



Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Физический факультет

В. Т. Волков, А. Г. Ягола

Интегральные уравнения

Вариационное исчисление

Методы решения задач

Учебное пособие для студентов 2 курса
физического факультета

Москва 2006

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Ягола А.Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. (общий курс). Курс лекций опубликован в Интернет:
<http://afrodita.phys.msu.ru/download/inteq/yagola/>.
2. Васильева А.Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. М.: Физматлит, 2002.
3. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: УРСС, 2000.
4. Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 2003.

Дополнительная

1. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
2. Г.Е. Шилов. Введение в теорию линейных пространств.
3. В.В. Городецкий, Н.И. Нагнибида, П.П. Настасиев. Методы решения задач по функциональному анализу. Киев: Выща школа, 1991.
4. М.М. Вайнберг. Функциональный анализ. М.: Просвещение, 1979.
5. Функциональный анализ в примерах и задачах. Методическое пособие под ред. В.В. Корнева. Изд. Саратовского ун-та, 1998.
6. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2001.
7. Владимиров В.С., Вашарин А.А. Сборник задач по уравнениям математической физике. М.: Физматлит, 2001.

ТЕМА 1

Метрические, нормированные и евклидовы пространства

Основные определения и теоремы

Множество L называется (вещественным) линейным пространством, если для любых двух его элементов x, y определен элемент $x + y \in L$ (называемый суммой x и y), и для любого элемента $x \in L$ и любого (вещественного) числа α определен элемент $\alpha x \in L$, причем выполнены следующие условия:

- 1) для любых элементов $x, y \in L$ $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);
- 2) для любых элементов $x, y, z \in L$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);
- 3) существует элемент $\theta \in L$ (называемый нулевым элементом, или нулем пространства L) такой, что для любого элемента $x \in L$ $x + \theta = x$ (существование нулевого элемента);
- 4) для любого элемента $x \in L$ существует элемент $(-x) \in L$ (называемый обратным к x) такой, что $x + (-x) = \theta$ (существование обратного элемента);
- 5) для любых элементов $x, y \in L$ и любого (вещественного) числа α $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (дистрибутивность умножения суммы элементов на число);
- 6) для любых (вещественных) чисел α и β и любого элемента $x \in L$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (дистрибутивность умножения суммы чисел на элемент);
- 7) для любых (вещественных) чисел α, β и любого элемента $x \in L$ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ (ассоциативность умножения на число);
- 8) для любого элемента $x \in L$ $1 \cdot x = x$ (свойство единицы).

Элементы $x_1, x_2, \dots, x_m$ линейного пространства L называются линейно зависимыми, если существуют такие (вещественные) числа $C_1, C_2, \dots, C_m$, не все равные нулю, что

$$\sum_{k=1}^m C_k x_k = \theta;$$

если же последнее равенство имеет место в единственном случае

$C_1 = C_2 = \dots = C_m = 0$, то элементы $x_1, x_2, \dots, x_m$ - линейно независимы.

Натуральное число n , называется размерностью линейного пространства, если существуют n линейно независимых элементов пространства, а любые $n+1$ элементов - линейно зависимы. В этом случае линейное пространство называется конечномерным (n -мерным).

Если для любого натурального n можно указать n линейно независимых элементов, то линейное пространство называется бесконечномерным.

Множество M называется метрическим пространством, если для любых двух его элементов $x, y \in M$ определено вещественное число $\rho(x, y)$ (называемое метрикой, или расстоянием), причем выполнены следующие условия:

- 1) для любых элементов $x, y \in M$ $\rho(x, y) \geq 0$, причем $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда элементы x и y совпадают (неотрицательность метрики);
- 2) для любых элементов $x, y \in M$ $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность метрики);
- 3) для любых элементов $x, y, z \in M$ $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Метрическое пространство не обязательно является линейным.

Последовательность элементов метрического пространства $x_n \in M$, $n = 1, 2, \dots$ сходится к элементу $x_0 \in M$ ($x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$), если $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Линейное пространство N называется нормированным, если для любого элемента $x \in N$ определено (вещественное) число $\|x\|$ (называемое нормой), причем выполнены следующие условия:

- 1) для любого элемента $x \in N$ $\|x\| \geq 0$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$ - нулевой элемент пространства;
- 2) для любого элемента $x \in N$ и любого (вещественного) числа α $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (неотрицательная однородность нормы);
- 3) для любых элементов $x, y \in N$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Нормированное пространство является метрическим, если положить $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Последовательность элементов нормированного пространства $x_n \in N$, $n = 1, 2, \dots$ сходится (по норме пространства N) к элементу $x_0 \in N$ ($x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$), если $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Из сходимости последовательности x_n по норме пространства следует сходимость последовательности (числовой!) норм, т.е. если $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\|x_n\| \rightarrow \|x_0\|$ при $n \rightarrow \infty$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Последовательность x_n , $n = 1, 2, \dots$ элементов нормированного пространства N называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K такой, что для любого $n \geq K$ и любого натурального p выполнено неравенство $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \varepsilon$.

Если последовательность сходится, то она фундаментальна. Если же любая фундаментальная последовательность элементов сходится, то нормированное пространство называется полным.

Полное нормированное пространство называется банаховым.

Последовательность x_n , $n = 1, 2, \dots$ элементов нормированного пространства N называется ограниченной, если существует константа C такая, что $\|x_n\| \leq C$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

Последовательность x_n , $n = 1, 2, \dots$ элементов нормированного пространства N , обладающая тем свойством, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся, называется компактной.

Любая компактная последовательность является ограниченной. В конечномерном пространстве верно и обратное утверждение, однако, для бесконечномерных пространств это, вообще говоря, не так.

Линейное пространство E называется евклидовым, для любых двух элементов $x, y \in E$ определено вещественное число (x, y) , называемое скалярным произведением, причем выполнены следующие условия:

- 1) для любых элементов $x, y \in E$ $(x, y) = (y, x)$ (симметричность);
- 2) для любых элементов $x, y, z \in E$ $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$ (аддитивность по первому аргументу);
- 3) для любых элементов $x, y \in E$ и любого вещественного числа α $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ (однородность по первому аргументу);
- 4) для любого $x \in E$ $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$ (свойство скалярного квадрата).

В евклидовом пространстве E всегда можно ввести норму, порожденную скалярным произведением $\|x\|_E = \sqrt{(x, x)}$.

Для любых двух элементов x и y произвольного евклидова пространства выполняется неравенство Коши-Буняковского $(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$ или $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда элементы x и y линейно зависимы.

Напомним определения основных встречающихся далее линейных пространств.

1. Нормированное пространство $C[a, b]$. Элементами этого пространства являются непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции. Норма определяется как $\|y\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|$, сходимость по норме пространства $C[a, b]$ - равномерная сходимость. Пространство $C[a, b]$ - банахово (полное).
2. Нормированное пространство $C^{(p)}[a, b]$. Элементами этого пространства являются функции, непрерывные с производными до p -го порядка включительно на отрезке $[a, b]$. Норма определяется как $\|y\|_{C^{(p)}[a, b]} = \sum_{k=0}^p \max_{x \in [a, b]} |y^{(k)}(x)|$, сходимость по норме пространства $C^{(p)}[a, b]$ - равномерная со всеми производными до p -го порядка. Пространство $C^{(p)}[a, b]$ - банахово.
3. Евклидово (нормированное) пространство $h[a, b]$. Элементами этого пространства являются непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции. Для любых двух непрерывных функций положим $(y, z) = \int_a^b y(x)z(x)dx$ - скалярное произведение, и введем норму, порожденную скалярным произведением $\|y\|_{h[a, b]} = \sqrt{\int_a^b y^2(x)dx}$; сходимость по норме пространства $h[a, b]$ - сходимость в среднем. Пространство $h[a, b]$ не является полным.

Примеры решения задач

Пример 1.1. Доказать, что множество (вещественных) функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$ образует (вещественное) линейное пространство (пространство $C[a, b]$).

Решение. Так как сумма двух непрерывных функций, а также произведение непрерывной функции на вещественное число, также являются непрерывными функциями, то для решения задачи необходимо проверить аксиомы линейного пространства.

- 1) $\forall y(x), z(x) \in C[a, b]$ $y(x) + z(x) = z(x) + y(x)$;
- 2) $\forall y(x), z(x), w(x) \in C[a, b]$ $[y(x) + z(x)] + w(x) = y(x) + [z(x) + w(x)]$;
- 3) нулевым элементом пространства естественно считать $y(x) \equiv 0 \in C[a, b]$;
- 4) $\forall y(x) \in C[a, b]$ существует противоположный элемент $-y(x) \in C[a, b]$;
- 5) $\forall y(x), z(x) \in C[a, b], \forall \alpha$ $\alpha [y(x) + z(x)] = \alpha y(x) + \alpha z(x)$;
- 6) $\forall y(x) \in C[a, b], \forall \alpha, \beta$ $(\alpha + \beta)y(x) = \alpha y(x) + \beta y(x)$;
- 7) $\forall y(x) \in C[a, b], \forall \alpha, \beta$ $(\alpha\beta)y(x) = \alpha [\beta y(x)]$;
- 8) $\forall y(x) \in C[a, b]$ $1 \cdot y(x) = y(x)$.

Пример 1.2. Доказать, что пространство $C[a, b]$ является нормированным, если для $\forall y(x) \in C[a, b]$ определить $\|y\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x)|$.

Решение. Для доказательства достаточно убедиться в корректности указанного определения нормы, т.е. проверить аксиомы нормы.

- 1) $\forall y(x) \in C[a, b]: \|y\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x)| \geq 0$, причем $\|y\|_{C[a, b]} = 0 \Leftrightarrow y(x) \equiv 0 = \theta$;
- 2) $\forall y(x) \in C[a, b], \forall \alpha: \|\alpha y\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |\alpha y(x)| = |\alpha| \cdot \max_{x \in [a, b]} |y(x)| = |\alpha| \cdot \|y\|_{C[a, b]}$;
- 3) $\forall y(x), z(x) \in C[a, b]: \|y + z\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x) + z(x)| \leq$
 $\leq \max_{x \in [a, b]} (|y(x)| + |z(x)|) \leq \max_{x \in [a, b]} |y(x)| + \max_{x \in [a, b]} |z(x)| = \|y\|_{C[a, b]} + \|z\|_{C[a, b]}.$

Пример 1.3. Доказать неравенство Коши-Буняковского в пространстве $h[a, b]$ и проверить корректность определения нормы в этом пространстве $\|y\|_{h[a, b]} = \sqrt{\int_a^b y^2(s) ds}$.

Решение. Неравенство Коши-Буняковского в пространстве $h[a, b]$ имеет вид

$$(y, z)^2 \equiv \left[\int_a^b y(x)z(x)dx \right]^2 \leq \int_a^b y^2(x)dx \cdot \int_a^b z^2(x)dx \quad \forall y(x), z(x) \in h[a, b].$$

Для доказательства рассмотрим следующее очевидное соотношение $0 \leq (y + \lambda z, y + \lambda z) = (y, y) + 2\lambda(y, z) + \lambda^2(z, z)$, которое справедливо для любых двух элементов пространства $y(x), z(x) \in h[a, b]$ и любого вещественного числа λ . Поэтому дискриминант квадратного (относительно λ) трехчлена должен быть отрицательным, т.е. $4(y, z)^2 - 4(y, y)(z, z) \leq 0$, откуда и получаем требуемое неравенство:

$$(y, z)^2 \equiv \left[\int_a^b y(x)z(x)dx \right]^2 \leq (y, y)(z, z) \equiv \int_a^b y^2(x)dx \cdot \int_a^b z^2(x)dx.$$

Замечание. Приведенное доказательство может быть проведено в любом евклидовом пространстве.

Для проверки корректности определения нормы в пространстве $h[a, b]$ нужно убедиться в справедливости соответствующих аксиом в определении нормы.

- 1) $\forall y(x) \in h[a, b]: \|y\|_{h[a, b]} = \sqrt{\int_a^b y^2(x)dx} \geq 0$, причем $\|y\|_{h[a, b]} = 0 \Leftrightarrow y(x) \equiv 0 = \theta$;
- 2) $\forall y(x) \in h[a, b], \forall \alpha: \|\alpha y\|_{h[a, b]} = \sqrt{\int_a^b \alpha^2 y^2(x)dx} = |\alpha| \cdot \sqrt{\int_a^b y^2(x)dx} = |\alpha| \cdot \|y\|_{h[a, b]}$;
- 3) $\forall y(x), z(x) \in h[a, b]: \|y + z\|_{h[a, b]}^2 = \int_a^b (y(x) + z(x))^2 dx = \int_a^b (y^2(x) + z^2(x) + 2y(x)z(x))dx \leq$

(с учетом неравенства Коши-Буняковского)

$$\leq \int_a^b y^2(x)dx + \int_a^b z^2(x)dx + 2\sqrt{\int_a^b y^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b z^2(x)dx} = (\|y\|_{h[a, b]} + \|z\|_{h[a, b]})^2,$$

откуда получаем неравенство треугольника $\|y + z\|_{h[a, b]} \leq \|y\|_{h[a, b]} + \|z\|_{h[a, b]}.$

Пример 1.4. Найти норму $y(x) = \sin x + \cos x$

а) в пространстве $C[0, 2\pi]$;

б) в пространстве $h[0, 2\pi]$.

Решение. а) $\|\sin x + \cos x\|_{C[0, 2\pi]} = \max_{x \in [0, 2\pi]} |\sin x + \cos x| = \sqrt{2}$;

б) $\|\sin x + \cos x\|_{h[0, 2\pi]} = \sqrt{\int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x)^2 dx} = \sqrt{2\pi}$.

Пример 1.5. Доказать, что любая сходящаяся последовательность элементов нормированного пространства фундаментальна.

Решение. Последовательность x_n элементов нормированного пространства N называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер K такой, что для любого $n \geq K$ и любого натурального p выполнено $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \varepsilon$.

Пусть последовательность x_n элементов нормированного пространства сходится (по норме пространства N) к элементу $x_0 \in N$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер K такой, что при $n \geq K$ и любом натуральном p одновременно выполнены два неравенства: $\|x_n - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ и $\|x_{n+p} - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Пользуясь неравенством треугольника, получим при $n \geq K$ и любом натуральном p $\|x_{n+p} - x_n\| = \|x_{n+p} - x_0 + x_0 - x_n\| \leq \|x_{n+p} - x_0\| + \|x_n - x_0\| \leq \varepsilon$, что и требовалось.

Пример 1.6. Доказать, что пространство $h[a, b]$ не является полным.

Решение. Для доказательства достаточно построить пример фундаментальной последовательности элементов пространства $h[a, b]$, которая не является сходящейся в этом пространстве.

Рассмотрим для определенности пространство $h[-1, 1]$ и такую последовательность непрерывных функций (элементов этого пространства):

$$y_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx, & 0 \leq |x| \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

а) Докажем, что эта последовательность фундаментальна в пространстве $h[-1, 1]$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и положим $m > n$, тогда существует такое натуральное число $N(\varepsilon)$, для которого

$$\|y_n(x) - y_m(x)\|_{h[-1,1]}^2 = \int_{-1}^1 (y_n(x) - y_m(x))^2 dx = 2 \int_0^{1/m} (mx - nx)^2 dx + 2 \int_{1/m}^{1/n} (1 - nx)^2 dx = \frac{2}{3n} + \frac{2n}{3m^2} - \frac{4}{3m} \leq \frac{4}{3n} < \varepsilon$$

при $\forall m > n > N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{4}{3\varepsilon} \right\rceil + 1$, что и требовалось доказать.

б) Пусть последовательность $y_n(x)$ сходится в пространстве $h[-1,1]$, т.е. существует непрерывная функция $\varphi(x)$ такая, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon)$ и при $\forall n \geq N_1(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\|y_n(x) - \varphi(x)\|_{h[-1,1]} = \sqrt{\int_{-1}^1 (y_n(x) - \varphi(x))^2 dx} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим разрывную функцию
$$\psi(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$

Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon)$ такое, что при $\forall n \geq N_2(\varepsilon)$ имеем

$$\sqrt{\int_{-1}^1 (y_n(x) - \psi(x))^2 dx} = \sqrt{2 \int_0^{1/n} (nx - 1)^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3n}} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, для $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ справедливы следующие соотношения:

$$0 < \sqrt{\int_{-1}^1 (\varphi(x) - \psi(x))^2 dx} = \sqrt{\int_{-1}^1 [(\varphi(x) - y_n(x)) + (y_n(x) - \psi(x))]^2 dx} \leq$$

(здесь использовано неравенство Коши-Буняковского)

$$\leq \sqrt{\int_{-1}^1 (\varphi(x) - y_n(x))^2 dx} + \sqrt{\int_{-1}^1 (y_n(x) - \psi(x))^2 dx} = \|y_n(x) - \varphi(x)\|_{h[-1,1]} + \sqrt{\int_{-1}^1 (y_n(x) - \psi(x))^2 dx} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ получаем противоречие, а значит предположение о сходимости последовательности $y_n(x)$ в пространстве $h[-1,1]$ неверно.

Итак, построенная последовательность $y_n(x)$ фундаментальна в пространстве $h[-1,1]$, но не является сходящейся, что и требовалось доказать.

Пример 1.7. Доказать, что не всякая ограниченная последовательность в пространстве $C[a,b]$ является компактной.

Решение. Рассмотрим пространство $C[0,1]$ и последовательность элементов этого пространства $y_n = \sin 2^n \pi x$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Очевидно, $\|y_n\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |y_n(x)| = 1$, т.е. последовательность ограничена.

Покажем, что никакая ее подпоследовательность не может сходиться в $C[0,1]$.

Действительно, для любого номера i существует точка $x^* = \frac{1}{2^{i+1}} \in [0, 1]$ такая, что в ней $y_i(x^*) = \sin 2^i \pi \frac{1}{2^{i+1}} = 1$. При этом для любого $k > i$ в этой же точке имеет место $y_k(x^*) = \sin 2^k \pi \frac{1}{2^{i+1}} = 0$. Следовательно, $\|y_i - y_k\|_{C[0,1]} \geq |y_i(x^*) - y_k(x^*)| = 1$, т.е. никакая подпоследовательность рассматриваемой последовательности не является фундаментальной, а значит и не может сходиться.

Задачи для самостоятельного решения

- 1.1 Доказать, что пространство $h[a, b]$ является линейным.
- 1.2 Доказать, что пространство $C^{(p)}[a, b]$ является линейным.
- 1.3 Доказать, что в пространстве $\mathbb{R}^1$ нельзя ввести норму по формуле $\|x\| = |\arctg x|$.
- 1.4 Можно ли определить нормы следующими функциями для указанных множеств:
- а) $\|y\| = \max_{x \in [a, \frac{a+b}{2}]} |y(x)|$ в $C[a, b]$;
- б) $\|y\| = |y(a)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x)|$ в $C^{(1)}[a, b]$;
- в) $\|y\| = |y(b) - y(a)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x)|$ в $C^{(1)}[a, b]$.
- 1.5 Найти нормы следующих функций, рассматривая их как элементы пространств $C[0, 2]$ и $C^{(1)}[0, 2]$:
- а) $y = 2 \sin \pi x - \cos \pi x$
- б) $y = 3 \cos \pi x - \sin \pi x$
- в) $y = x^2 - x$
- г) $y = x^2 - 4x$
- д) $y = x^2 - 6x$.
- 1.6 Найти нормы в пространстве $h[0, 1]$:
- а) $y = 2 \sin \pi x - \cos \pi x$
- б) $y = x^2 - x$
- в) $y = x^3 - 1$.
- 1.7 Доказать, что если последовательность элементов нормированного пространства сходится, то эта последовательность ограничена.
- 1.8 Построить пример, показывающий, что из сходимости в среднем на отрезке $[a, b]$ функциональной последовательности не следует равномерная (и даже поточечная) сходимость.
- 1.9 Построить пример бесконечной ортонормированной системы в пространстве $h[a, b]$.
- 1.10 Привести пример ограниченной некомпактной последовательности в пространстве $h[a, b]$.
- 1.11 Доказать, что последовательность $y_n(x) = x^n$ ограничена и некомпактна в пространстве $C[0, 1]$.
- 1.12 Доказать, что последовательность непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $y_n(x)$, удовлетворяющих неравенству $\|y_n\|_{h[a, b]}^2 + \|y_n'\|_{h[a, b]}^2 \leq \gamma$, $\gamma > 0$, является компактной в пространстве $C[a, b]$.

Ответы к задачам

- 1.4 а) нет; б) да; в) нет.
- 1.5 а) $\|y\|_{C[0, 2]} = \sqrt{5}$, $\|y\|_{C^{(1)}[0, 2]} = (\pi + 1)\sqrt{5}$;
- б) $\|y\|_{C[0, 2]} = \sqrt{10}$, $\|y\|_{C^{(1)}[0, 2]} = (\pi + 1)\sqrt{10}$;
- в) $\|y\|_{C[0, 2]} = 2$, $\|y\|_{C^{(1)}[0, 2]} = 5$;
- г) $\|y\|_{C[0, 2]} = 4$, $\|y\|_{C^{(1)}[0, 2]} = 8$;
- д) $\|y\|_{C[0, 2]} = 9$, $\|y\|_{C^{(1)}[0, 2]} = 15$.
- 1.6 а) $\|y\|_{h[0, 1]} = \sqrt{\frac{5}{2}}$; б) $\|y\|_{h[0, 1]} = \frac{1}{\sqrt{30}}$; в) $\|y\|_{h[0, 1]} = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

ТЕМА 2

Элементы теории линейных операторов. Обратный оператор. Вполне непрерывный оператор

Основные определения и теоремы

Оператор A , действующий из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2 называется линейным, если для любых элементов y_1 и y_2 из L_1 и любых вещественных чисел α_1 и α_2 выполнено равенство $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A y_1 + \alpha_2 A y_2$.

Пусть $D(A)$ - область определения, а $R(A)$ - множество значений оператора A . Если оператор $A: y = Ax$, действующий из линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2 , взаимно однозначный, то можно ввести обратный оператор $A^{-1}: A^{-1}y = x$ с областью определения $D(A^{-1}) = R(A)$ и множеством значений $R(A^{-1}) = D(A) = L_1$.

Нуль-пространством оператора A называется множество $\text{Ker } A = \{x \in L_1 : Ax = \theta\}$. Очевидно, что $\text{Ker } A$ – линейное подпространство L_1 , причем $\theta \in \text{Ker } A$. Если $\text{Ker } A \neq \{\theta\}$ (нуль-пространство нетривиально), то оператор A называется вырожденным.

Определение А. Оператор A называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $y \in D(A)$ и удовлетворяющих неравенству $\|y - y_0\| \leq \delta$ выполняется неравенство $\|Ay - Ay_0\| \leq \varepsilon$.

Определение Б. Оператор A называется непрерывным в точке $y_0 \in D(A)$, если для любой последовательности $y_n \in D(A)$, такой что $y_n \rightarrow y_0$, последовательность Ay_n сходится к Ay_0 .

Определения А и Б эквивалентны.

Оператор A называется непрерывным на $D(A)$ (на N_1), если он непрерывен в каждой точке. Линейный оператор непрерывен тогда и только тогда, если он является непрерывным в нуле.

Нормой линейного оператора A называется число $\|A\|_{N_1 \rightarrow N_2} = \sup_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2}$

Линейный оператор называется ограниченным, если существует $\sup_{\|y\|_{N_1}=1} \|Ay\|_{N_2} < +\infty$.

Теорема. Линейный оператор $A: N_1 \rightarrow N_2$, является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен.

Теорема. Для любого $y \in N_1$ выполнено неравенство $\|Ay\|_{N_2} \leq \|A\|_{N_1 \rightarrow N_2} \cdot \|y\|_{N_1}$, где A – линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства N_1 в нормированное пространство N_2 .

Линейный оператор A называется вполне непрерывным, если для любой ограниченной последовательности элементов y_n из N_1 последовательность $z_n = Ay_n$ элементов N_2 такова, что из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность (т.е. вполне непрерывный оператор преобразует любую ограниченную последовательность в компактную).

Вполне непрерывный оператор является ограниченным (следовательно, непрерывным), однако не любой непрерывный линейный оператор является вполне непрерывным.

Примеры решения задач

Пример 2.1. Докажите, что интегральный оператор Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x, s)y(s)ds$ с непрерывным ядром является ограниченным при действии из $C[a, b]$ в $C[a, b]$ и найдите оценку сверху для нормы оператора.

Решение. Пусть $z(x) = Ay \equiv \int_a^b K(x, s)y(s)ds$, где $y(s)$ - произвольная непрерывная на $[a, b]$ функция, причем $\|y\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x)| = 1$. Так как ядро $K(x, s)$ непрерывно на замкнутом ограниченном множестве (квадрате $[a, b] \times [a, b]$), то оно ограничено.

Обозначив $K_0 = \max_{x, s \in [a, b]} |K(x, s)|$, для любого $x \in [a, b]$ получим

$$|z(x)| = \left| \int_a^b K(x, s)y(s)ds \right| \leq \int_a^b |K(x, s)| \cdot |y(s)|ds \leq \max_{s \in [a, b]} |y(s)| \cdot \int_a^b |K(x, s)|ds \leq \|y\|_{C[a, b]} \cdot K_0 \cdot (b-a)$$

. Тогда $\|Ay\|_{C[a, b]} = \|z\|_{C[a, b]} \equiv \max_{x \in [a, b]} |z(x)| \leq \underbrace{\|y\|_{C[a, b]}}_{=1} \cdot K_0 \cdot (b-a) = K_0 \cdot (b-a)$, откуда следует

что оператор Фредгольма с непрерывным ядром, действующий из $C[a, b]$ в $C[a, b]$, ограничен.

Так как доказанное выше неравенство верно для любой непрерывной функции $y(x)$: $\|y\|_{C[a, b]} = 1$, то для нормы оператора справедлива оценка

$$\|A\| \equiv \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| \leq K_0 \cdot (b-a).$$

Пример 2.2. Докажите, что интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром является вполне непрерывным при действии из $C[a, b]$ в $C[a, b]$.

Решение. Рассмотрим произвольную ограниченную последовательность $y_n(x)$ непрерывных на $[a, b]$ функций, тогда для любого n имеет место оценка

$$\|y_n\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y_n(x)| \leq M. \quad \text{Пусть } z_n(x) = Ay_n \equiv \int_a^b K(x, s)y_n(s)ds. \text{ Для решения задачи}$$

достаточно показать, что последовательность $z_n(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на отрезке $[a, b]$.

а) Докажем сначала равномерную ограниченность. Обозначим $K_0 = \max_{x, s \in [a, b]} |K(x, s)|$.

$$\text{Тогда } |z_n(x)| = \left| \int_a^b K(x, s)y_n(s)ds \right| \leq \int_a^b \underbrace{|K(x, s)|}_{\leq K_0} \cdot \underbrace{|y_n(s)|}_{\leq M} ds \leq M \cdot K_0 \cdot (b-a) = C, \quad \text{что и}$$

требовалось доказать.

б) Докажем теперь равностепенную непрерывность последовательности $z_n(x)$. Возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in [a, b]$. Имеем

$$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| = \left| \int_a^b [K(x_1, s) - K(x_2, s)] y_n(s) ds \right| \leq \int_a^b |K(x_1, s) - K(x_2, s)| \cdot \underbrace{|y_n(s)|}_{\leq M} ds$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Функция $K(x, s)$ непрерывна по совокупности аргументов x, s на замкнутом ограниченном множестве $[a, b] \times [a, b]$ и, следовательно, равномерно непрерывна на этом множестве. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|K(x_1, s) - K(x_2, s)| \leq \frac{\varepsilon}{M \cdot (b-a)}$, если $|x_1 - x_2| \leq \delta$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что

$$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| \leq \int_a^b |K(x_1, s) - K(x_2, s)| \cdot |y_n(s)| ds \leq \int_a^b \underbrace{|K(x_1, s) - K(x_2, s)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{M \cdot (b-a)}} \cdot \underbrace{|y_n(s)|}_{\leq M} ds \leq \varepsilon$$

для всех $n = 1, 2, \dots$ и всех $x_1, x_2 \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x_1 - x_2| \leq \delta$, т.е. последовательность $z_n(x)$ равномерно непрерывна.

По теореме Арцела, из последовательности непрерывных функций $z_n(x)$ можно выделить равномерно сходящуюся (к непрерывной функции!) подпоследовательность. Этим же свойством обладает и любая подпоследовательность последовательности $z_n(x)$, поэтому оператор A является вполне непрерывным при действии $C[a, b] \rightarrow C[a, b]$.

Пример 2.3. Доказать, что если линейный оператор $B: N_2 \rightarrow N_3$ является ограниченным, а линейный оператор $A: N_1 \rightarrow N_2$ вполне непрерывным, то $BA: N_1 \rightarrow N_3$ — вполне непрерывный оператор (N_1, N_2, N_3 — нормированные пространства).

Решение.

а) Оператор $A: N_1 \rightarrow N_2$ является вполне непрерывным, поэтому для любой ограниченной последовательности $z_n \in N_1$ соответствующая ей последовательность $Az_n \in N_2$ является компактной.

б) Докажем, что ограниченный оператор $B: N_2 \rightarrow N_3$ переводит компактную последовательность $y_n \in N_2$ в компактную $Bu_n \in N_3$. Так как y_n компактна, то из любой ее подпоследовательности можно выделить сходящуюся $y_{nk} \rightarrow y_0 \in N_2$. Рассмотрим последовательность $Bu_n \in N_3$ и любую ее подпоследовательность Bu_{nk} . Из соответствующей последовательности $y_{nk} \in N_2$ можно выделить подпоследовательность $y_{nm} \rightarrow y_0$. Ввиду непрерывности оператора B последовательность Bu_{nm} также сходится: $Bu_{nm} \rightarrow Bu_0 \in N_3$, а значит Bu_n является компактной.

Поэтому оператор $BA: N_1 \rightarrow N_3$ переводит любую ограниченную последовательность $z_n \in N_1$ в компактную $BAz_n \in N_3$, т.е. является вполне непрерывным.

Пример 2.4. Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в нормированном пространстве. Доказать, что множество элементов пространства таких, что $Au = \theta$, образует замкнутое линейное подпространство (нуль-пространство оператора).

