи модификации масштаба турбулентности во внутренней области турбулентного пограничного слоя [130]. Модифицированные соотношения для масштаба турбулентности получаются на основе обработки экспериментальных данных по распределениям трения и теплового потока в нестационарном турбулентном течении с продольным градиентом давления [240].

1.8. Методы решения газодинамических и вспомогательных задач

Методы и алгоритмы решения внутрикамерных задач включают методы решения газодинамических уравнений и методы решения вспомогательных задач.

1.8.1. Реализация модели невязкой жидкости. С использованием переменных функция тока–вихрь скорости расчет характеристик течения невязкой жидкости в области сложной конфигурации состоит из следующих этапов.

1. Находится скорость и граничные условия для функции тока на поверхности вдува.
2. Исходя из одномерной теории задается начальное распределение плотности внутри расчетной области.
3. Уравнение для функции тока решается при помощи итерационной процедуры до полной сходимости (на первом шаге вихрь скорости полагается равным нулю).
4. Корректируются вихрь скорости, давление и плотность на поверхности вдува.
5. Плотность и давление пересчитываются на каждой линии тока внутри расчетной области и корректируется вихрь скорости.
6. Плотность и давление экстраполируются на ось канала.
7. Процесс повторяется, начиная с шага 4, до выполнения условия сходимости. В качестве критерия сходимости используется невязка вихря на поверхности вдува.

Основное преимущество модели вихревого невязкого течения в переменных функция тока–вихрь скорости заключается в возможности проведения расчетов в областях сложной геометрии и удобстве реализации вычислительной процедуры.

1.8.2. Реализация модели вязкой несжимаемой жидкости. Уравнения, описывающие нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости, имеют следующий вид [10]

$$\nabla \boldsymbol{v} = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{v} + \boldsymbol{f}. \tag{1.10}$$

Здесь $\boldsymbol{f}$ — внешняя массовая сила, приходящаяся на единицу объема. Зависимость коэффициентов переноса от пространственных координат для простоты записи не учитывается.

Пусть в момент времени t_n известны поле скорости $\boldsymbol{v}$ и поле давления p. Тогда для расчета неизвестных функций в момент времени t_{n+1} используется следующая схема расщепления [10].

На этапе 1 предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет конвекции и диффузии:

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{v}^n}{\Delta t} = -\left(\boldsymbol{v}^n \cdot \nabla\right)\boldsymbol{v}^n + \nu\Delta\boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{f}^n. \tag{1.11}$$

Несмотря на то, что промежуточное поле скорости $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ не удовлетворяет уравнению неразрывности, оно имеет физический смысл. Применив оператор rot к уравнению (1.10) и уравнению (1.11), и учитывая, что $\operatorname{rot}\nabla p = 0$, получим $\operatorname{rot}\widetilde{\boldsymbol{v}} = \operatorname{rot}\boldsymbol{v}^{n+1} = \boldsymbol{\omega}^{n+1}$. Промежуточное поле скорости во внутренних точках сохраняет вихревые характеристики.

На этапе 2 по найденному промежуточному полю скорости $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ с учетом соленоидальности вектора скорости $\boldsymbol{v}^{n+1}$ рассчитывается поле давления

$$\Delta p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t}\nabla\widetilde{\boldsymbol{v}}. \tag{1.12}$$

Для решения уравнения Пуассона (1.12) на каждом шаге по времени используются либо итерационные, либо прямые методы.

На этапе 3 предполагается, что перенос количества движения осуществляется только за счет градиента давления (конвекция и диффузия отсутствуют):

$$\frac{\boldsymbol{v}^{n+1} - \widetilde{\boldsymbol{v}}}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}. \tag{1.13}$$

Уравнение Пуассона (1.12) получается путем взятия дивергенции от обеих частей равенства (1.13) с учетом уравнения неразрывности $\nabla\boldsymbol{v}^{n+1} = 0$.

В реализованной вычислительной процедуре для дискретизации производной по времени применяется схема Адамса–Бэшворта 2-го порядка точности, а для дискретизации диффузионных и конвективных потоков — центрированные конечно-разностные формулы 2-го порядка и конечно-разностные схемы повышенной разрешающей способности (схема MUSCL). Предлагаемая реализация схемы расщепления является достаточно универсальной, позволяя проводить расчеты в многосвязной области на прямоугольной сетке и использовать различные граничные условия для давления на стенке [29].

1.8.3. Реализация модели вязкой сжимаемой жидкости. Дискретизация уравнения (1.3) проводится при помощи метода контрольного объема и разностных схем повышенной разрешающей способности по времени и по пространству [24, 25, 30]. Дискретизация уравнений модели турбулентности (1.4) и (1.5) проводится так же, как

и осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса. Источниковые члены в уравнениях модели турбулентности дискретизируются таким образом, чтобы гарантировать ограниченность искомых функций в соответствии с их физическим смыслом.

Для дискретизации по времени используется трехшаговый метод Рунге–Кутты. Для дискретизации невязких потоков применяется метод кусочно-параболической реконструкции (Piecewise Parabolic Method, PPM) и схема Чакраварти–Ошера [141], а для дискретизации вязких потоков — центрированные конечно-разностные формулы 2-го порядка.

Система разностных уравнений решается многосеточным методом на основе схемы полной аппроксимации. В качестве сглаживающего алгоритма применяется обобщенный метод взвешенных невязок. Последовательность вложенных сеток строится при помощи метода схлопывающихся граней [45]. Для предотвращения неустойчивости численного решения в низкоскоростных областях течения в расчетах на основе сжимаемых уравнений Навье–Стокса используется метод блочного предобусловливания Якоби [22].

Вычислительная процедура реализована в виде компьютерного кода на языке программирования Fortran и C/C++. Для распараллеливания вычислительной процедуры применяется интерфейс межпроцессорного взаимодействия MPI (Message Passing Interface). Особенности распараллеливания вычислительного алгоритма рассматриваются в работе [27].

Расчеты проводились на суперкомпьютере IBM SP/1600 с узлами eServer pSeries 690 на базе процессора Power 4+ 1,7 ГГц. Суперкомпьютерный центр расположен в Центральной лаборатории Совета по научным исследованиям (Daresbury Laboratory, Warrington, United Kingdom).

1.8.4. Решение задачи Коши. При реализации лагранжевого подхода к описанию движения дисперсной фазы требуется решить вопросы, связанные с постановкой начальных условий и инжекцией частиц, расчетом шага по времени и предотвращением ряд исключительных ситуаций.

Подходы к решению задачи Коши для уравнений, описывающих движение пробной частицы, рассматриваются в работе [28], в которой разработаны разностные схемы, учитывающие особенности движения частиц мелкой и крупной фракций, а также разностные схемы полуаналитического интегрирования для ряда частных задач. В основе разработанных разностных схем лежит линеаризация исходной системы уравнений, реализующая принцип замораживания отдельных членов или частей уравнений, а также их приближенное представление в виде упрощенных функциональных зависимостей, и последующее

аналитическое интегрирование приближенного уравнения на каждом шаге по времени [44]. Линеаризация уравнений с их последующим аналитическим интегрированием позволяет выделить быстро- и медленно-затухающие компоненты решения в явном виде и уменьшить ограничения, накладываемые на шаг интегрирования по времени.

В случае, когда влияние частиц на течение газа не учитывается, вычислительная процедура расщепляется на расчет течения газа с последующим расчетом траекторий частиц в известном газодинамическом поле. Частицы обычно инжектируются только из тех точек расчетной области, которые представляют интерес для исследования особенностей решаемой задачи [42].

При учете обратного влияния примеси производится расчет поля течения чистого газа, после чего рассчитываются траектории частиц и вычисляются слагаемые, описывающие межфазный обмен импульсом и энергией. Источниковые члены рассчитываются как произведение счетной концентрации частиц на интенсивности межфазного обмена импульсом, приходящиеся на одну частицу. Суммарное воздействие частиц на среду определяется суммированием вкладов от всех частиц, находящихся в данной ячейке. Поле течение газа пересчитывается с учетом слагаемых, описывающих межфазное взаимодействие, и снова рассчитываются траектории частиц (в модифицированном поле течения). Процесс повторяется до тех пор, пока не выполняется критерий сходимости.

1.8.5. Построение сетки. Для упрощения постановки граничных условий вычислительная область с криволинейными границами в физическом пространстве отображается на квадрат с единичной стороной в вычислительном пространстве.

С поперечным сечением канала связывается криволинейная система координат $\xi = \eta(x, y)$ и $\eta = \zeta(x, y)$, за координатные линии которой принимаются линии уровня функций, являющихся решением системы уравнений эллиптического типа [92]

$$g_{22}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2g_{12}\frac{\partial^2 x}{\partial \xi\,\partial \eta} + g_{11}\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + J^2\left(P\frac{\partial x}{\partial \xi} + Q\frac{\partial x}{\partial \eta}\right) = 0, \qquad (1.14)$$

$$g_{22}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2g_{12}\frac{\partial^2 y}{\partial \xi\,\partial \eta} + g_{11}\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} + J^2\left(P\frac{\partial y}{\partial \xi} + Q\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) = 0. \qquad (1.15)$$

Функции $P(\xi, \eta)$ и $Q(\xi, \eta)$ служат для управления размещением узлов сетки в вычислительном пространстве. Компоненты фундаментального метрического тензора вычисляются по формулам

$$g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2, \quad g_{12} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta, \quad g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2.$$

Метрические коэффициенты в физической и вычислительной плоскостях связаны между собой посредством соотношений

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{pmatrix}.$$

Якобиан преобразования координат имеет вид

$$J = \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{vmatrix} = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi.$$

Нижние индексы ξ и η обозначают дифференцирование по соответствующим координатным направлениям в вычислительной плоскости.

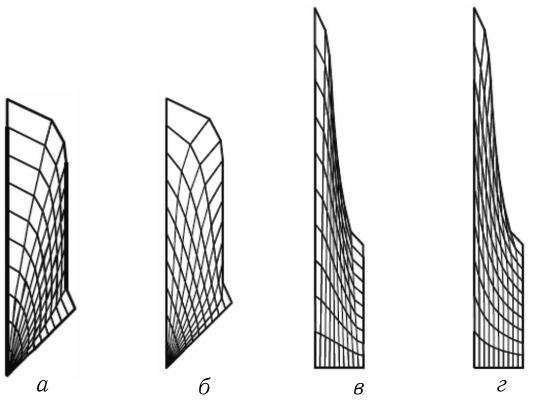


Рис. 1.12. Алгебраические (*а* и *в*) и дифференциальные(*б* и *г*) сетки для лучевой области канала

В качестве граничных условий для уравнений (1.14) и (1.15) задается положение граничных узлов в физической плоскости (форма контура поперечного сечения канала).

Применительно к камерам сгорания РДТТ метод трансфинитной интерполяции и дифференциальный подход сравниваются в работах [212, 213]. Поскольку применяемые на практике каналы имеют симметричную форму, рассматривается элемент поперечного сечения в виде сектора. Метод трансфинитной интерполяции позволяет получить сетки с удовлетворительными характеристиками при угле раствора сектора менее 45°.

Примеры криволинейных сеток, построенных при помощи метода трансфинитной интерполяции и дифференциального подхода, приводятся на рис. 1.12. В данном случае метод трансфинитной интерполяции дает сетку, близкую к ортогональной.

Для каналов с неизменной формой поперечного сечения вдоль их оси трехмерные сетки получаются простым повторением сетки, постро-

енной в поперечном сечении (с постоянным или переменным шагом по продольной координате). Пример трехмерной сетки с размерностью $21 \times 7 \times 40$ для цилиндрического канала с круглой формой поперечного сечения приводится на рис. 1.13 ($h/L = 0{,}32$).

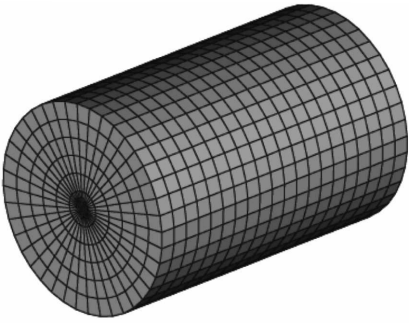


Рис. 1.13. Сетка для круглого канала

В разработанном вычислительном алгоритме для построения сетки используется как алгебраический метод, так и метод, основанный на решении уравнений (1.14) и (1.15).

Глава 2

ДВУМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ СО ВДУВОМ

Теоретические и численные исследования течений невязкой и вязкой жидкости наталкиваются на трудности, связанные с наличием в уравнениях Навье–Стокса как линейных, так и нелинейных слагаемых, описывающих конвективный перенос. Другой проблемой является отсутствие в системе уравнений, состоящей из уравнения неразрывности и уравнений изменения количества движения, эволюционного уравнения для давления.

Система уравнений, включающая уравнение для функции тока и уравнение переноса завихренности (или вихря скорости), не содержит давления в явном виде, что приводит к необходимости формулировки дополнительных граничных условий, характеризуемых достаточно больши́м разнообразием. Исключение давления из уравнений Эйлера или Навье–Стокса при помощи операции перекрестного дифференцирования не избавляет от необходимости его вычисления, поскольку давление фигурирует в граничных условиях.

Под точным решением подразумевается представление поля скорости и давления в таком виде, которое позволяет преобразовать уравнения неразрывности и изменения количества движения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнению в частных производных относительно функции не более чем двух аргументов, один из которых связан со временем. Такие решения называются автомодельными или подобными, поскольку профили скорости в различных поперечных сечениях канала отличаются лишь коэффициентом пропорциональности.

Основной способ получения точных решений связан с уменьшением количества переменных, от которых зависят искомые функции. Сокращение числа аргументов достигается, например, при помощи учета симметрии, заложенной в постановке задачи (плоско-параллельность, осесимметричность). Наибольший интерес представляют классы точных решений, сохраняющие нелинейные свойства уравнений Навье–Стокса.

Несмотря на то, что точные решения имеются лишь для сравнительно узкого круга сравнительно простых задач, это не умаляет их значи-

мости для теории и приложений, поскольку любое решение наследует определенные свойства, присущие полным уравнениям Навье–Стокса, и одновременно освобождает от ряда допущений, характерных для приближенных моделей. Роль, играемая точными решениями уравнений Навье–Стокса, выходит за рамки контроля, предназначенного для проверки правильности имеющихся теоретических представлений или численных схем.

В данной главе обобщаются и приводятся точные решения уравнений Навье–Стокса, описывающих течения в каналах с проницаемыми стенками, которые характеризуются линейной зависимостью продольной скорости от одной из пространственных координат (решения с пространственным ускорением по продольной координате), и исследуются свойства этих решений. Построение упрощенных математических моделей, в которых вычислительная эффективность достигается за счет пренебрежения влиянием некоторых факторов, обосновывается соответствующими оценками. Из решения модельных задач оценивается роль вязкости, сжимаемости и турбулентности в формировании картины течения в условиях, характерных для внутрикамерного объема РДТТ. Полученные результаты используются для построения и обоснования математических моделей, описывающих двух- и трехмерные течения в каналах со вдувом.

2.1. Основные подходы

Для моделирования течений невязкой и вязкой жидкости в каналах с проницаемыми стенками развиваются два подхода, основанных на преобразовании уравнений Навье–Стокса.

2.1.1. Точные решения. Точные решения уравнений Эйлера или Навье–Стокса способствуют лучшему понимаю качественных особенностей стационарных и нестационарных течений (устойчивость, неединственность, режимы с обострением). Они позволяют оценить область применимости упрощенных математических моделей (невязкая жидкость, ползущие течения, пограничный слой) и незаменимы для тестирования численных, асимптотических и приближенных аналитических методов.

В подходе, основы которого были заложены в работе А. Бермана [120], подобные решения уравнения неразрывности и уравнений изменения количества движения находятся в рамках предположения о линейной зависимости продольной скорости от одной из пространственных координат и равномерного вдува со стенок канала. Класс течений с пространственным ускорением вводится в монографии [53].

Расчет характеристик потока сводится к интегрированию нелинейного ОДУ 4-го порядка, решение которого либо ищется в виде разложения в ряд по параметру, представляющему собой число Рейнольдса [121], или параметру, обратному числу Рейнольдса [300, 367], либо находится численными методами. В случае слабого вдува ($\mathrm{Re} \to 0$, вязкое течение) или сильного вдува ($\mathrm{Re} \to \infty$, невязкое течение) решение задачи представляется в конечном виде.

Вырождение уравнения для функции тока, которое получается формальным отбрасыванием вязкого члена при $\mathrm{Re} \to \infty$ (сильный вдув), имеет точное решение, удовлетворяющее всем граничным условиям для вязкой жидкости [120]. Профиль продольной скорости в поперечном сечении канала описывается косинусоидальным распределением.

В работе [120] получается асимптотическое решение задачи при малом числе Рейнольдса, построенному по ширине канала и скорости вдува/отсоса. Дальнейшие исследования были направлены на построение асимптотических разложений для симметричных вдува/отсоса большой интенсивности, а также на численное изучение режимов с несимметричным расходом жидкости через границы. Подробное изложение результатов этих исследований приводятся в книге [68].

Точные решения, описывающие ламинарное течение между двумя параллельными пластинами, в длинной круглой трубе или осесимметричном кольцевом канале с равномерным вдувом или отсосом, получены в работах [120] (осесимметричный канал во вдувом), [369] (кольцевой канала со вдувом) и [119] (кольцевой канал с отсосом).

Подход, связанный с получением точных решений уравнений Эйлера и Навье–Стокса, описывающих течения идеальной и вязкой несжимаемой жидкости, продолжает развиваться. На его основе получены решения, описывающие плоские течения [149, 185], включая течения в каналах с несимметричным вдувом [304, 324, 328] и различными комбинациями вдув/отсос на стенках канала [176, 362], осесимметричные течения в круглых трубах с равномерным вдувом [326, 329] и скоростью вдува, изменяющейся по длине канала [322, 327], течения во вращающихся кольцевых каналах [273, 330], а также трехмерные течения в каналах с равномерным вдувом [235, 323]. Точные решения, описывающие распределения температуры в плоском канале и круглой трубе, приводятся в работах [328] и [368]. Универсальный характер распределения температуры в канале со вдувом при достаточно больши́х числах Пекле показывается в работе [287] для граничных условий постоянной температуры стенки и постоянной плотности теплового потока.

Корреляционный анализ поля течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с равномерным вдувом проводится в работе [232]. Получена зависимость относительного трения от параметра

вдува, а также приближенные зависимости, описывающие продольные распределения скорости и давления. Влияние вязкости возрастает при уменьшении скорости вдува.

Для нахождения класса точных решений, описывающих течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах с проницаемыми стенками, применяются методы группового анализа ОДУ [72, 122].

Точные решения уравнений Навье–Стокса обладают свойством инвариантности относительно той или иной группы, допускаемой системой уравнений неразрывности и изменения количества движения. Алгоритм построения инвариантных решений систем дифференциальных уравнений разработан достаточно хорошо и включает в себя несколько этапов, основанных на понятиях группового анализа, таких как базис инвариантов группы, фактор-система, оптимальная система подалгебр допускаемой алгебры Ли.

Течение в плоском канале с двухсторонним вдувом и его устойчивость рассматриваются в работе [134] при помощи трех различных подходов, учитывающих непараллельность потока. Непараллельность потока характеризуется параметром

$$\varrho = \frac{\|\partial u/\partial x\|_\infty}{\|\partial u/\partial y\|_\infty} = \frac{2}{\pi x}.$$

При увеличении расстояния от левой границы расчетной области параметр ϱ уменьшается ($\varrho = 10\,\%$ при $x = 6{,}3$).

Теория линейной устойчивости приводит к системе уравнений в частных производных, коэффициентами которых являются функции, зависящие от параметров среднего течения. Пренебрежение непараллельностью потока позволяет получить уравнение типа Орра–Зоммерфельда. В локальном подходе на средние значения скорости и давления накладываются возмущения экспоненциального вида (такой подход является справедливым только в том случае, когда амплитуды возмущений не зависят от продольной координаты и времени). Нелокальный подход учитывает непараллельность среднего течения. Линейная теория приводит к ошибочным результатам, в то время как локальный и нелокальный подходы дают результаты, согласующиеся с данными измерений.

Устойчивость течений в каналах с прямоугольной и круглой формой поперечного сечения в плане изучается в работе [135], которая является развитием идей, изложенных в работе [134]. Течение в канале со вдувом не является параллельным, что затрудняет исследование его устойчивости. Для параллельных течений амплитудная функция зависит от одной пространственной переменной, а линеаризованные уравнения Навье–Стокса сводятся к решению ОДУ типа Орра–Зоммерфельда. Такой подход с успехом применяется для исследования устой-

чивости сдвиговых течений (течения в слоях смешения, струях и пограничных слоях). Для непараллельных течений амплитудная функция зависит от двух пространственных переменных, а задача на собственные значения сводится к решению системы уравнений в частных производных. Для дискретизации используется спектральный метод и алгоритм Арнольди.

Неустойчивость течения в круглой трубе и взаимодействие среднего течения с акустическим полем исследуется в работе [150] при помощи метода прямого численного моделирования. В работе [101] рассматривается дестабилизирующее влияние вдува через левый торец канала.

Устойчивость течения в полубесконечной круглой трубе с закрытым левым торцом рассматривается в работе [219], а течения в плоском канале со вдувом с нижней стенки и закрытым левым торцом — в работе [217].

Канонические точные решения допускают распространение на случай течения жидкости, происходящего под действием осложняющих внешних факторов. Широкий набор подобных решений получен в работах Р. Террилла [325, 326, 328], в частности построены асимптотические разложения для симметричного вдува и отсоса большой интенсивности, исследованные ранее в работе [367], а также изучены режимы течения с несимметричным вдувом. Подробное изложение результатов Террилла и других авторов приводится в обзорных работах [68, 163, 234].

Общая трехмерная постановка задачи о течении вязкой жидкости между проницаемыми плоскостями дается в работе [319].

Нестационарное пространственное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками с равномерным отсосом рассматривается в работе [374]. Решение задачи получается на основе разложения в ряд при больши́х числах Рейнольдса и теории динамических систем. Течение оказывается неустойчивым по отношению к малым несимметричным возмущениям, что приводит к бифуркации типа вилки (pitchfork bifurcation) и бифуркации Хопфа (Hopf bifurcation), соответствующим различным режимам течения в канале при различных числах Рейнольдса (устойчивый асимметричный стационарный, устойчивый периодический, устойчивый квазипериодический, хаос).

Устойчивость решения Бермана изучается в работе [374]. В случае симметричного вдува показывается единственность и устойчивость решения при всех числах Рейнольдса. В тоже время, при сильном отсосе установлено, что симметричные относительно серединной плоскости решения с увеличением числа Рейнольдса становятся неустойчивыми и переходят в несимметричные стационарные режимы, которые также теряют устойчивость и сменяются периодическими во времени тече-

ниями. Далее показывается возможность существования хаотических режимов, аналогичных аттрактору Лоренца. В работах [162, 163] установлено, что хаотическое поведение решения, обнаруженное в [374], является чувствительным к асимметрии граничных условий.

В работе [192] устанавливается, что для течения в круглой трубе с равномерным отсосом монотонный профиль осевой скорости существует при $\mathrm{Re} < 2{,}3$ (решение I). При $\mathrm{Re} = 2{,}3$ решение расщепляется на две ветви (решение II), для обеих из которых профиль осевой скорости становится немонотонной функцией радиальной координаты с одной точкой перегиба и областью возвратного течения вблизи стенки. Решение IVa существует при $20{,}6 < \mathrm{Re} < +\infty$ и характеризуется областью возвратного течения, находящейся между стенкой и осью симметрии. Решение IVb существует при $23{,}7 < \mathrm{Re} < +\infty$, присоединяясь к решению IVa при $\mathrm{Re} = 23{,}7$, и не имеет области возвратного течения, но профиль осевой скорости является немонотонным с двумя точками перегиба. Решение Va имеет место при $9{,}99 < \mathrm{Re} < +\infty$ и характеризуется областью возвратного течения вблизи оси симметрии, присоединяясь к решению Vb при $\mathrm{Re} = 9{,}99$. Решение Vb имеет монотонный профиль скорости с точкой перегиба без области возвратного течения.

В работах [199, 200] рассматривается влияние зависимости вязкости от температуры на реализацию различных режимов течения в плоском канале с равномерным отсосом. Жидкость считается несжимаемой, а зависимость вязкости от температуры предполагается экспоненциальной (такая модель справедлива, например, для воды). Стенки канала имеют различные температуры. Уменьшение вязкости приводит к увеличению числа Рейнольдса, что оказывает влияние на устойчивость потока.

В случае постоянной вязкости симметричное устойчивое решение существует при $\mathrm{Re} < 6{,}001$ (решение I). Решение I теряет устойчивость при $\mathrm{Re} = 6{,}001$, приводя к формированию двух устойчивых несимметричных решений (решения Ia и Ib) в результате бифуркации вилки. Несимметричные решения характеризуются смещением точки торможения к одной из стенок канала. Продольная скорость увеличивается около этой стенки и уменьшается около другой. Эти решения остаются устойчивыми до $\mathrm{Re} = 12{,}963$, где возникает бифуркация Хопфа. Бифуркация типа седла возникает при $\mathrm{Re} = 12{,}165$, давая два неустойчивых симметричных решения (решения II и III), одно из которых приводит к бифуркации типа вилки при $\mathrm{Re} = 15{,}415$, формируя два новых несимметричных решения (решения IIIa и IIIb). Решение типа II при $\mathrm{Re} < 13{,}119$, а также решения типов III, IIIa и IIIb, имеют области возвратного течения в центральной части канала. Решение типов Ia и Ib имеют область возвратного течения около стенки при $\mathrm{Re} > 6{,}557$.

В случае зависимости вязкости от температуры бифуркация типа вилки не имеет места, а течение не является симметричным (решение I). Число Рейнольдса, которое определяет существование множественных решений, оказывается выше, чем для течения с постоянной вязкостью.

Течение в канале, стенки которого сжимаются с постоянным пространственным ускорением, исследуется в работе [298]. Похожая задача, но с растягивающимися стенками, рассматривается в работе [123]. Решение, симметричное относительно серединной плоскости, существует во всем диапазоне чисел Рейнольдса, построенных по скорости растяжения стенок и полуширине канала, но с его увеличением обнаруживается потеря единственности решения. При $0 < \mathrm{Re} \leqslant 310$ решение является единственным. Далее возникает еще одно решение, а при $\mathrm{Re} > 337{,}4$ возбуждается третий режим. При стремлении числа Рейнольдса к бесконечности все три решения стремятся к одному пределу.

Комбинированные течения с деформируемыми и проницаемыми стенками исследуются в работах [165, 174, 222, 355–357, 361, 372]. В работе [361] основное внимание уделяется режимам с малой проницаемостью стенок. Изучение нестационарной динамики данного вида течений указывает на возможность перехода к хаосу путем удвоения периода.

Исследование устойчивости частного решения задачи о плоском течении, индуцируемом растяжением границ и их проницаемостью (функция тока представляется в виде $\psi \sim xy$), проводится в работах [371, 373]. Анализ линейной устойчивости течения относительно плоских возмущений дает критическое число Рейнольдса $\mathrm{Re}_* = 4{,}51$ (плоское течение). Исследование устойчивости относительно возмущений, перпендикулярных плоскости течения, когда $v_\theta(t,x) \neq 0$, приводит к критическому числу Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1,71$ (пространственное течение). Пространственные возмущения оказываются более опасными, чем плоские. Число Рейнольдса рассчитывается по скорости отвода жидкости и полуширине канала.

Классом точных решений, линейных по двум пространственным переменным, допускается автомодельность вида $\eta = x/\left(t_0 - t\right)^{1/2}$. Нестационарная задача о течении вязкой жидкости между двумя проницаемыми плоскостями, расстояние между которыми изменяется обратно пропорционально корню квадратному из времени протекания процесса, рассматривается в работе [177].

Нестационарная постановка задачи дает возможность изучить различные механизмы неустойчивости течений вязкой жидкости и описать переход к хаотическим во времени режимам.

В работах [52, 119, 268, 306, 322, 323, 329, 369] на примере стационарного течения вязкой жидкости в круглой трубе показывается неединственность решения задачи в зависимости от числа Рейнольдса, построенного по скорости подвода (отбора) жидкости. Обнаружено исчезновение решений в ограниченном диапазоне чисел Рейнольдса. Свойства неединственности и исчезновения решения были обнаружены также при изучении течения жидкости в продольно растягивающейся трубе [123].

Неединственность решения является характерной чертой задач данного класса и вопрос выбора физически реализуемого решения проводится, как правило, путем исследования их устойчивости. Проблема исчезновения решений в каком-либо диапазоне параметров представляется более сложной. Применительно к задаче о течении в пористой трубе, рассмотренной в [52, 329], проблема решается путем рассмотрения течений с не равной нулю азимутальной скоростью [284, 330]. На том интервале изменения числа Рейнольдса, где решение без закрутки пропадает, существует вращательно-симметричное решение, одна из ветвей которого бифурцирует от режимов, изученных в работах [52, 329]. Подобный анализ выполнен и для течения в растягивающейся трубе [123], но бифуркации вращения обнаружить не удалось.

В работе [330] обращается внимание на нетривиальную разрешимость задачи о незакрученном течении с линейно изменяющейся вдоль оси трубы продольной скоростью при нулевом числе Рейнольдса. При этом остался нерешенным вопрос о существовании вращательно-симметричного решения при $\mathrm{Re} = 0$. Указанная проблема исследуется в работе [3], где доказывается существование двух решений задачи о стационарном течении вязкой жидкости в полубесконечном цилиндре, на боковой поверхности которого выполняются условия прилипания.

Устойчивость некоторых режимов течения вязкой жидкости в трубах с проницаемыми и деформируемыми стенками исследуется в работах [112, 230, 371, 373].

Согласно данным [99], при формировании течения в канале со вдувом приближение одномерного течения в общем случае неприменимо. Двумерность течения проявляется на начальном участке канала, что связывается с влиянием поперечной скорости. В работах [99, 100] дается решение задачи в двумерном приближении невязкого течения и экспериментальная проверка этого решения для сжимаемого и несжимаемого течений в канале с прямоугольной и круглой формой поперечного сечения с двухсторонним симметричным вдувом. В работе [232] обсуждается вопрос о границах применимости модели невязкого течения при небольших скоростях потока. В работах [20, 232] показывается, что решение, полученное в [99, 100], удовлетворительно согла-

суется с данными измерений для кольцевого канала с односторонним вдувом.

Течение вязкой несжимаемой жидкости в кольцевом канале с различными скоростями отсоса и вдува на стенке рассматривается в работе [339] (исследуется 8 различных комбинаций вдув/отсос). Точное решение задачи получается при малых числах Рейнольдса (с поверхности внутреннего цилиндра осуществляется вдув жидкости, а с поверхности внешнего цилиндра — отсос).

Широкий класс двумерных и трехмерных стационарных и нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости рассматривается в работе [4].

2.1.2. Полугидравлический метод. Другим подходом к моделированию течений в каналах с проницаемыми стенками является полугидравлический метод расчета вихревых течений идеальной жидкости, предложенный в работе Дж. Тейлора [318] и основанный на малой роли вязких сил при интенсивном вдуве со стенок канала ($\mathrm{Re} \to \infty$).

Распределение скорости строится в рамках модели несмешивающихся струек идеальной жидкости, берущих начало на поверхности массоподвода, с учетом сохранения полного давления вдоль любой трубки тока и пренебрежением поперечным по сечению перепадом давления. Предельный переход в расходном соотношении для совокупности струек позволяет получить интегральное уравнение для распределения давления по длине канала, которое для течений несжимаемой жидкости в плоских и осесимметричных каналах с равномерным вдувом приводится к уравнению Абеля и допускает точное решение, представляющее собой косинусоидальное распределение продольной скорости по поперечному сечению и линейный разгон потока вдоль оси канала.

Данный метод допускает распространение на потенциальные и вихревые течения идеального газа в плоских и осесимметричных каналах, в каналах с переменным по длине сечением и в каналах с произвольной формой образующей, имеющей кусочно-непрерывную производную, а также пространственные течения [85, 86]. Для течений в ступенчатых каналах с равномерным вдувом решение получается в конечном виде, а для течений в плоских и осесимметричных каналах установлены законы подобия и исследована структура течения в зависимости от формы поперечного сечения и закона вдува.

Применение полугидравлической модели слоистого движения газа к расчету расходных характеристик и перепада давления в каналах, сечение которых образовано кругом с присоединенными к нему равномерно расположенными прямоугольными щелями (щелевой канал), приводит к результатам, хорошо согласующимся с опытом. Теорети-

ческий профиль скорости удовлетворительно описывает поле течения на малых удлинениях щели. На щелевом участке канала со вдувом профиль скорости имеет максимум на оси симметрии и является более наполненным по сравнению с косинусоидальным распределением.

Математическое обоснование модели Тейлора применительно к течениям газа в каналах с произвольной формой поперечного сечения приводится в работах Г. Ф. Теленина [85, 86], в которых показывается, что полугидравлический метод расчета вдоль струек жидкости является точным методом решения краевой задачи для параболической системы уравнений, описывающей вихревые течения идеальной жидкости.

2.1.3. Формулировка граничных условий. Развиваемая в работах Бермана и Тейлора приближенная теория ламинарных течений в каналах со вдувом неявным образом опирается на предположение о возможности пренебрежения передачей возмущений вверх по потоку (параболизованная формулировка задачи).

Статическое давление поперек канала считается функцией только продольной координаты, а вкладом скоростного напора вдува пренебрегается [193]. В рамках модели несжимаемой жидкости распределение давления вдоль оси канала описывается квадратичной зависимостью. Изменение давления вдоль поверхности канала не соответствует допущению о постоянстве скорости вдува вдоль стенки канала. Ошибка имеет порядок квадрата числа Маха, построенного по скорости вдува, которое обычно мало [169] (на практике $M < 0{,}02$).

Для моделирования пристеночных течений обычно используется подход Прандтля (приближение пограничного слоя), в основе которого лежит разбиение области течения на невязкий внешний поток и тонкий пограничный слой, в котором учитывается влияние сил вязкости.

В пограничном слое различие вязкого течения от течения идеальной жидкости проявляется в тонком поверхностном слое с больши́ми градиентами скорости, где происходит перестройка течения, обеспечивающая выполнение условия прилипания. При $\mathrm{Re} \to \infty$ система уравнений получается вырожденной, толщина пристеночного слоя не зависит от числа Рейнольдса, и течение во всей области вплоть до стенки описывается системой уравнений идеальной жидкости.

В рамках теории пограничного слоя течение описывается при помощи модели невязкой жидкости, а вязкие эффекты учитываются лишь в тонком пристеночном слое.

При использовании модели невязкой жидкости распределение скорости имеет вид

$$u = x, \quad v = \frac{2v_w}{D}\left(\frac{D}{2} - y\right),$$

где D — диаметр канала. Для существования пограничного слоя необходимо, чтобы $v_w \leqslant 2\nu/D$. Полагая $\nu = 1{,}49 \cdot 10^{-5}$ м^2/с (при $T \sim 3000$ К) и $D = 0{,}6$ м, получим, что $v \leqslant 5 \cdot 10^{-3}$ м/с, в то время как скорость вдува составляет $v_w = 10^{-2}$ м/с, поэтому приведенное условие заранее выполняется.

В канале с твердыми стенками у поверхности образуется обычный параболический пограничный слой ($\delta \sim 1/\mathrm{Re}^{1/2}$). При этом поперечная скорость потока оказывается существенно меньше скорости в продольном направлении. Течение описывается уравнениями Прандтля с граничными условиями прилипания и непротекания на стенке канала ($u = v = 0$ при $y = h$).

При вдуве жидкости через стенку канала используются граничные условия нормального вдува ($u = 0$, $v \neq 0$). Пограничный слой на проницаемой стенке не возникает. Толщина пристеночного слоя практически не зависит от числа Рейнольдса, а поле скорости при $\mathrm{Re} \to \infty$ (сильный вдув) равномерно стремится к гладкому пределу, соответствующему решению регулярной краевой задачи для параболических уравнений вихревого течения идеальной жидкости (при условии, что оно существует). Решающую роль в формировании профиля скорости играет завихренность, возникающая на поверхностях вдува [193].

При неограниченном увеличении числа Рейнольдса (при $\mathrm{Re} \to \infty$) вязкими эффектами пренебрегается, что приводит к переопределенной системе уравнений, разрешимость которой является нетривиальной [78]. При этом условие обращения в ноль касательной скорости на стенке канала сохраняется (граничные условия формулируются одинаково как для вязкой, так и невязкой жидкости), что определяет единственность решения краевой задачи и отсутствие погранслойных эффектов [85, 86].

При отсосе жидкости через стенку канала образуется непараболический пограничный слой ($\delta \sim 1/\mathrm{Re}$).

2.1.4. Ламинарно-турбулентный переход. Подобные решения хорошо описывают ламинарные течения в каналах с проницаемыми стенками при $1 \ll \mathrm{Re} \ll \mathrm{Re}_*$, где Re_* — критическое число Рейнольдса, характеризующее переход к турбулентному режиму.

Данные измерений показывают, что в турбулентном режиме течения профили продольной и поперечной скорости с удовлетворительной степенью точности описываются теоретическими зависимостями [120]. Отношение приращения сил вязкости F_μ, действующих на элемент жидкости, к приращению сил давления F_p удовлетворяет неравенству [188]

$$\frac{F_\mu}{F_p} < \frac{2{,}78}{\mathrm{Re}} \left(1 + 0{,}13\,\frac{h^2}{x^2}\right)^{1/2}.$$

При высоких числах Рейнольдса вязкие силы малы по сравнению с силами давления при всех x, за исключением небольшой области у левого непроницаемого торца канала.

Длина участка ламинарного течения зависит от числа Рейнольдса. За точку перехода обычно принимается длина, на которой начинается заметное порождение турбулентности. С ростом относительной амплитуды возмущений при $k_m^{1/2}/u_m > 4\,\%$ (индекс m относится к параметрам на оси канала) координата точки перехода уменьшается.

На переход ламинарного течения в турбулентное оказывают влияние условия течения вблизи торца канала, а вдув через дно приводит к уменьшению длины ламинарного участка.

2.1.5. Экспериментальные исследования. Данные физического эксперимента обычно получаются в условиях моделирования на холодном воздухе с соблюдением подобия по числам Маха и Рейнольдса. Полученные результаты используются для тестирования методов расчета пространственных течений и проверки рамок применимости точных решений.

Экспериментальная проверка точного решения [120], соответствующего вихревому течению невязкой несжимаемой жидкости, проводится в работе [129], в которой получены данные измерений по распределениям осевой скорости и давления в длинном канале с круглой формой поперечного сечения в плавне при малых числах Рейнольдса ($L/D = 87$, $\mathrm{Re} = 0 \div 10$).

Для течений в плоских и круглых каналах с проницаемыми стенками имеются многочисленные данные физического эксперимента, в частности [77] (труба, $L/D = 24$, $\mathrm{Re}_w = 130$), [129] (труба, $L/D = 85$, $\mathrm{Re}_0 = 0 \div 1000$, $\mathrm{Re}_w = 0 \div 14$), [152] (плоский канал, $L/D = 40$, $\mathrm{Re}_0 = 400 \div 2000$, $\mathrm{Re}_w = 5 \div 20$), [160] (плоский канал, $\mathrm{Re}_w = 4900$), [181, 182] (плоский канал, $L/D = 21$, $\mathrm{Re}_w = 1560$; прямоугольный канал, $L/H = 20$, $L/W = 2$, $\mathrm{Re} = 3500$), [188] (труба, $L/D = 8{,}4$, $\mathrm{Re}_w = 300 \div 2500$), [187] (труба, $L/D = 9{,}5 \div 14{,}3$, $\mathrm{Re}_w = 4500 \div 9000$), [278] (труба, $L/D = 24$, $\mathrm{Re}_w = 250 \div 7500$), [331] (плоский канал, $L/D = 24$, $\mathrm{Re}_w = 7840$), [365] (плоский канал, $L/D = 10$).

Имеющиеся данные измерений позволяют установить рамки применимости точных и приближенных решений.

2.2. Течение в плоском и осесимметричном канале

Рассмотрим квазиразвитое течение вязкой несжимаемой жидкости в достаточно длинном плоском или цилиндрическом канале с проница-

емыми стенками, когда характеристики потока, отнесенные к скорости на оси канала, слабо изменяются по его длине.

2.2.1. Распределения скорости и давления. Совместим ось x с плоскостью или осью симметрии канала, а ось y направим перпендикулярно ей (рис. 2.1). Поперечный размер канала h считается постоянным по всей его длине, а скорость вдува v_w — одинаковой во всех точках проницаемой поверхности канала и направленной по нормали к ней. Растекание жидкости происходит симметрично относительно плоскости $x = 0$ (зеркальная симметрия течения).

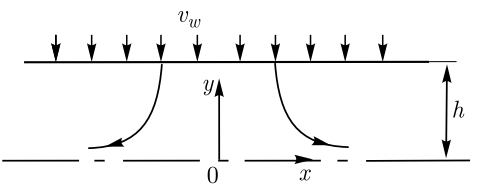


Рис. 2.1. Течение в канале с проницаемыми стенками

Условие существования квазиразвитого течения записывается в виде

$$\frac{h}{u_m}\left|\frac{du_m}{dx}\right| \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{|v_w|}{u_m} \ll 1.$$

При вдуве такой режим течения устанавливается в каналах достаточной протяженности за областью входного участка или вдали от левого непроницаемого торца канала.

Профиль продольной скорости на начальном участке канала является в существенной степени неоднородным [95]. Ниже по потоку профиль продольной скорости стабилизируется и описывается косинусоидальной зависимостью.

Плоское ($n = 0$) или осесимметричное ($n = 1$) ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений, включающей в себя уравнение неразрывности и уравнения изменения количества движения

$$\frac{\partial y^n u}{\partial x} + \frac{\partial y^n v}{\partial y} = 0, \tag{2.1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{n}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2.2}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{n}{y}\frac{\partial v}{\partial y} - n\frac{v}{y^2}\right). \tag{2.3}$$

На стенке канала используется условие прилипания и условие нормального вдува с постоянной по длине канала скоростью ($u = 0$, $v = -v_w$

при $y = h$). На плоскости или оси симметрии канала задается условие симметрии течения ($\partial u/\partial y = v = 0$ при $y = 0$). Левая граница расчетной области является плоскостью симметрии течения ($u = 0$ при $x = 0$). В рамках параболической формулировки задачи граничные условия в выходном сечении канала (при $x = L$) не требуются.

В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью скорости выбирается полуширина или радиус канала h, а для переменных с размерностью скорости — скорость вдува v_w. Характерным параметром задачи является число Рейнольдса $\mathrm{Re} = v_w h/\nu$.

При полном пренебрежении силами вязкости в рамках одномерной модели решением задачи является распределение скорости

$$u = 2x, \quad v = 0. \tag{2.4}$$

Давление находится из уравнения Бернулли

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho u^2,$$

где p_0 — давление при $x = 0$. Решение (2.4) не удовлетворяет граничным условиям на стенке канала при $y = h$.

Для двумерной модели потенциального течения решение задачи имеет вид

$$u = 2x, \quad v = -y. \tag{2.5}$$

Давление находится из уравнения Бернулли

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\left(u^2 + v^2\right).$$

Решение (2.5) не удовлетворяет всем граничным условиям задачи ($u \neq 0$ при $y = h$).

В предельных случаях слабого вдува ($\mathrm{Re} \to 0$, медленное течение вязкой жидкости) и сильного вдува ($\mathrm{Re} \to \infty$, течение невязкой жидкости) система уравнений (2.1)–(2.3) допускает ряд точных решений [327, 329].

Предположим, что продольная скорость изменяется по линейной зависимости вдоль оси канала, а поперечная скорость является функцией только поперечной координаты

$$u = xf(y), \quad v = -g(y).$$

При $\mathrm{Re} \to 0$ слагаемые, описывающие конвективный перенос, не учитываются, и течение описывается однородным ОДУ 4-го порядка

$$f^{(4)} = 0.$$

Распределения составляющих скорости имеют вид:

— плоское течение ($n = 0$)

$$u = \frac{3}{2}x\left(1 - y^2\right), \quad v = \frac{1}{2}y\left(y^2 - 3\right);$$

— осесимметричное течение ($n = 1$)

$$u = 4x\left(1 - y^2\right), \quad v = y\left(y^2 - 2\right).$$

Погрешность имеет порядок $O(10^{-2}\mathrm{Re}\, y)$.

При $\mathrm{Re} \to \infty$ влиянием вязких эффектов пренебрегается и течение описывается ОДУ 3-го порядка

$$ff''' - f'f'' = 0.$$

В рамках двумерной модели завихренного течения распределения составляющих скорости имеют вид

$$u = \frac{\pi}{2}(n+1)\, x \cos\left(\frac{\pi}{2}y^{n+1}\right), \quad v = -\frac{1}{y^n}\sin\left(\frac{\pi}{2}y^{n+1}\right). \tag{2.6}$$

Распределение давления находится из уравнения Бернулли

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho\left(u_m^2 + v^2\right),$$

где $u_m = \pi x$. Решение (2.6) удовлетворяет всем граничным условиям задачи. Погрешность имеет порядок $O(\mathrm{Re}^{-1})$.

Сравнение решений (2.4), (2.5) и (2.6) показывает, что в случае одномерной модели и двумерной модели потенциального течения перепад давления по каналу длиной L описывается приближенным выражением

$$\Delta p_1 = 2\rho\left(v_w\frac{L}{h}\right)^2,$$

а в случае модели вихревого течения — выражением

$$\Delta p_2 = \frac{\pi}{2}\rho\left(v_w\frac{L}{h}\right)^2.$$

Из сравнения приведенных соотношений следует, что перепад давления, имеющий место в модели вихревого течения, больше перепада давления, вычисленного с применением моделей более низкого уровня, и составляет

$$\Delta p_2 = \frac{\pi^2}{4}\Delta p_1.$$

Указанный вывод остается справедливым и для течений в каналах со сложной формой поперечного сечения.

В общем случае распределение давления вдоль координаты x описывается квадратичной зависимостью

$$p = P(y) - \frac{1}{2}Cx^2,$$

где C — градиент давления. Для течения невязкой несжимаемой жидкости в плоском канале $C = \pi^2/4$, а в осесимметричном канале — $C = \pi^2$. При слабом вдуве параметр C зависит от числа Рейнольдса и описывается зависимостью:

— плоское течение:

$$C = \frac{2}{\mathrm{Re}_w} + \frac{81}{35} + O(\mathrm{Re}_w);$$

— осесимметричное течение:

$$C = \frac{16}{\mathrm{Re}_w} + 12 + O(\mathrm{Re}_w).$$

Приведенные зависимости показаны на рис. 2.2. Пунктирные линии соответствуют случаю сильного вдува.

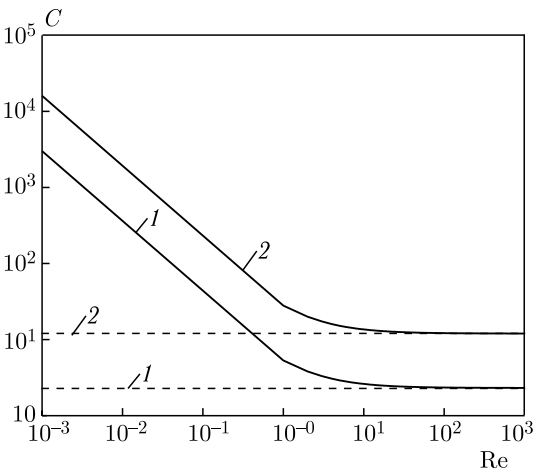


Рис. 2.2. Зависимость градиента давления от числа Рейнольдса в плоском (кривая 1) и осесимметричном (кривая 2) течении

Профили продольной и поперечной скорости, описываемые соотношениями (2.6), являются неким эталоном при исследовании структуры сложных течений в каналах с проницаемыми стенками.

2.2.2. Кинематические характеристики течения. Рассмотрим распределение кинематических характеристик течения в длинном цилиндрическом канале. В одномерной постановке поле скорости описы-

вается выражением (2.4), линии тока являются прямыми, параллельными оси x, начинающимися в произвольном сечении x_0. В двумерной постановке линии тока являются кривыми, берущими начало на стенке канала в сечении x_0. Поле скорости потенциального течения описывается соотношениями (2.5), а поле скорости вихревого течения — соотношениями (2.6).

В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью скорости используется скорость вдува v_w, а для продольной и поперечной координат — координата x_0 и полуширина канала h. При этом масштабом времени для канала заряда является мгновенное время пребывания продуктов сгорания топлива в камере двигателя, которое составляет $t_0 = V/\dot{V} = h/2v_w$, где V и $\dot{V}$ — объем канала и объемный расход.

В новых переменных поле скорости в цилиндрическом канале описывается соотношениями:

— одномерная модель:

$$u = \xi x;$$

— модель потенциального течения:

$$u = \xi x, \quad v = -r;$$

— модель вихревого течения:

$$u = \frac{\pi}{2}\xi x \cos\frac{\pi}{2}\eta, \quad v = -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\eta.$$

Здесь $\xi = 2x_0/h$, $\eta = y^2$.

Линии тока находятся из решения системы уравнений

$$u = \xi\frac{dx}{d\tau}, \quad v = 2\frac{dy}{d\tau}.$$

Поскольку $\tau = \ln\eta^{-1} = \ln x$, то, исключая τ, для модели потенциального течения имеем

$$x = \eta^{-1}. \tag{2.7}$$

Форма линий тока для модели вихревого течения находится из решения уравнения

$$\int\limits_0^x \left(\xi\cos\frac{\pi}{2}\eta\right)^{-1} d\xi = -\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\eta.$$

Решением уравнения является функция

$$x = \left(\sin\frac{\pi}{2}\eta\right)^{-1}. \tag{2.8}$$

Соотношения (2.7) и (2.8) являются уравнениями линий тока течения в круглом канале заряда для моделей, описываемых соотношениями (2.5) и (2.6). Параметр ξ не входит в полученные соотношения, и все линии тока изображаются одной кривой на рис. 2.3. Сравнение кривых 1 и 2 показывает, что линии тока потенциального и вихревого течений в качественном отношении различаются достаточно мало. Однако количественное различие их локальных характеристик (угол наклона, кривизна) является достаточно существенным.

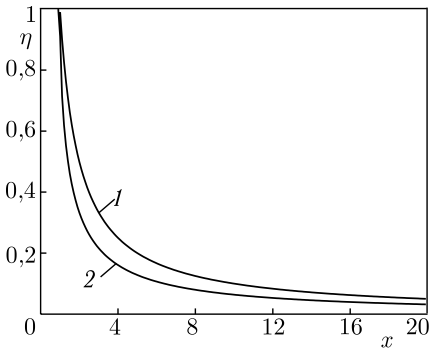


Рис. 2.3. Функциональная зависимость для линий тока потенциального (линия 1) и вихревого (линия 2) течения

Описание кинематики течения в каналах зарядов других форм (цилиндрический канал над утопленным соплом, вертикальная поперечная щель в заряде или около его торца) показывает, что в модели потенциального течения линии тока описываются зависимостью (2.7), а в модели вихревого течения — различными зависимостями. В выбранных переменных структура потенциальных течений является инвариантной относительно изменения формы канала, в то время как структура вихревых течений в каналах этого класса существенно отличается.

2.2.3. Интегральные характеристики течения. Время пребывания продуктов сгорания топлива в камере является одной из важных интегральных характеристик рабочего процесса.

В рамках одномерной модели поле скорости описывается соотношением (2.4). Поскольку $u = dx/dt = \dot{x}$, то после подстановки и интегрирования с учетом начального условия при $t = 0$ получим зависимость времени движения газовой частицы вдоль произвольной линии тока от длины канала

$$t = \frac{h}{2v_w} \ln \frac{L}{x_0}. \tag{2.9}$$

Общее время пребывания продуктов сгорания в канале заряда получается при помощи интегрирования соотношения (2.9) по всем линиям тока

$$T_0 = \frac{h}{2v_w L} \int\limits_{x_0}^{L} \ln \frac{L}{x_0}\, dx_0,$$

что дает

$$T_0 = \frac{h}{2v_w} + \frac{h}{2v_w L} \lim_{x_0 \to 0} \left[x_0 \left(\ln \frac{L}{x_0} - 1 \right) \right]. \tag{2.10}$$

Из соотношения (2.10) следует, что общее время пребывания продуктов сгорания в канале в произвольный момент времени является суммой регулярного и сингулярного членов. Сингулярный член стремится к нулю при $x_0 \to 0$. При любой фиксированной длине канала время пребывания газовых частиц на произвольной линии тока ($x_0 \neq 0$) является конечным, а при $x_0 = 0$ (нулевая линия тока) оно является бесконечно большим, поскольку $u(0, y) = 0$, но толщина этой линии тока представляет собой бесконечно малую величину. Сингулярный член порождается особенностью модели, согласно которой общее время пребывания продуктов сгорания в канале равняется сумме времени пребывания газовых частиц на всех линиях тока, кроме нулевой, и на нулевой линии тока. Из выражения (2.10) следует зависимость для времени пребывания продуктов сгорания в канале

$$T_0 = \frac{h}{2v_w}. \tag{2.11}$$

Согласно соотношению (2.11), время пребывания продуктов сгорания в канале совпадает с характерным временем канала.

В модели (2.5) выражения для продольной и поперечной скоростей являются независимыми, а для продольной скорости имеется соотношение, совпадающее с распределением скорости в одномерной модели, поэтому общее время пребывания продуктов сгорания в канале описывается зависимостью (2.11).

В модели (2.6) распределения продольной и поперечной скоростей взаимосвязаны, что усложняет задачу. Выражение для времени движения газовой частицы вдоль линии тока для канала длиной L имеет вид

$$t = -\frac{T_0}{2\pi} \ln \left[L - (L^2 - x_0^2)^{1/2} \right] \left[L + (L^2 - x_0^2)^{1/2} \right]^{-1/2}. \tag{2.12}$$

Используя соотношение (2.12), найдем общее время пребывания продуктов сгорания в канале

$$T_\omega = -\frac{T_0}{2\pi}\left\{\frac{x_0}{L}\ln\left[L-(L^2-x_0^2)^{1/2}\right]\left[L+(L^2-x_0^2)^{1/2}\right]^{-1/2}+\right.$$
$$\left.+\,2\arccos\frac{x_0}{L}\right\}. \quad (2.13)$$

В данном случае

$$T_\omega = \frac{T_0}{2}. \quad (2.14)$$

Зависимости времен T_0 и T_ω от основных параметров задачи совпадают с точностью до коэффициента. Несмотря на то, что каждая из линий тока потенциального течения короче соответствующей линии тока вихревого течения, распределение скорости вдоль них таково, что T_ω вдвое меньше T_0 в произвольный момент времени работы двигателя.

Полученные результаты позволяют ввести понятие эквивалентной трубки тока, для которой характеризующий ее параметр находится как решение системы уравнений (2.9) и (2.11) или (2.12) и (2.13). В первом случае при оценке характеристик рабочего процесса, связанного с временем пребывания продуктов сгорания в канале заряда, вместо всего течения в целом достаточно знать эволюцию их свойств на линии тока с параметром $x_0 = L/e$. Во втором случае параметр x_0 является корнем уравнения

$$\left[L-(L^2-x_0^2)^{1/2}\right]\left[L+(L^2-x_0^2)^{1/2}\right]^{-1/2} = e^{-\pi},$$

приближенное решение которого имеет вид

$$x_0 = 2Le^{-\pi/2}.$$

Понятие эквивалентной трубки тока позволяет учесть особенности течения и в тоже время понизить размерность решаемой задачи, сведя ее к одномерной. Это оказывается полезным при проведении оценок характеристик течения на выходе из канала заряда.

Влияние вязких эффектов на структуру течения в канале с двухсторонним вдувом проявляется, в основном, в приосевой области, изменяя наполненность профиля продольной (осевой) скорости (рис. 2.4). Линии 1 и 2 соответствуют профилям скорости в каналах со слабым и сильным вдувом. В плоском канале с увеличением интенсивности вдува профиль продольной скорости становится более наполненным (рис. 2.4 *а*) и стремится к косинусоидальному распределению при $\mathrm{Re} \to \infty$, хотя его существенной деформации не происходит, и параболический профиль скорости сравнительно слабо отличается от профиля скорости вихревого течения идеальной жидкости. В круглом канале с увеличением интенсивности вдува профиль осевой скорости

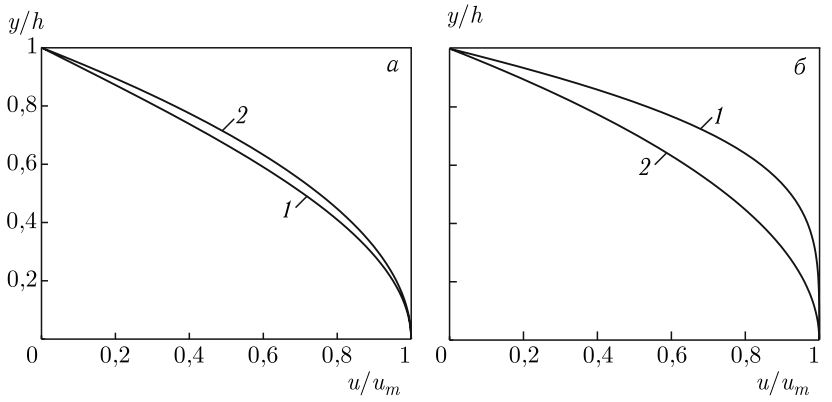


Рис. 2.4. Профили продольной скорости в плоском (*а*) и осесимметричном (*б*) течении

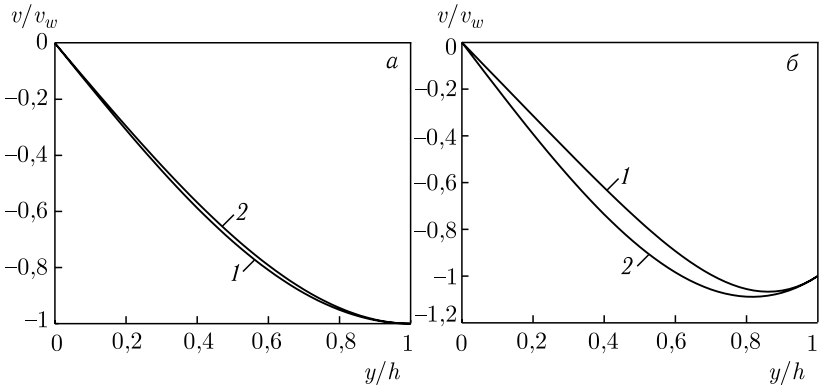


Рис. 2.5. Профили поперечной скорости в плоском (*а*) и осесимметричном (*б*) течении

становится менее наполненным (рис. 2.4 *б*) и стремится к косинусоидальному профилю при $\mathrm{Re} \to \infty$.

Профили поперечной (радиальной) скорости сравнительно слабо отличаются друг от друга в широком диапазоне изменения скорости вдува (рис. 2.5). Линии 1 и 2 соответствуют профилям скорости в каналах со слабым и сильным вдувом. В то время как в плоском случае (рис. 2.5 *а*) поперечная скорость является монотонной функцией поперечной координаты и имеет максимум на стенке, в осесимметричном течении максимум радиальной скорости располагается на некотором удалении от стенки канала и превышает скорость вдува (рис. 2.5 *б*).

Линии тока показаны на рис. 2.6 для плоского (фрагменты *а* и *б*) и осесимметричного (фрагменты *в* и *г*) течений в канале со вдувом.

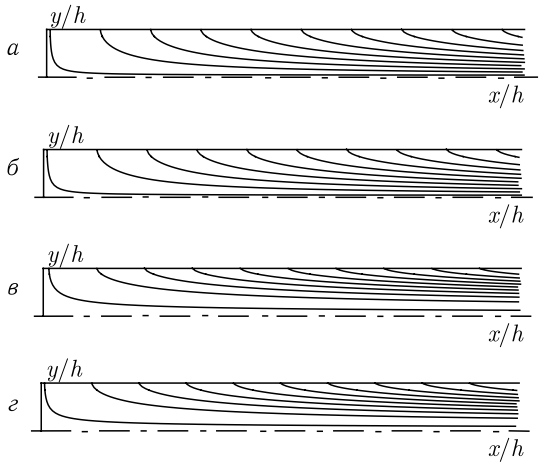


Рис. 2.6. Линии тока в канале со слабым (*а* и *в*) и сильным (*б* и *г*) вдувом

Основные отличия в форме линий тока в каналах со слабым и сильным вдувом заключаются в кривизне линий тока вблизи массоподводящей поверхности канала.

2.3. Течение в канале с несимметричным вдувом

Рассмотрим квазиразвитое течение вязкой несжимаемой жидкости в плоскопараллельном канале шириной h, с обеих стенок которого осуществляется вдув заданной интенсивности (рис. 2.7). С нижней пластины производится вдув жидкости со скоростью v_{w1}, а с верхней пластины — вдув со скоростью v_{w2} ($v_{w1} \neq v_{w2}$, при этом считается, что $v_{w2} \neq 0$). Совместим ось x декартовой системы координат с нижней стенкой канала. Растекание жидкости происходит симметрично относительно плоскости $x = 0$ (зеркальная симметрия течения).

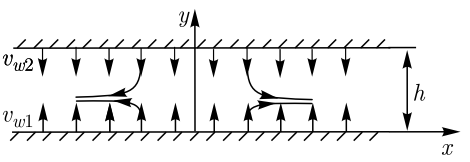


Рис. 2.7. Течение в канале с несимметричным вдувом

Условие квазиразвитости течения означает, что характеристики потока, отнесенные к максимальной скорости в поперечном сечении u_m,

слабо изменяются по длине канала:

$$\frac{h}{u_m}\left|\frac{du_m}{dx}\right| \ll 1.$$

При вдуве такое течение устанавливается в каналах достаточной протяженности за областью входного участка.

В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длины выберем ширину канала h, а для переменных с размерностью скорости — скорость вдува с верхней стенки v_{w2}.

Уравнения, описывающие течение вязкой несжимаемой между двумя параллельными пластинами имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{2.15}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{2.16}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \tag{2.17}$$

Характерным параметром задачи является число Рейнольдса, построенное по скорости вдува с верхней стенки. Отношение скоростей вдува с нижней и верхней стенок канала обозначим через $\omega = v_{w1}/v_{w2}$.

Предположим, что продольная скорость зависит от координаты x по линейному закону $u \sim xf(y)$, а поперечная скорость не зависит от продольной координаты $v \sim g(y)$. Давление из уравнений изменения количества движения (2.16) и (2.17) исключается при помощи операции перекрестного дифференцирования. Нахождение распределения скорости сводится к интегрированию ОДУ 4-го порядка

$$g^{(4)} - \mathrm{Re}\,(gg''' - g'g'') = 0, \tag{2.18}$$

где $\mathrm{Re} = v_w h/\nu$. Функции f и g связаны при помощи уравнения неразрывности ($f = -g'$).

Граничные условия для уравнения (2.18) задаются на нижней и верхней стенках канала ($g = 0$, $g' = 0$ при $y = 0$ и $g = -v_w$, $g' = 0$ при $y = h$).

При $\mathrm{Re} \to 0$ (слабый вдув) и $\mathrm{Re} \to \infty$ (сильный вдув) уравнение (2.18) имеет точные решения [74], дающие параболический профиль продольной скорости при слабом вдуве и косинусоидальный профиль продольной скорости — при сильном вдуве.

В случае сильного симметричного вдува ($\mathrm{Re} \to \infty$) решение уравнения (2.18) представляется в виде

$$f = \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\,y\right), \quad g = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\,y\right). \tag{2.19}$$

Интенсивный вдув означает, что скорость вдува значительно превосходит по порядку величины нормальную скорость в пограничном слое вблизи непроницаемой поверхности, и в то же время скорость вдува значительно меньше средней скорости течения в канале. В этих условиях течение в слое вдуваемого газа оказывается невязким, а пограничный слой оттесняется от поверхности и преобразуется в слой смешения между вдуваемым газом и течением в канале. Толщина этого слоя оказывается малой по сравнению с толщиной слоя вдуваемого газа.

В случае слабого симметричного вдува ($\mathrm{Re} \to 0$) решение уравнения (2.18) имеет вид

$$f = \frac{3}{2}x\left(1 - y^2\right), \quad g = -\frac{1}{2}y\left(3 - y^2\right). \tag{2.20}$$

Приложения решения (2.20) невелики и ограничиваются случаем разрушения стенки под действием высокотемпературного потока.

Для получения приближенного решения уравнения (2.18) используется метод интегральных многообразий [51], заключающийся в разложении решения в бесконечный ряд по степеням малого параметра и выделении медленной компоненты решения (в данном случае — поперечной скорости) на интегральном многообразии.

Соотношения (2.19) и (2.20) показывают, что в случаях слабого и сильного вдува максимальные значения скорости в поперечном сечении отличаются лишь на 7 %. Влияние вязкости проявляется в незначительном наполнении профиля скорости в поперечном сечении.

Увеличение числа Рейнольдса приводит к уменьшению роли вязких напряжений в формировании картины течения (рис. 2.8). При $\mathrm{Re} > 10^3$ решение становится независимым от числа Рейнольдса, а при $\omega = 1$ (двухсторонний симметричный вдув) распределение скорости описывается решением для вихревого течения невязкой жидкости в канале со вдувом [74].

При слабом вдуве с нижней стенки геометрическое положение максимума распределения продольной скорости приближается к нижней стенке, а приповерхностное течение становится подобным течению в пограничном слое на непроницаемой поверхности.

Малые и больши́е числа Рейнольдса дают схожие профили скорости, но их формирование качественно отличается. В течении с сильным вдувом ($\mathrm{Re} \to \infty$) профиль скорости формируется за счет увлечения в поток масс жидкости, поступающей со стенок. Передача им импульса дает перепад давления, который зависит от массового прихода от стенок. В течении Пуазейля ($\mathrm{Re} \to 0$) перепад давления формируется силами трения и зависит от вязкости. При решении невязкой задачи для канала со вдувом граничные условия на стенке полностью иден-

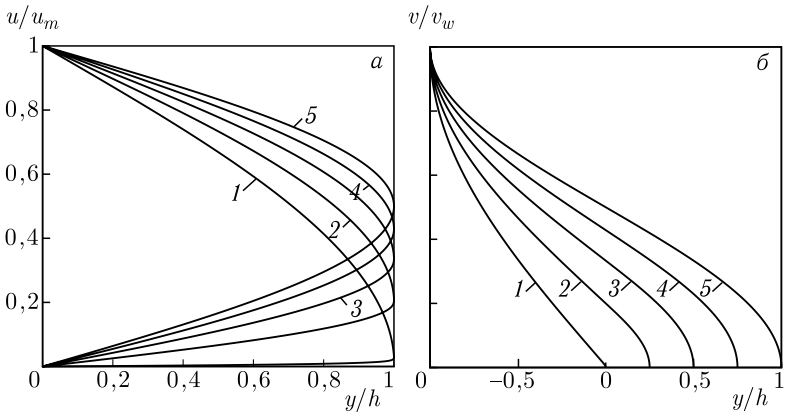


Рис. 2.8. Профили продольной (*а*) и поперечной (*б*) скорости при $\mathrm{Re} = 10^4$ и $\omega = 0$ (1); 0,25 (2); 0,5 (3); 0,75 (4); 1 (5)

тичны вязкому течению, что определяет регулярное влияние вязкости при ее уменьшении.

Данные физического и численного экспериментов показывают, что решение (2.19) достаточно хорошо описывает распределение скорости в турбулентном режиме при $\mathrm{Re} > 100$. Расчет характеристик турбулентности проводится на основе уравнений k–ε модели турбулентности при известном распределении скорости [38]. Приближение вихревого течения идеальной жидкости приводит к существенным погрешностям при моделировании турбулентных течений в длинных и узких каналах [145]. Невязкое решение неприменимо также для моделирования течений в быстрогорящих каналах [266].

2.4. Течение в кольцевом канале

При моделировании течений в околосопловой области удобным объектом для исследования влияния вязкости на формирование распределения скорости является цилиндрический канал, образованный горящей поверхностью заряда и утопленной в него входной частью сопла. На границах расчетной области задается два типа граничных условий, характерных для задач внутренней газодинамики РДТТ: условие вдува жидкости через проницаемую стенку, соответствующую горящей поверхности заряда (поверхность внешнего цилиндра), и условие непротекания и прилипания жидкости к поверхности утопленной части сопла (поверхность внутреннего цилиндра).

Простота геометрической формы расчетной области и граничных условий позволяет получить точное решение уравнений Навье–Стокса

для течения в коаксиальном канале и провести его параметрическое исследование.

Рассмотрим течение в кольцевом канале, образованном концентрическими круговыми цилиндрами радиусами r_1 (внутренний цилиндр) и r_2 (наружный цилиндр). Через поверхность наружного цилиндра ($r_2 > r_1$) осуществляется равномерный вдув жидкости. Поверхность внутреннего цилиндра полагается непроницаемой.

Течение вязкой несжимаемой жидкости в кольцевом канале описывается следующими уравнениями, записанными в цилиндрической системе координат, центр которой располагается на оси симметрии

$$\frac{\partial ur}{\partial x} + \frac{\partial vr}{\partial r} = 0, \tag{2.21}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{2.22}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right). \tag{2.23}$$

Граничные условия для уравнений (2.21)–(2.23) задаются на поверхности внутреннего цилиндра ($u = v = 0$ при $r = r_1$) и поверхности внешнего цилиндра ($u = 0$, $v = -v_w$ при $r = r_2$). Плоскость $x = 0$ считается плоскостью зеркальной симметрии течения ($\partial u/\partial x = v = 0$ при $x = 0$).

В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длины выбирается радиус внешнего цилиндра r_2, а для переменных с размерностью скорости — скорость вдува v_w. Характерными параметрами задачи является число Рейнольдса $\mathrm{Re} = r_2 v_w/\nu$, составленное по радиусу наружного цилиндра и скорости вдува, а также геометрический параметр $k = r_1/r_2$, характеризующий толщину кольцевого зазора.

Распределения осевой и радиальной скорости ищутся в виде

$$u = \theta(x)\,\varphi(r), \quad v = \psi(r), \tag{2.24}$$

где $\varphi(r) = u/u_m$ представляет собой функцию, описывающую распределение осевой скорости. Нормирование производится на максимальную осевую скорость в данном сечении u_m. Граничные условия задачи примут вид

$$\theta(0) = 0, \quad \varphi(r_1) = 0, \quad \psi(r_1) = 0, \quad \varphi(r_2) = 0, \quad \psi(r_2) = -1.$$

После подстановки соотношений (2.24) в уравнение неразрывности (2.21) получим

$$r\varphi(r)\frac{d\theta(x)}{dx}+\psi(r)+r\frac{d\psi(r)}{dr}=0. \tag{2.25}$$

Из уравнения (2.25) следует, что $d\theta(x)/dx$ не является функцией x, поэтому

$$\frac{d\theta(x)}{dx}=B_1, \quad \theta(x)=B_1x+B_2,$$

где B_1 и B_2 — произвольные постоянные интегрирования. Из граничных условий задачи следует, что $B_2=0$. Введем новую координату $\xi=x/r_2$, нормированную на радиус внешнего цилиндра. Функция, описывающая распределение осевой скорости, примет вид

$$\theta(\xi)=C\xi,$$

где $C=B_1r_2$ — постоянная, характеризующая линейное ускорение потока вдоль координаты ξ. Вместо радиальной координаты r введем новую координату η такую, что $r=f_1(\eta)$, а вместо функции ψ — новую функцию ζ такую, что $\psi(\eta)=f_2(\eta)\zeta(\eta)$, где $f_1(\eta)$ и $f_2(\eta)$ являются неизвестными функциями координаты η.

Используя штрих для обозначения производной по координате η и учитывая, что

$$\frac{d}{dr}=\frac{d\eta}{dr}\frac{d}{d\eta}=\frac{1}{f_1'}\frac{d}{d\eta},$$

из уравнения (2.25) получим соотношение

$$C\varphi=-r_2\frac{f_2}{f_1'}\zeta'-r_2\left(\frac{f_2}{f_1}+\frac{f_2'}{f_1'}\right)\zeta. \tag{2.26}$$

Выберем произвольные функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы выполнялись условия

$$-r_2\frac{f_2}{f_1'}=1, \quad \frac{f_2}{f_1}+\frac{f_2'}{f_1'}=0. \tag{2.27}$$

После подстановки соотношений (2.27) в уравнение (2.26) получим

$$C\varphi=\zeta'. \tag{2.28}$$

Разрешение соотношений (2.27) относительно функций f_1 и f_2 дает

$$f_1^2=D_1\eta+D_2, \quad f_2=-\frac{f_1'}{r_2}.$$

Выберем постоянные интегрирования D_1 и D_2 такими, чтобы $\eta = 0$ при $r = r_1$ и $\eta = 1$ при $r = r_2$. В этом случае $D_1 = r_2^2$ и $D_2 = r_2^2 - r_1^2$, откуда получим

$$f_1^2 = r^2 = \left(r_2^2 - r_1^2\right)\eta + r_1^2,$$
$$\psi(\eta) = f_2(\eta)\,\zeta(\eta) = -\frac{r_2^2 - r_1^2}{2r_2\left[\left(r_2^2 - r_1^2\right)\eta + r_1^2\right]^{1/2}}\zeta(\eta).$$

Исключим давление из уравнений (2.22) и (2.23) при помощи операции перекрестного дифференцирования. Дифференцируя уравнение (2.22) по r, а уравнение (2.23) по x, получим ОДУ 4-го порядка

$$A\left[\zeta^{(4)}(\eta + B) + 2\zeta'''\right] + \zeta'''\zeta - \zeta'\zeta'' = 0, \tag{2.29}$$

где

$$A = \frac{4}{\mathrm{Re}}\left(1 - k^2\right), \quad B = \frac{k^2}{1 - k^2}.$$

Граничные условия для уравнения (2.29) примут вид

$$\zeta(0) = 0, \quad \zeta'(0) = 0, \quad \zeta(1) = \frac{2}{1 - k^2}, \quad \zeta'(1) = 0.$$

Произвольная постоянная C не входит ни в уравнение (2.29), ни в граничные условия. Для ее определения воспользуемся уравнением неразрывности (2.28), согласно которому $C\max\varphi = \max\zeta'$. По определению $\varphi = u/u_m$ и $\max\varphi = 1$, поэтому

$$C = \max\zeta'.$$

После нахождения решения, описываемого функцией $\zeta(\eta)$, постоянная интегрирования определяется исходя из положения максимума функции $\zeta'(\eta)$ на интервале $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

При известной функции $\zeta(\eta)$ распределение скорости находится из следующих соотношений

$$u = v_w C\frac{x}{r_2}\zeta'(\eta), \quad v = -v_w\frac{1 - k^2}{2\left[(1 - k^2)\eta - k^2\right]^{1/2}}\zeta(\eta).$$

Для невязкой жидкости ($\mathrm{Re} \to \infty$) уравнение (2.29) принимает вид

$$\zeta'''\zeta - \zeta'\zeta'' \equiv \left(\zeta\zeta'' - \zeta'^2\right)' = 0. \tag{2.30}$$

Из граничных условий исключается соотношение, выражающее условие прилипания. Краевая задача для уравнения (2.30) имеет точное решение

$$\zeta = \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right), \tag{2.31}$$

где $\eta = (r/r_2)^2$. Решение (2.31) приводит к следующему распределению скорости в кольцевом зазоре

$$u = \frac{\pi}{1-k^2}\frac{x}{r_2}v_w \cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right), \quad v = -\frac{r_2}{r}v_w \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right).$$

Решение невязкой задачи, описывающей течение в цилиндрическом канале со вдувом, соответствует предельному решению при $\mathrm{Re} \to \infty$ и удовлетворяет всем граничным условиям вязкой задачи. В случае течения в коаксиальном зазоре невязкое решение не удовлетворяет граничным условиям на непроницаемой поверхности. Сравнение численного решения полной задачи с учетом вязких членов с невязким решением позволяет сформулировать общие качественные соображения о роли вязкости в течениях, сформированных интенсивным вдувом, и возможности использования модели невязкой жидкости для описания распределения скорости.

Присутствие в уравнении (2.29) малого параметра при старшей производной приводит к вычислительной жесткости задачи. Двухточечная краевая задача решается методом пристрелки. Для реализации алгоритма пристрелки начальных условий в задаче Коши используется метод Ньютона. Трудности, связанные с параметрическим анализом вариантов, преодолеваются при помощи использования метода продолжения решения по параметру, в качестве которого рассматривается число Рейнольдса и геометрический фактор.

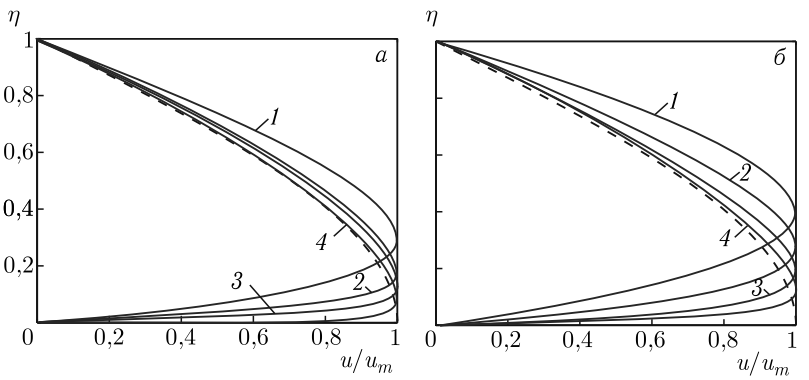


Рис. 2.9. Распределение осевой скорости в кольцевом зазоре при $\mathrm{Re} = 50$ (1); 250 (2); 1000 (3); 7000 (4)

Профили осевой скорости приводятся на рис. 2.9 при $k = 0{,}7$ (фрагмент *а*) и $k = 0{,}9$ (фрагмент *б*) в сравнении с решением невязкой задачи (пунктирная линия). По мере увеличения числа Рейнольдса максимум осевой скорости в приближается к непроницаемой поверхности, вблизи которой развивается зона вязкого течения, подобная пограничному

слою. Влияние вязких эффектов сказывается в пристеночной области, а в остальной области течения они становятся пренебрежимо малыми. При высоких числах Рейнольдса выражена зона сингулярного влияния вязкости (через граничное условие прилипания) и зона вихревого течения невязкой жидкости.

Принимая скорость невязкого течения на поверхности внутреннего цилиндра $v_{w0} = \pi x v_w/(1-k^2)r_2$ за скорость на внешней границе пограничного слоя, течение в пограничном слое описывается классической задачей Фолкнера–Скэн (Falkner–Skan).

Сравнение трения на стенке τ_w, полученного из решения вязкой задачи, с трением τ_{w0}, соответствующем решению задачи пограничного слоя, проводится на рис. 2.10.

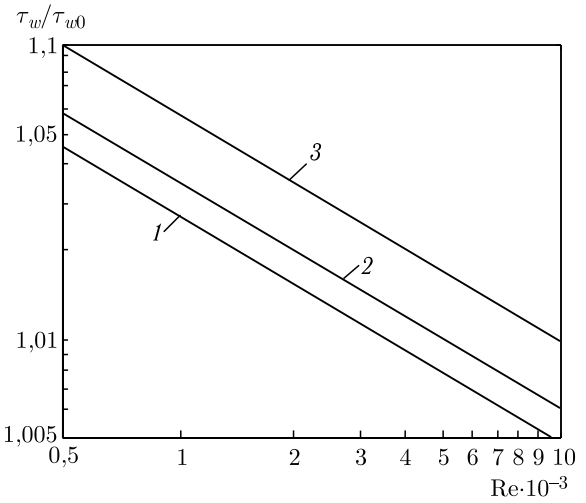


Рис. 2.10. Характер зависимости трения на стенке канала от числа Рейнольдса при $k = 0{,}7$ (1); 0,8 (2); 0,9 (3)

Для расчета внутрикамерных течений находит применение модель эффективно невязкой жидкости. Скорость обтекания поверхности невязким вихревым потоком используется в качестве скорости на внешней границе пограничного слоя при последующем расчете трения и теплообмена.

2.5. Структура течения во вращающемся канале

Рассмотрим влияние закрутки двигателя на течение продуктов сгорания топлива в канале заряда. При этом угловая скорость вращения двигателя полагается постоянной ($\omega = \text{const}$). На горящей поверхности

заряда (при $r = a$) в неподвижной системе координат продукты сгорания имеют ненулевую окружную скорость ($w = \omega a$).

Полагая, что $u = u(x, r)$, $v = v(r)$ и $w = w(r)$, система уравнений, описывающая течение вязкой несжимаемой жидкости в канале, упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \tag{2.32}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \tag{2.33}$$

$$v\frac{dv}{dr} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v^2}{r^2}\right), \tag{2.34}$$

$$v\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{vw}{r} = \nu\left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr} - \frac{w}{r^2}\right). \tag{2.35}$$

На поверхности горения (при $r = a$) задается условие нормального вдува ($u = 0$, $v = -v_w$, $w = \omega a$), а на оси канала (при $r = 0$) используется условие симметрии течения ($\partial u/\partial r = v = w = 0$). Течение считается симметричным относительно плоскости $x = 0$ ($u = \partial v/\partial x = \partial w/\partial x = 0$, зеркальная симметрия).

В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длины выбирается радиус канала a, а для переменных с размерностью скорости — скорость вдува v_w.

Используя допущение $w = w(r)$ и исключая давление из уравнений (2.33) и (2.34) при помощи операции перекрестного дифференцирования, получим уравнение переноса завихренности в плоскости (x, r), которое тождественно совпадает с уравнением переноса завихренности при $w = 0$. Кинематика течения в плоскости (x, r) не зависит от радиального распределения окружной скорости $w = w(r)$, поэтому для осевой и радиальной скоростей используются соотношения, полученные при $w = 0$. При $\mathrm{Re} > 100$ распределения осевой и радиальной скоростей описываются соотношениями

$$u = \pi x \cos\left(\frac{\pi}{2}r^2\right), \quad v = -\frac{1}{r}\sin\left(\frac{\pi}{2}r^2\right). \tag{2.36}$$

Соотношения (2.36) удовлетворяют уравнению неразрывности (2.32). Уравнение (2.33) показывает, что выражение для давления имеет вид $p = p_0 + p_1$, где p_0 — давление при $w = 0$, p_1 — дополнительное слагаемое, обусловленное появлением сил инерции вследствие закрутки потока в канале.

Поскольку движения в плоскости (x, r) и в окружном направлении независимы, а решение (2.36) является хорошим приближением

для скорости в широком диапазоне чисел Рейнольдса, то радиальное распределение окружной скорости $w = w(r)$ получается путем интегрирования уравнения (2.35).

Решение (2.36) имеет место при отсутствии закрутки потока ($w = 0$) и $\mathrm{Re} \to \infty$, что является следствием неизменности граничных условий на горящей поверхности канала во всем диапазоне изменения числа Рейнольдса. Учитывая, что при $w = 0$ задача является регулярной, пограничный слой не образуется, а влияние вязких эффектов оказывается незначительным практически во всем поле течения, рассмотрим уравнение (2.35). При $\mathrm{Re} \to \infty$ уравнение (2.35) примет вид

$$v\frac{dw}{dr} + \frac{vw}{r} = 0. \tag{2.37}$$

Уравнение (2.37) показывает, что распределение окружной скорости не зависит от распределения скорости в радиальном направлении и описывается уравнением

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{w}{r}. \tag{2.38}$$

Интегрирование уравнения (2.38) с использованием граничного условия на стенке канала ($w = w_w$ при $r = 1$) приводит к решению вида

$$w = \frac{w_w}{r}. \tag{2.39}$$

Выражение (2.39) обладает особенностью, поскольку $w \to \infty$ при $r \to 0$. Особенность устраняется при $\mathrm{Re} \neq 0$. Вращение канала приводит к локализации вязких сил в окрестности оси заряда с образованием пограничного слоя в этой зоне.

Рассмотрим решение уравнения (2.35) при конечных числах Рейнольдса. Полагая $W = wr$, из уравнения (2.35) получим

$$\frac{v}{r}\frac{dW}{dr} = \mathrm{Re}^{-1}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dW}{dr}\right). \tag{2.40}$$

Введем новую переменную $\eta = r^2$ и вместо (2.40) запишем уравнение

$$\frac{v}{2\eta^{1/2}}W' - \mathrm{Re}^{-1}W'' = 0. \tag{2.41}$$

Распределение радиальной скорости описывается синусоидальной зависимостью

$$v = -\frac{1}{\eta^{1/2}}\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right).$$

Граничные условия для уравнения (2.41) задаются на стенке и оси симметрии канала ($W = w_w$ при $r = 1$, $W = 0$ при $r = 0$).

Уравнение (2.41) не имеет точного решения, поэтому его интегрирование производится приближенными методами, например, при помощи метода асимптотических разложений. Для упрощения решения задачи воспользуемся подходом [95], основанным на приближенном представлении распределения радиальной скорости в окрестности оси симметрии (при $\eta = 0$). С точностью до членов первого порядка малости имеем

$$v = -\frac{\pi}{2}\eta^{1/2}. \tag{2.42}$$

После подстановки соотношения (2.42) в уравнение (2.41) получим

$$\frac{\pi}{4}W' + \mathrm{Re}^{-1}W'' = 0. \tag{2.43}$$

Уравнение (2.43) является линейным ОДУ второго порядка. Переходя к старым переменным, решение уравнения (2.43) имеет вид

$$w = \frac{w_w}{r}\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}\mathrm{Re}r^2\right)\right]\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi}{4}\mathrm{Re}\right)\right]^{-1}. \tag{2.44}$$

Соотношение (2.44) является справедливым для завихренного течения в плоскости (x, r), когда распределение скорости в канале описывается формулами (2.36).

В случае потенциального течения в плоскости (x, r) распределение осевой и радиальной скоростей описывается формулами

$$u = x, \quad v = -\eta^{1/2}. \tag{2.45}$$

Из сравнения соотношения (2.45) для радиальной скорости с соотношением (2.42) видно, что они различаются постоянным множителем $\pi/2$. При этом соотношение (2.45) является точным решением при $w = 0$, в отличие от приближения (2.42), которое справедливо при $w \neq 0$. Учитывая указанное отличие, запишем решение для окружной скорости

$$w = \frac{w_w}{r}\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\, r^2\right)\right]\left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\right)\right]^{-1}. \tag{2.46}$$

Зависимости (2.44) и (2.46) приводятся на рис. 2.11 для различных чисел Рейнольдса. Расчеты показывают, что обе зависимости дают практически идентичные результаты при $r > 0{,}15$.

Распределение давления находится при помощи подстановки соотношений (2.44) и (2.46) в уравнение (2.34), определяющее дополнительное слагаемое в выражении для давления.

Дополнительный интерес представляет исследование переходных режимов течения в канале при изменении угловой скорости вращения во времени, $\omega = \omega(t)$. При этом кинематика течения в плоскости (x, r)

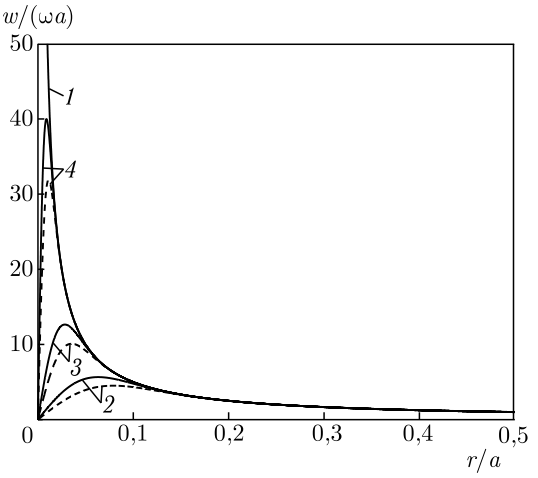


Рис. 2.11. Распределения окружной скорости в поперечном сечении канала при Re = 100 (1); 500 (2); 5000 (3)

остается неизменной, а распределение окружной скорости описывается уравнением

$$\frac{\partial W}{\partial t} + v\frac{\partial W}{\partial r} = \mathrm{Re}^{-1} r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right). \tag{2.47}$$

В начальный момент времени $W = W_0(r)$. На стенке канала $W = W_w(t)$, а на оси симметрии $W = 0$.

Решение уравнения (2.47) ищется при помощи метода разделения переменных:

$$W = T(t)Q(r).$$

Подстановка в уравнение (2.47) и несложные преобразования приводят к уравнению

$$\mathrm{Re}^{-1}Q'' - \frac{v}{2\eta^{1/2}}Q' - \frac{\alpha}{4\eta}Q = 0. \tag{2.48}$$

Постоянная α определяется соотношением

$$\alpha = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t},$$

интегрирование которого приводит к допустимому закону изменения скорости вращения канала во времени

$$T = T_0 \exp(\alpha t).$$

При $\alpha > 0$ скорость вращения двигателя увеличивается, а при $\alpha < 0$ — уменьшается. При $\alpha = 0$ уравнение (2.48) переходит в уравнение (2.43) тогда, когда $T_0 = 1$ и $W = Q$.

Рассмотрим влияние нестационарности процесса на решение вне пограничного слоя, локализованного вблизи оси канала, при $\mathrm{Re} \to \infty$. Уравнение (2.48) запишем в виде

$$Q' = -\frac{\alpha}{2\eta^{1/2}}\frac{Q}{v}.$$

Учитывая распределение радиальной скорости в вихревом течении невязкой жидкости, получим

$$Q = W_w \left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\eta\right)\right]^{\alpha/\pi}. \tag{2.49}$$

Для потенциального течения имеем

$$Q = W_w \exp\left[\alpha\left(\eta^{1/2} - 1\right)\right]. \tag{2.50}$$

Сравнение соотношений (2.49) и (2.50) с соотношением (2.39) показывает существенную зависимость окружной скорости как от модели течения в плоскости (x, r), так и от постоянной переходного процесса α.

С учетом соотношений (2.49) и (2.50) решение задачи вне пограничного слоя записывается в следующем виде:

— вихревое течение

$$w = \frac{w_w}{r}\left[\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}r^2\right)\right]^{\alpha/\pi}\exp(\alpha t). \tag{2.51}$$

— потенциальное течение

$$w = \frac{w_w}{r}\exp\left[\alpha(r-1)\right]\exp(\alpha t). \tag{2.52}$$

Для исследования влияния нестационарного процесса на структуру пограничного слоя, расположенного в окрестности оси симметрии канала, рассмотрим модельное уравнение

$$\mathrm{Re}^{-1}Q'' - \frac{\beta}{2}Q' - \frac{\alpha}{4}Q = 0, \tag{2.53}$$

где $\beta = 1$ для потенциального течения и $\beta = \pi/2$ для вихревого течения. При этом полагается, что $v = \beta\eta^{1/2}$ в окрестности оси симметрии (при $\eta = 0$). Оценка членов уравнения (2.53) показывает, что $Q \ll Q'$ и $Q \ll Q''$ при $\eta = 0$. Задача упрощается и вместо (2.53) имеется уравнение

$$\mathrm{Re}^{-1}Q'' - \lambda(\alpha)\frac{\beta}{2}Q' = 0. \tag{2.54}$$

Функция $\lambda(\alpha)$ находится при помощи сращивания решения уравнения (2.54) с решением, описываемым формулой (2.51) или (2.52). По аналогии с соотношениями (2.44) и (2.46) запишем

$$Q = Q_w \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\beta\mathrm{Re}\, r^2\right)\right] \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda\beta\mathrm{Re}\right)\right]^{-1}. \qquad (2.55)$$

Полное решение задачи получается с учетом соотношения (2.55). При $\alpha = 0$ и $\lambda = 1$ полное решение совпадает с решениями (2.44) и (2.46). Структура пограничного слоя вблизи оси канала в этом случае мало чувствительна к нестационарности процесса, которая не оказывает влияния на распределение давления в рассмотренной постановке задачи.

2.6. Перемещение горящей поверхности канала

Рассмотрим влияние регулярного перемещения горящей поверхности на распределения газодинамических характеристик в канале заряда РДТТ, используя невязкое и вязкое приближения.

2.6.1. Невязкое приближение. Течение невязкой несжимаемой жидкости в плоской щели ($n = 0$) или осесимметричном канале ($n = 1$) с полушириной или радиусом a, изменяющимися в процессе горения топлива по закону $a = a(t)$, описывается в декартовой или цилиндрической системе координат (x, y), где ось x совпадает с плоскостью или осью симметрии, а ось y направлена по нормали к ней. Через стенку канала осуществляется интенсивный вдув продуктов сгорания с постоянной вдоль поверхности горения скоростью $v_w = v_w(t)$.

В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длины используется полуширина или радиус канала $a(t)$, а для переменных с размерностью скорости — скорость вдува $v_w(t)$.

Для нахождения характеристик течения используется модель невязкой несжимаемой жидкости. Основные уравнения записываются в переменных функция тока–вихрь скорости, что позволяет упростить постановку и решение задачи.

Уравнение переноса вихря скорости имеет вид

$$u\frac{\partial\omega}{\partial x} + y^n v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\omega}{y^n}\right) = \alpha\omega, \qquad (2.56)$$

где

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \alpha = \frac{\partial(a/v_w)}{\partial t}.$$

Составляющие скорости связаны с функцией тока при помощи соотношений

$$u = \frac{1}{y^n}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{y^n}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{2.57}$$

В начальный момент времени $t = 0$ полагается, что $a = a_0$, $v_w = v_{w0}$. На плоскости или оси симметрии канала используются граничные условия симметрии течения ($\partial u/\partial y = v = 0$ при $y = 0$), а на стенке канала — граничные условия нормального вдува ($u = 0$, $v = \partial a/\partial t - v_w(t)$ при $y = 1$). Левая граница канала считается зеркальной плоскостью течения ($\partial u/\partial x = \partial v/\partial x = 0$ при $x = 0$).

Следуя работе [9], решение уравнения (2.56) ищется при условии, что вихрь скорости не зависит от времени и $\alpha = \mathrm{const}$, а связь между изменениями размера канала и скорости вдува имеет вид

$$a(t) = v_w(t)(\alpha t + \beta),$$

где β — постоянная, определяемая из начальных условий.

Представим функцию тока в виде $\psi = xf(\eta)$, удовлетворяющем граничным условиям задачи, где $\eta = y^{n+1}$. Подстановка в выражение (2.56) соотношений для скорости и вихря, полученных с учетом (2.57), приводит к уравнению

$$ff''' - f'f'' + (1+n)^{-1}\alpha f'' = 0. \tag{2.58}$$

Граничные условия для уравнения (2.58) на плоскости или оси симметрии канала и на его стенках имеют вид

$$f(0) = f'(1) = 0, \quad f(1) = -(1-\alpha).$$

Переходя к новой зависимой переменной $\varphi(\eta) = f(\eta)/f(1)$ и полагая $\gamma = (1+n)^{-1}\alpha/f(1)$, получим уравнение

$$\varphi\varphi''' - \varphi'\varphi'' + \gamma\varphi'' = 0. \tag{2.59}$$

Граничные условия для уравнения (2.59) примут вид

$$\varphi(0) = \varphi'(1) = 0, \quad \varphi(1) = 1.$$

Приближенное решение уравнения (2.59) ищется при помощи метода, предложенного в работе [272], который основан на малом различии распределений скорости при слабом и сильном вдуве. Полагая искомое решение гладким из физических соображений и учитывая условия симметрии, распределение продольной или осевой скорости представляется в виде ряда

$$\varphi(\eta) = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\eta^3 + a_7\left(2\eta - 3\eta^3 + \eta^7\right) + a_9\left(3\eta - 4\eta^2 + \eta^9\right) + \ldots\,. \tag{2.60}$$

Выражение (2.60) удовлетворяет всем граничным условиям задачи. Одно из дополнительных условий, необходимых для нахождения коэффициентов a_7 и a_9, получается из уравнения (2.59). Полагая $\eta = 1$, получим

$$\varphi(1)\varphi'''(1) + \gamma\varphi''(1) = 0.$$

Другое условие дает интегрирование уравнения (2.59) на интервале изменения координаты $\eta \in [0, 1]$.

Коэффициент a_9 находится из решения квадратного уравнения

$$E^2 a_9^2 - 2Ga_9 - H = 0.$$

Коэффициенты E, G и H имеют вид

$$E = -\frac{2(16+\gamma)}{8+\gamma},$$
$$G = \frac{2(2176 + 408\gamma + 7\gamma^2 - \gamma^3)}{(8+\gamma)^2},$$
$$H = \frac{1}{64}(16895 + 33342\gamma + 7487\gamma^2 + 448\gamma^3).$$

На интервале $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$, наиболее интересном для практических приложений, справедливо соотношение $4G^2 \gg \left|E^2 H\right|$, поэтому хорошим приближением для наименьшего из корней квадратного уравнения является выражение

$$a_9 = -\frac{H}{2G}\left(1 - \frac{E^2 H}{4G^2}\right).$$

Коэффициент a_7 находится из соотношения

$$a_7 = C + Da_9.$$

Коэффициенты C и D вычисляются по формулам

$$C = \frac{1+\gamma}{8(g+\gamma)}, \quad D = -\frac{2(10+\gamma)}{8+\gamma}.$$

При $\gamma = 0$ коэффициенты в приближенном решении принимают значения $a_7 = 0{,}05415$ и $a_9 = -0{,}01541$, что позволяет сравнить приближенное решение в виде (2.60) с точным решением задачи

$$\varphi(\eta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right). \tag{2.61}$$

Производные выражений (2.60) и (2.61) определяют профили продольной скорости в канале заряда и в виде зависимости функции $\Phi = \varphi'/\varphi'(0)$ от координаты η приводятся на рис. 2.12. Кривая 1 соответствует косинусоидальному профилю продольной скорости. В ши-

роком диапазоне изменения параметра γ (линии 2 и 3) распределение скорости в канале изменяется незначительно.

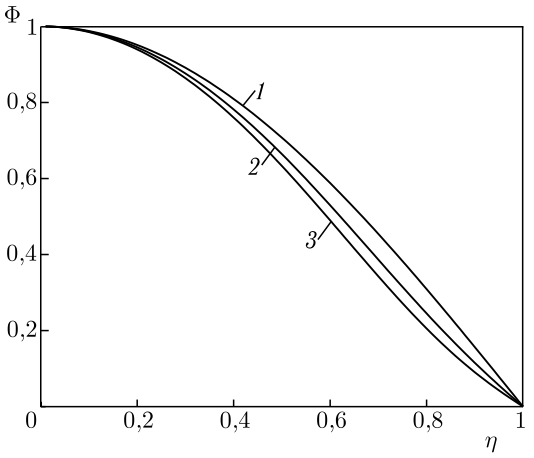


Рис. 2.12. Зависимость $\Phi(\eta)$ при $\gamma = 0{,}05$ (линия 2) и $\gamma = 1$ (линия 3)

Поскольку решение задачи при $\mathrm{Re} \geqslant 100$ сравнительно мало отличается от решения, соответствующего сильному вдуву, имеется возможность исследования коэффициента трения $C_f = 2\tau_w/(\rho U^2)$ в зависимости от изменения γ (под τ_w понимается напряжение трения на горящей поверхности, а под U — средняя по поперечному сечению канала продольная скорость). Определяя относительный коэффициент трения как $C_{fr} = C_f/C_{f0}$, где индекс 0 соответствует коэффициенту трения при $\gamma = 0$, получим, что $C_{fr} = \varphi''(1)/\varphi_0''(1)$, а зависимость относительного коэффициента трения от параметра, характеризующего перемещение горящей поверхности, является линейной и дает $C_{fr} = 1 - 0{,}32\gamma$. Предельное значение коэффициента трения изменяется более чем в 1,5 раза при изменении γ от нуля до единицы.

При малых α имеется простое приближенное решение уравнения (2.58). Несмотря на то, что хотя малый параметр α и входит в граничные условия, он не является коэффициентом при старшей производной, решение остается регулярным при предельном переходе $\alpha \to 0$. Решение задачи, удовлетворяющее граничным условиям, ищется в виде

$$f(\eta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin\left[\frac{\pi}{2}\,(2k+1)\,\eta\right].$$

Ограничиваясь первым членом разложения, из граничных условий получим, что $c_0 = -(1-\alpha)$. При малых α приближенное решение задачи

имеет вид

$$f(\eta) = -(1-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right). \tag{2.62}$$

При $\alpha = 0$ решения (2.61) и (2.62) совпадают. При этом для оценки модуля невязки нетрудно получить, что $\delta \leqslant \pi^2\alpha(1+n)^{-1}/4$, в частности $\delta \leqslant 3$ при $\alpha = 0{,}01$.

Решения, описываемые соотношениями (2.60) и (2.62), показаны на рис. 2.13 пунктирными и сплошными линиями для различных значений безразмерной скорости горения. Решения хорошо согласуются друг с другом, а небольшие отличия имеют место лишь в наполненности профиля скорости в поперечном сечении канала.

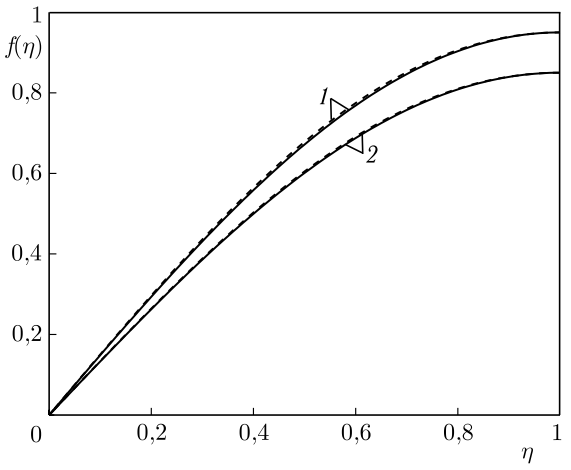


Рис. 2.13. Зависимость $f(\eta)$ при $\alpha = 0{,}05$ (линии 1) и $\alpha = 0{,}15$ (линии 2)

Проведем оценку диапазона скорости горения заряда, в котором применима модель стационарного течения. Поскольку $\alpha = v_s/v_w$, скорость вдува продуктов сгорания в канал составляет $v_w = 3 \div 5$ м/с, а линейная скорость горения топлива $v_s = 0{,}01$ м/с, то $\alpha = (0{,}20 \div 0{,}33)\cdot 10^{-3}$, что позволяет использовать модель стационарного течения. При этом для относительного коэффициента трения имеет место приближенное соотношение $C_{fr} = 1 - 0{,}32(1+n)^{-1}\alpha$. Для быстрогорящих составов $\alpha \geqslant 0{,}1$, и распределения характеристик течения зависят от линейной скорости горения топлива, что следует учитывать при исследовании рабочих процессов в РДТТ.

2.6.2. Учет вязких эффектов. Течение вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе со вдувом, радиус которой изменяется во време-

ни $r = a(t)$, описывается в цилиндрической системе координат (x, r). Ось x совпадает с осью симметрии, а ось r направлена по радиусу.

Уравнения неразрывности и уравнения изменения количества движения имеют вид

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0, \tag{2.63}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right], \tag{2.64}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right)\right]. \tag{2.65}$$

На оси симметрии задаются условия симметрии течения ($\partial u/\partial r = v = 0$ при $r = 0$). Течение считается симметричным относительно левой границы расчетной области ($u = 0$ при $x = 0$). На стенке канала используется граничное условие нормального вдува ($u = 0$, $v = -V$ при $r = a$). Под V понимается абсолютная скорость на стенке канала.

В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длина выбирается радиус канала $a(t)$, зависящий от времени, а для переменных с размерностью скорости — скорость вдува.

Рассмотрим контрольный объем Ω, ограниченный горящей поверхностью заряда и простирающийся в осевом направлении от левой границы расчетной области до сечения, положение которого характеризуется осевой координатой x. Площадь поперечного сечения такого контрольного объема составляет $S_c = \pi a^2$, а площадь его боковой поверхности $S_b(x) = 2\pi a x$.

Средняя осевая скорость в поперечном сечении канала находится при помощи интегрирования распределения скорости:

$$u_m(x,t) = \frac{1}{S_c}\int\limits_{S_c} (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\, dS,$$

где $\boldsymbol{n}$ — вектор единичной нормали к поперечному сечению.

Уравнение сохранения массы для выделенного контрольного объема имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} \rho d\Omega = \rho S_b V_b - \int\limits_{S_c} \rho\,(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n})\, dS,$$

где V_b — скорость жидкости относительно стенки, $d\Omega = S_c dx$. Для несжимаемой жидкости интегрирование от 0 до x приводит к следую-

щему соотношению для средней осевой скорости

$$u_m = \frac{S_b}{S_c} V_b - \frac{x}{S_c} \frac{\partial S_c}{\partial t} = 2\frac{x}{a}\left(V_b - \dot{a}\right) = 2\frac{x}{a} V,$$

где $V = V_b - \dot{a}$ представляет собой абсолютную скорость жидкости (скорость вдува). Полученное соотношение показывает, что средняя осевая скорость изменяется вдоль оси канала по линейной зависимости, что делает возможным построение подобного решения. В задачах внутрикамерной газодинамики относительная скорость подвода жидкости V_b и скорость перемещения горящей поверхности канала $\dot{a}$ не являются независимыми параметрами. Учитывая расходное соотношение на поверхности горения $\rho S_b V_b = \rho_s S_b \dot{a}$, согласно которому масса сгоревшего топлива равняется массе жидкости, инжектируемой в канал, найдем относительную скорость жидкости на стенке

$$V_b = \frac{\rho_s}{\rho}\dot{a},$$

где ρ_s — плотность топлива. Абсолютная скорость жидкости находится из соотношения

$$V = \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right)\dot{a} = A\dot{a},$$

где $A = \rho_s/\rho - 1$ представляет собой коэффициент пропорциональности (injection coefficient). Для условий в камере сгорания ($\rho_s \sim 2000$ кг/м^3 и $\rho \sim 20$ кг/м^3) получим, что $A \sim 100$.

Изменение радиуса канала и скорости перемещения горящей поверхности заряда характеризуется параметром (expansion ratio)

$$\alpha(t) = \frac{a\dot{a}}{\nu},$$

который связан с числом Рейнольдса и коэффициентом массоподвода ($\alpha = \mathrm{Re}_w/A$).

Подобное решение уравнений (2.63)–(2.65) существует при $\alpha = \mathrm{const}$ [216, 336]. Полагая $a\dot{a} = a_0\dot{a}_0$ и производя интегрирование по времени, получим

$$\frac{a}{a_0} = \left(1 + \frac{2\alpha\nu t}{a_0^2}\right)^{1/2}.$$

Учитывая, что $a = \alpha\nu/\dot{a}$, получим закон изменения скорости перемещения горящей поверхности

$$\frac{\dot{a}}{\dot{a}_0} = \left(1 + \frac{2\alpha\nu t}{a_0^2}\right)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{\alpha\nu t}{a_0^2}.$$

Индекс 0 относится к параметрам в начальный момент времени. С физической точки зрения подобное решение соответствует медленному уменьшению скорости перемещения горящей поверхности заряда во времени.

Для упрощения решения задачи вводится функция тока, связанная с составляющими скорости при помощи соотношений

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Представляя функцию тока в виде $\psi = xf(r)$ и вводя новую независимую переменную $\eta = r^2/2$, решение уравнений (2.63)–(2.65) (давление исключается при помощи операции перекрестного дифференцирования) или уравнения переноса вихря скорости (при этом $\omega = -\partial u/\partial r$, учитывая универсальность распределения радиальной скорости вдоль оси канала) сводится к интегрированию ОДУ 4-го порядка

$$2\eta f^{(4)} + (2\alpha\eta + 4)f''' + 4\alpha f'' + \mathrm{Re}\,[ff''' - f'f''] = 0. \tag{2.66}$$

Граничные условия для уравнения (2.66) задаются на оси симметрии канала ($f = 0$, $\eta^{1/2}f'' = 0$ при $\eta = 0$) и на стенке канала ($f' = 0$, $f = 1$ при $\eta = 1/2$).

Для решения уравнения (2.66) используется метод малых возмущений (small-parameter perturbations). Решение задачи ищется в виде [329]

$$f = f_0 + \varepsilon f_1 + O(\varepsilon^2), \tag{2.67}$$

где $\varepsilon = 1/\mathrm{Re}_w$.

Подстановка (2.67) в уравнение (2.66) приводит к следующим уравнениям

$$f_0 f_0''' - f_0' f_0'' = 0, \tag{2.68}$$

$$f_0 f_1''' - f_0' f_1'' - f_0'' f_1' + f_1 f_0''' + 2\eta f_0^{(4)} + (2\alpha\eta + 4)f_0''' + 4\alpha f_0'' = 0. \tag{2.69}$$

Граничные условия для функций f_0 и f_1 имеют такой же вид, как и для исходного уравнения (2.66).

