

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Виноградов, Метод тригонометрических сумм
в теории чисел, *Тр. МИАН СССР*, 1947, том 23, 3–
109

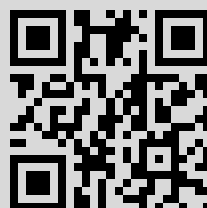
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru
подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-
шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 212.75.218.10

24 марта 2022 г., 07:18:04



ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Обозначения	4
Введение	5
Глава I. Общие леммы	19
Глава II. Исследование особого ряда	35
Глава III. Исследование одного определенного интеграла	43
Глава IV. Оценка $G(n)$ в проблеме Варинга	47
Глава V. Приближения дробными частями значений целого многочлена	52
Глава VI. Оценки сумм Вейля	58
Глава VII. Асимптотическая формула в проблеме Варинга	73
Глава VIII. Распределение дробных частей значений целого многочлена	77
Глава IX. Оценки простейших тригонометрических сумм с простыми числами	80
Глава X. Проблема Гольдбаха	98
Глава XI. Распределение дробных частей значений функций αp	107
Литература	109

ОБОЗНАЧЕНИЯ

θ обозначает число, модуль которого не превосходит 1; c — положительное постоянное; ε — произвольно-малое положительное постоянное.

При $B > 0$ обозначение $A \ll B$ показывает, что $|A| \leq cB$.

Пусть совокупность значений переменного S полностью определена. Сумма каких-либо $\ll N$ слагаемых, каждое из которых принадлежит указанной совокупности, обозначается символом $\sum^N S$.

При вещественных A и B с условием $0 < B - A < 1$ обозначения $A < z < B \pmod{1}$, $A \leq z < B \pmod{1}$, $A < z \leq B \pmod{1}$, $A \leq z \leq B \pmod{1}$, соответственно, показывают, что при некотором целом h имеем

$$A + h < z < B + h, \quad A + h \leq z < B + h, \quad A + h < z \leq B + h, \quad A + h \leq z \leq B + h.$$

При вещественном x символ $\{x\}$ обозначает дробную часть числа x , т. е. разность $x - [x]$, а символ (x) — расстояние числа x до ближайшего целого, т. е. $\min(\{x\}, 1 - \{x\})$.

Символ $\Omega(d)$ — число простых делителей положительного числа d ; n — постоянное целое, превосходящее 1; $v = \frac{1}{n}$.

Под „целой точкой“ подразумевается точка, все координаты которой суть целые рациональные числа.

ВВЕДЕНИЕ

Одною из важнейших для теории чисел проблем является установление различного рода закономерностей в распределении значений функции $f(x_1, \dots, x_r)$ от одной или более переменных. При этом рассматриваются лишь те значения функции, которые отвечают целым точкам $(x_1, \dots, x_r)$ r -мерного пространства, принадлежащим заданной совокупности Ω . Эта совокупность может состоять как из всех целых точек r -мерного пространства, так и из части этих точек, определяемой какими-либо условиями (например, часть, определяемая неравенствами $x_1 > 0, \dots, x_r > 0, x_1 \dots x_r \leq N$ или точками, координаты которых $x_1, \dots, x_r$ суть простые числа, и т. п.).

Из весьма разнообразных более частных видов этой в столь общей формулировке поставленной проблемы, получаемых при тех или иных ограничениях, налагаемых как на функцию $f(x_1, \dots, x_r)$, так и на совокупность Ω , мы выделим три достаточно большие и весьма важные для теории чисел проблемы. Эти проблемы имеют сходство не только в постановке вопроса; общим будет в большой мере и метод, который мы будем применять к их решению. Этот метод был найден мною в 1934 г.; первый опыт его систематического изложения был сделан мною в 1937 г. В дальнейшем этот метод подвергся значительной переработке, сильно его упростившей и улучшившей отдельные результаты. Новое усовершенствованное изложение моего метода и его применений к упомянутым трем проблемам и дается в настоящей книге.

Сейчас мы перейдем к более детальной характеристике трех упомянутых проблем. Попутно мы изложим краткую историю их возникновения, а также укажем те методы их решения, которые существовали до появления моего метода 1934 г.

1. Весьма важной является проблема распределения значений показательной функции

$$f(x_1, \dots, x_r) = e^{2\pi i F(x_1, \dots, x_r)},$$

где $F(x_1, \dots, x_r)$ — вещественная функция; наиболее же существенным в этой проблеме является установление верхней границы модуля суммы

$$S = \sum_{\Omega} f(x_1, \dots, x_r) = \sum_{\Omega} e^{2\pi i F(x_1, \dots, x_r)}$$

всех значений функции $f(x_1, \dots, x_r)$ в том случае, когда число T точек совокупности Ω конечно. Модуль каждого значения функции $f(x_1, \dots, x_r)$ равен 1, а число значений равно T . Поэтому для $|S|$ имеем «тривиальную оценку»

$$|S| \leq T,$$

причем знак равенства здесь имеет место тогда, и только тогда, когда все значения функции $F(x_1, \dots, x_r)$ суть целые числа. Однако для весьма широких классов функций $F(x_1, \dots, x_r)$ и совокупностей Ω оказывается возможным установить для $|S|$ верхнюю границу несравнимо более точную, чем указанная тривиальная, а именно границу вида

$$|S| \leq T\gamma,$$

где γ с возрастанием числа T точек совокупности Ω и возможным одновременным изменением вида функции $F(x_1, \dots, x_r)$ стремится к нулю. Этот множитель γ , отличающий такую границу от тривиальной, мы будем называть «понижающим множителем».

Остановимся подробно лишь на суммах вида

$$\sum e^{2\pi i F(x)},$$

где суммирование по x распространяется на все целые числа некоторого интервала $Q \leq x < Q + P$ или же на какую-либо часть этих целых чисел. Такие суммы суть частные случаи суммы S при $r=1$.

Наиболее хорошо изучены суммы вида

$$S = \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{\Phi(x)}{q}}; \quad \Phi(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x, \quad (1)$$

где $q > 0$ и $(a_n, \dots, a_1, q) = 1$. Первая нетривиальная сумма такого вида, а именно сумма

$$\sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{ax^2}{q}}; \quad (a, q) = 1,$$

была изучена еще Gauss'ом¹ и получила название „сумма Gauss'a“. Наиболее точный общий метод оценки сумм (1) дал Mordell²; для простого q он получил оценку

$$S \ll q^{1-\gamma}.$$

Для общего случая Л. К. Ниа³ получил оценку

$$S \ll q^{1+\varepsilon-\nu}.$$

При этом последняя оценка для неограниченного ряда случаев уже не может быть существенно улучшена; можно указать неограниченное количество значений q , для каждого из которых (лемма 4, гл. II настоящей книги) все суммы вида

$$S = \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{ax^n}{q}}; \quad (a, q)=1 \quad (2)$$

равны $q^{1-\nu}$.

Методами, близкими к тому, которым достигается оценка суммы (2), оцениваются также суммы

$$\sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{f(x)}{q}}; \quad \sum_{x=0}^{q-1} \chi(f(x)); \quad f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + b_1 x_0 + \dots + b_m x_0^m,$$

где $a_n, \dots, a_1, b_1, \dots, b_m$ — целые, x_0 определяется сравнением $xx_0 \equiv 1 \pmod{q}$ и χ — неглавный характер по модулю q . Аналогичными методами оценивается и ряд других сумм. На рассмотрении таких сумм в настоящей книге мы не останавливаемся^{4, 5, 6}.

Гораздо труднее поддаются оценке суммы более общего вида

$$S = \sum_{x=Q}^{Q+P-1} e^{2\pi i F(x)}; \quad F(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x, \quad (3)$$

где Q и P — целые, $P > 0$ и $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ — вещественные. Первый общий метод оценки таких сумм дал Н. Weyl; поэтому эти суммы носят название «суммы Weyl'я». Оценки, получаемые по методу Weyl'я, зависят от приближений посредством рациональных дробей к старшему коэффициенту многочлена $F(x)$. Пусть

$$\alpha_n = \frac{a}{q} + \frac{\theta t}{q^2}; \quad (a, q)=1, \quad q > 0, \quad t \geq 1.$$

Тогда путем применения метода Weyl'я получается оценка⁷

$$|S| \leq P\gamma; \quad \gamma \ll P^\varepsilon (P^{-1} + tq^{-1} + tP^{-n+1} + qP^{-n})^\rho; \quad \rho = \frac{1}{2n-1}. \quad (4)$$

Чтобы отчетливее представить себе степень точности этой оценки, рассмотрим частный случай: $q \leq P$, $t=1$. Путем несложных рассуждений на основании указанной оценки легко выводим

$$|S| \leq P\gamma'; \quad \gamma' \ll q^{-\rho'}; \quad \rho' = \rho - \varepsilon. \quad (5)$$

Число ε можно выбрать ничтожно малым в сравнении с ρ . Пусть теперь P беспредельно растет, одновременно, по некоторому закону, растет и q . Тогда понижающий множитель γ' будет стремиться к нулю, причем степень быстроты его стремления к нулю зависит от того, насколько велико ρ' . Но при возрастании n число ρ' , являясь величиною порядка 2^{-n} относительно n , весьма быстро стремится к нулю. Поэтому при больших n оценка (5) весьма груба.

В настоящей книге (глава VI) путем применения моего метода для сумм Вейля выведена новая оценка, на основании которой число ρ' в оценке (5) можно заменить числом

$$\rho_1 = \frac{1}{3(n-1)^2 \log 12n(n-1)}.$$

При возрастании n число ρ_1 , являясь величиною порядка $(n^2 \log n)^{-1}$ относительно n , стремится к нулю несравнимо медленнее, чем ρ' поэтому при больших n замена ρ' на ρ_1 делает оценку (5) несравнимо более точной.

Удачные варианты моего метода оценки сумм Вейля были даны van der Corput'ом (этот вариант был сообщен мне в письмах, присланных в июне 1936 г.) и Ю. В. Линником⁸ (1942 г.). Но здесь я ограничиваюсь лишь вариантом, близким к изложенным в моих работах.

К указанному частному случаю $q \leq P$, $t=1$ сумм Вейля относятся и суммы (2) (при $Q=0$, $P=q$, $F(x) = \frac{ax^n}{q}$), для неограниченного ряда которых, как мы отметили выше, имеет место равенство $S = q^{1-\nu} = qq^{-\nu}$. Последнее обстоятельство показывает, что в формуле (5) число ρ' уже не может быть заменено никаким числом большим $\nu = n^{-1}$, так как для неограниченного ряда сумм (2) такая оценка была бы неправильна.

Весьма правдоподобной является здесь гипотеза, что число ρ' в оценке (5) можно заменить числом $\nu - \varepsilon$. Эта гипотеза есть частный случай более общей гипотезы, состоящей в том, что число ρ в оценке (4) можно заменить числом ν . Доказательство последней гипотезы путем дальнейшего усовершенствования моего метода (или каким-либо иным путем) или же ее опровержение было бы весьма желательным.

Однако если бы даже такая гипотеза была доказана, то отсюда до вполне удовлетворительного решения проблемы об оценках сумм Вейля было бы еще чрезвычайно далеко. В этом нас убеждает следующее весьма простое исследование. Пусть s — какое-либо из чисел $1, \dots, n$ и пусть Q , P и все коэффициенты многочлена $F(x)$, кроме α_s , заданы. Пусть α_s возрастает от 0 до 1. Тогда сумма (3)

будет функцией от α_s . Обозначим эту функцию символом $S(\alpha_s)$. Находим

$$\int_0^1 |S(\alpha_s)|^2 d\alpha_s = \\ = \sum_{x_1=Q}^{Q+P-1} \sum_{x=Q}^{Q+P-1} e^{2\pi i (F(x_1) - F(x) - \alpha_s x_1^s + \alpha_s x^s)} \int_0^1 e^{2\pi i \alpha_s (x_1^s - x^s)} d\alpha_s = P, \quad (6)$$

потому что (лемма 4, гл. I) интеграл

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha_s (x_1^s - x^s)} d\alpha_s$$

равен 1, если $x_1 = x$, и равен нулю, если $x_1 \neq x$. Из равенства (6) при $0 < \lambda < 0.5$ уже нетрудно вывести, что для всех значений α_s интервала $0 \leq \alpha_s \leq 1$, кроме разве лишь лежащих в конечном числе неперекрывающихся интервалов с ничтожною общей длиной $\leq P^{2\lambda-1}$ (стремящейся к нулю при беспредельном возрастании P), справедлива оценка

$$|S(\alpha_s)|^2 \leq P^{2-2\lambda} + 2\varepsilon,$$

т. е. справедлива оценка

$$|S(\alpha_s)| \leq P^{1-\lambda} + \varepsilon. \quad (7)$$

Выражаясь более грубо, можно сказать: для «почти всех» сумм $S(\alpha_s)$ справедлива оценка (7).

Пользуясь результатами гл. VI, можно было бы вывести также и другие важные заключения относительно распределения значений модуля суммы (3). Например, можно доказать такую теорему: пусть $n > 11$ и пусть Q и P заданы. Обозначая сумму (3) символом $S(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$, для любой точки $(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$ n -мерного куба, определяемого неравенствами $0 \leq \alpha_n \leq 1, \dots, 0 \leq \alpha_1 \leq 1$, кроме разве лишь лежащих в конечном числе неперекрывающихся областей с общим объемом $\leq P^{-0.125n^2}$, справедлива оценка

$$|S(\alpha_n, \dots, \alpha_1)| \ll P^{0.975}.$$

Возможно более точное выяснение местоположения областей, содержащих точки $(\alpha_n, \dots, \alpha_1)$ с ненормально большими значениями $|S(\alpha_n, \dots, \alpha_1)|$, является важнейшей задачей в проблеме оценок сумм Вейля.

Методы, применимые к выводу оценок сумм Вейля, применимы и к выводу оценок сумм вида

$$S = \sum_{x=Q}^{Q+P-1} e^{2\pi i F(x)}, \quad (8)$$

где Q и P — целые, $P > 0$ и в интервале $Q \leq x \leq Q + P$ функция $F(x)$ n раз дифференцируема и удовлетворяет условию

$$\frac{1}{A} \leq \frac{F^{(n)}(x)}{n!} \leq \frac{c}{A},$$

где $A \geq 2$. Эта сумма имеет весьма важное применение при решении вопроса о распределении простых чисел⁹. В частном случае $n=2$, имеющем важнейшие приложения при решении вопроса о числе целых точек в данной плоской или пространственной области (например: область, определяемая неравенством $x^2 + y^2 \leq r^2$, область, определяемая неравенством $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$, и т. п.), метод оценки таких сумм был дан, независимо друг от друга, van der Corput'ом¹⁰ и мною¹¹, причем van der Corput показал, что при некоторых дополнительных ограничениях путем соединения с методом Weyl'я этот метод может быть несколько уточнен. Применяя метод Weyl'я, van der Corput дал также и оценку сумм (8) для общего случая¹².

В настоящей книге (гл. VI) применением моего метода при $n > 11$ и при условии $P \ll A \ll P^2 + 2$, для сумм (8) выведена новая оценка

$$S \ll P^{1-\rho}; \quad \rho = \frac{1}{3n^2 \log 125n}, \quad (9)$$

которая при больших n , примерно, в той же степени точнее оценки получаемой по методу Weyl'я. в какой это имело место и в отношении сумм Weyl'я.

Естественно возникает вопрос о дальнейшем уточнении оценки (9) суммы (8), т. е. вопрос о возможности заменить число ρ в оценке (9) возможно большим числом $\rho' > \rho$. Однако ввиду крайней общности ограничений, наложенных нами на сумму S , трудно в этом вопросе сделать какие-либо определенные гипотезы. Я думаю, что лучше всего здесь будет ограничиться лишь рассмотрением какого-либо важного частного примера. В качестве такого примера я рассматриваю сумму (ср. пример к теореме 2, б, гл. VI)

$$S(t) = \sum_{x=P_0+1}^{P_0+P} e^{ist \log x},$$

где P_0 и P — целые числа с условием $0.5P_0 \leq P \leq P_0$. t — любое число с условием $P_0^{n-2} \leq t \leq P_0^{n-1}$ и $\sigma = (-1)^{n+1}$. Здесь имеем

$$F(x) = \frac{\sigma t \log x}{2\pi}; \quad \frac{F^{(n)}(x)}{n!} = \frac{t}{2\pi n x^n}; \quad \frac{t}{2\pi n (3P)^n} \leq \frac{F^{(n)}(x)}{n!} \leq \frac{t}{2\pi n P^n}.$$

Поэтому, полагая

$$A = \frac{2\pi n (3P)^n}{t}; \quad l = 3^n,$$

будем иметь $P \ll A \ll P^2$ и, в интервале $P_0 + 1 \leq x \leq P_0 + P$,

$$\frac{1}{A} \leq \frac{F^{(n)}(x)}{n!} \leq \frac{1}{A};$$

следовательно, требования, наложенные нами на сумму (8), здесь удовлетворены. Далее имеем

$$\int_{P_0^{n-2}}^{P_0^{n-1}} |S(t)|^2 dt = \sum_{x_1=P_0+1}^{P_0+P} \sum_{x=P_0+1}^{P_0+P} \int_{P_0^{n-2}}^{P_0^{n-1}} e^{izt(\log x_1 - \log x)} dt.$$

Но интеграл

$$\int_{P_0^{n-2}}^{P_0^{n-1}} e^{izt(\log x_1 - \log x)} dt$$

равен $P_0^{n-1} - P_0^{n-2}$, если $x_1 = x$ и

$$\ll \frac{1}{|\log x_1 - \log x|},$$

если $x_1 \neq x$. Полагая в последнем случае $x_1 = x + u$, имеем

$$\log x_1 - \log x = \log \left(1 + \frac{u}{x}\right) \gg \frac{|u|}{P}; \quad \frac{1}{|\log x_1 - \log x|} \ll \frac{P}{|u|}.$$

Из сказанного легко выводим

$$\begin{aligned} \int_{P_0^{n-2}}^{P_0^{n-1}} |S(t)|^2 dt - P(P_0^{n-1} - P_0^{n-2}) &\ll P \sum_{u=1}^P \frac{P}{u} \ll P^2 \log P, \\ \int_{P_0^{n-2}}^{P_0^{n-1}} |S(t)|^2 dt &= P_0^n + O(P_0^{n-1} \log P). \end{aligned} \quad (10)$$

Равенство (10) показывает, что число ρ в оценке (9) уже не может быть заменено числом $\rho' > 0.5$. Кроме того, то же равенство показывает, что при $0 < \lambda < 0.5$ для всех значений t интервала $P_0^{n-2} \leq t \leq P_0^{n-1}$, кроме разве лишь лежащих в конечном числе неперекрывающихся интервалов с ничтожной по сравнению с $P_0^{n-1} - P_0^{n-2}$ общей длиной $\leq P^{n+2\lambda-2}$ (отношение которой к $P_0^{n-1} - P_0^{n-2}$ стремится к нулю при беспредельном возрастании P), справедлива оценка

$$|S(t)|^2 \ll P^{2-2\lambda},$$

т. е. оценка

$$|S(t)| \ll P^{1-\lambda}. \quad (11)$$

Выражаясь более грубо, можно сказать: для «почти всех» сумм $S(t)$ справедлива оценка (11).

В заключение остановимся на суммах вида

$$\sum e^{2\pi i F(x)}, \quad (12)$$

где $F(x)$ — вещественная функция и суммирование распространяется лишь на часть целых чисел интервала $Q \leq x < Q+P$. Те суммы, на которых мы остановим свое внимание, будут иметь $\gg P^{1-\varepsilon}$ слагаемых. При оценке такой суммы не следует думать, что оценка всегда получится хуже или не лучше той, которую мы получили бы, распространяя суммирование на все целые числа интервала $Q \leq x < Q+P$. Например, сумма, которую получим из суммы (2), заставляя x пробегать лишь числа интервала $0 \leq x < q$, взаимно простые с q , всегда $\ll \sqrt{q}$, тогда как сумма (2) для неограниченного числа значений q , как это было отмечено выше, может оказаться равной $q^{1-\nu}$.

Особенно интересным частным случаем сумм (12) являются суммы вида

$$\sum_{p \leq N} e^{2\pi i F(p)}, \quad (13)$$

где p пробегает простые числа. В настоящей книге (гл. IX) на простейшем случае суммы (13), при $F(p) = \alpha p$, показано, как проблема оценки таких сумм тривиально сводится к применению только моего метода. Это достигается применением тождества (или же некоторых обобщений этого тождества):

$$\Phi(1) + \sum_{H < p \leq N} \Phi(p) = \sum_{dm \leq N} \mu(d) \Phi(dm), \quad (14)$$

где H — любое число с условием $1 < H < \sqrt{N}$, d пробегает произведения простых чисел (включая «пустое произведение», равное 1), не превосходящих H , и m пробегает целые положительные числа. Тождество (14) — очень давно известное тождество; крайне элементарный вывод его покоится на идее решета Эратосфена. Тождеству (14) близко в некотором отношении и знаменитое тождество Эйлера (p пробегает все простые числа):

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \frac{1}{\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^s}}; \quad s = \sigma + it; \quad \sigma > 1, \quad (15)$$

которое, вместе с его обобщением на функции $L(s)$, легло впоследствии в основу теории распределения простых чисел, созданной трудами ¹³ Dirichlet, Riemann'a, Hadamard'a, Vallée Poussin'a, Hardy — Littlewood'a и др.

Именно, тождество (15) можно получить из тождества (14), полагая функцию $\Phi(m)$ равной m^{-s} и беспрестанно увеличивая сна-

чала число N , а затем и число H . Здесь следует отметить, что некоторое видоизменение идеи решета Эратосфена привело впоследствии также к известному «методу V. Brun'a¹⁴», давшему возможность решить ряд весьма тонких проблем теории распределения простых чисел.

2. С рассмотренной проблемой 1 самым тесным образом связана проблема распределения значений дробной части

$$f(x_1, \dots, x_r) = \{F(x_1, \dots, x_r)\}$$

вещественной функции $F(x_1, \dots, x_r)$. Как и в проблеме 1, мы ограничимся здесь лишь рассмотрением случая, когда число T точек совокупности Ω конечно. Каждое значение функции $f(x_1, \dots, x_r)$ лежит в интервале $0 \leq f(x_1, \dots, x_r) < 1$. Оказывается, что для весьма широких классов функций $F(x_1, \dots, x_r)$ и совокупностей Ω , независимо от того, каково число α интервала $0 < \alpha < 1$, можно достаточно точно приблизиться к этому α значениями функции $f(x_1, \dots, x_r)$; именно, можно показать, что расстояние α до ближайшего значения функции $f(x_1, \dots, x_r)$ не превосходит $T\gamma$, где множитель γ не зависит от α и с возрастанием числа T точек совокупности Ω и возможным одновременным изменением вида функции $F(x_1, \dots, x_r)$ стремится к нулю. Более того, в весьма общих случаях можно установить также большую равномерность распределения значений функции $f(x_1, \dots, x_r)$, выражающуюся в том, что независимо от того, каково число δ интервала $0 < \delta < 1$, число H значений $f(x_1, \dots, x_r)$, лежащих в интервале $0 \leq f(x_1, \dots, x_r) < \delta$, приблизительно пропорционально длине δ этого интервала; точнее

$$H = T\delta + O(T\gamma_1),$$

где γ_1 не зависит от δ и с возрастанием числа T точек совокупности Ω и возможным одновременным изменением вида функции $F(x_1, \dots, x_r)$ стремится к нулю. В дальнейшем мы остановимся подробно лишь на рассмотрении распределения значений функции вида $f(x) = \{F(x)\}$, отвечающих всем целым значениям x некоторого интервала $Q < x \leq Q + P$ или же какой-либо части этих целых чисел. Эта проблема есть частный случай указанной общей проблемы при $r=1$.

Наиболее просто решается вопрос о распределении значений функции

$$f(x) = \left\{ \frac{\Phi(x)}{q} \right\}; \quad \Phi(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x,$$

где $q > 1$, $(a_n, \dots, a_1, q) = 1$ и x пробегает полную систему вычетов по модулю q . Здесь, пользуясь указанною выше оценкою сумм (1) для числа H значений функции $f(x)$, лежащих в интервале $0 \leq f(x) < \delta$, можно легко вывести асимптотическую формулу

$$H = q\delta + O(q^1 + \epsilon - \nu).$$

Гораздо более трудной является проблема распределения значений функции

$$f(x) = \{F(x)\}; F(x) = \alpha_n x^n + \dots + \alpha_1 x, \quad (16)$$

где $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ — вещественные и, при целых Q и P , x пробегает целые числа интервала $Q \leq x < Q+P$. Первое общее решение этой проблемы было дано Н. Weyl'ем, который пользовался для этой цели своими оценками носящих его имя сумм (3). Однако результаты самого Weyl'я были весьма неточны. В дальнейшем указанная проблема получила развитие и обобщение главным образом в работах van der Corput'а и Koksma, пользовавшихся наиболее совершенными оценками сумм (3) и (8), полученными по методу Weyl'я. Наиболее точный результат, полученный применением метода Weyl'я в решении вопроса о распределении значений функции (16), можно сформулировать так: пусть

$$\alpha_n = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; (\alpha, q) = 1; 1 < q < P^n;$$

тогда число H чисел ряда

$$f(x) = \{F(x)\}; x = Q, \dots, Q+P-1,$$

лежащих в интервале $0 \leq f(x) < \delta$, выражается формулой ⁷

$$H = P\delta + R; R \ll P^\gamma; \gamma = P^\sigma (P^{-1} + q^{-1} + qP^{-n})^\sigma; \sigma = 2^{-n+1}.$$

В настоящей книге (гл. VIII) применением моего метода дается для R оценка, отличающаяся от указанной в той же степени, как оценки сумм Н. Weyl'я по моему методу отличаются от оценок этих сумм по методу самого Weyl'я.

Кроме того (гл. V), дается также весьма точная оценка расстояния любой правильной дроби α до ближайшего числа ряда

$$f(x) = \{F(x)\}; x = 1, \dots, [q_l^{2\lambda}],$$

где $F(x)$ имеет значение, указанное в (16), l — одно из чисел $n, \dots, 1$, $\lambda = \frac{1}{l}$ и q_l определяется равенством

$$\alpha_l = \frac{a_l}{q_l} + \frac{\theta}{q_l^2}; (\alpha_l, q_l) = 1, q_l > 0.$$

Наконец (гл. XI), на примере $F(p) = \alpha p$ показана применимость моего метода и к решению проблемы распределения значений функции

$$f(p) = \{F(p)\},$$

при условии, что p пробегает простые числа интервала $0 < p \leq N$.

3. Особый интерес представляют законы распределения значений функции $f(x_1, \dots, x_r)$, принимающей для точек $(x_1, \dots, x_r)$ совокупности Ω целочисленные значения. Здесь в отношении каждого данного целого N возникает вопрос: для скольких точек совокупности Ω это N будет служить значением функции $f(x_1, \dots, x_r)$; иными словами: каково будет число $I(N)$ решений неопределенного уравнения

$$f(x_1, \dots, x_r) = N. \quad (17)$$

В некоторых случаях здесь речь идет только об установлении неравенства $I(N) > 0$, показывающего, что уравнение (17) разрешимо; в других случаях оказывается возможным установить для $I(N)$ асимптотическую формулу; наконец, иногда вопрос ставится о разыскании точного выражения для $I(N)$, и т. д.

Более подробно мы остановимся сейчас на проблеме распределения значений функции

$$f(x_1, \dots, x_r) = x_1^n + \dots + x_r^n,$$

причем предполагается, что совокупность Ω состоит из точек $(x_1, \dots, x_r)$ r -мерного пространства с неотрицательными $x_1, \dots, x_r$.

Здесь тривиально доказывается, что при $r \leq n$ существует неограниченное число целых неотрицательных N , для которых уравнение (17), т. е. уравнение

$$x_1^n + \dots + x_r^n = N, \quad (18)$$

неразрешимо. Действительно, пусть N_0 — достаточно большое целое положительное число. Если для какого-либо $N \leq N_0$ имеет место равенство (18), то каждое из входящих туда $x_1, \dots, x_r$ находится среди следующих $\leq N_0^{1/r} + 1$ чисел

$$0, 1, \dots, [N_0^{1/r}]. \quad (19)$$

Поэтому, заставляя в сумме $x_1^n + \dots + x_r^n$ все $x_1, \dots, x_r$ независимо друг от друга пробегать числа (19), среди $[N_0^{1/r} + 1]^r$ значений этой суммы найдем все те числа $N \leq N_0$, для которых уравнение (18) разрешимо. При этом те N , для которых (18) допускает решение с неравными $x_1, \dots, x_r$, встретятся каждое не менее $r!$ раз (числа $x_1, \dots, x_r$ можно переставлять $r!$ различными способами). Число значений N , для которых (18) допускает решение с условием, что среди чисел $x_1, \dots, x_r$ имеются равные, будет $\ll N_0^{r(r-1)}$. Поэтому число K всех $N \leq N_0$, для которых уравнение (18) разрешимо, удовлетворяет условию

$$K < \frac{(N_0^{1/r} + 1)^r}{r!} + O(N_0^{r(r-1)}) < \frac{(N_0^{1/r} + 1)^r}{r!} + O(N_0^{1-r}) < 0.6N_0$$

(N_0 — достаточно большое). Значит, для более чем $0.4N_0$ чисел $N \leq N_0$ уравнение (18) неразрешимо, а этим и доказывается наше утверждение.

Каковы же значения r , при которых уравнение (18) разрешимо при всяком $N \geq 0$, или, по крайней мере, для всех $N \geq c_0$, если c_0 достаточно велико? Уже Лагранж¹⁵ показал, что уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = N$$

разрешимо в целых неотрицательных x_1, x_2, x_3, x_4 . А Waring в 1770 г. высказал утверждение, что и для всякого $n > 2$ существует такое $r = r(n)$, что для всякого целого $N \geq 0$ уравнение (18) разрешимо в целых неотрицательных $x_1, \dots, x_r$. Это утверждение получило название «проблемы Waring'a»; впервые оно было доказано D. Hilbert'ом в 1909 г. Правда метод, которым D. Hilbert достиг цели, носит несколько частный характер и весьма неточен (значения, получаемые для r , чрезвычайно велики); поэтому в настоящее время этот метод почти забыт.

Чтобы придать дальнейшему изложению большую отчетливость, введем в рассмотрение символ $G(n)$. Этим символом обозначим целое число со свойствами: существует некоторое c с условием, что для всякого целого $N \geq c$ уравнение (18) разрешимо при $r = G(n)$, но не существует никакого $c_1 > c$ с условием, что для всякого целого $N \geq c_1$ уравнение (18) разрешимо при $r < G(n)$. Из сказанного выше следует, что $G(n)$ существует и что, во всяком случае,

$$G(n) > n.$$

В 1919 г. Hardy и Littlewood разработали новый метод решения проблемы Waring'a, несравнимо более общий и точный, чем метод D. Hilbert'a. Эти ученые нашли верхнюю границу для $G(n)$ вида

$$G(n) \leq n2^{n-2}h, \quad (20)$$

где h при беспредельном возрастании n стремится к 1. Кроме того, для

$$r \geq (n-2)2^{n-1} + 5 \quad (21)$$

Hardy и Littlewood впервые вывели асимптотическую формулу¹⁶ для $I(N)$:

$$I(N) = \frac{(\Gamma(1+\nu))^r}{\Gamma(r\nu)} N^{r\nu-1} \mathfrak{E} + O(N^{r\nu-1-\epsilon}), \quad (22)$$

где $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(n, r, N)$ — «особый ряд», имеющий значение, которое указано в настоящей книге (гл. II). Hardy и Littlewood показали также, что при условии (21) будет $\mathfrak{E} \gg 1$. Самые последние уточнения, произведенные в методе Hardy и Littlewood'a ученым L. K. Hua¹⁷, позволяют заменить правые части неравенств (20) и (21) числом $2^n + 1$.