Решение.

а) Рассмотрим произвольные элементы y_1 и y_2 такие, что $Ay_1 = \theta$ и $Ay_2 = \theta$. Тогда для любых α_1, α_2 выполнено $A(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 Ay_1 + \alpha_2 Ay_2 = \theta$, т.е. множество элементов $y: Ay = \theta$ — линейное пространство.

б) Докажем его замкнутость, т.е. если $Ay_n = \theta$ и $y_n \rightarrow y_0$, то $Ay_0 = \theta$.

Так как A - ограниченный линейный оператор, то

$$\|Ay_0\| = \|(Ay_0 - Ay_n) + Ay_n\| \leq \|Ay_0 - Ay_n\| + \underbrace{\|Ay_n\|}_{=0} \leq \|A\| \cdot \|y_0 - y_n\| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Поэтому $\|Ay_0\| = 0$, а значит $Ay_0 = \theta$, что и требовалось доказать.

Замечание. Так как вполне непрерывный оператор является ограниченным, то доказанное утверждение справедливо и для вполне непрерывного оператора.

Пример 2.5. Доказать, что если линейный оператор A имеет обратный, то обратный оператор A^{-1} также является линейным.

Решение. Пусть A - взаимно однозначный оператор, тогда существует обратный оператор A^{-1} . Для решения задачи достаточно проверить при любых $y_1, y_2 \in R(A)$ и любых α_1, α_2 справедливость равенства $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2$.

Пусть $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$, тогда из линейности оператора A следует

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2,$$

и по определению обратного оператора $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$.

С другой стороны, $A^{-1}y_1 = x_1$, $A^{-1}y_2 = x_2$, откуда умножая на α_1, α_2 и складывая, получим

$$\alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

Из двух последних равенств имеем $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2$, что и требовалось доказать.

Пример 2.6. Доказать, что если оператор A линейный, то обратный оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда оператор A невырожденный.

Решение.

а) Достаточность. Пусть оператор A невырожденный, т.е. $Ax = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ (нуль-пространство оператора A тривиально). Тогда для любых двух элементов $x_1 \neq x_2$ имеем $A(x_1 - x_2) \neq \theta \Rightarrow Ax_1 \neq Ax_2$, т.е. оператор A взаимно однозначный, а значит существует обратный оператор A^{-1} .

б) Необходимость. Пусть оператор A имеет обратный A^{-1} . Заметим, что A^{-1} - линейный оператор (см. пример 2.5) и докажем что A - невырожденный. Пусть это не так, т.е. существует $x \neq \theta$ такой, что $Ax = \theta$. Тогда $\theta \neq x = A^{-1}Ax = A^{-1}(\underbrace{Ax}_{=\theta}) = A^{-1}\theta = \theta$. Полученное

противоречие показывает, что если $Ax = \theta$, то $x = \theta$, т.е. оператор A - невырожденный.

Пример 2.7. Пусть оператор дифференцирования $A = \frac{d}{dx}$ определен на подпространстве $C_0^{(1)}[0,1]$ непрерывно дифференцируемых функций $y(x)$, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$. Доказать, что оператор A имеет обратный и найти A^{-1} .

Решение. Множеством значений оператора A является пространство $C[0,1]$. Докажем, что обратный оператор A^{-1} существует. Так как уравнение $Ay = \theta \Leftrightarrow \frac{d}{dx}y(x) \equiv 0, y(0) = 0$

имеет единственное решение $y(x) \equiv 0 = \theta$, т.е. нуль-пространство оператора A тривиально, то оператор A невырожденный, и обратный оператор A^{-1} существует.

Чтобы найти A^{-1} , нужно для любой функции $z(x) \in C[0,1]$ решить уравнение $Ay = z$ ($y(x) \in C_0^{(1)}[0,1]$), или $\frac{d}{dx}y(x) = z(x)$, $y(0) = 0$. Решением указанной задачи Коши является $y(x) = \int_0^x z(s) ds$, т.е. $A^{-1}z = \int_0^x z(s) ds$.

Замечание. Если рассматривать оператор дифференцирования $A = \frac{d}{dx}$ при действии $C^{(1)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$, то он является вырожденным, так как нуль-пространство в этом случае нетривиально и состоит из функций $y(x) = c$. Поэтому обратный оператор не существует. Вспомните, что первообразная непрерывной функции определяется с точностью до постоянной (элемент из $\text{Ker } A$ (нуль-пространства) оператора $A = \frac{d}{dx}$), т.е. отображение $C^{(1)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$, осуществляемое оператором дифференцирования, не является взаимно однозначным.

Пример 2.8. Доказать, что если оператор A , действующий в бесконечномерном нормированном пространстве является вполне непрерывным, то обратный оператор неограничен.

Решение. Предположим, что обратный оператор A^{-1} является ограниченным. Так как A - вполне непрерывный оператор, а по предположению, оператор A^{-1} является ограниченным, то оператор $A^{-1}A$ является вполне непрерывным (см. пример 2.3), что неверно, так тождественный оператор $A^{-1}A = I$ не является вполне непрерывным (см. курс лекций). Полученное противоречие доказывает, что A^{-1} - неограничен.

Пример 2.9. Рассмотрим оператор Вольтерра $Bu = \int_0^x y(s) ds$ ($x \in [0,1]$), действующий в пространстве $C[0,1]$.

- Доказать, что B является ограниченным.
- Доказать, что B имеет обратный оператор, который определен на некотором подпространстве и неограничен.
- Построить оператор $(I - B)^{-1}$.

Решение.

- Очевидно, что оператор B является линейным и определен на всем пространстве $C[0,1]$. Рассмотрим множество $\|y\| = \max_{x \in [0,1]} |y(x)| = 1$. На этом множестве имеем

$\|Bu\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x y(s) ds \right| \leq \max_{x \in [0,1]} \int_0^x |y(s)| ds \leq 1$, что и доказывает ограниченность рассматриваемого оператора.

- Оператор B отображает все пространство $C[0,1]$ на линейное подпространство непрерывно дифференцируемых функций $z(x) = Bu = \int_0^x y(s) ds$, удовлетворяющих условию

$z(0) = 0$. Так как из равенства $\int_0^x y(s) ds = 0$ (верного при $\forall x \in [0, 1]$) следует, что $y(x) \equiv 0$,

то $Bu = \theta \Leftrightarrow u = \theta$, т.е. нуль-пространство оператора B содержит только нулевой элемент, оператор B - невырожденный, а значит имеет обратный, который определен на указанном выше подпространстве. Обозначим $D(A^{-1})$ - область определения оператора A^{-1} .

Легко видеть, что $B^{-1} = \frac{d}{dx}$, так как $BB^{-1}y = \int_0^x y'(s) ds = y(x) - y(0) = y(x)$ и

$$B^{-1}By = \frac{d}{dx} \int_0^x y(s) ds = y(x).$$

Докажем, что обратный оператор неограничен. Рассмотрим последовательность $y_n \in D(A^{-1}) \subset C[0, 1]$: $y_n(x) = \sin 2\pi nx$, $(y_n(0) = 0!!!)$, $\|y_n\|_{C[0, 1]} = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Тогда

$$\|B^{-1}y_n\|_{C[0, 1]} = \max_{x \in [0, 1]} \left| \frac{d}{dx} \sin 2\pi nx \right| = 2\pi n \rightarrow \infty, \quad \text{т.е.} \quad \sup_{y \in D(A^{-1}), \|y\|=1} \|B^{-1}y\| \quad \text{не существует и}$$

оператор B^{-1} является неограниченным.

Замечание 1. Действуя аналогично примеру 2.2, можно показать, что рассматриваемый оператор Вольтерра является вполне непрерывным, следовательно, обратный оператор неограничен (пример 2.8).

в) Чтобы построить оператор $(I - B)^{-1}$, нужно для произвольной непрерывной функции $z(x)$ решить уравнение $y(x) - \int_0^x y(s) ds = z(x)$. Заметим сразу, что $y(0) = z(0)$.

Так как $z(x)$ может не быть дифференцируемой, то ищем решение в виде $y(x) = z(x) + w(x)$, где $w(x)$ - новая неизвестная функция, для которой имеем $w(x) = \int_0^x z(s) ds + \int_0^x w(s) ds$, $w(0) = 0$. Очевидно, что $w(x)$ дифференцируема; для ее определения получаем задачу Коши $w'(x) = w(x) + z(x)$, $w(0) = 0$, решение которой имеет вид $w(x) = e^x \int_0^x z(s) e^{-s} ds$. Поэтому $y(x) = z(x) + e^x \int_0^x z(s) e^{-s} ds$, и обратный оператор

$$(I - B)^{-1} \text{ определяется формулой } (I - B)^{-1}z = z(x) + \int_0^x z(s) e^{x-s} ds.$$

Замечание 2. Рассмотрим оператор $B^2 y = \int_0^x dt \int_0^t y(s) ds = \int_0^x y(s) ds \int_s^x dt = \int_0^x (x-s) y(s) ds$. Легко показать, например, методом математической индукции, что

$$B^{n+1}y = BB^n y = \int_0^x dt \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} y(s) ds = \int_0^x y(s) ds \int_s^x \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \int_0^x \frac{(x-s)^n}{n!} y(s) ds.$$

Далее, разложив функцию e^{x-s} в ряд $e^{x-s} = \sum_0^\infty \frac{(x-s)^n}{n!}$, будем иметь

$$(I - B)^{-1}z = z(x) + \int_0^x \sum_0^\infty \frac{(x-s)^n}{n!} z(s) ds = z + \sum_0^\infty B^{n+1}z. \quad \text{Таким образом, мы получили}$$

представление оператора $(I - B)^{-1}$ в виде ряда Неймана $(I - B)^{-1} = I + \sum_1^\infty B^n$.

Пример 2.10. Доказать, что оператор дифференцирования $A = \frac{d}{dx}$

а) не является вполне непрерывным при действии $C^{(1)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$;

б) является вполне непрерывным при действии $C^{(2)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$.

Решение.

а) Рассмотрим в $C^{(1)}[0,1]$ последовательность $y_n = \frac{1}{2^n} \cos 2^n \pi x$, $n=1,2,3,\dots$

Эта последовательность ограничена в $C^{(1)}[0,1]$, так как для любого номера n имеем $\|y_n\|_{C^{(1)}[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |y_n(x)| + \max_{x \in [0,1]} |y'_n(x)| = \frac{1}{2^n} + 1 < 2$. Однако последовательность образов ее элементов при действии оператора дифференцирования $Ay_n = \pi \sin 2^n \pi x$, $n=1,2,3,\dots$ некомпактна в пространстве $C[0,1]$ (см. пример 1.7). Поэтому оператор дифференцирования не является вполне непрерывным при действии $C^{(1)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$.

а) Пусть y_n - произвольная ограниченная последовательность в пространстве $C^{(2)}[0,1]$, т.е. существует $M > 0$ такая, что $\|y_n\|_{C^{(2)}[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |y_n(x)| + \max_{x \in [0,1]} |y'_n(x)| + \max_{x \in [0,1]} |y''_n(x)| \leq M$ для любого номера n . Заметим, что отсюда вытекают два неравенства: $\max_{x \in [0,1]} |y'_n(x)| \leq M$ и $\max_{x \in [0,1]} |y''_n(x)| \leq M$.

Рассмотрим последовательность $z_n(x) = Ay_n = \frac{d}{dx} y_n(x)$. Все функции $z_n(x)$ непрерывны, причем, ввиду сделанного замечания, последовательность $z_n(x) = y'_n(x)$ равномерно ограничена.

Докажем, что последовательность $z_n(x)$ равномерно непрерывна. Действительно, так как $\max_{x \in [0,1]} |y''_n(x)| \leq M$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое δ , что $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Поэтому при всех $x_1, x_2 \in [0,1]$, $|x_1 - x_2| \leq \delta$ имеет место неравенство $|y'_n(x_1) - y'_n(x_2)| = |y''_n(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| \leq M \delta \leq \varepsilon$.

Далее, применяя теорему Арцела, получаем, что последовательность $z_n = Ay_n$ компактна в $C[0,1]$, а оператор дифференцирования $A = \frac{d}{dx}$ является вполне непрерывным при действии $C^{(2)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$.

Задачи для самостоятельного решения

- 2.1 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма отображает линейное пространство $h[a,b]$ в себя и является линейным оператором.
- 2.2 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра отображает линейное пространство $h[a,b]$ в себя и является линейным оператором.
- 2.3 Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен в нуле.
- 2.4 Доказать, что линейный оператор, действующий в нормированных пространствах, непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.

- 2.5 Доказать, что нелинейный интегральный оператор $Ay = \int_0^1 e^{xs} y^2(s) ds$, действующий $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, является непрерывным и $\sup_{\|y\|=1} \|Ay\| < +\infty$.

Замечание: результат предыдущей задачи в данном случае, вообще говоря, неприменим, так как оператор не является линейным.

- 2.6 Доказать эквивалентность двух определений непрерывности в точке оператора, действующего в нормированных пространствах.
- 2.7 Доказать, что линейный оператор ограничен тогда и только тогда, если существует постоянная $C > 0$, что для любого элемента y выполнено неравенство $\|Ay\| \leq C \|y\|$.
- 2.8 Доказать, что оператор дифференцирования, действующий из $C^{(1)}[a,b]$ в $C[a,b]$, является ограниченным.
- 2.9 Доказать, что оператор дифференцирования, определенный на подпространстве непрерывно дифференцируемых функций пространства $C[a,b]$ и действующий из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, не является ограниченным.
- 2.10 Доказать, что если A - линейный ограниченный оператор, действующий $A: N_1 \rightarrow N_2$, где N_1 и N_2 - нормированные пространства, причем $A \neq 0$, то $\|A\| > 0$.
- 2.11 а) Доказать, что линейный оператор A имеет ограниченный обратный тогда и только тогда, если существует число $m > 0$ такое, что для всех $y \in D(A)$ выполнено $\|Ay\| \geq m \|y\|$.
- б) Доказать, что в этом случае норма обратного оператора равна $\|A^{-1}\| = \frac{1}{m}$, где m - максимальное из возможных значений m , найденных в п. а).
- 2.12 Доказать, что если линейный оператор $B: N_2 \rightarrow N_3$ является вполне непрерывным, а линейный оператор $A: N_1 \rightarrow N_2$ ограниченный, то $BA: N_1 \rightarrow N_3$ - вполне непрерывный оператор (N_1, N_2, N_3 - нормированные пространства). Сравнить с результатом примера 2.3.
- 2.13 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $C[a,b]$, является вполне непрерывным оператором.
- 2.14 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма, действующий из $h[a,b]$ в $h[a,b]$, является вполне непрерывным оператором.
- 2.15 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра $Bu = \int_a^x K(x,s) u(s) ds$ является вполне непрерывным при действии $C[a,b] \rightarrow C[a,b]$.
- 2.16 Доказать, что оператор умножения на $x: Ay = x \cdot y(x)$, действующий $C[a,b] \rightarrow C[a,b]$, не является вполне непрерывным.
- 2.17 Доказать, что единичный оператор, действующий в пространстве $C[a,b]$, не является вполне непрерывным.
- 2.18 Доказать, что интегральный оператор $Ay = \int_0^1 \frac{y(s)}{\sqrt{(x-s)^2}} ds$ не является вполне непрерывным при действии $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$.

- 2.19 Доказать, что дифференциальный оператор $Ay = \frac{d}{dx} y(x) + 4y(x)$, действующий $C_0^{(1)}[0,1] \rightarrow C[0,1]$ ($C_0^{(1)}[0,1]$ - подпространство непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$, с нормой пространства $C^{(1)}[0,1]$), имеет ограниченный обратный, и найти его.

Ответ: $A^{-1}y = \int_0^x e^{-4(x-s)} y(s) ds$.

ТЕМА 3

Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Основные определения и теоремы

Оператор $A^*: E \rightarrow E$, действующий в евклидовом пространстве, называется сопряженным к оператору A , если $\forall y_1, y_2 \in E \quad (Ay_1, y_2) = (y_1, A^*y_2)$. Если $A = A^*$, то оператор A называется самосопряженным.

Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве L . Число Λ называется собственным значением оператора A , если существует элемент $y \neq \theta$ такой, что $Ay = \Lambda y$. Элемент y называется собственным вектором. Множество собственных векторов, соответствующих собственному значению Λ , является подпространством пространства L .

Число $\lambda = \frac{1}{\Lambda}$ ($\Lambda \neq 0$) называется характеристическим числом оператора A .

Теорема. Самосопряженный вполне непрерывный оператор A , действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, обладает собственным вектором, соответствующим собственному значению Λ : $|\Lambda| = \|A\|$. Это собственное значение является максимальным по модулю среди всех собственных значений оператора A .

Теорема, вообще говоря, не верна, если отказаться от условий самосопряженности или вполне непрерывности оператора (см. примеры в конце темы).

Элемент e называется максимальным элементом (вектором) оператора A , если $\|e\| = 1$ и $\|Ae\| = \|A\|$. Самосопряженный вполне непрерывный оператор A обладает максимальным вектором.

Если z - максимальный вектор самосопряженного оператора A , то z - собственный вектор оператора A^2 , соответствующий собственному значению $\Lambda = \|A\|^2 = M^2$. Если оператор A^2 обладает собственным вектором z , соответствующим собственному значению M^2 , то оператор A имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению M или $-M$.

Теорема. Пусть ядро $K(x, s)$ оператора Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x, s) y(s) ds$ $h[a, b] \rightarrow h[a, b]$ является вещественным, симметрическим, непрерывным по совокупности переменных $(x, s) \in [a, b] \times [a, b]$, и не равно тождественно нулю. Тогда оператор Фредгольма обладает собственным значением Λ , $\Lambda \neq 0$: $Ay = \Lambda y$, $y \neq 0$, $y \in h[a, b]$.

Иногда удобнее использовать характеристические числа: $\lambda = \frac{1}{\Lambda}$, $\Lambda \neq 0$. Тогда в утверждении теоремы следует записать $\lambda Ay = y$.

Теорема. Собственные векторы самосопряженного оператора A , соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Теорема. Число собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора A , удовлетворяющих условию: $\|A\| \geq |\lambda| \geq \delta > 0$, (δ - фиксированное положительное число) конечно.

Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению, называется кратностью собственного значения.

Теорема. Ненулевому собственному значению вполне непрерывного оператора A может соответствовать только конечное число линейно независимых собственных векторов. Нулевому собственному значению может отвечать как конечное, так и бесконечное число линейно независимых собственных векторов.

Теорема.

а) Множество собственных значений самосопряженного вполне непрерывного оператора A , действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве, представляет собой: либо бесконечную последовательность, тогда $\|A\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| \geq \dots$ - монотонно невозрастающая и ограниченная снизу нулем; либо конечную последовательность, тогда $\|A\| = |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| > \lambda_{n+1} = 0$ (каждое собственное значение повторяется в эти неравенствах столько раз, какова его кратность).

б) Если ненулевых собственных значений бесконечно много, то $|\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

в) Каждому собственному значению отвечает хотя бы один собственный вектор, причем можно выбрать собственные векторы так, что они образуют ортонормированную систему (собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям ортогональны, а собственные векторы, соответствующие одному и тому же собственному значению, можно ортогонализировать, используя процедуру Грама-Шмидта).

Для характеристических чисел вполне непрерывного самосопряженного оператора справедливы аналогичные результаты:

либо $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n|$ (конечная последовательность характеристических чисел);

либо $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$ (бесконечная последовательность характеристических чисел).

В этом случае $\lim_{n \leftarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$.

Каждому характеристическому числу λ_n можно сопоставить собственный вектор φ_n , причем векторы $\{\varphi_n\}$ образуют ортонормированную систему.

Аналогичные утверждения верны для интегрального оператора с непрерывным, симметрическим и неравным тождественно нулю ядром. В этом случае вместо слов собственные векторы говорят собственные функции интегрального оператора или собственные функции ядра $K(x, s)$.

Пусть A - вполне непрерывный самосопряженный оператор со следующей последовательностью характеристических чисел (неважно, конечной или бесконечной): $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$, которым соответствует ортонормированная последовательность собственных векторов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$.

Теорема. Вектор y принадлежит нуль-пространству оператора A ($y \in \text{Ker } A$) тогда и только тогда, когда $(y, \varphi_k) = 0$ $k = 1, 2, \dots$ (φ_k - конечная или бесконечная последовательность).

Теорема Гильберта-Шмидта. Функция $f(x)$ называется истокопредставимой через ядро $K(x, s)$, если существует непрерывная функция $g(x)$ такая, что

$f(x) = \int_a^b K(x, s) g(s) ds$. Если функция $f(x)$ истокопредставима через симметрическое

непрерывное ядро $K(x, s)$, то она может быть разложена в ряд $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x)$, где

$$f_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(s) \varphi_k(s) ds, \text{ причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на } [a, b].$$

Можно рассматривать оператор Фредгольма в пространстве непрерывных комплекснозначных функций $h^C[a, b]$, состоящем из комплекснозначных функций вещественной переменной x : $y(x) = u(x) + i v(x)$ $x \in [a, b]$, функции $u(x)$, $v(x)$ – непрерывные на $[a, b]$ вещественные функции. В этом пространстве скалярное произведение вводится так: $(y_1, y_2) = \int_a^b y_1^*(x) y_2(x) dx$ (здесь $*$ – знак комплексного сопряжения).

Теорема. Пусть интегральный оператор с непрерывным симметрическим вещественным ядром $K(x, s)$ действует в комплексном пространстве $h^C[a, b]$. Тогда этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.

Если ядро $K(x, s)$ является вырожденным, т.е. представимо в виде $K(x, s) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(s)$, где $a_1(x), \dots, a_n(x)$ и $b_1(s), \dots, b_n(s)$ – линейно независимы и непрерывны по своим аргументам на $[a, b]$, то интегральный оператор является вырожденным. В этом случае и у него всегда есть нулевое собственное значение, причем кратность его равна ∞ . Отыскание других собственных значений сводится к решению эквивалентной алгебраической задачи на собственные значения и собственные векторы для некоторой матрицы

$$\Lambda c_i = \sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\int_a^b a_j(x) b_i(x) dx}_{k_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{или } K \cdot C = \Lambda \cdot C, \quad \text{где } K = \{k_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Собственные значения Λ_n матрицы K и, следовательно, собственные значения (и характеристические числа $\lambda_n = \frac{1}{\Lambda_n}$) интегрального оператора Фредгольма теперь можно найти, решив характеристическое уравнение $\det(K - \Lambda I) = 0$.

Некоторые задачи на нахождение характеристических чисел и собственных функций оператора Фредгольма с непрерывным невырожденным ядром рассмотрены также в примерах к теме 7.

Примеры решения задач

Пример 3.1. Пусть M - подпространство евклидова пространства, инвариантное относительно самосопряженного оператора A . Доказать, что ортогональное дополнение $M_{\perp}$ подпространства M также инвариантно относительно оператора A .

Решение. Рассмотрим любые элементы $y \in M$, $z \in M_{\perp}$, т.е. $(y, z) = 0$. Подпространство M инвариантно относительно оператора A , что означает $Ay \in M$ для любого $y \in M$, т.е. $(Ay, z) = 0$. Нужно доказать, что $Az \in M_{\perp}$.

Оператор A - самосопряженный, поэтому $(Ay, z) = (y, Az) = 0$, т.е. элемент Az ортогонален любому $y \in M$, следовательно $Az \in M_{\perp}$, что и требовалось доказать.

Пример 3.2. Доказать, что норма вполне непрерывного самосопряженного оператора может быть найдена по формуле $\|A\| = \sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)|$.

Решение. Обозначим $\mu = \sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)|$ и докажем, что указанная точная верхняя грань существует. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получим $|(Ay, y)| \leq \|Ay\| \cdot \underbrace{\|y\|}_{=1} \leq \|A\| \cdot \underbrace{\|y\|}_{=1} = \|A\|$, откуда следует существование $\sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)|$ и оценка $\mu = \sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)| \leq \|A\|$.

Докажем теперь, что справедливо неравенство $\mu \geq \|A\|$. Для любого элемента y $y_0 = \frac{y}{\|y\|}$ имеет норму, равную единице, поэтому $|(Ay_0, y_0)| \leq \sup_{\|y_0\|=1} |(Ay_0, y_0)| = \mu$, откуда получаем $|(Ay, y)| \leq \mu \cdot \|y\|^2$. Пользуясь линейностью оператора A , свойствами скалярного произведения и равенством $(Ay, z) = (y, Az)$ (определение самосопряженного оператора), нетрудно получить $4(Ay, z) = (A(y+z), y+z) - (A(y-z), y-z)$. Из этого равенства с учетом полученной выше оценки, имеем $4|(Ay, z)| = |(A(y+z), y+z) - (A(y-z), y-z)| \leq |(A(y+z), y+z)| + |(A(y-z), y-z)| \leq \mu \cdot \|y+z\|^2 + \mu \cdot \|y-z\|^2 = 2\mu(\|y\|^2 + \|z\|^2)$. Поэтому для произвольных элементов пространства таких, что $\|y\|=1$, $\|z\|=1$, верно $|(Ay, z)| \leq \mu$. Полагая $z = \frac{Ay}{\|Ay\|}$, получим $\frac{|(Ay, Ay)|}{\|Ay\|} = \|Ay\| \leq \mu$ для любых y , таких что $\|y\|=1$, откуда следует $\|A\| \leq \mu$.

Итак, $\mu \leq \|A\| \leq \mu$, поэтому $\|A\| = \mu = \sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)|$, что и требовалось.

Замечание. Обратившись к теореме о существовании собственного вектора вполне непрерывного самосопряженного оператора, можно заключить, что если в рассмотренной задаче оператор A - вполне непрерывный, то максимальное по модулю собственное значение его удовлетворяет соотношению $|\lambda| = \|A\| = \sup_{\|y\|=1} |(Ay, y)|$.

Пример 3.3. Рассмотрим оператор умножения $Ay = (1-x) \cdot y(x)$, действующий в пространстве $h[0,1]$.

- а) Доказать, что указанный оператор является ограниченным и найти его норму.
 б) Доказать, что у него нет максимального вектора.

Решение.

а) Напомним, что нормой линейного оператора называется число $\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$.

Рассмотрим в пространстве $h[0,1]$ множество функций $y(x)$: $\|y\|_{h[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 y^2(x) dx} = 1$.

Тогда $\|Ay\|_{h[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 (1-x)^2 y^2(x) dx} \leq \sqrt{\int_0^1 y^2(x) dx} = 1$, поэтому оператор ограничен и для нормы оператора получаем оценку $\|A\| \leq 1$.

Докажем, что норма рассматриваемого оператора равна 1. Для этого достаточно построить последовательность $y_n(x)$ непрерывных функций такую, что $\|Ay_n\|_{h[0,1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Пусть
$$y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{3n} \cdot (1-nx), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что $\forall n \quad \|y_n\|_{h[0,1]} = 1$ и

$$\|Ay_n\|_{h[0,1]}^2 = 3n \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2 \cdot (1-x)^2 dx = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{10n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Поэтому $\|A\| = 1$.

б) Докажем, что у рассматриваемого оператора в пространстве $h[0,1]$ нет максимального вектора. Напомним, что элемент y : $\|y\| = 1$ называется максимальным вектором ограниченного оператора, если $\|Ay\| = \|A\|$. Предположим, что $y_0(x)$: $\|y_0\| = 1$ является максимальным вектором рассматриваемого оператора, тогда

$$\|y_0\|^2 = \int_0^1 y_0^2(x) dx = 1, \quad \|Ay_0\|^2 = \int_0^1 (1-x)^2 \cdot y_0^2(x) dx = \|A\|^2 = 1. \text{ Вычитая последние два}$$

равенства, получим $\int_0^1 \underbrace{[1-(1-x)^2]}_{>0} \cdot y_0^2(x) dx = 0$, что невозможно.

Таким образом, сделанное предположение неверно, т.е. максимального вектора у оператора нет.

Замечание. Рассмотренный оператор умножения в пространстве $h[0,1]$ является самосопряженным, но не вполне непрерывным, поэтому теорема о существовании максимального вектора в данном случае неприменима.

Пример 3.4. Пусть $K^{(2)}(x,s) = K(x,s) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}$, где φ_1 - нормированная собственная

функция оператора Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x,s) y(s) ds$ с непрерывным симметрическим

ядром, отвечающая характеристическому числу λ_1 . Рассмотрим интегральный оператор

$$A^{(2)} \text{ с ядром } K^{(2)}(x, s): A^{(2)}y = \int_a^b K^{(2)}(x, s)y(s)ds.$$

Доказать, что:

- а) все собственные функции $\varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ оператора A , отвечающие характеристическим числам $|\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$, являются также собственными функциями оператора $A^{(2)}$, соответствующими тем же характеристическим числам $|\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$;
- б) оператор $A^{(2)}$ не имеет других характеристических чисел, отличных от λ_k , $k = 2, 3, 4, \dots$;
- в) функция φ_1 также является собственной функцией оператора $A^{(2)}$, соответствующей нулевому собственному значению ядра $K^{(2)}(x, s)$.

Решение. Так как ядро оператора A непрерывно и симметрично, то и ядро $K^{(2)}(x, s)$ удовлетворяет тем же условиям, т.е. оператор $A^{(2)}$ является вполне непрерывным и самосопряженным. Заметим также, что действие оператора $A^{(2)}$ можно представить в следующем виде: $A^{(2)}y = \int_a^b [K(x, s) - \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}]y(s)ds = Ay - \frac{\varphi_1}{\lambda_1}(\varphi_1, y)$.

Напомним, что собственные функции самосопряженного оператора образуют ортогональную систему, и $A\varphi_k = \int_a^b K(x, s)\varphi_k(s)ds = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k$. Будем считать также, что

$$\|\varphi_k\|^2 = \int_a^b \varphi_k^2(x)dx = 1.$$

- а) Для любой собственной функции φ_k , $k = 2, 3, 4, \dots$ оператора A имеем

$$A^{(2)}\varphi_k = \int_a^b K^{(2)}(x, s)\varphi_k(s)ds = \int_a^b K(x, s)\varphi_k(s)ds - \int_a^b \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}\varphi_k(s)ds = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x) - 0 = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k(x),$$

т.е. φ_k является собственной функцией оператора $A^{(2)}$, соответствующей характеристическому числу λ_k .