Решение уравнения (2.68) соответствует течению невязкой несжимаемой жидкости в трубе с постоянным радиусом и описывается соотношением

$$f_0 = \sin(\pi\eta).$$

Для интегрирования уравнения (2.69) используется метод переменного параметра (method of variation of parameters), согласно которому решение представляется в виде [122, 266]

$$f_1 = a_1 \sin\zeta + a_2\zeta\cos\zeta + a_3\cos\zeta, \tag{2.70}$$

где $\zeta = \pi\eta$. Коэффициенты разложения находятся из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\alpha}{\pi}\left[\cos\zeta - \zeta\sin\zeta + 3\ln\,\mathrm{tg}(\zeta/2) - \zeta\mathrm{cosec}\,\zeta\right] - \\ &\quad - \sin\zeta - 2\mathrm{cosec}\,\zeta - \zeta\cos\zeta - I_1 + b_1, \\ a_2 &= \frac{\alpha}{\pi}\left[\zeta\mathrm{cosec}\,\zeta - 3\ln\,\mathrm{tg}(\zeta/2)\right] + 2\mathrm{cosec}\,\zeta + I_1 + b_2, \\ a_3 &= \frac{\alpha}{\pi}\left[-\zeta^2\mathrm{cosec}\,\zeta - \zeta\cos\zeta - \sin\zeta + 3I_1\right] + \\ &\quad + \zeta\sin\zeta - 2\zeta\mathrm{cosec}\,\zeta - \cos\zeta - I_2 + b_3. \end{aligned}$$

Постоянные множители имеют вид

$$\begin{aligned} b_1 &= \alpha + 3 + I_1(\pi/2), \\ b_2 &= -\frac{6}{\pi} + \left(\frac{2\alpha}{\pi^2} - 1\right) - \left(1 + \frac{6\alpha}{\pi^2}\right) I_1(\pi/2) + \frac{2}{\pi} I_2(\pi/2), \\ b_3 &= 3. \end{aligned}$$

Интегралы I_1 и I_2 представляются в виде

$$I_1 = \int\limits_0^\zeta \zeta\mathrm{cosec}\,\zeta\, d\zeta, \quad I_2 = \int\limits_0^\zeta \zeta^2\mathrm{cosec}\,\zeta\, d\zeta.$$

Используя разложение в ряд, получим

$$I_1 = \zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right) \frac{1 - 2^{1-2k}}{2k+1} x^{2k+1},$$

$$I_2 = \frac{\zeta^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}\right) \frac{1 - 2^{1-2k}}{k+1} x^{2k+2}.$$

Приближенное решение уравнения (2.66), описываемое соотношением (2.70), достаточно хорошо согласуется с численным решением. Наибольшее рассогласование приближенного и численного решений имеет место около оси симметрии канала, увеличиваясь при уменьшении числа Рейнольдса (влияние вязких эффектов возрастает) и при увеличении скорости расширения стенок трубы (при $\alpha > 20$). При этом ошибка между приближенным и численным решениями, описываю-

щими распределения радиальной скорости, меньше, чем для осевой скорости.

Численное решение уравнения (2.66) получено в работе [216], а его приближенное решение — в работе [266]. В работе [122] применяется метод группового анализа дифференциальных уравнений (Lie-group method) для уменьшения числа независимых переменных и исследования свойств уравнения, описывающего течение вязкой несжимаемой жидкости в канале с горящей поверхностью. Сравнивается точность приближенного решения с численным решением, полученным при помощи метода Рунге–Кутты.

Учитывая представление функции тока, распределения осевой и радиальной скорости находятся из соотношений

$$u = zf', \quad v = -\frac{1}{(2\eta)^{1/2}} f.$$

Учитывая независимость радиальной скорости от осевой координаты, вихрь скорости находится при помощи дифференцирования распределения осевой скорости по радиальной координате:

$$\omega = -x(2\eta)^{1/2} f''.$$

Распределение напряжения трения связывается с распределением вихря скорости $\tau = -\omega/\mathrm{Re}_w$, а коэффициент трения на стенке рассчитывается по формуле

$$C_f = x\varepsilon f''(0{,}5).$$

Радиальный перепад давления находится при помощи интегрирования распределения скорости

$$\Delta p_r = \varepsilon\left[f'(0) - f'\right] - \varepsilon\alpha f - \frac{1}{4\eta} f^2.$$

Перепад давления в осевом направлении описывается соотношением

$$\Delta p_a = \frac{x^2}{2}\left\{2\varepsilon\left[\eta f''' + (\alpha\eta + 1)f'' + \alpha f'\right] + ff'' - f'^2\right\}.$$

Распределения осевой скорости, нормированные на скорость на оси трубы u_m, показаны на рис. 2.14 при $\mathrm{Re} = 100$ (фрагмент *а*) и $\mathrm{Re} = 500$ (фрагмент *б*).

При малых числах Рейнольдса (рис. 2.14*а*) распределение осевой скорости оказывается чувствительным к коэффициенту α, характеризующему степень увеличения поверхности горения (при горении $\alpha > 0$). Увеличение α при фиксированном числе Рейнольдса приводит к увеличению скорости потока на оси канала и ее уменьшению вблизи стенки, в связи с чем профиль скорости становится менее наполненным. В частности, при $\mathrm{Re} = 100$ увеличение α с 20 до 50 приводит

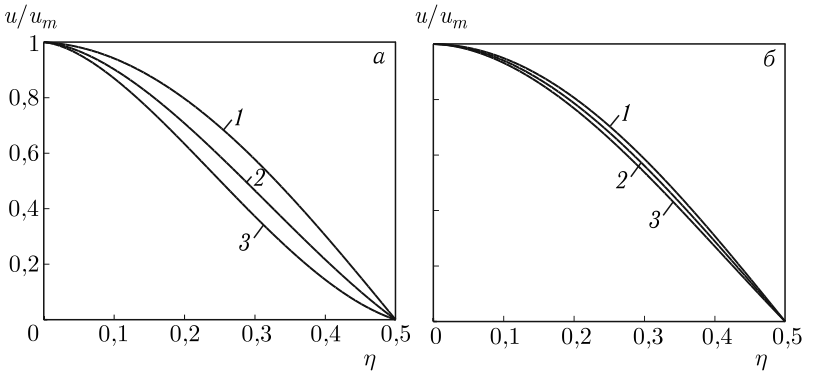


Рис. 2.14. Распределения осевой скорости в поперечном сечении канала при $\alpha = 0$ (1); 25 (2); 50 (3)

к тому, что осевая скорость на оси симметрии увеличивается с 3,46 до 3,91, давая разницу 12 % (при увеличении α до 100 разница достигает 32 %). В случае малых чисел Рейнольдса профиль осевой скорости имеет точку перегиба, которая исчезает при увеличении интенсивности вдува. При увеличении числа Рейнольдса влияние перемещения горящей поверхности заряда на распределение осевой скорости ослабевает (рис. 2.14*б*), и профиль осевой скорости при всех α достаточно хорошо описывается косинусоидальным распределением. При $\mathrm{Re} = 1000$ осевая скорость на оси симметрии возрастает с 3,17 при $\alpha = 20$ до 3,22 при $\alpha = 50$ (различие составляет около 2 %).

Распределения радиальной скорости, нормированные на скорость вдува v_w, показаны на рис. 2.15 при $\mathrm{Re} = 100$ (фрагмент *а*) и $\mathrm{Re} = 500$ (фрагмент *б*).

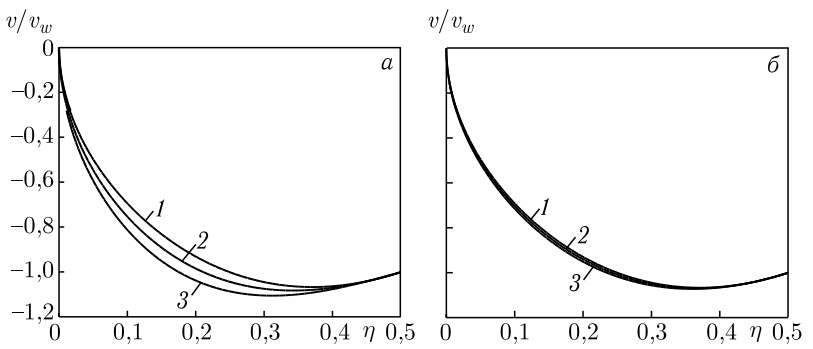


Рис. 2.15. Распределения радиальной скорости в поперечном сечении канала при $\alpha = 0$ (1); 25 (2); 50 (3)

Влияние характерных параметров задачи на распределения радиальной скорости по поперечному сечению остается таким же, как и в случае осевой скорости. Профили радиальной скорости демонстрируют чувствительность к перемещению поверхности горения лишь при малых числах Рейнольдса (рис. 2.15 *а*). Минимум радиальной скорости наблюдается на некотором расстоянии от проницаемой поверхности канала, превышая по абсолютной величине скорость вдува. Увеличение α при фиксированном числе Рейнольдса приводит к уменьшению минимальной радиальной скорости в поперечном сечении и удалению его положения от стенки канала (табл. 2.1).

Таблица 2.1. Минимум радиальной скорости и его положение в зависимости от числа Рейнольдса и параметра массоподвода

α	$\mathrm{Re} = 100$		$\mathrm{Re} = 500$		$\mathrm{Re} = 1000$	
	r	v	r	v	r	v
0	0,8602	−1,0664	0,8602	−1,0668	0,8602	−1,0668
20	0,8246	−1,0848	0,8602	−1,0701	0,8602	−1,0685
50	0,7874	−1,1257	0,8485	−1,0756	0,8485	−1,0710

При высоких числах Рейнольдса влияние перемещения горящей поверхности заряда становится менее заметным (рис. 2.15 *б*), хотя и проявляется в большей степени, чем это имеет место для распределений осевой скорости. Полностью влияние α на профили радиальной скорости исчезает лишь при $\mathrm{Re} > 10^3$.

Следствиями распределений осевой и радиальной скоростей является увеличение кривизны линий тока и скорости разворота потока при увеличении степени расширения стенок канала, характеризуемой параметром α (число Рейнольдса считается постоянным), по сравнению со случаем, когда перемещение горящей поверхности заряда отсутствует. Наибольшее различие линий тока имеет место вблизи оси симметрии канала. Касаясь влияния числа Рейнольдса на картину линий тока при фиксированном параметре α, следует отметить ее более сильную чувствительность к изменению числа Рейнольдса, состоящую в увеличении кривизны линий тока, по сравнению с отсутствием перемещения горящей поверхности заряда (при $\alpha = 0$). С увеличением осевой координаты различие в кривизне линий тока возрастает, что свидетельствует о возрастании влиянии вязких эффектов вниз по потоку.

Радиальные профили перепада давления, показанные на рис. 2.16 при $\mathrm{Re} = 100$ (фрагмент *а*) и $\mathrm{Re} = 500$ (фрагмент *б*), имеют черты, схожие с распределениями радиальной скорости при различных числах Рейнольдса.

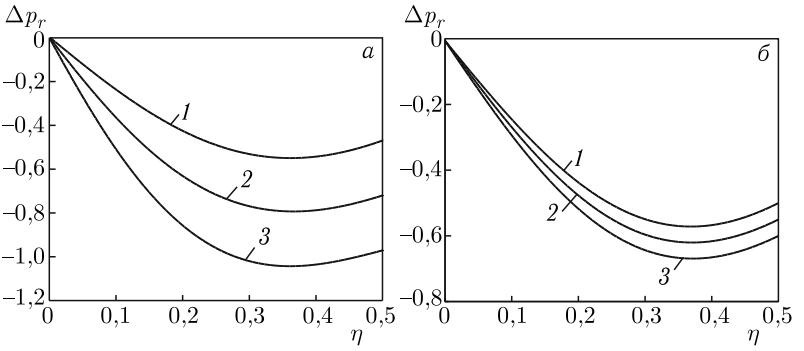


Рис. 2.16. Распределение давления в поперечном сечении канала при $\alpha = 0$ (1); 25 (2); 50 (3)

Увеличение степени расширения стенок канала приводит к увеличению перепада давления в поперечном сечении при возрастании числа Рейнольдса. Минимум перепада давления имеет тенденцию к смещению от стенки в поток при увеличении параметра α, хотя эта тенденция выражена слабее, чем для радиальной скорости (табл. 2.2).

Таблица 2.2. Минимум давления и его положение в зависимости от числа Рейнольдса и параметра массоподвода

α	Re = 100		Re = 1000	
	r	Δp	r	Δp
0	0,8485	–0,5497	0,8602	–0,5671
20	0,8285	–0,7487	0,8602	–0,5872
50	0,8367	–1,0624	0,8602	–0,6175

Распределение перепада давления вдоль оси канала описывается параболической зависимостью и слабо зависит как от числа Рейнольдса, так и степени расширения стенок канала.

Коэффициент поверхностного трения изменяется по линейной зависимости вдоль стенки канала, уменьшаясь при увеличении степени расширения стенок канала и отклоняясь от распределения при $\alpha = 0$ тем сильнее, чем больше α. Такое поведение коэффициента трения связано с уменьшением осевой скорости и ее градиента вблизи стенок канала при увеличении скорости горения. При высоких числах Рейнольдса влияние вязких эффектов становится пренебрежимо малым, и влияние перемещения горящей поверхности заряда на распределение коэффициента трения сказывается в незначительной степени.

Полученные результаты показывают, что при $\alpha/\mathrm{Re}_w \ll 1$ перемещение горящей поверхности канала оказывает слабое влияние на распре-

деления характеристик течения. При $\alpha/\mathrm{Re}_w \to 0$ решение уравнения (2.66) приводит к косинусоидальному распределению осевой скорости, имеющему место в канале с неподвижными стенками. Уточнение решения, учитывающее перемещение горящей поверхности заряда, используется при исследовании горения быстрогорящих составов твердого топлива, акустической неустойчивости рабочих процессов в камере сгорания РДТТ и распределения завихренности в канале заряда.

2.6.3. Численные расчеты. Необходимость постоянного совершенствования топливных составов приводит к изменению их физико-химических свойств. Для быстрогорящих топлив со скоростью горения топлива порядка $30 \div 60$ мм/с требуется учитывать перемещение горящей поверхности заряда и ее влияние на распределение скорости в канале.

Для моделирования процессов с изменяемой геометрией расчетной области необходимо задать закон перемещения поверхности массоподвода и перестраивать внутреннюю структуру расчетной области на каждом шаге по времени. Для цилиндрической формы заряда в каждый момент времени нормаль к поверхности вдува располагается на прямой, соединяющей центр канала и произвольную точку на подвижной границе. Решая задачу в цилиндрических координатах, достаточно на каждом шаге по времени изменять радиальную координату граничной точки. Для сглаживания сеточной структуры вводится коэффициент пропорциональности $k = r/r_0$, равный отношению текущего и начального радиусов канала. Умножение радиальной координаты на данный коэффициент позволяет получить сеточную структуру с равномерным заполнением.

Для зарядов более сложной конфигурации алгоритм усложняется, поскольку требуется расчет нормалей к поверхности канала. Скорость горения топлива считается постоянной и рассчитывается на основе степенной зависимости от давления.

Результаты численного моделирования турбулентного течения вязкой сжимаемой жидкости в круглом цилиндрическом канале с перемещающейся боковой поверхностью (линии 1 и 2, диаметр канала увеличивается вследствие выгорания топлива) приводятся на рис. 2.17 в сравнении с данными, полученными без учета перемещения поверхности массоподвода (значки $\bullet$ и $\circ$). Пунктирная линия соответствует косинусоидальному профилю скорости.

В качестве геометрической модели рассматривается сектор с углом раствора 5° (в окружном направлении используются периодические граничные условия). Относительное удлинение канала составляет 10 (отношение длины канала к его диаметру). В качестве характерных масштабов используется максимальная скорость в поперечном сечении

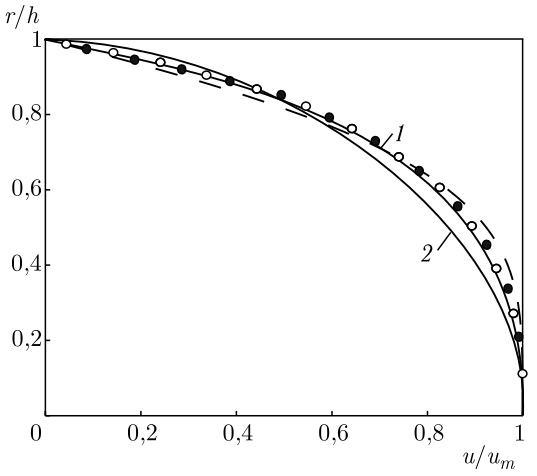


Рис. 2.17. Распределения осевой скорости в поперечном сечении канала при $x/h = 12$ (1, •); 16 (2, ○)

и радиус канала (в случае неподвижной и перемещающейся поверхности горения размеры каналов отличаются). Скорость перемещения горящей поверхности равняется 50 мм/с, что близко к предельной скорости горения зарядов твердого топлива [73]. Скорость вдува продуктов сгорания в канал рассчитывается из условия баланса массы сгоревшего топлива и образующихся при этом продуктов сгорания.

Результаты расчетов, полученных в стационарной и нестационарной постановке, достаточно хорошо согласуются между собой. Различие результатов имеет место, начиная с сечения $x/h \sim 16$, где нестационарные расчеты дают более наполненный профиль осевой скорости. Вместе с тем, при решении задачи в стационарной постановке происходит расслоение решения в зависимости от удаления сечения от левого торца канала, чего не наблюдается в случае использования более сложной модели, учитывающей перемещение горящей поверхности заряда. На достаточно большом удалении от левой границы расчетной области стационарная модель приводит к достаточно большому отклонению от теоретического решения.

2.7. Отклонение от симметричной формы поперечного сечения

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в круглом канале, имеющем малые отклонения формы поперечного сечения от симметричной формы.

Функция тока представляется в виде

$$\psi(x,r) = xF(r). \tag{2.71}$$

Составляющие скорости и завихренность связаны с функцией тока при помощи соотношений

$$u = \frac{xF'}{r}, \quad v = -\frac{F}{r}, \quad \omega = \frac{x(F'/r - F'')}{r}. \tag{2.72}$$

Используя представления (2.71) и (2.72), уравнения неразрывности и изменения количества движения сводятся к следующему ОДУ 4-го порядка [266]

$$r^3F^{(4)} + r^2\mathrm{Re}(F - 2\varepsilon) + \mathrm{Re}(F' - rF'')\left[rF' + 3(F - \varepsilon)\right] = 0, \tag{2.73}$$

где $\mathrm{Re} = av_w/\nu$. Решение ищется в виде разложения в ряд по малому параметру $\varepsilon = 1/\mathrm{Re}$.

Граничные условия для уравнения (2.73) задаются на поверхности вдува и оси канала

$$F(1) = 1, \quad F'(1) = 0, \quad F(0) = 0, \quad \lim_{r\to 0}\frac{F'' - F'/r}{r} = 0.$$

Малые отклонения от осесимметричности течения, вызванные геометрическими или расходными факторами, рассматриваются в работе [110]. Радиус поперечного сечения канала представляется в виде $r = 1 + \phi R(\theta)$, где ϕ — малый параметр, а решение ищется в виде разложения в ряд по степеням ϕ (анализ ограничивается линейным приближением). На основе полученного решения исследуется генерация завихренности около оси симметрии (bath-tub-vortex effect). Для устранения сингулярности решения, возникающей на оси канала при использовании приближения невязкой жидкости, учитываются вязкие эффекты.

Результаты расчетов показывают, что малые отклонения от осесимметричности приводят к большим изменениям завихренности в осевом направлении.

2.8. Течение в зазоре между торцом заряда и днищем двигателя

Рассмотрим течение в зазоре между торцом заряда и днищем двигателя в случае горящего и негорящего торца.

2.8.1. Течение в зазоре между горящим торцом заряда и днищем. Рассмотрим течение невязкой несжимаемой жидкости в поперечном зазоре шириной Δ, образованном горящим торцом заряда и днищем двигателя. Продукты сгорания топлива, поступающие с горящего

торца заряда со скоростью v_w, истекают из камеры в сечении $x = x_a$ через отверстие радиусом r_1 (рис. 2.18).

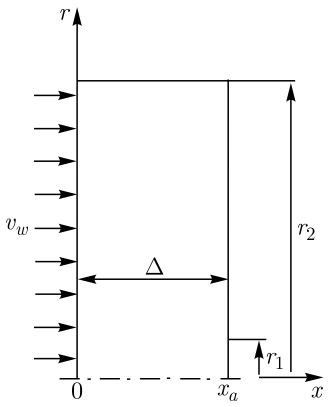


Рис. 2.18. Схема течения в зазоре между горящим торцом заряда и днищем двигателя

Течение в зазоре описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial r} = 0, \tag{2.74}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2.75}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}. \tag{2.76}$$

Граничные условия для уравнений (2.74)–(2.76) задаются на поверхности вдува ($u = v_w$ при $x = 0$), правой границе расчетной области ($u = 0$ при $x = x_a$), оси симметрии ($\partial u/\partial u = 0$ при $r = 0$) и верхней границе ($v = 0$ при $r = R$).

В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длины выбирается ширина щели Δ, а для переменных с размерностью скорости — скорость вдува v_w.

Проведем оценку распределения скорости в зазоре в одномерном приближении. Учитывая условие сохранения массы $2\pi rv = \pi(r_2^2 - r_1^2)$, получим выражение для средней по ширине зазора радиальной скорости:

$$v = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2r}.$$

Решение задачи ищется при помощи метода разделения переменных

$$v = f'(x)g(r), \tag{2.77}$$

где z — неизвестная функция. Для отыскания зависимости $z = z(x)$ рассмотрим уравнение переноса завихренности $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial r$, которое следует из уравнений (2.75) и (2.76) после исключения давления при помощи операции перекрестного дифференцирования

$$u\frac{\partial(\omega/r)}{\partial x} + v\frac{\partial(\omega/r)}{\partial r} = 0. \tag{2.78}$$

Поскольку $\partial u/\partial r = 0$, после подстановки (2.77) вместо уравнения (2.78) получим

$$wf''' + f'f''r\left(\frac{g}{r}\right)' = 0. \tag{2.79}$$

Соотношение (2.79) показывает, что решение задачи существует при $f = 0$ или $g/r = \text{const}$.

Полагая $f = 0$ и учитывая граничные условия задачи, имеем

$$u = f = 1 - x. \tag{2.80}$$

С учетом зависимости (2.80) и выражения (2.77) найдем распределение радиальной скорости:

$$v = -g = -\frac{r_2^2 - r_1^2}{2r}. \tag{2.81}$$

Интегрирование уравнения (2.76) по радиальной координате с учетом зависимости (2.81) и граничных условий позволяет получить распределение давления вдоль зазора:

$$p = p_r - \frac{1}{8}\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r}\right)^2, \tag{2.82}$$

где p_r — давление при $r = r_2$.

Решение, описываемое соотношениями (2.80)–(2.82), соответствует модели потенциального течения ($\omega = 0$).

Точное решение для вихревого течения получается при выполнении условия $g/r = \text{const}$, которое противоречит распределению средней радиальной скорости, полученному из расходных соображений. Это условие точно выполняется для направленного вверх течения между торцом вкладного заряда и передним днищем двигателя. При этом приближенное решение, полученное в предположении $g/r = \text{const}$, с хорошей степенью точности описывает течение в большей части зазора [95].

При $g/r = \text{const}$ вместо уравнения (2.79) имеется уравнение

$$f''' = 0. \tag{2.83}$$

Учитывая граничные условия задачи, получим

$$u = f = 1 - x^2. \tag{2.84}$$

Распределение радиальной скорости имеет вид

$$v = -g = u\frac{r_2^2 - r_1^2}{r}. \tag{2.85}$$

Распределение давления находится при помощи интегрирования уравнения изменения количества движения по радиальной координате,

$$p = p_r - \frac{1}{2}\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r}\right)^2. \tag{2.86}$$

Решения (2.80)–(2.82) и (2.84)–(2.86) описывают распределения скорости и давления в поперечной щели заряда при условии расположения плоскости симметрии щели в сечении $x = x_a$.

2.8.2. Течение в зазоре между негорящим торцом заряда и днищем. Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между негорящим торцом заряда и днищем двигателя высотой h.

Считая, что перенос завихренности осуществляется в основном вдоль оси y, уравнение переноса завихренности имеет вид

$$u\frac{\partial\omega}{\partial x} + v\frac{\partial\omega}{\partial r} = \mathrm{Re}^{-1}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right). \tag{2.87}$$

Продольная и поперечная составляющие скорости связаны при помощи уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2.88}$$

Интегрируя уравнение (2.87) на интервале $x \in [0, 1]$ и учитывая уравнение (2.88), получим

$$\frac{d}{dy}\int_0^1 v\omega dx = \mathrm{Re}^{-1}\left(\left.\frac{\partial\omega}{\partial x}\right|_1 - \left.\frac{\partial\omega}{\partial x}\right|_0\right) + \frac{d^2}{dy^2}\int_0^1 \omega dx. \tag{2.89}$$

Течение имеет периодическую (ячеистую) структуру и состоит из цепочки циркуляционных зон, каждая из которых для простоты анализа полагается квадратной в поперечном сечении. Для каждой из таких ячеек первый член в уравнении (2.89) приближенно записывается в виде

$$\frac{d}{dy}\overline{v}\int_0^1 \omega dx,$$

где $\overline{v}$ — некоторая средняя радиальная скорость на интервале $x \in [0, 1]$. В силу симметрии течения относительно плоскости $x = 1/2$, $\overline{v} = 0$, и первый член в уравнении (2.89) не учитывается (диффузионные процессы доминируют над процессами конвективного переноса). Используя среднюю завихренность

$$\Omega = \int\limits_0^1 \omega dx,$$

вместо (2.89), учитывая симметрию течения, получим

$$\frac{d^2\Omega}{dy^2} = -2\left.\frac{\partial\omega}{\partial x}\right|_1 = S(\Omega, \Omega'). \tag{2.90}$$

Уравнение (2.90) не содержит числа Рейнольдса в качестве параметра. Правая часть $S(\Omega, \Omega')$ учитывает сток завихренности в области течения вследствие трения. Граничные условия для уравнения (2.90) задаются на нижней и верхней границах ($\Omega = \Omega_0$ при $y = 0$, $\Omega = 0$ при $y = h$). Поскольку Ω убывает с ростом y, то $S(\Omega, \Omega') < 0$. Это согласуется с представлением о свойствах пограничного слоя как между двумя ячейками (циркуляционными зонами), так и вблизи твердой стенки при $x = 0$ и $x = 1$. Наиболее сильное изменение завихренности происходит при переходе из ячейки в ячейку через слой смешения. В этой области течения источник $S(\Omega, \Omega')$ отличен от нуля. В то же время $\Omega \approx 0$, поэтому полагается, что $S = S(\Omega')$ или $S = -\lambda\Omega'$. В переделах отдельной ячейки $\Omega' \approx 0$, поэтому $S = -\lambda_0\Omega$. Коэффициенты в этих выражениях определяются в предположении $\lambda = \lambda_0$, позволяющим считать непрерывным распределение $S = S(y)$.

В общем случае циркуляционное течение в отдельной ячейке представляется в форме, удовлетворяющей граничным условиям

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(k\pi x)\cos(k\pi y),$$
$$v = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(k\pi x)\sin(k\pi y).$$

Предполагая, что перенос завихренности происходит преимущественно вдоль оси y, ослабляя граничные условия при $x = 0$ и $x = 1$ (откажемся от условий прилипания) и ограничиваясь первыми членами разложений, получим

$$u = -\frac{1}{\pi}\sin\pi x\cos\pi y, \quad v = \frac{1}{\pi}\cos\pi x\sin\pi y.$$

Завихренность находится из соотношения

$$\Omega = -\frac{4}{\pi}\sin \pi y.$$

С учетом гипотезы непрерывности касательных напряжений, а также функции $\omega'(x, y) = \partial\omega/\partial x$ на границе слоя смешения между ячейками следует, что

$$\frac{d^2\Omega}{dy^2} = -\pi^2 \frac{d\Omega}{dy}. \tag{2.91}$$

Поскольку $\exp(-\pi^2) \ll 1$, то приближенное решение уравнения (2.91) имеет вид

$$\Omega = \Omega_0 \exp\left(-\pi^2 \frac{y}{h}\right). \tag{2.92}$$

Справедливость зависимости (2.92) оценивается при помощи сравнения с данными вычислительного или физического эксперимента. В результате обобщения данных вычислительного эксперимента при $\mathrm{Re} \gg 100$ в работе [65] получена зависимость

$$\Omega = \Omega_0 \exp\left(-10 \frac{y}{h}\right),$$

которая хорошо согласуется теоретической зависимостью (2.92). При этом среднеинтегральная завихренность (интенсивность течения) довольно быстро убывает с ростом координаты y. Темп снижения интенсивности возрастает с увеличением высоты манжетной полости.

Полученные формулы находят применение для расчета характеристик течения в зазорах и щелях переменной толщины при соответствующем учете зависимости их ширины от радиальной координаты.

2.9. Течение в канале с произвольным профилем скорости во входном сечении канала

Рассматривается вихревое течение невязкой несжимаемой жидкости в круглом осесимметричном канале радиусом a и длиной L с произвольным профилем скорости во входном сечении, описываемом функцией $u_0(r)$ [261, 262].

Профиль скорости во входном сечении канала имеет вид:

— однородный профиль скорости

$$u_0(r) = u_c = \mathrm{const}; \tag{2.93}$$

— косинусоидальный профиль скорости

$$u_0(r) = u_c \cos\left(\frac{\pi}{2} r^2\right); \tag{2.94}$$

— ламинарный профиль скорости

$$u_0(r) = u_c\,(1 - r^m)\,; \tag{2.95}$$

— турбулентный профиль скорости

$$u_0(r) = u_c\,(1 - r)^{1/m}\,. \tag{2.96}$$

Здесь $u_c = u(0,0)$. Скорость вдува считается постоянной вдоль поверхности канала, $v_w = -v(x,a)$.

Для описания течения используется уравнение переноса вихря скорости $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}$, которое имеет следующий вид

$$\nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\Omega}) = 0. \tag{2.97}$$

На массоподводящей поверхности используются условия нормального вдува, а на оси симметрии канала — условия симметрии

$$u(0,r) = u_0(r), \quad u(x,1) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad v(x,1) = -1.$$

Составляющие скорости связаны с функцией тока при помощи соотношений

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Вихрь скорости представляется в виде

$$\Omega = rF(\psi).$$

Из уравнения (2.97) следует, что

$$\Omega = C^2 r\psi.$$

Уравнение для функции тока имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + C^2 r^2\psi = 0. \tag{2.98}$$

Граничные условия для функции тока принимают вид

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(x,r)}{\partial x} = 0, \tag{2.99}$$

$$\frac{\partial\psi(x,1)}{\partial r} = 0, \tag{2.100}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(x,1)}{\partial x} = 1, \tag{2.101}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(0,r)}{\partial x} = u_0(r). \tag{2.102}$$

Раскрытие неопределенности в граничном условии (2.99) при помощи правила Лопиталя приводит к соотношениям

$$\frac{\partial\psi(x,0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial^2\psi(x,0)}{\partial x\,\partial r}=0.$$

Профиль скорости во входном сечении канала описывается соотношениями (2.93)–(2.96).

Уравнение (2.98) является линейным, и его решение находится при помощи метода разделения переменных:

$$\psi(x,r)=(\alpha x+\beta)\left[A\cos\left(\frac{1}{2}Cr^2\right)+B\sin\left(\frac{1}{2}Cr^2\right)\right].$$

Граничное условие (2.99) показывает, что $A=0$. Без потери общности можно положить $B=1$, что дает $C=C_n=(2n+1)\pi$, где $n=0,1,2,\ldots$. Решение уравнения (2.98) представляется в виде ряда

$$\psi(x,r)=\sum_0^\infty(\alpha_n x+\beta_n)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi r^2\right].$$

Применяя граничное условие (2.101), получим, что

$$\sum_0^\infty(-1)^n\alpha_n=1.$$

При этом $\alpha_0=1$ и $\alpha_n=0$ для $\forall\ n\neq 0$. Из граничного условия (2.102) следует, что

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi(0,r)}{\partial x}=\pi\sum_0^\infty(2n+1)\beta_n\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi r^2\right]=u_0(r).$$

Постоянная β_n находится на основе идей суперпозиции и ортогональности:

$$\beta_n=\frac{4}{\pi(2n+1)}\int_0^1 u_0(r)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi r^2\right]r\,dr.$$

Составляющие скорости, завихренность и давление находятся при помощи дифференцирования распределения функции тока.

Косинусоидальный профиль скорости, соответствующий вихревому течению невязкой несжимаемой жидкости, получается из приведенного решения при $\beta_n=0$ для любого n, $\alpha_0=1$ и $\alpha_n=0$ для любого $n\neq 0$.

Результаты численного моделирования и их сравнение с точным решением показывают, что влияние вдува газа с левого торца канала оказывает сравнительно слабое влияние на характеристики потока в достаточно длинном канале [261, 262].

2.10. Течение в канале с нестационарным вдувом

Рассмотрим ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в прямой круглой трубе радиусом a с нестационарным вдувом [255, 333].

В цилиндрической системе координат (x, r) течение описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial ur}{\partial x} + \frac{\partial vr}{\partial r} = 0, \tag{2.103}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u, \tag{2.104}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2}\right). \tag{2.105}$$

Оператор Гамильтона в цилиндрических координатах имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

На стенке трубы выставляются граничные условия вдува по нормали к границе $u(t, x, a) = 0$, $v(t, x, a) = v_w(t, x)$, а на оси трубы — условие симметрии течения $v(t, x, 0) = 0$.

Составляющие скорости представляются в виде [327]

$$u(t, x, r) = u_0(r) + \frac{\partial\phi(t, x, r)}{\partial x}, \quad v(t, x, r) = \frac{\partial\phi(t, x, r)}{\partial r}.$$

Существование и единственность функции $\phi(x, r, t)$ показывается в работе [333]. Из граничных условий для скорости при $r = 0$ и $r = a$ следует, что

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}(t, x, 0) = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial r}(t, x, a) = 0.$$

Граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ дают

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(t, 0, r) = f(t, r), \quad \frac{\partial\phi}{\partial x}(t, l, r) = g(t, r),$$

где $f(t, r)$ и $g(t, r)$ — функции, описывающие распределения осевой скорости во входном и выходном сечениях.

Из уравнения неразрывности (2.103) следует, что функция $\phi(x, r, t)$ является гармонической и удовлетворяет уравнению потенциала

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0. \tag{2.106}$$

Исключая давление из уравнений изменения количества движения (2.104) и (2.105), получим уравнение

$$\left(\frac{d^2u_0}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{du_0}{dr}\right)\frac{\partial\phi}{\partial r} = \nu\frac{d}{dr}\left(\nabla^2 u_0\right). \qquad (2.107)$$

Уравнению (2.107) удовлетворяет функция вида

$$u_0(r) = \lambda(a^2 - r^2),$$

где λ — постоянная.

Распределение давления в канале находится при помощи интегрирования уравнения изменения количества движения.

Решение уравнения потенциала (2.106) при заданных граничных условиях дается в виде разложения в ряд [327]

$$\phi(t,x,r) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(t)\cosh(a_n z) + B_n(t)\sinh(a_n x)\right]J_0(a_n r).$$

Коэффициенты A_n и B_n находятся из следующих соотношений

$$A_n(t) = \frac{2}{a^2[J_1(a_n a)]^2}\int\limits_0^a rf(t,r)J_0(a_n r)dr,$$

$$B_n(t) = \frac{2}{a^2[J_1(a_n a)]^2}\int\limits_0^a rg(t,r)J_0(a_n r)dr.$$

При этом выполняется условие $J_0(a_n a) = 0$ при $n = 1, 2, \ldots$. Функции J_0 и J_1 представляют собой функции Бесселя 1-го и 2-го порядка.

Выражение для нахождения потенциала, его производных по осевой и радиальной координатам, а также скорости вдува принимают вид

$$\phi(t,x,r) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\left\{\frac{B_n(t)\cosh(a_n x) - A_n(t)\cosh[a_n(l-x)]}{\sinh(a_n l)}\right\}J_0(a_n r),$$

$$\phi_x(t,x,r) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{A_n(t)\sinh[a_n(l-x)] + B_n(t)\sinh(a_n x)}{\sinh(a_n l)}\right\}J_0(a_n r),$$

$$\phi_r(t,x,r) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{A_n(t)\cosh[a_n(l-x)] - B_n(t)\cosh(a_n x)}{\sinh(a_n l)}\right\}J_1(a_n r),$$

$$\phi_r(t,x,a) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{A_n(t)\cosh[a_n(l-x)] - B_n(t)\cosh(a_n x)}{\sinh(a_n l)}\right\}J_1(a_n a).$$

Предположим, что течение в канале имеет параболический профиль скорости во входном сечении ($x = 0$), соответствующий течению Пуа-

зейля, и осциллирующий параболический профиль скорости в выходном сечении ($x = l$), который описывается соотношением

$$\phi_x = U\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\sin(\omega t),$$

где U — скорость на линии симметрии канала, ω — угловая частота. В этом случае коэффициенты A_n и B_n принимают следующие значения:

$$A_n = 0, \quad B_n = \frac{8U\sin(\omega t)}{(a_n a)^3 J_1(a_n a)}.$$

Распределения осевой скорости $u(t,x) \sim \phi_x(t,x,r)$ и радиальной скорости $v(t,x) = \phi_r(t,x,r)$ находятся из соотношений

$$\phi_x(t,x,r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8U}{(aa_n)^3}\frac{\sinh(a_n x)}{\sinh(a_n l)}\frac{J_0(a_n r)}{J_1(a_n a)}\sin(\omega t),$$

$$\phi_r(t,x,r) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8U}{(aa_n)^3}\frac{\cosh(a_n x)}{\sinh(a_n l)}\frac{J_1(a_n r)}{J_1(a_n a)}\sin(\omega t).$$

В работе [333] исследуется также случай, соответствующий профилю Пуазейля во входном сечении и пульсирующему профилю скорости полностью развитого течения в выходном сечении. Находится распределение скорости вдува, удовлетворяющее заданным граничным условиям.

Осесимметричное течение в трубе с круглой формой поперечного сечения в плане и скоростью вдува, зависящей от времени, моделируется в работе [313]. Скорость вдува изменяется по закону

$$v_w = -v_{rw}(x) - \phi(x)\left(1 - \cos\omega t\right).$$

Поле акустического давления описывается при помощи неоднородного волнового уравнения.

Стационарное решение задачи, полученное в работе [376] (скорость вдува полагается постоянной вдоль образующей цилиндра), показывает, что возмущения, вносимые около левого закрытого торца цилиндра, приводят к формированию в канале плоского акустического поля. Взаимодействие акустического поля с вдуваемой жидкостью приводит к генерации завихренности вдоль боковой поверхности канала. Между боковой поверхностью канала и линией, находящейся на удалении порядка $1/2$ радиуса канала от оси симметрии, имеют место больши́е радиальные градиенты осевой скорости [308].

Нестационарные расчеты, проведенные в работе [313], показывают, что уровень завихренности обратно пропорционален числу Маха, что согласуется с теоретическими данными [202, 376] и численными расчетами [236]. Вклад осевой производной радиальной скорости имеет

порядок $O(\mathrm{M}^3)$, что меньше, чем радиальная производная осевой скорости. Для простоты в работе [313] рассматривается случай возмущения скорости вдува по косинусоидальному закону $\phi(x) = A\cos(\pi x/2)$. Распространение фронта завихренности и его форма определяются диффузионными процессами в радиальном направлении и конвективным переносом в осевом направлении. Диффузия завихренности по направлению к оси трубы приводит к более быстрому перемещению фронта по сравнению с невязким течением.

Перенос завихренности в нестационарном течении, развивающемся в плоском канале с закрытым левым торцом при малых числах Маха, исследуется в работе [226]. Используется параболизованная формулировка задачи. На скорость вдува накладываются внешние нестационарные возмущения с различными волновыми числами. Скорость вдува представляется в виде

$$v_w(x,t) = -1 - \varepsilon\varphi_w(x)\,(1 - \cos\omega t)\,,$$

где $\varepsilon = 0{,}4$. Функция $\varphi_w(x)$ учитывает изменение скорости вдува в продольном направлении и выбирается в виде

$$\varphi_w(x) = \cos\beta_n x,$$

где $\beta_n = (n + 1/2)\pi$ (собственные числа системы), $n = 0, 1, 2, \ldots$. В работе [226] исследуется случай $\omega = \pi/2$ (резонанс).

В случае нестационарного вдува на стенке возникают градиенты скорости и температуры (хотя сами возмущения скорости и температуры являются малыми), которые сносятся вниз по потоку и взаимодействуют с основным течением в канале. Несмотря на то, что безразмерная акустическая продольная скорость имеет порядок $O(1)$, а возмущения температуры — порядок $O(\mathrm{M})$ при $\mathrm{M} \ll 1$, поперечные градиенты скорости и температуры имеют порядок $O(1/\mathrm{M})$ и $O(1)$.

Моделирование течений в каналах с нестационарным вдувом имеют значения для исследования устойчивости рабочих процессов в РДТТ.

2.11. Сжимаемые течения в каналах со вдувом

Для описания течений невязкой несжимаемой жидкости в канале со вдувом используются различные подходы [169, 318, 367, 369], приводящие к косинусоидальному распределению продольной скорости. Турбулентность достаточно слабо сказывается на структуре среднего течения, за исключением области, примыкающей к выходному сечению канала, где имеет место существенное ускорение потока, а профиль средней скорости становится более наполненным [365]. Вместе с тем, на достаточно большом удалении от левого торца канала возрастает

влияние сжимаемости, которая также приводит к наполнению профиля продольной скорости [188, 331], в связи с чем трудно оценить относительный вклад турбулентности и сжимаемости в изменение структуры потока.

Перемещение горящей поверхности заряда оказывает сравнительное слабое влияние на распределения скорости и давления, за исключением быстрогорящих составов [258]. Влияние нестационарности процесса описывается в терминах числа Рейнольдса и параметра, характеризующего вдув со стенок и перемещение горящей поверхности заряда.

Исследования [105, 106, 113, 116, 246, 293] подтвердили наличие ламинарного участка течения, который может занимать всю область течения (в зависимости от числа Рейнольдса). Наполнение профиля продольной скорости связывается как с влиянием турбулентности, так и влиянием сжимаемости.

Течение невязкой сжимаемой жидкости в трубе с равномерным вдувом рассматривается в работе [252]. Точное решение задачи получается при помощи разложения в ряд по степеням M_w^2 (Rayleigh–Janzen expansion), где M_w — число Маха на стенке канала. Решение, полученное в невязком приближении, достаточно хорошо согласуется с результатами расчетов с использованием двухпараметрической модели турбулентности. Использование модели несжимаемой жидкости в длинных каналах приводит к заниженным трению на стенке и скорости на оси симметрии канала примерно на 13 % в звуковой точке.

Необходимость получения точного решения, описывающего течение сжимаемой жидкости, обусловлено как требованиями вычислительной практики (контроль данных вычислительного эксперимента), так и тем, что малые изменения продольной скорости, вызванные колебаниями плотности в канале заряда, приводят к существенным изменениям амплитуды колебаний в камере сгорания [338].

Рассмотрим течение невязкой сжимаемой жидкости в канале с круглой формой поперечного сечения в плане радиусом a и длиной L. Скорость вдува v_w считается постоянной вдоль горящей поверхности заряда. Малыми изменениями давления вдоль поверхности вдува, имеющими порядок M_w^2, пренебрегается.

В качестве характерных параметров для переменных с размерностью длины принимается радиус трубы a, а для переменных с размерностью скорости — скорость звука в начале координат a_0. Помимо числа Рейнольдса, характерным параметром задачи является число Маха $\mathrm{M}_w = v_w/a_0$ (на практике число Маха достигает 0,02).

Функция тока вводится таким образом, чтобы удовлетворить уравнению неразрывности для сжимаемой жидкости

$$u = \frac{1}{\rho r}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Завихренность связывается с распределением скорости и функцией тока при помощи соотношения

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\rho r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right).$$

Уравнение изменения количества движения записывается в следующем виде

$$\frac{1}{2}\rho\nabla\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right) - \rho\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}\right) = -\frac{1}{\gamma}\nabla p. \tag{2.108}$$

Используя определение функции тока, вместо (2.108) получим следующее уравнение (momentum equation):

$$\frac{1}{2}\rho\nabla\left[\frac{1}{(\rho r)^2}\nabla\psi\cdot\nabla\psi\right] + \frac{\Omega}{r}\nabla\psi = -\frac{1}{\gamma}\nabla p. \tag{2.109}$$

Применение операции ротор к уравнению (2.108) приводит к уравнению вида (vorticity transport equation)

$$\nabla\times\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega}\right) = -\frac{1}{\gamma\rho^2}\nabla\rho\times\nabla p. \tag{2.110}$$

Перенос завихренности описывается уравнением (vorticity equation)

$$\nabla^2\psi + \rho r\Omega = \frac{1}{\rho}\nabla\rho\cdot\nabla\psi. \tag{2.111}$$

Уравнения (2.109)–(2.111) дополняются условием изэнтропичности течения

$$p = \rho^\gamma. \tag{2.112}$$

Оператор Гамильтона в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Граничные условия задаются на стенке канала ($u = 0$, $v = -\mathrm{M}_w$ при $r = 1$), оси симметрии ($v = 0$ при $r = 0$) и левом торце канала ($u = 0$ при $x = 0$).

Составляющие скорости, функция тока и завихренность ищутся в виде разложения в ряд по нечетным степеням числа Маха:

$$
\begin{aligned}
u(x,r) =& \mathrm{M}_w u_0 + \mathrm{M}_w^3 u_1 + O(\mathrm{M}_w^5),\\
v(x,r) =& \mathrm{M}_w v_0 + \mathrm{M}_w^3 v_1 + O(\mathrm{M}_w^5),\\
\psi(x,r) =& \mathrm{M}_w \psi_0 + \mathrm{M}_w^3 \psi_1 + O(\mathrm{M}_w^5),\\
\Omega(x,r) =& \mathrm{M}_w \Omega_0 + \mathrm{M}_w^3 \Omega_1 + O(\mathrm{M}_w^5).
\end{aligned}
$$

Плотность, давление и температура ищутся в виде разложения в ряд по четным степеням числа Маха:

$$
\begin{aligned}
\rho(x,r) =& 1 + \mathrm{M}_w^2 \rho_1 + \mathrm{M}_w^4 \rho_2 + O(\mathrm{M}_w^6),\\
p(x,r) =& 1 + \mathrm{M}_w^2 p_1 + \mathrm{M}_w^4 p_2 + O(\mathrm{M}_w^6),\\
T(x,r) =& 1 + \mathrm{M}_w^2 T_1 + \mathrm{M}_w^4 T_2 + O(\mathrm{M}_w^6).
\end{aligned}
$$

Использование указанных разложений приводит к следующим уравнениям:

$$\nabla \times (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}_0) = 0, \tag{2.113}$$

$$\nabla^2 \psi_0 + r\Omega_0 = 0. \tag{2.114}$$

Составляющие скорости связаны с функцией тока при помощи соотношений

$$u_0 = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_0}{\partial r}, \quad v_0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi_0}{\partial x}.$$

При известном распределении функции тока и завихренности давление находится из уравнения

$$\nabla p_1 = -\gamma \left[\frac{1}{2} \nabla \left(\frac{\nabla \psi_0 \cdot \nabla \psi_0}{r^2} \right) + \frac{1}{r} \Omega_0 \nabla \psi_0 \right]. \tag{2.115}$$

Условие изэнтропичности (2.112) позволяет найти распределение плотности

$$\rho_1 = \frac{p_1}{\gamma}. \tag{2.116}$$

Граничные условия для уравнений (2.113)–(2.116) имеют такой же вид, что и для исходных уравнений.

Для нахождения вторых членов разложения имеются следующие уравнения:

$$\nabla \times (\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{\Omega}_1) + \nabla \times (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{\Omega}_0) = -\frac{1}{\gamma}\left(\nabla\rho_1 \times \nabla p_1\right), \tag{2.117}$$

$$\nabla^2\psi_1 + r\Omega_1 = \nabla\rho_1\nabla\psi_0 - r\rho_1\Omega_0. \tag{2.118}$$

Составляющие скорости связаны с функцией тока при помощи соотношений

$$u_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \frac{\rho_1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}, \quad v_1 = \frac{\rho_1}{r}\frac{\partial\psi_0}{\partial x} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}.$$

Давление находится из уравнения

$$\nabla p_2 = -\gamma\left[\frac{1}{2}\rho_1\nabla\left(\frac{\nabla\psi_0\cdot\nabla\psi_0}{r^2}\right) + \nabla\left(\frac{\nabla\psi_0\cdot\nabla\psi_1 - \rho_1\nabla\psi_0\cdot\nabla\psi_0}{r^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\left(\Omega_0\nabla\psi_1 + \Omega_1\nabla\psi_0\right)\right]. \tag{2.119}$$

Плотность рассчитывается по формуле

$$\rho_2 = \frac{2\gamma p_2 + (1-\gamma)p_1^2}{2\gamma^2}. \tag{2.120}$$

Для решения уравнений (2.117)–(2.120) используются однородные граничные условия.

Простая проверка показывает, что решением уравнения (2.113) является функция $\Omega_0 = c^2 r\psi_0$, подстановка которой в уравнение (2.114) дает уравнение

$$\nabla^2\psi_0 + c^2r^2\psi_0 = 0 \tag{2.121}$$

Решая уравнение (2.121), получим, что $c = \pi$, а распределение функции тока описывается соотношением

$$\psi_0 = x\sin\eta, \tag{2.122}$$

где $\eta = \pi r^2/2$. Распределение завихренности имеет вид

$$\Omega_0 = \pi^2 rx\sin\eta. \tag{2.123}$$

Используя решение (2.122), найдем распределение скорости

$$u_0 = \pi x\cos\eta; \tag{2.124}$$

$$v_0 = -\frac{1}{r}\sin\eta. \tag{2.125}$$

Давление находится из уравнения (2.115), которое с учетом соотношения (2.122) дает

$$p_1 = -\frac{1}{2}\gamma\left(\pi^2 x^2 + \frac{1}{r^2}\sin^2\eta\right). \tag{2.126}$$

Подстановка (2.126) в соотношение (2.116) дает распределение плотности

$$\rho_1 = -\frac{1}{2}\left(\pi^2 x^2 + \frac{1}{r^2}\sin^2\eta\right). \tag{2.127}$$

Используя уравнение состояния идеального газа, найдем распределение температуры

$$T_1 = \frac{1}{8}\pi(\gamma-1)\left\{-4\pi x^2 + \frac{1}{\eta}\left[\cos(2\eta) - 1\right]\right\}. \tag{2.128}$$

Из соотношения (2.116) следует, что правая часть уравнения (2.117) обращается в ноль, поэтому

$$\nabla\times(\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\Omega}_1) + \nabla\times(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{\Omega}_0) = 0. \tag{2.129}$$

Используя найденное распределение скорости, а также распределение завихренности, вместо (2.129) получим уравнение

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\left(\frac{\Omega_1}{r} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial r}\right) + \frac{\partial\Omega_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_0}{\partial r} = \\ = -\pi^2 r\left[\psi_0\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial\rho_1}{\partial r} - \frac{\partial\rho_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right) + \frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right]. \tag{2.130}$$

Решение уравнения (2.130) представляется в виде суммы решения несжимаемой задачи и некоторой поправки на сжимаемость течения

$$\Omega_1 = \pi^2 r\psi_1 + \Omega_{1c}. \tag{2.131}$$

Подстановка соотношения (2.131) в уравнение (2.130) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\left(\frac{\Omega_{1c}}{r} - \frac{\partial\Omega_{1c}}{\partial r}\right) + \frac{\partial\Omega_{1c}}{\partial x}\frac{\partial\psi_0}{\partial r} = \pi^2 r\psi_0\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\frac{\partial\rho_1}{\partial r} - \frac{\partial\rho_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right). \tag{2.132}$$

Уравнение (2.132) допускает интегрирование в конечном виде:

$$\Omega_{1c} = -\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{r}\left(\pi^2 r^2 x^2 + \sin^2\eta\right)\psi_0 + rG(\psi_0), \tag{2.133}$$

где $G(\psi_0)$ — произвольная функция, выбираемая таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям задачи.

Подстановка соотношения (2.133) в выражение (2.131) позволяет преобразовать уравнение (2.118). Используя представление функции тока в виде $\psi_1 = F(x,\eta)\sin\eta$, получим

$$\frac{\eta}{2\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \eta^2\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + 2\eta^2 \operatorname{ctg}\eta\frac{\partial F}{\partial \eta} = Q(x,\eta). \tag{2.134}$$

Правая часть уравнения (2.134) имеет вид

$$Q(x,\eta) = \frac{1}{8}\pi\eta x\left[-4 + \frac{\sin(2\eta)}{\eta} - 4\cos(2\eta) + 8\pi\eta x^2 - \frac{8}{\pi^3}\frac{\eta G(x\sin\eta)}{x\sin\eta}\right].$$

Функция G выбирается в виде

$$G = \pi^3\left(A_0 + A_1 x\sin\eta + A_2 x^2\sin^2\eta + \pi A_3 x^3\sin^3\eta\right).$$

Решение уравнения (2.134) ищется в виде [252]

$$F(x,\eta) = x^3 f(\eta) + x g(\eta). \tag{2.135}$$

Подстановка соотношения (2.135) в (2.134) показывает, что $A_0 = A_2 = 0$ и приводит к следующим ОДУ 2-го порядка:

$$\eta^2 f'' + 2\eta^2\operatorname{ctg}\eta f' = \frac{1}{2}\pi^2\eta^2\left[2 - A_3 + A_3\cos(2\eta)\right], \tag{2.136}$$

$$\eta^2 g'' + 2\eta^2\operatorname{ctg}\eta g' = \pi\eta\left\{\frac{\sin(2\eta)}{8\eta} - \frac{1}{2}\left[\cos(2\eta) + 1\right] - A_1\eta - \frac{3f}{\pi^2}\right\}. \tag{2.137}$$

Уравнения (2.136) и (2.137) являются линейными ОДУ и допускают интегрирование в конечном виде [252]. Постоянные множители определяются из граничных условий.

Не приводя точного решения уравнения (2.134), а также решений уравнений (2.136) и (2.137), ограничимся рассмотрением его приближенного решения, получение которого связано с пренебрежением некоторыми членами, являющимися малыми при больши́х x. Приближенное решение уравнения (2.134) для функции тока имеет вид

$$\psi_1 = -\frac{1}{4}\psi_0\left\{\pi^2 x^2\left[1 + \frac{1}{3}\cos(2\eta)\right] + 2\right\}. \tag{2.138}$$

Влияние сжимаемости приводит к увеличению кривизны линий тока по сравнению с течением несжимаемой жидкости, что является достаточно важным в исследовании устойчивости течений в канале с проницаемыми стенками [217]. С увеличением числа Маха, характеризующего вдув жидкости, кривизна линий тока также увеличивается. В этом плане влияние сжимаемости сказывается аналогично увеличению вязкости рабочего тела [258]. Перемещение горящей поверхности заряда оказывает обратное влияние на поток, уменьшая кривизну линий тока.

Распределения составляющих скорости описываются соотношениями

$$u_1 = \frac{1}{4}u_0\left\{\pi^2x^2\left[\frac{5}{3}-\cos(2\eta)\right]+\frac{1}{r^2}\left[1-\cos(2\eta)\right]-2\right\}, \qquad (2.139)$$

$$v_1 = -\frac{1}{4}v_0\left\{\pi^2x^2\left[1+\cos(2\eta)\right]-\frac{1}{r^2}\left[1-\cos(2\eta)\right]+2\right\}. \qquad (2.140)$$

Дифференцируя распределение скорости, описываемое соотношениями (2.139) и (2.140), найдем распределение завихренности

$$\Omega_1 = \frac{1}{6}\psi_0 r^{-3}\Big\{\eta\left[3\pi-2(6+\pi^2x^2)\eta\right]- \\ -3\pi\eta\left(1+6\pi x^2\eta\right)\cos(2\eta)+3\pi\sin(2\eta)\Big\}. \qquad (2.141)$$

Полученные соотношения для функции тока и завихренности позволяют найти правую часть уравнения (2.119), и распределение давления

$$\frac{p_2}{\gamma} = -\frac{1}{24}\pi^4x^4+\frac{1}{8}\pi^2x^2\left(4-\pi\eta\right)+\frac{1}{32}\pi\eta\left(8-3\pi\eta\right). \qquad (2.142)$$

Распределение температуры следует из уравнения состояния идеального газа:

$$T_2 = -\frac{1}{6}\pi^2(\gamma-1)\Big\{\pi^2x^4+\frac{3}{8}\pi\eta^{-1}x^2\left[1-\cos(2\eta)-\frac{8}{\pi}\eta+2\eta^2\right]+ \\ +\frac{3}{128}\eta^{-2}\left[3-4\cos(2\eta)+\cos(4\eta)-\frac{64}{\pi}\eta^3+24\eta^4\right]\Big\}. \qquad (2.143)$$

Распределения осевой и радиальной скорости в сравнении с распределениями, имеющими место в течении невязкой несжимаемой жидкости, приводятся на рис. 2.19 при $\mathrm{M}_w = 0{,}01$. Выбор числа Маха, характеризующего вдув жидкости, объясняется тем, что в работах [105, 106] используется значение $\mathrm{M}_w = 0{,}0095$, а полученные результаты сравниваются с данными измерений [331]. Течения при низких числах Маха $\mathrm{M}_w = 0{,}0018 \div 0{,}0036$ исследуются в работе [187].

Влияние сжимаемости приводит к тому, что профили осевой и радиальной скоростей становятся более пологими в поперечном сечении. Различие профилей осевой скорости, соответствующих течениям несжимаемой и сжимаемой жидкости, возрастает по мере удаления от левой границы канала и становится заметным при $x/a \sim 15$ (до сечения $x/L_s \sim 0{,}4$ различие составляет менее 2 %). При $x/a \sim 25$ различие в максимальном значении осевой скорости достигает 10 %.

Сравнение распределений осевой скорости в сечении $x = L_s$, имеющих место в течениях несжимаемой (линия 1) и сжимаемой (линия 2) жидкости, с распределением осевой скорости в турбулентном потоке

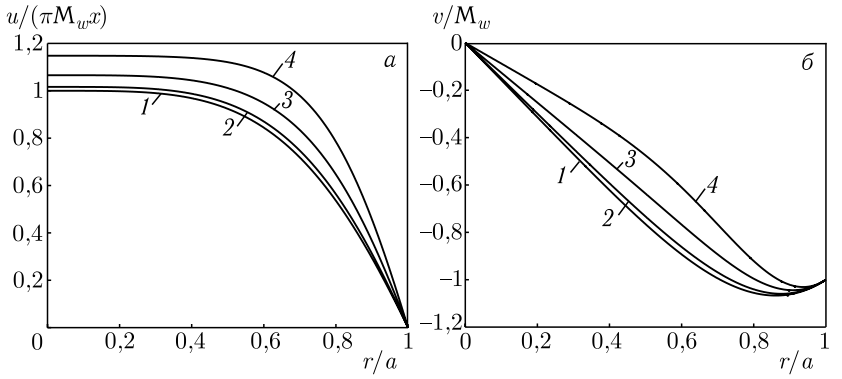


Рис. 2.19. Распределения осевой (*а*) и радиальной (*б*) скоростей при $x/a = 10$ (2); 20 (3); 30 (4). Линии 1 соответствуют модели несжимаемой жидкости

(значки ○ и ●) показывает рис. 2.20. Теоретический профиль достаточно хорошо согласуется с численными расчетами на основе k–ω модели турбулентности (значки ○) и модели турбулентности Спаларта–Аллмареса (значки ●). Небольшие отличия имеют место около оси симметрии канала, где расчеты на основе теоретического решения приводят к несколько меньшим значениям осевой скорости.

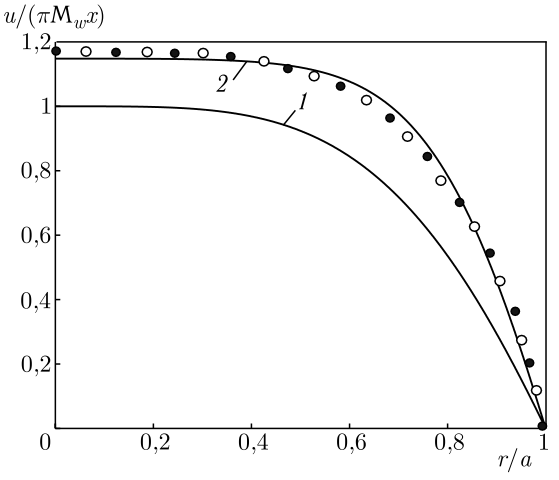


Рис. 2.20. Сравнение профилей осевой скорости в течениях несжимаемой и сжимаемой жидкости

Завихренность обращается в ноль на оси канала и имеет максимум на стенке. Максимум завихренности описывается соотношением

$$\Omega_w = \mathrm{M}_w \pi^2 x \left(1 + \frac{2}{3}\mathrm{M}_w^2 \pi^2 x^2\right). \tag{2.144}$$

Распределения давления и температуры вдоль оси симметрии канала описываются соотношениями

$$p_c = 1 - \frac{1}{2}\pi^2 \gamma \mathrm{M}_w^2 x^2 \left(1 - \mathrm{M}_w^2\right) - \frac{1}{24}\pi^4 \gamma \mathrm{M}_w^4 x^4, \tag{2.145}$$

$$T_c = 1 - \frac{1}{2}\pi^2 (\gamma - 1) \mathrm{M}_w^2 x^2 \left(1 - \mathrm{M}_w^2\right) - \frac{1}{6}\pi^4 (\gamma - 1) \mathrm{M}_w^4 x^4. \tag{2.146}$$

Формулы (2.145) и (2.146) используются для оценки максимального числа Маха в поперечном сечении канала. Скорость на оси канала изменяется по закону

$$u_c = \pi \mathrm{M}_w x + \frac{1}{6}\pi^3 \mathrm{M}_w^3 x^3 - \frac{1}{2}\pi \mathrm{M}_w^3 x. \tag{2.147}$$

Число Маха на оси симметрии канала $\mathrm{M}_c = u_c / T_c^{1/2}$ находится с использованием соотношений (2.146) и (2.147), описывающих распределение температуры и осевой скорости. Распределение числа Маха вдоль оси канала описывается соотношением

$$\mathrm{M}_c = \pi \mathrm{M}_w x \frac{2 + \mathrm{M}_w^2 \left(\pi^2 x^2 / 3 - 1\right)}{\left[4 - 2\mathrm{M}_2^2 \pi^2 x^2 (\gamma - 1)\right]^{1/2}}. \tag{2.148}$$

Пренебрегая в соотношении (2.147) последним слагаемым и полагая $u_c / T_c^{1/2} = 1$, найдем продольную координату $x = \chi$, при которой скорость на оси трубы достигает скорости звука. Первое приближение дает

$$\pi \mathrm{M}_w \chi = \left[1 - \frac{1}{2}\pi^2 (\gamma - 1) \mathrm{M}_w^2 \chi^2\right]^{1/2} + O(\mathrm{M}_w^3 \chi^3),$$

откуда получим

$$\chi_0 = \frac{1}{\pi \mathrm{M}_w} \left(\frac{2}{1 + \gamma}\right)^{1/2} + O(\mathrm{M}_w^2 \chi^3).$$

Учитывая в разложении члены более высокого порядка малости, получим следующее приближение:

$$\pi \mathrm{M}_w \chi + \frac{1}{6}\pi^3 \mathrm{M}_w^3 \chi^3 = \left[1 - \frac{1}{2}\pi^2 (\gamma - 1) \mathrm{M}_w^2 \chi^2\right]^{1/2} + O(\mathrm{M}_w^4 \chi^4),$$

из которого найдем

$$\chi_1 = \frac{1}{\pi \mathrm{M}_w}\left(2^{1/3}\varphi - 4 + 2^{2/3}\frac{5-3\gamma}{\varphi}\right)^{1/2} + O(\mathrm{M}_w\chi^4),$$

где

$$\varphi^3 = 18\gamma - 5 + 3\left[6\gamma\left(5+\gamma+\gamma^2\right) - 25\right]^{1/2}.$$

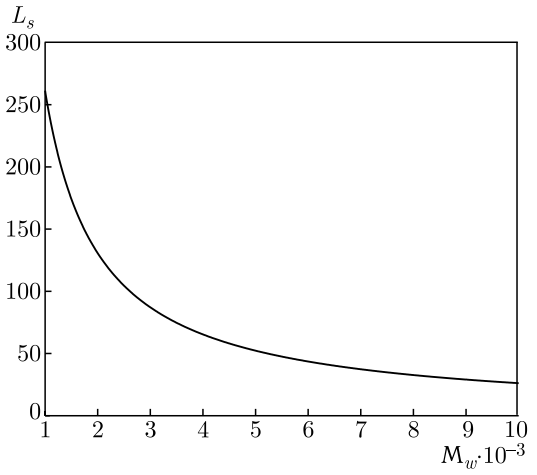


Рис. 2.21. Зависимость длины канала, на которой достигается скорость звука, от числа Маха

Зависимость длины канала L_s, на которой достигается скорость звука, от числа Маха, характеризующего вдув жидкости, приводится на рис. 2.21 (при $\gamma = 1{,}4$). Ниже кривой находится область, в которой скорость течения является дозвуковой. При этом имеет место лишь слабая зависимость длины L_s от типа газа, характеризуемого отношением удельных теплоемкостей.

Оценка осевой координаты, в которой достигается звуковая скорость, с учетом членов более высокого порядка малости приводится в работе [252] (в целом их учет не приводит к существенному уточнению результатов расчетов).

Интересно сравнить распределения числа Маха, давления и температуры вдоль оси канала, описываемые соотношениями (2.148), (2.145) и (2.146), с распределениями, полученными на основе одномерной теории [214]. Принимая в качестве осевой координаты расстояние от левого торца канала x, нормированное на длину L_s, на которой достигается звуковая скорость, для расчета числа Маха, имеем следующее

соотношение:

$$\mathrm{M} = \left[\frac{1-(1-X^2)^{1/2}}{1+\gamma(1-X^2)^{1/2}}\right]^{1/2},$$

$$p = (1+\gamma)^{-1}\left[1+\gamma\left(1-X^2\right)^{1/2}\right],$$

$$T = (1+\gamma)^{1/\gamma-1}\left[1+\gamma\left(1-X^2\right)^{1/2}\right]^{1-1/\gamma}.$$

Здесь $X = x/L_s$. Соотношения для давления и температуры получаются при известном распределении числа Маха вдоль оси канала по известным газодинамическим формулам.

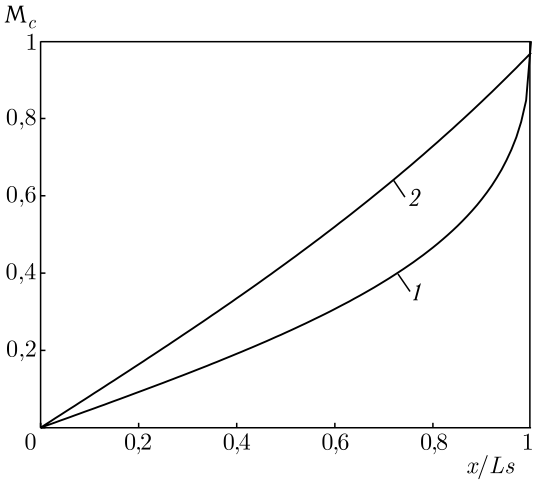


Рис. 2.22. Распределение числа Маха вдоль оси канала

Распределение числа Маха вдоль оси канала (линия 2) в сравнении с расчетом на основе одномерного приближения (линия 1) показано на рис. 2.22. Приближенное решение, описываемое соотношением (2.148), дает практически линейную зависимость числа Маха от осевой координаты и достаточно хорошо воспроизводит распределение числа Маха на всем интервале изменения осевой координаты, за исключением участка, примыкающего к выходному сечению канала [252]. Вместе с тем одномерная теория дает существенно заниженные числа Маха. Максимальное различие результатов, основанных на точном решении задачи и одномерной теории, достигает 25 %. Следует также отметить довольно низкую чувствительность распределения числа Маха вдоль оси канала к изменению числа Маха, характеризующего вдув жидкости.

Результаты расчетов, приведенные на рис. 2.23 (рабочая среда — воздух) показывают, что в сжимаемом течении (линии 3) давление и температура вдоль оси канала падают быстрее, чем в течении несжимаемой жидкости (линии 1). Максимальное различие результатов достигается в выходном сечении канала. Расчеты по одномерной теории [214] (линии 2) достаточно хорошо согласуются с точным решением задачи лишь при $x/L_s < 0{,}8$.

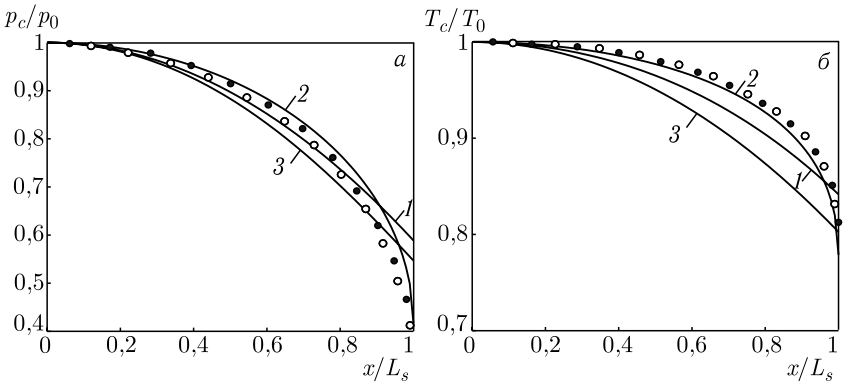


Рис. 2.23. Распределения давления (*а*) и температуры (*б*) вдоль оси канала

Точное решение задачи, описывающее распределения давления и температуры вдоль оси симметрии, хорошо согласуется с численными расчетами на основе k–ω модели турбулентности (значки ○) и модели турбулентности Спаларта–Аллмареса (значки •) [252]. Расчеты на основе k–ω модели согласуются с точным решением на протяжении большей части канала, а малые отличия точного и численного решений имеют место лишь при приближении к выходному сечению. По сравнению с точным решением, данные, полученные при помощи модели Спаларта–Аллмареса, дают несколько завышенную температуру в той части канала, которая примыкает к левой границе расчетной области. В выходном сечении канала обе модели приводят к одинаковым результатам, совпадающим с расчетами по одномерной теории. Кривые, описывающие распределение температуры в турбулентном потоке, лежат несколько выше кривой, полученной в соответствии с точным решением задачи, но хорошо согласуются в распределением температуры, соответствующим течению невязкой несжимаемой жидкости. Различие результатов объясняется влиянием вязких эффектов, которые не учитываются в точном решении.

Согласно одномерной теории [214], критический перепад давления (при $x = L_s$) составляет

$$p_s^- = \frac{1}{\gamma + 1}.$$

Вместе с тем одномерная теория сопла дает

$$p_s^+ = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\gamma/(1-\gamma)}.$$

При этом $p_s^- = 0{,}417$ и $p_s^+ = 0{,}528$ для воздуха ($\gamma = 1,4$). Расчеты с использованием точного решения задачи дают промежуточное значение ($p_s = 0{,}501$ при $\gamma = 1{,}4$).

Для сравнения максимальных значений осевой скорости, имеющих место в несжимаемом и сжимаемом течении идеальной жидкости на оси симметрии канала, используется отношение (fluid compression)

$$\theta_c = \frac{u(x,0)}{u_0(x,0)} = \frac{u(x,0)}{\pi \mathrm{M}_w x}.$$

Распределение осевой скорости, описываемое соотношением (2.147), показывает, что

$$\theta_c = 1 + \frac{1}{6}\pi^2 \mathrm{M}_w^2 x^2 - \frac{1}{2}\mathrm{M}_w^2.$$

Зависимость отношения максимумов осевой скорости в несжимаемом и сжимаемом течениях показана на рис. 2.24 вплоть до звуковой точки при различных числах Маха, характеризующих вдув жидкости. Пунктирные линии показывают соответствующие зависимости вниз по потоку от звуковой точки. Положение звуковой точки зависит от рода газа, характеризуемого отношением удельных теплоемкостей (при увеличении γ звуковая точка смещается вверх по потоку). Теоретическое решение показывает, что $\theta_c = 1{,}112$ при $x = L_s$, в то время как численные расчеты дают $\theta_c = 1{,}133$ [252].

Следует отметить, что малые отличия в осевой скорости на оси канала оказывают существенное влияние на распространение возмущений в расчетной области [252]. В частности, увеличение скорости на 10% на оси канала вследствие изменения плотности рабочего тела приводит к увеличению амплитуды колебаний на 70% [338].

Для характеристики изменения максимума осевой скорости используется отношение, вычисленное по скорости в звуковой точке

$$\theta_s = \frac{u_s}{u_0(L_s, 0)},$$

где $u_s = u_c(L_s)$. При уменьшении числа Маха, характеризующего вдув жидкости, и фиксированном роде рабочего газа относительное измене-

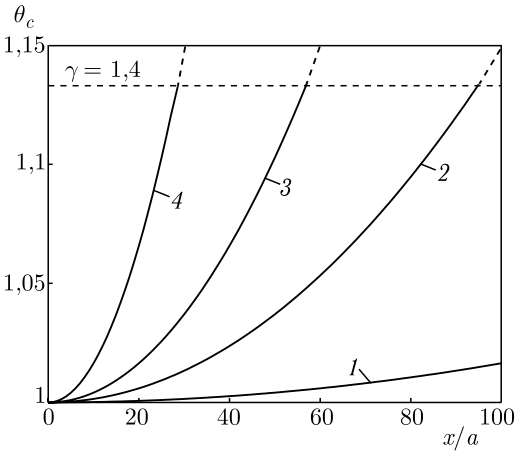


Рис. 2.24. Влияние числа Маха на максимум осевой скорости при $M_w = 0{,}001$ (1); 0,003 (2); 0,005 (3); 0,01 (4)

ние осевой скорости в несжимаемом и сжимаемом течениях становится постоянным (рис. 2.25). При этом зависимость параметра θ_s от рода рабочего тела оказывается слабой, например, $\theta_s \to 1{,}130$ при $\gamma = 1$ и $\theta_s \to 1{,}103$ при $\gamma = 1{,}4$.

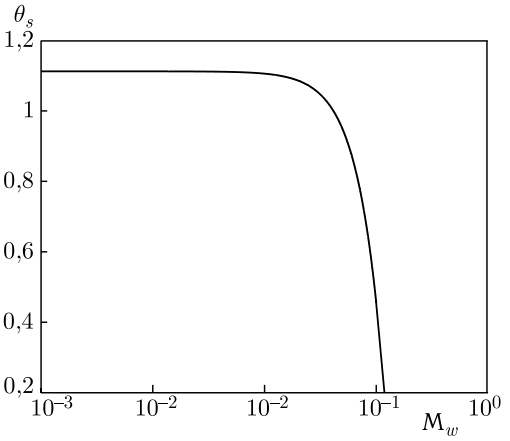


Рис. 2.25. Зависимость относительного изменения осевой скорости от числа Маха (при $\gamma = 1{,}4$)

Точное решение задачи позволяет оценить возможность использования модели несжимаемой жидкости для описания течений в канале со вдувом.

Предположим, что расхождение между решениями, соответствующими моделям несжимаемой и сжимаемой жидкости, не превосходит $\varepsilon = 4\,\%$ на протяжении $q = L/4$ камеры сгорания. Полагая, что $\theta_c = 1 + \varepsilon$, получим

$$x_\varepsilon = \frac{1}{\pi \mathrm{M}_w}(6\varepsilon)^{1/2}.$$

При $x_\varepsilon a < (1-q)L$ необходимо учитывать сжимаемость. Полагая $L = 50$, найдем минимальное число Маха, характеризующее вдув жидкости, при котором полученное условие выполняется:

$$\mathrm{M}_w^* = \frac{1}{\pi(1-q)L}(6\varepsilon)^{1/2} = 0{,}0042.$$

При $\mathrm{M}_w > \mathrm{M}_w^*$ пренебрежение сжимаемостью приводит к тому, что погрешность порядка $4\,\%$ возникает на протяжении более чем $1/4$ камеры сгорания. При меньших числа Маха модель несжимаемой жидкости обеспечивает приемлемую точность. Такие оценки подтверждаются приближенным решением, полученным в работе [227].

В целом влияние сжимаемости следует учитывать при моделировании течений в достаточно длинных каналах, а также при исследовании акустических процессов в камере сгорания двигателя.

2.12. Теплообмен в канале с проницаемыми стенками

В отличие от распределения скорости (динамическая задача), исследованию температурного поля (тепловая задача) в канале с проницаемыми стенками и его зависимости от характерных параметров задачи уделяется существенно меньшее внимание.

В работе [199] исследуется влияние температурной зависимости вязкости на структуру течения в канале с симметричным вдувом или отсосом. Теоретической основой полученных результатов, относящихся к устойчивости течения в канале со вдувом или отсосом, служит решение [120]. Температура считается функцией только поперечной координаты. Температурное поле при течении в канале с симметричным и несимметричным вдувом исследуется в работе [211]. В указанных работах рассматриваются достаточно малые перепады температуры, что приводит к сравнительно слабой зависимости температурного поля от параметров задачи.

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости с постоянными теплофизическими свойствами (изменение температуры полагается достаточно малым) в плоском канале с симметричным вдувом (случай А) и несимметричным вдувом (случай Б). В случае А (рис. 2.26 *а*) ширина канала составляет $2h$, а скорость вдува v_w считается постоянной по

длине канала. Температура рабочего тела на нижней стенке канала равняется T_1, а на верхней стенке — T_2 (считается, что $T_1 < T_2$). В случае Б (рис. 2.26 *б*) ширина канала составляет h, а вдув производится с нижней стенки канала со скоростью v_w. Верхняя стенка канала считается непроницаемой. На нижней проницаемой стенке канала задается температура рабочего тела T_1, а на верхней непроницаемой стенке — тепловой поток q_w. В обоих случаях используется декартовая система координат с началом координат, расположенным на плоскости симметрии (случай А) или на нижней стенке канала (случай Б).

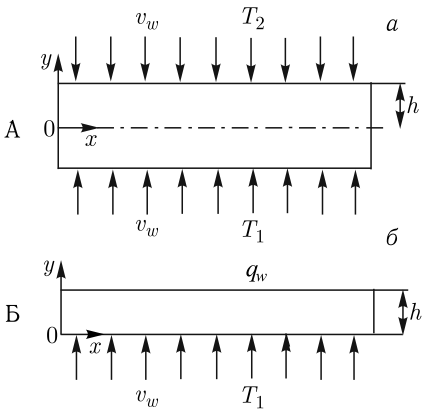


Рис. 2.26. Геометрия канала в случаях А (*а*) и Б (*б*)

Выделим контрольный объем, ограниченный в продольном направлении сечениями канала S_1 и S_2, расположенными на расстоянии $\Delta x = x_2 - x_1$ друг от друга, а в поперечном направлении — участками A_1 и A_2 поверхности горения.

Средняя скорость (bulk velocity) и средняя температура (bulk temperature) в некотором поперечном сечении канала с площадью S вычисляются по формулам

$$U_b = \frac{1}{S}\int\limits_S v(x,y)dS, \quad T_b = \frac{1}{S}\int\limits_S v(x,y)T(x,y)dS.$$

В случае А (двухсторонний вдув) интегрирование проводится от $-h$ до $+h$, а в случае Б (односторонний вдув) — от 0 до h.

Из условия сохранения массы следует, что

$$\frac{dU_b}{dx} = \frac{v_w(x)}{h}.$$

Полагая скорость вдува на горящей поверхности заряда постоянной ($v_w = \text{const}$), для средней скорости получим соотношение

$$U_b = v_w \frac{x}{h}. \tag{2.149}$$

Соотношение для расчета средней температуры получается из 1-го закона термодинамики, примененного к выделенному контрольному объему.

В случае А условие сохранения удельной энтальпии приводит к следующему соотношению:

$$\int\limits_{S_2} \rho v h dS = \int\limits_{S_1} \rho v h dS + \rho v_w \left(h_1 A_1 + h_2 A_2\right).$$

Учитывая, что $h = c_p T$, имеем

$$\frac{d\left(U_b T_b\right)}{dx} = \frac{v_w}{h} \frac{T_1 + T_2}{2}.$$

Подставляя (2.149) в приведенное соотношение и интегрируя от 0 до x, получим, что средняя температура не зависит от продольной координаты и равняется средней температуре стенок канала

$$T_b = \frac{T_1 + T_2}{2}. \tag{2.150}$$

В случае Б в балансовом соотношении учитывается тепловой поток к непроницаемой стенке канала, а тепловым потоком через проницаемую стенку канала пренебрегается, поэтому

$$\int\limits_{S_2} \rho v h dS = \int\limits_{S_1} \rho v h dS + \rho v_w h_1 A_1 + q_w A_2.$$

Для совершенного идеального газа имеем

$$\frac{d\left(U_b T_b\right)}{dx} = \frac{v_w}{h} T_1 + \frac{q_w}{c_p \rho h}.$$

Подставляя (2.149) и интегрируя от 0 до x, получим, что

$$T_b = T_1 + T_f, \tag{2.151}$$

где $T_f = q_w/(c_p \rho v_w)$.

Уравнение неразрывности, уравнения изменения количества движения и уравнение изменения температуры имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{2.152}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{2.153}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{2.154}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right). \tag{2.155}$$

В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длины выбирается размер канала h, а для переменных с размерностью скорости — средняя скорость U_b. Безразмерная температура определяется как $\theta = (T - T_1)/(T_b - T_1)$. Из (2.150) и (2.151) следует, что $T_b - T_1 \sim T_2 - T_1$ в случае А и $T_b - T_1 \sim T_f$ в случае Б.

Характерными параметрами задачи являются число Рейнольдса $\mathrm{Re} = v_w h/\nu$ и число Пекле $\mathrm{Pe} = v_w h/a$ (или $\mathrm{Pe} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}$).

Считается, что продольная скорость изменяется по длине канала по линейной зависимости, а поперечная скорость и температура являются функциями только поперечной координаты:

$$u = xf(y), \quad v = -f(y), \quad T = \theta(y).$$

Для несжимаемой жидкости динамическая и тепловая задачи решаются последовательно. Распределение скорости находится из решения нелинейного ОДУ 4-го порядка

$$f^{(4)} + \mathrm{Re}\,(ff''' - f'f'') = 0. \tag{2.156}$$

Распределение температуры находится при известном распределении скорости из решения ОДУ 2-го порядка

$$\theta'' + \mathrm{Pe} f\theta' = 0. \tag{2.157}$$

В качестве граничных условий для уравнений (2.156) и (2.157) задаются условия нормального вдува, температура стенки или тепловой поток:

— случай А

$$f(-1) = -1, \quad f(1) = 1, \quad f'(-1) = f'(1) = 0, \quad \theta(-1) = 0, \quad \theta(1) = 1;$$

— случай Б

$$f(0) = -1, \quad f(1) = 0, \quad f'(0) = f'(1) = 0, \quad \theta(0) = 0, \quad \theta'(1) = \mathrm{Pe}.$$

Отличия в граничных условиях для случаев А и Б состоят в их формулировке на верхней проницаемой или непроницаемой стенках канала. В случае А на верхней стенке канала задается условие нормального вдува для поперечной скорости и температура стенки, а в случае Б — условие непротекания для поперечной скорости и тепловой поток.

В предельных случаях слабого ($\mathrm{Re} \to 0$) и сильного ($\mathrm{Re} \to \infty$) вдува уравнение (2.156) имеет точные решения.

При $\mathrm{Re} \to 0$ конвективными слагаемыми пренебрегается, и нахождение распределения скорости сводится к решению однородного уравнения $f^{(4)} = 0$, интегрирование которого дает следующие соотношения для функции тока:

— случай А

$$f = -\frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{2}y;$$

— случай Б

$$f = -2y^3 + 3y^2 - 1.$$

В случае А при $\mathrm{Re} \to \infty$ вкладом вязких эффектов пренебрегается во всем поле течения и распределение скорости описывается соотношением

$$f = \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right).$$

В случае Б влияние вязких эффектов сказывается в тонком слое, прилегающем к непроницаемой стенке канала. Несмотря на то, что уравнение (2.156) не имеет точного решения, распределение скорости вне пограничного слоя на непроницаемой стенке канала с удовлетворительной точностью описывается косинусоидальной зависимостью

$$f = -\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right).$$

Нетрудно заметить, что приведенное соотношение не удовлетворяет граничному условию прилипания на верхней стенке канала $f'(1) = 0$.

Распределение давления описывается соотношением

$$p = -\frac{C}{2}x^2 + \vartheta(y), \quad \vartheta(y) = -\frac{f^2}{2} - \frac{f'}{\mathrm{Re}}.$$

Для выделенного контрольного объема выполняется условие сохранения количества движения, которое в интегральной форме имеет следующий вид

$$\int\limits_{S_2} \rho v^2 dx - \int\limits_{S_1} \rho v^2 dS = (\tau_{w2} - \tau_{w1})h dx - \int\limits_{S_2} p dS + \int\limits_{S_1} p dS.$$

При симметричном вдуве $\tau_{w1} = -\tau_{w2}$, поэтому

$$\rho \frac{d}{dx}\left(\int\limits_{-1}^{1} v^2 dy\right) = -2\tau_w - \frac{d}{dx}\left(\int\limits_{-1}^{1} p dy\right).$$

В случае А постоянная C, определяющая продольный градиент давления, находится из соотношения

$$C = \int\limits_{-1}^{1} f'^2 dy - \frac{1}{\mathrm{Re}} f''(1).$$

В случае Б имеем

$$C = 2\int\limits_{0}^{1} f'^2 dy - \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[f''(1) - f''(0) \right].$$

В случае А оба слагаемых в правой части являются положительными, что дает отрицательный продольный градиент давления. В случае Б вклад вязких слагаемых уменьшается при увеличении числа Рейнольдса и становится пренебрежимо малым при $\mathrm{Re} > 10$.

Распределения продольной скорости в случае А при изменении числа Рейнольдса от нуля до бесконечности достаточно хорошо согласуются друг с другом. При этом максимальная скорость на плоскости симметрии канала изменяется от $f'(0) = 1{,}5$ до $f'(0) = 1{,}57$ (изменение составляет 5 %). В случае Б при увеличении числа Рейнольдса от нуля до некоторого конечного значения максимум продольной скорости смещается от плоскости симметрии канала к его непроницаемой стенке. При симметричном вдуве профили поперечной скорости оказываются нечувствительными к изменению числа Рейнольдса. При несимметричном вдуве форма профиля поперечной скорости в существенной степени зависит от числа Рейнольдса. Увеличение числа Рейнольдса приводит к появлению точки перегиба на профиле поперечной скорости. В случае А поперечная скорость вблизи плоскости симметрии канала является линейной функцией координаты y, а в случае Б поперечная скорость вблизи непроницаемой стенки канала представляет собой квадратичную функцию координаты y. При фиксированном числе Рейнольдса поперечная скорость в случае Б всегда меньше поперечной скорости в случае А.

В то время как в случае А трение на стенке остается практически не зависящим от числа Рейнольдса, в случае Б трение на непроницаемой стенке канала изменяется пропорционально квадратному корню из числа Рейнольдса, $f''(1) \propto \mathrm{Re}^{1/2}$ (рис. 2.27). Значки $\circ$ соответствуют численному решению.

Распределения температуры по поперечному сечению канала показаны на рис. 2.28 и рис. 2.29 (в обоих случаях $\mathrm{Pr} = 1$). В случае несимметричного вдува (случай Б) результаты расчетов нормируются на температуру верхней стенки канала $\theta_w = \theta(1)$, которая увеличивается по мере роста числа Рейнольдса. При увеличении числа Рейнольдса

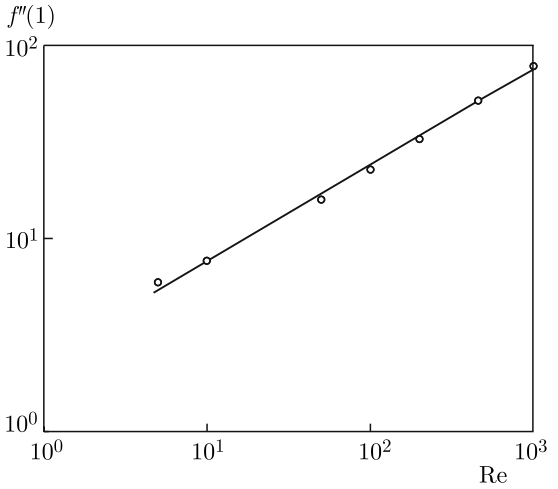


Рис. 2.27. Зависимость коэффициента поверхностного трения от числа Рейнольдса

от нуля до бесконечности профиль температуры изменяется от линейной зависимости до профиля, имеющего место при течении жидкости в пограничном слое.

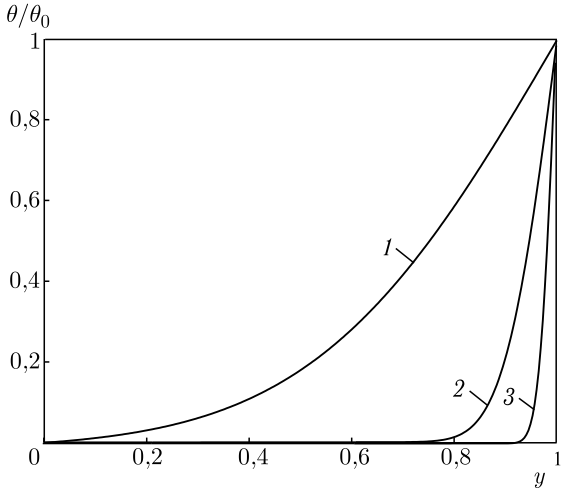


Рис. 2.28. Профили температуры в случае А при Pe = 5 (1); 100 (2); 1000 (3)

При фиксированном числе Рейнольдса температура в одном и том же сечении пограничного слоя в случае Б оказывается ниже, чем в

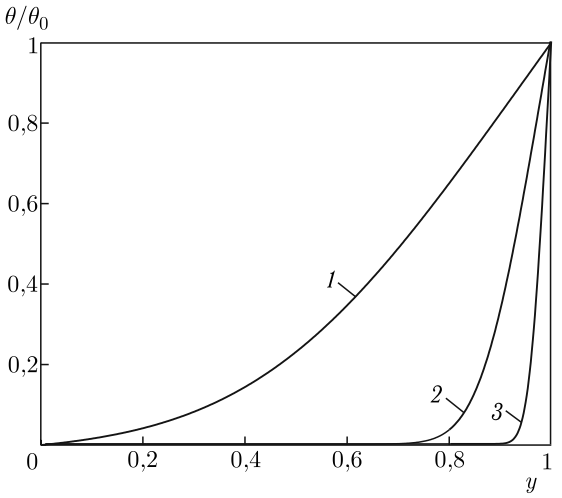


Рис. 2.29. Профили температуры в случае Б при Pe = 5 (1); 100 (2); 1000 (3)

случае А, что является следствием большей толщины пограничного слоя при несимметричном вдуве. Для толщины теплового пограничного слоя имеется оценка $\delta \sim a/V$, где V — характерный масштаб изменения скорости. В случае А характерный масштаб изменения скорости около плоскости симметрии составляет $V \sim f(0)v_w\delta/h$. Учитывая независимость производной $f'(0)$ от числа Рейнольдса, получим, что $\delta/h \sim \mathrm{Pe}^{-1/2}$. В случае Б на непроницаемой стенке канала $f(1) = f'(1) = 0$, поэтому функция f имеет вид параболы. Разложение в ряд Тейлора в окрестности точки $y = 1$ показывает, что $V \sim 0{,}5f''(1)v_w/(\delta/h)^2$. Учитывая, что $f''(1) \propto \mathrm{Re}^{1/2} \sim \mathrm{Pe}^{1/2}$, получим, что $\delta/h \sim \mathrm{Pe}^{-1/2}$. Несмотря на имеющиеся отличия в распределениях поперечной скорости, оценки характерного линейного масштаба изменения температуры в случаях А и Б совпадают. Интересно отметить, что при симметричном отсосе $\delta/h \sim \mathrm{Pe}^{-1}$ [199]. В канале со вдувом толщина теплового пограничного слоя при увеличении числа Рейнольдса уменьшается медленнее, чем при отсосе [211].

В случае отсоса через стенки канала уравнение (2.156) становится жестким при малых числах Рейнольдса [199] (при Re $\sim$ 10). При вдуве жесткость уравнения (2.156) проявляется при Re $\sim$ 1000 [211]. Приближенные соотношения, описывающие распределение температуры при сильных отсосе и вдуве со стенок канала, приводятся в работах [199] и [211].

Считая, что распределение скорости в канале со вдувом не зависит от числа Рейнольдса (используется распределение скорости при силь-

ном вдуве, соответствующее приближению при $\mathrm{Re} \to \infty$), уравнение (2.157) допускает интегралы вида:

— случай А

$$\theta' = \theta'_0 \exp\left\{\frac{2}{\pi}\mathrm{Pe}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) - 1\right]\right\},$$
$$\theta = \frac{I(y)}{I(1)};$$

— случай Б

$$\theta' = \theta'_0 \exp\left[\frac{2}{\pi}\mathrm{Pe}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right],$$
$$\theta = \mathrm{Pe}\int\limits_0^y \exp\left\{\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 1\right]\right\} d\eta.$$

Здесь

$$I(y) = \int\limits_0^y \exp\left\{\frac{2}{\pi}\mathrm{Pe}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\eta\right) - 1\right]\right\} d\eta.$$

Полученные соотношения позволяют провести оценку тепловых потоков на непроницаемой ($y = 1$) и проницаемой ($y = 0$) стенках канала, отношение которых равняется $\theta'(1)/\theta'(0)$ (случай Б). Учитывая граничные условия задачи, получим, что

$$\frac{\theta'(1)}{\theta'(0)} = \exp\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{Pe}\right).$$

Практически при всех числах Пекле вклад теплового потока на проницаемой стенке пренебрежимо мал по сравнению с тепловым потоком через непроницаемую стенку.

В то время как численное решение уравнения (2.157) достаточно хорошо согласуется с приближенным решением при симметричном вдуве (случай А) в широком диапазоне чисел Пекле, при несимметричном вдуве (случая Б) согласование численного и приближенного решений несколько хуже (особенно при низких числах Рейнольдса или Пекле). В случае Б приближенное решение дает более низкие температуры в поперечном сечении канала по сравнению с численным решением уравнения (2.157).

Решение уравнения (2.157) в случае Б позволяет найти тепловой поток к верхней (непроницаемой) стенке канала $q_w = \alpha(T_w - T_b)$. Обозначая $\theta_w = (T_w - T_1)/T_f$ и используя определение средней темпе-

ратуры, получим, что $\alpha = q_w/T_f(\theta_w - 1)$. Число Нуссельта $\mathrm{Nu} = \alpha h/\lambda$ находится из соотношения

$$\mathrm{Nu} = \frac{\mathrm{Pe}}{\theta_w - 1}.$$

Температура верхней стенки канала θ_w зависит от чисел Рейнольдса и Прандтля.

Распределение числа Нуссельта в зависимости от числа Рейнольдса показано на рис. 2.30 (при $\mathrm{Pr} = 1$). Символы $\circ$ соответствуют численному решению уравнения (2.157). При больши́х числах Рейнольдса распределение числа Нуссельта достаточно хорошо описывается зависимостью $\mathrm{Nu} \sim \mathrm{Re}^{1/2}$ (сплошная линия).

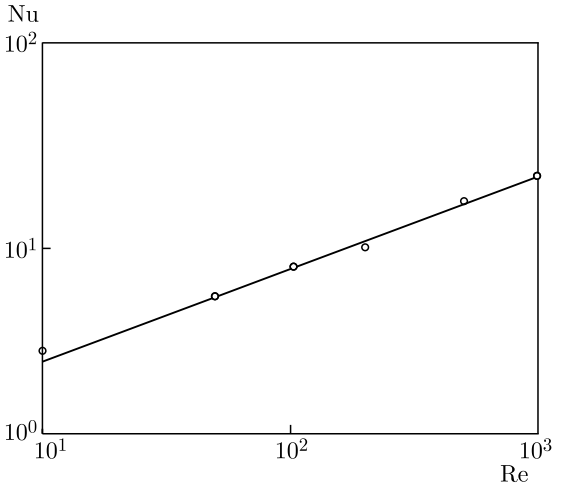


Рис. 2.30. Зависимость числа Нуссельта от числа Рейнольдса

Измерения характеристик ламинарного течения и теплообмена в канале с односторонним вдувом, имеющем квадратную форму поперечного сечения в плане, проводятся в работе [152]. Числа Рейнольдса, вычисленные по скорости потока через левый торец канала и по скорости вдува, составляют $\mathrm{Re}_0 = 400 \div 2000$ и $\mathrm{Re}_w = 5 \div 20$. Тепловой поток на проницаемой стенке канала считается постоянным. Другие стенки канала полагаются теплоизолированными. На входе в канал задаются равномерные профили продольной скорости и температуры.

На основе данных измерений построен ряд корреляционных зависимостей, имеющих точность порядка $\pm 10\,\%$. Теоретическая модель течения в плоском канале со вдувом и отсосом построена в работе [228], которая используется для сравнения с данными измерений.

Вдув с нижней стенки приводит к увеличению осевой скорости на серединной линии канала и сдвигу максимума скорости в поперечном сечении от проницаемой стенки к твердой стенке. Усиление тенденции наблюдается при увеличении продольной координаты. Градиент давления в направлении течения уменьшается более быстро, чем это имеет место в канале с твердыми стенками (при увеличении числа Рейнольдса, построенного по скорости вдува, эта тенденция проявляется более явно). Число Нуссельта уменьшается вдоль продольной координаты до тех пор, пока не примет постоянного значения на некотором удалении от входа в канал [152, 228].

2.13. Модель слоистой гидравлики

Модели, основанные на представлении о слоистом характере течения (модели слоистой гидравлики), занимают промежуточное положение между методами уточненного численного моделирования и нульмерными методами. В механике вязкой жидкости термин «слоистые» течения относится к классу течений, допускающих точные решения уравнений Навье–Стокса. В данном случае в основе терминологии лежит представление о движении потока в виде набора несмешивающихся струек жидкости.

2.13.1. Параболизованная модель течения. Рассмотрим стационарное плоское или осесимметричной течение невязкой несжимаемой или сжимаемой жидкости.

Течение невязкой жидкости описывается уравнениями неразрывности, изменения количества движения и энергии. Для несжимаемой жидкости динамическая и тепловая задачи решаются последовательно.

Уравнения неразрывности имеют различный вид для несжимаемой и сжимаемой жидкости:

— несжимаемая жидкость

$$\frac{\partial u y^n}{\partial x} + \frac{\partial v y^n}{\partial y} = 0; \tag{2.158}$$

— сжимаемая жидкость

$$\frac{\partial \rho u y^n}{\partial x} + \frac{\partial \rho v y^n}{\partial y} = 0. \tag{2.159}$$

Уравнения изменения количества движения имеют одинаковый для несжимаемой и сжимаемой жидкости вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2.160}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{2.161}$$

Для упрощения решения задачи используются переменные функция тока–завихренность. Функция тока связана с составляющими скорости при помощи соотношений

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Течение имеет только одну компоненту завихренности, направленную по нормали к плоскости течения,

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Введение функции тока и завихренности позволяет преобразовать уравнения (2.158)–(2.161) к следующей системе уравнений

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega, \tag{2.162}$$

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \tag{2.163}$$

Уравнения неразрывности и изменения количества движения, описывающие течения сжимаемой жидкости, дополняются уравнением энергии, выражающим собой условие сохранения теплосодержания вдоль линии тока

$$c_p T + \frac{V^2}{2} = \text{const},$$

где V — модуль скорости. Уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_p \rho T.$$

В течениях с доминирующим направлением (течения в каналах, пограничных слоях) выполняется соотношение $\partial p/\partial n = 0$, где n — нормаль к направлению течения. Вместо уравнений (2.162) и (2.163) используются следующие уравнения:

$$\frac{\partial y^n u}{\partial x} + \frac{\partial y^n v}{\partial y} = 0, \tag{2.164}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{2.165}$$

В дополнение к уравнениям (2.164) и (2.165) используется условие нулевого градиент давления $\partial p/\partial y = 0$.

В отличие от уравнений, используемых для описания течений в пограничном слое, в уравнениях (2.164) и (2.165) отсутствуют вязкие

члены. При описании пограничного слоя функция $p = p(x)$ считается заданной, так же как и скорость на его внешней границе $u = u(x)$. Для течений в каналах функции $p = p(x)$ и $u = u(x)$ заранее неизвестны. На горящей поверхности заряда задается зависимость $v_w = v_w(x)$ или $v_w = v_w(p)$, замыкающая систему уравнений (2.164) и (2.165). Задача при этом существенно усложняется.

2.13.2. Основные допущения. Рассмотрим применение модели слоистой гидравлики к исследованию течений продуктов сгорания в осесимметричном канале заряда, кольцевом зазоре или плоскопараллельной щели. Схема течения показана на рис. 2.31. В общем случае форма поперечного сечения канала является произвольной по его длине.

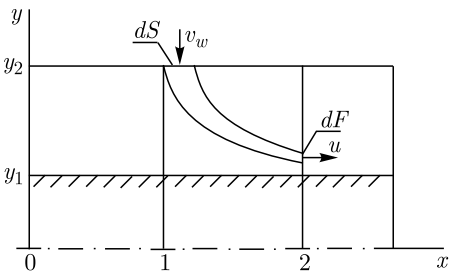


Рис. 2.31. Схема течения продуктов сгорания

Введем систему координат, связанную с началом канала. Ось x направлена вдоль гидравлической оси канала. При сечении канала плоскостью, перпендикулярной к его оси, канал имеет проходную площадь $F(x)$ с периметром $\Pi(x)$. Боковую поверхность канала, исчисляемую от его начала до сечения $x = \text{const}$, обозначим через $S(x)$.

Представление о возможности описания течения в каналах со вдувом в виде набора несмешивающихся струек, начало которых располагается на массоподводящей поверхности, заложено в работе Дж. Тейлора [318]. Обобщение этого представления на случай сжимаемого течения дано в работе В. И. Ягодкина [99]. В работах Г. Ф. Теленина [85, 86] метод слоистой гидравлики был развит и дан ряд решений для расширяющихся и ступенчатых плоских и осесимметричных каналов.

В основе модели слоистой гидравлики лежит возможность сведения задачи к решению интегрального уравнения, которое после удачной замены переменных сводится к уравнению Абеля или допускает решение аналитическими методами с применением интегральных преобразований. Это снижает общность метода, вынуждая принимать ограничения на скорость вдува и форму границ расчетной области. Для снятия этих

ограничений интегральное уравнение решается численными методами с использованием тех или иных квадратурных формул.

В качестве основных допущений принимается, что статическое давление в поперечном сечении канала считается постоянным; течение носит слоистый характер и газ в некоторой трубке тока не перемешивается с соседними трубками; течение невязкое, газ идеальный, вдоль каждой трубки тока выполняется уравнение Бернулли с константой, характерной для рассматриваемой трубки; переносом тепла вследствие механизма теплопроводности пренебрегается.

2.13.3. Несжимаемая жидкость. При течении несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) для произвольной трубки тока имеют место следующие соотношения:

$$v_w dS = u dF, \quad \frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{u^2}{2}, \tag{2.166}$$

где dS и dF представляют собой элементы горящей поверхности и поперечного сечения трубки тока. В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длины выбирается характерный поперечный размер канала h, для переменных с размерностью скорости — скорость вдува v_w, а для давления — скоростной напор вдува ρv_{w0}^2 при $x = 0$. В качестве характерной площади используется площадь поперечного сечения канала F_0 при $x = 0$.

Из уравнений (2.166) следует, что

$$\frac{v_w d\varkappa}{[2\,(p_1 - p_2)]^{1/2}} = dF, \tag{2.167}$$

где $\varkappa = S/F_0$. Переходя к переменным $t = p_0 - p_2$ и $\tau = p_0 - p_1$, запишем выражение (2.167) в виде

$$\frac{v_w(\tau) d\varkappa(\tau)}{[2\,(t - \tau)]^{1/2}} = dF(t, \tau). \tag{2.168}$$

Интегрирование соотношения (2.168) дает

$$\int\limits_0^{t_1} \frac{v_w(\tau) d\varkappa(\tau)}{[2\,(t - \tau)]^{1/2}} = \varphi(t, \tau). \tag{2.169}$$

Распространение интегрирования в соотношении (2.169) до $t_1 = t$ приводит к интегральному уравнению типа Вольтерра

$$\int\limits_0^{t} \frac{v_w(\tau) d\varkappa(\tau)}{[2\,(t - \tau)]^{1/2}} = F(t). \tag{2.170}$$

Уравнение (2.170) позволяет определить функцию безразмерного давления от продольной координаты $t = t(x)$ при заданной зависимости $F = F(t)$. Записав соотношение

$$v_w(\tau)\frac{d\varkappa(\tau)}{d\tau} = Q(\tau), \tag{2.171}$$

вместо уравнения (2.170) получим интегральное уравнение Абеля

$$\int\limits_0^t \frac{Q(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1/2}} = H(t), \tag{2.172}$$

где $H(t) = 2^{1/2}F(t)$. Решение уравнения (2.172) имеет вид

$$Q = \frac{2^{1/2}}{\pi}\left[\frac{F(0)}{\tau^{1/2}} + \int\limits_0^\tau \frac{F(S)dS}{(\tau - S)^{1/2}}\right]. \tag{2.173}$$

Решение уравнения (2.173) для канала постоянного сечения ($F = 1$) дает зависимость

$$Q = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\tau^{-1/2}. \tag{2.174}$$

Используя (2.174), из соотношения (2.171) получим

$$\varkappa = \frac{22^{1/2}}{\pi}\int\limits_0^z \frac{d\xi}{v_w(\xi)}, \tag{2.175}$$

где $\xi = \tau^{1/2}$, $z = t^{1/2}$.

Соотношение (2.175) допускает интегрирование в конечном виде при законе горения топлива, представленном в виде

$$v_w = \left(\alpha - \beta\xi^2\right)^n,$$

где $n \in [0, 1]$.

При степенном законе горения топлива $u_f = u_1 p^\nu$ параметр $n = \nu$ принимает произвольные значения из указанного диапазона, $\alpha = \overline{p}_0(\rho_f/\rho)^{1/n}$, $\beta = (\rho u_0/p_n)(\rho_f/\rho)^{1/n}$. При $n = 0$ параметр β принимает произвольные значения. При горении топлива по закону $u = u_1(1 + u_2\overline{p})^{1/2}$ получим, что $n = 1/2$, $\alpha = (1 + u_2\overline{p}_0)(\rho_f/\rho)^2$, $\beta = (\rho_f/\rho)u_2(\rho u_1^2/p_n)$. Для линейного закона горения $u_f = u_1 + u_2\overline{p}$ следует, что $n = 1$, $\alpha = (\rho_f/\rho)(1 + u_2\overline{p}_0)$, $\beta = u_2(\rho_1 + u_1^2/p_n)$. В этих зависимостях ρ_f — плотность топлива, p_n — характерное давление ($p_n = 0{,}1$ МПа). Черта над давлением указывает на безразмерную величину.

При $n = 0$ нетрудно получить, что

$$v_w \varkappa = \frac{22^{1/2}}{\pi} z.$$

Возвращаясь к исходным переменным, запишем распределение давления в виде

$$p = p_0 - \frac{\pi^2}{8} \varkappa^2 v_w^2.$$

При $n = 1/2$ имеем

$$\int\limits_0^z \frac{d\xi}{(\alpha - \beta\xi^2)^{1/2}} = \beta^{-1/2} \arcsin\left[z\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}\right],$$

откуда

$$z = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2} \varkappa\right].$$

Распределение давления имеет вид

$$p = p_0 - \frac{\alpha}{\beta} \sin^2\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/2} \varkappa\right].$$

При $n = 1$ имеем

$$\int\limits_0^z \frac{d\xi}{\alpha - \beta - \xi^2} = -\frac{1}{2(\alpha\beta)^{1/2}} \ln \frac{\alpha + z(\alpha\beta)^{1/2}}{\alpha - z(\alpha\beta)^{1/2}},$$

откуда

$$z = -\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2} \frac{\exp\left[\pi\varkappa(\alpha\beta/2)^{1/2}\right] - 1}{\exp\left[\pi\varkappa(\alpha\beta/2)^{1/2}\right] + 1}.$$

Распределение давления имеет вид

$$p = p_0 - \frac{\alpha}{\beta}\left\{\frac{\exp\left[\pi\varkappa(\alpha\beta/2)^{1/2}\right] - 1}{\exp\left[\pi\varkappa(\alpha\beta/2)^{1/2}\right] + 1}\right\}^2.$$

Профиль осевой скорости находится из соотношения (2.169) после того, как получено распределение давления. При этом

$$Q = v_w \frac{d\varkappa}{d\tau} = \frac{2^{1/2}}{\pi} \frac{1}{\tau^{1/2}}.$$

Подстановка в соотношение (2.169) дает связь

$$\tau^{1/2} = t^{1/2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\varphi\right).$$

Поскольку $u = [2(t-\tau)]^{1/2}$, то

$$u = (2t)^{1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi\right) = [2(p_0 - p)]\cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi\right).$$

Аналогичное соотношение справедливо и в случае, если $n \neq 0$. Профиль осевой скорости описывается соотношением

$$u = h(z)\cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi\right), \tag{2.176}$$

где $\varphi = y/h$ для плоского канала (щель), $\varphi = (r/h)^2$ для круглого канала (труба), $\varphi = (r^2 - r_1^2)/(r_2^2 - r_1^2)$ для кольцевого канала. В трехмерном случае $\varphi = F/F_0$, что дает отношение площади потока в сечении 2, которая ограничена контуром трубки тока, начинающейся в сечении 1, к полной площади проходного сечения канала. Для плоского и осесимметричного течения профиль поперечной скорости находится из уравнения неразрывности. Вид функции $h(z)$ в соотношении (2.176) определяется законом скорости горения:

— при $n = 0$

$$h(z) = \frac{\pi}{2}\varkappa v_w;$$

— при $n = 1/2$

$$h(z) = \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{\beta}{2}\right)^{1/2}\varkappa\right];$$

— при $n = 1$

$$h(z) = \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)\frac{\exp\left[\pi\varkappa\,(\alpha\beta/2)^{1/2}\right] - 1}{\exp\left[\pi\varkappa\,(\alpha\beta/2)^{1/2}\right] + 1}.$$

Соотношение (2.176) показывает, что коэффициент профиля продольной скорости $\beta = \pi^2/8 \approx 1{,}234$ [74].