В настоящей книге (гл. IV) применением моего метода для $G(n)$ вместо (20) дана такая верхняя граница;

$$G(n) < 3n(\log n + 11).$$

Эта граница с возрастанием n растет как величина порядка $n \log n$ и, следовательно, в отношении порядка роста уже мало отличается от найденной выше нижней недостигаемой границы, равной n . Что же касается асимптотической формулы (22), то справедливость ее в настоящей книге (гл. VII) доказана лишь для

$$r \geq [10n^2 \log n].$$

Весьма правдоподобным является предположение, что путем надлежащего развития моего метода (а может быть и каким-либо новым путем) порядок нижней границы для r здесь может быть доведен до n .

Особый интерес представляет проблема распределения значений функции

$$f(p_1, \dots, p_r) = p_1^n + \dots + p_r^n,$$

где $p_1, \dots, p_r$ пробегают простые числа.

Еще в 1742 г. из переписки Goldbach'a с Euler'ом возникла так называемая «проблема Goldbach'a», представляющая собой гипотезу, что всякое целое число, превосходящее 1, есть сумма не более чем трех нечетных простых чисел. Согласно этой гипотезе четное число, превосходящее 2, должно представляться суммой двух простых чисел. В 1919 г. V. Brun, пытаясь решить последнюю задачу при помощи своего метода (о котором мы уже упоминали выше), показал, что всякое положительное четное число есть сумма двух слагаемых, каждое из которых является произведением не более чем 9 простых сомножителей. В дальнейшем число 9 было заменено числом 4, но доказать таким путем гипотезу Goldbach'a для четных чисел все же не удалось. В 1930 г. Л. Г. Шнирельман, присоединив к методу V. Brun'a свои соображения о плотности последовательности, состоящей из целых положительных чисел, показал¹⁸, что всякое целое число большее 1 есть сумма ограниченного числа r простых чисел; в дальнейшем это число r было доведено до 67.

В 1923 г. Hardy и Littlewood указали метод решения проблемы Goldbach'a для нечетных N , близкий по своей схеме к методу, созданному этими учеными для решения проблемы Waring'a. При этом Hardy и Littlewood условно вывели асимптотическую формулу для числа $I(N)$ представлений числа N в форме

$$N = p_1 + p_2 + p_3,$$

где p_1, p_2, p_3 — простые. Из этой асимптотической формулы справедливость гипотезы Goldbach'a для всех достаточно больших нечетных

N следует уже тривиально. Условность вывода Hardy и Littlewood'a заключалась в применении некоторых недоказанных теорем, относящихся к теории функций $L(s)$. Однако еще до начала 1937 г. был разработан метод (Page¹⁹, Estermann²⁰), позволивший выводить асимптотическую формулу для той части интеграла, представляющего $I(N)$, которая отвечает так называемым основным интервалам (см. гл. X настоящей книги). Этот метод применим не только к проблеме Goldbach'a, но также и к весьма общим аналогичным проблемам. В связи с этим уже к началу 1937 г. был решен ряд проблем: доказана представимость достаточно большого целого N в форме $N = p' + p'' + x^2$ (p' , p'' — простые, x — целое положительное); доказана представимость достаточно большого нечетного N в форме $N = p_1 + p_2 + p_3 p_4$ (p_1 , p_2 , p_3 , p_4 — простые) и т. д. Но для решения проблемы Goldbach'a в случае нечетного N требовались нетривиальные оценки сумм (13) с $F(p) = \alpha p$, т. е. сумм

$$\sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}$$

для всех значений α интервала $0 \leq \alpha \leq 1$, не принадлежащих к основным интервалам.

Найденный мною в 1937 г. общий метод оценки сумм (13) позволил не только решить, наконец, проблему Goldbach'a для нечетных чисел, но и открыл широкий путь к решению самых разнообразнейших других аналогичных проблем, например, проблемы представления целого числа N в форме (проблема Waring'a с простыми числами)

$$N = p_1^r + \dots + p_k^r.$$

В настоящей книге (гл. X) мы ограничиваемся лишь подробным решением проблемы Goldbach'a для нечетных чисел. Для более детального знакомства с вопросом мы отсылаем читателя к прекрасной специальной монографии Л. К. Нуса³.

В заключение я хочу выразить благодарность К. К. Марджанишвили, который тщательно прочел рукопись этой книги и обратил мое внимание на ряд имевшихся в рукописи недосмотров.

ГЛАВА I

Общие леммы.

В настоящей главе даются общие леммы, применяемые в дальнейших главах. Очевидные, а также общеизвестные леммы даются без доказательств. Оригинальными леммами, применение которых является наиболее существенной принципиальной особенностью метода настоящей книги, являются леммы 10, 15 и 16.

Лемма 1, а. Пусть r — целое положительное и $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r$ — вещественные. Тогда

$$(x_1 y_1 + \dots + x_r y_r)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_r^2)(y_1^2 + \dots + y_r^2).$$

Лемма 1, б. Пусть r — целое положительное, $m > 1$ и $x_1, \dots, x_r$ — неотрицательные вещественные. Тогда

$$(x_1 + \dots + x_r)^m \leq r^{m-1} (x_1^m + \dots + x_r^m); \quad r^r x_1 \dots x_r \leq (x_1 + \dots + x_r)^r.$$

Доказательство. Пусть h среднее арифметическое чисел $x_1, \dots, x_r$. Среди этих чисел имеется одно $\leq h$ и одно $\geq h$. Пусть именно $x_1 \leq h \leq x_2$. В интервале $0 \leq z \leq \min(h - x_1, x_2 - h)$ функция $(x_1 + z)^m + (x_2 - z)^m$ убывает, и потому

$$x_1^m + x_2^m \geq h^m + (x_1 + x_2 - h)^m.$$

Кроме того, из $(x_1 - h)(x_2 - h) \leq 0$ следует

$$x_1 x_2 \leq h(x_1 + x_2 - h).$$

Обозначая, в любом порядке следования, $x_1 + x_2 - h, x_3, \dots, x_r$ буквами $y_2, \dots, y_r$, убеждаемся, что

$$x_1^m + \dots + x_r^m \geq h^m + y_2^m + \dots + y_r^m; \quad x_1 \dots x_r \leq h y_2 \dots y_r,$$

где среднее арифметическое чисел $y_2, \dots, y_r$ опять равно h . Аналогичным путем находим

$$\begin{aligned} y_2^m + \dots + y_r^m &\geq h^m + z_3^m + \dots + z_r^m; & y_2 \dots y_r &\leq h z_3 \dots z_r; \\ \dots &\dots & \dots &\dots \\ u_{r-2}^m + u_{r-1}^m + u_r^m &\geq h^m + v_{r-1}^m + v_r^m; & u_{r-2} u_{r-1} u_r &\leq h v_{r-1} v_r; \\ v_{r-1}^m + v_r^m &\geq h^m + h^2; & v_{r-1} v_r &\leq h^2. \end{aligned}$$

Лемма 4. Пусть N — целое и

$$I = \int_0^1 e^{2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

Тогда

$$I = \begin{cases} 1, & \text{если } N=0, \\ 0 & \text{— во всех других случаях.} \end{cases}$$

Лемма 5. Пусть m — целое, превосходящее 1, a — целое и

$$S = \sum_{z=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{az}{m}}.$$

Тогда

$$S = \begin{cases} m, & \text{если } a \text{ делится на } m, \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 6. Пусть M и N целые, $M < N$, α — вещественное нецелое.

Тогда

$$\left| \sum_{x=M}^N e^{2\pi i \alpha x} \right| < \frac{1}{\sin \pi \alpha}.$$

Доказательство. Имеем

$$\left| \sum_{x=M}^N e^{2\pi i \alpha x} \right| = \left| \frac{e^{2\pi i \alpha (N+1)} - e^{2\pi i \alpha M}}{2ie^{\pi i \alpha} \sin \pi \alpha} \right| \leq \frac{1}{|\sin \pi \alpha|} = \frac{1}{\sin \pi(\alpha)} \leq \frac{1}{2(\alpha)}.$$

Лемма 7. Пусть $\tau \geq 1$. Тогда всякое вещественное α можно представить в форме

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad (a, q) = 1; \quad 0 < q \leq \tau; \quad |z| < \frac{1}{q\tau}.$$

Доказательство. Разложив α в непрерывную дробь, в качестве $\frac{a}{q}$ мы можем взять ту из подходящих дробей с знаменателями, не превосходящими τ , у которой знаменатель наибольший.

Лемма 8, а. Пусть f — целое, q' — целое.

$$\Phi(y) = \frac{ay + \psi(y)}{q}, \quad (a, q) = 1; \quad 0 < q' \leq q; \quad \lambda \geq 0,$$

y пробегает значения $y = f, \dots, f + q' - 1$, и для этих значений функция $\psi(y)$ имеет вещественные значения, разность между наибольшим и наименьшим из которых не превосходит λ .

а) Пусть $U \geq 1$,

$$\Omega = \sum_y \min \left(U, \frac{1}{2(\Phi(y))} \right); \quad \Omega_0 = \sum_y \min \left(U^2, \frac{1}{4(\Phi(y))^2} \right).$$

Тогда

$$\Omega < (\lambda + 3)U + q \log q; \quad \Omega_0 < (\lambda + 3)U^2 + 2qU.$$

б) Пусть $V \geq 1$ и T — число значений y , с условием

$$(\Phi(y)) \leq Vq^{-1}. \quad (1)$$

Тогда

$$T < \lambda + 2 + 2V.$$

Доказательство. Полагая $y = f + z$, находим

$$(\Phi(y)) = \left(\frac{az + \delta(z)}{q} \right); \quad \delta(z) = af + \psi(f + z).$$

При некотором B для всех $z = 0, \dots, q-1$ имеем $B \leq \delta(z) \leq B + \lambda$. Полагая $\beta = \{B\}$ и обозначая буквою ρ наименьший неотрицательный вычет $az + [B]$ по модулю q , получим

$$(\Phi(y)) = \left(\frac{\rho + \sigma(\rho)}{q} \right); \quad \beta \leq \sigma(\rho) \leq \beta + \lambda.$$

а) При $q \leq \lambda + 3$ утверждение очевидно; поэтому рассмотрим лишь случай $q > \lambda + 3$. Для значений ρ , отличных от $< \lambda + 3$ следующих: $\rho = q - [\beta + \lambda + 1], \dots, q-1, 0$, полагая $\rho = q - [B + \lambda + 1] - \rho_1$ и взяв $s = \rho$, если $\rho + \sigma(\rho) \leq \frac{q}{2}$, и $s = \rho_1$, если $\rho + \sigma(\rho) > \frac{q}{2}$, будем иметь

$$(\Phi(y)) \geq \frac{s}{q}; \quad \frac{1}{2(\Phi(y))} \leq \frac{q}{2s}; \quad \frac{1}{4(\Phi(y))^2} \leq \frac{q^2}{4s^2}.$$

Поэтому, полагая $\frac{q}{2U} = \tau$ при оценке Ω_0 , находим

$$\begin{aligned} \Omega &< (\lambda + 3)U + \sum_{s=1}^{[0.5(q-1)]} \frac{q}{s} < (\lambda + 3)U + \\ &+ q \sum_{s=1}^{[0.5(q-1)]} \log \frac{2s+1}{2s-1} < (\lambda + 3)U + q \log q. \\ \Omega_0 &< (\lambda + 3)U^2 + 2 \int_0^\tau U^2 ds + \int_\tau^\infty \frac{q^2}{2s^2} ds = (\lambda + 3)U^2 + 2qU. \end{aligned}$$

б) При $q \leq \lambda + 2 + 2V$ утверждение очевидно; при $q > \lambda + 2 + 2V$ это утверждение следует из того, что неравенство (1) возможно лишь в случаях

$$\rho = q - [\beta + \lambda + V], \dots, q-1; 0, \dots, [V].$$

Лемма 8, в. Пусть

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 2 < q \leq W, \quad 1 < W_0 \leq W,$$

$$S = \sum_{0 < z \leq W_0} \min \left(\frac{W}{z}, \frac{1}{2(\alpha z)} \right).$$

Тогда

$$S \leq (W_0 + 3.5q + 12Wq^{-1}) \log W.$$

Доказательство. Сумму S разобьем на слагаемые по схеме

$$S = \sum_{0 < z \leq 0.5q} + \sum_{0.5q < z \leq 1.5q} + \dots + \sum_{(s_0 - 0.5)q < z \leq W_0}.$$

Пусть для z , входящего в первое слагаемое, ρ обозначает наименьший неотрицательный вычет αz по модулю q . Тогда легко найдем

$$(\alpha z) = \left(\frac{\rho + 0.5\theta_0(\rho)}{q} \right).$$

Отсюда, полагая

$$s = \begin{cases} \rho, & \text{если } \rho \leq 0.5q \\ q - \rho, & \text{если } \rho > 0.5q, \end{cases}$$

выводим

$$(\alpha z) \geq \frac{s - 0.5}{q}.$$

Поэтому первое слагаемое указанной схемы будет

$$\leq q \sum_{0 < s \leq 0.5q} \frac{1}{s - 0.5} < 2q + q \sum_{1 < s \leq 0.5q} \log \frac{(s - 0.5) + 0.5}{(s - 0.5) - 0.5} < 3q \log q.$$

К остальным же слагаемым можно применить лемму 8, а, α . Получим

$$\begin{aligned} S &< 3q \log q + \sum_{s=1}^{s_0} \left(\frac{4W}{(s - 0.5)q} + q \log q \right) < \\ &< (3q + s_0 q) \log q + \frac{4W}{q} \left(2 + \sum_{s=2}^{s_0} \log \frac{(s - 0.5) + 0.5}{(s - 0.5) - 0.5} \right) \leq \\ &\leq (W_0 + 3.5q) \log W + \frac{12W}{q} \log W. \end{aligned}$$

Лемма 8, с. Пусть P, s, m — целые, $P > 1, s > 1, m > 0, k \geq 1$,

$$\alpha = \frac{am}{q} + \frac{\theta m}{q^2}, \quad (a, q) = 1; \quad 0 < q < P^s,$$

y пробегает $\leq P$ последовательных целых чисел, H — число значений y с условием

$$(\alpha y) \leq kP^{-s+1}. \quad (2)$$

Тогда

$$H < (3m + 2kqP^{-s+1})(Pq^{-1} + 1)$$

Доказательство. Пусть $(m, q) = d$, $m = m_1d$, $q = q_1d$. Находим

$$\alpha = \frac{am_1}{q_1} + \frac{\theta n_1}{q_1 q}.$$

Среди $\leq q_1$ последовательных значений y число значений с условием (2), согласно лемме 8, α , β , будет

$$\leq m_1 + 2 + 2kq_1P^{-s+1},$$

Поэтому

$$H < (m_1 + 2 + 2kq_1P^{-s+1})(Pq_1^{-1} + 1) \leq (3m + 2kqP^{-s+1})(Pq^{-1} + 1).$$

Лемма 9. Пусть N и Y — целые, $Y > 1$, $A \geq 2\beta \geq 2$, y пробегает значения $y = N, \dots, N + Y - 1$, и для этих значений функция $\Phi(y)$ принимает вещественные значения с условием, что при $y_2 - y_1 = 1$ имеем

$$\frac{1}{A} \leq \Phi(y_2) - \Phi(y_1) \leq \frac{\beta}{A}.$$

α) Пусть

$$U \geq 1, \quad S = \sum_{y=N}^{N+Y-1} \min \left(U^2, \frac{1}{4(\Phi(y))^2} \right).$$

Тогда

$$S \leq [Y\beta A^{-1} + 1](2U^2 + 2AU).$$

β) Пусть $W \geq 1$ и H — число значений y с условием

$$(\Phi(y)) \leq WA^{-1}.$$

Тогда

$$H < [Y\beta A^{-1} + 1](2W + 1).$$

Доказательство. При заданных вещественном α и целом h не может существовать более одного значения y , удовлетворяющего неравенствам

$$\alpha + h < \Phi(y) \leq \alpha + A^{-1} + h. \quad (3)$$

Поэтому число T значений y с условием

$$\alpha < \Phi(y) \leq \alpha + A^{-1} \pmod{1} \quad (4)$$

равно числу значений h , при которых разрешимы неравенства (3). Следовательно, $T \leq h_2 - h_1 + 1$, где h_2 — наибольшее и h_1 — наименьшее из таких h . Но, очевидно,

$$\Phi(N) \leq \alpha + A^{-1} + h_1; \quad \alpha + h_2 < \Phi(N + Y - 1),$$

откуда без труда выводим

$$h_2 - h_1 - A^{-1} < \Phi(N+Y-1) - \Phi(N) \leq \beta A^{-1}(Y-1);$$

$$T < \beta A^{-1}(Y-1) + A^{-1} + 1 \leq Y\beta A^{-1} + 1.$$

а) При $0 < \{\Phi(y)\} \leq 0.5$ в ряде $s=0, \dots, [0.5A]$ найдется такое s , что y удовлетворяет условию (4) с $\alpha = sA^{-1}$, а при $\{\Phi(y)\} > 0.5$ и при $\{\Phi(y)\} = 0$ в том же ряде найдется такое s , что y удовлетворяет условию (4) с $\alpha + A^{-1} = 1 - sA^{-1}$. При этом в обоих случаях будет $(\Phi(y)) \geq sA^{-1}$. Поэтому

$$S < [Y\beta A^{-1} + 1] \left(2U^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \min \left(2U^2, \frac{A^2}{2s^2} \right) \right) < [Y\beta A^{-1} + 1] (2U^2 + 2AU).$$

б) Утверждение следует из того, что интервал длиной $2WA^{-1}$ можно покрыть $[2W+1]$ интервалами длиной $< A^{-1}$.

Лемма 10, а. Пусть $(a, q) = 1$, $q > 1$,

$$S = \sum_{x=0}^{q-1} \sum_{y=0}^{q-1} \xi(x) \eta(y) e^{2\pi i \frac{a}{q} xy}; \quad \sum_{x=0}^{q-1} |\xi(x)|^2 = X_0; \quad \sum_{y=0}^{q-1} |\eta(y)|^2 = Y_0.$$

Тогда

$$|S| \leq \sqrt{X_0 Y_0 q}.$$

Доказательство. Имеем (лемма 1, а)

$$|S|^2 \leq X_0 \sum_{x=0}^{q-1} \left| \sum_{y=0}^{q-1} \eta(y) e^{2\pi i \frac{a}{q} xy} \right|^2 = X_0 \sum_{x=0}^{q-1} \sum_{y_1=0}^{q-1} \sum_{y=0}^{q-1} \eta(y_1) \overline{\eta(y)} e^{2\pi i \frac{a}{q} x(y_1-y)}.$$

При данных y_1 и y суммирование по x дает $|\eta(y)|^2$, если $y_1 = y$, и — нуль, если $y_1 \neq y$ (лемма 5). Поэтому $|S|^2 \leq X_0 Y_0 q$, $|S| \leq \sqrt{X_0 Y_0 q}$.

Лемма 10, б. Пусть M, X, N, Y — целые, $X > 0$, $Y > 0$,

$$\Phi(y) = \frac{ay + \psi(y)}{q}, \quad (a, q) = 1, \quad q > 0, \quad \lambda \geq 0.$$

y пробегает значения $y = N, \dots, N+Y-1$; для этих значений функция $\psi(y)$ имеет вещественные значения, и, когда y пробегает $\leq q$ каких-либо последовательных значений, разность между наибольшим и наименьшим из соответствующих значений $\psi(y)$ не превосходит λ . Пусть далее

$$S = \sum_{x=M}^{M+X-1} \sum_{y=N}^{N+Y-1} \xi(x) \eta(y) e^{2\pi i x \Phi(y)}; \quad \sum_{x=M}^{M+X-1} |\xi(x)|^2 = X_0; \quad \sum_{y=N}^{N+Y-1} |\eta(y)|^2 = Y_1;$$

$$\max |\eta(y)| = \eta.$$

Тогда

$$|S| < \sqrt{X_0 Y_1 \eta ((2\lambda + 6)X + 3q) [Yq^{-1} + 1]}.$$

Доказательство. Имеем (лемма 1, а)

$$\begin{aligned} |S|^2 &\leq X_0 \sum_{x=M}^{M+X-1} \left| \sum_{y=N}^{N+Y-1} \eta(y) e^{2\pi i x \Phi(y)} \right|^2 \leq \\ &\leq \frac{X_0}{X} \sum_{x_1=M}^{M+X-1} \sum_{x_2=-X+1}^{X-1} \left| \sum_{y=N}^{N+Y-1} \eta(y) e^{2\pi i (x_1+x_2) \Phi(y)} \right|^2, \end{aligned}$$

так как при каждом заданном $x = M, \dots, M+X-1$ число пар x_1, x_2 с условием $x_1+x_2 = x$ будет не менее X . Отсюда (лемма 6)

$$\begin{aligned} |S|^2 &\leq \frac{X_0}{X} \sum_{x_1=M}^{M+X-1} \sum_{x_2=-X+1}^{X-1} \sum_{y_1=N}^{N+Y-1} \sum_{y=N}^{N+Y-1} \eta(y_1) \overline{\eta(y)} e^{2\pi i (x_1+x_2) (\Phi(y_1)-\Phi(y))} \leq \\ &\leq \frac{X_0}{X} \sum_{y_1=N}^{N+Y-1} |\eta(y_1)| \sum_{y=N}^{N+Y-1} \eta \min \left(2X^2, \frac{1}{4(\Phi(y_1)-\Phi(y))^2} \right). \end{aligned}$$

Но значения y можно распределить среди $\leq [Yq^{-1}+1]$ совокупностей, каждая из которых состоит из $\leq q$ последовательных значений y . Применяя к каждой совокупности лемму 8, а (берем $\Phi(y) - \Phi(y_1)$ вместо $\Phi(y)$ и $X\sqrt{2}$ вместо U), получим

$$\begin{aligned} |S|^2 &< \frac{X_0}{X} Y_1 \eta ((\lambda+3) 2X^2 + 2qX\sqrt{2}) [Yq^{-1}+1] < \\ &< X_0 Y_1 \eta ((2\lambda+6)X + 3q) [Yq^{-1}+1]. \end{aligned}$$

Лемма 10, с. Пусть M, X, N, Y — целые, $X > 0, Y > 0, A \geq 2\beta \geq 2$. y пробегает значения $y = N, \dots, N+Y-1$ и для этих значений функция $\Phi(y)$ принимает вещественные значения с условием, что при $y_2 - y_1 = 1$ имеем

$$\frac{1}{A} \leq \Phi(y_2) - \Phi(y_1) \leq \frac{\beta}{A}.$$

Пусть далее

$$\begin{aligned} S &= \sum_{x=M}^{M+X-1} \sum_{y=N}^{N+Y-1} \xi(x) \eta(y) e^{2\pi i x \Phi(y)}; \quad \sum_{x=M}^{M+X-1} |\xi(x)|^2 = X_0; \\ &\quad \sum_{y=N}^{N+Y-1} |\eta(y)|^2 = Y_1; \quad \max |\eta(y)| = \eta. \end{aligned}$$

Тогда

$$|S| \leq \sqrt{X_0 Y_1 \eta (4X + 3A) [Y\beta A^{-1} + 1]}.$$

Доказательство. Имеем (ср. доказательство леммы 10, б)

$$|S|^2 \leq \frac{X_0}{X} \sum_{y_1=N}^{N+Y-1} |\eta(y_1)| \sum_{y=N}^{N+Y-1} \eta \min \left(2X^2, \frac{1}{4(\Phi(y_1)-\Phi(y))^2} \right),$$

откуда, применяя лемму 9, α , получим

$$|S|^2 < \frac{X_0}{X} Y_1 \eta (4X^2 + 2AX\sqrt{2}) [Y\beta A^{-1} + 1] < X_0 Y_1 \eta (4X + 3A) [Y\beta A^{-1} + 1].$$

Лемма 11 (Ряд Фурье). Пусть $F(x) = P(x) + iQ(x)$ — периодическая функция с периодом 1, причем интервал $0 < x \leq 1$ можно разбить на конечное число интервалов, внутри каждого из которых функции $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны и монотонны. Пусть далее в точках разрыва функции имеем

$$F(x) = \frac{F(x-0) + F(x+0)}{2}.$$

Тогда

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos 2\pi m x + b_m \sin 2\pi m x);$$

$$a_m = 2 \int_0^1 F(\xi) \cos 2\pi m \xi d\xi; \quad b_m = 2 \int_0^1 F(\xi) \sin 2\pi m \xi d\xi.$$

Лемма 12. Пусть r — целое, $r > 0$, α и β — вещественные,

$$0 < \Delta < 0.5; \quad \Delta \leq \beta - \alpha \leq 1 - \Delta.$$

Тогда существует периодическая функция $\psi(x)$ с периодом 1 и с условиями:

1. $\psi(x) = 1$ в интервале $\alpha + 0.5\Delta < x \leq \beta - 0.5\Delta$;
2. $0 \leq \psi(x) \leq 1$ в интервалах $\alpha - 0.5\Delta \leq x \leq \alpha + 0.5\Delta$;
и $\beta - 0.5\Delta \leq x \leq \beta + 0.5\Delta$;
3. $\psi(x) = 0$ в интервале $\beta + 0.5\Delta \leq x \leq 1 + \alpha - 0.5\Delta$;
4. $\psi(x)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\psi(x) = \beta - \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos 2\pi m x + b_m \sin 2\pi m x),$$

где имеем

$$|a_m| \leq \frac{2}{\pi m}, \quad |b_m| \leq \frac{2}{\pi m}, \quad \text{если } m \leq \frac{1}{\Delta};$$

$$|a_m| \leq 2c\Delta, \quad |b_m| \leq 2c\Delta, \quad \text{если } m \leq \frac{1}{\Delta}, \quad \beta - \alpha \leq c\Delta;$$

$$|a_m| < \frac{2}{\pi m} \left(\frac{r}{\pi m \Delta} \right)^r, \quad |b_m| < \frac{2}{\pi m} \left(\frac{r}{\pi m \Delta} \right)^r, \quad \text{если } m > \frac{1}{\Delta}.$$

Доказательство. Рассмотрим периодическую функцию $\psi_0(x)$, с периодом 1, определяемую равенствами

$$\psi_0(x) = 1 \text{ в интервале } \alpha < x < \beta;$$

$$\psi_0(x) = 0.5 \text{ при } x = \alpha \text{ и при } x = \beta;$$

$$\psi_0(x) = 0 \text{ в интервале } \beta < x < 1 + \alpha.$$

Разлагая эту функцию в ряд Фурье, получим

$$\begin{aligned}\psi_0(x) &= \frac{a_{0,0}}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m,0} \cos 2\pi m x + b_{m,0} \sin 2\pi m x); \\ a_{0,0} &= \int_{\alpha}^{\alpha+1} \psi_0(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} dx = \beta - \alpha; \\ a_{m,0} &= 2 \int_{\alpha}^{\beta} \cos 2\pi m x dx = \frac{\sin 2\pi m \beta - \sin 2\pi m \alpha}{\pi m}; \\ b_{m,0} &= 2 \int_{\alpha}^{\beta} \sin 2\pi m x dx = \frac{\cos 2\pi m \alpha - \cos 2\pi m \beta}{\pi m}.\end{aligned}$$

Полагая $\Delta = 2r\delta$, при $r = 1, \dots, r$, определим функции $\psi_1(x), \dots, \psi_r(x)$ равенством

$$\psi_r(x) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \psi_{r-1}(x+z) dz.$$

Методом индукции нетрудно показать, что

1. $\psi_r(x) = 1$ в интервале $\alpha + r\delta \leq x \leq \beta - r\delta$;
2. $0 \leq \psi_r(x) \leq 1$ в интервалах $\alpha - r\delta \leq x \leq \alpha + r\delta$
и $\beta - r\delta \leq x \leq \beta + r\delta$;
3. $\psi_r(x) = 0$ в интервале $\beta + r\delta \leq x \leq 1 + \alpha - r\delta$;
4. $\psi_r(x)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\psi_r(x) = \beta - \alpha + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{m,r} \cos 2\pi m x + b_{m,r} \sin 2\pi m x),$$

где имеем

$$\begin{aligned}a_{m,r} &= \frac{\sin 2\pi m \beta - \sin 2\pi m \alpha}{\pi m} \left(\frac{\sin 2\pi m \delta}{2\pi m \delta} \right)^r; \\ b_{m,r} &= \frac{\cos 2\pi m \alpha - \cos 2\pi m \beta}{\pi m} \left(\frac{\sin 2\pi m \delta}{2\pi m \delta} \right)^r.\end{aligned}$$

Действительно, пусть все эти четыре свойства верны для $\psi_{r-1}(x)$. Тогда справедливость первых трех из них для $\psi_r(x)$ устанавливается тривиально; справедливость же четвертого следует из

$$\begin{aligned}a_{m,r} &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \psi_{r-1}(\xi + z) dz \right) \cos 2\pi m \xi d\xi = \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} dz \int_0^1 \psi_{r-1}(\xi + z) \cos 2\pi m \xi d\xi = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^{\delta} dz \int_0^1 \psi_{r-1}(\xi) \cos 2\pi m (\xi - z) dz =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} dz (a_{m,\delta-1} \cos 2\pi m z + b_{m,\delta-1} \sin 2\pi m z) = a_{m,\delta-1} \frac{\sin 2\pi m \delta}{2\pi m \delta}$$

и из

$$b_{m,\delta} = b_{m,\delta-1} \frac{\sin 2\pi m \delta}{2\pi m \delta}.$$

Полагая $\psi(x) = \psi_r(x)$, мы и убеждаемся в справедливости нашей леммы.

