

В.Н. ВЕТЛУЦКИЙ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Утверждено Редакционно-издательским советом
университета в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2005

УДК 51(075.8)
В 391

Рецензент
докт. физ.-мат. наук *А.И. Рылов*

Ветлущий, В.Н.
В 391 Специальные разделы высшей математики : учеб. пособие /
В.Н. Ветлущий. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2005. – 132 с.

ISBN 5-7782-0490-6

Пособие содержит ряд разделов высшей математики, таких как линейные операторы, векторные пространства и основы теории тензорного исчисления. Лекционный материал иллюстрируется рядом примеров из области газовой динамики. Предложенный материал необходим для понимания последующих курсов лекций студентами факультета летательных аппаратов Новосибирского государственного технического университета, для которых настоящее пособие и предназначено.

УДК 51(075.8)

ISBN 5-7782-0490-6

© В.Н. Ветлущий, 2005
© Новосибирский государственный
технический университет, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
Глава 1. Линейные операторы в векторном пространстве	5
1.1. Сведения из теории матриц	5
1.2. Векторное пространство.....	9
1.3. Отображение n -мерного пространства в m -мерное.....	14
1.4. Сложение и умножение операторов. Преобразование координат	18
1.5. Эквивалентные матрицы	22
1.6. Линейные операторы в пространстве R^n	24
1.7. Характеристические числа и собственные векторы ли- нейного оператора в пространстве R^n	28
1.8. Квадратичные формы	35
1.9. Метрические пространства	45
Глава 2. Векторный анализ	51
2.1. Дифференцирование вектора, зависящего от парамет- ра. Кривая в пространстве.	51
2.2. Скалярные и векторные поля.....	58
2.3. Градиент и его свойства.....	60
2.4. Производная вектора по направлению. Полная производная.....	66
2.5. Дивергенция вектора. Теорема Гаусса-Остроградского.....	69
2.6. Ротор вектора. Теорема Стокса.....	74
2.7. Оператор Гамильтона.....	79
2.8. Криволинейные координаты.....	82
Глава 3. Основы тензорного исчисления	89
3.1. Аффинный ортогональный тензор второго ранга	89
3.2. Разложение тензоров	98
3.3. Умножение тензора на вектор.....	101
3.4. Произведение тензоров.....	109
3.5. Главные значения тензора. Инварианты тензора.....	115
3.6. Дифференцирование тензора по скалярному аргументу. Дивергенция тензора.....	118
3.7. Элементы общей теории тензоров.....	123
Литература.....	131

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие написано на основе курса лекций, прочитанных на протяжении ряда лет для студентов факультета летательных аппаратов. Этот курс дополняет их знания по математике, что позволяет использовать новый математический аппарат для понимания последующих курсов, таких как «Теоретическая аэрогидромеханика», «Вычислительная математика», «Численные методы» и других.

Первая глава знакомит читателей с теорией векторных пространств и линейных операторов. Устанавливает связь последних с линейными преобразованиями и способ нахождения матрицы, соответствующей заданному линейному оператору. Вводятся понятия характеристических чисел и собственных векторов операторов и устанавливаются их свойства. В нормированных пространствах вводятся определения нормы вектора и нормы оператора. Весь этот раздел тесно связан с изучением свойств различных конечно-разностных методов решения дифференциальных уравнений. В конце главы излагается теория квадратичных форм, с помощью которых исследуются свойства уравнений в частных производных второго порядка и которые тесно связаны с линейными операторами и линейными преобразованиями.

Вторая и третья главы посвящены векторному исчислению и основам тензорного исчисления. Рассматривается кривая в пространстве, и вводится для нее локальная ортогональная система координат. Для скалярного и векторного полей вводятся дифференциальные операции градиента, дивергенции и ротора, формулируются связанные с ними теоремы. В движущейся среде определяются частная и полная производные. Большое внимание уделяется оператору Гамильтона, обладающему как векторными, так и дифференциальными свойствами. Демонстрируются преимущества его использования для получения некоторых дифференциальных соотношений.

Если вектор в трехмерном пространстве интерпретируется как направленный отрезок, то для тензора второго ранга не удается дать наглядное представление. Он является новым математическим обобщением в ряду скаляр, вектор, тензор. Как вектор определяется тремя скалярами, так и тензор задается тремя векторными компонентами. В качестве примера приводится тензор упругих напряжений, и далее многие свойства тензоров демонстрируются на его примере. Определяются скалярные и векторные умножения тензора на вектор, а также скалярное и бискалярное умножения двух тензоров. Определяется дивергенция тензора и приводится для него формула Гаусса-Остроградского. С помощью тензоров выводится уравнение движения вязкой жидкости и приводится уравнение энергии. В заключение даются основы общей теории тензоров.

Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ВЕКТОРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1.1. СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ

Линейные операторы действуют на векторы, переводя их из одного векторного пространства в другое. При этом ряд их свойств устанавливается с помощью соответствующих им матриц. Приведем некоторые сведения из теории матриц, связанных с ними линейных преобразований и векторных уравнений.

Пусть дана прямоугольная матрица A размера $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где a_{ik} – элемент матрицы, i – номер строки, k – номер столбца.

Если $m = n$, то A – *квадратная матрица*, и только в этом случае вводится *определитель* матрицы $|A| = \det A = |a_{ik}|_1^n$. Если $|A| = 0$, то матрица называется *особенной*, и *неособенной* в противном случае. Если все $a_{ik} = 0$ при $i \neq k$, то матрица A – *диагональная*.

Из элементов прямоугольной матрицы A размера $m \times n$ можно составить квадратную матрицу размера $p \times p$, выбрав из нее строки с номерами $i_1, i_2, \dots, i_p$ ($1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq m$) и столбцы с номерами $k_1, k_2, \dots, k_p$ ($1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_p \leq n$). Определитель полученной матрицы называется *минором* p -го порядка матрицы A и обозначается

$$A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ k_1 & k_2 & \dots & k_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 k_1} & a_{i_1 k_2} & \dots & a_{i_1 k_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_p k_1} & a_{i_p k_2} & \dots & a_{i_p k_p} \end{vmatrix}.$$

При этом минор, у которого номера строк и столбцов совпадают $i_1 = k_1, i_2 = k_2, \dots, i_p = k_p$, называется *главным минором*.

Определение 1. Наибольший из порядков отличных от нуля миноров называется *рангом матрицы* A и обозначается r_A .

Очевидно, что ранг матрицы не может превосходить число ее строк и столбцов $r_A \leq \min(m, n)$. Для квадратной матрицы размера n , если она неособенная, то ее ранг равен ее размеру $r_A = n$, и меньше ее размера $r_A < n$, если матрица особенная. Таким образом, ранг матрицы есть мера ее вырождения.

Произведением двух прямоугольных матриц A и B является прямоугольная матрица C , если ее элемент c_{ik} есть сумма произведений элементов i -й строки первой матрицы на соответствующие элементы k -го столбца второй матрицы. Отсюда следует, что матрица A может быть умножена на матрицу B только в том случае, если количество столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы. Пусть прямоугольная матрица C есть произведение двух прямоугольных матриц A и B . Тогда имеет место теорема

Теорема 1 (о ранге произведения матриц). *Ранг произведения двух матриц не превосходит ранги сомножителей, т. е. если $C = AB$, то $r_C \leq r_A, r_B$ (без доказательства).*

Для квадратных матриц A и B порядок сомножителей может быть изменен. Вообще говоря, результат умножения при этом изменяется, т. е. $AB \neq BA$. Если же $AB = BA$, то матрицы A, B называются *перестановочными* или *коммутирующими* между собой. Определитель произведения двух матриц $C = AB$ равен произведению их определителей: $|C| = |AB| = |A||B|$.

Пусть задано линейное преобразование

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n,$$

$$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n.$$

Оно может быть записано также в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

или $y = Ax$, где A – прямоугольная матрица с элементами a_{ik} ($i=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, n$), а также введены матрицы-столбцы

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Если матрица A – квадратная ($m = n$) и неособенная ($|A| \neq 0$), то линейное преобразование может быть обращено, т. е. компоненты матрицы x выражены через компоненты матрицы y : $x = A^{-1}y$, где матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к матрице A и ее элементы a_{ik}^{-1} могут быть получены по *правилу Крамера*

$$a_{ik}^{(-1)} = \frac{(-1)^{i+k} A_{ki}}{|A|} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

где A_{ki} – алгебраическое дополнение элемента a_{ki} .

Производя последовательно прямое $y = Ax$ и обратное $x = A^{-1}y$ преобразования в одном и другом порядке, получим исходную матрицу-столбец, откуда следует

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица. Из этой формулы вытекает равенство для определителей $|A||A^{-1}| = 1$, то есть определители прямой и обратной матриц взаимно-обратны.

Рассмотрим теперь некоторые матричные уравнения, в которых неизвестными являются прямоугольные матрицы. Нетрудно видеть, что если матрица A неособенная $|A| \neq 0$, то матричные уравнения

$$AX = E, \quad XA = E$$

имеют единственное решение $X = A^{-1}$, которое может быть получено умножением каждого уравнения на A^{-1} слева и справа.

Аналогично можно решить более сложные матричные уравнения

$$AX = B, \quad YA = C \quad (|A| \neq 0),$$

где A – квадратная матрица; X, B – прямоугольные матрицы одинаковых размеров, как и матрицы Y, C . Их решения могут быть получены аналогично предыдущим, и ими будут равенства $X = A^{-1}B$, $Y = CA^{-1}$ соответственно. По теореме о ранге произведения матриц ранг матрицы-произведения не превосходит ранги матриц-сомножителей, следовательно $r_X \leq r_B$, $r_B \leq r_X$ и $r_Y \leq r_C$, $r_C \leq r_Y$. Из этих неравенств следует, что $r_X = r_B$ и $r_Y = r_C$. Таким образом, доказана вторая теорема о ранге произведения матриц.

Теорема 2 (о ранге произведения матриц). *При умножении прямоугольной матрицы слева или справа на неособенную матрицу ранг исходной матрицы не изменяется.*

Для прямоугольной матрицы $A = \|a_{ik}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, n$) вводится транспонированная матрица $A^T = \|a_{ik}^T\|$, где $a_{ki}^T = a_{ik}$

$(i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n)$. Если A – квадратная матрица ($m=n$) и $A^T = A$, то она называется *симметрической*, так как ее элементы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, совпадают: $a_{ki} = a_{ik} (i, k=1, 2, \dots, n)$.

Для прямоугольной матрицы $A = \|a_{ik}\| (i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n)$ с комплексными элементами вводится *сопряженная* матрица $A^* = \|a^*_{ik}\|$, где $a^*_{ki} = \bar{a}_{ik} (i=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n)$. Здесь черточка означает комплексно-сопряженное число. Если для квадратной матрицы A сопряженная совпадает с исходной $A^* = A$, то матрица A называется *самосопряженной*.

Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений, которая может быть записана в виде $Ax=0$. Если матрица A – квадратная размера $m \times m$ и матрица-столбец x состоит из m элементов, то имеет место теорема.

Теорема 3. *Уравнение $Ax=0$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда матрица A особенная ($|A|=0$), иначе говоря, когда ранг матрицы A меньше числа неизвестных ($r_A < m$). В противном случае неособенной матрицы ($|A| \neq 0$, иначе говоря, $r_A = m$) оно имеет только нулевое решение.*

Эта теорема может быть распространена на более общий случай. Пусть теперь матрица A – прямоугольная размера $n \times m$ ($m < n$) и матрица-столбец x состоит из m элементов. Таким образом, уравнение $Ax=0$ имеет m неизвестных. В этом случае справедлива аналогичная теорема.

Теорема 4. *Уравнение $Ax=0$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы A меньше числа неизвестных ($r_A < m$). В противном случае ($r_A = m$) оно имеет только нулевое решение.*

Как видим, в терминах ранга матрицы A обе теоремы звучат одинаково.

1.2. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пусть задана совокупность R произвольных элементов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$, в которой определены операции сложения и умножения на число, и

эти операции всегда выполнимы и однозначны. Пусть также справедливы леммы:

$$1^\circ \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}.$$

$$2^\circ (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}).$$

$$3^\circ \text{ Существует такой элемент } \vec{0} \text{ из } R, \text{ что } 0\vec{x} = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in R.$$

$$4^\circ 1\vec{x} = \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in R.$$

$$5^\circ \alpha(\beta \vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}.$$

$$6^\circ (\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha \vec{x} + \beta \vec{x}.$$

$$7^\circ \alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \vec{x} + \alpha \vec{y}.$$

Определение 2. Совокупность элементов R , в которой всегда выполнимы и однозначны операции сложения и умножения на число и они удовлетворяют леммам 1–7, называется *векторным пространством*, а его элементы – *векторами*.

Мы будем рассматривать только векторы, выпущенные из некоторого начала координат.

Определение 3. Векторы $\vec{x}, \vec{y}, \dots, \vec{u}$ из пространства R называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$, не равные одновременно нулю, для которых выполняется равенство

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} + \dots + \varepsilon \vec{u} = \vec{0}. \quad (1)$$

Если же оно выполняется лишь в случае равенства нулю всех чисел $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$, то эти векторы называются *линейно независимыми*. Левую часть этого равенства называют *линейной комбинацией* векторов $\vec{x}, \vec{y}, \dots, \vec{u}$.

Если эти векторы линейно зависимы, то из равенства (1) один из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных. Пусть, например, $\alpha \neq 0$, тогда

$$\vec{x} = -\frac{\beta}{\alpha} \vec{y} - \dots - \frac{\varepsilon}{\alpha} \vec{u}.$$

Так, например, на плоскости любой из трех векторов можно представить в виде линейной комбинации двух остальных.

Определение 4. Пространство R называется *n -мерным*, если в нем существуют n линейно независимых векторов, а любые $n+1$

векторы линейно зависимы. Здесь n – число измерений, а пространство обозначается R^n .

Определение 5. Система из n произвольных линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ в n -мерном пространстве R^n называется *базисом* этого пространства.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – базис в n -мерном пространстве R^n , а $\vec{x}$ – произвольный вектор. Тогда по определению 4 векторы $\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ линейно зависимы, так как число их равно $n+1$. Поэтому в линейной комбинации

$$\alpha_0 \vec{x} + \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}$$

по крайней мере одно из чисел $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ отлично от нуля. Но $\alpha_0 \neq 0$, так как в противном случае векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ будут линейно зависимы. Поэтому можно записать равенство

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \quad (2)$$

где $x_i = -\alpha_i / \alpha_0$ ($i=1, 2, \dots, n$).

Докажем однозначность такого представления для вектора $\vec{x}$ в данном базисе. Пусть существует другое представление для вектора $\vec{x}$:

$$\vec{x} = x'_1 \vec{e}_1 + x'_2 \vec{e}_2 + \dots + x'_n \vec{e}_n. \quad (2')$$

Вычтем почленно равенство (2) из равенства (2'), тогда получим:

$$(x'_1 - x_1) \vec{e}_1 + (x'_2 - x_2) \vec{e}_2 + \dots + (x'_n - x_n) \vec{e}_n = \vec{0}, \quad (3)$$

откуда в силу линейной независимости векторов базиса все числовые коэффициенты в равенстве (3) должны быть равны нулю. Следовательно,

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad \dots, \quad x'_n = x_n. \quad (4)$$

Откуда следует однозначность разложения вектора по выбранному базису.

Определение 6. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ в равенстве (2) называются *координатами* или *компонентами* вектора $\vec{x}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Нетрудно показать, что если векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ представлены в виде

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i, \quad \vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{e}_i, \quad \text{то в силу лемм } 1^\circ - 7^\circ \text{ получим равенства}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) \vec{e}_i, \quad \alpha \vec{x} = \sum_{i=1}^n \alpha x_i \vec{e}_i,$$

где α – некоторое число.

В качестве примера помимо привычного физического трехмерного пространства можно рассмотреть пространство R^n полиномов степени $n-1$:

$$P_n(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1}.$$

Здесь числа $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ есть координаты вектора $P_n(t)$ в базисе $t^0, t^1, t^2, \dots, t^n$.

Пусть в пространстве R^n заданы m векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$. Найдем условие их линейной независимости при $m \leq n$, в противном случае ($m > n$) они всегда линейно зависимы по определению 4. Введем произвольный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ и разложим каждый вектор по этому базису:

$$\vec{x}_k = \sum_{i=1}^n x_{ik} \vec{e}_i, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (5)$$

Составим линейную комбинацию векторов $\vec{x}_k$, приравняем ее нулю и воспользуемся формулой (5), тогда получим

$$\sum_{k=1}^m c_k \vec{x}_k = \sum_{k=1}^m c_k \sum_{i=1}^n x_{ik} \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m c_k x_{ik} \right) \vec{e}_i = \vec{0}. \quad (6)$$

Теорема 5 (о линейной независимости векторов). Для того чтобы векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ в пространстве R^n были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы, составленной из координат этих векторов в произвольном базисе, был равен числу этих векторов ($r_X = m$). В противном случае ($r_X < m$) они линейно зависимы.

1.3. ОТОБРАЖЕНИЕ N-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА В M-МЕРНОЕ

Пусть задано линейное преобразование

[illegible]

и два векторных пространства: n -мерное R^n и m -мерное S^m . Введем некоторый базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ в пространстве R^n и базис $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_m$ в пространстве S^m . Тогда можно утверждать, что линейное преобразование (1) переводит вектор $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ с координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$ из

пространства R^n в некоторый вектор $\vec{y} = \sum_{k=1}^m y_k \vec{g}_k$ с координатами

$y_1, y_2, \dots, y_m$ из пространства S^m . Таким образом, можно сказать, что преобразование (1) задает некоторый *оператор* $\mathbf{A}$, относящий вектору $\vec{x}$ вектор $\vec{y}$, иначе говоря, отображающий пространство R^n в пространство S^m , что обозначается следующим образом: $\vec{y} = \mathbf{A} \vec{x}$.

Определение 7. Оператор A , действующий из пространства R^n в пространство S^m , задает некоторый *алгоритм (правило)*, по которому векторы $\vec{x}$ из пространства R^n переводятся (отображаются) в векторы $\vec{y}$ пространства S^m .