2.13.4. Упрощение интегрального уравнения. Интегральное уравнение Вольтерра (2.170) допускает сведение к более простому дифференциальному уравнению 1-го порядка.

Течение в канале с распределенным вдувом описывается уравнением типа Вольтерра

$$\int\limits_o^x \frac{\varphi(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1/2}} = 2^{1/2}f(x), \tag{2.177}$$

где $\xi = p_0 - p(\xi)$ — перепад давления между торцом канала и точкой вдува, $x = p_0 - p(z)$ — перепад давления между точкой вдува и выходным сечением, f — площадь поперечного сечения, S — площадь мас-

соподводящей поверхности, $\varphi = dS/d\xi$. При этом $\xi \in [0, x]$ и $x \in [0, p_0]$. Все площади нормируются на начальную площадь поперечного сечения.

При известных функциях $f(\xi)$ и $S(\xi)$ решение уравнения (2.177) имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{2^{1/2}}{\pi}\left[\frac{f_0}{x^{1/2}} + \int\limits_0^x \frac{f'_\xi d\xi}{(x-\xi)^{1/2}}\right]. \tag{2.178}$$

При решении реальных задач заданными являются функции продольной координаты $f(z)$ и $S(z)$, а зависимости от давления $f(\xi)$ и $S(\xi)$ являются неизвестными.

Интегро-дифференциальное уравнение (2.178) сводится к дифференциальному уравнению. Поскольку $df/d\xi = (df/dS)(dS/d\xi)$, то

$$\int\limits_0^x \frac{f'_\xi d\xi}{(x-\xi)^{1/2}} = \int\limits_0^x f'_S dQ(x,\xi), \tag{2.179}$$

где $dQ(x,\xi) = dS/(x-\xi)^{1/2}$. Учитывая, что $Q = 2^{1/2} f$, получим

$$\int\limits_0^x f'_S dQ = f'_S\, Q|_0^z - \int\limits_0^z Q df'_s = 2^{1/2}\left(f'_s\, f|_0^z - \int\limits_0^z f df'_S\right). \tag{2.180}$$

Подставляя (2.179) и (2.180) в соотношение (2.178) и учитывая, что

$$f'_s f = \frac{1}{2}\frac{d}{dS} f^2,$$

получим

$$\frac{dS}{dx} = \frac{2^{1/2}}{\pi}\left\{\frac{f(0)}{x^{1/2}} + 2^{1/2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dS} f^2 - \frac{d}{dS}\, f^2\big|_0\right) - \int\limits_0^z f f''_{SS} dS\right]\right\}. \tag{2.181}$$

Запишем

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dS}{df}\frac{df}{dx}, \quad \frac{df^2}{dS} = \frac{df^2}{dz}\frac{dz}{dS}.$$

Обозначая штрихом без индекса производную по координате z, имеем

$$f df'_S = f\frac{df'_S}{dz}\frac{dz}{dS} dS = \frac{f}{S'}\frac{d}{dz}\left(\frac{f'}{S'}\right) dS = f\frac{f''S' - f'S''}{(S')^2} dz.$$

С учетом полученного соотношения уравнение (2.181) примет вид

$$\frac{S'}{x'} = \frac{2^{1/2}}{\pi}\left[\frac{f(0)}{x^{1/2}} + 2^{1/2} B(z)\right],$$

где

$$B(z) = \frac{1}{2}\,\frac{(f^2)'}{S'}\bigg|_0^z - \int\limits_0^z f\,\frac{f''S' - f'S''}{(S')^2}\,dz.$$

После некоторых преобразований получим

$$x' = \frac{\pi}{2^{1/2}}\left[\frac{f(0)}{x^{1/2}} + 2^{1/2}B(z)\right]^{-1}, \tag{2.182}$$

причем $x(0) = 0$.

Интегро-дифференциальное уравнение (2.178) сводится к дифференциальному уравнению 1-го порядка, имеющему вид (2.182). Уравнение (2.182) показывает, что имеется три класса решений.

1. $B = 0$, что соответствует цилиндрическому каналу. Решение находится в конечном виде:

$$x = \left(\frac{\pi S}{8^{1/2}}\right)^2.$$

2. $B = \text{const}$, что соответствует каналам, для которых $df/dS = \text{const}$, в частности коническому каналу. Решение получается при помощи метода разложения в ряд:

$$x(z) = z^2\left(1+k^2\right)\left(\frac{\pi^2}{2}\right) + z^3\left(1+k^2\right)\left(\frac{\pi^2 k}{2}\right) + \\ + z^4\left(1+k^2\right)\left[\pi^2k^2\left(\frac{1}{8} - \frac{2\pi}{3}\right)\right] + O(z^5),$$

где k — коэффициент расширения канала.

3. $B = f(z)$, что соответствует всем остальным случаям. Решение находится при помощи численных методов.

2.13.5. Сжимаемая жидкость. При течении сжимаемой жидкости для произвольной трубки тока имеют место следующие соотношения:

$$\rho_1 v_w dS = \rho_2 u dF, \quad \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}. \tag{2.183}$$

Давление, плотность и температура в сечениях 1 и 2 связаны при помощи уравнения состояния

$$p_1 = \rho_1 R T_w, \quad p_2 = \rho_2 R T_2.$$

Течение считается изэнтропическим, поэтому

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\gamma.$$

Обозначая $v_w = Af(\eta)$, $A = \rho_f R T_w u_1/p_0$, $\sigma = (\gamma - 1)/\gamma$, из уравнений (2.183) получим

$$A\eta_2^{-1/\gamma} \int\limits_0^{\eta_1} \frac{\eta_1^{-\sigma/2} f(\eta_1) d\varkappa(\eta_1)}{\left(\eta_1^\sigma - \eta_2^\sigma\right)^{1/2}} = \varphi(\eta_1, \eta_2). \tag{2.184}$$

Распространение интегрирования в уравнении (2.184) до $\eta_1 = \eta$ приводит к интегральному уравнению типа Вольтерра

$$A\eta^{-1/\gamma} \int\limits_0^{\eta} \frac{\eta_1^{-\sigma/2} f(\eta_1) d\varkappa(\eta_1))}{\left(\eta_1^\sigma - \eta^\sigma\right)^{1/2}} = F(\eta). \tag{2.185}$$

Произведем замену переменных

$$\eta_1^\sigma = \tau, \quad \eta^\sigma = t, \quad \xi = 1 - \tau, \quad z = 1 - t.$$

Введем также обозначения

$$G(t) = F(t)\frac{t^{1/(\gamma-1)}}{2A}, \quad H = -F\frac{(1-z)^{1/(1-\gamma)}}{2A}, \quad Q = \frac{1}{2} f(\tau)\tau^{-1/2}\frac{d\varkappa}{d\tau}.$$

Интегральное уравнение Вольтерра (2.185) представляется в форме уравнения Абеля

$$\int\limits_0^z \frac{Q(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1/2}} = H(z). \tag{2.186}$$

При $H = \text{const}$, что соответствует каналу, расширяющемуся по закону $F = t^{1/(1-\gamma)}$, решение уравнения (2.186) получается таким же способом, что и решение уравнения (2.172) в форме (2.174) и имеет вид

$$Q(\xi) = \frac{H}{\pi}\xi^{-1/2}. \tag{2.187}$$

Используя соотношение (2.187), получим

$$\varkappa = \frac{2H}{\pi} \int\limits_1^t \frac{\tau^{1/2} d\tau}{f(\tau)(1-\tau)^{1/2}}. \tag{2.188}$$

Полагая $f(\tau) = \tau^{n/\sigma}$, где $n \in [0, 1]$, вместо уравнения (2.188) имеем

$$\varkappa = \frac{2H}{\pi} \int\limits_1^t \frac{\tau^{m/2} d\tau}{(1-\tau)^{1/2}}, \tag{2.189}$$

где $m = 1 - 2n/\sigma$. Заменой переменной $\tau = \sin^2 z$ интеграл в правой части уравнения (2.189) сводится к табличному при $V = (\pi/2)^{1/2}$ и $\theta^2 = \arcsin t$. Уравнение (2.189) примет вид

$$\varkappa = \frac{4H}{\pi} \int\limits_V^\theta \sin^{m+1} z dz. \tag{2.190}$$

При $m + 1 = -2$ вместо уравнения (2.190) получим

$$\frac{\pi}{2H}\varkappa = -2\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{1/2},$$

откуда

$$t = \left[1 + 4\left(\frac{\pi\varkappa}{2H}\right)^2\right]^{-1}.$$

Распределение давления описывается соотношением

$$p = p_0\left[1 + 4\left(\frac{\pi\varkappa}{2H}\right)^2\right]^{-\gamma/(\gamma-1)}. \tag{2.191}$$

Из уравнения (2.184) с учетом полученных выражений для t и H и соотношения (2.191) следует, что

$$\int\limits_\tau^1 \frac{1 - \tau_1}{(\tau_1 - t)^{/2}} d\tau_1 = \pi\frac{\varphi(\tau, t)}{F(t)}.$$

Интегрируя, получим соотношение

$$\frac{1 - \tau}{1 - t} = \sin^2\left[\frac{\pi}{2}\frac{\varphi(\tau, t)}{F(t)}\right],$$

из которого следует, что

$$\tau = t\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{\varphi}{F}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{\varphi}{F}\right). \tag{2.192}$$

Записывая интеграл Бернулли в виде

$$u = v_*\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^{1/2}$$

и подставляя в него соотношение (2.192), найдем распределение продольной скорости

$$u = v_*\frac{\pi}{H}\varkappa\left[1 + \left(\frac{\pi\varkappa}{H}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{\varphi}{F}\right)\right]^{-1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{\varphi}{F}\right). \tag{2.193}$$

Соотношение (2.193) позволяет найти максимальную скорость в канале заряда

$$u_m = v_* \frac{\pi}{H} \varkappa \left[1 + \left(\frac{\pi \varkappa}{H} \right)^2 \right]^{-1/2}. \tag{2.194}$$

Из сравнения соотношений (2.193) и (2.194) следует, что

$$\frac{u}{u_m} = \left[1 + \left(\frac{\pi \varkappa}{H} \right)^2 \right]^{1/2} \left[1 + \left(\frac{\pi \varkappa}{H} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{\varphi}{F} \right) \right]^{-1/2} \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\varphi}{F} \right). \tag{2.195}$$

Соотношение (2.195) показывает, что сжимаемость потока приводит к более наполненному профилю продольной скорости в поперечном сечении канала по сравнению с моделью несжимаемой жидкости. При $\varkappa \gg 1$ профиль продольной скорости стремится к равномерному ($u/u_m = 1$), исключая окрестность горящей поверхности канала заряда ($\varphi/F = 1$).

При $H \neq \text{const}$ решение уравнения (2.186) записывается в виде

$$Q(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{H(0)}{z^{1/2}} + \int_0^z \frac{H'(\xi)}{(z-\xi)^{1/2}} d\xi \right]. \tag{2.196}$$

Для канала постоянного сечения ($F = 1$) имеем

$$H = \frac{(1-z)^{1/(\gamma-1)}}{2A}, \quad H' = \frac{(1-z)^{(2-\gamma)/(\gamma-1)}}{2A(\gamma-1)}.$$

Учитывая соотношение

$$Q = \frac{1}{2} f(\tau) \tau^{-1/2} \frac{d\varkappa}{d\tau},$$

из уравнения (2.196) получим

$$\frac{d\varkappa}{d\tau} = \frac{1}{\pi A} \left[\frac{\tau^{1/2}}{f(\tau)(1-\tau)^{1/2}} - g(\tau) \right],$$

откуда

$$\varkappa = \frac{1}{\pi A} \left[\int_1^t \frac{\tau^{1/2}}{f(\tau)(1-\tau)^{1/2}} - \int_1^t g(\tau) d\tau \right]. \tag{2.197}$$

Здесь

$$g(\tau) = \frac{\tau^{1/2}}{f(\tau)} \int_1^\tau \frac{\lambda^{(2-\gamma)/(\gamma-1)}}{(\lambda-\tau)^{1/2}} d\lambda.$$

В случае вдува продуктов сгорания в канал по закону $f(\tau) = \tau^{n/\sigma}$ вместо уравнения (2.197) имеем

$$\varkappa = \frac{1}{\pi A}\left[I_1(t) - \int\limits_1^t \tau^m I_2(\tau)d\tau\right]. \tag{2.198}$$

Здесь

$$I_1 = \int\limits_1^t \frac{\tau^m}{(1-\tau)^{1/2}}d\tau, \quad I_2 = \int\limits_1^\tau \frac{\lambda^{(2-\gamma)/(\gamma-1)}}{(\lambda-\tau)^{1/2}}d\lambda.$$

Способ вычисления интеграла I_1 указан выше. Интеграл I_2 является табличным и вычисляется без особых сложностей при некоторых значениях γ. В широком диапазоне изменения τ и γ для вычисления интеграла I_2 используется приближенная формула [95]

$$I_2(\tau) = -2e^k\,(1-\tau)^{1/2},$$

где $k = (2-\gamma)/(\gamma-1)$. Тогда уравнение (2.198) примет вид

$$\varkappa = \int\limits_1^t \tau^m\left[(1-\tau)^{-1/2} + 2e^k\,(1-\tau)^{1/2}\right]d\tau.$$

Приближенное решение записывается в виде

$$\varkappa = -D^{-1}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/2}, \tag{2.199}$$

где

$$D^{-1} = \frac{2}{\pi A}\left(1 + \frac{3}{4}e^k\right).$$

Поскольку $t = 1 + D^2\varkappa^2$, то распределение давления описывается соотношением

$$p = p_0\left(1 + D^2\varkappa^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}. \tag{2.200}$$

С учетом соотношений (2.199) и (2.200) распределение продольной скорости в канале заряда описывается зависимостью

$$u = v_* D\varkappa\left[1 + D^2\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{\varphi}{F}\right)\right]^{-1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{\varphi}{F}\right) \tag{2.201}$$

или

$$\frac{u}{u_m} = \left(1 + D^2\varkappa^2\right)^{1/2}\left[1 + D^2\varkappa^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{\varphi}{F}\right)\right]^{-1/2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{\varphi}{F}\right). \tag{2.202}$$

Соотношения (2.201) и (2.202) совпадают с соотношениями (2.193) и (2.195) при $D = \pi/H = \text{const}$. Оценки показывают, что для кана-

лов зарядов выполняется условие $D \approx 0{,}05\,\pi$, поэтому при $\varkappa \leqslant 20/\pi$ профиль скорости оказывается нечувствительным к закону скорости горения. При $\varkappa > 20/\pi$ профиль скорости является более наполненным, чем в случае простейшей модели, соответствующей постоянной скорости вдува ($v_w = \mathrm{const}$).

2.13.6. Численное решение интегрального уравнения. Рассмотрим трубку тока, начинающуюся в сечении ξ с элемента боковой поверхности канала $d\xi$. Поверхность газоподвода для этой трубки равняется $(dS/d\xi)d\xi$, а масса газа, поступающая с поверхности канала, составляет

$$\rho(\xi)u(\xi)\frac{dS}{d\xi}d\xi.$$

Закон сохранения массы вблизи поверхности горения имеет вид

$$\rho(\xi)u(\xi) = \rho_F u_F,$$

где ρ_F — плотность топлива. Скорость горения u_F связывается с давлением при помощи соотношения

$$u_F = \rho_F u_1 \left[\frac{p(\xi)}{p_a}\right]^{\nu}.$$

Условие постоянства расхода принимает вид

$$\rho(\xi)u(\xi) = \rho_F u_1 \left[\frac{p(\xi)}{p_a}\right]^{\nu}.$$

В сечении x трубка тока, начинающаяся на поверхности канала в сечении ξ, имеет проходную площадь $d\sigma$, а также плотность и скорость $\rho(\xi, x)$ и $u(\xi, x)$ соответственно. Два аргумента у плотности и скорости означают, что в сечении x рассматриваются характеристики струйки жидкости, начинающейся в сечении ξ.

Условие постоянства расхода вдоль струйки тока имеет вид

$$\left[\frac{p(\zeta)}{p_a}\right]^{\nu} \rho_F u_1 \frac{dS}{d\zeta}d\zeta = \rho(\zeta, z)v_z(\zeta, z)d\sigma. \tag{2.203}$$

Вдоль струйки тока выполняется уравнение Бернулли

$$\frac{u^2(\xi, x)}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p(x)}{\rho(\xi, x)} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p(\xi)}{\rho(\xi)}. \tag{2.204}$$

Уравнение состояния и условие изэнтропичности течения записываются в виде

$$\frac{p(\xi)}{\rho(\xi)} = RT(\xi), \quad \frac{p(\xi)}{\rho^{\gamma}(\xi)} = \frac{p(x)}{\rho^{\gamma}(\xi, x)}. \tag{2.205}$$

Исключая скорость из уравнения (2.204) при помощи соотношений (2.205), перейдем в (2.203) к давлениям:

$$\left[\frac{p(\xi)}{p_a}\right]^{\nu} \rho_F u_1 \frac{dS}{d\xi} d\xi = \left[\frac{p(x)}{p(\xi)}\right]^{1/\gamma} \frac{p(\xi)}{RT_w(\xi)} \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_w(\xi)\right]^{1/2} \times$$
$$\times \left\{1 - \left[\frac{p(x)}{p(\xi)}\right]^{(\gamma-1)/\gamma}\right\}^{1/2} d\sigma. \quad (2.206)$$

Интегрируя соотношение (2.206) по ξ от 0 до сечения x и по σ от 0 до площади $F(x)$, получим интегральное уравнение для неизвестного распределения давления по длине канала

$$\int\limits_0^x \rho_F u_1 p(\xi)^{[2\gamma(\nu-1)+\gamma+1]/(2\gamma)} \left[RT(\xi)\right]^{-1/2} \times$$
$$\times \left[\overline{p}(\xi)^{(\gamma-1)/\gamma} - \overline{p}(x)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{-1/2} \frac{dS}{d\xi} d\xi = p_0 \overline{p}(x) \overline{p}_a^{-\nu} F(x). \quad (2.207)$$

Черта над давлением обозначает безразмерную величину. В качестве характерного масштаба для давления принимается давление p_0 в начальном сечении канала ($x = 0$). При решении интегрального уравнения давление в начале канала считается заданным и находится из решения задачи, учитывающей расходные характеристики системы.

Уравнение (2.207) справедливо для любой координаты x, а его решение дает зависимость $p(x)$, зная которую, получается распределение скорости в поперечном сечении канала как функция площади трубки тока. Интегрируя (2.207) по ξ от 0 до сечения $x^* \leqslant x$ и в сечении x по σ от 0 до $\sigma \leqslant F(x)$, получим уравнение

$$\int\limits_0^{x^*} \frac{\rho_F u_1 \overline{p}(\xi)^{[2\gamma(\nu-1)+\gamma+1]/2\gamma} \left[RT(\xi)\right]^{1/2}}{\left[\overline{p}(\xi)^{(\gamma-1)/\gamma} - \overline{p}(x)^{(\gamma-1)/\gamma}\right]^{1/2}} \frac{dS}{d\xi} d\xi = p_0 \overline{p}(x) \overline{p}_a^{-\nu} \sigma. \quad (2.208)$$

Уравнение (2.208) позволяет установить связь между координатой x^* и площадью σ в сечении x, которая ограничена пространственной поверхностью тока, выходящей из сечения с координатой x^*. Интеграл в левой части (2.208) вычисляется при помощи квадратурных формул, поскольку $p(\xi)$ является известной функцией своего аргумента из решения интегрального уравнения.

Рассматриваемая постановка задачи не дает возможности определить форму струйки тока в общем случае. Это удается лишь для плоских и осесимметричных каналов, в которых существует однозначная зависимость между площадью струйки тока и продольной координатой.

Решение уравнения (2.208) для каждого значения σ в сечении x дает z^* и $p(x^*)$, что позволяет получить скорость $u(\sigma)$ на соответствующей струйке тока в сечении x. Скорость находится из уравнения Бернулли

$$u(\sigma) = \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}RT(x^*)\right]^{1/2}\left\{1-\left[\frac{p(x)}{p(x^*)}\right]^{(\gamma-1)/\gamma}\right\}^{1/2}. \qquad (2.209)$$

Из соотношения (2.209) следует, что скорость на оси канала равняется

$$u_m(x) = \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}RT(0)\right]^{1/2}\left\{1-\left[\frac{p(x)}{p_0}\right]^{(\gamma-1)/\gamma}\right\}^{1/2}.$$

Интегрируя (2.209), найдем среднюю скорость в поперечном сечении канала

$$\overline{u}(x) = \frac{1}{F(x)}\int\limits_0^{F(x)} u(\sigma,x)d\sigma.$$

Коэффициенты полноты профиля представляют собой интегральные характеристики профиля скорости в сечении:

$$\alpha = \frac{1}{\overline{u}^3(x)F(x)}\int\limits_0^{F(x)} u^3(\sigma,x)d\sigma, \quad \beta = \frac{1}{\overline{u}^2(x)F(x)}\int\limits_0^{F(x)} u^2(\sigma,x)d\sigma. \qquad (2.210)$$

Для решения интегрального уравнения (2.208) обозначим

$$\rho_F u_1\left[RT(\xi)\right]^{1/2}\frac{dS}{d\xi} = f(\xi), \quad p_0\left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{-\nu} = c.$$

Из (2.208) следует, что

$$\int\limits_0^x \frac{f(\xi)\overline{p}^a(\xi)}{\left[\overline{p}^b(\xi)-\overline{p}^b(x)\right]^{1/2}}d\xi = c\overline{p}(x), \qquad (2.211)$$

где $[2\gamma(\nu-1)+\gamma+1]/(2\gamma) = a$, $(\gamma-1)/\gamma = b$. Функция $f(\xi)$ является известной.

Особенность интегрального уравнения (2.211) состоит в том, что знаменатель подынтегрального выражения обращается в ноль на верхнем пределе интегрирования. Это не позволяет использовать для численного решения уравнения (2.211) обычные методы, заключающиеся в замене интеграла квадратурными формулами.

Предположим, что решение интегрального уравнения (2.211) известно вплоть до сечения $x-h$, где h — малая величина. Для построе-

ния решения в сечении x на участке от 0 до $x-h$ интеграл заменяется какой-либо квадратурной формулой. Интегральное уравнение для сечения x записывается в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(\xi_i)\overline{p}^a(\xi_i)}{\left[\overline{p}^b(\xi_i)-\overline{p}^b(z)\right]^{1/2}} A_i + \int\limits_{x-h}^{x} \frac{f(\xi)\overline{p}^a(\xi)}{\left[\overline{p}^b(\xi)-\overline{p}^b(z)\right]^{1/2}} d\zeta = c\overline{p}(x). \qquad (2.212)$$

Интеграл по промежутку $[x-h, x]$ имеет особенность. Полагая h достаточно малым, разложим числитель и знаменатель в ряд Тейлора по степеням $x-\xi$, ограничиваясь в разложении квадратичными членами:

$$f(\xi)\overline{p}^a(\xi) = f(x)\overline{p}^a(x) + \frac{d}{d\xi}\left(f\overline{p}^a\right)(\xi - x) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}\left(f\overline{p}^a\right)(\xi-x)^2,$$

$$\overline{p}(\xi)^b - \overline{p}(x)^b = \frac{d}{d\xi}\overline{p}^b(\xi-x) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}\overline{p}^b(\xi-x)^2.$$

Интеграл в соотношении (2.212) представляется в виде

$$I[p(x)] = \int\limits_{x-h}^{x} \frac{f(\xi)\overline{p}^a(\xi)}{\left[\overline{p}^b(\xi)-\overline{p}^b(x)\right]^{1/2}} d\xi \approx \int\limits_{0}^{h} \frac{A+B\zeta+C\zeta^2}{\left[D\zeta+E\zeta^2\right]^{1/2}} d\zeta, \qquad (2.213)$$

где $\zeta = x-\xi$. Неизвестные коэффициенты имеют вид:

$$A = f(x)\overline{p}^a(x),$$

$$B = -\frac{d}{d\xi}\left[f(\xi)\overline{p}^a(\xi)\right] \quad \text{при } \xi = x,$$

$$C = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\xi^2}\left[f(\xi)\overline{p}^a(\xi)\right] \quad \text{при } \xi = x,$$

$$D = -\frac{d}{d\xi}\left[\overline{p}^b(\xi)\right] \quad \text{при } \xi = x.$$

Интеграл (2.213) является табличным и вычисляется по формуле

$$I[p(x)] = \left(A - \frac{BD}{2E} + \frac{3CD}{8E^2}\right)G + \\ + \left(Dh+Eh^2\right)^{1/2}\left[\frac{B}{D} + C\left(\frac{h}{2E} - \frac{3D}{4E^2}\right)\right].$$

Здесь

$$G = \int\limits_{0}^{h} \frac{d\zeta}{\left(D\zeta+E\zeta^2\right)^{1/2}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{E^{1/2}} \ln \left[1 + 2\dfrac{Eh}{D} + \dfrac{2E^{1/2}}{D} \left(Dh + Eh^2 \right)^{1/2} \right] & \text{при } E > 0, \\ \dfrac{1}{E^{1/2}} \ln \left[\arcsin \left(\dfrac{-2Eh - D}{D} \right) - \dfrac{3}{2}\pi \right] & \text{при } E < 0. \end{cases}$$

Производные, входящие в приведенные соотношения, находятся при помощи формул численного дифференцирования

$$\frac{dy(x)}{d\xi} = \frac{1}{2h} \left[y(x-2h) - 4y(x-h) + 3y(x) \right],$$

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{1}{h^2} \left[y(x-2h) - 2y(x-h) + y(x) \right].$$

Решение интегрального уравнения (2.211) сводится к решению нелинейного алгебраического уравнения относительно неизвестной функции $p(x)$, которое имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(\xi_i)\overline{p}^a(\xi_i)}{\left[\overline{p}^b(\xi_i) - \overline{p}^b(x)\right]^{1/2}} A_i + I[\overline{p}(x)] = c\overline{p}(x). \tag{2.214}$$

Решение уравнения (2.214) находится при помощи метода Ньютона, обеспечивающего быструю сходимость итерационного процесса.

Распределение давления по длине канала находится путем применения описанной процедуры для точек $x+h$, $x+2h$, ...

Для упрощения решения предположим, что в соотношении (2.212) числитель подынтегрального выражения является постоянным на промежутке $[x-h, x]$, а в подкоренном выражении ограничимся линейным разложением. Вместо (2.214) получим следующее соотношение:

$$I[p(x)] \approx f(x)\overline{p}^a(x) \left[-\frac{d\overline{p}^b(x)}{d\xi} \right]^{-1/2} \int\limits_0^h \frac{d\zeta}{\zeta^{1/2}}.$$

Произведя вычисление интеграла в соотношении (2.212), представим уравнение (2.211) в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(\xi_i)\overline{p}^a(\xi_i)}{\left[\overline{p}^b(\xi_i) - \overline{p}^b(x)\right]^{1/2}} A_i +$$

$$+ \frac{8^{1/2} f(x)\overline{p}^a(x)h}{\left[4\overline{p}^b(x-h) - 3\overline{p}^b(x) - \overline{p}^b(x-2h)\right]^{1/2}} = c\overline{p}(x) = 0. \tag{2.215}$$

Для определения интегральной суммы в левой части соотношения (2.215) используется формула трапеций, которая для определения дав-

ления $\overline{p}_{n+1}$ дает следующее трансцендентное алгебраическое уравнение

$$\frac{f_0}{2(1-\overline{p}_{n+1}^b)^{1/2}} + \frac{f_n\overline{p}_n^a}{2(\overline{p}_n^b-\overline{p}_{n+1}^b)^{1/2}} + \sum_{i=1}^{n+1}\frac{f_i\overline{p}_i^a}{2(\overline{p}_i^b-\overline{p}_{n+1}^b)^{1/2}} + \\ + \frac{22^{1/2}f_{n+1}\overline{p}_{n+1}^a}{\left(4\overline{p}_n^b-3\overline{p}_{n+1}^b-\overline{p}_{n-1}^b\right)^{1/2}} - \frac{c}{h}\overline{p}_{n+1} = 0. \quad (2.216)$$

Здесь $x_i = \xi_i = ih$, $\overline{p}(\xi_i) = \overline{p}_i$, $f(\xi_i) = f_i$. Уравнение (2.216) решается численным методом.

2.13.7. Результаты расчетов. Модель слоистой гидравлики позволяет учесть изменение скорости вдува по длине канала $v_w = v_w(x)$ и ее зависимость от местного уровня давления $v_w = v_w(p)$, изменение по длине канала температуры вдуваемого газа $T_w = T_w(x)$, произвольность формы массоподводящей поверхности $S(x)$, а также получить зависимость расходно-тяговых характеристик от формы канала заряда [95]. Имеется принципиальная возможность учета разнородности вдуваемого компонента при помощи введения зависимостей газовой постоянной и отношения удельных теплоемкостей от продольной координаты $R(x)$ и $\gamma(x)$. По степени охвата различных факторов, определяющих структуру течения в канале со вдувом, модель слоистой гидравлики превосходит многие другие вычислительные подходы, оставаясь удобной в численной реализации.

Интегральное уравнение Абеля для описания течений идеального сжимаемого газа в каналах со вдувом получено и в других работах, но его вывод основан на несколько других идеях (Prandtl–Glauert expansion). В работе [331] уравнение Абеля решается аналитически, если отношение $2(2-\gamma)/(\gamma-1)$ является целым числом. Решения хорошо согласуются с расчетами на основе подхода, разработанного в [252] (Rayleigh–Janzen expansion). Полуаналитический подход в рамках модели слоистой гидравлики развивается в работе [102].

Расчеты характеристик течения в каналах со вдувом на основе численного решения интегрального уравнения проводятся для различных показателей степени ν в законе горения.

Чувствительность распределения скорости и давления по длине цилиндрического канала с круглой формой поперечного сечения в плане к изменению показателя степени в законе горения показывают рис. 2.32. Скорость на гидравлической оси канала изменяется практически по линейной зависимости. Отклонение от линейной зависимости имеет место лишь на достаточно больши́х удалениях от левого торца канала, что объясняется влиянием сжимаемости.

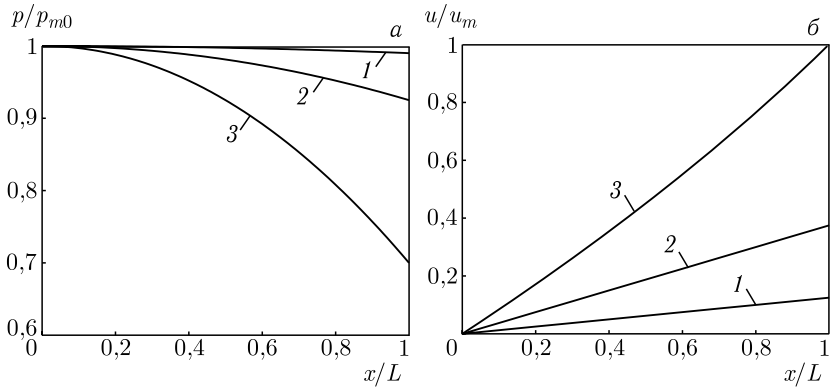


Рис. 2.32. Распределения давления (*а*) и осевой скорости (*б*) по длине канала при $\nu = 0{,}3$ (1); 0,5 (2); 0,7 (3)

Изменение площади проходного сечения и формы канала (через изменение площади его поверхности) также сказываются на характеристиках течения. Изменение осевой скорости вдоль длины канала показывает рис. 2.33. Линия 2 соответствует каналу постоянного сечения, а линии 1 и 3 — каналам, имеющих форму усеченного конуса с коэффициентами расширения $k = 0{,}1$ (сужающийся канал) и $k = 1{,}1$ (расширяющийся канал).

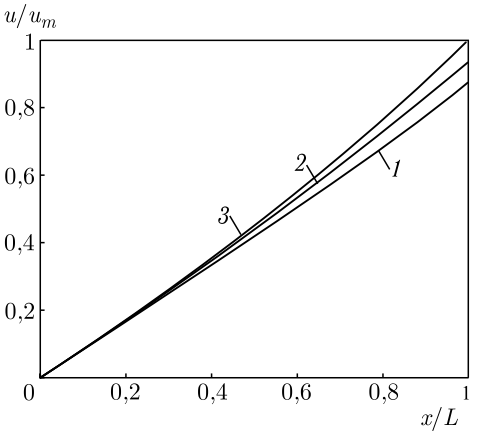


Рис. 2.33. Изменение осевой скорости по длине канала

Результаты расчетов для сжимаемой жидкости достаточно хорошо согласуются с точным решением задачи [252].

2.14. Акустическое поле в канале заряда

Рассмотрим структуру поля течения продуктов сгорания в плоской щели при малых продольных и поперечных колебаниях поверхности горения заряда в камере двигателя.

2.14.1. Основные уравнения. Нестационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоской щели описывается следующей системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{2.217}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mathrm{Re}^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{2.218}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mathrm{Re}^{-1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right). \tag{2.219}$$

В качестве характерных масштабов выбирается ширина канала h и скорость вдува v_w. Характерным параметром задачи является число Рейнольдса $\mathrm{Re} = v_w h/\nu$.

Используя завихренность $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ и исключая давление при помощи операции перекрестного дифференцирования, вместо уравнений (2.218) и (2.219) запишем уравнение переноса завихренности

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \mathrm{Re}^{-1}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right). \tag{2.220}$$

Составляющие скорости выражаются через функцию тока, которая находится из решения уравнения типа Пуассона.

2.14.2. Поперечные колебательные моды. Рассмотрим ситуацию, когда горящая поверхность канала кроме квазистационарного движения по нормали заряда испытывает в процессе горения малые колебания в этом же направлении с амплитудой q и частотой Ω.

Решение задачи представляется в виде суммы известного стационарного решения [74] и нестационарной составляющей скорости вдоль соответствующей координатной оси:

$$\begin{aligned} u &= U(x,y) + u'(x,y)\exp(i\Omega t), \\ v &= V(x,y) + v'(x,y)\exp(i\Omega t). \end{aligned} \tag{2.221}$$

Граничные условия имеют вид

$$u' = 0, \quad v' = q' \quad \text{при } y = 1; \quad \frac{\partial u'}{\partial y} = v' = 0 \quad \text{при } y = 0.$$

Решение в форме (2.221) удовлетворяет уравнению неразрывности (2.217). Выражая завихренность через скорость из соотношений (2.221) и подставляя полученное выражение в уравнение (2.220), имеем

$$i\Omega\omega'' + U\frac{\partial\omega''}{\partial x} + V\frac{\partial\omega''}{\partial y} + u'\frac{\partial\omega'}{\partial x} + v'\frac{\partial\omega'}{\partial y} = \mathrm{Re}^{-1}\left(\frac{\partial^2\omega'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega'}{\partial y^2}\right).$$

Здесь

$$\omega' = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \omega'' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}.$$

При этом учитывается, что U и V удовлетворяют уравнению (2.220) при $\partial\omega/\partial t = 0$. Поскольку искомое поле скорости является действительным, то соответствующее решение удовлетворяет последнему уравнению без члена с мнимой единицей:

$$U\frac{\partial\omega''}{\partial x} + V\frac{\partial\omega''}{\partial y} + u'\frac{\partial\omega'}{\partial x} + v'\frac{\partial\omega'}{\partial y} = \mathrm{Re}^{-1}\left(\frac{\partial^2\omega'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\omega'}{\partial y^2}\right). \qquad (2.222)$$

Решение уравнения (2.222) ищется при помощи метода разделения переменных. Полагая

$$v' = z_x(x)g(y),$$

из уравнения (2.217) следует, что

$$u' = -z(x)g_y(y).$$

Здесь $z(x)$ и $g(y)$ — неизвестные функции. Нижний индекс обозначает дифференцирование по соответствующей переменной. Функции U и V связаны при помощи соотношения

$$U = -xV(y).$$

С учетом приведенных соотношений из уравнения (2.222) получим

$$V(c_0g'' + c_2g') - V'(c_3g - g'') - c_0V''g' + V'''g - \\ - \mathrm{Re}^{-1}\left[c_4g + 2c_2g'' + c_0g^{(4)}\right] = 0, \qquad (2.223)$$

где $c_0 = z/xz'$, $c_2 = z''/xz'$, $c_3 = z'''/xz'$, $c_4 = z^{(4)}/xz'$.

Для существования подобного решения уравнения (2.223) необходимо, чтобы $c_0 = 1$, $c_2 = c_3 = c_4 = 0$. При этом $z'(x) = 1$, и, следовательно, $z(x) = x$. Уравнение (2.223) примет вид

$$-V'g'' + Vg''' - V''g' + V'''g - \mathrm{Re}^{-1}g^{(4)} = 0. \qquad (2.224)$$

При этом $g = g[V(y)]$. Простая проверка показывает, что линейная форма решения $g = \alpha V(y)$ удовлетворяет уравнению (2.224) и граничным условиям. Вместо уравнения (2.224) получим

$$\varepsilon V^{(4)} - \left[V'^2 - VV''\right]' = 0, \tag{2.225}$$

где $\varepsilon = -\mathrm{Re}^{-1}/2$.

Уравнение (2.225) описывает поле скорости в канале заряда [74], а его решение слабо зависит от числа Рейнольдса (малого параметра ε) и хорошо описывается зависимостью

$$V = -\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right). \tag{2.226}$$

Решение, описываемое соотношением (2.226), имеет место при $\mathrm{Re} \to \infty$ (или при $\varepsilon \to 0$). Из этого следует, что искомое решение описывается зависимостью

$$g = -\alpha \sin\left(\frac{\pi}{2}y\right),$$

где $\alpha = -q'$. Несмотря на то, что малый параметр ε в уравнении (2.225) стоит перед старшей производной, в граничные условия задачи он не входит. Акустическое поле, порождаемое малыми колебаниями горящей поверхности заряда, является регулярным без пограничного слоя. Выражения для составляющих скорости нестационарного движения $u' = -q'U$ и $v' = -q'V'$ имеют вид

$$u' = -\frac{\pi}{2}q'\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right), \quad v' = -q'\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right). \tag{2.227}$$

Подстановка соотношений (2.227) в (2.221) приводит к следующим выражениям

$$u = U\left[1 - q'\exp\left(i\Omega t\right)\right], \quad v = V\left[1 - q'\exp\left(i\Omega t\right)\right]. \tag{2.228}$$

Подстановка соотношения (2.228) в уравнение (2.218) и интегрирование по координате y с последующей оценкой членов позволяет получить приближенное выражение для осевого градиента давления

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx -i\Omega u'_m.$$

Средние по поперечному сечению канала продольная скорость и давление находятся из соотношений

$$u'_m = \int\limits_0^1 u' dy, \quad P = \int\limits_0^1 p dy.$$

Сдвиг по фазе между колебаниями продольной скорости и давления в канале заряда составляет $\pi/2$.

Полученные соотношения справедливы и для осесимметричного канала заряда и подтверждаются результатами численных расчетов при различных числах Рейнольдса [215].

2.14.3. Продольные колебательные моды. Рассмотрим случай, когда горящая поверхность канала совершает малые колебания вдоль образующей канала (вдоль оси x) с амплитудой q' и частотой Ω.

Решение задачи ищется в виде (2.221). Процесс описывается системой уравнений (2.217)–(2.219) при следующих граничных условиях:

$$u' = q', \quad v' = 0 \quad \text{при } y = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v = 0 \quad \text{при } y = 0.$$

Решение задачи сводится к интегрированию уравнения (2.222). После определения формы решения из уравнения (2.222) получим

$$V(c_0 g''' + c_2 g') - V'(g'' + c_3 x g) - c_0 V'' g' + V''' g - \\ - \mathrm{Re}^{-1}\left[c_0 g^{(4)} + 2c_2 g'' + c_4 g\right] = 0. \quad (2.229)$$

Для существования подобного решения задачи необходимо, чтобы $c_0^{-1} = 0$, $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, а также $z(x) = q' = \mathrm{const}$. Уравнение (2.229) сводится к следующему

$$\varepsilon g^{(4)} - V g''' + V'' g' = 0, \quad (2.230)$$

где $\varepsilon = \mathrm{Re}^{-1}$. Число Рейнольдса не входит в граничные условия, поэтому задача имеет регулярный характер и вместо (2.230) рассматривается уравнение

$$V g''' - V'' g' = 0. \quad (2.231)$$

Учитывая, что $V'' = \pi^2 V/4$, вместо уравнения (2.230) получим

$$g''' + \frac{\pi^2}{4} g' = 0.$$

Интегрируя и учитывая граничные условия, согласно которым $g(0) = g''(0) = 0$, найдем

$$g'' + \frac{\pi^2}{4} = 0.$$

Решение полученного уравнения, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$g = -\sin\left(\frac{\pi}{2} y\right).$$

Искомое решение задачи записывается в виде

$$u' = q' \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right) = -q'V, \quad v' = 0. \tag{2.232}$$

Подстановка соотношений (2.232) в (2.221) приводит к следующим выражениям:

$$u = U - q'V \exp(i\Omega t), \quad v = V. \tag{2.233}$$

Зависимости вида (2.233) имеют место для осесимметричного канала заряда.

Сдвиг по фазе между колебаниями продольной скорости и давления в канале заряда составляет $\pi/2$.

Зависимости (2.228) показывают, что при поперечных колебаниях поверхности горения заряда амплитуда колебаний скорости продуктов сгорания в канале заряда пропорциональна ее стационарному значению. При этом чем длиннее канал заряда, тем выше амплитуда колебаний продольной скорости на выходе из него. Амплитуда колебаний поперечной скорости не зависит от продольной координаты.

В случае продольных колебаний поверхности горения заряда, описываемых соотношениями (2.233), амплитуда колебаний продольной скорости не зависит от длины канала и убывает к его оси. Амплитуда поперечных колебаний равняется нулю всюду в потоке.

В обоих случаях амплитуды колебаний убывают по мере разгорания канала заряда в процессе работы двигателя.

Учитывая, что $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ и $v = -\partial\psi/\partial x$, в дополнение к зависимостям (2.228) и (2.233) получим следующие соотношения для течения в плоской щели:

$$\omega = -\frac{\partial U}{\partial y} - q'\frac{\partial V}{\partial y}\exp(i\Omega_1 t) + q''\frac{\partial U}{\partial y}\exp(i\Omega_2 t), \quad \psi = \frac{\omega}{c^2}, \tag{2.234}$$

где $c = \pi/2$. Под q', q'', Ω_1, Ω_2 понимаются амплитуда и частота колебаний вдоль осей x и y соответственно. Зависимости (2.234) позволяют определить локальные колебания завихренности и функции тока (расхода) в потоке продуктов сгорания.

Полученные результаты допускают распространение и на более сложные колебания горящей поверхности заряда. При этом решения (2.228), (2.233) и (2.234) рассматриваются как частные и локально-автомодельные решения. Общее решение задачи представляет в виде

$$u = U + \sum_{i=1}^{\infty} u_i' \exp(i\Omega_i' t), \quad v = V + \sum_{i=1}^{\infty} v_i' \exp(i\Omega_i'' t),$$

где u_i, v_i, Ω_i', Ω_i'' определяются из граничных условий с учетом полученных решений. Учитывая малое влияние сил вязкости, завихрен-

ность, найденная из интеграла Бернулли, сохраняется вдоль линии тока. Это позволяет провести оценку указанных параметров по их известным значениям на горящей поверхности заряда.

2.15. Линейный подход к исследованию устойчивости

Анализ устойчивости течения в канале заряда в существенной степени зависит от физически корректного и детального описания нестационарного поля скорости.

Распределения осевой и радиальной скоростей в цилиндрическом канале со вдувом имеют следующий вид:

$$u_x = \pi x \cos\xi, \quad u_r = -\frac{1}{r}\sin\xi,$$

где $\xi = \pi r^2/2$.

Течение в канале заряда считается изэнтропическим. Распределение акустической скорости и давления описывается линеаризованными уравнениями неразрывности и изменения количества движения. Давление и скорость представляются в виде суммы двух составляющих

$$\boldsymbol{u} = \widehat{\boldsymbol{u}} + \widetilde{\boldsymbol{u}}, \quad p = \widehat{p} + \widetilde{p}.$$

Акустическое поле является невращательным ($\nabla \times \widehat{\boldsymbol{u}} = 0$), а вихревое течение является несжимаемым ($\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}} = 0$).

Решение линеаризованных уравнений, описывающих осевое течение при отсутствии вращательных эффектов, дает плоскую волну [208]

$$\widehat{u} = i\exp(-ikt)\sin(k_m x) + O(\mathrm{M}_w),$$

$$\widehat{p} = \exp(-ikt)\cos(k_m x) + O(\mathrm{M}_w).$$

Здесь $k_m = m\pi R/L$. Под R и L понимаются радиус и длина канала.

Приведенные решения показывают, что имеется поправка к акустическому решению порядка числа Маха. Учет этой поправки не оказывает влияния на исследование устойчивости течения [202]. Решение уравнений, описывающих вихревое течение, производится различными методами в невязком [202] или вязком [203] (учитываются эффекты демпфирования) приближении, а также с учетом влияния турбулентности [206]. Полученные решения подтверждаются другими подходами и численными расчетами [256].

Вращательные компоненты скорости и давления описываются соотношениями

$$\widetilde{u} = i\exp(-ikt) r u_r \exp(\phi + i\psi)\sin[\sin(\xi)k_m x] + O(\mathrm{M}_w),$$

$$\widetilde{p} = i\frac{\pi}{2}\mathrm{M}_w x \exp(-ikt)\sin(2\xi)\exp(\phi + i\psi)\sin[\sin(\xi)k_m x] + O(\mathrm{M}_w^2).$$

Показатели ϕ и ψ являются функциями только радиальной координаты. Мнимая часть экспоненциального фактора получается как решение уравнения

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{k_m}{\mathrm{M}_w u_r}.$$

Интегрирование дает

$$\psi(r) = -\frac{k_m}{\pi \mathrm{M}_w} \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Вещественная часть решения представляется в виде

$$\phi(r) = \frac{\zeta}{\pi^2}\left[1 - \frac{1}{\sin x} - x\frac{\cos x}{\sin^2 x} + I(x) - I(\pi/2)\right],$$

где

$$I(x) = x + \frac{1}{18}x^3 + \frac{7}{1800}x^5 + \frac{31}{105840}x^7 + \ldots.$$

Параметр ζ находится из соотношения

$$\zeta = \frac{k_m^2 \delta^2}{\mathrm{M}_2^3} = \frac{S^2 \delta^2}{\mathrm{M}_2},$$

где $S = k_m/\mathrm{M}_w$. Под δ понимается величина, обратная акустическому числу Рейнольдса $\mathrm{Re}_a = (a_0 R/\nu)^{1/2}$.

Акустическое давление и скорость, соответствующие гармонике с индексом m, связаны при помощи уравнения

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_m = -\frac{1}{k_m}\nabla \widehat{p}_m.$$

При этом

$$\widehat{u}_m = \sin(k_m x), \quad \widehat{p}_m = \cos(k_m x).$$

Вещественная и мнимая части вращательной составляющей акустического поля описываются соотношениями

$$\widetilde{u}_m^r = \sin(\xi)\exp(\phi)\sin(\psi)\sin[\sin(\xi)k_m x],$$

$$\widetilde{u}_m^i = -\sin(\xi)\exp(\phi)\cos(\psi)\sin[\sin(\xi)k_m x].$$

Результаты расчетов, приведенные на рис. 2.34 при $\mathrm{M}_w = 0{,}0018$ и $f = 84$ Гц, достаточно хорошо согласуются с данными измерений [127, 302] в точке $x/L = 0{,}106$. Данные физического эксперимента соответствуют амплитуде осцилляций давления 0,0005 (значки $\circ$) и 0,0039 (значки $\bullet$). Данные численного моделирования получены при $m = 1$ и $k_m = 0{,}0924m$, $S = 51{,}3m$, $L/R = 34$. Результаты расчетов находятся в хорошем согласовании с теоретическим решением [263].

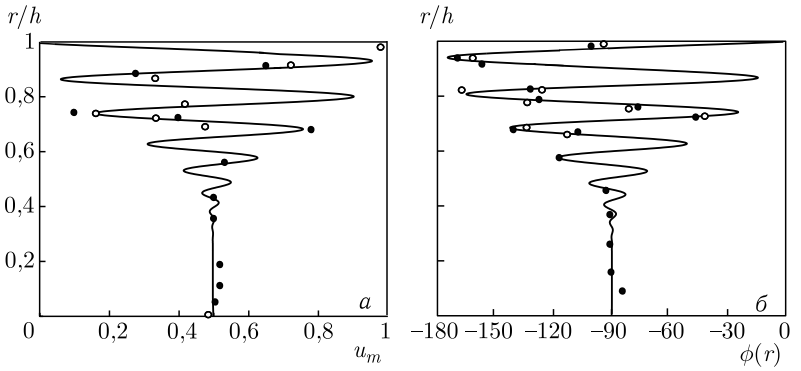


Рис. 2.34. Зависимости амплитуды осевой скорости (*а*) и фазового угла (*б*) от радиальной координаты

В общем случае следует учитывать демпфирующее влияние частиц конденсированной фазы, образующихся при горении твердого топлива.

2.16. Нестационарное течение в канале

Нестационарное течение в канале с гармоническими возмущениями скорости

Рассмотрим течение в канале со вдувом, имеющем открытый правый торец. Давление в выходном сечении канала полагается равным атмосферному давлению ($p = p_a$). На скорость потока у левого торца канала (при $x = 0$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $t \geqslant 0$) накладываются малые гармонические колебания с заданной амплитудой и частотой:

$$u(t) = \varepsilon \sin \omega t,$$

где ε — амплитуда, ω — частота. Возмущения потока индуцируются при помощи малых гармонических колебаний поршня. Амплитуда колебаний $\varepsilon = O(1)$ сравнима с уровнем осевой скорости в канале, поэтому поведение системы является нелинейным, и теория малых линейных возмущений требует модификации [375].

Поле скорости разбивается на стационарную и нестационарную составляющие

$$\boldsymbol{v}(x, r, t) = \boldsymbol{u}(x, r) + \widetilde{\boldsymbol{v}}(x, t) + \widehat{\boldsymbol{v}}(x, r, t).$$

Стационарное решение $\boldsymbol{u}(x, r)$ используется в качестве начальных условий для нестационарных расчетов. Тильда относится к плоской (planar, irrotational) составляющей скорости, $\widetilde{\boldsymbol{v}}(x, t)$ (вращательные эффекты не учитываются), которая рассчитывается как разность нестационарной осевой скорости и стационарной осевой скорости на оси канала.

Крышка относится к вихревой (non-planar, rotational) составляющей скорости, $\widehat{\boldsymbol{v}}(x, r, t)$, которая описывает генерацию и перенос завихренности в канале. На оси канала вихревая составляющая скорости равняется нулю.

В канале с интенсивным вдувом распределения средней скорости и давления описываются следующими соотношениями:

$$u_x = \left[\pi \int\limits_0^x v_w(x) d\xi\right] \cos\left(\frac{\pi}{2} r^2\right),$$

$$u_r = -\frac{v_w(x)}{r} \sin\left(\frac{\pi}{2} r^2\right),$$

$$p = \gamma \pi^2 \int\limits_x^1 \left[v_w(\xi) \int\limits_0^\xi v_w(\eta) d\eta\right] d\xi.$$

Для описания нестационарного поля течения расчетная область разбивается на ядро потока и тонкий пограничный слой вблизи поверхности вдува. В ядре потока основную роль играет акустическая составляющая скорости, а в пограничном слое — вращательная составляющая скорости.

Точное решение задачи получается на основе асимптотического подхода, применение которого накладывает следующие условия:

$$1 \ll \delta, \quad \delta^2 \ll \mathrm{Re}, \quad \frac{v_{x0}}{\mathrm{Re}^{1/2}} \ll v_w,$$

где v_w — скорость вдува, $\delta = L/R$ — удлинение канала, $\mathrm{Re} = \rho_0 v_{x0} L/\mu_0$ — число Рейнольдса.

Акустическое поле осевой скорости в канале при $\mathrm{M} \to 0$ описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \widetilde{u}_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}. \tag{2.235}$$

Граничные условия для уравнения (2.235) задаются на левой и правой границах канала:

$$\widetilde{u}_x = \sin \omega t \quad \text{при } x = 0; \quad \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 1.$$

Начальные условия имеют вид

$$\widetilde{u}_x = 0, \quad \frac{\partial \widetilde{u}_x}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0.$$

Граничное условие для скорости на правой границе канала получается исходя из того, что давление в выходном сечении равняется атмосферному давлению ($p = 1$ при $x = 1$).

Распределение осевой скорости в канале описывается соотношениями [276], соответствующими резонансному и нерезонансному случаям:

— при $\omega \neq b_{n*}$

$$\widetilde{u}(x,t) = u(t) + \sum_{n=0, n\neq n_*}^{\infty} \left\{ -\frac{2\varepsilon\omega}{b_n^2 - \omega^2} \left[\frac{\omega}{b_n^2} \sin(\omega t) - \sin(b_n t) \right] \right\} \sin b_n x;$$

— при $\omega = b_{n*}$

$$\widetilde{u}(x,t) = u(t) - \left[\frac{1}{b_{n*}} \sin(b_{n*} t) + t \cos(b_{n*} t) \right] \sin(b_{n*} x).$$

Здесь $b_n = (n + 1/2)\pi$. Индекс n относится к номеру гармоники, а звездочка обозначает резонансные условия ($b_{n*} = \omega$).

Распределение давления находится при помощи решения уравнения

$$\frac{\partial \widetilde{u}(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \widetilde{p}(x,t)}{\partial t}. \tag{2.236}$$

Интегрирование уравнения (2.236) с учетом граничных условий на левой границе расчетной области ($p = 1$ при $x = 1$) и изэнтропического условия ($p = \rho^\gamma$) дает следующее распределение давления [276], соответствующее резонансному и нерезонансному случаям:

— при $\omega \neq b_{n*}$

$$\widetilde{p}(x,t) = \gamma(x-1)\dot{u}(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\varepsilon\omega}{b_n^2} (\cos\omega t - \cos b_n t) \cos b_n x;$$

— при $\omega = b_{n*}$

$$\widetilde{u}(x,t) = \gamma(x-1)\dot{u}(t) - \gamma\left(2\cos b_{n*} x - b_{n*} t \sin b_{n*} t\right) \cos b_{n*} x.$$

Результаты расчетов, обработанные в виде зависимости давления от времени в точке $x/L = 0{,}5$ (при $\mathrm{M} = 0{,}1$), приводятся на рис. 2.35 для $\varepsilon = 0{,}1$. В течение периода вынужденных колебаний скорости акустическая волна дважды проходит длину канала (в прямом и обратном направлении). При $\omega = 1{,}1$ ($\Omega = 160$ Гц) решение является ограниченным (рис. 2.35 *а*) и определяется первыми несколькими гармониками. Резонансный случай показан на рис. 2.35 *б* при $\omega = \pi/2$ ($\Omega = 250$ Гц).

Приведенное решение не удовлетворяет граничным условиям прилипания для продольной скорости на поверхности вдува. Переход к нулевой осевой скорости на стенке канала имеет место лишь в тонком пограничном слое, имеющем многомасштабную структуру (multiscale structure). Течение в пограничном слое является невязким вследствие условия сильного вдува и вращательным. Вязкие эффекты учитываются в виде слагаемых второго порядка малости. Граничные условия на

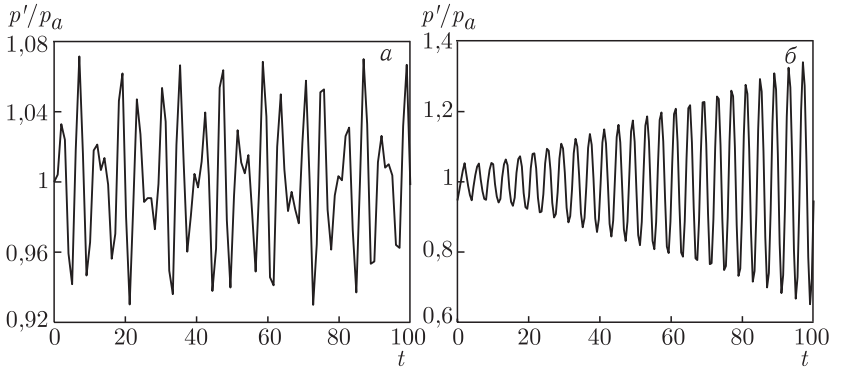


Рис. 2.35. Зависимости давления от времени при $\omega = 1{,}1$ (*а*) и $\omega = 1{,}57$ (*б*)

внешней границе пограничного слоя задаются исходя из распределения скорости в ядре потока.

Для описания структуры пограничного слоя используются новые переменные

$$\xi = \frac{1-r}{\mathrm{M}}, \quad \eta = \frac{1-r}{\beta},$$

где $\beta = \operatorname{Re} \mathrm{M}^2/\delta^2$. Для получения точного решения задачи считается, что $\mathrm{M} \ll \beta \ll 1$.

Распределение скорости в пограничном слое описывается соотношением [236]

$$u(\xi, \eta, x, t) = -\widetilde{U}(x) \left\{ \exp\left[-\frac{\Omega^2}{v_w(x)}\eta - \frac{i\Omega}{v_w(x)}\xi \right] - 1 \right\} \exp(i\Omega t),$$

где $v_w(x)$ — стационарная скорость вдува. Экспоненциальный член представляет собой вихревую составляющую нестационарного поля осевой скорости в пограничном слое. Комбинация вихревого члена и экспоненциального множителя записывается в виде

$$\exp\left[-\frac{\Omega^2}{v_w(x)}\eta - \frac{i\Omega}{v_w(x)}\xi + i\Omega t \right] = \exp\left[-\frac{\Omega^2}{v_w^3(x)}\eta \right] \exp(i\Omega\varphi),$$

где $\varphi = t - \xi/v_w$ — характеристика нестационарной вихревой составляющей осевой скорости. Радиальная скорость переноса вдоль линии $\varphi = \mathrm{const}$ описывается уравнением

$$\left.\frac{\partial r}{\partial t}\right|_{\varphi} = -\mathrm{M} \left.\frac{\partial \xi}{\partial t}\right|_{\varphi} = -\mathrm{M}\, v_w(x).$$

Приведенное соотношение показывает, что завихренность в пограничном слое переносится за счет стационарной скорости вдува.

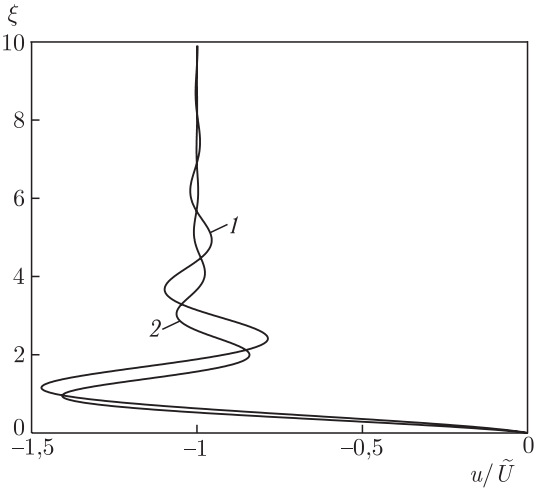


Рис. 2.36. Изменение осевой скорости в пограничном слое при $\Omega = 2{,}5$ (1); 3,0 (2)

Таблица 2.3. Сравнение приближенного и точного решений

t	$1 - \mathrm{M}t$	r_F	Расчет
$\mathrm{M} = 0{,}02$			
3	0,94	0,94	0,93
15	0,70	0,69	0,67
30	0,40	0,44	0,44
$\mathrm{M} = 0{,}05$			
1,48	0,93	0,92	0,92
11,83	0,41	0,44	0,45
29,54	–0,48	0,11	0
$\mathrm{M} = 0{,}10$			
1,48	0,85	0,85	0,85
11,81	–0,18	0,18	0,15
29,37	–1,94	0,01	0

Изменение безразмерной осевой скорости в пограничном слое показывает рис. 2.36 при $\mathrm{M} = 0{,}01$, $\beta = 0{,}1$ и $v_w = 1$. Осевая скорость нормируется на $-\widetilde{U}\exp(i\Omega t)$. При $\Omega = 2{,}5$ ядро потока распространяется примерно до координаты $\xi = 10$, что соответствует сечению $r = 0{,}9$. При уменьшении частоты толщина пограничного слоя увеличивается.

Радиальное положение фронта (максимума) вихревой составляющей скорости меняется со временем. Для сравнительно малых удалений от стенки положение фронта описывается приближенной зависимостью [236]

$$r_F = 1 - \mathrm{M}t. \tag{2.237}$$

Сравнение с результатами численного моделирования показывает, что соотношение (2.237) дает приемлемые результаты при $r_F \geqslant 0{,}5$. Точное решение получается при помощи интегрирования уравнения

$$dr = v_r(r)dt, \tag{2.238}$$

где

$$v_r(r) = -\frac{1}{r}\sin\left(\frac{\pi}{2}r^2\right).$$

Интегрирование уравнения (2.238) дает

$$r_F = \left\{\frac{4}{\pi}\,\mathrm{tg}^{-1}\Big[\exp\left(-\pi\mathrm{M}t\right)\Big]\right\}^{1/2}.$$

Сравнение данных, рассчитанных по приближенному и точному соотношениям, с результатами численного моделирования приводится в табл. 2.3.

Аналитическое, численное и экспериментальное исследование распространения акустических волн в плоскопараллельном канале со вдувом проводится в работах [236, 276].

2.17. Влияние турбулентности на характеристики течения в канале

Для внутренних течений в РДТТ характерно турбулентное движение рабочего тела. Турбулентность сказывается как на характеристиках течения, так и выступает в качестве интенсифицирующего фактора теплообмена в предсопловом объеме и сопловом блоке.

2.17.1. Приближенный подход. Следуя работе [80], рассмотрим приближенный метод расчета характеристик турбулентности в канале с проницаемыми стенками.

Для моделирования течения продуктов сгорания в канале на достаточно большом удалении от левой границы расчетной области используется косинусоидальный профиль продольной скорости, соответствующий течению невязкой несжимаемой жидкости [119, 120]. При $\mathrm{Re} \geqslant 100$ (сильный вдув) косинусоидальный профиль продольной скорости является достаточно хорошим приближением для точного

решения задачи [272], что находит также экспериментальное подтверждение [77].

Характеристики турбулентности находятся путем решения уравнений k–ε модели турбулентности [241] при известном распределении скорости.

Вдув осуществляется через верхнюю стенку канала с постоянной скоростью v_w. В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длины выбирается полуширина канала h, а для переменных с размерностью скорости — скорость вдува v_w. Характерным параметром задачи является число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho v_w h/\mu$.

Предполагая, что вблизи стенки канала, через которую осуществляется сильный вдув, конвекция доминирует над диффузией и изменение характеристик турбулентности по нормали к стенке происходит интенсивнее, чем вдоль нее, уравнения модели турбулентности после незначительных преобразований принимают вид

$$\frac{k^2}{v\varepsilon}\frac{\partial vk}{\partial y} = c_\mu \left(\frac{k^2}{\varepsilon}\right)^2 \frac{g}{v} - \frac{k^2}{v}, \tag{2.239}$$

$$\frac{k^2}{v\varepsilon^2}\frac{\partial v\varepsilon}{\partial y} = c_\mu c_{\varepsilon 1} \left(\frac{k^2}{\varepsilon}\right)^2 \frac{g}{v} - c_{\varepsilon 2}\frac{k^2}{v}. \tag{2.240}$$

Здесь $g = \varepsilon G/(c_\mu k^2)$. G представляет собой источниковый член, ответственный за порождение турбулентности.

Вычитая из уравнения (2.239) уравнение (2.240) и полагая $f = g/v$, получим соотношение

$$(vk)^{c_{\varepsilon 2}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varepsilon}{(vk)^{c_{\varepsilon 2}}} = -\sigma vkf, \tag{2.241}$$

где $\sigma = c_\mu(c_{\varepsilon 2} - c_{\varepsilon 1})$.

Соотношение (2.241), определяющее взаимосвязь между кинетической энергией турбулентности и скоростью ее диссипации при известных функциях $v = v(x, y)$ и $f = f(x, y)$, представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных, если имеется информация о поведении этих функций. Поскольку в явном виде такая информация отсутствует, воспользуемся некоторым допустимым произволом в выборе постоянных модели турбулентности, положив $c_{\varepsilon 2} = 1$ (вместо стандартного значения $c_{\varepsilon 2} = 1{,}92$) и перейдем от уравнения (2.241) к модельному уравнению вида

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon}{k}\right) = -\sigma k. \tag{2.242}$$

Коэффициент σ вычисляется по новому значению постоянной $c_{\varepsilon 2}$.

Интегрируя уравнение (2.242) по переменной y и полагая $\varepsilon/k = 0$ при $y = 1$, получим

$$\varepsilon = \sigma k F(x, y), \tag{2.243}$$

где

$$F(x, y) = \int\limits_y^1 f(x, \eta) d\eta.$$

Из уравнения (2.243) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \ln \left(v k F^{c_\mu/\sigma} \right) = -\sigma \frac{F}{v}.$$

Интегрируя по переменной y и обозначая через $\alpha(x)$ произвольную функцию интегрирования, получим соотношение для расчета кинетической энергии турбулентности

$$k = \alpha(x) F^{-c_\mu/\sigma} v^{-1} \exp\left(-\sigma \Phi\right), \tag{2.244}$$

где

$$\Phi = \int\limits_y^1 \frac{F(x, \eta)}{v(x, \eta)} d\eta.$$

Соотношение для диссипативной функции преобразуется к следующему виду:

$$\varepsilon = -\sigma \alpha(x) F^{c_\mu/(\sigma+1)} v^{-1} \exp\left(\sigma \Phi\right). \tag{2.245}$$

Функция $\alpha(x)$ находится при помощи данных физического эксперимента. Исходя из физических представлений о структуре течения, следует ожидать, что $\alpha = O(1)$.

Используя распределение скорости при сильном вдуве и проводя оценку членов в выражении для слагаемого, описывающего порождение турбулентности, получим, что $g = (\partial u/\partial y)^2$, поэтому

$$f = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} y\right).$$

Интегрирование приводит к следующим соотношениям для неизвестных функций:

$$F = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 x^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} y\right), \quad \Phi = \ln\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} y\right)\right]^\beta.$$

Здесь $\beta = u_m^2$, $\gamma = -(\sigma u_m^2 + 1)$. Под $u_m = \pi x/2$ понимается максимальная продольная скорость в поперечном сечении канала.

Вместо (2.244) и (2.245) для расчета кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации получим следующие соотношения:

$$k = -\alpha \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 u_m^4 u^2 \left|v\right|^\gamma , \tag{2.246}$$

$$\varepsilon = -\sigma\alpha \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 u_m^6 u^3 \left|v\right|^\gamma . \tag{2.247}$$

Изменим знак коэффициента σ, вернувшись к исходному значению $c_{\varepsilon 2} = 1{,}92$. Такая корректировка практически не изменяет самого коэффициента σ. В записи выражений (2.246) и (2.247) показатель степени γ следует изменить на $\delta = \sigma(W^2 - 1)$. На основе сравнения с данными измерений [282] в работе [80] показано, что $\alpha = -0{,}01\sigma/\pi^2$.

Распределения кинетической энергии турбулентности в поперечном сечении канала показаны на рис. 2.37.

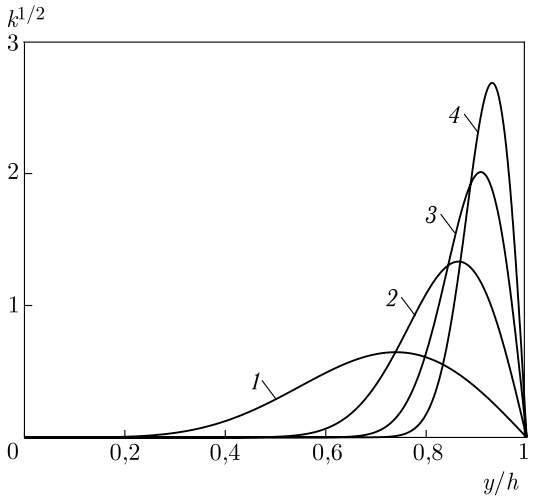


Рис. 2.37. Распределения кинетической энергии турбулентности при $x = 10$ (1); 20 (2); 30 (3); 40 (4)

Для расчета максимума кинетической энергии турбулентности и расстояния от поверхности канала до этого максимума имеются простые формулы:

$$k_m^{1/2} = 0{,}05W, \quad \delta_m = 1 - \frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\left[\left(\frac{\sigma}{2}\right)^{1/2} W\right].$$

Результаты расчетов показаны на рис. 2.38 в сравнении с данными [365]. Имеет место достаточно хорошее соответствие теоретических зависимостей и данных измерений.

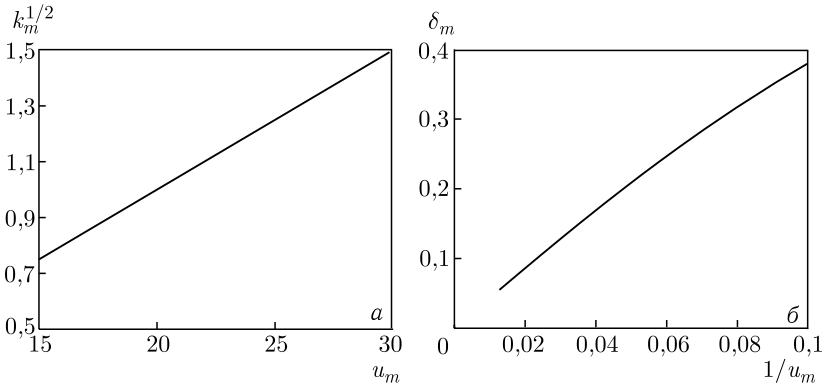


Рис. 2.38. Зависимости максимума кинетической энергии турбулентности (*а*) и расстояния от поверхности канала до ее максимума (*б*) от скорости потока на плоскости симметрии

Полученные результаты показывают, что интенсивность турбулентности в канале заряда увеличивается вниз по потоку, а зона максимума пульсаций скорости приближается к проницаемой поверхности канала (это может служить причиной возникновения эффекта эрозионного горения топлива в достаточно длинных каналах). Имеет место ламинаризация течения вниз по потоку, что делает возможным использование модели невязкой жидкости или жидкости с эффективным постоянным коэффициентом вязкости при описании равновесных течений в канале заряда РДТТ.

2.17.2. Подход, основанный на поиске подобного решения. Результаты физического эксперимента показывают, что на некотором расстоянии от входа в канал устанавливается квазистабилизированный режим течения, когда нормализованные на местную скорость параметры течения слабо зависят от продольной координаты.

Оценка влияния турбулентности на распределение скорости по сечению канала выполняется на основе решения краевой задачи для осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, замкнутых при помощи уравнений k–ε модели турбулентности.

Предположим, что распределения скорости и характеристик турбулентности в различных сечениях канала отличаются масштабами длины и скорости:

$$u = u_m(x)f(y), \quad v = -v_w g(y), \quad k = u_m^2(x)\alpha(y), \quad \varepsilon = u_m^3(x)\beta(y)/h,$$

где h — полуширина или радиус канала, v_w — скорость вдува, u_m — скорость на оси канала.

Моделирование течения в плоском или осесимметричном канале сводится к решению системы ОДУ [41]

$$\frac{1}{y^n}\left(y^n g\right)' - f = 0, \tag{2.248}$$

$$\frac{1}{y^n}\left[\frac{y^n}{\mathrm{Re}_m}\left(1+\zeta\right)f'\right]' + Mgf' - Mf^2 = \frac{1}{\rho u_m^2}\frac{dp}{dx}, \tag{2.249}$$

$$\frac{1}{y^n}\left[\frac{y^n}{\mathrm{Re}_m}\left(1+\frac{\zeta}{\sigma_k}\right)\alpha'\right]' + Mg\alpha' - 2Mf\alpha = \beta - \frac{\zeta}{\mathrm{Re}_m}f'^2, \tag{2.250}$$

$$\frac{1}{y^n}\left[\frac{y^n}{\mathrm{Re}_m}\left(1+\frac{\zeta}{\sigma_\varepsilon}\right)\beta'\right]' + Mg\beta' - 3Mf\beta = c_{\varepsilon 2}\frac{\beta^2}{\alpha} - c_{\varepsilon 1}\frac{\zeta}{\mathrm{Re}_m}\frac{\beta}{\alpha}f'^2. \tag{2.251}$$

Здесь $\zeta = \nu_t/\nu$.

Решение системы уравнений (2.248)–(2.251) зависит от параметра $M = 1/u_m$, который связан с числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_w/M$. Безразмерный градиент давления в уравнении (2.249) находится путем пристрелки условия постоянства расхода через поперечное сечение канала.

Решение двухточечной краевой задачи в фиксированном поперечном сечении канала, положение которого характеризуется параметром M, производится при помощи метода конечных разностей с использованием факторизации матрицы коэффициентов и итерационной процедуры. Для улучшения сходимости применяется метод нижней релаксации.

Профиль скорости в канале со вдувом формируется массоподводом с поверхности. Сформированная завихренность конвективно переносится в продольном направлении, и на линейных масштабах, характерных для условий в канале заряда (при $x/h < 30$ в плоском случае и при $x/h < 50$ в осесимметричном случае), турбулентность мало сказывается на профиле продольной скорости (рис. 2.39). Хорошее соответствие профиля скорости, рассчитанного в полной постановке (пунктирная линия), косинусоидальному распределению (сплошная линия), имеющему место в течении невязкой жидкости, свидетельствует об устойчивости течения и объясняется ламинаризацией потока при его разгоне вследствие распределенного вдува [188].

Ламинаризация течения в канале со вдувом подтверждается расчетами на основе k–ε модели турбулентности [77], которая дает результаты, лучше согласующиеся с данными физического эксперимента, чем полуэмпирические модели, например, модель Прандтля или ее

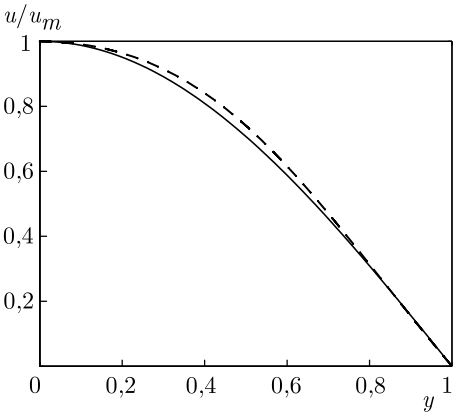


Рис. 2.39. Профиль продольной скорости в турбулентном течении (пунктирная линия) и течении невязкой жидкости (сплошная линия)

модификации, учитывающие влияние вдува на механизм турбулентного переноса [59].

Особенностью течений в каналах с распределенным массоподводом является наличие отрицательного градиента давления, обусловленного ускорением потока вследствие вдува, что оказывает существенное влияние на механизм и интенсивность турбулентного переноса.

С увеличением параметра M происходит турбулизация течения (за исключением пристеночной и приосевой областей), что выражается в наличии фронта турбулентности и смещении максимума кинетической энергии турбулентности от стенки в поток (рис. 2.40). У проницаемой стенки канала располагается слой с исчезающе малым уровнем кинетической энергии турбулентности (зона оттеснения). Вблизи стенки и оси канала поток является практически ламинарным. Увеличение уровня турбулентных пульсаций наблюдается в области сильного сдвига на некотором расстоянии от стенки канала, где жидкие частицы, движущиеся по нормали к поверхности, вынуждены развернуться в узкой приповерхностной зоне. Несмотря на завышенную ширину зоны оттеснения, полученные результаты достаточно хорошо согласуются с данными измерений.

Влияние геометрических размеров канала показывает рис. 2.41 при $h = 15$ мм (сплошные линии) и $h = 10$ мм (пунктирные линии). В целом, влияние масштабного фактора на распределение интенсивности турбулентности оказывается сравнительно малым.

Сравнение результатов расчетов характеристик турбулентности в плоском канале по приближенной модели (сплошные линии) и данных измерений (пунктирные линии) проводится на рис. 2.42 (при

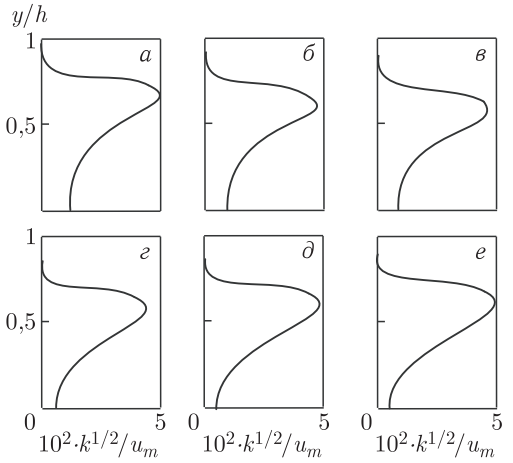


Рис. 2.40. Распределения кинетической энергии турбулентности при $M = 0{,}04$ (*а*); 0,032 (*б*); 0,02 (*в*); 0,016 (*г*); 0,012 (*д*); 0,01 (*е*)

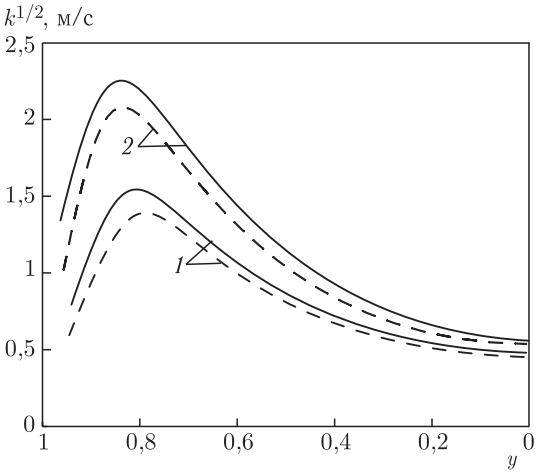


Рис. 2.41. Влияние масштабного фактора при $x/h = 10$ (1); 20 (2)

$h = 15$ мм и $v_w = 1{,}5$ м/с). Имеется достаточно хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных в различных поперечных сечениях канала. При этом максимум интенсивности турбулентности, полученный на основе численных расчетов, располагается несколько ближе к проницаемой поверхности канала. По всей видимости, это связано с приближенным характером описания процессов турбулентного переноса на основе приближенной модели.

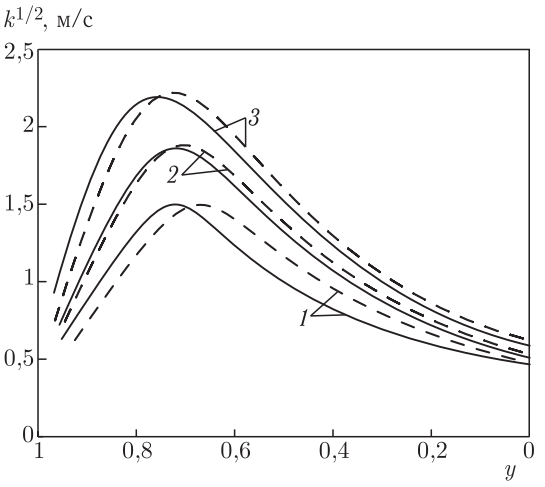


Рис. 2.42. Распределение интенсивности турбулентности в плоском канале при $x/h = 8$ (1); 15 (2); 18 (3)

Результаты расчетов характеристик турбулентности в круглом канале, полученные в полной постановке, когда совместно решаются уравнения модели турбулентности и осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса (сплошные линии), и данные, полученные из решения уравнений для характеристик турбулентности при известном распределении скорости (пунктирные линии), сравниваются на рис. 2.43 (при $h = 15$ мм и $v_w = 1{,}5$ м/с). Следует отметить, что в этом случае согласование расчетных и экспериментальных данных лучше (как в отношении уровня кинетической энергии турбулентности, так и в отношении положения ее максимума в поперечном сечении), чем в плоском канале (рис. 2.42).

Для сокращения вычислительных затрат газодинамическая задача, из которой находится распределение скорости в канале с проницаемыми стенками, и задача расчета характеристик турбулентности разделяются. Характеристики турбулентности находится из решения уравнений k–ε модели турбулентности при известном распределении скорости.

Уровень кинетической энергии турбулентности в канале с проницаемыми стенками является схожим с уровнем турбулентности в полностью развитом течении в канале с твердыми стенками, когда вязкие и рейнольдсовые напряжения находятся в равновесии с напряжениями, обусловленными давлением.

В канале со вдувом область равновесной турбулентности, которая характеризуется приближенным равенством слагаемых, описывающих

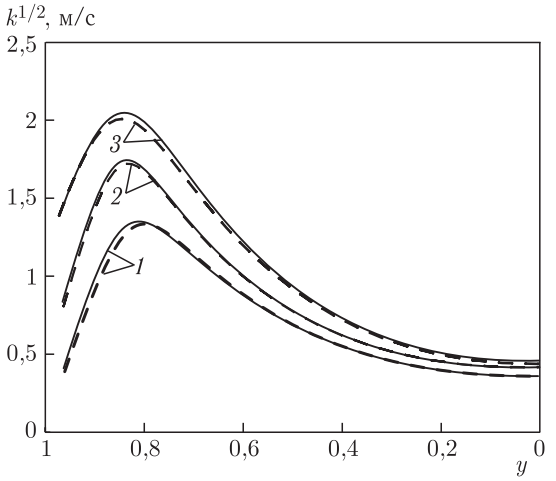


Рис. 2.43. Распределение интенсивности турбулентности в круглом канале при $x/h = 10$ (1); 15 (2); 20 (3)

порождение и диссипацию, отсутствует, что накладывает ограничения на применимость модели Прандтля [59].

В зоне максимума порождения турбулентности вместо диссипации основную роль играет конвективный перенос в поперечном (радиальном) направлении. Влияние конвективного переноса в продольном направлении становится заметным в ядре потока и возрастает по мере приближения к приосевой области, в которой генерация турбулентности и конвективный перенос в поперечном направлении уменьшаются. Вблизи проницаемой стенки конвекция доминирует над диффузией, и изменение характеристик турбулентности по нормали к стенке происходит более интенсивно, чем вдоль нее. Общий вклад конвективных слагаемых при вдуве приводит к снижению уровня турбулентности, а турбулизация течения связана с ростом генерации турбулентности за счет увеличения сдвига скорости в ядре потока. При этом максимум генерации турбулентности располагается дальше от стенки, чем в параллельных потоках. Влиянием молекулярной диффузии при сильном вдуве (при $\mathrm{Re} > 80$) обычно пренебрегают вплоть до массоподводящей поверхности канала.

Вдув рабочего тела через левый торец канала приводит к гашению турбулентности на начальном участке при $\mathrm{Re}/\mathrm{Re}_0 > 0,01$, где Re_0 — число Рейнольдса, вычисленное по скорости на входе в проницаемую часть канала. Положение максимума кинетической энергии турбулентности соответствует зоне смешения потоков, поступающих с торца и стенок канала.

Глава 3

ТРЕХМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ СО ВДУВОМ

В настоящее время нет принципиальных методических трудностей в построении математических моделей внутренних течений, включая описание процессов турбулентного переноса и физико-химических процессов, а также численных процедур, реализующих расчет внутренних течений в областях различной геометрической формы. Однако прямое решение трехмерных задач связано с достаточно больши́ми временны́ми затратами и повышенными требованиями к ресурсам вычислительной техники, что осложняет получение характеристик течения в режиме реального времени и включение разработанных средств численного моделирования в системы проектирования технических устройств различного назначения. Использование обоснованных предположений о характере и свойствах течения позволяет трансформировать задачу таким образом, что ее решение становится возможным на основе сравнительно простых и доступных вычислительных средств.

Результатом такого подхода является набор математических моделей, отличающихся друг от друга уровнем схематизации течения и способностью предсказывать те или иные характеристики потока. Сопоставление результатов расчетов в рамках совокупности математических моделей, а также результатов каждой из построенных моделей с экспериментальными данными позволяет ответить на вопрос о том, насколько правомерно использование той или иной упрощенной модели для воспроизведения характеристик течений в каналах реальных геометрических конфигураций.

В данной главе рассматриваются вопросы, связанные с построением, реализацией и обоснованием математических моделей трехмерных течений в каналах с проницаемыми стенками. Обсуждаются модели различной степени сложности и трудоемкости. Для моделирования течений в достаточно длинных каналах с неизменной формой поперечного сечения по длине канала разрабатываются модели, в основу которых положен ряд упрощающих положений, связанных с наличием преимущественного направления развития потока (параболизованные модели). Математические модели более общего плана реализуются в рамках решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Сток-

са, замкнутых при помощи k–ε модели турбулентности, или в рамках современных подходов к моделированию турбулентных течений (моделирование крупных вихрей). Обсуждаются особенности численной реализации моделей и постановки граничных условий на проницаемой поверхности канала.

Работоспособность моделей, их тестирование и возможности разработанных средств численного моделирования демонстрируются на примере решения ряда модельных задач. Получены распределения скорости, давления и характеристик турбулентности в каналах, имеющих различную форму поперечного сечения в плане. Сравниваются результаты, полученные в рамках различных моделей, а также вычислительные ресурсы, необходимые для реализации каждого из подходов.

Разработанные средства расчетной диагностики являются основой для моделирования движения конденсированных включений в турбулентном потоке, их инерционной сепарации и межфазного взаимодействия (при помощи дискретно-траекторного метода пробных частиц).

3.1. Упрощенные подходы к описанию трехмерных течений

Плоский или осесимметричный канал со вдувом является математической моделью течения продуктов горения. Во многих случаях имеются геометрические или расходные факторы, приводящие к возникновению трехмерных эффектов. На практике используется несколько упрощенных подходов, позволяющих учесть трехмерные эффекты.

3.1.1. Общая характеристика. Математическое моделирование внутренних течений в камерах сгорания РДТТ связано с рядом трудностей, в частности с изменяющейся формой поверхности горения, образованием в дозвуковой области вихревых зон с замкнутыми линиями тока, вызванных взаимодействием встречных потоков, и рядом других. Успех расчетов, позволяющих передать качественные и количественные особенности течений, связан как с подходящим выбором математической модели, так и с созданием эффективных алгоритмов и программ, позволяющих исследовать большое число разнообразных конструкций.

Работоспособность упрощенных подходов и достоверность расчетных данных определяются их нацеленностью на описание узкого класса течений и учет в полной мере особенностей этих течений, что позволяет в существенной степени упростить постановку задачи и формулировку математической модели.

Одной из областей, в которой проявляются трехмерные эффекты, является зона задней сопловой крышки двигателя с утопленным

соплом. Трехмерность течения является следствием отклонения поворотного управляющего сопла, конструктивного оформления локализованных узлов подвода и отбора газа для целей управления, а также гидродинамической неустойчивости течения и его склонности к образованию трехмерных вихревых образований.

Другими примерами областей, в которых учитываются трехмерные эффекты, являются каналы зарядов с неосесимметричным оформлением поверхности заряда, имеющей дегрессивные элементы щелевой и звездообразной формы.

3.1.2. Методы понижения размерности. Основная идея методов понижения размерности состоит в выделении направления или плоскости преимущественного развития течения. По оставшемуся координатному направлению скорость и другие параметры считаются величинами, пределы изменений которых и их качественный характер прогнозируются, исходя из дополнительных соображений. Используя некоторую функциональную зависимость параметров течения от пространственных координат и информацию об их граничных значениях, удается проинтегрировать систему уравнений изменения количества движения в этом направлении и тем самым понизить ее порядок по пространственным координатам.

Рассмотрим общую схему данного подхода применительно к трехмерному течению в области между утопленным соплом и поверхностью заряда. В цилиндрической системе координат уравнения, описывающие течения, имеют вид

$$\frac{\partial rU}{\partial t} + \frac{\partial rA}{\partial x} + \frac{\partial rB}{\partial r} + \frac{\partial C}{\partial \varphi} = F, \tag{3.1}$$

где U — вектор консервативных переменных, а $A(U)$, $B(U)$, $C(U)$ — вектора потоков.

Предположим, что преимущественное направление развитие потока происходит вдоль оси x, связанной с гидравлической осью канала. В сечениях, перпендикулярных оси x, имеется двухсвязная плоская область с внутренней границей $r = r_1(x, \varphi)$ и внешней границей $r = r_2(x, \varphi)$.

Считается, что неизвестные и потоки подчиняются линейному распределению при изменении осевой координаты. В интервале $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ имеется следующее представление:

$$W(x, r, \varphi) = W_1 + (W_2 - W_1)\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}, \tag{3.2}$$

где W — один из рассматриваемых векторов, W_1 и W_2 — векторы при $r = r_1$ и $r = r_2$.

Подставляя разложение (3.2) в уравнение (3.1) и производя интегрирование по радиальной координате от $r = r_1$ до $r = r_2$, получим уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(r_2 - r_1)r_1 U_1 + (r_2 - r_1)r_2 U_2\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left[(r_2 - r_1)r_1 A_1 + (r_2 - r_1)r_2 A_2\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left[(r_2 - r_1)C_1 + (r_2 - r_1)C_2\right] + 2r_1\frac{dr_1}{dx}A_1 - 2r_2\frac{\partial r_2}{\partial x}A_2 + \\ + 2r_2 B_2 - 2r_1 B_1 - C_2\frac{\partial r_2}{\partial \varphi} = (r_2 - r_1)\left(F_2 + F_1\right). \quad (3.3)$$

Успешное применение подхода связано с тем, насколько удачно используется информация о граничных значениях неизвестных функций и потоков в уравнении (3.3). Условие непротекания, знание скорости горения или закона перемещения боковой поверхности канала позволяют в ряде случаев получить замкнутую постановку краевой задачи.

Метод понижения размерности близок по своей постановке к известному методу интегральных соотношений Дородницына–Белоцерковского и представляет его вариант для случая одной полосы.

В соответствии со спецификой задачи, используется нелинейное приближение параметров потока, другое направление интегрирования или иная запись системы уравнений. Однако общие черты подхода остаются теми же самыми, требуя для получения замкнутой постановки задачи ряда дополнительных данных.

3.1.3. Методы возмущений. В том случае, когда малые отклонения от осевой симметрии не вызывают катастрофической перестройки потока (потери устойчивости), трехмерное течение рассматривается как возмущение (геометрическое или расходное) соответствующего осесимметричного течения.

Решение возмущенной задачи строится в виде разложения в ряд по некоторому параметру.

3.1.4. Конструирование течений наложением особенностей. В ряде случаев течения сложной трехмерной структуры моделируются, используя принцип суперпозиции решений. Среди таких решений особый интерес представляют течения, наводимые сосредоточенными или распределенными вихрями.

В рамках допущения о потенциальности течения используется линейное уравнение для потенциала скорости. Линейность уравнения для потенциала позволяет сформировать решение с требуемыми свойствами,

используя наложение простейших решений типа источника, стока, диполя и вихревой нити, в виде

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Phi = \sum \Phi_i.$$

При всей схематичности и условности такого подхода, а также при удовлетворении граничным условиям и обеспечении идентичности геометрической и расчетной областей полученное решение служит хорошим приближением реального потока и достаточно хорошо воспроизводит течения со сложной трехмерной структурой.

3.2. Моделирование течений в каналах звездообразной формы

Камеры сгорания двигательных установок имеют разнообразные геометрические оформления, что связано как с решением компоновочных задач, так и с необходимостью обеспечения требуемой условиями их работы поверхности массоподвода. Широкое применение находят каналы со звездообразной (многощелевой) формой поперечного сечения в плане. Каналы такого сечения используются в зарядах ускорителей Space Shuttle, Titan IV, Ariane V, H-1 и других.

Поперечное сечение применяемых на практике звездообразных каналов обычно имеет симметричную форму. Выделим в качестве расчетной области элемент сечения, образованный участком поверхности массоподвода и двумя плоскостями симметрии, проходящими через продольную ось канала. Течение в таком элементе воспроизводит течение в реальном канале при обеспечении на плоскостях разреза условий симметрии и описывается уравнениями Эйлера

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{3.4}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{3.5}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{3.6}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{3.7}$$

Ось x декартовой системы координат связывается с продольной осью канала, а поперечное сечение канала $F(y, z)$ считается неизменным вдоль продольной координаты.

Для каналов со слабо изменяющейся в продольном направлении геометрией поперечного сечения принимаются допущения о подобии

профилей продольной скорости и независимости от продольной координаты распределений поперечных составляющих скорости.

Канал разбивается на ряд сечений, и для каждого сечения вводятся новые переменные такие, что

$$u = xU(y,z), \quad v = V(y,z), \quad w = W(y,z). \tag{3.8}$$

Распределения давления по длине канала описывается параболической зависимостью

$$p = p_0 - \frac{1}{2}\rho C^2 x^2 + P(y,z), \tag{3.9}$$

где p_0 — давление в начале канала, C — скорость на оси канала. Поправка давления равняется нулю на оси канала и возрастает по направлению к поверхности вдува.

Подставляя соотношения (3.8) и (3.9) в уравнения (3.4)–(3.7), после простых преобразований получим, что для каждого сечения канала имеет место система уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = -U, \tag{3.10}$$

$$V\frac{\partial U}{\partial y} + W\frac{\partial U}{\partial z} = C^2, \tag{3.11}$$

$$V\frac{\partial V}{\partial y} + W\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{3.12}$$

$$V\frac{\partial W}{\partial y} + W\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{3.13}$$

Описание трехмерного течения в канале сводится к решению набора двумерных задач, описываемых уравнениями (3.10)–(3.13). При этом давление и скорость на оси канала находятся из решения, основанного на модели слоистой гидравлики. Для нахождения продольного градиента давления используется расходное соотношение.

Система уравнений, записанная в виде (3.10)–(3.13), используется также в работах [6, 12, 56, 57].

Искривленность поверхности массоподвода затрудняет постановку граничных условий на стенках канала. Для преодоления этой трудности с поперечным сечением канала связывается криволинейная система координат $\eta = \xi(y,z)$, $\zeta = \eta(y,z)$. Расчетная область с криволинейными границами в физической плоскости отображается на прямоугольник в вычислительном пространстве.

Сделанные предположения позволяют построить эффективный вычислительный алгоритм расчета трехмерных течений в каналах со вдувом.

Уравнения (3.10)–(3.13) решаются методом конечных разностей на предварительно построенной криволинейной, согласованной с границами физической области, сетке. Примеры криволинейных сеток для элемента канала в виде луча звезды приводятся на рис. 3.1.

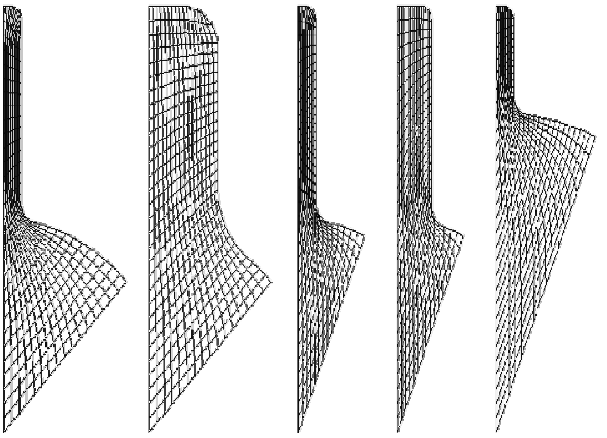


Рис. 3.1. Криволинейные сетки для лучевой области звездообразного канала

Для интегрирования основных уравнений используется метод установления. Используется явная схема по времени, а производные по пространственным координатам вычисляются со вторым порядком точности против потока. Трудности расчета давления, присущие низкоскоростным течениям, преодолеваются введением в уравнение неразрывности члена, представляющего собой искусственную сжимаемость. Введение искусственной сжимаемости через производную от давления не сказывается на результатах расчета.

На поверхности массоподвода и линии симметрии задаются разностные аналоги граничных условий, выраженные через контравариантные составляющие скорости.

Задается продольный градиент давления, и система уравнений разрешается до установления параметров во времени. Полученное распределение продольной скорости подставляется в расходное соотношение, а невязка служит критерием точности решения. Для пристрелки градиента давления применяется метод Ньютона, показывающий хорошую сходимость.

Вычислительная процедура включает в себя следующие этапы.

1. Находится давление p_0, исходя из расчетов по нульмерной модели.
2. Рассчитываются распределения давления и скорости вдоль продольной оси канала.

3. Определяются параметры течения для каждого сечения канала.
4. При необходимости производятся глобальные итерации до удовлетворения критерия сходимости.

Для учета сжимаемости и неравномерности скорости вдува по длине канала плотность газа и скорость горения находятся из уравнения состояния $\rho = p/RT$ и закона горения топлива $u = u_0 p^{\nu}$. Для учета изменения параметров течения во времени задача сводится к циклическому решению последовательности стационарных задач для различных моментов времени с пересчетом геометрии массоподводящей поверхности.

Результаты расчетов, обработанные в виде линий уровня скорости и давления в поперечном сечении канала, приводятся на рис. 3.2. Максимум продольной скорости имеет место в приосевой области течения.

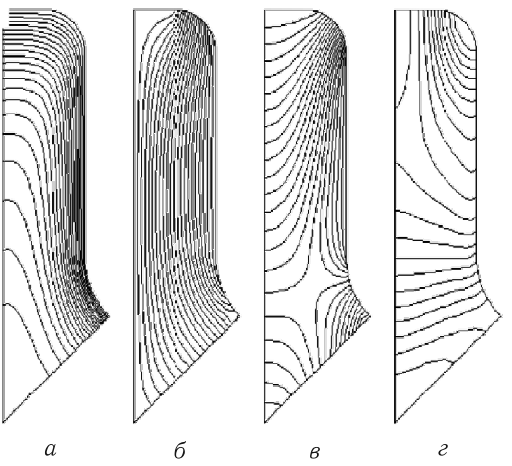


Рис. 3.2. Линии уровня продольной скорости (*а*), поперечных составляющих скорости (*б* и *в*) и давления (*г*)

Распределения продольной скорости для каналов с различным поперечным сечением в виде звезды приводятся на рис. 3.3. Каналы имеют разное число лучей звезды (4 или 8), а также различные варианты сопряжения луча с центральной частью канала.

Профиль продольной скорости в сечении между лучей достаточно хорошо описывается косинусоидальной зависимостью, имеющей место в вихревом течении невязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом канале. Совпадение с косинусоидальным распределением тем лучше, чем большая доля окружности центрального канала не занята лучем (рис. 3.4). Пунктирная линия соответствует косинусоидальному

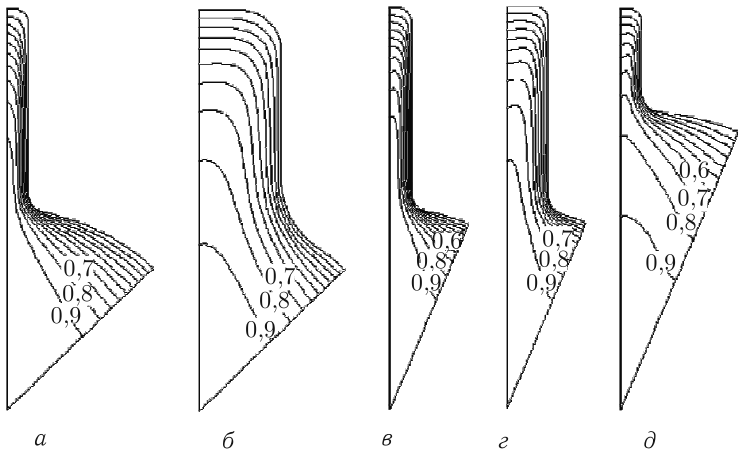


Рис. 3.3. Линии уровня продольной скорости в каналах с различной формой поперечного сечения в виде звезды

распределению продольной скорости, а сплошная линия — результатам расчета для звездообразном канале.

Профили продольной скорости обрабатываются следующим образом. Планиметрируется площадь, заключенная внутри линии уровня, соответствующей определенному значению скорости. Графики зависимости продольной скорости от относительной площади, ограниченной соответствующей линией уровня, приводятся на рис. 3.5. Согласование расчетных данных (сплошная линия) с косинусоидальным распределением (пунктирная линия) становится лучше при отсутствии заметных

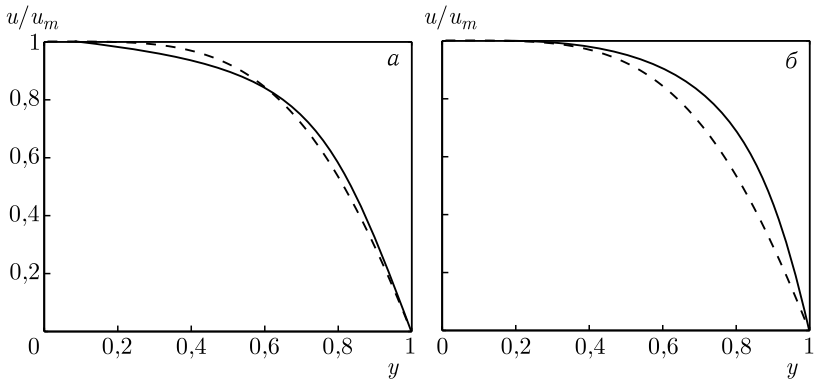


Рис. 3.4. Профили продольной скорости в звездообразном канале с различным оформлением лучевой области

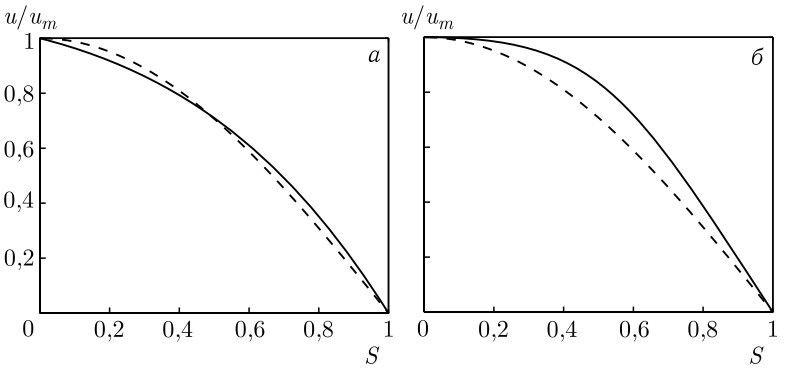


Рис. 3.5. Зависимость продольной скорости от относительной площади в звездообразном канале с различным оформлением лучевой области

узостей в месте сопряжения лучевой области с центральной частью канала.

Разработанный метод расчета канальных течений допускает обобщение на случай каналов с переменной по длине площадью поперечного сечения с использованием идеи параболизации основных уравнений по продольной координате. Полученные результаты находятся в качественном и количественном согласовании с данными физического и вычислительного экспериментов, имеющимися в литературе для каналов со сложной формой поперечного сечения [56, 57].

Трехмерные течения в каналах со вдувом рассматриваются в работе [11] (физический и вычислительный эксперимент). Для расчетов используется модель вязкого теплопроводного газа и криволинейная ортогональная система координат. Применяется геометрическая модель в виде сектора с углом раствора 60°, а сетка имеет размерность $60 \times 80 \times 25$. Для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса используется модель турбулентной вязкости Секундова. Приводятся результаты расчетов распределений скорости в звездообразном канале и в окрестности утопленной части сопла.

Из щели на заднем торце канала поток набегает на утопленную часть сопла, оттесняя встречный поток из кольцевого зазора над соплом. В месте встречи потоков образуется точка растекания, а между лучами формируется парный вихрь, направляющийся в сопло. Поток из центрального канала оттесняется потоком из-за сопла и сразу направляется в сопло. При движении по соплу парная вихревая структура сохраняется. Положение точки растекания на утопленной части сопла зависит от соотношения расходов из звездообразного канала и кольцевого канала над соплом. При увеличении расхода газа из кольцевого канала над соплом точка растекания сдвигается вниз по потоку. При

отсутствии вдува над соплом поток из центрального канала по лучу полностью проникает в околосопловое пространство.

В работе [245] проводится моделирование ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости (при $\mathrm{Re} = 100 \div 1000$) в каналах со звездообразной формой поперечного сечения в плане (star-shaped configuration). Для исследования распределения осевой составляющей завихренности используется упрощенная форма уравнений Эйлера и уравнение Бюргерса (Burgers equation).

Для упрощения решения задачи предполагается, что осевая скорость изменяется по линейной зависимости вдоль оси канала, а распределение поперечной скорости не зависит от осевой координаты. Полученная система уравнений имеет такой же вид, что и система уравнений (3.10)–(3.13). Расчеты проводятся как для полной геометрии канала, так и для его части, используя условия симметрии течения. Параметром задачи является продольный градиент давления, который находится при помощи пристрелки условия постоянства расхода ($C = 4{,}414$ при $\mathrm{Re} = 10^2$ и $C = 4{,}357$ при $\mathrm{Re} = 10^3$).

Результаты расчетов течения в канале со звездообразной формой поперечного сечения, имеющего n лучей, показывают, что между лучами звезды формируется n пар вихревых образований. Интенсивность вихрей возрастает при увеличении числа Рейнольдса. Вихри возникают также вблизи угловых точек канала с квадратной формой поперечного сечения в плане (4 пары вихрей в угловых точках).

В работе [15] для расчетов используется двумерная стационарная осесимметричная постановка задачи и модель невязкой сжимаемой жидкости. Применяется зонная модель течения с разбивкой расчетной области на области дозвукового, трансзвукового и сверхзвукового течений с частичным перекрытием подобластей. Основные уравнения записываются с использованием переменных функция тока—вихрь скорости в криволинейной системе координат.

Сопряженная задача для канала с звездообразной формой поперечного сечения в плане решается в работе [248]. Течение продуктов сгорания моделируется в рамках одномерной модели, а напряжения и деформации заряда рассматриваются в рамках двумерной модели. Изменение радиуса заряда учитывается при помощи феноменологической модели.

3.3. Описание течений в переменных скорость–вихрь скорости

Приближенный метод расчета основан на записи уравнений, описывающих течение, в переменных скорость–вихрь скорости, и малом различии профилей продольной скорости в течении вязкой несжимаемой

жидкости (параболический профиль продольной скорости) и вихревом течении невязкой несжимаемой жидкости (косинусоидальный профиль продольной скорости).

3.3.1. Преобразование уравнений. Для численных расчетов применяются физико-математические модели различной степени сложности, реализуемые при помощи конечно-разностных или конечно-объемных методов. Учитывая физические особенности течения, удается добиться существенного упрощения решения задачи [12, 38, 56]. Построение упрощенных математических моделей, вычислительная эффективность которых достигается за счет пренебрежения влиянием некоторых факторов, обосновывается соответствующими оценками и сравнением различных подходов.

Приближенный подход к моделированию течений в каналах со вдувом основан на построении профиля продольной скорости из модели слоистого течения (уравнение Пуассона с постоянным членом в правой части) с последующим определением перепада давления из условия потери импульса на разгон того расхода, который подведен вдувом [38].

Рассмотрим трехмерное течение в канале с произвольной формой поперечного сечения в плане. Совместим ось x прямоугольной декартовой системы координат с гидравлической осью канала, а оси y и z свяжем с его поперечным сечением. Предполагается, что сечение $x = 0$ является плоскостью зеркальной симметрии течения, а форма поперечного сечения канала — неизменной вдоль оси x (рис. 3.6).

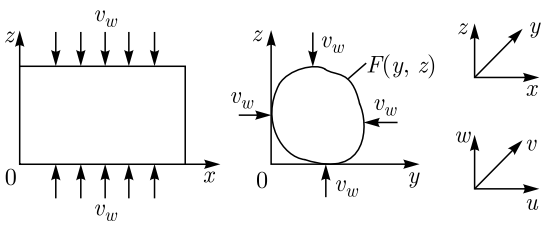


Рис. 3.6. Система координат

Результаты вычислительного эксперимента показывают, что распределения характеристик турбулентности в течениях, сформированных вдувом, практически не зависят от числа Рейнольдса, а профиль скорости в турбулентном потоке достаточно хорошо описывается решением краевой задачи для уравнений вихревого течения невязкой несжимаемой жидкости с граничными условиями нормального вдува на проницаемой поверхности канала.