Лемма 13 (Лемма van der Corput'a). Пусть M и M_1 — целые, $M < M_1$ и в интервале $M \leq x \leq M_1$ задана дважды дифференцируемая вещественная функция $f(x)$ с условиями

$$0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}; \quad f''(x) \geq 0.$$

Тогда, беря одновременно знаки $+$ или же знаки $-$, имеем

$$\sum_{x=M}^{M_1} e^{\pm 2\pi i f(x)} = \int_M^{M_1} e^{\pm 2\pi i f(x)} dx + 2\theta.$$

Доказательство. Рассмотрим лишь случай знаков $+$, так как к этому случаю тривиально сводится и случай знаков $-$. Применяя лемму 11 к периодической функции $F(\xi)$ с периодом 1, определяемой в интервале $0 < x < 1$ равенством

$$F(\xi) = e^{2\pi i f(x+\xi)},$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{e^{2\pi i f(x)} + e^{2\pi i f(x+1)}}{2} - \int_0^1 e^{2\pi i f(x+\xi)} d\xi = \frac{e^{2\pi i f(x)} + e^{2\pi i f(x+1)}}{2} - \frac{a_x}{2} = \\ & = \sum_{m=1}^{\infty} a_m = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 e^{2\pi i f(x+\xi)} (e^{2\pi i m \xi} + e^{-2\pi i m \xi}) d\xi = \\ & = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \int_0^1 (e^{2\pi i m \xi} - e^{-2\pi i m \xi}) e^{2\pi i f(x+\xi)} f'(x+\xi) d\xi, \end{aligned}$$

откуда, суммируя по всем $x = M, \dots, M_1 - 1$, выводим

$$\begin{aligned} & \sum_{x=M}^{M_1} e^{2\pi i f(x)} - \frac{1}{2} e^{2\pi i f(M)} - \frac{1}{2} e^{2\pi i f(M_1)} - \int_M^{M_1} e^{2\pi i f(x)} dx = \\ & = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} U_m; \quad U_m = \int_M^{M_1} (e^{2\pi i m x} - e^{-2\pi i m x}) e^{2\pi i f(x)} f'(x) dx. \end{aligned}$$

Но имеем

$$U_m = \frac{1}{2\pi i} \int_M^M \frac{f'(x)}{m + f'(x)} de^{2\pi i(m x + f(x))} + \frac{1}{2\pi i} \int_M^M \frac{f'(x)}{m - f'(x)} de^{2\pi i(-m x + f(x))},$$

откуда, согласно второй теореме о среднем значении (теорема о среднем значении применяется отдельно к вещественным и к мнимым частям интегралов), получим

$$U_m \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{0.5}{m + 0.5} \sqrt{8} + \frac{0.5}{m - 0.5} \sqrt{8} \right) = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \left(\frac{m}{2m - 1} - \frac{m}{2m + 1} \right).$$

Поэтому

$$\left| \sum_{x=M}^{M_1} e^{2\pi i f(x)} - \int_M^{M_1} e^{2\pi i f(x)} dx \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m - 1} - \frac{1}{2m + 1} \right) < 2.$$

Лемма 14, а. Пусть $P \geq 1$, z — вещественное,

$$I = \int_0^P e^{2\pi i z x^n} dx.$$

Тогда имеем

$$|I| \leq Z; \quad Z = \begin{cases} P, & \text{если } |z| \leq P^{-n} \\ \sqrt{2}|z|^{-\nu}, & \text{если } |z| > P^{-n}. \end{cases}$$

Доказательство. Случай $|z| \leq P^{-n}$ очевиден; поэтому рассмотрим лишь случай $|z| > P^{-n}$. При этом будем предполагать $z > 0$, так как замена в подинтегральном выражении i на $-i$ не меняет модуля интеграла

Вводя подстановку $2zx^n = u$, получим

$$I = U + iV; \quad U = \int_0^\sigma \psi(u) \cos \pi u du; \quad V = \int_0^\sigma \psi(u) \sin \pi u du,$$

$$\sigma = 2zP^n; \quad \psi(u) = \frac{u^{\nu-1}}{(2z)^\nu}; \quad \sigma > 2.$$

Полагая $k = [\sigma + 0.5]$ и разбивая интервал интегрирования на интервалы $0 \leq u \leq 0.5$; $0.5 \leq u \leq 1.5$; $1.5 \leq u \leq 2.5$; ...; $k - 0.5 \leq u \leq \sigma$, разобьем U на сумму интегралов

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_k.$$

Так как $\psi(u)$ в интервале $0 < u \leq \sigma$ убывает, нетрудно сообразить,

что $U_1 + U_2 + \dots + U_k$ есть знакопеременный ряд, члены которого численно убывают, причем $U_0 > 0$, $U_1 < 0$. Поэтому

$$|U| \leq \min(U_0, -U_1) \leq \int_0^1 \psi(u) du = (2z)^{-\nu}.$$

Аналогичным путем найдем

$$|V| \leq (2z)^{-\nu}.$$

Поэтому будем иметь

$$|I| \leq \sqrt{(2z)^{-2\nu} + (2r)^{-\nu}} < \sqrt{2} z^{-\nu}.$$

Лемма 14, б. Пусть $N \geq 2$, $\log N = r$, z — вещественное,

$$I(z) = \int_{\frac{1}{2}}^N \frac{e^{2\pi i z x}}{x} dx; \quad J(z) = \int_{\frac{1}{2}}^N \frac{e^{2\pi i z x}}{\log x} dx.$$

Тогда имеем

$$I(z) \leq Z, \quad J(z) \ll Z; \quad Z = \begin{cases} Nr^{-1}, & \text{если } |z| \leq N^{-1} \\ |z|^{-1} r^{-1}, & \text{если } N^{-1} < |z| \leq N^{-0.5}. \end{cases}$$

Доказательство. Для интеграла $I(z)$ оба случая тривиальны. Для интеграла $J(z)$ случай $|z| \leq N^{-1}$ также тривиален; поэтому рассмотрим лишь случай $N^{-1} < |z| \leq N^{-0.5}$, причем достаточно предположить $z > 0$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 14, а, найдем (подстановка $2zx = u$)

$$J(z) = U + iV; \quad U = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \psi(u) \cos \pi u du; \quad V = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \psi(u) \sin \pi u du;$$

$$\sigma_0 = 4z, \quad \sigma = 2Nz; \quad \psi(u) = \frac{1}{2z \log \frac{u}{2z}}.$$

$$|U| \leq \int_{\sigma_0}^{\sigma_0+1} \psi(u) du = \int_{\frac{1}{2}}^{2+(2z)^{-1}} \frac{dx}{\log x} \ll \frac{2 + (2z)^{-1}}{\log(2 + (2z)^{-1})} \ll z^{-1} r^{-1}; \quad V \ll z^{-1} r^{-1}.$$

Лемма 15. Пусть $h, \dots, l$ и k — постоянные целые,

$$0 < h < \dots < l < n, \quad k > 1,$$

$$M \geq 1, \quad p > 1; \quad p_t = \left[p^{(1-\nu)^{t-1}} \right]; \quad t = 1, \dots, k$$

и каждому t отвечают свои системы

$$(U_{t,h}, \dots, U_{t,l}, U_{t,n}),$$

Применяя к левой части равенства (4) формулу Лагранжа последовательно ко всем $\eta_1, \dots, \eta_s$, получим

$$\Delta_s \xi_s \pm \Delta'_s = 0;$$

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^s - 1 & \dots & x_s^s - 1 \end{vmatrix}; \quad \Delta'_s = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \theta_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^s - 1 & \dots & x_s^s - 1 & \frac{\theta_{s-1}}{s} p^{s-1} \end{vmatrix},$$

где $x_1, \dots, x_s$ удовлетворяют тем же неравенствам, какие в формулировке леммы указаны для $v_1, \dots, v_s$.

Далее находим

$$\Delta'_s = \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\theta_r p^r}{r+1} U_r,$$

где U_r есть коэффициент при x_s^r в разложении Δ_s по степеням x_s . Но $\Delta_s = \Delta_{s-1}(x_s - x_1) \dots (x_s - x_{s-1})$; следовательно,

$$U_r = D_{s-1-r} \Delta_{s-1},$$

где D_{s-1-r} есть сумма произведений чисел $-x_1, \dots, -x_{s-1}$, взятых по $s-1-r$, и, следовательно, $D_{s-1-r} \ll p^{s-1}$. Поэтому

$$\Delta'_s \ll p^{s-1} \Delta_{s-1}; \quad |\xi_s| \leq \frac{p^{s-1}}{(x_s - x_1) \dots (x_s - x_{s-1})} \ll H^{s-1}.$$

Таким образом, v_s при данных $v_{s+1}, \dots, v_n$ принимает $\ll H^{s-1}$ различных значений. Такое утверждение, очевидно, верно и для $s=1$. Поэтому для числа F систем значений $v_1, \dots, v_n$, при которых суммы $x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \dots, x_1 v_1^n + \dots + x_n v_n^n$ лежат в каких-либо определенных интервалах с длинами $1, p, \dots, p^{n-1}$, имеем

$$F \ll 1 \cdot H \dots H^{n-1} = H^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

откуда, в силу

$$\frac{p^{1-\nu}}{1} \frac{p^{2(1-\nu)}}{p} \dots \frac{p^{n(1-\nu)}}{p^{n-1}} = p^{\frac{n-1}{2}}$$

уже легко убедимся в справедливости леммы.

Лемма 17. Пусть k и l — постоянные целые положительные, $\tau_k(m)$ — число решений в целых положительных $x_1, \dots, x_k$ уравнения $x_1 \dots x_k = m$ (в частности $\tau_2(m) = \tau(m)$), E — постоянная Эйлера. Тогда

а. $\tau_k(m) \ll m^\varepsilon$;

б. $\sum_{0 < m \leq z} (\tau_k(m))^l \ll z (\log z + 1)^{k^l - 1}$;

в. $\sum_{0 < m \leq z} \tau(m) = z (\log z + 2E - 1) + O(\sqrt{z})$.

Доказательство. Элементарное доказательство неравенства (б) содержится в статье К. К. Марджанишвили, Доклады Акад. Наук СССР, 1939, т. XXII, № 7.

ГЛАВА II

Исследование особого ряда

В настоящей главе выводятся некоторые свойства «особого ряда» $\mathfrak{S}$, применяемого в дальнейших главах (главы IV и VII). Ряд $\mathfrak{S}$ впервые был указан и исследован Hardy—Littlewood'ом.

Специальные обозначения. В настоящей главе считаем $n \geq 3$ и применяем следующие обозначения:

При $(a, q) = 1$, $q > 0$ полагаем

$$S_{a, q} = \sum_{x=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{a}{q} x^n}. \quad (1)$$

При целом $q > 0$, целом N и постоянном целом положительном r символом $M(q) = M(q, N, r)$ обозначаем число решений сравнения

$$x_1^n + \dots + x_r^n \equiv N \pmod{q},$$

когда $x_1, \dots, x_r$ независимо друг от друга пробегает полные системы вычетов по модулю q . Кроме того, заставляя a пробегать приведенную систему вычетов по модулю q , полагаем

$$A(q) = A(q, N, r) = q^{-r} \sum_a S_{a, q}^r e^{-2\pi i \frac{a}{q} N}. \quad (2)$$

Полагаем (в случае сходимости бесконечного ряда)

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(N, r) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q, N, r). \quad (3)$$

Буквою p обозначаем простое число. Известно, что при $p > 2$ существует число g , при всяком целом $s > 0$ принадлежащее по модулю p^s показателю $\varphi(p^s)$, и всякое число приведенной системы вычетов по модулю p^s при единственном неотрицательном $b < \varphi(p^s)$ будет $\equiv g^b \pmod{p^s}$. При $p=2$ существует число g , при всяком целом $s > 1$ принадлежащее по модулю 2^s показателю $2^{-1}\varphi(2^s)$, и всякое число вида $4m+1$ приведенной системы вычетов по модулю 2^s при единственном неотрицательном $b < 2^{-1}\varphi(2^s)$ будет $\equiv g^b \pmod{2^s}$.

Буквою τ обозначаем показатель, с которым p входит в каноническое разложение числа n . Полагаем

$$\begin{aligned}\gamma &= \tau + 1, & \text{при } p > 2; \\ \gamma &= \tau + 2, & \text{при } p = 2.\end{aligned}$$

Полагаем (в случае сходимости бесконечного ряда)

$$\psi(p) = \psi(p, N, r) = \sum_{s=0}^{\infty} A(p^s, N, r). \quad (4)$$

Лемма 1. При $q_1, \dots, q_k$ попарно простых, определяя Q_s равенством

$$Q_s = q_1 \dots q_k q_s^{-1},$$

будем иметь

$$S_{a_1, q_1} \dots S_{a_k, q_k} = S_{a_1 Q_1 + \dots + a_k Q_k, q_1 \dots q_k}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}S_{a_1, q_1} \dots S_{a_k, q_k} &= \sum_{x_1=0}^{q_1-1} \dots \sum_{x_k=0}^{q_k-1} e^{2\pi i \left(\frac{a_1}{q_1} + \dots + \frac{a_k}{q_k} \right) (Q_1 x_1 + \dots + Q_k x_k)^n} = \\ &= \sum_{x_1=0}^{q_1-1} \dots \sum_{x_k=0}^{q_k-1} e^{2\pi i \frac{a_1 Q_1 + \dots + a_k Q_k}{q_1 \dots q_k} (Q_1 x_1 + \dots + Q_k x_k)^n},\end{aligned}$$

что доказывает лемму, так как $Q_1 x_1 + \dots + Q_k x_k$ пробегает полную систему вычетов по модулю $q_1 \dots q_k$.

Лемма 2. При $q_1, \dots, q_k$ попарно простых имеем

$$A(q_1) \dots A(q_k) = A(q_1 \dots q_k).$$

Доказательство. Заставляя $a_1, \dots, a_k$ пробегать приведенные системы вычетов по модулям $q_1, \dots, q_k$, имеем (лемма 1)

$$\begin{aligned}A(q_1) \dots A(q_k) &= (q_1 \dots q_k)^{-r} \sum_{a_1} \dots \sum_{a_k} (S_{a_1, q_1} \dots S_{a_k, q_k})^r e^{-2\pi i \left(\frac{a_1}{q_1} + \dots + \frac{a_k}{q_k} \right) N} = \\ &= (q_1 \dots q_k)^{-r} \sum_{a_1} \dots \sum_{a_k} S_{a_1 Q_1 + \dots + a_k Q_k, q_1 \dots q_k}^r e^{-2\pi i \frac{a_1 Q_1 + \dots + a_k Q_k}{q_1 \dots q_k} N},\end{aligned}$$

что и доказывает лемму, так как $a_1 Q_1 + \dots + a_k Q_k$ пробегает приведенную систему вычетов по модулю $q_1 \dots q_k$.

Лемма 3. Имеем

$$|S_{a, p}| \leq (\delta - 1) \sqrt{p}; \quad \delta = (n, p - 1).$$

Доказательство. Известно, что при $(z, p) = 1$ сравнение $x^n \equiv z \pmod{p}$ разрешимо тогда, и только тогда, когда $\text{ind } z$ кратен δ , причем в слу-

чае разрешимости это сравнение имеет δ решений. Поэтому в случае $\delta=1$ имеем (лемма 5, гл. I) $S_{a,p}=0$; в случае же $\delta>1$ находим

$$|S_{a,p}| = \left| 1 + \sum_{m=0}^{\delta-1} \sum_{z=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{m \operatorname{ind} z}{\delta}} e^{2\pi i \frac{az}{p}} \right| = \left| \sum_{m=1}^{\delta-1} \sum_{z=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{m \operatorname{ind} z}{\delta}} e^{2\pi i \frac{az}{p}} \right| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(\delta-1) \sum_{m=1}^{\delta-1} \sum_{z_1=1}^{p-1} \sum_{z=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{m (\operatorname{ind} z_1 - \operatorname{ind} z)}{\delta}} e^{2\pi i \frac{a(z_1 - z)}{p}}},$$

откуда, собирая при каждом $t=1, \dots, p-1$ вместе слагаемые входящей под знак корня суммы, с условием

$$z_1 \equiv tz \pmod{p},$$

получим

$$|S_{a,p}| \leqslant \sqrt{(\delta-1) \sum_{m=1}^{\delta-1} \sum_{t=1}^{p-1} \sum_{z=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{m \operatorname{ind} t}{\delta}} e^{2\pi i \frac{a(t-1)z}{p}}} = \\ = \sqrt{(\delta-1) \sum_{m=1}^{\delta-1} \left(p-1 - \sum_{t=2}^{p-1} e^{2\pi i \frac{m \operatorname{ind} t}{\delta}} \right)} = \\ = \sqrt{(\delta-1) \sum_{m=1}^{\delta-1} p} = (\delta-1) \sqrt{p}.$$

Лемма 4. Пусть α — целое, $1 < \alpha \leqslant n$, $(n, p) = 1$. Тогда

$$S_{a,p^\alpha} = p^{\alpha-1}.$$

Доказательство. Преобразовав сумму S_{a,p^α} подстановкой

$$x = p^{\alpha-1} \xi + z,$$

где, независимо друг от друга, ξ и z пробегают значения

$$\xi = 0, \dots, p-1; \quad z = 0, \dots, p^{\alpha-1} - 1,$$

приведем слагаемые этой суммы к виду

$$e^{2\pi i \left(\frac{az^n}{p^\alpha} + \frac{anz^{n-1}}{p} \xi \right)}.$$

Сумма слагаемых, отвечающих какому-либо z , не делящемуся на p , равна нулю. Поэтому сумма S_{a,p^α} равна сумме лишь тех своих слагаемых, в которых z кратно p , т. е. x кратно p . Но число таких слагаемых равно $p^{\alpha-1}$ и каждое из них равно 1.

Лемма 5. Пусть α — целое, $\alpha > n$. Тогда

$$S_{a,p^\alpha} = p^{\alpha-1} S_{a,p^{\alpha-n}}.$$

Доказательство. Преобразовав сумму S_{α, p^α} подстановкой (очевидно, $n \geq \tau + 2$)

$$x = p^{\alpha-\tau-1} \xi + z,$$

где, независимо друг от друга, ξ и z пробегают значения

$$\xi = 0, \dots, p^{\tau+1} - 1, \quad z = 0, \dots, p^{\alpha-\tau-1} - 1,$$

приведем слагаемые этой суммы к виду

$$e^{2\pi i \left(\frac{az^n}{p^\alpha} + \frac{anz^{n-1}}{p^{\tau+1}} \xi \right)}.$$

Сумма слагаемых, отвечающих какому-либо z , не делящемуся на p , равна нулю. Поэтому сумма S_{α, p^α} равна сумме лишь тех своих слагаемых, где z кратно p , т. е. где x кратно p . Отсюда

$$S_{\alpha, p^\alpha} = \sum_{x_1=0}^{p^{\alpha-1}-1} e^{2\pi i \frac{ap^n x_1^n}{p^\alpha}} = \frac{p^{\alpha-1}}{p^{\alpha-n}} \sum_{x_1=0}^{p^{\alpha-n}-1} e^{2\pi i \frac{ax_1^n}{p^{\alpha-n}}} = p^{n-1} S_{\alpha, p^{\alpha-n}}.$$

Лемма 6. Имеем

$$|S_{\alpha, q}| < n^{n^6} q^{1-\nu}, \quad A(q) \ll q^{1-\nu}.$$

Доказательство. Ограничимся доказательством лишь первого неравенства, так как второе следует из него тривиально. Пусть

$$q = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$$

— каноническое разложение числа q . Применим лемму 1, полагая $q_s = p_s^{\alpha_s}$ и определяя (что, как известно, всегда возможно) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ из сравнения $a \equiv a_1 Q_1 + \dots + a_k Q_k \pmod{q}$. Тогда, вводя символ $T_{\alpha, q}$ равенством $S_{\alpha, q} = q^{1-\nu} T_{\alpha, q}$, получим

$$T_{\alpha, q} = T_{\alpha_1, p_1^{\alpha_1}} \dots T_{\alpha_k, p_k^{\alpha_k}}.$$

Но при $1 \leq \alpha \leq n$, $(p, n) = p$ имеем

$$|T_{\alpha, p^\alpha}| = p^{-\alpha(1-\nu)} |S_{\alpha, p^\alpha}| \leq p^{\alpha\nu} \leq p \leq n;$$

при $\alpha=1$, $(p, n)=1$ — (лемма 3)

$$|T_{\alpha, p^\alpha}| < p^{-(1-\nu)} n \sqrt[p]{p} \leq n p^{-\frac{1}{6}};$$

при $1 < \alpha \leq n$, $(p, n)=1$ — (лемма 4)

$$|T_{\alpha, p^\alpha}| = p^{-\alpha(1-\nu)} p^{\alpha-1} = p^{\alpha\nu-1} \leq 1.$$

Таким образом, при $1 \leq \alpha \leq n$ имеем

$$|T_{\alpha, p^\alpha}| \leq \begin{cases} n, & \text{если } p \leq n^6 \\ 1, & \text{если } p > n^6 \end{cases}.$$

Эти последние неравенства справедливы и при $\alpha > n$, так как, согласно лемме 5, при $\alpha > n$ имеем

$$T_{a, p^\alpha} = p^{-\alpha(1-\nu)} p^{n-1} S_{a, p^{\alpha-n}} = T_{a, p^{\alpha-n}},$$

так что всякое T_{a, p^α} с $\alpha > n$ равно некоторому $T_{a, p^{\alpha_0}}$ с $\alpha_0 \leq n$. Из всего доказанного следует,

$$|T_{a, q}| \leq n^{n^2}, \quad |S_{a, q}| \leq n^{n^2} q^{1-\nu}.$$

Лемма 7. При целом $r \geq 4n$ и целом N сравнение

$$x_1^n + \dots + x_r^n \equiv N \pmod{p^r}$$

разрешимо с условием, что не все $x_1, \dots, x_r$ делятся на p .

Доказательство. Ввиду того, что $N = N - 1 + 1^n$, $0^n = 0$, достаточно доказать разрешимость сравнения

$$x_1^n + \dots + x_t^n \equiv N \pmod{p^r} \quad (5)$$

лишь для какого-либо одного $t \leq 4n - 1$, предполагая $(N, p) = 1$, $0 < N < p^r$.

Если $p = 2$, то $p^r = 2^{r+2} \leq 4n$. Сравнение (5) будет разрешимо при $t = N$, так как, например, можно положить

$$x_1 = \dots = x_t = 1.$$

Если $p > 2$, то будем рассматривать наименьшее $t = t(N)$, при котором разрешимо сравнение (5). Число N свяжем с числом v ряда $v = 0, \dots, n - 1$, являющимся наименьшим неотрицательным вычетом по модулю n числа b , определяемого сравнением $(s = \gamma)$

$$N \equiv g^b \pmod{p^r}.$$

Если N_1 связано с тем же v , что и N , то имеем

$$N_1 \equiv g^{b_1} \pmod{p^r}; \quad b_1 \equiv b \pmod{n}; \quad b_1 = b + kn;$$

$$N_1 \equiv N g^{-b+np} \pmod{p^r} g^{b_1} \equiv N z^n \pmod{p^r}; \quad z = g^{k+np} \pmod{p^r};$$

и из (5) будет следовать

$$(x_1 z)^n + \dots + (x_t z)^n \equiv N_1 \pmod{p^r}.$$

Этим доказывается, что $t(N_1) \leq t(N)$. Аналогично доказывается, что $t(N) \leq t(N_1)$. Следовательно, $t(N_1) = t(N)$. Таким образом, значениям N , связанному с одним и тем же v , отвечает одно и то же значение $t(N)$. Поэтому все рассматриваемые значения N можно распределить среди $m \leq n$ совокупностей, относя к одной совокупности значения с одинаковым значением $t(N)$.

Пусть наименьшие представители различных совокупностей, расположенные в порядке возрастания, будут

$$N_1, \dots, N_m.$$

Очевидно, $N_1=1$, так как 1 есть наименьший представитель своей совокупности и, вместе с тем, — наименьшее положительное целое число. При этом, так как $1=1^n$, имеем $t(N_1)=1=2-1$. Путем индукции докажем, что всегда $t(N_j) \leq 2j-1$. Пусть это неравенство верно для $N_1, \dots, N_h$. Число N_{h+1} есть наименьший представитель своей совокупности, причем одно из чисел $N_{h+1}-1$, $N_{h+1}-2$ не делится на p и, следовательно, принадлежит к одной из совокупностей с представителями $N_1, \dots, N_h$; поэтому $t(N_{h+1}) \leq 2h-1+2 \leq 2(h+1)-1$. В частности, имеем $t(N_m) \leq 2m-1 \leq 2n-1 < 4n-1$; это и доказывает лемму для случая $p > 2$.

Лемма 8. Если разрешимо сравнение

$$y^n \equiv a \pmod{p^\gamma}$$

с условием, что y не делится на p , то при целом $s > \gamma$ разрешимо и сравнение

$$x^n \equiv a \pmod{p^s}.$$

Доказательство. Всегда найдется целое неотрицательное b с условием

$$a \equiv y^n g^b \pmod{p^s}. \quad (6)$$

В частности, отсюда следует $g^b \equiv 1 \pmod{p^\gamma}$; поэтому при некотором целом неотрицательном b_1 имеем $b = p^\gamma (p-1) b_1$. Взяв любое целое неотрицательное k , мы можем показатель b в сравнении (6) заменить новым показателем

$$b + kp^{s-1}(p-1) = p^\gamma (p-1) (b_1 + kp^{s-1-\gamma}).$$

При этом, полагая $n = p^\gamma n_1$, ввиду $(n_1, p) = 1$, число k можно выбрать с условием, что выражение, стоящее в скобках, будет кратно n_1 . Тогда указанный новый показатель примет вид $p^\gamma n_1 h = nh$, где h — целое; сравнение же (6) преобразуется в

$$y^n g^{nh} \equiv a \pmod{p^s};$$

это и доказывает нашу лемму.

Лемма 9. Пусть s — целое, $s > \gamma$, $r \geq 4n$. Тогда

$$M(p^s, N, r) \geq p^{(s-\gamma)(r-1)}.$$

Доказательство. Согласно лемме 7, существуют целое y , не делящееся на p , и целые $y_2, \dots, y_r$ с условием

$$y^n \equiv N - y_2^n - \dots - y_r^n \pmod{p^r}.$$

Заставляя каждое x_j ряда $x_2, \dots, x_r$ пробегать, независимо от остальных, лишь те числа системы наименьших неотрицательных вычетов по модулю p^s , которые по модулю p^r сравнимы с y_j , получим $p^{(s-r)(r-1)}$ систем $x_2, \dots, x_r$. Для каждой такой системы справедливо сравнение

$$y^n \equiv N - x_2^n - \dots - x_r^n \pmod{p^r}.$$

Следовательно (лемма 8), разрешимо сравнение

$$x^n \equiv N - x_2^n - \dots - x_r^n \pmod{p^r};$$

это и доказывает нашу лемму.

Лемма 10. Пусть m — целое, $m > 0$. Тогда

$$\sum_{q \nmid m} A(q, N, r) = m^{-(r-1)} M(m, N, r).$$

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$\sum_{a=0}^{m-1} \sum_{x_1=0}^{m-1} \dots \sum_{x_r=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{a(x_1^n + \dots + x_r^n - N)}{m}}.$$

Эта сумма равна $mM(m)$. Собирая вместе слагаемые этой суммы с одним и тем же значением $m(a, m)^{-1} = q$ и заставляя a_q , при данном q , пробегать приведенную систему вычетов по модулю q , получим для той же суммы выражение

$$\sum_{q \nmid m} \sum_{a_q} \sum_{x_1=0}^{m-1} \dots \sum_{x_r=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{a_q(x_1^n + \dots + x_r^n - N)}{q}} = m^r \sum_{q \nmid m} A(q, N, r).$$

Лемма 11. При $r \geq 2n + 1$ ряды $\mathfrak{S}(N, r)$ и $\psi(p, N, r)$ абсолютно сходятся, причем

$$\mathfrak{S}(N, r) = \prod_p \psi(p, N, r),$$

где p пробегает все простые числа.

Доказательство. Абсолютная сходимость рядов $\mathfrak{S}(N, r)$ и $\psi(p, N, r)$ следует из леммы 6. Далее, при $\xi > 2$ имеем (лемма 2)

$$\prod_{p \leq \xi} \psi(p, N, r) = \prod_{p \leq \xi} \sum_{s=1}^{\infty} A(p^s, N, r) = \sum_{q \leq \xi} A(q, N, r) + \sum_{q > \xi}' A(q, N, r),$$

где второе слагаемое содержит лишь такие $A(q, N, r)$, которые отвечают значениям q , не делящимся ни на одно $p > \xi$. Ввиду абсолютной

сходимости $\mathfrak{S}(N, r)$ при $\xi \rightarrow \infty$ второе слагаемое стремится к нулю; первое же слагаемое стремится к $\mathfrak{S}(N, r)$.

Лемма 12. При $r \geq 4n$ имеем

$$\mathfrak{S}(N, r) \gg 1.$$

Доказательство. В силу лемм 9 и 10 при $s > \gamma$ имеем

$$\sum_{q \sim p^s} A(q, N, r) \geq p^{-s(r-1) + (s-\gamma)(r-1)} = p^{-\gamma(r-1)};$$

переходя к пределу при $s \rightarrow \infty$, получаем

$$\psi(p, N, r) \geq p^{-\gamma(r-1)}.$$

Кроме того, имеем (лемма 6)

$$\psi(p, N, r) - 1 = \sum_{s=1}^{\infty} A(p^s, N, r) \ll \sum_{s=1}^{\infty} p^{s(1-r)} \ll p^{-3}$$

и, следовательно, при достаточно большом $c_0 > 1$ для всякого $p \geq c_0$ будем иметь

$$\psi(p, N, r) \geq 1 - p^{-2}.$$

Поэтому, применяя лемму 11, находим

$$\mathfrak{S}(N, r) = \prod_{p < c_0} \psi(p, N, r) \prod_{p \geq c_0} \psi(p, N, r) \geq \prod_{p < c_0} p^{-\gamma(r-1)} \prod_{p \geq c_0} (1 - p^{-2}) \gg 1.$$

ГЛАВА III

Исследование одного определенного интеграла

В настоящей главе выводится необходимая в дальнейших главах (главы IV и VII) асимптотическая формула для некоторой части определенного интеграла, выражающего число представлений целого числа суммой заданного числа n -ых степеней целых положительных чисел.

Этот определенный интеграл принципиально близок к тому, которым в своих исследованиях выражали то же число представлений Hardy и Littlewood. Приводимые здесь рассуждения по основной идее совпадают с соответствующими рассуждениями Hardy и Littlewood'a.

Специальные обозначения. В настоящей главе считаем $n \geq 3$ и применяем следующие обозначения:

r — целое постоянное с условием $r \geq 2n + 1$;

N — целое с условием $N \geq c$, где c достаточно велико;

$P = [N^\nu]$, $\tau = 2nP^{n-1}$, N_0 и N_1 — целые с условиями $0.5N \leq N_0 \leq N$, $N_0 - P^{n-\nu} \leq N_1 \leq N_0$;

β — постоянное с условием $0.25 \leq \beta \leq 1 - \nu$.

Символ $W(N_1)$ обозначает число представлений числа N_1 в форме

$$N_1 = x_1^n + \dots + x_r^n$$

с целыми положительными $x_1, \dots, x_r$. Согласно лемме 4, гл. I, имеем

$$W(N_1) = \int_{-\tau-1}^{-\tau-1+1} L_\alpha e^{-2\pi i \alpha N_1} d\alpha; \quad L_\alpha = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i \alpha x^n}.$$

Интервалы, включающие все α с условиями

$$\alpha = \frac{a}{q} + z; \quad (a, q) = 1, \quad -\frac{1}{q\tau} \leq z \leq \frac{1}{q\tau}, \quad 0 < q \leq P^\beta, \quad 0 \leq a < q,$$

назовем основными; интервалы, остающиеся после выделения из интервала $-\tau^{-1} \leq \alpha \leq -\tau^{-1} + 1$ основных интервалов, назовем дополнительными. Нетрудно видеть, что основные интервалы, отвечаю-

щие различным парам значений a и q , не содержат общих значений α . Действительно, из

$$\frac{a}{q} + z = \frac{a_1}{q_1} + z_1, \quad \frac{a}{q} \geq \frac{a_1}{q_1}, \quad |z| \leq \frac{1}{q^\tau}, \quad |z_1| \leq \frac{1}{q_1^\tau}$$

следовало бы

$$\left| \frac{aq_1 - a_1q}{qq_1} \right| \leq \frac{2}{q^\tau}, \quad \frac{1}{qq_1} \leq \frac{2}{\tau}, \quad \frac{1}{P^2} < \frac{1}{3P^2}.$$

Часть интеграла $W(N_1)$, отвечающую основным интервалам, обозначим символом $W_0(N_1)$.

Кроме указанных обозначений, в рассуждениях настоящей главы будут применяться некоторые специальные обозначения главы II.