Определение 8. Оператор A , отображающий R^n в S^m , называется *линейным*, если для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{x}_1$ и произвольного числа α справедливы равенства

$$A(\vec{x} + \vec{x}_1) = A\vec{x} + A\vec{x}_1, \quad A(\alpha \vec{x}) = \alpha A\vec{x}. \quad (2)$$

Таким образом, линейное преобразование (1) при некоторых базисах в пространствах R^n и S^m определяет линейный оператор A , отображающий R^n в S^m . Мы ограничимся рассмотрением только линейных операторов, поэтому для краткости слово «линейный» будем опускать.

Покажем теперь обратное: для произвольного линейного оператора A , отображающего R^n в S^m , и произвольных базисов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ в пространстве R^n и $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_m$ в пространстве S^m существует такая прямоугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

что составленное с ее помощью линейное преобразование (1) выражает координаты вектора $\vec{y} = A\vec{x}$ через координаты вектора $\vec{x}$.

Применим оператор A к каждому базисному вектору $\vec{e}_k$ и разложим полученный вектор по базису $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_m$ пространства S^m :

$$A\vec{e}_k = \sum_{i=1}^m a_{ik} \vec{g}_i \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Здесь a_{ik} — коэффициенты разложения. Умножим обе части этого равенства на x_k , просуммируем от 1 до n и поменяем порядок суммирования:

$$\sum_{k=1}^n x_k \mathbf{A} \vec{e}_k = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right) \vec{g}_i. \quad (5)$$

С другой стороны, пользуясь разложением векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ по базисам своих пространств, можно получить цепочку равенств

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^m y_i \vec{g}_i = \mathbf{A} \vec{x} = \mathbf{A} \left(\sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k \right) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{A} \vec{e}_k. \quad (6)$$

Подставляя выражение (5) в правую часть равенства (6), получим

$$\sum_{i=1}^m y_i \vec{g}_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right) \vec{g}_i,$$

откуда в силу однозначности разложения произвольного вектора по базису $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_m$ получим равенства

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где a_{ik} – коэффициенты матрицы A (3), полученные в разложении (4). Таким образом, нами получено линейное преобразование (1) и, иначе говоря, доказана следующая теорема.

Теорема 6. При заданных базисах в пространствах R^n и S^m каждому линейному оператору $\mathbf{A}$, отображающему R^n в S^m , отвечает некоторая прямоугольная матрица A (3) размера $m \times n$, коэффициенты которой определяются из формулы (4). И наоборот, каждой такой матрице A отвечает некоторый линейный оператор $\mathbf{A}$ из R^n в S^m .

Из формулы (4) видно, что в матрице A , отвечающей оператору $\mathbf{A}$, k -й столбец состоит из последовательных координат вектора $\mathbf{A} \vec{e}_k$ в базисе $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_m$.

Обозначим через $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$, $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m)^T$ матрицы-столбцы, составленные из координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, тогда векторному равенству

$$\vec{y} = \mathbf{A} \vec{x} \quad (7)$$

соответствует матричное равенство

$$y = Ax, \quad (8)$$

которое является матричной записью линейного преобразования (1). Между равенствами (7) и (8) имеется принципиальная разница: первое задает правило, по которому вектор $\vec{x}$ пространства R^n преобразуется в вектор $\vec{y}$ пространства S^m , во втором происходит умножение матрицы A на матрицу-столбец x .

Рассмотрим пример нахождения матрицы, отвечающей заданному оператору.

Пример. Пусть пространство R^n есть совокупность всех многочленов степени не выше $n-1$: $P_n(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_{n-1} t^{n-1}$. Требуется найти матрицу A , отвечающую оператору дифференцирования $\frac{d}{dt}$ в этом пространстве.

Очевидно, что этот оператор действует из пространства R^n в пространство R^{n-1} , так как он понижает степень каждого полинома на единицу. В качестве базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ в R^n выберем векторы $1, t^1, t^2, \dots, t^{n-1}$, а в качестве базиса $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_{n-1}$ в R^{n-1} возьмем тот же базис, но без последнего вектора. Подействуем оператором $\mathbf{A}$ на k -й базисный вектор t^{k-1} и воспользуемся формулой (4):

$$\mathbf{A} \vec{e}_k = \frac{d}{dt} t^{k-1} = (k-1)t^{k-2} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} \vec{g}_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ik} t^{i-1}.$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях t , поэтому все коэффициенты a_{ik} в этой сумме должны равняться нулю, кроме

коэффициента при t^{k-2} , который есть $a_{k-1,k} = k-1$. Полагая индекс k равным поочередно $1, 2, \dots, n$, получим все коэффициенты матрицы A размера $(n-1) \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, найдена матрица, соответствующая оператору дифференцирования многочленов степени не выше $n-1$.

1.4. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

1. Пусть даны два линейных оператора A и B , отображающие пространство R^n в пространство S^m .

Определение 9. Суммой операторов A и B называется оператор C , для которого справедливо равенство

$$C\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in R^n. \quad (1)$$

Нетрудно показать, что оператор C также является линейным.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – некоторый базис в пространстве R^n , а $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_m$ – некоторый базис в пространстве S^m . Из предыдущего параграфа следует, что для каждого из этих операторов могут быть найдены соответствующие им матрицы, коэффициенты которых вычислены с помощью формулы (4):

$$A = \|a_{ik}\|, \quad B = \|b_{ik}\|, \quad C = \|c_{ik}\| \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда операторному равенству (1) должно соответствовать матричное равенство

$$Cx = Ax + Bx, \quad (2)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – матрица-столбец, составленная из координат вектора $\vec{x}$ пространства R^n для выбранного базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Докажем, что компоненты матриц связаны соотношениями $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$. Для любого базисного вектора $\vec{e}_k$ согласно формуле (4) предыдущего параграфа имеем

$$\mathbf{A} \vec{e}_k = \sum_{i=1}^m a_{ik} \vec{g}_i, \quad \mathbf{B} \vec{e}_k = \sum_{i=1}^m b_{ik} \vec{g}_i.$$

Далее из определения (9) получим

$$\mathbf{C} \vec{e}_k = \mathbf{A} \vec{e}_k + \mathbf{B} \vec{e}_k = \sum_{i=1}^m (a_{ik} + b_{ik}) \vec{g}_i.$$

Но, с другой стороны, $\mathbf{C} \vec{e}_k = \sum_{i=1}^m c_{ik} \vec{g}_i$. Сопоставляя два последних равенства, получим то, что требуется доказать. Поэтому можно записать матричное равенство

$$C = A + B. \quad (3)$$

Пусть даны три векторные пространства – R^n, S^m, T^q размерности n, m, q соответственно и два линейных оператора $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$. Второй действует из R^n в S^m , а первый – из S^m в T^q .

$$T^q \xleftarrow{A} S^m \xleftarrow{B} R^n.$$

Определение 10. Произведением операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называется оператор $\mathbf{C}$, для которого справедливо равенство

$$\mathbf{C} \vec{x} = \mathbf{A} (\mathbf{B} \vec{x}) \quad \forall \vec{x} \in R^n. \quad (4)$$

Таким образом, оператор $\mathbf{C}$ отображает пространство R^n в T^q :

$$T^q \xleftarrow{C=AB} R^n$$

Определение 11. Матрица $T = \|t_{ik}\|_1^n$, компоненты которой присутствуют в равенстве (10'), называется *матрицей преобразования координат*.

Покажем, что эта матрица является неособенной, т. е. ее определитель отличен от нуля $|T| \neq 0$. Для этого в равенствах (10') положим $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, что соответствует нулевому вектору, тогда получим однородную систему n линейных уравнений относительно $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ с матрицей T . Эта система уравнений может иметь только нулевое решение, поскольку в противном случае из равенства (9) вытекала бы линейная зависимость базисных векторов $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n$, что невозможно. Следовательно, система (10') может иметь только нулевое решение, а это возможно только в случае, когда матрица T неособенная. Отсюда вытекает существование обратной матрицы T^{-1} .

Введем матрицы-столбцы $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ и $x' = (x'_1 \ x'_2 \ \dots \ x'_n)^T$. Тогда равенство (10) можно записать в виде

$$x = Tx'. \quad (11)$$

Умножая обе части этого равенства слева на T^{-1} , получим

$$x' = T^{-1}x. \quad (12)$$

Таким образом, мы установили взаимно однозначную связь между компонентами произвольного вектора при переходе от одного базиса к другому.

1.5. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МАТРИЦЫ

Как было установлено ранее, матрица A , соответствующая оператору $\mathbf{A}$, который действует из пространства R^n в пространство S^m , зависит от выбора базисов в этих пространствах. Выясним, как влияет изменение этих базисов на матрицу A . Для этого выберем в пространствах R^n и S^m произвольные базисы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ и $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_m$ соответственно. Тогда для оператора $\mathbf{A}$, действующего из

R^n в S^m , можно найти соответствующую ему прямоугольную матрицу $A = \|a_{ik}\|$ ($i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n$), и векторному равенству

$$\bar{y} = A \bar{x}, \quad \bar{x} \in R^n, \bar{y} \in S^m, \quad (1)$$

будет соответствовать матричное равенство

$$y = Ax, \quad (2)$$

где x и y – матрицы-столбцы, составленные из компонент векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в базисах $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ и $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_m$ соответственно.

Выберем в пространствах R^n и S^m другие базисы $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n$ и $\bar{g}'_1, \bar{g}'_2, \dots, \bar{g}'_m$. В новых базисах векторам $\bar{x}$, $\bar{y}$ и оператору A будут соответствовать новые матрицы-столбцы x' , y' и матрица A' , которые связаны соотношением

$$y' = A'x'. \quad (3)$$

Пусть Q и N – неособенные квадратные матрицы размеров $n \times n$ и $m \times m$ соответственно, такие что транспонированные матрицы Q^T и N^T осуществляют переход от старых базисов к новым в пространствах R^n и S^m соответственно. Тогда по формуле (11) предыдущего параграфа получим

$$x = Qx', \quad y = Ny'. \quad (4)$$

Поскольку матрица N неособенная, то существует обратная ей матрица N^{-1} , и с помощью формул (2) и (4) находим

$$y' = N^{-1}y = N^{-1}Ax = N^{-1}AQx'. \quad (5)$$

Вводя обозначение $P = N^{-1}$ и сопоставляя равенства (3) и (5), в силу произвольности вектора $\bar{x}$ получим:

$$A' = N^{-1}AQ = PAQ. \quad (6)$$

Определение 12. Две прямоугольные матрицы A и B одинаковых размеров называются *эквивалентными*, если существуют две неособенные квадратные матрицы P и Q такие, что

$$B = PAQ. \quad (7)$$

Заметим, что если матрицы A и B размера $m \times n$, то матрица P имеет размер $m \times m$ и матрица Q – размер $n \times n$.

Из равенства (6) следует, что матрицы, соответствующие одному оператору A при различном выборе базисов в пространствах R^n и S^m , всегда эквивалентны между собой. Таким образом, каждому линейному оператору, отображающему пространство R^n в S^m , соответствует класс эквивалентных между собой матриц.

Существует теорема, с помощью которой можно установить, являются ли две матрицы эквивалентными между собой, не зная ничего об их происхождении.

Теорема 7 (об эквивалентности матриц). *Для того чтобы две прямоугольные матрицы A и B одинаковых размеров $m \times n$ были эквивалентны между собой, необходимо и достаточно, чтобы эти матрицы имели один и тот же ранг $r_A = r_B$.*

Здесь мы докажем только необходимость. В первом параграфе была сформулирована теорема, которая утверждает, что при умножении прямоугольной матрицы слева или справа на неособенную квадратную матрицу ранг исходной матрицы не изменяется. Поскольку матрицы P и Q неособенные и матрицы A и B эквивалентны, т. е. связаны равенством (7), отсюда следует, что их ранги совпадают ($r_A = r_B$), что и требовалось доказать.

1.6. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ R^n

В этом параграфе мы рассмотрим частный случай действия операторов, когда пространство S^m совпадает с пространством R^n .

Определение 13. Линейный оператор A , отображающий n -мерное векторное пространство R^n само в себя, называется *линейным оператором в R^n* .

Сложение таких операторов, умножение на число и умножение двух таких операторов всегда выполнимы и дают в результате также линейный оператор в R^n . Кроме того, такие операторы имеют ряд особенностей. Так, в пространстве R^n существует единичный оператор E , для которого выполняется равенство

$$E \vec{x} = \vec{x} \quad (\forall \vec{x} \in R^n)$$

и для произвольного оператора A в R^n верно соотношение

$$EA = AE = A.$$

Пусть справедливо равенство

$$\vec{y} = A \vec{x} \quad (\vec{x}, \vec{y} \in R^n). \quad (1)$$

Заметим, что поскольку рассматриваемые операторы действуют в одном пространстве, для них достаточно вводить один базис. Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_n$ координаты вектора $\vec{x}$ в некотором базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, а через $y_1, y_2, \dots, y_n$ — координаты вектора $\vec{y}$ в том же базисе. Тогда равенству (1) отвечает линейное преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Таким образом, в заданном базисе оператору A отвечает квадратная матрица $A = \|a_{i,k}\|_1^n$, элементы которой определяются из равенства

$$A \vec{e}_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \vec{e}_i \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

В отличие от общего случая здесь в обеих частях равенства присутствуют векторы одного базиса. Как было установлено в общем случае, k -й столбец матрицы A состоит из координат вектора $A \vec{e}_k$, $k=1, 2, \dots, n$.

Введем матрицы-столбцы, составленные из координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$ и $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^T$, тогда линейное преобразование (2) может быть записано в матричном виде:

$$y = Ax. \quad (4)$$

Таким образом, выбор базиса в пространстве R^n устанавливает соответствие между линейным оператором A и квадратной матрицей A .

Как и в общем случае операторов из R^n в S^m , сумме и произведению двух операторов A и B отвечают сумма и произведение двух матриц A и B , а произведению оператора на число α A – произведение матрицы на число αA . Кроме того, нетрудно показать, что единичному оператору E в любом базисе отвечает единичная матрица $E = \|\delta_{ik}\|_1^n$, где δ_{ik} – символ Кронекера, равный единице при $i = k$ и нулю при $i \neq k$.

Теперь рассмотрим, как изменяется матрица, соответствующая оператору, при переходе от одного базиса к другому. Наряду с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ в пространстве R^n выберем другой базис $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \dots, \vec{e}'_n$. Тогда для того же оператора A и тех же векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ получим новую матрицу A' и новые матрицы-столбцы x' и y' , для которых аналогично выражению (4) имеет место равенство

$$y' = A'x'. \quad (5)$$

Запишем в матричном виде формулы преобразования координат векторов при переходе от одного базиса к другому.

$$x = Tx', \quad y = Ty', \quad (6)$$

где матрица T – неособенная, а следовательно, существует ей обратная T^{-1} . Тогда с помощью формул (4) и (6) получим цепочку равенств

$$y' = T^{-1}y = T^{-1}Ax = T^{-1}ATx'.$$

Сопоставляя полученное равенство с равенством (5), и в силу произвольности вектора $\vec{x}$ получим

$$A' = T^{-1}AT. \quad (7)$$

Выведенная формула представляет собой частный случай соотношения для эквивалентных матриц ($P = T^{-1}, Q = T$).

Определение 14. Две матрицы A и B , связанные соотношением

$$B = T^{-1}AT,$$

где T – неособенная матрица, называются *подобными*.

Таким образом, линейному оператору A в R^n отвечает целый класс подобных между собой матриц, полученных в различных базисах. Теперь вычислим определитель матрицы A' , для этого возьмем знак определителя от обеих частей равенства (7):

$$|A'| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}| |A| |T| = |T|^{-1} |A| |T| = |A|. \quad (8)$$

Отсюда следует, что все матрицы, отвечающие одному оператору, имеют равные определители. На этом основании вводится понятие определителя оператора.

Определение 15. Под *определителем линейного оператора A* в R^n понимается определитель любой соответствующей ему матрицы. Если $|A|=0$, то оператор называется *особенным*, и *неособенным* в противном случае ($|A| \neq 0$).

Свойство особенного оператора только одно: существует вектор $\vec{x} \neq \vec{0}$ такой, что $A\vec{x} = \vec{0}$.

Неособенный оператор имеет следующие два свойства:

из равенства $A\vec{x} = \vec{0}$ всегда следует, что $\vec{x} = \vec{0}$;

$AR^n = R^n$, т. е. векторы вида $A\vec{x}$, где $\vec{x} \in R^n$, заполняют все пространство R^n .

Из свойств неособенного оператора следует, что в равенстве $\vec{y} = A\vec{x}$ задание вектора $\vec{y} \in R^n$ однозначно определяет вектор $\vec{x}$.

Действительно, пусть $\vec{y} = \mathbf{A} \vec{x}'$ и $\vec{y} = \mathbf{A} \vec{x}''$, где $\vec{x}', \vec{x}'' \in R^n$, тогда $\mathbf{A}(\vec{x}' - \vec{x}'') = \mathbf{A} \vec{x}' - \mathbf{A} \vec{x}'' = \vec{0}$ и из свойства особенного оператора следует, что $\vec{x}' - \vec{x}'' = \vec{0}$, то есть $\vec{x}' = \vec{x}''$. Отсюда следует, что для неособенного оператора в R^n существует обратный оператор $\mathbf{A}^{-1}$, который также является линейным:

$$\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \vec{y}. \quad (9)$$

Из равенств (1) и (9), учитывая произвольность векторов, можно получить соотношения

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E},$$

где $\mathbf{E}$ – единичный оператор.

Для матриц, отвечающих этим операторам, имеет место следующая теорема.

Теорема 8. Если в некотором базисе оператору $\mathbf{A}$ отвечает матрица A , то оператору $\mathbf{A}^{-1}$ в том же базисе отвечает матрица A^{-1} .

Пусть $\vec{y} = \mathbf{A} \vec{x}$ и $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1} \vec{y}$, тогда в некотором базисе им отвечают матричные равенства $y = Ax$ и $x = By$, где матрица B соответствует оператору $\mathbf{A}^{-1}$. Но из этих равенств нетрудно получить, что $y = ABx$, откуда в силу произвольности вектора $\vec{x}$ следует $AB = E$ и $B = A^{-1}$.