Учитывая малую роль вязкости в формировании картины течения, для расчета распределений скорости и давления в канале со вдувом

используется модель невязкой несжимаемой жидкости:

$$\nabla \boldsymbol{v} = 0, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{3.15}$$

Производная по времени в уравнение (3.15) включается для нахождения распределения скорости при помощи метода установления.

Для исключения давления используется уравнение переноса вихря скорости $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}$, которое имеет следующий вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = 0. \tag{3.16}$$

В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длины выбирается характерный размер канала h, а для переменных с размерностями скорости и давления — модуль скорости вдува v_w и скоростной напор ρv_w^2. Уравнения (3.14) и (3.15) сохраняют свой вид и в безразмерной форме, если положить $\rho = 1$.

На основе расчетных и экспериментальных данных для течений в достаточно длинных каналах со слабо меняющейся в продольном направлении геометрией поперечного сечения делается предположение о локальном подобии профиля продольной скорости и независимости от координаты x распределения поперечной скорости:

$$u = xU(y, z), \quad v = v(y, z), \quad w = w(y, z). \tag{3.17}$$

Подстановка соотношений (3.17) в уравнение (3.15) позволяет заключить, что распределение давления вдоль оси канала описывается параболической зависимостью

$$p = -\frac{1}{2}C^2x^2 + P(y, z). \tag{3.18}$$

Постоянная C определяется из расходных соотношений. При постоянном законе массоподвода со стенок полагается, что $C = \pi\Pi/2S$, где Π и S — периметр и площадь поперечного сечения канала.

Распределения переменных, описываемых соотношениями (3.17) и (3.18), определяются формой поперечного сечения канала и условиями массоподвода.

Подстановка соотношений (3.17) и (3.18) в уравнение неразрывности (3.14) и уравнение изменения количества движения (3.15) показывает, что расчет характеристик течения сводится к интегрированию системы уравнений, содержащей уравнение, моделирующее относительное распределение продольной скорости $U(y, z)$, два уравнения Пуассона для составляющих скорости в поперечном сечении канала $v(y, z)$ и $w(y, z)$, уравнение для составляющей вихря скорости в про-

дольном направлении $\omega = \partial w/\partial y - \partial v/\partial z$ и уравнение Пуассона для давления. Уравнения, описывающие течение, имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + v\frac{\partial U}{\partial y} + w\frac{\partial U}{\partial z} + U^2 = C^2, \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial \omega}{\partial z}, \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y}, \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} + w\frac{\partial \omega}{\partial z} - \omega U = 0, \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = v\frac{\partial U}{\partial y} + w\frac{\partial U}{\partial z} - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2. \tag{3.23}$$

В криволинейной системе координат (η, ζ), согласованной с границами области в физическом пространстве, уравнения (3.19)–(3.23) примут следующий вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} + V\frac{\partial U}{\partial \eta} + W\frac{\partial U}{\partial \zeta} + U^2 = C^2, \tag{3.24}$$

$$g_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - 2g_{12}\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\,\partial \zeta} + g_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} = \\ = J\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}z_\eta - \frac{\partial U}{\partial \eta}z_\zeta\right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta}y_\zeta - \frac{\partial \omega}{\partial \zeta}y_\eta\right)\right], \tag{3.25}$$

$$g_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - 2g_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta\,\partial \zeta} + g_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \\ = J\left[\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}y_\zeta - \frac{\partial U}{\partial \zeta}y_\eta\right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta}z_\zeta - \frac{\partial \omega}{\partial \zeta}y_\eta\right)\right], \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + V\frac{\partial \omega}{\partial \eta} + W\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} - \omega U = 0, \tag{3.27}$$

$$g_{22}\frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} - 2g_{12}\frac{\partial^2 P}{\partial \eta\zeta\,\partial +}g_{11}\frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} = \\ = J^2\left[V\frac{\partial U}{\partial \eta} + W\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}z_\zeta - \frac{\partial v}{\partial \zeta}z_\eta\right)^2 + \right. \\ \left. +2\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}y_\zeta - \frac{\partial v}{\partial \zeta}y_\eta\right)\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}z_\zeta - \frac{\partial w}{\partial \zeta}z_\eta\right) - \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}y_\zeta - \frac{\partial w}{\partial \zeta}y_\eta\right)^2\right]. \tag{3.28}$$

Здесь V и W — контравариантные составляющие скорости

$$V = \frac{1}{J}(vz_\zeta - wy_\zeta), \quad W = \frac{1}{J}(-vz_\eta - wy_\eta).$$

Нижние индексы η и ζ обозначают дифференцирование по соответствующим координатным направлениям.

Использование модели невязкой жидкости позволяет получить качественную картину течения и оценить влияние инерционных сил на ее формирование. Обоснованность предположений, сделанных при построении модели, подтверждается данными физического эксперимента и достаточно хорошим согласованием результатов численного моделирования с данными, полученными на основе полной и параболизованной системы уравнений.

3.3.2. Постановка граничных условий. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ жидкость находится в состоянии покоя.

Для скорости на контуре поперечного сечения канала (при y, $z \in F$) используются граничные условия непротекания и нормального вдува ($\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = v_w$, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n} = 0$), имеющие вид

$$u = 0, \quad v = v_w \cos\alpha, \quad w = v_w \sin\alpha,$$

где α — угол между нормалью к проницаемой поверхности канала и осью x.

При формулировке граничного условия для вихря скорости используется подход, основанный на привлечении теоремы Стокса о циркуляции скорости

$$\int\limits_S \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\Omega}\, ds = \oint\limits_L \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{l}, \tag{3.29}$$

где L — замкнутый жидкий контур; S — поверхность, натянутая на этот жидкий контур; $d\boldsymbol{l}$ и ds — элементы жидкого контура и поверхности; $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

При дискретной реализации формулы (3.29) в приграничной ячейке представляется возможным удовлетворить граничному условию нормального вдува на проницаемой стенке, что обеспечивает введение в модель рождающейся на массоподводящей поверхности канала завихренности.

3.3.3. Вычислительная процедура. Система уравнений (3.24)–(3.28) решается методом конечных разностей на предварительно построенной криволинейной сетке.

В качестве начального приближения для решения уравнения (3.24) задается распределение скорости, имеющее место в течении Пуазейля.

Это приводит к решению краевой задачи для вязкого слоистого течения, которая сводится к интегрированию уравнения Пуассона

$$g_{22}\frac{\partial^2\widehat{U}}{\partial\eta^2} - 2g_{12}\frac{\partial^2\widehat{U}}{\partial\eta\,\partial\zeta} + g_{11}\frac{\partial^2\widehat{U}}{\partial\zeta^2} = -J^2, \tag{3.30}$$

где $U = a\widehat{U}$. Постоянная a находится из расходных соотношений. При постоянном законе массоподвода расход через сечение, расположенное на расстоянии x от левого торца канала, равняется

$$Q = x\Pi = x\int\int U(y,z)\,dydz = ax\int\int \widehat{U}(y,z)\,dydz,$$

поэтому

$$\Pi = a\int\int \widehat{U}(y,z)\,dydz.$$

Двойной интеграл вычисляется по следующей дискретной формуле

$$\int\int \widehat{U}(y,z)\,dydz = 0{,}25h_\eta h_\zeta \sum_{i=1}^{n_y-1}\sum_{j=1}^{n_z-1}\Big(\widehat{U}_{i,j} + \widehat{U}_{i+1,j} + \widehat{U}_{i,j+1} + \widehat{U}_{i+1,j+1}\Big),$$

где h_η и h_ζ — шаги сетки в вычислительном пространсте,

$$h_\eta = \frac{1}{n_y-1}, \quad h_\zeta = \frac{1}{n_z-1}.$$

Под n_y и n_z понимается число узлов сетки по координатным направлениям y и z соответственно.

В дальнейшем строится итерационная процедура с целью уточнения распределения скорости, полученного из решения уравнения (3.30). Вычисления реализуются в следующей последовательности. Проводится по одной итерации для решения уравнений Пуассона (3.25) и (3.26), после чего, используя формулу (3.29), уточняются граничные условия для вихря скорости и делается один шаг по времени для решения уравнения (3.27) методом установления при новых граничных условиях. Затем реализуется метод установления для уравнения (3.24), описывающего относительное распределение продольной скорости, с последующим уточнением граничных условий. Процедура повторяется до тех пор, пока максимальная из невязок по всем переменным (максимальная разность значений каждой из переменных на данной и предыдущей итерациях) не станет меньше некоторого малого числа. Сходимость решения проверяется дроблением сетки и уменьшением уровня относительной невязки.

Используя для дискретизации уравнения Пуассона центрированные конечно-разностные формулы 2-го порядка точности, на итерации $n+1$ получим

$$f_{i,j}^{n+1} = \Bigg[g_{22}\left(f_{i+1,j}^n + f_{i-1,j}^n\right)\frac{h_\zeta}{h_\eta} - \\ - \frac{1}{2} g_{12}\left(f_{i+1,j+1}^n - f_{i-1,j+1}^n - f_{i+1,j-1}^n + f_{i-1,j-1}^n\right) + \\ + g_{11}\left(f_{i,j+1}^n + f_{i,j-1}^n\right)\frac{h_\eta}{h_\zeta} - S_{i,j}^n h_\eta h_\zeta \Bigg] \times \left(2g_{11}\frac{h_\eta}{h_\zeta} + 2g_{22}\frac{h_\zeta}{h_\eta}\right)^{-1}.$$

Здесь $f = v$, w или $\widehat{U}$ для уравнений (3.25), (3.26) или (3.30) соответственно. Через S обозначены правые части указанных уравнений, которые вычисляются в узле i, j на итерации n. Для решения системы разностных уравнений используется метод верхней релаксации. Коэффициент релаксации, обеспечивающий высокую скорость сходимости итерационного процесса, находится путем подбора.

Для дискретизации уравнений (3.24) и (3.27) применяется схема Лакса–Вендрофа. Для вычисления производных по координатам η и ζ используются центральные конечно-разностные формулы 2-го порядка точности. Временной шаг выбирается из соображений устойчивости разностной схемы. В форме, основанной на результатах вычислительного эксперимента, имеем

$$h_\tau = 0{,}1\frac{h_\eta h_\zeta}{h_\eta + h_\zeta}.$$

Интегрирование уравнения Пуассона для давления (3.28), а также уравнений модели турбулентности производится после расчета распределений скорости и вихря скорости.

3.3.4. Реализация граничного условия для вихря. Граничные условия, выставляемые на контуре поперечного сечения канала, выражаются через контравариантные составляющие скорости. Физическая область отображается на вычислительную плоскость в виде квадрата $A'B'C'D'$ ($A'B'$ и $D'C'$ — вертикальные стороны квадрата, а $B'C'$ и $A'D'$ — его горизонтальные стороны).

Переобозначим V через V^1, а W через V^2. Полагая криволинейную систему координат квазиортогональной, связь между контравариантными и ковариантными составляющими скорости дается формулами

$$V_1 = g_{11}V^1, \quad V_2 = g_{22}V^2.$$

С учетом условий нормального вдува на проницаемой поверхности канала для вычисления скорости в граничных узлах получим следующие соотношения:

— на границах $A'D'$ и $B'C'$ имеем $V^1 = 0$, поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w}{v} = \frac{z_\zeta}{y_\xi}, \quad v = \pm\frac{y_\zeta}{g_{22}^{1/2}}, \quad w = \pm\frac{z_\zeta}{g_{22}^{1/2}};$$

— на границах $A'B'$ и $D'C'$ имеем $V^2 = 0$, поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w}{v} = \frac{z_\eta}{y_\eta}, \quad v = \pm\frac{y_\eta}{g_{11}^{1/2}}, \quad w = \pm\frac{z_\eta}{g_{11}^{1/2}}.$$

Верхний знак берется для границ $A'D'$ и $A'B'$, нижний — для границ $B'C'$ и $D'C'$.

В качестве замкнутого контура для дискретизации интегральной формулы (3.29) выбирается треугольный элемент, примыкающий своим основанием к границе вычислительной области. Расположение вершин треугольника относительно узлов сетки и нумерация его сторон приводятся на рис. 3.7. Стороны треугольника обходятся против часовой стрелки. При этом $i = 1$ для границ $A'D'$ и $B'C'$, $i = 2$ для границ $A'B'$ и $D'C'$.

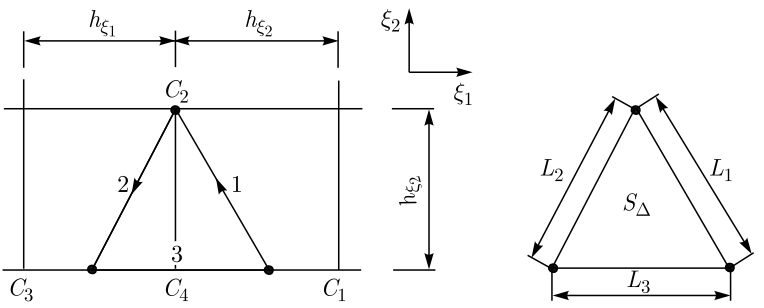


Рис. 3.7. Схема постановки граничного условия для вихря скорости на проницаемой поверхности канала

Предполагая, что вихрь скорости является постоянным в пределах области, ограниченной выбранным контуром, для вычисления двойного интеграла в соотношении (3.23) получим

$$S = \omega S_\Delta, \tag{3.31}$$

где S_Δ — площадь треугольного элемента ($S_\Delta = 0{,}5 h_\eta h_\zeta$).

Криволинейный интеграл в соотношении (3.29) вычисляется как сумма интегралов по боковым граням треугольного элемента,

$$I_\Delta = \sum_{k=1}^{3} I_k, \tag{3.32}$$

где

$$I_k = L_k(V_1 \cos\varphi_k + V_2 \sin\varphi_k). \tag{3.33}$$

Под L_k и φ_k понимаются длина k-й стороны треугольника и угол, определяющий ее ориентацию относительно горизонтали. Грани нумеруются таким образом, что сторона 3 всегда примыкает к границе области. Для границ области $A'B'C'D'$ имеем:

— на границе $A'D'$

$$\varphi_1 = \alpha_1 + \pi/2, \quad \varphi_2 = \alpha_1 + 3\pi/2, \quad \varphi_3 = 0,$$
$$L_1 = L_2 = \left(0{,}25h_\eta^2 + h_\zeta^2\right)^{1/2}, \quad L_3 = h_\eta;$$

— на границе $A'B'$

$$\varphi_1 = \alpha_2, \quad \varphi_2 = -\alpha_2 + \pi, \quad \varphi_3 = 3\pi/2,$$
$$L_1 = L_2 = \left(h_\eta^2 + 0{,}25h_\zeta^2\right)^{1/2}, \quad L_3 = h_\zeta.$$

Здесь

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{h_\eta}{2h_\zeta}, \quad \alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{h_\zeta}{2h_\eta}.$$

Для вычисления углов, которые определяют ориентацию сторон треугольников, примыкающих к границам $B'C'$ и $D'C'$, к приведенным значениям необходимо прибавить π.

В соотношении (3.33) ковариантные составляющие скорости V_1 и V_2 (зависят от индекса k) относятся к серединной точке стороны треугольника (для удобства в дальнейшем обозначим их через C) и вычисляются как полусумма скоростей, полученных в ее концевых точках. Для их расчета в узлах с полуцелыми индексами используется линейная интерполяция соответствующих значений, вычисленных в основных узлах сетки. Конечный результат записывается в следующей символической форме

$$C = \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{4}(C_1 + C_4) \quad \text{при } k = 1,$$

$$C = \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{4}(C_3 + C_4) \quad \text{при } k = 2,$$

$$C = \frac{1}{2}C_4 + \frac{1}{4}(C_1 + C_3) \quad \text{при } k = 3.$$

Здесь $C = V_1$ или V_2, а нижний индекс у C обозначает порядковый номер узла. Приведенные соотношения справедливы для всех границ области $A'B'C'D'$. Ковариантные составляющие скорости в узле C_2 находятся из вышеприведенных соотношений. В узлах C_1, C_3, C_4 имеем:

— на границах $A'D'$ и $B'C'$

$$V_1 = 0, \quad V_2 = \pm g_{22}^{1/2};$$

— на границах $A'B'$ и $D'C'$

$$V_1 = \pm g_{11}^{1/2}, \quad V_2 = 0.$$

Из приведенных соотношений следует, что интеграл по стороне 3 треугольника обращается в ноль (на всех границах расчетной области).

Приравнивая соотношения (3.32) и (3.33) и используя для вычисления вихря скорости в граничном узле нижнюю релаксацию, на итерации $n+1$ получим формулу

$$\omega^{n+1} = (1-\gamma)\omega^n + \gamma(I_1 + I_2 + I_3)/S_\Delta,$$

где γ — коэффициент релаксации (обычно $\gamma \leqslant 0{,}2$). В угловых точках A', B', C' и D' вихрь скорости полагается равным нулю.

Уточнение граничных условий организуется отдельным вычислительным блоком, управление которому передается после завершения итерационного цикла, определяющего решение во внутренних узлах.

Расчеты показывают, что наиболее чувствительным к изменению параметров вычислительного алгоритма является вихрь скорости, поэтому в качестве критерия сходимости выбирается изменение вихря скорости на слое по времени.

3.3.5. Расчет характеристик турбулентности. При необходимости расчет характеристик турбулентности производится при известном распределении скорости, найденном по уравнениям (3.24)–(3.28), на основе решения уравнений k–ε модели турбулентности, записанных в параболизованной форме.

Решение уравнений модели турбулентности получается путем последовательного продвижения в направлении маршевой координаты. Для дискретизации конвективных слагаемых используются конечные разности против потока 2-го порядка точности.

3.3.6. Результаты расчетов. Экспериментальные данные для проверки упрощенного подхода к моделированию трехмерных течений в каналах со вдувом при различных оформлениях поперечного сечения канала (квадратное, круглое, звездообразное) предоставляют работы [12, 57]. Исследование [152] ограничивается достаточно малыми числами Рейнольдса, соответствующими ламинарному режиму течения. Расчетные данные для трехмерных течений получены в работах [38, 56].

Разработанный подход дает результаты, близкие к данным, полученным на основе решения задачи в физических переменных и параболизованной формулировки задачи, снижая требования к вычислительным ресурсам.

Согласование результатов по распределению скорости лучше, чем по характеристикам турбулентности. При $\mathrm{Re} > 50$ максимальное рассогласование результатов расчетов по скорости составляет $6 \div 10\,\%$ (приближенная модель дает менее наполненный профиль продольной скорости), а по кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации — около $10 \div 15\,\%$.

Дополнительное сокращение процессорного времени достигается за счет того, что поперечные сечения применяемых на практике каналов имеют, как правило, симметричную форму. Вследствие симметрии течения (при постоянном законе массоподвода), в качестве расчетной области выделяется элемент сечения, образованный участком массоподводящей поверхности и двумя плоскостями симметрии, проходящими через продольную ось канала. Течение в таком элементе представляет собой течение в реальном канале при обеспечении на плоскостях разреза условий симметрии для газодинамических переменных.

Расчеты проводились как для всей области в целом, так и для одной ее четверти. Совпадение результатов демонстрирует устойчивость решения вне зависимости от типа выставляемых граничных условий.

Разработанный подход, с одной стороны, достаточно хорошо воспроизводит картину течения в канале со вдувом и учитывает основные его особенности, а с другой, допускает сравнительно простую программную реализацию при разумном сочетании точности получаемых результатов и времени счета.

3.4. Моделирование течений на основе параболизованной формулировки задачи

В каналах с проницаемыми стенками, имеющих достаточно большу́ю протяженность в осевом направлении, существует преобладающее направление развития течения. В осевом направлении диффузионный перенос потоков массы, количества движения и тепла пренебрежимо мал по сравнению с конвективным переносом, а поле давления вниз по потоку оказывает незначительное влияние на распределения параметров вверх по течению.

3.4.1. Формулировка модели. Совместим ось x с продольной осью канала, а оси y и z свяжем с его поперечным сечением. Сечение $x = 0$ является плоскостью зеркальной симметрии, а форма поперечного сечения — неизменной вдоль оси x.

Течение вязкой несжимаемой жидкости в канале со вдувом описывается осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье–Стокса, замкнутыми при помощи уравнений k–ε модели турбулентности.

Наличие преимущественного направления развития течения позволяет в исходных уравнениях произвести развязку по давлению. В уравнение изменения количества движения в проекции на ось x вводится осредненный по поперечному сечению канала градиент давления $\partial\overline{p}/\partial x$ (вместо локального), в то время как в уравнениях движения в проекциях на оси y и z давление рассматривается как локальная распределенная величина.

Введение осредненного по сечению продольного градиента давления отражает свойства течений данного класса, в которых знак градиента давления по сечению не изменяется (возвратные течения жидкости отсутствуют, а давление вдоль оси канала изменяется значительно сильнее, чем в плоскости поперечного сечения). Движение жидкости в плоскости поперечного сечения рассматривается как вторичное, которое накладывается на основной поток. При решении уравнений движения продольный осредненный градиент давления трактуется как известная величина, которая определяется из расходных соотношений.

Для моделирования течений в каналах со вдувом используется упрощенная система уравнений, записанная в приближении тонкого канала и имеющая параболический тип по координате x. Уравнения, описывающие течение, принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{3.34}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_u\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_u\frac{\partial u}{\partial z}\right), \tag{3.35}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_v\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_v\frac{\partial v}{\partial z}\right), \tag{3.36}$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_w\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_w\frac{\partial w}{\partial z}\right), \tag{3.37}$$

$$u\frac{\partial k}{\partial x}+v\frac{\partial k}{\partial y}+w\frac{\partial k}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_k\frac{\partial k}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_k\frac{\partial k}{\partial z}\right)+P-\varepsilon, \tag{3.38}$$

$$u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}+w\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\varepsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_\varepsilon\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)+c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P-c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k}. \tag{3.39}$$

Здесь Γ_Φ — коэффициент переноса переменной Φ, P — член генерации турбулентности.

В дополнение к системе уравнений (3.34)–(3.39), определяющей в каждой точке расчетной области составляющие скорости и характеристики турбулентности, записывается интегральное уравнение нераз-

рывности. Оно выражает собой условие того, что количество жидкости, проходящее в единицу времени через поперечное сечение канала с площадью S, равняется расходу с предшествующей боковой поверхности:

$$\iint\limits_S u(x,y,z)ds = Q(x). \tag{3.40}$$

Соотношение (3.40) применяется для определения осредненного по сечению канала продольного градиента давления при помощи метода пристрелки.

Для нахождения распределения давления в плоскости поперечного сечения канала используется уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = S(y,z). \tag{3.41}$$

Правая часть уравнения (3.41) вычисляется по известному распределению скорости

$$S(y,z) = 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right).$$

Уравнение (3.41) получается из уравнения неразрывности (3.34) и уравнений изменения количества движения, записанных в виде (3.36) и (3.37).

Решение уравнений (3.34)–(3.39) требует задания граничных условий на входе в расчетную область (в сечении $x = 0$) и граничных условий на контуре поперечного сечения канала $F(y,z)$. Сечение $x = 0$ считается плоскостью зеркальной симметрии течения. В связи с параболическим типом решаемых уравнений, постановки граничных условий в выходном сечении канала не требуется.

Для упрощения постановки граничных условий на массоподводящей поверхности уравнения (3.34)–(3.39) записываются в криволинейной, согласованной с границами области в физическом пространстве системе координат (x, η, ζ).

В криволинейной систем координат основные уравнения записывается в виде обобщенного уравнения переноса

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial u\Phi}{\partial x} + \frac{\partial V\Phi}{\partial \eta} + \frac{\partial W\Phi}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\Gamma_\Phi}{J^2}\left(g_{22}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} - g_{12}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\Gamma_\Phi}{J^2}\left(g_{11}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} - g_{12}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right) + S_\Phi, \tag{3.42}$$

где $\Phi = u,\ v,\ w,\ k,\ \varepsilon$. Составляющие скорости в координатных направлениях η и ζ вычисляются по формулам

$$V = \frac{1}{J}\left(vz_\zeta - wy_\zeta\right), \quad W = \frac{1}{J}\left(-vz_\eta + wy_\eta\right).$$

Граничные условия формулируются в вычислительном пространстве для переменных V и W, при этом $V = \pm 1$ на границах AB и CD и $W = \pm 1$ на границах BC и DA.

3.4.2. Детали численной реализации. Параболический характер системы уравнений (3.34)–(3.39) или уравнения (3.42) по координате x позволяет использовать для их численного интегрирования маршевую процедуру, в которой характеристики потока в данном сечении канала определяются по параметрам в сечении, расположенном на один шаг вверх по потоку (на предыдущем шаге по маршевой координате).

При разработке вычислительной процедуры возникает ряд трудностей, связанных с особенностью построения разностных схем для трехмерных течений с параболической координатой.

Для дискретизации уравнения (3.42) используется схема расщепления по физическим факторам и метод конечных объемов на неравномерной сетке с шахматным расположением узлов [29]. Шаг интегрирования по времени выбирается, исходя из оценки конвективных и диффузионных потоков. Вычисления проводятся до получения стационарного решения.

Вводится шахматное размещение переменных на разностной сетке (рис. 3.8). Продольная скорость, давление и другие скалярные переменные размещаются в центре контрольного объема (в узле P). Скорости

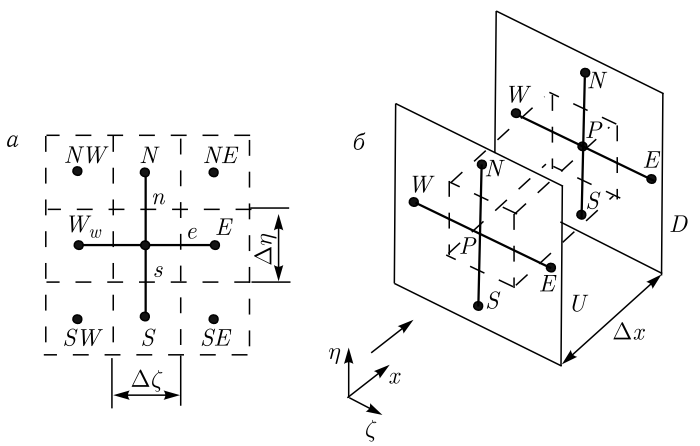


Рис. 3.8. Разностная сетка в физической плоскости (*а*) и контрольный объем (*б*)

в координатных направлениях y и η помещаются в середину северной и южной сторон контрольного объема (в точки n и s), а скорости w и W в координатных направления z и ζ — в середину западной и восточной сторон (в точки w и e).

Центр ячейки, в котором размещаются скалярные переменные и продольная скорость, определяется как полюс P и окружается четырьмя смежными точками N, S, E, W. Конечно-разностные уравнения получаются путем интегрирования уравнения (3.42) по контрольному объему, представляющему собой цилиндрическое тело, основанием которого служит ячейка с центром в полюсе P, а высотой — отрезок Δx, являющийся шагом интегрирования по маршевой координате.

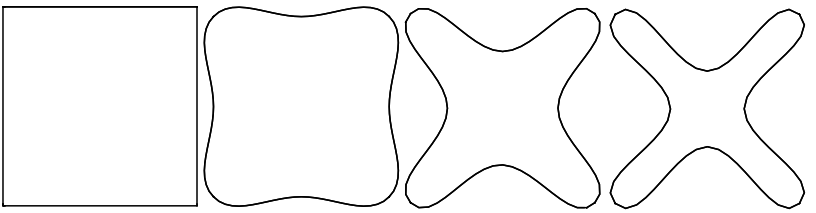
Считается, что в направлении оси x функция Φ изменяется ступенчатым образом: нижнепоточное значение Φ_D сохраняется постоянным в интервале от x_U до x_D, за исключением самой точки x_U, в которой Φ скачком меняет свое значение на Φ_U. Диффузия в направлении оси x отсутствует в силу описания течения в рамках модели пограничного слоя. При вычислении конвективного члена в направлении оси x и источниковых членов, зависящих от Φ или от изменения Φ в плоскости x, используется предположение о ступенчатом изменении Φ в плоскости (η, ζ). При этом считается, что функция Φ сохраняется постоянной в пределах основания контрольного объема и равной значению в полюсе Φ_P и меняется ступенчато на Φ_E, Φ_W, Φ_N, Φ_S вне указанной области. Вычисление диффузионных потоков в поперечном направлении основывается на предположении о линейном изменении функции Φ между узлами сетки. Коэффициенты при производных функции Φ в центрах граней ячейки находятся при помощи линейной интерполяции по их значениям в соседних узлах.

Дискретизация производных по времени проводится при помощи явной схемы Адамса–Бэшворта, имеющей 2-й порядок аппроксимации. Для дискретизации диффузионных потоков применяются центрированные конечно-разностные формулы 2-го порядка точности. Конвективные потоки дискретизируются на основе схемы QUICK, которая имеет 3-й порядок аппроксимации на равномерной сетке и 2-й порядок аппроксимации на неравномерной сетке. Для дискретизации компонент метрического тензора во внутренних узлах используются центрированные конечно-разностные формулы 2-го порядка точности, а на границе области — односторонние конечные разности 1-го порядка.

Вычислительный алгоритм строится на основе SIMPLE-процедуры для поправки давления. Уравнение Пуассона для давления решается на каждом шаге по времени при помощи метода последовательной верхней релаксации. Коэффициент релаксации подбирается опытным путем (в расчетах используется значение 0,5). Маршевая процедура

продолжается вплоть до достижения требуемого значения продольной координаты (удлинение канала полагается равным $h/L = 30 \div 50$).

3.4.3. Результаты расчетов. На основе параболизованной модели производятся расчеты течений в плоскопараллельном канале и в каналах, имеющих квадратную, прямоугольную (с отношением сторон $h = 2 \div 6$), круглую и звездообразную (при различном числе лучей и их удлинении, $\Lambda = 0{,}2 \div 0{,}8$) форму поперечного сечения в плане (рис. 3.9). Расчеты проводились на сетках 51×51 с шагом по продольной координате 0,12. Число Рейнольдса варьировалось в диапазоне $10 \div 10^5$.

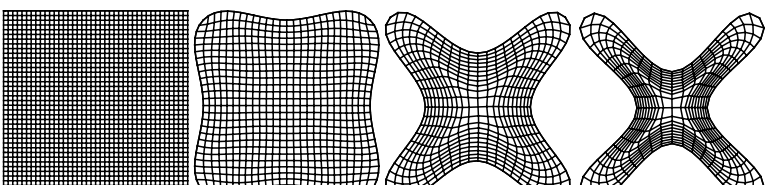


а *б* *в* *г*

Рис. 3.9. Геометрия поперечного сечения канала

Криволинейные сетки, полученные на основе решения системы уравнений эллиптического типа, приводятся на рис. 3.10.

Некоторые результаты расчетов для течения в канале с квадратной формой поперечного сечения ($h = 1$), обработанные в виде линий равных значений скорости и кинетической энергии турбулентности, приводятся на рис. 3.11 и рис. 3.12 при $\mathrm{Re} = 10^4$ для сечения $x = 10$. В центральной части канала линии уровня имеют форму окружностей и приобретают форму квадрата со скругленными углами по мере приближения к стенкам (рис. 3.11). Генерация завихренности имеет место лишь на массоподводящей поверхности в окрестности угловых точек квадрата (рис. 3.12).



а *б* *в* *г*

Рис. 3.10. Расчетные сетки

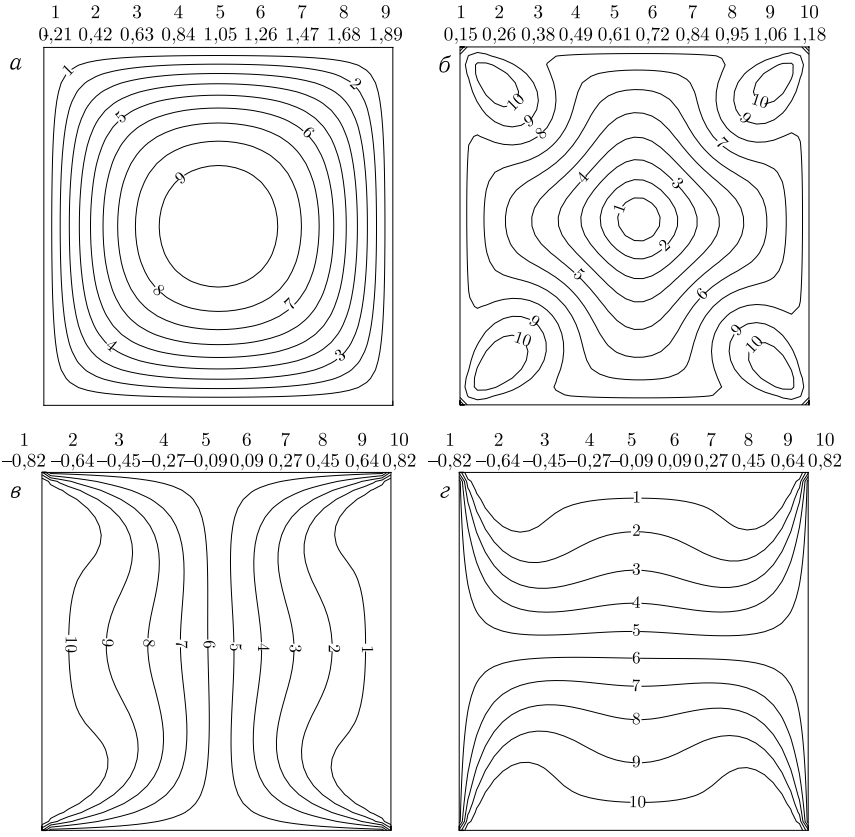


Рис. 3.11. Линии уровня продольной скорости (*а*), модуля скорости (*б*) и поперечных составляющих скорости (*в* и *г*) в поперечном сечении квадратного канала

Распределения продольной скорости в канале с квадратной формой поперечного сечения в плане (при $h = 1$) показывает рис. 3.13 *а*. Линии соответствуют профилям продольной скорости при $y = 0$ (1); 0,2 (2); 0,4 (3); 0,6 (4); 0,8 (5). Профили продольной скорости в плоскости симметрии течения в канале с прямоугольной формой поперечного сечения в плане при $h = 6$ приводятся на рис. 3.13 *б*. Черные кружки • соответствуют данным [57].

Профили продольной скорости, являясь достаточно наполненными в плоскости симметрии течения (при $y = 0$), постепенно сглаживаются по мере приближения к стенке (рис. 3.13 *а*). При $y = 0{,}9$ скорость имеет практически постоянное значение в центральной части канала со спадом лишь на последней четверти его полуширины. Ядро потока

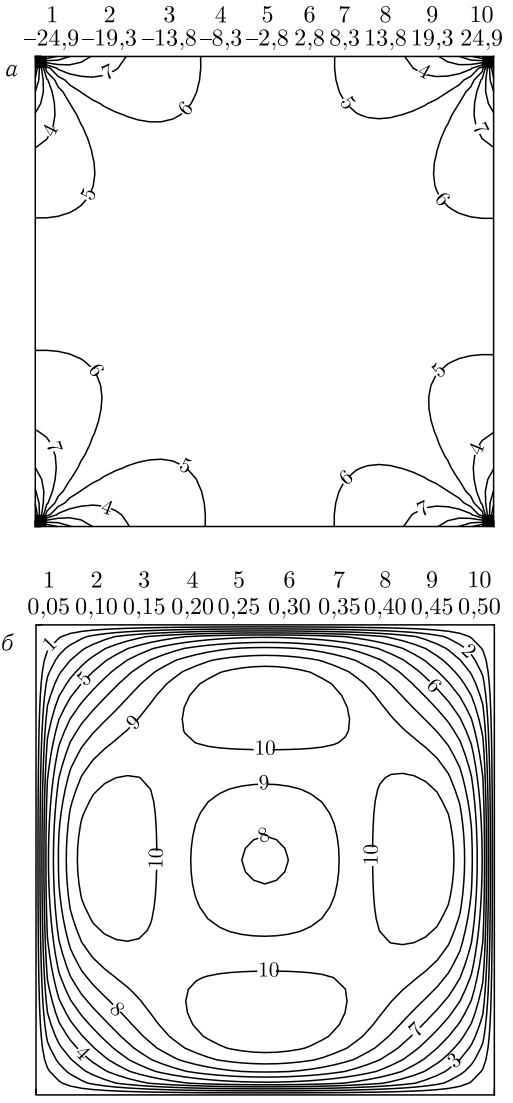


Рис. 3.12. Линии уровня вихря скорости (*а*) и кинетической энергии турбулентности (*б*) в поперечном сечении квадратного канала

имеет скорость, близкую к ее значению на оси канала. Наблюдается достаточно хорошее соответствие результатов численного моделирования физическому эксперименту.

В общих чертах характер движения газа при изменении параметра h в довольно широких пределах сохраняется. Распределения продольной

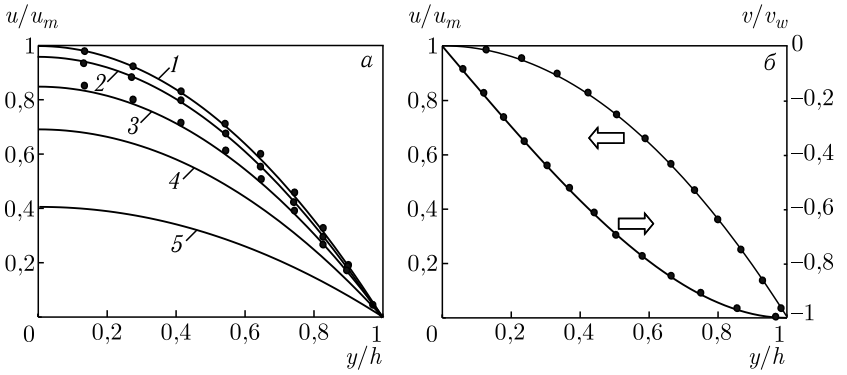


Рис. 3.13. Распределения скорости в канале с прямоугольной формой поперечного сечения в плане при $h = 1$ (*а*) и $h = 6$ (*б*)

и поперечной скоростей с увеличением h становятся достаточно универсальными, что хорошо укладывается в рамки физических представлений о том, что при увеличении протяженности канала в поперечном направлении течение в большей части канала становится близким к течению в бесконечной плоской щели (рис. 3.13 *б*).

Влияние узких стенок прямоугольника на движение газа становится незначительным, а само течение вблизи плоскости симметрии канала приобретает характер, близкий к двумерному. При $h > 4$ профиль кинетической энергии турбулентности в плоскости симметрии течения довольно хорошо описывается приближенным решением [41, 80] и согласуется с имеющимися численными решениями и данными измерений. Закон изменения кинетической энергии турбулентности вдоль оси канала близок к параболическому, что согласуется с результатами, полученными в полной постановке.

Распределение давления вдоль плоскости симметрии канала с квадратной формой поперечного сечения в плане, полученное на основе параболизованной формулировки задачи (сплошная линия), приводится на рис. 3.14. Результаты расчетов хорошо согласуются с результатами моделирования крупных вихрей [105] (значки ○) и данными физического эксперимента [331] (значки •). В то же время, одномерная теория [214] (пунктирная линия) указывает на более медленное убывание давления вдоль плоскости симметрии.

Другие расчеты проводились для течений в каналах с звездообразным поперечным сечением в плане при фиксированном числе Рейнольдса ($\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^5$).

Полученные результаты позволяют судить о расположении областей течения с максимальным уровнем турбулентных пульсаций скорости,

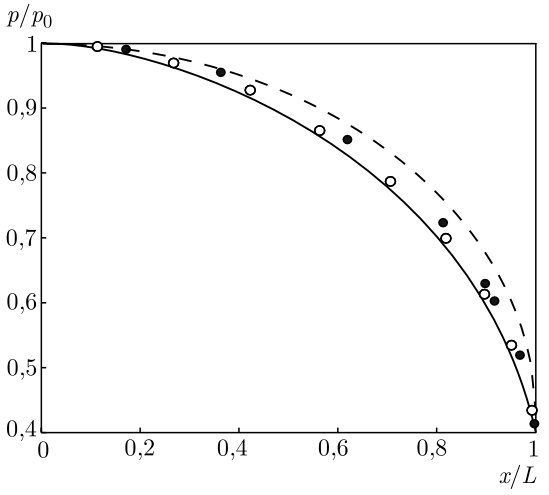


Рис. 3.14. Распределение давления вдоль плоскости симметрии канала с квадратной формой поперечного сечения

их эволюции вдоль оси канала и сделать выводы о влиянии числа лучей и удлинения луча на характеристики потока.

Линии равных значений продольной скорости (контуры трубок тока), повторяющие на периферии форму границ расчетной области, по мере приближения к оси канала приобретают форму концентрических окружностей (рис. 3.15 *а*). Трансформация контуров трубок тока происходит таким образом, что наименьшие градиенты продольной скорости имеют место в зонах наибольших скоростей движения газа в сечении. Максимальные значения поперечной скорости наблюдаются вблизи точек, наиболее удаленных от центра поперечного сечения. Газ, отходя от стенки, несколько разгоняется в поперечном сечении, а затем его скорость в направлении осей y и z падает с различной степенью интенсивности до нуля на оси канала (рис. 3.15 *б*).

Отмеченные тенденции в распределении скорости сохраняются и при изменении удлинения луча (рис. 3.16). Генерация завихренности происходит в лучевой области канала. В центральной части канала течение является безвихревым. Кинетическая энергия турбулентности имеет минимум на оси канала. Максимумы кинетической энергии турбулентности располагаются вблизи места сопряжения соседних лучей (рис. 3.17).

Максимум продольной скорости располагается на гидравлической оси канала (рис. 3.18 *а*), а закон ее изменения вдоль координаты x близок к линейному. Небольшие отклонения от линейной зависимости, наблюдаемые в эксперименте при $x > 35$, объясняются влиянием сжи-

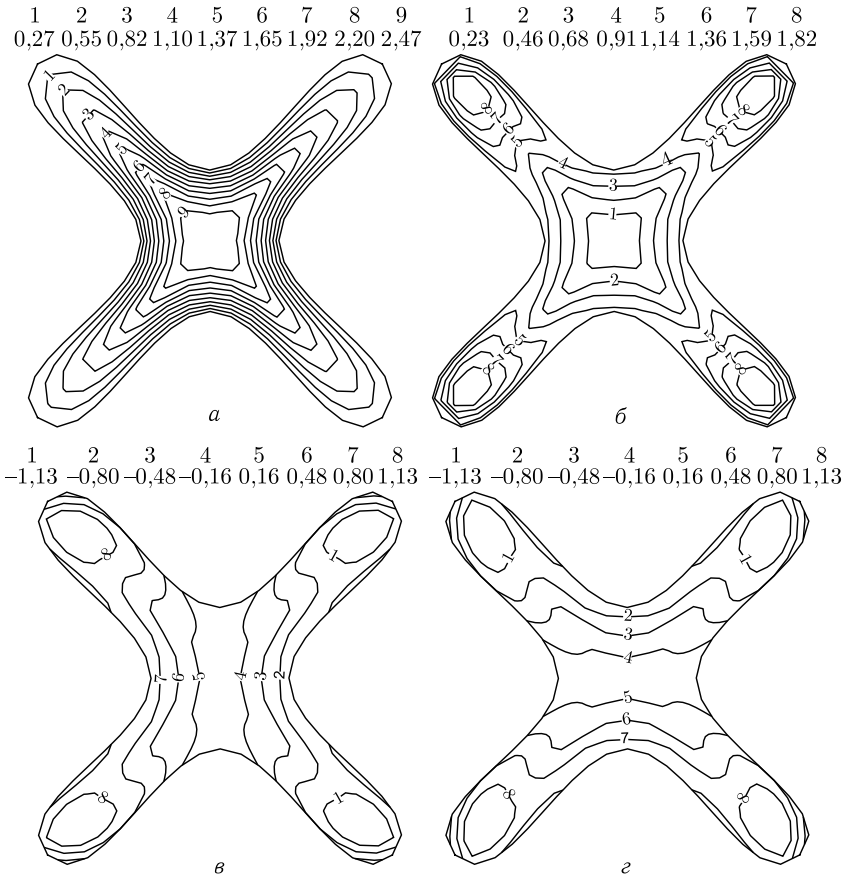


Рис. 3.15. Линии уровня продольной скорости (*а*), модуля скорости (*б*) и поперечных составляющих скорости (*в* и *г*) в поперечном сечении звездообразного канала при $\Lambda = 0{,}72$

маемости газа. Распределение поперечной скорости вдоль оси канала изменяются сравнительно слабо и носит универсальный характер.

Кинетическая энергия турбулентности нарастает вдоль координаты x, достигает максимального значения на некотором удалении от стенки канала и имеет глубокий минимум на его оси (рис. 3.18 *б*). Области течения с максимальным уровнем турбулентных пульсаций скорости приближаются к границе при увеличении расстояния от входа в канал. Такая тенденция связана с увеличением сдвига скорости и увеличением генерации турбулентности вниз по потоку.

Профили продольной скорости в поперечном сечении звездообразного канала (удлинение луча $\Lambda = 0{,}4$) приводятся на рис. 3.19. Рас-

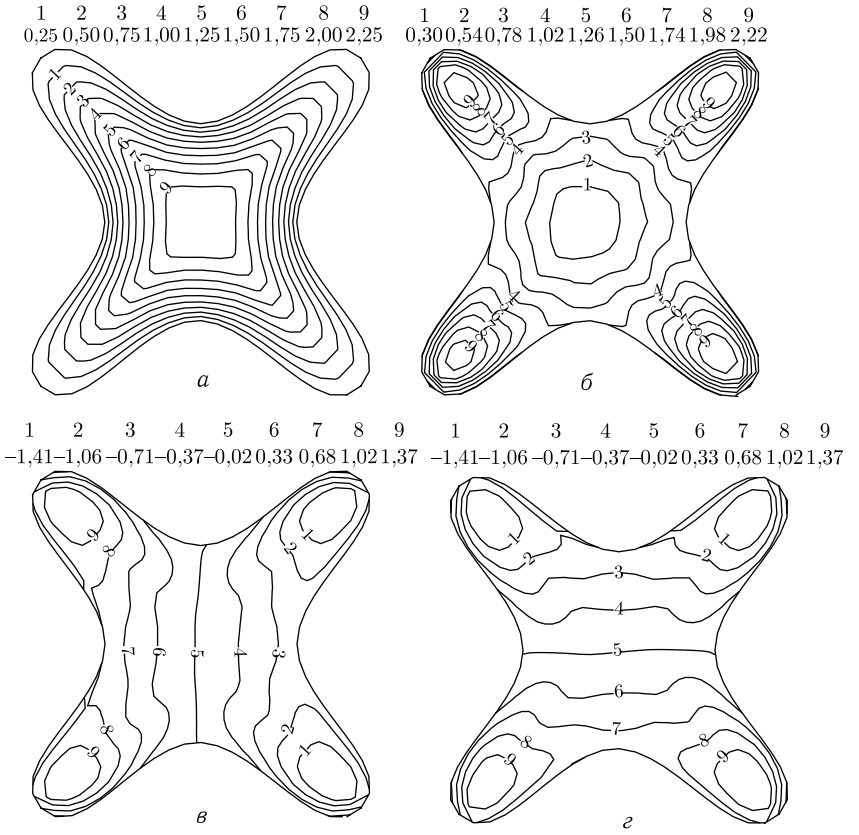


Рис. 3.16. Линии уровня продольной скорости (*а*), модуля скорости (*б*) и поперечных составляющих скорости (*в* и *г*) в поперечном сечении звездообразного канала при $\Lambda = 0{,}4$

пределение продольной скорости становится более наполненным при движении вниз по потоку, приобретая на некотором расстоянии от левого торца канала универсальный характер.

Продольная скорость изменяется практически по линейному закону по длине канала (рис. 3.20 *а*). Слабое отклонение от линейной зависимости (линия 2) объясняется влиянием сжимаемости. Результаты расчетов согласуются с точным решением [74], дающим косинусоидальный профиль продольной скорости. Точное решение хорошо описывает распределение скорости между лучами звездообразного в плане канала, а кинетическая энергия турбулентности изменяется вдоль оси канала практически по параболическому закону (рис. 3.20 *б*), что соответствует результатам [80] (значки •).

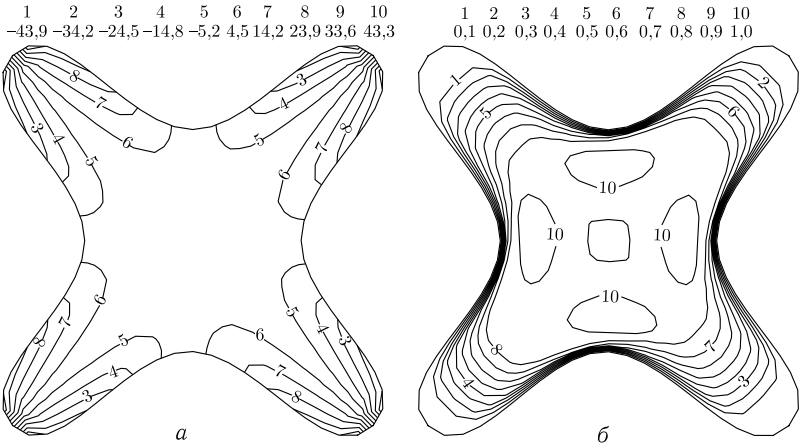


Рис. 3.17. Линии уровня вихря скорости (*а*) и кинетической энергии турбулентности (*б*) в поперечном сечении звездообразного канала при $\Lambda = 0{,}4$

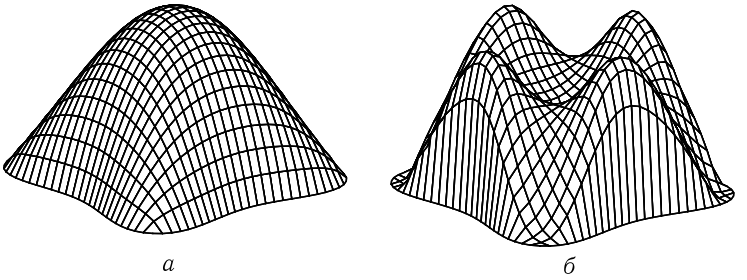


Рис. 3.18. Распределения продольной скорости (*а*) и кинетической энергии турбулентности (*б*) при $\Lambda = 0{,}32$

Форма луча звездообразного канала и вариант его сопряжения с центральной частью канала играют существенную роль в формировании поля скорости как в качественном, так и в количественном отношениях. Распределение скорости в луче имеет симметричный характер с максимумом на его серединной линии и плавным падением по мере приближения к границе. Профиль продольной скорости является достаточно универсальным и сравнительно слабо изменяется от сечению к сечению, имея относительно постоянное значение в довольно широком диапазоне изменения координаты, направленной вдоль луча. В сечении между лучей он хорошо описывается косинусоидальной зависимостью (на небольших удлинениях луча), имеющей место при течении в круглом канале, причем совпадение тем лучше, чем большая доля окружности центральной части канала не занята лучом. Среднее значение скорости на серединной линии луча приблизительно соответ-

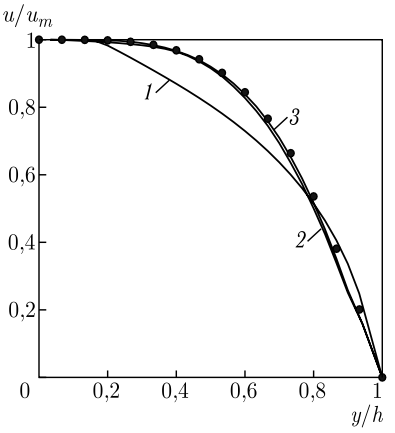


Рис. 3.19. Профили продольной скорости при $x = 5$ (1); 10 (2); 30 (3). Значки • соответствуют точному решению

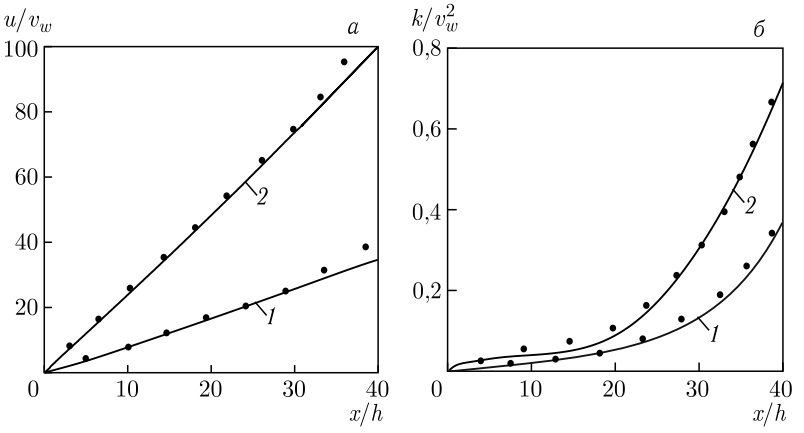


Рис. 3.20. Распределения продольной скорости (*а*) и кинетической энергии турбулентности (*б*) в канале с круглой (линия 1) и звездообразной (линия 2) формой поперечного сечения

ствует значению 0,5 от скорости на оси канала. Увеличение удлинения луча приводит к наполнению профилей скорости и кинетической энергии турбулентности.

Полученные распределения скорости в канале с поперечным сечением в виде четырехлучевой звезды согласуются с расчетными результатами и данными физического эксперимента, укладываясь в рамки физических представлений о поведении потока при изменении геометрии канала. Рассогласование результатов объясняется отличиями в форме

луча у расчетной и экспериментальной моделей, а также неадекватностью граничных условий характеру массоподвода через проницаемые стенки канала.

3.5. Течение в канале с кольцевой выточкой

Каналы с массоподводом присутствуют во всех конструктивных решениях РДТТ. Простейшим каналом такого типа является цилиндрический канал с круглой формой поперечного сечения.

Цилиндрический канал при горении увеличивает свою поверхность. Для компенсации увеличения поверхности газоподвода в конструкцию заряда вводятся дегрессивно горящие элементы, в частности, кольцевые проточки, наклоненные к оси канала под некоторым углом. Течение газа при этом происходит в условиях взаимодействия основного потока в канале с поперечным потоком из щели.

Широкое применение находят также каналы с многощелевой и звездообразной формой поперечного сечения. Применение зарядов с пропилами (щелями) позволяет обеспечить заданный закон изменения поверхности горения в широком диапазоне изменения давления.

Щелевые каналы (проточки), течение в которых обусловлено газообразными продуктами сгорания, поступающими от горящих стенок заряда, являются широко распространенными элементами современных РДТТ. При работе двигателя (особенно на начальном этапе), когда высота щели невелика, в ней образуется высокое давление, что служит причиной разрушения изделия. Полный перенос данных по газодинамике круглых и кольцевых каналов с проницаемыми стенками на течение в радиальных проточках с подводом массы представляется проблематичным.

Расчеты [95] для течения в канале заряда, имеющем осесимметричный канал с 10 кольцевыми щелями и горящим задним торцом, показывают, что характер разгона потока в канале заряда близок к линейному, а распределение давления — к параболическому. Перепад давления по каналу заряда приблизительно в два раза превышает перепад давления вдоль заднего горящего торца. Уровень скорости в канале заряда такой же массы, но канально-щелевой формы (щели расположены в предсопловом объеме, задача считается квазитрехмерной), ниже, но перепад давления вдоль заднего горящего торца выше и соизмерим с перепадом давления по каналу. Это обусловлено более узким зазором между зарядом и задним днищем канально-щелевого варианта по сравнению с осесимметричным.

В работе [89] представлены результаты экспериментального исследования распределения статического давления в радиальном проницаемом канале с глухим торцом. Варьируемыми параметрами являются

расход вдуваемого воздуха и высота канала. Исследуется изменение по длине скоростных характеристик и параметра ускорения. Проводится сравнение с расчетами по одномерной и двумерной моделям в канале с пористыми стенками.

Течение в узком щелевом зазоре, через одну из стенок которого осуществляется вдув газа, рассматривается в работе [89]. На основе данных физического эксперимента исследуется радиальное распределение среднемассовой скорости и давления на стенке при до- и околозвуковых скоростях потока (изменяется расход вдуваемого газа и высота канала, $G = 0{,}02 \div 0{,}1$ кг/с). Проводится сравнительный анализ с расчетными моделями и данными измерений для течений в трубах и кольцевых каналах с проницаемыми стенками, а также изучается вопрос о пределах применимости одномерного и двумерного приближений для потоков с подводом массы.

Данные работы [89] показывают, что распределение статического давления по радиусу щелевого канала зависит от числа Рейнольдса и высоты канала. Однако характер изменения давления подобен во всем исследованном диапазоне чисел Рейнольдса. Наибольшее изменение давления имеет место вблизи выходного сечения канала. В периферийной области давление изменяется достаточно слабо. Поперечная скорость сопоставима с продольной на всем протяжении канала от периферии к центру. Ускорение потока в щелевом канале за счет массоподвода и уменьшения проходного сечения к центру канала оказывает стабилизирующее влияние на поток. Увеличение расхода газа и уменьшение высоты канала приводит к снижению параметра ускорения потока $K = (v/u^2)du/dr$.

Расчеты по одномерной и двумерной моделям заметно различаются между собой [89]. Качественное соответствие с расчетной кривой по двумерной модели дают данные измерений, полученные для круглой трубы со вдувом [99] и кольцевого канала с односторонним вдувом [20]. Количественное рассогласование результатов объясняется влиянием сжимаемости и ламинаризирующим воздействием ускорения потока.

Рассмотрим моделирование турбулентного течения продуктов сгорания твердого топлива в цилиндрическом канале с кольцевой выточкой (компенсатором) и исследуем влияние геометрических и расходных факторов (расположения по длине канала и угла наклона компенсирующего элемента) на формирование картины потока [35].

Система координат выбирается таким образом, что ось x совпадает с осью симметрии канала. Начало системы координат совмещается со входным сечением канала (рис. 3.21). В качестве характерного масштаба длины принимается радиус канала R. Цилиндрический канал имеет

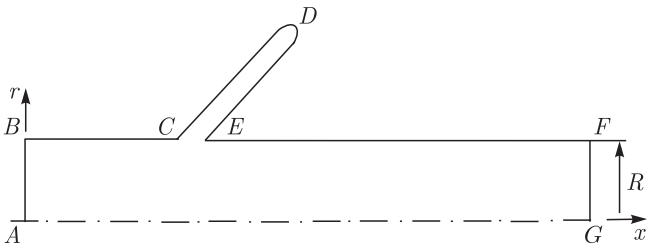


Рис. 3.21. Геометрия расчетной области

длину $L = 1080$ мм и радиус $R = 150$ мм. Ширина проточки составляет 14 мм, а ее длина — 480 мм.

Турбулентное течение и теплообмен вязкого сжимаемого газа описываются в осесимметричной постановке на основе системы уравнений, включающей в себя уравнение неразрывности, уравнение изменения количества движения и уравнение энергии, которые замыкаются уравнениями k–ε модели турбулентности.

Во входном сечении канала AB задается распределение скорости в виде косинусоидального профиля продольной скорости. Максимальная скорость составляет $u_m = 150$ м/с.

На боковой поверхности канала $BCDEF$ выставляется граничное условие нормального вдува ($u = 0$, $v = -v_w$). Скорость вдува вычисляется из условия равенства расходов сгоревшего топлива и вдуваемого газа. Для нахождения скорости горения твердого топлива задается начальное давление в канале и определяются скорость горения и скорость вдува. После этого рассчитывается поле течения в проточном тракте и находится распределение давления по горящей поверхности. Затем производится пересчет параметров горения и вдува. Итерационный процесс повторяется до обеспечения сходимости.

Характеристикам турбулентности на проницаемой поверхности канала присваиваются малые постоянные значения ($k = 10^{-2}$ м^2/с^2, $\varepsilon = 10^{-3}$ м^2/с^3). Результаты расчетных оценок показывают, что изменение интенсивности турбулентности на массоподводящей поверхности в пределах 2,5 % не приводит к существенному искажению результатов численного моделирования.

В выходном сечении канала FG задаются граничные условия свободного вытекания. На оси канала AG используются граничные условия симметрии течения.

Расчетная сетка имеет $3{,}2 \cdot 10^5$ ячеек. Фрагменты расчетной сетки, соответствующие компенсатору и границе его сопряжения с каналом, показаны на рис. 3.22.

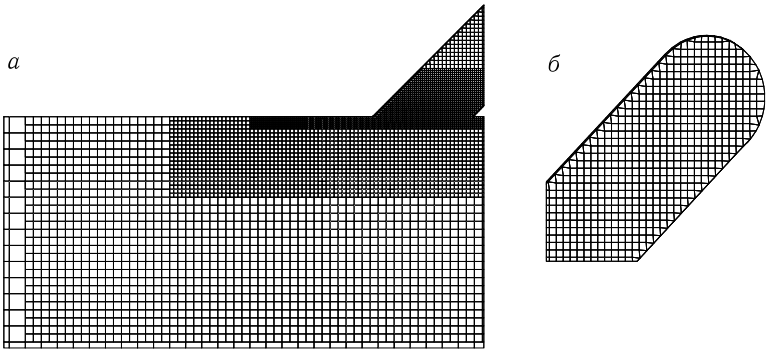


Рис. 3.22. Фрагменты расчетной сетки

Рабочее тело представляет собой продукты сгорания твердого топлива, которые характеризуются следующими параметрами: $p = 4 \cdot 10^6$ Па, $T = 3000$ К, $R = 306$ Дж/(кг·К), Pr=0,442, $\gamma = 1{,}17$.

Рассматривается два варианта расположения проточки — в начале и в конце цилиндрического канала. Результаты численного моделирования, обработанные в виде линий равных значений модуля скорости и кинетической энергии турбулентности и соответствующие расположению компенсатора в начале канала заряда твердого топлива, приводятся на рис. 3.23 при $\varphi = 45°$.

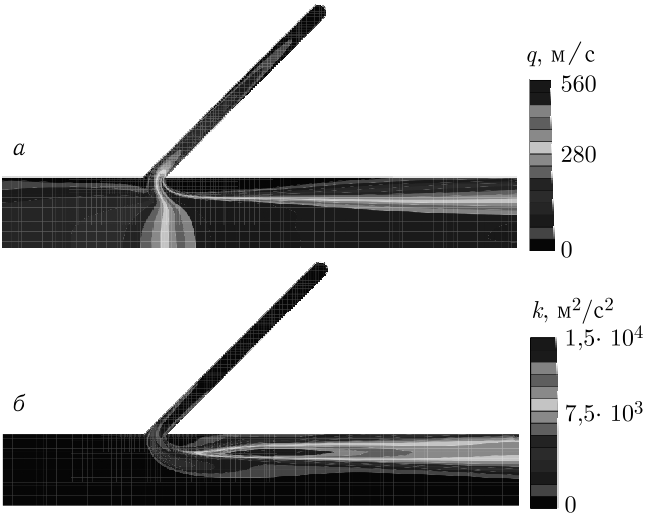


Рис. 3.23. Линии уровня модуля скорости (*а*) и кинетической энергии турбулентности (*б*)

Наличие щели достаточно сильно возмущает течение в канале. Однако это возмущение носит локальный характер — возмущение течения, вызванное взаимодействием потока из щели с течением в канале, локализовано в сравнительно небольшой окрестности границы стыковки подобластей (рис. 3.24). При приближении к оси канала (в области малых значений радиальной координаты) неравномерность распределения скорости уменьшается. Вне окрестности этой границы профиль скорости в щели достаточно хорошо описывается косинусоидальной зависимостью. При этом давление в выходном сечении канала изменяется в пределах 1,5 % от значения, имеющего место при отсутствии щели.

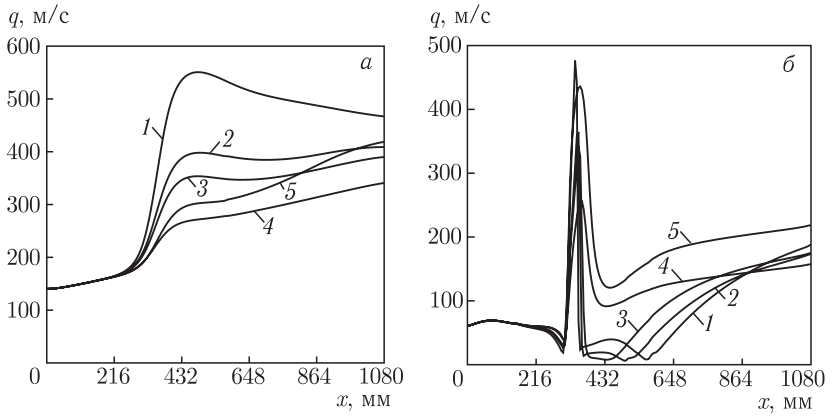


Рис. 3.24. Распределения скорости в сечениях $r/R = 0{,}5$ (*а*) и $r/R = 0{,}9$ (*б*) при различных углах наклона компенсатора $\varphi = 45$ (*1*); 70 (*2*); 90 (*3*); 115 (*4*); 135 (*5*) (град)

При наклонном положении компенсатора вблизи щели возникает зона обратного течения, но и в этом случае существенная перестройка течения происходит лишь вблизи стенки канала.

Наличие компенсатора оказывает слабое влияние на структуру течения в сечениях, расположенных слева от границы стыковки подобластей (при уменьшении координаты x). Степень влияния потока из щели возрастает при удалении от левой границы расчетной области (рис. 3.25).

В том случае, когда проточка располагается в начале канала, в сечении, находящемся непосредственно за проточкой, наблюдается значительная неравномерность продольной скорости (рис. 3.26). Истекающий из проточки поток формирует высокоскоростное течение, уровень продольной скорости в котором значительно превышает скорость на оси канала в данном сечении. Вниз по потоку местный максимум про-

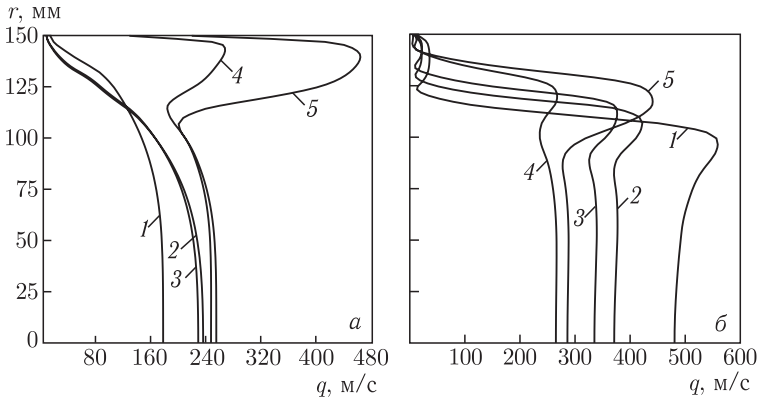


Рис. 3.25. Распределения скорости в сечениях $r/R = 1$ (*а*) и $r/R = 1{,}93$ (*б*) при различных углах наклона компенсатора $\varphi = 45$ (*1*); 70 (*2*); 90 (*3*); 115 (*4*); 135 (*5*) (град)

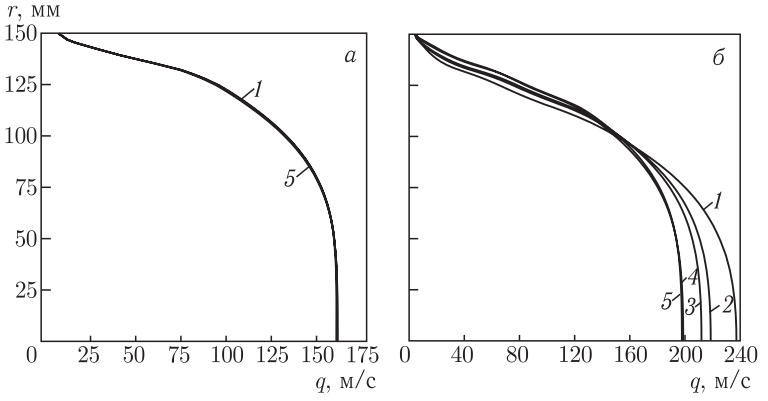


Рис. 3.26. Распределения скорости в сечениях $r/R = 2{,}30$ (*а*) и $r/R = 2{,}73$ (*б*) при различных углах наклона компенсатора $\varphi = 45$ (*1*); 70 (*2*); 90 (*3*); 115 (*4*); 135 (*5*) (град)

дольной скорости смещается к оси, поскольку происходит оттеснение потока, истекающего из проточки, газом, поступающим от проницаемой поверхности канала (рис. 3.27). На значительных расстояниях от проточки в продольном направлении профиль скорости выглаживается, приближаясь к косинусоидальному распределению (рис. 3.28).

В том случае, когда проточка располагается в части заряда, обращенной к сопловой крышке, канальный поток имеет значительный уровень продольной скорости, и местный максимум скорости не формируется.

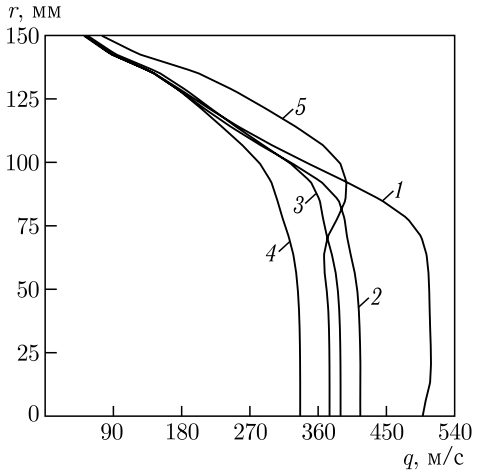


Рис. 3.27. Распределения скорости в сечении $r/R = 5{,}9$ при различных углах наклона компенсатора $\varphi = 45$ (*1*); 70 (*2*); 90 (*3*); 115 (*4*); 135 (*5*) (град)

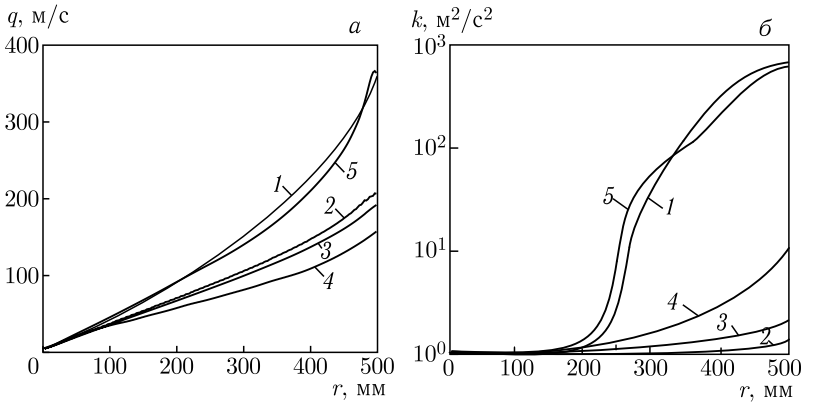


Рис. 3.28. Распределения скорости (*а*) и кинетической энергии турбулентности (*б*) в компенсаторе при различных углах его наклона $\varphi = 45$ (*1*); 70 (*2*); 90 (*3*); 115 (*4*); 135 (*5*) (град)

В обоих случаях поступление в канал дополнительного потока из щели приводит к формированию более наполненного (по сравнению с косинусоидальным) профиля скорости.

Проникновение возмущений, обусловленных вдувом с боковой поверхности компенсатора в основной поток, больше в случае расположения щели в начале канала, где скорости основного потока невелики. В соответствии с указанной интенсивностью искажения поля течения,

ожидается усиление процессов межфазного взаимодействия при моделировании двухфазных течений.

Расчеты показывают, что наличие местного максимума продольной скорости, порожденного массоподводящим элементом (проточкой), и его величина определяются интенсивностью дополнительного газоподвода и проходным сечением массоподводящего элемента в месте его сопряжения с цилиндрическим каналом. В частности, местный максимум скорости становится заметным, когда средняя скорость из элемента типа проточки превышает среднюю скорость по сечению канала в месте сопряжения. Так, если через d_c и S_c обозначить диаметр канала и его поверхность газоподвода до места сопряжения, а через b и S_e ширину зоны сопряжения и поверхность элемента, то условие появления местного максимума выражается соотношением $S_e/b > S_c/d_c$.

В некоторых случаях поверхность газоподвода формируется из последовательности осесимметричных выемок. Такие каналы используются в системах, где требуются развитые поверхности горения. При этом значительные деформации профиля продольной скорости наблюдаются в начальных сечениях канала.

С увеличением продольной координаты происходит выглаживание профиля скорости, и на значительных расстояниях от входной границы он становится близким к косинусоидальному распределению, а действие массоподводящих элементов становится эквивалентным увеличению интенсивности вдува.

По мере поступления газа через боковые стенки, скорость потока возрастает. На участке, примыкающем к начальному сечению канала, пренебрегается сжимаемостью газа. Распределение осевой скорости по поперечному сечению канала достаточно хорошо описывается косинусоидальной зависимостью, а зависимость давления от расстояния x является практически параболической.

Вниз по потоку интенсивность осевого течения возрастает. Как только количество движения станет примерно равным осевой составляющей количества движения, переносимого оттекающим от стенок газом, частицы газа из основного потока проникают к стенке и тормозятся около нее. При этом возникает пограничный слой, который быстро утолщается и заполняет поперечное сечение канала. При дальнейшем увеличении осевой координаты влияние вязких эффектов распространяется по всему сечению канала.

С увеличением скорости вдува происходит турбулизация течения (за счет увеличения градиента скорости в центральной части канала), за исключением пристеночной и приосевой областей, а максимум кинетической энергии турбулентности сдвигается от стенки в поток. Появляется тенденция к снижению интенсивности пульсаций скорости в ядре потока, а у поверхности канала образуется пристенный слой

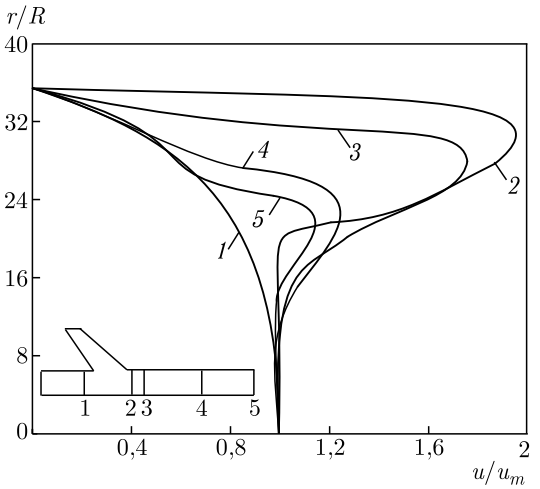


Рис. 3.29. Распределения осевой скорости в канале с проточкой, имеющей прямой наклон, при $r = 47$ (*1*); 87 (*2*); 101 (*3*); 171 (*4*); 221 мм (*5*)

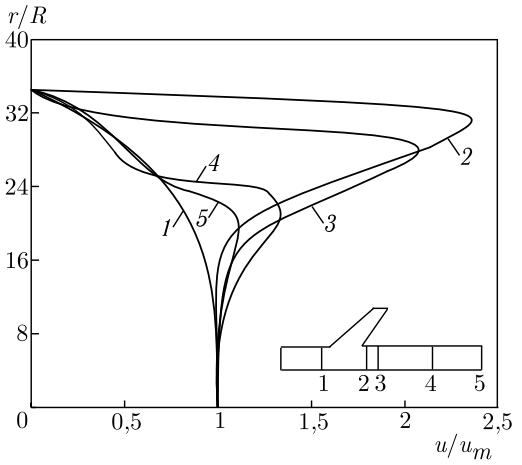


Рис. 3.30. Распределения осевой скорости в канале с проточкой, имеющей обратный наклон, при $r = 47$ (*1*); 87 (*2*); 101 (*3*); 171 (*4*); 221 мм (*5*)

(зона оттеснения), течение в котором по своим свойствам близко к ламинарному.

Распределения скорости для течения в цилиндрическом канале с компенсирующим элементом в форме проточки приводятся на рис. 3.29 и рис. 3.30. Результаты расчетов получены на основе модели вихревого течения невязкой несжимаемой жидкости. Профили

скорости на различном расстоянии от проточки и в зависимости от ее формы и направления наклона находятся в хорошем качественном и количественном соответствии с данными измерений [76].

Возмущение течения в цилиндрическом канале, обусловленное наличием кольцевой выточки, носит локальный характер и локализовано в небольшой окрестности границы стыковки щели с каналом заряда твердого топлива. Интенсивность возмущений течения в канале, вносимых проточкой, расположение и наличие локального максимума продольной составляющей скорости зависят от расположения проточки (в начале или в конце канала) и угла наклона компенсатора.

3.6. Течение жидкости в коаксиальном зазоре при наличии узлов отбора и подвода газа

В ряде конструктивных решений используется идея отбора газа из камеры для его использования в управляющем тракте. В других случаях постоянно работающий газогенератор обеспечивает рабочим телом контур управления, а излишки газа утилизируются через основную полость двигателя для повышения его импульсных характеристик. В обоих случаях узлы отбора и подвода газа представляют собой расходный фактор нарушения симметрии и вызывают появление трехмерных эффектов (рис. 3.31).

Рассмотрим течение в окрестности узлов отбора продуктов сгорания для управления вектором тяги, расположенных в зазоре над утопленным соплом. Характер решения определяется параметром $G = G_1/G_2$, где G_1 и G_2 — расход газа через отверстия отбора и суммарный расход рабочего тела из надсопловой части заряда. Параметрами задачи являются также отношения Δ/L и B/L, где Δ — ширина зазора над утопленным соплом, B — ширина зазора между торцом заряда и днищем двигателя, L — длина утопленной части сопла. Число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho v_w R/\mu$ строится по скорости вдува продуктов сгорания с горящей поверхности v_w и радиусу образующей утопленного сопла R.

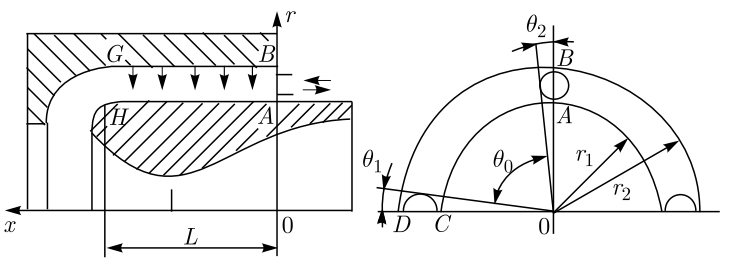


Рис. 3.31. Схема околосоплового пространства с узлами отбора и подвода газа

Применение метода понижения размерности и исключение давления при помощи операции перекрестного дифференцирования уравнений изменения количества движения приводит к системе уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + D\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = E, \tag{3.43}$$

$$\frac{\partial(\omega v_x)}{\partial x} + C\frac{\partial(\omega v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{A_1}{C_1}\omega = 0. \tag{3.44}$$

Псевдозавихренность связана с распределением скорости соотношением

$$\omega = \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} - A\frac{\partial v_x}{\partial \varphi}.$$

Коэффициенты A, A_1, C, C_1, D, E выражаются через геометрические характеристики канала и параметры массоподвода.

Уравнение (3.43) определяет конвективный перенос завихренности, зарождающейся на границе области. При безвихревом подводе массы во всей расчетной области выполняется условие

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial x} - A\frac{\partial v_x}{\partial \varphi} = 0,$$

что позволяет свести краевую задачу к интегрированию двух уравнений Лапласа для средней скорости,

$$AD\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{3.45}$$

$$AD\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{3.46}$$

На негорящей поверхности заряда скорость потока полагается равной нулю. На горящей поверхности заряда задается скорость вдува продуктов сгорания. Граничные условия на границе расчетной области, прилегающей к сопловой крышке, задаются из условия равнорасходности реальных узлов сосредоточенного газоподвода и их аналогов в математической модели. По окружной координате используются условия периодического типа. На выходе из расчетной области ставятся условия свободного вытекания.

Для численного решения уравнений (3.45) и (3.46) используется метод блочной релаксации с прогонками по строкам или столбцам.

На основе построенной математической модели проводится моделирование различных моментов работы системы управления и исследуется влияние геометрических и расходных факторов на уровень скорости. Возможности разработанной модели иллюстрируются на рис. 3.32.

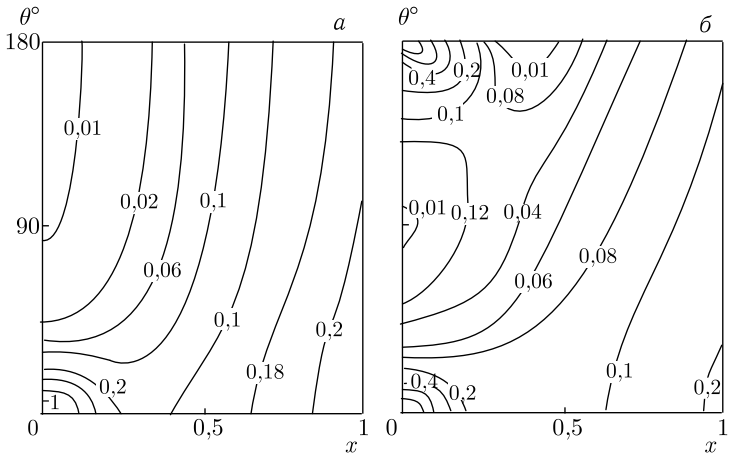


Рис. 3.32. Линии уровня модуля скорости на поверхности утопленной части сопла при отборе газа через одно (*а*) и два (*б*) отверстия

Течение в надсопловом зазоре при отклонении сопла при его работе как управляющего элемента (рис. 3.33) описывается при помощи построенной математической модели. Данный подход допускает простое распространение на случай работы узлов газоподвода одновременно с отклонением сопла (рассматривается совместное влияние геометрических и расходных факторов).

При моделировании начальных моментов работы двигателя, когда зазоры между соплом и поверхностью заряда значительно меньше радиуса сопла, расчеты проводятся в области, представляющей собой «развертку» надсоплового зазора (рис. 3.34).

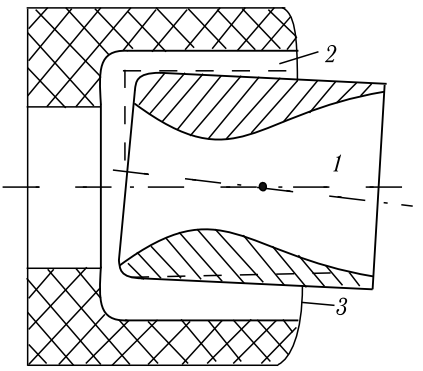


Рис. 3.33. Схема надсоплового зазора при работе поворотного сопла (*1* — надсопловый зазор, *2* — сопло, *3* — выходное сечение)

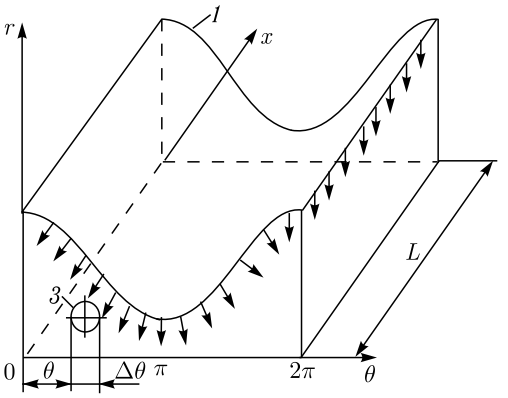


Рис. 3.34. Модифицированная область для расчета течения в надсопловом зазоре

Некоторые результаты решения задачи о течении в окрестности узлов отбора продуктов сгорания, расположенных в зазоре над утопленным соплом для управления вектором тяги приводятся в работе [95]. Расчеты проводятся на сетке $23 \times 33 \times 11$. Полученные результаты показывают, что при $\mathrm{Re} > 100$ решение задачи практически не зависит от числа Рейнольдса, а отношение ширины зазора между торцом заряда и днищем к диаметру днища оказывает слабое влияние на решение.

Существенное влияние на структуру течения оказывает параметр $G = G_1/G_2$, равный отношению расхода газа через отверстия отбора к суммарному расходу газа из надсопловой части заряда. В зазоре наблюдается сепаратриса, разделяющая потоки, движущиеся влево и вправо. Справа от сепаратрисы устанавливается профиль скорости, характерный для автомодельной задачи о течении в зазоре со вдувом [119]. Слева от сепаратрисы в зависимости от параметра G формируется профиль скорости либо параболического вида (при $G \leqslant 0{,}1$), либо профиль скорости с точкой перегиба вблизи радиуса образующей утопленного сопла (при $G > 0{,}1$). Наличие точки перегиба при $r = R$ служит индикатором отрывом потока. В этом случае вблизи отверстия отбора газа образуется циркуляционная зона течения слабой интенсивности.

Движение жидкости в направлении отверстий отбора газа происходит вначале наиболее интенсивно в плоскости между отверстиями. Далее профиль продольной скорости выравнивается вследствие тормозящего влияния стенки. С правой стороны сепаратрисы движение вдоль оси x носит более равномерный характер. Вблизи отверстия отбора радиальная скорость больше нуля, в окрестности сепаратрисы имеется локальный минимум $v_r(x)$, а справа от сепаратрисы с увеличением x

радиальная скорость принимает отрицательные значения, характерные для течения в зазоре между зарядом и соплом при $G = 0$. По мере приближения к плоскостям $x = 0$ и $x = L$ происходит наполнение профиля окружной скорости.

3.7. Течение в зазоре между эксцентрично расположенными цилиндрами

Рассмотрим течение невязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя круговыми цилиндрами со смещенными осями (рис. 3.35). С поверхности цилиндра большего диаметра осуществляется вдув жидкости со скоростью v_w. Поверхность цилиндра меньшего диаметра считается непроницаемой. Такая задача моделирует особенности геометрической ситуации, которая возникает в надсопловом пространстве при работе управляющего сопла.

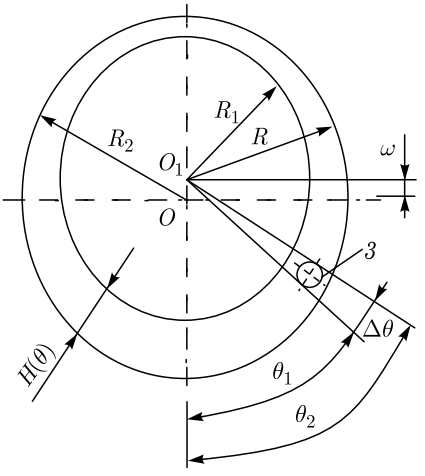


Рис. 3.35. Система координат

Используя метод понижения размерности и производя интегрирование по радиальной координате, получим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{R'}{R-1} w = \Phi_1,$$

$$\frac{R-1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{R-1}{2} uw\right) + (R^2-1)\frac{\partial P}{\partial x} = \Phi_2,$$

$$\frac{R-1}{2}\frac{\partial uw}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{R-1}{2}w^2\right)+(R-1)\frac{\partial P}{\partial\varphi}=\Phi_3.$$

Здесь

$$\Phi_1=\frac{2}{R-1}\left\{\frac{R'^2+R^2}{\left(R'^2+R^2\right)^{1/2}}-\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{R(R-1)}{2\left(R'^2+R^2\right)^{1/2}}\right]\right\},$$

$$\Phi_2=0,$$

$$\Phi_3=\frac{R'}{R'^2+R^2}-\frac{R-1}{2}\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{R'^2}{R'^2+R^2}\right].$$

В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длины используется радиус внутреннего цилиндра, а для переменных с размерностью скорости — скорость вдува. Безразмерные параметры задачи определяются соотношениями

$$R(\varphi)=\frac{r_2}{r_1},\quad u(x,\varphi)=\frac{v_x(r_1)}{v_w},\quad w(x,\varphi)=\frac{v_\varphi(r_1)}{v_w},\quad P=\frac{\Delta p}{\rho v_w^2}.$$

Для построения вычислительной процедуры применяется метод установления в сочетании с введением в модифицированную систему уравнений псевдосжимаемости. Система уравнений, на основе которой строится вычислительный алгоритм, имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial\varphi}=\Phi.$$

Вектор неизвестных и векторы потоков записываются в виде

$$U=\begin{pmatrix}P\\u\\w\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}\beta u\\Au^2+BP\\Auw\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}\beta w\\Auw\\A(w^2+2P)\end{pmatrix}.$$

Источниковый член имеет следующий вид

$$\Phi=\begin{pmatrix}\beta[\Phi_1-R'w/(R-1)]\\0\\\Phi_3+R'P\end{pmatrix}.$$

Здесь

$$A=\frac{1}{2}(R-1),\quad B=\frac{1}{2}(R'^2-1).$$

Указанная постановка задачи применяется и в более общей ситуации, соответствующей течению невязкой сжимаемой жидкости в кольцевом зазоре (рис. 3.36). Фрагменты *а*, *б* и *в* соответствуют различным случаям расположения внутреннего и внешнего цилиндров.

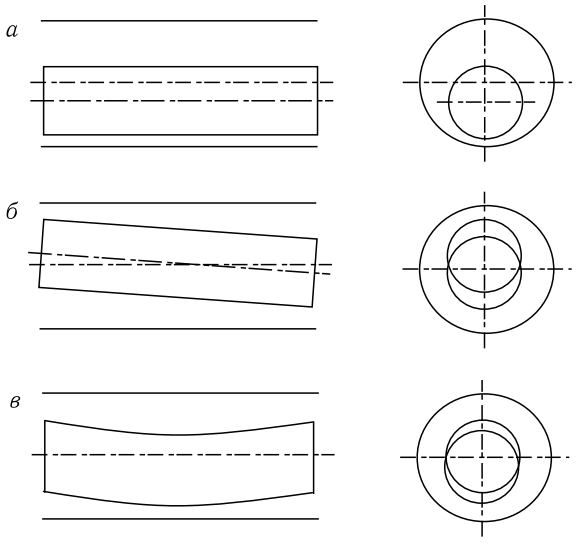


Рис. 3.36. Течение в кольцевом зазоре

При этом считается, что толщина зазора между поверхностями внешнего и внутреннего цилиндров является функцией пространственных координат и не изменяется во времени, $h = h(x, r, \varphi)$. Толщина зазора существенно меньше длины кольцевого зазора, $h/L \ll 1$ и радиуса кривизны цилиндрической поверхности, $h/R \ll 1$. Изменение толщины зазора вдоль координатных направлений x и φ считается малым и удовлетворяет условиям $dh/dx \ll 1$ и $dh/rd\varphi \ll 1$.

Осредняя параметры потока по радиальной координате, течение жидкости в кольцевой зазоре описывается следующим уравнением

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{R_2}\frac{\partial C}{\partial \varphi} + D = E,$$

где $R_1 = r_2 - r_1$, $R_2 = (r_1 + r_2)/2$. Векторы потоков имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} \rho R_1 R_2 \\ \rho u R_1 R_2 \\ \rho w R_1 R_2 \\ \rho e R_1 R_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \rho u R_1 R_2 \\ \rho u^2 R_1 R_2 \\ \rho u w R_1 R_2 \\ \rho u (e + p/\rho) R_1 R_2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} \rho w R_1 R_2 \\ \rho u w R_1 R_2 \\ \rho w^2 R_1 R_2 \\ \rho w (e + p/\rho) R_1 R_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ R_1 R_2 \partial p/\partial x \\ R_1 \partial p/\partial \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Источниковый член E учитывает свойства топлива.

Разработанный подход имеет высокую общность и позволяет использовать разнообразные краевые условия, соответствующие реальной ситуации. В частности, если принять, что массоподводящий элемент с некоаксиальными цилиндрами соединяется своим начальным сечением с некоторой замкнутой полостью, внутри которой давление является постоянным, а через выходное сечение осуществляется истечение жидкости в окружающее пространство при постоянном давлении, то через начальное сечение устанавливается обмен жидкостью с полостью. При этом суммарный расход через начальное сечение равняется нулю. В области узкого зазора жидкость поступает в полость, а в зоне широкого зазора — втекает из полости в зазор. Расходное условие позволяет замкнуть задачу и получить распределения скорости и давления в зазоре.

3.8. Моделирование крупных вихрей турбулентного течения в канале со вдувом

Исследование эрозионного горения топлива, являющегося результатом взаимодействия турбулентности и пламени, устойчивости течений, сформированных вдувом, формирования и переноса крупномасштабных вихревых структур, переноса и сепарация частиц конденсированной фазы, образующихся при горении металлизированных ракетных топлив, зашлаковывания определенных участков газодинамического тракта, требует привлечения методов моделирования турбулентных течений, позволяющих рассчитывать не только средние, но и пульсационные характеристики потока [47, 343, 344].

3.8.1. Формулировка модели. Совместим ось x прямоугольной декартовой системы координат с нижней стенкой канала, а оси y и z свяжем с его поперечным сечением (рис. 3.37). С нижней и верхней стенок канала осуществляется вдув со скоростями v_{w1} и v_{w2} соответственно.

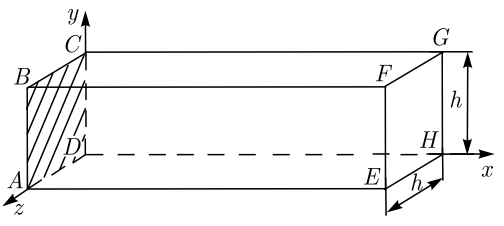


Рис. 3.37. Система координат

В начальный момент времени задаются распределения продольной и поперечной скоростей, описываемые соотношениями для вихревого

течения идеальной жидкости. Скорость в направлении оси z полагается равной нулю.

На нижней и верхней стенках канала при $x \in [0, L]$ используются граничные условия нормального вдува ($u = w = 0$ при $y = 0$ и $y = h$, $v = v_{w1}$ при $y = 0$ и $v = -v_{w2}$ при $y = h$). Температура нижней и верхней стенок считается фиксированной ($T = T_{w1}$ при $y = 0$ и $T = T_{w2}$ при $y = h$). Левая торцевая стенка канала полагается непроницаемой и теплоизолированной ($u = v = w = 0$, $\partial T/\partial x = 0$ при $x = 0$).

На границе, через которую газ покидает расчетную область (при $x = L$), ставятся неотражающие граничные условия (условия конвективного переноса).

В направлении оси z задаются либо граничные условия нормального вдува (трехмерная формулировка задачи) либо периодические граничные условия — условия повторения течения (квазидвумерная формулировка).

Скорость вдува изменяется во времени по гауссовскому закону, что подтверждается данными физического эксперимента [145], но остается постоянной в пространстве:

$$u' = 0, \quad v' = \alpha \langle v \rangle p_1, \quad w' = \alpha \langle w \rangle p_2,$$

где α — численный коэффициент ($\alpha \sim 0{,}2$). Случайные числа p_1 и p_2 выбираются из нормального распределения вероятности и вычисляются в соответствии с соотношениями

$$p_1 = t_1 \cos(2\pi t_2), \quad p_2 = t_1 \sin(2\pi t_2),$$

где $t_1 = (-2 \ln t_2)^{1/2}$. Случайные числа t_1 и t_2 выбираются из равномерного распределения вероятности на интервале $[0, 1]$.

3.8.2. Параметры и сетка. В качестве рабочей среды принимается воздух, $\rho_0 = 1{,}18$ кг/м^3, $\mu_0 = 1{,}78 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с). Температурам нижней и верхней стенок канала присваиваются постоянные значения ($T_{w1} = T_{w2} = 300$ К).

Ширина и длина канала выбираются равными $h = 0{,}01$ м и $l = 0{,}6$ м соответственно.

Расчеты проводятся на сетке $400 \times 100 \times 50$ со сгущением узлов к переднему днищу (по координате x) и непроницаемой стенке (по координате y) канала по закону геометрической прогрессии. Минимальные и максимальные шаги сетки по координатным направлениям x и y составляют $\Delta x_{\min} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ м, $\Delta x_{\max} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ м, $\Delta y_{\min} = 1{,}8 \times \times 10^{-5}$ м, $\Delta y_{\max} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}$ м. Шаг сетки по координате z полагается либо постоянным, $\Delta z = 10^{-4}$ м (при использовании квазидвумерной формулировки задачи), либо изменяется по тому же закону, что и шаг по координате y (в трехмерной постановке задачи).

Шаг по времени составляет $\Delta t = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ с. Для достижения статистически стационарной картины течения делается примерно 50000 шагов по времени.

Для удобства представления результатов линейные размеры относятся к ширине канала h, продольная скорость — к максимальной скорости в сечении канала u_m, а поперечная скорость — к скорости вдува с верхней стенки v_{w2} (предполагается, что $v_{w2} \neq 0$). Безразмерное время вводится как $t\,u_m/h$, где t — физическое время. Характерными параметрами задачи являются число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho v_{w2} h/\mu$ и отношение скоростей вдува с нижней и верхней стенок канала $\chi = v_{w1}/v_{w2}$.

3.8.3. Сеточная зависимость решения. Для исследования зависимости результатов численного моделирования от пристеночного разрешения сетки проводится серия расчетов на грубой сетке, имеющей меньшее число ячеек (приблизительно в 2 раза).

Частотный спектр кинетической энергии турбулентности приводится на рис. 3.38. Линии *1* и *2* соответствуют расчетам на грубой сетке ($200 \times 50 \times 25$) и подробной сетке ($400 \times 100 \times 50$), а прямая линия — закону Колмогорова–Обухова (закон пяти третей, $E \sim \omega^{-5/3}$). Используемые расчетные сетки позволяют разрешить масштабы турбулентных вихрей вплоть до инерционного интервала.

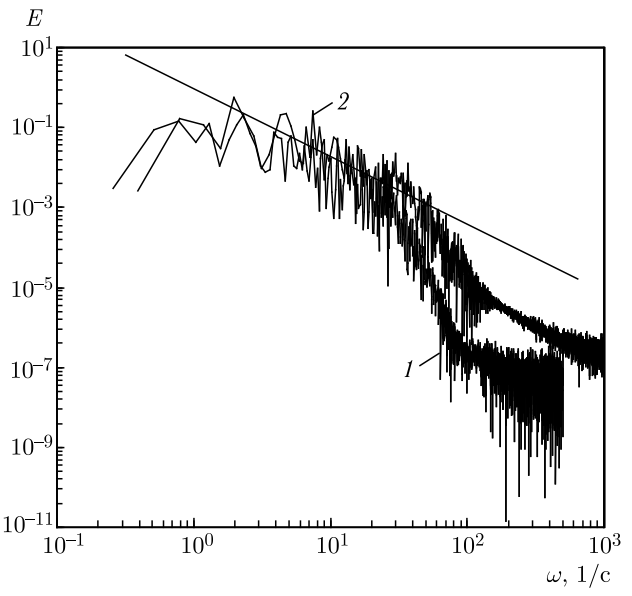


Рис. 3.38. Спектр кинетической энергии турбулентности

Картина течения в канале с односторонним вдувом (вдув производится с нижней стенки канала) или двухсторонним вдувом разделяется на вихревую зону и область потенциального течения. На расстоянии примерное $h/4$ от поверхности вдува в канале с двухсторонним вдувом (или в нижней половине канала с односторонним вдувом) в области потенциального течения пульсации скорости находятся на уровне турбулентного течения в канале с твердыми стенками — в пределах 3 %. В вихревой зоне течения уровень пульсаций скорости достигает 50 %, а в центральной части канала с двухсторонним вдувом (или в верхней половине канала с односторонним вдувом) — 20 %. Причем в нижней части канала существует резкая граница между потенциальным течением и вихревой областью (в пределах 1 мм перемещения датчика уровень пульсаций скорости изменяется от 2 до 20 %). В центральной части канала с двухсторонним вдувом (или в нижней части канала с односторонним вдувом) такой резкой границы нет, и потенциальное течение возмущается периодическими выбросами массы газа из вихревой области (колебания скорости носят упорядоченный, а не хаотический характер, свойственный турбулентным течениям). Размер вихревой области возрастает по мере увеличения числа Рейнольдса.

Профиль скорости в пограничном слое на непроницаемой стенке канала (рис. 3.39), полученный на подробной сетке (линия *2*), достаточно хорошо согласуется с законом Рейхардта [96] (значки •), построенным на основе экспериментальных данных и охватывающим вязкий подслой, буферную и логарифмическую области пограничного слоя. Пунктирная и штрихпунктирная линии соответствуют линейному распределению скорости в вязком подслое и логарифмическому распределению в турбулентной области пограничного слоя. Распределение скорости в пограничном слое, полученное на грубой сетке (линия *1*), несколько отличается от закона стенки, что объясняется недостаточным сеточным разрешением в пограничном слое. При $y^+ > 80$ распределения, описываемые линиями *1* и *2*, практически совпадают.

В то время как профили средней скорости в поперечном сечении канала достаточно слабо зависят от разрешения сетки (за исключением различий в пограничном слое при $y^+ < 10$), влияние числа узлов сетки на профили кинетической энергии турбулентности сказывается в большей степени (рис. 3.40). Расчеты на грубой сетке (линия *1*) дают менее наполненный профиль кинетической энергии турбулентности, а его максимум располагается дальше от стенки по сравнению с расчетами на подробной сетке (линия *2*). В серединной части канала результаты расчетов на грубой и подробной сетках практически совпадают.

3.8.4. Результаты расчетов. При высоких числах Рейнольдса область течения в канале со вдувом разделяется на подобласть сингуляр-

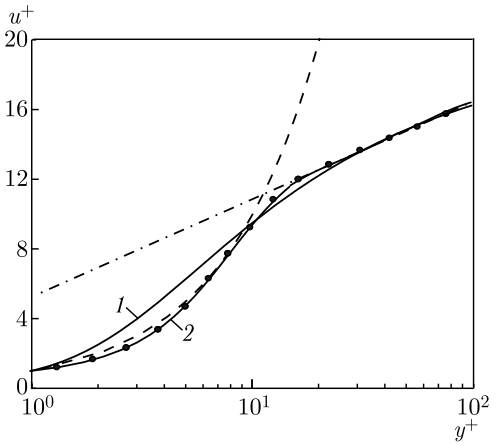


Рис. 3.39. Распределения продольной скорости вблизи стенки канала

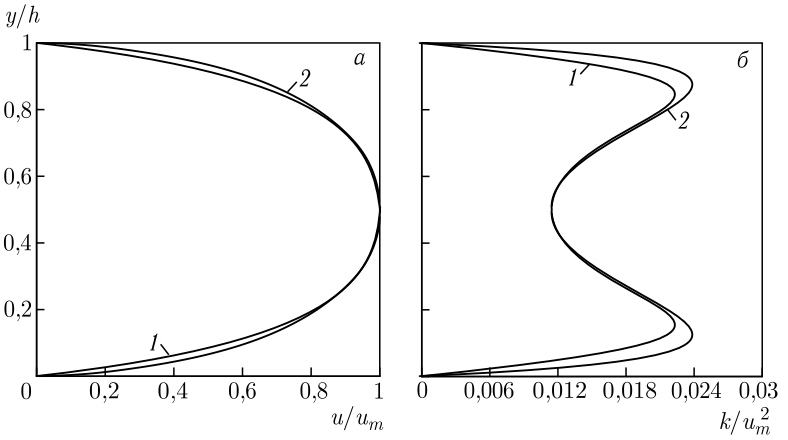


Рис. 3.40. Влияние разрешения сетки на распределения продольной скорости (*а*) и кинетической энергии турбулентности (*б*) в поперечном сечении канала

ного влияния вязкости вблизи стенок канала и подобласть вихревого течения в его центральной части.

Линии уровня продольной скорости, осредненные по ансамблю реализаций, приводятся на рис. 3.41 для течения в канале с одно- и двухсторонним вдувом.

Для визуализации картины течения используется модуль вихря скорости, $\Omega = |\nabla \times \boldsymbol{v}|$. Вихревая картина течения в канале с односторонним вдувом показана на рис. 3.42 в момент времени $t = 0{,}52$ с при различных скоростях вдува.

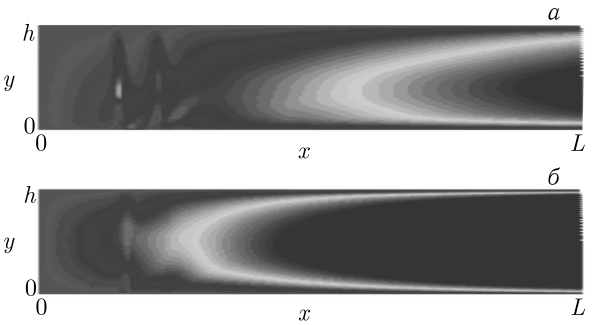


Рис. 3.41. Линии уровня продольной скорости при $v_{w1} = 0$, $v_{w2} = 2{,}75$ м/с (*а*) и $v_{w1} = v_{w2} = 2{,}75$ м/с (*б*)

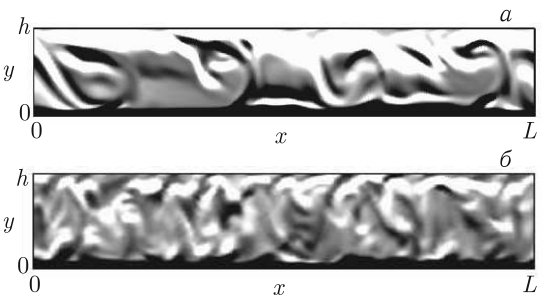


Рис. 3.42. Вихревая картина течения в канале при $v_{w1} = 0$, $v_{w2} = 1$ м/с (*а*) и $v_{w1} = 0$, $v_{w2} = 2{,}5$ м/с (*б*)

На некотором расстоянии от левой непроницаемой стенки формируются одна или две рециркуляционные зоны (снизу и сверху от плоскости симметрии в случае двухстороннего вдува и вблизи нижней стенки канала в случае одностороннего вдува). Формирование рециркуляционных зон связано с постановкой граничных условий прилипания на левой границе. При использовании условия зеркальной симметрии течения рециркуляционные зоны отсутствуют.

Вязкие силы играют пренебрежимо малую роль по сравнению с силами давления, за исключением небольшой области у торцевой и непроницаемой стенки канала (при $x/h < 12$). При $\mathrm{Re} > 10^4$ размер рециркуляционных зон практически не изменяется. Увеличение скорости вдува с нижней стенки приводит к уменьшению интенсивности рециркуляционного течения.

Характеристики турбулентности зависят от отношения скорости вдува к локальной продольной скорости $\theta = v_w/u_m$. При малых отношениях ($\theta \sim 0{,}04$) в течении доминируют мелкомасштабные вихревые

структуры. При более высоких параметрах вдува ($\theta \sim 0{,}1$) около стенки присутствуют крупномасштабные вихри.

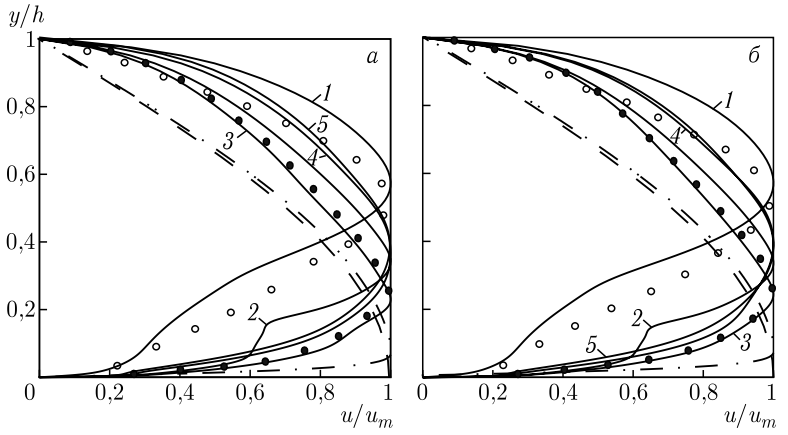


Рис. 3.43. Распределения продольной скорости при $x/h = 40$ (*а*) и $x/h = 50$ (*б*) при $v_{w2} = 0{,}1$ (*1*); 0,55 (*2*); 1 (*3*); 2,75 (*4*); 5 м/с (*5*)

Распределения продольной скорости по поперечному сечению канала приводятся на рис. 3.43. Пунктирная линия показывает косинусоидальный профиль скорости, имеющий место в вихревом течении невязкой несжимаемой жидкости, а штрихпунктирная линия — профиль скорости, соответствующий течению вязкой несжимаемой жидкости при $\mathrm{Re} = 10^3$ (для нахождения распределения скорости численно решается ОДУ 4-го порядка). Распределения скорости, описываемые кривыми *1–5*, соответствуют различным скоростям вдува с верхней стенки ($v_{w2} = 0{,}1 \div 5$ м/с). Нижняя стенка канала полагается непроницаемой ($v_{w1} = 0$). Значки • соответствуют данным физического эксперимента [145], а значки ∘ — результатам расчета по k–ε модели турбулентности при $v_{w2} = 1$ м/с (условия для кривой *3*).

По мере увеличения числа Рейнольдса максимум продольной скорости приближается к непроницаемой поверхности, вблизи которой развивается зона вязкого течения, подобная пограничному слою на плоской пластине. При высоких числах Рейнольдса четко выражена зона сингулярного влияния вязкости (через граничное условие прилипания) и зона вихревого течения невязкой жидкости. С увеличением расстояния от левой стенки канала профиль скорости принимает более наполненную форму, чем профиль скорости, полученный на основе k–ε модели турбулентности.