Асимптотическая формула для $W_0(N_0)$. Пусть α принадлежит основному интервалу, включающему дробь $\frac{a}{q}$. Сумму L_α преобразуем подстановкой $x = qt + s$, где s пробегает числа $s = 0, \dots, q-1$ и, при данном s , t пробегает целые числа интервала

$$-sq^{-1} < t \leq (P-s)q^{-1}. \quad (1)$$

Тогда, выражая α через z , получим

$$\begin{aligned} L_\alpha &= \sum_{s=0}^{q-1} \sum_t e^{2\pi i \left(\frac{as^n}{q} + z(qt+s)^n \right)} = \\ &= \sum_{s=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i as^n}{q}} D_s(z); D_s(z) = \sum_t e^{2\pi i z(qt+s)^n} \end{aligned}$$

Но в интервале (1) имеем

$$\frac{d}{dt} |z|(qt+s)^n \leq \frac{1}{2}.$$

Поэтому, согласно лемме 13, гл. I,

$$D_s = \int_{-sq^{-1}}^{(P-s)q^{-1}} e^{2\pi i z(qt+s)^n} dt + 4\theta' = \frac{1}{q} \int_0^P e^{2\pi i z x^n} dx + 4\theta'$$

и, следовательно,

$$L_\alpha = \psi \frac{S_{\alpha, q}}{q} + 4\theta'' q; \quad \psi = \int_0^P e^{2\pi i z x^n} dx. \quad (2)$$

Но в силу леммы 14, а, гл. I и леммы 6, гл. II имеем

$$\psi \frac{S_{a,q}}{q} \ll Zq^{-\nu}; \quad Z = \begin{cases} P, & \text{если } |z| \leq P^{-n} \\ |z|^{-\nu}, & \text{если } P^{-n} \leq |z|. \end{cases}$$

Очевидно, $Zq^{-\nu} > q$. Поэтому из (2) выводим

$$L_a^r = \left(\psi \frac{S_{a,q}}{q} \right)^r \ll (Zq^{-\nu})^{r-1} q \ll q^{-1} Z^{r-1}.$$

Но при $w > 0$ имеем $e^{2\pi i w} - 1 \ll w$; поэтому

$$L_a^r e^{-2\pi i \alpha N_1} = \psi^r \left(\frac{S_{a,q}}{q} \right)^r e^{-2\pi i \frac{a}{q} N_1 - 2\pi i z N_0} + O(q^{-1} Z^{r-1} + q^{-2-\nu} Z^r P^{n-\nu}).$$

Отсюда для части $H_{a,q}$ интеграла $W(N_1)$, отвечающей основному интервалу, включающему дробь $\frac{a}{q}$, получим выражение

$$H_{a,q} = R_q(N_0) \left(\frac{S_{a,q}}{q} \right)^r e^{-2\pi i \frac{a}{q} N_1} + F,$$

$$R_q(N_0) = \int_{-(q^\tau)^{-1}}^{(q^\tau)^{-1}} \psi^r e^{-2\pi i z N_0} dz, \quad F \ll \int_0^{(q^\tau)^{-1}} (q^{-1} Z^{r-1} + q^{-2-\nu} Z^r P^{n-\nu}) dz.$$

Далее легко находим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{S_{a,q}}{q} \right)^r \left(\int_{-\infty}^{-(q^\tau)^{-1}} \psi^r e^{-2\pi i z N_0} dz + \int_{(q^\tau)^{-1}}^{\infty} \psi^r e^{-2\pi i z N_0} dz \right) \ll \\ & \ll q^{-\nu r} \int_{(q^\tau)^{-1}}^{\infty} z^{-\nu r} dz \ll q^{-1} P^{r-n-1}, \\ & F \ll \int_0^{P^{-n}} (q^{-1} P^{r-1} + q^{-2-\nu} P^{r+n-\nu} z) dz + \int_{P^{-n}}^{\infty} (q^{-1} z^{-\nu(r-1)} + \\ & + q^{-2-\nu} z^{-\nu r+1} P^{n-\nu}) dz \ll q^{-1} P^{r-n-1} + q^{-2-\nu} P^{r-n-\nu}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$H_{a,q} = R(N_0) \left(\frac{S_{a,q}}{q} \right)^r e^{-2\pi i \frac{a}{q} N_1} + O(q^{-1} P^{r-n-1} + q^{-2-\nu} P^{r-n-\nu});$$

$$R(N_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^r e^{-2\pi i z N_0} dz.$$

Но, полагая $M = [0.5P^{n-\gamma}]$, имеем (применяем лемму 3, гл. I)

$$\begin{aligned}
 W(N_1) &= H_{0,1} + \int_{\tau^{-1}}^{-\tau^{-1}+1} L_{\alpha} e^{-2\pi i \alpha N_1} d\alpha = R(N_0) + \\
 &+ \int_{\tau^{-1}}^{-\tau^{-1}+1} L_{\alpha} e^{-2\pi i \alpha N_1} d\alpha + O(P^{r-n-\gamma}); \\
 \sum_{N'=1}^M \sum_{N''=1}^M W(N_0 - N' - N'') &= R(N_0) M^2 + O\left(\int_{\tau^{-1}}^{-\tau^{-1}+1} P^r \frac{d\alpha}{(\alpha)^2} + P^{r-n-\gamma} M^2\right); \\
 M^2 r \gamma T_r N_0^{r\gamma-1} &= R(N_0) M^2 + O(P^{r-n-\gamma} M^2); \\
 R(N_0) &= r \gamma T_r N_0^{r\gamma-1} + O(P^{r-n-\gamma}); \\
 H_{\alpha, q} &= r \gamma T_r N_0^{r\gamma-1} \left(\frac{S_{\alpha, q}}{q}\right)^z e^{-2\pi i \frac{\alpha}{q} N_1} + O(q^{-1} P^{r-n-1} + q^{-2-\gamma} P^{r-n-\gamma}).
 \end{aligned}$$

Просуммировав это равенство по всем α , отвечающим данному q , а затем по всем $q=1, \dots, [P^{\beta}]$, и полагая $N_1=N_0$, получим

$$W_0(N_0) = F_r N_0^{r\gamma-1} \sum_{0 < q \leq P^{\beta}} A(q, N_0, r) + O(P^{r-n-\gamma}); \quad F_r = \frac{\Gamma(1+\gamma)^r}{\Gamma(r\gamma)}. \quad (3)$$

Эта формула и являлась целью настоящей главы.

ГЛАВА IV

Оценка $G(n)$ в проблеме Варинга

В настоящей главе при $n \geq 3$ дается решение проблемы Waring'a, утверждавшего (1770 г.), что всякое целое положительное N может быть представлено в форме

$$N = x_1^n + \dots + x_r^n \quad (1)$$

с целыми положительными $x_1, \dots, x_r$ при условии, что r не превосходит числа, зависящего только от n , но не от N .

Обозначим символом $G(n)$ наименьшее r со свойствами: существует $c = c(n)$ с условием, что всякое целое $N \geq c$ представляется в форме (1) с $r = G(n)$, но не существует никакого c' с условием, что всякое целое $N \geq c'$ представляется в форме (1) с $r < G(n)$. Тогда результат настоящей главы более полно можно записать в форме

$$G(n) < n(3 \log n + 11). \quad (2)$$

Применяемый здесь метод дает возможность решать и более общие вопросы; например, вопрос о представлении достаточно большого целого N суммой значений многочлена

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x,$$

принимающего для целочисленных значений аргумента целочисленные значения, не делящиеся одновременно на какое-либо целое число, превосходящее 1. Но этих общих вопросов я здесь не рассматриваю.

Для доказательства неравенства (2) я рассматриваю определенный интеграл, сходный с тем, которым пользовались для решения проблемы Waring'a Hardy и Littlewood. Но в подинтегральное выражение я ввожу множители (суммы Q_α и S_α), позволяющие иначе оценивать часть интеграла, отвечающего дополнительным интервалам; в частности — заменить оценки, получаемые по методу Weyl'я, оценками, получаемыми из общих соображений метода настоящей книги.

Специальные обозначения. В настоящей главе считаем $n \geq 3$ и сохраняем обозначения $r, N, c, P, \tau, \beta, L_\alpha, W_0(N_0)$ главы III со следующим уточнением: $r = 2n + 1, \beta = 0.25$; указанное в этой главе деление интервала $-\tau^{-1} \leq \alpha \leq -\tau^{-1} + 1$ на основные и дополнительные интервалы также сохраняется.

Пусть, кроме того, $P_0 = [\sqrt{P}]$, v пробегает простые числа интервала $0.5P_0 \leq v \leq P_0$; V — число значений v , наконец, u и u_0 пробегают значения, о которых будет сказано дальше. Полагаем

$$I(N) = \int_{-\tau^{-1}}^{-\tau^{-1}+1} L'_\alpha Q_\alpha S_\alpha^2 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha; \quad Q_\alpha = \sum_v \sum_{u_0} e^{2\pi i \alpha v^n u_0}, \quad S_\alpha = \sum_u e^{2\pi i \alpha u};$$

$$k = \left\lceil \frac{\log 12 n}{-\log(1-v)} + 1 \right\rceil; \quad k_0 = \left\lceil \frac{\log 6 n}{-\log(1-v)} + 2 \right\rceil.$$

1. Числа u и числа u_0 . Положим

$$P_1 = [0.25 P]; \quad P_2 = [0.5 P_1^{-v}]; \quad \dots, \quad P_k = [0.5 P_{k-1}^{-v}].$$

Пусть ξ_s пробегает значения $\xi_s = P_s, \dots, 2P_s - 1$. Взяв какое-либо $s = 1, \dots, k$, положим

$$u_s = \xi_1^n + \dots + \xi_s^n$$

и рассмотрим совокупность (u_s') , состоящую из всех u_s и числа $(2P_1)^n$.

Методом индукции нетрудно показать, что числа совокупности (u_s') не выходят из пределов P_1^n и $(2P_1)^n$ и не равны между собою, причем разность между большим и меньшим из соседних по величине чисел больше nP_s^{n-1} .

Действительно, наше утверждение верно для совокупности (u_1') , так как она состоит из чисел

$$P_1^n, \dots, (2P_1 - 1)^n, (2P_1)^n.$$

Пусть теперь наше утверждение верно для совокупности (u_s') и пусть u' и u'' — два соседних по величине числа этой совокупности. Рассмотрим числа

$$u', u' + P_{s+1}^n, \dots, u' + (2P_{s+1} - 1)^n, u''. \quad (3)$$

Здесь имеем (c достаточно велико)

$$(u' + P_{s+1}^n) - u' = P_{s+1}^n > nP_{s+1}^{n-1};$$

$$(u' + (\xi_{s+1} + 1)^n) - (u' + \xi_{s+1}^n) > nP_{s+1}^{n-1} (\xi_{s+1} = P_{s+1}, \dots, 2P_{s+1} - 2);$$

$$u'' - (u' + (2P_{s+1} - 1)^n) > nP_{s+1}^{n-1} - (2P_{s+1})^n > nP_{s+1}^{n-1}.$$

Значит числа (3) не выходят из пределов u' и u'' и не равны между собою, причем разность между большим и меньшим из соседних по

величине чисел больше nP_s^{n-1} . Поэтому наше утверждение верно и для совокупности (u'_{s+1}) .

Замечая, что число значений u_k равно

$$P_1 \dots P_k \gg P^{1+(1-\nu)+\dots+(1-\nu)^{k-1}} = P^{n-n(1-\nu)^k} \gg P^{n-\frac{1}{12}},$$

и полагая $u = u_k$, на основании доказанного убедимся, что:

Все значения u лежат в интервале $(0.2P)^n < u < (0.5P)^n$, они не равны между собою и каждое из них есть сумма k слагаемых вида ξ^n , где ξ — целое положительное; наконец, для числа U этих значений имеем неравенство

$$U \gg P^{n-\frac{1}{12}}.$$

Повторяя аналогичные рассуждения, но с P_0 вместо P и с k_0 вместо k , и замечая, что

$$P_0^{n-n(1-\nu)^{k_0}} \gg P_0^{n-\frac{1-\nu}{6}},$$

образуем числа u_0 с условиями:

Все значения u_0 лежат в интервале $(0.2P_0)^n < u_0 < (0.5P_0)^n$, они не равны между собою, и каждое из них есть сумма k_0 слагаемых вида ξ_0^n , где ξ_0 — целое положительное; наконец, для числа U_0 этих значений имеем неравенство

$$U_0 \gg P_0^{n-\frac{1-\nu}{6}}.$$

2. Оценка Q_α на дополнительных интервалах. Согласно лемме 7, гл. I, всякое α интервала $-\tau^{-1} \leq \alpha \leq -\tau^{-1} + 1$ можно представить в форме

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad (a, q) = 1; \quad 0 < q \leq \sqrt{N}; \quad |z| < \frac{1}{q\sqrt{N}}. \quad (4)$$

Сначала оценим сумму Q_α для α , принадлежащего дополнительному интервалу, но представляемому в форме (4) с $q \leq P^{0.25}$. Тогда часть суммы Q_α , отвечающая, при данном $s=0, \dots, q-1$, значениям v вида $v = qt + s$, равна

$$\sum_{u_0} \sum_t e^{2\pi i u_0 \Phi(t)}; \quad \Phi(t) = \frac{as^n}{q} + z(qt + s)^n,$$

где t пробегает некоторые целые числа с условием

$$0.5P_0 \leq qt + s \leq P_0.$$

Но, с возрастанием t на 1, $\Phi(t)$ изменяется на некоторое число вида $nz(qt + q\theta + s)^{n-1}q$, модуль которого не выходит из пределов A^{-1} и $2^{n-1}A^{-1}$, где $A = (n|z|P_0^{n-1}q)^{-1}$. При этом в силу

$$\frac{1}{q^{\varepsilon}} \leq |z| \leq \frac{1}{qV\bar{N}}$$

имеем $P_0 \ll A \ll P_0^{n-1}$ и потому, согласно лемме 10, с, гл. I, имеем

$$Q_{\alpha} \ll q \sqrt{U_0 \frac{P_0}{q} P_0^n} = U_0 P_0 \sqrt{\frac{P_0^n}{U_0} \frac{q}{P_0}} \ll U_0 V P_0^{\frac{1-\nu}{12} - \frac{1}{4}} \log N.$$

Теперь оценим сумму Q_{α} для α , принадлежащего дополнительному интервалу, но представляемому в форме (4), с $q > P_0^{0.25}$. Число $\eta(y)$ решений сравнения $v^n \equiv y \pmod{q}$ удовлетворяет условию

$$\eta(y) \leq \left(\frac{P_0}{q} + 1 \right) q^{\varepsilon};$$

поэтому можно положить

$$Q_{\alpha} = \sum_{u_0} \sum_y \eta(y) e^{\frac{2\pi i u_0}{q} \frac{ay + \psi(y)}{q}}; \quad \psi(y) \ll 1.$$

Применяя лемму 10, b, гл. I, получим

$$\begin{aligned} Q_{\alpha} &\ll \sqrt{U_0 \left(\frac{P_0}{q} + 1 \right) q^{\varepsilon} P_0 P_0^n} \ll U_0 P_0 \sqrt{\frac{P_0^n}{U_0} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{P_0} \right) q^{0.5\varepsilon}} \ll \\ &\ll U_0 V P_0^{\frac{1-\nu}{12} - \frac{1}{4}} N^{\varepsilon}. \end{aligned}$$

3. Оценка $G(n)$. Оценим часть $I_1(N)$ интеграла $I(N)$, отвечающую дополнительным интервалам. Имеем

$$\begin{aligned} I_1(N) &\ll P^r U_0 V P_0^{\frac{1-\nu}{12} - \frac{1}{4}} N^{\varepsilon} \int_0^1 |S_{\alpha}|^2 d\alpha = \\ &= P^r U_0 V P_0^{\frac{1-\nu}{12} - \frac{1}{4}} N^{\varepsilon} \int_0^1 \left(\sum_u \sum_{u'''} e^{2\pi i \alpha (u - u''')} \right) d\alpha, \end{aligned}$$

где u''' пробегает те же значения, что и u . Отсюда

$$\begin{aligned} I_1(N) &\ll P^r U_0 V P_0^{\frac{1-\nu}{12} - \frac{1}{4}} N^{\varepsilon} U \ll P^r U_0 V P^{\frac{1-\nu}{24} - \frac{1}{8}} N^{\varepsilon} P^{-n} U^2 P^{\frac{1}{12}} \ll \\ &\ll P^{r-n} V U_0 U^2 P^{-\frac{\nu}{25}}. \end{aligned}$$

Далее, оценим часть $I_0(N)$ интеграла $I(N)$, отвечающую основным интервалам. Имеем

$$I_0(N) = \sum_{N_0} W_0(N_0); \quad N_0 = N - u_0 v^n - u - u''',$$

$$N_0 > N - (0.5 P_0)^n P_0^n - 2 (0.5 P)^n > 0.5 N.$$

Отсюда, применяя формулу (3) гл. III, выводим

$$I_0(N) = \sum_{N_0} N_0^{r\nu-1} \sum_{0 < q \leq P^{0.25}} A(q, N_0, r) + O(VU_0 U^2 P^{r-n-\nu}).$$

Далее, находим (лемма 6, гл. II)

$$\sum_{q > P^{0.25}} A(q, N_0, r) \ll P^{0.25};$$

поэтому

$$I_0(N_0) = \sum_{N_0} N_0^{r\nu-1} \mathfrak{S}(N_0, r) + O(VU_0 U^2 P^{r-n-\nu}),$$

$$I(N) \gg VU_0 U^2 N^{r\nu-1}.$$

Но $I(N)$ есть число представлений числа N в виде суммы некоторых $r + 2k + k_0$ слагаемых вида w^n , где w — целое положительное, причем

$$r + 2k + k_0 \leq \frac{2 \log 12n}{-\log(1-\nu)} + \frac{\log 6n}{-\log(1-\nu)} + 4 + 4n <$$

$$< (n - 0.5)(2 \log 12n + \log 6n) + 4n + 4 < n(3 \log n + 11);$$

Поэтому

$$G(n) < n(3 \log n + 11).$$

ГЛАВА V

Приближения дробными частями значений целого многочлена

В настоящей главе дается применение моего метода к вопросу о приближениях к данной правильной дроби дробными частями значений целого многочлена.

Применяемый здесь метод дает возможность решать и более общие аналогичные вопросы; например — вопрос о приближениях к данной правильной дроби дробными частями значений функции в известном смысле хорошо аппроксимируемой целым многочленом. Но этих общих вопросов я здесь не рассматриваю.

Специальные обозначения. В настоящей главе считаем $n > 4$ и применяем следующие обозначения:

$h, \dots, j$ вместе с n образуют g целых чисел с условием $0 < h < \dots < j < n$; $f(x) = a_h x^h + \dots + a_j x^j + a_n x^n$; $a_h, \dots, a_j, a_n$ — вещественные, l — одно из чисел $h, \dots, j, n$;

$$a_l = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}; \quad (a, q) = 1, \quad q \geq c_0,$$

где c_0 достаточно велико,

$$\gamma = \frac{1}{g}; \quad \lambda = \frac{1}{l}; \quad D = h + \dots + j + n; \quad \rho = \frac{\gamma \lambda \sigma}{4} \frac{\log D}{(\log D + 1) \log (D \log D + D)}$$

$$k = \left\lceil \frac{\log (D \log D + D)}{-\log (1 - \nu)} + 1 \right\rceil; \quad p = [q^\lambda]; \quad p_t = [p^{(1-\nu)^{t-1}}]; \quad t = 1, \dots, k;$$

$$M = q^{\rho(1+\varepsilon_1)}; \quad \Delta = q^{-\rho}; \quad \varkappa = [(k+1) g \varepsilon_1^{-1} + 1]; \quad \sigma = (1 - \nu)^k.$$

Выбрав (что всегда возможно) $c_1, \dots, c_g$ с условиями

$$c_1 < \dots < c_g, \quad \left| \begin{array}{c} c_1^{h-1} \dots c_g^{h-1} \\ \dots \dots \dots \\ c_1^{n-1} \dots c_g^{n-1} \end{array} \right| \geq 0$$

Поэтому

$$\Phi_t' \ll \frac{M^g}{m_{t,1} \dots m_{t,g}}.$$

Далее, наметив некоторые интервалы с длинами

$$Mp_t^{h(1-\nu)}, \dots, Mp_t^{n(1-\nu)},$$

оценим число Φ_t систем $(x_{t,1}, \dots, x_{t,g})$, при которых $U_{t,h}, \dots, U_{t,n}$ лежат соответственно в этих интервалах.

В силу

$$\frac{Mp_t^{h(1-\nu)}}{Mp_t^{h-1}} \dots \frac{Mp_t^{n(1-\nu)}}{Mp_t^{n-1}} = p_t^{g-\nu D}$$

будем иметь

$$\Phi_t \ll \frac{M^g p_t^{g-\nu D}}{m_{t,1} \dots m_{t,g}}.$$

Для чисел $U_{t,r}$ также имеем неравенство

$$U_{t,r} \ll Mp_t^r.$$

Для числа $\psi(z_h, \dots, z_n)$ решений системы

$$U_h = z_h, \dots, U_n = z_n,$$

согласно лемме 15, гл. I, будем иметь

$$\psi(z_h, \dots, z_n) \ll \Phi_1 \dots \Phi_k \ll \Phi; \quad \Phi = \frac{M^g k (p_1 \dots p_k)^{g-\nu D}}{m_{1,1} \dots m_{1,g} \dots m_{k,1} \dots m_{k,g}}. \quad (1)$$

Для чисел U_r также имеем неравенство

$$U_r \ll Mp^r. \quad (2)$$

2. Оценка основной суммы. Оценим сумму

$$T = \sum_{y=1}^p \left| \sum_0 e^{2\pi i (a_h y^h U_h + \dots + a_n y^n U_n)} \right|,$$

где $\sum_0$ обозначает сумму, распространенную на все G систем $(x_{1,1}, \dots, x_{1,g}, \dots, x_{k,1}, \dots, x_{k,g})$, т. е. на все G систем $(U_h, \dots, U_n)$. Находим

$$|T|^2 \ll p \sum_{y=1}^p \sum_0' \sum_0 e^{2\pi i (a_h y^h (U_h' - U_h) + \dots + a_n y^n (U_n' - U_n))},$$

где системы $(U_h', \dots, U_n')$ те же, что и системы $(U_h, \dots, U_n)$.

Обозначая символом $\psi(u_h, \dots, u_n)$ число решений системы неопределенных уравнений

$$U_h' - U_h = u_h, \dots, U_n' - U_n = u_n, \quad (3)$$

в силу (1), очевидно, имеем

$$\psi(u_h, \dots, u_n) \ll G\Phi.$$

Согласно (2) существуют $c^{(h)}, \dots, c^{(n)}$, с условием, что система (3) возможна лишь при $u_h, \dots, u_n$, лежащих соответственно в интервалах

$$-c^{(h)}Mp^h \leq u_h \leq c^{(h)}Mp^h, \dots, -c^{(n)}Mp^n \leq u_n \leq c^{(n)}Mp^n.$$

Заставляя $u_h, \dots, u_n$ пробегать целые числа этих интервалов, находим

$$\sum_{u_h} \dots \sum_{u_n} (\psi(u_h, \dots, u_n))^2 \ll G\Phi \sum_{u_h} \dots \sum_{u_n} \psi(u_h, \dots, u_n) = G^3\Phi.$$

На основании изложенного имеем (ср. доказательство леммы 10, б, гл. I)

$$|T|^2 \leq p \sum_{u_h} \dots \sum_{u_n} \psi(u_h, \dots, u_n) \sum_{y=1}^p e^{2\pi i(\alpha_h y^h u_h + \dots + \alpha_n y^n u_n)};$$

$$T^4 \ll \frac{p^3 G^3 \Phi}{Mp^l} \sum_{u_h} \dots \sum_{u_l'} \sum_{u_l} \dots \sum_{u_n} \left| \sum_{y=1}^p e^{2\pi i(\alpha_h y^h u_h + \dots + \alpha_{l'} y^{l'} u_{l'} + \dots + \alpha_n y^n u_n)} \right|,$$

где введено дополнительное переменное $u_{l'}$, пробегающее целые числа интервала

$$-2c^{(l)}Mp^l \leq u_{l'} \leq 2c^{(l)}Mp^l.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} T^4 &\ll p^2 G^3 \Phi M^{-1} p^{-l} M^{g-1} p^{D-l} \sum_{u_{l'}} \sum_{u_l} \sum_{y_1=1}^p \sum_{y_l=1}^p e^{2\pi i \alpha_{l'} y_{l'}^{l'} (u_{l'} + u_l)} \ll \\ &\ll G^3 \Phi M^{g-2} p^{D-2l+2} \sum_{y_1=1}^p \sum_{y_l=1}^p \min \left(M^2 p^{2l}, \frac{1}{4(\alpha_{l'}(y_{l'}^{l'} - y_l^{l'}))^2} \right). \end{aligned}$$

При заданном y_1 разность $y_{l'}^{l'} - y_l^{l'}$ пробегает некоторые целые числа, лежащие в интервале длиной q . Поэтому, согласно лемме 8, а, гл. I, имеем

$$\begin{aligned} T^4 &\ll G^3 \Phi M^{g-2} p^{D-2l+2} p (M^2 p^{2l} + Mp^l q) \ll G^3 \Phi M^g p^{D+3}; \\ \frac{T}{pG} &\ll (G^{-1} \Phi M^g p^{D-1})^{\frac{1}{4}} \ll \left(\frac{M^{g(k+1)} (p_1 \dots p_k)^{-\gamma D + g_{\epsilon}} p^{D-1}}{m_{1,1} \dots m_{1,g} \dots m_{k,1} \dots m_{k,g}} \right)^{\frac{1}{4}}; \end{aligned}$$

$$T \ll pG \frac{\frac{2g(k+1)}{4} - \frac{\lambda}{4} + \frac{\gamma \sigma D}{4} + \epsilon'}{q} \frac{1}{(m_{1,1} \dots m_{1,g} \dots m_{k,1} \dots m_{k,g})^{\frac{1}{4}}}.$$

Теорема. Существует $c=c(n)$ с условием, что при любом вещественном A можно удовлетворить системе неравенств

$$|f(z) - v - A| < cq^{-\sigma}; \quad 0 < z < q^{2\lambda}$$

целыми z и v .

Доказательство. Согласно лемме 12, гл. I, существует функция $\psi(z)$ с периодом 1 и свойствами $(\alpha + 0.5\Delta = A = \beta - 0.5\Delta)$:

1. $0 \leq \psi(z) \leq 1$ в интервале $A - \Delta \leq z \leq A + \Delta$;
2. $\psi(z) = 0$ в интервале $A + \Delta \leq z \leq 1 + A - \Delta$;
3. $\psi(z)$ разлагается в ряд Фурье вида

$$\psi(z) = \Delta + \psi_0(z), \quad \psi_0(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos 2\pi m z + B_m \sin 2\pi m z),$$

где $A_m \ll F(m)$, $B_m \ll F(m)$, причем

$$F(m) = \begin{cases} \Delta, & \text{если } m \leq \frac{1}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta^x m^{x+1}}, & \text{если } m > \frac{1}{\Delta} \end{cases}.$$

Рассмотрим сумму

$$H = \sum_{y=1}^P \left| \sum_{x_{1,1}} \psi_0(f(yx_{1,1})) \dots \sum_{x_{1,g}} \psi_0(f(yx_{1,g})) \dots \right. \\ \left. \dots \sum_{x_{k,1}} \psi_0(f(yx_{k,1})) \dots \sum_{x_{k,g}} \psi_0(f(yx_{k,g})) \right|.$$

Здесь имеем

$$\sum_{x_{t,s}} \psi_0(f(yx_{t,s})) \ll \sum_{m_{t,s}=1}^{\infty} F(m_{t,s}) \left| \sum_{x_{t,s}} e^{2\pi i m_{t,s} f(yx_{t,s})} \right|.$$

Поэтому

$$H \ll \sum_{m_{1,1}=1}^{\infty} \dots \sum_{m_{1,g}=1}^{\infty} \dots \sum_{m_{k,1}=1}^{\infty} \dots \sum_{m_{k,g}=1}^{\infty} F(m_{1,1}) \dots \\ \dots F(m_{1,g}) \dots F(m_{k,1}) \dots F(m_{k,g}) T,$$

где T — сумма, рассмотренная в 2. Ввиду

$$\sum_{m=1}^{\infty} F(m) \ll 1, \quad \sum_{m \leq M} \frac{F(m)}{m^{\frac{1}{4}}} \ll \Delta M^{\frac{3}{4}}; \quad \sum_{m > M} F(m) \ll \frac{1}{\Delta^x M^x} \ll q^{-\rho g(k+1)}$$

сумма слагаемых суммы H с условием, что по меньшей мере одно $m_{t,s}$ превосходит M , будет

$$\ll p G q^{-\rho g(k+1)} = p G \Delta^{gk} q^{-\rho g},$$

а сумма остальных слагаемых суммы H будет

$$\ll p G q^{\frac{\rho g(k+1)}{4} - \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda_2 D}{4} + \frac{3\rho g k}{4} + \epsilon''} \Delta^{gk} \ll p G \Delta^{gk} q^{\rho g\left(k + \frac{1}{4}\right) - \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda_2 D}{4} + \epsilon''}.$$

Но показатель степени q здесь будет

$$< \frac{\lambda \log D \left(\left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \log (D \log D + D) + \frac{5}{4} \nu \right)}{4 (\log D + 1) \log (D \log D + D)} - \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4 (\log D + 1)} < 0.$$

Поэтому при некоторых c_1 и c''

$$H < p G c_1^{gk} \Delta^{gk} q^{-c'' gk}; \sum_{y=1}^p \prod_{\substack{t=1, \dots, k \\ s=1, \dots, g}} \frac{\left| \frac{\Sigma \psi_0(f(yx_{t,s}))}{x_{t,s}} \right|}{\Delta G_{t,s}} < p c_1^{gk} q^{-c'' gk}.$$

Следовательно, существует, по меньшей мере, одна система значений y, t, s с условием

$$\frac{\left| \frac{\Sigma \psi_0(f(yx_{t,s}))}{x_{t,s}} \right|}{\Delta G_{t,s}} < c_1 q^{-c''}.$$

Число c_0 можно взять настолько большим, что правая часть этого неравенства будет < 1 , из этого будет следовать, что при некотором $x = x_{t,s}$

$$\psi_0(f(yx)) < \Delta; \quad \psi(f(yx)) > 0,$$

откуда непосредственно следует справедливость нашей теоремы.

Пример. Пусть α — вещественное,

$$f(x) = \alpha x^n + x \sqrt{2}, \quad n > 4, \quad \tau \geq 1.$$

Разложив $\sqrt{2}$ в непрерывную дробь, рассмотрим ту пару соседних подходящих дробей, знаменатели q и q' которых удовлетворяют условию $q \leq \sqrt{\tau} < q'$. Ввиду ограниченности неполных частных $q' \ll q$ и потому, применяя теорему, убедимся в возможности удовлетворить целыми z и v системе

$$|f(z) - v - A| \leq c \tau^{-\rho_0}; \quad 0 < z < \tau;$$

$$\rho_0 = \frac{\log(n+1)}{8n(\log(n+1)+1) \log((n+1) \log(n+1) + n+1)}.$$

ГЛАВА VI

Оценки сумм Вейля

В настоящей главе дается применение моего метода к выводу двух общих теорем, позволяющих оценивать суммы вида

$$\sum_{x=M}^{M+P-1} e^{2\pi i f(x)},$$

как в случае, когда $f(x)$ — целый многочлен степени $n+1$ (тогда оценки даются в зависимости от рациональных приближений к коэффициентам при степенях x выше первой), так и в случае, когда $f(x)$ в известном смысле хорошо аппроксимируется целым многочленом степени n .

Тот же метод применим и в том случае, когда одновременно с изменением интервала суммирования и вида функции $f(x)$ число n возрастает. Но этот случай мы здесь не рассматриваем.

Специальные обозначения. В настоящей главе считаем $n \geq 11$, буквою k обозначаем целое постоянное, превосходящее n , и полагаем

$$\sigma = (1 - \nu)^k, \quad h = n + 2, \quad b = \left[\frac{5}{4} n + \frac{1}{2} \right].$$

Лемма. Пусть p_1 — целое, $p_1 > c_0$, где c_0 достаточно велико;

$$p_t = p_1^{(1-\nu)^{t-1}}, \quad \eta_t = [\nu \log_2 p_t] \quad (t = 1, \dots, k+1);$$

$a_{n+1}, \dots, a_1$ — вещественное, $f(x) = a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_1 x$;

$$T_1 = \sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i f(x)}.$$

Тогда имеем

$$T_1^{2b(k+h)} \ll \sum_{s_1=1}^{\eta_1} \dots \sum_{s_k=1}^{\eta_k} \sum_{s_{k+1}=1}^B K(s_1, \dots, s_k);$$

$$B = p_1^{2b(k+h)} (p_1 \dots p_k)^{-2b} p_{k+1}^{-2bh} 2^{(2n-2h(b-n))(s_1 + \dots + s_k)}; \quad (1)$$

$$K(s_1, \dots, s_k) = \sum_{\langle x, \dots, x_{n+1} \rangle} e^{2\pi i (X_1 x_1 + \dots + X_{n+1} x_{n+1})}; \quad X_r = \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!},$$

где x_0 — целое. От $a_{n+1}, \dots, a_1$ зависят только коэффициенты при степенях x_0 многочленов $X_1, \dots, X_{n+1}$. Суммирование распространяется на системы $(x_1, \dots, x_{n+1})$, состоящие из целых чисел, лежащих в интервалах вида

$$-cp_1 \leq x_1 \leq cp_1, \dots, -cp_1^{n+1} \leq x_{n+1} \leq cp_1^{n+1};$$

причем, каковы бы ни были целые $z_1, \dots, z_n$, число систем $(x_1, \dots, x_{n+1})$ с условием

$$x_1 = z_1, \dots, x_n = z_n$$

будет

$$\ll \psi; \quad \psi = (p_1 \dots p_k)^{2b - \frac{n+1}{2}} p_{k+1}^{2bh} \left(-2b + \frac{n(n+1)}{2} \right) (S_1 + \dots + S_k)$$

Таким образом

$$B\psi \ll p_1^{2b(k+h) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}} \frac{1}{2} (S_1 + \dots + S_k).$$

Доказательство. Положим $R_{t,s} = p_t 2^{-s}$. При $t = 1, \dots, k+1$ символом T_t обозначим всякую сумму вида

$$T_t = \sum_x e^{2\pi i f(x)},$$

где x пробегает $\leq p_t$ последовательных чисел ряда $1, \dots, p_1$. Взяв какое-либо число s ряда $1, \dots, \eta_t$, интервал суммирования суммы T_t разобьем на интервалы вида (ω_t не зависит от s)

$$\begin{aligned} \omega_t + (g-1)R_{t,s} < x \leq \omega_t + (g-1)R_{t,s} + R'_{t,s} \\ (g = 1, \dots, g'; \quad g' \leq 2^s, \quad R'_{t,s} \leq R_{t,s}). \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда T_t^b разобьется на сумму $\leq 2^{sb}$ произведений $Z_{t,s}$:

$$T_t^b = \sum Z_{t,s}; \quad Z_{t,s} = Z_{t,s,1} \dots Z_{t,s,b}; \quad Z_{t,s,j} = \sum_x e^{2\pi i f(x)}.$$

Здесь интервал суммирования для $Z_{t,s,j}$ есть один из интервалов (2); соответствующее этому интервалу значение g назовем номером $Z_{t,s,j}$.