1.7. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ R^n

При изучении линейных операторов $\mathbf{A}$ в пространстве R^n большую роль играют векторы, для которых справедливо равенство

$$\mathbf{A} \vec{x} = \lambda \vec{x} \quad (\vec{x} \neq \vec{0}). \quad (1)$$

Таким образом, нами получена система n линейных однородных уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$. В силу того, что собственный вектор не может быть нулевым, нас интересуют лишь ненулевые решения этой системы. Из линейной алгебры известно, что необходимым и достаточным условием существования ненулевого решения однородной системы является равенство нулю определителя ее матрицы. Поэтому потребуем, чтобы он был равен нулю.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Если раскрыть этот определитель, то получится алгебраическое уравнение n -й степени относительно неизвестного λ .

Определение 17. Уравнение (4) называется *характеристическим уравнением матрицы A* .

Таким образом, характеристическое число λ линейного оператора A является характеристическим числом матрицы A и корнем характеристического уравнения (4). И наоборот, корень уравнения (4) является характеристическим числом матрицы A и оператора A . Известно, что уравнение n -й степени имеет, вообще говоря, n корней. Для каждого из них уравнение (3) дает ненулевое решение $x_1, x_2, \dots, x_n$. Подставив эти значения в разложение вектора $\vec{x}$ по выбранному базису (2), получим собственный вектор, соответствующий этому характеристическому числу λ . Подобную операцию можно провести для каждого найденного числа λ_k и получить, вообще говоря, n собственных векторов $\vec{x}_k$. Это обязательно имеет место, если все n корней λ_k различны.

Рассмотрим случай, когда имеются кратные корни. Пусть, например, корень λ_1 является корнем кратности s , тогда ему может соответствовать любое количество линейно независимых собственных векторов от 1 до s в зависимости от конкретного оператора A .

Выясним, что происходит с характеристическими числами в случае выбора другого базиса. Пусть матрица A' отвечает тому же линейно-

му оператору $\mathbf{A}$ в R^n при выборе другого базиса $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n$. Из предыдущего параграфа известно, что A' подобна матрице A , следовательно, верно равенство

$$A' = T^{-1}AT \quad (|T| \neq 0), \quad (5)$$

где матрица T определяет связь между координатами вектора $\bar{x}$ в старом и новом базисах: $x = Tx'$. Из обеих частей равенства (5) вычтем тождество $E = T^{-1}ET$, умножив его на число λ , тогда получим

$$A' - \lambda E = T^{-1}(A - \lambda E)T$$

Возьмем определитель от обеих частей этого равенства

$$|A' - \lambda E| = |T^{-1}| |A - \lambda E| |T| = |A - \lambda E|. \quad (6)$$

Из равенства (6) следует, что если λ – характеристическое число матрицы A , т. е. оно обращает в нуль правую часть равенства, то оно также является характеристическим числом подобной ей матрицы A' . Таким образом, нами доказано, что характеристические числа не зависят от выбора базиса и соответствующей матрицы A , а зависят только от оператора $\mathbf{A}$. Аналогичное утверждение справедливо и для собственных векторов оператора.

Сформулируем и докажем две теоремы о собственных векторах оператора.

Теорема 9. Если $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ – собственные векторы оператора $\mathbf{A}$, соответствующие одному характеристическому числу λ , и $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ – произвольные числа, то вектор

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} + \gamma \bar{z} + \dots$$

либо нулевой, либо также является собственным вектором оператора $\mathbf{A}$, соответствующим тому же числу λ .

Доказательство. Из условия теоремы следует, что

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}, \quad A\vec{y} = \lambda \vec{y}, \quad A\vec{z} = \lambda \vec{z} \dots$$

Умножим почленно первое равенство на α , второе – на β , третье – на γ и так далее, затем почленно их сложим и окончательно получим

$$A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} + \dots) = \lambda(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} + \dots).$$

Из этого равенства видно, что вектор, стоящий в скобках, либо равен нулю, либо является собственным вектором оператора A , соответствующим числу λ , что и требовалось доказать.

Из теоремы следует, что линейно независимые собственные векторы, отвечающие кратному характеристическому числу λ , образуют базис *собственного подпространства* в пространстве R^n , каждый вектор которого тоже собственный при том же числе λ .

Рассмотрим теперь теорему о собственных векторах, соответствующих различным характеристическим числам.

Теорема 10. *Собственные векторы, соответствующие попарно различным характеристическим числам, всегда линейно независимы.*

Доказательство. Пусть оператор A имеет m ($m \leq n$) собственных векторов, соответствующих различным характеристическим числам, тогда запишем

$$A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i \quad (\vec{x}_i \neq \vec{0}; \quad \lambda_i \neq \lambda_k, i \neq k, \quad i, k = 1, 2, \dots, m). \quad (7)$$

Составим линейную комбинацию этих векторов

$$\sum_{i=1}^m c_i \vec{x}_i = \vec{0}. \quad (8)$$

Докажем, что в равенстве (8) все c_i могут быть только нулевыми, тогда все векторы $\vec{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) должны быть линейно независимы по определению (см. § 1.1).

Поддействуем оператором $(A - \lambda_1 E)$ на каждое слагаемое суммы (8), тогда в силу линейности оператора получим вспомогательные равенства

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \vec{x}_1 = (\mathbf{A} \vec{x}_1 - \lambda_1 \vec{x}_1) = 0,$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \vec{x}_2 = \mathbf{A} \vec{x}_2 - \lambda_1 \vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2 - \lambda_1 \vec{x}_2,$$

.....

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E}) \vec{x}_m = \mathbf{A} \vec{x}_m - \lambda_1 \vec{x}_m = \lambda_2 \vec{x}_m - \lambda_1 \vec{x}_m.$$

Запишем результат воздействия оператора $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{E})$ на всю сумму (8)

$$\sum_{i=2}^m c_i (\lambda_i - \lambda_1) \vec{x}_i = \vec{0}.$$

Здесь первое слагаемое пропало, поскольку вектор $\vec{x}_1$ является собственным вектором оператора $\mathbf{A}$ и соответствует характеристическому числу λ_1 .

На полученное равенство подействуем оператором $(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{E})$ и аналогично получим

$$\sum_{i=3}^m c_i (\lambda_i - \lambda_2)(\lambda_i - \lambda_1) \vec{x}_i = \vec{0}.$$

Продолжим подобную операцию с последующими числами λ_i , последовательно увеличивая номер собственного числа. В результате действия последний раз оператором $(\mathbf{A} - \lambda_{m-1} \mathbf{E})$ получим

$$c_m (\lambda_m - \lambda_{m-1})(\lambda_m - \lambda_{m-2}) \dots (\lambda_m - \lambda_2)(\lambda_m - \lambda_1) \vec{x}_m = \vec{0}$$

Так как по условию теоремы все λ_i — различны, все выражения в скобках не равны нулю, вектор $\vec{x}_m$ также не равен нулю, поскольку он собственный, следовательно, $c_m = 0$.

Если проводить подобную операцию в другой последовательности, то можно доказать, что каждый из коэффициентов c_i в равенстве (8) равен нулю. Следовательно, все собственные векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m$ линейно независимы, что требовалось доказать.

Из доказанной теоремы следует, что если оператор имеет n различных характеристических чисел, то он имеет n линейно независимых собственных векторов. Но последнее также возможно при наличии кратных характеристических чисел, если каждому кратному числу соответствует равное его кратности количество линейно независимых векторов.

Определение 18. Линейный оператор $\mathbf{A}$ в пространстве R^n называется *оператором простой структуры*, если он имеет n линейно независимых собственных векторов.

Выясним, какая матрица соответствует такому оператору. Пусть линейный оператор $\mathbf{A}$ является оператором простой структуры, тогда он имеет характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и линейно независимые собственные векторы $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$. Здесь кратные корни повторены столько раз, какова их кратность. Тогда можно записать равенства

$$\mathbf{A} \vec{g}_k = \lambda_k \vec{g}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Выберем эти векторы в качестве базиса, тогда найдем матрицу, соответствующую этому оператору:

$$\mathbf{A} \vec{g}_k = \sum_{i=1}^n a_{ik} \vec{g}_i = \lambda_k \vec{g}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (9')$$

Из равенства (9') следует, все $a_{kk} = \lambda_k$, $a_{ik} = 0, i \neq k$. Таким образом, оператору $\mathbf{A}$ соответствует диагональная матрица A , и характеристические числа являются элементами ее диагонали:

$$A = \|\lambda_i \delta_{ik}\|_1^n,$$

где δ_{ik} – символ Кронекера. Если в пространстве R^n выбрать другой базис, то отвечающая тому же оператору новая матрица A' будет подобна матрице A .

$$A' = T^{-1} A T = T^{-1} \|\lambda_i \delta_{ik}\|_1^n T,$$

где T неособенная матрица.

Определение 19. Матрица, подобная диагональной, называется *матрицей простой структуры*.

Разложим произвольный вектор $\vec{x}$ по этому базису $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \dots, \vec{g}_n$:

$$\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{g}_k.$$

Подействуем на обе части этого равенства оператором $\mathbf{A}$, тогда в силу его линейности и с помощью равенства (9) получим

$$\mathbf{A} \vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{A} \vec{g}_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \vec{g}_k. \quad (10)$$

Нами получено, что для оператора простой структуры в пространстве R^n существует n линейно независимых направлений, совпадающих с собственными векторами, вдоль которых он осуществляет растяжение компонент произвольного вектора с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Характеристические числа матрицы определяются из решения уравнения n -й степени, поэтому они могут быть как вещественными так и комплексными. Однако в одном частном случае они всегда вещественные. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим теорему о характеристических числах матрицы, которая понадобится нам в дальнейшем. Пусть черточка сверху означает комплексно-сопряженное число.

Так, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ – матрица-столбец, составленная из компонент сопряженного вектора. Здесь также введены скалярное произведение

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{и вспомогательное равенство} \quad (x, Ay) = (A^* x, y), \quad \text{где}$$

A^* – сопряженная матрица.

Теорема 11. *Все характеристические числа вещественной, симметрической матрицы вещественны.*

Доказательство. Поскольку матрица A – вещественная, ее комплексно-сопряженная матрица $\bar{A}$ с ней совпадает. А из ее симметричности следует, кроме того, что с ней совпадает также и сопряженная матрица A^* .

Из условия теоремы следует:

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0). \quad (11)$$

Предположим обратное, т. е. что характеристическое число матрицы A комплексное. Проведем преобразования одного выражения двумя путями, в каждом из которых воспользуемся равенством (11):

$$(x, A\bar{x}) = (x, \overline{Ax}) = (x, \overline{(\lambda x)}) = (x, (\bar{\lambda} \bar{x})) = \bar{\lambda}(x, \bar{x}),$$

$$(x, A\bar{x}) = (A^* x, \bar{x}) = (Ax, \bar{x}) = ((\lambda x), \bar{x}) = \lambda(x, \bar{x}).$$

Левые части этих выражений равны, следовательно, должны быть равны и правые, откуда $\bar{\lambda} = \lambda$. А это возможно только в случае, когда λ — вещественное, что требовалось доказать.

1.8. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

1. Определение 20. *Квадратичной формой* называется однородный многочлен второй степени относительно n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k \quad (a_{ik} = a_{ki}). \quad (1)$$

Из коэффициентов формы можно построить квадратную симметрическую матрицу $A = \|a_{ik}\|_1^n$, а из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ — матрицу-столбец x и транспонированную матрицу-строку x^T :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n).$$

Тогда с их помощью и с помощью матрицы A квадратичная форма (1) может быть представлена в следующем виде:

$$A(x, x) = x^T A x. \quad (2)$$

В справедливости этого равенства можно убедиться, произведя перемножение матриц в любой последовательности и сравнив полученный результат с формулой (1).

Определение 21. Если матрица A есть вещественная симметрическая матрица, то соответствующая ей квадратичная форма называется *вещественной формой*.

Определение 22. Определитель матрицы $|A| = |a_{ik}|_1^n$ называется *дискриминантом квадратичной формы*. Если он равен нулю ($|A| = 0$), то форма называется *сингулярной*, и *регулярной* в противном случае ($|A| \neq 0$).

Определение 23. Ранг матрицы A , отвечающей квадратичной форме, есть *ранг квадратичной формы*.

Продемонстрируем связь квадратичной формы с линейными операторами. Пусть задан самосопряженный оператор A в пространстве R^n , т. е. $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y})$, и в том же пространстве выбран некоторый ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ / $(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta_{ik}$ /. Тогда для этого оператора можно найти соответствующую ему матрицу $A = \|a_{ik}\|_1^n$, элементы которой определяются из равенства

$$A\vec{e}_k = \sum_{i=1}^n a_{ik}\vec{e}_i \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Тогда для произвольного вектора, представленного в виде $\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k$, с помощью равенства (3) можно получить цепочку равенств

$$A\vec{x} = \sum_{k=1}^n x_k A\vec{e}_k = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{i=1}^n a_{ik}\vec{e}_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \right) \vec{e}_i. \quad (4)$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\vec{x}$ и воспользуемся свойством ортонормированного базиса:

$$(A\vec{x}, \vec{x}) = \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k \right) \vec{e}_i, \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik}x_i x_k = A(x, x).$$

Таким образом, нами установлена связь квадратичной формы с линейным оператором

$$A(x, x) = (\mathbf{A} \vec{x}, \vec{x}). \quad (5)$$

Умножив равенство (3) почленно на вектор $\vec{e}_i$, получим выражение для коэффициентов квадратичной формы

$$a_{ik} = (\mathbf{A} \vec{e}_k, \vec{e}_i) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

2. Выясним, как изменяется матрица квадратичной формы A при замене переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Введем новые переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, связанные со старыми переменными с помощью линейных соотношений:

$$x_i = \sum_{k=1}^n t_{ik} \xi_k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

Составим квадратную матрицу T из элементов t_{ik} и матрицу столбец из переменных ξ_k . Будем считать, что матрица T – неособенная, тогда преобразование (6) взаимно однозначно. Запишем равенство (6) в матричном виде, а также результат транспонирования обеих частей:

$$x = T\xi, \quad x^T = \xi^T T^T. \quad (6')$$

Из равенства (2) с помощью (6') получим цепочку равенств

$$A(x, x) = x^T A x = \xi^T T^T A T \xi = \xi^T \tilde{A} \xi = \tilde{A}(\xi, \xi),$$

где введено обозначение

$$\tilde{A} = T^T A T. \quad (7)$$

Полученная в результате замены переменных матрица $\tilde{A} = \|\tilde{a}_{ik}\|_1^n$ соответствует квадратичной форме $\tilde{A}(\xi, \xi) = \sum_{i,k=1}^n \tilde{a}_{ik} \xi_i \xi_k$. Из равенства

(7) получим выражение для дискриминанта новой квадратичной формы

$$|\tilde{A}| = |A||T|^2, \quad (8)$$

поскольку определитель сопряженной матрицы T^T равен определителю исходной матрицы T .

Заметим, что в равенстве (7) матрица A дважды умножается на неособенную матрицу, а следовательно, ранг произведения не изменяется $r_{\tilde{A}} = r_A$. Таким образом, нами получено, что при любой неособенной замене переменных ранг матрицы, соответствующей квадратичной форме, не меняется.

Определение 24. Ранг матрицы коэффициентов квадратичной формы называется *рангом формы*.

Определение 25. Две симметрические матрицы A и $\tilde{A}$, связанные равенством (7), называются *конгруэнтными матрицами*.

Таким образом, с квадратичной формой связан класс конгруэнтных матриц. Все они имеют один и тот же ранг – ранг формы.

3. С помощью приведенной выше замены переменных квадратичная форма может быть приведена к сумме квадратов, когда новые переменные будут представлены только в виде квадратов. Оказывается, существует бесчисленное множество таких представлений. Рассмотрим одно из них. Пусть квадратичная форма приведена к виду

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^r a_i X_i^2, \quad a_i \neq 0 \quad (i=1, 2, \dots, r). \quad (9)$$

Здесь число слагаемых в сумме не превосходит размерности формы ($r \leq n$). Переход к новым параметрам может быть выполнен с помощью независимых линейных преобразований (линейных форм):

$$X_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k \quad (i=1, 2, \dots, r).$$

Дополним $X_1, X_2, \dots, X_r$ линейными преобразованиями $X_{r+1}, X_{r+2}, \dots, X_n$ так, чтобы все они были линейно независимы, и введем новые переменные

$$\xi_i = X_i \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Тогда квадратичная форма (9) преобразуется к виду:

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i^2 = \tilde{A}(\xi, \xi), \quad a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, \dots, a_r \neq 0, a_{r+1} = a_{r+2} = \dots = a_n = 0.$$

Следовательно, матрица $\tilde{A}$ является квадратной и имеет следующую структуру:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_r & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг формы равен r , и число квадратов в ее представлении (9) равно рангу формы.

Как уже было сказано, приведение квадратичной формы к сумме квадратов неоднозначно, однако имеет место следующая теорема.

Теорема 12 (закон инерции квадратичных форм). *При представлении квадратичной формы в виде суммы независимых квадратов (9), где X_i — линейные комбинации параметров $x_1, x_2, \dots, x_n$, число положительных коэффициентов a_i и число отрицательных коэффициентов a_i не зависит от способа представления формы в данном виде.*

Доказательство теоремы производится методом от противного. Предположим, что кроме представления (9) имеет место другое представление:

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^r b_i Y_i^2.$$

Здесь Y_i – другие линейные комбинации параметров $x_1, x_2, \dots, x_n$, и пусть имеют место неравенства

$$\begin{aligned} a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_h > 0, a_{h+1} < 0, \dots, a_r < 0, \\ b_1 > 0, b_2 > 0, \dots, b_g > 0, b_{g+1} < 0, \dots, b_r < 0, \end{aligned}$$

где $h \neq g$. Не нарушая общности, будем предполагать, что $h < g$.