При $\mathrm{Re} > 10^3$ и двухстороннем вдуве одинаковой интенсивности ($v_{w1} = v_{w2} = 2{,}75$ м/с) решение становится практически независи-

мым от числа Рейнольдса. Профили продольной скорости имеет более наполненную форму по сравнению с распределениями, полученными из модели вихревого течения невязкой несжимаемой жидкости или решения уравнений k–ε модели турбулентности (рис. 3.44 *а*). Профили поперечной скорости при изменении интенсивности вдува сравнительно слабо отличаются друг от друга и достаточно хорошо описываются синусоидальным распределением (рис. 3.44 *б*).

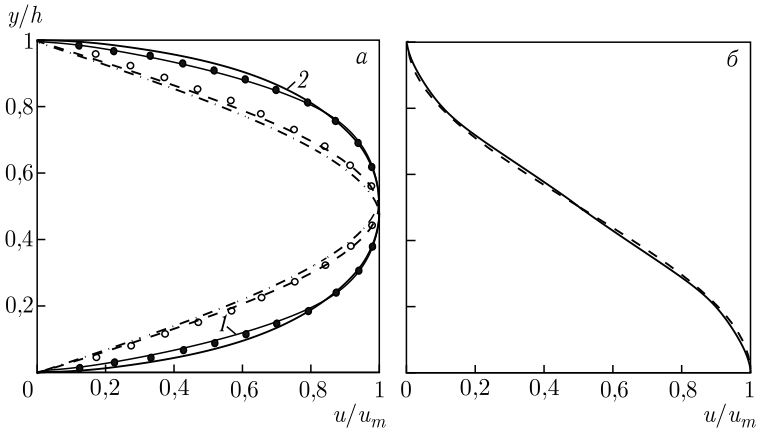


Рис. 3.44. Распределения продольной (*а*) и поперечной (*б*) скорости при $v_{w1} = v_{w2} = 2{,}75$ м/с и $x/h = 20$ (1); 60 (2)

Распределение продольной скорости по длине канала показывает рис. 3.45 (сплошные линии) в сравнении с данными моделирования крупных вихрей [105] (пунктирные линии) и данными физического эксперимента [331] (значки •). Продольная скорость изменяется практически по линейному закону вдоль оси канала на большей части его протяженности (при $x/L < 0{,}8$).

Распределение поперечной скорости имеет достаточно универсальный характер вдоль оси канала и, начиная с сечения $x/h \sim 10$, оно становится практически не зависящим от продольной координаты.

Распределения средней осевой скорости в канале с симметричным двухсторонним вдувом, нормированные на максимальную скорость в поперечном сечении канала, показаны на рис. 3.46 (сплошные линии) в сравнении с точным решением, описывающим вихревое течение невязкой несжимаемой жидкости (пунктирные линии) и данными физического эксперимента [331] (значки •). Число Маха на оси канала изменяется от 0,05 при $x/h = 4$ (фрагмент *а*) до 1,15 при $x/h = 48$ (фрагмент *е*). Для фрагментов *б*–*д* число Маха на оси канала составляет 0,3, 0,45, 0,68, 1,0. Отличие профилей скорости от точного решения

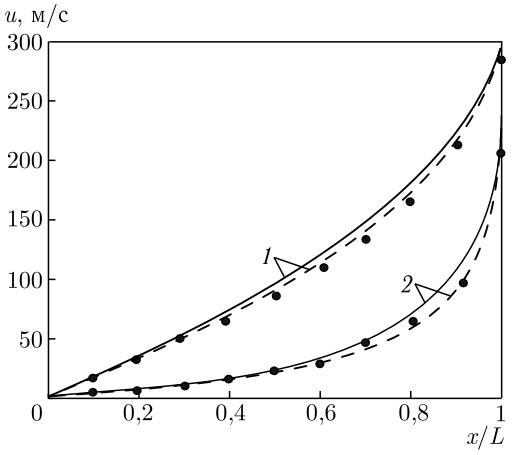


Рис. 3.45. Распределения продольной скорости по длине канала при $y/h = 0$ (линии *1*) и $y/h = 0{,}9$ (линии *2*)

становится заметным в интервале $x/h = 20 \div 30$ и объясняется влиянием сжимаемости.

Особенностью течения в канале с распределенным вдувом является наличие отрицательного градиента давления. Распределение давления вдоль координаты x, показанное на рис. 3.47 при $y/h = 0{,}5$ для течения в канале с симметричным двухсторонним вдувом, согласуется с расчетными данными [38] (значки ○), полученными на основе k–ε модели турбулентности, и данными [158] (значки •), полученными на основе v^2–f модели, и достаточно хорошо описывается параболической зависимостью, которая следует из решения для течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале со вдувом. Распределения давления практически не зависят от скорости вдува. Имеющееся рассогласование полученных результатов с данными [38] объясняется влиянием сжимаемости потока при $x/h > 30$. Изменение статического давления поперек канала незначительно.

Отрицательный градиент давления в канале оказывает существенное влияние на механизм и интенсивность турбулентного переноса.

С увеличением координаты x и скорости вдува происходит смещение максимума кинетической энергии от стенки в поток (рис. 3.48). Профиль кинетической энергии турбулентности имеет максимум, расположенный вблизи стенки канала. Увеличение уровня турбулентных пульсаций скорости наблюдается в области сильного сдвига на некотором расстоянии от проницаемой стенки канала, где жидкие частицы, движущиеся по нормали к поверхности, вынуждены развернуться в узкой приповерхностной зоне. Величина максимума, располо-

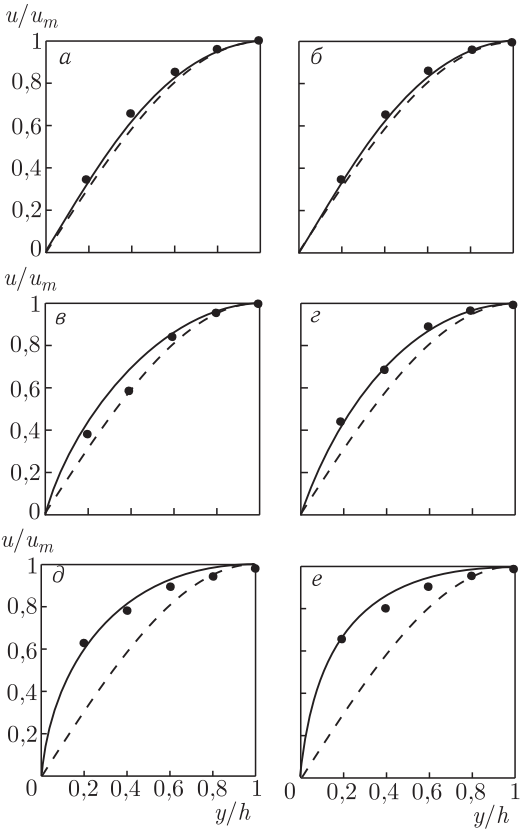


Рис. 3.46. Профили средней осевой скорости при $x/h = 4$ (*а*); 20 (*б*); 30 (*в*); 40 (*г*); 45 (*д*); 48 (*е*)

женного в окрестности непроницаемой стенки, существенно меньше (почти в 2 раза). Результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с данными физического эксперимента [145] (значки •), исключая пристеночные зоны потока, где расчеты переоценивают интенсивность турбулентности [239].

Расчеты по k–ε модели (значки ○) предсказывают положение максимума кинетической энергии турбулентности на большем расстоянии от проницаемой поверхности канала [38], а также переоценивают уровень турбулентности вблизи его стенок по сравнению с данными измерений и результатами прямого численного моделирования [145, 239].

В случае двухстороннего вдува генерации кинетической энергии турбулентности в центральной части канала не происходит, и ее уровень незначителен. Распределение кинетической энергии вдоль оси

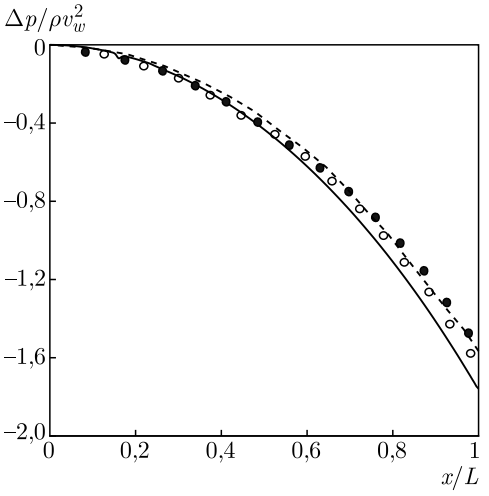


Рис. 3.47. Распределения давления в канале с двухсторонним вдувом

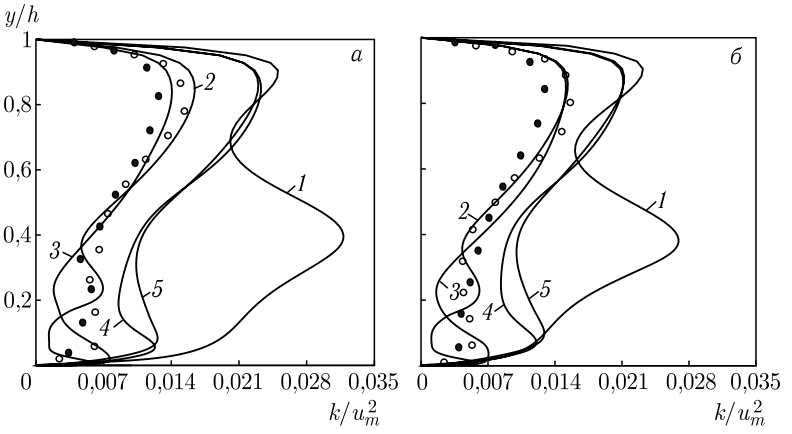


Рис. 3.48. Распределения кинетической энергии турбулентности при $x/h = 40$ (*а*) и $x/h = 50$ (*б*). Оозначения те же, что на рис.3.43

канала удовлетворительно описывается параболической зависимостью, показанной на рис. 3.49 (значки ∘ соответствуют k–ε модели), а распределение скорости диссипации — кубической зависимостью. Указанные зависимости успешно использовались для построения приближенной модели турбулентного течения в канале со вдувом [38]. Увеличение генерации кинетической энергии турбулентности при $x/L \sim 0{,}2$ соответствует точке перехода.

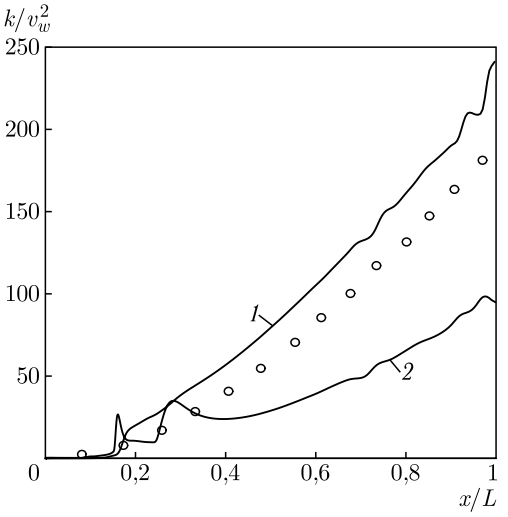


Рис. 3.49. Распределения кинетической энергии турбулентности при $y/h = 0{,}5$ (*1*) и $y/h = 0{,}75$ (*2*)

Интенсивность турбулентности в канале с проницаемыми стенками имеет такой же порядок, что и уровень турбулентности полностью развитого турбулентного течения в канале, когда вязкие и рейнольдсовые напряжения находятся в равновесии с напряжениями, обусловленными давлением [145].

Распределения интенсивности турбулентности и рейнольдсовых напряжений $f_{uv} = \langle u'v' \rangle$ приводятся на рис. 3.50 и рис. 3.51 (пунктирные линии) в сравнении с расчетами на основе модели переноса рейнольдсовых напряжений [103] (сплошные линии) и данными физического эксперимента [331] (значки •).

Вклад пульсаций продольной и поперечной скоростей в баланс кинетической энергии турбулентности примерно одинаков (средний клад пульсаций скорости в направлении оси z равняется нулю). Распределения нормальных компонент тензора рейнольдсовых напряжений $\langle u'u' \rangle$ и $\langle v'v' \rangle$ в качественном отношении практически не отличается от распределения кинетической энергии турбулентности, в то время как профили касательных компонент $\langle u'v' \rangle$ меняют знак при переходе через серединную линию канала.

Сравнение результатов численного моделирования с расчетами, проведенными на основе k–ε модели [38], и данными физического эксперимента показывает, что метод моделирования крупных вихрей предсказывает более наполненный профиль продольной скорости по сравнению решением, полученным на основе модели вихревого тече-

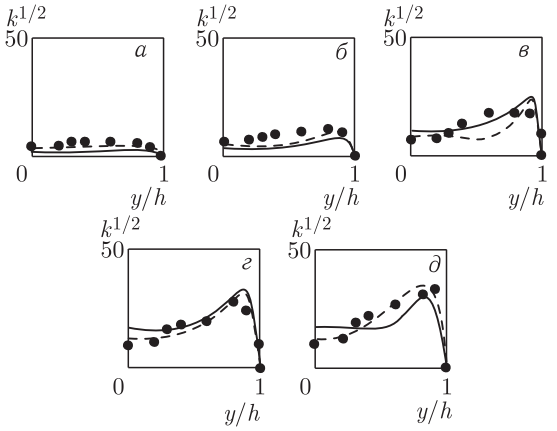


Рис. 3.50. Распределения интенсивности турбулентности при $x/h = 15$ (*а*); 25 (*б*); 30 (*в*); 40 (*г*); 45 (*д*)

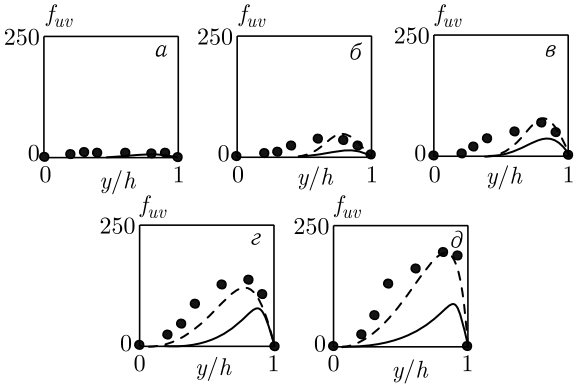


Рис. 3.51. Распределения рейнольдсовых напряжений при $x/h = 15$ (*а*); 25 (*б*); 30 (*в*); 40 (*г*); 45 (*д*)

ния невязкой жидкости или k–ε модели турбулентности. При этом максимум кинетической энергии турбулентности располагается ближе к проницаемой поверхности канала, чем это предсказывает k–ε модель [38, 39]. В случае двухстороннего вдува распределения характеристик потока становятся практически не зависящими от числа Рейнольдса, но и при этом имеют более наполненный профиль скорости.

Результаты численного моделирования течения в канала с двухсторонним вдувом имеют хорошее согласование с данными, полученными при помощи k–ε модели турбулентности [2, 34, 145].

Переход ламинарного режима течения в турбулентный определяется по картине поведения коэффициента трения вдоль нижней непрони-

цаемой поверхности канала (рис. 3.52). Коэффициент поверхностного трения находится из соотношения $C_f = 2\tau_w/(\rho U^2)$, где τ_w — напряжение поверхностного трения, U — средняя продольная скорость в поперечном сечении. Сплошные линии *1–4* соответствуют различным скоростям вдува с верхней стенки, а значки □, ○ и ● — расчету по k–ε модели турбулентности для условий, описываемых кривыми *2*, *3* и *4*.

Резкое увеличение коэффициента трения, начиная с $x/L \sim 0{,}2$, свидетельствует о ламинарно-турбулентном переходе. Положение точки перехода зависит от параметров задачи, а также оказывается достаточно чувствительным к флуктуациям скорости на проницаемой стенке и при увеличении скорости вдува смещается вниз по потоку. Координата точки перехода удовлетворительно согласуется с данными [239]. При этом k–ε модель дает удовлетворительное положение точки перехода лишь при малых скоростях вдува (линия *3*). При увеличении скорости вдува расхождение результатов возрастает по мере удаления от левой границы канала.

На основе полученных результаты можно выделить следующие режимы течения:

— область существенного влияния сил вязкости ($x/h < 1/\mathrm{Re}$);
— ламинарное течение с косинусоидальным профилем ($1 < x/h < 5$);
— область перехода ($5 < x/h < 10 \div 15$);
— турбулентное течение ($10 \div 15 < x/h$).

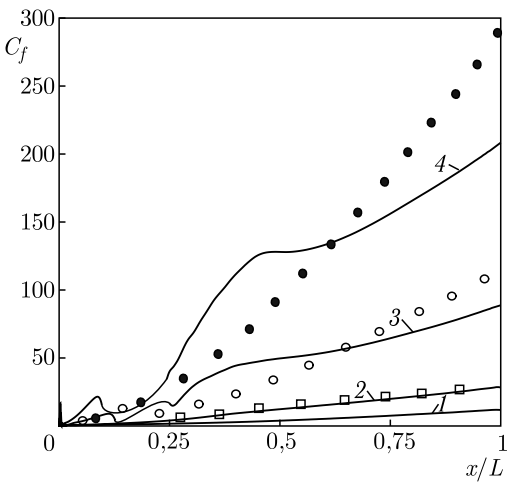


Рис. 3.52. Распределения коэффициента поверхностного трения вдоль непроницаемой стенки канала

Длина ламинарного участка зависит от числа Рейнольдса. С увеличением относительной амплитуды возмущений, $k_m^{1/2}/u_m > 4\,\%$, координата точки перехода уменьшается.

Форма и наполненность профиля продольной скорости в течении вязкой несжимаемой жидкости характеризуется параметром (momentum flux coefficient)

$$\beta = \frac{\langle u^2 \rangle}{\langle u \rangle^2}.$$

В общем случае течения вязкой сжимаемой жидкости коэффициент полноты профиля находится из соотношения

$$\beta = \frac{\rho h \int\limits_0^h \langle \rho \rangle \langle u \rangle^2 \, dy}{\left(\int\limits_0^h \langle \rho \rangle \langle u \rangle \, dy \right)^2}.$$

Для ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале со вдувом $\beta = 1{,}234$. Вместе с тем данные измерений, приведенные в работе [331], дают значение $\beta = 1{,}16$ вблизи левого закрытого торца канала, что связывается с высоким уровнем турбулентности на массоподводящей поверхности канала.

Распределение коэффициента полноты профиля продольной скорости вдоль плоскости симметрии приводятся на рис. 3.53 для течения вязкой несжимаемой жидкости в канале с односторонним вдувом с верхней стенки. Сплошные линии соответствуют результатам моделирования крупных вихрей, значки $\bullet$ — данным физического эксперимента [331], а значки $\circ$ — решению уравнений Рейнольдса, замкнутых при помощи k–ε модели турбулентности. Линии *1* и *2* показывают результаты численного моделирования при различной интенсивности псевдотурбулентности на массоподводящей поверхности ($\sigma = 0{,}12$ для линии *1* и $\sigma = 0{,}45$ для линии *2*).

Резкое уменьшение коэффициента β связывается с ламинарно-турбулентным переходом. Имеют место три характерных участка течения: ламинарный, переходный, турбулентный. Результаты расчетов в ламинарной области согласуются с теоретическим значением $\beta = 1{,}234$, а в турбулентной области — с данными [143], полученными на основе модели переноса рейнольдсовых напряжений. Численные данные находятся в согласовании с результатами моделирования крупных вихрей [103, 105] и данными физического эксперимента [116] для течения в круглой трубе со вдувом и низком уровне псевдотурбулентности на стенке.

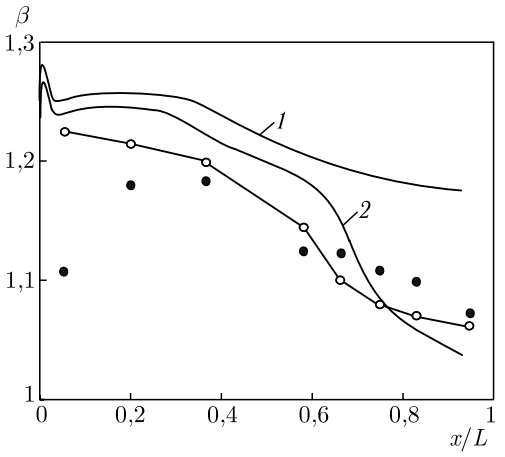


Рис. 3.53. Изменение коэффициента полноты профиля продольной скорости вдоль оси канала

Ускорение потока в канале со вдувом в осевом направлении и увеличение плотности приводят к монотонному уменьшению коэффициента количества движения вдоль оси канала (по мере приближения к правой границе расчетной области). Коэффициент количества движения уменьшается от 1,234 при $x/h = 0$ до 1,04 при $x/h = 50$ [105] (градиент продольной скорости увеличивается вблизи проницаемой стенки, а сам профиль в центральной части канала является более пологим). В интервале $x/h = 20 \div 40$ коэффициент момента в турбулентном потоке оказывается ниже значения, соответствующего ламинарному течению вязкой сжимаемой жидкости. Вниз по течению эффекты сжимаемости превалируют над эффектами турбулентного переноса и кривые распределения коэффициента количества движения в ламинарном и турбулентном потоке практически совпадают. При $x/h > 42$ течение контролируется эффектами сжимаемости и распределение коэффициента импульса в турбулентном потоке практически совпадает с тем, которое имеет место в ламинарном течении сжимаемой жидкости.

Результаты моделирования крупных вихрей внутренних турбулентных течений, сформированных вдувом, используются для исследования устойчивости горения топлива в канале заряда [351] (vortex-shedding-driven oscillations). Фильтрованные по пространству уравнения Навье–Стокса замыкаются при помощи модели Смагоринского ($C_S = 0{,}18$) и модели структурной функции ($C = 0{,}063$). На массовый расход газа через стенки канала накладываются нестационарные возмущения, которые выражаются через линейную двухпараметрическую функцию [167], описывающую связь между колебаниями скорости

горения и колебаниями давления (coupled pressure response function). Расчеты проводятся в двумерном приближении на сетках 469×41 и 235×21. Начальное поле течение в канале получается из решения уравнений Эйлера.

Обе подсеточные модели дают схожие картину течения и амплитуду колебаний давления, что хорошо согласуется с расчетами при постоянной турбулентной вязкости ($\mu_t = 5{,}3\mu$). При этом расчеты на основе модели Смагоринского дают несколько более высокий уровень турбулентной вязкости в той части канала, где имеет место массоподвод.

3.9. Нестационарные процессы

Колебания параметров рабочего тела в камерах сгорания РДТТ представляют собой опасное явление, являясь причиной нарушения нормального рабочего процесса, а в некоторых случаях приводят к разрушению двигателя. Источником энергии колебаний является вибрационное горение или гидродинамическая неустойчивость потока продуктов сгорания топлива.

3.9.1. Основные подходы. Теоретические и экспериментальные исследования позволили понять основные причины нестабильного горения твердого топлива [69].

Линейный подход основан на предположении о том, что колебания давления являются достаточно малыми, химические реакции завершаются вблизи поверхности горения, а осциллирующее поле течения в камере сгорания является акустическим [171, 172]. Такие допущения позволяют линеаризовать уравнения сохранения по амплитуде волнового движения и числу Маха, вычисленному по скорости массоподвода со стенок канала. Пренебрежение химическими реакциями приводит к интегрированию уравнений, описывающих нестационарное течение идеального газа. При моделировании акустического поля течения полностью пренебрегается вращательными эффектами. Точное решение задачи, построенное в работах [171, 172], достаточно хорошо согласуется с данными физического эксперимента [127, 188].

Линейный подход позволяет с удовлетворительной степенью точности описать перенос акустической энергии. В каналах со вдувом акустическая компонента представляет собой только часть полной энергии системы. Дополнительная кинетическая энергия генерируется за счет распространения сдвиговых волн и генерации завихренности на массоподводящей поверхности канала [208] (вращательные эффекты).

Решение уравнения, учитывающего влияние завихренности на акустический пограничный слой, рассматривается в работе [204]. Нестационарное поле течение генерируется за счет изменения давления

в осевом направлении по гармонической зависимости. При удалении от стенки амплитуда сдвиговой волны убывает за счет вязких эффектов.

По мере продвижения в высокочастотную область и при горении топлив со сложной кинетикой разложения и ее зависимости от температуры и давления требуется учитывать нелинейные эффекты.

Аналитические [202, 209, 210, 263, 375], численные [290, 348] и экспериментальные [127, 188] исследования показывают, что вращательные эффекты играют важную роль в устойчивости рабочих процессов в камерах сгорания ракетных двигателей. Разработанные средства расчетной диагностики позволяют воспроизвести эволюцию колебаний давления во времени и максимальную амплитуду этих колебаний, а также нестационарные тепловые потоки к стенкам камеры сгорания.

В работе [257] левый торец канала является закрытым, малые колебания скорости накладываются на распределение давления в выходном сечении канала. Средняя компонента скорости описывается точным решением уравнений Эйлера, а нестационарная компонента — линеаризованным уравнением движения, для решения которого используется метод разделения переменных [202, 209, 210] (time domain simulation). Метод разделения переменных приводит к решению двух ОДУ 2-го порядка. Решение уравнения, описывающего перенос завихренности в продольном (осевом) направлении получается в конечном виде. Уравнение, описывающее перенос завихренности в поперечном направлении, не имеет точного решения и находится приближенными способами. Метод WKD и метод многомасштабного разложения (multiscale expansion) рассматриваются в [257]. Применение такого подхода к конкретным конструкциям РДТТ описывается в работе [269]. Входные параметры, относящиеся к акустическому полю в канале заряда, определяются при помощи специализированного программного обеспечения (Standard Stability Prediction, SSP).

Малые гармонические возмущения скорости в канале, возбуждаемые вблизи левого торца канала, учитываются в работе [375]. Разработанный аналитический подход (метод возмущений) позволяет учесть генерацию завихренности на массоподводящей поверхности канала, ее конвективный перенос в радиальном направлении и взаимодействие с акустическим (невращательным) полем. Осевая скорость представляется в виде суперпозиции трех компонент. Стационарное поле течения (steady component) находится из решения уравнений Эйлера [172]. Для нахождения акустической скорости (acoustic irrotational component) используется линейное волновое уравнение. Уравнение для вращательной компоненты скорости (rotational component) выводится на основе метода возмущений. Конвективный перенос завихренности описывается линейным уравнением, а ее диффузия — нелинейным

уравнением переноса. В то время как градиент скорости имеет порядок $O(\mathrm{M})$, завихренность, генерируемая в нестационарном потоке, имеет порядок $O(\mathrm{M}^{-1})$.

Другой подход основан на использовании средств вычислительной газодинамики.

Обзор результатов, относящихся к неустойчивости горения в РДТТ, дается в работе [196]. Результаты получены в рамках программ Aerodynamics of Segmented Solid Motors (ASSM) и Pressure Oscillation Program (POP for Ariane 5 solid booster P230), поддержанных французским национальным космическим агенством (French National Space Agency, CNES). Топливо состоит из AP/Al/HTPB (68/18/14). Численные расчеты по амплитуде давления достаточно хорошо согласуются с данными измерений [314] (разница составляет около 5%). Применительно к РДТТ ракеты-носителя Titan IV данные приводятся в работе [183, 184]. Во всех случаях осцилляции давления вызываются генерацией вихрей (vortex shedding) и их взаимодействием с различными внутренними элементами заряда и соплом.

Обзор проблем, связанных со стационарными и нестационарными явлениями в камерах сгорания РДТТ, дается в [220, 221].

3.9.2. Нестационарное горение топлива. Для характеристики связи между флуктуациями массового расхода среды, поступающей в канал с его стенок, и флуктуациями давления используется функция отклика (pressure-coupled response), которая зависит от частоты колебаний,

$$R_{mp}(\omega) = \frac{\dot{m}'(\omega)/\langle \dot{m} \rangle}{p'(\omega)/\langle p \rangle},$$

где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота. Вещественная компонента функции отклика указывает на ту часть массового расхода, колебания которого происходят в одной фазе с колебаниями давления (обмен энергией между волнами давления в газовой фазе и горящей поверхностью заряда). В зависимости от знака вещественной компоненты, функции отклика волны давления либо усиливаются при $\mathrm{Re}(R_{mp}) > 0$, либо подавляются при $\mathrm{Re}(R_{mp}) < 0$.

Аналитическое представление функции отклика получается путем решения сопряженной задачи теплопереноса от пламени к поверхности топлива и задачи тепловой диффузии внутри твердой фазы. Модели, имеющиеся в литературе, различаются выражением для мгновенного теплового потока к поверхности топлива.

В работе [169] показывается, что различные представления функции отклика сводятся с линейному двухпараметрическому соотноше-

нию вида (linear response function)

$$R_{mp}(\omega) = \frac{nAB}{S + A/S - (1 + A) + AB},$$

где n — показатель степени в законе горения ($u = ap^n$), A и B — безразмерные параметры, зависящие от физических и химических характеристик топлива (A относится к кинетике пиролиза, B учитывает тепловой эффект реакции на поверхности топлива), S — переменная Лапласа (Laplace variable). Переменная Лапласа находится из уравнения $S(S-1) = i\Omega$, где $\Omega = a\omega/u^2$, a — температуропроводность топлива.

Мгновенный поток массы продуктов сгорания, поступающий в канал заряда, представляется в виде

$$\dot{m}(t) = \langle \dot{m} \rangle + \frac{\langle \dot{m} \rangle}{\langle p \rangle} \int\limits_{t-t_0}^{0} R(\tau) \left[p(t-\tau) - \langle p \rangle \right] d\tau, \tag{3.47}$$

где $R(\tau)$ — импульсная характеристика (impulse response), связанная с функцией отклика.

Обычно считается, что функция отклика является известной (параметры A и B находятся в соответствии с заданной композицией топлива) в диапазоне частот $[0, f_{\max}]$. Импульсная характеристика находится при помощи обратного преобразования Фурье функции отклика (inverse Fourier transformation)

$$R(t) = \mathrm{TF}^{-1} \left[R_{mp}(\omega) \right].$$

При решении уравнений Навье–Стокса граничные условия на поверхности заряда (стационарная скорость массоподвода находится из закона горения $u = ap^n$) заменяются граничным условием нестационарного массоподвода, которое описывается соотношением (3.47). Скорость массоподвода находится из соотношения (3.47) в каждом контрольном объеме, расположенном на поверхности горения (обычно $d\tau \ll dt$). Применение данной модели предполагает, что средние величины (среднее давление и средний массовый расход) являются известными в каждом контрольном объеме (например, из предварительного решения задачи со стационарными граничными условиями).

Для устранения или уменьшения неустойчивости процессов горения необходимо либо увеличить потери в системе, либо снизить восприимчивость процессов горения к неустойчивости. Для этого либо изменяется состав топливной композиции, либо изменяется геометрия поверхности горения.

3.9.3. Волновые процессы. Асимптотическая теория при $M \to 0$, объясняющая воздействие акустических возмущений давления, сгене-

рированных за счет возмущений скорости вдува, на распределение температуры и теплового потока в канале со вдувом, построена в работе [227] (для длинных узких труб). Течение описывается параболизованными уравнениями Навье–Стокса для сжимаемой среды (удлинение канала составляет 20). Амплитуда возмущений скорости вдува полагается достаточно большой, чтобы были существенными нелинейные эффекты, оказывающие влияние на перенос завихренности [312, 376].

Несмотря на то, что возмущения температуры являются достаточно малыми и имеют порядок $O(\mathrm{M})$, амплитуда осцилляций градиента температуры (теплового потока) оказывается существенно больше (газ, инжектируемый в канал, имеет постоянную температуру). Результаты анализа показывают, что поперечный градиент температуры на стенке пропорционален производной от давления по времени. В то же время, градиент температуры в направлении течения оказывается существенно меньше. Полученные результаты согласуются в качественном отношении с данными [312, 376]. Такой же эффект имеет место для распределения завихренности, что приводит к уровню сдвиговых напряжений, существенно превышающих уровень, который дает решение для вихревого течения невязкой несжимаемой жидкости. Вместе с тем, ни один из акустических эффектов, полученных в работе [227], не подтверждается расчетными данными [145], что в работе [227] объясняется существенным влиянием граничных условий для возмущений скорости на поверхности вдува. Однако результаты расчетов, касающиеся распределения завихренности, имеют качественное согласование с данными измерений [340, 341].

В работе [63] рассматриваются акустические колебания, распространяющиеся в осесимметричных каналах сложной формы на фоне предварительно рассчитанных вихревых течений идеальной сжимаемой жидкости. Учитывается как завихренность основного потока, так и акустическая проводимость поверхности горения и сопловой части канала, что приводит к присутствию в граничных условиях неизвестной частоты колебаний (предполагается прямая пропорциональная зависимость между нормальной скоростью и давлением на поверхности горения).

Математическая модель включает в себя линейное уравнение относительно квазипотенциала, получаемое из линейной системы уравнений акустики. При помощи замены переменной физическая область отображается на прямоугольник. В новых переменных задача решается методом Галеркина со специально построенной системой базисных функций. Для решения нелинейного характеристического уравнения используется модификация метода Ньютона.

В камере сгорания наблюдаются волны трех типов: акустические волны (acoustic wave), волны завихренности (vorticity wave) и эн-

тропийные волны (entropy wave). В однородном среднем течении эти волны распространяются независимо друг от друга. Акустические волны распространяются со скоростью звука, в то время как волны завихренности и энтропийные волны переносятся со средней скоростью потока. Волны завихренности и энтропийные волны не вносят вклада в флуктуации давления при малых амплитудах, а акустические волны не испытывают воздействия волн завихренности и энтропийных волн. Малые колебания давления и скорости в реагирующем течении приводят к значительным возмущениям скорости химических реакций и энергии, выделяющейся при горении топлива, и лишь малая часть этой энергии приводит к локальным колебаниям давления.

Одна из первых попыток описания неустойчивости течения в канале заряда была предпринята в работах [167, 169–172]. В этих работах предполагалось, что амплитуда флуктуаций давления, накладываемых на низкоскоростное среднее поле течения в канале, является малой, а также, что осциллирующее поле течения представляется акустическими модами камеры сгорания (chamber acoustic modes). Химические реакции не учитывались, а горение топлива заменялось граничными условиями распределенного вдува на поверхности канала. Такие допущения позволили провести линеаризацию уравнений изменения количества движения и исключить из рассмотрения все нестационарные вращательные эффекты (акустическое движение является невращательным). При этом не учитывалось влияния завихренности (вращательное движение) на изменение скорости горения топлива. Построенная модель предполагала экспоненциальный рост или затухание акустических возмущений, что эквивалентно модели [133], построенной на основе условия баланса энергии.

Во всех указанных моделях плотность акустической энергии описывается интегралом Кирхгоффа (Kirchoff energy density), который не учитывает вращательных эффектов, а кинетическая энергия, переносимая волнами завихренности, игнорируется (результаты расчетов получаются заниженными приблизительно на 25 % по сравнению с данными измерений).

В последующих работах учитывалось влияние завихренности на осцилляции скорости горения.

Имеющиеся аналитические [202, 203, 253, 254, 256, 259, 260, 263], численные [113, 114, 290, 291, 346, 348] и экспериментальные [127, 215] исследования показывают, что вращательные эффекты оказывают существенное влияние на формирование нестационарного поля течения в канале заряда. В работах [202, 203] проведены трехмерные расчеты, направленные на предсказание устойчивости системы с учетом влияния вращательных эффектов на акустическое поле в канале заряда.

Классическая теория не учитывает возникновения неустойчивости вследствие эволюции крупномасштабных вихревых структур [107] (Parietal Vortex Shedding, PVS). Данный эффект был впервые открыт на основе результатов численного моделирования течения в канале заряда (масштаб 1:5) ускорителя французской ракеты-носителя Ariane V (Ariane V P230 MPS booster) [249, 250, 285]. Новый тип неустойчивости играет важную роль в длинных камерах сгорания и наблюдается, в частности, в камере сгорания японской ракеты H-II [299], ускорителях ракет-носителей Titan 3 и 4 [128], Space Shuttle, а также в каналах с относительным удлинением от 15 до 25 [229].

Для того чтобы устранить недостатки классической теории устойчивости и объяснить появление больших осцилляций давления, обусловленных формированием крупномасштабных вихревых структур, были проведены экспериментальные [108, 332, 354], численные [161, 337, 351] и теоретические [134, 217–219] исследования. Основой теоретических исследований служила работа [17], в которой была развита теория линейной устойчивости в каналах с проницаемыми стенками.

3.9.4. Ламинарные течения. Трехмерное нестационарное течение в круглой трубе с неравномерным вдувом рассматривается в работе [310], обобщающей данные работы [311].

В работе [311] нестационарные гармонические возмущения накладываются на осевую скорость вблизи левой границы расчетной области $v_w = f(r,\theta)\sin\omega t$. Скорость вдува распределяется неравномерно по радиусу трубы, воспроизводя несимметричное горение заряда:

$$v_w(x,t) = -v_{rw}(x) - A(x,\theta)\,(1-\cos\omega t)\,,$$

где $A(x,\theta) > 0$. В качестве конкретных примеров выбираются функции $A(x,\theta) = \alpha\sin^2\theta\cos(\pi x/2)$ и $A(x,\theta) = \alpha\exp(-4\theta^2)\cos(\pi x/2)$.

Расчеты показывают, что поток в трубе является несимметричным на расстоянии порядка радиуса трубы от левой границы. Несимметричные эффекты затухают в осевом направлении на расстоянии порядка двух диаметров трубы [293] (несимметричное течение индуцируется за счет соответствующих граничных условий для давления).

Линейный и нелинейный анализ гидродинамической неустойчивости в газодинамических трактах РДТТ проводится в работах [202, 207, 267] и [263, 265] при малых трехмерных возмущениях поля давления. Основные уравнения содержат два малых параметра, одним из которых является число Маха M, вычисленное по скорости вдува, а другим — амплитуда возмущений давления ε (считается, что $\varepsilon \ll M$). Полученные результаты носят ограниченный характер и не предоставляют данных о распределении завихренности (уровень завихренности является малым в силу малых возмущений давления).

В работе [207] завихренность генерируется за счет малого градиента давления в осевом направлении, который изменяется во времени по гармоническому закону. Решение обосновано при малых числах Маха $\mathrm{M} = O(\mathrm{Re}_a^{-1/2})$, где Re_a — акустическое число Рейнольдса. Завихренность на стенке имеет порядок $O(\varepsilon/\mathrm{M}^2)$ [202]. Вязкие эффекты играют пренебрежимо малую роль. В соответствии с линейной теорией устойчивости, роль вязких эффектов возрастает по мере приближения к оси симметрии канала [202], что противоречит данным [376].

Методы, развитые в работе [310], позволяют получить результаты при достаточно высоких числах Маха ($\mathrm{M} \sim 0{,}1$). Такие числа Маха и несимметричные возмущения давления приводят к формированию значительного уровня завихренности.

Малые возмущения скорости вдува в окружном направлении приводят к возникновению осевой компоненты завихренности на боковой поверхности трубы, которая сносится к оси симметрии за счет конвективного и диффузионного переноса. Окружная компонента завихренности, сформированная за счет взаимодействия осевого градиента давления с инжектируемой жидкостью, имеет порядок $O(1/\mathrm{M})$ [376], в то время как малые возмущения окружного градиента давления приводят к формированию осевой компоненты завихренности, имеющей порядок $O(1)$ [310, 313]. Радиальная компонента завихренности равняется нулю на поверхности вдува, но принимает ненулевые значения внутри расчетной области.

Течение в длинном канале с прямоугольной формой поперечного сечения при малых периодических возмущениях давления рассматривается в работе [258]. Скорость представляется в виде суммы стационарной и нестационарной составляющих. Нестационарная составляющая течения представляется в виде суммы невращательной ($\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = 0$) и соленоидальной ($\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$) составляющих и описывается линеаризованным уравнением изменения количества движения. Распределение акустического давления описывается неоднородным волновым уравнением.

Влияние нестационарных возмущений скорости вдува в плоском канале и круглой трубе на генерацию нестационарного поля завихренности рассматривается в работах [227, 236] при достаточно малых волновых числах и частотах, не совпадающих с резонансной.

В работе [226] исследуется влияние малых возмущений на генерацию нестационарного поля завихренности и поле температуры в плоском канале с односторонним вдувом. На скорость вдува накладываются продольные возмущения вида $v_w(x,t) = -v_{rw}(x) - \varepsilon\phi(x)(1 - \cos\omega t)$, где $\phi(x) > 0$ для $\forall\, x$. В работах [308, 348] акустические возмущения создаются за счет возмущений поля давления в продольном направлении. Данные прямого численного моделирования [348] показывают, что

существенные поперечные градиенты продольной скорости (завихренности) составляют порядка 50 % от полуширины канала при $\mathrm{Re}_a = 3 \times \times 10^4$ и $\mathrm{M} = 0{,}0098$. Малые гармонические возмущения накладываются на распределение давления в выходном сечении канала. В других работах амплитуда завихренности изменяется в переделах $10 \div 15\,\%$ от полуширины канала [334] (малые гармонические колебания давления с амплитудой порядка 2 % от среднего давления индуцируются вблизи левого торца канала) до 75 % по данным [291].

При нерезонансных частотах колебания скорости и температуры в канале не являются строго гармоническими. При резонансных частотах ($\omega = \pi/2$) на стенке канала создается достаточно высокий уровень сдвиговых напряжений и тепловых потоков, а уровень завихренности возрастает почти в 10 раз по сравнению с нерезонансными частотами. При этом уровень поперечных градиентов температуры на поверхности вдува также почти в 10 раз превышает уровень флуктуаций температуры, что приводит к существенному увеличению тепловых потоков к стенкам канала, что согласуется с теоретическим анализом [376]. Увеличение тепловых потоков приводит к их существенному влиянию на горение топлива.

Устойчивость течения в длинном плоском канале рассматривается в работе [217]. Анализ проводится при достаточно больши́х удалениях от левого закрытого торца канала ($\mathrm{Re} = 500$). Флуктуации продольной скорости составляют до 40 % от скорости на оси канала ($u_m \sim v_w x$). Данные теоретического анализа сравниваются с результатами прямого численного моделирования на сетке 550×61.

В работе [376] исследуется генерация завихренности в длинном узком цилиндре со вдувом при малых числах Маха. На скорость потока вблизи левого закрытого торца канала накладываются малые гармонические возмущения. Результаты теоретического анализа показывают, что центральная часть канала является свободной от интенсивной завихренности только в начальный период работы системы, что подтверждается данными [127, 202, 265].

3.9.5. Ламинарно-турбулентный переход. В отличие от течения в канале с твердыми стенками, когда структура течения определяется балансом вязких сил и градиента давления, структура течения в канале с проницаемыми стенками определяется балансом инерционных сил и градиентом давления. Переход к турбулентности имеет место на некотором удалении от поверхности канала, а при удалении от левого торца канала максимум интенсивности турбулентности имеет тенденцию к приближению к массоподводящей поверхности канала.

Пространственная и временна́я структуры вихревого течения в канале с проницаемыми стенками отличаются от той, которая наблю-

дается в канале с твердыми стенками. Вблизи поверхности вдува образуются крупномасштабные вихревые структуры (roller-like vortical structures), которые описываются компонентой завихренности в направлении оси z. Вихри вытянуты в поперечном направлении и наклонены к стенке канала под острым углом (наклон имеет место в направлении, противоположном направлению среднего течения — в сторону левого торца канала). В серединной части канала течение имеет структуру, близкую к двумерной. При высоких числах Рейнольдса, рассчитанных по осевой скорости, возникает гидродинамическая неустойчивость потока. Двумерные вихревые структуры сносятся вниз по потоку и разрушаются на более мелкие вихри, имеющие трехмерный характер. Разрушение вихрей (примерно при $x/h \sim 34$) приводит к увеличению производства турбулентности и скорости ее диссипации. Переход к турбулентному режиму течения возникает на существенно большем удалении от стенки, чем в канале с твердыми стенками. Максимум интенсивности турбулентности имеет тенденцию к перемещению по направлению к стенке канала при удалении от его левого закрытого торца, несмотря на то, что вдув со стенок этому препятствует.

Переход к турбулентному режиму течения имеет место при $x/h = 20 \div 34$, на что указывает наполнение профиля продольной скорости в поперечном сечении (рис. 3.54). Неустойчивость течения возникает в точке A. Заштрихованная область соответствует области максимума производства турбулентности.

В плоском канале ламинарный режим имеет место при $0 < x/h < 20$, переходный режим — при $20 < x/h < 30$, турбулентный режим — при $30 < x/h < L/h$. Увеличение уровня псевдотурбулентности на массоподводящей поверхности канала приводит к более раннему переходу ламинарного режима течения в турбулентный.

Механизм перехода в существенной степени отличается от того, который имеет место в канале с твердыми стенками. Переход к турбулентному режиму течения в канале с твердыми стенками связывается с неустойчивостью Тейлора–Гертлера (Taylor–Gőrtler instability), а двумерные вихревые структуры в потоке отсутствуют [106]. Вдув жидкости увеличивает толщину пристеночного слоя и уменьшает сдвиговые напряжения, препятствуя проникновению жидкости из центральной части канала к стенке. Влияние вдува сказывается на увеличении угла наклона вихревых образований к проницаемой стенке. Положение максимума интенсивности турбулентности сдвигается по направлению к стенке от сечения $y/h \sim 0{,}6$ при $x/h = 20$ до сечения $y/h \sim 0{,}83$ при $x/h = 46$. Однако увеличение скорости вдува вниз по потоку вследствие сжимаемости препятствует проникновению пульсаций скорости к массоподводящей поверхности, в результате чего положение

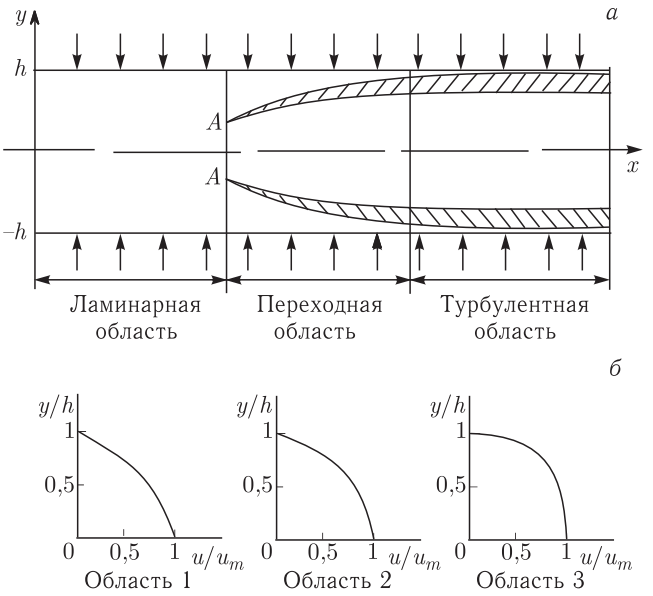


Рис. 3.54. Режимы течения в канале с проницаемыми стенками (*а*) и профили продольной скорости (*б*)

максимума интенсивности турбулентности по поперечной координате при $x/h > 34$ остается практически неизменным.

Устойчивость течения в плоском канале с односторонним вдувом изучается в работе [239], используя нелинейную версию k–ε модели и модель SDM (Semi-Deterministic Model). Расчеты проводятся с учетом и без учета белого шума, накладываемого на скорость вдува. В отличие от расчетов, проведенных в работе [351], формирование вихревых структур наблюдается при использовании обеих моделей. Низкорейнольдсовые эффекты вблизи твердой стенки канала учитываются при помощи демпфирующих функций.

Расчеты проводятся на подробной сетке, содержащей 400×200 узлов, и грубой сетке, содержащей 200×100 узлов. Длина канала составляет 0,581 м, а его ширина — 0,0103 м в нерезонансном случае и 0,02 м — в резонансном случае. Кинетическая энергия турбулентности и скорость ее диссипации полагаются равными нулю на твердой стенке. На проницаемой стенке им присваиваются произвольно малые значения ($k = 10^{-4}$ м^2/с^2, $\varepsilon = 10^{-3}$ м^2/с^3). Граничные значения для характеристик турбулентности оказывают существенную влияние на положение точки перехода и картину течения. Скорости вдува полагаются равными $v_w = 1{,}518$ м/с и $v_w = 1{,}71$ м/с.

Распределение турбулентной вязкости показывает, что течение остается ламинарным до сечения $x/h = 0{,}2$, что подтверждается расчетами [145]. Максимум турбулентной вязкости составляет порядка 600 значений ламинарной вязкости и достигается в выходном сечении. Обе модели хорошо согласуются с данными измерений в отношении распределения средней скорости, однако модель SDM дает несколько лучшее согласование. Такое же поведение наблюдается в работе [145], в которой сравниваются k–ε модель и модель переноса рейнольдсовых напряжений (обе модели дают несколько заниженный уровень продольной скорости в центральной части канала). Наблюдается два максимума скорости, один из которых располагается около твердой стенки канала, а другой — около проницаемой стенки. Интенсивность турбулентности выше около твердой стенки канала. Результаты расчетов [239] хорошо согласуются с расчетами по модели переноса рейнольдсовых напряжений [145]. Все модели достаточно хорошо предсказывают профили скорости в ламинарной и турбулентной областях потока. В переходной области течения имеет место некоторое рассогласование результатов. Для определения точки перехода используется распределение коэффициента трения вдоль твердой стенки. Переход к турбулентному режиму течения начинается вблизи сечения $x \sim 0{,}2$ м.

При периодических внешних возмущениях для исследования поля течения в канале со вдувом используется тройное разложение скорости на среднюю компоненту (mean), периодическую компоненту (periodic, organized) и турбулентную компоненту (turbulent, random). Основным механизмом передачи энергии от среднего течения к случайному являются нелинейные корреляции случайного поля скорости (такой же механизм, как и в стационарном турбулентном течении). Периодические внешние возмущения приводят к более раннему переходу ламинарного режима течения в турбулентный по сравнению с стационарным потоком, а также к увеличению уровня вихревой вязкости и дополнительной диссипации.

Взаимодействие жидкости, поступающей со стенок канала, с флуктуациями скорости и давления в направлении, параллельном стенке, приводит к генерации завихренности в осевом направлении. Вблизи поверхности канала образуется приграничный слой с высоким уровнем градиента завихренности (акустический пограничный слой). В том случае, когда флуктуации скорости и давления в акустическом пограничном слое достигают определенного уровня, они приводят к дополнительной генерации турбулентности около горящей поверхности заряда, которая оказывает влияние на горение топлива (flow coupling process).

Переход ламинарного режима течения в турбулентный в акустическом пограничном слое контролируется числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_{w\Omega} = V_w^{*2}/(\nu^*\Omega^*)$, вычисленным по угловой частоте, числом Струхаля

$\mathrm{Sh} = \Omega^* h^* V_s$ и относительной максимальной амплитудой акустической скорости $A = \widehat{u}^*/V_w^* = \Pi/(\gamma \mathrm{M}_w)$, где Π — амплитуда акустического давления (acoustic pressure amplitude), M_w — число Маха, построенное по скорости вдува (injection Mach number). Звездочка относится к размерным параметрам, принятым за начало отсчета (V_w^* — скорость вдува, Ω^* — угловая частота, ν^* — кинематическая вязкость, h^* — полуширина или радиус канала, $\widehat{u}^*$ — амплитуда акустической скорости). Профиль акустической скорости в ламинарном режиме и флуктуации скорости в канале зависят от среднего давления в камере сгорания p^*, а также от закона горения топлива, который характеризуется скоростью горения b^* , показателем степени n и числом Рейнольдса $\mathrm{Re}_{w\Omega} \sim b^{*2} p^{*(2n-1)}/\Omega^*$ (acoustic-injection Reynolds number).

Для условий течения в камере сгорания $x/L = 0{,}5$, $\gamma = 1{,}2148$, $\mathrm{M}_w = 0{,}00157$, $\Pi = 0{,}03$, $\mathrm{Re}_{w\Omega} = 169$. Акустическая скорость достигает максимального значения на расстоянии порядка 2,66 мм от поверхности горения. Результаты расчетов показывают, что акустическая скорость изменяется в зависимости от среднего давления в канале как $(p^*)^{n-1}$, уменьшаясь при увеличении давления в канале. При $\mathrm{Re}_{s\Omega} \sim 123$ толщина акустического пограничного слоя составляет приблизительно 0,8 мм.

3.9.6. Турбулентные течения. Турбулентным течениям в условиях воздействия внешних возмущений уделяется достаточно большое внимание в литературе, включая течения в каналах, пограничных слоях и камерах сгорания ракетных двигателей.

Точное решение задачи расчета коэффициентов трения и теплоотдачи ламинарного потока, находящегося под воздействием малых внешних возмущений скорости, получено в работе [244] и расширено на турбулентные течения, используя концепцию длины пути смешения Прандтля, в работах [138, 281].

В отличие от течений в пограничных слоях, где внешние возмущения определенной частоты не оказывают существенного влияния на средние характеристики потока [124, 125], вынужденные возмущения в кавернах и каналах сложной геометрии, характерных для камер сгорания, приводят к резонансным явлениям и играют заметную роль в формировании картины потока [106]. Усиление внешних возмущений при частотах, близких к собственной частоте камеры сгорания, приводит к дополнительному производству турбулентности.

Критерием перехода к турбулентному режиму течения при внешнем периодическом воздействии на поток служит критическое акустическое число Маха $\mathrm{M}_{a*} = K(f\nu)^{1/2}/a$ [118, 242]. Постоянная K изменяется в достаточно широких пределах — от 188 до 915 для течения в пограничном слое на плоской пластине и равняется 170 для течения в канале

со вдувом [106, 271]. При наличии вдува ламинарно-турбулентный переход определяется параметром $\mathrm{M}_{aw} = v_w/(\nu f)^{1/2}$, зависящим от скорости вдува [106].

Теоретический и численный анализ течений в каналах с твердыми и проницаемыми стенками [118, 242], основанный на двухпараметрической модели турбулентности, показывает, что критическое акустическое число Маха, при котором происходит переход к турбулентному режиму течения, индуцированный за счет внешнего акустического воздействия, уменьшается при увеличении скорости вдува и уровня псевдотурбулентности на проницаемой поверхности канала.

Расчеты по k–ε модели (при $\mathrm{Re}_a = 3 \cdot 10^7$ и $\mathrm{M} = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$) показывают, что гармонические возмущения скорости около левой границы расчетной области приводят к созданию достаточно тонкого акустического пограничного слоя на поверхности вдува, содержащего значительные радиальные градиенты осевой скорости. Толщина акустического пограничного слоя составляет несколько процентов от радиуса трубы. Данные [113] отличаются от результатов измерений [127], которые показывают существование акустических волн внутри расчетной области.

Влияние амплитуды и частоты периодических возмущений стационарного поля скорости на крупномасштабные вихревые структуры в канале рассматривается в работе [106]. На стационарное поле скорости накладываются временны́е возмущения около левой границы расчетной области, что приводит к распространению акустических волн в канале. Амплитуда и частота возмущений подбираются в соответствии с данными исследований гидродинамической неустойчивости течений в каналах со вдувом. Для моделирования полей скорости и давления используется тройное разложение мгновенных характеристик потока на среднюю, периодическую и случайную составляющие. Взаимодействие среднего поля течения с флуктуациями скорости и давления приводит к дополнительному порождению турбулентности и более раннему ламинарно-турбулентному переходу.

В работе [106] на среднее поле давления накладываются периодические возмущения вида

$$p_a = \varepsilon \langle p \rangle \sin(2\pi f t),$$

где ε — относительная амплитуда возмущений, которая полагается равной $2{,}5 \div 5\,\%$ от среднего давления вблизи левого закрытого торца канала. Для расчета амплитуды флуктуаций температуры используется изэнтропическое соотношение

$$\frac{T_a}{\langle T \rangle} = \left(1 + \frac{p_a}{\langle p \rangle}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1.$$

Частота возмущений изменяется от 336 Гц, которая представляет собой собственную акустическую частоту камеры сгорания, до 1800 Гц, которая близка к частоте, при которой происходит образование крупномасштабных вихревых структур в канале и их отрыв от массоподводящей поверхности [105].

Флуктуации завихренности (сдвиговые волны, shear wave) возникают на боковой поверхности канала вследствие вязко-акустического взаимодействия возмущений с нестационарным потоком в канале. В присутствии внешнего акустического воздействия вихревые структуры носят более организованный характер по сравнению со случаем, когда такое воздействие отсутствует. При низких частотах (ниже 1000 Гц) переход к турбулентному режиму течения возникает раньше, чем при отсутствии внешних возмущений. Увеличение частоты возмущений выше 1000 Гц приводит к задержке ламинарно-турбулентного перехода. Размер вихревых структур изменяется при изменении частоты внешних возмущений. Для толщины акустического пограничного слоя в ламинарном режиме течения имеется оценка $\delta \sim (\nu/f)^{1/2}$. При высокочастотном воздействии толщина акустического пограничного слоя уменьшается, а вязкие напряжения превалируют над турбулентными, и переход к турбулентности затягивается (вязкая диссипация подавляет турбулентные флуктуации). Вниз по потоку турбулентные флуктуации потока начинают превалировать над внешним периодическим возмущением потока. При низких частотах передача энергии между различными компонентами поля скорости происходит более эффективно.

При $f = 336$ Гц и $\varepsilon = 5\,\%$ падение акустического давления между левой и правой границами канала составляет почти 35 %. Причинами потерь служит разворот потока в условиях достаточно высоких поперечных скоростей. Этого не наблюдается в расчетах, проведенных в работе [202] для достаточно малых скоростей вдува. Изменение среднего поля течения за счет внешнего акустического воздействия и акустически индуцированной турбулентности оказывается минимальным.

Результаты расчетов, полученные в работе [106] при использовании тройного разложения скорости и обработанные в виде зависимости критического числа Маха от параметра вдува (акустическое число Маха около левой границы канала составляет 0,036), показывают, что уменьшение частоты (увеличение скорости вдува) приводит к уменьшению критического числа Маха. Такое же влияние на критическое число Маха оказывает и увеличение уровня псевдотурбулентности. Турбулентный режим течения в части канала, примыкающей к левому торцу, наблюдается лишь при определенных частотах и амплитудах внешнего воздействия. Следует отметить, что данные [106] получены в двумерной постановке и не учитывают дополнительную генерацию

турбулентности за счет механизма растяжения вихрей, который имеет место в трехмерном случае.

В работе [106] полагается, что максимальная амплитуда флуктуаций давления составляет около 1 % от среднего давления около левого торца канала. Частота колебаний равняется 1950 Гц, а число Струхаля — 6, что согласуется с данными [337]. В осевом направлении амплитуда флуктуаций давления уменьшается и коррелирует с осцилляциями завихренности. Схожее число Струхаля получено в работе [109] для различных скоростей вдува и конфигураций камеры сгорания.

Анализ устойчивости течения показывает, что при малых числах Рейнольдса (при $\mathrm{Re} < 300$) поперечная скорость потока оказывает дестабилизирующее влияние на поток, приводя к уменьшению критического числа Рейнольдса [17]. При высоких числах Рейнольдса (при $\mathrm{Re} > 300$) эффектом, стабилизирующим течение, является благоприятный градиент давления. Критическое число Рейнольдса увеличивается по зависимости, близкой к линейной, при увеличении числа Рейнольдса, построенного по скорости вдува [105]. В расчетах [106] (при $\mathrm{Re} = 1{,}5 \cdot 10^5$) дестабилизирующего влияния поперечной компоненты скорости не наблюдается.

При увеличении амплитуды возмущений, накладываемых на скорость вдува, точка перехода смещается к левому торцу канала. Увеличение амплитуды возмущений от 1 % до 90 % от среднего значения приводит к тому, что точка перехода смещается к левой границе канала (от сечения $x/h = 30$ к сечению $x/h = 20$).

3.9.7. Крупномасштабные вихревые структуры. Линейная устойчивость (linear stability) характеризуется экспоненциальным затуханием или ростом осцилляций давления во времени, $\widehat{p} = p_0 \exp(\alpha t)$. Экспоненциальный фактор α определяет скорость затухания ($\alpha < 0$) или роста ($\alpha > 0$) колебаний давления. Нелинейная устойчивость описывает реакцию системы на возмущения конечной амплитуды.

Образование крупномасштабных вихревых структур связывается с различными механизмами, в частности с углом поверхности горения (angle vortex shedding) или ее разрывами из-за наличия конструктивных особенностей заряда (obstacle vortex shedding, неустойчивость Кельвина–Гельмгольца), а также за счет вдува жидкости (parietal vortex shedding).

Основное внимание в работе [238] уделяется исследованию крупномасштабных вихревых структур (vortex shedding) и их взаимодействию с акустическими волнами в камере сгорания, что приводит к возникновению осцилляций давления и добавочному силовому воздействию потока на горящую поверхность. Расчеты на основе полных нестационарных уравнений Навье–Стокса проводятся для конфигурации,

соответствующей течению между двумя параллельными пластинами, с поверхности которых производится равномерный вдув. На давление в выходном сечении канала накладываются синусоидальные возмущения заданной частоты:

$$\frac{p'}{p} = 1 + \alpha \sin\left[2\pi f(t - t_0)\right],$$

где $\alpha = 0{,}01$, $f = 343$ Гц.

Крупномасштабные вихревые структуры зарождаются в слое смешения, образованном потоками газа, поступающего со стенок канала, и основным течением в канале. Газ, поступающий со стенок канала, стремится развернуться в узкой приповерхностной зоне, что приводит к достаточно больши́м градиентам скорости и неустойчивости сдвигового слоя по отношению к малым возмущениям и формированию вихревых структур. Вихревые структуры переносятся вниз по потоку и взаимодействуют с поверхностью сопла. Такое взаимодействие приводит к генерации акустических волн, которые отражаются от поверхности сопла и распространяются вверх по потоку, возмущая слой смешения (процесс является самоподдерживающимся). Максимум осцилляций продольной скорости имеет место на некотором удалении от стенки канала (при $y/L = 3{,}22 \cdot 10^{-3}$).

Вопрос о влиянии крупномасштабных вихревых структур на устойчивость горения и внутрикамерные процессы впервые был поднят в работе [207], в которой была замечена связь между неустойчивостью сдвиговых слоев и акустическим полем в камере сгорания. В ранних работах по этой тематике делались попытки описания неустойчивости в терминах критического числа Струхаля [347].

В работе [351] используется два подхода для описания поля течения, содержащего крупномасштабные вихревые структуры. Полудетерминистический подход (semi-deterministic approach) основан на декомпозиции поля скорости на когерентную и некогерентную компоненты. Уравнения переноса когерентной компоненты получаются при помощи осреднения уравнений Навье–Стокса. Отличие от подхода Рейнольдса заключается в том, что проблема замыкания решается по-разному для корреляционных моментов $\langle \rho u \rangle$ и $\langle \rho v \rangle$. Для решения проблемы замыкания привлекаются уравнения для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации, а также дополнительное уравнение переноса, учитывающее симметричные и несимметричные компоненты тензора рейнольдсовых напряжений. Другой подход основан на методе моделирования крупных вихрей с простой алгебраической моделью подсеточной вязкости (модель структурной функции, которая при определенных условиях сводится к модели Смагоринского).

Теоретическое исследование формирования крупномасштабных вихревых структур и их влияния на устойчивость течения в канале со вдувом проводится в работе [134]. Численное подтверждение данных [134] содержится в работах [239] (в рамках RANS с использованием различных моделей турбулентности) и [103, 146] (в рамках LES), в которых моделируются нестационарные режимы течения в канале со вдувом. Вязкие эффекты играют пренебрежимо малую роль в линейном анализе устойчивости.

Формирование крупномасштабных вихревых структур в двумерных ламинарных течениях сжимаемой жидкости, развивающихся в каналах сложной геометрической конфигурации, содержащих препятствия и выемки, исследуется в работе [161]. Характерной чертой профилей продольной скорости является наличие точки перегиба в той части канала, которая примыкает к твердой стенке. Отмечается также достаточно низкий уровень осцилляций давления в нестационарном потоке по сравнению со средним давлением. Расчеты проводятся на сетках различной разрешающей способности. В отличие от распределения скорости, расчетный уровень флуктуаций завихренности и давления оказывается чувствительным к сеточному разрешению.

3.9.8. Управление течениями. Прямое численное моделирования турбулентного течения в плоском канале с локальным вдувом или отсосом через верхнюю стенку и исследование ламинарно-турбулентного перехода проводится в работе [154].

Граничные условия на поверхности вдува имеют вид

$$u = 0, \quad v = -v_w H(x).$$

Функция $H(x)$ является гауссовской и центрированной относительно точки $x_s = 20h$, что дает следующее представление:

$$H(x) = \exp\left[-\frac{(x - x_S)^2}{\sigma^2}\right].$$

Параметр σ контролирует форму кривой. Обычно $\sigma = 1$.

На ламинарный профиль во входном сечении накладывается волна Толмина–Шлихтинга.

Прямое численное моделирование течения в канале с прямоугольной формой поперечного сечения в плане, с нижней и верхней поверхностей которого осуществляется вдув и отсос жидкости, проводится в работе [155] ($\mathrm{Re}_\tau = 150$, $v_w^+ = 0{,}05$). Сетка содержит $512 \times 129 \times 64$ узлов. При отсутствии вдува или отсоса течение в канале является существенно анизотропным вблизи стенок и приблизительно изотропным в центральной части. Вдув приводит к тому, что пристеночная турбулентность становится более изотропной (за счет увеличения уровня

пульсаций поперечных компонент скорости). Отсос жидкости оказывает обратное влияние, делая турбулентность более анизотропной. При вдуве имеет место увеличение продольной компоненты завихренности на 38 % (поперечные компоненты завихренности увеличиваются приблизительно на 9 % и 3 %) по сравнению с течением в канале с твердыми стенками. Отсос оказывает более сильное влияние на вихревую картину течения в канале, чем вдув жидкости. При отсосе продольная компонента завихренности уменьшается почти на 50 %. Динамическая скорость уменьшается примерно на 15 % при вдуве и возрастает примерно на 20 % при отсосе.

Вопросы управления внутренними течениями в плоских каналах при помощи разнонаправленного вдува и отсоса жидкости рассматриваются в работе [142]. Управление течением основано на влиянии вдува и отсоса жидкости на крупномасштабные вихревые структуры (opposition control, out-of-phase control), формирующиеся на некотором расстоянии от стенки (центрам вихрей соответствует плоскость y_s^+). Вдув и отсос организуются таким образом, чтобы приводить к уменьшению скорости вращения жидкости в вихре. При вращении вихрей против часовой стрелки вдув осуществляется слева, а отсос — справа. Положение плоскости y_s^+ зависит от числа Рейнольдса ($y_s^+ = 15$ при $\mathrm{Re}_\tau = 180$, снижение сопротивления на 25 %).

Для расчетов применяется метод моделирования крупных вихрей и динамическая версия подсеточной модели Смагоринского. При $\mathrm{Re}_\tau = 80$ разнонаправленные вдув и отсос полностью подавляют турбулентные флуктуации и приводят к ламинаризации течения (снижение сопротивления достигает 48 %). При более высоких числах Рейнольдса сопротивление в канале уменьшается на 19 % при $\mathrm{Re}_\tau = 100$ и на 19 % при $\mathrm{Re}_\tau = 720$ (при увеличении числа Рейнольдса происходит потеря эффективности снижения сопротивления). Механизм снижения сопротивления связывается с формированием так называемой виртуальной стенки (virtual wall), на которой флуктуации нормальной к стенке скорости обращаются в ноль (флуктуации других компонент скорости отличны от нуля). Виртуальная стенка ограничивает перенос количества движения к стенке и обычно располагается между физической границей области и плоскостью y_s^+. Расчеты направлены на отыскание оптимального положения плоскости y_s^+ (в смысле степени снижения сопротивления) в зависимости от числа Рейнольдса. При $\mathrm{Re}_\tau = 450$ оптимальная плоскость располагается при $x_s^+ = 12{,}5$, что примерно соответствует максимуму генерации турбулентности.

3.10. Выбор модели турбулентности

Тестирование различных моделей турбулентности применительно к течению в канале с односторонним вдувом проводится в работе [301]. Результаты численного моделирования в пакете Fluent сравниваются с данными [145, 148, 239].

Расчеты проводятся для геометрической модели канала длиной $L = 0{,}581$ м и высотой $h = 0{,}0103$ м при $\mathrm{Re}_w = 8 \cdot 10^4$. Расход жидкости через проницаемую стенку канала полагается равным $\dot{m} = 2{,}619$ кг/(м·с), а давление в выходном сечении канала — $p_a = 1{,}374 \times 10^5$ Па.

Расчеты проводятся в стационарной и нестационарной постановках на сетках, содержащих 100×290 и 100×242 узлов соответственно. Для тестирования выбираются модель Спаларта–Аллмареса, модель k–ε, RNG и Realizable версии k–ε модели, модель k–ω, SST-модель и модель переноса рейнольдсовых напряжений. Характеристикам турбулентности на стенке канала присваивались произвольные малые значения ($k = 10^{-4}$ м^2/с^2, $\varepsilon = 10^{-3}$ м^2/с^3).

Результаты расчетов в стационарной и нестационарной постановках согласуются между собой.

Расчеты показывают, что модель Спаларта–Аллмареса не дает удовлетворительных результатов как в отношении распределений скорости, так и характеристик турбулентности. Максимум продольной скорости имеет место не в окрестности непроницаемой стенки, а практически на серединной линии канала. Вниз по потоку профиль скорости изменяется сравнительно слабо.

Наиболее точные результаты получены при помощи SST-модели. Небольшое рассогласование расчетных и экспериментальных данных имеет место вблизи непроницаемой стенки канала. Несмотря на достаточно хорошее согласование результатов расчетов по k–ε модели с данными измерений по распределению скорости, согласование по распределению интенсивности турбулентности существенно хуже. При этом RNG-версия k–ε модели дает более точные результаты, чем стандартная версия k–ε модели [241] или Realizable версия k–ε модели.

Результаты численного моделирования, приведенные в работе [144], показывают, что применение моделей k–ε и k–ω приводит к достаточно большим погрешностям в отношении характеристик потока в области, находящейся вниз по потоку от области перехода [77, 144, 294].

Возможность применения модели переноса рейнольдсовых напряжений для описания стационарных и нестационарных течений сжимаемой жидкости в плоском канале с односторонним вдувом рассматривается в работах [145, 147]. Длина канала составляет 581 мм, ширина — 10 мм, а скорость вдува — 1,36 м/с, что соответствует числу Рей-

нольдса $\mathrm{Re} = 1{,}6 \cdot 10^3$. На скорость вдува накладываются случайные возмущения заданной интенсивности или считается, что флуктуации скорости вдува распределяются во времени по гауссовскому закону, но остаются постоянными в пространстве, поэтому

$$u' = \alpha \langle u \rangle P_1, \quad v' = \alpha \langle v \rangle P_2,$$

где

$$P_1 = t_1 \cos(2\pi t_2), \quad P_2 = t_1 \sin(2\pi t_2), \quad t_1 = (-2\ln t_3)^{1/2}.$$

Случайные числа t_2 и t_3 выбираются из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$. Амплитуде возмущений присваивается значение $\alpha = 0{,}02$, что соответствует примерно 2 % от массового расхода через стенку канала. При отсутствии возмущений скорости вдува течение остается стационарным.

Стационарные расчеты проводятся на сетке 100×100, а нестационарные — на сетке 600×100. Нестационарные расчеты соответствуют частоте $f = 407$ Гц [109].

В отличие от расчетов на основе k–ε модели турбулентности, которые приводят к завышенному уровню интенсивности турбулентности почти на 300 % [145], модель переноса рейнольдсовых напряжений дает удовлетворительный уровень интенсивности турбулентности, изменяющийся от 0 до 10 % от средней скорости. Расчеты дают безразмерную резонансную частоту порядка $\omega^* = 2\pi h f / v_w = 30$, в то время как в работе [134] получено значение $\omega^* = 18{,}5$.

Результаты численных расчетов в канале с односторонним вдувом [145, 147, 148] хорошо согласуются с данными измерений по распределению скорости, указывая на слабый сдвиг максимума профиля скорости от стенки вниз по потоку.

Расчеты на основе k–ω модели турбулентности для той же конфигурации канала, что и в работе [145], проводятся в работе [370].

Моделирование крупных вихрей и прямое численное моделирование течений в канале со вдувом проводятся для точных прогнозов пульсационных характеристик потока и его вихревой структуры. Несмотря на то, что моделирование крупных вихрей турбулентного течения в канале с проницаемыми стенками в двумерной формулировке приводит к достаточно хорошему согласованию с данными измерений по распределениям интенсивности турбулентности и осевой скорости по сравнению с расчетами по двухпараметрическим моделям турбулентности [246, 247] (при достаточно высоких скоростях вдува $v_w^+ = 1{,}5 \div 6$), двумерные расчеты имеют ряд недостатков, связанных с описанием эволюции крупномасштабных вихревых структур. Данные работ [246, 247] достаточно хорошо согласуются с результатами физического эксперимента [331], указывая, тем не менее, на несколько

более низкий уровень интенсивности турбулентности в части канала, примыкающей к выходному сечению.

Данные [283] (двухсторонний вдув при $v^+ = 0{,}0516 \div 0{,}154$) и [316] (вдув жидкости с одной из стенок канала и отсос с другой при $v_w^+ = 0{,}05$), указывают на увеличение рейнольдсовых напряжений и тепловых потоков, причиной чего является изменение пристеночной структуры течения в канале. Вдув приводит к увеличению толщины пристеночного слоя, уменьшению коэффициента поверхностного трения и увеличению турбулентных флуктуаций параметров потока. Отсос жидкости из канала оказывает обратное влияние на распределения рейнольдсовых напряжений и тепловых потоков.

Данные прямого численного моделирования [277] ($\mathrm{Re} = 87$, $\mathrm{Re}_0 = 2985$, течение в канале с односторонним вдувом, на противоположной стенке используется граничное условие свободного вытекания с фиксированным давлением) показывают, что при $v_w^+ = 1{,}4$ на профиле средней продольной скорости появляется точка перегиба вблизи стенки канала (приблизительно при $y/h \sim 0{,}07$). При той же осевой скорости напряжение трения на стенке оказывается существенно меньше, чем в канале с твердыми стенками.

Сравнение данных прямого численного моделирования с результатами расчетов на основе k–ε модели и v^2–f модели, проведенное в работе [158], позволяет установить подходящий масштаб скорости для турбулентного течения вблизи стенки (среднеквадратическая скорость вместо интенсивности турбулентности), указать на недостатки k–ε модели при описании течений в каналах со вдувом и повысить точность расчетов по сравнению с данными [116, 294]. Расчеты по двухпараметрическим моделям турбулентности (например, по k–ε модели) хорошо согласуются с данными измерений по средним характеристикам потока, но дают завышенный уровень интенсивности турбулентности [294]. Сравнение k–ε модели с расчетами на основе модели переноса рейнольдсовых напряжений проводится в работе [116], в которой используется параболизованная формулировка задачи.

В работах [105, 106] проводится моделирование крупных вихрей нестационарного турбулентного течения в канале с прямоугольной формой поперечного сечения в плане с учетом и без учета внешних возмущений. Конфигурация расчетной области и входные параметры задачи соответствуют тем, которые использовались в физическом эксперименте, описанном в работе [331]. Для расчетов используется двумерная постановка задачи и сетка, содержащая 640×100 узлов. Полученный частотный спектр находится в качественном согласии с данными [134, 337]. Исследуются механизмы, ответственные за возникновение нестационарного течения в камере сгорания.

В отличие от течения в канале с твердым стенками, в котором распределение характеристик течения определяется вязкими силами и градиентом давления, структура течения в канале со вдувом зависит от баланса инерционных сил и сил давления. Параметры потока определяются числом Рейнольдса, составленным по скорости вдува и скорости на оси канала [105].

Увеличение уровня псевдотурбулентности на проницаемой поверхности канала приводит к более раннему переходу к турбулентному режиму течения [105]. На скорость вдува накладываются случайные возмущения в виде белого шума:

$$u = 0, \quad \rho v_w = \varepsilon_p \dot{m}_w \left(2\xi - 1\right),$$

где ξ — случайное число. Вклад кинетической энергии, обусловленный вдувом с боковой поверхности канала, в полную энергию мал и им пренебрегается (флуктуации температуры и давления на поверхности вдува не учитываются).

Уровень флуктуаций осевой скорости уменьшается по мере продвижения от поверхности вдува к центральной части канала, указывая также на уменьшение уровня интенсивности турбулентности. Распределение давления в канале носит практически одномерный характер, слабо изменяясь по его поперечному сечению. Малые изменения давления в поперечном сечении наблюдаются лишь вблизи выходного сечения канала, где поток приобретает достаточно высокую скорость и становится заметным влияние сжимаемости. Распределение давления вдоль осевой координаты согласуется с теоретической зависимостью [214], полученной в рамках одномерного анализа течения без трения.

Распределение скорости, полученное в рамках моделирования крупных вихрей и модели сжимаемой жидкости, хорошо согласуется с точным решением и данными измерений [331]. Флуктуации давления коррелируют с флуктуациями завихренности. Области течения с низким уровнем давления соответствует вихревым структурам с концентрированной завихренностью. Флуктуации давления сносятся вниз по течению, но вследствие сверхзвукового характера течения в выходном сечении отражения волн внутри расчетной области не имеет места. Максимум флуктуаций давления наблюдается при частотах порядка 1800 и 3500 Гц, что соответствует сходу вихрей с массоподводящей поверхности канала из-за гидродинамической неустойчивости потока [134, 337].

Моделирование крупных вихрей нестационарного сжимаемого течения в канале с прямоугольной формой поперечного сечения в плане и закрытым левым торцом при достаточно больши́х скоростях вдува проводится в работе [103]. В качестве подсеточной модели используется динамическая модель Смагоринского, учитывающая влияние сжи-

маемости (в работах [105, 106] влияние стенки на интенсивность турбулентного переноса в пристеночной области учитывается при помощи функции Ван Дриста). На скорость вдува накладываются случайные возмущения в виде белого шума (амплитуда возмущений составляет от 1 до 90 % от среднего значения). На левом непроницаемом торце канала используются граничные условия скольжения. При этом рециркуляционная зона вблизи закрытого торца канала не образуется, что улучшает качество вычислительной процедуры [105].

Конфигурация канала и параметры соответствуют тем, которые использовались в физическом эксперименте [331]. Длина канала составляет 48 см, а его ширина и высота — 2 и 4 см. Воздух подается в канал при температуре и давлении торможения, равных 260 К и $3{,}142 \cdot 10^5$ Па. Средний удельный массовый расход рабочего тела через проницаемые стенки канала составляет 13 кг/(м^2·с), что соответствует скорости вдува 3,1 м/с и числу Рейнольдса порядка $1{,}5 \cdot 10^5$ около левого торца канала. Скорость вдува, отнесенная к динамической скорости, изменяется от 1,5 до 6 в продольном направлении. По мере продвижения от левого торца канала к правой границе расчетной области скорость вдува увеличивается более чем на 100 % (средний массовый расход через проницаемые стенки канала поддерживается постоянным).

Расчеты проводятся на сетке, содержащей $640 \times 140 \times 100$ узлов. Поскольку вдув приводит к уменьшению касательных напряжений на стенке по сравнению с течением в канале с твердыми стенками, то первый узел сетки располагается на значительно большем удалении от стенки ($y^+ = 2$ при $x/h = 0$ и увеличивается до $y^+ = 12$ при $x/h = 46$). Временной шаг составляет 10^{-8} с. Переход к турбулентности имеет место спустя $4 \div 5$ мс после начала вычислений (в качестве начального распределения скорости используется распределение, описываемое косинусоидальным профилем продольной скорости). Стационарный режим осцилляций параметров течения наблюдается спустя $8 \div 17$ мс, так что средняя картина течения получается при помощи осреднения расчетных данных по этому временно́му интервалу.

Результаты расчетов сравниваются с данными измерений [187] (несжимаемая среда, измерения проводились при $\mathrm{Re} = 9 \cdot 10^3$ и $\mathrm{Re} = 1{,}8 \times \times 10^4$, $M = 0{,}0018$ и $M = 0{,}0036$) и [331] (сжимаемая среда, измерения проводились при $\mathrm{Re} = 1{,}5 \cdot 10^4$, $M = 0{,}0095$) по распределениям средней скорости и интенсивности турбулентности.

Двумерные расчеты, проведенные в работах [105, 106], позволяют получить достаточно хорошее согласование с данными измерений по средним характеристикам потока, давая при этом более низкий уровень производства турбулентности и напряжения трения.

Результаты расчетов [105] по средним характеристикам потока достаточно хорошо согласуются с теоретическим решением [111], полу-

ченным для вихревого течения невязкой жидкости, которое показывает, что влияние сжимаемости приводит к более наполненному профилю осевой скорости по сравнению с течением несжимаемой среды. При переходе от течения несжимаемой жидкости к течению сжимаемой среды распределение осевой скорости по поперечному сечению трубы изменяется примерно так же, как при переходе от ламинарного режима течения в канале с твердыми стенками к турбулентному.

Распределение продольной скорости отклоняется от косинусоидального распределения, начиная с сечения $x/h \sim 20$. Результаты прямого численного моделирования течения в канале в области с периодическими граничными условиями в направлении оси z показывают, что профиль средней продольной скорости имеет точку перегиба около проницаемой стенки [277]. Распределение продольной скорости вдоль плоскости симметрии оказывается практически линейным до сечения $x/h \sim 34$, после чего существенную роль начинают играть эффекты сжимаемости. Коэффициент поверхностного трения $C_f = 2u_\tau/u_b$, где u_b — средняя скорость в поперечном сечении, монотонно уменьшается до сечения $x/h \sim 30$, в промежутке $x/h \sim 30$–40 он остается практически постоянным, после чего резко возрастает, что объясняется совместным влиянием эффектов сжимаемости потока и распадом трехмерных вихревых структур.

Сравнение результатов расчетов, проведенных в работах [104] и [105] (используется сетка $680 \times 200 \times 50$) и полученных в рамках двумерной и трехмерной постановок задачи, показывает, что двумерные расчеты приводят к заниженному уровню рейнольдсовых напряжений, но хорошо согласуются с трехмерными расчетами и данными измерений [331] по интенсивности турбулентности. Максимальный уровень рейнольдсовых напряжений оказывается заниженным почти в 2 раза на достаточно большом удалении от левой границы канала (при $x/h > 40$). При движении вниз по потоку рассогласование результатов возрастает. Двумерные расчеты дают положение максимума рейнольдсовых напряжений ближе к массоподводящей поверхности по сравнению с трехмерными расчетами. Различие результатов в двух- и трехмерной постановке связывается с растяжением вихревых структур в направлении оси z, что приводит к различному механизму производства турбулентности в двух- и трехмерном случаях. Согласование данных по интенсивности турбулентности является приемлемым как в смысле максимального уровня пульсаций скорости, так и его положения в поперечном сечении канала.

Данные физического эксперимента [181, 182] подтверждают результаты численного моделирования [239], полученные на основе k–ε

модели. Скорость на стенке канала представляется в виде

$$\rho u' = at_1 \cos(2\pi t_2), \quad \rho v' = at_1 \sin(2\pi t_2),$$

где $a = 0{,}004\,\dot{m}$, а t_1 и t_2 — случайные числа.

Результаты расчетов [239] достаточно хорошо согласуются с данными измерений по распределению скорости. Согласование расчетных и экспериментальных данных по интенсивности турбулентности несколько хуже. Результаты расчетов дают завышенный уровень интенсивности турбулентности на малых удалениях от левой границы расчетной области и заниженный уровень — по мере приближения к выходному сечению канала. Согласно расчетным данным, положение максимума интенсивности турбулентности практически не изменяется вдоль продольной координаты. В то же время, данные измерений указывают на приближение максимума интенсивности турбулентности к массоподводящей поверхности канала вниз по потоку.

Результаты работы [239] дают завышенный уровень флуктуаций продольной скорости в части канала, которая примыкает к проницаемой стенке, и существенно завышенный уровень вблизи твердой стенки канала. Схожее поведение дает модель переноса рейнольдсовых напряжений [145].

Роль турбулентности заключается в том, что она увеличивает толщину пограничного слоя на твердой стенке канала и приводит к усилению взаимодействия между вихрями и пограничным слоем.

Моделирование течений на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса (течение в плоском канале с двухсторонним вдувом одинаковой интенсивности) и прямое численное моделирование (течение в плоском канале с вдувом и отсосом, а также двухсторонним вдувом и периодическими граничными условиями в других координатных направлениях) проводится в работе [158] с целью лучшего понимания влияния сильного вдува на структуру турбулентности. Для расчетов используются низкорейнольдсовая версия k–ε модели и v^2–f модель турбулентности. Длина канала составляет 48 см, а его ширина — 3,2 см. Входные параметры задачи соответствуют данными измерений [331]. Массовый расход равняется 13 кг/(м$^2\cdot$ с), что соответствует числу Рейнольдса $\mathrm{Re} = 7840$.

При низких числах Рейнольдса используются демпфирующие функции, учитывающие влияние стенки на интенсивность турбулентного переноса. При сильном вдуве граничное условие прилипания для кинетической энергии турбулентности ($k = 0$) оказывается неприменимым на стенке (требуется учитывать флуктуации скорости на массоподводящей поверхности). Для функции f в v^2–f модели используются граничные условия $f = 0$ (твердая стенка) и $df/dn = 0$ (проницаемая стенка). Расчеты проводятся на сетках 57×49, 113×97 и 233×165.

Грубая сетка не позволяет обеспечить результаты приемлемой точности, в то время как расчеты по сеткам средней и хорошей разрешающей способности дают результаты, имеющие слабые отличия от результатов, полученных на основе v^2–f модели. Вместе с тем расчеты по k–ε модели турбулентности на различных сетках показывают, что сеточная независимость решения не имеет места. Осевые распределения давления, полученные в рамках различных моделей, хорошо согласуются между собой и с данными измерений. То же самое касается и осевых распределений скорости, хотя рассогласование данных при этом немного больше.

Распределения скорости в поперечном сечении канала демонстрируют лишь слабую сеточную зависимость, которая является более выраженной для v^2–f модели (особенно при переходе с грубой сетки на промежуточную). Зависимость распределения кинетической энергии турбулентности от разрешения сетки также менее выражена для k–ε модели. При этом k–ε модель дает более точные результаты на подробной сетке, чем v^2–f модель.

Отклонение распределения продольной скорости от линейной зависимости имеет место, начиная с сечения $x/L \sim 0{,}8$. Распределения продольной скорости вдоль продольной координаты, полученные на основе различных моделей турбулентности, согласуются как между собой, так и с данными измерений.

Профили скорости в различных поперечных сечениях имеют хорошее согласование с данными измерений [331] (точка перехода не является фиксированной, а псевдотурбулентность на массоподводящей поверхности отсутствует). В сечениях $x/h = 12$ и $x/h = 24$ расчеты по k–ε и v^2–f моделям дают менее наполненный профиль скорости по сравнению с данными физического эксперимента. При этом профили скорости удовлетворительно описываются косинусоидальным профилем скорости (в сечении $x/h = 24$ профиль скорости является более наполненным, что указывает на начало переход). Течение становится полностью турбулентным в сечении $x/h = 30$, что приводит к более наполненному профилю скорости вниз по течению. Расчеты по v^2–f модели указывают на более высокие значения скорости по сравнению с k–ε моделью.

Существенные отличия в результатах расчетов по различным моделям турбулентности наблюдаются в профилях кинетической энергии турбулентности. Более высокий уровень турбулентности, наблюдаемый в передней части канала, связывается с влиянием флуктуаций скорости на массоподводящей поверхности. Согласно данным [331], переход имеет место между сечениями $x/h = 20$ и $x/h = 30$, после чего течение становится полностью турбулентным. Рассогласование по уровню кинетической энергии турбулентности достигает 100 % в серединной

части канала, уменьшаясь вниз по течению. При этом v^2–f модель дает более высокий уровень турбулентности по сравнению с k–ε моделью, а максимум пульсаций скорости располагается ближе к стенке.

Такое поведение распределений кинетической энергии турбулентности связывается с влиянием пульсаций скорости на стенке канала. Расчеты, проведенные при отсутствии пульсаций скорости на стенке канала и при их уровне порядка $k = 0{,}75v_w^2$, показывают, что модель v^2–f дает более низкий уровень кинетической энергии турбулентности, а модель k–ε дает практически один и тот же уровень турбулентности, хотя при увеличении скорости пульсаций на стенке максимум кинетической энергии турбулентности перемещается по направлении к стенке канала. Различие в поведении объясняется механизмом перехода, заложенным в различные модели турбулентности (модель v^2–f предсказывает более ранний переход). При этом данные по k–ε модели лучше согласуются с данными измерений, чем аналогичные расчеты, выполненные в работах [293, 294]. В области полностью развитого турбулентного течения согласование расчетных и экспериментальных данных улучшается.

Удовлетворительное согласование результатов расчетов по различным моделям турбулентности с данными измерений имеет место на достаточно большом удалении от левой границы расчетной области (при $x/h \sim 46$). Тем не менее, v^2–f модель дает более низкий уровень кинетической энергии турбулентности по сравнению с k–ε моделью.

При использовании v^2–f модели введение флуктуаций скорости на стенке оказывает слабое влияние на распределение скорости, оказывая более сильное влияние на распределение кинетической энергии турбулентности в поперечном сечении канала (уровень турбулентности понижается, что лучше согласуется с данными измерений, а положение максимума пульсаций скорости остается неизменным). Граничное условие на функции f имеет довольно ограниченное влияние на результаты расчетов. Следует отметить, что при помощи изменения граничных условий для характеристик турбулентности в рамках v^2–f модели не удается добиться улучшения согласования результатов расчетов с данными измерений по распределению кинетической энергии турбулентности. Кинетическая энергия турбулентности на стенке изменяется от 0 (отсутствие флуктуаций скорости на массоподводящей поверхности) до $0{,}75v_w^2$, а v'^2 изменяется от $2k/3$ до k на массоподводящей поверхности.

Результаты расчетов показывают существенное влияние модели турбулентности на положение точки перехода ламинарного режима течения в турбулентный. Модели турбулентности с фиксированной точкой перехода дают результаты, лучше согласующиеся с данными измерений. Распределение интенсивности турбулентности в поперечных

сечениях канала слабо зависит от флуктуаций скорости на массоподводящей поверхности.

Течение в канале со вдувом ускоряется в продольном направлении и является неоднородным. Для постановки периодических граничных условий в направлении оси x вводится параметр вдува $\phi = v_w/u_m$, который считается достаточно малым. Продольная скорость в сечении $x = \widetilde{x}$ представляется в виде

$$u(x, y) = \widetilde{u}(\widetilde{x}, y)\left[1 + \phi\left(x - \widetilde{x}\right)\right].$$

Для флуктуаций скорости используется представление

$$u_i'(x, y, z, t) = A(X)\widetilde{u}_i'(\widetilde{x}, y, z, t),$$

где $A = 1 + \phi(x - \widetilde{x})$. Поле флуктуаций скорости $\widetilde{u}_i'$ считается однородным. Полагая, что $dA/dx = \phi$, $d^2A/dx^2 = 0$ и $(1/A\widetilde{u})dA/dx = 0$, течение описывается следующими уравнениями

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\phi u,$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \phi u_1\left(u_i - \delta_{2i}u_2\right) + u_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}.$$

В расчетах полагается, что $\phi = 0{,}04$ (сечение $x/h = 50$) и $\phi = 0{,}1$ (сечение $x/h = 20$). Числа Рейнольдса составляют 400 и 1000. Для расчетов используются сетки, содержащие 128^3 узлов (шаги сетки $\Delta x = 0{,}0982$, $\Delta y_{\min} = 3{,}012 \cdot 10^{-4}$, $\Delta y_{\max} = 2{,}454 \cdot 10^{-2}$, $\Delta z = 0{,}0491$). В продольном и поперечном направлениях размер канала составляет $4\pi h$ и $2\pi h$.

Результаты прямого численного моделирования по распределениям средней скорости в канале с двухсторонним вдувом достаточно хорошо согласуются с невязким решением, указывая лишь на несколько бóльшую наполненность профиля средней скорости в центральной части канала. Отличие от точного решения заключается также в наличии точки перегиба на профиле средней скорости, которая возникает при $y/h = 0{,}023$ (теоретическое решение имеет точку перегиба на массоподводящей поверхности). Расчеты [277] показывают, что точка перегиба находится при $y/h = 0{,}07$.

Результаты численного моделирования находятся в хорошем согласовании с данными измерений [187] и результатами расчетов [246]. Турбулентные напряжения играют второстепенную роль в балансе количества движения (их вклад составляет менее 20 %). Распределение рейнольдсовых напряжений напоминает распределение, которое имеет место в канале с твердыми стенками. Однако турбулентные напряжения в канале со вдувом достигают максимума на некотором удалении от стенки (при $y/h = \pm 0{,}83$). Пульсации поперечной скорости имеют наименьшую величину по сравнению с другими компонентами скоро-

сти. Тем не менее, максимальное значение поперечной скорости оказывается более, чем в 2 раза выше, чем в канале с твердыми стенками (2,2 против 1,0). Такое поведение имеет место при достаточно больши́х удалениях от левой границы расчетной области (при $x/h \sim 50$). При малых $x/h \sim 20$ максимальные пульсации компонент скорости u' и w' наблюдаются на большем удалении от стенок канала (при $x/h \sim 0{,}63$), в то время как распределение пульсаций поперечной скорости v' носит параболический характер, а ее максимум находится в ядре потока.

Параметр ϕ оказывает существенное влияние на распределения характеристик потока. При $\phi \sim 0{,}04$ в потоке доминируют вихревые структуры малого масштаба, в то время как при увеличении ϕ до 0,1 течение характеризуется наличием крупномасштабных вихревых структур, наклоненных к стенкам канала под углом, противоположным направлению среднего течения.

Профили скорости, обработанные в безразмерном виде (в качестве характерной скорости используется динамическая скорость), при $v_w^+ = 1{,}4$ демонстрируют удовлетворительное согласие с результатами, полученными на основе v^2–f модели турбулентности, но имеют существенное отличие от результатов прямого численного моделирования [277]. Все результаты указывают на отличие от стандартного закона стенки. Распределения кинетической энергии турбулентности вблизи стенки также имеют существенные отличия, несмотря на то, что ее максимальные значения, полученные на основе различных подходов, достаточно хорошо согласуются между собой. Вместе с тем, положения максимумов кинетической энергии турбулентности в окрестности стенки существенно отличаются.

В работе [153] проводится прямое численное моделирование турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости в канале, имеющем прямоугольную форму поперечного сечения в плане, со вдувом через нижнюю и отсосом через верхнюю стенку ($\mathrm{Re} = 2{,}18 \cdot 10^3$, $\mathrm{Re}_\tau = 1{,}5 \times \times 10^2$). Размеры канала составляют $50h \times h \times 3h$, где h — полуширина канала. В поперечном направлении используются периодические граничные условия.

Расчеты проводятся на сетке $512 \times 129 \times 64$ с шагом по времени $\Delta t^+ = 0{,}02 \Delta t u_m/h$ (u_m — средняя скорость во входном сечении), для которой $\Delta x^+ \sim 15$ и $\Delta z^+ \sim 6{,}25$. При этом $y^+ \sim 0{,}1$, а сгущение сетки производится в направлении оси y. Для получения статистически достоверной картины течения делается приблизительно 12000 шагов по времени.

Исследуется влияние вдува и отсоса на распределения скорости и интенсивность турбулентного переноса, в том числе компоненты тензора рейнольдсовых напряжений.

3.11. Влияние массовых сил

Влияние сил плавучести на структуру течения в плоском канале с левым закрытым торцом и односторонним вдувом с нижней стенки при малых числах Рейнольдса ($\mathrm{Re} = 200$) исследуется в работе [237].

Длина канала составляет $30h$. Расчеты проводятся на сетке $768 \times \times 64$. Шаг по координате x увеличивается от $0{,}011h$ вблизи левой границы до $0{,}064h$ в выходном сечении канала. Шаг по поперечной координате изменяется от $0{,}011h$ в окрестности стенки канала до $0{,}017h$ вблизи его серединной линии.

Левый торец канала является теплоизолированным. Температуры нижней T_1 и верхней T_2 стенок канала различаются ($T_2 < T_1$). Для расчетов используется приближение Буссинеска. Эффекты плавучести контролируются числом Ричардсона $\mathrm{Ri} = g\beta(T_1 - T_2)h/v_w^2$ или числом Рэлея $\mathrm{Ra} = \mathrm{Ri}\,\mathrm{Re}^2\,\mathrm{Pr}$. Числам Рейнольдса и Прандтля присваиваются фиксированные значения.

При отсутствии массовых сил (число Ричардсона равняется нулю) течение является стационарным с образованием рециркуляционной зоны около левого закрытого торца канала (вблизи верхней непроницаемой стенки). Влияние сил плавучести (увеличение числа Ричардсона) приводит к увеличению размера рециркуляционной зоны. При числах Ричардсона, превышающих некоторое критическое значение (в расчетах $\mathrm{Ri} = 20$ или $\mathrm{Ra} = 5{,}6 \cdot 10^5$), течение становится нестационарным (внешние воздействия отсутствуют). При низких числах Ричардсона возмущения носят периодический характер и ограничиваются областью, примыкающей к левому закрытому торцу канала. При высоких числах Ричардсона течение является неустойчивым и нестационарным с образованием крупномасштабных вихревых структур (Parietal Vortex Shedding, PVS).

При $\mathrm{Ri} < 90$ толщина теплового пограничного слоя на непроницаемой стенке канала является практически постоянной вдоль продольной координаты и описывается подобным решением. При $\mathrm{Ri} \sim 120$ тепловой пограничный слой становится нестационарным из-за взаимодействия с вихревыми структурами, формирующимися в канале.

Вблизи проницаемой стенки канала наблюдаются организованные вихревые структуры, интенсивность которых возрастает при увеличении числа Ричардсона. Структуры такого рода наблюдаются и в изотермическом случае при введении случайных возмущений скорости вдува [103]. При $\mathrm{Ri} < 90$ интенсивность вихревых структур остается достаточно слабой и они исчезают вниз по потоку. При $\mathrm{Ri} \sim 120$ интенсивность вихревых образований становится достаточной для того, чтобы оказать влияние на устойчивость потока. При этом влияние

флуктуаций скорости и температуры распространяется на всю область течения.

3.12. Течения во вращающихся двигателях

Во вращающемся РДТТ с односопловым блоком при увеличении внутрикамерного давления и скорости вращения двигателя наблюдается усиление эрозионного раздувания поверхности горения торцевого заряда. Такая же зависимость эффекта эрозионного раздувания поверхности горения от внутрикамерного давления и скорости потока наблюдается и при продольном обтекании горящей поверхности продуктами сгорания [76].

В соответствии с теорией устойчивости потоков в полях массовых сил, условие взаимной перпендикулярности ($f \perp \nabla f$, случай 1) или условие взаимной противоположности ($f \uparrow\downarrow \nabla f$, случай 2) массовой силы и ее градиента к обтекаемой поверхности являются необходимым условием возникновения вторичных течений. Условие, при котором градиент массовой силы превышает некоторое критическое значение, является достаточным условием возникновения вторичных течений. В случае 1 возникают вторичные течения I рода (макровихри I рода), а при реализации условия 2 — вторичные течения II рода (макровихри II рода). Образование упорядоченной макровихревой структуры у поверхности горения выражается в том, что локализованные объемы газа (макровихри) совершают вращательное движение вокруг линий тока основного потока.

Из всех видов вторичных течений наиболее полно исследованы макровихри II рода, к которым относятся вихри Тейлора, возникающие между двумя концентрическими цилиндрами, из которых внутренний вращается, а внешний неподвижен, и вихри Тейлора–Гертлера, возникающие в потоке при обтекании криволинейной вогнутой поверхности.

Кроме макровихревых возмущений пограничного слоя, формирующегося у поверхности горения торцевого заряда вращающегося двигателя, наблюдаются возмущения в виде серии двумерных осесимметричных волн Толмина–Шлихтинга, условием возникновения которых является выполнение неравенства $\mathrm{Re}_\delta > \mathrm{Re}_{\delta *}$, где Re_δ — число Рейнольдса, построенное по толщине вытеснения пограничного слоя, $\mathrm{Re}_{\delta *}$ — критическое число Рейнольдса, соответствующее точке потери устойчивости ламинарным пограничным слоем.

Газ с высокими уровнем скорости и степенью турбулентности проникает из внешнего потока к поверхности топлива, что приводит к уменьшению толщины ламинарного подслоя и увеличению коэффициента эффективной теплопроводности в результате замены молекулярного переноса турбулентным. Эти процессы вызывают деформацию

температурного профиля в реакционной зоне, уменьшение ее высоты, увеличение дополнительного теплового потока из газовой фазы в конденсированную (поверхность горения) и рост скорости разложения конденсированной фазы (рост скорости горения).

Указанные процессы имеют место в областях, где направление вращения макровихрей обусловливает перенос в сторону поверхности горения. В то же время, при направлении вращения макровихрей от поверхности горения топлива во внешний поток происходит вынос газа с более низким уровнем скорости (по отношению к внешнему потоку), что приводит к увеличению толщины ламинарного подслоя и высоты реакционной зоны в газовой фазе. Происходит уменьшение теплового потока в конденсированную фазу, что обусловливает снижение скорости горения. В местах, где вихри осуществляют перенос в направлении поверхности горения, в ней образуются углубления, в противном случае — выступы. Длина волны продольных волн на поверхности твердого топлива равняется удвоенному диаметру макровихрей.

Развитие возмущений в пограничном слое в виде волн Толмина–Шлихтинга сопровождается чередованием зон отрыва и присоединения потока. Механизм увеличения скорости горения топлива в точке присоединения потока (в результате образуется углубление) и уменьшения ее в точке отрыва (образуется выступ) аналогичен механизму изменения скорости горения топлива при макровихревом режиме обтекания поверхности заряда.

Первоначально закрученный поток газа обтекает плоскую поверхность горения заряда. При смещении потока к оси вращения происходит увеличение окружной и радиальной компонент вектора скорости. Начиная с некоторого радиуса, поток теряет устойчивость и происходит развитие возмущений пограничного слоя в виде волн Толмина–Шлихтинга, что приводит к образованию на поверхности топлива поперечной ряби. При дальнейшем перемещении потока к оси вращения происходит развитие вторичных течений I рода.

На поверхности горения заряда образуются возмущения в виде ячеек, размер которых уменьшается при приближении к оси вращения. Это обусловливается торможением потока в приосевой области и уменьшением массовых сил (центробежной и кориолисовой) и их градиентов в направлении поверхности горения. У оси вращения при торможении потока волны Толмина–Шлихтинга распадаются (из-за дестабилизирующего действия положительного градиента давления), порождая систему вихревых ячеек, переходящих в нерегулярные турбулентные пульсации. Развитое турбулентное течение с макровихрями I рода является причиной повышенной скорости горения топлива в приосевой области. На поверхности торцевого заряда образуется

углубление в виде усеченного конуса с плоским меньшим основанием (стадия I развития эрозионного конуса).

Начинается трансформация изначально плоской поверхности, и газ при движении к оси вращения движется не по плоской поверхности, а по боковой поверхности усеченного конуса (стадии II и III). Образующая боковой поверхности эрозионного углубления не является прямой линией, а имеет некоторую кривизну. При движении газа вдоль такой поверхности возникает дополнительная центробежная сила, градиент которой в направлении поверхности горения имеет знак, противоположный самой силе. У боковой поверхности усеченного конуса происходит образование продольных макровихрей II рода (вихри Тейлора–Гертлера). На возмущения типа волн Толмина–Шлихтинга, образующихся при обтекании плоской поверхности, накладываются продольные вихри Тейлора–Гертлера, что является причиной образования продольно-поперечной ряби на боковой поверхности конуса.

При движении потока к оси вращения вдоль поверхности конуса происходит затухание волн Толмина–Шлихтинга и исчезновение поперечной ряби на поверхности горения. Объясняется это тем, что при движении продуктов сгорания от периферийных частей заряда к оси вращения вплоть до приосевой зоны торможения происходит увеличение скорости потока и падение статического давления, что повышает устойчивость потока и гасит возмущения, возникающие в пограничном слое типа Толмина–Шлихтинга. Существование упорядоченных макровихревых структур в потоке препятствует развитию турбулентности и повышает устойчивость ламинарного пограничного слоя. При ускорении потока возрастает интенсивность продольных вихрей, что обусловливается ростом как величины центробежной силы, так и ее градиента. Этот фактор стабилизирует течение и гасит волны Толмина–Шлихтинга. В рассматриваемой зоне течение становится ламинарным с макровихрями. На поверхности топлива формируются только продольные волны.

На стадии II дно эрозионного углубления формируется параболоидом вращения, а на стадии III — плоскостью. Эта область находится в зоне приосевого торможения потока. Действующее поле массовых сил, а также дестабилизирующее влияние положительного градиента давления приводят к возмущениям пограничного слоя типа макровихрей I рода, на которые накладываются нерегулярные турбулентные пульсации (турбулентный режим течения с макровихрями I рода). На поверхности горения появляются крупномасштабные ячейки — следы макровихрей.

Около боковой поверхности цилиндра на стадии III поток вращается с угловой скоростью, превышающей скорость вращения заряда, в результате чего на поток воздействует центробежная сила, градиент

которой по нормали к поверхности цилиндра противоположен ей самой. Это приводит к образованию возмущений типа вихрей Тейлора. На поверхности горения образуются спиралеобразные борозды, длина которых равняется шагу двух вихрей Тейлора.

Зона сопряжения усеченного конуса и параболического днища эрозионного углубления на стадии II совпадает с границей зоны торможения потока в приосевой области у поверхности горения заряда, а также является границей образования макровихрей I рода. На стадии III зона сопряжения цилиндра и конуса не совпадает с границей приосевой зоны торможения, но совпадает с границей действия макровихрей I рода.

Вихри Тейлора усиливают разгар заряда на боковой поверхности цилиндрической части углубления. По мере разгара углубления и увеличения его диаметра происходит изменение характера распределения параметров потока. Нарушается достаточное условие возникновения вторичных течений, а при дальнейшем разгаре нарушается и необходимое условие, и горение заряда переходит в стадию IV. Проявляется стабилизирующее действие массовых сил на закрученный поток, что ведет к подавлению возмущений пограничного слоя, устранению эрозионного раздувания поверхности горения и сглаживанию поверхности горения по месту перехода усеченного конуса в цилиндр.

По мере разгара эрозионного конуса происходит снижение уровня скорости потока на входе в эрозионный конус, и это приводит к тому, что возмущения типа волн Толмина–Шлихтинга исчезают, а поперечная рябь на поверхности топлива сглаживается.

3.13. Химически реагирующие течения

Учет химических реакций имеет большое значение для развития моделей, описывающих эрозионное горение заряда твердого топлива.

Для исследования эрозионного горения в работе [117] используется упрощенная модель химической кинетики, в которой пренебрегается флуктуациями концентраций компонент смеси при расчете источниковых членов в уравнениях газовой динамики. В диффузионно-кинетической модели, развитой в работе [289], числам Прандтля и Шмидта присваиваются постоянные значения, что также является упрощением реальной картины явления. Зонная модель, в которой химические реакции учитываются только в приповерхностной зоне течения, а ядро потока рассчитывается в равновесном приближении (используется решение для вихревого течения невязкой несжимаемой жидкости), разрабатывается в работе [270]. Метод решения газодинамических уравнений следует работам [134, 218].

Химические реакции в газовой (пять реакций) и конденсированной (двухступенчатый механизм) фазах учитываются в работе [104]. Проводится моделирование крупных вихрей турбулентного течения реагирующей газовой смеси в трубе со вдувом и исследуется влияние физико-химических процессов на формирование нестационарного течения. Для замыкания фильтрованных уравнений Навье–Стокса привлекается модель Смагоринского, учитывающая сжимаемость потока. Химические реакции протекают на временны́х масштабах, много меньших времени турбулентного перемешивания, поэтому горение топлива рассматривается в рамках модели реактора идеального перемешивания (well-stirred reactor). Расчеты проводятся в осесимметричной постановке на сетке, содержащей 650×150 узлов.

Изменение скорости вдува вдоль боковой поверхности канала (массовый расход сохраняется постоянным) не играет существенной роли в переносе вихревых структур, хотя и приводит к уменьшению плотности и давления вдоль осевой координаты. Основное значение имеет радиальный градиент осевой скорости.

Переход к турбулентному режиму течения наблюдается при $x/R = 25$. Завихренность рождается на массоподводящей поверхности, а ее величина изменяется вдоль осевой координаты по нелинейной зависимости при увеличении размера вихревых структур. Число Струхаля составляет около 10 и превышает соответствующее значение, полученное для течения нереагирующей среды [103]. При высоких числах Рейнольдса турбулентность проникает в зону реакции, увеличивая скорость горения (эрозионное горение).

Число Маха изменяется практически по линейной зависимости вдоль осевой координаты от 0 вблизи левого закрытого торца трубы до 0,6 на выходе из расчетной области.

Профили осевой скорости оказываются более крутыми вблизи горящей поверхности заряда и более пологими в центральной части канала. Влияние турбулентности на распределение осевой скорости вблизи горящей поверхности является незначительным.