Если среди номеров всех $Z_{t,s,j}$ имеется n таких, что разность между любыми двумя численно > 1 , то $Z_{t,s}$ назовем правильным; в противном случае $Z_{t,s}$ назовем неправильным.

Пусть g_1 — наименьший из номеров сомножителей $Z_{t,s,j}$ неправильного $Z_{t,s}$; g_2 — наименьший из таких номеров, превосходящих $g_1 + 1$; g_3 — наименьший из номеров, превосходящих $g_2 + 1$, и т. д.; наконец, g_{n_1} — наименьший из номеров, превосходящих $g_{n_1-1} + 1$, причем номеров, превосходящих $g_{n_1} + 1$, не имеется. Очевидно, $n_1 < n$ (в противном случае $Z_{t,s}$ оказалось бы правильным). Заставляя $g'_1, \dots, g'_{n-1}$

независимо друг от друга пробегать значения $1, \dots, 2^s$, получим $2^{s(n-1)}$ систем $g'_1, \dots, g'_{n-1}$; среди них найдется система, содержащая все числа $g_1, \dots, g_n$, причем из способа образования последних следует, что номера всех $Z_{t,s,j}$ находятся среди чисел

$$g'_1, g'_1 + 1, g'_2, g'_2 + 1, \dots, g'_{n-1}, g'_{n-1} + 1. \quad (3)$$

Заставляя $g'_1, \dots, g'_b$ независимо друг от друга пробегать числа ряда (3), получим $(2n-2)^b$ систем $g''_1, \dots, g''_b$; среди них найдется система, состоящая из номеров сомножителей $Z_{t,s,j}$ рассматриваемого $Z_{t,s}$. Из сказанного следует, что число $B_{t,s}$ неправильных $Z_{t,s}$ удовлетворяет неравенству

$$B_{t,s} \leq 2^{s(n-1)} (2n-2)^b.$$

Из способа образования интервалов (2) следует, что при $s=2, \dots, \eta_t$ каждое неправильное $Z_{t,s-1}$ представляется суммой $\leq 2^b$ произведений $Z_{t,s}$. При s , отличном от η_t , всякое правильное из последних обозначим символом $Z'_{t,s}$; при $s=\eta_t$ всякое из них обозначим символом $Z'_{t,s}$. Общее число произведений $Z'_{t,s}$, очевидно, будет

$$\leq B_{t,s} 2^b \ll 2^{-s} 2^{sn}.$$

При $t=1, \dots, k$ имеем (леммы 2 и 1, б, гл. I)

$$\begin{aligned} T_t^b &= \sum_{s=2}^{\eta_t} 2^{-s} \sum_{j=1}^{2^{sn}} Z'_{t,s,j}; \quad T_t^{2b(k-t+h+1)} \ll \sum_{s=2}^{\eta_t} \left(\sum_{j=1}^{2^{sn}} |Z'_{t,s,j}| \right)^{2(k-t+h+1)} \ll \\ &\ll \sum_{s=2}^{\eta_t} 2^{sn(2(k-t+h+1)-1)} \sum_{j=1}^{2^{sn}} |Z'_{t,s,j}|^{2(k-t+h+1)} \ll \\ &\ll \sum_{s=2}^{\eta_t} 2^{2sn(k-t+h+1)} \sum_{j=1}^{2^{sn}} |Z'_{t,s,j}|^{2(k-t+h)}; \\ &b^b |Z'_{t,s}| \ll \left(\sum_{j=1}^b |Z_{t,s,j}| \right)^b; \quad |Z'_{t,s}|^{2(k-t+h)} \ll \\ &\ll \left(\sum_{j=1}^b |Z_{t,s,j}| \right)^{2b(k-t+h)} \end{aligned}$$

Но каждое $Z_{t,s,j}$ разбивается на

$$\leq p_t 2^{-s} p_{t+1}^{-1} + 1 = p_t^v 2^{-s} (1 + 2^s p_t^{-v}) \leq 2 p_t^v 2^{-s}$$

сумм T_{t+1} ; поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^b |Z'_{t,s}|^{2b(k-t+h)} &\ll \sum_{j=1}^b (p_t^y 2^{-s})^{(2b(k-t+h)-1)} \sum_{j=1}^b |T_{t+1}|^{2b(k-t+h)} \ll \\ &\ll \sum_{j=1}^{(p_t^y 2^{-s})^{2b(k-t+h)}} |T_{t+1}|^{2b(k-t+h)}; \\ T_t^{2b(k-t+h+1)} &\ll \sum_{s=2}^{\eta_t} \sum_{s=2}^{M_{t,s}} |Z'_{t,s}|^2 |T_{t+1}|^{2b(k-t+h)}; \\ M_{t,s} &= 2^{-s(2b-2n)(k-t+h)+2sn} p_t^{2bv(k-t+h)}. \end{aligned}$$

Написав в этой формуле s_t вместо s , применяем ее при $t=1, \dots, k$. Замечая, что

$$\begin{aligned} k-t+h &\geq h; \quad p_t^y = \frac{p_t}{p_{t+1}}; \\ \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{k+h-1} \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{k+h-2} \dots \left(\frac{p_k}{p_{k+1}}\right)^{k+h-k} &= p_1^{k+h} (p_1 \dots p_k)^{-1} p_{k+1}^{-h}, \end{aligned}$$

получим формулу (1) с тем $\mathcal{B}$, которое указано в формулировке леммы, но с

$$K(s_1, \dots, s_s) = |Z'_{1,s_1}|^2 \dots |Z'_{k,s_k}|^2 |T_{k+1}|^{2bh}.$$

Рассмотрим какое-либо определенное $K(s_1, \dots, s_s)$. Пусть $e^{2\pi i f(x_0)}$ — одно из слагаемых суммы T_{k+1} . Сомножители $Z_{t,s_t,j}$ произведения Z'_{t,s_t} представляются суммами вида

$$\sum_{v_t} e^{2\pi i (X_0 + X_1 v_t + \dots + X_{n+1} v_t^{n+1})},$$

где v_t пробегает числа $x-x_0$ (x пробегает целые числа интервала суммирования для $Z_{t,s_t,j}$), $X_0 = f(x_0)$, наконец, $X_1, \dots, X_{n+1}$ имеют значения, указанные в формулировке леммы. Пусть $s_t < \eta_t$ и $g_1, \dots, g_k$ — расположенные в порядке возрастания номера тех сомножителей $Z_{t,s_t,j}$, которые характеризуют Z'_{t,s_t} как правильное произведение. Переменные суммирования для этих сомножителей обозначим, соответственно, символами $v_{t,s_t,1}, \dots, v_{t,s_t,n}$; при этом при $r=1, \dots, n+1$ положим

$$V_{t,s_t,r} = x_1 v_{t,s_t,1}^r + \dots + x_n v_{t,s_t,n}^r, \quad x_j = \pm 1.$$

Тогда $|Z'_{t,s_t}|^2$ представится суммой

$$\sum_{(V_{t,s_t,1}, \dots, V_{t,s_t,n+1})} \sum_{(W_{t,s_t,1}, \dots, W_{t,s_t,n+1})} e^{2\pi i(X_1(V_{t,s_t,1} + W_{t,s_t,1}) + \dots + X_{n+1}(V_{t,s_t,n+1} + W_{t,s_t,n+1}))},$$

где второе суммирование зависит от первого и распространяется на $\ll R_{t,s}^{2b-n}$ систем $(W_{t,s_t,1}, \dots, W_{t,s_t,n+1})$, состоящих из целых чисел, с условием $W_{t,s_t,r} \ll p'_t$. Числа системы $(V_{t,s_t,1}, \dots, V_{t,s_t,n+1})$ удовлетворяют условию $V_{t,s_t,r} \ll p'_t$, причем (лемма 16, гл. I, с $p = p_t$, $R = R_{t,s_t}$, $H = 2^s$), каковы бы ни были интервалы с длинами

$$p_t^{1-\nu}, \dots, p_t^{n(1-\nu)}, \quad (4)$$

число систем $(V_{t,s_t,1}, \dots, V_{t,s_t,n+1})$ с числами $V_{t,s_t,1}, \dots, V_{t,s_t,n}$, соответственно попадающими в эти интервалы, будет

$$\ll 2^{s_t \frac{n(n-1)}{2}} p_t^{\frac{n-1}{2}}.$$

Полагая $U_{t,s_t,r} = V_{t,s_t,r} + W_{t,s_t,r}$, убедимся, что

$$|Z'_{t,s}|^2 = \sum_{(U_{t,s_t,1}, \dots, U_{t,s_t,n+1})} e^{2\pi i(X_1 U_{t,s_t,1} + \dots + X_{n+1} U_{t,s_t,n+1})},$$

где суммирование распространяется на системы $(U_{t,s_t,1}, \dots, U_{t,s_t,n+1})$, состоящие из целых чисел, с условием $U_{t,s_t,r} \ll p'_t$; причем, каковы бы ни были интервалы с длинами (4), число таких систем с числами $U_{t,s_t,1}, \dots, U_{t,s_t,n}$, соответственно попадающими в указанные интервалы, будет

$$\ll \Phi_{t,s_t}; \quad \Phi_{t,s_t} = p_t^{2b - \frac{n+1}{2}} 2^{(-2b + \frac{n(n+1)}{2}) s_t}.$$

Эта оценка верна и при $s_t = \eta_t$, так как число всех систем $(U_{t,\eta_t,1}, \dots, U_{t,\eta_t,n+1})$ будет

$$\ll p_t^{2b} 2^{-2b\eta_t} \ll p_t^{2b} 2^{-2b\eta_t} p_t^{-\frac{n+1}{2}} 2^{\frac{n(n+1)}{2}\eta_t} = \Phi_{t,\eta_t}.$$

Замечая, что $|T_{k+1}|^{2bh}$ представляется суммой $\ll p_{k+1}^{2bh}$ слагаемых вида

$$e^{2\pi i(X_1 x'_1 + \dots + X_{n+1} x'_{n+1})},$$

где $x'_1, \dots, x'_{n+1}$ целые с условием $x'_r \ll p'_r$, убедимся, что $K(s_1, \dots, s_k)$ действительно представляется суммой вида, указанного в формулировке леммы с

$$x_r = U_r + x'_r; \quad U_r = U_{1,s_1,r} + \dots + U_{k,s_k,r};$$

причем, при некотором c , справедливы указанные в лемме неравенства для $x_1, \dots, x_{n+1}$. Применяя же лемму 15, гл. I (считая, что

$h, \dots, l$ суть все без исключения числа $1, 2, \dots, n-1$, убедимся, что число систем $(x_1, \dots, x_{n+1})$ с условием $x_1 = z_1, \dots, x_{n+1} = z_{n+1}$ будет

$$\ll \Phi_{1,s_1} \dots \Phi_{k,s_k} p_{k+1}^{2bh} \ll \psi.$$

Указанное в лемме неравенство для $B\psi$ выводится тривиально.

Теорема 1. Пусть m и P — целые положительные;

$$S = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m F(x)}; \quad F(x) = a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_1 x;$$

$a_{n+1}, \dots, a_1$ — вещественные; r — одно из чисел $n+1, \dots, 2$;

$$a_r = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad q > 0.$$

Тогда имеем

$$S \ll p^{1-\sigma} m^{2\tau}{}^{-1}; \quad \sigma = \frac{\tau}{3n^2 \log \frac{12n(n+1)}{\tau}}; \quad t = 1 + \frac{\nu}{30};$$

где при наперед заданных c_1 и c_2 (например, можно взять $c_1 = c_2 = 1$), τ определяется равенствами:

1. $q = c_1 P^\tau$, если $1 < q \leq c_1 P$;
2. $\tau = 1$, если $c_1 P \leq q \leq c_2 P^{r-1}$;
3. $q = c_2 P^{r-\tau}$, если $c_2 P^{r-1} \leq q < c_2 P^r$.

Доказательство. Пусть

$$Y = [P^{1-\nu}]; \quad k = \left[\frac{\log \frac{3n(n+1)}{\tau}}{-\log(1-\nu)} + 1 \right].$$

Тогда легко найдем

$$(n-1) \log \frac{3n(n+1)}{\tau} < k < \left(n - \frac{1}{2}\right) \log \frac{3n(n+1)}{\tau} + 1;$$

$$\sigma < \frac{\tau}{3n(n+1)}.$$

При $y = 0, \dots, Y-1$, полагая

$$T_0 = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i (mF(y+x) - mF(y))},$$

будем иметь

$$|S| = |T_0| + 2\theta y; \quad |S| = Y^{-1} \sum_{y=0}^{Y-1} |T_0| + \theta Y.$$

Отсюда следует (лемма 1, б, гл. I)

$$\begin{aligned} |S|^{2b(k+h)} &\ll \left(Y^{-1} \sum_{y=0}^{Y-1} |T_0| \right)^{2b(k+h)} + Y^{2b(k+h)} \ll \\ &\ll Y^{-1} \sum_{y=0}^{Y-1} |T_0|^{2b(k+h)} + Y^{2b(k+h)}. \end{aligned}$$

Применяя формулу Тейлора, находим

$$\begin{aligned} mF(y+x) - mF(y) &= Y_1 x + \dots + Y_{n+1} x^{n+1}; \\ Y_j &= Y_j(y) = \frac{mF^{(j)}(y)}{j!} = \binom{n+1}{j} m a_{n+1} y^{n+1-j} + \dots + \\ &\quad + \binom{j+1}{j} m a_{j+1} y + m a_j. \end{aligned}$$

Положим, далее

$$T_1 = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i(\alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n + m a_{n+1} x^{n+1})}.$$

Если точка $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ принадлежит области (Ω_y) n -мерного пространства, заданной неравенствами

$$\begin{aligned} Y_1 - 0.5 P^{-1-p} &\leq \alpha_1 \leq Y_1 + 0.5 P^{-1-p}, \dots, Y_n - 0.5 P^{-n-p} \leq \\ &\leq \alpha_n \leq Y_n + 0.5 P^{-n-p}, \end{aligned}$$

то имеем

$$T_0 = T_1 + O(Y), \quad |T_0|^{2b(k+h)} \ll |T_1|^{2b(k+h)} + Y^{2b(k+h)}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на

$$P^{\frac{n(n+1)}{2} + np} d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

и распространяя интегрирование на область (Ω_y) , получим

$$\begin{aligned} |T_0|^{2b(k+h)} &\ll P^{\frac{n(n+1)}{2} + np} \int_{(\Omega_y)} \dots \int_{(\Omega_y)} |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n + Y^{2b(k+h)}; \\ S^{2b(k+h)} &\ll P^{\frac{n(n+1)}{2} - 1 + (n+1)p} \sum_{y=0}^{Y-1} \int_{(\Omega_y)} \dots \int_{(\Omega_y)} |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n + Y^{2b(k+h)}. \quad (5) \end{aligned}$$

Теперь оценим число G областей (Ω_y) , содержащих точки с координатами, отличающимися лишь целыми слагаемыми от координат некоторой заданной точки $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Пусть (Ω_y) и (Ω_{y_0}) — две такие области. Тогда, обозначая символами $C_1, C_2, \dots$ некоторые целые числа, имеем

$$\begin{aligned} Y_{r-1}(y) - Y_{r-1}(y_0) &= C_{r-1} + O(P^{-r+1-p}); \dots; \\ Y_n(y) - Y_n(y_0) &= C_n + O(P^{-n-p}). \end{aligned}$$

Это может быть записано в обратном порядке так:

$$\begin{aligned} C_n + O(P^{-n-p}) &= \binom{n+1}{n} ma_{n+1}(y - y_0); \\ C_{n-1} + O(P^{-n+1-p}) &= \binom{n+1}{n-1} ma_{n+1}(y^2 - y_0^2) + \binom{n}{n-1} ma_n(y - y_0); \\ &\dots \dots \dots \\ C_{r-1} + O(P^{-r+1-p}) &= \binom{n+1}{r-1} ma_{n+1}(y^{n+2-r} - y_0^{n+2-r}) + \\ &\quad + \dots + \binom{r}{r-1} ma_r(y - y_0). \end{aligned}$$

Умножая эти равенства почленно на

$$D_n = 1!; D_{n-1} = 1!2!; \dots, D_{r-1} = 1!2! \dots (n+2-r)!,$$

получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} C'_n + O(P^{-n-p}) &= D_n \binom{n+1}{n} ma_{n+1}(y - y_0); \\ C'_{n-1} + O(P^{-n+1-p}) &= D_{n-1} \binom{n+1}{n-1} ma_{n+1}(y^2 - y_0^2) + D_{n-1} \binom{n}{n-1} ma_n(y - y_0); \\ &\dots \dots \dots \\ C'_{r-1} + O(P^{-r+1-p}) &= D_{r-1} \binom{n+1}{r-1} ma_{n+1}(y^{n+2-r} - y_0^{n+2-r}) + \\ &\quad + \dots + D_{r-1} \binom{r}{r-1} ma_r(y - y_0). \end{aligned}$$

Правая часть первого равенства делит первые члены правых частей всех оставшихся равенств, причем частные от деления, соответственно, будут

$$\ll P, \dots, \ll P^{n+1-r}.$$

Произведения этих частных на левую часть первого равенства отличаются от некоторых целых чисел слагаемыми, соответственно

$$\ll P^{-n+1-p}, \dots, \ll P^{-r+1-p}.$$

Поэтому оставшиеся равенства могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} C''_{n-1} + O(P^{-n+1-p}) &= D_{n-1} \binom{n}{n-1} ma_n(y - y_0); \\ &\dots \dots \dots \\ C''_{r-1} + O(P^{-r+1-p}) &= D_{r-1} \binom{n}{r-1} ma_n(y^{n+1-r} - y_0^{n+1-r}) + \\ &\quad + \dots + D_{r-1} \binom{r}{r-1} ma_r(y - y_0). \end{aligned}$$

Применяя к этим равенствам рассуждения, аналогичные вышеприведенным, получим новые равенства:

$$\begin{aligned} C'''_{n-2} + O(P^{-n+2-p}) &= D_{n-2} \binom{n-1}{n-2} ma_{n-1}(y - y_0); \\ &\dots \dots \dots \\ C'''_{r-1} + O(P^{-r+1-p}) &= D_{r-1} \binom{n-1}{r-1} ma_{n-1}(y^{n-r} - y_0^{n-r}) + \\ &\quad + \dots + D_{r-1} \binom{r}{r-1} ma_r(y - y_0) \end{aligned}$$

и т. д. Наконец, мы получим одно равенство вида

$$C + O(P^{-r+1-\varepsilon}) = D_{r-1}(r_{-1}) ma_r(y - y_0);$$

откуда, при некотором c' , следует

$$(D_{r-1}(r_{-1}) ma_r(y - y_0)) \leq c' P^{-r+1-\varepsilon}.$$

Поэтому (лемма 8, с. гл. I) $G \ll G_0$, где, соответственно случаям 1, 2 и 3 теоремы, имеем

$$1) G_0 = \frac{P}{q} m, \quad 2) G_0 = m, \quad 3) G_0 = m \frac{q}{P^{r-1}};$$

откуда следует $G \ll mP^{1-\varepsilon}$.

В силу этого из (5) следует

$$|S_i^{2b(k+h)}| \ll P^{\frac{n(n+1)}{2} - \varepsilon + (n+1)\rho} m \int_0^1 \dots \int_0^1 |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n + Y^{2b(k+h)}.$$

Полагая $p_1 = P$, оценим $|T_1|^{2b(k+h)}$, пользуясь леммой. Получим

$$|T_1|^{2b(k+h)} \ll \sum_{s_1=1}^{\eta_1} \dots \sum_{s_k=1}^{\eta_k} \sum^K K(s_1, \dots, s_k);$$

$$K(s_1, \dots, s_k) = \sum_{(x_1, \dots, x_{n+1})} e^{2\pi i (X_1 x_1 + \dots + X_{n+1} x_{n+1})};$$

$$X_1 = \alpha_1 + \binom{2}{1} \alpha_2 x_0 + \dots + \binom{n}{1} \alpha_n x_0^{n-1} + \binom{n+1}{1} ma_{n+1} x_0^n;$$

$$X_2 = \alpha_2 + \dots + \binom{n}{2} \alpha_n x_0^{n-2} + \binom{n+1}{2} ma_{n+1} x_0^{n-1};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_n = \alpha_n + \binom{n+1}{n} ma_{n+1} x_0;$$

$$X_{n+1} = ma_{n+1}.$$

Поэтому $X_1 x_1 + \dots + X_{n+1} x_{n+1} = A_1 \alpha_1 + \dots + A_n \alpha_n + A_{n+1} ma_{n+1}$, где

$$A_1 = x_1;$$

$$A_2 = \binom{2}{1} x_0 x_1 + x_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n = \binom{n}{1} x_0^{n-1} x_1 + \binom{n}{2} x_0^{n-2} x_2 + \dots + x_n;$$

$$A_{n+1} = \binom{n+1}{1} x_0^n x_1 + \binom{n+1}{2} x_0^{n-1} x_2 + \dots + \binom{n+1}{n} x_0 x_n + x_{n+1}.$$

Далее, находим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 K(s_1, \dots, s_k) d\alpha_1 \dots d\alpha_n = \\ &= \sum_{(x_1, \dots, x_{n+1})} \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2\pi i(A_1 \alpha_1 + \dots + A_n \alpha_n + A_{n+1} m \alpha_{n+1})} d\alpha_1 \dots d\alpha_n, \end{aligned}$$

что (лемма 4, гл. 1) равно числу систем $(x_1, \dots, x_{n+1})$ с условием $A_1 = \dots = A_n = 0$, т. е. равно, как это нетрудно сообразить, числу систем $(x_1, \dots, x_{n+1})$ с условием $x_1 = \dots = x_n = 0$; последнее же число будет $\ll \psi$.

Поэтому

$$\begin{aligned} |S|^{2b(k+h)} &\ll P^{\frac{n(n+1)}{2} - \tau + (n+1)\rho} m \sum_{s_1=1}^{\eta_1} \dots \sum_{s_k=1}^{\eta_k} B\psi + Y^{2b(k+h)} \ll \\ &\ll P^{\frac{n(n+1)}{2} - \tau + (n+1)\rho} m P^{2b(k+h) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\sigma} + Y^{2b(k+h)} \ll \\ &\ll P^{2b(k+h) - \frac{5}{9}\tau \left(1 - \frac{1}{15}\right)} m + Y^{2b(k+h)}. \end{aligned}$$

Справедливость теоремы теперь следует из неравенств

$$\begin{aligned} \frac{\frac{5}{6}\tau \left(1 - \frac{1}{15}\right)}{2b(k+h)} &\geq \frac{\frac{5}{6}\tau \left(1 - \frac{1}{15}\right)}{\frac{5}{2}\left(n + \frac{2}{5}\right) \left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \log \frac{3n(n+1)}{\tau} + n + 3\right)} \gg \\ &\geq \frac{\tau \left(1 + \frac{1}{30}\right)}{3n^2 \left(\log \frac{3n(n+1)}{\tau} + \frac{(n+3)}{n-0.5}\right)} \geq \rho t. \\ \frac{1}{2bk} &\leq \frac{2}{5\left(n - \frac{1}{5}\right)(n-1) \left(\log \frac{12n(n+1)}{\tau} - 1.4\right)} < \frac{2\rho}{\tau}. \end{aligned}$$

Пример. Пусть один из коэффициентов $a_{n+1}, \dots, a_2$ многочлена

$$F(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_2x^2 + a_1x$$

равен $\sqrt[3]{2}$, остальные же коэффициенты этого многочлена — любые вещественные числа.

Разложив $\sqrt[3]{2}$ в непрерывную дробь, рассмотрим ту пару соседних подходящих дробей, знаменатели q и q' , которых удовлетворяют усло-

вию $q \leq P < q'$. Ввиду ограниченности неполных частных, будет $q' \ll q$. Поэтому рассматриваемый коэффициент можно представить в форме

$$\frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2},$$

где $(a, q) = 1$ и при некотором $c_1 < 1$

$$c_1 P < q \leq P.$$

Следовательно, применяя теорему, будем иметь

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m F(x)} \ll P^{1-\rho} m^{2\rho}; \quad \rho = \frac{1}{3n^2 \log 12n(n+1)}; \quad t = 1 + \frac{\nu}{30}.$$

Теорема 2, а. Пусть N и P — целые, $P > 0$ и в интервале $N \leq x \leq N + P$ вещественная функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$, удовлетворяющую условию

$$\frac{1}{A_0} \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{c'}{A_0},$$

где $P \ll A_0 \ll P^{2+2\nu}$. Пусть далее

$$S = \sum_{x=N+1}^{N+P} e^{2\pi i f(x)},$$

тогда имеем

$$S \ll P^{1-\rho}; \quad \rho = \frac{1}{3n^2 \log 125n}.$$

Доказательство. Пусть

$$\nu_1 = \frac{1}{n+1}; \quad p_1 = [A_0^{(1-\rho)\nu_1}]; \quad k = \left[\frac{\log(6n+6)}{-\log(1-\nu)} + 1 \right].$$

Тогда легко найдем

$$k < \left(n - \frac{1}{2}\right) \log(6n+6) + 1; \quad \sigma < \frac{1}{6n+6}.$$

Полагая, при $y = N, \dots, N + P - p_1$,

$$T_0 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i (f(y+x) - f(y))},$$

находим (ср. доказательство теоремы 1)

$$|S| = p_1^{-1} \sum_{y=N}^{N+P-p_1} |T_0| + \theta p_1;$$

$$|S|^{2b(k+h)} \ll p_1^{-2b(k+h)} P^{2b(k+h)-1} \sum_{y=N}^{N+P-p_1} |T_0|^{2b(k+h)} + p_1^{2b(k+h)}.$$

Применяя формулу Тейлора, находим

$$f(y+x) - f(y) = Y_1 x + \dots + Y_n x^n + \theta \frac{c'}{A_0} p_1^{n+1};$$

$$Y_j = Y_j(y) = \frac{f^{(j)}(y)}{j!}, \quad \frac{c'}{A_0} p_1^{n+1} \ll P^{-\rho}.$$

Положим

$$T_1 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i (\alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n)}.$$

Если точка $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ принадлежит области (Ω_y) n -мерного пространства, заданной неравенствами

$$Y_1 - 0.5 p_1^{-1} P^{-\rho} \leq \alpha_1 \leq Y_1 + 0.5 p_1^{-1} P^{-\rho};$$

$$\dots \dots \dots Y_n - 0.5 p_1^{-n} P^{-\rho} \leq \alpha_n \leq Y_n + 0.5 p_1^{-n} P^{-\rho},$$

то имеем

$$T_0 = T_1 + O(p_1 P^{-\rho}); \quad |T_0|^{2b(k+h)} \ll |T_1|^{2b(k+h)} + (p_1 P^{-\rho})^{2b(k+h)}.$$

Умножая обе части последнего неравенства на

$$p_1^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho} d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

и интегрируя по области (Ω_y) , найдем

$$|T_0|^{2b(k+h)} \ll p_1^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho} \int \dots \int_{(\Omega_y)} |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n + (p_1 P^{-\rho})^{2b(k+h)}.$$

Теперь оценим число G областей (Ω_y) , содержащих точки с координатами, отличающимися лишь целыми слагаемыми от координат некоторой точки $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Пусть (Ω_y) и (Ω_{y_0}) — две такие области; тогда

$$(Y_n(y) - Y_n(y_0)) \leq p_1^{-n} P^{-\rho} \ll P^{2\nu+\rho} A_0^{-1}.$$

Следовательно (лемма 9, §, гл. I, с $\Phi(y) = Y_n(y) - Y_n(y_0)$ и $A = A_0(n+1)^{-1}$), $G \ll P^{2\nu+\rho}$. Ввиду этого имеем

$$\begin{aligned} S^{2b(k+h)} &\ll \\ &\ll p_1^{-2b(k+h) + \frac{n(n+1)}{2}} P^{2b(k+h)-1+2\nu+(n+1)\rho} \times \\ &\times \int_0^1 \dots \int_0^1 |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n + F; \end{aligned}$$

$$F = p_1^{2b(k+h)} + p_1^{-2b(k+h)} P^{2b(k+h)} (p_1 P^{-\rho})^{2b(k+h)} \ll (P^{1-\rho})^{2b(k+h)}.$$

Оценим $|T_1|^{2b(k+h)}$, применяя лемму. Тогда получим ($p = p_1$)

$$|T_1|^{2b(k+h)} \ll \sum_{s_1=1}^{\tau_1} \dots \sum_{s_k=1}^{\tau_k} \sum_{s_k=1}^B K(s_1, \dots, s_k);$$

$$K(s_1, \dots, s_k) = \sum_{(x_1, \dots, x_{n+1})} e^{2\pi i (X_1 x_1 + \dots + X_n x_n)};$$

$$X_1 = \alpha_1 + \binom{2}{1} \alpha_2 x_0 + \dots + \binom{n}{1} \alpha_n x_0^{n-1},$$

$$X_2 = \alpha_2 + \dots + \binom{n}{2} \alpha_n x_0^{n-2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$X_n = \alpha_n.$$

Далее находим

$$X_1 x_1 + \dots + X_n x_n = A_1 \alpha_1 + \dots + A_n \alpha_n;$$

$$A_1 = x_1;$$

$$A_2 = \binom{2}{1} x_0 x_1 + x_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_n = \binom{n}{1} x_0^{n-1} x_1 + \binom{n}{2} x_0^{n-2} x_2 + \dots, x_n.$$

Согласно лемме 4, гл. I, интеграл

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 K(s_1, \dots, s_k) d\alpha_1 \dots d\alpha_n = \sum_{(x_1, \dots, x_{n+1})} \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2\pi i (A_1 \alpha_1 + \dots + A_n \alpha_n)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n$$

равен числу систем $(A_1, \dots, A_n)$ с условием $A_1 = \dots = A_n = 0$. Но это число равно, очевидно, числу систем $(x_1, \dots, x_{n+1})$ с условием $x_1 = \dots x_n = 0$, т. е. будет $\ll \psi$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \dots \int_0^1 |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha_1 \dots d\alpha_n \ll \\ & \ll \sum_{s_1=1}^{\tau_1} \dots \sum_{s_k=1}^{\tau_k} B\psi \ll p_1^{2b(k+h) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \sigma}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{2b(k+h)} & \ll p^{2b(k+h) - 1 + 2\nu + (n+1)\rho} p_1^{\frac{n(n+1)}{2} \sigma} + P^{(1-\rho)2b(k+h)} \ll \\ & \ll P^{2b(k+h) - \frac{5}{6} + \frac{25}{12} \nu} + P^{(1-\rho)2b(k+h)}. \end{aligned}$$

Справедливость теоремы теперь следует из

$$\begin{aligned} \frac{\frac{5}{6} - \frac{25}{12} \nu}{2b(k+h)} &\geq \frac{\frac{5}{6}(1-2.5\nu)}{\frac{5}{2}\left(n+\frac{2}{5}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(\log(6n+6)+\frac{4}{3}\right)} \gg \\ &\geq \frac{1}{3n^2(1+3.1\nu)(\log n+3.2)} > \rho. \end{aligned}$$

Теорема 2, б. Пусть N и P — целые, $P > 0$; в интервале $N \leq x \leq N+P$ вещественная функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$, удовлетворяющую условию

$$\frac{1}{A_0} \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{c'}{A_0},$$

где $P \ll A_0 \ll P^{2+\nu}$. Пусть далее в том же интервале $\Phi(x)$ монотонна, причем $\max |\Phi(x)| \ll \Phi_0$.