В тождестве

$$A(x, x) = \sum_{i=1}^r a_i X_i^2 = \sum_{i=1}^r b_i Y_i^2 \quad (10)$$

выберем такие значения параметров $x_1, x_2, \dots, x_n$, чтобы выполнялись равенства

$$X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_h = 0, \quad Y_{g+1} = 0, \dots, Y_r = 0 \quad (11)$$

и хотя бы одна из форм $X_{h+1}, \dots, X_r$ не обращалась в нуль. Эти требования выполнимы, поскольку на n параметров они накладывают $r - (g - h) \leq n$ условий. Тогда для сумм в равенстве (10) получим следующие неравенства:

$$\sum_{i=1}^r a_i X_i^2 < 0, \quad \sum_{i=1}^r b_i Y_i^2 \geq 0.$$

Но отсюда следует, что эти суммы не могут быть равны, а это противоречит равенству (10). Таким образом, допущение $h \neq g$ привело к противоречию, следовательно, теорема доказана.

В формуле (9) числовые коэффициенты могут быть внесены в параметры X_i , что означает деление на $\sqrt{|a_i|}$ всех коэффициентов α_{ik} в линейных преобразованиях для X_i . Тогда квадратичная форма примет следующий вид:

$$A(x, x) = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_\pi^2 - X_{\pi+1}^2 - \dots - X_r^2. \quad (12)$$

И вводя, как и ранее, новые переменные $\xi_i = X_i \quad (i=1,2,\dots,r)$, получим новое представление квадратичной формы

$$\tilde{A}(\xi, \xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_\pi^2 - \xi_{\pi+1}^2 - \dots - \xi_r^2. \quad (13)$$

Как нетрудно заметить, новой квадратичной форме соответствует диагональная матрица $\tilde{A}$ с элементами $+1$, -1 и 0 . А вещественная симметрическая матрица A , соответствующая исходной квадратичной форме, ей конгруэнтна:

$$A = T^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} T. \quad (14)$$

4. Рассмотрим один из методов приведения квадратичной формы к сумме квадратов, который носит название *метода Лагранжа*.

Метод выделения квадратов Лагранжа. При выделении квадратов квадратичной формы возможны два случая.

1) Если элемент матрицы $a_{gg} \neq 0$, то оно производится по формуле:

$$A(x, x) = \frac{1}{a_{gg}} \left(\sum_{k=1}^n a_{gk} x_k \right)^2 + A_1(x, x), \quad (15)$$

где новая квадратичная форма $A_1(x, x)$ не содержит переменной x_g . Это можно показать, возведя скобку в квадрат и убедившись, что результат возведения содержит все слагаемые формы, соответствующие g -му столбцу и g -й строке матрицы A . Аналогичное выделение квадрата производится из формы $A_1(x, x)$ и т. д. до тех пор, пока в очередной квадратичной форме все коэффициенты у квадратов переменных окажутся равными нулю. Тогда выделение квадратов производится вторым способом.

2) Пусть $a_{gg} = 0$, $a_{hh} = 0$, но $a_{gh} = a_{hg} \neq 0$, тогда выделение производится по формуле

$$A(x, x) = \frac{1}{2a_{hg}} \left[\sum_{k=1}^n (a_{gk} + a_{hk})x_k \right]^2 - \frac{1}{2a_{hg}} \left[\sum_{k=1}^n (a_{gk} - a_{hk})x_k \right]^2 + A_2(x, x). \quad (16)$$

Здесь суммы $\sum_{k=1}^n a_{gk}x_k$ и $\sum_{k=1}^n a_{hk}x_k$ линейно независимы, так как первая содержит переменную x_h ($a_{gh} \neq 0$) и не содержит переменную x_g ($a_{gg} = 0$), а вторая, наоборот, содержит x_g ($a_{hg} \neq 0$) и не содержит переменную x_h ($a_{hh} = 0$). Поэтому формы в квадратных скобках линейно независимы. Остаточная форма $A_2(x, x)$ уже не содержит параметры x_g и x_h . Продолжая описанный процесс многократно, приведем квадратичную форму к сумме квадратов. Причем выражения под знаком квадрата будут линейно независимы, поскольку каждое из них содержит хотя бы одну переменную, которая отсутствует в остаточных формах.

Формулы (15), (16) могут быть заменены более удобными для использования эквивалентными им выражениями:

$$A(x, x) = \frac{1}{4a_{gg}} \left(\frac{\partial A}{\partial x_g} \right)^2 + A_1(x, x), \quad (15')$$

$$A(x, x) = \frac{1}{8a_{gh}} \left[\left(\frac{\partial A}{\partial x_g} + \frac{\partial A}{\partial x_h} \right)^2 - \left(\frac{\partial A}{\partial x_g} - \frac{\partial A}{\partial x_h} \right)^2 \right] + A_2(x, x). \quad (16')$$

Убедимся в справедливости представленной замены на примере первой из этих формул. Продифференцируем квадратичную форму

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k \quad \text{по переменной } x_g:$$

$$\frac{\partial A}{\partial x_g} = 2a_{gg}x_g + a_{1g}x_1 + a_{2g}x_2 + \dots + a_{ng}x_n + a_{g1}x_1 + a_{g2}x_2 + \dots + a_{gn}x_n.$$

Здесь слагаемые не содержат переменной x_g , кроме самого первого.

Поскольку матрица формы симметрична, мы имеем $a_{kg} = a_{gk}$ ($k=1, 2, \dots, n$). Следовательно, первую половину слагаемых можно объединить со второй, и окончательно получим

$$A(x, x) = 2 \sum_{k=1}^n a_{gk} x_k.$$

Если подставить полученное выражение в формулу (15'), то получим (15). Эквивалентность формул (16) и (16') доказывается аналогично.

Приведение квадратичной формы к сумме квадратов необходимо для изучения ее свойств, однако само приведение является громоздкой операцией. Иногда бывает достаточно получить информацию лишь о знаках коэффициентов формы, приведенной к сумме квадратов. Для этой цели может быть полезна следующая теорема, которую приводим без доказательства.

Теорема Якоби. Пусть квадратичная форма имеет вид

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k,$$

и пусть главные миноры соответствующей ей матрицы A

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \dots, D_k = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ 1 & 2 & \dots & k \end{pmatrix}, \dots, D_n = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

все отличны от нуля, тогда существуют линейные формы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ($\xi_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k$), для которых квадратичная форма пишется в виде

$$A(\xi, \xi) = \frac{D_0}{D_1} \xi_1^2 + \frac{D_1}{D_2} \xi_2^2 + \dots + \frac{D_{n-1}}{D_n} \xi_n^2, \quad D_0 = 1. \quad (17)$$

Формула (17) носит название формулы Якоби. Заметим, что в отличие от метода Лагранжа конкретный вид линейных форм здесь остается неизвестным.

В теории квадратичных форм большую роль играют формы, которые имеют один и тот же знак при любых значениях переменных.

Определение 26. Вещественная квадратичная форма $A(x, x)$ называется *положительно определенной*, если для любых значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, не равных одновременно нулю, она принимает только положительные значения.

Если такая квадратичная форма приведена к сумме квадратов $A(x, x) = \sum_{i=1}^r a_i X_i^2$, то все коэффициенты a_i должны быть положительными и $r = n$. Необходимость последнего условия можно показать следующим образом. Предположим, что $r < n$, тогда выберем параметры $x_1, x_2, \dots, x_n$ такими, что все их линейные формы $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ равны нулю, а X_n не равно нулю. Но тогда форма обращается в нуль, что противоречит определению.

Следующая теорема позволяет установить условие положительной определенности форм.

Теорема 13 (критерий Сильвестра). *Для того чтобы квадратичная форма*

$$A(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$$

была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы в равенстве (17) все главные миноры D_i были положительными.

Достаточность. Предположим, что

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0, \quad (18)$$

тогда все коэффициенты в формуле (17) положительны. И если переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ не равны одновременно нулю, значит, не равны одновременно нулю и переменные $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, а следовательно, квадратичная форма положительна.

Необходимость. Из положительной определенности квадратичной формы $A(x, x) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k$ следует положительная определенность «урезанных» форм

$$A_p(x, x) = \sum_{i,k=1}^p a_{ik} x_i x_k \quad (p=1, 2, \dots, n). \quad (19)$$

В этом можно убедиться, положив для каждого p параметры $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$, равными нулю. Таким образом, ранг каждой из этих форм равен числу p в силу того, что каждая из них может быть приведена к сумме квадратов с числом слагаемых, равным p . Отсюда следует, что все урезанные формы регулярны:

$$A \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, p \\ 1, 2, \dots, p \end{pmatrix} = D_p = |A_p| \neq 0 \quad (p=1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

Полученный результат дает возможность воспользоваться теоремой Якоби. В силу положительной определенности квадратичной формы все коэффициенты в формуле (17) должны быть положительны:

$$\frac{D_0}{D_1} > 0, \quad \frac{D_1}{D_2} > 0, \quad \dots, \quad \frac{D_{n-1}}{D_n} > 0, \quad D_0 = 1.$$

Отсюда следуют неравенства (18), что и требовалось доказать.

1.9. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В любом n -мерном векторном пространстве R^n может быть введено расстояние между векторами.

Определение 27. Расстоянием между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$ называется неотрицательная скалярная функция $\rho(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$, удовлетворяющая аксиомам:

$$1^\circ \rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \vec{x} = \vec{y}.$$

$$2^\circ \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \rho(\vec{y}, \vec{x}) \text{ (аксиома симметрии).}$$

$$3^\circ \rho(\vec{x}, \vec{z}) \leq \rho(\vec{x}, \vec{y}) + \rho(\vec{y}, \vec{z}) \text{ (аксиома треугольника).}$$

Если в пространстве каким-либо образом введено расстояние между векторами, то говорят, что в нем введена метрика.

Определение 28. Векторное пространство R^n с введенной в нем метрикой называется метрическим пространством.

Приведем примеры задания метрики. Пусть в векторном пространстве R^n введен ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, следовательно, $(\vec{e}_i, \vec{e}_k) = \delta_{ik}$, где δ_{ik} — символ Кронекера. Тогда каждому вектору $\vec{x} \in R^n$ соответствует матрица-столбец, составленная из его координат в этом базисе $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$. Приведем два примера выбора расстояния между двумя векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$1. \ \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

$$2. \ \rho(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Можно показать, что оба выбранные выражения для расстояния $\rho(\vec{x}, \vec{y})$ удовлетворяют всем трем аксиомам.

С помощью понятия «расстояние» в метрическом пространстве вводится норма вектора $\|\vec{x}\| = \rho(\vec{x}, \vec{0})$.

Определение 29. Норма вектора $\|\vec{x}\|$ есть неотрицательное число, которое принимается за меру отклонения вектора $\vec{x}$ от нулевого вектора и удовлетворяет следующим аксиомам:

$$1^\circ \|\vec{x}\| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \vec{x} = \vec{0}.$$

$$2^\circ \|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|, \text{ где } \alpha - \text{произвольное число.}$$

3° $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (аксиома треугольника).

Определение 30. Векторное пространство R^n с введенной в нем нормой называется *нормированным пространством*.

Для приведенного выше пространства R^n с ортонормированным базисом вводятся следующие нормы:

$$1. \|\vec{x}\| = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$2. \|\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Заметим, что оба из приведенных примеров норм могут быть с помощью определения получены из приведенных выше примеров метрик.

При решении дифференциальных уравнений или вычислении определенных интегралов конечно-разностными методами функция $f(t)$ заменяется ее значениями в узлах разностной сетки f_k . Для такой функции норма вводится также одним из приведенных выше способов.

Теперь перейдем к понятию нормы линейного оператора A в нормированном пространстве R^n .

Определение 31. Нормой ограниченного оператора A в пространстве R^n называется наименьшее из чисел C таких, что выполнено неравенство

$$\|A\vec{u}\| \leq C \|\vec{u}\| \quad \forall \vec{u} \in R^n. \quad (1)$$

Отсюда можно также получить другое неравенство

$$\|A\vec{u}\| \leq \|A\| \|\vec{u}\| \quad \forall \vec{u} \in R^n, \quad (1')$$

где $\|A\|$ – норма оператора A .

Поделив обе части неравенства (1') на норму вектора $\|\vec{u}\|$, получим

$$\left\| A \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| \leq \|A\|.$$

Отсюда следует, что равенство здесь имеет место лишь в случае, когда левая часть достигает своего максимального значения. Поэтому может быть дано второе определение нормы оператора, применение которого для нахождения нормы значительно удобнее. Отношение произвольного вектора $\vec{u}$ к его норме обозначим через $\vec{x}$. Очевидно, что норма последнего равна единице.

Определение 31'. *Нормой ограниченного оператора $\mathbf{A}$ в пространстве R^n называется максимальное значение нормы вектора $\|\mathbf{A}\vec{x}\|$ для всех векторов $\vec{x} \in R^n$, для которых выполнено равенство $\|\vec{x}\| = 1$:*

$$\|\mathbf{A}\| = \max \|\mathbf{A}\vec{x}\| \text{ при } \|\vec{x}\| = 1. \quad (2)$$

Рассмотрим пример вычисления нормы оператора. Пусть дан оператор проектирования векторов пространства R^3 на некоторую плоскость P . Будем считать его оператором, действующим из пространства

R^3 в R^3 . В пространстве R^3 введем норму $\|\vec{x}\| = \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{1/2}$, кото-

рая, как нетрудно видеть, является обычной длиной вектора. Возьмем всевозможные векторы $\vec{x}$, норма которых равна единице, тогда максимальное значение нормы векторов $\vec{y} = \mathbf{A}\vec{x}$ также равняется единице, поскольку максимальное значение длины проекции вектора на плоскость равняется длине самого вектора. Отсюда по определению (2) следует, что норма оператора проектирования равна единице.

Нормы операторов играют большую роль при решении дифференциальных уравнений различными численными методами. Приведем простейший пример решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\varphi}{dt} + a(t)\varphi = f(t), \quad \varphi(0) = g,$$

где $a(t), f(t)$ – известные функции своего аргумента; g – число, $\varphi(t)$ – искомая функция и $a(t) > 0$. Требуется найти решение уравнения на отрезке $[0, T]$, удовлетворяющее заданным начальным условиям при $t = 0$.

Разобьем область решения $[0, T]$ на J равных интервалов длины τ и занумеруем узлы разностной сетки $j = 0, 1, 2, \dots, J$. Заменяем искомую функцию $\varphi(t)$ ее значениями в узлах разностной сетки $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_j, \dots, \varphi_J$, где $\varphi_0 = \varphi(0) = g$. Запишем дифференциальное уравнение в конечно-разностном виде

$$\frac{\varphi_{j+1} - \varphi_j}{\tau} + a_j \varphi_j = f_j.$$

Здесь введены обозначения: $a_j = a(t_j)$, $f_j = f(t_j)$. Из полученного равенства выразим

$$\varphi_{j+1} = T_j \varphi_j + \tau f_j,$$

где введено обозначение $T_j = 1 - \tau a_j$. С помощью полученного рекуррентного соотношения можно последовательно вычислить искомую функцию во всех узлах разностной сетки, начиная с первого. Однако чтобы этот процесс был устойчивым, необходимо условие $\|T_j\| \leq 1$, где под нормой здесь следует понимать модуль. Из этого условия получим два неравенства

$$-1 \leq 1 - \tau a_j \leq 1.$$

Здесь правое неравенство выполнено в силу условия $a(t) > 0$, а левое дает условие на шаг разностной схемы $\tau \leq 2/a_j$.

Таким образом, при выборе шага τ , удовлетворяющего этому условию, можно численно получить искомое решение на отрезке $[0, T]$.

Глава 2. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

2.1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВЕКТОРА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ПАРАМЕТРА. КРИВАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном пространстве R^3 рассмотрим переменный вектор $\overset{1}{a}(t)$, зависящий от некоторого параметра t . Это равносильно заданию трех скалярных функций,

$$\overset{r}{a}(t) = a_x(t)\overset{r}{i} + a_y(t)\overset{r}{j} + a_z(t)\overset{1}{k} \quad (1)$$

где a_x, a_y, a_z – декартовы координаты вектора.

Будем считать, что $\overset{1}{a}(t)$ – непрерывная векторная функция от t , т. е. для заданных t и $t + \Delta t$ разность $\overset{1}{a}(t + \Delta t) - \overset{1}{a}(t)$ может быть сколь угодно малой при малом Δt . Это означает, что $\overset{1}{a}(t)$ есть предел функции $\overset{1}{a}(t + \Delta t)$ при Δt , стремящемся к нулю:

$$\overset{1}{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overset{1}{a}(t + \Delta t). \quad (2)$$

Вектор $\overset{1}{a}(t)$ будем откладывать из некоторой точки O , тогда при изменении параметра t конец вектора опишет в пространстве некоторую кривую.

Определение 1. Геометрическое место концов вектора $\overset{1}{a}(t)$, отложенных из общего начала O , называется *годографом вектора*.

Построим вектор $\Delta \overset{1}{a} = \overset{1}{a}(t + \Delta t) - \overset{1}{a}(t)$ (рис. 1) и запишем отношение

$$\frac{\Delta \overset{1}{a}}{\Delta t} = \frac{\overset{1}{a}(t + \Delta t) - \overset{1}{a}(t)}{\Delta t}.$$

Если существует предел этого отношения при Δt , стремящемся к нулю, то определим *производную вектора* как предел этого отношения

$$\overset{r}{a}'(t) = \frac{d\overset{1}{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overset{1}{a}(t + \Delta t) - \overset{1}{a}(t)}{\Delta t}. \quad (3)$$

Поскольку при переходе к пределу вектор $\Delta \vec{a}$ стремится по направлению к касательной к кривой, то направление вектора $\frac{d\vec{a}}{dt}$ совпадает с касательной к годографу вектора $\vec{a}(t)$.

Свойства производных от произведения скалярных функций сохраняются и для векторов:

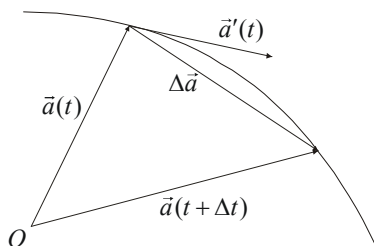


Рис. 1

$$\begin{aligned}\frac{d(c\vec{a})}{dt} &= \frac{dc}{dt}\vec{a} + c\frac{d\vec{a}}{dt}, \\ \frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} &= \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}, \\ \frac{d(\vec{a} \times \vec{b})}{dt} &= \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}.\end{aligned}$$

Здесь как обычно точка означает скалярное умножение векторов, а крестик – векторное. В последнем случае перестановка сомножителей приводит к изменению знака произведения.