- б) Пусть $\tilde{\lambda}$ - характеристическое число оператора $A^{(2)}$, а $\tilde{\varphi}$ - отвечающая ему собственная функция, т.е. $A^{(2)}\tilde{\varphi} = \frac{1}{\tilde{\lambda}}\tilde{\varphi}$. Докажем, что $\tilde{\lambda}$ является также характеристическим числом оператора A , т.е. совпадает с одним из λ_k , $k = 2, 3, 4, \dots$.

Действительно

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\lambda}A^{(2)}\tilde{\varphi} = \tilde{\lambda}\int_a^b K^{(2)}(x, s)\tilde{\varphi}(s)ds = \tilde{\lambda}\int_a^b K(x, s)\tilde{\varphi}(s)ds - \tilde{\lambda}\int_a^b \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}\tilde{\varphi}(s)ds = \tilde{\lambda}A\tilde{\varphi} - 0 = \tilde{\lambda}A\tilde{\varphi},$$

т.е. $\tilde{\lambda}$ является характеристическим числом оператора A , что и требовалось. Здесь было использовано неочевидное (так как φ_k и $\tilde{\varphi}$ - собственные функции различных операторов!!!) соотношение

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_1(s)\tilde{\varphi}(s)ds &= (\varphi_1, \tilde{\varphi}) = (\varphi_1, \tilde{\lambda}A^{(2)}\tilde{\varphi}) = \tilde{\lambda}(\varphi_1, A^{(2)}\tilde{\varphi}) = (A^{(2)} - \text{самосопряженный}) = \tilde{\lambda}(A^{(2)}\varphi_1, \tilde{\varphi}) = \\ &= \tilde{\lambda}\left[(A\varphi_1, \tilde{\varphi}) - \frac{(\varphi_1, \tilde{\varphi})}{\lambda_1}(\varphi_1, \varphi_1)\right] = \tilde{\lambda}\left[\left(\frac{\varphi_1}{\lambda_1}, \tilde{\varphi}\right) - \frac{(\varphi_1, \tilde{\varphi})}{\lambda_1}\right] = 0. \end{aligned}$$

в) $A^{(2)}\varphi_1 = A\varphi_1 - \frac{\varphi_1}{\lambda_1}(\varphi_1, \varphi_1) = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_1(x) - \frac{1}{\lambda_k} \varphi_1(x) = 0 \cdot \varphi_1(x)$, следовательно φ_1 - собственная функция оператора $A^{(2)}$, отвечающая собственному значению $\Lambda_0 = 0$.

Пример 3.5. Доказать, что оператор умножения на x : $Ay = x \cdot y(x)$, действующий в пространстве $h[0,1]$

- а) является самосопряженным;
- б) не имеет собственных значений.

Решение.

а) $(Ay, z) = \int_0^1 [x y(x)] \cdot z(x) dx = \int_0^1 y(x) \cdot [x z(x)] dx = (y, Az)$, т.е. A - самосопряженный.

б) Рассмотрим уравнение $Ay \equiv x \cdot y(x) = \lambda y(x) \Rightarrow (x - \lambda) \cdot y(x) = 0$, откуда получаем $y(x) \equiv 0$. Итак, при любом λ уравнение $Ay = \lambda y$ имеет только тривиальное решение, что и означает отсутствие собственных значений у оператора A .

Замечание. Рассматриваемый оператор не является вполне непрерывным (см. задачу 2.16), поэтому теорема о существовании собственного вектора в данном случае неприменима.

Пример 3.6. Доказать, что оператор Вольтерра $Ay = \int_0^x y(s) ds$ ($x \in [0,1]$), действующий в пространстве $h[0,1]$:

- а) является вполне непрерывным;
- б) не имеет собственных значений.

Решение.

а) Докажем сначала, что A - вполне непрерывный оператор при действии $h[0,1] \rightarrow C[0,1]$.

Рассмотрим ограниченную последовательность $y_n \in h[0,1]$:

$$\|y_n\|_{h[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 y_n^2(x) dx} \leq M, \quad n=1,2,\dots, \text{ и последовательность } z_n(x) = Ay_n = \int_0^x y_n(s) ds.$$

Докажем равномерную ограниченность $z_n(x)$ в пространстве $C[0,1]$. Действительно,

$$|z_n(x)| = \left| \int_0^x y_n(s) ds \right| = \left| \int_0^x 1 \cdot y_n(s) ds \right| \leq \sqrt{\int_0^x ds \cdot \int_0^x y_n^2(s) ds} \leq \sqrt{\underbrace{\int_0^x ds}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\int_0^1 y_n^2(s) ds}_{\leq M^2}} \leq M$$

сразу для всех $x \in [0,1]$ и всех $n=1,2,\dots$, откуда следует $\|z_n\|_{C[0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |z_n(x)| \leq M$, что и требовалось.

Докажем равностепенную непрерывность последовательности $z_n(x)$. Возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in [0,1]$. Имеем

$$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| = \left| \int_0^{x_1} y_n(s) ds - \int_0^{x_2} y_n(s) ds \right| = \left| \int_{x_1}^{x_2} y_n(s) ds \right| \leq \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} ds \cdot \int_{x_1}^{x_2} y_n^2(s) ds} \leq \sqrt{(x_2 - x_1) \cdot \underbrace{\int_0^1 y_n^2(s) ds}_{\leq M^2}}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем $0 < \delta = \frac{\varepsilon^2}{M^2}$. Тогда для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ и

любых $x_1, x_2 \in [0, 1]$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| \leq \delta = \frac{\varepsilon^2}{M^2}$, имеем

$|z_n(x_1) - z_n(x_2)| \leq \varepsilon$, т.е. последовательность $z_n(x)$ равномерно непрерывна.

Итак, последовательность функций $z_n(x)$, непрерывных на сегменте $[0, 1]$, равномерно ограничена и равномерно непрерывна. Из теоремы Арцела следует, что из нее $z_n(x)$ можно выделить равномерно сходящуюся при $x \in [0, 1]$ к непрерывной функции подпоследовательность. Очевидно, что этим же свойством обладает и любая подпоследовательность последовательности $z_n(x)$. Следовательно, оператор A является вполне непрерывным при действии $h[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$. Но, т.к. из равномерной сходимости следует сходимость в среднем, то та же самая подпоследовательность непрерывных функций, которая сходится равномерно к некоторой непрерывной функции, сходится и в среднем к той же функции. Поэтому оператор A является вполне непрерывным и при действии $h[0, 1] \rightarrow h[0, 1]$.

б) Покажем, что рассматриваемый оператор не имеет собственных значений. Рассмотрим уравнение $Ay \equiv \int_0^x y(s) ds = \lambda y(x)$. Этому уравнению удовлетворяют функции вида $y(x) = ce^{-\lambda x}$, а так как $y(0) = 0$, то единственное решение его при любом λ $y(x) \equiv 0$, что и доказывает отсутствие собственных значений.

Замечание. Рассматриваемый оператор не является самосопряженным. Действительно, путем интегрирования по частям легко показать, что

$$(Ay, z) = \int_0^1 \left[\int_0^x y(t) dt \right] \cdot z(x) dx \neq \int_0^1 y(x) \cdot \left[\int_0^x z(t) dt \right] dx = (y, Az).$$

Поэтому теорема о существовании собственного вектора в данном случае неприменима.

Пример 3.7. Показать, что оператор Фредгольма $Ay = \int_0^\pi \sin x \cos s y(s) ds$, $x \in [0, \pi]$ не имеет характеристических чисел.

Решение. Рассмотрим уравнение $y(x) = \lambda \int_0^\pi \sin x \cos s y(s) ds$. Требуется найти такие λ , при которых существуют нетривиальные решения этого уравнения.

Обозначим $C = \int_0^\pi \cos s y(s) ds$, тогда $y(x) = \lambda C \sin x$, и для определения C имеем

$$C = \int_0^\pi \cos s \underbrace{C \lambda \sin s}_{y(s)} ds = 0. \text{ Следовательно, } y(x) \equiv 0 \text{ при любом } \lambda, \text{ т.е. характеристических}$$

чисел у исследуемого оператора нет.

Замечание. В данном случае ядро $K(x, s) = \sin x \cdot \cos s$ непрерывное, но не симметрическое, поэтому оператор является вполне непрерывным, но не самосопряженным, и теорема о существовании собственного вектора неприменима.

Пример 3.8. Найти характеристические числа и построить ортонормированные собственные функции однородного уравнения Фредгольма с непрерывным вырожденным симметрическим ядром $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s) y(s) ds$.

Решение. Ядро исследуемого оператора симметрическое и непрерывное, следовательно, оператор Фредгольма в данной задаче является вполне непрерывным и самосопряженным.

Представим ядро в виде $K(x, s) = \sin(x+s) = \sin x \cos s + \cos x \sin s$ и обозначим $\int_0^{\pi} \cos s y(s) ds = a_1$, $\int_0^{\pi} \sin s y(s) ds = a_2$. Тогда $y(x) = \lambda a_1 \sin x + \lambda a_2 \cos x$, где

$$a_1 = \int_0^{\pi} \cos s y(s) ds = \lambda \int_0^{\pi} \cos s (a_1 \sin s + a_2 \cos s) ds = \lambda \frac{\pi}{2} a_2,$$

$$a_2 = \int_0^{\pi} \sin s y(s) ds = \lambda \int_0^{\pi} \sin s (a_1 \sin s + a_2 \cos s) ds = \lambda \frac{\pi}{2} a_1.$$

$$\text{Однородная система} \quad \begin{cases} a_1 - \frac{\lambda\pi}{2} a_2 = 0 \\ \frac{\lambda\pi}{2} a_1 - a_2 = 0 \end{cases} \quad \text{имеет нетривиальные решения при условии}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\lambda\pi}{2} \\ -\frac{\lambda\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 = 0,$$

откуда определяем характеристические числа $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$ и $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$.

При $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$ имеем $a_2 = a_1$, т.е. собственная функция $y_1(x) = C(\sin x + \cos x)$;

при $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$ получаем $a_2 = -a_1$, и собственная функция $y_2(x) = C(\sin x - \cos x)$.

Так как собственные функции, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны, то искомая ортонормированная система есть

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x + \cos x), \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x - \cos x).$$

Пример 3.9. Если для любых $x, s \in [a, b]$ имеет место равенство $K(x, s) = -K(s, x)$, то ядро $K(x, s)$ называется кососимметрическим.

Показать, что все отличные от нуля собственные значения оператора Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x, s)y(s)ds$, $x \in [a, b]$ с вещественным кососимметрическим ядром - чисто мнимые числа.

Решение. Пусть Λ - одно из собственных значений, т.е. $\int_a^b K(x, s)y(s)ds = \Lambda y(x)$, где $y(x) \neq 0$ - соответствующая собственная функция (возможно, комплекснозначная). Так

как ядро вещественно, то имеет место также $\int_a^b K(x, s) y^*(s) ds = \Lambda^* y^*(x)$, где знак $*$ означает комплексное сопряжение.

Умножим второе уравнение на $y(x)$, а первое - на комплексно сопряженную функцию $y^*(x)$, и проинтегрируем по отрезку $[a, b]$. Получим:

$$\begin{aligned} \Lambda \int_a^b |y(x)|^2 dx &= \int_a^b y^*(x) dx \int_a^b K(x, s) y(s) ds, \\ \Lambda^* \int_a^b |y(x)|^2 dx &= \int_a^b y(x) dx \int_a^b K(x, s) y^*(s) ds = \int_a^b y^*(s) ds \int_a^b K(x, s) y(x) dx. \end{aligned}$$

Меня обозначения переменных интегрирования в последнем интеграле и учитывая, что $K(x, s) = -K(s, x)$ приходим к соотношению

$$\Lambda^* \int_a^b |y(x)|^2 dx = \int_a^b y^*(x) dx \int_a^b K(s, x) y(s) ds = - \int_a^b y^*(x) dx \int_a^b K(x, s) y(s) ds.$$

Складывая первое и последнее равенства, найдем $(\Lambda + \Lambda^*) \int_a^b |y(x)|^2 dx = 0$. Так как $y(x) \neq 0$, то $\Lambda^* = -\Lambda$, т.е. либо $\Lambda = 0$, либо является чисто мнимым.

Замечание. Напомним, что все собственные значения самосопряженного оператора - вещественные числа. В рассмотренном случае интегральный оператор Фредгольма не является самосопряженным, поэтому собственные значения могут не быть вещественными (в данном примере все ненулевые собственные значения оказались чисто мнимыми).

Пример 3.10. Найти характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма с вырожденным кососимметрическим ядром $Ay = \int_0^1 (x-s)y(s)ds$, $x \in [0, 1]$.

Решение. Требуется найти такие λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения $y(x) = \lambda \int_0^1 (x-s)y(s)ds$. Обозначим $C_1 = \int_0^1 y(s)ds$, $C_2 = \int_0^1 s y(s)ds$, тогда $y(x) = \lambda(C_1 x - C_2)$, и для определения C_1, C_2 получим соотношения

$$C_1 = \lambda \int_0^1 \underbrace{(C_1 s - C_2)}_{y(s)} ds = \frac{\lambda}{2} C_1 - \lambda C_2, \quad C_2 = \lambda \int_0^1 s \cdot \underbrace{(C_1 s - C_2)}_{y(s)} ds = \frac{\lambda}{3} C_1 - \frac{\lambda}{2} C_2,$$

откуда

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) C_1 + \lambda C_2 = 0 \\ -\frac{\lambda}{3} C_1 + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) C_2 = 0 \end{cases}.$$

Нетривиальные решения системы существуют при условии

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2} & \lambda \\ -\frac{\lambda}{3} & 1 + \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = +i 2\sqrt{3}, \quad \lambda_2 = -i 2\sqrt{3}.$$

Пусть $\lambda = \lambda_1 = 2i\sqrt{3}$ тогда, полагая $C_1 = C \cdot 2\sqrt{3}$, где C - произвольная постоянная, найдем $C_2 = C \cdot (i + \sqrt{3})$ и собственные функции $y_1(x) = \lambda_1(C_1x - C_2) = C(12ix - 6i + 2\sqrt{3})$.

Пусть $\lambda = \lambda_2 = -2i\sqrt{3}$ тогда, также полагая $C_1 = C \cdot 2\sqrt{3}$, найдем $C_2 = C \cdot (-i + \sqrt{3})$ и собственные функции $y_2(x) = \lambda_2(C_1x - C_2) = C(-12ix + 6i + 2\sqrt{3})$.

Замечание. Если оператор несамосопряженный, то характеристические числа могут не быть действительными. В данном случае, ядро оператора $K(x, s) = x - s$ не симметрическое, и характеристические числа оказались чисто мнимыми (см. пример 3.9).

Задачи для самостоятельного решения

3.1 Пусть, $K^{(n+1)}(x, s) = K(x, s) - \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$, где φ_k - собственные функции оператора

Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x, s) y(s) ds$ с вещественным непрерывным симметрическим ядром,

отвечающие характеристическим числам λ_k , $k=1, 2, \dots, n$. Рассмотрим интегральный оператор $A^{(n+1)}$

с ядром $K^{(n+1)}(x, s)$: $A^{(n+1)}y = \int_a^b K^{(n+1)}(x, s) y(s) ds$.

Доказать, что:

а) все собственные функции φ_k , $k = n+1, \dots$ оператора A , отвечающие характеристическим числам $|\lambda_{n+1}| \leq \dots \leq |\lambda_k| \leq \dots$, являются также собственными функциями оператора $A^{(n+1)}$, соответствующими тем же характеристическим числам $|\lambda_{n+1}| \leq \dots \leq |\lambda_k| \leq \dots$;

б) оператор $A^{(n+1)}$ не имеет других характеристических чисел, отличных от λ_k , $k = n+1, \dots$;

в) функции φ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ также являются собственными функциями оператора $A^{(n+1)}$, соответствующими нулевому собственному значению ядра $K^{(n+1)}(x, s)$.

3.2 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметрическим ядром, действующий $h[a, b] \rightarrow h[a, b]$, является самосопряженным оператором.

3.3 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра с непрерывным не равным тождественно нулю ядром, действующий $h[a, b] \rightarrow h[a, b]$, не является самосопряженным оператором.

3.4 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра $Bu = \int_a^x K(x, s) y(s) ds$ с вещественным непрерывным ядром является вполне непрерывным при действии $h[a, b] \rightarrow C[a, b]$ и $h[a, b] \rightarrow h[a, b]$.

3.5 Пусть φ - собственный вектор самосопряженного оператора A , действующего в евклидовом пространстве. Доказать, что множество векторов, ортогональных φ , образуют замкнутое линейное подпространство, инвариантное относительно A .

3.6 Доказать, что если интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметрическим вещественным ядром $K(x, s)$ действует в комплексном пространстве $h^C[a, b]$ (комплексном расширении пространства $h[a, b]$), то этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.

3.7 Доказать, что собственные векторы самосопряженного оператора A , соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

3.8 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с ядром $K(x, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ns}{n^2}$,

действующий в пространстве $h[0, \pi]$, является невырожденным.

3.9 Доказать, что нуль является простым собственным значением интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(x, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ns}{n^2}$, действующего в пространстве $h[0, \pi]$.

3.10 Доказать, что нулевое собственное значение интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(x, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx \cdot \sin 2ns}{(2n)^2}$, действующего в пространстве $h[0, \pi]$, имеет бесконечную кратность.

3.11 Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого имеет конечную кратность.

3.12 Найти характеристические числа и собственные функции однородных уравнений Фредгольма с вырожденными непрерывными симметрическими ядрами в следующих случаях (все характеристические числа - вещественные):

а) $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos x \cos s y(s) ds$;

б) $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin x \sin s y(s) ds$;

в) $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+s) y(s) ds$;

г) $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x-s) y(s) ds$;

д) $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x+s) y(s) ds$;

е) $y(x) = \lambda \int_0^1 xs y(s) ds$;

ж) $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xs + x^2 s^2) y(s) ds$;

з) $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(x-s)) y(s) ds$.

3.13 Найти характеристические числа и собственные функции уравнений Фредгольма с вырожденными несимметрическими ядрами (характеристические числа необязательно вещественные, и их может не быть вовсе):

а) $y(x) = \lambda \int_0^1 (xs - 2x^2) y(s) ds$;

б) $y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x-s) y(s) ds$;

в) $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x \cos s y(s) ds$;

г) $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos x \sin s y(s) ds$.

Ответы к задачам

- 3.11 $Ay = \int_0^\pi K(x, s) y(s) ds$, где $K(x, s) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ns}{n^2}$ ($k \geq 2$).
- 3.12 а) $\lambda = \frac{2}{\pi}$, $y(x) = C \cos x$;
 б) $\lambda = \frac{2}{\pi}$, $y(x) = C \sin x$;
 в) $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$, $y_1(x) = C \cos x$; $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$, $y_2(x) = C \sin x$;
 г) $\lambda_{1,2} = \frac{2}{\pi}$, $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ - ранг х.ч. равен 2.
 д) $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_1(x) = C(1 + x\sqrt{3})$; $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $y_2(x) = C(1 - x\sqrt{3})$;
 е) $\lambda = 3$, $y(x) = Cx$;
 ж) $\lambda_1 = \frac{3}{2}$, $y_1 = Cx$; $\lambda_2 = \frac{5}{2}$, $y_2 = Cx^2$;
 з) $\lambda_1 = \frac{1}{2\pi}$, $y_1 = C$; $\lambda_2 = \frac{1}{\pi}$, $y_2^{(1)} = C \sin x$, $y_2^{(2)} = C \cos x$.
- 3.13 а) $\lambda_1 = -6$, $y_1 = C(x - 2x^2)$;
 б) $\lambda_1 = \frac{i}{\pi}$, $y_1 = Ce^{ix}$; $\lambda_2 = -\frac{i}{\pi}$, $y_2 = Ce^{-ix}$;
 в) характеристических чисел (и собственных функций) нет;
 г) характеристических чисел (и собственных функций) нет.

ТЕМА 4

Принцип сжимающих отображений. Метод последовательных приближений для уравнения Фредгольма 2-рода с "малым" λ .

Основные определения и теоремы

Пусть D – оператор, вообще говоря, нелинейный, действующий $D: B \rightarrow B$, где B – банахово (полное нормированное) пространство.

Оператор D называется сжимающим (или сжимающим отображением), если существует константа q : $0 \leq q < 1$, такая, что для любых $y_1, y_2 \in B$ имеет место неравенство $\|Dy_1 - Dy_2\| \leq q \|y_1 - y_2\|$.

Элемент y называется неподвижной точкой оператора D , если $Dy = y$.

Теорема (о неподвижной точке). Пусть D – сжимающий оператор. Тогда существует, и притом единственная, точка $y \in B$ такая, что $Dy = y$. Эта точка может быть найдена методом последовательных приближений: $y_{n+1} = Dy_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, где $y_0 \in B$ – произвольная фиксированная точка из B (начальное приближение), причем $y_n \rightarrow y: Dy = y$.

Теорема. Пусть D – оператор, отображающий банахово пространство B в себя, и пусть существует натуральное число k такое, что D^k – сжимающий оператор. Тогда оператор D имеет единственную неподвижную точку (т.е. такую, что $Dy = y$), причем y может быть найдено методом последовательных приближений: для любого $y_0 \in B$ $y_{n+1} = D y_n$, $n = 0, 1, \dots$, $y_n \rightarrow y$.

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$: $Ay \equiv \int_a^b K(x, s) y(s) ds$, где ядро $K(x, s)$ непрерывно по совокупности переменных x, s , но, вообще говоря, не симметрическое. Обозначим: $\max_{x, s \in [a, b]} |K(x, s)| = K_0$, тогда при $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$ оператор λA является сжимающим. Заметим, что $C[a, b]$ – банахово, т.е. полное нормированное пространство.

Теорема. Если $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$ (такие λ будем называть «малыми»), то неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x)$ имеет единственное решение для любой непрерывной функции $f(x) \in C[a, b]$, причем решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Следствие 1. При $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$ однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Следствие 2. Если у оператора Фредгольма есть характеристические числа, то $|\lambda_{\min}| \geq \frac{1}{K_0(b-a)}$.

Если записать уравнение Фредгольма 2-го рода в операторной форме $y = \lambda Ay + f$ или $(I - \lambda A)y = f$, то в случае, когда решение существует и единственно, его (решение) можно представить в виде $y = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda R_\lambda) f = f + \lambda R_\lambda f$, где R_λ - интегральный оператор с непрерывным по x, s ядром $R(x, s, \lambda)$, т.е. $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds$.

Ядро $R(x, s, \lambda)$ оператора R_λ называется резольвентой.

Функции $K_1(x, s) \equiv K(x, s)$, $K_n(x, s) = \int_a^b K(x, t) K_{n-1}(t, s) dt$, $n = 2, 3, \dots$ называются повторными (итерированными) ядрами. Так как при "малых" λ ($|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$) ряд $\underbrace{K_1(x, s)}_{=K(x, s)} + \lambda K_2(x, s) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x, s) + \dots$ сходится равномерно по $x, s \in [a, b]$, то резольвента $R(x, s, \lambda)$ может быть найдена по формуле $R(x, s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s)$.

В случае "малых" λ для оператора R_λ имеет место представление $R_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} A^n$ - ряд Неймана.

Примеры решения задач

Пример 4.1. Доказать, что сжимающий оператор является непрерывным.

Решение. Напомним определение сжимающего оператора. Оператор A , действующий в банаховом пространстве B называется сжимающим, если $\exists q: 0 \leq q < 1$ такое, что $\forall y_1, y_2 \in B: \|Ay_1 - Ay_2\| \leq q \cdot \|y_1 - y_2\|$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и пусть $0 < \delta \leq \varepsilon$, тогда для любых элементов y, y_0 таких, что $\|y - y_0\| \leq \delta$, учитывая $0 \leq q < 1$, имеем: $\|Ay - Ay_0\| \leq q \cdot \|y - y_0\| < \|y - y_0\| \leq \delta \leq \varepsilon$. Таким образом, оператор является непрерывным, что и требовалось доказать.

Пример 4.2. Пусть оператор A , действующий в банаховом пространстве B , обладает свойством, что $P = A^n$ является сжимающим оператором. Доказать, что уравнение $y = Ay$ имеет единственное решение.

Решение. Так как P - сжимающий, то существует единственная неподвижная точка y : $y = Py$ этого оператора, которая может быть найдена методом последовательных приближений, т.е. для указанного y справедливы следующие утверждения:

а) для $\forall y_0 \in B$ последовательность $P^k y_0 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$ (неподвижной точке оператора P);

б) $Py = y \Rightarrow P(Py) = Py = y \Rightarrow \dots \Rightarrow P^k y = y$ для любого $k=1, 2, 3, \dots$.

Рассмотрим $Ay = A \underbrace{P^k y}_{=y} = A A^{nk} y = A^{nk} Ay = P^k Ay$. Обозначив $Ay \equiv y_0$ и продолжая

предыдущее равенство, с учетом а) получим $Ay = P^k Ay = P^k y_0 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{см. а)}} y$, откуда следует,

что $y = Ay$, т.е. неподвижная точка оператора P является также и неподвижной точкой оператора A .

Для доказательства единственности неподвижной точки оператора A предположим противное, т.е. пусть существуют две точки $\tilde{y} \neq \bar{y}$ такие что $A\tilde{y} = \tilde{y}$ и $A\bar{y} = \bar{y}$, тогда $A^n \tilde{y} \equiv P\tilde{y} = \tilde{y}$ и $A^n \bar{y} \equiv P\bar{y} = \bar{y}$, откуда следует, что $\tilde{y} = \bar{y}$ в силу единственности неподвижной точки оператора P .

Пример 4.3. Пусть в банаховом пространстве B заданы два сжимающих оператора A и D , т.е. для любых элементов $x, y \in B$ имеют место соотношения $\|Ax - Ay\| \leq \alpha_A \cdot \|x - y\|$, $0 \leq \alpha_A < 1$ и $\|Dx - Dy\| \leq \alpha_D \cdot \|x - y\|$, $0 \leq \alpha_D < 1$.

Зададим некоторое число $\varepsilon > 0$. Назовем операторы A и D ε -близкими, если для $\forall z \in B$ выполнено $\|Az - Dz\| \leq \varepsilon$.

Доказать, что неподвижные точки x^* и y^* этих операторов находятся на расстоянии $\rho(x^*, y^*) \equiv \|x^* - y^*\| \leq \frac{\varepsilon}{1 - \alpha}$, где $\alpha = \max\{\alpha_A, \alpha_D\} < 1$.

Решение. Пусть x^* - неподвижная точка оператора A , т.е. $x^* = Ax^*$, а y^* - неподвижная точка оператора D : $y^* = Dy^*$.

Возьмем x^* в качестве начального приближения итерационного процесса для определения y^* , т.е. $y_0 = x^*$, $y_1 = Dy_0 \equiv Dx^*$, ..., $y_k = D^k x^*$; $y^* = \lim_{k \rightarrow \infty} D^k x^*$. Тогда

$$\|x^* - y_k\| \leq \|x^* - y_1\| + \|y_1 - y_2\| + \dots + \|y_{k-1} - y_k\| \leq \|x^* - y_1\| \cdot (1 + \alpha_D + \alpha_D^2 + \dots + \alpha_D^{k-1}) \leq \frac{\|x^* - Dx^*\|}{1 - \alpha_D}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим $\|x^* - y^*\| \leq \frac{\|x^* - Dx^*\|}{1 - \alpha_D} = \frac{\|Ax^* - Dx^*\|}{1 - \alpha_D} \leq \frac{\|Ax^* - Dx^*\|}{1 - \alpha} \leq \frac{\varepsilon}{1 - \alpha}$, что и требовалось доказать.

Пример 4.4. Привести пример оператора, переводящего банахово пространство B в себя, удовлетворяющего условию $\|Ay - Az\|_B < \|y - z\|_B$ для любых $y, z \in B$, и не имеющего неподвижной точки.

Решение. Рассмотрим следующий оператор в пространстве R^1 : $Ax = x + \frac{\pi}{2} - \arctg x$. Для любых $y, z \in B$, применяя формулу Лагранжа (ξ между y и z), получим $\|Ay - Az\|_{R^1} = |y - \arctg y - (z - \arctg z)| = |1 - \frac{1}{1 + \xi^2}| \cdot |y - z| < |y - z| \equiv \|y - z\|_{R^1}$. Однако, для всех y имеет место неравенство $Ay = y + \frac{\pi}{2} - \arctg y > y$, что и означает отсутствие неподвижной точки рассматриваемого оператора.

Замечание. Указанный оператор не удовлетворяет теореме о неподвижной точке!!!

Пример 4.5. При каких λ оператор Фредгольма $Ay = \lambda \int_0^1 (x-s) y(s) ds$ является

сжимающим

а) при действии $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$;

б) при действии $h[0,1] \rightarrow h[0,1]$.

Решение.

а) Рассмотрим две непрерывные функции $y(x), z(x) \in C[0,1]$, тогда

$$\|Ay - Az\|_{C[0,1]} = |\lambda| \cdot \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^1 (x-s)[y(s) - z(s)] ds \right| \leq |\lambda| \cdot \max_{s \in [0,1]} |y(s) - z(s)| \cdot \max_{x,s \in [0,1]} |x-s| = |\lambda| \cdot \|y - z\|_{C[0,1]}$$

и оператор $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ будет сжимающим при $|\lambda| < 1$.

б) Рассмотрим две непрерывные функции $y(x), z(x) \in h[0,1]$, тогда

$$\begin{aligned} \|Ay - Az\|_{h[0,1]}^2 &= \lambda^2 \cdot \int_0^1 dx \left[\int_0^1 (x-s) \cdot [y(s) - z(s)] ds \right]^2 \leq \text{(неравенство Коши-Буняковского)} \\ &\leq \lambda^2 \cdot \int_0^1 \left\{ \int_0^1 (x-s)^2 ds \cdot \underbrace{\int_0^1 [y(s) - z(s)]^2 ds}_{= \|y-z\|_{h[0,1]}^2} \right\} dx = \lambda^2 \cdot \|y - z\|_{h[0,1]}^2 \cdot \int_0^1 \int_0^1 (x-s)^2 ds dx = \lambda^2 \cdot \|y - z\|_{h[0,1]}^2 \cdot \frac{1}{6} \text{ и} \end{aligned}$$

оператор $A: h[0,1] \rightarrow h[0,1]$ будет сжимающим при $|\lambda| < \sqrt{6}$.