Тогда, обозначая буквою P_1 любое целое число интервала $1 \leq P_1 \leq P$ и полагая

$$S(P_1) = \sum_{x=N+1}^{N+P_1} \Phi(x) e^{2\pi i f(x)},$$

будем иметь

$$S(P_1) \ll \Phi_0 P_1^{1-\rho}; \quad \rho = \frac{1}{3n^2 \log 125n}.$$

Доказательство. Для целых P_0 , лежащих в интервале $1 \leq P_0 \leq P$, введем обозначение

$$\sigma(P_0) = \sum_{x=N+1}^{N+P_0} e^{2\pi i f(x)}.$$

При $A_0^{(2+2\nu)^{-1}} \leq P_0 \leq P$, согласно теореме 2, а, имеем

$$\sigma(P_0) \ll P_0^{1-\rho} \ll P^{1-\rho}. \quad (6)$$

При $1 \leq P_0 < A_0^{(2+2\nu)^{-1}}$ неравенство (6) следует из

$$\sigma(P_0) \ll P_0 \ll P^{(2+\nu)(2+2\nu)^{-1}} \ll P^{1-\rho}.$$

Таким образом, неравенство (6) верно при $1 \leq P_0 \leq P$. Применяя к сумме $S(P_1)$ преобразование Абеля, мы убедимся в справедливости нашей теоремы.

Пример. Пусть $s = \sigma + it$, $\sigma > 0$, $t > 1$, P и P_1 — целые,

$$t^{\frac{1}{n}} \leq P \leq t^{\frac{1}{n-1}}; \quad 1 \leq P_1 \leq P.$$

Применим теорему 2, b к оценке суммы

$$S = \sum_{x=P+1}^{P+P_1} \frac{1}{x^s}.$$

Здесь имеем

$$S = \sum_{x=P+1}^{P+P_1} \Phi(x) e^{2\pi i f(x)}; \quad \Phi(x) = \frac{1}{x^\sigma}; \quad f(x) = \frac{-t \log x}{2\pi};$$

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{t}{2\pi(n+1)x^{n+1}}.$$

Полагая

$$A_0 = \frac{2\pi n 2^{n+1} P^{n+1}}{t}; \quad c' = 2^{n+1},$$

будем иметь

$$P \ll A_0 \ll P^2; \quad \frac{1}{A_0} \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{c'}{A_0}; \quad \max \frac{1}{x^\sigma} = \frac{1}{P^\sigma}.$$

Поэтому

$$S \ll \frac{1}{P^\sigma} P^{1-\rho} = P^{1-\sigma-\rho}; \quad \rho = \frac{1}{3n^2 \log 125n}.$$

ГЛАВА VII

Асимптотическая формула в проблеме Варинга

В настоящей главе я показываю, что асимптотическая формула Hardy и Littlewood'a для числа представлений целого положительного N в форме

$$N = x_1^n + \dots + x_r^n; \quad x_1 > 0, \dots, x_r > 0$$

нетривиальна для

$$r \geq [10n^2 \log n].$$

Для доказательства я рассматриваю интеграл, сходный с тем, которым пользовались для решения проблемы Варинга Hardy и Littlewood, но оценки, получаемые по методу Weyl'я, я заменяю оценками, получаемыми по моему методу.

Специальные обозначения. В настоящей главе считаем $n \geq 12$ и применяем следующие обозначения:

$$b = \left[\frac{5}{4}n + \frac{1}{2} \right]; \quad h = n + 2; \quad k = \left[\frac{\log(0.6 n^2 \log 12 n^2)}{-\log(1-\nu)} + 1 \right]; \quad \sigma = (1-\nu)^k.$$

Лемма. Пусть p_1 — целое, $p_1 > 1$; $a_n, \dots, a_1$ — постоянные целые; $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x$, $a_n > 0$;

$$T_1 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i f(x)}.$$

Тогда имеем

$$\int_0^1 |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha \ll p_1^{2b(k+h) - n + \frac{n(n+1)}{2}\sigma}.$$

Доказательство. Применяя лемму гл. VI, находим

$$T_1^{2b(k+h)} \ll \sum_{s_1=1}^{\eta_1} \dots \sum_{s_k=1}^{\eta_k} \sum_{s_k=1}^B K(s_1, \dots, s_k);$$

$$K(s_1, \dots, s_k) = \sum_{x_1 = -[cp_1]}^{[cp_1]} \dots \sum_{x_n = -[cp_1^n]}^{[cp_1^n]} \psi(x_1, \dots, x_n) e^{2\pi i \alpha (X_1 x_1 + \dots + X_n x_n)};$$

$$X_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}; X_n = a_n,$$

где x_0 — целое;

$$\psi(x_1, \dots, x_n) \ll \psi; B\psi \ll p_1^{2b(k+h) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\sigma} 2^{-(s_1 + \dots + s_k)}.$$

Но интеграл

$$\int_0^1 e^{2\pi i \alpha (X_1 x_1 + \dots + X_n x_n)} d\alpha$$

равен 1, если

$$X_1 x_1 + \dots + X_n x_n = 0, \quad (1)$$

и равен нулю в противном случае. А так как при каждой заданной системе значений $x_1, \dots, x_{n-1}$ найдется не более чем одно значение x_n , удовлетворяющее неопределенному уравнению (1), то общее число систем значений $x_1, \dots, x_{n-1}$, удовлетворяющих этому неопределенному уравнению, будет

$$\ll p_1 \dots p_1^{n-1} = p_1^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Вместе с тем найдем

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(s_1, \dots, s_k) d\alpha &\ll p_1^{\frac{n(n-1)}{2}} \psi; \int_0^1 T_1^{2b(k+h)} d\alpha \ll \\ &\ll \sum_{s_1=1}^{\eta_1} \dots \sum_{s_k=1}^{\eta_k} p_1^{\frac{n(n-1)}{2}} B\psi \ll \\ &\ll \sum_{s_1=1}^{\eta_1} \dots \sum_{s_k=1}^{\eta_k} p_1^{2b(k+h) - n + \frac{n(n+1)}{2}\sigma} 2^{-(s_1 + \dots + s_k)} \ll \\ &\ll p_1^{2b(k+h) - n + \frac{n(n+1)}{2}\sigma}. \end{aligned}$$

Теорема. Формула, данная Hardy и Littlewood'ом

$$I(N) = \frac{\Gamma(1+\nu)^r}{\Gamma(r\nu)} N^{r\nu-1} \mathfrak{S} + O(N^{r\nu-1-\nu^2}); \mathfrak{S} = \sum_{q=1}^{\infty} A(q)$$

(обозначения гл. II) для числа представлений целого положительного N в форме

$$N = x_1^n + \dots + x_r^n$$

с целыми положительными $x_1, \dots, x_n$, справедлива при

$$r \geq [10 n^2 \log n].$$

Доказательство. Полагая

$$p_1 = [N^\nu], \tau = 2np_1^{n-1}, T_1 = \sum_{\alpha=1}^{p_1} e^{2\pi i \alpha x^n},$$

находим

$$I(N) = \int_{-\tau^{-1}}^{1-\tau^{-1}} T_1' e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha.$$

Из интервала интегрирования выделим основные интервалы, включающие все α с условиями

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, (a, q) = 1, -\frac{1}{q\tau} \leq z \leq \frac{1}{q\tau}, 0 < q \leq p_1^{1-\nu},$$

и дополнительные интервалы, включающие все остальные значения α . Для дополнительных интервалов имеем

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, (a, q) = 1, |z| \leq \frac{1}{q\tau}, p_1^{1-\nu} < q \leq \tau.$$

Пусть $I_0(N)$ — часть интеграла $I(N)$, отвечающая основным интервалам, а $I_1(N)$ — часть, отвечающая дополнительным интервалам. Тогда

$$I(N) = I_0(N) + I_1(N).$$

В силу $[10n^2 \log n] > 2n+1$ к $I_0(N)$ можно применить заключительную формулу гл. III; получим

$$I_0(N) = \frac{(\Gamma(1+\nu))^r}{\Gamma(r\nu)} N^{r\nu-1} \sum_{0 < q \leq p_1^{1-\nu}} A(q) + O(N^{r\nu-1-\nu^2}).$$

Согласно лемме 6, гл. II, имеем

$$\sum_{q > p_1^{1-\nu}} A(q) \ll \sum_{q > p_1^{1-\nu}} q^{1-(2n+2)\nu} \ll p_1^{-(1-\nu)2\nu} \ll N^{-\nu^2}.$$

Поэтому

$$I_0(N) = \frac{(\Gamma(1+\nu))^r}{\Gamma(r\nu)} N^{r\nu-1} \pm O(N^{r\nu-1-\nu^2}).$$

Теперь оценим $I_1(N)$. Согласно лемме, имеем

$$\int_0^1 |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha \ll p_1^{2b(k+h)-n+\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Далее, согласно теореме 1, гл. VI, имеем

$$T_1 \ll p_1^{1-\varepsilon_1}; p_1 = \frac{1-\nu}{3(n-1)^2 \log \frac{12n(n-1)}{1-\nu}} \geq \frac{1}{3n(n-1) \log 12n^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I_1(N) &\ll p_1^{(r-2b(k+h)) \left(1 - \frac{1}{3n(n-1) \log 12n^2}\right) + 2b(k+h) - n + \frac{n(n+1)}{2}\sigma} \ll \\ &\ll p_1^{r-n + \frac{n(n+1)}{2}\sigma - \frac{r-2b(k+h)}{3n(n-1) \log 12n^2}} = p_1^{r-n-\delta}, \end{aligned}$$

где имеем

$$\begin{aligned} \delta &> -\frac{n(n+1)}{12n^2 \log 12n^2} + \\ &+ \frac{10n^2 \log n - 1 - (2.5n+1)((n-0.5) \log (0.6n^2 \log 12n^2) + n+3)}{3n(n-1) \log 12n^2} > \\ &> \frac{-5n(n-\nu) + 20n^2 \log n - 2 - (5n+2)((n-0.5) 2.8 \log n + n+3)}{6n(n-1) \log 12n^2} > \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость теоремы.

ГЛАВА VIII

Распределение дробных частей значений целого многочлена

В настоящей главе дается применение общего метода к выводу асимптотической формулы, выражающей число дробей ряда

$$\{F(x)\}; x=1, \dots, P,$$

меньших заданной правильной дроби.

Мы ограничиваемся здесь случаем, когда $F(x)$ целый многочлен с вещественными коэффициентами. Показатель степени многочлена, как и в предыдущей главе, считаем постоянным; однако тот же метод пригоден и в случае, когда показатель медленно растет (одновременно с изменением вида функции $F(x)$ и длины интервала P).

Теорема. Пусть P — целое положительное, $n \geq 1$; $F(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_1x$; $a_{n+1}, \dots, a_1$ — вещественные; s — одно из чисел $n+1, \dots, 2$;

$$a_s = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, q > 0.$$

Тогда при любом γ , удовлетворяющем условию $0 < \gamma < 1$, число T дробей ряда

$$\{F(x)\}, x=1, \dots, P$$

условием $0 \leq \{F(x)\} < \gamma$ выражается формулой

$$T = \gamma P + O(P^{1-\tau}); \quad \tau = \frac{\tau}{3n^3 \log \frac{12n(n+1)}{\tau}},$$

где τ определяется равенствами

$$q = c_1 P^\tau, \text{ если } 1 < q \leq c_1 P;$$

$$\tau = 1, \text{ если } c_1 P \leq q \leq c_2 P^{s-1}$$

$$q = c_2 P^{s-\tau}, \text{ если } c_2 P^{s-1} \leq q < c_3 P^s.$$

Доказательство. Положим

$$\Delta_0 = P^{-\rho h}, \Delta = P^{-\rho}, h = 1 + \frac{\gamma}{30}, S_m = \sum_{x=i}^P e^{2\pi i m F(x)}.$$

Тогда, согласно теореме 1, гл. VI, имеем

$$S_m \ll m^{2\rho\tau-1} P\Delta_0.$$

При $\Delta \geq 0.25$ теорема очевидна; поэтому рассмотрим лишь случай $\Delta < 0.25$. Взяв любые вещественные A и B с условием $0 \leq B - A \leq 1 - 2\Delta$, рассмотрим периодическую функцию $\psi(z)$ с периодом 1, указанную в лемме 12, гл. I, при предположениях

$$r = 1, \alpha + 0.5\Delta = A, \beta - 0.5\Delta = B.$$

Тогда будем иметь

$$\psi(F(x)) = 1, \text{ если } A \leq F(x) \leq B \pmod{1};$$

$$0 \leq \psi(F(x)) \leq 1, \text{ если } A - \Delta \leq F(x) \leq A \pmod{1},$$

$$\text{или } B \leq F(x) \leq B + \Delta \pmod{1};$$

$$\psi(F(x)) = 0, \text{ если } B + \Delta \leq F(x) \leq A - \Delta + 1 \pmod{1};$$

$$\psi(F(x)) = (B - A + \Delta) + \sum_{x=1}^{\infty} (a_m \cos 2\pi m F(x) + b_m \sin 2\pi m F(x)), \quad (1)$$

где

$$a_m \ll \frac{1}{m}, \quad b_m \ll \frac{1}{m}, \text{ если } m \leq \frac{1}{\Delta};$$

$$a_m \ll \frac{1}{\Delta m^2}, \quad b_m \ll \frac{1}{\Delta m^2}, \text{ если } m > \frac{1}{\Delta}.$$

Из (1) следует

$$\sum_{x=1}^P \psi(F(x)) = P(B - A + \Delta) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m S'_m + b_m S''_m),$$

где S' и S'' определяются равенством $S_m = S'_m + iS''_m$.

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m S'_m + b_m S''_m) &\ll \sum_{0 < m \leq \Delta^{-1}} \frac{m^{2\rho\tau-1} P\Delta_0}{m} + \\ &+ \sum_{\Delta^{-1} < m \leq \Delta^{-2}} \frac{m^{2\rho\tau-1} P\Delta_0}{\Delta m^2} + \sum_{m > \Delta^{-2}} \frac{P}{\Delta m^2} \ll \Delta^{-2\rho\tau-1} P\Delta_0 + P\Delta \ll \\ &\ll P^{2\rho\tau-1+1-\frac{\rho\gamma}{30}} \Delta + P\Delta \ll P\Delta, \\ \sum_{x=1}^P \psi(F(x)) &= P(B - A) + O(P\Delta). \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначим символом $T(A; B)$ число значений $F(x)$ с условием $A \leq F(x) < B \pmod{1}$. Тогда равенство (2) можно привести к виду

$$\theta_1 T(A - \Delta; A) + T(A; B) + \theta_2 T(B; B + \Delta) = P(B - A) + O(P\Delta), \theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0;$$

откуда, ввиду очевидных неравенств $T(A - \Delta; A) \ll P\Delta$, $T(B; B + \Delta) \ll P\Delta$, получаемых из (2) заменой A и B сначала на $A - \Delta$ и A , затем на B и $B + \Delta$, найдем

$$T(A; B) = P(B - A) + O(P\Delta).$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} T &= T(0; 0.5\gamma) + T(0.5\gamma; \gamma) = P(0.5\gamma - 0) + P(\gamma - 0.5\gamma) + O(P\Delta) = \\ &= P\gamma + O(P\Delta), \end{aligned}$$

что и доказывает нашу теорему.

ГЛАВА IX

Оценки простейших тригонометрических сумм с простыми числами

В настоящей главе дается применение моего метода к выводу оценок для сумм вида

$$\sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p},$$

где α — вещественное и p пробегает простые числа. Эти оценки даются в зависимости от рациональных приближений к числу α .

Оценок сумм более общего вида я здесь не даю. Однако следует отметить, что тот же метод дает возможность оценивать и суммы вида

$$\sum_{p \leq N} e^{2\pi i f(p)}$$

как в случае, когда $f(p)$ — целый многочлен степени выше первой (тогда оценки даются в зависимости от рациональных приближений к коэффициентам при степенях p выше первой), так и в случаях, когда $f(p)$ в известном смысле хорошо аппроксимируется целым многочленом.

Тот же метод дает возможность оценивать и чисто арифметические суммы с простыми числами. Например, весьма просто оцениваются суммы вида

$$\sum_{p \leq N} \chi(p+k),$$

где $\chi(a)$ — не главный характер по модулю q и $(k, q) = 1$. В общем же случае, соединяя мой метод с методом английских математиков, можно оценивать и суммы вида

$$\sum_{p \leq N} \chi(f(p)),$$

где $f(p)$ — целый многочлен, значения которого суть целые числа.

Наконец, следует отметить, что во всех перечисленных вопросах аргумент p , пробегающий простые числа, можно заменить аргументом, пробегающим другие числовые последовательности, например: последовательность простых чисел, принадлежащих данной арифметической прогрессии, последовательность целых чисел a с данным значением $\mu(a) \chi(a)$, последовательности, состоящие из весьма общего вида произведений, и т. п.

Специальные обозначения. В настоящей главе p всегда обозначает простое число, N — целое число $\geq c_0$, где c_0 достаточно велико; кроме того, полагаем $r = \log N$.

Лемма 1. Пусть u пробегает значения, являющиеся произведениями двух сомножителей, каждый из которых независимо от другого пробегает свою возрастающую последовательность целых положительных чисел, и пусть v пробегает возрастающую последовательность целых положительных чисел, $1 < U < N$, $U < U' \ll U$;

$$a = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, (a, q) = 1, 1 < q < N, S = \sum_{U < u \leq U'} \sum_{v \leq Nu^{-1}} e^{2\pi i a u v}.$$

Тогда имеем

$$S \ll Nr^2 \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + \frac{1}{U} + \frac{U}{N}}.$$

Доказательство. Число решений неопределенного уравнения $u = z$, когда u пробегает все вышеуказанные значения, будет $\leq \tau_2(z)$, причем (лемма 17, б, гл. I)

$$\sum_{z \leq U'} (\tau_2(z))^2 \ll Ur^3.$$

Поэтому, заставляя z пробегать уже все целые числа интервала $U < z \leq U'$, имеем

$$\begin{aligned} S^2 &\ll Ur^3 \sum_{U < z \leq U'} \left| \sum_{v \leq Nz^{-1}} e^{2\pi i a z v} \right|^2 = \\ &= Ur^3 \sum_{U < z \leq U'} \sum_{v' \leq Nz^{-1}} \sum_{v \leq Nz^{-1}} e^{2\pi i a z (v' - v)}. \end{aligned}$$

Далее изменим порядок суммирования. Очевидно, v' и v могут пробегать лишь значения, не превосходящие Nu^{-1} ; а z , при данных v' и v , пробегает целые числа интервала

$$U < z \leq \min \left(U', \frac{N}{v'}, \frac{N}{v} \right).$$

Поэтому получим (лемма 6, гл. I)

$$S \ll Ur^3 \sum_{v' \leq Nu^{-1}} \sum_{v \leq Nu^{-1}} \min \left(\frac{1}{2(x(v' - v))} \right);$$

откуда, замечая, что интервал длиною $\ll NU^{-1}$ разбивается на $\ll NU^{-1}q^{-1}+1$ интервалов длиною $\leq q$, найдем (лемма 8, а, гл. I)

$$S^2 \ll Ur^3 \frac{N}{U} \left(\frac{N}{Uq} + 1 \right) (U + q \log q) \ll N^2 r^4 \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + \frac{1}{U} + \frac{U}{N} \right).$$

Лемма 2. Пусть P — целое положительное; z пробегает целые числа $z_1, \dots, z_n$; S' обозначает сумму значений функции $f(z)$, распространенную на значения z , взаимно простые с P ; S_d обозначает сумму значений функции $f(z)$, распространенную на значения z , кратные d . Тогда

а)

$$S' = \sum_{d \nmid P} \mu(d) S_d.$$

б) Если для указанных значений z имеем $f(z) \geq 0$ и m — положительное четное целое число, то

$$S' \leq \sum_{\substack{d \nmid P \\ \Omega(d) \leq m}} \mu(d) S_d.$$

Теорема 1. Пусть $H = e^{0.5 \sqrt{N}}$,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 < q < N, \quad S = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}.$$

Тогда имеем

$$S \ll Nr^{4.5} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{a}{N}} + \frac{1}{H} \right).$$

Доказательство. Пусть P — произведение всех простых чисел, не превосходящих $\sqrt{N}$. Заставляем z пробегать целые числа интервала $0 < z \leq N$. Полагая

$$f(z) = e^{2\pi i \alpha z},$$

применим лемму 2, а. Получим

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{d \nmid P} \mu(d) S_d; \quad S' = e^{2\pi i \alpha} + \sum_{\sqrt{N} < p \leq N} e^{2\pi i \alpha p} = \\ &= S + O(\sqrt{N}); \quad S_d = \sum_{0 < m \leq Nd-1} e^{2\pi i \alpha dm}. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$S = S_0 - S_1 + O(\sqrt{N}); \quad S_0 = \sum_{d_0 m \leq N} e^{2\pi i \alpha d_0 m}, \quad S_1 = \sum_{d_1 m \leq N} e^{2\pi i \alpha d_1 m},$$

где d_0 пробегает делители числа P с условием $\mu(d) = 1$; d_1 пробегает делители числа P с условием $\mu(d) = -1$; наконец, m пробегает целые положительные числа.

В дальнейшем мы ограничимся лишь оценкой суммы S_0 , так как сумма S_1 оценивается аналогично. Интервал $0 < m \leq N$ мы разобьем на $\ll r$ интервалов вида

$$M < m \leq M'; \quad M < M' \leq 2M. \quad (1)$$

Часть суммы S_0 , отвечающую интервалу (1), обозначим символом $S(M)$.

Сначала рассмотрим случай $M \geq H$; тогда, полагая $M(d_0) = \min(M', Nd_0^{-1})$, будем иметь

$$S(M) = \sum_{d_0 < NM^{-1}} \sum_{M < m \leq M(d_0)} e^{2\pi i a d_0 m} \ll \sum_{d_0 < NM^{-1}} \min\left(\frac{N}{d_0}, \frac{1}{2(\alpha d_0)}\right),$$

откуда находим (лемма 8, b, гл. I)

$$S(M) \ll \left(\frac{N}{M} + q + \frac{N}{q}\right) r \ll Nr \left(\frac{1}{H} + \frac{q}{N} + \frac{1}{q}\right).$$

Остается рассмотреть случай $M < H$. Сумму $S(M)$ представим в форме

$$S(M) = \sum_{M < m \leq M'} \sum_{d_0 \leq Nm^{-1}} e^{2\pi i a d_0 m}.$$

Обозначим символом δ_k каждое d_0 , имеющее ровно k простых сомножителей, превосходящих H^2 . Пусть k_0 — максимальное значение k для $d_0 \leq N$; из $2^{k_0} \leq N$ следует $k_0 \ll r$. Имеем

$$S(M) = \sum_{0 \leq k \leq k_0} S_k(M); \quad S_k(M) = \sum_{M < m \leq M'} \sum_{\delta_k \leq Nm^{-1}} e^{2\pi i a \delta_k m}.$$

Сначала рассмотрим $S_0(M)$. Для $\delta_0 > NM^{-1}H^{-1}$, полагая $\Omega(\delta_0) = x$, получим

$$H^{2x} > NH^{-2}; \quad (2x + 2)0.5\sqrt{r} > r; \quad x > \sqrt{r} - 1; \quad \tau(\delta_0) > 2\sqrt{r} - 1.$$

Пользуясь последним неравенством и леммой 17, с, гл. I, найдем

$$S_0(M) \ll \sum_{M < m \leq M'} \left(\sum_{\delta_0 \leq NM^{-1}H^{-1}} 1 + \sum_{NM^{-1}H^{-1} < \delta_0 \leq Nm^{-1}} \frac{\tau(\delta_0)}{2^{\sqrt{\tau}}} \right) \ll M \left(\frac{N}{HM} + \frac{Nr}{M2^{\sqrt{r}}} \right) \ll \frac{N}{H}.$$

Далее рассмотрим $S_k(M)$ для случая $k > 0$. Сумму $S_k(M)$ сравним с суммой

$$T_k = \sum_{M < m \leq M'} \sum_{p|l \leq Nm^{-1}} \sum e^{2\pi i \alpha p m},$$

где p пробегает простые числа интервала $H^2 < p \leq \sqrt{N}$, а t пробегает значения d_1 , имеющие ровно $k-1$ простых сомножителей, превосходящих H^2 .

Пусть $k > 1$. Членов с $(p, t) = p$ сумма T_k , очевидно, имеет

$$\ll \sum_{M < m \leq M'} \sum_{H^2 < p \leq \sqrt{N}} \frac{NM^{-1}}{p^2} \ll M \frac{NM^{-1}}{H^2} < \frac{N}{H}.$$

Остальные члены суммы T_k — те же, что и члены суммы $S_k(M)$, причем каждый член суммы $S_k(M)$ входит в сумму T_k ровно k раз. Поэтому

$$S_k(M) = \frac{1}{k} T_k + O\left(\frac{N}{kH}\right).$$

Последнее равенство, очевидно, верно и при $k=1$, причем тогда остаточный член равен нулю.

Оценим T_k . Интервал $H^2 < p \leq \sqrt{N}$ разобьем на $\ll r$ интервалов вида

$$Q < p \leq Q'; \quad Q < Q' \leq 2Q. \quad (2)$$

Пусть $T_k(Q)$ — часть суммы T_k , отвечающая интервалу (2); имеем

$$T_k(Q) = \sum_{M < m \leq M'} \sum_{Q < p \leq Q'} \sum_{mpt \leq N} e^{2\pi i mpt};$$

откуда, полагая $mp = u$, $t = v$ и применяя лемму 1, найдем

$$\begin{aligned} T_k(Q) &\ll Nr^2 \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + \frac{1}{H^2} + \frac{M\sqrt{N}}{N}} \ll Nr^2 \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + \frac{1}{H}} \right); \\ S_k(M) &\ll \frac{1}{k} Nr^3 \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + \frac{1}{H}} \right); \quad S(M) \ll Nr^{3.5} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + \frac{1}{H}} \right); \\ S_0 &\ll Nr^{4.5} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N} + \frac{1}{H}} \right). \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть $x > 2$. Тогда

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = c + \log \log x + O\left(\frac{1}{\log x}\right); \quad \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{c_0}{\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right).$$

Лемма 4. Пусть

$$b = e^{r^{1-1.5\varepsilon}}, \quad b_1 = e^{r^{1-2\varepsilon}}, \quad 0 < q < b_1, \quad 0 \leq l < q, \quad (l, q) = 1, \quad U \geq 0, \quad W \geq b.$$

Тогда для числа T чисел вида $qx + l$, не делящихся на простые $\leq b_1$ и удовлетворяющих условию

$$U < qx + l \leq U + W, \quad (3)$$

имеем неравенство

$$T \ll \frac{W(rq)^{2\varepsilon}}{rq}.$$

Доказательство. Пусть $p_1, \dots, p_\sigma$ — все простые, не превосходящие b_1 и не делящие q , и пусть P — их произведение, так что $\Omega(P) = \sigma$. Положим $m = 2[2 \log r + 1]$. Заставляя z пробегать все целые числа $qx + l$ с условием (3) и полагая $f(z) = 1$, применим лемму 2, б. Тогда получим

$$T \ll \sum_{\substack{d \setminus p \\ \Omega(d) \leq m}} \mu(d) S_d,$$

где S_d — число всех $qx + l$ с условием (3) кратных d . Но

$$S_d = \frac{W}{qd} + \theta_d.$$

Поэтому

$$T \ll \left| \sum_{\substack{d \setminus p \\ \Omega(d) \leq m}} \mu(d) \frac{W}{qd} \right| + \sum_{s=0}^m \binom{\sigma}{s}.$$

Далее находим (лемма 3 и лемма 17, а, гл. I)

$$\begin{aligned} \sum_{d \setminus p} \mu(d) \frac{W}{qd} &= \frac{W}{q} \frac{\prod_{p \leq b_1} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod_{p \nmid q} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} \ll \frac{W q^{2\varepsilon}}{q r^{1-2\varepsilon}} = \frac{W(rq)^{2\varepsilon}}{rq}; \\ \left| \sum_{\substack{d \setminus p \\ m < \Omega(d) \leq \sigma}} \mu(d) \frac{W}{qd} \right| &\ll \frac{W}{q} \sum_{s=m+1}^{\sigma} \sum_{\substack{d \setminus p \\ \Omega(d)=s}} \frac{1}{d} < \frac{W}{q} \sum_{s=m+1}^{\sigma} \frac{\left(\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_\sigma}\right)^s}{s!} < \\ &< \frac{W}{q} \sum_{s=m+1}^{\sigma} \left(\frac{e(c_2 + \log r)}{S}\right)^s \ll \frac{W}{q} \sum_{s=m+1}^{\sigma} \left(\frac{3}{4}\right)^s \ll \frac{W}{rq}. \end{aligned}$$

Наконец

$$\sum_{s=0}^m \binom{\sigma}{s} < \sum_{s=0}^m \sigma^s \ll b_1^m < \frac{W}{rq} \frac{rq}{b} b_1^{5 \log r} \ll \frac{W}{rq}.$$

Таким образом мы убеждаемся в справедливости леммы.