Для вектора $\vec{a}(t)$ введем его длину $a(t)$ и его единичный орт $\vec{a}_1(t)$:

$$\vec{a}(t) = a(t)\vec{a}_1(t). \quad (4)$$

Рассмотрим два частных случая:

1. Пусть вектор $\vec{a}(t)$ имеет постоянное направление, следовательно, орт $\vec{a}_1(t)$ постоянен и его производная равна нулю. Тогда для производной вектора $a(t)$ получим равенство

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{a}_1.$$

Таким образом, направление производной совпадает с направлением вектора.

2. Пусть теперь длина вектора $\vec{a}(t)$ постоянна: $a(t) = a = \text{const}$. В этом случае годограф вектора лежит на сфере радиуса a и его производ-

водная ортогональна вектору $\dot{\vec{a}}(t)$. В самом деле, продифференцируем почленно равенство $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = \text{const}$.

$$\frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 2\vec{a} \cdot \frac{d\vec{a}}{dt} = 0$$

Известно, что из равенства нулю скалярного произведения двух векторов следует их ортогональность, если они оба ненулевые. Отсюда вытекает ортогональность производной к самому вектору, и для нее имеем равенство

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a \frac{d\vec{a}_1}{dt}. \quad (5)$$

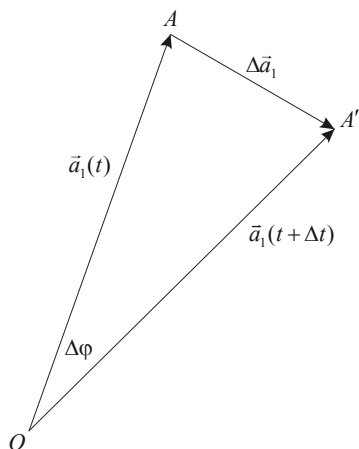


Рис. 2

Вычислим теперь длину вектора $\frac{d\vec{a}_1}{dt}$. Для

$$AA' = |\Delta \vec{a}_1| = 2 \sin\left(\frac{1}{2} \Delta \varphi\right),$$

где $\Delta \varphi$ — угол при вершине треугольника.

..... В

$$\left| \frac{d\vec{a}_1}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{a}_1|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{1}{2} \Delta \varphi\right)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad (6)$$

Введем угловую скорость $\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$, тогда получим, что производная вектора $\dot{\vec{a}}_1(t)$ есть угловая скорость его перемещения $\left| \frac{d\vec{a}_1}{dt} \right| = \vec{\omega}$.

Перейдем теперь к рассмотрению кривой в трехмерном пространстве и вв

$$\vec{r} = i\vec{x} + j\vec{y} + k\vec{z}$$

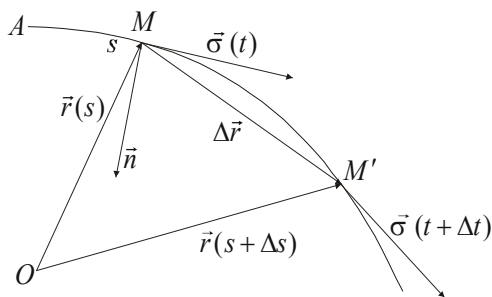


Рис. 3

кривую будем рассматривать как годограф вектора $\vec{r}(s)$. Следовательно, вектор $\frac{d\vec{r}}{ds}$ в точке M направлен по касательной к кривой в этой точке. Кроме того, его длина равна единице, поскольку

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = 1.$$

Таким образом, введем единичный вектор касательной к кривой

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad |\vec{\sigma}| = 1. \quad (7)$$

Его компоненты вдоль осей координат

$$\sigma_x = \cos(\vec{\sigma}, x) = \frac{dx}{ds}, \quad \sigma_y = \cos(\vec{\sigma}, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \sigma_z = \cos(\vec{\sigma}, z) = \frac{dz}{ds} \quad (8)$$

могут быть вычислены в любой точке кривой, если заданы скалярные функции для координат кривой $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$.

Вычислим вторую производную радиуса-вектора $\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d \mathbf{\sigma}}{ds}$. Поскольку $\mathbf{r}$ и обозначается как $1/R$.

$$\left| \frac{d \mathbf{\sigma}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R}. \quad (9)$$

Определение 2. Величина R , определяемая формулой (9), называется *радиусом кривизны*. Выясним направление вектора $\frac{d \mathbf{\sigma}}{ds}$. Вектор $\Delta \mathbf{\sigma}$ лежит в плоскости, проходящей через концы векторов $\mathbf{\sigma}$ и $\mathbf{\sigma} + \Delta \mathbf{\sigma}$. Теперь введем некоторые определения.

Определение 3. Прямые, проходящие через точку M и перпендикулярные касательной к кривой в этой точке, называются *нормальными*. Таким образом, вектор $\frac{d \mathbf{\sigma}}{ds}$ направлен по главной нормали в сторону вогнутости кривой.

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d \mathbf{\sigma}}{ds} = \frac{\mathbf{r}}{R}. \quad (10)$$

Отсюда можно получить выражения для компонент вектора нормали

$$n_x = R \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad n_y = R \frac{d^2 y}{ds^2}, \quad n_z = R \frac{d^2 z}{ds^2}$$

и величины радиуса кривизны

$$R = \left[\left(\frac{d^2 x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (11)$$

Эти величины можно вычислить, если задано уравнение кривой $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$.

Таким образом, нами определены два вектора, связанные с кривой: касательный и нормальный.

Определение 4. Нормаль к кривой, перпендикулярная к соприкасающейся касательной, называется *главной нормалью*. Заметим, что она, как и главная нормаль, лежит в нормальной плоскости.

$$\mathbf{b} = \mathbf{r} \times \mathbf{n}. \quad (12)$$

Этот вектор будем также называть *бинормалью*.

Теперь вычислим производную от вектора бинормали $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$, но сначала вы

$$|\mathbf{b}| = 1 \rightarrow \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1 \rightarrow \frac{d(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b})}{ds} = 2\mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0 \rightarrow \frac{d\mathbf{b}}{ds} \perp \mathbf{b}. \quad (13)$$

Последнее условие ортогональности векторов $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ и $\mathbf{b}$ получено, как и ранее, в п. 2.

Для вычисления производной $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ воспользуемся равенством (12):

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d(\mathbf{\sigma} \times \mathbf{n})}{ds} = \frac{d\mathbf{\sigma}}{ds} \times \mathbf{n} + \mathbf{\sigma} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}.$$

В этой формуле первый сомножитель первого слагаемого пропорционален вектору $\mathbf{n}$, поэтому первое слагаемое равно нулю, как произведение двух коллинеарных векторов. Таким образом, $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{\sigma} \times \frac{d\mathbf{n}}{ds}$ и,

следовательно, производная $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ перпендикулярна к вектору $\mathbf{\sigma}$. Но

ранее мы показали (13), что она перпендикулярна и к вектору $\mathbf{b}$, следовательно, коллинеарна вектору $\mathbf{n}$. Поэтому можно записать

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{\mathbf{n}}{T}. \quad (14)$$

где множитель $1/T$ называется *кручением кривой*, а T – *радиусом кручения*.

..... Поскольку вектор $\mathbf{b}$ единичный, на основании п. 2 имеем

$$\left| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right| = \left| \frac{1}{T} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s},$$

где $\Delta\psi$ есть угол между двумя бинормальными в точках s и $s + \Delta s$. Если кривая плоская, то $\Delta\psi$ всегда равно нулю и, значит, кручение $1/T$ тоже равно нулю. Следовательно, кручение есть мера отклонения кривой от плоской.

Ранее нами получены производные $\frac{d\overset{\text{I}}{\sigma}}{ds}$ (10), $\frac{d\overset{\text{I}}{b}}{ds}$ (14), и нам осталось по-

$$\frac{d\overset{\text{I}}{n}}{ds} = \frac{d(\overset{\text{I}}{b} \times \overset{\text{I}}{\sigma})}{ds} = \frac{d\overset{\text{I}}{b}}{ds} \times \overset{\text{I}}{\sigma} + \overset{\text{I}}{b} \times \frac{d\overset{\text{I}}{\sigma}}{ds} = -\frac{\overset{\text{I}}{n}}{T} \times \overset{\text{I}}{\sigma} + \overset{\text{I}}{b} \times \frac{\overset{\text{I}}{n}}{R} = \frac{\overset{\text{I}}{b}}{T} - \frac{\overset{\text{I}}{\sigma}}{R}. \quad (15)$$

Здесь мы воспользовались также формулами (10) и (14).

Таким образом, мы ввели локальную ортогональную систему координат $\overset{\text{I}}{\sigma}, \overset{\text{I}}{n}, \overset{\text{I}}{b}$, связанную с пространственной кривой, и получили для производных от этих векторов следующие формулы:

$$\frac{d\overset{\text{I}}{\sigma}}{ds} = \frac{\overset{\text{I}}{n}}{R}, \quad \frac{d\overset{\text{I}}{n}}{ds} = \frac{\overset{\text{I}}{b}}{T} - \frac{\overset{\text{I}}{\sigma}}{R}, \quad \frac{d\overset{\text{I}}{b}}{ds} = -\frac{\overset{\text{I}}{n}}{T}. \quad (16)$$

Эти формулы носят название *формул Френе*. С их помощью можно решать различные задачи и находить пространственные кривые с заданными свойствами.

2.2. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

В предыдущем параграфе рассматривались векторы, зависящие от параметра. Далее будем иметь дело с векторами и скалярными величинами, которые заданы в каждой точке трехмерного пространства.

Определение 5. Если в каждой точке трехмерного пространства задана скалярная или векторная величина, то это означает, что задано *скалярное* или *векторное поле*.

Примером первого определения является поле давления, а второго – поле вектора скорости. Математически скалярное поле записывается как $\phi(\overset{\text{I}}{r})$ или $\phi(x, y, z)$ в декартовой системе координат. Аналогично представляется векторное поле: $\overset{\text{I}}{a}(\overset{\text{I}}{r})$ или $a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z)$. Если скалярная или векторная величины зависят еще и от

времени, то поле называется *нестационарным*: $\varphi(t, \overset{1}{r})$, $\overset{1}{a}(t, \overset{1}{r})$. Будем считать все функции непрерывными и дифференцируемыми по всем аргументам.

Рассмотрим сначала скалярное поле $\varphi(\overset{1}{r})$ и определим для него некоторую особую поверхность. Пусть в некоторой точке $M_0(\overset{1}{r}_0)$ функция $\varphi(\overset{1}{r})$ принимает значение φ_0 , т. е. $\varphi(\overset{1}{r}_0) = \varphi_0$. Проведем в пространстве поверхность, в каждой точке которой функция будет принимать то же значение $\varphi(\overset{1}{r}) = \varphi_0$ или $\varphi(x, y, z) = \varphi_0$. Такая поверхность называется *поверхностью уровня* или *изоповерхностью*. Например, изобара – поверхность постоянного давления. Ясно, что с изменением значения скаляра φ_0 поверхность уровня будет смещаться.

В случае векторного поля $\overset{1}{a}(\overset{1}{r})$ имеют место некоторые особые линии.

Определение 6. Линия в векторном поле $\overset{1}{a}(\overset{1}{r})$, в каждой точке которой вектор $\overset{1}{a}$ ее касается, называется *векторной линией*.

С помощью сведений из предыдущего параграфа нетрудно получить уравнение векторной линии. Пусть задано векторное поле $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$ и пусть уравнение векторной линии в пространстве $\overset{1}{r} = \overset{1}{r}(s)$, где s – длина кривой. Возьмем в некоторой точке $M(\overset{1}{r})$ касательный вектор $\overset{r}{\sigma} = \frac{d\overset{1}{r}}{ds}$. По определению векторной линии вектор $\overset{1}{a}$ в этой точке должен ее касаться, следовательно, векторы $\overset{r}{\sigma}$ и $\overset{1}{a}$ должны быть коллинеарны. Известно, что условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения, следовательно, $\frac{d\overset{1}{r}}{ds} \times \overset{r}{\sigma} = 0$ или $d\overset{1}{r} \times \overset{1}{a} = 0$. Это и есть уравнение векторной линии, но с его помощью трудно построить саму линию. Поэтому запишем это уравнение с помощью определителя

$$d\overset{1}{r} \times \overset{1}{a} = \begin{vmatrix} \overset{r}{i} & \overset{r}{j} & \overset{r}{k} \\ dx & dy & dz \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0.$$

Если раскрыть определитель и приравнять нулю каждую компоненту полученного вектора, то можно получить следующие равенства, которые тоже являются уравнением векторной линии:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Подставив в эту систему функции $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$ и решая обыкновенные дифференциальные уравнения, получим двухпараметрическое семейство векторных линий. Примером векторной линии является линия тока.

2.3. ГРАДИЕНТ И ЕГО СВОЙСТВА

Рассмотрим скалярное поле функции $\varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$. Через заданную точку M проведем кривую L , уравнение которой задано в виде

$$x = x(s), y = y(s), z = z(s).$$

Здесь s — длина вдоль кривой от некоторой точки. Из точки M проведем единичный вектор $\vec{s}$ касательной к кривой (рис. 4). Если рассматривать изменение функции φ вдоль кривой L , то ее можно считать функцией параметра s . Вычислим производную $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ в точке M как сложную функцию параметра s :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

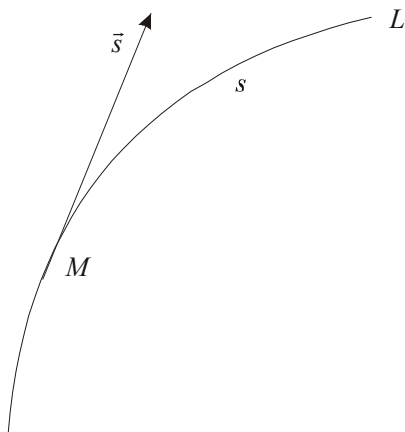


Рис. 4

И поскольку обыкновенные производные в этом равенстве есть направляющие косинусы вектора $\vec{s}$

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\overset{\text{r}}{s}, x), \quad \frac{dy}{ds} = \cos(\overset{\text{r}}{s}, y), \quad \frac{dz}{ds} = \cos(\overset{\text{r}}{s}, z),$$

то окончательно получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(\overset{\text{r}}{s}, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(\overset{\text{r}}{s}, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos(\overset{\text{r}}{s}, z).$$

С другой стороны, нам известно, что проекция любого вектора $\overset{1}{a}$ на направление единичного вектора $\overset{1}{s}$ представима в виде

$$a_s = a_x \cos(\overset{1}{s}, x) + a_y \cos(\overset{1}{s}, y) + a_z \cos(\overset{1}{s}, z).$$

Сопоставляя два последних равенства, приходим к выводу, что скаляры $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ есть компоненты некоторого вектора, проекция которого в точке M на единичный вектор $\overset{1}{s}$ равна $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$.

Определение 7. Вектор с компонентами $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ называется *градиентом функции φ в точке M* и обозначается $\text{grad } \varphi$.

Таким образом,

$$\text{grad}_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \text{grad}_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \text{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \text{grad}_s \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s}. \quad (1)$$

Теперь можно записать выражение для самого вектора градиента

$$\text{grad } \varphi = \overset{\text{r}}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \overset{\text{r}}{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \overset{\text{r}}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Отсюда получим длину этого вектора

$$|\text{grad } \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Таким образом, производная функции φ по любому направлению $\vec{s}$ равна проекции вектора $\text{grad} \varphi$ на это направление. С помощью правила скалярного умножения и учитывая, что вектор $\vec{s}$ единичный, можно записать

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \vec{s} \cdot \text{grad} \varphi = |\text{grad} \varphi| \cos(\text{grad} \varphi, \vec{s}). \quad (3)$$

Из этой формулы следует, что величина $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ достигает максимального значения, если направление вектора $\vec{s}$ совпадает с направлением вектора $\text{grad} \varphi$ и оно равно его длине. Отсюда следует другое определение градиента.

Определение 8. Градиентом функции φ называется вектор, имеющий направление быстрейшего роста функции φ и по величине равный производной по этому направлению.

Введем дифференциальный оператор *набла*, обладающий векторными свойствами:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4)$$

Он носит еще название *оператора Гамильтона*. Любая скалярная функция, стоящая справа от него, должна быть подставлена под знаки производных

$$\nabla \varphi = i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + j \frac{\partial \varphi}{\partial y} + k \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Через произвольную точку M проведем поверхность уровня $\varphi(x, y, z) = \text{const}$ и покажем, что вектор $\text{grad} \varphi$ в этой точке направлен по нормали к этой поверхности. Проведем в точке M касательную плоскость к поверхности, тогда производные $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ вдоль любого вектора $\vec{s}$, лежащего в этой плоскости, равны нулю, поскольку функция вдоль поверхности не меняется. Тогда из формулы (3) найдем, что

$\cos(\text{grad } \varphi, \vec{s}) = 0$ для любого из этих векторов $\vec{s}$. Отсюда следует, что вектор $\text{grad } \varphi$ перпендикулярен к каждому из них, а следовательно, и к касательной плоскости. Если ввести единичный вектор нормали к поверхности уровня $\vec{n}$, то для градиента функции φ можно записать следующее выражение:

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \vec{n}. \quad (5)$$

В качестве примера рассмотрим поле скоростей движущейся жидкости $\vec{v}(x, y, z)$, для которого векторными линиями являются линии тока. Поверхность, составленная из этих линий, $\Phi(x, y, z) = 0$ называется *поверхностью тока*. Вектор скорости $\vec{v}$ в любой точке этой поверхности является касательным к ней и перпендикулярен к вектору нормали к поверхности в этой точке, а следовательно, и к вектору $\text{grad } \Phi(x, y, z)$. Таким образом, можно записать равенство:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \Phi(x, y, z) = 0.$$

Это и есть уравнение поверхности тока. Поверхность тока, проходящая через замкнутый контур, называется *трубкой тока*. Очевидно, что вся жидкость, втекающая через этот контур, движется внутри трубки тока.