Пример 4.6. При каких λ оператор Вольтерра $Bu = \lambda \int_0^x (x-s) u(s) ds$ является

сжимающим

а) при действии $C[0,1] \rightarrow C[0,1]$;

б) при действии $h[0,1] \rightarrow h[0,1]$.

Решение.

а) Рассмотрим две непрерывные функции $y(x), z(x) \in C[0,1]$, тогда

$$\|Ay - Az\|_{C[0,1]} = |\lambda| \cdot \max_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x \underbrace{(x-s)}_{\geq 0} [y(s) - z(s)] ds \right| \leq |\lambda| \cdot \max_{s \in [0,1]} |y(s) - z(s)| \cdot \max_{x \in [0,1]} \int_0^x (x-s) ds = \frac{|\lambda|}{2} \|y - z\|_{C[0,1]}$$

и оператор $B: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ будет сжимающим при $|\lambda| < 2$.

б) Рассмотрим две непрерывные функции $y(x), z(x) \in h[0,1]$, тогда

$$\begin{aligned} \|Ay - Az\|_{h[0,1]}^2 &= \lambda^2 \cdot \int_0^1 dx \left[\int_0^x (x-s) \cdot [y(s) - z(s)] ds \right]^2 \leq \text{(неравенство Коши-Буняковского)} \\ &\leq \lambda^2 \cdot \int_0^1 \left[\int_0^x (x-s)^2 ds \cdot \underbrace{\int_0^x [y(s) - z(s)]^2 ds}_{\leq \|y-z\|_{h[0,1]}^2} \right] dx = \lambda^2 \cdot \|y - z\|_{h[0,1]}^2 \cdot \int_0^1 dx \int_0^x (x-s)^2 ds = \frac{\lambda^2}{12} \cdot \|y - z\|_{h[0,1]}^2 \text{ и} \end{aligned}$$

оператор $B: h[0,1] \rightarrow h[0,1]$ будет сжимающим при $|\lambda| < \sqrt{12}$.

Пример 4.7. Считая параметр λ "малым", методом последовательных приближений построить резольвенту и получить решение уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s)y(s)ds + \cos x$. Сформулировать критерий "малого" λ .

Замечание. Приведенный ниже способ построения резольвенты служит иллюстрацией к доказанной в курсе лекций теореме о возможности представления резольвенты $R(x, s, \lambda)$ в виде ряда $R(x, s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s)$ при "малых" λ . Так как ядро оператора Фредгольма в данной задаче является вырожденным, то решение уравнения может быть получено непосредственно методами, рассмотренными в примерах 6.1-6.2. Для построения резольвенты также могут быть использованы и другие приемы (сравните с результатом примера 6.3!!!).

Решение. Начнем с построения резольвенты $R(x, s, \lambda)$, выписав итерированные ядра:

$$K_1(x, s) \equiv K(x, s) = \sin(x+s),$$

$$K_2(x, s) = \int_0^\pi K(x, t) K_1(t, s) dt = \int_0^\pi \sin(x+t) \sin(t+s) dt = \frac{\pi}{2} \cdot \cos(x-s),$$

$$K_3(x, s) = \int_0^\pi K(x, t) K_2(t, s) dt = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin(x+t) \cos(t-s) dt = \frac{\pi^2}{4} \cdot \sin(x+s),$$

.....

$$K_{2m}(x, s) = \int_0^\pi K(x, t) K_{2m-1}(t, s) dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m-1} \cdot \cos(x-s), \quad m=1, 2, 3, \dots,$$

$$K_{2m+1}(x, s) = \int_0^\pi K(x, t) K_{2m}(t, s) dt = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \cdot \sin(x+s), \quad m=1, 2, 3, \dots$$

Используя формулу для резольвенты $R(x, s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s)$ и суммируя ряд

$$\text{отдельно по четным и нечетным номерам, найдем } R(x, s, \lambda) = \frac{\sin(x+s) + \frac{\pi\lambda}{2} \cos(x-s)}{1 - \left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2}.$$

Критерий "малого" λ в данном случае совпадает с условием сходимости ряда $|\lambda| < \frac{2}{\pi}$, и как легко видеть, выполняется на более широком множестве значений λ , чем достаточное условие, сформулированное в теореме о разрешимости уравнения Фредгольма 2-го рода: $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)} = \frac{1}{\pi}$.

Далее, так как решение представимо в виде $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds$, то для $f(x) = \cos x$ получим

$$y(x) = \cos x + \lambda \int_0^\pi R(x, s, \lambda) \cos s ds = \cos x + \frac{\frac{\lambda\pi}{2} \cdot \sin x + \left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2 \cos x}{1 - \left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2} = \frac{\cos x + \frac{\lambda\pi}{2} \cdot \sin x}{1 - \left(\frac{\pi\lambda}{2}\right)^2}.$$

Тот же результат дает и непосредственное применение метода последовательных приближений. Положим $y_0 \equiv 0$, $y_{n+1} = \lambda A y_n + f$, $n = 0, 1, 2, \dots$, тогда

$$y_1 = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s) \cdot 0 \cdot ds + \cos x = \cos x;$$

$$y_2 = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s) \cos s \, ds + \cos x = \lambda \frac{\pi}{2} \sin x + \cos x;$$

$$y_3 = \lambda \int_0^\pi \sin(x+s) \left[\lambda \frac{\pi}{2} \sin s + \cos s \right] ds + \cos x = \left(\frac{\lambda \pi}{2} \right)^2 \cos x + \lambda \frac{\pi}{2} \sin x + \cos x;$$

.....

$$y_{2n+1} = \cos x \left[1 + \left(\frac{\lambda \pi}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda \pi}{2} \right)^{2n} \right] + \sin x \cdot \left(\frac{\lambda \pi}{2} \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{\lambda \pi}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda \pi}{2} \right)^{2n-2} \right];$$

$$y_{2n+2} = \cos x \left[1 + \left(\frac{\lambda \pi}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda \pi}{2} \right)^{2n} \right] + \sin x \cdot \left(\frac{\lambda \pi}{2} \right) \cdot \left[1 + \left(\frac{\lambda \pi}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda \pi}{2} \right)^{2n} \right].$$

Легко видеть, что если $|\lambda| < \frac{2}{\pi}$, то при $n \rightarrow \infty$ обе подпоследовательности

сходятся к одной и той же функции $y(x) = \frac{\cos x + \frac{\lambda \pi}{2} \cdot \sin x}{1 - \left(\frac{\pi \lambda}{2} \right)^2}$, которая уже была

получена выше в качестве решения задачи другим способом.

Пример 4.8. Методом последовательных приближений решить уравнение Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_0^1 y(s) ds + 1. \text{ Показать, что ряд Неймана сходится лишь в области } |\lambda| < 1, \text{ однако}$$

решение, полученное при этом условии, существует при всех $\lambda \neq 1$.

Решение. Решение уравнения Фредгольма $y = \lambda A y + f$ может быть записано в виде ряда

$$\text{Неймана } y(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A^n f(x).$$

В нашем случае $Af(x) = \int_0^1 f(x) dx$, $f(x) = 1$, поэтому $Af(x) = \int_0^1 1 \cdot dx = 1$ и

$$A^n f(x) = 1 \quad (n = 2, 3, \dots). \text{ Следовательно, при } |\lambda| < 1, \text{ ряд Неймана } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n A^n f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$$

сходится, и решением уравнения является $y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n = \frac{1}{1-\lambda}$; при $|\lambda| \geq 1$ - ряд расходится, и справедливость полученной формулы оказывается под сомнением.

С другой стороны, если обозначить $C = \int_0^1 y(s) ds$, то решение уравнения примет вид

$$y(x) = \lambda C + 1, \text{ откуда } C = \int_0^1 (\lambda C + 1) ds = \lambda C + 1. \text{ Поэтому, при } \lambda = 1 \text{ уравнение}$$

неразрешимо, а для остальных $\lambda \neq 1$ находим $C = \frac{1}{1-\lambda}$ и $y(x) = 1 + \lambda C = 1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{1}{1-\lambda}$.

Итак, решение задачи существует при всех $\lambda \neq 1$ и дается формулой $y(x) = \frac{1}{1-\lambda}$, что совпадает с выражением, полученным ранее лишь для $|\lambda| < 1$. Заметим, что при $|\lambda| \geq 1$ решение существует, несмотря на то, что ряд Неймана расходится.

Задачи для самостоятельного решения

- 4.1 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с вещественным непрерывным ядром, действующий в пространстве $C[a, b]$, не имеет характеристических чисел на интервале

$$\lambda \in \left(0, \frac{1}{K_0(b-a)} \right), \text{ где } K_0 = \max_{x,s \in [a,b]} |K(x,s)|.$$

- 4.2 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с вещественным непрерывным ядром, действующий в пространстве $h[a, b]$, не имеет характеристических чисел на интервале

$$\lambda \in \left(0, \frac{1}{K_0(b-a)} \right), \text{ где } K_0 = \max_{x,s \in [a,b]} |K(x,s)|.$$

- 4.3 Доказать, что задача решения уравнения Фредгольма 2-рода $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x)$ с

вещественным непрерывным ядром корректно поставлена при $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$, где

$$K_0 = \max_{x,s \in [a,b]} |K(x,s)|$$

- а) в пространстве $C[a, b]$;
б) в пространстве $h[a, b]$.

- 4.4 Доказать, что оператор Фредгольма $y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 x s^2 y(s) ds + 1$ является сжимающим в пространстве $C[0, 1]$ и найти его неподвижную точку.

- 4.5 Методом последовательных приближений построить резольвенту и получить решение уравнения Фредгольма 2-го рода:

а) $y(x) = \lambda \int_0^1 x s y(s) ds + x$;

б) $y(x) = \lambda \int_0^1 \frac{x}{1+s^2} y(s) ds + 1 + x^2$;

в) $y(x) = \lambda \int_0^1 y(s) ds + \sin \pi x$;

г) $y(x) = \lambda \int_0^\pi x \sin 2s y(s) ds + \cos 2x$;

д) $y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+s) y(s) ds + 2$;

$$\text{е) } y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos s \cdot y(s) ds + 1 \quad (\lambda = 1);$$

$$\text{ж) } y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 x e^s \cdot y(s) ds + e^{-x} \quad (\lambda = \frac{1}{2});$$

$$\text{з) } y(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} y(s) ds + x \quad (\lambda = 1).$$

В случаях а) - д) сформулировать критерий "малого" λ ; в примерах е) - з) проверить выполнение соответствующего условия.

Ответы к задачам

$$4.4 \quad y = \frac{4}{21}x + 1.$$

4.5 а) Резольвента $R(x, s, \lambda) = \frac{3xs}{3-\lambda}$, решение $y(x) = \frac{3x}{3-\lambda}$; условие сходимости последовательных приближений $|\lambda| < 3$, достаточное условие теоремы выполнено при $|\lambda| < 1$.

$$\text{б) Резольвента } R(x, s, \lambda) = \frac{1}{1-\lambda \frac{\ln 2}{2}} \cdot \frac{x}{1+s^2}, \text{ решение } y(x) = 1 + \frac{\lambda x}{1-\lambda \frac{\ln 2}{2}} + x^2,$$

условие сходимости последовательных приближений $|\lambda| < \frac{2}{\ln 2}$, достаточное условие теоремы выполнено при $|\lambda| < 1$.

в) Резольвента $R(x, s, \lambda) = \frac{1}{1-\lambda}$, решение $y(x) = \sin \pi x + \frac{2\lambda}{\pi(1-\lambda)}$, условие сходимости последовательных приближений $|\lambda| < 1$ совпадает с достаточным условием теоремы.

$$\text{г) Резольвента } R(x, s, \lambda) = \frac{x \cdot \sin 2s}{1 + \frac{\lambda \pi}{2}}, \text{ решение } y(x) = \cos 2x, \text{ последовательные}$$

приближения сходятся при $|\lambda| < \frac{2}{\pi}$, достаточное условие теоремы выполнено при $|\lambda| < \frac{1}{\pi^2}$.

$$\text{д) Резольвента } R(x, s, \lambda) = \frac{\sin(x+s) + \lambda \pi \cos(x-s)}{1 - \lambda^2 \pi^2}, \text{ решение } y(x) = 2,$$

последовательные приближения сходятся при $|\lambda| < \frac{1}{\pi}$, достаточное условие теоремы выполнено при $|\lambda| < \frac{1}{2\pi}$.

е) Резольвента $R(x, s, \lambda) = \frac{2 \sin x \cdot \cos s}{2 - \lambda}$, решение $y(x) = 1 + 2 \sin x$, последовательные приближения сходятся при $|\lambda| < 2$, однако достаточное условие "малого" λ - $|\lambda| = 1 < \frac{2}{\pi}$ - не выполнено.

ж) Резольвента $R(x, s, \lambda) = \frac{x e^s}{1 - \lambda}$, решение $y(x) = x + e^{-x}$, последовательные приближения сходятся при $|\lambda| < 1$, однако достаточное условие теоремы $|\lambda| = \frac{1}{2} < \frac{1}{e}$ не выполняется.

з) Резольвента $R(x, s, \lambda) = \frac{2}{2 - \lambda}$, решение $y(x) = x + \frac{1}{4}$, последовательные приближения сходятся при $|\lambda| < 2$, достаточное условие теоремы $|\lambda| = 1 < 2$ также выполняется.

ТЕМА 5.

Линейное уравнение Вольтерра 2-го рода.

Основные определения и теоремы.

Уравнение $y = \lambda \int_a^x K(x,s) y(s) ds + f(x)$, $x, s \in [a, b]$, или в операторной форме $y = \lambda B y + f$, называется уравнением Вольтерра 2-го рода.

Пусть ядро $K(x,s)$ непрерывно по совокупности переменных на своей треугольной области определения $\Delta = \{x, s : a \leq s \leq x \leq b\}$ и не равно нулю тождественно, $f(x)$ – непрерывная на $[a, b]$ функция.

Теорема. Уравнение Вольтерра 2-го рода при любом значении λ имеет единственное решение для любой непрерывной функции $f(x)$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений $y_{n+1} = \lambda B y_n + f$, $\forall y_0 \in C[a, b]$, $f(x) \in C[a, b]$.

Следствие 1. При любом λ однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Следствие 2. Оператор Вольтерра, действующий $C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, не имеет характеристических чисел. Таким образом, оператор Вольтерра является примером вполне непрерывного оператора, не имеющего ни одного характеристического числа.

Метод последовательных приближений для уравнения Вольтерра 2-го рода называется методом Пикара и выглядит так: для любого начального приближения

$y_0 \in C[a, b]$ определим $y_{n+1} = \lambda \int_a^x K(x,s) y_n(s) ds + f(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, или

$y_{n+1} = \lambda B y_n + f$, причем $y_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y(x)$.

Полагая $y_0 = 0$, получаем ряд Неймана $y = f + \lambda B f + \lambda^2 B^2 f + \dots + \lambda^n B^n f + \dots$.

Если записать уравнение Вольтерра 2-го рода в операторной форме $y = \lambda A y + f$ или $(I - \lambda A)y = f$, то так как решение существует и единственно при любой непрерывной функции $f(x)$ и любом λ , его (решение) можно представить в виде $y = (I - \lambda A)^{-1} f = (I + \lambda R_\lambda) f = f + \lambda R_\lambda f$, где R_λ – интегральный оператор с непрерывным по x, s ядром $R(x, s, \lambda)$, т.е. $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, s, \lambda) f(s) ds$.

Ядро $R(x, s, \lambda)$ оператора R_λ называется резольвентой.

Функции $K_1(x, s) \equiv K(x, s)$, $K_n(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_{n-1}(t, s) dt$, $n = 2, 3, \dots$ называются повторными (итерированными) ядрами. Ряд $\underbrace{K_1(x, s)}_{=K(x, s)} + \lambda K_2(x, s) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x, s) + \dots$ сходится равномерно по $x, s \in [a, b]$ при любых λ , в отличие от аналогичного ряда для

уравнения Фредгольма, сходимость которого гарантировалась лишь при $|\lambda| < \frac{1}{K_0(b-a)}$, и

резольвента $R(x, s, \lambda)$ может быть получена по формуле $R(x, s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s)$.

Уравнения Вольтерра с ядрами специального вида могут также решаться путем сведения к дифференциальному уравнению, либо с использованием преобразования Лапласа (примеры 5.4 и 5.5).

Примеры решения задач.

Пример 5.1. Методом последовательных приближений построить резольвенту интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода $y(x) = \lambda \int_0^x e^{-(x-s)} y(s) ds + x e^{\frac{x^2}{2}}$ и найти решение этого уравнения при $\lambda = 1$.

Решение. Вычислим повторные ядра этого уравнения: $K_1(x, s) = K(x, s) = e^{-(x-s)}$,

$$K_2(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_1(t, s) dt = \int_s^x e^{-(x-t)} e^{-(t-s)} dt = (x-s) \cdot e^{-(x-s)},$$

$$K_3(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_2(t, s) dt = \int_s^x e^{-(x-t)} \cdot (t-s) e^{-(t-s)} dt = \frac{(x-s)^2}{2} \cdot e^{-(x-s)},$$

.....

$$K_{n+1}(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_n(t, s) dt = \frac{(x-s)^n}{n!} \cdot e^{-(x-s)}.$$

Подставляя эти выражения в формулу для резольвенты, получим

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^{m-1} K_m(x, s) = e^{-(x-s)} \cdot e^{\lambda(x-s)} = e^{(\lambda-1)(x-s)}.$$

Заметим, что ряд сходится при любых λ , что обеспечивается не малостью λ , как было в случае уравнения Фредгольма, а наличием множителя $m!$ в знаменателях повторных ядер.

Далее, положив $\lambda = 1$, получим $R(x, s, \lambda) = R(x, s, 1) = 1$ и запишем решение уравнения при $f(x) = x e^{\frac{x^2}{2}}$ в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x, s, \lambda) f(s) ds = x e^{\frac{x^2}{2}} + 1 \cdot \int_0^x s e^{\frac{s^2}{2}} ds = (x+1) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1.$$

Пример 5.2. Методом последовательных приближений решить уравнение Вольтерра

$$y(x) = \int_0^x (s-x) y(s) ds + 1.$$

Решение. Итерационный процесс для данного уравнения выглядит так:

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x (s-x) y_n(s) ds + 1.$$

Выберем в качестве начального приближения $y_0(x) \equiv 0$, тогда последовательно найдем:

$$y_1(x) = \int_0^x (s-x) \cdot 0 \, ds + 1 = 1,$$

$$y_2(x) = \int_0^x (s-x) y_1(s) \, ds + 1 = \int_0^x (s-x) \cdot 1 \, ds + 1 = 1 - \frac{x^2}{2},$$

$$y_3(x) = \int_0^x (s-x) y_2(s) \, ds + 1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

.....

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x (s-x) y_n(s) \, ds + 1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим функцию $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \cos x$, которая и является решением рассматриваемого уравнения.

Пример 5.3. Доказать, что если ядро уравнения Вольтерра $y(x) = \lambda \int_0^x K(x,s) y(s) \, ds + f(x)$

зависит только от разности аргументов, т.е. $K(x,s) = K(x-s)$, то все повторные ядра, а следовательно и резольвента, также являются функциями лишь от разности $(x-s)$.

Решение. Пусть $K(x,s) = K(x-s)$, тогда $K_2(x,s) = \int_s^x K(x-t) K(t-s) \, dt$. Произведя замену переменной интегрирования по формуле $t-s = \xi$, получим

$$K_2(x,s) = \int_0^{x-s} K(x-s-\xi) K(\xi) \, d\xi = \int_0^{x-s} F_2(x-s, \xi) \, d\xi = \Phi_2(x-s). \text{ Аналогично,}$$

$$K_n(x,s) = \int_s^x K(x,t) K_{n-1}(t,s) \, dt = \int_s^x K(x-t) K_{n-1}(t-s) \, dt = \int_0^{x-s} K(x-s-\xi) K_{n-1}(\xi) \, d\xi = \Phi_n(x-s),$$

что и требовалось доказать.

Пример 5.4. С помощью преобразования Лапласа найти резольвенту и записать решение уравнения Вольтерра $y(x) = \int_0^x \sin(x-s) y(s) \, ds + f(x)$.

Решение. Поставим в соответствие функциям, входящим в уравнение, их изображения: $y(x) \div Y(p)$, $f(x) \div F(p)$, $\sin x \div \frac{1}{p^2 + 1} \equiv K(p)$. Учитывая, что изображение свертки двух функций есть произведение их изображений, получим $Y(p) = K(p) \cdot Y(p) + F(p)$, откуда $Y(p) = \frac{F(p)}{1-K(p)} = F(p) + \frac{K(p)}{1-K(p)} \cdot F(p)$.

Используя результат предыдущей задачи, можно сделать вывод, что резольвента зависит лишь от разности $(x-s)$, следовательно, решение исходного уравнения представимо в виде $y(x) = f(x) + \int_a^x R(x-s, 1) f(s) \, ds$. Сравнивая последние две формулы,

легко видеть, что изображение искомой резольвенты есть $\tilde{R}(p) = \frac{K(p)}{1 - K(p)}$. Подставив сюда

$$K(p) = \frac{1}{p^2 + 1}, \text{ получим } \tilde{R}(p) = \frac{1}{p^2}, \text{ откуда найдем } R(x, s, 1) = R(x - s, 1) = x - s.$$

$$\text{Решение уравнения теперь можно записать так: } y(x) = f(x) + \int_0^x (x - s) f(s) ds.$$

Пример 5.5. Решить интегральное уравнение Вольтерра $y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x - s) y(s) ds$,

сведя его к задаче Коши для дифференциального уравнения.

Решение. Легко видеть, что решение уравнения удовлетворяет условию $y(0) = 0$.

Последовательно продифференцируем интегральное уравнение и найдем

$$y'(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x - s) y(s) ds + \sin(x - x) y(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x - s) y(s) ds, \quad y'(0) = 1,$$

$$y''(x) = -\sin x - \int_0^x \sin(x - s) y(s) ds + \cos(x - x) y(x) = -\sin x + y(x) - \int_0^x \sin(x - s) y(s) ds.$$

Складывая последнее равенство с исходным, получим $y'' = 0$. Решение задачи Коши с начальными условиями $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ дает $y(x) = x$.

Замечание. Этот же результат можно получить, используя формулу решения предыдущего примера, полагая в ней $f(x) = \sin x$:

$$y(x) = \sin x + \int_0^x (x - s) \sin s ds = \sin x + x - \sin x = x.$$

Задачи для самостоятельного решения.

5.1 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в $C[a, b]$, не имеет характеристических чисел.

5.2 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра, действующий в $h[a, b]$, не имеет характеристических чисел.

5.3 Доказать, что задача решения уравнения Вольтерра 2-рода $y(x) = \int_a^x K(x, s) y(s) ds + f(x)$

корректно поставлена

а) в пространстве $C[a, b]$;

б) в пространстве $h[a, b]$.

5.4 Решить интегральное уравнение, сведя его к задаче Коши:

а) $y(x) = e^x + \int_0^x y(s) ds$

б) $y(x) = 4e^x + 3x - 4 - \int_0^x (x - s) y(s) ds$

в) $y(x) = \sin x + 2 \int_0^x e^{-s} y(x - s) ds$ (Указание: сделать в интеграле замену переменной $x - s = \xi$).

5.5 Методом последовательных приближений построить резольвенту и получить решение интегрального уравнения:

а) $y(x) = 1 + \int_0^x s y(s) ds$

б) $y(x) = x - \int_0^x (x-s) y(s) ds$

в) $y(x) = x + \frac{x^2}{2} - \int_0^x y(s) ds$.

5.6 Решить интегральное уравнение, используя преобразование Лапласа:

а) $y(x) = x - \int_0^x e^{x-s} y(s) ds$

б) $y(x) = \cos x - \int_0^x (x-s) \cos(x-s) y(s) ds$

в) $y(x) = 2 + \frac{1}{6} \int_0^x (x-s)^3 y(s) ds$

5.7 Решить уравнение Вольтерра 1-го рода $\int_0^x e^{x-s} y(s) ds = \sin x$

а) применив преобразование Лапласа;

б) продифференцировав уравнение и сведя его к уравнению Вольтерра 2-го рода.

Ответы к задачам.

5.4 а) $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$; $y(x) = (x+1) \cdot e^x$;
 б) $y'' + y = 4e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$; $y(x) = 2e^x - 2\cos x + 5\sin x$;
 в) $y' - y = \sin x + \cos x$, $y(0) = 0$; $y(x) = e^x - \cos x$.

5.5 а) $R(x, s, \lambda) = se^{\lambda \frac{x^2-s^2}{2}}$, $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$;
 б) $R(x, s, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}(s-x)$, $y(x) = \sin x$;
 в) $R(x, s, \lambda) = e^{\lambda(x-s)}$, $y(x) = x$.

5.6 а) $y(x) = x - \frac{x^2}{2}$;
 б) $y(x) = \frac{2}{3} \cos x \sqrt{3} + \frac{1}{3}$;
 в) $y(x) = \cos x + ch x$.

5.7 $y(x) = \cos x - \sin x$

ТЕМА 6

Неоднородное уравнение Фредгольма 2-го рода. Уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма.

Основные определения и теоремы

Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x)$.

Сопряженным (союзным) интегральным уравнением называется уравнение с ядром $K^*(x, s) = K(s, x)$. Если ядро симметрическое, то союзное уравнение совпадает с исходным.

Наряду с уравнением $y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x)$ или, в операторной форме $y = \lambda Ay + f$, будем рассматривать союзное с ним интегральное уравнение

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K^*(x, s) \psi(s) ds + g(x)$$

(в операторной форме $\Leftrightarrow \psi = \lambda A^* \psi + g$), $g(x)$ - непрерывная функция.

Сформулируем **4 теоремы Фредгольма**.

Теорема 1. Однородное уравнение

$$(1) \quad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = 0$$

и союзное с ним однородное уравнение

$$(2) \quad \psi(x) - \lambda \int_a^b K^*(x, s) \psi(s) ds = 0$$

($K^*(x, s) = K(s, x)$) при любом фиксированном λ имеют либо только тривиальные решения, либо одинаковое конечное число линейно независимых решений: $\varphi_1, \dots, \varphi_n$; $\psi_1, \dots, \psi_n$.

В курсе лекций теорема была доказана для интегральных уравнений с вырожденными и симметрическими ядрами.

Теорема 2. Для разрешимости неоднородного уравнения

$$(3) \quad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была ортогональна всем линейно независимым решениям однородного союзного уравнения (2) ($f(x) \perp \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, если λ - характеристическое число).

В курсе лекций теорема была доказана для случаев симметрических и вырожденных ядер.

Теорема 3 (альтернатива Фредгольма).

Либо неоднородное уравнение (3) разрешимо при любой неоднородности - непрерывной функции $f(x)$, либо однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение.

В курсе лекций теорема была доказана для случаев симметрических и вырожденных ядер.

Теорема 4. Множество характеристических чисел однородного уравнения (1) не более, чем счетно, с единственной возможной предельной точкой ∞ .

Этот результат справедлив для любого вполне непрерывного оператора. В курсе лекций он был получен для вполне непрерывных самосопряженных операторов, и, тем самым, доказан для случая симметрических ядер. Для интегральных операторов с вырожденными ядрами результат тривиален.

Замечание. В курсе лекций теоремы Фредгольма были доказаны для уравнений с симметрическими непрерывными ядрами и уравнений с непрерывными вырожденными ядрами. Они справедливы и для общего случая произвольного непрерывного ядра, так как имеет место следующая

Теорема. Интегральное уравнение Фредгольма 2 рода $y = \lambda Ay + f$ с невырожденным ядром при фиксированном λ можно заменить эквивалентным интегральным уравнением с вырожденным ядром.

Опишем процедуру решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x) \equiv \lambda Ay + f$ в случаях вырожденного ядра и симметричного ядра.

Напомним, что ядро $K(x,s)$ интегрального оператора Фредгольма называется вырожденным, если оно представимо в виде $K(x,s) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(s)$ на $[a,b]$, где функции $a_j(x), b_j(s)$ - непрерывны по своим аргументам на $[a,b]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $a_1(x), \dots, a_n(x)$ - линейно независимы, и $b_1(s), \dots, b_n(s)$ - линейно независимы.

Рассмотрим уравнения Фредгольма 2 рода $y(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds + f(x)$ с вырожденным ядром $K(x,s) = \sum_{j=1}^n a_j(x) b_j(s)$, $f(x)$ - заданная непрерывная функция.

Обозначив $c_j = \int_a^b b_j(s) y(s) ds$, будем иметь $y(x) = \lambda \sum_{j=1}^n c_j a_j(x) + f(x)$. Для нахождения c_j получим эквивалентную систему алгебраических уравнений $c_i = \int_a^b y(x) b_i(x) dx = \lambda \sum_{j=1}^n c_j \underbrace{\int_a^b a_j(x) b_i(x) dx}_{k_{ij}} + \underbrace{\int_a^b f(x) b_i(x) dx}_{f_i}$, или $c_i - \lambda \sum_{j=1}^n k_{ij} c_j = f_i$, $i = 1, \dots, n$.

Определитель этой системы
$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \dots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1 - \lambda k_{22} & \dots & -\lambda k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \dots & 1 - \lambda k_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема. Если λ не является характеристическим числом (т.е. $D(\lambda) \neq 0$), то интегральное уравнение Фредгольма 2 рода имеет, и притом, единственное, решение для любой непрерывной функции $f(x)$.

Решение алгебраической системы для c_j может быть получено, например, по формулам Крамера: $c_i = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^n D_{ik}(\lambda) f_k$, где $D_{ik}(\lambda)$ - алгебраические дополнения $D(\lambda)$; $D(\lambda)$ и $D_{ik}(\lambda)$ называются определителями Фредгольма. Тогда

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^n D_{ik}(\lambda) a_i(x) \int_a^b f(s) b_k(s) ds ,$$

или $y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds$, где $R(x, s, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ik}(\lambda) a_i(x) b_k(s)$ - резольвента интегрального оператора.