Распределения радиальной скорости отклоняются от синусоидального профиля, описывающего вихревое течение невязкой несжимаемой жидкости. Максимальная радиальная скорость вблизи горящей поверхности заряда увеличивается почти в 4 раза по сравнению с точным решением, а ее распределение на достаточно большом удалении от левого торца канала имеет четко выраженный максимум, который приближается к стенке канала при движении вниз по потоку. При малых x/R (при $x/R < 27$) распределение радиальной скорости имеет вторичный максимум и точки перегиба. Максимум радиальной скорости располагается в точке $r/R = 0{,}55$ при $x/R = 20$ и в точке $r/R = 0{,}82$ при $x/R = 50$. На оси трубы радиальная скорость равняется нулю

вследствие условия симметрии. При $r/R < 0{,}42$ профили радиальной скорости в различных сечениях по осевой координате практически совпадают.

Результаты расчетов, обработанные в виде спектров флуктуаций давления и осевой скорости, позволяют выявить ламинарный участок течения ($x/R = 8$), переходный ($x/R = 27$) и турбулентный ($x/R = 43$). На ламинарном участке флуктуации осевой скорости и интенсивность турбулентности оказываются незначительными. Тем не менее, радиальные флуктуации пламени и тепловыделение в зоне реакции приводят к самоподдерживающимся флуктуациям давления с частотой около 57 кГц. На переходном и турбулентном участках амплитуда флуктуаций осевой скорости увеличивается, достигая частоты 3,1 кГц, соответствующей гидродинамической неустойчивости течения.

Влияние горения и турбулентности на формирование крупномасштабных вихревых структур исследуется в работе [353]. Расчеты химически реагирующего течения проводятся на основе двумерной формулировки фильтрованных уравнений Навье–Стокса, для замыкания которых используется подсеточная модель Смагоринского ($C_S = 0{,}18$) и модель структурной функции ($C = 0{,}063$).

Для моделирования горения твердого топлива используется двухпараметрическая функция (pressure coupled response function), позволяющая учесть взаимосвязь между скоростью горения и осцилляциями давления в камере [167],

$$R_{mp} = \frac{\dot{m}'/\langle \dot{m} \rangle}{p'/\langle p \rangle}. \tag{3.48}$$

Параметрами функции являются показатель степени в законе горения топлива ($u \sim cp^n$) и две постоянные, являющиеся характеристиками конкретной топливной композиции.

Осцилляции массового расхода через боковую поверхность канала в частотном пространстве представляются в следующем виде [167]:

$$\dot{m}'(\omega) = \frac{\langle \dot{m} \rangle}{\langle p \rangle} R_{mp}(\omega) p'(\omega). \tag{3.49}$$

Используя обратное преобразование Фурье и свертку, в пространстве времени получим

$$\dot{m}'(t) = \frac{\langle \dot{m} \rangle}{\langle p \rangle} \mathrm{TF}^{-1}\left[R_{mp}(\omega)\right] * \mathrm{TF}^{-1}\left[p'(\omega)\right]. \tag{3.50}$$

Полагая $R(t) = \mathrm{TF}^{-1}\left[R_{mp}(\omega)\right]$, имеем

$$\dot{m}'(t) = \frac{\langle \dot{m} \rangle}{\langle p \rangle} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) p'(t-\tau) d\tau. \tag{3.51}$$

Учитывается, что $R(t = 0)$ при $t < 0$.

Численные расчеты проводятся на грубой (235×21) и подробной сетке (469×41).

Результаты расчетов показывают, что использование сравнительной простых алгебраических подсеточных моделей приводит к лучшему согласованию данных физического и численного экспериментов по сравнению с расчетами на основе уравнений Эйлера или уравнений Навье–Стокса без использования подсеточной модели или модели с постоянной вихревой вязкостью. Расчеты на основе уравнений Эйлера дают приблизительно одинаковые результаты на обеих сетках и более низкий уровень осцилляций давления по сравнению с данными измерений. При этом амплитуда осцилляций давления выше вблизи правого торца канала, чем в окрестности его левого торца. Расчеты на основе уравнений Навье–Стокса с постоянной подсеточной вязкостью ($\mu_s \sim 5{,}3\mu$) дают уровень осцилляций давления приблизительно на 15 % меньше, чем расчеты на основе уравнений Эйлера. Моделирование крупных вихрей показывает, что подсеточная вязкость оказывается в 20 (для модели структурной функции) и в 70 раз (для модели Смагоринского) выше ламинарной вязкости в передней части канала, а в части канала, примыкающей к выходному сечению канала, равняется примерно 20μ для обеих моделей. При использовании грубой сетки высокий уровень турбулентной вязкости (порядка $100\,\mu$ во всей расчетной области) приводит к подавлению крупномасштабных вихревых структур. Подключение модели горения дает увеличение амплитуды осцилляций давления в камере сгорания.

В работе [131] рассматривается горение цилиндрического заряда композитного топлива длиной 0,12 м и диаметром 0,01 м на основе перхлората аммония и полимерного связующего. Поверхность заряда состоит из однородного топлива и вставки композитного топлива, положение которой изменяется. В модели горения твердого топлива учитываются прогрев конденсированной фазы, разложение топлива и связующего, плавление и поверхностный пиролиз, реакции в газовой фазе (10 реакций между 14 компонентами).

Процессы в газовой фазе описываются при помощи уравнений Навье–Стокса, уравнений химической кинетики и уравнениями прогрева и разложения конденсированной фазы. Для учета зависимости теплофизических свойств различных компонентов газовой фазы от температуры используются полиномы 4-го порядка. Бинарные коэффициенты диффузии вычисляются на основе теории Чепмена–Энскога (Chapman–Enskog theory) и межмолекулярного потенциала Леннарда–Джонса (Lennard-Jones intermolecular potential energy function). В уравнениях химической кинетики предэкспоненциальные факторы выбираются исходя из данных физического эксперимента (они зависят

от давления). Для вычисления скорости перемещения горящей поверхности заряда используется приближенное соотношение.

Расчеты проводятся для двух давлений в канале заряда — 40 атм (случай 1) и 100 атм (случай 2). Для однородного топлива на основе перхлората аммония толщина пламени составляет 3,2 мкм в случае 1 и 1,2 мкм в случае 2. Температура пламени оказывается несколько ниже (на 4%) по сравнению с анализом, основанным на допущении о химическом равновесии.

Расчеты показывают, что поле давления в канале является практически однородным по поперечному сечению канала, исключая область вблизи поверхности горения, где имеют место высокие градиенты плотности и температуры. При наличии композитной топливной вставки толщина реакционного слоя составляет около 140 мкм в случае 2, а максимальная температура в зоне горения — около 3400 К, что почти на 200 К выше температуры, полученной из условия химического равновесия.

Размещение вставки композитного топлива ближе к выходному сечению канала (скорость составляет порядка 93 м/с, а число Маха — 0,1) приводит к тому, что толщина пламени уменьшается с 140 мкм (при размещении топлива в серединной части канала) до 50 мкм. Этот эффект является следствием влияния скорости потока в канале заряда, который непрерывно ускоряется вдоль его оси. Более точный расчет скорости горения требует включения модели турбулентности в математическую модель течения.

Применение прямого численного моделирования и моделирования крупных вихрей для расчета характеристик внутрикамерных течений ограничивается, как правило, использованием упрощенных моделей горения топлива.

Глава 4

ДВУХФАЗНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Моделирование двухфазных течений продуктов сгорания играет важную роль в исследовании внутрикамерных процессов в РДТТ.

В продуктах сгорания твердого топлива наряду с газофазной составляющей присутствуют твердые и жидкие продукты сгорания порошков металлов. Наличие частиц приводит к изменению режима течения (ламинарный или турбулентный) и оказывает влияние на теплофизические и химические составляющие процесса. Дисперсность конденсированных продуктов сгорания изменяется в широком диапазоне и определяется как механизмом взаимодействия фаз и фракций частиц в потоке продуктов сгорания (коагуляция и дробление), так и формой камеры сгорания, изменяющейся в процессе работы двигателя.

Полный спектр конденсированных частиц, образующихся при горении топлива, условно делится на фракции мелких и крупных частиц. Фракция мелких частиц образована частицами высокодисперсного оксида, а фракция крупных частиц — агломератами алюминия и частицами крупного оксида. Мелкие частицы движутся равновесно с газом и их размер не меняется. Частицы-агломераты состоят из металла и его оксида. Крупные частицы отстают от газа, их дисперсность и массовая доля изменяются в результате горения и коагуляции с мелкими частицами. Воспламенение частиц, содержащих алюминий, происходит до их отрыва от поверхности горения топлива.

Процессы дробления происходят, в основном, в сверхзвуковой части сопла, а процессы коагуляции имеют место в камере сгорания. За критическим сечением сопла зависимость среднемассового размера частиц по длине имеет вид кривой насыщения. Столкновения частиц-снарядов с частицами-мишенями приводят к образованию новых более крупных частиц. Максимум кривой плотности распределения частиц по размерам сдвигается вправо, а среднемассовый размер растет пропорционально числу столкновений.

Для учета влияния частиц на течение газа требуется совместный расчет движения газовой и дисперсной фаз. При некоторых ограничениях на размер частиц и геометрию расчетной области удается построить приближенные решения, которые удобны для проведения

качественных оценок и проверки численных расчетов. Режим пассивных или одиночных частиц представляет собой один из простейших режимов течения газовзвеси, который реализуется при достаточно малой концентрации дисперсной фазы.

В данной главе приводятся точные решения уравнений, описывающих движение пробной частицы, а также результаты численного моделирования движения частиц под влиянием факторов нетурбулентной природы. На основе полученных решений и результатов расчетов обсуждается влияние различных факторов на движение пробной частицы. Точные решения, описывающие движение частиц, позволяют найти предельную траекторию частиц (сепаратрису) и исследовать особенности концентрации дисперсной фазы. Поверхность горения топлива моделируется поверхностью вдува смеси газа и частиц, параметры которых известны, и не зависят от места вдува и наличия массовых сил.

В рамках стохастического лагранжевого подхода исследуется влияние размера частиц на закономерности их рассеивания в канале со вдувом. Влияние турбулентности учитывается введением случайных флуктуаций скорости несущего потока в уравнение движения пробной частицы. Проводится сравнение результатов расчетов, полученных при детерминистическом и стохастическом описании движения дисперсной фазы. Обсуждается влияние концентрации дисперсной фазы и размера частиц на механизм и интенсивность турбулентного переноса, а также демпфирующее влияние конденсированной фазы на акустические колебания параметров рабочего тела в камере сгорания.

4.1. Движение частицы в канале со вдувом

Рассматривается движение частицы в канале со вдувом и предлагается подход, который позволяет упростить реализацию математических моделей двухфазных течений в камерах сгорания РДТТ [23, 26].

4.1.1. Основные уравнения. В модели взаимодействия частицы с несущим потоком учитывается действие силы гидродинамического сопротивления и подъемной силы Сэффмана. Движение частицы описывается следующими уравнениями

$$\frac{dx_{\text{p}}}{dt} = u_{\text{p}}, \tag{4.1}$$

$$\frac{dy_{\text{p}}}{dt} = v_{\text{p}}, \tag{4.2}$$

$$\frac{du_{\text{p}}}{dt} = \frac{9\mu}{2\rho_{\text{p}} r_{\text{p}}^2} f_{\text{D}} \left(u - u_{\text{p}}\right) + \frac{1}{m_{\text{p}}} f_{\text{S}x}, \tag{4.3}$$

$$\frac{dv_{\mathrm{p}}}{dt} = \frac{9\mu}{2\rho_{\mathrm{p}} r_{\mathrm{p}}^2} f_{\mathrm{D}} \left(v - v_{\mathrm{p}}\right) + \frac{1}{m_{\mathrm{p}}} f_{\mathrm{S}y}. \tag{4.4}$$

Предполагается, что продольная скорость газа изменяется по линейной зависимости вдоль оси канала, $u \propto x f(y)$, а распределение поперечной скорости не зависит от продольной координаты, $v \propto g(y)$. Поскольку проекция подъемной силы на ось x равняется нулю ($\partial v/\partial x = 0$), уравнения (4.3) и (4.4) записываются в виде

$$\frac{du_{\mathrm{p}}}{dt} = B_{\mathrm{D}} f_{\mathrm{D}} \left[x_{\mathrm{p}} \varphi(y_{\mathrm{p}}) - u_{\mathrm{p}}\right], \tag{4.5}$$

$$\frac{dv_{\mathrm{p}}}{dt} = B_{\mathrm{D}} f_{\mathrm{D}} \left[g(y_{\mathrm{p}}) - v_{\mathrm{p}}\right] + B_{\mathrm{S}} f_{\mathrm{S}} \left[x_{\mathrm{p}} \varphi(y_{\mathrm{p}}) - u_{\mathrm{p}}\right] x_{\mathrm{p}}^{1/2} \frac{\varphi'(y_{\mathrm{p}})}{|\varphi'(y_{\mathrm{p}})|^{1/2}}. \tag{4.6}$$

Здесь

$$B_{\mathrm{D}} = \frac{9}{2} \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{p}}} \left(\frac{r_{\mathrm{p}}}{h}\right)^{-2} \frac{1}{\mathrm{Re}}, \quad B_{\mathrm{S}} = \frac{3C_{\mathrm{S}}}{4\pi} \frac{\rho}{\rho_{\mathrm{p}}} \left(\frac{r_{\mathrm{p}}}{h}\right)^{-1} \frac{1}{\mathrm{Re}^{1/2}}.$$

Функция f_{D} учитывает поправку на инерционность частицы. Функция f_{S} учитывает поправки, связанные с инерционностью частицы, градиентом скорости жидкости и близостью стенки [23].

В момент времени $t = 0$ частица находится на стенке канала и инжектируется в канал по нормали к его боковой поверхности со скоростью, равной или меньшей скорости вдува

$$x_{\mathrm{p}}(0) = x_{\mathrm{p}0}, \quad y_{\mathrm{p}}(0) = \pm 1, \quad u_{\mathrm{p}}(0) = 0, \quad v_{\mathrm{p}}(0) = \mp\chi.$$

Верхний и нижний знаки берутся для частиц, выходящих с верхней и нижней стенок канала. Параметр χ учитывает скоростную начальную неравновесность потока.

4.1.2. Точное решение для случая сильного вдува. При $\mathrm{Re} \to \infty$ уравнения, описывающие течение жидкости в канале со вдувом, имеют точное решение, которое широко используется для исследования структуры двухфазных течений.

Траектории частицы. При двухстороннем вдуве одинаковой интенсивности распределение скорости жидкости в плоском (при $n = 0$) или осесимметричном (при $n = 1$) течении находится из соотношений

$$u = \frac{\pi}{2}(n+1) x \cos\left(\frac{\pi}{2} y^{n+1}\right), \tag{4.7}$$

$$v = -y^{-n} \sin\left(\frac{\pi}{2} y^{n+1}\right). \tag{4.8}$$

Сравнение с расчетными результатами и данными физического эксперимента показывает, что точное решение, описываемое соотношениями (4.7) и (4.8), достаточно хорошо описывает распределение скорости

в канале со вдувом при $\mathrm{Re} > 100$, включая турбулентным режим течения [74].

Уравнения движения стоксовой частицы, записанные в виде (4.5) и (4.6), с учетом соотношений (4.7) и (4.8) приобретают вид

$$\frac{du_\mathrm{p}}{dt} = B_\mathrm{D}\left[\frac{\pi}{2}(n+1)x_\mathrm{p}\,\cos\left(\frac{\pi}{2}\,y_\mathrm{p}^{n+1}\right) - u_\mathrm{p}\right], \tag{4.9}$$

$$\frac{dv_\mathrm{p}}{dt} = -B_\mathrm{D}\left[y_\mathrm{p}^{-n}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\,y_\mathrm{p}^{n+1}\right) + v_\mathrm{p}\right]. \tag{4.10}$$

Учитывая соотношения (4.2) и (4.10), движение частицы в поперечном (радиальном) направлении описывается ОДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2y_\mathrm{p}}{dt^2} + B_\mathrm{D}\frac{dy_\mathrm{p}}{dt} + B_\mathrm{D}y_\mathrm{p}^{-n}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\,y_\mathrm{p}^{n+1}\right) = 0. \tag{4.11}$$

В приосевой области (при $y_\mathrm{p} \to 0$) нелинейный член допускает линеаризацию вида

$$y_\mathrm{p}^{-n}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\,y_\mathrm{p}^{n+1}\right) \propto \frac{\pi}{2}\,y_\mathrm{p}.$$

Тогда уравнение (4.11) записывается в виде

$$\frac{d^2y_\mathrm{p}}{dt^2} + B_\mathrm{D}\frac{dy_\mathrm{p}}{dt} + \frac{\pi}{2}\,B_\mathrm{D}y_\mathrm{p} = 0. \tag{4.12}$$

Решение уравнения (4.12) зависит от знака дискриминанта характеристического уравнения $\Delta = B_\mathrm{D}^2 - 2\pi B_\mathrm{D}$ и имеет вид:

1. $B_\mathrm{D} > 2\pi F$, $\lambda_1 = (-B_\mathrm{D} + \Delta^{1/2})/2$, $\lambda_2 = (-B_\mathrm{D} - \Delta^{1/2})/2$

$$y_\mathrm{p} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\Big[\big(v_{\mathrm{p}0} - \lambda_2 y_{\mathrm{p}0}\big)\exp(\lambda_1 t) - \big(v_{\mathrm{p}0} - \lambda_1 y_{\mathrm{p}0}\big)\exp(\lambda_2 t)\Big].$$

2. $B = 2\pi$

$$y_\mathrm{p} = \left[y_{\mathrm{p}0} + \left(v_{\mathrm{p}0} + \frac{B_\mathrm{D}}{2}y_{\mathrm{p}0}\right)t\right]\exp\left(-\frac{B_\mathrm{D}t}{2}\right).$$

3. $B < 2\pi$, $\lambda_1 = -B_\mathrm{D}/2$, $\lambda_2 = (-\Delta)^{1/2}/2$

$$y_\mathrm{p} = \left[y_{\mathrm{p}0}\cos(\lambda_2 t) + \left(\frac{v_{\mathrm{p}0}}{\lambda_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}y_{\mathrm{p}0}\right)\sin(\lambda_2 t)\right]\exp(\lambda_1 t).$$

Из уравнений (4.1) и (4.9) следует, что движение частицы в продольном (осевом) направлении описывается следующим ОДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2x_\mathrm{p}}{dt^2} + B_\mathrm{D}\frac{dx_\mathrm{p}}{dt} - \frac{\pi}{2}(n+1)B_\mathrm{D}x_\mathrm{p}\,\cos\left(\frac{\pi}{2}\,y_\mathrm{p}^{n+1}\right) = 0. \tag{4.13}$$

Проведем линеаризацию нелинейного члена в приосевой области

$$\frac{\pi}{2}(n+1)x_{\mathrm{p}}\cos\left(\frac{\pi}{2}\,y_{\mathrm{p}}^{n+1}\right)\propto\frac{\pi}{2}(n+1)x_{\mathrm{p}}.$$

После подстановки в (4.13) получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2x_{\mathrm{p}}}{dt^2}+B_{\mathrm{D}}\frac{dx_{\mathrm{p}}}{dt}-\frac{\pi}{2}(n+1)B_{\mathrm{D}}x_{\mathrm{p}}=0. \tag{4.14}$$

Решение уравнения (4.14) не зависит от знака дискриминанта характеристического уравнения $\Delta=B_{\mathrm{D}}^2+2\pi(n+1)B_{\mathrm{D}}$ и имеет вид

$$x_{\mathrm{p}}=\frac{x_{\mathrm{p}0}}{\lambda_1-\lambda_2}\Big[\lambda_1\exp(\lambda_2 t)-\lambda_2\exp(\lambda_1 t)\Big].$$

Здесь

$$\lambda_1=\frac{-B+\Delta^{1/2}}{2},\quad \lambda_2=\frac{-B-\Delta^{1/2}}{2}.$$

Уравнения (4.11) и (4.14), описывающие движение частицы в поперечном (радиальном) и продольном (осевом) направлениях, интегрируются независимо друг от друга.

Отметим существование двух качественно различных видов поперечного (радиального) движения частицы в канале со вдувом. Решение уравнения (4.12) при $B_{\mathrm{D}}>2\pi$ (мелкие частицы) имеет непериодический характер, причем ось канала является асимптотой для траекторий частиц. Решение уравнения (4.12) при $B_{\mathrm{D}}<2\pi$ (крупные частицы) допускает пересечение траектории частицы с осью канала. Параметр $B_{\mathrm{D}}=2\pi$ является критерием перехода частицы через ось канала.

Выясним условия, при которых частица достигнет нижней стенки канала.

1. Пусть $\Delta>0$. Полагая $y_{\mathrm{p}}=0$, получим

$$t_s=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\ln\left(\frac{v_{\mathrm{p}0}-\lambda_2 y_{\mathrm{p}0}}{v_{\mathrm{p}0}-\lambda_1 y_{\mathrm{p}0}}\right)<0.$$

   Частицы не достигают нижней поверхности канала за конечное время.
2. Пусть $\Delta=0$. В этом случае частицы движутся вдоль линий тока, асимптотически приближаясь к линии или оси симметрии.
3. Пусть $\Delta<0$. Значение $y_{\mathrm{p}}=0$ достигается в момент времени

$$t_s=\frac{1}{\lambda_2}\operatorname{arctg}\left[-\frac{y_{\mathrm{p}0}(-\Delta)^{1/2}}{2v_{\mathrm{p}0}+B_{\mathrm{D}}y_{\mathrm{p}0}}\right]>0.$$

Подставляя соотношение для t_s в решение уравнения (4.11), можно найти координату точки соударения частицы со стенкой.

Распределение концентрации. Концентрация дисперсной фазы в произвольный момент времени находится из уравнения неразрывности, записанного в лагранжевых переменных:

$$n_{\mathrm{p}0}(x_{\mathrm{p}0}, y_{\mathrm{p}0}, t) = n_{\mathrm{p}}(x_{\mathrm{p}0}, y_{\mathrm{p}0}, t)\mathrm{D}(x_{\mathrm{p}0}, y_{\mathrm{p}0}, t).$$

Раскрывая определитель, получим

$$\left(\frac{x_{\mathrm{p}}}{x_{\mathrm{p}0}}\right)^n n_{\mathrm{p}}(x_{\mathrm{p}0}, y_{\mathrm{p}0}, t)\frac{\partial y_{\mathrm{p}}(x_{\mathrm{p}0}, y_{\mathrm{p}0}, t)}{\partial t}\frac{\partial x_{\mathrm{p}}(x_{\mathrm{p}0}, y_{\mathrm{p}0}, t)}{\partial x_{\mathrm{p}0}} + 1 = 0, \qquad (4.15)$$

где $x_{\mathrm{p}0}$, $y_{\mathrm{p}0}$ и $n_{\mathrm{p}0}$ — координаты и концентрация дисперсной фазы в момент времени $t = 0$.

В области мелких частиц (при $B_{\mathrm{D}} > 2\pi$) концентрация дисперсной фазы имеет особенность на оси или плоскости симметрии канала, поскольку $n_{\mathrm{p}}(\boldsymbol{r}_{\mathrm{p}}) \to \infty$ при $\boldsymbol{r}_{\mathrm{p}} \to 0$.

Используя уравнение (4.15), выясним поведение концентрации дисперсной фазы при $y_{\mathrm{p}} \to 0$.

Перепишем решения уравнений, описывающих движение частицы, в следующем виде:

$$x_{\mathrm{p}} = \frac{x_{\mathrm{p}0}}{a+b}\Big[a\exp(-bt) + b\exp(at)\Big],$$

$$y_{\mathrm{p}} = \frac{1}{d-c}\Big[(dy_{\mathrm{p}0} + v_{\mathrm{p}0})\exp(-ct) + (cy_{\mathrm{p}0} + v_{\mathrm{p}0})\exp(-dt)\Big].$$

Здесь

$$a = \lambda_1 = \frac{-B + \Delta^{1/2}}{2}, \quad b = -\lambda_2 = \frac{B + \Delta^{1/2}}{2},$$

$$c = -\lambda_1 = \frac{B - \Delta^{1/2}}{2}, \quad d = -\lambda_2 = \frac{B + \Delta^{1/2}}{2}.$$

Полагая $t \to \infty$, найдем

$$x_{\mathrm{p}}(x_{\mathrm{p}0}, t) = \frac{x_{\mathrm{p}0}}{a+b}\exp(at), \qquad (4.16)$$

$$y_{\mathrm{p}}(y_{\mathrm{p}0}, t) = \frac{dy_{\mathrm{p}0} + v_{\mathrm{p}0}}{d-c}\exp(-ct). \qquad (4.17)$$

Дифференцируя (4.16) и (4.17) по $x_{\mathrm{p}0}$ и t, получим

$$\frac{\partial x_{\mathrm{p}}(x_{\mathrm{p}0}, t)}{\partial x_{\mathrm{p}0}} = \frac{b}{a+b}\exp(at), \qquad (4.18)$$

$$\frac{\partial y_{\mathrm{p}}(y_{\mathrm{p}0}, t)}{\partial t} = \frac{c}{c-d}\left(dy_{\mathrm{p}0} + v_{\mathrm{p}0}\right)\exp(-ct). \qquad (4.19)$$

Подстановка соотношений (4.18) и (4.19) в уравнение (4.15) показывает, что

$$\frac{1}{n_{\rm p}(y_{\rm p0},t)} = \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n+1} \frac{c}{d-c}\left(dy_{\rm p0}+v_{\rm p0}\right)\exp\Big\{\Big[(n+1)a-c\Big]t\Big\}.$$

Исключая время при помощи соотношения

$$t = \ln\left(\frac{d-c}{dy_{\rm p0}+v_{\rm p0}}y_{\rm p}\right)^{-1/c},$$

найдем распределение концентрации дисперсной фазы в окрестности оси или линии симметрии канала:

$$\frac{1}{n_{\rm p}(y_{\rm p0},y_{\rm p})} = c\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n+1}\left(\frac{dy_{\rm p0}+v_{\rm p0}}{d-c}\right)^{(n+1)a/c} y_{\rm p}^{p}, \tag{4.20}$$

где $p = 1-(n+1)a/c$, причем $0 \leqslant p < 2-\sqrt{2}$ при $n=0$ и $0 \leqslant p < 3-\sqrt{6}$ при $n=1$.

Обозначим через $S(\boldsymbol{r}_{\rm p0},r)$ сферу радиусом r и с центром в точке $\boldsymbol{r}_{\rm p0}$, расположенной на оси канала. Вычислим число частиц внутри этой сферы

$$N(\boldsymbol{r}_{\rm p0},r) = \int\limits_S n_{\rm p}\,d\boldsymbol{r}. \tag{4.21}$$

Используя соотношение (4.20), можно показать, что оценка числа частиц внутри сферы радиусом r и центром на оси канала дается соотношением [70]

$$N(r) = kr^{\gamma} + o(r^{\gamma}), \tag{4.22}$$

где

$$k = \frac{4\pi}{c(3-p)}\left(\frac{a+b}{b}\right)^{n+1}\left(\frac{d-c}{dy_{\rm p0}}+v_{\rm p0}\right)^{(n+1)a/c}.$$

Показатель степени γ определяет порядок особенности концентрации дисперсной фазы ($1+\sqrt{2} < \gamma < 3$ при $s=0$ и $2\sqrt{3} < \gamma < 3$ при $s=1$).

Соотношение (4.22) показывает, что особенность концентрации примеси на оси канала является интегрируемой, причем с увеличением параметра $B_{\rm D}$ (или с уменьшением числа Стокса) особенность ослабевает (показатель степени уменьшается). Для неинтегрируемой особенности интеграл в правой части выражения (4.21) не существует.

В случае интегрируемой особенности расстояние между частицами является случайной величиной и для его определения используются методы теории вероятности. Предполагая $r_{\rm p}/L \ll 1$, условие отсут-

ствия взаимодействия между частицами записывается в следующем виде [70]:

$$kn_{\mathrm{p}0}L^3\left(\frac{2r_{\mathrm{p}}}{L}\right)^{\gamma} \ll 1.$$

Используя объемную концентрацию примеси $\alpha_{\mathrm{p}0} = 4\pi r_{\mathrm{p}}^3 n_{\mathrm{p}0}/3$, получим

$$c\alpha_{\mathrm{p}0}\left(\frac{L}{r_{\mathrm{p}}}\right)^{3-\gamma} \ll 1, \tag{4.23}$$

где $c = 2^{\gamma}3k/4\pi$. Условие (4.23) выполняется в широком диапазоне параметров задачи. Например, выполняются неравенства $0 < k < 2\sqrt{2}\,\pi/(1+\sqrt{2}\,)$ при $n = 0$ и $0 < k < \pi/3$ при $n = 1$. Коэффициент c считается величиной порядка единицы практически во всем диапазоне чисел Стокса или при $B > 4F(n+1)$. При $\alpha_{\mathrm{p}0} \leqslant 10^{-4}$ и $r_{\mathrm{p}}/L > 10^{-4}$ выражение в левой части соотношения (4.23) не превосходит 0,01.

Математическое ожидание и дисперсия расстояния между частицами в точке, где имеет место особенность концентрации, выражается через параметры k и γ по формулам, приведенным в работе [70]. По определению, математическое ожидание и дисперсия случайной величины l вычисляются по формулам

$$E(l) = \int\limits_0^{\infty} \exp\left[-\frac{N(r)}{\varepsilon}\right] dr,$$

$$D(l) = 2\int\limits_0^{\infty} r\exp\left[-\frac{N(r)}{\varepsilon}\right] dr - E^2(l).$$

Здесь l — расстояние от пробной частицы до ближайшей к ней частицы. Для задач механики двухфазных течений параметр $\varepsilon = 1/(n_{\mathrm{p}0}L)$ является достаточно малым. Полагая $N(r) \sim kr^{\gamma}$ при $r \to 0$, при $\varepsilon \to 0$ главные члены интегралов находятся при помощи метода Лапласа в конечном виде [70].

В области значений параметров, при которых функция $E(l)$ в точках особенности концентрации частиц становится порядка радиуса взаимодействия частиц, модель среды следует дополнить учетом их взаимодействия или ввести поверхности разрыва типа пелены.

Время пребывания частицы в канале. Рассмотрим уравнение движения частицы

$$u_{\mathrm{p}}\frac{du_{\mathrm{p}}}{dx} = B_{\mathrm{D}}\left(u - u_{\mathrm{p}}\right). \tag{4.24}$$

Уравнение (4.24) допускает решение вида

$$u_{\mathrm{p}} = ku, \quad k = \frac{\left(B_{\mathrm{D}}^2 + 4B_{\mathrm{D}}\right)^{1/2} - B_{\mathrm{D}}}{2}. \tag{4.25}$$

Учитывая распределение скорости, которое описывается соотношениями (4.7) и (4.8), получим оценку для времени пребывания частицы в канальном участке течения. Запишем уравнения движения порции жидкости

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}(n+1)x\,\cos\left(\frac{\pi}{2}\,y^{n+1}\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = -y^{-n}\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\,y^{n+1}\right).$$

Разделяя переменные и исключая поперечную координату, получим

$$\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}(n+1)\frac{1-\exp\left[-\pi(n+1)t\right]}{1+\exp\left[-\pi(n+1)t\right]}.$$

Интегрируя по времени от 0 до t, получим зависимость времени движения порции среды вдоль произвольной линии тока от длины канала

$$t_{\mathrm{f}} = \frac{2}{\pi(n+1)}\,\ln\left\{\frac{L}{x_0} - \left[\left(\frac{L}{x_0}\right)^2 - 1\right]^{1/2}\right\}. \tag{4.26}$$

Соотношение (4.26) показывает, что при фиксированной длине канала время пребывания частицы жидкости на произвольной линии тока конечно, если $x_0 \neq 0$. При $x_0 = 0$ время пребывания порции среды в канале становится бесконечно больши́м.

Приближенная оценка времени пребывания конденсированной частицы в канале со вдувом дается соотношением

$$t_{\mathrm{p}} = \frac{t_{\mathrm{f}}}{k} = \frac{2t_{\mathrm{f}}}{\left(B_{\mathrm{D}}^2 + 4B_{\mathrm{D}}\right)^{1/2} - B_{\mathrm{D}}}. \tag{4.27}$$

Из соотношения (4.27) следует, что время пребывания частицы в канале контролируется числом Стокса.

4.1.3. Результаты расчетов. В общем случае уравнения, записанные в виде (4.1)–(4.4), интегрируется численно для различных отношений размера частицы к ширине канала. В расчетах полагается, что $\mathrm{Re} = 10^4$ и $\delta = 4{,}5 \cdot 10^{-4}$ (отношение плотностей газовой и дисперсной фаз).

Интегрирование уравнений (4.1)–(4.4) производится при помощи неявного метода Эйлера. Для восполнения газодинамических характеристик жидкости в точках, лежащих на траектории частицы, используется кубическая сплайн-интерполяция.

Траектории стоксовых частиц и распределение концентрации конденсированной фазы показывает рис. 4.1. В окрестности огибающей траекторий частиц (сепаратрисы) имеет место локальное увеличение концентрации дисперсной фазы.

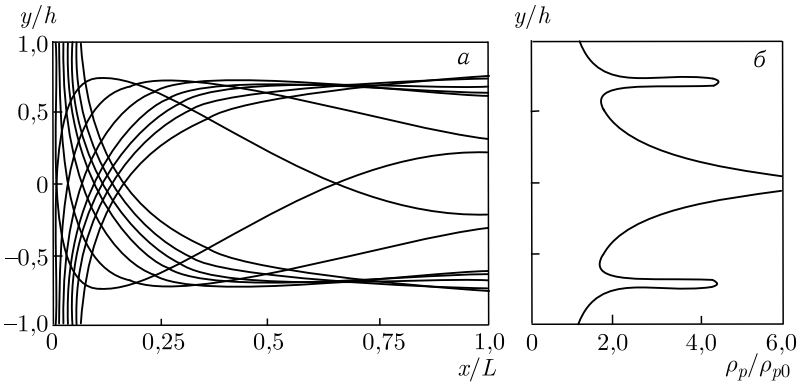


Рис. 4.1. Траектории частиц (*а*) и распределение концентрации частиц (*б*) в канале при Stk = 1,8

Влияние силы Сэффмана на движение частицы в канале с несимметричным двухсторонним вдувом показывают рис. 4.2 (односторонний вдув с верхней стенки) и рис. 4.3 (двухсторонний вдув при отношении скоростей вдува в нижней и верхней стенок 0,25). Сплошные линии соответствуют траекториям частицы, рассчитанным без учета силы Сэффмана. Пунктирные линии изображают траектории частицы, полученные с учетом действия подъемной силы (при $f_S = 1$).

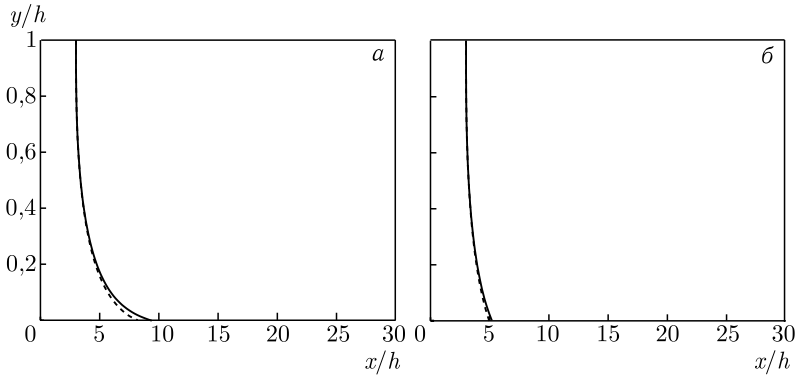


Рис. 4.2. Траектории частицы в канале при $\delta = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ (*а*); $4 \cdot 10^{-4}$ (*б*)

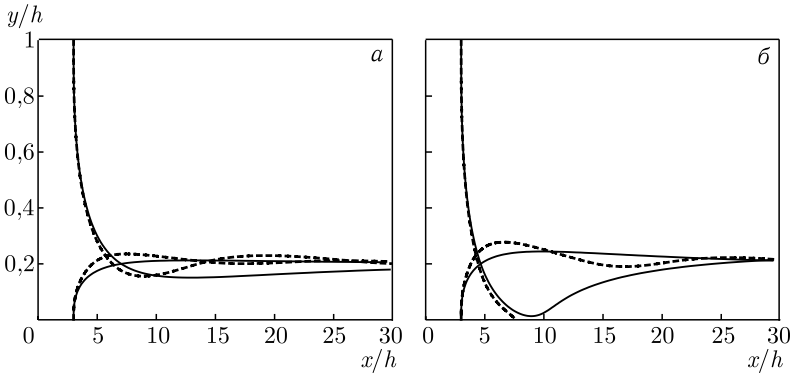


Рис. 4.3. Траектории частицы в канале при $\delta = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ (*а*); $4 \cdot 10^{-4}$ (*б*)

Влияние подъемной силы на траекторию частицы, выходящей с верхней проницаемой стенки канала, в целом незначительно и уменьшается с увеличением размера частицы (рис. 4.2). В то же время, сила Сэффмана качественным образом изменяет траектории частицы, выходящей с нижней стенки канала (рис. 4.3). Увеличение скорости вдува с нижней стенки канала приводит к уменьшению роли подъемной силы. Влияние поправок на инерционность частицы и градиентность потока, описываемых функцией f_{S}, не приводит к качественному и количественному изменению картины движения частицы.

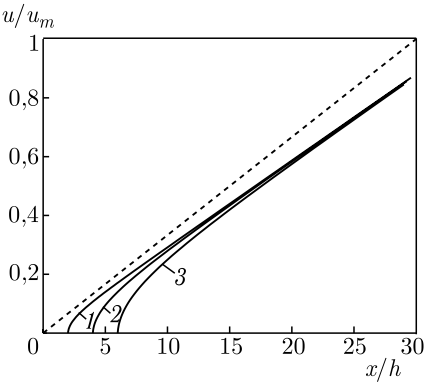


Рис. 4.4. Изменение скорости частицы вдоль оси канала при $x_{\mathrm{p}0} = 2$ (*1*); 4 (*2*); 6 (*3*)

Результаты, приведенные на рис. 4.4 при $\delta = 10^{-4}$, показывают, что скорость частицы изменяется практически по линейной зависимости вдоль координаты x, за исключением небольшого начального участка, который тем короче, чем меньше размер частицы. Пунктирная линия соответствует изменению скорости жидкости. Это позволяет заменить интегрирование уравнения движения частицы в проекции на ось канала соотношением (4.25), что сокращает время счета при моделировании турбулентных течений.

Влияние турбулентности учитывается при помощи введения случайных флуктуаций скорости несущего потока в уравнение движе-

ния пробной частицы [38, 41, 43]. Локальные характеристики турбулентности находятся из решения уравнений k–ε модели, записанных в параболизованной форме [43]. Случайное гауссовское поле скорости конструируется при помощи генератора псевдослучайных равномерно распределенных чисел.

На рис. 4.5 и рис. 4.6 приводятся результаты, относящиеся к рассеиванию частиц окиси алюминия ($r_{\text{р}} = 5 \div 50$ мкм) в канале с круглой формой поперечного сечения в плане при $v_w = 2{,}5$ м/с (двухсторонний вдув одинаковой интенсивности с нижней и верхней стенок). Фрагменты *а* и *б* соответствуют различным точкам выхода частицы с массоподводящей поверхности канала ($x_{\text{р}0} = 3$ и $x_{\text{р}0} = 8$). Сплошные линии показывают результаты, полученные при помощи осреднения

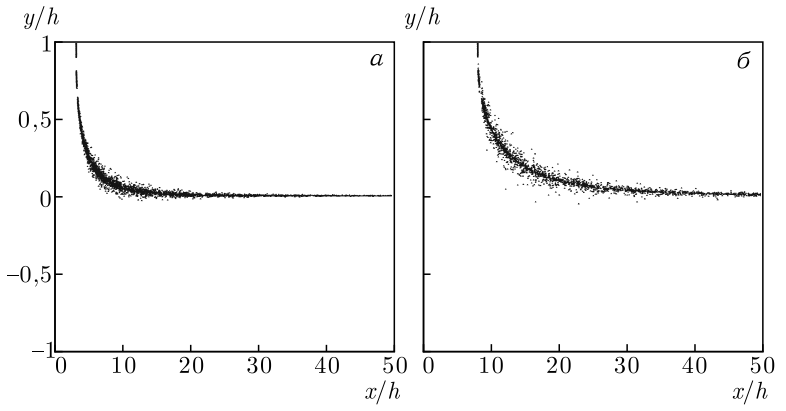


Рис. 4.5. Траектории частиц при Stk = 0,2

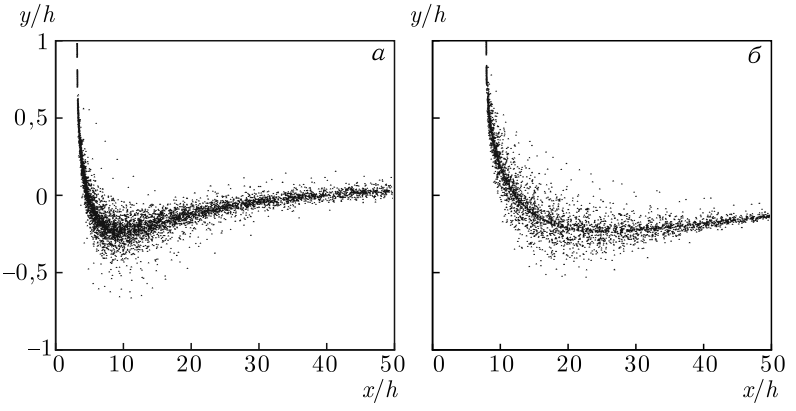


Рис. 4.6. Траектории частиц при Stk = 0,8

по ансамблю частиц, а точки — реализации случайных траекторий частиц.

Неоднородность поля турбулентности несущего потока приводит к появлению турбулентной миграции частиц. Вовлечение частиц в пульсационное движение несущего потока приводит к изменению распределения числа частиц по поперечному сечению канала. Данные, приведенные на рис. 4.7, соответствуют сечению $x/h = 25$ и нормируются на число частиц, инжектируемых с поверхности массоподвода.

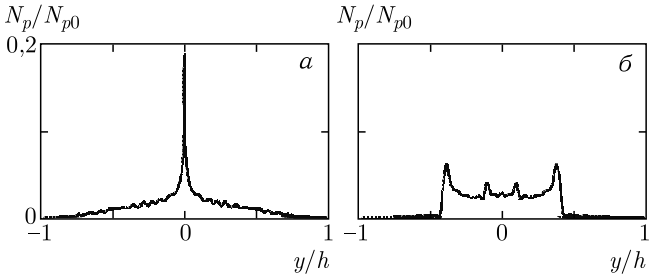


Рис. 4.7. Распределения числа частиц по поперечному сечению канала при Stk = 0,2 (*а*) и Stk = 1,2 (*б*)

Максимум распределения концентрации сдвигается к оси канала за счет турбулентной миграции частиц (турбофорез).

4.2. Влияние массовых сил на движение частицы

Рассмотрим течение в круглом канале, сформированное вдувом смеси газа и конденсированных частиц с заданными параметрами по нормали к поверхности канала, в потенциальном поле массовых сил, вектор которых перпендикулярен продольной оси канала (рис. 4.8). Такая модель описывает двухфазное течение в горизонтально расположенном канале при наличии силы тяжести.

4.2.1. Основные уравнения. Моделирование проводится в приближении одиночной частицы сферической формы (концентрация частиц мала, взаимодействием частиц друг с другом и их обратным влиянием на газ пренебрегается) в условиях применимости закона Стокса для сопротивления частицы [66].

В качестве характерных масштабов для переменных с размерностью длины выбирается радиус канала h, а для переменных с размерностью скорости — скорость вдува v_w. Характерное время вводится как отношение радиуса канала к скорости вдува h/v_w.

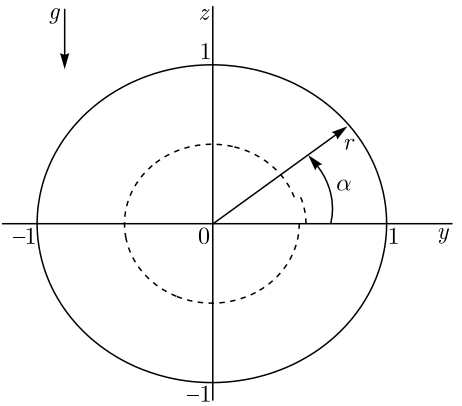


Рис. 4.8. Система координат

Появление массовых сил усложняет задачу, поскольку течение становится трехмерным. При этом параметры течения в радиальной плоскости канала не зависят от осевой координаты.

Потенциальные массовые силы не влияют на скорость газа в канале [13, 95], поэтому поле скорости газа описывается соотношениями, имеющими место в вихревом течении невязкой несжимаемой жидкости:

$$u = \pi x \cos\left(\frac{\pi}{2} r^2\right), \quad v = -\frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi}{2} r^2\right).$$

Движение частицы описывается в декартовой системе координат. Уравнения, описывающие движение частицы, имеют вид

$$\frac{du_{\text{p}}}{dt} = \frac{s(r)x_{\text{p}} - u_{\text{p}}}{\text{Stk}}, \tag{4.28}$$

$$\frac{dv_{\text{p}}}{dt} = \frac{p(r)y_{\text{p}} - v_{\text{p}}}{\text{Stk}}, \tag{4.29}$$

$$\frac{dw_{\text{p}}}{dt} = \frac{p(r)z_{\text{p}} - w_{\text{p}}}{\text{Stk}} - \text{Fr}. \tag{4.30}$$

Здесь $r^2 = y_{\text{p}}^2 + z_{\text{p}}^2$. Вспомогательные функции $s(r)$ и $p(r)$ находятся из соотношений

$$s(r) = \pi \cos\left(\frac{\pi}{2} r^2\right), \quad p(r) = -\frac{1}{r^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} r^2\right).$$

Уравнения (4.28)–(4.30) дополняются кинематическими соотношениями, позволяющими вычислить координаты частицы:

$$\frac{dx_{\text{p}}}{dt} = u_{\text{p}}, \tag{4.31}$$

$$\frac{dy_{\text{p}}}{dt} = v_{\text{p}}, \tag{4.32}$$

$$\frac{dz_{\text{p}}}{dt} = w_{\text{p}}. \tag{4.33}$$

В начальный момент времени $t = 0$ частица находится на стенке канала, поэтому

$$x_{\text{p}0} = x_0, \quad y_{\text{p}0} = \cos\alpha, \quad z_{\text{p}0} = \sin\alpha.$$

Частица инжектируется со стенки по нормали к поверхности, что дает

$$u_{\text{p}0} = 0, \quad v_{\text{p}0} = v_0 y_{\text{p}0}, \quad w_{\text{p}0} = v_0 z_{\text{p}0}.$$

Здесь α и v_0 — начальная координата и начальная скорость частицы в цилиндрической системе координат (угол и скорость на поверхности вдува), причем $\alpha \in [0, 2\pi]$ и $v_w \in [0, 1]$.

Движение частицы в канале определяется числом Стокса и числом Фруда

$$\text{Stk} = \frac{\rho_{\text{p}} d_{\text{p}}^2}{18\mu h}, \quad \text{Fr} = \frac{ha}{v_w^2},$$

где a — ускорение массовых сил.

4.2.2. Качественный анализ. Радиальная структура двухфазного течения в канале определяется системой уравнений (4.28)–(4.33) и соответствующими начальными условиями. Качественные методы анализа динамических систем позволяют систематизировать и обобщить решения задачи при различных начальных условиях и безразмерных параметрах.

Зона градиентного течения. Вблизи оси канала ($r \sim 0$, на практике при $r < 0{,}5$) вспомогательные функции заменяются линейными соотношениями

$$s(r) = \pi, \quad p(r) = -\frac{\pi}{2}.$$

При малых радиусах градиент радиальной скорости равняется $-\pi/2$ и не зависит от радиальной координаты.

В зоне градиентного течения система уравнений (4.28)–(4.33) становится линейной:

$$\text{Stk}\frac{d^2 x_{\text{p}}}{dt^2} + \frac{dx_{\text{p}}}{dt} + \pi x_{\text{p}} = 0, \tag{4.34}$$

$$\text{Stk}\frac{d^2 y_{\text{p}}}{dt^2} + \frac{dy_{\text{p}}}{dt} + \frac{\pi}{2} y_{\text{p}} = 0, \tag{4.35}$$

$$\text{Stk}\frac{d^2 z_{\text{p}}}{dt^2} + \frac{dz_{\text{p}}}{dt} + \frac{\pi}{2} z_{\text{p}} + \text{Sf} = 0. \tag{4.36}$$

Параметр Sf представляет собой произведение числа Стокса и числа Фруда ($\mathrm{Sf} = \mathrm{Stk}\,\mathrm{Fr}$).

Уравнения (4.34)—(4.36) интегрируются независимо друг от друга. Введем новую переменную

$$\widehat{z}_{\mathrm{p}} = z_{\mathrm{p}} + \frac{2}{\pi}\mathrm{Sf}.$$

Тогда уравнения (4.35)—(4.36), описывающие движение частицы в поперечном сечении канала, примут вид

$$\mathrm{Stk}\frac{d^2 y_{\mathrm{p}}}{dt^2} + \frac{dy_{\mathrm{p}}}{dt} + \frac{\pi}{2}y_{\mathrm{p}} = 0, \tag{4.37}$$

$$\mathrm{Stk}\frac{d^2 \widehat{z}_{\mathrm{p}}}{dt^2} + \frac{d\widehat{z}_{\mathrm{p}}}{dt} + \frac{\pi}{2}\widehat{z}_{\mathrm{p}} = 0. \tag{4.38}$$

В начальный момент времени $\widehat{z}_{\mathrm{p}0} = z_{\mathrm{p}0} + 2\mathrm{Sf}/\pi$.

Уравнения (4.37) и (4.38) имеют одинаковую форму и являются независимыми друг от друга. Введение новой переменной позволяет исключить зависимость от чисел Стокса и Фруда (параметр Sf). В системе координат $(y_{\mathrm{p}}, \widehat{z}_{\mathrm{p}})$ течение в градиентной зоне является осесимметричным и не зависит от массовых сил.

Характеристическое уравнение для уравнений (4.37) и (4.38) имеет вид

$$\mathrm{Stk}\lambda^2 + \lambda + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Решая квадратное уравнение, найдем его корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm (1 - 2\pi\mathrm{Stk})^{1/2}}{2\mathrm{Stk}}.$$

Корни характеристического уравнения показывают, что существует критическое число Стокса $\mathrm{Stk}_* = 1/2\pi$, которое определяет смену качественно различных режимов двухфазного течения. При $\mathrm{Stk} < \mathrm{Stk}_*$ частица не пересекает ось канала (траектории частицы в качественном отношении не отличаются от линий тока), а при $\mathrm{Stk} < \mathrm{Stk}_*$ имеется пересечение траектории частицы с осью канала.

При неизменных начальных условиях вид траектории частицы на плоскости $(y_{\mathrm{p}}, \widehat{z}_{\mathrm{p}})$ при произвольном параметре Sf получается из частного случая $\mathrm{Sf} = 0$. Траектория частицы представляют собой прямые линии, если вектор начальной скорости частицы на границе градиентной зоны направлен к особой точке, находящейся в начале системы координат (рис. 4.9), что требует выполнения условия

$$\frac{u_{\mathrm{p}0}}{v_{\mathrm{p}0}} = \frac{\widehat{z}_{\mathrm{p}0}}{y_{\mathrm{p}0}}.$$

Индекс 0 относится к координатам и начальной скорости частицы на границе градиентной зоны.

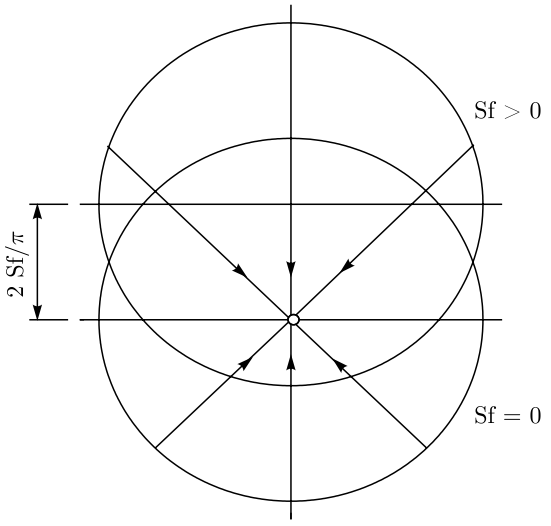


Рис. 4.9. Траектории частицы в градиентной зоне при отсутствии и наличии массовых сил

Траектории частицы, полученные из решения уравнений (4.37) и (4.38), при выполнении указанного условия и любом числе Стокса представляют собой прямые, направленные от начальной точки на поверхности вдува к особой точке в центре канала. Колебательное движение в окрестности особой точки, возникающее при $\mathrm{Stk} > \mathrm{Stk}_*$, совершается вдоль этой прямой.

С физической точки зрения особая точка представляет собой проекцию соответствующей асимптоты траекторий частицы в продольном сечении канала на радиальную плоскость. Особая точка характеризует предельное состояние частицы при неограниченном времени ее движения. Тип особой точки зависит от числа Стокса и его критического значения.

При $\mathrm{Stk} < \mathrm{Stk}_*$ траектории частицы монотонно приближаются к особой точке (устойчивый узел). Траектории частицы подобны линиям тока газа. При $\mathrm{Stk} > \mathrm{Stk}_*$ наблюдается колебательный режим (с затуханием) движения частицы вдоль такой прямой относительно особой точки (устойчивый фокус). При этих условиях в канале формируется специфическая зона течения с характерным для нее встречно-колебательным движением частиц. С увеличением числа Стокса эта зона расширяется. Поскольку концентрация частиц в этой зоне повышается,

а вероятность их столкновения возрастает, то для исследования области течения с встречно-колебательным движением частиц требуются более совершенные модели, включающие, в частности эффекты взаимодействия частиц (коагуляция, дробление) и их обратного влияния на газ.

При отсутствии массовых сил ($\mathrm{Sf} = 0$) особая точка находится в центре канала (течение является осесимметричным). При наличии массовых сил особая точка смещается по направлению вектора этих сил. Приблизительно при $\mathrm{Sf} < 0{,}7$ особая точка находится в области градиентного течения газа. Траектории частиц в радиальном сечении канала, как и в случае $\mathrm{Sf} = 0$, являются по-прежнему прямыми линиями и направлены к особой точке, тип которой в пределах градиентной зоны не меняется. Переход к первоначальной системе координат графически осуществляется ее сдвигом вдоль оси z на величину $2\mathrm{Sf}/\pi$ (рис. 4.9).

Общий случай. В диапазоне $0,7 < \mathrm{Sf} < 1$ уравнения, описывающие движение частицы, являются нелинейными, что затрудняет их анализ и приводит к необходимости использовать численные методы исследования.

Градиентная зона занимает центральную, но меньшую по площади поперечного сечения часть канала. За пределами этой зоны анализ проводится на основе исходной математической модели, описываемой уравнениями (4.34)—(4.36).

При принятом направлении вектора силы тяжести координаты особых точек находятся из условий

$$\alpha_* = -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{r_*}\sin\left(\frac{\pi}{2}r_*\right) = \mathrm{Sf}.$$

Особые точки решения существуют только на оси z в нижней части канала.

При малых радиусах (при $r \to 0$) получим приближенное соотношение для координаты особой точки, справедливое для градиентной зоны течения,

$$r_* = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Sf}.$$

Зависимость радиальной координаты особой точки r_* от параметра Sf показана на рис. 4.10. Линия *1* соответствует численному решению, а линия *2* — приближенному соотношению, справедливому для градиентной зоны течения.

При $\mathrm{Sf} = 0$ имеется одна особая точка, которая находится в начале системы координат. При увеличении Sf особая точка перемещается вдоль линии 1, полученной численным решением. При малых r и Sf линия 1 с хорошей точностью аппроксимируется прямой 2. Внешняя

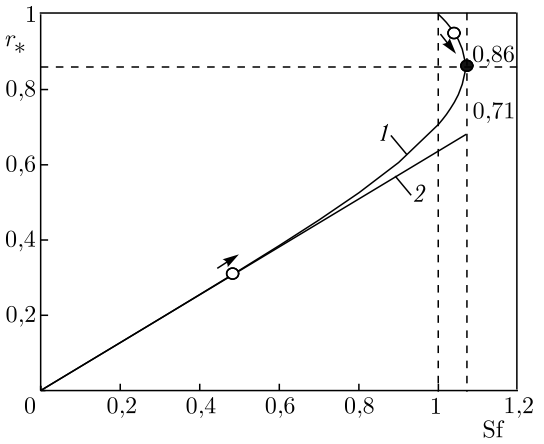


Рис. 4.10. Зависимость радиальной координаты особой точки от чисел Стокса и Фруда

граница градиентной зоны оценивается как $r \approx 0{,}7$, что имеет место при $\mathrm{Sf} \approx 0{,}7$.

При $\mathrm{Sf} = 1$ появляется вторая особая точка при $r_* = 1$ (на поверхности вдува). При дальнейшем увеличении Sf особые точки сближаются (вдоль линии 1). При $\mathrm{Sf} = 1{,}07$ и $r_* = 0{,}86$ эти особые точки сливаются и исчезают. При $\mathrm{Sf} > 1{,}07$ особые точки отсутствуют.

Установим связь между наличием и положением особых точек на фазовой плоскости и кинематической структурой двухфазного течения в канале. На фазовой плоскости в начале системы координат $(r_\mathrm{p}, v_\mathrm{p})$ находится единственная особая точка типа узла (частицы не пересекают ось канала) или фокуса (частицы пересекают ось канала), в зависимости от числа Стокса.

При появлении массовых сил особая точка смещается из начала системы координат вниз по оси z. Изменения структуры двухфазного течения в продольном сечении канала схематически показаны на рис. 4.11 (при $\mathrm{Stk} = 0{,}1$). Для каждого числа Фруда приводятся по две траектории частиц, выходящих с верхней ($z = 1$) и нижней ($z = -1$) поверхности канала.

При возрастании числа Фруда асимптота продольных (вдоль оси x) траекторий частиц, определяемая как $z = r_*$, смещается вниз. При $\mathrm{Sf} = 1$ появляется вторая особая точка (типа седла). Это состояние характеризует новое качество, когда газодинамические силы, действующие на частицу со стороны газа внизу канала, уравновешиваются противоположной по направлению массовой силой. Указанное состояние динамически неустойчиво, и при небольшом увеличении начальной скорости частиц они увлекаются в поток. При $\mathrm{Sf} \approx 1{,}07$,

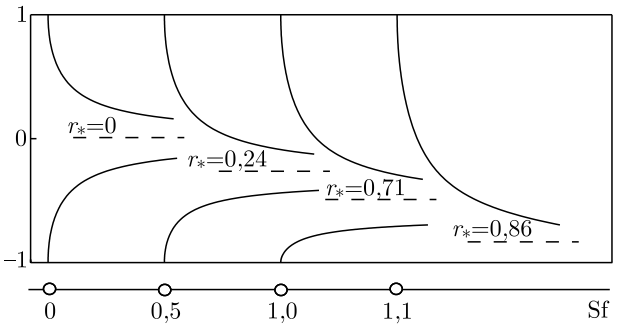


Рис. 4.11. Изменение структуры двухфазного течения в канале при увеличении числа Фруда

что соответствует экстремальному значению радиальной скорости газа в канале при $r_* \approx 0{,}86$, обе особые точки сливаются. В этом случае частицы с верхней половины канала доходят до асимптоты траекторий ($r_* \approx 0{,}86$), а на нижней его стороне частицы удерживаются массовыми силами. Появившаяся при $\mathrm{Sf} = 1$ зона, свободная от частиц соответствующего размера, достигает максимального размера. При $\mathrm{Sf} > 1{,}07$ особых точек нет. Это приводит к новой качественной смене режимов течения — асимптота траекторий и зона без частиц скачком исчезают. Частицы в нижней половине канала не могут покинуть поверхность вдува и сюда же (при достаточном времени движения) выпадают частицы, выходящие с верхней половины канала. Дальнейшее увеличение чисел Стокса и Фруда (параметра Sf) не вызывает качественных изменений течения.

4.2.3. Численные расчеты. Результаты численного моделирования приводятся на рис. 4.12 и рис. 4.13 при $\mathrm{Stk} = 0{,}1$ (*1*); 0,5 (*2*); 1,0 (*3*); 1,5 (*4*). Число Фруда равняется 1, а варьирование параметром Sf осуществляется за счет надлежащего изменения числа Стокса. Для каждого числа Стокса приводятся по две траектории для $z_{\mathrm{p}0} = \pm 1$ и указывается положение особой точки (если она существует). Штрих соответствует частицам, инжектируемым с нижней части канала. Результаты получены при различной начальной скорости частицы.

Из расчетов следует, что для частиц, выходящих с верхней части канала, изменение начальной скорости практически не влияет на форму фазовых траекторий (рис. 4.13 *а*). Частицы, выходящие с нижней половины канала, оказываются более чувствительными к изменению начальных условий (рис. 4.13 *б*).

При $\mathrm{Sf} = 0{,}1$ особая точка незначительно смещается вниз по оси z, а ее тип представляет собой устойчивый узел. При увеличении параметра Sf до 0,5 тип особой точки меняется с узла на фокус. Соот-

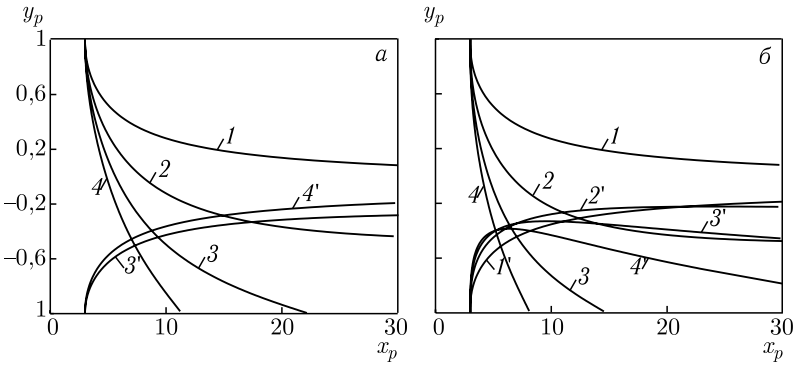


Рис. 4.12. Траектории частицы при $v_{\text{p}0} = 0$ (*а*) и $v_{\text{p}0} = 1$ (*б*)

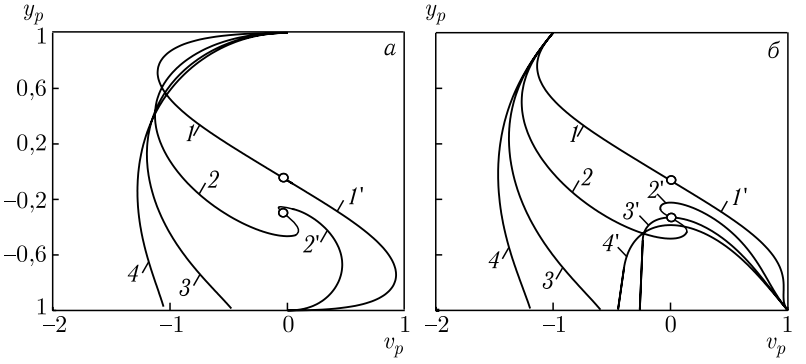


Рис. 4.13. Решения на фазовой плоскости $(v_{\text{p}}, z_{\text{p}})$ при $v_{\text{p}0} = 0$ (*а*) и $v_{\text{p}0} = 1$ (*б*)

ветственно изменяется и тип фазовых траекторий, которые в окрестности особой точки приобретают затухающий колебательный характер. Увеличение начальной скорости частиц незначительно влияет на результаты расчетов.

При $\text{S}\hat{\text{i}} = 1$ структура течения в канале существенно усложняется. Из-за того, что особая точка находится достаточно близко к нижней поверхности канала, а амплитуда колебаний частиц около этой точки значительна, возникают условия для их выпадения из потока. Частицы, находящиеся внизу канала в начальный момент при $v_{\text{p}0} = 0$, не могут покинуть поверхность вдува. Однако увеличение модуля начальной скорости нарушает это динамическое равновесие и приводит к отрыву частиц от массоподводящей поверхности канала и их вовлечению в поток с последующим асимптотическим приближением к соответствующей особой точке.

При $\mathrm{Sf} = 1{,}5$ особых точек на фазовой плоскости нет. Частицы, выходящие с верхней половины канала, со временем достигают нижней поверхности, покинуть которую при нулевой начальной скорости не могут. Увеличение начальной скорости частиц приводит к вре́менному выносу частиц с нижней части канала в поток с последующим их выпадением на ту же поверхность.

Траектории частиц, выходящих из различных точек на массоподводящей поверхности канала, приводятся на рис. 4.14 (при $\mathrm{Fr} = 1$).

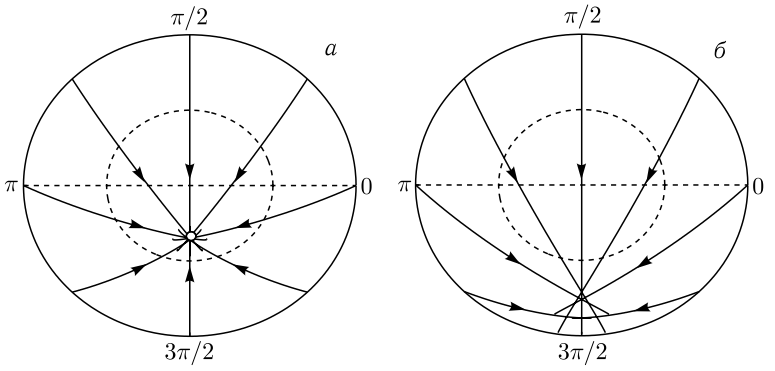


Рис. 4.14. Траектории частиц в поперечном сечении канала при $\mathrm{Sf} = 0{,}5$ (*а*) и $\mathrm{Sf} = 1$ (*б*)

При $\mathrm{Sf} = 0{,}5$ в окрестности особой точки формируется специфическая зона встречно-колебательного движения частиц. При увеличении параметра Sf до 1 эта зона расширяется, деформируется и захватывает нижнюю часть канала. Изменение структуры данной зоны течения сопровождается выпадением некоторых частиц из потока на поверхность канала.

В зависимости от числа Стокса особая точка является узлом или фокусом. За пределами градиентной зоны критическое число Стокса, характеризующее смену типа особой точки, постепенно возрастает по мере удаления особой точки от центра канала.

При $\mathrm{Sf} = 1$ на поверхности канала появляется вторая особая точка типа седла. Наличие двух особых точек, их относительная близость между собой и к стенкам канала приводит к образованию сложной структуры двухфазного течения. Возникают новые эффекты, в частности выпадение частиц из потока на стенки канала и невозможность их отрыва от поверхности вдува. Это обусловливается тем, что противоположно направленные газодинамические и массовые силы, действующие на частицы, приблизительно равны. Как следствие, в этих условиях

возрастает влияние второстепенных факторов, например, начальной скорости частиц на поверхности вдува.

4.3. Стохастическое моделирование движения частицы в канале

Проводится моделирование крупных вихрей турбулентного течения газовзвеси в канале с несимметричным вдувом (влияние частиц на газ не учитывается) и сравнение результатов расчетов с данными, полученными без учета влияния турбулентных пульсаций на движение частицы.

Совместим ось x прямоугольной декартовой системы координат с нижней стенкой канала, а оси y и z свяжем с его поперечным сечением. С верхней стенки канала осуществляется вдув со скоростью v_w. Нижняя стенка полагается непроницаемой. Ширина и длина канала выбираются равными $h = 0{,}01$ м и $l = 0{,}30$ м соответственно. В качестве рабочей среды принимается воздух.

Уравнения записываются относительно фильтрованных по пространству функций и формально совпадают с нестационарными уравнениями Рейнольдса. В качестве модели подсеточной вихревой вязкости используется модель Смагоринского. Для получения значений молекулярной вязкости в зависимости от температуры применяется закон Сазерленда. Ширина фильтра связывается с размером шага разностной сетки.

Влияние турбулентности учитывается при помощи введения случайных флуктуаций скорости в уравнение движения пробной частицы. Для расчета флуктуационной скорости несущего потока вдоль траектории частицы используется стохастическое уравнение типа Ланжевена [32, 33].

Дискретизация фильтрованных уравнений Навье–Стокса проводится при помощи метода контрольного объема на неравномерной сетке и конечно-разностных схем повышенной разрешающей способности по времени и по пространству [25, 30].

Для решения задачи Коши применяются методы, позволяющие выделить в решении быстро и медленно затухающие компоненты [28]. Для восполнения параметров газа в точках, лежащих на траектории частицы, используется метод билинейной интерполяции. Шаг интегрирования вдоль каждой траектории ограничивается временны́м и пространственным масштабами турбулентности. В расчетах проводится моделирование от 10^3 до 10^4 траекторий пробных частиц в зависимости от их размера. Для расчета траектории частицы на основе стохасти-

ческой модели требуется примерно в 25 раз больше компьютерного времени, чем на основе детерминистического подхода.

В начальный момент времени задается профиль продольной скорости, имеющий место в вихревом течении невязкой несжимаемой жидкости. Скорость в направлении оси z полагается равной нулю. На верхней стенке выставляются граничные условия нормального вдува со скоростью v_w, а на нижней стенке — условия прилипания и непротекания. Левая торцевая стенка канала полагается непроницаемой. На границе, через которую газ покидает расчетную область, используются неотражающие граничные условия. В направлении оси z задаются периодические граничные условия (условия повторения течения). Скорость вдува изменяется во времени по гауссовскому закону, но остается постоянной в пространстве [39]. Частицы инжектируются в канал с верхней стенки по нормали к поверхности со скоростью, равной скорости вдува.

Расчеты проводятся на сетке $200 \times 100 \times 50$ со сгущением узлов к переднему днищу (по координате x) и непроницаемой стенке (по координате y) канала по закону геометрической прогрессии. Шаг сетки по координате z полагается постоянным. Шаг по времени составляет $\Delta t = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ с. Для достижения статистически стационарной картины течения делается 50000 шагов по времени.

Результаты расчетов движения и рассеивания частиц окиси алюминия ($r_{\text{р}} = 5 \div 50$ мкм) в канале показаны на рис. 4.15 для различных размеров частиц (чисел Стокса). В начальный момент времени частица находится на верхней стенке канала. Расчеты проводятся, начиная с точки $x_{\text{р}0} = 3$, с шагом $\Delta x = 3$. Расчет заканчивается либо при выходе частицы за пределы расчетной области (при $x/h > 30$), либо при выпадении частицы на нижнюю стенку канала.

Степень вовлечения частицы в пульсационное движение определяется соотношением между временем динамической релаксации частицы и характерным временны́м масштабом турбулентности. Неоднородность поля турбулентности несущей фазы для частиц мелких фракций ($r_{\text{р}} = 2 \div 8$ мкм) приводит к появлению турбулентной миграции частицы (силы турбофореза), направленной в сторону уменьшения пульсационной энергии газа.

Для частиц крупных фракций ($r_{\text{р}} \sim 30 \div 50$ мкм) пульсации скорости не оказывают существенного влияния на движение примеси на всем участке развития потока в силу инерционности таких частиц. Слабая миграция частиц, направленная в сторону уменьшения пульсационной энергии газа, наблюдается лишь для частиц, инжектируемых в канал на достаточно большом удалении от левого торца канала (при $x_{\text{р}0} > 10$).

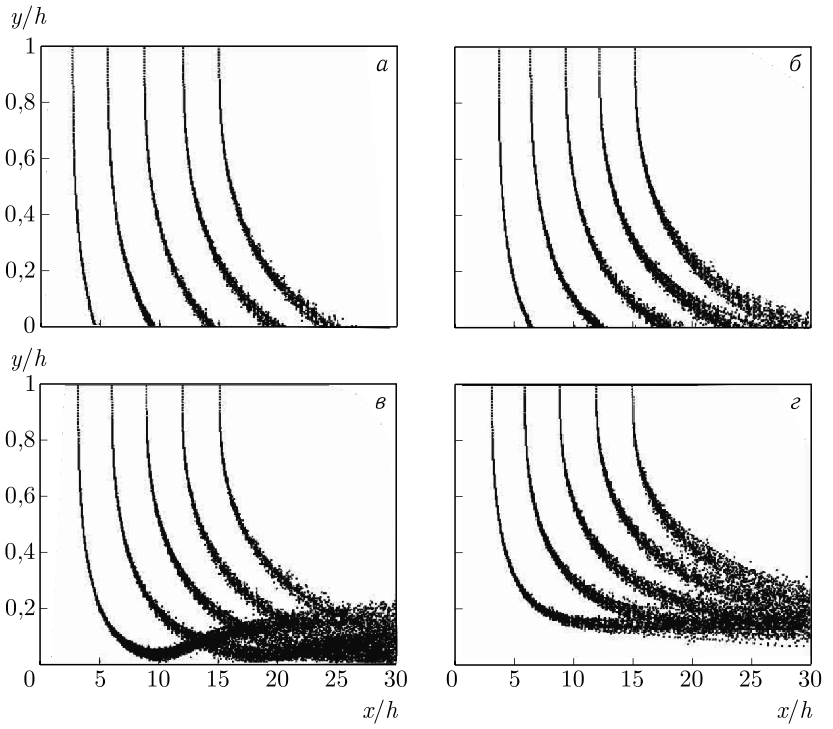


Рис. 4.15. Траектории частиц в канале при Stk = 1,0 (*а*); 0,75 (*б*); 0,5 (*в*); 0,25 (*г*)

Степень рассеивания (дисперсия смещения частицы) тем сильнее, чем меньше размер частицы ($r_{\text{р}} \sim 5 \div 15$ мкм) и чем дальше от левой границы расчетной области она инжектируется в канал. Кинетическая энергия турбулентности и среднеквадратическая скорость несущего потока изменяются вдоль оси канала по закону, близкому к параболическому.

Результаты численных расчетов позволяют найти временну́ю корреляционную функцию (коэффициент корреляции) конденсированной частицы вдоль ее траектории. Определение продольного коэффициента корреляции дается соотношением

$$R_{xx}(t) = \frac{\langle u_{\text{р}}(0) u_{\text{р}}(t) \rangle}{\langle u_{\text{р}}^2(0) \rangle^{1/2} \langle u_{\text{р}}^2(t) \rangle^{1/2}}.$$

Проводя осреднение по ансамблю случайных реализаций, в момент времени $t = t_0 + i\Delta t$ получим

$$R(t_0 + i\Delta t) = \frac{1}{N_\text{p}} \sum_i \frac{u_\text{p}(t_0) u_\text{p}(t_0 + i\Delta t)}{\left\langle u_\text{p}^2(t_0) \right\rangle^{1/2} \left\langle u_\text{p}^2(t_0 + i\Delta t) \right\rangle^{1/2}}.$$

Поведение продольного и поперечного коэффициентов корреляции показано на рис. 4.16 для частиц различных размеров в сравнении распределением, рассчитанным для несущего потока (линии *1* и *4*).

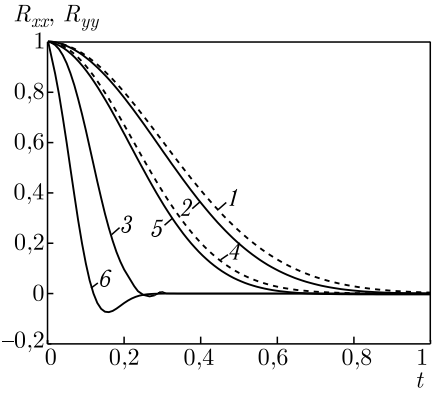


Рис. 4.16. Продольные (линии *1*, *2*, *3*) и поперечные (линии *4*, *5*, *6*) временны́е корреляционные функции при Stk = 0,1 (линии *2*, *3*) и Stk = 1,2 (линии *5*, *6*)

Корреляционная функция пульсаций скорости мелких частиц практически повторяет распределение, полученное для несущего турбулентного потока (мелкие частицы вовлекаются в пульсационное движение несущего потока и следуют вдоль линий тока), и достаточно хорошо описывается экспоненциальной зависимостью, постулируемой в расчетах [97]. В то же время коэффициент корреляции крупных частиц в качественном отношении отличается от распределения, имеющего место для несущего потока (крупные частицы отклоняются от линий тока, в значительной степени проявляя свою инерционность). Поперечный коэффициент корреляции принимает при этом небольшие отрицательные значения при малых временах развития потока.

4.4. Влияние дисперсной фазы на характеристики турбулентности

Проводится численное моделирование турбулентных течений газовзвеси в канале с проницаемыми стенками и обсуждается влияние

концентрации и размера частиц дисперсной фазы на распределения средних и пульсационных характеристик потока.

4.4.1. Обратное влияние примеси. Изучение поведения твердых частиц в турбулентном потоке и их влияния на локальные и интегральные характеристики течения является одной из важных задач механики многофазных сред.

Особенности движения частиц в турбулентном потоке и интенсивность межфазных процессов зависят от инерционности частиц (числа Стокса) и концентрации примеси [16, 97]. Градиентность распределений средних и пульсационных параметров газа приводит к неоднородности силовых факторов, действующих на частицу, что является причиной формирования неоднородных профилей средних и пульсационных параметров дисперсной фазы.

Малоинерционные частицы, присутствующие в равновесном течении при $\mathrm{Stk} \to 0$, полностью отслеживают турбулентные пульсации скорости несущего потока и успевают реагировать на изменение его параметров. Профили средней и пульсационной скоростей таких частиц повторяют соответствующие распределения скорости газовой фазы. С ростом концентрации примеси влияние частиц на газ возрастает.

В замороженном течении при $\mathrm{Stk} \to \infty$ частицы не реагируют на турбулентные пульсации скорости несущего потока, а распределения средней скорости дисперсной фазы являются практически однородными по сечению. Наличие скольжения фаз приводит к интенсивному обмену импульсом между газом и частицами, являясь причиной наполнения профиля средней скорости газа.

Квазиравновесный поток при $\mathrm{Stk} = O(1)$ характеризуется равенством средних скоростей газовой и дисперсной фаз. В отличие от равновесного потока, инерция частиц является достаточной для того, чтобы имелось различие в пульсационных скоростях газа и частиц. Интенсивность турбулентности несущего потока с ростом концентрации примеси уменьшается, что приводит к его ламинаризации и уменьшению наполненности профиля средней скорости газовой фазы.

Имеющиеся данные показывают, что присутствие частиц приводит к уменьшению интенсивности турбулентности, изменению лагранжевого масштаба и энергетического спектра турбулентности, а также к подавлению его высокочастотных составляющих [97].

В неравновесных течениях при произвольных числах Стокса присутствие относительно малоинерционных частиц приводит к подавлению интенсивности турбулентности несущего потока (это влияние возрастает при увеличении концентрации примеси). Причиной подавления турбулентных пульсаций частицами является их вовлечение в пульсационное движение вследствие взаимодействия с турбулентными вихрями.

Максимальное гашение пульсаций продольной и поперечной скоростей наблюдается вблизи оси канала, а степень подавления турбулентности возрастает с увеличением массовой концентрации дисперсной фазы и уменьшением инерционности частиц. Имеет место тенденция к смещению максимума в распределении пульсаций поперечной скорости газовой фазы по направлению к стенке по сравнению с распределением в чистом газе [1].

Изменение скоростного и температурного полей газовой фазы возникает, в основном, не за счет межфазного обмена импульсом и теплом, а в связи с уменьшением толщин динамического и теплового пограничных слоев в двухфазном потоке. Влияние размера частиц на распределения скорости и температуры газа является незначительным.

Профиль продольной скорости дисперсной фазы, помимо параметров внешнего потока, зависит от числа Стокса и, в меньшей степени, от концентрации примеси. Вблизи стенки скорость частиц выше, а в ядре потока ниже скорости газа. Это означает, что частицы скользят относительно газа в направлении потока (пристеночная область), либо ему навстречу (ядро потока).

Частицы оказывают двоякое воздействие на характеристики турбулентности вблизи стенки. С одной стороны, происходит дополнительная по отношению к турбулентному течению чистого газа диссипация кинетической энергии турбулентности и гашение турбулентности, а с другой, частицы уменьшают толщину пограничного слоя, увеличивая тем самым градиент средней скорости газовой фазы вблизи стенки, что приводит к дополнительной генерации турбулентности.

При больши́х числах Рейнольдса уменьшение толщины пограничного слоя способствует более глубокому проникновению турбулентных пульсаций в пограничный слой, делая его восприимчивым к возмущениям, поступающим из внешнего потока, поэтому коэффициент теплоотдачи возрастает. Подобный характер зависимости сохраняется и в двухфазном течении, однако с увеличением числа Рейнольдса интенсифицирующее воздействие дисперсной фазы уменьшается.

Взаимодействие частиц с пристенной областью течения и изменение распределений температуры и скорости газа вблизи стенки обусловливают интенсификацию теплоотдачи к стенке и увеличение напряжения поверхностного трения в двухфазном потоке по сравнению с потоком чистого газа. Данные физического эксперимента [359] (течения в канале и однородном сдвиговом слое) и кинетическое уравнение для функции плотности вероятности скоростей частиц в неоднородном турбулентном потоке [62] показывают превышение пульсаций скоростей частиц над пульсациями несущей фазы вблизи оси канала.

В двухфазном течении миграция частиц к стенке приводит к дополнительному переносу турбулентной энергии из ядра потока в вязкий

подслой, ослабляющему эффект уменьшения интенсивности пульсационного движения несущей фазы, и к дополнительному переносу импульса среднего движения к стенке, увеличивающему напряжение трения.

С повышением массовой концентрации дискретного компонента наблюдается тенденция к увеличению относительного уровня трения и теплоотдачи. Для мелких частиц трение и теплоотдача возрастают в большей степени, чем для более крупных, так как турбулентная миграция мелких частиц к стенке приводит к дополнительному турбулентному переносу импульса осредненного движения в вязкий подслой (по направлению к стенке), ослабляющему эффект уменьшения интенсивности пульсационного движения газа в потоках с достаточно мелкими частицами.

В ламинарном потоке интенсификация теплообмена объясняется увеличением градиента температуры газовой фазы вблизи стенки. Отличия коэффициентов теплоотдачи и поверхностного трения в ламинарном и турбулентном потоках газовзвеси составляют приблизительно 16 % и 12 % соответственно.

Основными теплофизическими параметрами, оказывающими влияние на перенос тепла между потоком газовзвеси и стенкой, являются отношения истинных плотностей и удельных теплоемкостей газовой и дисперсной фаз [97].

4.4.2. Математическая модель. Рассмотрим квазиразвитое течение в длинном плоском или цилиндрическом канале полушириной или радиусом h, когда характеристики потока, отнесенные к скорости на оси канала, слабо изменяются по его длине [41].

Совместим ось x с плоскостью или осью симметрии канала, а ось y направим перпендикулярно ей (рис. 4.17). Скорость вдува v_w полагается одинаковой во всех точках проницаемой поверхности канала и направленной по нормали к ней. Принимается, что растекание жидкости происходит симметрично относительно плоскости $x = 0$.

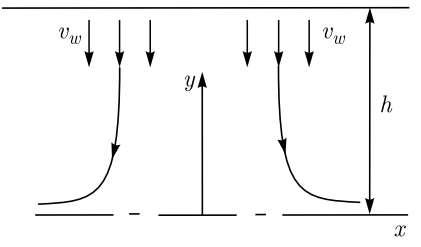


Рис. 4.17. Течение в канале со вдувом

Турбулентное течение газовзвеси описывается уравнениями двухскоростной и двухтемпературной среды. Течение предполагается квазистационарным, а несущая фаза — несжимаемой с постоянными теплофизическими свойствами. Пренебрегая корреляционными моментами 3-го порядка, осредненные по Рейнольдсу

уравнения неразрывности, изменения количества движения и энергии для газовой и дисперсной фаз записываются в виде

$$\frac{\partial \langle v_{\mathrm{g}k} \rangle}{\partial x_k} = 0, \tag{4.39}$$

$$\langle v_{\mathrm{g}k} \rangle \frac{\partial \langle v_{\mathrm{g}i} \rangle}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{g}}} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \langle v_{\mathrm{g}i} \rangle}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \langle v_{\mathrm{g}i} v_{\mathrm{g}k} \rangle}{\partial x_k} - S_{v_i}, \tag{4.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\langle \rho_{\mathrm{p}} \rangle \langle v_{pk} \rangle + \langle \rho_{\mathrm{p}} v_{pk} \rangle \right) = 0, \tag{4.41}$$

$$\left(\langle \rho_{\mathrm{p}} \rangle \langle v_{pk} \rangle + \langle \rho_{\mathrm{p}} v_{pk} \rangle \right) \frac{\partial \langle v_{pi} \rangle}{\partial x_k} = \\ = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(- \langle \rho_{\mathrm{p}} \rangle \langle v_{pk} v_{pi} \rangle - \langle v_{pk} \rangle \langle \rho_{\mathrm{p}} v_{pi} \rangle \right) + \rho_{\mathrm{g}} S_{v_i}. \tag{4.42}$$

Индексы g и p относятся к газу и частицам соответственно. Обратное влияние дисперсной фазы, обусловленное межфазным скольжением, описывается слагаемым

$$S_{v_i} = \frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{g}}} \frac{\langle v_{\mathrm{g}i} \rangle - \langle v_{\mathrm{p}i} \rangle}{\tau_{\mathrm{p}}},$$

где τ_{p} — время динамической релаксации. При записи уравнений (4.39)–(4.42) слагаемыми, содержащими пульсации коэффициентов переноса и давления, а также корреляционными моментами пульсаций концентрации дискретного компонента и скорости пренебрегается [97].

Компоненты тензора рейнольдсовых (турбулентных) напряжений вычисляются на основе гипотезы Колмогорова–Буссинеска и концепции турбулентной вязкости, для расчета которой используется формула Колмогорова–Прандтля ($\nu_t = c_\mu k^2/\varepsilon$). Дифференциальные уравнения переноса вторых моментов пульсаций скорости несущего турбулентного потока заменяются алгебраическими выражениями

$$\langle v_{\mathrm{g}i} v_{\mathrm{g}j} \rangle = -\nu_t \left(\frac{\partial \langle v_{\mathrm{g}i} \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v_{\mathrm{g}j} \rangle}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \langle v_{\mathrm{g}k} \rangle}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij}.$$

Дисперсная фаза моделируется сплошной средой, лишенной собственных напряжений. Частицы представляют собой недеформируемые сферы одинакового размера. В модели межфазного взаимодействия учитывается сила гидродинамического сопротивления. Коэффициент сопротивления вычисляется по закону Стокса. Интенсивность межфазного обмена импульсом и энергией определяется как произведение счетной концентрации частиц на интенсивности межфазного обмена, приходящиеся на одну частицу.

Для замыкания основных уравнений используется k–ε модель турбулентности. Уравнения для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации имеют следующий вид:

$$\left\langle v_{\mathrm{g}k}\right\rangle \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_k}\right] + P - \varepsilon - S_k, \tag{4.43}$$

$$\left\langle v_{\mathrm{g}k}\right\rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}\right] + c_{\varepsilon 1}\frac{\varepsilon}{k}P - c_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{k} - S_\varepsilon. \tag{4.44}$$

Слагаемое P в уравнениях (4.43) и (4.44) описывает порождение турбулентности. Влияние дисперсной фазы учитывается при помощи дополнительных источниковых членов [16, 97], которые вычисляются в рамках гипотезы локальной изотропности диссипирующих вихрей и однородности поля средней скорости дисперсной фазы:

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{\rho_p}{\rho_{\mathrm{g}}\tau_{\mathrm{p}}}\left(\left\langle v_{\mathrm{g}k}v_{\mathrm{g}k}\right\rangle - \left\langle v_{\mathrm{g}k}v_{\mathrm{p}k}\right\rangle\right), \\ S_\varepsilon &= 2\nu\frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{g}}\tau_{\mathrm{p}}}\left\langle \frac{\partial\left(v_{\mathrm{g}i} - v_{\mathrm{p}i}\right)}{\partial x_k}\frac{\partial v_{\mathrm{g}i}}{\partial x_k}\right\rangle. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Для вычисления корреляционных моментов, связанных с дисперсной фазой, используется локально-однородное приближение к методу пространственно-временнóго осреднения со ступенчатой аппроксимацией эйлеровой корреляционной функции пульсаций скорости несущего потока вдоль траектории частицы [97]. Различие масштабов турбулентности в продольном и поперечном направлениях учитывается при помощи теории локально-однородной и локально-изотропной турбулентности [93].

Пренебрегая для мелких частиц в уравнениях переноса вторых одноточечных моментов пульсаций скорости конденсированной фазы конвективными и диффузионными членами, для корреляционных моментов газовой и дисперсной фаз получим следующие соотношения:

$$\left\langle v_{\mathrm{p}i}v_{\mathrm{p}j}\right\rangle = f_{vv}\left\langle v_{\mathrm{g}i}v_{\mathrm{g}j}\right\rangle. \tag{4.46}$$

Точность приведенного соотношения возрастает при уменьшении характерного времени релаксации частицы. Подставляя (4.46) в соотношения (4.45), получим

$$S_k = 2\frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{g}}\tau_{\mathrm{p}}}k\left(1 - f_{vv}\right), \quad S_\varepsilon = 2\frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{g}}\tau_p}\varepsilon\left(1 - f_\varepsilon\right).$$

Коэффициенты вовлечения частицы в пульсационное движение несущего турбулентного потока f_{vv} вычисляются по формулам [44]. Коэффициент f_ε вычисляется на основе рекомендаций работы [97].

На плоскости или оси симметрии канала (при $y = 0$) задаются условия симметрии течения. На проницаемой стенке (при $y = h$) для скорости газовой и дисперсной фаз используются условия нормального вдува ($u = u_{\text{р}} = 0$, $v = v_{\text{р}} = -v_w$). Для характеристик турбулентности принимается условие отсутствия пульсаций скорости на проницаемой стенке ($k = \varepsilon = 0$).

Для упрощения решения задачи считается, что распределения характеристик потока в различных сечениях отличаются лишь масштабами длины и скорости. Решение ищется в виде, для которого продольные скорости газа и частиц линейно зависят от координаты x, а остальные неизвестные являются функцией только координаты y. Уравнения, описывающие турбулентное течение газовзвеси, сводятся к замкнутой системе нелинейных ОДУ, вид которых приводится в работах [35, 41].

4.4.3. Результаты расчетов. Распределения скоростей газовой и дисперсной фаз приводятся на рис. 4.18. Профиль продольной скорости дисперсной фазы является менее наполненным по сравнению с профилем скорости несущего потока (рис. 4.18 *а*). Распределения поперечной скорости дисперсной фазы сравнительно слабо отличаются друг от друга (рис. 4.18 *б*).

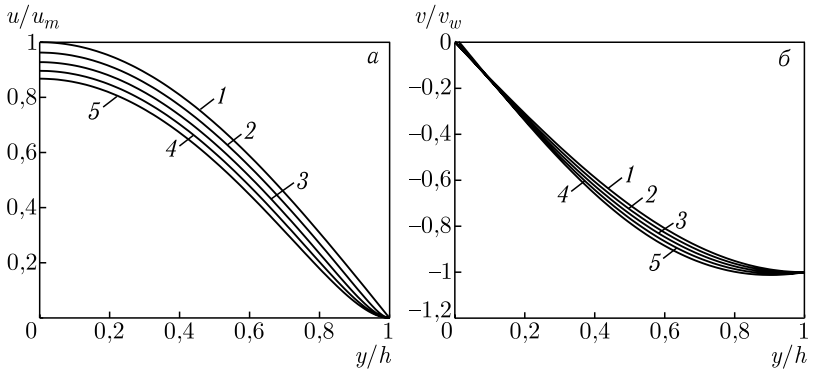


Рис. 4.18. Распределения продольной (*а*) и поперечной (*б*) скоростей газовой (кривая *1*) и дисперсной фаз при Stk = 0,025 (*2*); 0,05 (*3*); 0,075 (*4*); 0,1 (*5*)

Уровень турбулентных пульсаций скорости в канале с проницаемыми стенками является схожим с уровнем турбулентности в полностью развитом турбулентном течении в канале, когда вязкие и рейнольдсовые напряжения находятся в равновесии с напряжениями, обусловленными давлением.

Распределения кинетической энергии турбулентности в двухфазном течении, показанные на рис. 4.19 (при $\varkappa_{\text{р}} = 0{,}18$), свидетельствуют

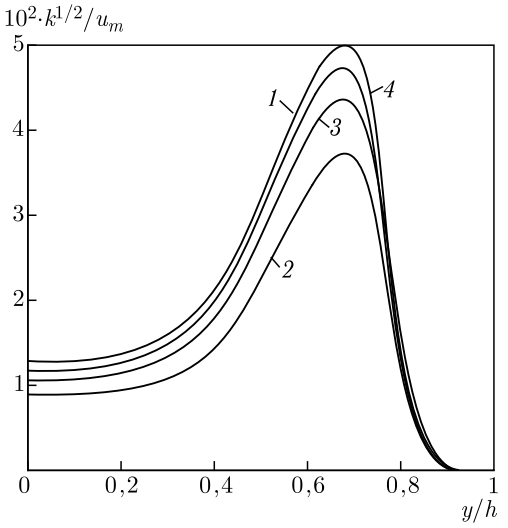


Рис. 4.19. Распределения кинетической энергии турбулентности в канале со вдувом при $r_\text{р} = 5$ (*2*); 10 (*3*); 15 мкм (*4*)

о том, что присутствие частиц оказывает ламинаризующее воздействие на течение. Линия *1* соответствует течению чистого газа.

Обратное влияние примеси на поле турбулентности определяется отношениями временны́х микро- и макромасштабов турбулентности в различных областях потока ко времени релаксации частицы. Наличие двух масштабов в уравнениях k–ε модели турбулентности приводит к различному характеру воздействия дискретного компонента в зависимости от параметра инерционности примеси. Турбулизирующее воздействие мелких частиц ($r_\text{р} \sim 1$ мкм), которые двигаются практически равновесно с газом, обусловливается уменьшением вязкой диссипации. Мелкие частицы, не взаимодействуя с энергоемкими пульсациями газа, вызывают подавление высокочастотной части спектра, ответственной за диссипацию турбулентной энергии. Снижение кинетической энергии турбулентности при введении в поток частиц с диаметром $r_\text{р} > 5$ мкм объясняется дополнительной диссипацией в результате межфазного осредненного и пульсационного скольжения.

Результаты расчетов, полученные в рамках полной постановки задачи, показаны на рис. 4.20 для различных поперечных сечений в круглом канале (при $h = 15$ мм и $v_w = 1{,}5$ м/с). Радиус частиц полагается равным 10 мкм, а их массовая концентрация — 0,01. Сплошные линии соответствуют расчетам без учета влияния частиц на течение газа, а пунктирные линии — расчетам с учетом влияния частиц.

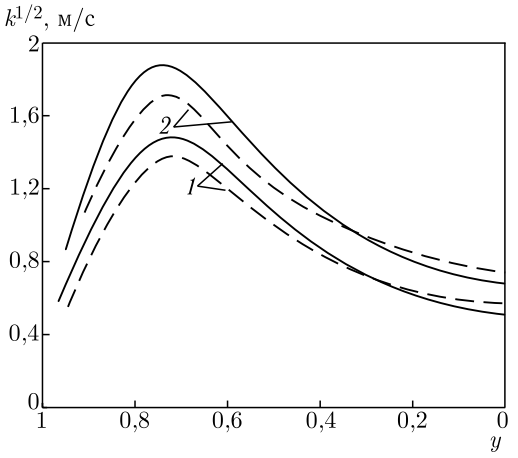


Рис. 4.20. Интенсивность турбулентности в круглом канале при наличии частиц при $x/h = 10$ (линия *1*) и $x/h = 15$ (линия *2*)

Присутствие частиц приводит к дополнительной диссипации кинетической энергии турбулентного потока.

4.5. Течение с химическими реакциями и горением частиц

Наличие химических реакций в газовой фазе и горение частиц конденсированной фазы оказывают существенное влияние на формирование структуры течения в канале с проницаемыми стенками. По сравнению с течениями в каналах со вдувом без тепловыделения в потоке, данные по течениям двухфазной смеси в каналах со вдувом являются довольно ограниченными.

4.5.1. Построение модели. Возможность построения подобных решений для ламинарного и турбулентного течений двухфазной смеси продуктов сгорания в канале со вдувом при гомогенной экзотермической реакции конечной скорости и гетерогенным горении частиц рассматривается в работах [46, 58].

Для описания процессов обмена массой, импульсом и энергией между газовой и дисперсной фазами используются представления механики многофазных сред с фазовыми превращениями.

Работа сил трения и давления, а также изменение внутренней энергии несущей фазы по сравнением с энергией, выделяемой при химической реакции, не учитываются. Физическая плотность газовой фазы считается функцией только радиальной координаты. Число Льюиса равняется единице. Конденсированная фаза моделируется сплош-

ной средой, лишенной собственных напряжений. Объем, занимаемый частицами, не учитывается. Давление создается только газом. Коагуляция и дробление частиц отсутствуют. Изменение размера частиц происходит за счет их горения.

Несущая фаза представляет собой гомогенную смесь газов, реагирующих между собой. Реакция горения в газовой фазе протекает в две стадии

$$\nu_{O_1}\mathrm{O} + \nu_F\mathrm{F} \to \nu_{P_1}\mathrm{P}_1,$$

$$\nu_{O_2}\mathrm{O} + \nu_M\mathrm{M} \to \nu_{P_2}\mathrm{P}_2 + \nu_{P_3}\mathrm{P}_3.$$

Компонент F рассматривается как горючее, компонент O — как окислитель, компонент P_1 — как промежуточный газообразный продукт реакции, компонент P_2 — как конденсированный продукт реакции, компонент P_3 — как газообразный продукт реакции, компонент M — как металл дисперсной фазы. Газовая фаза состоит из четырех компонентов (компоненты O, F, P_1, P_3).

Для построения математической модели, описывающей ламинарное течение двухфазной смеси в канале со вдувом, привлекается дополнительная информация относительно механизма реакции гетерогенного горения и кинетики гетерогенных реакций.

Система уравнений, описывающая двухфазное ламинарное течение реагирующей смеси вязкого газа с горящими частицами, имеет следующий вид:

$$\nabla(\rho\boldsymbol{v}) = -J, \tag{4.47}$$

$$\nabla\left(\rho_{\mathrm{p}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}\right) = J, \tag{4.48}$$

$$(\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,Y_i = \nabla(\rho D\nabla Y_i) + w_i, \tag{4.49}$$

$$(\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\nabla p + J(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}) - \boldsymbol{F} + 2\mathrm{div}(\nu S), \tag{4.50}$$

$$\left(\rho_{\mathrm{p}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}, \tag{4.51}$$

$$(\rho\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,h = \nabla\left(\frac{\lambda}{c_p}\nabla h\right) + \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}) - JQ, \tag{4.52}$$

$$\left(\rho_{\mathrm{p}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}\cdot\nabla\right)h_{\mathrm{p}} = Q, \tag{4.53}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}\cdot\nabla a = -w. \tag{4.54}$$

Уравнения (4.47)–(4.54) дополняются уравнением состояния

$$p = \rho\frac{R_0}{M}T.$$

Молярная масса, теплоемкость и энтальпия смеси находятся из соотношений

$$M = \sum_{i=1}^{4} \frac{\rho_i}{\rho} M_i, \quad c_p = \sum_{i=1}^{4} \frac{\rho_i}{\rho} c_{pi}, \quad h = \sum_{i=1}^{4} \left(c_{pi} T - h_i^0 \right).$$

Для замыкания основных уравнений используется условие

$$\sum_{i=1}^{4} Y_i = 1, \quad Y_i = \frac{\rho_i}{\rho}.$$

Здесь ρ — плотность, ρ° — истинная плотность газа, ρ_p° — истинная плотность вещества частиц, p — давление, a — радиус частицы, c_p — теплоемкость газа при постоянном давлении, M — молекулярная масса, λ — теплопроводность, S — тензор скоростей деформации. Индекс p относится к параметрам дисперсной фазы, а параметры без индексов соответствуют газу.

Для получения значений молекулярной вязкости в зависимости от температуры используется степенная зависимость

$$\frac{\mu}{\mu_w} = \left(\frac{T}{T_w} \right)^n.$$

Предполагается, что коэффициент вязкости не зависит от концентрации реагирующих веществ. Числу Прандтля присваивается постоянное значение.

Граничные условия для уравнений (4.47)–(4.54) имеют вид:

— при $y = r$ (стенка канала)

$$u = 0, \quad v = -v_w, \quad \rho_\mathrm{p} = -\beta_1 \rho_\mathrm{p}^\circ, \quad v_\mathrm{p} = -\beta_2 v_w,$$

$$u_\mathrm{p} = 0, \quad a = a_w, \quad Y_{\mathrm{P}_1} = 0, \quad Y_{\mathrm{P}_3} = 0, \quad h = h_w,$$

$$\rho u Y_\mathrm{O} + \rho D \frac{\partial Y_\mathrm{O}}{\partial y} = \rho_w Y_\mathrm{O}^0 v_w, \quad \rho v c_F + \rho D \frac{\partial c_F}{\partial y} = \rho_w Y_\mathrm{F}^0 v_w;$$

— при $y = 0$ (ось канала)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = v = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial Y_i}{\partial y} = 0.$$

В модели взаимодействия частицы с газом учитывается сила сопротивления

$$\boldsymbol{F} = \frac{3}{8} \frac{C_D \rho^2}{\rho_\mathrm{p}^\circ a} \left| \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\mathrm{p} \right| (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\mathrm{p}).$$

Коэффициент сопротивления находится из закона Стокса $C_D = 24/\mathrm{Re}_\mathrm{p}$, где $\mathrm{Re}_\mathrm{p} = 2a|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_\mathrm{p}|\rho^\circ/\mu$.

При сделанных допущениях система уравнений, описывающая двухфазное течение в канале со вдувом, допускает решение вида

$$\rho u y = \rho_w v_w \xi f(\eta) r_w, \quad \rho v y = -\rho_w v_w g(\eta) r_w,$$
$$\rho_{\text{p}} u_{\text{p}} y = \rho_w v_w \xi F(\eta) r_w, \quad \rho_{\text{p}} v_{\text{p}} y = -\rho_w v_w G(\eta) r_w,$$
$$\rho_{\text{p}} = P(\eta)\rho_w, \quad a = A(\eta) a_w, \quad h = H(\eta) h_w, \quad Y = \Phi(\eta) Y_w.$$

Здесь $\xi = x/r_w$, $\eta = y/r_w$.

После подстановки приведенных соотношений в уравнения (4.47)–(4.54) получим следующую систему ОДУ

$$f - g' = -J\gamma_1,$$

$$\frac{\mu}{\text{Re}}\left(\frac{f}{\rho\eta}\right)''' + \left(\frac{2\mu'}{\text{Re}} - \frac{g}{\eta}\right)\left(\frac{f}{\rho\eta}\right)'' + \left[\frac{\mu}{\text{Re}} - \frac{g}{\eta} - \left(\frac{\mu}{\eta}\right)' - \right.$$
$$\left. -2\rho\left(\frac{f}{\rho\eta}\right)\right]\left(\frac{f}{\rho\eta}\right)' - \rho'\left(\frac{f}{\rho\eta}\right)^2 - \gamma_1\gamma_2\left(PR_\eta\right)' + \gamma_1\left[J(f-F)\right]' = 0,$$

$$\frac{\lambda}{c_p}\frac{H''}{\text{Re}\,\text{Pr}} + \left(\frac{\lambda}{c_p}\frac{1}{\text{Re}\,\text{Pr}} - \frac{g}{\eta}\right)H' + \frac{H'\lambda}{c_p\eta\text{Re}\,\text{Pr}} - \gamma_1 JQ = 0,$$

$$\frac{\mu\Phi_i''}{\text{Re}\,\text{Sc}} + \left(\frac{\mu'}{\text{Re}\,\text{Sc}} - \frac{g}{\eta}\right)\Phi_i' + \frac{\Phi_i'\mu}{\eta\text{Re}\,\text{Sc}} - w_i E = 0,$$

$$F - G' = J\gamma_1,$$

$$\frac{F}{P\eta} + \frac{G}{P\eta}\left(\frac{F}{P\eta}\right)' = \frac{B}{\text{Re}_p}\left(\frac{f}{\rho\eta} - \frac{F}{P\eta}\right),$$

$$\frac{G}{P\eta} + \frac{G}{P\eta}\left(\frac{G}{P\eta}\right)' = \frac{B}{\text{Re}_{\text{p}}}\left(\frac{g}{\rho\eta} - \frac{G}{P\eta}\right),$$

$$\frac{GA'}{P\eta} = -w,$$

$$p = \rho\frac{R_0}{M}T.$$

Здесь

$$B = \frac{9\gamma_1\mu}{a_w\rho_{\text{p}}^\circ}, \quad \gamma_1 = \frac{r_w}{a_w}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\text{Re}_{\text{p}}}, \quad E = \frac{k_o r_w Y_w}{v_w}.$$

Для решения краевой задачи используется пристрелка граничных условий с организацией итерационного процесса с помощью метода продолжения по параметру. Интегрирование задачи Коши на каждом

итерационном шаге проводится методом Гира с автоматическим контролем погрешности на шаге.

4.5.2. Результаты расчетов. В результате численных расчетов получены распределения осевой и радиальной скоростей газовой и дисперсной фаз, концентраций реагирующих веществ, температуры и размеров частиц. В ходе численных расчетов обнаружено существенное влияние числа Рейнольдса, физических свойств и тепловыделения вследствие химических реакций на профили осевой и радиальной скоростей газовой и дисперсной фаз.

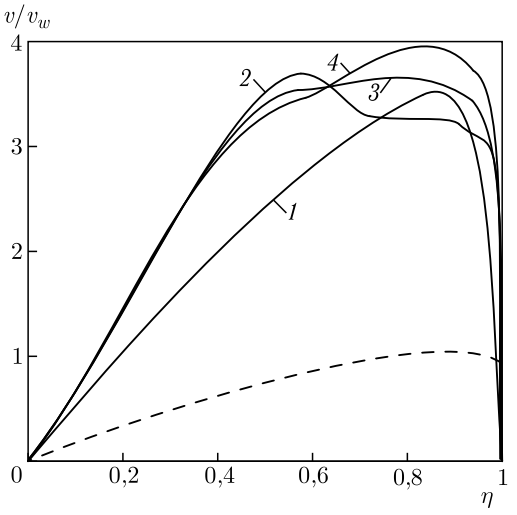


Рис. 4.21. Распределения радиальной скорости в течении без частиц при $y/h = 18$ (*2*); 36 (*3*); 50 (*4*)

Профиль радиальной скорости, полученный для течения без частиц (линия *1*), показан на рис. 4.21 в сравнении с точным решением (пунктирная линия) и данными моделирования крупных вихрей [104] (линии *2–4*).

Профили скорости при наличии бимолекулярной реакции в несущей фазе и учете парофазного горения частиц металла (алюминия) приводятся на рис. 4.22. Значки • соответствуют результатам расчетов при постоянных физических свойствах среды. Линии *1* и *2* показывают распределения осевой скорости несущей и дисперсной фаз. Влияние химической реакции незначительно сказывается на распределении осевой скорости. Вместе с тем, химические реакции оказывают существенное влияние на профили радиальной скорости. В узкой области, соответствующей зоне протекания химической реакции, происходит

резкое увеличение радиальной скорости как несущей (линия *3*), так и дисперсной (линия *4*) фазы.

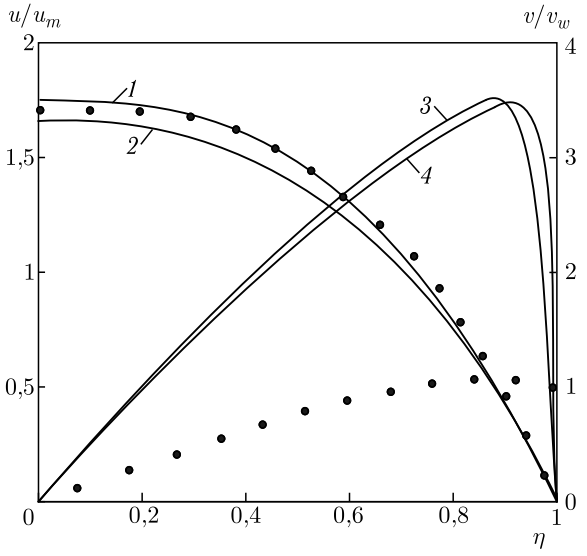


Рис. 4.22. Распределения осевой и радиальной скорости газовой (линии *1*, *3*) и дисперсной (линии *2*, *4*) фаз

Распределение частиц металла по размерам в поперечном сечении канала при их различных начальных размерах приводится на рис. 4.23. Размер крупных частиц (порядка 20 мкм) при движении от стенки канала к его оси уменьшаются примерно в два раза (линия *1*). Более мелкие частицы с размерами порядка 10 мкм (линия *2*) и 5 мкм (линия *3*) сгорают более быстро. В процессе своего движения вдоль оси частицы продолжают гореть до их полного сгорания, но перераспределение спектра частиц в сечении канала в рамках автомодельности течения не учитывается.