Запишем выражение для бесконечно малого приращения радиуса вектора $d\vec{r} = \vec{s} ds$ в точке M в направлении вектора $\vec{s}$:

$$d\vec{r} = i dx + j dy + k dz.$$

Умножим это равенство почленно скалярно на выражение для градиента (2)

$$d\vec{r} \cdot \text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi$$

В правой части нами получен полный дифференциал функции φ , причем это приращение берется в направлении вектора $d\vec{r}$, которое может быть выбрано произвольно. Таким образом, для произвольного вектора $d\vec{r}$ мы имеем равенство.

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \text{grad } \varphi. \quad (6)$$

Однако значительно больший интерес представляет обратное утверждение.

Теорема 1 (о градиенте функции). Если для некоторой скалярной функции $\varphi(\vec{r})$ найдется такой вектор $\vec{a}$, что для произвольных векторов $d\vec{r}$ справедливо равенство

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \vec{a},$$

то вектор $\vec{a}$ есть градиент функции $\varphi(\vec{r})$: $\vec{a} = \text{grad } \varphi$.

Доказательство. Из последнего равенства для $d\varphi$ вычтем почленно равенство (6)

$$0 = d\vec{r} \cdot (\vec{a} - \text{grad } \varphi).$$

Отсюда следует, что либо эти сомножители ортогональны друг другу, либо один из них равен нулю. Но вектор $d\vec{r}$ по условию теоремы имеет всевозможные направления, поэтому второй сомножитель не может быть ортогонален ко всем направлениям. Кроме того, вектор $d\vec{r}$ не равен нулю, следовательно, равно нулю выражение в круглой скобке, что и требовалось доказать.

Рассмотрим один важный пример. Пусть функция φ зависит только от расстояния от начала координат, т. е. $\varphi = \varphi(r)$. В этом случае поверхности уровня есть сферы с центром в начале координат. Вычислим градиент этой функции. Сначала получим вспомогательное равенство, взяв полный дифференциал от обеих частей тождества $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$:

$$d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2\vec{r} \cdot d\vec{r} = 2r \cdot dr, \quad dr = \frac{1}{r} \vec{r} \cdot d\vec{r}. \quad (7)$$

Возьмем полный дифференциал функции φ : $d\varphi = \varphi'(r) dr$ и исключим dr с помощью вспомогательного равенства

$$d\varphi = d\vec{r} \cdot \frac{\varphi'(r) \vec{r}}{r}.$$

Поскольку вектор $d\vec{r}$ здесь произвольный, выполняются условия теоремы о градиенте функции и под вектором $\vec{a}$ понимается второй сомножитель в этом равенстве, следовательно, из теоремы следует

$$\text{grad } \varphi = \frac{\varphi'(r)}{r} \vec{r}. \quad (8)$$

Рассмотрим некоторые особые векторы, связанные со скалярным полем.

Определение 9. Вектор, являющийся градиентом некоторой скалярной функции, называется *потенциальным вектором*, а поле такого вектора – *потенциальным* и сама скалярная функция – *потенциалом*.

Прежде чем изучать свойства таких векторов, введем понятие линейного интеграла от вектора. Для этого проведем некоторую пространственную кривую L , соединяющую точки M_0 , M_1 , и разобьем ее на малые отрезки, соединив их концы векторами $\Delta\vec{r}_i$. *Линейный интеграл* определим как предел следующей суммы при стремлении длины всех отрезков к нулю:

$$\int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \sum_{M_0}^{M_1} \vec{a}_i \cdot \Delta\vec{r}_i.$$

Поскольку вектор $d\vec{r}$ можно представить в виде $d\vec{r} = \vec{s} ds$, где $\vec{s}$ – единичный вектор, подынтегральное выражение $\vec{a} \cdot d\vec{r}$ заменим следующим: $a_s ds$, где a_s – проекция вектора $\vec{a}$. Кроме того, воспользовавшись покомпонентным умножением векторов, выражение $\vec{a} \cdot d\vec{r}$ можно записать как $a_x dx + a_y dy + a_z dz$. Теперь окончательно выпишем линейный интеграл

$$\int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_L a_s \cdot ds = \int_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz).$$

Интеграл легко вычисляется, если уравнение кривой задано в параметрическом виде: $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$. Нетрудно видеть, что в результате получается скалярная величина.

Определение 10. Линейный интеграл вектора $\vec{a}$ вдоль замкнутой кривой C называется *циркуляцией вектора* по этой кривой и обозначается $\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$.

Очевидно, что линейный интеграл вектора в общем случае зависит от кривой L , соединяющей точки M_0 и M_1 , однако для потенциального вектора это не так, о чем свидетельствует следующая теорема.

Теорема 2. *Линейный интеграл вектора $\vec{a} = \text{grad} \varphi$ вдоль любой кривой L , соединяющей точки $M_0(\vec{r}_0)$ и $M_1(\vec{r}_1)$, равен разности значений функции φ в этих точках.*

Доказательство. Запишем цепочку равенств, воспользовавшись условием теоремы и формулой (6):

$$\int_{M_0}^{M_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{M_0}^{M_1} \text{grad} \varphi \cdot d\vec{r} = \int_{M_0}^{M_1} d\varphi = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_0). \quad (9)$$

Правая часть равенства подтверждает справедливость теоремы.

Из теоремы вытекают два довольно очевидных следствия. Если φ — однозначная функция, то: 1) значение линейного интеграла от $\text{grad} \varphi$ зависит только от начальной и конечной точек и не зависит от пути интегрирования и 2) линейный интеграл от $\text{grad} \varphi$ по любому замкнутому контуру равен нулю. Для второго следствия справедливо и обратное утверждение.

Теорема 3. *Если линейный интеграл вектора $\vec{a}$ по любому замкнутому контуру равен нулю, то вектор $\vec{a}$ — потенциальный вектор, т. е. равен градиенту некоторой скалярной функции φ .*

Доказательство. Введем функцию φ по формуле

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) + \int_{r_0}^{\vec{r}} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

В силу условия теоремы интеграл не зависит от пути интегрирования. Возьмем полный дифференциал от обеих частей равенства, тогда получим выражение $d\varphi = \vec{a} \cdot d\vec{r}$, которое справедливо для любых векторов $d\vec{r}$. Отсюда по теореме о градиенте функции следует, что $\vec{a} = \text{grad} \varphi$. Это и требовалось доказать.

2.4. ПРОИЗВОДНАЯ ВЕКТОРА ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Пусть, как и в предыдущем параграфе, через точку M проведем кривую L , заданную параметрически $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, и единичный вектор касательной к кривой $\overset{1}{s}$. Тогда вектор $\overset{1}{a}(\overset{1}{r})$, определенный во всем пространстве, вдоль этой кривой является сложной функцией длины дуги s . Его производную в точке M вдоль кривой запишем в виде

$$\frac{\partial \overset{1}{a}}{\partial s} = \frac{\partial \overset{1}{a}}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \overset{1}{a}}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \overset{1}{a}}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

Как и в предыдущем параграфе, заменим обыкновенные производные направляющими косинусами:

$$\frac{\partial \overset{1}{a}}{\partial s} = \cos(\overset{1}{s}, x) \frac{\partial \overset{1}{a}}{\partial x} + \cos(\overset{1}{s}, y) \frac{\partial \overset{1}{a}}{\partial y} + \cos(\overset{1}{s}, z) \frac{\partial \overset{1}{a}}{\partial z}. \quad (1)$$

Представим вектор $\overset{1}{s}$ в виде $\overset{1}{s} = \overset{1}{i} \cos(\overset{1}{s}, x) + \overset{1}{j} \cos(\overset{1}{s}, y) + \overset{1}{k} \cos(\overset{1}{s}, z)$, умножим его слева скалярно на оператор Гамильтона $\nabla = \overset{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} + \overset{1}{j} \frac{\partial}{\partial y} + \overset{1}{k} \frac{\partial}{\partial z}$ и в результате получим

$$\overset{1}{s} \cdot \nabla = \cos(\overset{1}{s}, x) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\overset{1}{s}, y) \frac{\partial}{\partial y} + \cos(\overset{1}{s}, z) \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2)$$

Если этот оператор применить к вектору $\overset{1}{a}$, то получим выражение, стоящее в правой части равенства (1), отсюда следует

$$\frac{\partial \overset{1}{a}}{\partial s} = (\overset{1}{s} \cdot \nabla) \overset{1}{a}. \quad (3)$$

Скобки означают, что сначала необходимо выполнить скалярное умножение, а затем полученный оператор применить к вектору $\overset{1}{a}$.

Возьмем произвольный вектор $\overset{1}{v}$ и умножим его слева скалярно на оператор Гамильтона. При этом дифференциальные свойства опера-

тора не распространяются на вектор $\overset{1}{v}$, поскольку он стоит слева от последнего:

$$\overset{r}{v} \cdot \nabla = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4)$$

Полученный оператор может быть применен к любому вектору $\overset{1}{a}$, который будет стоять справа от него:

$$(\overset{r}{v} \cdot \nabla) \overset{r}{a} = v_x \frac{\partial \overset{1}{a}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \overset{1}{a}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \overset{1}{a}}{\partial z}. \quad (5)$$

На основе представленного выше рассмотрения можно утверждать, что полученное выражение означает дифференцирование вектора $\overset{1}{a}$ по направлению $\overset{1}{v}$.

Определение 11. Выражение, определяемое формулой (5), называется *градиентом вектора $\overset{1}{a}$ по вектору $\overset{1}{v}$* .

Рассмотрим нестационарное движение жидкости. Это означает, что заданы нестационарное векторное поле скорости $\overset{1}{v}(t, \overset{1}{r})$, а также некоторое скалярное поле $\varphi(t, \overset{1}{r})$, например давление. Покажем, что для функции $\varphi(t, \overset{1}{r})$ можно ввести две различные производные по времени.

Пусть за время Δt частица жидкости из точки M переместилась в точку M' , а в точку M пришла другая частица с другим значением функции $\varphi(t, \overset{1}{r})$. Если рассматривать изменение этой функции в точке M , то придем к понятию *местной (локальной) производной*, которая определяется следующим образом:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, M) - \varphi(t, M)}{\Delta t}. \quad (6)$$

Если же рассматривать изменение функции $\varphi(t, \overset{1}{r})$, перемещаясь вместе с частицей жидкости из точки M в точку M' , то приходим к понятию *полной (субстанциональной) производной*. Она определяется несколько иным пределом:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t, M') - \varphi(t, M)}{\Delta t}. \quad (7)$$

Это означает, что для функции $\varphi(t, x, y, z)$ координаты точки M' сами зависят от времени. При этом точка M движется со скоростью $\dot{\mathbf{v}}$, компоненты которой определяются формулами

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (8)$$

Распишем полную производную $\varphi(t, x, y, z)$ как сложную функцию параметра t и воспользуемся равенствами (8):

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + v_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + v_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Отсюда следует векторное выражение для полной производной скалярной функции.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla\varphi. \quad (9)$$

Аналогично можно получить выражение для полной производной векторной функции.

$$\frac{d\dot{\mathbf{a}}}{dt} = \frac{\partial\dot{\mathbf{a}}}{\partial t} + \frac{\partial\dot{\mathbf{a}}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\dot{\mathbf{a}}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\dot{\mathbf{a}}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial\dot{\mathbf{a}}}{\partial t} + v_x \frac{\partial\dot{\mathbf{a}}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\dot{\mathbf{a}}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\dot{\mathbf{a}}}{\partial z}.$$

Однако оно сворачивается в другое векторное выражение

$$\frac{d\dot{\mathbf{a}}}{dt} = \frac{\partial\dot{\mathbf{a}}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{a}}. \quad (10)$$

Как видим, здесь нам понадобился новый дифференциальный оператор. Члены $\dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla\varphi$ и $(\dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla)\dot{\mathbf{a}}$ равенств (9) и (10), соответственно, называются *конвективными членами*.

2.5. ДИВЕРГЕНЦИЯ ВЕКТОРА. ТЕОРЕМА ГАУССА–ОСТРОГРАДСКОГО

Ранее нами был введен линейный интеграл вектора вдоль кривой. Теперь введем интеграл вектора $\vec{a}$ по некоторой поверхности S . Для этого разобьем всю поверхность на элементарные площадки ΔS_i с единичным вектором нормали к ним $\vec{n}$ (рис. 5). Тогда можно ввести также вектор площадки $\vec{\Delta S}_i = \vec{n} \Delta S_i$. Поверхностный интеграл вектора $\vec{a}$ вводится как предел нижеследующей суммы при стремлении всех площадок к нулю.

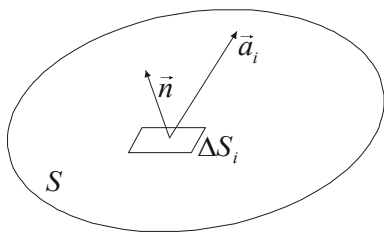


Рис. 5

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i \vec{a}_i \cdot \vec{\Delta S}_i. \quad (1)$$

Определение 12. Интеграл, введенный по формуле (1), называется *поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S* .

Он может быть записан различными способами

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{a} \cdot \vec{n}) dS = \int_S a_n dS, \quad (2)$$

где a_n означает проекцию вектора $\vec{a}$ на местную нормаль $\vec{n}$. Если поверхность замкнутая, то знак интеграла содержит кружочек.

Пусть замкнутая поверхность S , окружающая точку P , содержит внутри себя некоторый объем V . Определим дивергенцию вектора.

Определение 13. Дивергенция вектора $\vec{a}$ в точке P есть отнесенный к единице объема V поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S , окружающую точку P , при стягивании последнего в точку P .

Математически это записывается следующим образом.

$$\text{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S a_n dS. \quad (3)$$

С помощью этой формулы трудно реально вычислить дивергенцию для заданного векторного поля. Однако если разложить подынтегральную функцию в ряд Тейлора относительно точки P , вычислить

поверхностный интеграл и перейти к пределу, то получим формулу для нахождения дивергенции

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (4)$$

Это же выражение можно получить и другим образом, воспользовавшись оператором Гамильтона. Для этого его нужно скалярно умножить на вектор $\vec{a}$, помня о его векторных и дифференциальных свойствах:

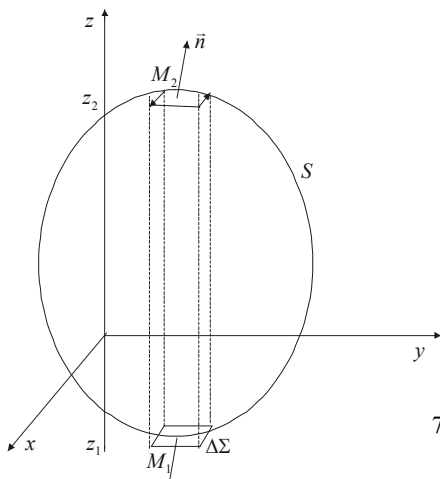
$$\nabla \cdot \vec{a} = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (i a_x + j a_y + k a_z) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a}. \quad (5)$$

Таким образом, нами получено выражение для дивергенции с помощью оператора Гамильтона. С помощью дивергенции можно поверхностный интеграл преобразовывать в объемный, как утверждает следующая теорема.

Теорема 4 (Гаусса–Остроградского). *Поток вектора через замкнутую поверхность равен объемному интегралу от дивергенции вектора.*

Пусть заданы векторное поле $\vec{a}$, некоторая замкнутая поверхность S , заключающая в себе объем V . Тогда математически теорема может быть представлена в следующем виде:

$$\int_S a_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV. \quad (6)$$



Доказательство. Пусть скалярная функция $\varphi(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные по всем переменным. Тогда справедливы три равенства

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x} dV &= \oint_S \varphi \cos(\vec{n}, x) dS, \\ \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial y} dV &= \oint_S \varphi \cos(\vec{n}, y) dS, \\ \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial z} dV &= \oint_S \varphi \cos(\vec{n}, z) dS.\end{aligned}\quad (7)$$

Докажем, например, последнее равенство. Возьмем замкнутую поверхность S , которая содержит внутри себя объем V (рис. 6). На плоскости xy возьмем элементарную площадку $\Delta\Sigma$ и построим на ней прямоугольный цилиндр, который вырежет на поверхности S элементарные поверхности ΔS_1 снизу и ΔS_2 сверху. Центры этих поверхностей обозначим M_1 и M_2 , а их координаты по оси z — через z_1 и z_2 . Вектор $\vec{n}$ есть единичный вектор внешней нормали к поверхности в точках M_1 и M_2 . Вычислим интеграл, стоящий в левой части, полагая, что подынтегральное выражение вдоль каждого поперечного сечения цилиндра постоянно:

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dV = \left(\int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) \Delta\Sigma = [\varphi(M_2) - \varphi(M_1)] \Delta\Sigma.$$

Поскольку элементарная площадка $\Delta\Sigma$ есть проекция элементарной поверхности ΔS_2 на плоскость xy , в точке M_2 верно равенство $\Delta\Sigma = \cos(\vec{n}, z) \Delta S$, а в точке M_1 с обратным знаком $\Delta\Sigma = -\cos(\vec{n}, z) \Delta S$, так как здесь вектор внешней нормали имеет противоположное направление. Подставим эти равенства в правую часть полученного выражения:

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dV = \varphi(M_2) \cos(\vec{n}, z) \Delta S + \varphi(M_1) \cos(\vec{n}, z) \Delta S.$$

Производя суммирование полученных выражений по всем элементарным параллелепипедам, содержащим объем V , и устремляя все $\Delta\Sigma$ к нулю, в левой части получим интеграл по всему объему, а в пра-

вой части – два интеграла отдельно по верхней и по нижней частям поверхности S . А в результате получим последнее равенство формулы (7). Остальные два равенства доказываются аналогично.

Вместо функции φ в первом равенстве формулы (7) подставим a_x , во втором – a_y и в третьем – a_z :

$$\int_V \frac{\partial a_x}{\partial x} dV = \oint_S a_x \cos(\vec{n}, x) dS,$$

$$\int_V \frac{\partial a_y}{\partial y} dV = \oint_S a_y \cos(\vec{n}, y) dS,$$

$$\int_V \frac{\partial a_z}{\partial z} dV = \oint_S a_z \cos(\vec{n}, z) dS.$$

Просуммируем полученные выражения почленно, воспользуемся формулой (5) и поменяем местами левую и правую части. В результате получим равенство (6), которое требовалось доказать.