Теорема 2, а. Пусть $b_1 = e^{r^{1-2\varepsilon}}$, $N b_1^{-1} \leq A \leq N$,

$$(a, q) = 1, \quad 0 < q \leq e^{r^{\varepsilon}}, \quad S = \sum_{N-A < p \leq N} e^{2\pi i \frac{a}{q} p}.$$

Тогда имеем

$$S \ll \frac{A(rq)^{5\varepsilon}}{r\sqrt{q}}.$$

Доказательство. Пусть $b_0 = e^{r^{1-\varepsilon}}$, $b = e^{r^{1-1.5\varepsilon}}$ и P — произведение всех простых чисел, не превосходящих b_0 и не делящих q . Заставляя z пробегать взаимно простые с q числа интервала $N - A < z \leq N$ и полагая

$$f(z) = e^{\frac{2\pi i}{q} z},$$

применим лемму 2, а. Тогда получим

$$\sum_{\substack{N-A < z \leq N \\ (z, P_q)=1}} e^{\frac{2\pi i}{q} z} = \sum_{d \nmid p} \mu(d) S_d, \quad (4)$$

где имеем

$$S_d = \sum_{\substack{\frac{N-A}{d} < m \leq \frac{N}{d} \\ (m, q)=1}} e^{\frac{2\pi i}{q} dm}.$$

Одновременно с S_d будем рассматривать число Z_d целых чисел вида $qx+1$, кратных d и лежащих в интервале $N - A < qx+1 \leq N$. Если $d < N^{0.8}$, то, заменяя каждое m , входящее в S_d , наименьшим неотрицательным вычетом по модулю q , получим

$$S_d = \frac{A}{qd} \sum_{\substack{m=0 \\ (m, q)=1}}^{q-1} e^{\frac{2\pi i}{q} dm} + O(q) = \frac{A}{qd} \mu(q) + O(q) = \mu(q) Z_d + O(q).$$

Если $N^{0.8} < d \leq N$, то тривиально выводим

$$\tau(d) = 2^{\Omega(d)} = b_0^{\Omega(d)r^{\varepsilon-1} \log 2} > d^{r^{\varepsilon-1} \log 2} > e^{0.55r^{\varepsilon}}, \quad 1 < \frac{\tau(d)}{e^{0.55r^{\varepsilon}}},$$

$$|S_d| \leq \sum_{\substack{\frac{N-A}{d} < m \leq \frac{N}{d}}} 1, \quad Z_d \leq \sum_{\substack{\frac{N-A}{d} < m \leq \frac{N}{d}}} 1, \quad S_d - \mu(q) Z_d \ll \sum_{\substack{\frac{N-A}{d} < m \leq \frac{N}{d}}} 1.$$

Поэтому правая часть равенства (4) приводится к виду

$$\mu(q) R + O(N^{0.8}q + B); \quad R = \sum_{d \nmid p} \mu(d) Z_d; \quad B = \sum_{N^{0.8} < d \leq N} \sum_{\substack{\frac{N-A}{d} < m \leq \frac{N}{d}}} \frac{\tau(d)}{e^{0.55r^{\varepsilon}}}.$$

Заставляя z пробегать целые числа вида $qx+1$, лежащие в интервале $N - A < z \leq N$, и полагая $f(z) = 1$, применим лемму 2, а; тогда убедимся, что R как раз равно числу значений z , взаимно простых с P , и, следовательно, R не превосходит числа значений z , взаимно простых с произведением лишь простых чисел, не превосходящих b_1 и не делящихся на q . Поэтому (лемма 4)

$$R \ll \frac{A(rq)^{2\varepsilon}}{rq}.$$

Далее, полагая $N_m = \min\left(\frac{N-A}{m}, N^{0.8}\right)$, находим (лемма 17, с. гл. I)

$$B = \sum_{0 < m \leq N^{0.2}} \sum_{N_m < d \leq \frac{N}{m}} \frac{\tau(d)}{e^{0.55r^e}} \ll \sum_{0 < m \leq N^{0.2}} \frac{Ar}{m} e^{-0.55r^e} \ll \frac{A}{r\sqrt{q}}.$$

Следовательно, правая часть равенства (4) будет

$$\ll \frac{A(rq)^{2e}}{r\sqrt{q}}.$$

Обратимся к сумме, стоящей в левой части равенства (4). Для числа D ее слагаемых, отвечающих значениям z с условием $\mu(z)=0$, очевидно, имеем

$$D \ll \sum_{b_0 < p \leq \sqrt{N}} \left(\frac{A}{p^2} + 1\right) \ll \frac{A}{b_0} + \sqrt{N} \ll \frac{A}{r\sqrt{q}}.$$

Обозначая буквою k_0 максимум $\Omega(r)$ для остальных z , из очевидного неравенства $b_0^{k_0} \leq N$ выводим $k_0 \leq r^e$. Поэтому равенство (4) дает

$$\sum_{0 < k \leq k_0} H_k \ll \frac{A(rq)^{2e}}{r\sqrt{q}}; \quad k_0 \leq r^e; \quad H_k = \sum_{N-A < z_k \leq N} e^{2\pi i \frac{\alpha}{q} z_k}, \quad (5)$$

где z_k пробегает произведения, состоящие из k различных простых сомножителей, превосходящих b_0 .

При $k > 1$ рассмотрим сумму

$$L_k = \sum_{N-A < pv \leq N} \sum_{p|v} e^{2\pi i \frac{\alpha}{q} pv},$$

где p пробегает простые числа, превосходящие b_0 , а v пробегает произведения, состоящие из $k-1$ различных простых сомножителей, превосходящих b_0 . Слагаемых с условием $(p, v)=p$ сумма L_k , очевидно, имеет $\ll D$. Остальные же слагаемые суммы L_k — те же, что и слагаемые суммы H_k , причем каждое слагаемое последней суммы входит в L_k ровно k раз. Поэтому

$$H_k = \frac{1}{k} L_k + O\left(\frac{A}{r\sqrt{q}}\right).$$

Оценим L_k . Интервал $b_0 < p \leq N b_0^{-k+1}$ разобьем на $\ll r$ интервалов вида

$$Y < p \leq Y'; \quad 2Y \leq Y' \leq 3Y, \quad (6)$$

причем интервал (6) разобьем на $\ll Y b^{-1}$ интервалов вида

$$U < p \leq U + W; \quad b \leq W \leq 2b.$$

Положим

$$M = \sum_{U < p \leq U+W} \sum_{\frac{N-A}{p} < v \leq \frac{N}{p}} e^{2\pi i \frac{a}{q} pv}.$$

Ошибка, которую сделаем, заменив M суммой

$$M' = \sum_{U < p \leq U+W} \sum_{\frac{N-A}{U} < v \leq \frac{N}{U}} e^{2\pi i \frac{a}{q} pv},$$

очевидно, будет

$$\ll W \frac{N}{U^2} = \frac{WA}{U} \frac{N}{AU} \ll \frac{WA}{U} \frac{b_1 b}{b_0} \ll \frac{WA}{Ur^2 \sqrt{q}}.$$

Но ввиду $W \geq b$, $AU^{-1} \geq b_0^{k-1} b_1^{-1} \gg b$, при данных l и t с условиями $0 \leq l < q$, $0 \leq t < q$, $(l, q) = (t, q) = 1$, для числа $\xi(l)$ значений p вида $qx + l$ и для числа $\eta(t)$ значений v вида $qx + t$, лежащих, соответственно, в интервалах

$$U < p \leq U+W, \quad \frac{N-A}{U} < v \leq \frac{N}{U},$$

имеем неравенства (лемма 4)

$$\xi(l) \ll \frac{W(rq)^{2\epsilon}}{rq}; \quad \eta(t) \ll \frac{A(rq)^{2\epsilon}}{Ur q}.$$

При этом, полагая $\xi(l) = 0$ при $(l, q) > 1$ и $\eta(t) = 0$ при $(t, q) > 1$, будем иметь

$$M' = \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{t=0}^{q-1} \xi(l) \eta(t) e^{2\pi i \frac{a}{q} lt}.$$

Поэтому (лемма 10, а, гл. I)

$$M' \ll \frac{WA(rq)^{4\epsilon}}{Ur^2 \sqrt{q}}; \quad M \ll \frac{WA(rq)^{4\epsilon}}{Ur^2 \sqrt{q}}.$$

Вместе с тем часть суммы L_k , отвечающая интервалу (6), будет

$$\ll \frac{WA(rq)^{4\epsilon}}{Ur^2 \sqrt{q}} \frac{Y}{b} \ll \frac{A(rq)^{4\epsilon}}{r^2 \sqrt{q}}.$$

Отсюда следует, что

$$L_k \ll \frac{A(rq)^{4\epsilon}}{r \sqrt{q}}; \quad H_k \ll \frac{A(rq)^{4\epsilon}}{kr \sqrt{q}}.$$

Ввиду этого и неравенства

$$L_1 - S \ll b_0 \ll \frac{A}{r \sqrt{q}},$$

из (5) следует справедливость теоремы.

Теорема 2, в. Пусть $1 < H \leq e^{\tau}$; $\tau = NH^{-1}$;

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q \leq e^{0.5\tau}, \quad |z| \leq \frac{1}{q^{\tau}};$$

$$S = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}.$$

Тогда имеем

$$S \ll \frac{N(rq)^{5\epsilon}}{r\sqrt{q}}.$$

Доказательство. Интервал $0 < p \leq N$ разобьем на $[e^{\sqrt{r}}]$ интервалов длиной $A = N[e^{\sqrt{r}}]^{-1}$. Пусть

$$N_1 - A < p \leq N_1 \quad (7)$$

— один из таких интервалов. Полагая $r_1 = \log N_1$, будем иметь

$$N_1 e^{-\sqrt{r_1}} \leq A \leq N_1, \quad r - \sqrt{r} \leq r_1, \quad r^{0.5\epsilon} < r_1^{\epsilon}, \quad 0 < q \leq e^{r_1^{\epsilon}}.$$

Путем тривиального преобразования часть суммы S , отвечающая интервалу (7), представится в форме

$$\sum_{N_1 - A < p \leq N_1} e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} p + z N_1 \right)} + O\left(\frac{A^2}{q^{\tau}}\right),$$

что, согласно теореме 2, а, будет

$$\ll \frac{A(r_1 q)^{5\epsilon}}{r_1 \sqrt{q}} + \frac{A^2}{q^{\tau}} \ll \frac{A(rq)^{5\epsilon}}{r\sqrt{q}}.$$

Следовательно,

$$S \ll [e^{\sqrt{r}}] \frac{A(rq)^{5\epsilon}}{r\sqrt{q}} \ll \frac{N(rq)^{5\epsilon}}{r\sqrt{q}}.$$

Лемма 5. Пусть $0 < c \leq \frac{1}{6}$; $0 < \sigma \leq \frac{1}{3}$; $0 < \gamma \leq 1 - \sigma$;

P — произведение простых чисел, не превосходящих N^{σ} . Тогда, полагая

$$D = r^{\frac{\log r}{\log(1+c)}},$$

делители d числа P , не превосходящие N , можно распределить среди $< D$ совокупностей, причем для каждой совокупности существует свое φ с условием, что принадлежащие этой совокупности значения d удовлетворяют неравенствам

$$\varphi < d \leq \varphi^{1+c}.$$

Для некоторых совокупностей будет $\varphi \leq N^\gamma$; для каждой из остальных совокупностей существует целое положительное B и две возрастающие последовательности целых положительных чисел x и y такие, что все x лежат в некотором интервале $\varphi_0 < x \leq \varphi_0^{1+c}$, полностью лежащем в интервале $N^\gamma < x \leq N^{\gamma+c+c}$; причем все числа d рассматриваемой совокупности, взятые каждое B раз, и только эти числа, получим, если из всех произведений xu выберем лишь удовлетворяющие условию $(x, y)=1$.

Доказательство. Пусть τ — наибольшее целое с условием

$$2^{(1+c)\tau-1} \leq N^\tau.$$

Тогда имеем

$$(1+c)^{\tau-1} \leq \frac{r}{3 \log 2}; \quad \tau-1 \leq \frac{\log r - \log \log 8}{\log(1+c)}; \quad \tau < \frac{\log r}{\log(1+c)} - 1.$$

Полагая $b=[r]$, рассмотрим все невозрастающие ряды $t_1, \dots, t_b$, которые получим, выбирая каждое t_j среди чисел $\tau, \dots, 1, 0$. Пусть l_s — число чисел ряда $t_1, \dots, t_b$, равных s . Числами $l_\tau, \dots, l_1$ ряд $t_1, \dots, t_b$ определяется полностью; отсюда следует, что число всех таких рядов будет $< D$.

При $t_j > 0$ полагаем

$$\varphi_j = 2^{(1+c)t_j-1}, \quad F_j = \varphi_j^{1+c} = 2^{(1+c)t_j},$$

а при $t_j = 0$ полагаем

$$\varphi_j = F_j = 1.$$

Всякое d , не превосходящее N , является произведением $\leq b$ простых сомножителей; иначе было бы

$$2 \dots (b+2) \leq N, \quad \log 2 + \dots + \log(b+2) \leq r; \quad \int_1^r \log x dx \leq r;$$

$$r \log r \leq 2r - 1,$$

что невозможно, если c_0 достаточно велико. Располагая простые сомножители числа d в порядке убывания и, если их число h меньше b , полагая $p_{h+1} = \dots = p_b = 1$, представим d в форме $d = p_1 \dots p_b$. Среди рядов $t_1, \dots, t_b$ найдется единственный ряд с условиями

$$\begin{aligned} \varphi_j < p_j \leq F_j, \quad \text{при } t_j > 0; \\ \varphi_j = p_j = F_j, \quad \text{при } t_j = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

и мы будем говорить, что рассматриваемое d связано с этим рядом $t_1, \dots, t_b$. Полагая $\varphi = \varphi_1 \dots \varphi_b$, будем иметь $\varphi < d \leq \varphi^{1+c}$.

Предполагая, что $\varphi > N^\gamma$, рассмотрим совокупность всех d , связанных с данным рядом $t_1, \dots, t_b$. Обозначая буквою β наименьшее

целое число с условием $\varphi_1 \dots \varphi_\beta > N^\gamma$, находим (считаем $\varphi_1 \dots \varphi_{\beta-1} = 1$, если $\beta = 1$)

$$\varphi_1 \dots \varphi_{\beta-1} \leq N^\gamma, \quad \varphi_\beta \leq N^\tau, \quad \varphi_1 \dots \varphi_\beta \leq N^{\gamma+\tau}, \quad (\varphi_1 \dots \varphi_\beta)^{1+c} \leq N^{\gamma+\tau+c}.$$

Полагая $x = p_1 \dots p_\beta$, $y = p_{\beta+1} \dots p_b$, $\varphi_0 = \varphi_1 \dots \varphi_\beta$, убеждаемся, что все значения x лежат в интервале $\varphi_0 < x \leq \varphi_0^{1+c}$; при этом последний интервал полностью лежит в интервале $N^\gamma < x \leq N^{\gamma+\tau+c}$. Пусть далее $t_{\beta_1-k_1+1}, \dots, t_\beta, t_{\beta+1}, \dots, t_{\beta+k_2}$ — все значения t_j , равные t_β . Когда x и y независимо друг от друга пробегают все произведения с условиями (1), соединенными с условиями $p_1 > \dots > p_\beta$; $p_{\beta+1} \geq \dots \geq p_b$, где $p_s \geq p_{s+1}$ понимается в смысле $p_s > p_{s+1}$, при $p_s > 1$, и в смысле $p_s = p_{s+1}$, при $p_s = 1$, то произведение xy окажется равным одному из значений d рассматриваемой совокупности лишь в случае $(x, y) = 1$, причем в этом случае равенство $xy = d$ выполняется $B = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 \\ k_1 \end{pmatrix}$ раз.

Лемма 6. Пусть K — целое положительное; x и y пробегают целые положительные числа, принадлежащие двум возрастающим последовательностям; u и v пробегают произведения, состоящие соответственно из c_1 и c_2 сомножителей, каждый из которых принадлежит своей возрастающей последовательности целых положительных чисел.

Пусть далее

$$1 \leq U; 1 \leq X; N^{0.25} \ll UX \ll N^{0.75}; U' \ll U \ll U'; X' \ll X \ll X';$$

$$1/\bar{N} \leq \tau \leq Ne^{-r^{\epsilon_0}},$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad e^{r^{\epsilon_0}} \leq q \leq \tau; \quad \Delta = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}; f = \Delta^{-1}; K \ll f^2;$$

$$S = \sum_{k=1}^K \left| \sum_u \sum_x \sum_y \sum_v e^{2\pi i a k u x y v} \right|,$$

где суммирование распространяется на область

$$U < u \leq U'; \quad X < x \leq X'; \quad u x y v \leq N, \quad (x, y) = 1.$$

Тогда имеем

$$S \ll KN \left(\Delta^{1-\epsilon} + \left(\frac{1}{UX} + \frac{UX}{N} \right)^{0.5-\epsilon} \right).$$

Доказательство. Находим

$$S = \sum_{k=1}^K \left| \sum_d \mu(d) \sum_u \sum_{x'} \sum_{y'} \sum_v e^{2\pi i a k d^2 u x' y' v} \right|,$$

где d пробегает целые положительные числа, а x' и y' , при данном d , пробегает частные от деления на d значений x и y , кратных d ; при этом суммирование распространяется на область

$$U < u \leq U'; \quad X < dx' \leq X'; \quad d^2 ux' y' v \leq N.$$

Но число решений неопределенного уравнения $y'v = z$ не превосходит $\tau_{c_1+c_2+1}(z)$, причем, согласно лемме 17, б, гл. I, число решений неравенства $y'v \leq n$ будет $\ll n(\log n + 1)^{c_2}$; поэтому часть суммы S , отвечающая значениям d , превосходящим f , будет

$$\ll \sum_{d > f} \frac{KN}{d^2} r^{c_1+c_2} \ll \frac{KN}{f} r^{c_1+c_2} \ll KN \Delta^{1-\varepsilon},$$

и мы получим

$$S \ll \sum_{d \leq f} S_d + KN \Delta^{1-\varepsilon}; \quad S_d = \sum_{k=1}^K S_{d,k};$$

$$S_{d,k} = \sum_u \sum_{x'} \left| \sum_{y'} \sum_v e^{2\pi i a d^2 k u x' y' v} \right|; \quad S_d^2 \leq K \sum_{k=1}^K S_{d,k}^2.$$

Но число решений неопределенного уравнения $ux' = z$ не превосходит $\tau_{c_1+1}(z)$, причем, согласно лемме 17, б, гл. I,

$$\sum_{\frac{UX}{d} < z \leq \frac{U'X'}{d}} (\tau_{c_1+1}(z))^2 \ll \frac{UX}{d} r^{c_1^2+2c_1}.$$

Поэтому

$$S_{d,k}^2 \ll \frac{UX}{d} r^{c_1^2+2c_1} \sum_{\frac{UX}{d} < z \leq \frac{U'X'}{d}} \left| \sum_{d^2 y' v \leq N} \sum_{e^{2\pi i a d^2 k z y' v}} \right|^2 \ll$$

$$\ll \frac{UX}{d} r^{c_1^2+2c_1} \sum_{\frac{UX}{d} < z \leq \frac{U'X'}{d}} \sum_{d^2 z y_1' v_1 \leq N} \sum_{d^2 z y' v \leq N} \sum_{e^{2\pi i a d^2 k z (y_1' v_1 - y' v)}}.$$

Далее, изменим порядок суммирования. Очевидно,

$$y_1' v_1 \leq \frac{N}{d U X}; \quad y' v \leq \frac{N}{d U X},$$

причем z , при данных y_1' , v_1 , y' , v , пробегает целые числа интервала

$$\frac{UX}{d} < z \leq \min \left(\frac{U'X'}{d}, \frac{N}{d^2 y_1' v_1}, \frac{N}{d^2 y' v} \right).$$

Поэтому

$$S_{d,k}^2 \ll \frac{UX}{d} r^{c_1^2+2c_1} \sum_{y_1' v_1 \leq \frac{N}{d U X}} \sum_{y' v \leq \frac{N}{d U X}} \min \left(\frac{U'X'}{d}, \frac{1}{2(d^2 k (y_1' v_1 - y' v))} \right).$$

Пусть $\psi(t)$ — число решений неопределенного уравнения $y'v=t$. Тогда число T_s решений неопределенного уравнения $y'_1v_1 - y'v=s$ равно $\sum_t \psi(t)\psi(t+s)$, где t пробегает все целые числа с условиями

$$0 < t \leq \frac{N}{dUX}, \quad 0 < t+s \leq \frac{N}{dUX}.$$

Отсюда

$$T_s \leq \sqrt{\sum_t (\psi(t))^2 \sum_t (\psi(t+s))^2} \ll \sum_{0 < t \leq \frac{N}{dUX}} (\tau_{c_2+1}(t))^2 \ll \frac{N}{dUX} r^{c_1^2+2c_2}.$$

Вместе с тем находим

$$S_{d,k}^2 \ll \frac{N}{d^2} r^{c_1^2+2c_1+c_2^2+2c_2} \sum_{0 < s \leq \frac{N}{dUX}} \min\left(\frac{UX}{d}, \frac{1}{(\alpha d^2 ks)}\right),$$

$$S_d^2 \ll \frac{KN}{d^2} r^{c_1^2+2c_1+c_2^2+2c_2} \sum_{k=1}^K \sum_{0 < s \leq \frac{N}{dUX}} \min\left(\frac{UX}{d}, \frac{1}{(\alpha d^2 ks)}\right). \quad (2)$$

Сначала рассмотрим случай $N^{0.1} \leq q \leq N^{0.9}$. Все значения d интервала $1 \leq d \leq f$ распределим среди $\ll r$ интервалов вида

$$D < d \leq D', \quad D' \leq 2D.$$

Пусть $S(D)$ — часть суммы S , отвечающая такому новому интервалу; тогда

$$S(D) = \sum_{D < d \leq D'} Sd', \quad (S(D))^2 \leq D \sum_{D < d \leq D'} |Sd'|^2.$$

Замечая, что число решений неопределенного уравнения $d^2 ks=t$, когда d, k, s пробегают значения с условиями

$$D < d \leq D', \quad 0 < k \leq K, \quad 1 \leq s \leq \frac{N}{dUX},$$

будет $\ll N^{\varepsilon'}$ (лемма 17, а, гл. I), найдем

$$(S(D))^2 \ll \frac{KN}{D} N^{\varepsilon''} \sum_{0 < t \leq \frac{2DKN}{UX}} \min\left(\frac{UX}{D}, \frac{1}{(\alpha t)}\right) + \frac{K^2 N U X}{d} N^{\varepsilon''},$$

откуда, согласно лемме 8, а, гл. I (интервал длиной $\frac{2DKN}{UX}$ разбивается на $< \frac{2DKN}{UXq} + 1$ интервалов длиной $\leq q$),

$$(S(D))^2 \ll \frac{KN}{D} N^{\varepsilon''} \left(\frac{DKN}{UXq} + 1\right) \left(\frac{UX}{D} + q \log q\right) + \frac{K^2 N U X}{D} N^{\varepsilon''} \ll$$

$$\ll K^2 N^{2+\varepsilon'''} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{UX} + \frac{UX}{N} + \frac{q}{N}\right).$$

Отсюда без труда получаем неравенство, указанное в лемме.

Далее, рассмотрим случай $q < N^{0.1}$. Пусть $(d^2, q) = \delta$, $d^2 = d_1 \delta$, $q = q_1 \delta$, $(q_1, k) = z$, $q_1 = q_2 z$, $k = k_1 z$.

Тогда

$$\alpha d^2 k = \frac{ad_1 k_1}{q_2} + \frac{0 d_1 k_1}{q_2 \tau}; \quad \frac{d_1 k_1}{\tau} \leq \frac{1}{q_2}.$$

Поэтому (лемма 8, а, гл. I) часть правой части неравенства (2), отвечающая выбранному k , будет

$$\ll \frac{KN}{d^2} q^{s'} \left(\frac{N}{dUXq_2} + 1 \right) \left(\frac{U}{d} + q_2 \right) \ll \frac{KN}{d^2} q^{s'} \left(\frac{N}{d^2 q_2} + \frac{N}{dUX} + \frac{UX}{d} \right);$$

часть же, отвечающая всем k , с данными z , будет

$$\begin{aligned} \ll \frac{KN}{d^2} q^{s'} \left(\frac{NK}{d^2 q_2 z} + \frac{NK}{dUXz} + \frac{UX}{dz} \right) &\ll \frac{K^2 N^2}{d^2} q^{s'} \left(\frac{1}{d^2 q_1} + \frac{1}{dUX} + \frac{UX}{dN} \right) \ll \\ &\ll \frac{K^2 N^2}{d^2} q^{s'} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{UX} + \frac{UX}{N} \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$S_d^2 \ll \frac{K^2 N^2}{d^2} q^{s''} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{UX} + \frac{UX}{N} \right),$$

и указанное в лемме неравенство получается без всякого труда.

Наконец, рассмотрим случай $q > N^{0.9}$ (возможный лишь при $\tau > N^{0.9}$). Пусть $(d^2 k, q) = \delta$, $d^2 k = d_1 \delta$, $q = q_1 \delta$; тогда

$$\alpha d^2 k = \frac{ad_1}{q_1} + \frac{\theta d_1}{q_1 \tau} = \frac{ad_1}{q_1} + \frac{\theta \lambda}{q_1^2}; \quad \lambda = d^2 k.$$

Поэтому (лемма 8, а, гл. I)

$$\sum_{0 < s \leq \frac{N}{dUX}} \min \left(\frac{UX}{d}, \frac{1}{(\tau d^2 ks)} \right) \ll d^2 k \frac{UX}{d} + q_1 \log q_1,$$

$$S_d^2 \ll \frac{KN}{d^2} \left(\frac{N}{q} \right)^{\epsilon} K q \ll \frac{K^2 N^2}{d^2} \left(\frac{N}{q} \right)^{\epsilon} \frac{q}{N},$$

откуда без труда получаем неравенство, указанное в лемме.

Теорема 3. Пусть $V\bar{N} \leq \tau \leq N e^{-\tau^{\epsilon_0}}$;

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad e^{\tau^{\epsilon_0}} \leq q \leq \tau; \quad \Delta = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}}; \quad f = \Delta^{-1};$$

K — целое, $0 < K \leq f^2$; p пробегает простые числа,

$$S = \sum_{k=1}^K \left| \sum_{p \leq N} e^{2\pi i a k p} \right|.$$

Тогда имеем

$$S \ll KN (\Delta^{1-\epsilon} + N^{-0.2+\epsilon}).$$

Доказательство. Пусть $2 \leq H \leq N^{\frac{1}{3}}$; P — произведение простых p с условием $p \leq H$; Q — произведение простых p с условием $H < p \leq N$; s_0 — наибольшее целое, с условием $H^{s_0} < N$. При s , имеющем одно из значений $s=1, \dots, s_0$, полагая

$$\sum_{\substack{y_1 \in Q \\ y_1 \dots y_s \leq N}} \dots \sum_{\substack{y_s \in Q \\ y_s \leq N}} e^{2\pi i a k y_1 \dots y_s} = W_s, \quad (3)$$

имеем

$$W_s = \sum_{\substack{d_1 \in P \\ d_1 m_1 > 0}} \dots \sum_{\substack{d_s \in P \\ d_s m_s > 0}} \mu(d_1) \dots \mu(d_s) e^{2\pi i a k d_1 m_1 \dots d_s m_s}.$$

Пусть j — число натурального ряда и D_j — произведение j различных простых чисел. Полагаем

$$S_j = \sum_{D_j \in Q} e^{2\pi i a k D_j}.$$

Среди произведений $y_1 \dots y_s$, стоящих в показателях степеней левой части (3), данное D_j встречается s^j раз, так как каждый его простой сомножитель может входить в $y_1, y_2, \dots$ и, наконец, в y_s . Так как среди произведений $y_1 \dots y_s$ имеется одно, равное 1, и $\ll NH^{-1}$ произведений, делящихся на квадрат целого числа, превосходящего 1, то из (3) следует

$$sS_1 + s^2S_2 + \dots + s^sS_s = W_s + O(NH^{-1}). \quad (4)$$

Положим теперь $H = N^{0.2}$; тогда $s_0 = 4$. Равенство (4), при $s = 1, 2, 3, 4$ дает

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = W_1 + O(N^{0.8});$$

$$S_1 + 2S_2 + 4S_3 + 8S_4 = \frac{W_2}{2} + O(N^{0.8});$$

$$S_1 + 3S_2 + 9S_3 + 27S_4 = \frac{W_3}{3} + O(N^{0.8});$$

$$S_1 + 4S_2 + 16S_3 + 64S_4 = \frac{W_4}{4} + O(N^{0.8});$$

Поэтому

$$S_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} W_1 - \frac{\Delta_2}{2\Delta} W_2 + \frac{\Delta_3}{3\Delta} W_3 - \frac{\Delta_4}{4\Delta} W_4 + O(N^{0.8}),$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ — отвечающие элементам первого столбца миноры определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}.$$

Отсюда ввиду $S = \sum_{k=1}^K |S_k| + O(K\sqrt{N})$ находим

$$S \ll \sum_{k=1}^K |W_1| + \sum_{k=1}^K |W_2| + \sum_{k=1}^K |W_3| + \sum_{k=1}^K |W_4| + KN^{0.8}.$$

Мы ограничимся далее лишь оценкой четвертого слагаемого правой части этого неравенства, так как первые три слагаемые оцениваются аналогичным способом. При каждом $j=1, 2, 3, 4$ все значения d_j распределятся среди $< D$ совокупностей, согласно лемме 5 (при $\sigma=0.2$), а все значения m_j распределятся среди $\ll r$ совокупностей с условием вида

$$M_j < m_j \leq M'_j, \quad M'_j \leq 2M.$$

Пусть

$$T = \sum_{k=1}^K \left| \sum_{d_1} \sum_{d_2} \sum_{d_3} \sum_{d_4} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{m_3} \sum_{m_4} e^{2\pi i a k d_1 d_2 d_3 d_4 m_1 m_2 m_3 m_4} \right|, \\ \text{где суммирование по } d_1, d_2, d_3, d_4, m_1, m_2, m_3, m_4 \leq N$$

где суммирование распространяется на какие-либо четыре совокупности значений d_1, d_2, d_3, d_4 , определяемые неравенствами

$$\varphi^{(1)} < d_1 \leq F^{(1)}, \quad \varphi^{(2)} < d_2 \leq F^{(2)}, \quad \varphi^{(3)} < d_3 \leq F^{(3)}, \quad \varphi^{(4)} < d_4 \leq F^{(4)}, \\ F^{(j)} = (\varphi^{(j)})^{1+c},$$

и четыре совокупности значений m_1, m_2, m_3, m_4 , определяемые неравенствами

$$M_1 < m_1 \leq M'_1, \quad M_2 < m_2 \leq M'_2, \quad M_3 < m_3 \leq M'_3, \quad M_4 < m_4 \leq M'_4.$$

Достаточно рассматривать лишь случай

$$M_1 M_2 M_3 M_4 \varphi^{(1)} \dots \varphi^{(t)} > N^{0.8},$$

так как в противном случае (с может быть выбрано произвольно малым)

$$T \ll K N N^{-0.2+c}.$$

Пусть сначала $M_1 M_2 M_3 M_4 \leq N^{0.4}$. Пусть t — наименьшее целое число с условием $M_1 M_2 M_3 M_4 \varphi^{(1)} \dots \varphi^{(t)} > N^{0.4}$; очевидно $t \geq 1$. Определяя γ равенством $M_1 M_2 M_3 M_4 \varphi^{(1)} \dots \varphi^{(t-1)} N^\gamma = N^{0.4}$, имеем $\varphi^{(t)} > N^\gamma$. Полагаем $u = m_1 m_2 m_3 m_4 d_1 \dots d_{t-1}$, $d = d_t$.

Согласно лемме 5, существует целое положительное B и две возрастающие последовательности целых положительных чисел x и y с условиями $N^\gamma < x \leq N^{\gamma+0.2+c}$ такие, что все числа d_t , взятые каждое B раз, получим, если из всех произведений xu выберем лишь удовлетворяющие условиям

$$xu \leq N, \quad (x, y) = 1.$$

Значения u разобьем на $\ll r$ совокупностей, каждая из которых включает лишь значения с условием вида $U < u \leq U'$, $U' \leq 2U$; равным образом значения x разбиваем на $\ll r$ совокупностей, каждая из которых включает лишь значения с условием вида $X < x \leq X'$, $X' \leq 2X$. Если T_1 — отвечающая интервалам $U < u \leq U'$, $X < x \leq X'$ — часть суммы T , то, согласно лемме 6, имеем

$$T_1 \ll KN \left(\Delta^{1-\varepsilon} + \left(\frac{1}{UX} + \frac{UX}{N} \right)^{0.5-\varepsilon} \right),$$

откуда в силу (ε можно брать произвольно малым)

$$\frac{1}{UX} \ll \frac{1}{M_1 M_2 M_3 M_4 \varphi^{(1)} \dots \varphi^{(t-1)} N^\gamma} \ll N^{-0.4},$$

$$\frac{UX}{N} \ll \frac{M_1 M_2 M_3 M_4 F^{(1)} \dots F^{(t-1)} N^{\gamma+0.2+\varepsilon}}{N} \ll N^{-0.4+\varepsilon}$$

имеем

$$T_1 \ll KN (\Delta^{1-\varepsilon'} + N^{-0.2+\varepsilon'}); \quad T \ll KN (\Delta^{1-\varepsilon''} + N^{-0.2+\varepsilon''}).$$

Теперь рассмотрим случай $M_1 M_2 M_3 M_4 > N^{0.4}$. Не нарушая общности, можно допустить, что M_4 — наибольшее из всех M_1, M_2, M_3, M_4 .