Распределения температуры частиц у стенки канала при различных параметрах E, являющегося критерием неравновесности процесса, показаны на рис. 4.24 (параметр E изменяется за счет уменьшения или увеличения радиуса канала). Полученные результаты относятся к случаю, когда несущая фаза представляет собой однокомпонентный газ, а горение частиц металла протекает в парофазном режиме. Линии *1* и *2* получены для узкого канала, а линии *3* и *4* — для канала с относительно большим относительным удлинением. Линии *2* и *4* соответствуют температуре среды, рассчитанной с учетом теплового воздействия частиц на параметры среды, а линии *1* и *3* — температуре,

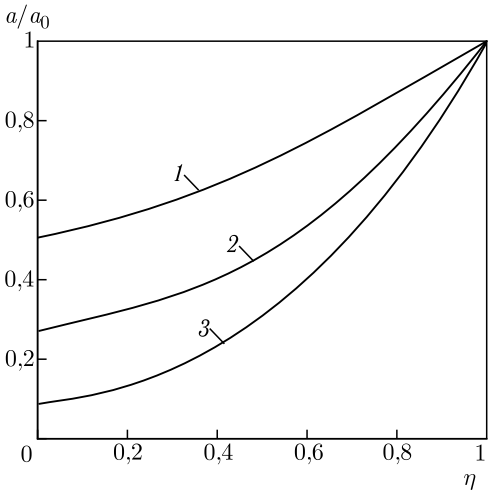


Рис. 4.23. Изменение размера частицы при $a_0 = 20$ (*1*); 10 (*2*); 5 мкм (*3*)

рассчитанной без учета теплового воздействия частиц. С увеличением радиуса канала (линии *3* и *4*) параметр E возрастает, что приводит к увеличению градиента температуры вблизи стенки. Чем меньше радиус канала, тем дальше отодвигается область высоких температур от стенки (линии *1* и *2*).

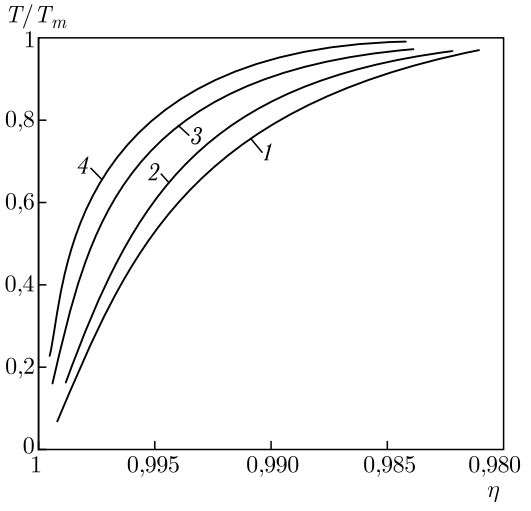


Рис. 4.24. Распределение температуры частиц вблизи стенки канала при $E = 10^3$ (*1*, *2*); $5 \cdot 10^3$ (*3*, *4*)

В работе [46] учитывается турбулентный характер течения. Для замыкания осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса применяется k–ε модель турбулентности и метод пространственно-временного осреднения в локально-однородном приближении. Система уравнений, описывающая турбулентное течение газовзвеси с горящими частицами в канале со вдувом, допускает понижение порядка, но преобразованные уравнения содержат продольную координату в качестве параметра.

Сравнение расчетных данных (значки •) с данными моделирования в полной постановке (сплошные линии) приводится на рис. 4.25 (влияние частиц на газ не учитывается). Некоторое рассогласование результатов в области максимального значения кинетической энергии турбулентности объясняется приближенным характером построенной модели, связанным с исключением производных по продольной координате и пренебрежением слагаемыми порядка x^2.

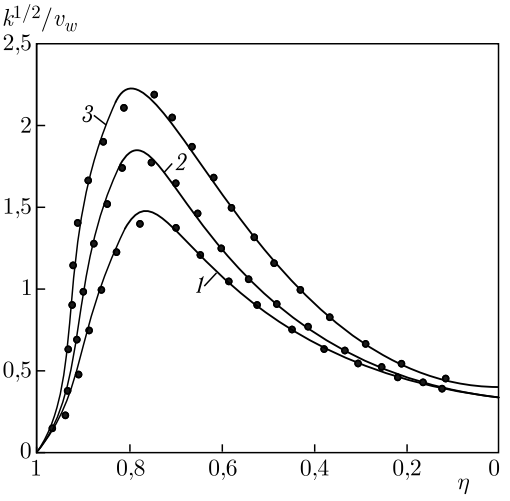


Рис. 4.25. Распределение интенсивности турбулентности по радиальной координате при $x/h = 5$ (*1*); 7,5 (*2*); 10 (*3*)

Результаты расчетов характеристик турбулентности, полученные в полной постановке (сплошные линии), и данные, соответствующие разработанному подходу, сравниваются на рис. 4.26 при $a = 5$ мкм. Концентрация дисперсной фазы полагается равной $\alpha_{\text{р}} = 2 \cdot 10^{-5}$. Сплошные линии соответствуют чистому газу, а значки • — результатам, учитывающим обратное влияние конденсированной фазы. Наличие дискретного компонента оказывает ламинаризующее воздействие на поток. Снижение кинетической энергии турбулентности при

введении в поток частиц объясняется дополнительной диссипацией в результате межфазного скольжения.

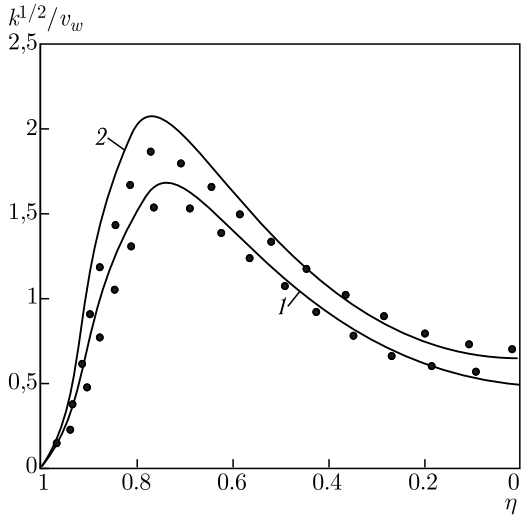


Рис. 4.26. Распределение интенсивности турбулентности по радиальной координате при $x/h = 5$ (*1*); 8 (*2*)

Построенная модель позволяет исследовать влияние характеристик модели горения, окислительного потенциала, геометрических характеристик канала, размера частиц и их концентрации на распределения параметров потока.

4.6. Изменение размера частиц

Рассматривается влияние выбора модели на прогноз изменения размера частиц конденсированной фазы при движении продуктов сгорания смесевого твердого топлива по каналу заряда [81].

Продукты сгорания содержат мелкодисперсные частицы оксида алюминия и крупные частицы алюминия, горение которых завершается вдали от поверхности твердого топлива. В процессе движения в канале заряда частицы оксида алюминия укрупняются вследствие коагуляции, а частицы алюминия уменьшаются. Для оценки размеров частиц конденсированной фазы на входе в сопло требуется анализ влияния выбора размерности модели течения в канале заряда.

При построении модели предполагается, что течение является квазистационарным и в произвольный момент времени канал заряда представляет собой круговой цилиндр длиной L и радиусом R. Скорость

вдува продуктов сгорания в канала заряда v_w является неизменной вдоль поверхности горения. Частицы не оказывают влияния на течение газа и движутся по линиям тока.

Полагая газовую фазу невязкой средой с постоянной плотностью, распределения скорости описываются следующими соотношениями:

— одномерная модель течения

$$u = 2v_w \frac{x}{R}, \quad v = 0; \tag{4.55}$$

— двумерная модель потенциального течения

$$u = 2v_w \frac{x}{R}, \quad v = -v_w \frac{r}{R}; \tag{4.56}$$

— двумерная модель вихревого течения

$$u = \pi v_w \frac{x}{R} \cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right], \quad v = -v_w \frac{R}{r} \sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]. \tag{4.57}$$

Исходная функция распределения частиц по размерам полагается неизменной на поверхности горения и представляется трехфракционной моделью $f_{0j}(d_{0j})$, где d — диаметр частицы. Индексу $j = 1$ соответствуют частицы высокодисперсного оксида алюминия ($d_{01} < 1$ мкм), индексу $j = 2$ соответствуют частицы оксида некоторого характерного размера ($d_{01} \sim 3 \div 4$ мкм), а индексу $j = 3$ — частицы алюминия ($d_{03} > 40$ мкм).

Пренебрегая отклонением траекторий частиц от линий тока газовой фазы, рассмотрим общий для всех фракций двухпараметрический закон изменения диаметра частиц в процессе их движения

$$\frac{d(d_j)}{dt} = \alpha d_j^{1-\beta}, \tag{4.58}$$

где α и β — параметры. Считается, что $\alpha = 0$ при $j = 1$, что дает $d_1 = d_{01}$. При $j = 3$ считается, что $\alpha = -ka^{0.9}$, где k и a — эмпирические коэффициенты. Рассматривая модель скоростной коагуляции частиц $j = 1$ и $j = 2$ [19], при $j = 2$ получим

$$\alpha = \frac{2g}{\pi\rho_{\text{р}}}, \quad \beta = 3, \quad g = m_1 f_1 j_{12} e_{12} S_2,$$

где $\rho_{\text{р}}$ — плотность материала частиц оксида, m_1 — масса частицы фракции $j = 1$, f_1 — количество частиц фракции $j = 1$ в единице объема, j_{12} и e_{12} — коэффициенты эффективности взаимодействия частиц фракций $j = 1$ и $j = 2$, S_2 — площадь миделевого сечения частиц фракции $j = 2$.

Для качественного анализа параметры α и β для каждой из фракций частиц полагаются постоянными на всем поле течения.

Интегрирование соотношения (4.58) для произвольной траектории частиц, начинающейся на поверхности горения при $x = x_0$ и заканчивающейся при $x = L$, дает

$$d_j^\beta - d_{0j}^\beta = \alpha\beta t_j(x_0),$$

где $t_j(x_0)$ — время движения по траектории. Используя безразмерный диаметр частицы $D_j = d_j/d_{j0}$, запишем

$$D_j = \left[1 + \left(\frac{\alpha\beta}{D_{0j}^\beta}\right) t_j(x_0)\right]^{1/\beta}. \tag{4.59}$$

Зависимости для $t_j(x_0)$ имеют вид [95]:

— для одномерной модели и двумерной модели потенциального течения

$$t_1 = \frac{R}{2v_w} \ln\left(\frac{L}{x_0}\right); \tag{4.60}$$

— для двумерной модели вихревого течения

$$t_2 = \frac{R}{4\pi v_w} \ln \frac{L + (L^2 - x_0^2)^{1/2}}{L - (L^2 - x_0^2)^{1/2}}. \tag{4.61}$$

Диаметры частиц различных фракций, осредненные по площади поперечного сечения канала, получаются при помощи подстановки соотношений (4.60) и (4.61) в уравнение (4.59) с последующим интегрированием по переменной $x_0 \in [0, L]$. Для упрощения задачи используется понятие эквивалентной трубки тока, время пребывания продуктов сгорания в которой равняется среднему по объему канала заряда времени пребывания. В результате имеем:

— для одномерной модели и двумерной модели потенциального течения

$$T_1 = \frac{R}{2v_w}; \tag{4.62}$$

— для двумерной модели вихревого течения

$$T_2 = \frac{R}{4v_w}. \tag{4.63}$$

Обозначая $T_0 = R/(2v_w)$ и $T_j = \alpha\beta/d_{0j}^\beta$, после подстановки соотношений (4.62) и (4.63) в уравнение (4.59) получим

$$D_{jm} = \left(1 \pm \frac{1}{nt_j}\right)^{1/\beta}, \tag{4.64}$$

где $t_j = T_j/T_0$. Коэффициент n имеет смысл фактора размерности модели и принимает значение 1 для одномерной модели и двумерной

модели потенциального течения и значение 2 для двумерной модели вихревого течения. Индекс m указывает на средние значения.

В соотношении (4.64) параметр t_j представляет собой безразмерное характерное время эволюции частиц соответствующей фракции и равняется отношению характерного временно́го макромасштаба течения T_0 к характерному времени взаимодействия частиц оксида при $j = 2$ или взаимодействия горящих частиц алюминия с газовой фазой при $j = 3$.

Полученные зависимости показывают существенную разницу в результатах расчетов по моделям различной размерности. Из соотношения (4.64) следует, что одномерная модель и двумерная модель потенциального течения являются эквивалентными при исследовании двухфазных течений в камере сгорания. При этом оценка размеров частиц оксида алюминия на выходе из канала заряда по одномерной модели и двумерной модели потенциального течения является завышенной, а оценка размеров частиц алюминия — заниженной по сравнению с двумерной моделью вихревого течения.

Соотношение (4.64) дает также условия подобия, которые необходимо выполнять при физическом моделировании течений данного класса (при переходе от маленького канала к большому каналу при $t_j = \mathrm{idem}$). Полагая характеристики спектра частиц неизменными, несложно получить, что $R_1/v_{w1} = R_2/v_{w2}$, где индексы 1 и 2 определяют параметры маленького и большого каналов. Уменьшение размеров канала сопровождается пропорциональным уменьшением скорости вдува продуктов сгорания в канал. Таким образом, при неизменности характеристик спектра частиц необходимым условием физического моделирования является сохранение отношения R/v_w для модельного и натурного двигателей.

4.7. Дробление и коагуляция частиц в канале

Взаимодействие частиц алюминия и частиц оксида алюминия в камере сгорания приводит к изменению распределения частиц по размерам вследствие их дробления и коагуляции, а взаимодействие частиц с газовым потоком приводит к дроблению частиц под действием аэродинамических сил.

4.7.1. Критериальные соотношения. Для описания процессов дробления и коагуляции частиц в соплах ракетных двигателей имеются математические модели различной степени сложности [19, 83], а также критериальные соотношения, полученные на основе обработки данных физического эксперимента. Теоретическое исследование разрушения капель аэродинамическими силами представляет собой сложную

проблему, требуя решения как внешней, так и внутренней задачи при нетривиальных граничных и начальных условиях. Обычно критические условия дробления капель определяются числом Вебера, которое вычисляется в момент начала разрушения капли.

Изучению эффектов динамического взаимодействия частиц в камере сгорания уделяется меньше внимания [5]. В то же время процессы, протекающие внутри камеры сгорания, оказывают влияние на спектр размеров частиц на входе в сопло и на интегральные характеристики двигательной установки [95]. Сложная структура внутреннего течения в канале заряда, горение частиц алюминия и их агломератов, а также полимодальная функция распределения частиц по размерам в существенной степени осложняют построение математической модели двухфазного течения в камере сгорания.

Рассмотрим двухфазное течение в канале заряда, предполагая, что дисперсная фаза состоит из частиц алюминия и его оксида [5]. Функция распределения частиц, образующихся при горении топлива, является бимодальной, и каждая фракция частиц (частицы алюминия и частицы оксида алюминия) характеризуется своим средним размером. Учитываются дробление частиц под действием аэродинамических сил (aerodynamic break-up), дробление вращающихся частиц за счет их столкновений под действием центробежных сил (break-up by centrifugal forces), дробление и коагуляцию частиц одной фракции в результате столкновений между собой (Al–Al, Al_2O_3–Al_2O_3), дробление и коагуляцию частиц различного сорта в результате столкновений между собой (Al–Al_2O_3). Горение частиц не учитывается.

Критерии дробления и коагуляции частиц находятся в результате обработки данных измерений, полученных в «холодных» условиях. Имеющиеся данные показывают, что взаимодействие индивидуальной капли с газовым потоком и взаимодействие двух частиц между собой определяется следующими критериями [19].

1. Отношение размеров взаимодействующих капель

$$\gamma_{ji} = \frac{d_{\mathrm{p}i}}{d_{\mathrm{p}j}},$$

   где $d_{\mathrm{p}i} > d_{\mathrm{p}j}$, поэтому $\gamma_{ji} > 1$.

2. Отношение коэффициентов динамической вязкости взаимодействующих капель

$$H_{ji} = \frac{\mu_j}{\mu_i}.$$

   Параметр H_{ji} является важным в случае столкновений жидких капель с различными физическими свойствами. В этом случае

число Рейнольдса вычисляется для модели движения частицы-снаряда относительно частицы-мишени.

3. Число Лапласа (Laplace number)

$$\mathrm{Lp}_i = \frac{\sigma_i \rho_i d_{\mathrm{p}i}}{\mu_i^2}.$$

4. Число Вебера (Weber number)

$$\mathrm{We}_i = \frac{\rho d_{\mathrm{p}i} \left|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{p}i}\right|^2}{\sigma_i}.$$

5. Число Рейнольдса (Reynolds number)

$$\mathrm{Re}_{ji} = \frac{\rho_i d_{\mathrm{p}i} \left|\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}j} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{p}i}\right|}{\mu_i}.$$

6. Безразмерный угловой момент сталкивающихся частиц

$$\Omega = |\boldsymbol{L}| \left[(d_{\mathrm{p}0}/2)^{3{,}5} (\rho\sigma)^{1/2}\right]^{-1}.$$

Под $d_{\mathrm{p}0}$ понимается диаметр капли, имеющей такой же объем, что и соударяющиеся капли (эквивалентный диаметр):

$$d_{\mathrm{p}0} = \left(d_{\mathrm{p}i}^3 + d_{\mathrm{p}j}^3\right)^{1/3}.$$

Угловой момент соударяющихся частиц массами $m_{\mathrm{p}i}$ и $m_{\mathrm{p}j}$ находится из соотношения

$$|\boldsymbol{L}| = \frac{m_{\mathrm{p}i} m_{\mathrm{p}j}}{m_{\mathrm{p}i} + m_{\mathrm{p}j}} \left|\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}j} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{p}i}\right| \delta_{ji}.$$

Параметр удара δ_{ji} связан с размерами соударяющихся частиц и углом столкновения θ при помощи соотношения

$$\delta_{ji} = \frac{1}{2}\left(d_{\mathrm{p}i} + d_{\mathrm{p}j}\right) \sin\theta.$$

Здесь ρ — плотность, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $\boldsymbol{v}$ — скорость. Индексы i и j относятся в параметрам соударяющихся частиц (частица-мишень и частица-снаряд). Параметры без индексов относятся к газу.

Для описания эффектов динамического взаимодействия капель имеется ряд критериальных соотношений, различающихся формой записи и областью применимости. Основным параметром, определяющим поведение капли в потоке газа, является число Вебера [14, 54, 64, 136]. В зависимости от типа нагружения, критическое число Вебера изменяется в довольно широком интервале.

Предполагается, что дробление капли происходит при достижении числом Вебера некоторого критического значения We_*, причем

$\mathrm{We}_* = 3{,}5 \div 14$ при внезапной инжекции капли в поток и $\mathrm{We}_* = 15 \div 24$ в потоке с плавно увеличивающейся скоростью газа [14, 54], $\mathrm{We}_* = 20 \div 30$ в волнах разрежения. В камере сгорания $\mathrm{We}_* \sim 17 \div 18$ для частиц оксида алюминия [64, 164] и $\mathrm{We}_* \sim 28$ для агломератов алюминия [136]. В отсутствие надежных экспериментальных данных, для простоты считается, что при достижении критического числа Вебера исходная капля распадается на две капли равной массы.

При столкновении капель приблизительно одинакового размера они либо сливаются в одну, либо дробятся на более мелкие за счет действия центробежных сил. В столкновениях вращающихся капель важную роль играет угловой момент. При этом $\Omega_* = 6{,}0 \pm 0{,}9$, согласно данным [5]. Вращающиеся капли сливаются при $\Omega < \Omega_*$ и дробятся при $\Omega > \Omega_*$.

Для описания массообмена между сталкивающимися каплями в результате их дробления и коагуляции используется интегральный параметр φ_{ji}, предложенный в работе [79] и представляющий собой математическое ожидание отношения изменения массы капли-мишени, возникающего в результате ее столкновения с каплями-снарядами, к общей массе капель-снарядов, сталкивающимися в каплей-мишенью. При этом $\varphi_{ji} < 0$, если преобладает дробление капель, и $\varphi_{ji} > 0$, если преобладает коагуляция капель.

Для расчетов параметра массообмена используется эмпирическая формула [82]

$$\varphi_{ji} = 1 - 0{,}246\mathrm{Re}_{ji}^{0{,}407}\mathrm{Lp}^{-0{,}096}\gamma_{ji}^{-0{,}278}. \tag{4.65}$$

Формула (4.65) применима при $30 < \mathrm{Re}_{ji} < 6 \cdot 10^3$, $5 < \mathrm{Lp}_i < 3 \cdot 10^5$ и $1{,}9 < \gamma_{ji} < 12$.

Экспериментальные данные по массообмену при столкновении капель приблизительно равного размера ($\gamma_{ji} = 1{,}1 \div 3{,}0$) показывают, что формула (4.65) дает завышенные значения параметра массообмена [19]. На основе обобщения данных, представленных в работе [82], построена следующая зависимость [5]

$$\varphi_{ji} = 1{,}4 - 1{,}979\lambda_{ji} + 0{,}507\left(2\lambda_{ji}^2 - 1\right), \tag{4.66}$$

где

$$\lambda_{ji} = \left(\frac{\mathrm{Re}_{ji}}{383{,}6}\right)^{0{,}572}\left(\frac{\mathrm{Lp}_i}{370{,}4}\right)^{-0{,}153}\left(\frac{\gamma_{ji}}{2{,}37}\right)^{-0{,}597}.$$

Формула (4.66) применима при $6 < \mathrm{Re}_{ji} < 385$, $0{,}2 < \mathrm{Lp}_i < 600$, $1 < \gamma_{ji} < 12$, $\lambda_{ji} \leqslant 1$.

При $\varphi_{ji} = 1$ имеется слияние сталкивающихся частиц, а при $\varphi_{ji} = 0$ — массообмен между сталкивающимися частицами отсутствует.

Для уточнения формулы (4.66) используется поправка на скорость газа около капли

$$\varphi'_{ji} = \begin{cases} \varphi_{ji} - 0{,}00446 B_{ji} & \text{при } B_{ji} \leqslant 40,6, \\ \varphi_{ji} - 11{,}9 (B_{ji}/100)^{4{,}64} & \text{при } 40{,}6 < B_{ji} < 120. \end{cases} \tag{4.67}$$

Здесь

$$B_{ji} = \mathrm{Re}_{ji}^{0{,}285} \mathrm{Lp}_i^{0{,}2} \gamma_{ji}^{0{,}4} \mathrm{We}_i^{0.442}.$$

Формула (4.67) используется при $30 < \mathrm{Re}_{ji} < 500$, $8 < \mathrm{Lp}_i < 10^3$, $2{,}5 < \gamma_{ji} < 10$, $\mathrm{We}_i < 12{,}5$.

Для описания массообмена при взаимодействии капель с различными физическими свойствами применяется формула [71]

$$\varphi''_{ji} = \varphi_{ji} + 0{,}0785\, |P|^{-1{,}05}\, |K|^{1{,}3}\, |\ln H_{ji}|^{1{,}96}\, \gamma_{ji}^{-0{,}51} \mathrm{sgn} P\, \mathrm{sgn} K\, \mathrm{sgn}(\ln H_{ji}). \tag{4.68}$$

Здесь $P = \ln(\mathrm{Lp}_i/5 \cdot 10^4)$, $K = \ln(\mathrm{Re}_{ji}/3150)$. Формула (4.68) применима при $\mathrm{Re}_{ji} < 8 \cdot 10^3$, $\mathrm{Lp}_i < 4 \cdot 10^5$, $2 < \gamma_{ji} < 6$, $0{,}01 < H_{ji} < 250$.

4.7.2. Результаты расчетов. Рассмотрим двухфазное течение продуктов сгорания в канале заряда, имеющем длину L и площадь поперечного сечения F.

Дисперсная фаза состоит из частиц алюминия и частиц оксида алюминия, имеющих разные размер и скорость. Имеющиеся экспериментальные данные показывают, что диаметр частиц оксида алюминия находится в интервале $d_{\mathrm{p}2} = 0{,}1 \div 20$ мкм (среднемассовый диаметр $d_{43} = 2 \div 5$ мкм), а диаметр частиц алюминия — в интервале $d_{\mathrm{p}1} = 1 \div 1000$ мкм (среднемассовый диаметр $d_{43} = 100$ мкм). Физические свойства частиц и газа приводятся в табл. 4.1.

Таблица 4.1. Физические свойства частиц и газа

Компонент	ρ, кг/м^3	μ, Па·с	σ, Н/м
Al	2400	$6{,}35 \cdot 10^{-3}$	0,84
Al_2O_3	3060	$60 \cdot 10^{-3}$	0,70
Газ	5,88	$6{,}7 \cdot 10^{-5}$	—

Скорость газа вдоль осевой координаты увеличивается от 0 вблизи левого торца канала (при $x = 0$) до U в выходном сечении канала или на входе в сопло (при $x = L$). Скорость газа на входе в сопло находится из соотношения, полученного в рамках одномерного приближения,

$$u = \lambda \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1} R T_0 \right)^{1/2},$$

где γ и R — отношение удельных теплоемкостей и газовая постоянная продуктов сгорания. Параметр λ (приведенная скорость) находится из решения уравнения $q(\lambda) = F_*/F$, где F_* — площадь критического сечения сопла. Для течения в канале градиент скорости является постоянным, $a = u/L = \mathrm{const}$.

Движение частицы описывается уравнением

$$\tau_{\mathrm{p}} u_{\mathrm{p}} \frac{du_{\mathrm{p}}}{dx} = f_{\mathrm{D}} \left[u(x) - u_{\mathrm{p}}\right], \tag{4.69}$$

где $\tau_{\mathrm{p}} = \rho d_{\mathrm{p}}^2/18\mu$ представляет собой время релаксации частицы. Функция f_{D} учитывает поправку на инерционность, сжимаемость и разреженность к стоксову закону сопротивления твердой сферы.

Уравнение (4.69) решается численно с начальным условием $u_{\mathrm{p}}(0) = 0$. Скорость газа вдоль траектории частицы рассчитывается при помощи линейной зависимости $u(x) = ax$. Градиент скорости в канале изменяется в интервале $a = 50 \div 200$ 1/с. Наибольшие градиенты скорости соответствуют начальной геометрии канала. По мере выгорания топлива диаметр канала увеличивается, а градиент скорости уменьшается. Длина канала полагается равной $L = 2$ м.

Результаты расчетов, обработанные в виде зависимости диаметра частицы от положения частицы в канале, приводятся на рис. 4.27. Расчетные точки соответствуют критическому числу Вебера $\mathrm{We}_* = 17$, когда имеет место дробление агломератов алюминия при фиксированном градиенте скорости в канале заряда. Например, для $a = 75$ 1/с (линия *2*) частица диаметром 1000 мкм достигает скорости, соответствующей критическому числу Вебера, на расстоянии $x/L = 0{,}5$ от левого торца заряда. При $x/L < 0{,}5$ следует, что $\mathrm{We} < \mathrm{We}_*$, и дробления частицы не происходит. При $a = 50$ 1/с (линия *1*) условия дробления частицы возникают при $x/L = 1$. Дробления частиц диаметром менее 200 мкм не наблюдается, поскольку критическое число Вебера не достигается на протяжении всей длины канала.

При увеличении градиента скорости газа в канале и фиксированном размере частицы точка, в которой возникают условия дробления частицы (достигается критическое число Вебера), сдвигается к левой границе расчетной области.

Параметр удара при оценке углового момента полагается равным наиболее вероятному значению $\delta_{ji} = (d_{\mathrm{p}i} + d_{\mathrm{p}j})/3$. Угловой момент находится из соотношения

$$\Omega = \frac{4\pi}{9} \left(2\mathrm{We}_{ji}\right)^{1/2} \frac{\gamma_{ji}^3 \left(1 + \gamma_{ji}\right)}{\left(1 + \gamma_{ji}^3\right)^{13/6}},$$

где $\mathrm{We}_{ji} = \rho d_{\mathrm{p}j} |\boldsymbol{v}_{\mathrm{p}j} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{p}i}|/\sigma$ — число Вебера, построенное по относительной скорости сталкивающихся частиц.

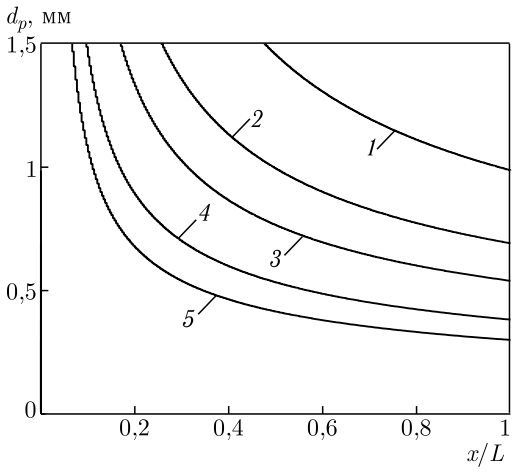


Рис. 4.27. Условия дробления агломератов алюминия в канале при достижении критического числа Вебера для $a = 50$ (*1*); 75 (*2*); 100 (*3*); 150 (*4*); 200 1/с (*5*)

Расчетные данные для агломератов алюминия приводятся на рис. 4.28 при $a = 100$ 1/с и для условий, соответствующих выходному сечению канала (при $x = L$). Относительная скорость соударяющихся частиц находится из уравнения (4.69) для пары частиц подходящего размера. Область между пунктирными линиями соответствует критической области изменения углового момента $\Omega_* = 6{,}0 \pm 0{,}9$.

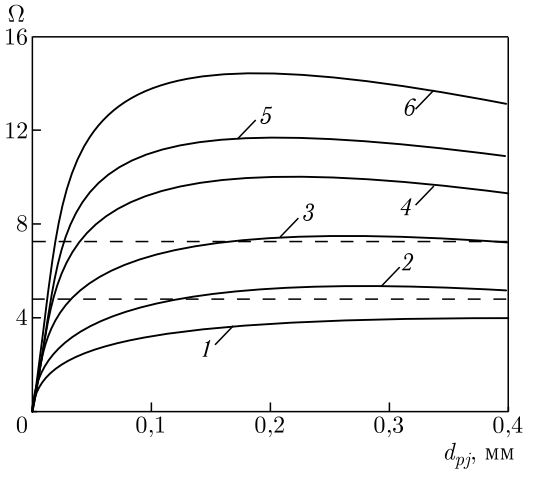


Рис. 4.28. Зависимость углового момента от размера частицы-снаряда при $\gamma_{ji} = 1{,}5$ (*1*); 1,7 (*2*); 2 (*3*); 2,5 (*4*); 3 (*5*); 4 (*6*)

Приведенные результаты показывают, что при $d_{\text{p}j} < 10$ мкм угловой момент меньше своего критического значения ($\Omega < \Omega_*$) и дробление частиц не имеет места при любых значениях параметра γ_{ji}. При приблизительно равных размерах соударяющихся частиц ($\gamma_{ji} < 2$) следует, что $\Omega < \Omega_*$, и процессы слияния частиц доминируют над процессами дробления во всем диапазоне изменения диаметра частицы-снаряда $d_{\text{p}j}$. В случае столкновения частиц алюминия при $\gamma_{ji} > 2$ достигается достаточно высокий угловой момент ($\Omega > 7$), что приводит к дроблению частиц за счет действия центробежных сил.

Результаты расчетов, относящихся к изменению параметра массообмена φ_{ji} (столкновения Al–Al) и параметра массообмена (столкновения Al–Al_2O_3), приводятся на рис. 4.29 и рис. 4.30 при $a = 100$ 1/с и для условий, соответствующих выходному сечению канала. Параметр φ_{ji} рассчитывается по формуле (4.66) для столкновений агломератов алюминия, а параметр φ''_{ji} — по формуле (4.68) для столкновений частиц оксида алюминия с частицей-агломератом.

Полученные результаты показывают, что в камере сгорания процессы коагуляции доминируют над процессами дробления ($\varphi_{ji} > 0$). Характер зависимости параметров коагуляции и дробления от размера частиц-снарядов является одинаковым во всем диапазоне изменения параметра γ_{ji} (в расчетах $\gamma_{ji} = 1{,}2 \div 4$). Минимум параметра массообмена $\varphi_{ji} = -0{,}15$ достигается при $d_{\text{p}j} = 100 \div 150$ мкм.

Сравнение данных, приведенных на рис. 4.29 и рис. 4.30, показывает, что учет разницы в физических свойствах сталкивающихся частиц

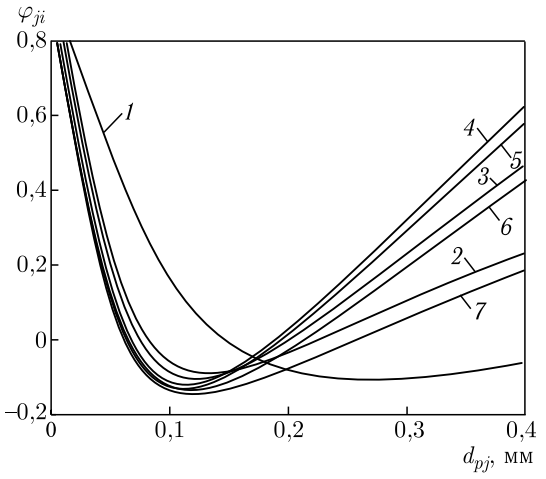


Рис. 4.29. Зависимость параметра коагуляции и дробления при столкновении частиц алюминия при $\gamma_{ji} = 1{,}2$ (*1*); 1,4 (*2*); 1,6 (*3*); 2 (*4*); 2,5 (*5*); 3 (*6*); 4 (*7*)

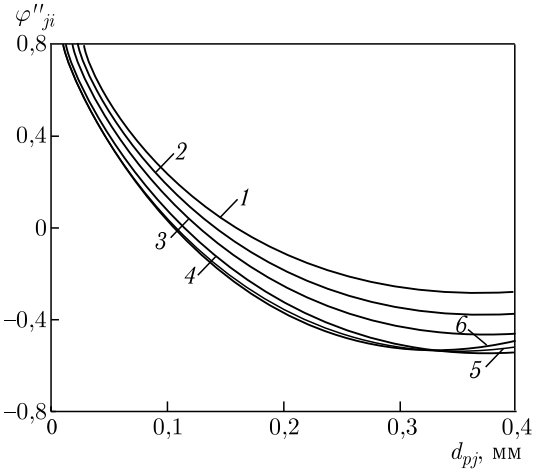


Рис. 4.30. Зависимость параметра коагуляции и дробления при столкновении частицы алюминия с частицами оксида алюминия при $\gamma_{ji} = 2$ (*1*); 2,2 (*2*); 2,5 (*3*); 3 (*4*); 4 (*5*); 6 (*6*)

оказывает существенное влияние на количественные характеристики массообмена между фракциями.

4.8. Волновые явления в камере сгорания

Волновые явления играют существенную роль в устойчивости внутрикамерных процессов. Для определения величины и скорости распространения малых возмущений нет необходимости в полном решении нелинейной системы уравнений газовой динамики. Обычно ограничиваются линеаризацией этой системы относительно вариаций давления, плотности и скорости.

4.8.1. Основные допущения. Несмотря на то, что геометрия камеры сгорания изменяется во времени вследствие выгорания топлива, расчеты обычно проводятся в квазистационарной постановке. Скорость горения топлива имеет порядок 1 см/с, что существенно меньше скорости потока, которая составляет около 10 м/с. Скорость потока почти на 2 порядка меньше скорости звука в камере сгорания (около 1000 м/с), что обусловливает распространение акустических волн.

Такие же оценки получаются и для линейных масштабов. Горение газообразных продуктов завершается вблизи поверхности канала заряда на расстоянии нескольких микрон. Вместе с тем, масштабы вихревых структур варьируются от нескольких сантиметров до метров.

При исследовании неустойчивости внутрикамерных процессов нестационарность потока принимается во внимание только при учете горения частиц конденсированной фазы (горение частиц алюминия завершается на расстоянии нескольких сантиметров от поверхности горения топлива).

Во многих случаях поле течения предполагается потенциальным или невязким вихревым [309]. Для описания дисперсной фазы применяются как эйлеров, так и лагранжев подход в детерминистическом [156] или стохастическом варианте [140, 251].

4.8.2. Волновое уравнение. Варьируя систему уравнений движения газа от невозмущенного состояния, получается система уравнений движения в акустическом приближении, которая сводится к волновому уравнению для вариаций давления и плотности. Волновое уравнение используется для расчета частот акустических колебаний давления, влияющих на скорость горения топлива и устойчивость работы двигателя.

Волновое уравнение для давления имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 p,$$

где a — скорость звука.

Волновое уравнение принадлежит к числу основных хорошо изученных уравнений математической физики. Частные решения волнового уравнения находятся при помощи метода разделения переменных.

4.8.3. Модельное уравнение. Рассматриваются плоские волны в продольном направлении (longitudinal modes, standing acoustic modes). Распространение волн в поперечном направлении (radial или tangential modes) не учитывается.

Используется разложение

$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) = \langle P(\boldsymbol{r}) \rangle + \Phi'(\boldsymbol{r}, t),$$

где t — время, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор. Угловые скобки обозначают осреднение по времени, а штрих — пульсации во времени.

Изменение переменной состояния p (state variable) описывается следующим уравнением (equation of a simple oscillator)

$$\ddot{p} + 2\alpha\dot{p} + \omega^2 p = F(t),$$

где ω — угловая частота (angular frequency), α — линейный коэффициент демпфирования (linear damping coefficient). Правая часть $F(t)$ учитывает внешнее воздействие (forcing function). Точка обознает производную по времени. При $\alpha > 0$ решение является устойчивым, а при $\alpha < 0$ — неустойчивым.

Приведенное уравнение является линейным. Нелинейность возникает в результате зависимости коэффициента демпфирования и правой части от переменной состояния $\alpha(p)$ и $F(p,t)$.

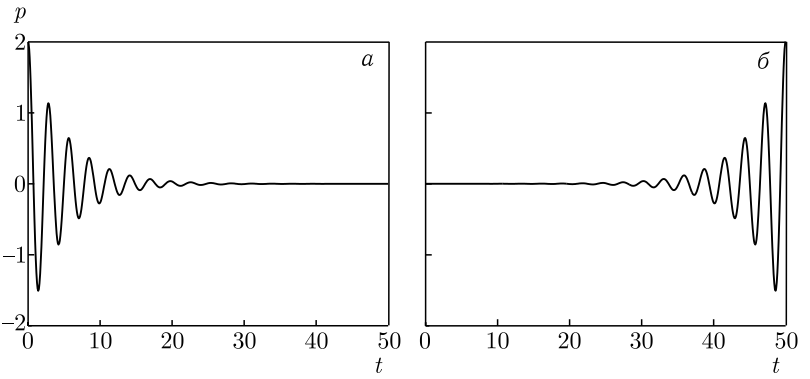


Рис. 4.31. Поведение решения волнового уравнения в случае линейно неустойчивого (*а*) и линейно устойчивого (*б*) решений

При $\alpha \ll \omega$ и нулевой правой части решение линейного однородного уравнения записывается в виде

$$p = p_0 \exp\left(i\omega t - \alpha t\right).$$

Поведение решения показывает рис. 4.31. Фрагменты *а* и *б* соответствуют линейно неустойчивому (linearly unstable) и линейно устойчивому (linearly stable) решениям. Случай *б* соответствует ненулевой правой части, описывающей малые внешние гармонические колебания, амплитуда колебаний является ограниченной. Другие возможные решения воспроизводят линейно неустойчивые (harmonically forced linearly unstable, non-linearly stable) и линейно устойчивые решения (harmonically forced linearly stable), выходящие на режим гармонических осцилляций. Такие случаи имеют место в реальных конструкциях РДТТ, когда колебания выходят на предельную амплитуду. Роль внешних вынужденных колебаний играют крупномасштабные вихревые структуры (vortex shedding effect).

4.8.4. Акустический баланс. При отсутствии внешних воздействий колебания описываются неоднородным уравнением Гельмгольца (Helmoltz equation). Граничные условия выводятся из линеаризованных уравнений движения. Неоднородности возникают вследствие среднего течения и присутствия частиц. Решение неоднородного уравнения получается как линейное возмущение соответствующего решения однородного уравнения.

Метод акустического баланса (acoustic balance method) предложен в работе [224] и применен в работе [168]. Используется разложение переменной F на среднюю $\langle F \rangle$ и пульсационную F' компоненты

$$F = \langle F \rangle + F' \quad \text{при } \varepsilon = \frac{|F'|}{|\langle F \rangle|} \ll 1,$$

где ε — параметр возмущения (perturbation parameter). Другим параметром разложения является число Маха. Полагая $\mathrm{M} \ll 1$, считается, что среднее течение является несжимаемым. Связь порядков величин двух параметров дается соотношением

$$\lim_{\varepsilon, \mathrm{M} \to 0} \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}} = 0.$$

Применение такого подхода приводит к решению ряда задач, указанных в табл. 4.2.

Таблица 4.2. Предельные случаи

ε	M	Задача
0	M	Стационарное несжимаемое течение
ε	0	Акустическая задача без среднего течения
ε	M	Линейная сопряженная задача

Члены наименьшего порядка малости имеют порядок $\varepsilon\mathrm{M}$, что делает возможным описание только малых колебаний, $F' \propto \exp(-\alpha t)$. Линейный подход позволяет представить общий коэффициент демпфирования в виде суммы отдельных составляющих

$$\alpha = \sum_i \alpha_i.$$

Продукты сгорания представляют собой смесь газа и дисперсной фазы, распределенная плотность которой $\rho_\mathrm{p} = n_\mathrm{p} m_\mathrm{p}$, где n_p — число частиц в единице объема, m_p — масса частицы. Уравнения сохранения записываются в предположении, что несущая фаза представляет собой невязкую жидкость, а частицы являются инертными.

Основные уравнения имеют вид:

— уравнение неразрывности для газа

$$\frac{\partial \rho_\mathrm{g}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_\mathrm{g} u_i\right) = 0; \tag{4.70}$$

— уравнение неразрывности для частиц

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{p}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_{\mathrm{p}} u_{\mathrm{p}i}\right) = 0; \tag{4.71}$$

— уравнения изменения количества движения для газа

$$\rho_{\mathrm{g}} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_{\mathrm{g}} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = F_{\mathrm{p}i}; \tag{4.72}$$

— уравнения изменения количества движения для частиц

$$\rho_{\mathrm{p}} \frac{\partial u_{\mathrm{p}i}}{\partial t} + \rho_{\mathrm{p}} u_{\mathrm{p}j} \frac{\partial u_{\mathrm{p}i}}{\partial x_j} = -F_{\mathrm{p}i}; \tag{4.73}$$

— уравнения изменения температуры для газа

$$\rho_{\mathrm{g}} c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_{\mathrm{g}} c_v u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = Q_{\mathrm{p}}; \tag{4.74}$$

— уравнения изменения температуры для частиц

$$\rho_{\mathrm{p}} c \frac{\partial T_{\mathrm{p}}}{\partial t} + \rho_{\mathrm{p}} c u_{\mathrm{p}j} \frac{\partial T_{\mathrm{p}}}{\partial x_j} = -Q_{\mathrm{p}}. \tag{4.75}$$

Источниковые члены F_{p} и Q_{p} учитывают обмен импульсом и теплообмен между газом и частицами.

Для упрощения задачи считается, что в стационарном движении фазы находятся в равновесии:

$$u_{\mathrm{p}i} = u_i + \delta u_{\mathrm{p}i}, \quad T_{\mathrm{p}} = T + \delta T_{\mathrm{p}}.$$

Вариации параметров имеют ненулевое среднее значение. Введенные допущения об изменении скорости и температуры частиц вместе с уравнениями (4.73) и (4.75) приводят к следующим соотношениям

$$\delta F_{\mathrm{p}i} = -\rho_{\mathrm{p}} \left(\frac{\partial \delta u_{\mathrm{p}i}}{\partial t} + \delta u_{\mathrm{p}i} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_i \frac{\partial \delta u_{\mathrm{p}j}}{\partial x_j} \right), \tag{4.76}$$

$$\delta Q_{\mathrm{p}} = -\rho_{\mathrm{p}} c \left(\frac{\partial \delta T_{\mathrm{p}}}{\partial t} + \delta u_{\mathrm{p}j} \frac{\partial T}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \delta T_{\mathrm{p}}}{\partial x_j} \right). \tag{4.77}$$

Решение задачи зависит от массовой концентрации дисперсной фазы $\varkappa = \rho_{\mathrm{p}}/\rho_{\mathrm{g}}$. Плотность, теплоемкость, газовая постоянная и отношение теплоемкостей смеси газа и частиц находятся из соотношений

$$\rho^* = (1+\varkappa)\rho_{\mathrm{g}}, \quad c_v^* = \frac{c_v + \varkappa c}{1+\varkappa},$$
$$R^* = \frac{R_{\mathrm{g}}}{1+\varkappa}, \quad \gamma^* = 1 + \frac{R*}{c_v^*} = \frac{\gamma(1+\varkappa c/c_p)}{1+\varkappa c/c_v}.$$

Уравнение состояния имеет вид

$$p^* = p = \rho^* R^* T = \rho R T.$$

Скорость звука в смеси находится из соотношения

$$a^* = \left[\frac{1+\varkappa c/c_p}{(1+\varkappa)(1+\varkappa c/c_v)}\right]^{1/2} a_{\mathrm{g}}.$$

Уравнения (4.72) и (4.74) для смеси примут вид

$$\rho^* \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho^* u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta F_{\mathrm{p}i}, \tag{4.78}$$

$$\rho^* c_v^* \frac{\partial T}{\partial t} + \rho^* c_v^* u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \delta Q_{\mathrm{p}}. \tag{4.79}$$

С учетом уравнения состояния уравнение (4.79) примет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \left(\frac{R^*}{c_v^*} + 1\right) p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{R^*}{c_v^*} \delta Q_{\mathrm{p}}. \tag{4.80}$$

Используя допущение о стационарности течения и инертности частиц, из уравнения неразрывности (4.71) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varkappa \rho_{\mathrm{g}} u_i\right) = 0.$$

Используя уравнение (4.70), получим

$$u_i \frac{\partial \varkappa}{\partial x_i} = 0.$$

Полученное соотношение показывает, что массовая концентрация частиц сохраняется вдоль линии тока.

Следующий шаг состоит в линеаризации уравнений (4.78) и (4.80) по параметрам ε и M. Для стационарного течения имеем

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0 + O(\mathrm{M}^2),$$

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} = 0 + O(\mathrm{M}^2).$$

Уравнения для величин первого порядка малости записываются в виде

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \gamma \langle p \rangle \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} = \frac{R}{c_v} \delta Q_{\mathrm{p}}', \tag{4.81}$$

$$\langle \rho \rangle \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \delta F_{\mathrm{p}i} - \langle \rho \rangle \left(\langle u_j \rangle \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}\right). \tag{4.82}$$

Вычисляя производную по времени от уравнения (4.81), объединяя полученное соотношение с дивергенцией уравнения (4.82) и полагая, что движение подчиняется гармоническому закону $F' = \widetilde{F} \exp(i\omega t)$, полу-

чим неоднородное уравнение Гельмгольца для давления. Это уравнение используется внутри расчетной области, в которой течение считается несжимаемым. Граничные условия получаются в результате скалярного умножения уравнения (4.82) на вектор единичной внешней нормали n_i к границе канала

$$\frac{\partial^2 \widetilde{p}}{\partial x_i\, \partial x_i} \Big|_k^2 \widetilde{p} = \widetilde{h}, \tag{4.83}$$

$$n_i \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i} = -\widetilde{f}. \tag{4.84}$$

Здесь $k = (\omega + i\alpha)/a$. Источниковые члены имеют вид

$$\widetilde{h} = i\frac{\omega \langle u_i \rangle}{a^2}\frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_i} - i(\gamma - 1)\frac{\omega}{a^2}\delta\widetilde{Q}_{\mathrm{p}} + \frac{\partial \delta \widetilde{F}_{\mathrm{p}i}}{\partial x_i} - \\ - \langle \rho \rangle \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\langle u_j \rangle \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \widetilde{u}_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right), \tag{4.85}$$

$$\widetilde{f} = i\omega \langle \rho \rangle n_i \widetilde{u}_i - n_i \delta F_{\mathrm{p}i} - \langle \rho \rangle n_i \left(\langle u_j \rangle \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \widetilde{u}_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right). \tag{4.86}$$

Для невозмущенного случая (твердая граница, нет среднего течения и частиц) имеем

$$\frac{\partial^2 \widetilde{p}_N}{\partial x_i\, \partial x_i} + k_N^2 \widetilde{p}_N = 0, \tag{4.87}$$

$$n_i \frac{\partial \widetilde{p}_N}{\partial x_i} = 0. \tag{4.88}$$

Объединяя уравнения (4.83) и (4.88) и применяя осреднение по объему расчетной области Ω, после некоторых преобразований можно записать соотношение для возмущенного волнового числа

$$(k^2 - k_N^2)E_N^2 = -ik_N \int\limits_{\partial\Omega} (A_n + \mathrm{M}_n)\widetilde{p}_N^2 dS - \int\limits_{\Omega} \delta \widetilde{F}_{\mathrm{p}i} \frac{\partial \widetilde{p}_N}{\partial x_i} dV - \\ - i(\gamma - 1)\frac{k_N}{a}\int\limits_{\Omega} \delta \widetilde{Q}_{\mathrm{p}} \widetilde{p}_N dV. \tag{4.89}$$

Здесь

$$E_N^2 = \int\limits_{\Omega} \widetilde{p}_N^2 dV, \quad A_n = \langle \rho \rangle\, a \frac{\widetilde{u}_i n_i'}{\widetilde{p}}, \quad \mathrm{M}_n = \frac{\langle u_i \rangle\, n_i'}{a}.$$

Под n_i' понимается единичный вектор внутренней нормали. Для вывода уравнения (4.89) предполагается, что скорость $\widetilde{u}_i$ пропорциональна

производной $\partial\widetilde{p}_n/\partial x_i$ (поле нестационарной скорости является невращательным). Данное допущение ограничивает применение метода акустического баланса на практике, поскольку поле скорости является вращательным вследствие вдува с поверхности горения.

Уравнение (4.89) представляется в виде суммы действительной и мнимой составляющих. Уравнение для сдвига частоты и коэффициент демпфирования имеют вид (считается, что $\alpha^2 \ll \omega^2$)

$$\omega - \omega_N = \frac{a}{2E_N^2}\int\limits_{\partial\Omega} \mathrm{Im}(A_n)\widetilde{p}_N^2 dS - \frac{a}{2k_N E_N^2}\int\limits_{\Omega} \mathrm{Re}\left(\delta F_{\mathrm{p}i}\frac{\partial\widetilde{p}_N}{\partial x_i}\right) dV - \\ - (\gamma-1)\frac{1}{2E_N^2}\int\limits_{\Omega} \mathrm{Im}\left(\delta\widetilde{Q}_{\mathrm{p}}\widetilde{p}_N\right) dV, \quad (4.90)$$

$$\alpha = -\frac{a}{2E_N^2}\int\limits_{\partial\Omega} \left[\mathrm{Re}(A_n) + \mathsf{M}_n\right]\widetilde{p}_N^2 dS - \frac{a}{2k_N E_N^2}\int\limits_{\Omega} \mathrm{Im}\left(\delta F_{\mathrm{p}i}\frac{\partial\widetilde{p}_N}{\partial x_i}\right) dV - \\ - (\gamma-1)\frac{1}{2E_N^2}\int\limits_{\Omega} \mathrm{Re}\left(\delta\widetilde{Q}_{\mathrm{p}}\widetilde{p}_N\right) dV. \quad (4.91)$$

Вычисление интегралов в соотношениях (4.90) и (4.91) требует введения дополнительных упрощающих предположений.

4.8.5. Вычисление интегралов. Два последних интеграла по объему расчетной области в уравнениях (4.90) и (4.91) учитывают влияние дисперсной фазы.

Интеграл по поверхности расчетной области в соотношении (4.91) расщепляется на интегралы по поверхности горения, по поверхности инертных стенок и по поверхности сопла.

1. При интегрировании по поверхности горения M_n представляет собой число Маха M_w, построенное по скорости вдува, а A_n — проводимость топлива (propellant admittance). Вместо проводимости топлива обычно используется функция отклика R_{mp}, которая представляется в виде

$$R_{mp} = \frac{v_c'/\langle v_c\rangle}{p'/\langle p\rangle} = \frac{\rho'/\langle\rho\rangle}{p'/\langle p\rangle} + \frac{\langle p\rangle}{\mathsf{M}_w}\frac{u_i' n_i'}{p'}.$$

Тогда

$$R_{mp} = \frac{1}{\gamma\mathsf{M}_w}\left(\mathsf{M}_w + A_n\right).$$

Глобальная функция отклика определяется как $R_c = R_{mp} + R_{tp}$, где R_{tp} учитывает отклик температуры. В изэнтропических условиях

$$R_c = R_{mp} + \frac{T'/\langle T\rangle}{p'/\langle p\rangle} = R_{mp} + \frac{\gamma - 1}{\gamma}.$$

Предполагая, что скорость горения не зависит от точки на поверхности канала, коэффициент демпфирования, связанный с горением, представляется в виде

$$\alpha_c = -\gamma a \mathrm{M}_w \mathrm{Re}(R_{mp}) \frac{\int\limits_{S_w} \widetilde{p}_N^2 dS}{2\int\limits_{\Omega} \widetilde{p}_N^2 dV}. \tag{4.92}$$

2. Инертные поверхности дают нулевой вклад в демпфирование колебаний.
3. Из-за различной ориентации вектора нормали во входном сечении сопла вместо M_n и A_n используются величины $-\mathrm{M}_L$ и $-A_L$, где M_L — число Маха на входе в сопло, A_L — акустическая проводимость (acoustic admittance). Предполагая распределение параметров течения во входном сечении сопла однородным и расщепляя коэффициент демпфирования на два слагаемых, связанных с конвективным α_{nc} и радиационным α_{nr} переносом, получим

$$\alpha_{nc} = a\mathrm{M}_L \frac{\int\limits_{S_L} \widetilde{p}_N^2 dS}{2\int\limits_{\Omega} \widetilde{p}_N^2 dV}, \tag{4.93}$$

$$\alpha_{nr} = a\mathrm{Re}(A_L) \frac{\int\limits_{S_L} \widetilde{p}_N^2 dS}{2\int\limits_{\Omega} \widetilde{p}_N^2 dV}. \tag{4.94}$$

При известных свойствах топлива и конфигурации сопла решение акустической задачи сводится к нахождению основной акустической моды, интегрированию уравнений (4.87) и (4.88), а также расчету интегралов, входящих в формулы для α_c, α_{nc} и α_{nr}. Общий коэффициент демпфирования представляется в виде суммы

$$\alpha = \alpha_c + \alpha_{nc} + \alpha_{nr}.$$

Для цилиндрической камеры сгорания ($S_w = 2\pi RL$, $S_L = \pi R^2$, $\Omega = \pi R^2 L$), учитывая, что $\mathrm{M}_L = S_w \mathrm{M}_w / S_L$ и $\mathrm{M}_w = v_w/a$, для q-й моды продольных колебаний имеем

$$\widetilde{p}_N = \widetilde{p}_{N0} \cos(k_N x),$$

где $k_N = \pi q/L$.

Коэффициенты демпфирования в этом случае имеют вид

$$\alpha_c = -\gamma \frac{v_w}{R} \mathrm{Re}(R_{mp}),$$

$$\alpha_{nc} = \frac{a\mathrm{M}_L}{L} = \frac{2v_w}{R},$$

$$\alpha_{nr} = \frac{a\mathrm{Re}(A_L)}{L}.$$

Для оценки эффективности демпфирования коэффициент демпфирования сравнивается с частотой $f_q = qa/(2L)$, что дает

$$\frac{\alpha_c}{f_q} = -\gamma \frac{2}{q} \frac{L}{R} \mathrm{M}_w \mathrm{Re}(R_{mp}),$$

$$\frac{\alpha_{nc}}{f_q} = \frac{2}{q} \mathrm{M}_L = \frac{2}{q} \frac{2L}{R} \mathrm{M}_w,$$

$$\frac{\alpha_{nr}}{f_q} = \frac{2}{q} \mathrm{Re}(A_L).$$

Для короткого сопла вещественная часть проводимости сопла A_L заменяется величиной, соответствующей квазистационарному анализу:

$$\mathrm{Re}(A_L) = \frac{\gamma - 1}{2} \mathrm{M}_L.$$

При этом

$$\frac{PA_c}{C^*} = (\rho U A)_L .$$

Следовательно

$$\frac{p'}{\langle P \rangle} - \frac{1}{2} \frac{T'}{\langle T \rangle} = \frac{\rho'}{\langle \rho \rangle} + \frac{u'}{\langle U \rangle}.$$

При этом

$$\frac{T'}{\langle T \rangle} = \frac{p'}{\langle P \rangle} - \frac{\rho'}{\langle \rho \rangle}, \quad \frac{\rho'}{\langle \rho \rangle} = \frac{1}{\gamma} \frac{p'}{\langle P \rangle}, \quad \langle P \rangle = \frac{\langle \rho \rangle \langle a \rangle^2}{\gamma}.$$

Квазистационарному анализу соответствует параметр

$$A_L = \langle \rho \rangle \langle a \rangle \frac{u'}{p'} = \frac{\gamma - 1}{2} \mathrm{M}_L.$$

Полученные соотношения позволяют оценить сравнительный порядок членов в уравнениях (4.93) и (4.94). Полагая $\gamma = 1{,}2$, получим, что радиационный член дает вклад порядка 10 % от конвективного

слагаемого. Поскольку $\mathrm{Re}(A_L)$ является достаточно малой величиной, то входное сечение сопла ведет себя наподобие твердой стенки. Тогда

$$\frac{\alpha}{f_q} = \frac{2}{q}\frac{L}{R}\mathrm{M}_w\left[-\gamma\mathrm{Re}(R_{mp}) + 2 + \frac{\gamma-1}{2}\right]. \tag{4.95}$$

Из соотношения (4.95) следует, что колебания являются устойчивыми до тех пор, пока $\mathrm{Re}(R_{mp}) > (\gamma + 3/2\gamma)$, что дает критическое значение 1,75. Учет поправки на разворот потока (flow turning correction) приводит к несколько большей верхней границе.

В общем случае интегралы вычисляются численно. Из соотношений (4.92)–(4.94) следует, что положение поверхности горения и входного сечения сопла оказывают влияние на расчет основной акустической моды и определяет общий вклад в акустический баланс.

4.8.6. Разворот потока. Для учета трехмерных эффектов и их вклада в акустический баланс используется поправка на разворот потока (flow turning). Добавочное слагаемое появляется в виде интеграла по поверхности горения [173]

$$\alpha_{ft} = \frac{a}{2k_N^2E_N^2}\int\limits_{S_w}\mathrm{M}_w\left(\frac{d\widetilde{p}_N}{dx}\right)^2 dS. \tag{4.96}$$

Для вывода соотношения (4.96) используются условия прилипания на поверхности горения и учитывается вклад вязких эффектов в акустическом пограничном слое. В случае сильного вдува вязкие эффекты играют второстепенную роль (образуется зона оттеснения), и слагаемое, учитывающее вдув, представляется в виде [345]

$$\alpha_{bl} = \frac{a}{2E_N^2}\int\limits_{S_w}\mathrm{M}_w\left(\widetilde{p}_N\right)^2 dS. \tag{4.97}$$

В случае цилиндрической камеры сгорания соотношения (4.96) и (4.97) дают одинаковый результат. Решение нестационарных уравнений Навье–Стокса показывает, что нестационарное поле скорости является вращательным, приводя к завышенной оценке толщины акустического пограничного слоя и неточному представлению поправок, связанных с разворотом потока [348]. Универсальная математическая формулировка, позволяющая получить корректное представление члена, связанного с разворотом потока, предложена в работе [264].

Для цилиндрической камеры сгорания

$$\frac{\alpha_{ft}}{f_q} = \frac{\alpha_{bl}}{f_q} = \frac{2}{q}\frac{L}{R}\mathrm{M}_w,$$

что приводит к соотношению

$$\frac{\alpha}{f_q} = \frac{2}{q}\frac{L}{R}\mathrm{M}_w\left[-\gamma\mathrm{Re}(R_{mp}) + 3 + \frac{\gamma-1}{2}\right]. \tag{4.98}$$

Соотношение (4.98) показывает, что неустойчивость имеет место при $\mathrm{Re}(R_{mp}) > (\gamma+5)/2\gamma$, что дает критическое значение 2.58.

4.8.7. Вклад дисперсной фазы. Продукты сгорания содержат частицы алюминия и их оксида. Частицы конденсированной фазы оказывают дополнительное демпфирующее влияние на акустические колебания.

Оценка влияния дисперсной фазы проводится на основе соотношений (4.90) и (4.91) с использованием упрощенных представлений для источниковых членов, которые описывают межфазный обмен импульсом и энергией. Число Рейнольдса в относительном движении частицы и газа $\mathrm{Re}_\mathrm{p} = \rho_\mathrm{g} d_\mathrm{p}\left|\delta\widetilde{\boldsymbol{u}}_\mathrm{p}\right|/\mu$. считается достаточно малым, что позволяет использовать закон Стокса $C_D = 24/\mathrm{Re}_\mathrm{p}$. Коэффициент теплоотдачи равняется $h = 2\lambda/d_\mathrm{p}$, что при малых числах Рейнольдса дает $\mathrm{Nu} = 2$. Соотношения для источниковых членов принимают вид

$$\delta\boldsymbol{F}_\mathrm{p} = 3\pi\mu d_\mathrm{p}\delta\boldsymbol{u}_\mathrm{p} n_\mathrm{p},$$

$$\delta Q_\mathrm{p} = 2\pi\lambda d_\mathrm{p}\delta T_\mathrm{p} n_\mathrm{p}.$$

Слагаемые первого порядка в решениях уравнений (4.76) и (4.77) имеют вид

$$\left|\delta\boldsymbol{u}_\mathrm{p}\right| = \left|\delta\boldsymbol{u}_{p0}\right|\exp\left(-t/\tau_v\right),$$

$$\left|\delta T_\mathrm{p}\right| = \left|\delta T_{p0}\right|\exp\left(-t/\tau_t\right).$$

Здесь

$$\tau_v = \frac{\rho_\mathrm{p} d_\mathrm{p}^2}{18\mu}, \quad \tau_t = \frac{2\mathrm{Pr}c}{2c_\mathrm{p}^m}\tau_v.$$

Выражения для $\delta\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$ и δQ_p как функций пульсаций скорости и температуры примут вид

$$\delta F_{\mathrm{p}i} = \varkappa\frac{1-i\omega\tau_v}{1+(\omega\tau_v)^2}\frac{\partial\widetilde{p}_N}{\partial x_i},$$

$$\delta Q_\mathrm{p} = -\varkappa\omega\frac{c}{c_p}\frac{i+\omega\tau_t}{1+(\omega\tau_t)^2}\widetilde{p}_N.$$

Подставляя приведенные соотношения в уравнения (4.90) и (4.91) с учетом малой концентрации дисперсной фазы и, считая отношения

c/c_p и c/c_v близкими к единице, можно получить соотношение для коэффициента демпфирования, обусловленного наличием частиц:

$$\alpha_{\text{p}} = \varkappa \frac{\omega}{2} \left[\frac{\omega\tau_v}{1+(\omega\tau_v)^2} \frac{\int\limits_{\Omega} \left(d\widetilde{p}_N/dx\right)^2 dV}{k_N^2 \int\limits_{\Omega} \widetilde{p}_N^2 dV} + (\gamma-1)\frac{c}{c_p}\frac{\omega\tau_t}{1+(\omega\tau_t)^2} \right]. \quad (4.99)$$

В случае цилиндрической камеры сгорания соотношение (4.99) принимает вид

$$\alpha_{\text{p}} = \varkappa_{\text{p}} \frac{\omega}{2} \left[\frac{\omega\tau_v}{1+(\omega\tau_v)^2} + (\gamma-1)\frac{c}{c_{\text{p}}^m}\frac{\omega\tau_\vartheta}{1+(\omega\tau_\vartheta)^2} \right],$$

где $\varkappa_{\text{p}} = C_m/(1-C_m)$ — массовая концентрация частиц (particle to gas mass ratio), C_m — концентрация частиц в топливе (propellant particle loading), τ_v и τ_t — времена релаксации. Времена релаксации находятся из соотношений

$$\tau_v = \frac{\rho_{\text{p}} d_{\text{p}}^2}{18\mu}, \quad \tau_t = \frac{3}{2}\text{Pr}\frac{c_p}{c_{\text{p}}^m}\tau_v.$$

Сравнение результатов численного моделирования с теоретическим решением приводится на рис. 4.32 для плоской акустической волны, распространяющейся в канале, заполненном смесью газа с инертными частицами. Волновое число представляется в виде

$$k = \exp[i(kx - \omega t)].$$

Вещественная и мнимая части волнового числа находятся из соотношений

$$\alpha = \frac{1}{2}k^{(i)}, \quad \beta = (k^{(r)})^2 - \left(\frac{\omega}{a_0}\right)^2.$$

Акустическое число Стокса имеет вид

$$\omega\tau_v = \frac{\omega\rho_{\text{p}} d_{\text{p}}^2}{18\mu}.$$

На рисунке $\alpha^* = (a/\omega)\alpha$ и $\beta^* = (a/\omega)^2\beta$. Сплошные линии на рис. 4.32 соответствуют теоретическому решению, а значки • — данным численного моделирования.

Для отношения коэффициента демпфирования к частоте колебаний имеется соотношение

$$\frac{\alpha_{\text{p}}}{f_q} = \varkappa\pi \left[\frac{\omega\tau_v}{1+(\omega\tau_v)^2} + (\gamma-1)\frac{c}{c_p}\frac{\omega\tau_t}{1+(\omega\tau_t)^2} \right].$$

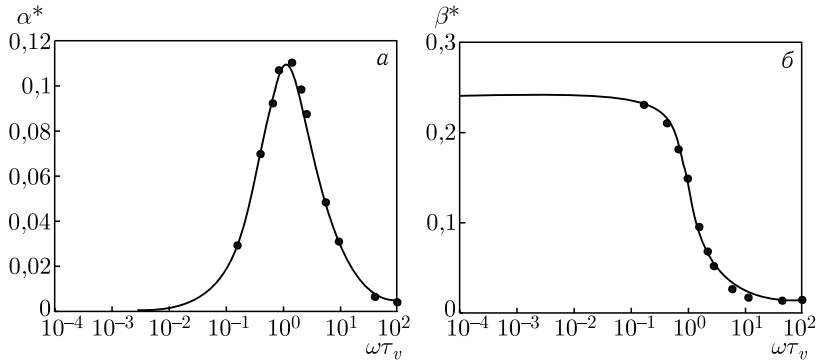


Рис. 4.32. Вещественная (*а*) и мнимая (*б*) части волнового числа в зависимости от акустического числа Стокса

Пренебрегая межфазным теплообменом, получим, что максимальный демпфирующий эффект дисперсной фазы имеет место при $\omega\tau_v = 1$, что приводит к следующим соотношениям:

$$\alpha_{\text{p}}^* = \varkappa\frac{9\mu}{2\rho_{\text{p}}d_{\text{p}}^2}, \quad f_{\text{p}}^* = \frac{9\mu}{\pi\rho_{\text{p}}d_{\text{p}}^2}, \quad d_{\text{p}}^* = \left(\frac{9\mu}{\pi\rho_{\text{p}}f}\right).$$

Приведенные соотношения могут использоваться для выбора подходящей концентрации и размера частиц дисперсной фазы для того, чтобы демпфировать потенциально неустойчивые моды колебаний. В работе [198] исследуется влияние стоксовых частиц на устойчивость течения в плоском канале с односторонним вдувом через нижнюю стенку.

Влияние излучения двухфазной среды на распространение акустических волн рассматривается в работе [280].

4.8.8. Устойчивость течения. Метод акустического баланса не позволяет в полной мере учесть все особенности течения. Одним из таких факторов является образование и взаимодействие вихрей [207] (vortex shedding), что является следствием взаимодействия неустойчивого сдвигового слоя и акустического поля в камере сгорания.

Простой подход состоит в оценке критического числа Струхаля [347]

$$\text{St}_D = \frac{fD}{U}, \quad \text{St}_l = \frac{fl}{U},$$

где U — средняя осевая скорость, D — диаметр, l — характерная длина, связанная с генерацией вихрей и их взаимодействием. Полагая

период генерации вихрей равным T, получим

$$mT = \frac{l}{kU} + \frac{l}{c} + \beta T,$$

где k — отношение скорости перемещения вихря к средней осевой скорости потока, β — коэффициент пропорциональности, характеризующий время задержки между генерацией вихрей и их взаимодействием с акустической волной, m — число вихрей на длине l. Постоянные k и β находятся из данных измерений.

Соотношение для числа Струхаля принимает вид [183, 184]

$$\mathrm{St}_l = \frac{m-\beta}{\mathrm{M}+1/k},$$

что дает

$$f = \frac{U}{l}\frac{m-\beta}{\mathrm{M}+1/k} \approx k\frac{U}{l}(m-\beta), \tag{4.100}$$

где M — число Маха, построенное по скорости U. Слагаемым порядка $1/k$ пренебрегается. На практике $m = 5 \div 12$, $k = 0{,}58$ и $\beta = 0{,}25$.

В работе [205] свойства вихрей (длина волны, скорость перемещения) находятся из анализа гидродинамической устойчивости профиля скорости в точке зарождения вихрей. На основе полученных данных выводится соотношение для коэффициента демпфирования α_{vs}, связанного с вихревым механизмом. Однако линейный подход, основанный на разности фаз между вихревым и волновым движением, приводит к нереалистичным значениям из-за сильного линейного роста вихрей, что делает подход полезным лишь в качественном отношении.

Рассмотрим учет вращательных эффектов в окончательных уравнениях [347, 350]. Предполагая, что поле нестационарной скорости не уравновешивается градиентом акустического давления, дополнительное слагаемое, возникающее в результате линеаризации конвективного члена $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$ в правой части уравнения (4.89), примет вид

$$\langle\rho\rangle\left\{\int\limits_{\Omega} k_N^2\left[\langle\boldsymbol{u}\rangle\cdot(\widetilde{\boldsymbol{u}}-\widetilde{\boldsymbol{u}}_N)\right]\widetilde{p}_N dV + \int\limits_{\Omega}(\langle\boldsymbol{\omega}\rangle\wedge\widetilde{\boldsymbol{u}})\cdot\nabla\widetilde{p}_N dV + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\Omega}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\wedge\langle\boldsymbol{u}\rangle)\cdot\nabla\widetilde{p}_N dV\right\}.$$

В общем случае оценить вклад интегралов достаточно сложно. Последний интеграл учитывает нестационарную завихренность и связывается с генерацией вихрей. В двумерном случае

$$-\widetilde{\omega}_z\langle v\rangle\frac{\partial\widetilde{p}_N}{\partial x}.$$

Объемный интеграл сводится к интегралу по поверхности, используя подход, предложенный в работе [205].

Попытки описания неустойчивости в рамках линейного подхода, основанного на декомпозиции поля скорости на среднюю и пульсационную составляющие и декомпозиции пульсационной составляющей на невращательную (compressible irrotational, acoustic) и вращательную (incompressible rotational, vortical) составляющие, не привели к получению полезных результатов. Трудности заключается в том, что механизм неустойчивости, связанный с генерацией вихрей, является нелинейным. Взаимодействие акустических волн и вихревых волн следует рассматривать с учетом нелинейных эффектов. Для этого требуется решение полных нестационарных трехмерных уравнений Навье–Стокса с граничными условиями на поверхности горения, учитывающими механизм горения твердого топлива.

4.9. Демпфирование акустических колебаний

Включение порошка алюминия (или другого металла) в состав твердых ракетных топлив преследует две цели — увеличения удельного импульса и подавление акустических колебания рабочего тела в камере сгорания (неустойчивость горения).

4.9.1. Акустические, вихревые и энтропийные волны. Во многих случаях исследование устойчивости и акустических процессов в камере сгорания проводится в рамках линейной теории, которая не учитывает взаимодействие и взаимосвязь между акустическим (irrotational) и вихревым (rotational) движениями [202], а также не позволяет рассчитать уровень осцилляций [347]. Влияние турбулентности при этом обычно не учитывается [104–106].

Осциллирующее поле течения в камере сгорания обычно разделяется на три компоненты [104–106, 202]: акустическую (acoustic), которая описывает невращательное сжимаемое течение (irrotational and compressible), вихревую (vortical), которая представляет собой вращательное несжимаемое движение (rotational and incompressible), и энтропийную (entropy), возникающую в результате нестационарного тепловыделения за счет химических реакций.

Взаимодействие акустических волн, распространяющихся в продольном направлении (вдоль оси камеры сгорания), с радиальным потоком, поступающим со стенок канала в результате горения топлива, приводит к генерации осциллирующего вихревого поля и переносу энергии от акустического поля к вихревому (flow-turning energy loss) [172, 229].

Взаимодействие между флуктуациями энтропии и неоднородным полем течения в канале заряда служит источником акустических колебаний в областях потока, где имеют место большие градиенты скорости [104–106].

Взаимодействие трех типов волн определяет устойчивость внутрикамерных процессов. Влияние турбулентности сказывается на характеристиках волн через демпфирование вихревого движения за счет генерации дополнительной вихревой вязкости. Взаимодействие турбулентных флуктуаций скорости с организованными вихревыми структурами является дополнительным механизмом генерации, переноса и диссипации энергии в камере сгорания.

4.9.2. Механизмы взаимодействия. Исследования течений с частицами в камерах сгорания связаны с моделированием зашлаковывания участков газодинамического тракта (slug accumulation) [231, 295], горения частиц алюминия (distributed combustion aluminium particle) [139, 292], переноса частиц крупномасштабными вихревыми структурами и их взаимодействия с осциллирующим полем течения [190, 349], а также неустойчивости горения [130, 175].

Индивидуальные частицы алюминия сгорают на расстоянии порядка $1 \div 2$ мм от поверхности топлива, но область горения агломератов занимает значительную часть камеры сгорания [189]. Неполнота сгорания частиц металла и образование частиц оксида приводят к двухфазным потерям удельного импульса и зашлаковыванию участков газодинамического тракта.

Взаимодействию частиц с осциллирующим полем течения около проницаемой стенки, где происходит генерация завихренности, уделяется сравнительное небольшое внимание.

Выделяется три механизма взаимодействия частиц алюминия и его оксида с осцилляциями параметров рабочего тела в камере сгорания, оказывающими влияние на баланс акустической энергии: взаимодействие частиц-агломератов с колебаниями параметров потока на поверхности горения (механизм 1), распределенное горение частиц-агломератов в канала заряда (механизм 2), движение частиц оксида алюминия в канале заряда и рассеивание акустической энергии за счет межфазного обмена импульсом и теплом (механизм 3). Механизмы 1 и 3 приводят к демпфированию акустических колебаний (damping mechanism), в то время как механизм 2 — к их усилению (driving mechanism) [189]. Эффективность подавления или усиления колебаний зависит от частоты колебаний, размера частиц и отношения времени горения частиц ко времени их пребывания в канале заряда (для механизма 2).

При высоких частотах частицы обычно оказывают демпфирующее влияние на акустические колебания [189], а ответственным за подавление колебаний является механизм 1. При частотах ниже 2000 Гц механизм 1 играет второстепенную роль по сравнению с механизмом 3, но также приводит к демпфированию колебаний. В некоторых топливах, устойчиво горящих при отсутствии металлических добавок, появляется склонность к неустойчивости горения при добавлении алюминия, что связывается с влиянием механизма 2, который приводит к усилению колебаний [126].

При взаимодействии частиц с акустическими колебаниями важную роль играет отношение характерных времен динамической и тепловой релаксации частицы (particle relaxation time) к характерному времени акустических колебаний (acoustic characteristic time), имеющему смысл числа Стокса [195, 321] (акустическое число Стокса). Максимальное демпфирование акустических колебаний имеет место, когда акустическое число Стокса имеет порядок 1. Мелкие частицы оказывают наиболее эффективное демпфирующее воздействие на акустические колебания, двигаясь практически в равновесии с газом и в максимальной степени изменяя теплофизические характеристики смеси.

Помимо акустического числа Стокса, существенное влияние оказывает массовая концентрация частиц [321]. При увеличении концентрации частицы оказывают более эффективное демпфирующее воздействие.

В работе [130] для исследования двухфазного течения в камере сгорания и демпфирования акустических колебаний используется стохастический вариант дискретно-траекторного подхода [305] (Stochastic Separated Flow, SSF). Расчеты проводятся в осесимметричной постановке на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье–Стокса, замкнутых при помощи двухслойной модели турбулентности [335] (химические реакции не учитываются). На давление в выходном сечении канала накладываются периодические возмущения. Учитывается влияние акустического поля на движение частиц, турбулентная дисперсия частиц, а также их столкновения между собой, коагуляция и влияние на поле течения газа. Для описания влияния частиц на структуру турбулентности используется модель, предложенная в работе [274].

Полученные результаты показывают, что акустические колебания служат дополнительным механизмом генерации турбулентности (энергия передается от периодического движения к хаотическому), приводя к увеличению уровня турбулентности в канале заряда и более раннему переходу ламинарного режима течения в турбулентный. С другой стороны, увеличение вихревой вязкости приводит к подавлению вихревого движения в камере сгорания, вызванного акустическими волнами.

Учет столкновений в дисперсной фазе показывает, что они начинают играть существенную роль лишь в случае достаточно широкого разброса размеров частиц [189].

4.9.3. Влияние горения частиц. Присутствие горящих частиц металла осложнят картину течения в камере сгорания. Частицы отклоняются от средних траекторий за счет взаимодействия с осциллирующим полем течения и турбулентной дисперсии, столкновений между собой, дробления и коагуляции. Указанные факторы обычно исследуются по отдельности, не учитывая перекрестные эффекты [130].

Влияние массообмена между газовой и дисперсной фазами на распространение плоской акустической волны малой амплитуды в неподвижной двухфазной среде рассматривается в работе [191]. В одном варианте испарение капли контролируется теплопроводностью (капля испаряется в той же самой среде, в невозмущенном состоянии обе фазы находятся в тепловом равновесии), а в другом — процесс контролируется диффузией (капля испаряется в инертной среде, среда не находится в состоянии теплового равновесия). Температура газа выше температуры капли. В обоих случаях используется квазистационарный закон изменения размера капли с показателем степени $n = 2$. Число Стокса изменяется за счет изменения размера частицы.

В случае 1 массообмен между частицей и средой приводит как к демпфированию, так и усилению акустических колебаний. Критическим параметром модели является скрытая теплота испарения, влияние которой является наиболее значительным при низких акустических числах Стокса.

В случае 2 наблюдаются тенденции, схожие со случаем 1, но критическим параметром модели является отношение температуры капли к температуре газа в невозмущенном состоянии (параметр θ). При нахождении газокапельной смеси в насыщенном состоянии ($\theta = 1$) массообмен оказывает демпфирующее влияние. При $\theta = 1$ зависимость коэффициент затухания от акустического числа Стокса имеет два максимума — глобальный максимум при $\omega\tau_{\text{р}} = 1$ и локальный максимум при $\omega\tau_{\text{р}} = 0{,}01$. При уменьшении θ локальный максимум исчезает, и при низких числах Стокса и $\theta < 0{,}95$ коэффициент затухания акустических колебаний становится отрицательным. Положение локального минимума и его величина оказываются чувствительными ко многим параметрам модели (параметр θ, интенсивность массообмена, теплофизические свойства фаз).

Двухфазные течения с инертными и горящими частицами алюминия, а также влияние частиц на акустические колебания в камере сгорания рассматриваются в работе [189] (описываются результаты как численных расчетов на основе эйлерового и лагранжевого подходов,

так и результаты физического эксперимента). Для описания горения частицы используется квазистационарная модель с показателем степени $n = 2$.

Полученные результаты как для инертных, так и для горящих частиц алюминия показывают, что акустический пограничный слой вблизи поверхности горения и скорость вдува продуктов сгорания в канал оказывают слабое влияние на затухание (attenuation) и дисперсию (dispersion) акустических волн.

Исследования, проведенные для топлив различного состава (79 % AP и 21 % HTPB, частицы вводятся в продукты сгорания), показывают, что демпфирование колебаний частицами оказывается наиболее важным вблизи левого торца канала [189]. Рассматриваются течения с частицами оксида алюминия размером 5 мкм и массовой концентрацией 5 % и 10 %, а также частицами оксида циркония размером 70 мкм и массовой концентрацией 5 %. Частота колебаний составляет порядка 700 Гц. Крупные частицы размером 70 мкм переносятся вихревыми структурами, зарождающимися на поверхности горения топлива, в центральную часть канала, где их концентрация резко возрастает (preferential concentration mechanism). Эти частицы оказывают такое же демпфирующее воздействие, как и мелкие частицы размером 5 мкм.

Численные расчеты проводятся для частиц с начальным диаметром 30 мкм (конечный диаметр частиц 3 мкм, $\omega\tau_{\text{р}} = 0{,}001$) и частиц с начальным диаметром 125 мкм (конечный диаметр частиц 60 мкм, $\omega\tau_{\text{р}} = 0{,}504$). Осцилляции давления вблизи левого торца канала усиливаются мелкими частицами и подавляются крупными. В случае мелких частиц эффект усиления колебаний за счет горения частиц превалирует над демпфирующим эффектом за счет запаздывания частиц по скорости и температуре относительно газа. В случае крупных частиц имеет место противоположная тенденция. Несмотря на малое отношение времени горения частиц ко времени их нахождения в канале заряда, распределенное горение оказывает существенное влияние на акустические колебания в камере сгорания.

4.9.4. Теоретические решения. Для расчетов коэффициентов затухания (attenuation) и рассеивания (dispersion) акустических колебаний в зависимости от размера частиц и теплофизических свойств газовой и дисперсной фаз имеется ряд соотношений, предложенных в работе [195] и обобщенных в работах [320, 321] (линейный подход). Применимость точных решений к смеси газа с твердыми частицами (математические модели развиты для различных типов дисперсных сред), каплями и пузырьками подтверждается сравнением с данными физического эксперимента [377]. Решения, развитые в работах

[320, 321], служат для тестирования численных методов расчета двухфазных течений [190].

Коэффициент демпфирования из-за межфазного обмена импульсом вычисляется по формуле

$$\beta_v = \frac{3\pi n_{\text{p}} d_{\text{p}}}{c} \nu (1+Y) I_v, \tag{4.101}$$

где

$$I_v = 16Y^4 \left[16Y^4 + 72\delta Y^3 + 81\delta^2 \left(1 + 2Y + 2Y^2\right)\right]^{-1}.$$

Параметр δ представляет собой отношение плотностей газовой и дисперсной фаз ($\delta = \rho/\rho_{\text{p}}$). Параметр Y имеет вид

$$Y^2 = \frac{\omega d_{\text{p}}^2}{8\nu} = \frac{9}{4}\delta\omega\tau_v.$$

Время динамической релаксации частицы находится из соотношения

$$\tau_v = \frac{\rho_{\text{p}} d_{\text{p}}^2}{18\rho\nu}.$$

Коэффициент демпфирования из-за межфазного обмена теплом вычисляется по формуле

$$\beta_t = \frac{2\pi n_{\text{p}} d_{\text{p}}}{c} a(\gamma - 1)(1+Z) I_t, \tag{4.102}$$

где

$$I_t = 4Z^4 \left(4Z^4 + 12\delta\varepsilon Z^3 + 9\delta^2\varepsilon^2\right)^{-1}.$$

Параметр ε представляет собой отношение удельных теплоемкостей фаз ($\varepsilon = c_p/c_{\text{p}}^m$), а a — коэффициент температуропроводности ($a = \lambda/\rho c_p$). Параметр Z имеет вид

$$Z^2 = \frac{\omega d_{\text{p}}^2}{8a} = \frac{3}{2}\delta\varepsilon\omega\tau_t = \frac{9}{4}\delta\mathrm{Pr}\,\omega\tau_v.$$

Время тепловой релаксации частицы находится из соотношения

$$\tau_t = \frac{\rho_{\text{p}} c_{\text{p}}^m d_{\text{p}}^2}{12\rho c_p a}.$$

Параметры I_v и I_t зависят от частоты акустических колебаний, отношения плотностей газовой и дисперсной фаз, а также времен релаксации частицы.

Полный коэффициент демпфирования $\beta = \beta_v + \beta_t$ находится по формуле

$$\beta\lambda_a = \frac{2\pi}{\omega\tau_v} C_m \left[(1+Y)I_v + (1+Z)(\gamma-1)I_t/(1.5\mathrm{Pr})\right], \tag{4.103}$$

где λ_a — длина волны акустических колебаний, C_m — массовая концентрация частиц.

Коэффициент демпфирования пропорционален концентрации частиц. Частицы малого размера оказывают наибольшее демпфирующее воздействие при высоких частотах колебаний.

Рассматривая смесь газа с мелкими частицами как совершенный газ с эффективными теплофизическими свойствами (равновесное приближение), скорость звука находится из соотношения

$$\overline{c}^2 = \overline{\gamma}\overline{RT} = \frac{\overline{c}_p}{\overline{c}_v}\frac{p}{\overline{\rho}}. \tag{4.104}$$

Черта над переменной соответствует смеси газа и частиц. Эффективные параметры разреженной газодисперсной смеси представляются в виде суммы параметров, соответствующих чистому газу, и поправки, связанной с присутствием частиц (штрих), поэтому

$$\overline{c}^2 = \frac{c_v + c_v' + R}{c_v + c_v'}\frac{p}{\rho + \rho'}. \tag{4.105}$$

Поправки для плотности и удельной теплоемкости в первом приближении имеют вид

$$\rho' = \rho C_m(1 - I_v), \quad c_v' = c_{\text{p}}^m C_m(1 - I_t).$$

После подстановки в (4.104) и пренебрежения малыми членами получим соотношение для изменения скорости звука $\Delta c = c - \overline{c}$, обусловленного присутствием частиц:

$$\Delta c = \frac{1}{2} c\, C_m \left[\frac{c_{\text{p}}^m}{c_p}\frac{R}{c_p}(1 - I_t) + (1 - I_v)\right]. \tag{4.106}$$

Первое слагаемое в правой части соотношения (4.106) учитывает изменение скорости звука вследствие увеличения плотности и теплоемкости смеси, а второе слагаемое — дисперсионный эффект, связанный с вязким демпфированием.

При малой концентрации дисперсной фазы коэффициент демпфирования описывается соотношением [321]

$$\beta = -\frac{C_m \omega}{2}\frac{\omega\tau_v}{1 + (\omega\tau_v)^2}.$$

Максимум коэффициента демпфирования имеет место при $\omega\tau_v = 1$, что дает оптимальный размер частиц

$$d_{\text{p}}^* = \frac{18\mu}{\rho\omega}.$$

При этом $\beta_{\max} = -C_m\omega/4$.

Результаты, полученные в работе [179], показывают, что для частиц окиси алюминия при частоте колебаний 6000 Гц оптимальный размер частиц составляет 3,3 мкм, а коэффициент демпфирования $\beta = 108\ 1/c$. При уменьшении частоты колебаний до 500 Гц коэффициент демпфирования уменьшается до 1,6 1/с. Оптимальный размер частиц при этой частоте равняется $d_{\mathrm{p}}^* = 11$ мкм, а коэффициент демпфирования — $\beta^* = 9$ 1/с ($\beta = 18$ 1/с при частоте 6000 Гц).

Другой подход, основанный на модификации функции отклика (response function) в присутствии частиц алюминия, накапливающихся на поверхности топлива, развивается в работе [317]. Как показано в работе [286], этот эффект имеет значение при частотах ниже 2000 Гц и в обычных условиях играет второстепенную роль.

4.9.5. Построение математической модели. Рассмотрим течение в плоскопараллельном канале с двухсторонним симметричным вдувом (рис. 4.33). Параметры смеси газа и частиц, поступающей в канал, полагаются постоянными вдоль поверхности горения. Частицы инжектируются с массоподводящей поверхности канала в точках, равномерно расположенных по его длине.

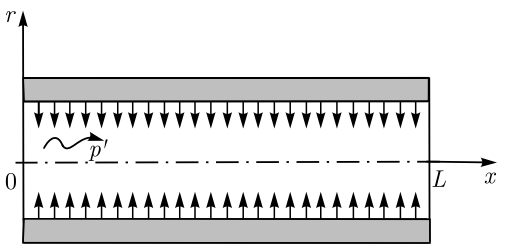


Рис. 4.33. Система координат

Пренебрегая химическими реакциями и объемом, занимаемым частицами, течение газа описывается системой уравнений, включающей в себя уравнение неразрывности, уравнение изменения количества движения и уравнение изменения энергии:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \tag{4.107}$$

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau - \sum_i \boldsymbol{F}_{\mathrm{p}i} n_{\mathrm{p}i}, \tag{4.108}$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot [(\rho e + p)\, \boldsymbol{v}] = -\nabla \cdot \boldsymbol{q} + \nabla \cdot (\tau \cdot \boldsymbol{v}) - \sum_i W_{\mathrm{p}i} n_{\mathrm{p}i} - \sum_i Q_{\mathrm{p}i} n_{\mathrm{p}i}. \tag{4.109}$$

Источниковые члены в уравнениях (4.108) и (4.109) учитывают межфазный обмен количеством движения, теплообмен между газом и частицами и работу, совершаемую частицами над газом. Под n_{pi} понимается концентрация частиц фракции i в единице объема. Суммирование производится по всем частицам фракции i. Столкновения, дробление и коагуляция частиц не учитываются.

Удельная полная энергия находится из соотношения

$$e = u + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v},$$

где u — удельная внутренняя энергия. Тензор вязких напряжений и вектор теплового потока связаны с полями скорости и температуры при помощи соотношений

$$\tau = \mu\left[\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^*\right], \quad \boldsymbol{q} = -\lambda\nabla T,$$

где μ — динамическая вязкость, λ — теплопроводность. Для расчета динамической вязкости в зависимости от температуры используется закон Сазерленда.

Для расчета характеристик турбулентности используется k–ε модель турбулентности. Считается, что нестационарность потока, обусловленная внешними возмущениями, оказывает слабое влияние на внешнюю область пограничного слоя. Вблизи стенки (во внутренней области пограничного слоя) учитывается влияние нестационарности потока на масштаб турбулентности [335].

Движение и теплообмен частицы описывается при помощи следующих уравнений:

$$\frac{d\boldsymbol{x}_{\text{p}}}{dt} = \boldsymbol{v}_{\text{p}}, \tag{4.110}$$

$$m_{\text{p}}\frac{d\boldsymbol{v}_{\text{p}}}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{p}}, \tag{4.111}$$

$$c_{\text{p}}^{m} m_{\text{p}}\frac{dT_{\text{p}}}{dt} = Q_{\text{p}}. \tag{4.112}$$

Здесь m_{p} — масса частицы, c_{p}^{m} — теплоемкость материала частицы.

Имеющиеся оценки показывают, что сила сопротивления (drag force) является основным фактором, оказывающим влияние на движение частицы [44]. Сила сопротивления вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{F}_{\text{p}} = \frac{\pi}{8}C_{\text{D}}\rho d_{\text{p}}^{2}\left|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{\text{p}}\right|\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{\text{p}}\right).$$

Коэффициент сопротивления вычисляется с учетом поправки к закону Стокса

$$C_{\mathrm{D}} = \frac{24}{\mathrm{Re}_{\mathrm{p}}} f_{\mathrm{D}}(\mathrm{Re}_{\mathrm{p}}),$$

где

$$\mathrm{Re}_{\mathrm{p}} = \frac{\rho \left|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}\right| d_{\mathrm{p}}}{\mu}.$$

Отношение силы сопротивления к силе присоединенной массы (virtual mass force) имеет порядок $f_m/f_p \sim \rho/\rho_{\mathrm{p}}$, а отношение силы сопротивления к силе Бассэ (Basset force) — порядок $f_B/f_p \sim (\rho/\rho_{\mathrm{p}})^{1/2}$. Для взвеси частиц алюминия ($\rho_{\mathrm{p}} = 2600$ кг/м^3) в воздухе ($\rho = 1.25$ кг/м^3) влиянием сил присоединенной массы и Бассэ пренебрегается по сравнению с силой сопротивления. Отношение силы Магнуса (Magnus force) и подъемной силы Сэффмана (lift force) к силе сопротивление имеет порядок $\left|\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}\right| d_{\mathrm{p}}^2/24\nu$ и $(d_{\mathrm{p}}^2 \nu \Delta u/\Delta y)^{1/2} C_L$, где $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{p}}$ — угловая скорость вращения частицы, $\Delta u/\Delta y$ — градиент скорости газа, C_L — коэффициент подъемной силы. В обычных условиях для частиц $d_p < 400$ мкм сила Магнуса не превосходит подъемной силы Сэффмана ($f_M < f_L$), которая в высокоградиентном потоке сравнима или превышает силу сопротивления ($f_L/f_p \sim 0 \div 10$). В условиях низкоградиентного течения влиянием подъемной силы пренебрегается.

Работа, которую частицы совершают над газом, находится из соотношения

$$W_{\mathrm{p}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{p}} \cdot \boldsymbol{v}_{\mathrm{p}}.$$

Конвективный тепловой поток между частицей и газом находится по формуле

$$Q_{\mathrm{p}} = \pi d_{\mathrm{p}} \mathrm{Nu}_{\mathrm{p}} \lambda \left(T - T_{\mathrm{p}}\right),$$

где Nu_{p} — число Нуссельта. Для расчета числа Нуссельта используются полуэмпирические соотношения, обработанные в виде зависимости числа Нуссельта от чисел Рейнольдса и Прандтля.

Взаимодействие частицы с полем турбулентности описывается на основе стохастической модели. Время взаимодействия частицы с турбулентным молем определяется максимумом между временем существования турбулентного моля и временем прохождения частицы через моль. Флуктуации скорости моделируются в рамках локально-изотропного приближения. Использование соотношений, учитывающих неизотропность масштабов турбулентности, оказывает слабое влияние на расчет средней скорости частицы [151].

4.9.6. Вычислительная процедура. Канал имеет длину 1,88 м и полуширину 0,1 м. Газодисперсная смесь, состоящая из воздуха ($\gamma = 1{,}4$, $\mathrm{Pr} = 0{,}71$) и частиц алюминия ($\rho_{\mathrm{p}} = 2296$ кг/м^3), вдувается в канал при давлении 10^5 Па и температуре 300 К. В расчетах используется равномерное распределение частиц на массоподводящей поверхности канала с размером частиц 10 мкм и 100 мкм.

После нахождения стационарного решения задачи для генерации акустических волн на давление во входном сечении канала накладываются периодические колебания с заданной амплитудой (порядка 1 % от среднего значения) и частотой. В выходном сечении канала задаются неотражающие граничные условия.

Скорость течения в канале заряда много меньше скорости звука, в связи с чем вычислительные алгоритмы, используемые для моделирования течений сжимаемого газа, сталкиваются с численной неустойчивостью, обусловленной несоизмеримостью собственных чисел якобиана. Для преодоления указанных трудностей используется блочный метод предобусловливания (preconditioning) и неявная двойная схема интегрирования по времени (implicit dual time-stepping). Использование неявной схемы позволяет выбирать шаг интегрирования по времени из физических соображений, а не из соображений устойчивости разностной схемы.

Для интегрирования уравнений (4.110)–(4.112), описывающих движение частицы, используется метод Рунге–Кутты с шагом по времени, обусловленным полем турбулентности в канале заряда (на практике шаг интегрирования оказывается примерно в 10 раз меньше времени релаксации).

Согласование полей течения газовой и дисперсной фаз проводится на основе итерационной процедуры, в которой источниковые члены, обусловленные межфазным взаимодействием, вычисляются на каждой итерации.

4.9.7. Результаты расчетов. Результаты численного моделирования относятся к стационарному и нестационарному (в присутствии внешних колебаний давления) полям течения в канале с проницаемыми стенками, а также демпфированию акустических колебаний в камере сгорания в зависимости от массовой концентрации конденсированной фазы.

Характеристики турбулентности. В нестационарном случае структура течения около стенки является сложной, показывая наличие акустического пограничного слоя, внутри которого имеют место флуктуации скорости, связанные с распространением нестационарных сдвиговых волн (волн завихренности) [104–106, 202]. Возмущения завихренности порождаются за счет вдува с поверхности вслед-

ствие условий прилипания на стенке, распространяются внутрь канала и демпфируются за счет вязких эффектов. В ядре потока имеет место одномерное распределение флуктуаций осевой скорости, которое достаточно хорошо описывается существующей линейной теорией. Влияние вязкости на распространение волн завихренности оказывается пропорциональным частоте осцилляций, поэтому толщина акустического пограничного слоя, определяемая как радиальное расстояние, на котором амплитуда сдвиговой волны становится равной 1 % от амплитуды акустической скорости, для первой моды практически в 2 раза больше, чем для второй моды [202]. Турбулентность потока приводит к более сильному демпфированию амплитуды колебаний осевой скорости за счет дополнительной генерации вихревой вязкости.

Вынужденные колебания давления оказывают существенное влияние на нестационарное поле течения, вызывая, в частности, флуктуации параметров течения с широкополосным спектром (acoustically induced turbulent motion) и приводя к дополнительной генерации турбулентности за счет переноса кинетической энергии от акустического поля к полю турбулентности [104, 105].

Распределения кинетической энергии турбулентности по радиальной координате, осредненные по времени, показаны на рис. 4.34 при $f = 943$ Гц и $\varepsilon = 0{,}02$ для различных сечений по осевой координате. Сплошные линии соответствуют результатам расчетов при наложении внешних гармонических колебаний, а пунктирные линии — стационарному полю течения. Внешние колебания приводят к дополнительной генерации турбулентности.

Другое влияние колебаний давления состоит в более раннем переходе ламинарного режима течения в турбулентный. Положение точки перехода зависит от частоты и амплитуды колебаний. Обмен энергией происходит более интенсивно при низких частотах и характеризуется безразмерным параметром $m(f\nu)^{1/2}/c$, где f — частота, c — скорость звука, m — постоянная.

Коэффициент демпфирования. Результаты расчетов (значки $\bullet$ и $\circ$) по пространственному коэффициенту демпфирования акустических колебаний (particle attenuation effect), показанные на рис. 4.35 в зависимости от массовой концентрации конденсированной фазы, достаточно хорошо согласуются с расчетами по теоретической зависимости [195] (сплошные линии), записанной в виде (4.103), в широком диапазоне изменения параметров задачи (частота колебаний, размер частицы, отношение плотностей газовой и дисперсной фаз).

Имеется оптимальный размер частиц (при $\omega\tau_v = 1$), вызывающий наибольшее демпфирование акустических колебаний. Для частиц малого размера ($I_v = I_t = 0$), которые полностью вовлекаются в волновое движение, относительная скорость и температура фаз становятся ма-

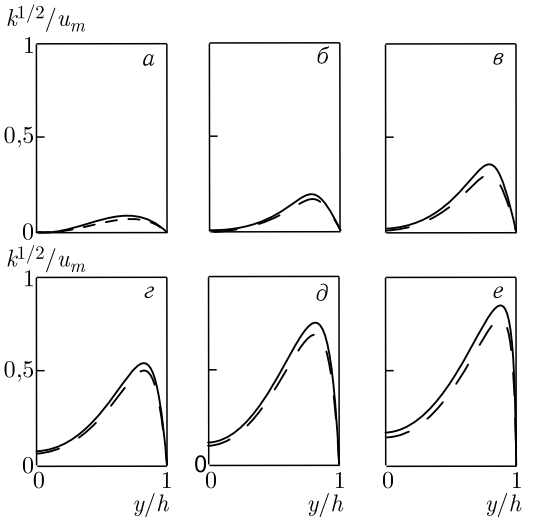


Рис. 4.34. Радиальные профили кинетической энергии турбулентности при $x/h = 5$ (*а*); 10 (*б*); 15 (*в*); 20 (*г*); 25 (*д*); 30 (*е*)

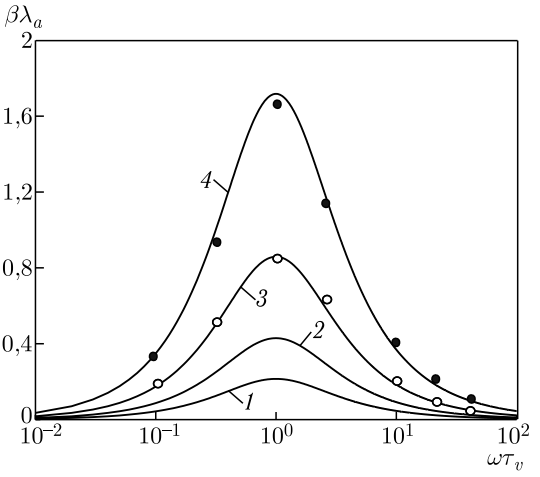


Рис. 4.35. Влияние частиц на коэффициент демпфирования при $C_m = 0{,}05$ (*1*); 0,1 (*2*); 0,2 (*3*, ○); 0,4 (*4*, ●)

лыми, а вязкая и тепловая диссипация играют пренебрежимо малую роль. Для крупных частиц ($I_v = I_t = 1$), которые не вовлекаются в волновое движение (замороженное течение), обмен импульсом и теплом с газовой фазой пренебрежимо мал, и воздействия частиц на акусти-

ческие колебания в канале не наблюдается. Частицы промежуточного размера приводят к диссипации энергии акустических колебаний.

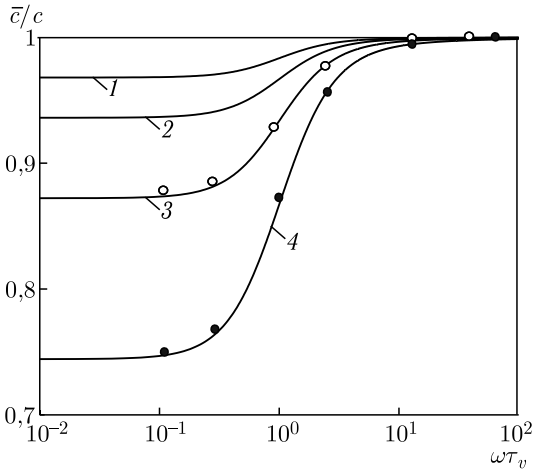


Рис. 4.36. Влияние частиц на скорость звука при $C_m = 0{,}05$ (*1*); 0,1 (*2*); 0,2 (*3*, ○); 0,4 (*4*, ●)

Влияние частиц на скорость звука в газодисперсной смеси показывает рис. 4.36 (particle dispersion effect). Распространение акустических волн в канале, заполненном газодисперсной смесью, приводит к серии процессов, в течение которых происходит обмен импульсом и теплом между газом и частицами. Мелкие частицы движутся равновесно с газом, и газодисперсная смесь описывается уравнениями движения совершенного газа с эффективными теплофизическими свойствами. Для смеси с крупными частицами, присутствие которых не оказывает влияние на течение газа, скорость звука соответствует значению в чистом газе.

Акустический импеданс двухфазной смеси $\overline{\rho c}$ (acoustic impedance) имеет приблизительно постоянное значение во всем диапазоне изменения акустического числа Стокса (параметр $\omega\tau_v$) и практически не зависит от массой концентрации примеси. При низких частотах или для мелких частиц ($\omega\tau_v \to 0$) эффективная плотность смеси стремится к своему предельному значению в равновесном течении $\overline{\rho} = \rho(1 + C_m)$. При высоких частотах или для крупных частиц ($\omega\tau_v \to \infty$) поправка к плотности становится пренебрежимо малой $\rho' = 0$, поэтому $\overline{\rho} = \rho$.

В целом, имеет место хорошее согласование результатов численного моделирования с теоретической зависимостью в широком диапазоне изменения акустических чисел Стокса и массовой концентрации

частиц. Небольшое рассогласование (порядка 4 %) наблюдается лишь при $C_m \sim 0{,}4$

Динамика частиц. Поведение частицы в акустическом поле определяется соотношением между временем τ_a, определяющим период акустической волны, и временем релаксации частицы τ_v. В данном случае $\tau_a = 0{,}5$ мс и $\tau_v = 0{,}1$ и 10 мс для мелких ($d_\text{р} = 10$ мкм) и крупных ($d_\text{р} = 100$ мкм) частиц. Мелкие частицы, имея сравнительно малое отношение времени релаксации к акустическому времени, следуют за флуктуациями акустической скорости. Крупные частицы не подвержены влиянию флуктуаций скорости.

Поведение частицы в турбулентном поле течения зависит от произведения среднеквадратической скорости и интегрального временного масштаба дисперсной фазы (оба этих параметра зависят от инерции частицы). Интегральный временной масштаб крупных частиц выше, чем для мелких частиц.

Влияние частиц на акустическое поле. Радиальные профили амплитуды флуктуаций осевой скорости в ламинарном течении показаны на рис. 4.37 в точке, расположенной примерно по середине канала ($x/L = 0{,}5$), при $f = 1885$ Гц и $\varepsilon = 0{,}02$. Течение является ламинарным. Массовая концентрация частиц полагается равной $C_m = 0{,}2$, а начальная скорость частиц — 0,1 м/с.

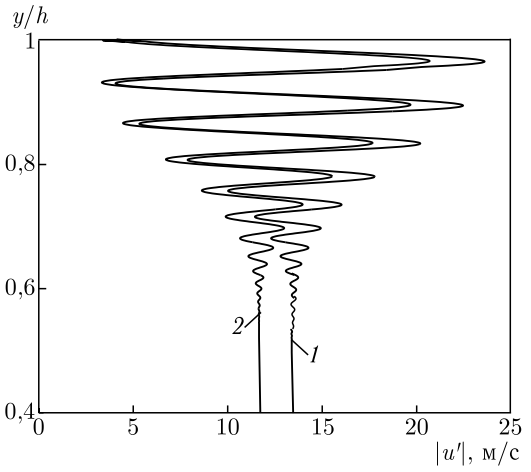


Рис. 4.37. Радиальные профили амплитуды флуктуаций осевой скорости при $d_\text{р} = 0$ (*1*); 10 мкм (*2*)

Выделяется две характерных зоны течения. В пристеночной зоне течения (при $r/R > 0{,}6$) имеют место существенные колебания акустической скорости и завихренности. В приосевой области (при $r/R < 0{,}6$)

волны завихренности затухают вследствие вязкой диссипации, и влияние акустических эффектов становится доминирующим. Присутствие частиц приводит к подавлению флуктуаций акустической скорости за счет обмена импульсом и энергией с газовой фазой. Общее влияние дисперсной фазы определяется массовой концентрацией, временами динамической и тепловой релаксации и частотой акустических колебаний. В то время как мелкие частицы оказывают существенное влияние на акустическое поле течения, быстро достигая равновесия с газовой фазой и изменяя ее плотность, влияние крупных частиц оказывается малым. Максимум амплитуды флуктуаций осевой скорости составляет $|u'|_{\max} = 13.2$ м/с при $d_{\text{р}} = 10$ мкм и $|u'|_{\max} = 15{,}5$ м/с при $d_{\text{р}} = 100$ мкм (это значение практически не отличается от соответствующего значения в чистом газе).

Распределения амплитуды флуктуаций осевой скорости по радиальной координате показано на рис. 4.38 при $x/L = 0{,}5$ ($f = 3770$ Гц и $\varepsilon = 0{,}02$), где течение является турбулентным. Линия *1* соответствует течению без частиц. Массовая концентрация частиц составляет $C_m = 0{,}2$. Крупные частицы оказывают пренебрежимо малое влияние на поле течения, в то время как мелкие частицы подавляют флуктуации скорости.

Влияние частиц на фазу флуктуаций осевой скорости сказывается в меньшей степени, чем на амплитудные характеристики.

Влияние частиц на вихревое поле. Поля скорости и температуры раскладываются на акустическую и вихревую компоненты. Влияние

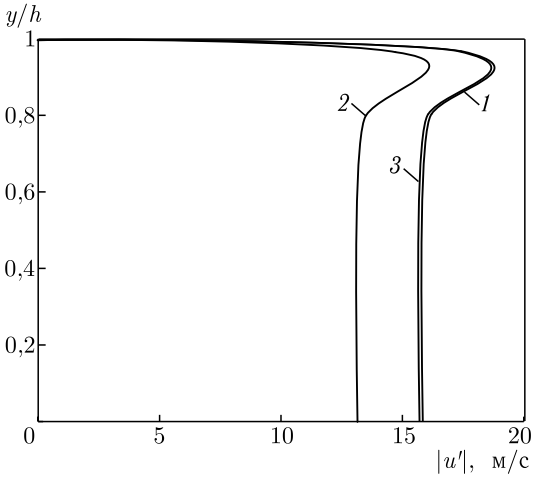


Рис. 4.38. Радиальные профили амплитуды флуктуаций осевой скорости при $d_{\text{р}} = 0$ (*1*); 10 (*2*); 100 мкм (*3*)

частиц на распределение завихренности показывает рис. 4.39 при $x/L = 0{,}5$ ($f = 943$ Гц и $\varepsilon = 0{,}02$). Линия *1* соответствует течению без частиц, а линии *2–4* — частицам с диаметрами 2 (линия *2*), 8 (линия *3*) и 22 (линия *4*) мкм. Массовая концентрация частиц составляет $C_m = 0{,}2$.