Рассмотрим поле скоростей жидкости $\vec{v}$. Запишем для произвольной замкнутой поверхности S теорему Гаусса–Остроградского.

$$\int_S v_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{v} dV \quad \forall S.$$

Левая часть означает разность между количеством втекающей и вытекающей через поверхность S жидкости. Если эта разность равна нулю для любой замкнутой поверхности, то для такой жидкости в каждой точке справедливо равенство:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (8)$$

Оно является *уравнением неразрывности* для несжимаемой жидкости.

Определение 14. Векторное поле $\vec{a}$, для которого во всех точках справедливо равенство $\operatorname{div} \vec{a} = 0$, называется *соленоидальным*.

Теорема 5. Для соленоидального вектора его поток через любое поперечное сечение векторной трубки имеет одну и ту же величину.

Доказательство. Возьмем векторную трубку с входным поперечным сечением Σ , выходным Σ_1 и с боковой поверхностью Σ' . На рис. 7 представлены вектор $\vec{a}$ и вектор внешней нормали $\vec{n}$ на этих поверхностях. Воспользуемся теоремой Гаусса–Остроградского для всей поверхности, состоящей из Σ , Σ_1 и Σ' , а также условием соленоидальности вектора $\vec{a}$. Тогда получим, что объемный интеграл, а следовательно, и поверхностный равны нулю. Введя обозначения

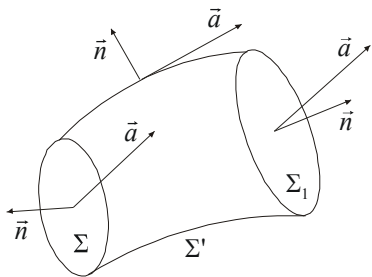


Рис. 7

$$I_{\Sigma} = \int_{\Sigma} a_n dS, \quad I_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_1} a_n dS, \quad I_{\Sigma'} = \int_{\Sigma'} a_n dS$$

где вектор нормали $\vec{n}$ направлен в сторону вектора $\vec{a}$, можно записать

$$\int_{\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma'} a_n dS = -I_{\Sigma} + I_{\Sigma_1} + I_{\Sigma'} = 0.$$

Здесь первое слагаемое взято со знаком минус, поскольку вектор внешней нормали имеет противоположное направление, чем в обозначении I_{Σ} . В последнем слагаемом по определению трубки тока векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$ взаимно ортогональны, поэтому a_n во всех точках боковой поверхности равно нулю, а следовательно, и это слагаемое равно нулю. Тогда окончательно получим, что поток вектора $\vec{a}$ через сечения Σ и Σ_1 совпадают:

$$\int_{\Sigma} a_n dS = \int_{\Sigma_1} a_n dS,$$

что и требовалось доказать.

2.6. РОТОР ВЕКТОРА. ТЕОРЕМА СТОКСА

Ранее мы ввели линейный интеграл вектора $\vec{a}$ вдоль кривой L :

$$\int_L \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Рассмотрим такой интеграл вдоль замкнутого контура C и зададим на нем направление интегрирования

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_C (a_x dx + a_y dy + a_z dz). \quad (1)$$

Определение 15. Интеграл, определяемый по формуле (1) с заданным направлением интегрирования, называется *циркуляцией* вектора $\vec{a}$ по контуру C .

Окружим точку P плоским контуром C , который заключает внутри себя поверхность S . Зададим некоторое направление обхода контура и из точки P построим единичный вектор нормали $\vec{n}$ к поверхности S , направив его в ту сторону, откуда обход контура совершается в ту же сторону, что и поворот от оси x к оси y вокруг положительного направления оси z . Циркуляцию вектора $\vec{a}$ по контуру C разделим на площадь S и перейдем к пределу, стягивая контур в точку P :

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}}{S} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_C (a_x dx + a_y dy + a_z dz)}{S}. \quad (2)$$

Предел в правой части может быть найден, если подынтегральные функции разложить в ряд Тейлора относительно точки P , вычислить интегралы и перейти к пределу. В результате получим равенство

$$\begin{aligned} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \cos(\vec{n}, x) + \\ &+ \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \cos(\vec{n}, y) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \cos(\vec{n}, z). \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку проекция произвольного вектора $\overset{1}{b}$ на единичный вектор $\overset{1}{n}$ может быть представлена в виде

$$b_n = b_x \cos(\overset{1}{n}, x) + b_y \cos(\overset{1}{n}, y) + b_z \cos(\overset{1}{n}, z),$$

приходим к выводу, что выражения в круглых скобках в формуле (3) есть компоненты некоторого вектора, который обозначим $\text{rot} \overset{1}{a}$. Тогда можно записать следующие равенства:

$$\text{rot}_x \overset{r}{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}, \quad \text{rot}_y \overset{r}{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}, \quad \text{rot}_z \overset{r}{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \quad (4)$$

Таким образом, в принятых обозначениях формула (3) приобретает вид

$$\lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \overset{r}{a} \cdot d\overset{r}{r} = \text{rot}_n \overset{r}{a}. \quad (5)$$

Это равенство (5) может быть принято за определение *ротора* вектора $\overset{1}{a}$.

В результате нами получено, что ротор вектора $\overset{1}{a}$ вычисляется по формуле.

$$\text{rot} \overset{r}{a} = \overset{r}{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \overset{r}{j} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \overset{r}{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right). \quad (6)$$

Поскольку из этой формулы следует, что ротор вектора $\overset{1}{a}$ равен векторному произведению оператора Гамильтона на вектор $\overset{1}{a}$, а векторное произведение выражается с помощью определителя, равенство (6) может быть записано следующим образом:

$$\text{rot} \overset{r}{a} = \nabla \times \overset{r}{a} = \begin{vmatrix} \overset{r}{i} & \overset{r}{j} & \overset{r}{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель, получим правую часть равенства (6).

С помощью дифференциального оператора ротор можно преобразовать интеграл по замкнутому контуру в поверхностный, что утверждает следующая теорема.

Теорема 6 Стокса. *Циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора вектора через поверхность, ограниченную этим контуром.*

Математически теорема записывается следующим образом:

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_S \operatorname{rot}_n \vec{a} \, dS. \quad (7)$$

Здесь поверхность S — любая поверхность, опирающаяся на контур C , а $\vec{n}$ — локальный вектор нормали в каждой точке поверхности.

Доказательство. Для простоты возьмем плоский контур C и плоскую поверхность S (рис. 8). Всю поверхность разделим на малые элементы S_k с контурами C_k , направление каждого из которых совпадает с направлением обхода контура C . Тогда для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементы S_k , что для них с помощью формулы (5) запишем неравенство

$$\left| \oint_{C_k} \vec{a} \cdot d\vec{r} - (\operatorname{rot}_n \vec{a})_k S_k \right| < \varepsilon S_k.$$

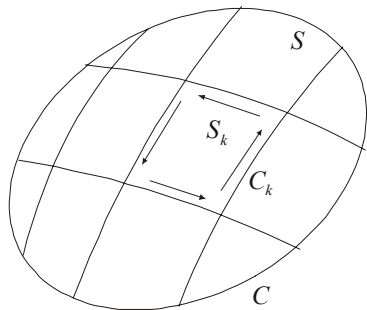


Рис. 8

Сложим почленно все эти неравенства и учтем, что интегралы по всем внутренним границам уничтожатся в силу встречного обхода границ в соседних элементах, а элементы S_k в правых частях просуммируются:

$$\left| \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} - \sum_k (\operatorname{rot}_n \vec{a})_k S_k \right| < \varepsilon S.$$

В полученном неравенстве перейдем к пределу, устремив все элементы S_k к нулю:

$$\left| \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} - \int_S \operatorname{rot}_n \vec{a} \, dS \right| < \varepsilon S.$$

Отсюда в силу произвольности ε следует равенство (7), что и требовалось доказать.

Доказанная теорема имеет два важных следствия.

Следствие 1. Ранее нами было показано, что если $\vec{a}^1$ – потенциальный вектор ($\vec{a}^1 = \operatorname{grad} \varphi$), то линейный интеграл от него по любому замкнутому контуру равен нулю. Воспользуемся для него теоремой Стокса:

$$0 = \oint_C \vec{a}^1 \cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot}_n \vec{a}^1 \, dS \quad \forall S.$$

Здесь поверхность S должна быть ограничена выбранным контуром C . В силу ее произвольности подынтегральная функция должна быть везде равна нулю:

$$\operatorname{rot}_n \vec{a}^1 = 0.$$

И в силу произвольности поверхности S и, соответственно, вектора нормали получим окончательно

$$\operatorname{rot} \vec{a}^1 = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0. \quad (8)$$

В справедливости этого равенства также можно убедиться непосредственно, вычислив ротор градиента произвольной скалярной функции, которая имеет все вторые производные.

Оказывается верно и обратное утверждение, что если ротор векторного поля $\vec{a}$ во всех точках равен нулю, то вектор $\vec{a}$ – потенциальный. Воспользуемся опять теоремой Стокса для произвольного контура C и равенством нулю ротора этого вектора.

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_S \operatorname{rot}_n \vec{a} \, dS = 0 \quad \forall C.$$

Таким образом, нами получено, что циркуляция вектора $\vec{a}^1$ по любому замкнутому контуру равна нулю. Отсюда по доказанной в § 2.1 теореме

ме следует, что вектор $\vec{a}$ – потенциальный. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 7. Для того чтобы вектор $\vec{a}$ был потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы ротор вектора $\vec{a}$ был равен нулю.

Следствие 2. Воспользуемся формулой Стокса (7) для некоторого контура C и некоторой поверхности S , ограниченной этим контуром. Стянем контур C в точку так, чтобы поверхность оставалась конечной. При этом интеграл по контуру окажется равным нулю, а равный ему интеграл от ротора вектора $\vec{a}$ будет браться по замкнутой поверхности, ограничивающей некоторый объем V :

$$\oint_S \text{rot}_n \vec{a} \, dS = 0 \quad \forall S. \quad (9)$$

Вспомним определение дивергенции вектора $\vec{b}$

$$\text{div} \vec{b} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S b_n \, dS.$$

Поделим обе части равенства (9) на V и перейдем к пределу при $V \rightarrow 0$. Тогда по определению дивергенции получим

$$\text{div} \text{rot} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \text{rot}_n \vec{a} \, dS = 0. \quad (10)$$

Таким образом, нами получено, что поле ротора любого вектора свободно от источников, т. е. оно соленоидально.

Здесь следует сделать следующее замечание. С помощью равенства (9) можно показать, что в теореме Стокса можно брать любую поверхность, опирающуюся на контур C . В самом деле, пусть формула Стокса (7) записана для некоторой поверхности S и локального вектора внешней нормали $\vec{n}$. Равенство (9) запишем для некоторой замкнутой поверхности, состоящей из этой поверхности S и некоторой другой поверхности S_1 , тоже опирающейся на контур C . Здесь вектор $\vec{n}$ – так же вектор внешней нормали, но на поверхности S он направлен в противоположную сторону, чем в формуле (7). Поэтому, если этот интеграл по поверхности $S + S_1$ прибавить к интегралу по поверхности S в формуле (7), интегралы по поверхности S взаимно уничтожатся

и останется интеграл по поверхности S_1 . Таким образом, доказано, что в теореме Стокса может фигурировать любая поверхность с локальным вектором внешней нормали $\vec{n}$, ограниченная контуром C .

Оказывается, что верно и обратное утверждение следствия 2: если дивергенция вектора $\vec{a}$ равна нулю, то найдется вектор $\vec{b}$ такой, что $\vec{a} = \text{rot } \vec{b}$. Это утверждение приводим здесь без доказательства.

2.7. ОПЕРАТОР ГАМИЛЬТОНА

Здесь подробнее остановимся на свойствах оператора Гамильтона и на тех преимуществах, которые дает его использование. Напомним, что этот оператор

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (1)$$

обладает как векторными, так и дифференциальными свойствами. Умножение на любую функцию справа от него означает, что она подставляется под знаки его производных. А функция, стоящая слева, просто на него умножается. В предыдущих параграфах нами были получены следующие формулы:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (3)$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{a} = v_x \frac{\partial \vec{a}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{a}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{a}}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \vec{i} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right). \quad (5)$$

Теперь воспользуемся оператором Гамильтона для получения важных формул, когда дифференциальные операторы применяются к

произведению функций. Для этого применим обычное правило дифференцирования произведения, обозначая не подлежащие дифференцированию функции индексом c и перенося их затем налево от оператора набла:

$$\begin{aligned}\text{grad}(\varphi\psi) &= \nabla(\varphi\psi) = \nabla(\varphi\psi_c) + \nabla(\varphi_c\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi = \\ &= \varphi\text{grad}\psi + \psi\text{grad}\varphi,\end{aligned}\quad (6)$$

$$\begin{aligned}\text{div}(\varphi\overset{\cdot}{a}) &= \nabla\cdot(\varphi\overset{\cdot}{a}) = \nabla\cdot(\varphi\overset{\cdot}{a}_c) + \nabla\cdot(\varphi_c\overset{\cdot}{a}) = \overset{\cdot}{a}\cdot\nabla\varphi + \varphi\nabla\cdot\overset{\cdot}{a} = \\ &= \varphi\text{div}\overset{\cdot}{a} + \overset{\cdot}{a}\cdot\text{grad}\varphi,\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\text{rot}(\varphi\overset{\cdot}{a}) &= \nabla(\varphi\times\overset{\cdot}{a}) = \nabla(\varphi\times\overset{\cdot}{a}_c) + \nabla(\varphi_c\times\overset{\cdot}{a}) = -\overset{\cdot}{a}\times\nabla\varphi + \varphi\nabla\times\overset{\cdot}{a} = \\ &= \varphi\text{rot}\overset{\cdot}{a} + (\text{grad}\varphi)\times\overset{\cdot}{a}.\end{aligned}\quad (8)$$

Формулы (6)–(8) могут быть получены и непосредственно с помощью покомпонентного дифференцирования по формулам (2)–(5), но представленный способ менее громоздок.

Подобным образом могут быть решены и другие задачи векторного исчисления, например, вычислена дивергенция векторного произведения двух векторов. Но для этого нам понадобится еще свойство тройного смешанного произведения, по которому последовательное скалярное и векторное умножение векторов можно менять местами:

$$\text{div}(\overset{\cdot}{a}\times\overset{\cdot}{b}) = \nabla\cdot(\overset{\cdot}{a}\times\overset{\cdot}{b}) = \nabla\cdot(\overset{\cdot}{a}\times\overset{\cdot}{b}_c) + \nabla\cdot(\overset{\cdot}{a}_c\times\overset{\cdot}{b}).$$

Теперь необходимо переставить сомножители так, чтобы векторы с индексами c оказались слева от оператора Гамильтона. Для первого слагаемого воспользуемся свойством тройного смешанного произведения, а во втором сначала поменяем местами сомножители векторного и затем воспользуемся тем же свойством:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\overset{\cdot}{a}\times\overset{\cdot}{b}_c) + \nabla\cdot(\overset{\cdot}{a}_c\times\overset{\cdot}{b}) &= (\nabla\times\overset{\cdot}{a})\cdot\overset{\cdot}{b}_c - \nabla\cdot(\overset{\cdot}{b}\times\overset{\cdot}{a}_c) = \overset{\cdot}{b}_c\cdot(\nabla\times\overset{\cdot}{a}) - (\nabla\times\overset{\cdot}{b})\cdot\overset{\cdot}{a}_c = \\ &= \overset{\cdot}{b}\cdot(\nabla\times\overset{\cdot}{a}) - \overset{\cdot}{a}\cdot(\nabla\times\overset{\cdot}{b}).\end{aligned}$$

И, наконец, от оператора Гамильтона вернемся к обычным дифференциальным операторам:

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b} . \quad (9)$$

Теперь перейдем к рассмотрению операторов второго порядка. Сначала вычислим дивергенцию градиента скалярной функции

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \cdot \nabla \varphi = (\nabla \cdot \nabla) \varphi .$$

Вычислим оператор, стоящий в скобках, помня, что умножение справа на оператор набла означает подстановку под знак его производной:

$$\nabla \cdot \nabla = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta .$$

Таким образом, нами получен оператор Лапласа, и можно записать окончательно

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta \varphi . \quad (10)$$

С помощью оператора Гамильтона докажем оба следствия из теоремы Стокса. Сначала рассмотрим первое из них

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \times \nabla \varphi = (\nabla \times \nabla) \varphi = 0 \varphi = 0 . \quad (11)$$

Здесь мы воспользовались правилом, что векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю. Теперь перейдем ко второму свойству

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \cdot \nabla \times \vec{a} = \nabla \times \nabla \cdot \vec{a} = 0 \cdot \vec{a} = 0 . \quad (12)$$

Здесь мы воспользовались сначала свойством тройного смешанного произведения, а затем тем же правилом.

2.8. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

До сих пор мы пользовались декартовой системой координат, и любой радиус-вектор, задающий некоторую точку в пространстве, представляли в этой системе координат:

$$\vec{r} = ix + jy + kz .$$

Однако тот же радиус-вектор может определяться и тремя другими числами.

Определение 16. Три скалярные величины, однозначно определяющие точку в пространстве, называются *криволинейными координатами* точки.

На рис. 9 представлены криволинейные координаты точки M , которые обозначены через q_1, q_2, q_3 . Этой точке, соответствующей радиус-вектору $\vec{r}$, помимо трех декартовых координат x, y, z отвечают три криволинейные q_1, q_2, q_3 . Поэтому между ними может быть установлена связь

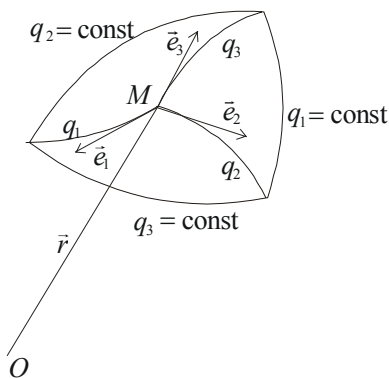


Рис. 9

$$q_1 = q_1(x, y, z), q_2 = q_2(x, y, z), q_3 = q_3(x, y, z). \quad (1)$$

И наоборот, поскольку радиус-вектор есть функция криволинейных координат, может быть записано и обратное соотношение

$$x = x(q_1, q_2, q_3), y = y(q_1, q_2, q_3), z = z(q_1, q_2, q_3). \quad (2)$$

Таким образом, равенства (1) и (2) устанавливают взаимно однозначное соответствие двух координатных систем.