Теперь рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода в случае симметрического ядра.

Пусть ядро $K(x, s)$ непрерывно по совокупности переменных, симметрическое и $K(x, s) \not\equiv 0$; λ - вещественное число; $f(x)$ - заданная непрерывная функция. Пусть $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| \leq \dots$ - последовательность характеристических чисел интегрального оператора, которым соответствует ортонормированная система собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ (каждое характеристическое число повторяется в этой последовательности столько раз, какова его кратность!!!).

Возможны два случая:

а) $\lambda \neq \lambda_k, k = 1, 2, \dots$ Тогда решение можно записать в следующем виде

$y(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} f_k \varphi_k(x)$, где $f_k = \int_a^b f(s) \varphi_k(s) ds$ - коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по ортонормированной системе собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, или

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda} \right)}_{R(x, s, \lambda)} f(s) ds = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s) ds ,$$

где $R(x, s, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda}$ - резольвента интегрального оператора Фредгольма.

б) $\lambda = \lambda_{k_0}$, где λ_{k_0} - характеристическое число интегрального оператора, имеющее кратность r , т.е. ему отвечают r ортонормированных собственных функций $\varphi_{k_0}(x), \dots, \varphi_{k_0+r-1}(x)$. В этом случае решение не единственно и определяется формулой

$$y(x) = f(x) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0 \\ \dots \\ k \neq k_0+r-1}}^{\infty} \frac{\lambda f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + c_{k_0} \varphi_{k_0}(x) + \dots + c_{k_0+r-1} \varphi_{k_0+r-1}(x),$$

где $c_{k_0}, \dots, c_{k_0+r-1}$ - произвольные константы, причем решение существует при условии ортогональности $f(x)$ всем собственным функциям $\varphi_{k_0}(x), \dots, \varphi_{k_0+r-1}(x)$, соответствующим характеристическому числу λ_{k_0} . Бесконечный ряд, записанный в данном выражении, сходится абсолютно и равномерно.

Заметим, что решения отличаются одно от другого на функции, являющиеся элементами $Ker(I - \lambda A)$ (нуль-пространства) оператора $I - \lambda A$.

Теорема. Если однородное уравнение Фредгольма 2-го рода с непрерывным симметрическим ядром имеет только тривиальное решение (т.е. $\lambda \neq \lambda_k, k = 1, 2, \dots$), то неоднородное уравнение имеет, и притом, единственное, решение для любой функции $f(x)$. Если однородное уравнение имеет нетривиальное решение ($\lambda = \lambda_k$ при некотором k), то неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, если неоднородность - непрерывная функция $f(x)$ - ортогональна всем собственным функциям,

соответствующим данному λ (т.е. ортогональна всем решениям однородного уравнения). В последнем случае, если решение есть, то оно не единственно.

Теорема. (Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с симметрическими ядрами):

Либо неоднородное уравнение имеет решение при любой непрерывной функции $f(x)$, либо однородное уравнение имеет нетривиальное решение.

Примеры решения задач

Пример 6.1. Показать, что характеристические числа однородного уравнения Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (s^2 + sx)y(s)ds \quad \text{и} \quad \text{соответствующего} \quad \text{однородного} \quad \text{союзного} \quad \text{уравнения}$$

$$z(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 + sx)z(s)ds \quad \text{совпадают, и при этих } \lambda \text{ указанные уравнения имеют одинаковое}$$

число линейно независимых решений.

Решение. Обозначим $\int_{-1}^1 s^2 y(s) ds = a_1$, $\int_{-1}^1 s y(s) ds = a_2$, $\int_{-1}^1 z(s) ds = b_1$, $\int_{-1}^1 s z(s) ds = b_2$. Тогда

решения указанных уравнений примут вид $y(x) = \lambda a_1 + \lambda a_2 x$, $z(x) = \lambda b_1 x^2 + \lambda b_2 x$, и для определения коэффициентов получим

$$a_1 = \lambda \int_{-1}^1 s^2 (a_1 + a_2 s) ds = \frac{2\lambda}{3} a_1, \quad a_2 = \lambda \int_{-1}^1 s (a_1 + a_2 s) ds = \frac{2\lambda}{3} a_2,$$

$$b_1 = \lambda \int_{-1}^1 (b_1 s^2 + b_2 s) ds = \frac{2\lambda}{3} b_1, \quad b_2 = \lambda \int_0^1 s (b_1 s^2 + b_2 s) ds = \frac{2\lambda}{3} b_2.$$

Итак, при $\lambda \neq \frac{3}{2}$ $a_1 = a_2 = 0 \Rightarrow y(x) \equiv 0$, $b_1 = b_2 = 0 \Rightarrow z(x) \equiv 0$; при $\lambda = \frac{3}{2}$

a_2 , a_1 , b_1 , b_2 остаются произвольными. Поэтому, $\lambda = \frac{3}{2}$ является характеристическим

числом для обоих рассматриваемых уравнений, и при этом λ они имеют по два линейно независимых решения $y_1(x) \equiv C$, $y_2(x) = Cx$ и $z_1(x) \equiv Cx$, $z_2(x) = Cx^2$.

Пример 6.2. Для каждого λ исследовать разрешимость и построить решение неоднородного уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным несимметрическим

ядром $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (s^2 - sx)y(s)ds + x^3$.

Решение. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (s^2 - sx)y(s)ds$.

Обозначим $\int_{-1}^1 s^2 y(s) ds = a_1$, $\int_{-1}^1 s y(s) ds = a_2$, тогда решение его имеет вид $y(x) = \lambda a_1 - \lambda a_2 x$,

где $a_1 = \lambda \int_{-1}^1 s^2 (a_1 - a_2 s) ds = \frac{2\lambda}{3} a_1$, $a_2 = \lambda \int_{-1}^1 s (a_1 - a_2 s) ds = -\frac{2\lambda}{3} a_2$. Итак, при $\lambda \neq \pm \frac{3}{2}$

$a_1 = a_2 = 0$, однородное уравнение имеет только тривиальное решение, а значит исходное неоднородное уравнение имеет единственное решение.

При $\lambda = \pm \frac{3}{2}$ (характеристические числа) однородное уравнение имеет нетривиальные решения: если $\lambda = +\frac{3}{2}$, то $y_1(x) = C$, если $\lambda = -\frac{3}{2}$, то $y_2(x) = Cx$. Поэтому, для указанных значений λ вопрос о разрешимости неоднородного уравнения сводится к проверке ортогональности функции $f(x) = x^3$ собственным функциям однородного союзного уравнения $z(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x^2 - sx)z(s)ds$.

Найдем собственные функции однородного союзного уравнения. Обозначим $\int_{-1}^1 z(s)ds = b_1$, $\int_{-1}^1 s z(s)ds = b_2$, тогда решение его имеет вид $z(x) = \lambda b_1 x^2 - \lambda b_2 x$, где $b_1 = \lambda \int_{-1}^1 (b_1 s^2 - b_2 s)ds = \frac{2\lambda}{3} b_1$, $b_2 = \lambda \int_0^1 s (b_1 s^2 - b_2 s)ds = -\frac{2\lambda}{3} b_2$.

При $\lambda = +\frac{3}{2}$ получаем $b_2 = 0$, b_1 - произвольно, откуда $z_1(x) \equiv Cx^2$ и $\int_{-1}^1 f(x) \cdot z_1(x)dx = C \int_{-1}^1 x^3 \cdot x^2 dx = 0$, т.е. исследуемое уравнение разрешимо и решение его не единственно;

при $\lambda = -\frac{3}{2}$ имеем $b_1 = 0$, b_2 - произвольно, откуда $z_2(x) \equiv Cx$ и $\int_{-1}^1 f(x) \cdot z_2(x)dx = C \int_{-1}^1 x^3 \cdot x dx \neq 0$, т.е. у исследуемого неоднородного уравнения решений нет.

Чтобы решить уравнения $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (s^2 - sx)y(s)ds + x^3$ снова обозначим $\int_{-1}^1 s^2 y(s)ds = a_1$, $\int_{-1}^1 s y(s)ds = a_2$, тогда решение представимо в виде $y(x) = \lambda a_1 - \lambda a_2 x + x^3$, где $a_1 = \int_{-1}^1 s^2 (\lambda a_1 - \lambda a_2 s + s^3)ds = \frac{2\lambda}{3} a_1$, $a_2 = \int_{-1}^1 s (\lambda a_1 - \lambda a_2 s + s^3)ds = -\frac{2\lambda}{3} a_2 + \frac{2}{5}$.

При $\lambda = -\frac{3}{2}$ имеем $a_1 = 0$, $0 \cdot a_2 = \frac{2}{5}$, следовательно, решений нет, как и было установлено ранее;

при $\lambda = +\frac{3}{2}$ получим $a_2 = \frac{1}{5}$, $a_1 = C$ - произвольная постоянная, поэтому $y(x) \equiv C + \frac{3}{10}x + x^3$, т.е. решение не единственно, и определяется с точностью до собственной функции ядра $y_1(x) = C$, отвечающей $\lambda = +\frac{3}{2}$.

Если $\lambda \neq \pm \frac{3}{2}$, то $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{6}{5(3+2\lambda)}$, и единственное решение дается формулой

$$y(x) = \frac{6x}{5(3+2\lambda)} + x^3.$$

Пример 6.3. Построить резольвенту уравнения Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s) y(s) ds + f(x)$$

- а) вычислив определители Фредгольма;
 б) в виде разложения по собственным функциям.

Решение.

а) Ядро исследуемого оператора $K(x, s) = \sin(x+s) = \sin x \cos s + \cos x \sin s$ является вырожденным. Обозначим $a_1(x) = \sin x$, $a_2(x) = \cos x$, $b_1(s) = \cos s$, $b_2(s) = \sin s$ и найдем

элементы определителей Фредгольма $k_{ij} = \int_a^b a_j(x) b_i(x) dx$:

$$k_{11} = \int_0^{\pi} a_1(x) b_1(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0, \quad k_{12} = \int_0^{\pi} a_2(x) b_1(x) dx = \int_0^{\pi} \cos x \cos x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$k_{21} = \int_0^{\pi} a_1(x) b_2(x) dx = \int_0^{\pi} \sin x \sin x dx = \frac{\pi}{2}, \quad k_{22} = \int_0^{\pi} a_2(x) b_2(x) dx = \int_0^{\pi} \cos x \sin x dx = 0.$$

Вычислим определители Фредгольма: $D_{11}(\lambda) = 1$, $D_{12}(\lambda) = D_{21}(\lambda) = \lambda \frac{\pi}{2}$, $D_{22}(\lambda) = 1$,

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \dots & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1 - \lambda k_{22} & \dots & -\lambda k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \dots & 1 - \lambda k_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \frac{\pi}{2} \\ -\lambda \frac{\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \left(\lambda \frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Искомая резольвента $R(x, s, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ik}(\lambda) a_i(x) b_k(s)$ в случае $D(\lambda) \neq 0$,

т.е. $\lambda \neq \pm \frac{2}{\pi}$, примет вид $R(x, s, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 D_{ik}(\lambda) a_i(x) b_k(s) =$

$$= \frac{1 \cdot \sin x \cos s + \lambda \frac{\pi}{2} \cdot \sin x \sin s + \lambda \frac{\pi}{2} \cdot \cos x \cos s + 1 \cdot \cos x \sin s}{1 - \left(\lambda \frac{\pi}{2} \right)^2} = \frac{\sin(x+s) + \lambda \frac{\pi}{2} \cos(x-s)}{1 - \left(\lambda \frac{\pi}{2} \right)^2}.$$

б) Характеристические числа и собственные функции однородного уравнения

$y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s) y(s) ds$ были получены в примере 3.8: $\lambda_1 = \frac{2}{\pi}$ и нормированная

собственная функция $y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\sin x + \cos x)$, $\lambda_2 = -\frac{2}{\pi}$ и нормированная собственная

функция $y_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\sin x - \cos x)$. Подставляя их в формулу для резольвенты в случае

симметрического непрерывного ядра $R(x, s, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda}$, имеем

$$R(x, s, \lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{(\sin x + \cos x)(\sin s + \cos s)}{\frac{2}{\pi} - \lambda} + \frac{1}{\pi} \frac{(\sin x - \cos x)(\sin s - \cos s)}{-\frac{2}{\pi} - \lambda} = \frac{\sin(x+s) + \lambda \frac{\pi}{2} \cos(x-s)}{1 - \left(\lambda \frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

Заметим, что этот же результат был получен ранее методом последовательных приближений в случае "малого" λ (см. пример 4.7).

Пример 6.4. Решить уравнение $y(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \sin s + s) y(s) ds + \sin 2x$.

Решение. Обозначим $\int_{-\pi}^{\pi} \sin s y(s) ds = C_1$, $\int_{-\pi}^{\pi} s y(s) ds = C_2$, тогда решение примет вид

$y(x) = \frac{1}{\pi} (C_1 \sin x + C_2) + \sin 2x$. Постоянные C_1, C_2 могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot \left(\frac{C_1}{\pi} \sin s + \frac{C_2}{\pi} + \sin 2s \right) ds = C_1 \\ C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} s \cdot \left(\frac{C_1}{\pi} \sin s + \frac{C_2}{\pi} + \sin 2s \right) ds = 2C_1 - \pi \end{cases}.$$

Итак, $C_1 = C$ - остается произвольным, $C_2 = 2C - \pi$, и искомое решение определяется неоднозначно: $y(x) = \sin 2x - 1 + \frac{C}{\pi} (\sin x + 2)$.

Замечание. В рассматриваемом случае $\lambda = \frac{1}{\pi}$ совпадает с характеристическим числом

однородного уравнения $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \sin s + s) y(s) ds$. Поэтому решение неоднородного

уравнения оказалось не единственно, и определилось с точностью до собственной функции соответствующего однородного уравнения, отвечающей характеристическому числу $\lambda_0 = \frac{1}{\pi}$.

Действительно, используя введенные выше обозначения, решение однородного уравнения представим в виде $y(x) = \lambda (C_1 \sin x + C_2)$. Постоянные C_1, C_2 найдем из системы

$$\begin{cases} C_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin s \cdot \lambda (C_1 \sin s + C_2) ds = \lambda \pi C_1 \\ C_2 = \int_{-\pi}^{\pi} s \cdot \lambda (C_1 \sin s + C_2) ds = 2\pi \lambda C_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(1 - \lambda \pi) = 0 \\ C_1 2\lambda \pi - C_2 = 0 \end{cases},$$

нетривиальное решение которой $C_1 = C$, $C_2 = 2C$ существует при $\lambda = \frac{1}{\pi}$.

Таким образом, $\lambda_0 = \frac{1}{\pi}$ - характеристическое число, а $y_0(x) = \tilde{C}(\sin x + 2)$ - отвечающие ему собственные функции.

Рекомендуем самостоятельно найти собственные функции однородного союзного уравнения $z(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \sin s + x) z(s) ds$ и убедиться в выполнении условия разрешимости, т.е. ортогональности неоднородности $f(x) = \sin 2x$ всем собственным функциям однородного союзного уравнения, отвечающим характеристическому числу $\lambda_0 = \frac{1}{\pi}$.

Пример 6.5. Решить уравнение $y(x) = 2 \int_0^1 \sqrt{xs} y(s) ds + x$.

Решение. Обозначим $C = \int_0^1 \sqrt{s} y(s) ds$, тогда решение, если оно существует, можно записать в виде $y(x) = 2C\sqrt{x} + x$. Подставляя это выражение в предыдущую формулу, для определения постоянной C получим уравнение $C = \int_0^1 \sqrt{s} \cdot (2C\sqrt{s} + s) ds = C + \frac{2}{5}$, которое решений не имеет. Поэтому исследуемое интегральное уравнение Фредгольма $y(x) = 2 \int_0^1 \sqrt{xs} y(s) ds + x$ решений также не имеет.

Замечание. Элементарно устанавливается, что $\lambda_0 = 2$ является характеристическим числом однородного уравнения Фредгольма $y(x) = \lambda \int_0^1 \sqrt{xs} y(s) ds$ с собственной функцией $y_0(x) = C\sqrt{x}$. Так как ядро симметрическое, то $\lambda_0 = 2$ является также характеристическим числом однородного союзного уравнения с той же собственной функцией $z_0(x) = C\sqrt{x}$.

В рассматриваемом случае имеем $\lambda = 2 = \lambda_0$, т.е. λ совпадает с характеристическим числом однородного уравнения. При этом условие разрешимости (ортогональность неоднородности $f(x) = x$ всем собственным функциям однородного союзного уравнения) не выполнено.

Пример 6.6. Рассмотрим неоднородное уравнение Фредгольма

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s) y(s) ds + f(x)$$

с симметрическим непрерывным (невырожденным) ядром

$$K(x, s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \leq x \leq s \\ s(1-x), & s \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad x, s \in [0; 1].$$

1) При $\lambda \neq \lambda_n$, где $\lambda_n = n^2 \pi^2$ ($n \in \mathbb{N}$) - собственные значения исследуемого интегрального оператора Фредгольма (см. пример 7.7), построить резольвенту интегрального оператора и записать решение неоднородного уравнения.

2) Исследовать разрешимость уравнения при различных значениях λ и найти решение, если оно существует, в следующих случаях:

- а) $f(x) = \sin 2\pi x$
- б) $f(x) = x$

Решение.

1) Если $\lambda \neq \lambda_n = n^2 \pi^2$ ($n \in \mathbb{N}$), то используя построенную в примере 7.7 ортонормированную систему $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x$, запишем соответствующую формулу для резольвенты интегрального оператора Фредгольма с симметрическим ядром

$$R(x, s, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(s)}{\lambda_n - \lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sin \pi n x \cdot \sqrt{2} \sin \pi s}{\pi^2 n^2 - \lambda}.$$

Тогда решение неоднородного уравнения примет вид

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 R(x, s, \lambda) f(s) ds = f(x) + \lambda \int_0^1 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x \sin \pi s}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot f(s) ds.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования в последней формуле, получим решение в виде разложения в ряд по собственным функциям интегрального оператора Фредгольма с симметрическим ядром

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sin \pi n x}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot \int_0^1 \sqrt{2} \sin \pi n s \cdot f(s) ds = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \cdot \sqrt{2} \sin \pi n x}{\pi^2 n^2 - \lambda},$$

где $f_n = 2 \int_0^1 \sin \pi n s \cdot f(s) ds$ - коэффициенты Фурье по соответствующей ортонормированной системе $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x$.

2) Если $\lambda \neq \lambda_n = n^2 \pi^2$ ($n \in \mathbb{N}$), то неоднородное уравнение разрешимо при любой непрерывной функции $f(x)$. Используя полученные выше формулы и вычисляя соответствующие интегралы, имеем:

$$а) \quad y(x) = \sin 2\pi x + \lambda \int_0^1 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x \sin \pi n s}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot \sin 2\pi s ds = \sin 2\pi x + \lambda \frac{\sin 2\pi x}{4\pi^2 - \lambda} = \frac{4\pi^2 \sin 2\pi x}{4\pi^2 - \lambda};$$

$$б) \quad y(x) = x + \lambda \int_0^1 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi n x \sin \pi n s}{\pi^2 n^2 - \lambda} \cdot s ds = x + 2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin \pi n x}{\pi n (\pi^2 n^2 - \lambda)}.$$

Если же $\exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2$, т.е. λ совпадает с одним из характеристических чисел, то ответ на вопрос о разрешимости уравнения зависит от конкретного вида функции $f(x)$.

В случае б) решение не существует ни при каких $\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2$ ($n \in \mathbb{N}$), так как $f(x) = x$ при любом n не ортогональна соответствующей собственной функции $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x$ однородного союзного уравнения (ядро симметрично, поэтому однородное союзное уравнение совпадает с исследуемым при $f(x) \equiv 0$).

В случае а) необходимо рассмотреть два варианта.

При $\lambda = 4\pi^2$, решение не существует, так как $f(x) = \sin 2\pi x$ не ортогональна собственной функции $\varphi_2(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi x$ однородного союзного уравнения, отвечающей заданному $\lambda = \lambda_2 = 4\pi^2$;

При $\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2 \neq 4\pi^2$ функция $f(x) = \sin 2\pi x$ ортогональна собственной функции $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x$ ($n \neq 2$) однородного союзного уравнения, отвечающей рассматриваемому $\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2$, $n \neq 2$, т.е. решение существует, но не единственно и

представимо в виде $y(x) = \sin 2\pi x + \underbrace{\pi^2 n^2}_{\lambda} \int_0^1 2 \sum_{k=1, k \neq n}^{\infty} \frac{\sin \pi k x \sin \pi k s}{\pi^2 k^2 - \underbrace{\pi^2 n^2}_{\lambda}} \cdot \sin 2\pi s ds + C \sin \pi n x$, где

C - произвольная постоянная. Меняя порядок суммирования и интегрирования, заметим, что все слагаемые в сумме при $k \neq 2$ равны нулю, т.к. $\int_0^1 \sin \pi k s \cdot \sin 2\pi s \, ds = 0 \quad (k \neq 2)$.

Поэтому, учитывая что $\int_0^1 \sin \pi 2s \cdot \sin 2\pi s \, ds = \frac{1}{2} \quad (k = 2)$, окончательно получим

$$y(x) = \sin 2\pi x + \frac{\pi^2 n^2}{4\pi^2 - \pi^2 n^2} \sin 2\pi x + C \sin \pi n x = \frac{4 \sin 2\pi x}{4 - n^2} + C \sin \pi n x, \text{ где } C - \text{произвольно.}$$

Задачи для самостоятельного решения

6.1 Построить резольвенту уравнений Фредгольма 2-го рода с симметрическим вырожденным ядром при значениях λ , не совпадающих ни с одним из характеристических чисел:

- через определители Фредгольма;
- в виде разложения по собственным функциям ядра:

а) $y(x) = \lambda \int_0^1 x s \, y(s) \, ds + f(x);$

б) $y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (x+s) \, y(s) \, ds + f(x);$

в) $y(x) = \lambda \int_0^\pi y(s) \, ds + f(x);$

г) $y(x) = \lambda \int_{-\pi}^\pi (1 + \cos(x-s)) y(s) \, ds + f(x);$

д) $y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \sin s + \sin 2x \sin 2s) y(s) \, ds + f(x).$

6.2 Исследовать разрешимость при различных значениях λ и решить интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода:

а) $y(x) = \lambda \int_0^1 x(1+s) \, y(s) \, ds + x^2;$

б) $y(x) = \lambda \int_0^1 x \, y(s) \, ds + \sin 2\pi x;$

в) $y(x) = \lambda \int_0^1 (1+2x)s \, y(s) \, ds + 1 - \frac{3}{2}x;$

г) $y(x) = \lambda \int_0^1 x \sin 2\pi s \, y(s) \, ds + x;$

д) $y(x) = \lambda \int_0^1 \arccos s \cdot y(s) \, ds + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

е) $y(x) = \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} s \cdot y(s) \, ds + \operatorname{ctg} x;$

$$\text{ж)} \quad y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin x \cos s y(s) ds + \cos x;$$

$$\text{з)} \quad y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+s) y(s) ds + 1;$$

$$\text{и)} \quad y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (1+xs) y(s) ds + \sin \pi x;$$

$$\text{к)} \quad y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x-s) y(s) ds + \sin 2x;$$

$$\text{л)} \quad y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (2xs^3 + 5x^2s^2) y(s) ds + 7x^4 + 3;$$

$$\text{м)} \quad y(x) = \lambda \int_0^1 K(x,s) y(s) ds + \cos \pi x, \quad \text{где} \quad K(x,s) = \begin{cases} (x+1)s, & 0 \leq x \leq s \\ (s+1)x, & s \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Ответы к задачам

$$6.1 \quad \text{а)} \quad R(x,s,\lambda) = \frac{xs}{1 - \frac{1}{3}\lambda} = \frac{3xs}{3-\lambda};$$

$$\text{б)} \quad R(x,s,\lambda) = \frac{2\lambda(1+3xs) + 3(x+s)}{3-4\lambda^2};$$

$$\text{в)} \quad R(x,s,\lambda) = \frac{1}{1-\lambda\pi};$$

$$\text{г)} \quad R(x,s,\lambda) = \frac{1}{1-2\pi\lambda} + \frac{\cos(x-s)}{1-\lambda\pi};$$

$$\text{д)} \quad R(x,s,\lambda) = \frac{\sin x \sin s + \sin 2x \sin 2s}{1-\lambda\pi}.$$

$$6.2 \quad \text{а)} \quad \text{При } \lambda \neq \frac{6}{5} - \text{единственное решение} \quad y(x) = x^2 + \frac{x}{2} \cdot \frac{7\lambda}{6-5\lambda},$$

$$\text{при } \lambda = \frac{6}{5} - \text{решений нет};$$

$$\text{б)} \quad \text{При } \lambda \neq 2 - \text{единственное решение} \quad y(x) = \sin 2\pi x,$$

$$\text{при } \lambda = 2 - y(x) = Cx + \sin 2\pi x - \text{решение не единственно};$$

$$\text{в)} \quad \text{При } \lambda \neq \frac{7}{6} - \text{единственное решение} \quad y(x) = 1 - \frac{3}{2}x,$$

$$\text{при } \lambda = \frac{7}{6} - y(x) = 1 - \frac{3}{2}x + C(1+2x) - \text{решение не единственно};$$

$$\text{г)} \quad \text{При } \lambda \neq -2\pi - \text{единственное решение} \quad y(x) = \frac{2\pi x}{\lambda + 2\pi},$$

$$\text{при } \lambda = -2\pi - \text{решений нет};$$

$$\text{д)} \quad \text{При } \lambda \neq 1 - \text{единственное решение} \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\pi^2 \lambda}{8(1-\lambda)},$$

при $\lambda = 1$ - решений нет;

е) При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ - единственное решение $y(x) = \operatorname{ctg} x + \frac{\pi\lambda}{2}$;

ж) При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ - единственное решение $y(x) = \cos x + \frac{\pi\lambda}{2} \sin x$;

з) При $\lambda \neq \frac{2}{\pi}$, $\lambda \neq -\frac{2}{\pi}$ - единственное решение $y(x) = 1 - \frac{4\lambda \sin x}{2 + \lambda\pi}$,

при $\lambda = \frac{2}{\pi}$ - решений нет,

при $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ - $y(x) = C + 2 \sin 2x$ - решение не единственно;

и) При $\lambda \neq \frac{1}{2}$, $\lambda \neq \frac{3}{2}$ - единственное решение $y(x) = \sin \pi x + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{3\lambda}{3 - 2\lambda} x$,

при $\lambda = \frac{3}{2}$ - решений нет,

при $\lambda = \frac{1}{2}$ - $y(x) = C + \sin \pi x + \frac{3x}{2\pi}$ - решение не единственно;

к) При $\lambda \neq \frac{1}{\pi}$, $\lambda \neq \frac{2}{\pi}$ - единственное решение $y(x) = \frac{2 \sin 2x}{2 - \lambda\pi}$,

при $\lambda = -\frac{2}{\pi}$ - решений нет,

при $\lambda = \frac{2}{\pi}$ - $y(x) = 1 - \sin x + C \cos x$ - решение не единственно;

л) При $\lambda \neq \frac{1}{2}$, $\lambda \neq \frac{5}{4}$ - единственное решение $y(x) = 3 + \frac{20\lambda}{1 - 2\lambda} x^2 + 7x^4$,

при $\lambda = \frac{1}{2}$ - решений нет, при $\lambda = \frac{5}{4}$ - $y(x) = 3 + Cx - \frac{50}{3} x^2 + 7x^4$ - решение не единственно;

м) При $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -\pi^2 n^2$ ($n \in \mathbb{N}$) - единственное решение

$$y(x) = \cos \pi x + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \cdot \frac{e^x}{\lambda-1} - \frac{\pi(\sin \pi x + \pi \cos \pi x)}{2(\lambda+\pi^2)} \right],$$

при $\lambda = 1$, $\lambda = -\pi^2$ - решений нет,

при $\lambda = -\pi^2 n^2$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) - решение не единственно

$$y(x) = \cos \pi x + \lambda \left[\frac{1+e}{1+\pi^2} \cdot \frac{e^x}{\lambda-1} - \frac{\pi(\sin \pi x + \pi \cos \pi x)}{2(\lambda+\pi^2)} \right] + C(\sin \pi x + n\pi \cos \pi x).$$

ТЕМА 7

Задача Штурма-Лиувилля.

Собственные значения и собственные функции.

Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению.

Основные определения и теоремы

Оператором Штурма-Лиувилля называется дифференциальный оператор 2-го порядка $Ly = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y$, где коэффициенты $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ удовлетворяют условиям: $p(x)$ непрерывно дифференцируемая, а $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывные на $[a, b]$ функции, причем $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ ($x \in [a, b]$).

Поставим вопрос: найти такие числа λ , при которых существует нетривиальное решение следующей краевой задачи ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$):

$$\begin{cases} Ly + \lambda \rho(x)y = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Эта задача называется краевой задачей на собственные значения и собственные функции для оператора Штурма-Лиувилля (сокращенно - задача Штурма-Лиувилля); числа λ_n , при которых существуют нетривиальные решения, - собственными значениями, а соответствующие нетривиальные решения - собственными функциями.

Обозначим $G(x, s)$ функцию Грина краевой задачи

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

Функция $G(x, s)$ непрерывна по совокупности аргументов и симметрична, т.е. $G(x, s) = G(s, x)$; она существует, если однородная краевая задача

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}.$$

имеет только тривиальное решение, т.е. $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора L .

При этих условиях задача Штурма-Лиувилля может быть сведена к эквивалентной задаче на характеристические числа и собственные функции

$$y(x) = -\lambda \int_a^b G(x, s) \rho(s) y(s) ds$$

для интегрального оператора с непрерывным ядром $G(x, s)\rho(s)$. Если $\rho(s) \neq 1$, то ядро интегрального оператора не является симметрическим. Однако ядро

$$K(x, s) = \sqrt{\rho(x)} G(x, s) \sqrt{\rho(s)}$$

уже является непрерывным и симметрическим.