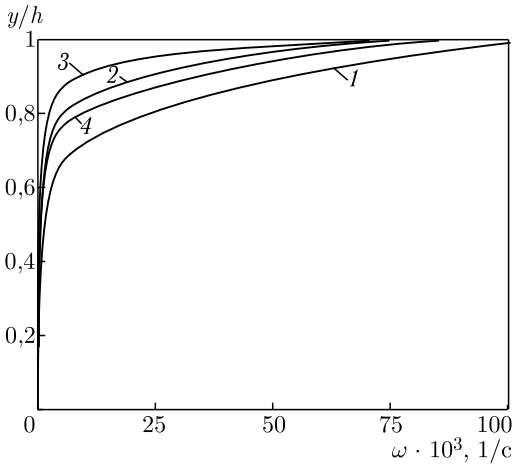


Рис. 4.39. Радиальные профили амплитуды завихренности при $\omega\tau_v = 0$ (*1*); 0,1 (*2*); 1 (*3*); 10 (*4*)

Максимальный эффект, связанный с влиянием частиц на распределение завихренности, достигается при размере частиц $d_p \sim 8$ мкм, что примерно соответствует $\omega\tau_v = 1$.

4.9.8. Столкновения между частицами. Распределение частиц алюминия подчиняется бимодальному логнормальному распределению [296, 303] (log-normal distribution), левую моду которого составляют частицы высокодисперсного оксида, а правую моду — частицы сгоревшего и несгоревшего алюминия.

Плотность функции вероятности бимодального логнормального распределения имеет вид [303]

$$f_{\text{p}}(d_{\text{p}}) = \frac{\lg e}{(2\pi)^{1/2} d_{\text{p}}} \left[\frac{1 - f_0}{\sigma_1} \exp\left(-\frac{z_1^2}{2}\right) + \frac{f_0}{\sigma_2} \exp\left(-\frac{z_2^2}{2}\right) \right].$$

Функция распределения частиц по размерам (cumulative mass distribution) описывается соотношением

$$F_{\text{p}}(d_{\text{p}}) = \frac{1}{2} \left\{ \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z_1}{2^{1/2}}\right) \right] (1 - f_0) + \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{z_2}{2^{1/2}}\right) \right] f_0 \right\},$$

где

$$z_1 = \frac{1}{\sigma_1}\lg\left(\frac{d_p}{d_{m1}}\right), \quad z_2 = \frac{1}{\sigma_2}\lg\left(\frac{d_p}{d_{m2}}\right).$$

Под d_{m1} и d_{m2} понимаются среднемассовые диаметры частиц левой и правой мод, а под σ_1 и σ_2 — соответствующие им стандартные отклонения. Параметр f_0 имеет смысл относительной массовой концентрации частиц правой моды (крупные частицы) и в существенной степени определяется химической композицией топлива [303].

Начальный диаметр частиц на массоподводящей поверхности канала выбирается случайным образом в соответствии с заданной функцией распределения частиц по размерам [303].

Функции распределения логнормального распределения показаны на рис. 4.40 и рис. 4.41 при $f_0 = 0{,}8$ (80 % от общей массы дисперсной фазы составляют частицы правой моды). Среднемассовые диаметры частиц левой и правой моды составляют 1,5 и 150 мкм, а соответствующие им стандартные отклонения — 0,4 и 0,2 [292]. При этом следует отметить, что параметры распределения по размерам левой моды практически не зависят от давления и типа топлива, а среднемассовый диаметр правой моды уменьшается при увеличении давления [130].

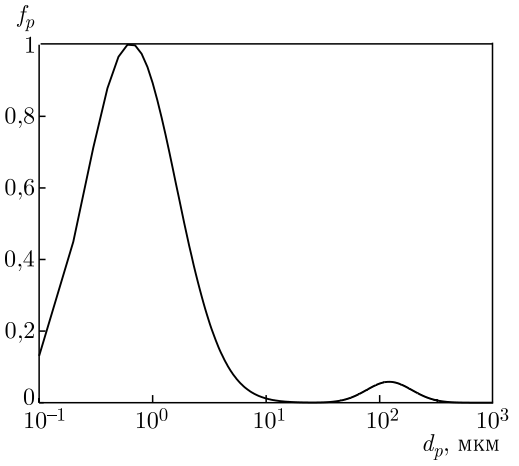


Рис. 4.40. Бимодальная логнормальная функция распределения частиц по размерам

Столкновения частиц в ламинарном и турбулентном потоках с внешними вынужденными колебаниями давления учитываются в работе [130]. Распределение частиц по размерам описывается логнормальным распределением. Массовая концентрация частиц

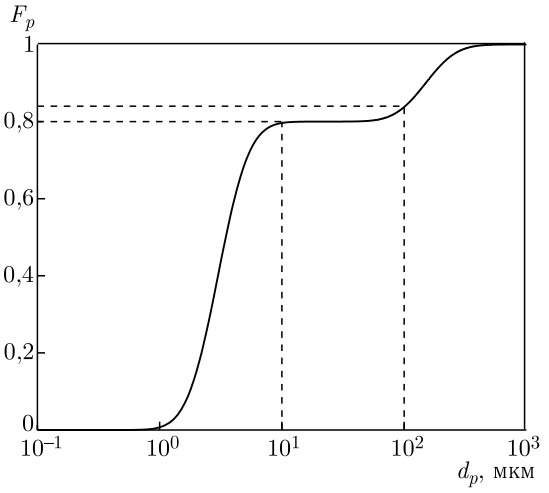


Рис. 4.41. Бимодальная логнормальная функция распределения частиц по размерам

равняется $C_m = 0{,}2$, а амплитуда и частота акустических колебаний — $\varepsilon = 0{,}02$ и $f = 1885$ Гц.

Распределение частиц по размерам на массоподводящей поверхности канала, которое в начальный момент времени $t = 0$ подчиняется логнормальному распределению (рис. 4.42), сравнивается с распределени-

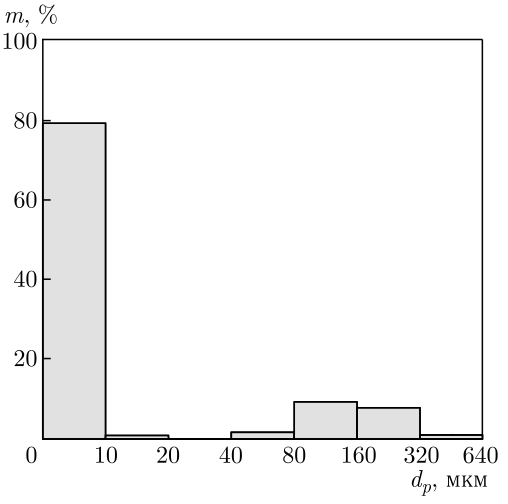


Рис. 4.42. Распределение частиц по размерам на массоподводящей поверхности канала

ем частиц в выходном сечении камеры сгорания, которое осредняется по радиусу (рис. 4.43). Столкновения частиц в результате акустических колебаний приводят к изменению распределения частиц в выходном сечении. В частности, относительная массовая концентрация мелких частиц с размерами, меньшими 10 мкм, в выходном сечении канала уменьшается приблизительно на 18 %, а среднемассовый диаметр частиц увеличивается с 35 до 60 мкм. Вместе с тем, при начальном однородном распределении частиц по размерам на массоподводящей поверхности канала среднемассовый диаметр частиц практически не меняется, что свидетельствует о пренебрежимо малой роли столкновений между частицами.

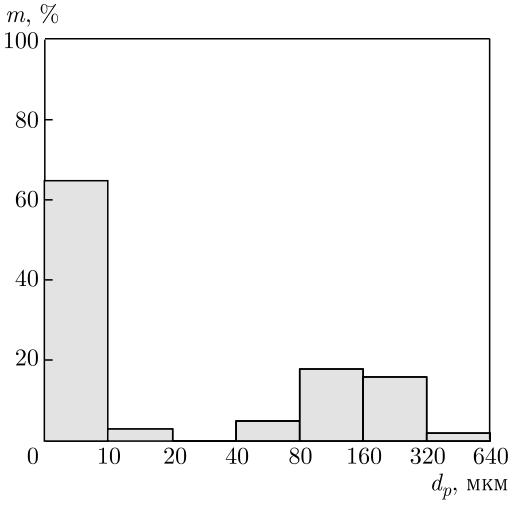


Рис. 4.43. Распределение частиц по размерам в выходном сечении канала для ламинарного течения

Турбулентность изменяет динамику частиц, особенно в областях течения с высокой интенсивностью турбулентности. Относительная массовая концентрация мелких частиц, диаметр которых не превосходит 10 мкм, уменьшается с 65 % в ламинарном потоке до 58 % в турбулентном течении, а среднемассовый диаметр частиц увеличивается с 60 до 71 мкм (рис. 4.44).

Несмотря на изменение относительной массовой концентрации частиц в выходном сечении канала по сравнению с их распределением на массоподводящей поверхности, распределение частиц по размерам остается бимодальным как в ламинарном, так и в турбулентном течениях (среднемассовый диаметр частиц каждой моды изменяется). Турбулентная дисперсия частиц приводит к увеличению времени пребывания

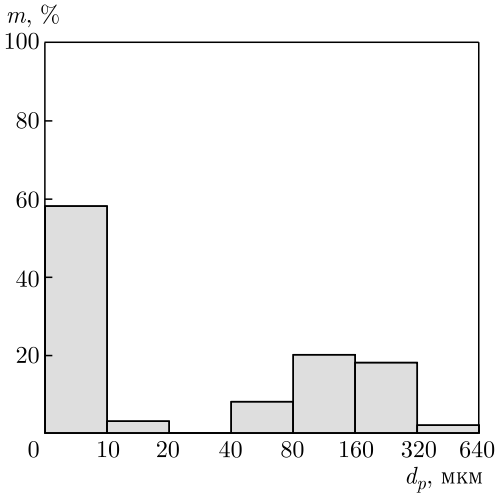


Рис. 4.44. Распределение частиц по размерам в выходном сечении канала для турбулентного течения

частиц в канальном участке течения и вероятности столкновений между частицами.

Столкновения, в основном, возникают между мелкими частицами левой моды и крупными частицами правой моды. Массовые концентрации частиц из диапазонов размеров $10 \leqslant d_p \leqslant 20$ и $320 \leqslant d_p \leqslant 640$ практически не изменяются, что говорит о пренебрежимо малом влиянии столкновений частиц в пределах каждой моды. Расчеты с однородным распределением частиц по размерам и среднемассовым размером 10 мкм показывают, что в выходном сечении канала среднемассовый размер увеличивается лишь на 1 % [130]. Эффективность столкновений частиц мелкодисперсного оксида с крупными агломератами составляет почти 100 %, в то время как эффективность столкновений крупных частиц составляет лишь 5 % [131, 295].

При учете горения частиц необходимо задать начальное содержание алюминия в частице. Полагая массовую концентрацию алюминия в топливе равной α, а общую массу твердого топлива — m_s, общая масса частиц является суммой общей массы алюминия и общей массы кислорода, содержащегося в частицах оксида алюминия, и находится из соотношения

$$m_{\text{р}} = \alpha m_s \left(1 + \psi \frac{1-\xi}{\xi}\right),$$

где ψ — отношение общей массы алюминия, содержащегося в молекулах оксида алюминия, к общей массе алюминия в топливе. Параметр

ξ представляет собой массовую концентрацию алюминия в частицах оксида алюминия. Учитывая, что $\xi = 9/17$, найдем отношение массы крупных частиц к массе мелких частиц

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{f_0 m_{\text{p}}}{m_s - f_0 m_{\text{p}}} = \frac{1}{1 - f_0\alpha(1 + 8\psi/9)} - 1.$$

Для общей массы алюминия в каплях и общей массы частиц оксида алюминия имеем

$$\alpha\frac{m_s}{m_{\text{p}}} = f_0\left[(1-\beta)\xi + \beta\xi\right] + (1 - f_0)\xi,$$

где β — массовая концентрация оксида алюминия в составных частицах. Из приведенных соотношений следует, что

$$\beta = 1 - \frac{\xi(1-\psi)}{f_0[\xi + (1-\xi)\psi]} = 1 - \frac{1-\psi}{f_0(1 + 8\psi/9)}.$$

На практике $\alpha \sim 0{,}2$ и $\psi \sim 0{,}2$, что дает $\beta \sim 0{,}15$.

Используя соотношение между объемной концентрацией алюминия в частице и его массовой концентрацией, запишем

$$\varphi = \frac{\beta\rho_{Al}}{(1-\beta)\rho_{Al_2O_3} + \beta\rho_{Al}}.$$

При известном параметре φ диаметр частицы находится из соотношения $d_{\text{p}}^3 = \varphi d_{\text{p}0}^3$.

4.10. Обтекание утопленного сопла двухфазным потоком

По технологическим соображениям в современных РДТТ дозвуковая часть сопла обычно вдвинута (утоплена) в камеру сгорания, что приводит к формированию встречного течения газа и усложнению структуры течения в предсопловом объеме. Погружение сопла внутрь предсоплового объема уменьшает продольный размер двигателя, но порождает ряд проблем, связанных с обтеканием сопла высокотемпературным потоком.

Между поверхностями канала и воротника (вдвинутой частью сопла) образуется кольцевой канал. Для расчета течения над вдвинутой частью сопла в начальный момент времени работы РДТТ используется модель течения в кольцевом цилиндрическом канале со вдувом. По мере выгорания топлива кольцевой зазор над вдвинутой частью сопла увеличивается, скоростной напор потока в канале превышает скоростной напор встречного потока из кольцевого зазора, и картина течения над вдвинутой частью сопла изменяется. Нарушение симметрии

сопровождается несимметричным затеканием потока из канала в кольцевую область и обтеканием поверхности сопловой крышки.

Рассмотрим утопленное сопло, предсопловой объем которого образован отрезками прямых AB, BC, DE, EF и FG (рис. 4.45). Газ поступает в предсопловой объем через границу AB и через проницаемые стенки контура BC, CD, DE, EF и FG. Утопленная часть сопла (воротник) образована дугами окружностей и отрезками прямых, а сверхзвуковая часть представляет собой полином третьей степени.

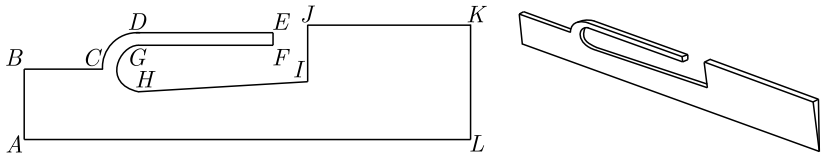


Рис. 4.45. Камера сгорания с утопленным соплом

Течение считается ламинарным, жидкость вязкой и несжимаемой. Расчет производится в области в виде сектора с углом раствора 5°.

На входной границе AB задаются распределения параметров, полученные из расчета течения в круглом канале со вдувом. К сопловой части расчетной области добавляется вспомогательный блок прямоугольной формы, на границах которого задается статическое давление, равное атмосферному ($p = 10^5$ Па). Расчеты проводятся для различных соотношений между расходами надсоплового и канального потоков (0,145 % и 0,35 %).

Расчетная сетка содержит 28000 узлов. В окружном направлении размещается один слой ячеек. Фрагмент сетки показан на рис. 4.46. Геометрия расчетной сетки около носовой части утопленного сопла оказывает достаточно существенное влияние на результаты расчетов.

Результаты расчетов, обработанные в виде линий уровня статического давления и модуля скорости, показаны на рис. 4.47.

Течение удовлетворительно описывается моделью невязкого газа за исключением небольшой пристеночной области около поверхности утопленного сопла, где существенно влияние вязкости.

Сравнение результатов расчета горячего и холодного газа показывает, что давление на поверхности сопла определяется только соотношением расходов канального и надсоплового потоков и не зависит от вида рабочего тела. Увеличение расхода газа, поступающего через надсопловой зазор в камеру сгорания, приводит к увеличению давления на цилиндрической поверхности утопленного сопла.

Расчеты двухфазных течений проводились для несколько иной формы расчетной области, включающей только предсопловой объем (течение в сопле не рассматривается), в рамках модели вихревого те-

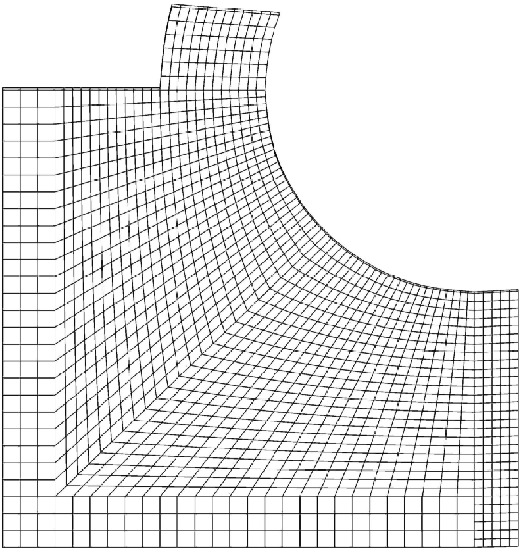


Рис. 4.46. Фрагмент расчетной сетки

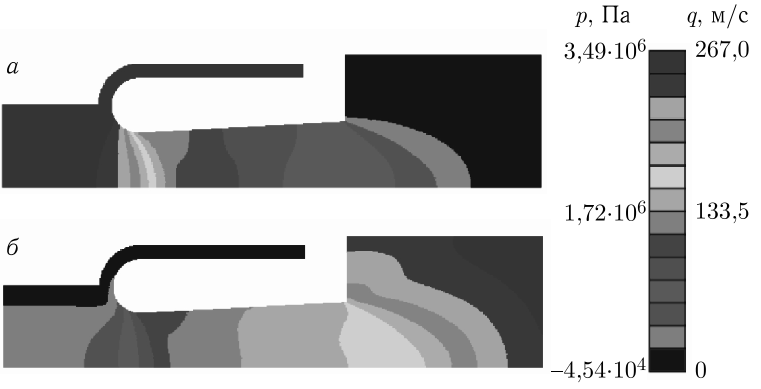


Рис. 4.47. Линии уровня давления (*а*) и модуля скорости (*б*)

чения невязкой несжимаемой жидкости. Две различные конфигурации расчетной области (варианты 1 и 2) показаны на рис. 4.48. Давление в камере сгорания составляет 80 атм, а массовый расход — 182 кг/с.

Криволинейные сетки, построенные при помощи различных подходов, приводятся на рис. 4.49. Фрагменты *а* и *г* соответствуют сеткам, построенным при помощи метода трансфинитной интерполяции, фрагменты *б* и *д* — эллиптическим сеткам, а фрагменты *в* и *е* — ортогональным сеткам.

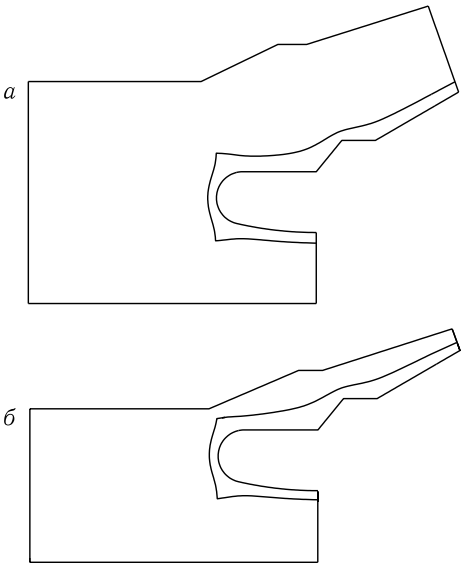


Рис. 4.48. Геометрия расчетной области в случаях 1 (*а*) и 2 (*б*)

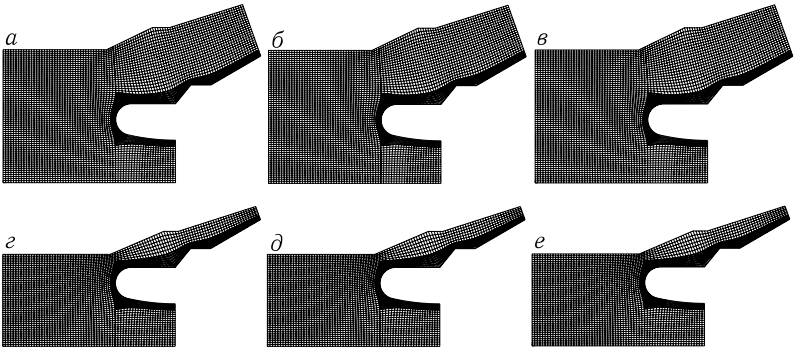


Рис. 4.49. Расчетные сетки в случае 1 (*а*, *б*, *в*) и случае 2 (*г*, *д*, *е*)

В принятой схеме отображения физической области на вычислительное пространство существуют особые угловые ячейки, соответствующие зонам сопряжения лобовой части сопла с его внешней и внутренней (входной) поверхностью. Метрические свойства особых ячеек сказываются на точности расчетов. В частности, вытянутая форма ячеек приводит к тому, что используемая билинейная интерполяция параметров несущего потока внутри вычислительной ячейки сетки при моделировании движения частиц на основе дискретно-траекторного подхода становится некорректной (это сказывается на выполнении об-

ратного интерполирования из вычислительного пространства в физическое) из-за существенной нелинейности. Траектория частицы в данной области искажается. Преодоление указанной неточности осуществляется построением местного сеточного блока с более подробной сеткой (сетка имеет блочную структуру).

В расчетах поля течения газа используется сетка, представляющая собой линейную комбинацию эллиптической и ортогональной сеток (весовой коэффициент равняется 0,3). Сетка состоит из двух блоков, имеющих размерности 160×50 и 8×210 соответственно.

Линии тока в предсопловом объеме показаны на рис. 4.50 для моделей потенциального и вихревого течения. Основные отличия заключается в кривизне линий тока у массоподводящей поверхности.

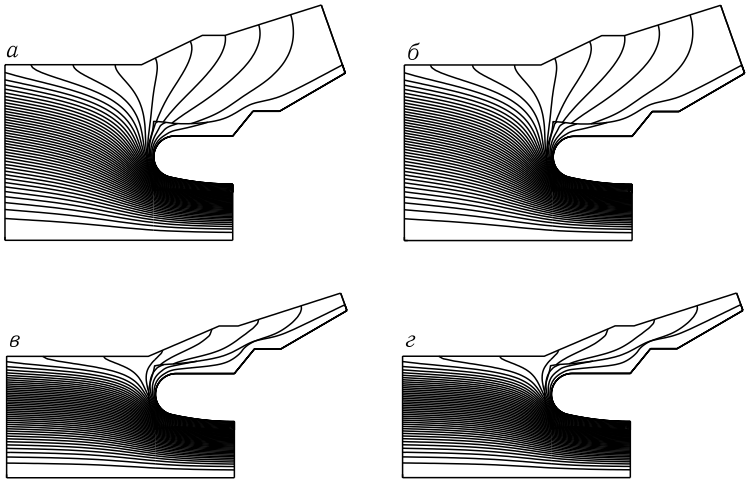


Рис. 4.50. Линии тока потенциального (*а*, *в*) и вихревого (*б*, *г*) течения

Распределения скорости по поверхности утопленного сопла показаны на рис. 4.51. Линии *1* и *2* соответствуют различным геометрическим конфигурациям расчетной области. Профили скорости на поверхности утопленной части сопла в случаях 1 и 2 различаются сравнительно мало.

Распределения вихря скорости на массоподводящей поверхности канала приводятся на рис. 4.52.

Траектории частиц окиси алюминия ($\rho_{\text{р}} = 3900$ кг/м^3) рассчитываются в известном (вычисленном заранее) поле течения газа. Интегрирования уравнений, описывающих движение частицы, производится в контравариантных составляющих скорости в вычислительной плоскости.

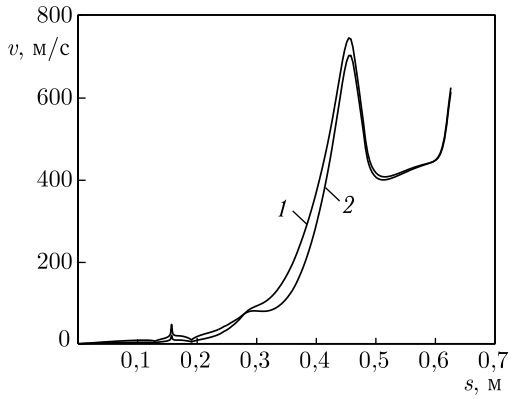


Рис. 4.51. Распределения скорости по поверхности утопленного сопла

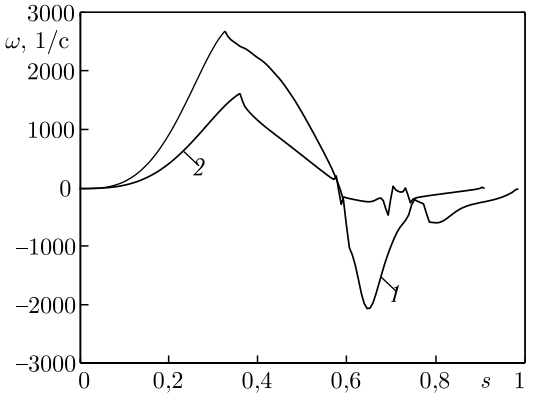


Рис. 4.52. Распределения вихря скорости на массоподводящей поверхности

При вводе пробных частиц конденсированной фазы в расчетную область принимается, что в точке старта скорость частицы равняется скорости газа. В некоторых случаях это приводит к завышению доли частиц, выпадающих на поверхность утопленного сопла. Особенно этот факт важен для частиц, поступающих из области канального потока.

Траектории частиц для различных конфигураций расчетной области показаны на рис. 4.53 и рис. 4.54. Сплошные линии показывают линии тока течения газа, а утолщенные линии — траектории частиц разных размеров.

Двухфазные течения в канале заряда и предсопловом объеме рассматриваются в работе [303]. Для трехмерных расчетов в щелевом канале используется дискретно-траекторный подход и сетка $95 \times 58 \times 25$. Распределение частиц по размерам на поверхности горения описыва-

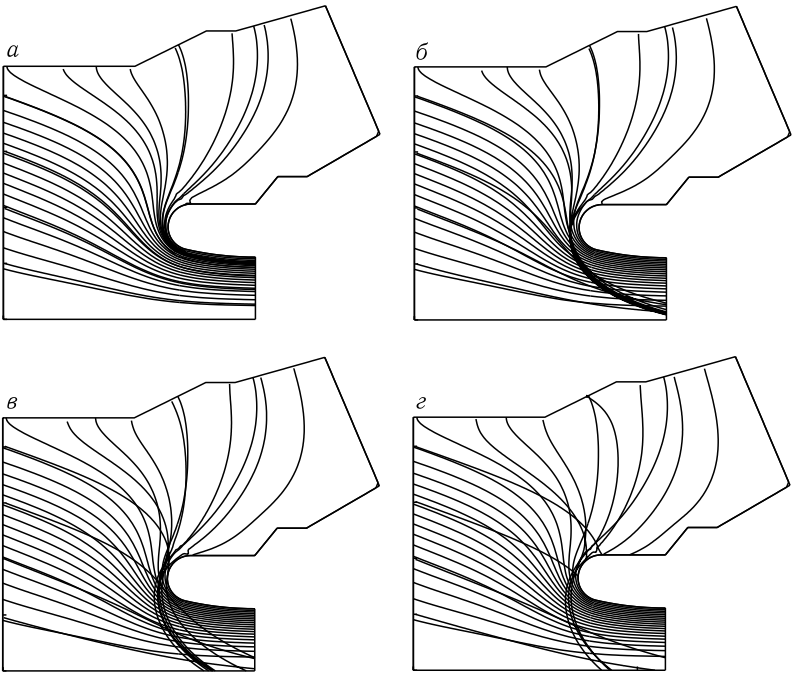


Рис. 4.53. Траектории частиц в случае 1 при $d_{\text{р}} = 2$ (*а*); 20 (*б*); 50 (*в*); 80 мкм (*г*)

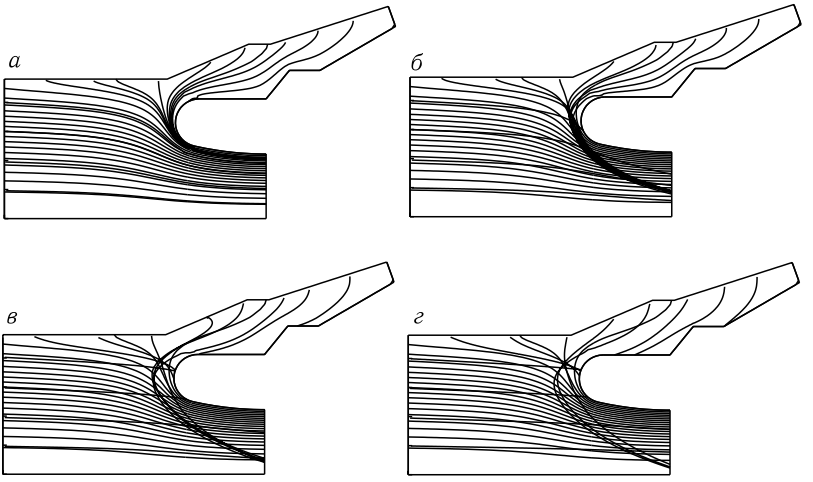


Рис. 4.54. Траектории частиц в случае 2 при $d_{\text{р}} = 2$ (*а*); 20 (*б*); 50 (*в*); 80 мкм (*г*)

ется бимодальной логнормальной функцией распределения. Столкновениями частиц пренебрегается. Учитывается горение частиц алюминия и их дробление под действием сдвиговых напряжений в канале заряда. Считается, что частицы высокодисперсного оксида движутся в динамическом и тепловом равновесии с газом. Результаты расчетов показывают, что температуры обеих фаз вблизи стенки канала существенно ниже, чем в центральной части канала. На основе данных численного моделирования определяется распределение частиц на входе в сопло и эрозия его поверхности.

Трехмерные турбулентные течения газовзвеси в предсопловом объеме рассматриваются в работе [157]. Для расчетов используются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса и k–ε модель турбулентности. Траектории частиц рассчитываются для двух размеров частиц на основе детерминистической лагранжевой модели. Массовая концентрация конденсированной фазы поддерживается постоянной во всех расчетах и равной 0,318. Влияние частиц на газ не учитывается.

Расчеты проводятся на блочной сетке, состоящей из 13 блоков, как для осесимметричной конфигурации расчетной области (отклонение сопла отсутствует), так и для ее трехмерной конфигурации, соответствующей отклонению утопленного сопла на некоторый угол (угол отклонения сопла составляет 6°).

Исследование сеточной зависимости решения (число узлов сетки изменяется от 3658 до 14632 и 58528) показывает, что во всех случаях в предсопловом объеме имеет место одна рециркуляционная зона, но ее форма в существенной степени зависит от числа узлов сетки. Увеличение числа узлов сетки приводит к тому, что центр рециркуляционной зоны и координаты точки присоединения потока перемещаются по направлению к входному сечению сопла.

Проблема зашлаковывания предсоплового объема и влияние турбулентности на рассеивание конденсированной фазы рассматриваются в работе [139]. Для расчета поля течения газа (рассматривается 5 различных конфигураций канала заряда) используются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса и двухпараметрическая k–l модель турбулентности. Движение инертных частиц оксида алюминия (рассматривается 10 различных размеров частиц) моделируется в рамках стохастического варианта дискретно-траекторного подхода (проводится сравнение 4 различных подходов). Показывается существенное влияние турбулентности на накопление частиц в предсопловом объеме.

Заключение

1. Роль математического моделирования. Необходимость повышения энергомассовых характеристик РДТТ является стимулом к более детальному исследованию внутрикамерных процессов. Помимо повышения энергетических характеристик, важную роль играет снижение стоимости различных этапов опытно-конструкторских разработок подсистем и компонентов РДТТ.

Современная реализация численного эксперимента основана на системном подходе, предполагающем взаимосвязь всех компонентов (модель, алгоритм, программа), структурированность и иерархическое построение моделей, алгоритмов и программ, подчиненных решению основной задачи. Технология численного моделирования позволяет существенно снизить роль натурного эксперимента.

Наряду с решением задач на основе современных численных методов, разрабатываются сравнительно простые инженерные методы расчета, основанные на обобщении теоретических и экспериментальных результатов. Математическая формулировка задачи упрощается, исходя из ее известных особенностей. Разработка методов решения частных задач, их обобщение и сведение в систему моделирования представляет собой интеграционный процесс.

Разработанная система численного моделирования характеризуется использованием различных вычислительных концепций (модели вихревого течения невязкой жидкости, модели слоистой гидравлики, методы псевдосжимаемости для расчета малоскоростных вязких течений в физических переменных, методы установления).

Модульный принцип построения математических моделей течений в канале заряда и соответствующих программных реализаций позволяют применить разработки к ракетным двигателям различного назначения и для решения задач в иных областях техники.

Несмотря на значительный рост производительности вычислительной техники, создание виртуальных моделей РДТТ представляется достаточно сложным. Одно из направлений развития вычислительного моделирования связано с развитием специализированных коммерческих пакетов программ. Ожидается, что роль таких пакетов в моделировании внутрикамерных процессов будет возрастать. Использование коммерческих пакетов порождает ряд специфических проблем, таких, как передача данных из систем трехмерного проектирования

в расчетные модули, построение дискретной модели, закрытость исходного кода, необходимость адаптации системы к конкретной задаче и другие.

2. Место данной работы. По результатам работы можно сделать следующие выводы.

1. Разработан набор математических моделей, отличающихся друг от друга уровнем схематизации течения и способностью предсказывать те или иные характеристики потока. Сопоставление результатов расчетов в рамках целой совокупности математических моделей, а также результатов каждой из построенных моделей с экспериментальными данными, позволяет ответить на вопрос о том, насколько правомерно использование той или иной упрощенной модели для воспроизведения характеристик течений в каналах реальных геометрических конфигураций.
2. Построены математические модели внутренних турбулентных течений газовзвеси, которые отличаются уровнем схематизации, подходами к описанию конденсированной фазы, способами постановки граничных условий для характеристик турбулентности и учитываемыми физическими факторами в уравнениях для газовой и дисперсной фаз.
3. Проведено многовариантное численное моделирование внутренних течений в элементах энергетических установок, выполнен анализ влияния геометрических и расходных факторов на их формирование и сопоставлены результаты, полученные в рамках различных подходов. Исследовано влияние химических реакций и горения частиц на распределения газодинамических параметров газовой и дисперсной фаз.
4. Выполнен анализ процессов и механизмов, определяющих движение и тепломассообмен конденсированной фазы, а также рассеивание частиц в турбулентном потоке. Выявлены закономерности конвективного переноса частиц под влиянием факторов нетурбулентной природы и роль миграционного механизма в формировании картины движения конденсированной фазы. Проведено сравнение результатов расчетов с данными, полученными без учета влияния флуктуаций скорости.
5. Обобщены результаты исследований в области внутрикамерной газодинамики РДТТ и на их основе производится выработка рекомендаций для инженерной практики.

3. Направления развития. Успехи науки о ракетных топливах, внутренней баллистики и внутрикамерной газодинамики открывают новые возможности в развитии РДТТ.

К перспективным направлениям развития РДТТ относятся создание двигателей со сверхплотной упаковкой, а также нетрадиционных камер сгорания (например, с управляемой детонационной газификацией топлива) и сопловых блоков (колокообразных, кольцевых, без сужающейся дозвуковой части, с управляемыми механическим или газодинамическим насадком). Резервом улучшения энергетических характеристик РДТТ является совершенствование горения и истечения продуктов сгорания из сопла, в частности использование двухсоставных зарядов, комбинации нескольких катализаторов горения твердого топлива, выполненных в виде шнуров или зерен с детонирующим топливом. К новым направлениям относится также создание двигателей с управляемым детонационным горением топлива. Продвижение в данных направлениях возможно при создании новых моделей термогазодинамических процессов.

Перспективными представляются разработки твердых топлив с принципиально новыми рецептурами окислителей и горючих-связующих, а также с применением ультрадисперсных порошков металлов, размер частиц которых на порядок ниже, чем у имеющихся составов.

Нитрат аммония представляет собой самый доступный и самый дешевый окислитель, сочетающий в себе прекрасный элементный состав (5% водорода, 60% кислорода, отсутствие галогенов), высокую термостабильность и достаточно приемлемую совместимость со многими компонентами. Недостатками являются низкая энтальпия образования и недостаточно высокая плотность, в связи с чем нитрат аммония проигрывает по энергетике другим известным окислителям. Однако экологическая чистота продуктов сгорания, низкая стоимость и низкая чувствительность к механическим воздействиям, высокая термостабильность могут стать причиной возвращения к этому окислителю при создании изделий с определенными требованиями по экологической безопасности и стоимости.

Ультрадисперсные частицы энергетических компонентов (например, наночастицы алюминия) позволяют увеличить скорость горения и сократить времена горения агломератов и задержки воспламенения. Практическому использованию топлив с наночастицами алюминия препятствуют их плохие механические характеристики и низкая стабильность, высокая чувствительность к механическому воздействию и стоимость таких топливных композиций, что обусловливает необходимость дальнейших исследований в данном направлении.

В решении проблем, связанных с загрязнением атмосферы (снижение жизненного цикла отходов и загрязнений), будущее принадлежит ракетным топливам на основе термоэластопластов, являющихся безопасными материалами с экологической точки зрения.

Опыт создания твердых топлив для изделий военного назначения широко применяется для создания твердых топлив гражданского назначения (твердые топлива для автомобильных мешков безопасности, газогенераторов), в которых решающими являются не энергетика топлива, а другие эксплуатационные характеристики (токсичность компонентов, содержание твердой фазы в продуктах сгорания, высокая температура горения, термическая стабильность).

Близкими по методам решения к направлению, связанному с развитием РДТТ, являются пути создания твердотопливных газогенераторов, производящих газ необходимого состава при заданном давлении в режиме горения с заданной скоростью, твердотопливных химических и газодинамических лазеров, МГД-генераторов, твердотопливных систем пожаротушения, поставляющих в режиме горения ингибиторы непосредственно в очаг возгорания, и других устройств.

Одной из важных проблем работы РДТТ является неустойчивость рабочих процессов в объеме камеры сгорания. За многолетний период исследований в этом направлении важность проблемы не уменьшилась, а в связи с разработкой РДТТ нового поколения с высокими энергомассовыми и эксплуатационными характеристиками актуальность проблемы обостряется.

В камере сгорания возникают регулярные колебания давления с частотой, близкой к собственной частоте колебаний газа в камере сгорания, и с нарастающей во времени амплитудой. Такой вид нестационарности (акустическая неустойчивость процесса течения продуктов сгорания) связывается с возбуждением звуковых волн в камере сгорания. Неустойчивость течения продуктов сгорания является автоколебательным процессом, количественные параметры которого выходят за установленные пределы.

Неустойчивость рабочих процессов ухудшает внутрибаллистические характеристики РДТТ, способствует возникновению акустических шумов и может привести к разрушению двигателя.

Динамические режимы работы РДТТ изучены сравнительно мало, что объясняется сложностью горения твердого топлива, течения продуктов сгорания и волновых процессов в объеме камеры сгорания. Лабораторные или стендовые испытания не в состоянии дать информацию по всему полю течения. Физические модели, созданные на основе критериев подобия, дают качественную картину поля течения. Для исследования низкочастотной акустической неустойчивости в РДТТ требуется использовать методы численного моделирования, позволяющие получить характеристики нестационарного многофазного турбулентного течения в камере сгорания, включая эволюцию крупномасштабных вихревых структур.

Для обеспечения длительной работы двигателя без ухудшения его характеристик большое значение имеет разработка эрозионностойких конструкционных и теплозащитных материалов, а также методов изготовления деталей из них (например, материалов, используемых для изготовления горловины сопла).

Порядка $40 \div 50\,\%$ массы конструкции двигателя приходится на корпус, что требует повышения прочности конструкционных материалов (например, за счет термообработки). Дальнейшие перспективы усовершенствования открываются в связи с применением в корпусах РДТТ конструкционных материалов из органопластиков вместо стеклопластиков.

Во многом применению новых материалов и технологических методов обработки препятствуют экономические ограничения (повышается не только энергетические параметры, но и стоимость изделия).

При грамотной постановке прямого численного моделирования удается воспроизвести результаты экспериментальных исследований по натурной отработке двигателей и изучить механизм возникновения и источник низкочастотной неустойчивости в камере сгорания РДТТ.

Роль математического моделирования в исследовании задач указанного класса постоянно возрастает, а методическая база совершенствуется и постоянно обновляется. Методы математического моделирования позволяют проводить оптимизацию основных выходных параметров РДТТ.

Список литературы

1. *Алипченков В.М.*, *Зайчик Л.И.* Моделирование турбулентного движения частиц в вертикальном канале // Известия РАН. МЖГ. 2006. № 4. С. 50–65.
2. Анисимов В.А., Волков К.Н., Денисихин С.В., Емельянов В.Н. Моделирование задач внутренней баллистики энергоустановок средствами современных вычислительных пакетов // Химическая физика и мезоскопия. 2006. Т. 8. № 3. С. 327–335.
3. Аристов С.Н. Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости // Доклады РАН. 2001. Т. 377. № 4. С. 477–480.
4. Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье–Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43. № 5. С. 547–566.
5. Архипов В.А., Ткаченко А.С., Трофимов В.Ф. Эффекты динамического взаимодействия конденсированных частиц в камере сгорания РДТТ // ФГВ. 1999. Т. 35. № 2. С. 41–46.
6. Ахмадеев В.Ф., Сидоров А.Ф., Спиридонов Ф.Ф., Хайруллина О.Б. О трех методах численного моделирования дозвуковых течений в осесимметричных каналах сложной формы // Моделирование в механике. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1990. Т. 4 (21). № 5. С. 15–25.
7. Бабук В.А., Белов В.П., Ходосов В.В., Шелухин Г.Г. Исследование структуры агломератов при горении алюминизированных смесевых конденсированных систем // Физика горения и взрыва. 1988. Т. 24. № 5. С. 52–56.
8. Бабук В.А., Васильев В.А., Свиридов В.В. Моделирование структуры смесевого твердого ракетного топлива // Физика горения и взрыва. 1999. Т. 35. № 2. С. 25–40.
9. Барашков Н.М., Спиридонов Ф.Ф. О нестационарных течениях в каналах с проницаемыми стенками // Прикладная математика и механика. 1988. Т. 54. № 4. С. 590–593.
10. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994. 444 с.
11. Бендерский Б.Я., Тененев В.А. Пространственные дозвуковые течения в областях со сложной геометрией // Математическое моделирование. 2001. Т. 13. № 8. С. 121–127.
12. Бендерский Б.Я., Тененев В.А. Экспериментально-численное исследование течений в осесимметричных каналах сложной формы с вдувом // Известия РАН. МЖГ. 2001. № 2. С. 184–188.
13. Бобрышев В.П., Лисица В.Д., Спиридонов Ф.Ф. Физико-математическое моделирование внутрикамерной газодинамики РДТТ. М.: ЦНИИНТИКПК, 1993. 128 с.
14. Борисов А.А., Гельфанд Б.С., Поленов А.Н. Дробление жидких капель в волнах разрежения // Известия АН СССР. МЖГ. 1986. № 1. С. 165–168.

15. Ваганова Н.А., Коврижных О.О., Хайруллина О.Б. Моделирование газодинамических процессов в камерах сгорания на многопроцессорной машине // Вычислительные технологии. 1996. Т. 1. № 1. С. 57–64.
16. Вараксин А.Ю. Турбулентные течения газа с твердыми частицами. М.: Физматлит, 2003. 192 с.
17. Варапаев В.Н. Вязкое течение на начальном участке плоского канала с пористыми стенками // Известия АН СССР. МЖГ. 1969. Т. 4. № 4. С. 178–181.
18. Варапаев В.Н., Свириденков А.А., Ягодкин В.И. Численное и экспериментальное исследование течений в каналах с проницаемыми стенками и их гидродинамической устойчивости. М.: СГА, 2008. 120 с.
19. Васенин И.М., Архипов В.А., Глазунов А.А., Бутов В.Г., Трофимов В.Ф. Газовая динамика двухфазных течений в соплах. Томск: Изд-во ТГУ, 1986. 261 с.
20. Васечкин В.Н., Ярыгина Н.И. Теплообмен в кольцевом канале с двусторонним разноинтенсивным вдувом массы // Термогазодинамика турбулентных течений. Новосибирск: Изд-во ИТ СО АН СССР. 1986. С. 180–120.
21. Вилюнов В.Н. Теория зажигания конденсированных веществ. Новосибирск: Наука, 1984. 189 с.
22. Волков К.Н. Блочное предобусловливание уравнений Эйлера и Навье–Стокса при моделировании низкоскоростных течений на неструктурированных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 10. С. 1868–1884.
23. Волков К.Н. Движение конденсированной частицы в канале со вдувом // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79. № 1. С. 81–89.
24. Волков К.Н. Дискретизация уравнений Навье–Стокса на неструктурированной сетке при помощи метода контрольного объема и разностных схем повышенной разрешающей способности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48. № 7. С. 1250–1273.
25. Волков К.Н. Применение метода контрольного объема для решения задач механики жидкости и газа на неструктурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2005. Т. 6. № 1. С. 43–60.
26. Волков К.Н. Применение метода разложения в ряд по параметру для расчета двухфазных течений в каналах со вдувом // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79. № 6. С. 119–127.
27. Волков К.Н. Применение средств параллельного программирования для решения задач механики жидкости и газа на многопроцессорных вычислительных системах // Вычислительные методы и программирование. 2006. Т. 7. № 1. С. 69–84.
28. Волков К.Н. Разностные схемы интегрирования уравнений движения пробной частицы в потоке жидкости или газа // Вычислительные методы и программирование. 2004. Т. 5. № 1. С. 5–21.
29. Волков К.Н. Реализация схемы расщепления на разнесенной сетке для расчета нестационарных течений вязкой несжимаемой жидкости // Вычислительные методы и программирование. 2005. Т. 6. № 1. С. 269–282.

30. Волков К.Н. Решение нестационарных задач механики жидкости и газа на неструктурированных сетках // Математическое моделирование. 2006. Т. 18. № 7. С. 3–24.

31. Волков К.Н. Сравнение низкорейнольдсовых моделей турбулентности с данными прямого численного моделирования течения в канале // Теплофизика и аэромеханика. 2005. Т. 12. № 3. С. 365–378.

32. Волков К.Н. Стохастические модели движения частицы в турбулентном потоке и их применение для расчета внутренних течений // Инженерно-физический журнал. 2007. Т. 80. № 3. С. 136–147.

33. Волков К.Н. Стохастическое моделирование движения и рассеивания примеси в механике турбулентных газодисперсных течений // Инженерно-физический журнал. 2004. Т. 77. № 5. С. 10–20.

34. Волков К.Н., Денисихин С.В., Емельянов В.Н. Моделирование внутренней газодинамики ракетных двигателей твердого топлива на основе средств пакета STAR-CD // Инженерно-физический журнал. 2006. Т. 79. № 4. С. 50–56.

35. Волков К.Н., Денисихин С.В., Емельянов В.Н. Турбулентное течение в цилиндрическом канале с кольцевой выточкой // Инженерно-физический журнал. 2007. Т. 80. № 6. С. 116–121.

36. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Влияние концентрации и размера частиц на характеристики турбулентности, трения и теплообмена // Инженерно-физический журнал. 2009. Т. 82. № 4. С. 758–766.

37. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Движение и теплообмен свободной частицы несферической формы в неоднородном потоке // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 4. С. 62–80.

38. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Математические модели трехмерных турбулентных течений в каналах со вдувом // Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 10. С. 41–63.

39. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Метод моделирование крупных вихрей в приложении к проблемам внутренней газодинамики РДТТ // Химическая физика и мезоскопия. 2006. Т. 8. № 2. С. 198–208.

40. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 364 с.

41. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Приближенный метод расчета турбулентного двухфазного течения в канале с проницаемыми стенками // Инженерно-физический журнал. 1999. Т. 72. № 5. С. 905–912.

42. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Реализация лагранжевого подхода к описанию течений газа с частицами на неструктурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2008. Т. 9. № 1. С. 19–33.

43. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Стохастическая модель движения конденсированной частицы в канале с проницаемыми стенками // Математическое моделирование. 1999. Т. 11. № 3. С. 105–111.

44. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения газа с частицами. М.: Физматлит, 2008. 598 с.

45. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения и теплообмен в каналах и вращающихся полостях. Москва: Физматлит, 2010. 488 с.
46. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Турбулентное течение химически реагирующей газовзеси в канале со вдувом // Инженерно-физический журнал. 2007. Т. 80. № 4. С. 91–98.
47. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Турбулентные течения в каналах со вдувом. Результаты расчетов по методу крупных вихрей и двухпараметрической модели турбулентности // Известия РАН. МЖГ. 2008. № 4. С. 82–93.
48. Волков К.Н., Емельянов В.Н., Рябова Е.Л. Двухуровневое моделирование внутренних двухфазных течений // Математическое моделирование. 2001. Т. 13. № 7. С. 44–48.
49. Ворожцов А.Б., Бондарчук С.С., Павленко А.А., Жарков А.С., Марьяш В.И., Потапов М.Г., Козлов С.Н. Газодинамика открытого сжигания крупногабаритных зарядов твердого ракетного топлива // Сб. докладов конферренции «Высокоэнергетические материалы: демилитаризация и гражданское применение» (HEMs-2004), 6–9 сентября 2004. Бийск: Изд-во ФГУП «Алтай», 2004. С. 138–143.
50. Газодинамические и теплофизические процессы в ракетных двигателях твердого топлива / Под ред. А.С. Коротеева. М.: Машиностроение, 2004. 512 с.
51. Гольдштейн В.М., Соболев В.А. Качественный анализ сингулярно-возмущенных систем. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1988. 153 с.
52. Гольдштик М.А. Один класс точных решений уравнений Навье–Стокса // Прикладная механика и техническая физика. 1966. № 2. С. 106–109.
53. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. М.: Наука, 1989. 336 с.
54. Гонор А.Л., Ривкинд В.Я. Динамика капли // Итоги науки и техники. МЖГ. 1982. С. 86–159.
55. Горение порошкообразных металлов в активных средах / П.Ф. Похил, А.Ф. Беляев, Ю.В. Фролов, В.С. Логачев, А.И. Коротков. М.: Наука, 1972. 294 с.
56. Емельянов В.Н. Внутренние течения сложной структуры // Внутрикамерные процессы, горение и газовая динамика дисперсных систем. СПб: Изд-во БГТУ, 1998. С. 80–91.
57. Емельянов В.Н. Физическое и вычислительное моделирование трехмерных течений в двигательных установках // Внутрикамерные процессы, горение и газовая динамика дисперсных систем. СПб: Изд-во БГТУ, 1996. С. 124–137.
58. Емельянов В.Н., Кректунова И.П. О возможности получения автомодельных решений для двухфазного течения в канале с массоподводом // Динамика однородных и неоднородных сред / Под ред. Н.Н. Поляхова. Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. С. 9–15.
59. Ерошенко В.М., Зайчик Л.И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. М.: Наука, 1984. 276 с.

60. Жарков А.С., Марьяш В.И., Жуков А.П., Вагичев С.Н., Коваленко Г.П., Яскин А.В. Безопасность работ при ликвидации РДТТ методом статических сжиганий // Сб. докладов конферренции «Высокоэнергетические материалы: демилитаризация и гражданское применение» (HEMs-2004), 6–9 сентября 2004. Бийск: Изд-во ФГУП «Алтай», 2004. С. 157–159.
61. Забелин Л.В., Гафиятуллин Р.В., Поник А.Н., Мелешко В.Ю. Основы промышленной технологии утилизации крупногабаритных твердотопливных зарядов. М.: ООО «Недра–Бизнесцентр», 2004. 226 с.
62. Зайчик Л.И., Алипченков В.М. Кинетическое уравнение для функции плотности вероятности и температуры частиц в неоднородном турбулентном потоке // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36. № 4. С. 596–606.
63. Коковихина О.В. Метод решения задачи о распространении акустических колебаний в каналах сложной формы // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 11. С.47–62.
64. Корсунов Я.А., Тишин А.П. Экспериментальное исследование дробления жидких капель при низких числах Рейнольдса // Известия АН СССР. МЖГ. 1971. № 2. С. 182–186.
65. Лебедев А.С., Спиридонов Ф.Ф. Течение вязкой жидкости в начальном участке каналов с интенсивным вдувом // Известия АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 187–190.
66. Лисица В.Д. Влияни массовых сил на радиальную структуру двухфазного течения в круглом канале // Ползуновский вестник. 2008. № 1–2. С. 85–91.
67. Никитин Н.В., Павельев А.А. Турбулентные течения в канале с проницаемыми стенками. Результаты прямого численного моделирования и трехпараметрической модели // Известия РАН. МЖГ. 1998. № 6. С. 18–26.
68. Новиков П.А., Любин Л.Я. Гидродинамика щелевых систем. Минск: Наука и техника, 1988. 344 с.
69. Новожилов Б.В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив. М.: Наука, 1973. 176 с.
70. Осипцов А.Н. Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках // Известия АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 46–52.
71. Подвысоцкий А.М., Шрайбер А.А., Климов В.Л. Массообмен при взаимодействии быстро движущихся жидких капель с различными физическими свойствами // Конвективный теплообмен. Киев: Наукова думка, 1982. С. 65–71.
72. Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. 2006. № 6. С. 3–76.
73. Рабочие процессы в ракетных двигателях твердого топлива. Справочник / А.А. Шишков, С.Д. Панин, Б.В. Румянцев. М.: Машиностроение, 1989. 240 с.
74. Райзберг Б.А., Ерохин Б.Т., Самсонов К.П. Основы теории рабочих процессов в ракетных системах на твердом топливе. М.: Машиностроение, 1972. 384 с.

75. Рычков А.Д. Математическое моделирование газодинамических процессов в каналах и соплах. Новосибирск: Наука, 1988. 222 с.
76. Савельев С.К., Емельянов В.Н., Бендерский Б.Я. Экспериментальные методы исследования газодинамики РДТТ. Санкт-Петербург: Изд-во «Недра», 2007. 268 с.
77. Свириденков А.А., Ягодкин В.И. О течениях в начальных участках каналов с проницаемыми стенками // Известия АН СССР. МЖГ. 1976. № 5. С. 43–48.
78. Сидоров А.Ф. Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Численные и аналитические методы решения задач механики сплошных сред. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1981. С. 101–117.
79. Соловьев А.Д. Слияние жидких кпель при столкновениях // Труды Центральной аэрологической обсерватории. 1969. № 89. С. 3–15.
80. Спиридонов Ф.Ф. О распределении характеристик турбулентности в канале с интенсивным вдувом // Прикладная механика и техническая физика. 1987. № 5. С. 79–84.
81. Спиридонов Ф.Ф. Об изменение размеров частиц в двухфазных течениях РДТТ // Современные проблемы внутренней баллистики РДТТ / Под ред. А.В. Алиева. Ижевск: Изд-во ИПМ УрО РАН, 1996. С. 124–129.
82. Стернин Л.Е., Маслов Б.Н., Шрайбер А.А., Подвысоцкий А.М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980.
83. Стернин Л.Е., Шрайбер А.А. Многофазные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1994. 320 с.
84. Сухинин С.В., Ахмадеев В.Ф. Гидродинамические источники колебаний в камерах сгорания // Физика горения и взрыва. 1993. № 6. С. 38–46.
85. Теленин Г.Ф., Шитова Л.Д. Гидродинамика каналов с проницаемыми стенками // Аэромеханика и газовая динамика / Под ред. В.В. Струминского. М.: Наука, 1976. С. 76–123.
86. Теленин Г.Ф., Шитова Л.Д. Гидродинамика каналов с проницаемыми стенками. Теория исчезающей вязкости // Труды НИИ механики МГУ / Под ред. Г.Г. Черного. М.: Изд-во МГУ, 1973. № 41. С. 4–90.
87. Тененев В.А., Лебедев А.С., Русяк И.Г., Горохов М.М. Горение агломератов алюминия и оксида алюминия в двухфазном потоке // Современные проблемы внутренней баллистики РДТТ / Под ред. А.В. Алиева. Ижевск: Изд-во ИПМ УрО РАН, 1996. С. 110–123.
88. Тененев В.А., Русяк И.Г., Горохов М.М. Численное исследование горения частиц алюминия в двухфазном потоке // Математическое моделирование. 1997. Т. 9. № 5. С. 87–96.
89. Терехов В.И., Калинина С.В., Ярыгина Н.И. Газодинамика осесимметричного радиального щелевого канала с проницаемыми стенками // Теплофизика и аэромеханика. 1999. Т. 6. № 4. С. 489–496.
90. Управление обтеканием тел с вихревыми ячейками в приложении к летательным аппаратам интегральной компоновки (численное и физическое

моделирование) / Под ред. А.В. Ермишина и С.А. Исаева. М.: Изд-во МГУ, 2001. 360 с.

91. Утилизация твердотопливных ракетных двигателей (РДТТ) / С.И. Бурдюгов, М.А. Корепанов, Н.П. Кузнецов, М.Г. Кургузкин, В.Ю. Мелешко, Б.С. Мокрушин, А.Н. Поник, В.А. Тененев, З.А. Тухватуллин / Под общ. ред. Н. П. Кузнецова. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. 512 с.
92. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991.
93. Хинце И.О. Турбулентность: ее механизм и теория. М.: Физматлит, 1963. 680 с.
94. Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб / Ю.А. Быстров, С.А. Исаев, Н.А. Кудрявцев, А.И. Леонтьев. СПб: Судостроение, 2005. 392 с.
95. Численный эксперимент в теории РДТТ / А.М. Липанов, В.П. Бобрышев, А.В. Алиев, Ф.Ф. Спиридонов, В.Д. Лисица / Под ред. А.М. Липанова. Екатеринбург: Наука, 1994. 302 с.
96. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
97. Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П. Турбулентные течения газовзвеси. Киев: Наукова думка, 1987. 238 с.
98. Щукин В.К. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. М.: Машиностроение, 1980. 240 с.
99. Ягодкин В.И. Приближенный расчет течений газа в канале с пористыми стенками // Прикладная механика и техническая физика. 1964. № 1. С. 105–108.
100. Ягодкин В.И. Течение газа при горении в трубах с пористыми стенками // Инженерный журнал. 1961. Т. 1. № 3. С. 165–169.
101. Abu-Irshaid E.M., Majdalani J., Casalis G. Hydrodynamic stability of rockets with headwall injection // Physics of Fluids. 2007. V. 19. No. 2. P. 024101–11.
102. Akiki M., Majdalani J. Compressibility effects in slender rocket motors // AIAA Paper. No. 2009-5326.
103. Apte S.V., Yang V. A large-eddy simulation study of transition and flow instability in a porous-walled chamber with mass injection // Journal of Fluid Mechanics. 2003. V. 477. P. 215–225.
104. Apte S.V., Yang V. Unsteady flow evolution and combustion dynamics of homogeneous solid propellant in a rocket motor // Combustion and Flame. 2002. V. 131. No. 1–2. P. 110–131.
105. Apte S.V., Yang V. Unsteady flow evolution in a porous chamber with surface mass injection. I. Free oscillations // AIAA Journal. 2001. V. 39. No. 8. P. 1577–1586.
106. Apte S.V., Yang V. Unsteady flow evolution in a porous chamber with surface mass injection. II. Acoustic excitations // AIAA Journal. 2002. V. 40. No. 2. P. 244–253.

107. Avalon G., Casalis G., Griffond J. Flow instabilities and acoustic resonance of channels with wall injection // AIAA Paper. No. 98-3218.
108. Avalon G., Comas P. Simulative study of the unsteady flow inside a solid propellant rocket motor // AIAA Paper. No. 91-1866.
109. Avalon G., Ugurtas B., Grish F., Bresson A. Numerical computations and visualization tests of the flow inside a cold gas setup: simulation with characterization of a parietal vortex shedding // AIAA Paper. No. 2000-3387.
110. Balachandar S., Buckmaster J.D., Short M. The generation of axial vorticity in solid-propellant rocket-motor flows // Journal of Fluid Mechanics. 2001. V. 429. P. 283–305.
111. Balakrishnan G., Linan A., Williams F.A. Rotational inviscid flow in laterally burning solid-propellant rocket motors // Journal of Propulsion and Power. 1992. V. 8. No. 6. P. 1167–1176.
112. Banks W.H.H., Zaturska M.B. Swirling flow in a porous pipe with an accelerating wall // Acta Mechanica. 1996. V. 119. No. 1–4. P. 1–12.
113. Baum J.D. Investigation of flow turning phenomenon: effects of frequency and blowing rate // AIAA Paper. No. 89-0297.
114. Baum J.D., Levine J.N., Lovine R.L. Pulsed instabilities in rocket motors: a comparison between predictions and experiments // Journal of Propulsion and Power. 1988. V. 4. No. 4. P. 308–316.
115. Beckstead M.W. A summary of aluminum combustion // VKI Special Course on Internal Aerodynamics in Solid Rocket Propulsion. Rhode-Saint-Genese, Belgium, 2002.
116. Beddini R.A. Injection induced flows in porous-walled ducts // AIAA Journal. 1986. V. 24. No. 11. P. 1766–1773.
117. Beddini R.A. Reacting turbulent boundary layer approach to solid propellant erosive burning // AIAA Journal. 1978. V. 16. No. 8. P. 898–904.
118. Beddini R.A., Roberts T.A. Turbularization of an acoustic boundary layer on a transpiring surface // AIAA Journal. 1988. V. 26. No. 8. P. 917–923.
119. Berman A.S. Laminar flow in an annulus with porous walls // Journal of Applied Physics. 1958. V. 29. No. 1. P. 71–75.
120. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls // Journal of Applied Physics. 1953. V. 24. No. 9. P. 1232–1235.
121. Berman A.S. Concerning laminar flow in channels with porous walls // Journal of Applied Fluids. 1956. V. 27. No. 12. P. 1557–1558.
122. Boutros Y.Z., Abd-el-Malek M.B., Badran N.A., Hassan H.S. Lie-group method for unsteady flows in a semi-infinite expanding or contracting pipe with injection or suction through a porous wall // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. V. 197. No. 2. P. 465–494.
123. Brady J.F., Acrivos A. Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier–Stokes equations with reverse flow // Journal of Fluid Mechanics. 1981. V. 112. P. 127–150.
124. Brereton G.J., Mankbadi R.R. Review of recent advances in the study of unsteady turbulent internal flows // Applied Mechanics Review. 1995. V. 48. No. 4. P. 189–212.

125. Brereton G., Reynolds W., Jayaraman R. Response of a turbulent boundary layer to sinusoidal free-stream unsteadiness // Journal of Fluid Mechanics. 1990. V. 221. P. 131–159.

126. Brooks K.P., Beckstead M.W. Dynamics of aluminum combustion // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11. No. 4. P. 769–780.

127. Brown R.S., Blackner A.M., Willoughby A.M., Dunlap R. Coupling between acoustic velocity oscillations and solid propellant combustion // Journal of Propulsion and Power. 1986. V. 2. No. 5. P. 428–437.

128. Brown R.S., Dunlap R., Young S.W., Waugh R.C. Vortex shedding as a source of acoustic energy in segmented solid rockets // Journal of Spacecraft and Rockets. 1981. V. 18. No. 4. P. 312–319.

129. Bundy R.D., Weissberg H.L. Experimental study of fully developed laminar flow in a porous pipe with wall injection // Physics of Fluids. 1970. V. 13. No. 10. P. 2613–2615.

130. Cai W., Ma F., Yang V. Two-phase vorticoacoustic flow interactions in solid-propellant rocket motors // Journal of Propulsion and Power. 2003. V. 19. No. 3. P. 385–396.

131. Cai W.C., Thakre P., Yang V. A model of AP/HTPB composite propellant combustion in rocket-motor environment // Combustion Science and Technology. 2008. V. 180. No. 12. P. 2143–2169.

132. Campbell T., Kalia R.K., Nakano A., Vashishta P., Ogata S., Rodgers S. Dynamics of oxidation of aluminum nanoclusters using variable charge molecular-dynamics simulations on parallel computers // Physical Review Letters. 1999. V. 82. P. 4866–4869.

133. Cantrell R.H., Hart R.W. Interaction between sound and flow in acoustic cavities: mass, momentum, and energy considerations // Journal of the Acoustical Society of America. 1964. V. 36. No. 4. P. 697–706.

134. Casalis G., Avalon G., Pineau J.-P. Spatial instability of planar channel flow with fluid injection through porous walls // Physics of Fluids. 1998. V. 10. No. 10. P. 2558–2568.

135. Casalis G., Chedevergne F., Feraille T., Avalon G. A new stability approach for the flow induced by wall injection // Proceedings of the IUTAM Symposium on Laminar–Turbulent Transition, 13–17 December 2004, Bangalore, India. 2004. No. TP 2005-13. 6 p.

136. Caveni L., Gany A. Breakup of Al/Al_2O_3 agglomerates in acceleratiing flowfields // AIAA Journal. 1979. V. 17. No. 12. P. 1368–1371.

137. Cebeci T. Behavior of turbulent flow near a porous wall with pressure gradient // AIAA Journal. 1976. V. 8. No. 12. P. 2152–2156.

138. Cebeci T. Calculation of unsteady two-dimensional laminar and turbulent boundary layer to random fluctuations in external velocity // Proceedings of the Royal Society. Series A. 1977. Vol. 355 (1681). P. 225–238.

139. Cesco N., Dumas L., Pevergne T., Fabignon Y. Stochastic models to the investigation of slag accumulation in a large solid rocket motors // AIAA Paper. No. 97-2785.

140. Cesco N., Lavergne G., Estivalezes J.L. Simulation of the two-phase flow in solid rocket motors // AIAA Paper. No. 96-2640.
141. Chakravarthy S.R., Osher S. A new class of high-accuracy TVD schemes for hyperbolic conservation laws // AIAA Paper. No. 85-0363.
142. Chang Y., Collis S.S., Ramakrishnan S. Viscous effects in control of near-wall turbulence // Physics of Fluids. 2002. V. 14. No. 11. P. 4069–4080.
143. Chaouat B. Numerical predictions of channel flows with fluid injection using Reynolds stress model // Journal of Propulsion and Power. 2002. V. 18. No. 2. P. 295–303.
144. Chaouat B. Computation using k–ε model with turbulent mass transfer in the wall region // Proceedings of the 11th Symposium on Turbulent Shear Flows, 8–10 September 1997, Grenoble, France. 1997. V. 2. P. 2.71–2.76.
145. Chaouat B. Numerical simulations of channel flows with fluid injection using Reynolds stress model // AIAA Paper. No. 2000-0992.
146. Chaouat B., Schiestel R. A new partially integrated transport model for subgrid-scale stresses and dissipation rate for turbulent developing flows // Physics of Fluids. 2005. V. 17. No. 6. P. 065106-19.
147. Chaouat B., Schiestel R. Reynolds stress transport modeling for steady and unsteady channel flows with wall injection // Proceedings of the 2nd TSFP Conference, 27–29 June 2001, Stockholm, Sweden. 2001. No. TP2001-128. 6 p.
148. Chaouat B., Schiestel R. Turbulence stress transport modeling for flow prediction in solid rocket motors // Proceedings of the 2nd Spatial Solid Rocket Propulsion Symposium, 21–24 November 2000, Roma, Italy. 2000. No. TP2000-237. 12 p.
149. Chapman T.W., Bauer G.L. Stagnation point viscous flow of an incompressible fluid between porous plates with uniform blowing // Applied Scientific Research. 1975. V. 31. No 3. P. 223–239.
150. Chedevergne F., Casalis G. DNS Investigation of the Taylor–Culick flow stability // AIAA Paper. No. 2007-5796.
151. Chen X.-Q., Pereira J.C.F. Prediction of evaporating spray in anisotropically turbulent gas flow // Numerical Heat Transfer. 1995. No. 27. P. 143–162.
152. Cheng Y.C., Hwang G.J. Experimental studies of laminar flow and heat transfer in a one-porous wall square duct with wall injection // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1995. V. 38. No. 18. P. 3475–3484.
153. Chung Y.M. Initial relaxation of spatially evolving turbulent channel flow with blowing and suction // AIAA Journal. 2001. Vol. 39. No. 11. P. 2091–2099.
154. Chung Y.M., Sung H.J., Boiko A.V. Spatial simulation of the instability of channel flow with local suction/blowing // Physics of Fluids. 1997. V. 9. No. 11. P. 3258–3266.
155. Chung Y.M., Sung H.J., Krogstad P.-A. Modulation of near-wall turbulence structure with wall blowing and suction // AIAA Journal. V. 40. No. 8. P. 1529–1535.

156. Ciucci A., Iaccarino G. Numerical analysis of the turbulent flow and alumina particle trajectories in solid rocket motors // AIAA Paper. No. 1997-2860.
157. Ciucci A., Iaccarino G., Amato M. Numerical investigation of 3D two-phase turbulent flows in solid rocket motors // AIAA Paper. No. 98-3966.
158. Ciucci A., Iaccarino G., Moser R., Najjar F., Durbin P. Simulation of rocket motor internal flows with turbulent mass injection // Center for Turbulence Research. Stanford University, 1998. P. 245–266.
159. Cousteix J., Desopper A., Houdeville R. Structure and development of a turbulent boundary layer in an oscillating external flow // Proceedings of First International Symposium on Turbulent Shear Flows, 18–20 April 1977, Pennsylvania State University, Pennsylvania, USA. 1977. P. 154–171.
160. Couton D., Plourde F., Doan-Kim S. Cold gas simulation of a solid propellant rocket motor // AIAA Journal. 1996. V. 34. No. 12. P. 2514–2522.
161. Couton D., Doan-Kim S., Vuillot F. Numerical simulation of vortex-shedding phenomenon in a channel with flow induced through porous wall // International Journal of Heat and Fluid Flow. 1997. V. 18. No. 3. P. 283–296.
162. Cox S.M. Two-dimensional flow of a viscous fluid in a channel with porous walls // Journal of Fluid Mechanics. 1991. V. 227. P. 1–33.
163. Cox S.M., King A.C. On the asymptotic solution of a high-order nonlinear ordinary differential equation // Proceedings of the Royal Society. Series A. 1997. V. 453 (1958). P. 711–728.
164. Craig J.E. Conventional and liquid metal droplet breakup in aerodynamic nozzle contractions // AIAA Paper. No. 84-0201.
165. Crane L.J. Flow past a stretching plate // ZAMP. 1970. V. 21. P. 645–647.
166. Crowe C.T., Sharma M.P., Stock D.E. The particle-source-in cell (PSI-CELL) model for gas-droplet flows // Journal of Basic Engineering. 1977. V. 99. No. 2. P. 325–331.
167. Culick F.E.C. A review of calculations for unsteady burning of a solid propellant // AIAA Journal. 1968. V. 6. No. 12. P. 2241–2255.
168. Culick F.E.C. Acoustic oscillations in solid propellant rocket chambers // Astronautica Acta. 1966. V. 12. No. 2. P. 113–125.
169. Culick F.E.C. Rotational axisymmetric mean flow and damping of acoustic waves in a solid propellant rocket // AIAA Journal. 1966. V. 4. No. 8. P. 1462–1464.
170. Culick F.E.C. Stability of longitudinal oscillations with pressure and velocity coupling in a solid propellant rocket // Combustion Science and Technology. 1970. V. 2. No. 4. P. 179–201.
171. Culick F.E.C. Stability of three-dimensional motions in a rocket motor // Combustion Science and Technology. 1974. V. 10. No. 3. P. 109–124.
172. Culick F.E.C. The stability of one-dimensional motions in a rocket motor // Combustion Science and Technology. 1973. V. 7. No. 4. P. 165–175.
173. Culick F.E.C. The stability of three dimensional motions in a combustion chamber // Combustion Science and Technology. 1975. V. 10. No. 3. P. 109–124.

174. Danberg J.E. A non-similar moving wall boundary layer problem // Quarterly of Applied Mathematics. 1976. V. 34. P. 305–309.
175. Daniel E., Thevand N. Stability of acoustic wave in two-phase dilute flow with mass transfer // AIAA Journal. 2001. V. 39. No. 11. P. 2121–2130.
176. Das S.P. Slow steady flow of a viscous liquid in an annulus with uniform arbitrary injection and suction velosities along the walls // Journal of Applied Mechanics. 1966. V. 33. No. 3. P. 668–672.
177. Dauenhauer E.C., Majdalani J. Exact self-similarity solution of the Navier–Stokes equations for a porous channel with orthogonally moving walls // Physics of Fluids. 2003. V. 15. No. 6. P. 1485–1495.
178. Davenas A., Thepenier J. Receent progress in the prediction and analysis of the operation of solid rocket motors // Acta Astronautica. 1999. V. 44. No. 7–12. P. 461–469.
179. Dehority G.L. A parametric study of particulate damping based on the model of Temkin and Dobbins // Report of Naval Weapons Center, China Lake. 1970. No. TP-5002.
180. De Luca L.T., Galfetti L., Severini F., Galeotta M., De Amicis R., Babuk V.A., Low-cost and green solid propellants for space propulsion // Proceedings of the 2nd International Conference on Green Propellants for Space Propulsion (ESA SP-557), 7–8 June 2004, Sardinia, Italy. 2004. P. 24.1–24.6.
181. Deng Z., Adrian R.J. Experimental investigation of a turbulent channel flow with a fully transpired wall using particle image velocimetry technique // Proceedings of the 55th Annual Meeting of Division of Fluid Dynamics, 24–26 November 2002, Dallas, Texas. American Physical Society, 2002. No. DH-002.
182. Deng Z., Adrian R.J., Tomkins C.D. Structure of turbulence in channel flow with a fully transpired wall // AIAA Paper. No. 2001-1019.
183. Dotson K.W., Koshigoe S., Pace K.K. Vortex shedding in a large solid rocket motor without inhibitors at the segment interfaces // Journal of Propulsion and Power. 1997. V. 13. No. 2. P. 197–206.
184. Dotson K.W., Murdock J.W., Kamimoto D.K. Launch vehicle dynamic and control effects from solid rocket motor slag ejection // Journal of Propulsion and Power. 1999. V. 15. No. 3. P. 468–475.
185. Doughty J.R. Parallel porous plate channel flow characteristics resulting from nonuniform entry velosity profiles // Journal of Fluids Engineering. 1975. V. 97. No. 1. P. 78–81.
186. Dreizin E.L. Experimental study of aluminum particle flame evolution in normal and micro-gravity // Combustion and Flame. 1999. V. 116. No. 3. P. 323–333.
187. Dunlap R., Blackner A.M., Waugh R.C., Brown R.S., Willoughby P.G. Internal flow field studies in a simulated cylindrical port rocket chamber // Journal of Propulsion and Power. 1990. V. 6. No. 6. P. 690–704.
188. Dunlap R., Willoughby P.G., Hermsen R.W. Flow field in the combustion chamber of a solid propellant rocket motor // AIAA Journal. 1974. V. 12. No. 10. P. 1440–1442.

189. Dupays J. Two-phase unsteady flow in solid rocket motors // Aerospace Science and Technology. 2002. V. 6. No. 6. P. 413–422.

190. Dupays J., Prevost M., Tarrin P., Vuillot F. Effects of particulate phase on vortex shedding driven oscillations in solid rocket motors // AIAA Paper. No. 96-3248.

191. Dupays J., Vuillot F. Propagation of acoustic waves in a two-phase vaporizing mixture // Journal of Propulsion and Power. 2002. Vol. 18. No. 1. P. 222–224.

192. Durlofsky L., Brady J.F. The spatial stability of a class of similarity solutions // Physics of Fluids. 1984. V. 27. No. 5. P. 1068–1076.

193. Eckert E.R.G., Rodi W. Reverse transition turbulent-laminar for flow through a tube with fluid injection // Journal of Applied Mechanics. 1968. V. 35. No. 4. P. 817–819.

194. Eisel J.L., Brown B.G., Price E.W. Pressure, velocity and geometry effect on Al_2O_3 produced during aluminized propellant combustion // AIAA Journal. 1975. V. 13. No. 7. P. 913–917.

195. Epstein P.S., Carhart R.R. The absorption of sound in suspensions and emulsions: water fog in air // Journal of Acoustic Society of America. 1953. V. 25. No. 3. P. 553–565.

196. Fabignon Y., Dupays J., Avalon G., Vuillot F., Lupoglazoff N., Casalis G., Prevost M. Instabilities and pressure oscillations in solid rocket motors // Aerospace Science and Technology. 2003. V. 7. P. 191–200.

197. Fan S., Lakshminarayana B. Low-Reynolds-number k–ε model for unsteady turbulent boundary-layer flows // AIAA Journal. 1993. V. 31. No. 10. P. 1777–1784.

198. Feraille T., Casalis G. Channel flow induced by wall injection of fluid and particles // Physics of Fluids. 2003. V. 15. No. 2. P. 348–360.

199. Ferro S., Gnavi G. Effects of temperature-dependent viscosity in channels with porous walls // Physics of Fluids. 2002. V. 14. No. 2. P. 839–849.

200. Ferro S., Gnavi G. Spatial stability of similarity solutions for viscous flows in channels with porous walls // Physics of Fluids. 2000. V. 12. No. 4. P. 797–802.

201. Fiedler R., Jiao X., Namazifard A., Haselbacher A., Najjar F., Parsons I.D. Coupled fluid-structure 3-d solid rocket motor simulations // AIAA Paper. No. 2001-3954.

202. Flandro G.A. Effects of vorticity on rocket combustion stability // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11. No. 4. P. 607–625.

203. Flandro G.A. On flow turning // AIAA Paper. No. 95-2530.

204. Flandro G.A. Solid propellant acoustic admittance corrections // Journal of Sound and Vibration. 1974. V. 36. No. 3. P.. 297–312.

205. Flandro G.A. Vortex driving mechanism in oscillatory rocket flows // Journal of Propulsion and Power. 1986. V. 2. No. 3. P. 206–214.

206. Flandro G.A., Cai W., Yang V. Turbulent transport in rocket motor unsteady flow // Progress in Astronautics and Aeronautics. 2000. V. 185. P. 837–858.

207. Flandro G.A., Jacobs H.R. Vortex generated sound in cavities // AIAA Paper. No. 73-1014.
208. Flandro G.A., Majdalani J. Aeroacoustic instability in rockets // AIAA Journal. 2003. V. 41. No. 3. P. 485–497.
209. Flandro G.A., Majdalani J., Sims J.D Nonlinear longitudinal mode instability in liquid propellant rocket engine preburners // AIAA Paper. No. 2004-4162.
210. Flandro G.A., Majdalani J., Sims J.D On nonlinear combustion instability in liquid propellant rocket motors // AIAA Paper. No. 2004-3516.
211. Fournier C., Michard M., Bataille F. Numerical simulations of a confined channel flow driven by non-isothermal wall injection // Progress in Computational Fluid Dynamics. 2006. V. 6. No. 1–2. P. 129–136.
212. French J.C., Coats D.E. Automated 3-D solid rocket combustion stability analysis // AIAA Paper. No. 99-2797.
213. Solid rocket motor grid generation and CFD for internal ballistics analysis // AIAA Paper. No. 2005-4162.
214. Gany A., Aharon I. Internal ballistics considerations of nozzleless rocket motors // Journal of Propulsion and Power. 1999. V. 15. No. 6. P. 866–873.
215. Glick R.L., Renie J.P. On the nonsteady flowfield in solid rocket motors // AIAA Paper. No. 84-1475.
216. Goto M., Uchida S. Unsteady flows in a semi-infinite expanding pipe with injection through wall // Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences. 1990. Vol 33. No. 9. P. 14–27.
217. Griffond J. Two-dimensional wavelike equilibrium states in the wall injection-induced planar Taylor flow // Proceedings of the Royal Society. Series A. 2003. V. 459 (2031). P. 749–771.
218. Griffond J., Casalis G. On the nonparallel stability of the injection induced two-dimensional Taylor flow // Physics of Fluids. 2001. V. 13. No. 6. P. 1635–1644.
219. Griffond J., Casalis G., Pineau J.-P. Spatial instability of flow in semiinfinite cylinder with fluid injection through its porous walls // European Journal of Mechanics. B/Fluids. 2000. V. 19. P. 69–87.
220. Guery J.-F. Numerical Modeling of internal flow aerodynamics. I. Steady state computations // RTO/VKI Special Course on Internal Aerodynamics in Solid Rocket Propulsion, 27–31 May 2002, Rhode-Saint-Genese, Belgium. 2002. No. RTO-EN-023. 16 p.
221. Guery J.-F. Numerical modeling of internal flow aerodynamics. II. Unsteady Flows // RTO/VKI Special Course on Internal Aerodynamics in Solid Rocket Propulsion, 27–31 May 2002, Rhode-Saint-Genese, Belgium. 2002. No. RTO-EN-023. 18 p.
222. Gupta P.S., Gupta A.S. Heat and mass transfer on a stretching sheet with suction or blowing // Canadian Journal of Chemical Engineering. 1977. V. 55. P. 744–746.
223. Guezengar D., Francescatto J., Guillard H., Dussauge J.-P. Variations on a k-–ε turbulence model for supersonic boundary layer computations // European Journal of Mechanics. B/Fluids. 1999. V. 18. No. 4. P. 713–738.

224. Hart R.W., McClure F.T. Theory of acoustic instability in solid propellant rocket combustion // Proceedings of the 10th International Symposium on Combustion. Combustion Institute, Pittsburgh PA, 1965. P. 1047–1065.
225. Heath M.T., Dick W.A. Virtual prototyping of solid propellant rockets // Computing in Science and Engineering. 2000. V. 2. No. 2. P. 21–32.
226. Hegab A.M. Vorticity generation and acoustic resonance of simulated solid rocket motor chamber with high wave number wall injection // Computers and Fluids. 2009. V. 38. No. 6. P. 1258–1269.
227. Hegab A.M., Kassoy D.R. Internal flow temperature and vorticity dynamics in channel with transient mass addition // AIAA Journal. 2006. V. 44. No. 4. P. 812–826.
228. Hwang G.J., Cheng Y.C., Ng M.L. Friction factors and heat transfer in a square duct with onewalled injection and suction // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1993. V. 36. No. 9. P. 2429–2440.
229. Investigations of novel energetic materials to stabilize rocket motors // Report of the Caltech Multidisciplinary University Research Initiative (MURI). California Institute of Technology, Jet Propulsion Center. 2002. 275 p.
230. Johnson E.C., Lueptow R.M. Hydrodynamic stability of flow between rotating porous cylinders with radial and axial flow // Physics of Fluids. 1997. V. 9. No. 12. P. 3687–3696.
231. Johnston W.A., Murdock J.W., Koshigoe S., Than P.T. Slag accumulation in the titan SRMU // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11. No. 5. P. 1012–1020.
232. Kalinina S.V. Correlational analysis of turbulent channel flows with injection // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1995. V. 38. No. 8. P. 1527–1531.
233. Kato M., Launder B.E. The modelling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders // Proceedings of the 9th Symposium on Turbulent Shear Flows, 16—18 August 1993, Kyoto, Japan. 1993. V. 9. P. 10.4.1–10.4.6.
234. King J.R., Cox S.M. Asymptotic analysis of the steady-state and time-depend Berman problem // Journal of Engineering Mathematics. 2001. V. 39. No. 1. P. 87–130.
235. Kinny R.B., Sparrow E.M. Laminar swirling flow in a tube with surface mass transfer // Journal of Applied Mechanics. 1970. Vol. 37. No. 4. P. 936–944.
236. Kirkkopru K., Kassoy D.R., Zhao Q. Unsteady vorticity generation and evaluation in a model of solid rocket motor // Journal of Propulsion and Power. 1996. V. 12. No. 4. P. 646–654.
237. Knikker R., Michard M., Bois G. Numerical study of buoyancy effects in a channel flow generated by asymmetric wall injection // Proceedings of the 5th European Thermal Sciences Conference, 18–22 May 2008, Eindhoven, Netherlands. 2008.
238. Kourta A. Acoustic-mean flow interaction and vortex shedding in solid rocket motors // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1996. V. 22. No. 6. P. 449–465.

239. Kourta A. Instability of channel flow with fluid injection and parietal vortex shedding // Computers and Fluids. 2004. V. 33. No. 2. P. 155–178.
240. Kovalnogov N. Unsteady heat transfer and friction in internal axisymmetric flows with longitudinal pressure gradients // Heat Transfer Research. 1993. V. 25. No. 3. P. 304–307.
241. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1974. V. 3. No. 2. P. 269–289.
242. Lee Y.H., Beddini R.A. Acoustically induced turbulent transition in solid propellant rocket chamber flow fields // AIAA Paper. No. 99-2508.
243. Leschziner M.A., Rodi W. Calculation of annular and twin parallel jets using various discretization schemes and turbulent-model variations // Journal of Fluids Engineering. 1981. V. 103. P. 353–360.
244. Lighthill M.J. The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity // Proceedings of the Royal Society. Series A. 1954. V. 224 (1156). P. 1–23.
245. Linan A., Kurdyumov V., Soler J. The flow field in the slender combustion chambers of solid propellant rockets // Simplicity, rigor and relevance in fluid mechanics / Edited by F.J. Higuera, J. Jimenez, J.M. Vega. Barcelona, CIMNE, 2004. P. 129–140.
246. Liou T.M., Lien W.H. Numerical simulations of injection-driven flows in a two-dimensional nozzleless solid-rocket motor // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11. No. 4. P. 600–606.
247. Liou T.M., Lien W.Y., Hwang P.W. Transition characteristics of flow field in a simulated solid-rocket motor // Journal of Propulsion and Power. 1998. V. 14. No. 3. P. 282–289.
248. Loncaric S., Greatrix D.R., Fawaz Z. Star-grain rocket motor –– nonsteady internal ballistics // Aerospace Science and Technology. 2004. V. 8. P. 47–55.
249. Lupoglazoff N., Vuillot F. Numerical simulations of parietal vortex-shedding phenomenon in a cold-flow set-up // AIAA Paper. No. 98-3220.
250. Lupoglazoff N., Vuillot F. Parietal vortex shedding as a cause of instability for long solid propellant motors. Numerical simulations and comparisons with firing tests // AIAA Paper. No. 96-0761.
251. Madabhushi R.K., Sabnis J.S., de Jong F.J., Gibeling H.J. Calculation of two-phase aft-dome flowfield in solid rocket motors // Journal of Propulsion and Power. 1991. V. 7. No. 2. P. 178–184.
252. Majdalani J. On steady rotational high speed flows: the compressible Taylor–Culick profile // Proceedings of the Royal Society. Series A. 2007. V. 463 (2077). P. 131–162.
253. Majdalani J. The boundary layer structure in cylindrical rocket motors // AIAA Journal. 1999. V. 37. No. 4. P. 505–508.
254. Majdalani J. Vorticity dynamics in isobarically closed porous channels. I. Standard perturbations // Journal of Propulsion and Power. 2001. V. 17. No. 2. P. 355–362.

255. Majdalani J., Flandro G.A. The oscillatory pipe flow with arbitrary wall injection // Proceedings of the Royal Society. Series A. 2002. No. 458 (2023). P. 1621–1651.
256. Majdalani J., Flandro G.A., Roh T.S. Convergence of two flowfield models predicting a destabilizing agent in rocket combustion // Journal of Propulsion and Power. 2000. V. 16. No. 3. P. 492–497.
257. Majdalani J., Rienstra S.W. Two asymptotic forms of the rotational solution for wave propagation inside viscous channels with transpiring walls // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2002. V. 55. No. 1. P. 141–162.
258. Majdalani J., Rienstra S.W. Two forms of the rotational solution for wave propagation inside porous channels // AIAA Paper. No. 2002-2985.
259. Majdalani J., Roh T.S. The oscillatory channel flow with large wall injection // Proceedings of the Royal Society. Series A. 2000. V. 456 (1999). P. 1625–1657.
260. Majdalani J., Roh T.S. Vorticity dynamics in isobarically closed porous channels. II. Space-reductive perturbations // Journal of Propulsion and Power. 2001. V. 17. No. 2. P. 363–370.
261. Majdalani J., Saad T. Energy steepened states of the Taylor–Culick profile // AIAA Paper. No. 2007-5797.
262. Majdalani J., Saad T. The Taylor–Culick profile with arbitrary headwall injection // Physics of Fluids. 2007. V. 19. No. 9. P. 093601-19.
263. Majdalani J., Van Moorhem W. Improved time-dependent flow field solution for solid rocket motors // AIAA Journal. 1998. V. 36. No. 2. P. 241–248.
264. Majdalani J., Van Moorhem W.K. Laminar cold-flow model for the internal gas dynamics of a slab rocket motor // Aerospace Science and Technology. 2001. V. 5. P. 193–207.
265. Majdalani J., Van Moorhem W. Multiple-scales solution to the acoustic boundary layer in solid rocket motors // Journal of Propulsion and Power. 1997. V. 13. No. 2. P. 186–193.
266. Majdalani J., Vyas A.B., Flandro G.A. Higher mean-flow approximation for a solid rocket motor with radially regressing walls // AIAA Paper. No. 2001-3870.
267. Malhotra S., Flandro G. On the origin of the DC shift // AIAA Paper. No. 97-3249.
268. Marques F., Sanchez J., Weidman P.D. Generalized Couette-–Poiseuille flow with boundary mass transfer // Journal of Fluid Mechanics. 1998. V. 374. P. 221–249.
269. Mason D.R., Morstadt R.A., Cannon S.M., Gross E.G., Nielsen D.B. Pressure oscillations and structural vibrations in Space Shuttle RSRM and ETM-3 motors // AIAA Paper. No. 2004-3898.
270. Massa L. Spatial linear analysis of the flow in a solid rocket motor with burning walls // Combustion and Flame. 2009. V. 156. No. 4. P. 865–888.
271. Merkli P., Thomann H. Transition to turbulence in oscillating pipe flow // Journal of Fluid Mechanics. 1975. V. 68. P. 567–575.

272. Morduchow M. On laminar flow through a channel or tube with injection // Quarterly of Applied Mathematics. 1956. V. 14. P. 361–368.
273. Morel J., Lavan Z., Bernstein B. Flow through rotating porous annuli // Physics of Fluids. 1977. V. 20. No. 5. P. 726–733.
274. Mostafa A.A., Mongia H.C. On the interaction of particles and turbulent fluid flow // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1988. V. 31. No. 10. P. 2063–2075.
275. Myong H., Kasagi N. A new approach to the improvement of k–ε turbulence model for wall-bounded shear flows // JSME International Journal. 1990. V. 33. No. 1. P. 63–72.
276. Nasr M., Hegab A.M., El-Askary W.A., Yousif K.A. An investigation on the internal flow in simulated solid rocket motor chamber/nozzle configuration // Proceedings of the 13th International Conference on Aerospace Sciences and Aviation Technology (ASAT-13), 26–28 May 2009, Cairo, Egypt. 2009. Paper No. ASAT-13-PP-12. 24 p.
277. Nicoud F., Poinsot T.J., Minh H.H. Direct numerical simulation of a turbulent flow with massive uniform injection // Proceedings of the 10th Symposium on Turbulent Shear Flows, 14–16 August 1995, Pennsylvania State University, USA. 1995. V. 3. P. 13–18.
278. Olson R.M., Eckert E.R.G. Experimental studies of turbulent flow in a porous circular tube with uniform fluid injection through the tube wall // Journal of Applied Mechanics. 1966. V. 3. No. 1. P. 7–17.
279. Orlandi P., Verzicco R. Vortex rings impinging on walls: axisymmetric and three dimensional simulations // Journal of Fluid Mechanics. 1993. V. 256. P. 615–646.
280. Park J.H., Baek S.W. Two-phase radiation-affected characteristics of acoustic wave propagation in a hot gas-particle two-phase medium // Physics of Fluids. 2002. V. 14. No. 2. P. 546–554.
281. Patel M.H. On turbulent boundary layers in oscillatory flow // Proceedings of the Royal Society. Series A. 1977. V. 353 (1672). P. 121–144.
282. Pennel W.T., Eckert E.R.G., Sparrow E.M. Laminarization of turbulent pipe flow by fluid injection // Journal of Fluid Mechanics. 1972. V. 52. P. 451–464.
283. Piomelli U., Moin P., Ferziger J. Large eddy simulation of the flow in a transpired channel // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 1991. V. 5. No. 1. P. 124–128.
284. Prager S. Spiral flow in a stationary porous pipe // Physics of Fluids. 1964. V. 7. P. 907–908.
285. Prevost M., Vuillot F., Traineau J.C. Vortex-shedding driven oscillations in subscale motors for the Ariane 5 MPS solid rocket motors // AIAA Paper. No. 96-3247.
286. Price E. W. Comments on role of aluminum in suppressing instability in solid propellant rocket motors // AIAA Journal. 1971. V. 9. No. 5. P. 987–990.
287. Raithby G. Laminar heat transfer in the thermal entrance region of circular tubes and two-dimensional ducts with wall suction and injection //

International Journal of Heat and Mass Transfer. 1971. V. 14. No. 2. P. 223–243.

288. Ramaprian B.R., Tu S.W. An experimental studyof oscillatory pipe flow at transitional Reynolds numbers // Journal of Fluid Mechanics. 1980. V. 100. No. 3. P. 513–544.
289. Razdan M.K., Kuo K.K. Turbulent flow analysis of erosive burning of cylindrical composite solid propellants // AIAA Journal. 1982. V. 20. No. 1. P. 122–127.
290. Roh T.S., Tseng I.S., Yang V. Effects of acoustic oscillations on flame dynamics of homogeneous propellants in rocket motors // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11. No. 4. P. 640–650.
291. Roh T.S., Yang V. Transient combustion responses of solid propellants to acoustic disturbances in rocket motors // AIAA Paper. No. 95-0602.
292. Sabnis J.S. Numerical simulation of distributed combustion in solid rocket motors with metallized propellants // Journal of Propulsion and Power. 2003. V. 19. No. 1. P. 48–55.
293. Sabnis J.S., Gibeling H.J., McDonald H. Navier–Stokes analysis of solid propellant rocket motor internal flows // Journal of Propulsion and Power. 1989. V. 5. No. 6. P. 657–664 .
294. Sabnis J.S., Madabhushi R.K., Gibeling H.J., McDonald H. On the use of k–ε turbulence model for computation of solid rocket internal flows // AIAA Paper. No. 89-2558.
295. Salita M. Defficiencies and requirements in modeling of slag generation in solid rocket motors // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11. No. 1. P. 10–23.
296. Salita M. Quench bomb investigation of Al_2O_3 formation from solid rocket propellants: analysis of data // Proceedings of 25th JANNAF Combustion Meeting. Chemical Propulsion Information Agency, Johns Hopkins University, Laurel, 1988.
297. Saderholm C.A. Combustion mechanisms of fuel rich propellants in flow fields // AIAA Paper. No. 72-1145.
298. Secomb T.W. Flow in a channel with pulsating walls // Journal of Fluid Mechanics. 1978. V. 88. P. 273–288.
299. Sekita R., Watanabe A., Hirata K., Imoto T. Lessons learned from H-2 failure and enhancement of H-2A project // Acta Astronautica. 2001. V. 48. No. 5–12. P. 431–438.
300. Sellars J.R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds number // Journal of Applied Physics. 1955. Vol. 26. No. 4. P. 489–490.
301. Sen B.A., Yuksel U.G., Kirkkopru K. Comparison of turbulence models for an internal flow with side wall mass injection // Proceedings of the International Symposium on Energy Conversion Fundamentals, 21–25 June 2004, Istanbul, Turkey. 2004. Paper No. ADM001793. 31 p.
302. Shaeffer C.W., Brown R.S. Oscillatory internal flow studies // Report of United Technologies, San Jose. 1992. No. TR-2060-FR.

303. Shimada T., Daimon Y., Sekino N. Numerical simulation of flow inside a solid rocket motor by Eulerian-hybrid approach with relation to nozzle inlet ablation // Proceedings of the 8th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows, July 2007, Lyon, France. 2007. No. ISAIF8-00109.
304. Shrestha G.M., Terrill R.M. Laminar flow with large injection through parallel and uniformly porous walls of different permeability // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1968. V. 21. No. 4. P. 413–432.
305. Shuen J.S., Chen L.D., Faeth G.M. Evaluation of a stochastic model of particle dispersion in a turbulent round jet // AIChE Journal. 1983. V. 29. No. 1. P. 167–170.
306. Skalak F.M., Wang C.Y. On the non-unique solutions of laminar flow through a porous tube or channel // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1978. V. 34. No. 3. P. 535–544.
307. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. The Basic Experiment // Monthly Weather Review. 1963. V. 91. No. 3. P. 99–164.
308. Smith T.M., Roach R.L., Flandro G.A. Numerical study of the unsteady flow in a simulated solid rocket motor // AIAA Paper. No. 93-0112.
309. Smith-Kent R., Perkins F., Abel R. A potential two-phase model for predicting SRM slag // AIAA Paper. No. 93-2307.
310. Staab P.L., Kassoy D.R. Three-dimensional flow in a cylinder with sidewall mass addition // Physics of Fluids. 2002. V. 14. No. 9. P. 3141–3159.
311. Staab P.L., Kassoy D.R. Three-dimensional, unsteady, acoustic-shear flow dynamics in a cylinder with sidewall mass addition // Physics of Fluids. 1997. V. 9. No. 12. P. 3753–3763.
312. Staab P.L., Rempe M.J., Kassoy D.R. Acoustic-rotational internal flow caused by transient sidewall mass addition // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2004. V. 65. No. 2. P. 587–617.
313. Staab P.L., Zhao Q., Kassoy D.R., Kirkkopru K. Coexisting acoustic-rotational flow in a cylinder with axisymmetric sidewall mass addition // Physics of Fluids. 1999. V. 11. No. 10. P. 2935–2951.
314. Stella F., Paglia F., Giangi M., Telara M. Numerical simulation of pressure oscillations in solid rocket motors // Proceedings of the European Conference in Aerospace Sciences, 4–7 July 2005, Moscow, Russia. 2005. 9 p.
315. Stevenson T. A law of the wall for turbulent boundary layers with suction or injection // Journal of Thermophysics. 1963. V. 5. No. 1. P. 124–128.
316. Sumitani Y., Kasagi N. Direct numerical simulation of turbulent transport with uniform wall injection and suction // AIAA Journal. 1995. V. 33. No. 7. P. 1220–1228.
317. Summerfield M., Krier H. Role of aluminum in suppressing instability in solid propellant rocket motors // Problems of Hydrodynamics and Continuum Mechanics. Society for Independent and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1969. P. 703–717.

318. Taylor G.I. Fluid flow in regions bounded by porous surfaces // Proceedings of the Royal Society. Series A. 1956. V. 234 (1199). P. 456–475.
319. Taylor C.L., Banks W.H.H., Zaturska M.B., Drazin P.G. Three-dimensional flow in a porous channel // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 1991. V. 44. No. 1. P. 105–115.
320. Temkin S. Attenuation and dispersion of sound in dilute suspensions of spherical particles // Journal of Acoustical Society of America. 2000. V. 108. No. 1. P. 126–146.
321. Temkin S., Dobbins R.A. Attenuation and dispersion of sound by particle-relaxation processes // Journal of the Acoustical Society of America. 1966. V. 40. No. 2. P. 317–324.
322. Terrill R.M. An exact solution for flow in a porous pipe // ZAMP. 1982. V. 33. P. 547–552.
323. Terrill R.M. Flow though a porous annulus // Applied Scientific Research. 1967. V. 17. No. 3. P. 204–222.
324. Terrill R.M. Fully developed flow in a permeable annulus // Journal of Applied Mechanics. 1968. V. 35. No. 1. P. 184–186.
325. Terrill R.M. Heat transfer in laminar flow between parallel porous plates // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1965. V. 8. No. 12. P. 1491–1497.
326. Terrill R.M. Laminar flow in a uniformly porous channel // The Aeronautical Quarterly. 1964. V. 15. No. 3. P. 299–310.
327. Terrill R.M. Laminar flow in a porous tube // Journal of Fluids Engineering. 1983. V. 105. P. 303–306.
328. Terril R.M., Shrestha G.M. Laminar flow through a channel with uniformly porous walls of different permeability // Applied Scientific Research. 1965. V. 15. No. 6. P. 440–468.
329. Terrill R.M., Thomas P.W. On laminar flow through a uniformly porous pipe // Applied Scientific Research. 1969. V. 21. No. 1. P. 37–67.
330. Terrill R.M., Thomas P.W. Spiral flow in a porous pipe // Physics of Fluids. 1973. V. 16. No. 3. P. 356–359.
331. Traineau J.C., Hervat P., Kuentzmann P. Cold-flow simulation of a two-dimensional nozzleless solid-rocket motor // AIAA Paper. No. 86-1447.
332. Traineau J.C., Prevost M., Lupoglazoff N. A sub-scale test program to assess the vortex shedding driven instabilities in segmented solid rocket motors // AIAA Paper. No. 97-3247.
333. Tsangaris S., Kondaxakis D., Vlachakis N.W. Exact solution for flow in a porous pipe with unsteady wall suction and/or injection // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2007. V. 12. No. 7. P. 1181–1189.
334. Tseng C., Tseng I.S. Chu W., Yang V. Interactions between acoustic waves and premixed flames in porous chambers // AIAA Paper. No. 94-3328.
335. Tseng I.-S., Yang V. Combustion of a double-base homogeneous propellant in a rocket motor // Combustion and Flame. 1994. Vol. 96. No. 4. P. 325–342.

336. Uchida S., Aoki H. Unsteady flows in a semi-infinite contracting or expanding pipe // Jourbnal of Fluid Mechanics. 1977. Vol 82. P. 371–387.
337. Ugurtas B., Avalon G., Lupoglazoff N., Vuillot F., Casalis G. Stability and acoustic resonance of internal flows generated by side injection // Progress in Aeronautics and Astrophysics. 2000. V. 185. P. 823–836.
338. Venugopal P., Najjar F.M., Moser R.D. Numerical simulations of model solid rocket motor flows // AIAA Paper. No. 2001–3950.
339. Verma P.D., Bansal J.L. Laminar flow in an annulus with porous walls of different permeability // Proceedings of Indian Academy of Sciences. 1967. V. 35. No. 1. P. 77–93.
340. Vetel J., Plourde F., Kim S.D. Amplification of a shear-layer instability by vorticity generation at an injecting wall // AIAA Journal. 2004. V. 42. No. 1. P. 35–46.
341. Vetel J., Plourde F., Kim S.D., Guery J.-F. Numerical simulations of wall and shear layer instabilities in a cold flow setup // Journal of Propulsion and Power. 2003. V. 19. No. 2. P. 297–306.
342. Volkov K.N. Combustion of single aluminium droplet in two-phase flow // Heterogeneous Combustion / Edited by G.I. Stoev. USA, Nova Science, 2010. 70 p.
343. Volkov K.N. Large-eddy simulation of free shear and wall-bounded turbulent flows // Atmospheric Turbulence, Meteorological Modelling and Aerodynamics / Edited by Peter R. Lang and Frank S. Lombargo. USA, Nova Science, 2010. P. 505–574.
344. Volkov K.N. Large-eddy simulation of turbulent gas-particle flows in the duct induced by the wall injection // Proceedings of the 3rd M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, 14–17 June 2005, Cambridge, USA. Amsterdam, Elsevier Science Ltd, 2005. P. 928–931.
345. Vuillot F. Acoustic mode determination in solid rocket motor stability analysis // Journal of Propulsion and Power. 1987. Vol. 3. No. 4. P. 381–384.
346. Vuillot F. Numerical computation of acoustic boundary layers in large solid propellant space booster // AIAA Paper. No. 91-0206.
347. Vuillot F. Vortex-shedding phenomena in solid rocket motors // Journal of Propulsion and Power. 1995. V. 11. No. 4. P. 626–639.
348. Vuillot F., Avalon G. Acoustic boundary layers in solid propellant rocket motors using Navier–Stokes equations // Journal of Propulsion and Power. 1991. V. 7. No. 1. P. 231–239.
349. Vuillot F., Basset T., Dupays J., Daniel E., Lupoglazoff N. 2D Navier–Stokes stability computations for solid rocket motors: rotational, combustion, and two-phase flow effects // AIAA Paper. No. 97-3326.
350. Vuillot F., Casalis G. Motor flow instabilities // RTO/VKI Special Course on Internal Aerodynamics in Solid Rocket Propulsion, 27–31 May 2002, Rhode-Saint-Genese, Belgium. 2002. 39 p.
351. Vuillot F., Lupoglazoff N. Combustion and turbulent flow effects in 2D unsteady Navier–Stokes simulations of oscillatory solid rocket motors — first applications // AIAA Paper. No. 96-0884.

352. Vuillot F., Scherrer D., Habiballah M. CFD code validation for space propulsion applications // Proceedings of the 5th International Symposium on Liquid Space Propulsion –– Long Life Combustion Devices Technology, 27–30 October 2003, Chattanooga. 2003. No. TP2003-168. 36 p.
353. Vuillot F., Tissier P.-Y., De Amicis R. Stability predictions for large segmented solid propellant rocket motors // ONERA Report. 1996. No. TAP-96-045. 16 p.
354. Vuillot F., Traineau J.C., Prevost M., Lupoglazoff N. Experimental validation of stability assessment methods for segmented solid propellant motors // AIAA Paper. No. 93-1883.
355. Wang C.Y. Effect of spreading of material on the surface of a fluid — an exact solution // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1971. V. 6. No. 2. P. 255–262.
356. Wang C.Y. Stretching a surface in a rotating fluid // ZAMP. 1988. V. 39. P. 177–185.
357. Wang C.Y. The three-dimensional flow due to a stretching flat surface // Physics of Fluids. 1984. V. 27. P. 1915–1917.
358. Wang Q. Development of erosive burning models for CFD predictions of solid rocket motor internal environments // AIAA Paper. No. 2003-4809.
359. Wang Q., Squires K.D. Large eddy simulation of particle-laden turbulent channel flow // Physics of Fluids. 1996. V. 8. No. 5. P. 1207–1223.
360. Wang X., Jackson T.L., Buckmaster J. Numerical simulation of the three-dimensional combustion of aluminized heterogeneous propellants // Proceedings of the Combustion Institute. 2007. Vol. 31. No. 2. P. 2055–2062.
361. Watson E.B.B., Banks W.H.H., Zaturska M.B., Drazin P.G. On transition to chaos in a two-dimensional channel flow symmetrically driven by asselerating walls // Journal of Fluid Mechanics. 1990. V. 212. P. 451–485.
362. White F.M. Laminar flow in a uniformly porous tube // Journal of Applied Mechanics. 1962. V. 29. No. 1. P. 201–204.
363. Whitesides R.H., Dill R.A., Purinton D.C., Sambamurthi J.K. Design of a subscale propellant slag evaluation motor using two-phase fluid dynamic analysis // AIAA Paper. No. 96-2780.
364. Yakhot A., Orszag S.A., Yakhot V., Israeli M. Renormalization group formulation of large-eddy simulation // Journal of Scientific Compututing. 1986. V. 1. No. 1. P. 3–51.
365. Yamada K., Ishikawa N. Simulative study on the erosive burning of solid rocket motors pages // AIAA Journal. 1976. V. 14. No. 9. P. 1170–1176.
366. Yetter R.A., Risha G.A., Son S.F. Metal particle combustion and nanotechnology // Proceedings of the Combustion Institute. 2009. V. 32. No. 2. P. 1819–1838.
367. Yuan S.W., Finkelstein A.B. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls // Journal of Applied Physics. 1956. V. 27. No. 3. P. 267–269.
368. Yuan S.W., Finkelstein A.B. Heat transfer in laminar pipe flow with uniform coolant injection // Jet Propulsion. 1958. V. 28. No. 3. 178–181.

369. Yuan S.W., Finkelstein A.B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall // Transactions of the ASME. 1956. V. 78. No. 4. P. 719–724.
370. Yuksel U.G., Sen B.A., Kirkkopru K. Computation of flow inside a channel with sidewall mass injection using various turbulence models // Proceedings of the 4th International Conference on Computational Heat and Mass Transfer, 17–20 May 2005, Paris–Cachan, France. 2005. No. 296.
371. Zaturska M.B., Banks W.H.H. Flow in a pipe driven by suction at an accelerating wall // Acta Mechanica. 1995. V. 110. No. 1–4. P. 111–121.
372. Zaturska M.B., Banks W.H.H. New solution for flow in a channel with porous walls and/or non-rigid walls // Fluid Dynamics Research. 2003. V. 33. No. 1–2. P. 57–71.
373. Zaturska M.B., Banks W.H.H. Suction-driven flow in a porous pipe // ZAMM. 1995. V. 75. P. 21–30.
374. Zaturska M.B., Drazin P.G., Banks W.H.H. On the flow of a viscous fluid driven along a channel by suction at porous walls // Fluid Dynamics Research. 1988. V. 4. No. 3. P. 151–160.
375. Zhao Q., Kassoy D.R. The generation and evolution of unsteady vorticity in a model of a solid rocket engine combustor // AIAA Paper. No. 94-0779.
376. Zhao Q., Staab P.L., Kassoy D.R., Kirkkopru K. Acoustically generated vorticity in an internal flow // Journal of FLuid Mechanics. 2000. V. 413. P. 247–285.
377. Zink J.W., Delsasso L.P. Attenuation and dispersionof sound by solid particles suspended in a gas // Journal of Acoustic Society of America. 1958. V. 30. No. 6. P. 765–771.