Сначала предположим, что $M_4 \leq N^{0.2}$. Пусть t — наименьшее число с условием $M_1 \dots M_t > N^{0.4}$. Тогда, полагая $u = m_1 \dots m_t$, $v = m_{t+1} \dots m_4 d_1 d_2 d_3 d_4$, $U = M_1 \dots M_t$, имеем $N^{0.4} < U \leq N^{0.6}$, $U < u \leq 16U$. Поэтому, применяя лемму 6 ($x=y=1$), получим

$$T \ll KN \left(\Delta^{1-\varepsilon} + \left(\frac{1}{U} + \frac{U}{N} \right)^{0.5-\varepsilon} \right) \ll KN (\Delta^{1-\varepsilon} + N^{-0.2+\varepsilon}).$$

Допустим теперь, что $M_4 > N^{0.2}$. Если при этом $N^{0.1} \leq q \leq N^{0.9}$, или же при одном из условий $q < N^{0.1}$, $q > N^{0.9}$ будет $M_4 > N\Delta^2$, то число решений неопределенного уравнения $kd_1 d_2 d_3 d_4 m_1 m_2 m_3 = z$ будет $\ll \Delta^{-\varepsilon}$. Поэтому (лемма 8, b, гл. I)

$$T \ll \Delta^{-\varepsilon} \sum_{0 < z \leq \frac{KN}{M_4}} \min \left(\frac{KN}{z}, \frac{1}{2(\alpha z)} \right) \ll KN \Delta^{-\varepsilon} \left(\frac{q}{N} + \frac{1}{q} + N^{-0.2} \right) \ll$$

$$\ll KN (\Delta^{1-\varepsilon''} + N^{-0.2+\varepsilon''}).$$

Если, наконец, при одном из условий $q < N^{0.1}$, $q > N^{0.9}$ будет $M_4 \leq N\Delta^2$, то применим лемму 6, положив $u = m_4$, $v = d_1 d_2 d_3 d_4 m_1 m_2 m_3$; получим ($x=y=1$)

$$T \ll KN \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{N^{0.2}} + \Delta^2 + \frac{q}{N} \right)^{0.5-\varepsilon} \ll KN \Delta^{1-\varepsilon'}.$$

Из всего доказанного следует справедливость теоремы.

Глава X

Проблема Гольдбаха

В настоящей главе я даю решение проблемы Гольдбаха о представимости всякого нечетного $N \geq c_0$, где c_0 достаточно велико, суммой трех простых чисел и вывожу асимптотическую формулу для числа представлений.

Применяемый здесь метод дает возможность решать и более общие аддитивные проблемы с простыми числами; например, при целом $n > 1$, вопрос о представлении целого $N \geq c_0$ в форме

$$N = p_1^n + \dots + p_s^n$$

(проблема Варинга с простыми числами). Но этих общих вопросов я здесь не рассматриваю.

Для решения проблемы Гольдбаха я рассматриваю интеграл, сходный с тем, который указали для этой цели Hardy и Littlewood. Как и в главах IV и VII, интервал интегрирования я разбиваю на основные и дополнительные интервалы. Для рассмотрения части интеграла, отвечающей основным интервалам, незадолго до появления моей работы 1937 г. о проблеме Гольдбаха, английскими учеными был разработан общий метод (метод Estermann'a, основанный на результатах Page'a о распределении простых чисел в арифметических прогрессиях), применимый как к проблеме Гольдбаха, так и к более общим аддитивным проблемам с простыми числами. Этот метод основан на современной теории L -рядов. Здесь для рассмотрения той же части интеграла я пользуюсь упрощенным результатом Page'a (лемма 1) в соединении с некоторыми элементами метода V. Brun'a (теорема 2, гл. IX). Для оценки части интеграла, отвечающей дополнительным интервалам, я пользуюсь исключительно моим общим методом.

Специальные обозначения. В настоящей главе p всегда обозначает простое число; N — целое с условием $N \geq c_0$, где c_0 достаточно велико; наконец, $\log N = r$.

Лемма 1 (Page). Пусть, при данном ε_0 , заданы произвольно большие c_1 и c . Тогда число $\pi(N, q, l)$ простых чисел, не превосходящих N , заключенных в арифметической прогрессии

$$qx + l, \quad 0 < q \leq r^{c_1}, \quad (q, l) = 1, \quad 0 \leq l < q,$$

выражается формулой

$$\pi(N, q, l) = \frac{1}{q_1} \int_1^N \frac{dx}{\log x} + H; \quad q_1 = \varphi(q),$$

где для всех q , кроме, быть может, ряда исключительных q , являющихся кратными какого-то одного $q = q_0$, удовлетворяющего условию

$$q_0 \geq r^{2-\varepsilon_0},$$

имеем неравенство

$$H \ll \frac{Nr^{-c}}{q_1 r}.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы я не имею возможности поместить здесь. Оно дано Page'ем [Proceedings of the London Mathematical Society (2) 39 (1935), 116—141]. Доказательство основано на общей теории L -рядов, разработанной трудами Dirichlet, Riemann'a, Hadamard'a, Vallée Poussin'a, Hardy — Littlewood'a, Landau и др.

Лемма 2. Пусть $\tau = Nr^{-c}$, где $c \geq 4$, и пусть

$$R = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} (J(z))^3 e^{-2\pi izN} dz; \quad J(z) = \int_2^N \frac{e^{2\pi izx}}{\log x} dx.$$

Тогда имеем

$$R = \frac{N^2}{2r^3} + O\left(\frac{N^2}{r^4}\right).$$

Доказательство. Интеграл R сравним с интегралом

$$R_0 = \int_{-0.5}^{0.5} (I(z))^3 e^{-2\pi izN} dz; \quad I(z) = \int_2^N \frac{e^{2\pi izx}}{x} dx.$$

Имеем

$$R - R_0 = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} ((J(z))^3 - (I(z))^3) e^{-2\pi izN} dz + \left(\int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} (I(z))^3 e^{-2\pi izN} dz - R_0 \right).$$

Но в подынтегральном выражении первого слагаемого правой части имеем

$$|J(z) - I(z)| < \int_2^N \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{r} \right) dx \ll \frac{N}{r^2}.$$

Поэтому это первое слагаемое (лемма 14, б, гл. I)

$$\ll \int_{-\frac{1}{r}}^{\frac{1}{r}} \frac{N}{r^2} 3Z^2 dz \ll \int_0^{N^{-1}} \frac{N^3}{r^4} dz + \int_{N^{-1}}^{\frac{1}{r}} \frac{N}{r^4 z^2} dz \ll \frac{N^2}{r^4}.$$

Второе же слагаемое правой части

$$\ll \int_{\frac{1}{r}}^{0.5} Z^3 dz \ll \int_{\frac{1}{r}}^{N^{-0.5}} \frac{dz}{z^3 r^3} + \int_{N^{-0.5}}^{0.5} \frac{dz}{z^3} \ll \frac{N^2}{r^{1.5}};$$

следовательно, $R - R_0 \ll N^2 r^{-4}$. Кроме того, полагая

$$R' = \int_{-0.5}^{0.5} (S(z))^3 e^{-2\pi i z N} dz; \quad S(z) = \sum_{x=3}^N \frac{e^{2\pi i z x}}{r},$$

мы будем иметь (лемма 13, гл. I)

$$I(z) - S(z) \ll r^{-1}; \quad Z \gg r^{-1};$$

$$R_0 - R' \ll \int_0^{0.5} Z^2 r^{-1} dz = \int_0^{N^{-1}} \frac{N^2}{r^3} dz + \int_{N^{-1}}^{N^{-0.5}} \frac{dz}{r^3 z^2} + \int_{N^{-0.5}}^{0.5} \frac{dz}{r z^2} \ll \frac{N}{r^3}.$$

Поэтому $R - R' \ll N^2 r^{-4}$. Но $r^3 R'$, очевидно, выражает число представлений числа N в форме

$$N = x_1 + x_2 + x_3,$$

где x_1, x_2, x_3 — целые, превосходящие 2. При каждом $x_1 = 3, 4, \dots$, $N - 6$ равенство $x_2 + x_3 = N - x_1$ осуществляется $N - x_1 - 5$ раз; следовательно,

$$r^3 R' = \sum_{x_1=3}^{N-6} (N - x_1 - 5) = \frac{(N-7)(N-8)}{2} = \frac{N^2}{2} + O(N),$$

откуда и убеждаемся в справедливости леммы.

Теорема. Число $I(N)$ представлений нечетного положительного N в виде суммы трех простых чисел

$$N = p_1 + p_2 + p_3$$

выражается формулой

$$I(N) = \frac{N^2}{2r^3} S(N) + O\left(\frac{N^2}{r^{3.5-\sigma}}\right),$$

где

$$S(N) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod'' \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right),$$

причем $\prod_p$ распространяется на все простые числа, а $\prod''$ — лишь на простые делители числа N . Кроме того,

$$S(N) > 0.6.$$

Следствие (теорема Гольдбаха). Существует c_0 с условием, что всякое нечетное $N \geq c_0$ может быть представлено в виде суммы трех простых чисел

$$N = p_1 + p_2 + p_3.$$

Доказательство. Полагая $\tau = Nr^{-14}$, имеем (лемма 4, гл. I)

$$I(N) = \int_{-\tau^{-1}}^{-\tau^{-1}+1} S_\alpha^3 e^{-2\pi i \alpha N} d\alpha; \quad S_\alpha = \sum_{p \leq N} e^{2i\pi \alpha p}.$$

Интервалы, включающие все α вида

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad (a, q) = 1, \quad -\tau^{-1} \leq z \leq \tau^{-1}, \quad 0 < q \leq r^3,$$

назовем основными интервалами; интервалы, оставшиеся после выделения из интервала $-\tau^{-1} \leq z \leq -\tau^{-1} + 1$ основных интервалов, назовем дополнительными. Согласно лемме 7, гл. I, всякое α дополнительного интервала может быть представлено в форме

$$\alpha = \frac{a}{q} + z, \quad (a, q) = 1, \quad -\frac{1}{q\tau} \leq z \leq \frac{1}{q\tau}, \quad r^3 < q \leq \tau.$$

Нетрудно видеть, что основные интервалы, отвечающие различным парам значений a и q , при достаточно большом N не могут содержать общих значений α . Действительно, из

$$\frac{a}{q} + z = \frac{a_1}{q_1} + z_1, \quad \frac{a}{q} \geq \frac{a_1}{q_1}, \quad |z| \leq \frac{1}{\tau}, \quad |z_1| \leq \frac{1}{\tau}$$

следовало бы

$$\left| \frac{aq_1 - a_1q}{qq_1} \right| \leq \frac{2}{\tau}, \quad \frac{1}{qq_1} \leq \frac{2}{\tau}, \quad N \leq 2r^{20}.$$

Соответственно указанному подразделению интервала интегрирования на основные и дополнительные интервалы, интеграл $I(N)$ разобьется на сумму двух слагаемых

$$I(N) = I_1(N) + I_2(N).$$

1. Оценка $I_2(N)$. Согласно теореме 1, гл. IX, при $q > r^{14}$ имеем

$$S_\alpha \ll Nr^{4.5} \left(\sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}} + e^{-0.5V^2} \right) \ll Nr^{-2.5},$$

а, согласно теореме 2, б, гл. IX, при $r^3 < q \leq r^{14}$ имеем

$$S_\alpha \ll Nr^{-2.5 + \epsilon_1}.$$

Поэтому (ср. 3, гл. IV)

$$\begin{aligned} I_2(N) &\ll Nr^{-2.5 + \epsilon_1} \int_0^1 |S_\alpha|^2 d\alpha = \\ &= Nr^{-2.5 + \epsilon_1} \int_0^1 \sum_{p' \leq N} \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha (p' - p)} d\alpha \ll N^2 r^{-3.5 + \epsilon_1}. \end{aligned}$$

2. Основные интервалы, отвечающие значению q , не принадлежащему к числу исключительных. Назначив какое-либо ϵ_0 и полагая $c_1 = 3$, $c = 48$; для H , указанного в лемме 1, будем иметь

$$H \ll \frac{Nr^{-49}}{q_1},$$

кроме, быть может, ряда исключительных q , кратных некоторого одного $q = q_0$, удовлетворяющего условию

$$q_0 \geq r^{2 - \epsilon_0}.$$

Мы рассмотрим часть $I_{\alpha, q}$ интеграла $I_1(N)$, отвечающую интервалу, включающему дробь $\frac{a}{q}$ со значением q , не принадлежащим к числу исключительных и удовлетворяющим условию $q \leq r^3$. Взяв какое-либо α такого интервала, сумму S_α разобьем на $[r^{31}]$ сумм вида

$$S_{\alpha, N_1} = \sum_{N_1 - A < p \leq N_1} e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} + z \right) p}; \quad A = N[r^{31}]^{-1}.$$

Для слагаемых этой суммы $|zp - zN_1| \leq zA$; число же этих слагаемых (лемма 1 с $q = 1$) будет $\ll Ar^{-1}$, причем $zAAr^{-1} \ll Ar^{-18}$. Поэтому

$$S_{\alpha, N_1} = e^{2\pi i z N_1} \sum_{N_1 - A < p \leq N_1} e^{2\pi i \frac{a}{q} p} + O(Ar^{-18}).$$

Но, при данном l с условиями $0 \leq l < q$, $(l, q) = 1$, число простых p вида $qx + l$, лежащих в интервале $N_1 - A < p \leq N_1$, выражается формулой (лемма 1)

$$\frac{1}{q_1} \int_{N_0}^{N_1} \frac{dx}{\log x} + O\left(\frac{Ar^{-18}}{q_1}\right); \quad N_0 = \min(2, N_1 - A);$$

Поэтому

$$S_{\alpha, N_1} = \sum_l e^{2\pi i \frac{\alpha}{q} l} \frac{1}{q_1} \int_{N_1-A}^{N_2} \frac{e^{2\pi i z N_1}}{\log x} dx + O(Ar^{-18}).$$

Далее, находим

$$\sum_l e^{2\pi i \frac{\alpha}{q} l} = \mu(q); |zN_1 - zx| \leq |z|A; \frac{1}{q_1} \int_{N_1-A}^{N_1} \frac{zA}{\log x} dx \ll \frac{|z|A^2}{q_1 r} \ll Ar^{-18};$$

$$S_{\alpha, N_1} = \frac{\mu(q)}{q_1} \int_{N_1-A}^{N_1} \frac{e^{2\pi i zx}}{\log x} dx + O(Ar^{-18});$$

$$S_{\alpha} = \frac{\mu(q)}{q_1} J(z) + O(Nr^{-18}); \quad J(z) = \int_2^N \frac{e^{2\pi i zx}}{\log x} dx.$$

Но (лемма 14, б, гл. I)

$$\frac{1}{q_1} J(z) \ll \frac{Z}{q_1}; \quad \frac{Z}{q_1} \gg \frac{r^{-1}}{q_1} \gg Nr^{-18}; \quad S_{\alpha}^3 - \frac{\mu(q)}{q_1^3} (J(z))^3 \ll \frac{Z^2}{q_1^2} Nr^{-18};$$

$$I_{\alpha, q} - \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} \frac{\mu(q)}{q_1^3} (J(z))^3 e^{-2\pi i \left(\frac{\alpha}{q} + z\right) N} dz \ll \int_0^{\tau^{-1}} Z^2 q_1^{-2} Nr^{-18} dz \ll \\ \ll Nr^{-18} q_1^{-2} \left(\int_0^{N^{-1}} N^2 r^{-2} dz + \int_{N^{-1}}^{\tau^{-1}} \frac{dz}{r^2 z^2} \right) \ll N^2 r^{-20} q_1^{-2}.$$

Суммируя, при данном q , на все a ряда $0, 1, \dots, q-1$, взаимно простые с q , и замечая, что эти значения a по модулю q сравнимы в некотором порядке с теми значениями, которые принимает $-a$, получим,

$$\sum_a I_{\alpha, q} = G(q)R + O(N^2 r^{-20} q_1^{-1}); \\ G(q) = \frac{\mu(q)}{q_1^3} \sum_a e^{2\pi i \frac{\alpha}{q} N}; \quad R = \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} (J(z))^3 e^{-2\pi i z N} dz,$$

откуда, ввиду леммы 2 и неравенства $|G(q)| \leq q_1^{-2}$, легко найдем

$$\sum_a I_{\alpha, q} = \frac{N^2}{2r^3} G(q) + O\left(\frac{N^2}{r^4 q_1^2}\right).$$

3. Основные интервалы, отвечающие исключительному значению q . Пусть теперь q принадлежит к числу исключительных. Имеем

$$I_{\alpha, q} = \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} \sum_{p' < N} \sum_{p'' < N} \sum_{p''' < N} e^{2\pi i \left(\frac{\alpha}{q} + z\right) (p' + p'' + p''' - N)} dz.$$

Пусть $D=[r^{3.1}]$, $A=ND^{-1}$; тогда

$$I_{a,q} = \sum_{s'=1}^D \sum_{s''=1}^D \sum_{s'''=1}^D I'_{a,q},$$

где

$$I'_{a,q} = \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} \sum_{(s'-1)A < p' < s'A} \sum_{(s''-1)A < p'' < s''A} \sum_{(s'''-1)A < p''' < s'''A} e^{2\pi i \left(\frac{a}{q} + z \right) (p' + p'' + p''' - N)} dz.$$

С ошибкой $\ll A^4 r^{-3.2} \ll N^2 r^{-6} D^{-3}$, получаемой от замены zp' , zp'' , zp''' произведениями $zs'A$, $zs''A$, $zs'''A$, интеграл $I'_{a,q}$ равен произведению UW , где

$$U = \sum_{(s'-1)A < p' < s'A} \sum_{(s''-1)A < p'' < s''A} \sum_{(s'''-1)A < p''' < s'''A} e^{2\pi i \frac{a}{q} (p' + p'' + p''' - N)}$$

$$W = \int_{-\tau^{-1}}^{\tau^{-1}} e^{2\pi i z (s' + s'' + s''' - D)A} dz.$$

Но (теорема 2, а, гл. IX)

$$U \ll \frac{A^3 r^{e_3}}{r^3 q^{1.5}}, \quad W \ll \min \left(\frac{1}{\tau}, \frac{1}{|s' + s'' + s''' - D|A} \right).$$

Кроме того, при данном целом $h \ll D$ число решений $s' + s'' + s''' - D = h$ будет $\ll D^2$. Поэтому (обозначения 2)

$$I_{a,q} \ll \frac{N^2}{r^6} + \frac{A^3 r^{e_3}}{r^3 q^{1.5}} D^2 \left(\frac{1}{\tau} + \sum_{h=1}^{2D} \frac{1}{hA} \right) \ll \frac{N^2 r^{e_3}}{r^3 q^{1.5}}; \quad \sum_a I_{a,q} \ll \frac{N^2 r^{e_3}}{r^3 q^{0.5}}.$$

Отсюда ввиду $N^2 r^{-3} G(q) \ll N^2 r^{-3} q_1^{-2}$, ради единообразия

$$\sum_a I_{a,q} = \frac{N^2}{2r^3} G(q) + O \left(\frac{N^2 r^{e_3}}{r^3 q^{0.5}} \right).$$

4. Предварительная формула для $I(N)$. Находим (2, 3 и 1)

$$I_1(N) = \sum_{q \leq r^3} \frac{N^2}{2r^3} G(q) \ll \sum_{q \leq r^3} \frac{N^2}{r^4 q_1^2} + \sum_{s \leq r^2 q_0^{-1}} \frac{N^2 r^{e_3}}{r^3 (q_0 s)^{0.5}} \ll$$

$$\ll \frac{N^2}{r^4} + \frac{N^2 r^{e_3}}{r^3 \sqrt{q_0}} \sqrt{\frac{r^3}{q_0}} \ll \frac{N^2 r^{e_3}}{r^{3.5}}; \quad \sum_{q > r^3} \frac{N^2}{2r^3} G(q) \ll \sum_{q > r^3} \frac{N^2}{r^3 q_1^2} \ll \frac{N^2}{r^3};$$

$$I(N) = \frac{N^2}{2r^3} S(N) + O \left(\frac{N^2 r^{e_3}}{r^{3.5}} \right); \quad S(N) = \sum_{q=1}^{\infty} G(q).$$

5. Преобразование и исследование $S(N)$. Исследуем ряд $S(N)$. Нетрудно показать, что при положительных попарно простых $q_1, \dots, q_k$ будем иметь

$$G(q_1) \dots G(q_k) = G(q_1 \dots q_k). \quad (1)$$

Для доказательства достаточно рассмотреть случай $k=2$. Полагая $\varphi(q_1) = q_{1,1}$, $\varphi(q_2) = q_{2,1}$, имеем

$$\begin{aligned} G(q_1) G(q_2) &= \frac{\mu(q_1) \mu(q_2)}{q_{1,1}^3 q_{2,1}^3} \sum_{\substack{0 \leq a_1 < q_1 \\ (a_1, q_1) = 1}} \sum_{\substack{0 \leq a_2 < q_2 \\ (a_2, q_2) = 1}} e^{2\pi i \left(\frac{a_1}{q_1} N + \frac{a_2}{q_2} N \right)} = \\ &= \frac{\mu(q_1) \mu(q_2)}{(q_{1,1} q_{2,1})^3} \sum_{a_1} \sum_{a_2} e^{\frac{2\pi i (a_1 q_2 + a_2 q_1) N}{q_1 q_2}} = G(q_1, q_2), \end{aligned}$$

так как $\mu(q_1) \mu(q_2) = \mu(q_1 q_2)$, $q_{1,1} q_{2,1} = \varphi(q_1 q_2)$, и $a_1 q_2 + a_2 q_1$ пробегает приведенную систему вычетов по модулю $q_1 q_2$.

Ряд $S(N)$ абсолютно сходится ввиду $G(q) \ll q_1^{-2}$.

Ряд

$$\xi_p = 1 + G(p) + G(p^2) + \dots$$

также абсолютно сходится, так как его члены входят в $S(N)$. Применяя (1), при $x > 2$, имеем

$$\prod_{p \leq x} \xi_p = \sum_{q \leq x} G(q) + \sum'_{q > x} G(q),$$

где Σ' распространяется на значения q_1 , не делящиеся на простые $> x$. Ввиду абсолютной сходимости $S(N)$ при беспредельном возрастании x , первое слагаемое правой части стремится к $S(N)$; второе же слагаемое — стремится к нулю. Поэтому, обозначая символом $\prod_p$

произведение, распространенное на все простые числа, имеем

$$S(N) = \prod_p \xi_p.$$

Но $G(p^s) = 0$ при $s > 1$ и, кроме того, очевидно,

$$G(p) = \begin{cases} \frac{1}{(p-1)^1}, & \text{если } N \text{ не делится на } p \\ -\frac{1}{(p-1)^2}, & \text{если } N \text{ делится на } p. \end{cases}$$

Поэтому

$$S(N) = \Pi' \left(1 + \frac{1}{(p-1)^1} \right) \Pi'' \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right), \quad (2)$$

где Π' распространяется на значения p , не делящие N , а Π'' — на значения p , делящие N . Но имеем

$$\Pi' \left(1 + \frac{1}{(p-1)^4} \right) > 1; \quad \Pi'' \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right) > \Pi \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) = \frac{6}{\pi^2} > 0.6,$$

так как в Π'' , ввиду нечетности N , входят лишь нечетные простые числа и потому всегда $p_1 - 1 \geq p$, где p — ближайшее к p_1 простое число, меньшее p_1 . Таким образом, действительно $S(N) > 0.6$.

Равенство (2) можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} S(N) &= \Pi_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) \Pi'' \frac{1 - \frac{1}{(p-1)^2}}{1 + \frac{1}{(p-1)^3}} = \\ &= \Pi_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3} \right) \Pi'' \left(1 - \frac{\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}}{1 + \frac{1}{(p-1)^3}} \right), \end{aligned}$$

что уже легко приводится к виду, указанному в формулировке теоремы.

ГЛАВА XI

Распределение дробных частей значений функции αp

В настоящей главе результаты главы IX применяются к решению вопроса о распределении дробных частей значений функции αp , когда p пробегает простые числа, не превосходящие N .

Применяемый здесь метод дает возможность решать и общий вопрос о распределении дробных частей значений функции $f(p)$ в случае, когда $f(p)$ — целый многочлен степени выше первой, и в случаях, когда $f(p)$ — функция в известном смысле хорошо аппроксимируемая целым многочленом. Но этих вопросов мы здесь не касаемся.

Специальные обозначения. В настоящей главе p всегда обозначает простое число; N — обозначает целое число $\geq c_0$, где c_0 достаточно велико. Кроме того, полагаем

$$r = \log N; \pi(N) = \sum_{p \leq N} 1.$$

Теорема. Пусть $\sqrt{N} \leq \tau \leq Ne^{-r^2}$; α — вещественное,

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1; e^{r^2} \leq q \leq \tau;$$

$0 < \beta < 1$; H обозначает число простых чисел с условиями $p \leq N$, $\{\alpha p\} < \beta$. Тогда

$$H = \beta \pi(N) + O(N^\gamma); \quad \gamma = \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{N}\right)^{0.5 - \epsilon} + N^{-0.2 + \epsilon}.$$

Доказательство. Положим

$$\epsilon_1 = 0.5 \epsilon, \Delta = \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{N}\right)^{0.5 - \epsilon_1} + N^{-0.2 + \epsilon_1}; \quad K_1 = [\Delta^{-2}]; \quad S_m = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i m \alpha p}.$$

Тогда, согласно теореме 3, гл. IX, при любом целом $K \leq K_1$, полагая

$$U_K = \sum_{m \leq K} |S_m|,$$

будем иметь

$$U_K \ll KN\Delta.$$

При $\Delta \geq 0.25$ теорема очевидна; поэтому рассмотрим лишь случай $\Delta < 0.25$. Взяв любые вещественные A и B с условием $0 \leq B - A \leq 1 - 2\Delta$,

рассмотрим периодическую функцию $\psi(z)$ с периодом 1, указанную в лемме 12, гл. I, при предположениях

$$r = 1, \alpha + 0.5\Delta = A, \quad \beta - 0.5\Delta = B.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \psi(\alpha p) &= 1, \text{ если } A \leq \alpha p \leq B \pmod{1}; \\ 0 \leq \psi(\alpha p) &\leq 1, \text{ если } A - \Delta \leq \alpha p \leq A \pmod{1}, \text{ или } B \leq \alpha p \leq B + \Delta \pmod{1}; \\ \psi(\alpha p) &= 0, \text{ если } B + \Delta \leq \alpha p \leq A - \Delta + 1 \pmod{1}; \end{aligned}$$

$$\psi(\alpha p) = (B - A + \Delta) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos 2\pi m \alpha p + b_m \sin 2\pi m \alpha p), \quad (1)$$

где, определяя h_m равенствами

$$h_m = \frac{1}{m}, \text{ если } m \leq \frac{1}{\Delta}; \quad h_m = \frac{1}{\Delta m^2}, \text{ если } m > \frac{1}{\Delta},$$

будем всегда иметь

$$a_m \ll h_m, \quad b_m \ll h_m.$$

Из (1) следует

$$\sum_{p \leq N} \psi(\alpha p) = \pi(N)(B - A + \Delta) + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m S_m' + b_m S_m''),$$

где S' и S'' определяются равенством $S_m = S_m' + iS_m''$. Поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty} (a_m S_m' + b_m S_m'') \ll \sum_{m=1}^{\infty} h_m |S_m| = \sum_{m \leq K_1} h_m |S_m| + \sum_{m > K_1} h_m |S_m|.$$

Отсюда, замечая, что при любом целом $m \geq 1$

$$0 < h_m - h_{m+1} \ll \frac{1}{m^2},$$

находим

$$\begin{aligned} \sum_{m \leq K_1} h_m |S_m| &= h_1 U_1 + h_2 (U_2 - U_1) + h_3 (U_3 - U_2) + \\ &+ \dots + h_{K_1} (U_{K_1} - U_{K_1-1}) = U_1 (h_1 - h_2) + U_2 (h_2 - h_3) + \\ &+ \dots + U_{K_1-1} (h_{K_1-1} - h_{K_1}) + h_{K_1} U_{K_1} \ll N \Delta \log K_1 + N \Delta^2 \ll N \gamma. \end{aligned}$$

Замечая, что всегда $|S_m| \ll N$, получим также

$$\sum_{m > K_1} h_m |S_m| \ll \sum_{m > K_1} \frac{N}{\Delta m^2} \ll \frac{N}{\Delta K_1} \ll N \Delta \ll N \gamma.$$

Поэтому

$$\sum_{p \leq N} \psi(\alpha p) = \pi(N)(B - A) + O(N \gamma).$$

Отсюда, рассуждая далее аналогично тому, как при доказательстве теоремы гл. VIII, уже без всякого труда убедимся в справедливости нашей теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie, 1, 153—156, Leipzig, 1927.
 2. Mordell L. J. On a sum analogous to a Gauss's sum. Quart. Journ. of Math., Oxford ser. 3, 161—167, 1932.
 3. Hua Loo-Keng. Аддитивная теория простых чисел. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 22, 1947.
 4. Виноградов И. М. Sur la distribution des résidus et des non-résidus des puissances. Журнал Физико-матем. об-ва при Пермском ун-те, вып. 1, 94 — 96, 1918.
 5. Виноградов И. М. Уточнение метода оценки сумм с простыми числами. Изв. АН СССР, серия матем., 7, 17—34, 1943.
 6. Davenport H. On character sums in finite fields. Acta Mathem., 71, 99—121, 1939.
 7. Виноградов И. М. Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена. Изв. АН СССР, 21, № 7/8, 567—578, 1927.
 8. Линник Ю. В. О суммах Weyl'я. ДАН СССР, 34, № 7, 201—203, 1942.
 9. Чудаков, Н. Г. О нулях L -функций Dirichlet. Матем. сборник 1, (43), № 4, 591—602, 1936.
 10. Van der Corput J. G. Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme. Mathem. Ztschr., 17, 250—259, 1923.
 11. Виноградов И. М. О распределении дробных долей значений функций двух переменных. Изв. Ленингр. политехн. ин-та. 33, 31—52, 1927.
 12. Van der Corput J. G. Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme. II. Mathem. Ztschr., 28, 301—310, 1928.
 13. Titchmarsh E. G. The zeta-function of Riemann. Cambridge, University press. 1930.
 14. Brun V. Ueber das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, 34, H. 2. N° 8, 1915.
 15. Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie, 1, 106—109.
 16. Landau E. Vorlesungen über Zahlentheorie, 1, 243—275.
 17. Hua Loo-Keng. Some Results in the Additive Prime-Number Theorie. Quarterly Journal of Mathem., Oxford ser. 9, 199—202, 1938.
 18. Шнирельман Л. Г. Об аддитивных свойствах чисел. Изв. Донского политехн. ин-та. Новочеркасск, 14, 3—28, 1930.
 19. Page A. On the number of primes in an arithmetic progression. Proc. London, Math. Soc., II s., 39, 116—141, 1935.
 20. Estermann T. Proof that every large integer is the sum of two primes and a square. Proc. London Math. Soc., II s., 42, 501—516, 1937.
-

ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
21	14 св.	(2a)	2 (α)
26	5 св.	$ \eta(y) Y_1$	$ \eta(y) = Y_1$
39	7 св.	n^{n^2}	n^{n^6}
53	10 »	m_i	$m_{i, s}$
55	11 св.	$4(a_I(y_1^l - y^l))^2$	$4(a_I(y_1^l - y^l))^2$
81	17 св.	$a = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$	$a = \frac{a}{q} + \frac{0}{q^2}$
82	11, 14, 24 св.	$d \setminus p$	$d \setminus P$
85	9, 13, 15 16 св.	$d \setminus p$	$d \setminus P$
86	8, 20 св.	$d \setminus p$	$d \setminus P$
96	14 св.	$\varphi^{(i)}$	$\varphi^{(4)}$
99	7 »	$\frac{2\pi iz \varepsilon}{\log x}$	$\frac{e^{2\pi iz \varepsilon}}{\log \varepsilon}$
101	3 св.	$r^{3.5 - \varepsilon}$	$r^{3.5 - \varepsilon}$
104	2 св.	$\sum_{q > r^2} \frac{N^2}{r^3 q_1^2} \ll \frac{N^2}{r^5}$	$\sum_{q > r^2} \frac{N^2}{r^3 q_1^2} \ll \frac{N^2}{r^5}$
109	17 »	33, 31—52	30, 31—52