В курсе лекций для первой краевой задачи $\begin{cases} Ly + \lambda \rho(x)y = 0 \\ y(a) = 0, \quad y(b) = 0 \end{cases}$ доказано

существование функции Грина при условиях $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ и получены следующие свойства собственных значений и собственных функций.

Теорема. Задача Штурма-Лиувилля эквивалентна задаче на характеристические числа и собственные функции $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$ для интегрального оператора с непрерывным симметрическим замкнутым ядром $K(x, s) = -\sqrt{\rho(x)} G(x, s) \sqrt{\rho(s)}$, где $\varphi(x) = y(x) \sqrt{\rho(x)}$.

Теорема. Собственные значения λ_n задачи Штурма-Лиувилля вещественны и образуют бесконечную последовательность, причем $\lambda_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема. Каждое собственное значение задачи Штурма-Лиувилля имеет кратность единица.

Теорема. Собственные функции $y_i(x)$, $y_k(x)$ задачи Штурма-Лиувилля, отвечающие различным собственным значениям λ_i , λ_k , ортогональны на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(x)$, т.е. $\int_a^b y_i(x) y_k(x) \rho(x) dx = 0$ при $\lambda_i \neq \lambda_k$, и могут быть нормированы с весом $\rho(x)$: $\int_a^b y_k^2(x) \rho(x) dx = 1$.

Теорема. (Стеклова). Любая дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяющая однородным краевым условиям на его концах функция $f(x)$ представима в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Фурье по ортонормированной с весом $\rho(x)$ системе собственных функций задачи Штурма-Лиувилля: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$, где коэффициенты Фурье равны $f_n = \int_a^b f(x) y_n(x) \rho(x) dx$.

Теорема. Собственные значения первой краевой задачи Штурма-Лиувилля положительны. Имеет место следующая оценка снизу для наименьшего собственного значения:

$$\lambda_1 = \int_a^b \left[q y_1^2 + p \left(\frac{dy_1}{dx} \right)^2 \right] dx > \inf_{x \in [a, b]} \frac{q(x)}{\rho(x)} \geq 0.$$

Заметим, что перечисленные результаты остаются справедливыми и для второй краевой задачи если $q(x) \neq 0$, (граничные условия имеют вид $y'(a) = 0$, $y'(b) = 0$), для третьей краевой задачи (граничные условия имеют вид $y'(a) - h_1 y(a) = 0$, $y'(b) + h_2 y(b) = 0$, h_1, h_2 — положительные постоянные), а также для смешанных краевых задач, когда левом конце задается условие одного вида, а на правом другого.

Необходимо помнить, что для второй краевой задачи в случае $q(x) \equiv 0$, существует нулевое собственное значение, а остальные собственные значения положительны.

В некоторых случаях задача построения последовательности характеристических чисел и собственных функций интегрального оператора Фредгольма с непрерывным невырожденным ядром специального вида может быть сведена к задаче Штурма-Лиувилля (примеры 7.7 и 7.8)

Примеры решения задач

Пример 7.1. Доказать, что оператор $Ly = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right)$, рассматриваемый на подпространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций из $h[a, b]$, удовлетворяющих граничным условиям $y'(a) = 2y(a)$, $y'(b) = 0$, является симметрическим.

Решение. Требуется доказать, для любых двух функций $y(x)$, $z(x)$ из указанного подпространства имеет место равенство $(Ly, z) = (y, Lz)$, где скалярное произведение в $h[a, b]$ введено обычным образом: $(y, z) = \int_a^b y(x)z(x)dx$.

Рассмотрим произвольные дважды непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции $y(x)$, $z(x)$ такие, что $y'(a) = 2y(a)$, $y'(b) = 0$ и $z'(a) = 2z(a)$, $z'(b) = 0$. Тогда, интегрируя по частям и учитывая граничные условия, будем иметь:

$$(Ly, z) = \int_a^b [(p(x)y'(x))' z(x)] dx = [py']_a^b - \int_a^b p(x)y'(x)z'(x)dx = -2p(a)y(a)z(a) - \int_a^b p(x)y'(x)z'(x)dx$$

$$(y, Lz) = \int_a^b y(x)[(p(x)z'(x))'] dx = y[pz']_a^b - \int_a^b y'(x)p(x)z'(x)dx = -2p(a)y(a)z(a) - \int_a^b p(x)y'(x)z'(x)dx$$

Сравнивая полученные выражения, заключаем, что для любых элементов рассматриваемого подпространства выполнено соотношение $(Ly, z) = (y, Lz)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Из полученного результата вытекает, что все собственные значения соответствующей задачи Штурма-Лиувилля вещественны.

Пример 7.2. Доказать, что все собственные значения третьей краевой задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} Ly + \lambda \rho(x)y = 0 \\ y'(a) - y(a) = 0, \quad y'(b) + 3y(b) = 0 \end{cases}$$

положительны, если оператор $Ly = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y$, причем $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$ $x \in [a, b]$.

Решение. Заметим, что все собственные значения - вещественны. Это следует из симметричности оператора при заданных граничных условиях, которая может быть установлена аналогично примеру 7.1.

Пусть λ - собственное значение задачи, а $y(x) \neq 0$ - соответствующая собственная функция, удовлетворяющая уравнению $\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y + \lambda \rho(x)y = 0$. Умножим это

уравнение на $y(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[a, b]$ (первое слагаемое в левой части формулы интегрируется по частям):

$$\int_a^b [(p(x)y') - q(x)y] y(x) dx \equiv p(x)y'y|_a^b - \int_a^b p(x)y'^2(x) dx - \int_a^b q(x)y^2(x) dx = -\lambda \int_a^b \rho(x)y^2(x) dx.$$

Учитывая граничные условия $y'(a) = y(a)$, $y'(b) = -3y(b)$, и то, что $y(x) \neq 0$, получим

$$\lambda \underbrace{\int_a^b \rho(x)y^2(x) dx}_{>0, \text{ т.к. } \rho(x) > 0} = \underbrace{p(b)3y^2(b)}_{\geq 0} + \underbrace{p(a)y^2(a)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_a^b p(x)y'^2(x) dx}_{>0, \text{ если } y(x) \neq \text{const}; =0, \text{ если } y(x) \equiv \text{const}} + \underbrace{\int_a^b q(x)y^2(x) dx}_{\geq 0}.$$

Если $y(x) \neq \text{const}$, то правая часть равенства положительна, следовательно $\lambda > 0$; если же считать $y(x) \equiv \text{const}$, то из граничных условий следует $y(x) \equiv 0$, что противоречит сделанному выше предположению. Итак, $\lambda > 0$, что и требовалось.

Пример 7.3. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0 \end{cases}.$$

Решение. В рассматриваемом случае имеем $\rho(x) = 1 > 0$, $p(x) = 1 > 0$, $q(x) \equiv 0$ $x \in [0, l]$, поэтому можно, действуя как в примере 7.2, установить, что все собственные значения действительны, причем одно из них $\lambda_0 = 0$, а остальные - положительные.

В случае $\lambda = \lambda_0 = 0$ имеем $y(x) = C_1 x + C_2$ и, учитывая граничные условия, получаем $y_0(x) = C$.

Пусть $\lambda > 0$, тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x$.

Дополнительные условия дают $y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$, $y'(l) = 0 \Rightarrow C_2 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l = 0$, откуда получаем $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$. Следовательно, искомые собственные значения

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \text{ а отвечающие им собственные функции } y_n(x) = C \cos \frac{\pi n}{l} x.$$

Пример 7.4. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \end{cases}.$$

Решение. Так как $\rho(x) = 1 > 0$, $p(x) = 1 > 0$, $q(x) \equiv 0$ $x \in [0, l]$, то все собственные значения действительны и положительные.

Общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x$, и из граничных условий вытекает $y'(0) - y(0) = C_1 \sqrt{\lambda} - C_2 = 0$, $y(1) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} + C_2 \cos \sqrt{\lambda} = 0$. Нетривиальное решение этой системы, т.е. $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, существует, если

$$\det \begin{vmatrix} \sqrt{\lambda} & -1 \\ \sin \sqrt{\lambda} & \cos \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} + \sin \sqrt{\lambda} = 0, \quad \lambda > 0.$$

Поэтому λ определяется из трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$, положительные решения которого и будут искомыми собственными значениями.

Далее, рассматривая любое из уравнений системы для C_1, C_2 , имеем $C_2 = C_1 \sqrt{\lambda_n} = -C_1 \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n}$, откуда получим

$$y_n(x) = C_1 (\sin \sqrt{\lambda_n} x + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x) = C_1 (\sin \sqrt{\lambda_n} x - \operatorname{tg} \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x).$$

Итак, собственные значения λ_n ($n=1, 2, 3, \dots$) рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля есть положительные решения уравнения $\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} = -\sqrt{\lambda}$, а соответствующие им собственные функции могут быть после несложных преобразований записаны в виде $y_n(x) = C \sin \sqrt{\lambda_n}(x-1)$.

Пример 7.5. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi) \end{cases}.$$

Решение. Действуя как в примере 7.2, нетрудно показать, что в рассматриваемом случае все собственные значения неотрицательны.

Пусть $\lambda = 0$, тогда $y(x) = C_1 x + C_2$ и, учитывая дополнительные условия, имеем $y(x) = C$. Поэтому $\lambda_0 = 0$ - собственное значение задачи с собственной функцией $y_0(x) = 1$.

Если $\lambda > 0$, то общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos \sqrt{\lambda} x$, и из граничных условий вытекает

$$\begin{aligned} y(0) - y(2\pi) &= C_2 - C_2 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi - C_1 \sin \sqrt{\lambda} 2\pi = 0, \\ y'(0) - y'(2\pi) &= \sqrt{\lambda} (C_1 - C_1 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi + C_2 \sin \sqrt{\lambda} 2\pi) = 0. \end{aligned}$$

Нетривиальное решение этой системы, т.е. $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, существует, если

$$\det \begin{vmatrix} -\sin \sqrt{\lambda} 2\pi & 1 - \cos \sqrt{\lambda} 2\pi \\ 1 - \cos \sqrt{\lambda} 2\pi & \sin \sqrt{\lambda} 2\pi \end{vmatrix} = 2 \cos \sqrt{\lambda} 2\pi - 2 = 0.$$

Поэтому $\lambda_n = n^2$, $n=1, 2, 3, \dots$, и при найденных значениях λ существуют по два линейно

независимых решения $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, которые при каждом

$\lambda_n = n^2$, $n=1, 2, 3, \dots$ определяют две линейно независимые собственные функции $y_n^{(1)}(x) = \sin nx$ и $y_n^{(2)}(x) = \cos nx$.

Итак, собственное значение $\lambda_0 = 0$ имеет кратность 1, и ему соответствует собственная функция $y_0(x) = 1$; собственные значения $\lambda_n = n^2$, $n=1, 2, 3, \dots$ имеют кратность 2 и им отвечает по 2 линейно независимые функции $y_n^{(1)}(x) = \sin nx$ и $y_n^{(2)}(x) = \cos nx$.

Замечание. Дополнительные условия, поставленные в этом примере, возникают при рассмотрении периодических задач, т.е. $y(x) = y(x + 2\pi)$.

Пример 7.6. Проверить возможность сведения к интегральному уравнению и свести задачу Штурма-Лиувилля $y'' + \lambda \cdot (1+x^2)y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ к интегральному уравнению Фредгольма с симметрическим ядром.

Решение. В нашем случае $Ly \equiv y''$, $p(x) = 1 > 0$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) = 1+x^2 > 0$, $x \in [0,1]$.

Докажем, что $\lambda = 0$ не является собственным значением рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля, т.е. однородное уравнение $Ly \equiv y'' = 0$ с условиями $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ имеет только тривиальное решение. Действительно, $y(x) = C_1x + C_2$, откуда с учетом дополнительных условий получаем $y(x) \equiv 0$. Это означает, что функция Грина оператора $Ly \equiv y''$ при условиях $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ существует и, следовательно, задача Штурма-Лиувилля может быть сведена к интегральному уравнению.

Построив функцию Грина $G(x,s) = \begin{cases} x(s-1), & 0 \leq x \leq s \\ s(x-1), & s \leq x \leq 1 \end{cases}$ и рассматривая выражение $-\lambda(1+x^2)y$ как неоднородность, приведем уравнение к виду $y(x) = \lambda \int_0^1 -G(x,s)(1+s^2)y(s)ds$.

Чтобы симметризовать ядро, умножим последнее соотношение на $\sqrt{1+x^2}$ и введем в рассмотрение функцию $\varphi(x) = y(x)\sqrt{1+x^2}$. Тогда получим $\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,s)\varphi(s)ds$ - интегральное уравнение Фредгольма с непрерывным симметрическим ядром $K(x,s) = -\sqrt{1+x^2} \cdot G(x,s) \cdot \sqrt{1+s^2}$ для функции $\varphi(x)$.

Пример 7.7. Рассмотрим однородное уравнение Фредгольма $y(x) = \lambda \int_0^1 K(x,s)y(s)ds$ с симметрическим непрерывным (невыврожденным) ядром

$$K(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \leq x \leq s \\ s(1-x), & s \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad x, s \in [0;1].$$

Найти характеристические числа и ортонормированные собственные функции этого ядра.

Решение. Чтобы определить характеристические числа, нужно найти те значения λ , при которых уравнение $y(x) - \lambda \int_0^1 K(x,s)y(s)ds = 0$ имеет нетривиальные решения; соответствующие решения $y(x) \neq 0$ и есть искомые собственные функции.

Заметим, что ядро $K(x,s)$ в рассматриваемом случае имеет специфическую структуру, напоминающую функцию Грина некоторой краевой задачи. Поэтому следует ожидать, что процедура построения характеристических чисел и собственных функций может быть сведена к решению задачи Штурма-Лиувилля.

Запишем уравнение в виде $y(x) = \lambda(1-x) \int_0^x s y(s)ds + \lambda x \int_x^1 (1-s)y(s)ds$, откуда следует, что $y(0) = y(1) = 0$. После двукратного дифференцирования обеих частей этого соотношения по x приходим к дифференциальному уравнению $y'' + \lambda y = 0$.

Итак, характеристические числа и собственные функции являются решениями задачи Штурма-Лиувилля для уравнения $y'' + \lambda y = 0$ с граничными условиями $y(0) = y(1) = 0$.

Нетрудно показать, что если $\lambda \leq 0$, то имеется только нулевое решение $y(x) \equiv 0$.

При $\lambda > 0$ получим $y(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda}x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}x$, следовательно, нетривиальные решения существуют тогда и только тогда, если $\lambda = \lambda_n = n^2 \pi^2$ ($n \in \mathbb{N}$). При этом ранг каждого характеристического числа равен единице, так как им отвечают одномерные собственные подпространства вида $y_n(x) = C \sin \pi n x$.

Так как ядро оператора симметрическое, то собственные функции, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны. Нормируя их, получим ортонормированную систему собственных функций $\varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin \pi n x$.

Замечание. Приведенный здесь алгоритм нахождения характеристических чисел и собственных функций учитывает специфику структуры ядра $K(x, s)$, которое представляет собой функцию Грина некоторой краевой задачи. Другие способы построения характеристических чисел и собственных функций были рассмотрены в примерах и задачах к темам 3 и 6.

Пример 7.8. Найти характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма $y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s) y(s) ds$ с симметрическим непрерывным (невырожденным) ядром

$$K(x, s) = \begin{cases} s(x+1), & 0 \leq x \leq s \\ x(s+1), & s \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad x, s \in [0; 1].$$

Решение. Действуя как в предыдущем примере, сведем интегральное уравнение к краевой задаче Штурма-Лиувилля.

Запишем уравнение в виде $y(x) = \lambda x \int_0^x (s+1) y(s) ds + \lambda (x+1) \int_x^1 s y(s) ds$.

Дифференцируя это соотношение, найдем

$$y'(x) = \lambda \int_0^x (s+1) y(s) ds + x(x+1)y(x) + \lambda \int_x^1 s y(s) ds - (x+1)xy(x).$$

Заметим, что

$$y(0) = \lambda \int_0^1 s y(s) ds, \quad y(1) = \lambda \int_0^1 (s+1) y(s) ds, \quad y'(0) = \lambda \int_0^1 s y(s) ds, \quad y'(1) = \lambda \int_0^1 (s+1) y(s) ds.$$

Дифференцируя уравнение еще раз, получим $y''(x) = \lambda(x+1)y(x) - \lambda xy(x) = \lambda y(x)$.

Итак, характеристические числа и собственные функции являются решениями следующей задачи Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1) \end{cases}.$$

Так как ядро симметрическое, то все характеристические числа - вещественные. Однако в данном случае знак характеристических чисел заранее неизвестен, поэтому для решения задачи необходимо рассмотреть обе возможности: $\lambda > 0$ и $\lambda < 0$ (случай $\lambda = 0$, как следует из определения характеристического числа, невозможен).

1. Пусть $\lambda > 0$. Тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$. Граничные условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \sqrt{\lambda}(C_1 - C_2) \\ C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = \sqrt{\lambda}(C_1 e^{\sqrt{\lambda}} - C_2 e^{-\sqrt{\lambda}}) \end{cases},$$

которая имеет нетривиальные решения при условии $(1 - \lambda) \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} = 0$. Таким образом, $\lambda_0 = 1$ - характеристическое число; ранг его равен 1, и ему отвечает собственное подпространство вида $y_0(x) = Ce^x$.

2. Пусть $\lambda = -\omega^2 < 0$. Тогда общее решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$. Граничные условия приводят к системе

$$\begin{cases} C_1 = \omega C_2 \\ C_1 \cos \omega + C_2 \sin \omega = \omega(-C_1 \sin \omega + C_2 \cos \omega) \end{cases},$$

условием нетривиальной совместности которой является $(1 + \omega^2) \cdot \sin \omega = 0$, т.е. $\omega_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Итак, характеристические числа $\lambda_n = -\pi^2 n^2 < 0$, $n \in \mathbb{N}$. Ранг каждого характеристического числа равен единице, и им отвечают собственные функции вида $y_n(x) = C(\pi n \cos \pi n x + \sin \pi n x)$, $n \in \mathbb{N}$.

Задачи для самостоятельного решения

7.1 Доказать, что все собственные значения λ задачи Штурма-Лиувилля

$$(p(x)y')' - q(x)y + \lambda \rho(x)y = 0, \quad x \in (a, b), \quad p(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \rho(x) > 0$$

положительны при следующих граничных условиях:

- а) $y'(a) = 0$, $y(b) = 0$;
- б) $y(a) = 0$, $y'(b) = 0$;
- в) $y(a) - 2y'(a) = 0$, $y(b) + y'(b) = 0$;
- г) $y(a) - y'(a) = 0$, $y(b) + 2y'(b) = 0$.

7.2 Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля:

- а) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(l) = 0$;
- б) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$;
- в) $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) + hy(1) = 0$ ($h > 0$);
- г) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(l) + hy(l) = 0$ ($h > 0$);
- д) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) - hy(0) = 0$, $y'(l) = 0$ ($h > 0$);
- е) $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) - h_1 y(0) = 0$, $y'(l) + h_2 y(l) = 0$ ($h_1, h_2 > 0$);
- ж) $(xy')' + \lambda \frac{y}{x} = 0$, $y(1) = 0$, $y(2) = 0$.

7.3 Проверить возможность сведения к интегральному уравнению и свести задачу Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению Фредгольма с симметрическим ядром:

- а) $y'' + \lambda \cdot (1 + x^2)y = 0$, $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$;
- б) $y'' + \lambda \cdot e^{2x}y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$;
- в) $y'' + \lambda \cdot e^{2x}y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$;
- г) $y'' + \lambda \cdot y = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) + hy'(1) = 0$;
- д) $(1 + x^2)y'' + 2xy' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$;

- е) $x^2 y'' + 2x y' + \lambda x^2 y = 0$, $y'(1) = 0$, $y(2) = 0$;
ж) $(xy')' + \lambda xy = 0$, $|y(0)| < \infty$, $y(1) = 0$;
з) $(xy')' + (\lambda x - \frac{n^2}{x}) \cdot y = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$, $|y(0)| < \infty$, $y(1) = 0$.

7.4 Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения Фредгольма с непрерывным симметрическим невырожденным ядром, в следующих случаях:

- а) $y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, s) y(s) ds$, где $K(x, s) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq s \\ s, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$;
б) $y(x) = \lambda \int_0^\pi K(x, s) y(s) ds$, где $K(x, s) = \begin{cases} \cos x \sin s, & 0 \leq x \leq s \\ \cos s \sin x, & s \leq x \leq \pi \end{cases}$;
в) $y(x) = \lambda \int_0^\pi K(x, s) y(s) ds$, где $K(x, s) = \begin{cases} \sin x \cos s, & 0 \leq x \leq s \\ \sin s \cos x, & s \leq x \leq \pi \end{cases}$.

Указание. Свести интегральное уравнение к задаче Штурма-Лиувилля.

Ответы к задачам

7.2 а) $\lambda_n = \left[\frac{\pi}{l} (n + \frac{1}{2}) \right]^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $y_n(x) = C \cos \frac{\pi}{l} (n + \frac{1}{2}) x$;

б) $\lambda_n = \left[\frac{\pi}{l} (n + \frac{1}{2}) \right]^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$; $y_n(x) = C \sin \frac{\pi}{l} (n + \frac{1}{2}) x$;

в) λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ - положительные решения уравнения $tg \sqrt{\lambda} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h}$;
 $y_n(x) = C \sin x \sqrt{\lambda_n}$;

г) λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ - положительные решения уравнения $ctg \sqrt{\lambda} l = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}$;
 $y_n(x) = C \cos x \sqrt{\lambda_n}$;

д) λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ - положит. решения уравнения $ctg \sqrt{\lambda} l = \frac{\sqrt{\lambda}}{h}$;
 $y_n(x) = C \cos \sqrt{\lambda_n} (l - x)$;

е) λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ - корни уравнения $tg \sqrt{\lambda} l = \sqrt{\lambda} \frac{h_1 + h_2}{\lambda - h_1 h_2}$;
 $y_n(x) = C (h_1 \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x)$;

ж) $\lambda_n = \left[\frac{\pi n}{\ln 2} \right]^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$; $y_n(x) = C \sin \frac{\pi n}{\ln 2} \ln x$.

7.3 а) $G(x, s) = \begin{cases} s-1, & 0 \leq x \leq s \\ x-1, & s \leq x \leq 1 \end{cases}$, $K(x, s) = -\sqrt{1+x^2} \cdot G(x, s) \cdot \sqrt{1+s^2}$;

б) $G(x, s) = \begin{cases} x(s-1), & 0 \leq x \leq s \\ s(x-1), & s \leq x \leq 1 \end{cases}$, $K(x, s) = -e^x \cdot G(x, s) \cdot e^s$;

$$\begin{aligned}
\text{в)} \quad G(x, s) &= \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq s \\ -s, & s \leq x \leq 1 \end{cases}, & K(x, s) &= -e^x \cdot G(x, s) \cdot e^s; \\
\text{г)} \quad G(x, s) &= \begin{cases} \frac{s-(h+1)}{h+1}x, & 0 \leq x \leq s \\ \frac{x-(h+1)}{h+1}s, & s \leq x \leq 1 \end{cases}, & K(x, s) &= -G(x, s); \\
\text{д)} \quad G(x, s) &= \begin{cases} -\operatorname{arctg} x, & 0 \leq x \leq s \\ -\operatorname{arctg} s, & s \leq x \leq 1 \end{cases}, & K(x, s) &= -G(x, s); \\
\text{е)} \quad G(x, s) &= \begin{cases} \frac{1}{s} - \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq s \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{2}, & s \leq x \leq 2 \end{cases}, & K(x, s) &= -x \cdot G(x, s) \cdot s; \\
\text{ж)} \quad G(x, s) &= \begin{cases} \ln s, & 0 \leq x \leq s \\ \ln x, & s \leq x \leq 1 \end{cases}, & K(x, s) &= -\sqrt{x} \cdot G(x, s) \cdot \sqrt{s}; \\
\text{з)} \quad G(x, s) &= \begin{cases} \frac{1}{2n} \left[(xs)^n - \left(\frac{x}{s} \right)^n \right], & 0 \leq x \leq s \\ \frac{1}{2n} \left[(xs)^n - \left(\frac{s}{x} \right)^n \right], & s \leq x \leq 1 \end{cases}, & K(x, s) &= -\sqrt{x} \cdot G(x, s) \cdot \sqrt{s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7.4 \quad \text{а)} \quad \lambda_n &= \pi^2 (n + \tfrac{1}{2})^2, & y_n &= C \sin \pi (n + \tfrac{1}{2}) x, & n &= 0, 1, 2, \dots; \\
\text{б)} \quad \lambda_n &= 1 - (n + \tfrac{1}{2})^2, & y_n &= C \cos (n + \tfrac{1}{2}) x, & n &= 0, 1, 2, \dots; \\
\text{в)} \quad \lambda_n &= (n + \tfrac{1}{2})^2 - 1, & y_n &= C \sin (n + \tfrac{1}{2}) x, & n &= 0, 1, 2, \dots.
\end{aligned}$$

ТЕМА 8

Основные понятия вариационного исчисления. Задача с закрепленными концами.

Основные определения и теоремы

Если на некотором множестве функций указано правило, которое ставит в соответствие каждой функции некоторое число, то на этом множестве задан функционал. Будем рассматривать функционалы, действующие из линейного нормированного пространства E в пространство вещественных чисел $\mathbb{R}^1: E \rightarrow \mathbb{R}^1$. Итак, функционал – это оператор, множество значений которого состоит из чисел.

Будем рассматривать следующие линейные пространства E (или их линейные подпространства E'):

1) $C[a, b]$ – пространство непрерывных на $[a, b]$ функций, в котором определена норма

$$\|y\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y(x)|.$$

2) $C^{(1)}[a, b]$ – пространство функций, непрерывных вместе со своими первыми производными на $[a, b]$. Норма в этом пространстве определяется как

$$\|y\|_{C^{(1)}[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| + \max_{x \in [a,b]} |y'(x)|.$$

Определение. Функционал $V[y]$ называется непрерывным в точке $y_0 \in E$, если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такое, что при $\forall y \in E: \|y - y_0\| \leq \delta$ выполняется неравенство $|V[y] - V[y_0]| \leq \varepsilon$.

Аналогично можно дать определение непрерывности функционала в точке $y_0 \in E'$, если функционал рассматривается только на множестве E' . Функционал называется непрерывным на всём пространстве E (множестве E'), если он непрерывен в каждой точке $E(E')$.

Определение. Точка y_0 является точкой локального минимума (максимума) функционала $V[y]$, если найдется число $r > 0$ такое, что для любого $y \in E: \|y - y_0\|_E \leq r$ выполнено неравенство $V[y] \geq V[y_0]$ ($V[y] \leq V[y_0]$).

Пусть $y_0 \in E$ – произвольная фиксированная точка, $h \in E$ – произвольный элемент E . Рассмотрим функцию вещественной переменной t $\Phi(t) \equiv V[y_0 + th]$, t – вещественное число.

Определение. Если для любого $h \in E$ существует $\Phi'(t)_{t=0} = \frac{d}{dt} V[y_0 + th]_{t=0}$, то эта производная называется вариацией (слабой вариацией) функционала V в точке y_0 и обозначается $\delta V(y_0, h)$. Очевидно, что $V[y_0 + th] - V[y_0] = t \delta V(y_0, h) + o(|t|)$.

Определение. Функционал $V[y]$ называется дифференцируемым в точке y_0 , если для любого $h \in E$ $V[y_0 + h] - V[y_0] = dV(y_0, h) + o(\|h\|)$, где $dV(y_0, h)$ – линейный и непрерывный по h функционал, который иногда называют сильной вариацией в точке y_0 , в то время как функционал (от h) $\delta V(y_0, h)$ – слабой вариацией в точке y_0 .

Если существует сильная вариация, то существует и вариация (слабая вариация). Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема (необходимое условие экстремума). Пусть $y_0 \in E$ - точка экстремума $V[y]$ и существует $\delta V(y_0, h)$ для всякого $h \in E$. Тогда $\delta V(y_0, h) = 0$.

Конкретизируем вид функционала и множество допустимых функций. Рассмотрим функционал $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ на множестве функций $E' \subseteq E = C^1[a, b]$ таком, что $E' = \{y \in C^{(1)}[a, b], y(a) = A, y(b) = B\}$. Простейшая задача вариационного исчисления (задача с закрепленными концами): среди всех функций из множества E' определить ту, которая реализует экстремум функционала $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$.

Определение. Функционал достигает сильного минимума (максимума) на функции $y_0(x)$, если найдется число $r > 0$ такое, что для любой функции из сильной окрестности $y_0(x)$, т.е. $y \in E': \|y - y_0\|_{C[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_0(x)| \leq r$, выполнено неравенство $V[y] \geq V[y_0]$ ($V[y] \leq V[y_0]$).

Определение. Функционал достигает слабого минимума (максимума) на функции $y_0(x)$, если найдется число $r > 0$ такое, что для любой функции из слабой окрестности $y_0(x)$, т.е. $y \in E': \|y - y_0\|_{C^{(1)}[a, b]} = \max_{x \in [a, b]} |y(x) - y_0(x)| + \max_{x \in [a, b]} |y'(x) - y_0'(x)| \leq r$, выполнено неравенство $V[y] \geq V[y_0]$ ($V[y] \leq V[y_0]$).

Ясно, что если на функции $y_0(x)$ реализуется сильный экстремум, то имеет место и слабый в той же точке. Обратное, вообще говоря, неверно.

Теорема (необходимое условие экстремума в задаче с закрепленными концами).

- 1) Пусть $y(x)$ реализует экстремум (сильный или слабый) функционала $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ с условиями $y(a) = A, y(b) = B$ и является дважды непрерывно дифференцируемой.
- 2) Пусть функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно при $x \in [a, b]$ и в некоторой области изменения y и y' , содержащей $y(x)$.

Тогда $y(x)$ является решением краевой задачи для уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0; \quad y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Решения этой задачи называются экстремалами функционала $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$.

Так как уравнение Эйлера, вообще говоря, дифференциальное уравнение второго порядка, то решение его может быть как единственным, так и не единственным, и может не существовать вовсе.

Приемы интегрирования уравнения Эйлера зависят от конкретного вида функции $F(x, y, y')$. Приведем некоторые примеры для некоторых, часто встречающихся случаев.

1. F не зависит от y' : $F(x, y, y') = F(x, y)$.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F_y(x, y) = 0$, т.е. является не дифференциальным, а алгебраическим, поэтому его решение (если оно существует) представляет собой одну или несколько кривых, которые, вообще говоря, не удовлетворяют граничным условиям $y(a) = A, y(b) = B$.

Итак, решение краевой задачи для уравнения Эйлера в рассматриваемом случае, вообще говоря, не существует.

2. F зависит от y' линейно: $F(x, y, y') = M(x, y) + y' \cdot N(x, y)$.

Уравнение Эйлера имеет вид $M_y + y'N_y - \frac{d}{dx}N(x, y) = M_y + y' \cdot N_y - N_x - N_y \cdot y' = 0$,

т.е.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 0.$$

Полученное уравнение не является дифференциальным, поэтому краевая задача для уравнения Эйлера также, вообще говоря, не имеет решения.

В частном случае $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$ выражение $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ является полным

дифференциалом, и значение функционала

$$I[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx = \int_{(a,A)}^{(b,B)} M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

не зависит от выбора кривой,

соединяющей точки (a, A) и (b, B) .

3. F зависит только от y' : $F(x, y, y') = F(y')$.

Уравнение Эйлера имеет вид $y'' \cdot F_{y'y'}(y') = 0$. Далее возможны два варианта:

а) $y'' = 0$, тогда общее решение есть $y(x) = C_1x + C_2$, где C_1, C_2 - произвольные постоянные, определяемые из граничных условий;

б) $F_{y'y'}(y') = 0$, тогда $y' = k_i$, где k_i - корни алгебраического уравнения $F''(t) = 0$, и соответствующие решения $y_i(x) = k_ix + \tilde{C}_i$ являются частными случаями п. а).

Поэтому, решениями уравнения Эйлера в обоих случаях а) и б) являются прямые.

4. F не зависит от y : $F(x, y, y') = F(x, y')$.

Уравнение Эйлера принимает вид $\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0$ и имеет первый интеграл

$F_{y'}(x, y') = C$, где C - произвольная постоянная. Дальнейшее интегрирование производится путем разрешения относительно производной, либо путем введения параметра.

5. F не зависит от x : $F(x, y, y') = F(y, y')$.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $F_y - y' \cdot F_{yy'} - y'' \cdot F_{y'y'} = 0$.

Умножив на y' , получим $\frac{d}{dx}(F - y' \cdot F_{y'}) = 0$ и найдем первый интеграл

$F - y' \cdot F_{y'} = C$. Дальнейшее интегрирование также производится методами, развитыми для дифференциальных уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.

Итак, если экстремаль существует, то она, как правило, может быть включена в однопараметрическое семейство решений уравнения Эйлера $y = y(x, C)$.

Определение. Если через каждую точку области G на плоскости xOy проходит единственная кривая семейства $y = y(x, C)$, то это семейство называют *собственным полем* в области G .

Определение. Если все кривые семейства $y = y(x, C)$ проходят через некоторую точку $(x_0, y_0) \in G$ (центр пучка), а через каждую точку области, отличную от (x_0, y_0) , проходит одна и только одна кривая семейства, то $y = y(x, C)$ называют *центральной полем* в области G .

Выбор любой точки области G (кроме центра пучка во втором случае) определяет единственную экстремаль, проходящую через эту точку, и задает в области G некоторую функцию $p(x, y)$ - наклон поля экстремалей: $p(x, y)$ в каждой точке $(x, y) \in G$ равна тангенсу угла наклона той экстремали, которая проходит через эту точку.

Сформулируем достаточные условия экстремума в задаче с закрепленными концами.

Достаточные условия Вейерштрасса. Пусть функция $y=y_0(x)$ удовлетворяет необходимому условию экстремума, т.е. является экстремалью в задаче с закрепленными концами. Будем считать, что экстремаль $y=y_0(x)$ на сегменте $[a, b]$ может быть включена в поле экстремалей (собственное или центральное).

Рассмотрим кривые $y=y(x)$, удовлетворяющие тем же граничным условиям, что и экстремаль $y=y_0(x)$, $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$ (кривые сравнения).

Функция $E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_p(x, y, p)$ называется *функцией Вейерштрасса*. В аргументах функции $E(x, y, p, y')$ через y' обозначается производная кривой сравнения $y(x)$ в точке (x, y) , а через $p = p(x, y)$ - наклон поля экстремалей в этой точке.

Приращение функционала $V[y]$ выражается через функцию Вейерштрасса ($y_0(x)$ - исследуемая экстремаль, а $y(x)$ - кривая сравнения):

$$\Delta V = V[y(x)] - V[y_0(x)] = \int_a^b E(x, y(x), p(x, y(x)), y'(x)) dx.$$

Поэтому достаточным условием достижения функционалом $V[y]$ экстремума на экстремали $y_0(x)$ является знакоопределенность функции $E(x, y, p, y')$ в окрестности экстремали $y_0(x)$. Экстремум будет слабым или сильным в зависимости от того, в слабой или сильной окрестности экстремали $y_0(x)$ сохраняет знак функция Вейерштрасса.

Достаточные условия слабого экстремума:

Кривая $y=y_0(x)$ доставляет слабый экстремум функционалу $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ в задаче с закрепленными концами $y(a) = A$, $y(b) = B$, если:

- 1) кривая $y=y_0(x)$ является экстремалью функционала, т.е. является решением краевой задачи для уравнения Эйлера с условиями $y(a) = A$, $y(b) = B$;
- 2) экстремаль $y=y_0(x)$ может быть включена в поле экстремалей на отрезке $[a, b]$;
- 3) функция Вейерштрасса сохраняет знак во всех точках слабой окрестности экстремали $y=y_0(x)$, т.е. в точках (x, y) , близких к экстремали $y=y_0(x)$, и для значений y' , близких к значениям $p(x, y)$ ($p(x, y)$ - заданная функция, так как определено поле экстремалей).

Если $E \geq 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ слабый минимум, если $E \leq 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ слабый максимум.

Достаточные условия сильного экстремума.

Кривая $y=y_0(x)$ доставляет сильный экстремум функционалу $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ в задаче с закрепленными концами $y(a) = A$, $y(b) = B$, если:

- 1) кривая $y=y_0(x)$ является экстремалью функционала т.е. является решением краевой задачи для уравнения Эйлера с условиями $y(a) = A$, $y(b) = B$;
- 2) экстремаль $y=y_0(x)$ может быть включена в поле экстремалей на отрезке $[a, b]$;

3) функция Вейерштрасса сохраняет знак во всех точках сильной окрестности экстремали $y=y_0(x)$, т.е. в точках (x, y) , близких к экстремали $y=y_0(x)$, и для произвольных значений y' .

Если $E \geq 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ сильный минимум, если $E \leq 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ сильный максимум.

Достаточное условие отсутствия экстремума.

Если в точках экстремали $y=y_0(x)$ при некоторых значениях y' функция E имеет противоположные знаки, то сильный экстремум на $y_0(x)$ не достигается.

Если в точках экстремали $y=y_0(x)$ при значениях y' сколь угодно близких к $p(x, y)$, функция E имеет противоположные знаки, то на $y_0(x)$ не достигается и слабый экстремум.

Достаточные условия Лежандра.

Пусть функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывную вторую производную $F_{y'y'}$ и экстремаль $y=y_0(x)$ включена в поле экстремалей.

Достаточные условия слабого экстремума ($F_{y'y'}$ исследуется на самой экстремали $y=y_0(x)$).

Если на экстремали $y=y_0(x) F_{y'y'} > 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ слабый минимум; если на экстремали $y=y_0(x) F_{y'y'} < 0$, то функционал $V[y]$ имеет на $y_0(x)$ слабый максимум.

Достаточные условия сильного экстремума ($F_{y'y'}$ исследуется в сильной окрестности экстремали $y=y_0(x)$).

Если $F_{y'y'} \geq 0$ в точках (x, y) , близких к экстремали $y=y_0(x)$, и для произвольных значений y' , то $V[y]$ имеет на экстремали $y_0(x)$ сильный минимум.

Если $F_{y'y'} \leq 0$ в точках (x, y) , близких к экстремали $y=y_0(x)$, и для произвольных значений y' , то $V[y]$ имеет на экстремали $y_0(x)$ сильный максимум.

Примеры решения задач

Пример 8.1. Вычислить вариацию функционала $V[y] = y^2(0) + \int_{-1}^1 (xy + y'^2) dx$ в точке y .

Решение. Найдем сначала вариацию функционала $V[y]$, воспользовавшись первым определением (слабую вариацию):

$$\begin{aligned} \delta V(y, h) &\equiv \left. \frac{d}{dt} V[y + th] \right|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[(y(0) + th(0))^2 + \int_{-1}^1 [x(y(x) + th(x)) + (y'(x) + th'(x))^2] dx \right]_{t=0} = \\ &= 2y(0)h(0) + \int_{-1}^1 [x \cdot h(x) + 2y' \cdot h'(x)] dx. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся вторым определением и найдем вариацию как линейную часть приращения функционала в точке y (сильную вариацию). Зададим приращение аргумента функционала - произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(x)$: $h(-1) = h(1) = 0$, и вычислим приращение $\Delta V = V[y + h] - V[y] =$

$$\begin{aligned}
&= [y(0) + h(0)]^2 - y^2(0) + \int_{-1}^1 [x(y(x) + h(x)) + (y'(x) + h'(x))^2] dx - \int_{-1}^1 [xy(x) + y'^2(x)] dx = \\
&= 2y(0)h(0) + \int_{-1}^1 [x \cdot h(x) + 2y'(x) \cdot h'(x)] dx + h^2(0) + \int_{-1}^1 h'^2(x) dx.
\end{aligned}$$

Линейная относительно h часть приращения - первые два слагаемые последнего равенства - и есть искомая (сильная) вариация

$$dV[y, h] = 2y(0)h(0) + \int_{-1}^1 [x \cdot h(x) + 2y'(x) \cdot h'(x)] dx,$$

которая в данном случае совпадает с полученной ранее (слабой) вариацией $\delta V[y, h]$.

Пример 8.2. Найти экстремаль функционала $V[y] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx$ с дополнительными условиями $y(0)=0, y(1)=0$.

Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала

- а) путем непосредственного вычисления приращения функционала;
- б) применив достаточные условия в форме Вейерштрасса и Лежандра.

Решение. Уравнение Эйлера для функционала в исследуемой задаче $y'' - y = 0$ имеет общее решение $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Граничным условиям удовлетворяет экстремаль $y_0(x) \equiv 0$.

- а) Непосредственное вычисление приращения функционала на кривой $y_0(x) \equiv 0$ дает

$\Delta V = V[y] - V[y_0(x) \equiv 0] = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx \geq 0$. Поэтому на ней реализуется сильный (а, следовательно, и слабый) минимум.

- б) Заметим, что экстремаль $y_0(x) \equiv 0$ при $x \in [0, 1]$ может быть включена в собственное поле экстремалей $y = C e^x$.

1. Функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y') = y^2 + y'^2 - y^2 - p^2 - (y' - p)2p = (y' - p)^2 \geq 0$ при любых y, y' , т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y_0(x) \equiv 0$. Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль $y_0(x) \equiv 0$ реализует сильный (и слабый) минимум.
2. $F_{y'y'} = 2 > 0$ при любых y, y' , поэтому выполнено достаточное условие Лежандра. Функционал на экстремали $y_0(x) \equiv 0$ достигает сильного (и слабого) минимума.

Пример 8.3. Найти экстремаль функционала $V[y] = \int_{-1}^0 (12xy - y'^2) dx$ с дополнительными условиями $y(-1)=1, y(0)=0$.

Доказать, что на полученной экстремали достигается экстремум функционала

- а) путем непосредственного вычисления приращения функционала;
- б) применив достаточные условия в форме Вейерштрасса и Лежандра.

Решение. Уравнение Эйлера для функционала в рассматриваемой задаче $y'' + 6x = 0$ имеет общее решение $y = -x^3 + C_1 x + C_2$. Граничным условиям удовлетворяет экстремаль $y_0(x) = -x^3$.

а) Зададим приращение аргумента функционала - произвольную непрерывно дифференцируемую функцию $h(x)$, удовлетворяющую условиям $h(-1) = h(0) = 0$, - и вычислим приращение функционала на экстремали $y_0(x) = -x^3$:

$$\begin{aligned}\Delta V &= V[-x^3 + h] - V[-x^3] = \int_{-1}^0 [12x(-x^3 + h(x)) - (-3x^2 + h'(x))^2] dx - \int_{-1}^0 [12x(-x^3) - (-3x^2)^2] dx = \\ &= \int_{-1}^0 [12xh(x) + 6x^2h'(x) - h'^2(x)] dx = \int_{-1}^0 [12xh(x) - h'^2(x)] dx + \underbrace{\int_{-1}^0 6x^2h'(x) dx}_{\text{инт. по частям}} = \\ &= \underbrace{6x^2h(x)}_{=0} \Big|_{-1}^0 - \int_{-1}^0 12xh(x) dx + \int_{-1}^0 [12xh(x) - h'^2(x)] dx = - \int_{-1}^0 h'^2(x) dx \leq 0.\end{aligned}$$

Итак, $\Delta V \leq 0$ независимо от y' (в сильной окрестности), поэтому на экстремали $y_0(x) = -x^3$ реализуется сильный (а, следовательно, и слабый) максимум.

б) Заметим, что экстремаль $y_0(x) = -x^3$ при $x \in [-1, 0]$ может быть включена в собственное поле экстремалей (решений уравнения Эйлера) $y = -x^3 + C$.

1. Функция Вейерштрасса

$$E(x, y, p, y') = 12xy - y'^2 - (12xy - p^2) - (y' - p)(-2p) = -(y' - p)^2 \leq 0$$

при любых y, y' , т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y_0(x) = -x^3$. Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль $y_0(x) = -x^3$ реализует сильный (и слабый) максимум.

2. $F_{y'y'} = -2 < 0$ при любых y, y' , поэтому выполнено достаточное условие Лежандра. Функционал на экстремали $y_0(x) = -x^3$ достигает сильного (и слабого) максимума.

Пример 8.4. Пусть $V[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2y\varphi(x)] dx$, где функция $p(x) > 0$ - непрерывно дифференцируема, а $q(x) \geq 0$ и $\varphi(x)$ непрерывные на $[a, b]$ функции.

а) Записать уравнение для экстремалей в задаче с закрепленными концами $y(a) = A, y(b) = B$.

б) Показать, что если $y_0(x)$ является экстремалью функционала $V[y]$, то на ней реализуется минимум этого функционала.

Решение. Уравнение Эйлера для экстремалей изучаемого функционала имеет вид $\frac{d}{dx}(p(x)y') - q(x)y = \varphi(x)$. Нетрудно показать, что при сформулированных предположениях на функции $p(x), q(x), \varphi(x)$, это уравнение с дополнительными условиями $y(a) = A, y(b) = B$ имеет единственное решение $y = y_0(x)$, которое и определяет экстремаль в рассматриваемой задаче.

Зададим $h(x): h(a) = h(b) = 0$ и определим знак приращения функционала на исследуемой экстремали:

$$\begin{aligned}\Delta V &= V[y_0(x) + h(x)] - V[y_0(x)] = \int_a^b [p(x)((y'_0 + h')^2 - y_0'^2) + q(x)((y_0 + h)^2 - y_0^2) + 2\varphi(x)h] dx = \\ &= \int_0^1 [2p(x)y'_0 h' + 2q(x)y_0 h + 2\varphi(x)h] dx + \underbrace{\int_a^b p(x)h'^2(x) dx}_{>0} + \underbrace{\int_a^b q(x)h^2(x) dx}_{\geq 0} > 0,\end{aligned}$$

так как первое слагаемое в этой сумме обращается в ноль. Действительно, интегрируя по частям первое слагаемое, получим

$$2 \int_a^b [p(x)y'_0 h' + q(x)y_0 h + \varphi(x)h] dx = \underbrace{2p(x)y_0(x)h(x)}_{=0, \text{ т.к. } h(a)=h(b)=0} \Big|_a^b + 2 \int_a^b \underbrace{[-(p(x)y'_0)' + q(x)y_0 + \varphi(x)]}_{=0 \text{ в силу ур-я Эйлера}} h(x) dx = 0$$

Итак, $\Delta V = V[y_0(x) + h(x)] - V[y_0(x)] > 0$, поэтому на экстремали $y = y_0(x)$ достигается минимум исследуемого функционала, что и требовалось доказать.

Пример 8.5. Исследовать на экстремум функционал $V[y] = \int_0^a y'^3 dx$ с граничными условиями $y(0)=0$, $y(a)=b$ ($a > 0$, $b > 0$).

Решение. Уравнение Эйлера для данного функционала имеет вид $y''=0$. Семейство экстремалей определяется формулой $y = C_1 x + C_2$. Граничным условиям удовлетворяет единственная экстремаль $y = \frac{b}{a}x$.

Найденная экстремаль может быть включена в собственное поле $y = \frac{b}{a}x + C$, наклон поля экстремалей $p = \frac{b}{a}$.

Функция Вейерштрасса имеет вид

$$E(x, y, p, y') = y'^3 - p^3 - (y' - p)3p^2 = (y' - p)^2(y' + 2p)$$

и знак ее определяется знаком выражения $y' + 2p = y' + 2\frac{b}{a}$. Следовательно, $E(x, y, p, y')$ может менять знак в зависимости от y' . Поэтому сильного экстремума на исследуемой экстремали нет.

Вместе с тем, функция Вейерштрасса сохраняет знак, если y' близко к $p = \frac{b}{a} > 0$ (наклону поля экстремалей), т.е. $y' + 2p = y' + 2\frac{b}{a} \geq 0$ и неравенство $E(x, y, p, y') \geq 0$ выполнено для всех кривых сравнения $y = y(x)$ из некоторой слабой окрестности экстремали $y = \frac{b}{a}x$. Таким образом, на экстремали $y = \frac{b}{a}x$, согласно достаточному условию Вейерштрасса, достигается слабый минимум.

Пример 8.6. Показать, что в задаче с закрепленными концами

$$V[y] = \int_0^a (y^2 - y'^2) dx, \quad y(0)=0, \quad y(a)=0$$

а) в случае $a = \frac{\pi}{2} < \pi$ на экстремали $y_0(x) \equiv 0$ реализуется сильный максимум функционала;

б) в случае $a = \frac{5\pi}{4} > \pi$ функция $y_0(x) \equiv 0$ также является единственной экстремалью в рассматриваемой задаче, причем функция Вейерштрасса сохраняет знак на этой кривой, однако экстремум на ней не достигается;

в) в случае $a = \pi$ экстремаль определяется не единственным образом.

Решение. Уравнение Эйлера имеет вид $y'' + y = 0$. Его общее решение есть $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Граничным условиям $y(0)=0$, $y(a)=0$, как в случае а), так и в случае б) удовлетворяет единственная функция $y_0(x) \equiv 0$.

а) Если $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, то экстремаль $y_0(x) \equiv 0$ может быть включена, например, в центральное поле экстремалей $y = C \sin x$.

Функция Вейерштрасса

$$E(x, y, p, y') = y^2 - y'^2 - (y^2 - p^2) + (y' - p)2p = -(y' - p)^2 \leq 0$$

при любых y, y' , т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y_0(x) \equiv 0$. Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль $y_0(x) \equiv 0$ реализует сильный (и слабый) максимум.

б) Если $x \in [0, \frac{5\pi}{4}]$, то функция Вейерштрасса $E(x, y, p, y') = -(y' - p)^2 \leq 0$ также сохраняет знак в сильной окрестности кривой $y_0(x) \equiv 0$. Заметим, что $V[y \equiv 0] = 0$ и докажем, что на функции $y_0(x) \equiv 0$ не достигается слабый (следовательно, и сильный) экстремум.

Рассмотрим последовательность $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \sin \frac{4}{5}x$. Ясно, что при достаточно больших n выполнено $\|\varphi_n - y_0\|_{C^1[0, \frac{4\pi}{5}]} = \max_{x \in [0, \frac{4\pi}{5}]} \left| \frac{1}{n} \sin \frac{4x}{5} \right| + \max_{x \in [0, \frac{4\pi}{5}]} \left| \frac{4}{5n} \cos \frac{4x}{5} \right| \leq r$, т.е. все указанные функции, начиная с некоторого номера, принадлежат слабой окрестности $y_0(x) \equiv 0$. Однако

$$V[\varphi_n] = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{4x}{5} dx - \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{16}{25n^2} \cos^2 \frac{4x}{5} dx = \frac{9}{25n^2} \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \cos^2 \frac{4x}{5} dx > 0 = V[0],$$

следовательно, на функции $y_0(x) \equiv 0$ слабый (и сильный) максимум не достигается.

Рассмотрим последовательность $\psi_n(x) = \frac{1}{n^2} \sin \frac{4n}{5}x$. Ясно, что при достаточно больших n выполнено $\|\psi_n - y_0\|_{C^1[0, \frac{4\pi}{5}]} = \max_{x \in [0, \frac{4\pi}{5}]} \left| \frac{1}{n^2} \sin \frac{4nx}{5} \right| + \max_{x \in [0, \frac{4\pi}{5}]} \left| \frac{4}{5n} \cos \frac{4nx}{5} \right| \leq r$, т.е. все указанные функции, начиная с некоторого номера, принадлежат слабой окрестности $y_0(x) \equiv 0$.

Однако, при достаточно больших n

$$V[\psi_n] = \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{1}{n^4} \sin^2 \frac{4nx}{5} dx - \int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{16}{25n^2} \cos^2 \frac{4nx}{5} dx = \frac{5\pi}{8} \left(\frac{1}{n^4} - \frac{16}{25n^2} \right) < 0 = V[0].$$

Следовательно, на функции $y_0(x) \equiv 0$ минимум также не достигается.

Причина указанного явления состоит в том, что экстремаль $y_0(x) \equiv 0$ нельзя включить в поле экстремалей при $x \in [0, \frac{5\pi}{4}]$, так как все решения уравнения Эйлера $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, удовлетворяющие одному из граничных условий $y(0)=0$ или $y(\frac{5\pi}{4})=0$, обращаются в ноль одновременно еще в одной точке $x_0 \in [0, \frac{5\pi}{4}]$. Например, если потребовать $y(0)=0$, то все кривые семейства $y = C \sin x$ обращаются в ноль при $x_0 = \pi \in [0, \frac{5\pi}{4}]$.

в) В случае $a=\pi$ уравнение Эйлера $y'' + y = 0$ имеет семейство решений $y = C \sin x$, удовлетворяющих граничным условиям $y(0)=0$, $y(\pi)=0$, следовательно, экстремаль определяется не единственным образом. Легко проверить, что в этом случае на любой функции семейства $y = C \sin x$ выполнено $V[y] = \int_0^\pi (y^2 - y'^2) dx = 0$.

Пример 8.7. Пусть тело перемещается по кривой $y = y(x)$ со скоростью $\vec{v}$ такой, что $|\vec{v}| = v(x, y) = y$. Какова должна быть траектория его движения, чтобы тело попало из точки $y(a) = A$ в точку $y(b) = B$ за минимальное время?

Решение. Время, необходимое для перемещения из точки $(a, y(a))$ в точку $(b, y(b))$ по заданной кривой $y = y(x)$, определяется функционалом $t = \int_a^b \frac{ds}{v(x, y)} = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx \equiv V[y]$.

Таким образом, решение поставленной задачи дается экстремальми функционала $V[y]$ при условиях $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Уравнение Эйлера в рассматриваемом случае $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = F_y - F_{y'y'} y'' - F_{y'y} y' = 0$.

Умножая на y' , получим $\frac{d}{dx} (F - y' F_{y'}) = 0$, и найдем первый интеграл

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y' \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = C_1. \quad \text{Положим} \quad y' = \operatorname{tg} t, \quad \text{тогда} \quad y = \frac{\cos t}{C_1},$$

$$dx = \frac{dy}{y'} = \operatorname{ctg} t dy = \frac{\cos t dt}{C_1}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{\sin t}{C_1} + C_2. \quad \text{Исключив параметр } t, \text{ получим}$$

$$(x - C_2)^2 + y^2 = \frac{1}{C_1^2}, \text{ т.е. экстремальми задачи являются окружности с центрами на оси } x.$$

Итак, искомая траектория движения тела - дуга окружности с центром на оси x , соединяющая точки (a, A) и (b, B) . Легко видеть, что такая окружность определяется единственным образом при заданных дополнительных условиях $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти вариацию функционала

$$8.1 \quad V[y] = \int_a^b y y' dx.$$

$$8.2 \quad V[y] = \int_a^b (x + y) dx.$$

$$8.3 \quad V[y] = \int_a^b (y^2 - y'^2) dx.$$

$$8.4 \quad V[y] = \int_0^\pi y' \sin y dx.$$

Исследовать на экстремум функционалы в задаче с закрепленными концами (найти экстремали и проверить достаточные условия каким либо способом):

$$8.5 \quad V[y] = \int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

$$8.6 \quad V[y] = \int_0^1 e^y y'^2 dx \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \ln 4.$$

$$8.7 \quad V[y] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 4.$$

$$8.8 \quad V[y] = \int_0^a \frac{dx}{y'} \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b \quad (a > 0, b > 0).$$

$$8.9 \quad V[y] = \int_0^1 (1+x) y'^2 dx \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

$$8.10 \quad V[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - y'^2) dx \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$8.11 \quad V[y] = \int_{-1}^2 y'(1+x^2 y') dx \quad y(-1) = 1, \quad y(2) = 4.$$

$$8.12 \quad V[y] = \int_{-1}^1 (y'^3 + y'^2) dx \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 3.$$

$$8.13 \quad V[y] = \int_1^2 (x y'^4 - 2 y y'^3) dx \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

$$8.14 \quad V[y] = \int_0^a (1 - e^{-y'^2}) dx \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b \quad (a > 0).$$

$$8.15 \quad \text{Найти семейство экстремалей функционала } V[y] = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x} dx, \quad -\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}.$$

8.16 Среди всех кривых, соединяющих точки $(-1, ch1)$ и $(1, ch1)$, определить ту, которая при вращении вокруг оси Ox образует поверхность наименьшей площади.

Ответы к задачам

$$8.1 \quad \delta V = \int_a^b (y'h + yh')dx \quad (\delta y = h(x)).$$

$$8.2 \quad \delta V = \int_a^b h(x)dx \quad (\delta y = h(x)).$$

$$8.3 \quad \delta V = 2 \int_a^b (yh - y'h')dx \quad (\delta y = h(x)).$$

$$8.4 \quad \delta V = \int_0^\pi (y' \cos y \cdot h + \sin y \cdot h')dx \quad (\delta y = h(x)).$$

8.5 Экстремаль $y(x) = e^x$ реализует сильный (и слабый) минимум.

8.6 Экстремаль $y(x) = 2 \ln(x+1)$ реализует сильный (и слабый) минимум.

8.7 Экстремаль $y(x) = x^2$ реализует слабый минимум.

8.8 Экстремаль $y(x) = \frac{b}{a}x$ реализует слабый минимум.

8.9 Экстремаль $y(x) = \frac{\ln(x+1)}{\ln 2}$ реализует сильный (и слабый) минимум.

8.10 Экстремаль $y(x) = \sin x + \cos x$ реализует сильный (и слабый) максимум.

8.11 На непрерывных кривых экстремум не достигается.

8.12 Экстремаль $y(x) = 2x + 1$ реализует слабый минимум.

8.13 Экстремаль $y(x) = x - 1$ реализует слабый минимум.

8.14 На экстремали $y(x) = \frac{b}{a}x$: при $|b| < \frac{a}{\sqrt{2}}$ достигается слабый минимум;

при $|b| > \frac{a}{\sqrt{2}}$ - слабый максимум; при $|b| = \frac{a}{\sqrt{2}}$ - экстремума нет.

8.15 Окружности $x^2 + (y - C_1)^2 = C_2^2$.

8.16 $y(x) = ch x$.

ТЕМА 9

Задачи с подвижной границей. Условия трансверсальности.

Основные определения и теоремы

Рассмотрим функционал $V[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$, заданный на кривых $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$,

граничные точки которых $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ в свою очередь лежат на фиксированных гладких кривых $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, так что $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \psi(x_1)$.

Задача с подвижными границами ставится так: среди всех функций $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$, графики которых соединяют точки двух данных кривых $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $V[y]$. Отметим, что абсциссы x_0 и x_1 точек A и B заранее не известны, и также подлежат определению.

Необходимые условия экстремума. Для того, чтобы функция $y = \tilde{y}(x)$ доставляла экстремум функционалу $V[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$ среди всех кривых $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$, соединяющих точки двух заданных линий $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, необходимо, чтобы:

- 1) кривая $y = \tilde{y}(x)$ была решением уравнения Эйлера для функционала $V[y]$ (являлась экстремалью),
- 2) в точках $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ пересечения экстремали $y = \tilde{y}(x)$ с кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ выполнялись условия трансверсальности

$$[F + (\varphi' - \tilde{y}') F_{y'}]_{x=x_0} = 0,$$

$$[F + (\psi' - \tilde{y}') F_{y'}]_{x=x_1} = 0.$$

Условия трансверсальности устанавливают связь между угловыми коэффициентами кривых $\tilde{y}'$ и φ' , а также $\tilde{y}'$ и ψ' в граничных точках A и B .

Для определения четырех параметров - C_1, C_2 из общего решения уравнения Эйлера и значений x_0, x_1 (координат концов экстремали) - два условия трансверсальности нужно дополнить двумя естественными условиями пересечения заданных кривых и искомой экстремали $\tilde{y}(x_0) = \varphi(x_0)$, $\tilde{y}(x_1) = \psi(x_1)$.

Замечание 1. Если граничная точка (пусть точка A) может перемещаться только по горизонтальной прямой $y = x_0$ (т.е. $\varphi' = 0$), то условие трансверсальности в точке $A(x_0, y_0)$ принимает вид $[F - y' F_{y'}]_{x=x_0} = 0$.

Замечание 2. Если граничная точка (например, точка B) может перемещаться только по вертикальной прямой $x = x_1$ (т.е. $\psi' = \infty$), то такая задача называется задачей со свободным концом, и условие трансверсальности при $x = x_1$ в этом случае принимает вид $F_{y'}|_{x=x_1} = 0$.

Примеры решения задач

Пример 9.1. Показать, что если в задаче об экстремуме функционала

$$V[y] = \int_a^{x_0=B[y]} A(x, y) \sqrt{1+y'^2} dx$$

с левым закрепленным и правым подвижным концами функция $A(x, y) \neq 0$ дифференцируема, то условие трансверсальности переходит в условие ортогональности.

Решение. Условие трансверсальности $F + (\varphi' - y')F_{y'} = 0$ при $x = x_0 = B[y]$ в данной задаче имеет вид $A(x, y) \sqrt{1+y'^2} + (\varphi' - y') \cdot \frac{A(x, y) y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$ или $\frac{A(x, y)(1+\varphi' y')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$. Так

как $A(x, y) \neq 0$, то $1 + y'\varphi'|_{x=x_0} = 0$ или $y'(x_0) = -\frac{1}{\varphi'(x_0)}$, что и требовалось.

Итак, условие трансверсальности совпадает с условием ортогональности.

Пример 9.2. Исследовать на экстремум функционал $V[y] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$ при условии, что левый конец закреплен $y(0)=0$, а правый (x_1, y_1) может перемещаться вдоль заданной прямой $y = x - 5$.

Решение. Функция $F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$ не зависит явно от x . Поэтому уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'F_{y'} = C$, т.е. $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - y' \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = C$, или $Cy\sqrt{1+y'^2} = 1$.

Положим $y' = \operatorname{tg} t$. Тогда $y = C_1 \cos t$, а $dx = \frac{dy}{y'} = -\frac{C_1 \sin t dt}{\operatorname{tg} t} = -C_1 \cos t dt$, откуда $x = -C_1 \sin t + C_2$.

Исключая параметр t , получаем уравнение семейства окружностей $(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2$ с центрами на оси x . Из условия $y(0)=0$ найдем $C_1 = C_2 = C$ и $(x - C)^2 + y^2 = C^2$.

Константа C может быть определена из условия трансверсальности, которое для данного функционала совпадает с условием ортогональности (пример 9.1) кривой $y = y(x)$ семейства $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ и прямой $y = x - 5$ в точке их пересечения (x_1, y_1) . В нашем случае $\varphi(x) = x - 5$, $\varphi' = 1$, поэтому из $1 + y'\varphi'|_{x=x_1} = 0$ вытекает $y'|_{x=x_1} = -1$.

Дифференцируя семейство решений уравнения Эйлера, получим $yy' = C - x$. В точке пересечения кривых (x_1, y_1) имеем $\underbrace{y(x_1)}_{=y_1} \cdot \underbrace{y'(x_1)}_{=-1} = C - x_1$, поэтому $-y_1 = C - x_1$ и $y_1 = x_1 - 5$,

откуда $C = 5$ и искомая экстремаль дается формулой $y = \pm \sqrt{10x - x^2}$.

Замечание. Этот результат можно получить и из геометрических соображений. Условие ортогональности прямой $y = x - 5$ и окружности $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ в точке их пересечения означает, что центр окружности $(C, 0)$ лежит на этой прямой. Следовательно, центр окружности есть точка пересечения прямой $y = x - 5$ с осью x , т.е. $C = 5$.

Пример 9.3. Среди кривых, соединяющих точки прямой $2y + 2x + 3 = 0$ и параболы $x^2 = 2y$, найти ту, которая имеет наименьшую длину.

Решение. Введем обозначения: $y = \varphi(x) \equiv \frac{1}{2}x^2$ - уравнение параболы, $y = \psi(x) \equiv -x - \frac{3}{2}$ - уравнение прямой. Пусть точка с координатами (x_1, y_1) находится на параболе, т.е. $y_1 = \frac{1}{2}x_1^2$, а точка (x_2, y_2) - на прямой, т.е. $y_2 = -x_2 - \frac{3}{2}$. Длина дуги кривой $y = y(x)$, соединяющей точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , определяется функционалом

$$V[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad \text{Таким образом, решение поставленной задачи дается}$$

экстремалью задачи с подвижной границей для функционала $V[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$ с условиями $y(x_1) = y_1 = \varphi(x_1)$, $y(x_2) = y_2 = \psi(x_2)$.

Уравнение Эйлера $y'' = 0$ имеет общее решение $y(x) = \alpha x + \beta$. Для определения постоянных α и β , а также координат концов дуги экстремали получим следующие условия в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) :

$$\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta, & y_1 = \frac{1}{2}x_1^2 \\ \sqrt{1 + y'^2(x_1)} + [\underbrace{\varphi'(x_1)}_{=x_1} - \underbrace{y'(x_1)}_{=\alpha}] \frac{y'(x_1)}{\sqrt{1 + y'^2(x_1)}} = 0, \\ y_2 = \alpha x_2 + \beta, & y_2 = -x_2 - \frac{3}{2} \\ \sqrt{1 + y'^2(x_2)} + [\underbrace{\varphi'(x_2)}_{=-1} - \underbrace{y'(x_2)}_{=\alpha}] \frac{y'(x_2)}{\sqrt{1 + y'^2(x_2)}} = 0 \end{cases}$$

Во второй строке записано условие трансверсальности $F + (\varphi' - y')F_{y'} = 0$, где $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$, в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Легко видеть, что оно совпадает с условием ортогональности $y'(x_{1,2}) \cdot \varphi'(x_{1,2}) + 1 = 0$.

Решая систему, найдем $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{3}{2}$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 0$ и экстремаль $y(x) = x + \frac{3}{2}$.

Замечание. Длина дуги полученной экстремали $l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \sqrt{1 + 1} dx = \frac{1}{\sqrt{2}}$ дает

минимальное расстояние от прямой до параболы. Этот результат легко получить и из геометрических соображений.

Пример 9.4. Найти экстремали функционала $V[y] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y'^2 - y^2) dx$ с условием $y(0) = 1$ (задача со свободным правым концом при $x = \frac{\pi}{4}$).

Решение. Граничное условие при $x = \frac{\pi}{4}$ следует поставить так: $F_{y'} \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 2y' \Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$.

Экстремали в данной задаче находятся из условий
$$\begin{cases} y'' + y = 0 & (\text{уравнение Эйлера}) \\ y(0) = 1, & y' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 0 \end{cases},$$

откуда получаем единственное решение $y(x) = \sin x + \cos x$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти экстремали и значение ξ в следующих задачах с подвижной границей:

$$9.1 \quad V[y] = \int_0^{\xi} y'^2 dx \quad y(0) = 0, \quad y(\xi) = -\xi - 1.$$

$$9.2 \quad V[y] = \int_0^{\xi} y'^2 dx \quad y(0) = 0, \quad y(\xi) = \frac{2}{1-\xi}.$$

$$9.3 \quad V[y] = \int_0^{\xi} \sqrt{1+y'^2} dx \quad y(0) = 0, \quad y(\xi) = \frac{1}{\xi^2}.$$

$$9.4 \quad V[y] = \int_0^{\xi} (y'^2 + x^2) dx \quad y(0) = 0, \quad y(\xi) = 1.$$

$$9.5 \quad V[y] = \int_0^{\xi} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx \quad y(0) = 1, \quad y(\xi) = \xi - 1.$$

9.6 Найти минимальное расстояние от точки $M_0(-1, 5)$ до параболы $x = y^2$.

9.7 Найти минимальное расстояние от точки $M_0(1, 0)$ до эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

9.8 Найти минимальное расстояние между точками параболы $y = x^2$ и прямой $x - y = 5$.

9.9 Найти минимальное расстояние от прямой $x + y = 4$ до окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Найти экстремали в задачах со свободными концами:

$$9.10 \quad V[y] = \int_0^2 (2xy + y'^2) dx \quad y(0) = 0.$$

$$9.11 \quad V[y] = \int_0^1 (2y + 6y' + y'^2) dx \quad y(0) = 0.$$

$$9.12 \quad V[y] = \int_0^1 (2yy' + y'^2) dx.$$

$$9.13 \quad V[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4y^2 + y'^2 + 2y \cos x) dx.$$

$$9.14 \quad V[y] = \int_1^2 (2y + yy' + x^2 y'^2) dx.$$

$$9.15 \quad V[y] = \int_1^2 (2y - yy' + x^2 y'^2) dx$$

Ответы к задачам

$$9.1 \quad y(x) = -2x, \quad \xi = 1.$$

$$9.2 \quad y(x) = \pm 4x, \quad \xi = \frac{1}{2}.$$

$$9.3 \quad y(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad \xi = \sqrt[6]{2}.$$

9.4 Решений нет.

$$9.5 \quad y(x) = \sqrt{1 + 2x - x^2}, \quad \xi = 2.$$

$$9.6 \quad 2\sqrt{30}.$$

$$9.7 \quad \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad \text{экстремаль} \quad y(x) = 2x - 2.$$

$$9.8 \quad \frac{19\sqrt{2}}{8}, \quad \text{экстремаль} \quad y(x) = -x + \frac{3}{4}.$$

$$9.9 \quad 2\sqrt{2} - 1.$$

$$9.10 \quad y(x) = \frac{x^3}{6} - 2x.$$

$$9.11 \quad y(x) = -3x.$$

$$9.12 \quad y(x) \equiv 0.$$

$$9.13 \quad y(x) = -\frac{1}{5} \left(\frac{2 \operatorname{ch} 2x}{\operatorname{sh} \pi} + \cos x \right).$$

$$9.14 \quad y(x) = \ln \frac{x}{4} - \frac{4 + \ln 4}{x} - 6.$$

$$9.15 \quad y(x) = x + 1 + \frac{2 + \ln x}{\ln 2}.$$

ТЕМА 10

Условный экстремум. Задача Лагранжа. Изопериметрические задачи.

Основные определения и теоремы

В вариационных задачах на условный экстремум функции, на которых исследуется функционал, подчиняются дополнительным условиям связи.

Рассмотрим функционал
$$V[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$$

с граничными условиями
$$y(a) = y_0, \quad y(b) = y_1, \\ z(a) = z_0, \quad z(b) = z_1.$$

Среди всех кривых $y(x), z(x) \in C^{(1)}[a, b]$, удовлетворяющих граничным условиям, а также условию связи $\Phi(x, y, z, y', z') = 0$, требуется определить те, на которых реализуется экстремум функционала $V[y, z]$. Сформулированную проблему иногда называют *задачей Лагранжа*.

Связи типа $\Phi(x, y, z) = 0$ (т.е. не зависящие от производных) в механике называются голономными, а связи вида $\Phi(x, y, z, y', z') = 0$ (зависящие от производных) называются неголономными.

Необходимые условия экстремума (задача Лагранжа).

Пусть

- 1) функции $y(x), z(x)$ реализуют экстремум функционала $V[y, z]$ на множестве пар функций, удовлетворяющий граничным условиям и условиям связи;
- 2) функции F, Φ трижды дифференцируемы;
- 3) $y(x)$ и $z(x)$ дважды дифференцируемы и $\Phi_z'^2 + \Phi_y'^2 \neq 0$.

Тогда существует дифференцируемая функция $\lambda(x)$ такая, что функции $y(x), z(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера для вспомогательного функционала
$$\int_a^b H(x, y, z, y', z') dx, \quad \text{где} \quad H \equiv F(x, y, z, y', z') + \lambda(x)\Phi(x, y, z, y', z') \quad (\text{конструкция,}$$

аналогичная функции Лагранжа в задаче об условном экстремуме функций нескольких переменных).

Замечание 1. В случае голономных связей (не зависящих от производных) *условие 3) теоремы отсутствует.*

Замечание 2. Естественно, что приведенное в исследуемом функционале количество функций - две, является минимально необходимым для постановки задачи об условном экстремуме. В общем случае, количество связей должно быть *меньше* количества функций в функционале V .

Изопериметрическая задача. Условия связи могут быть заданы не в виде функций, а в виде дополнительных функционалов. Важнейшим примером таких задач является так называемая изопериметрическая задача, которая ставится следующим образом:

среди всех функций $y(x) \in C^{(1)}[a, b]$ найти ту, которая доставляет экстремум функционалу $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$, с граничными условиями $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$ при наличии связи $J[y] = \int_a^b G(x, y, y') dx = l$, где l - заданная постоянная.

Изопериметрическая задача сводится к задаче Лагранжа введением функции $z(x) = \int_a^x G(x, y, y') dx$. Очевидно, $z(a) = 0$, $z(b) = l$, $z' = G(x, y, y')$.

Таким образом, рассматриваемая изопериметрическая задача приведена к виду:

$V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$, $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, $z(a) = 0$, $z(b) = l$ с неголономной связью

$\Phi(x, y, z, y', z') \equiv -z' + G(x, y, y') = 0$ (в данном случае функция z входит только в условие связи).

Необходимые условия экстремума (изопериметрическая задача). Пусть

- 1) на функции $y(x)$ достигается экстремум функционала $V[y]$ при сформулированных граничных условиях и условиях связи,
- 2) функция F трижды дифференцируема,
- 3) $y(x)$ дважды дифференцируема и не является экстремалью функционала $J[y]$.

Тогда существует постоянная λ такая, что $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера для

вспомогательного функционала $\int_a^b H(x, y, y') dx$, где $H \equiv F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')$.

Замечание. Если $y(x)$ - экстремаль функционала $J[y]$, то $G_y - \frac{d}{dx} G_{y'} = 0$, т.е.

уравнение Эйлера для функционала $\int_a^b H(x, y, y') dx$ совпадает с обычным уравнением

Эйлера $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$ для функционала $V[y]$.

Примеры решения задач

Пример 10.1. Записать уравнение экстремалей изопериметрической задачи для функционала

$$V[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2] dx$$

с дополнительными условиями $J[y] = \int_a^b \rho(x)y^2 dx = 1$, $y(a) = 0$, $y(b) = 0$,

где $p(x)$ непрерывно дифференцируемая, $q(x)$ и $\rho(x)$ непрерывные на $[a, b]$ функции, причем $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$.

Решение. В принятых выше обозначениях $F(x, y, y') = p(x)y'^2 + q(x)y^2$, $G(x, y, y') = \rho(x)y^2$, $H(x, y, y') = p(x)y'^2 + q(x)y^2 + \lambda \rho(x)y^2$, поэтому вспомогательный

функционал имеет вид $V[y] + \lambda J[y] = \int_a^b [p(x)y'^2 + q(x)y^2 + \lambda \rho(x)y^2] dx$.

Уравнение Эйлера $\frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y - \lambda \rho(x)y = 0$ с краевыми условиями $y(a) = 0$, $y(b) = 0$, очевидно, имеет решение $y(x) \equiv 0$, которое, однако, не удовлетворяет изопериметрическому условию $\int_a^b \rho(x)y^2 dx = 1$. Поэтому экстремали следует определить как решения задачи Штурма-Лиувилля, т.е. экстремали в данном случае являются собственные функции $y_n(x)$ с собственными значениями $\lambda_n < 0$.

Умножив уравнение Эйлера на $y_n(x)$ и проинтегрировав по отрезку $[a, b]$ с учетом дополнительных условий, найдем

$$\underbrace{p(x)y'_n(x)y_n(x)}_{=0} \Big|_a^b - \int_a^b p(x)y_n'^2 dx - \int_a^b q(x)y_n^2 dx = \lambda_n \underbrace{\int_a^b \rho(x)y_n^2 dx}_{=1}, \text{ т.е. значение функционала } V[y]$$

на полученных экстремалих $V[y_n(x)] = -\lambda_n$.

Итак, экстремали рассматриваемой изопериметрической задачи являются ортонормированные с весом $\rho(x)$ собственные функции $y_n(x)$ задачи Штурма-Лиувилля; при этом соответствующие им собственные значения λ_n представляют собой экстремальные значения функционала $-V[y]$.

Пример 10.2. Найти тело вращения наименьшего объема с заданной площадью осевого сечения.

Решение. Пусть ось Ox выбранной системы координат совпадает с осью вращения, тогда для ответа на вопрос задачи нужно найти минимум функционала $V[y] = \pi \int_a^b y^2 dx$ при

условиях $2 \int_a^b y dx = S$, $y(a) = A$, $y(b) = B$. Уравнение Эйлера для функционала Лагранжа

$V[y] = \int_a^b (y^2 + \lambda y) dx$ в рассматриваемом случае не дифференциальное, а алгебраическое

$2y + \lambda = 0$, и его решение $y(x) = -\frac{\lambda}{2}$ существует лишь, если $A = B = -\frac{\lambda}{2}$ и $-\lambda(b-a) = S$, т.е. искомым телом является цилиндр.

Пример 10.3. На поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$ найти кривую наименьшей длины, соединяющую точки $(a, 0, 0)$ и $(0, a, h)$, и расстояние между этими точками, измеренное по поверхности цилиндра.

Решение. Зададим искомую кривую в параметрической форме $L: \{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}$, тогда длина дуги этой кривой дается функционалом

$l = V[x, y, z] = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$. Конкретный способ выбора параметра t будет указан

ниже.

Для решения задачи требуется найти экстремали функционала $V[x, y, z] = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$ в задаче Лагранжа с голономной связью $\varphi(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - a^2 = 0$ и граничными условиями

$$\begin{cases} x(\alpha) = a, & y(\alpha) = 0, & z(\alpha) = 0 \\ x(\beta) = 0, & y(\beta) = a, & z(\beta) = h \end{cases}.$$

Составим вспомогательный функционал $\int_{\alpha}^{\beta} \left[\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \lambda(t)(x^2 + y^2 - a^2) \right] dt$, тогда

система уравнений Эйлера выглядит так:

$$\begin{cases} 2\lambda(t) \cdot x - \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \\ 2\lambda(t) \cdot y - \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \\ -\frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \end{cases}.$$

Выберем в качестве t естественный параметр - длину дуги кривой, отсчитанную от точки $(a, 0, 0)$, тогда $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$ и уравнения Эйлера примут более простой вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\lambda(t) \cdot x \\ \ddot{y} = 2\lambda(t) \cdot y \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}.$$

Отсюда сразу найдем $\dot{z} = C$, где $|C| < 1$.

Далее, дифференцируя дважды уравнение поверхности $x^2 + y^2 = a^2$, получим $x\ddot{x} + y\ddot{y} + \underbrace{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}_{=1-\dot{z}^2} = 0$, откуда $x\ddot{x} + y\ddot{y} = \dot{z}^2 - 1 = C^2 - 1$. Подставляя это соотношение в первые

два уравнения последней системы, найдем $C^2 - 1 = 2\lambda(t) \underbrace{(x^2 + y^2)}_{=a^2} \Rightarrow 2\lambda(t) = \frac{C^2 - 1}{a^2}$.

Теперь уравнения Эйлера легко интегрируются и, так как $|C| < 1$, т.е. $C^2 - 1 < 0$, то их решение есть $x(t) = A_1 \sin \gamma t + A_2 \cos \gamma t$, $y(t) = B_1 \sin \gamma t + B_2 \cos \gamma t$, $z(t) = Ct + C_1$ - винтовая линия (здесь введено обозначение $\gamma = \sqrt{\frac{1-C^2}{a^2}}$).

Дополнительные условия при выбранном способе параметризации кривой следует поставить так:

$$\begin{cases} x(0) = a, & y(0) = 0, & z(0) = 0 \\ x(l) = 0, & y(l) = a, & z(l) = h \end{cases}.$$

Условия при $t = 0$ с учетом $x^2 + y^2 = a^2$ дают $x(t) = a \cos \gamma t$, $y(t) = a \sin \gamma t$, $z(t) = Ct$; при $t = l$ имеем $\cos \gamma l = 0$, $\sin \gamma l = 1$, $C = \frac{h}{l}$,

откуда следует $\gamma = \frac{\pi}{2l}$, и уравнения экстремали принимают вид

$$x(t) = a \cos \frac{\pi}{2l} t, \quad y(t) = a \sin \frac{\pi}{2l} t, \quad z(t) = \frac{h}{l} t.$$

Подставив полученные формулы в соотношение $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$, определявшее выбор параметризации, найдем $\left(\frac{\pi a}{2l}\right)^2 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 = 1$, откуда $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}$. Итак, кратчайшее расстояние между точками $(a, 0, 0)$ и $(0, a, h)$, измеренное на поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, равно $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}$.

Замечание. Эту формулу можно вывести и из простых геометрических соображений: если "разрезать" поверхность цилиндра по образующей, проходящей через точку $(a, 0)$ и "развернуть" ее, то получим прямоугольник со сторонами длиной $\frac{\pi a}{2}$ и h , диагональ которого равна $l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\pi a}{2}\right)^2}$ и дает искомое минимальное расстояние между заданными точками.

Пример 10.4. На поверхности $15x - 7y + z = 22$ найти кривую наименьшей длины, соединяющую точки $A(1, -1, 0)$ и $B(2, 1, -1)$, и расстояние между этими точками, измеренное по данной поверхности.

Решение. Зададим искомую кривую в параметрической форме $L: \{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}$, $0 \leq t \leq \alpha$, где значение α будет определено позднее. Тогда длина дуги кривой дается функционалом $l = V[x, y, z] = \int_A^B dl = \int_0^\alpha \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$.

Для решения задачи нужно найти экстремали функционала $V[x, y, z] = \int_0^\alpha \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$ в задаче Лагранжа с голономной связью $\varphi(x, y, z) \equiv 15x - 7y + z - 22 = 0$ и граничными условиями

$$\begin{cases} x(0) = 1, & y(0) = -1, & z(0) = 0 \\ x(\alpha) = 2, & y(\alpha) = 1, & z(\alpha) = -1 \end{cases}.$$

Составим вспомогательный функционал $\int_0^\alpha \left[\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \lambda(t)(15x - 7y + z - 22) \right] dt$,

система уравнений Эйлера для которого выглядит так:

$$\begin{cases} 15\lambda(t) - \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \\ -7\lambda(t) - \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \\ \lambda(t) - \frac{d}{dt} \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = 0 \end{cases}.$$

Как и в предыдущем примере выберем в качестве t естественный параметр - длину дуги кривой, отсчитанную от точки A , тогда $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$ и $\alpha = l$, а уравнения Эйлера примут вид: $\ddot{x} = 15\lambda(t)$, $\ddot{y} = -7\lambda(t)$, $\ddot{z} = \lambda(t)$.

Продифференцировав дважды уравнение поверхности $15x - 7y + z = 22$, получим $15\ddot{x} - 7\ddot{y} + \ddot{z} = 0$, откуда, учитывая уравнения Эйлера, найдем $\lambda(t) = 0$. Поэтому $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$, и экстремальными задачи являются прямые.

Дополнительное условие в точке $A(1, -1, 0)$ и способ выбора параметра, т.е. соотношение $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 1$, определяют искомую кривую в параметрической форме $x(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{6}}t$, $y(t) = -1 + \frac{2}{\sqrt{6}}t$, $z(t) = -\frac{1}{\sqrt{6}}t$, а условие в точке $B(2, 1, -1)$ (т.е. при $t = \alpha$) дает расстояние между точками: $l = \alpha = \sqrt{6}$.

Замечание. Результат, полученный нами средствами вариационного исчисления, был очевиден заранее из геометрических соображений, так как заданная поверхность $15x - 7y + z = 22$ - плоскость, следовательно, минимальное расстояние между любыми двумя точками на ней есть длина отрезка, соединяющего эти точки.

Пример 10.5. (задача Чаплыгина). Определить траекторию, по которой должен двигаться самолет с постоянной относительно воздуха скоростью $\vec{u}: |\vec{u}| = u = \text{const}$, чтобы за фиксированное время T облететь территорию максимальной площади, если скорость ветра $\vec{v}$ постоянна и $|\vec{v}| = v < u$.

Решение. Выберем систему координат так, что ось Ox направлена вдоль скорости ветра. Пусть искомая траектория задана в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, тогда скорость самолета в этой системе координат $\vec{V} \equiv \{\dot{x}(t), \dot{y}(t)\} = \vec{u} + \vec{v}$ и имеет место соотношение $(\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 = u^2$.

Задача состоит в нахождении кривой, реализующей минимум функционала площади $S[x, y] = \frac{1}{2} \int_0^T (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$ при наличии неголономной связи $(\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 - u^2 = 0$. Граничные условия: $x(0) = x(T) = x_0$, $y(0) = y(T) = y_0$, т.е. самолет вылетает из некоторой точки и в нее же возвращается (выбор начальной точки будет указан ниже).

$$\text{Функционал Лагранжа} \quad L[x, y] = \int_0^T \left[\frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x}) + \lambda(t) ((\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 - u^2) \right] dt$$

$$\text{порождает систему уравнений Эйлера} \quad \begin{cases} \frac{1}{2} \dot{y} - \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} y + 2\lambda(t)(\dot{x} - v) \right) = 0 \\ -\frac{1}{2} \dot{x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} x + 2\lambda(t)\dot{y} \right) = 0 \end{cases},$$

$$\text{интегрируя которую получим} \quad \begin{cases} y - 2\lambda(t)(\dot{x} - v) = C_1 \\ x + 2\lambda(t)\dot{y} = C_2 \end{cases}.$$

Сделаем сдвиг исходной системы координат, т.е. выберем начальную точку траектории (x_0, y_0) так, что $C_1 = C_2 = 0$, тогда в новых координатах имеем

$$\begin{cases} y = 2\lambda(t)(\dot{x} - v) \\ x = -2\lambda(t)\dot{y} \\ (\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 - u^2 = 0 \end{cases}.$$

Далее, исключая функцию $\lambda(t)$ из первого и второго уравнения, приведем систему к

виду
$$\begin{cases} \dot{x} - v = -\frac{y\dot{y}}{x} \\ (\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2 - u^2 = 0 \end{cases}, \text{ откуда } \dot{y}^2 = \frac{u^2 x^2}{x^2 + y^2}, (\dot{x} - v)^2 = \frac{u^2 y^2}{x^2 + y^2}. \text{ Учитывая, что } \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{dx}{dy},$$

получим дифференциальное уравнение искомой траектории $x \frac{dx}{dy} + y = \pm \frac{v}{u} \sqrt{x^2 + y^2}$,

которое легко интегрируется, так как
$$\frac{x \frac{dx}{dy} + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{d}{dy} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно, решение задачи дается формулой $\sqrt{x^2 + y^2} = \pm \frac{v}{u} y + C$ и представляет собой семейство эллипсов с эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{v}{u} < 1$, большая ось которых перпендикулярна оси Ox , т.е. направлению ветра.

Задачи для самостоятельного решения

10.1 Найти экстремали изопериметрической задачи для функционала $V[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ в

следующих случаях:

- а) $V[y] = \int_0^1 y'^2 dx$, $\int_0^1 y dx = 3$, $y(0) = 1, y(1) = 6$;
- б) $V[y] = \int_0^\pi (y'^2 + x^2) dx$, $\int_0^\pi y^2 dx = 1$, $y(0) = 0, y(\pi) = 0$;
- в) $V[y] = \int_0^1 y'^2 dx$, $\int_0^1 (y - y'^2) dx = \frac{1}{12}$, $y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{4}$;
- г) $V[y] = \int_0^1 y'^2 dx$, $\int_0^1 y dx = 1$, $\int_0^1 xy dx = 1$, $y(0) = 0, y(1) = 0$.

10.2 Найти экстремали задачи на условный экстремум для функционала $V[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$

с голономными связями в следующих случаях:

- а) $V[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx$, $y^2 + z^2 = 1$,
 $y(0) = 1, y(1) = 0, z(0) = 0, z(1) = 1$;
- б) $V[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + x^3) dx$, $y - 2z + 3x = 0$,
 $y(0) = 2, y(1) = 1, z(0) = 1, z(1) = 2$;
- в) $V[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 1) dx$, $y + z = 2x^2$,
 $y(0) = 0, y(1) = 2, z(0) = 0, z(1) = 0$;

$$\text{г) } V[y, z] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 + z^2 - y'^2 - z'^2 + \cos x) dx,$$

$$y - z = 2 \sin x,$$

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z(0) = 1, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

10.3 Найти экстремали задачи на условный экстремум для функционала $V[y, z] = \int_a^b F(x, y, z, y', z') dx$

с неголономными связями в следующих случаях:

$$\text{а) } V[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + 2z'^2 + z^2) dx, \quad y - z' = 0,$$

$$y(0) = -2, \quad y(1) = -\frac{1}{e}, \quad z(0) = 1, \quad z(1) = 0;$$

$$\text{б) } V[y, z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2) dx, \quad y' - z = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(0) = 1, \quad z(1) = 0;$$

$$\text{в) } V[y, z] = \int_0^{\pi} (y'^2 - z'^2) dx, \quad y' = z - \cos x,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad z(0) = 0, \quad z(\pi) = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{г) } V[y, z] = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - 4x^2 z^2) dx, \quad z' = 2y - 4xz, \quad z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Ответы к задачам

$$10.1 \quad \text{а) } y(x) = 3x^2 + 2x + 1;$$

$$\text{б) } y_k(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$\text{в) } y(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4};$$

$$\text{г) } y(x) = 60x^3 - 96x^2 + 36x.$$

$$10.2 \quad \text{а) } y(x) = \cos \frac{\pi x}{2}, \quad z(x) = \sin \frac{\pi x}{2};$$

$$\text{б) } y(x) = 2 - x, \quad z(x) = 1 + x;$$

$$\text{в) } y(x) = x^2 + x, \quad z(x) = x^2 - x$$

$$\text{г) } y(x) = \cos x + \sin x, \quad z(x) = \cos x - \sin x.$$

$$10.3 \quad \text{а) } y(x) = (x-2)e^{-x}, \quad z(x) = (1-x)e^{-x};$$

б) решений нет;

$$\text{в) } y(x) = \frac{x}{2} \sin x, \quad z(x) = \frac{1}{2} (\sin x - x \cos x);$$

$$\text{г) } y(x) = \sin 2x, \quad z(x) = \cos 2x + 2x \cdot \sin 2x.$$