Рассмотрим поверхности уровня трех скалярных функций q_1, q_2, q_3 , представленных равенствами (1),

$$q_1(x, y, z) = \text{const}, \quad q_2(x, y, z) = \text{const}, \quad q_3(x, y, z) = \text{const}, \quad (3)$$

которые образуют три семейства поверхностей. Причем через любую точку пространства проходит по одному представителю каждого семейства.

Определение 17. Поверхности, определяемые формулой (3), называются *координатными поверхностями*, а линии пересечения двух таких поверхностей называются *координатными линиями*.

Поскольку на каждой поверхности уровня могут изменяться только две другие координаты, на линии их пересечения может изменяться только одна, которая и является координатной линией.

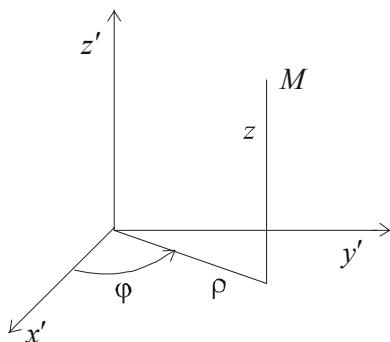


Рис. 10

В качестве примера рассмотрим цилиндрическую систему координат, в которой произвольной точке M отвечают криволинейные координаты: z – расстояние до плоскости $x'y'$, ρ – расстояние точки проекции вдоль луча из начала координат и φ – угол между этим лучом и осью x' (рис. 10). Здесь также введена декартовая система координат, которая связана с криволинейной:

$$x' = \rho \cos \varphi, \quad y' = \rho \sin \varphi, \quad z' = z. \quad (4)$$

Криволинейные координаты изменяются в следующих пределах: $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

Равенства (4) могут быть обращены и криволинейные координаты выражены через декартовы:

$$\rho = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \varphi = \arctg y' / x', \quad z = z'. \quad (4')$$

Из равенств (4) видно, что координатными поверхностями в данном случае будут круговой цилиндр радиуса ρ , полуплоскость, проходящая через ось z' под углом φ к оси x' , и плоскость, перпендикулярная к оси z' на расстоянии z от плоскости $x'y'$.

Введем единичные векторы $\overset{1}{e}_1, \overset{1}{e}_2, \overset{1}{e}_3$, направленные вдоль касательных к координатным линиям q_1, q_2, q_3 в точке M в сторону возрастания координат (см. рис. 9). Вычислим производную $\frac{\partial \overset{1}{r}}{\partial q_1}$ в точке M .

Поскольку вдоль координатной линии q_1 две другие координаты постоянны, координатная линия q_1 есть годограф вектора $\overset{1}{r}(q_1)$, следовательно, вектор этой производной касается координатной линии

$$\frac{\partial \overset{1}{r}}{\partial q_1} = H_1 \overset{1}{e}_1, \quad H_1 = \left| \frac{\partial \overset{1}{r}}{\partial q_1} \right|,$$

где коэффициент H_1 означает длину вектора производной. Так как

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1} \mathbf{k},$$

коэффициент H_1 может быть вычислен следующим образом:

$$H_1^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2.$$

Аналогичные выкладки можно проделать и с двумя другими координатными линиями. Тогда окончательно получим

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = H_i \mathbf{e}_i, \quad H_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Определение 18. Величины H_1, H_2, H_3 , определяемые формулой (5), называются *коэффициентами Лямэ*.

С помощью формулы (4) нетрудно вычислить коэффициенты Лямэ для цилиндрических координат:

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = 1.$$

Далее ограничимся рассмотрением ортогональных криволинейных координат. В этом случае скалярные произведения для введенных нами единичных векторов удовлетворяют равенствам

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Получим формулы для градиента и дивергенции в этих координатах. Но сначала выведем вспомогательное равенство. Запишем выражение для дифференциала функции координатной линии, полученное в первом параграфе:

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\mathbf{r} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Поскольку радиус-вектор есть функция криволинейных координат, для его дифференциала можно записать равенство.

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3.$$

Подставим это выражение в предыдущее, тогда получим

$$dq_i = \text{grad } q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} dq_1 + \text{grad } q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} dq_2 + \text{grad } q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} dq_3 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Поскольку полученное равенство должно тождественно выполняться при любых dq_i ($i = 1, 2, 3$), то справедливы следующие равенства:

$$\text{grad } q_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = 1 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Исключим в этом равенстве производную радиуса-вектора с помощью формулы (5)

$$\text{grad } q_i \cdot (H_i \vec{e}_i) = 1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

и разрешим его относительно градиента

$$\text{grad } q_i = \frac{1}{H_i} \vec{e}_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Теперь можно получить формулу для градиента скалярной функции. Для этого запишем равенство

$$\text{grad } \varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \text{grad } q_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \text{grad } q_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \text{grad } q_3$$

и воспользуемся вспомогательной формулой (6), тогда окончательно получим

$$\text{grad } \varphi = \frac{\vec{e}_1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e}_2}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e}_3}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}. \quad (7)$$

Эта формула позволяет получить выражение для градиента в любой ортогональной криволинейной системе координат, если известны коэффициенты Лямэ.

С помощью введенных нами единичных векторов $\overset{1}{e}_1, \overset{1}{e}_2, \overset{1}{e}_3$ любой вектор $\overset{1}{a}$ можно представить в виде

$$\overset{1}{a} = a_1 \overset{1}{e}_1 + a_2 \overset{1}{e}_2 + a_3 \overset{1}{e}_3. \quad (8)$$

Скалярные величины a_1, a_2, a_3 называют *криволинейными составляющими* вектора $\overset{1}{a}$ или *проекциями* вектора $\overset{1}{a}$ на оси криволинейных координат. В качестве вектора $\overset{1}{a}$ возьмем дифференциал радиуса-вектора, представим его как функцию криволинейных координат и воспользуемся формулой (5):

$$d\overset{r}{r} = \frac{\partial \overset{r}{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \overset{r}{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \overset{r}{r}}{\partial q_3} dq_3 = H_1 dq_1 \overset{r}{e}_1 + H_2 dq_2 \overset{r}{e}_2 + H_3 dq_3 \overset{r}{e}_3. \quad (9)$$

Отсюда для составляющих ds_1, ds_2, ds_3 вектора $d\overset{r}{r}$ получим выражения

$$ds_i = H_i dq_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (10)$$

а также выражение для квадрата его длины

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2.$$

Возьмем две точки M и N , которые находятся друг от друга на бесконечно малом расстоянии, равном длине вектора $d\overset{r}{r}$ (рис. 11). Проведем через каждую из них три координатные поверхности, тогда получим криволинейный параллелепипед с ребрами

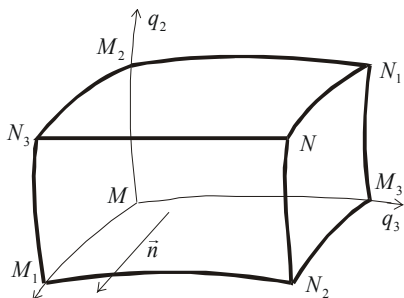


Рис. 11

$$ds_1 = H_1 dq_1, ds_2 = H_2 dq_2, ds_3 = H_3 dq_3. \quad (11)$$

Перемножая длины ребер параллелепипеда, получим выражения для площадей его граней, а также объема

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3, \quad d\sigma_2 = H_3 H_1 dq_3 dq_1, \quad d\sigma_3 = H_1 H_2 dq_1 dq_2. \quad (12)$$

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (13)$$

Для вывода формулы дивергенции вектора воспользуемся ее определением

$$\operatorname{div} \vec{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{a}_n dS.$$

Здесь под V будем понимать объем построенного параллелепипеда, под S – его поверхность и под $\vec{n}$ – вектор внешней нормали. Поток вектора $\vec{a}$ через грань $MM_2N_1M_3$ запишем в виде

$$-a_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3.$$

Здесь стоит минус, поскольку вектор внешней нормали направлен в противоположную сторону по отношению к координатной линии q_1 . Запишем поток вектора через противоположную грань $M_1N_3NN_2$, учитывая, что величины a_1, H_2, H_3 изменятся из-за смещения на величину dq_1 :

$$\left(a_1 H_2 H_3 + \frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 \right) dq_2 dq_3.$$

Сложим потоки вектора через рассмотренные грани, тогда получим:

$$\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Аналогично можно выписать потоки вектора через две остальные пары граней:

$$\frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3, \quad \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Нам остается сложить эти три члена, поделить на объем параллелепипеда (13) и перейти к пределу, устремив объем к нулю:

$$\operatorname{div}^r a = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right). \quad (14)$$

Полученная формула позволяет вычислить дивергенцию вектора в любой ортогональной криволинейной системе координат, если известны коэффициенты Лямэ.

С помощью найденных равенств (7) и (14) можно также вычислить $\Delta\varphi$, где Δ есть оператор Лапласа, воспользовавшись формулой

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi.$$

Глава 3. ОСНОВЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

3.1. АФИННЫЙ ОРТОГОНАЛЬНЫЙ ТЕНЗОР ВТОРОГО РАНГА

Рассмотрим произвольный вектор $\overset{1}{a}$ в трехмерном физическом пространстве, в котором введена прямолинейная прямоугольная система координат $Oxyz$. Все векторы будем откладывать из начала координат O . Вектор $\overset{1}{a}$ может быть представлен в следующем виде:

$$\overset{r}{a} = \overset{r}{i} a_x + \overset{r}{j} a_y + \overset{1}{k} a_z, \quad (1)$$

где $\overset{r}{i}, \overset{r}{j}, \overset{1}{k}$ – единичные орты вдоль координатных осей x, y, z соответственно, а a_x, a_y, a_z – координаты вектора. Таким образом, в заданной системе координат любой вектор характеризуется тремя скалярными величинами. Кроме того, он имеет наглядное физическое представление как некоторый отрезок, соединяющий начало координат и некоторую точку пространства и направленный к этой точке.

В отличие от вектора тензор не имеет наглядного представления. Можно только сказать, что если вектор характеризуется тремя скалярными величинами (a_x, a_y, a_z) , то тензор – тремя векторными $(\overset{1}{p}_x, \overset{1}{p}_y, \overset{1}{p}_z)$. Последний является некоторой математической абстракцией в ряду: скаляр, вектор, тензор.

Сначала дадим формальное определение вектора. Для этого введем другую прямолинейную прямоугольную систему координат $Ox'y'z'$ с тем же началом координат O . Тогда тот же вектор $\overset{1}{a}$ в новой системе

координат будет иметь новые координаты $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}$, которые связаны со старыми с помощью направляющих косинусов:

$$\begin{aligned} a_{x'} &= a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x'), \\ a_{y'} &= a_x \cos(x, y') + a_y \cos(y, y') + a_z \cos(z, y'), \\ a_{z'} &= a_x \cos(x, z') + a_y \cos(y, z') + a_z \cos(z, z'). \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь можно дать следующее определение вектора.

Определение 1. Если для прямолинейной прямоугольной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех величин a_x, a_y, a_z , преобразующихся по формулам (2) в величины $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}$ в другой системе координат $Ox'y'z'$, то совокупность этих величин определяет *аффинный ортогональный вектор* $\overset{1}{a}$. Скалярные величины a_x, a_y, a_z называются *составляющими (компонентами) вектора* $\overset{1}{a}$ по осям Ox, Oy, Oz .

Здесь под термином «аффинный» понимается линейность преобразования координат. Теперь по аналогии с определением вектора можно ввести определение тензора.

Определение 2. Если для прямолинейной прямоугольной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трех векторов $\overset{1}{p}_x, \overset{1}{p}_y, \overset{1}{p}_z$, преобразующихся в совокупность трех векторов $\overset{1}{p}_{x'}, \overset{1}{p}_{y'}, \overset{1}{p}_{z'}$ в другой системе координат $Ox'y'z'$ по формулам

$$\begin{aligned} \overset{1}{p}_{x'} &= \overset{1}{p}_x \cos(x, x') + \overset{1}{p}_y \cos(y, x') + \overset{1}{p}_z \cos(z, x'), \\ \overset{1}{p}_{y'} &= \overset{1}{p}_x \cos(x, y') + \overset{1}{p}_y \cos(y, y') + \overset{1}{p}_z \cos(z, y'), \\ \overset{1}{p}_{z'} &= \overset{1}{p}_x \cos(x, z') + \overset{1}{p}_y \cos(y, z') + \overset{1}{p}_z \cos(z, z'), \end{aligned} \quad (3)$$

то совокупность этих векторов определяет *аффинный ортогональный тензор второго ранга* $\overset{1}{\Pi}$. Векторы $\overset{1}{p}_x, \overset{1}{p}_y, \overset{1}{p}_z$ называются *составляющими (компонентами) тензора* $\overset{1}{\Pi}$ по осям Ox, Oy, Oz .

Здесь индексы у векторов не означают проектирование на соответствующие оси. Термин «второго ранга» будет пояснен в последнем параграфе настоящей главы. Поскольку мы будем рассматривать

только аффинные ортогональные тензоры второго ранга, то для краткости будем их называть просто тензорами.

Введем для тензора Π следующее обозначение:

$$\Pi = \overset{\text{r}}{i} \overset{\text{r}}{p}_x + \overset{\text{r}}{j} \overset{\text{r}}{p}_y + \overset{\text{r}}{k} \overset{\text{r}}{p}_z. \quad (4)$$

Здесь $\overset{\text{r}}{i}, \overset{\text{r}}{j}, \overset{\text{r}}{k}$ – единичные орты, направленные вдоль координатных осей x, y, z . Заметим, что порядок векторов играет важную роль и что между парами векторов отсутствуют какие-либо математические знаки. Смысл такой записи будет выяснен в дальнейшем изложении.

Чтобы получить представление о тензоре и его составляющих, рассмотрим следующий пример. Для этого в движущейся жидкости вырежем малый тетраэдр $МABC$ так, что три его грани были параллельны координатным плоскостям, а четвертая – перпендикулярна к некоторому вектору $\overset{\text{r}}{n}$. Обозначим его объем через V , всю поверхность –

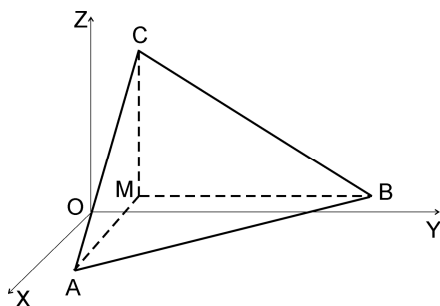


Рис. 1

через S и плотность жидкости – через ρ . Будем считать, что внешняя по отношению к тетраэдру жидкость действует на каждую его грань с силами, плотности которых на единицу площади составляют $\overset{\text{r}}{p}_x, \overset{\text{r}}{p}_y, \overset{\text{r}}{p}_z$ и $\overset{\text{r}}{p}_n$. Плотности сил $\overset{\text{r}}{p}_x, \overset{\text{r}}{p}_y, \overset{\text{r}}{p}_z$ приложены к граням, которые перпендикулярны к координатным осям x, y, z , а $\overset{\text{r}}{p}_n$ приложена к грани ABC , и все они направлены в сторону окружающей жидкости. На тетраэдр действуют также внешние объемные силы, например, сила тяжести, с плотностью $\overset{\text{r}}{F}$ на единицу массы. Под действием всех сил тетраэдр движется с ускорением $\overset{\text{r}}{w}$. Исходя из начала Даламбера, запишем для выделенного объема условие равновесия всех сил, включая силы инерции:

$$\int_V \rho \left(\overset{\text{r}}{F} - \overset{\text{r}}{w} \right) dV + \oint_S \overset{\text{r}}{p}_n dS = 0. \quad (5)$$

Распишем подробнее второй интеграл для каждой грани тетраэдра. На грань ABC действует поверхностная сила $\vec{p}_n S_\Delta$, где S_Δ – площадь этой грани. На грань MBC действует поверхностная сила $-\vec{p}_x S_\Delta \cos(\vec{n}, x)$, поскольку площадь треугольника MBC равна проекции треугольника ABC на плоскость y, z . Знак минус означает, что внешняя нормаль к грани MBC направлена в противоположную сторону оси x . Аналогично могут быть записаны поверхностные силы, действующие на площадки MAC и MAB , $-\vec{p}_y S_\Delta \cos(\vec{n}, y)$ и $-\vec{p}_z S_\Delta \cos(\vec{n}, z)$ соответственно.

Подставим полученные выражения вместо поверхностного интеграла в формуле (5) и запишем объемный интеграл по теореме о среднем в виде $V\vec{q}$, где второй сомножитель равен значению подынтегральной функции в некоторой внутренней точке:

$$V\vec{q} + S_\Delta \left(\vec{p}_n - \vec{p}_x \cos(\vec{n}, x) - \vec{p}_y \cos(\vec{n}, y) - \vec{p}_z \cos(\vec{n}, z) \right) = 0.$$

Разделим равенство на S_Δ и перейдем к пределу, устремив длины ребер тетраэдра к нулю. Поскольку отношение объема к площади грани пропорционально линейному размеру, оно устремится к нулю и в пределе в левой части равенства останется только содержимое круглой скобки. Таким образом, получим

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x \cos(\vec{n}, x) + \vec{p}_y \cos(\vec{n}, y) + \vec{p}_z \cos(\vec{n}, z). \quad (6)$$

В нашем рассмотрении выбор грани ABC и, соответственно, ее нормали был произвольным. Поэтому при переходе к новой системе координат $Ox'y'z'$ в этом равенстве можно выбрать направление вектора $\vec{n}$, совпадающее с осью x' :

$$\vec{p}_{x'} = \vec{p}_x \cos(x', x) + \vec{p}_y \cos(x', y) + \vec{p}_z \cos(x', z).$$

Выбирая точно так же направления вектора $\vec{n}$ совпадающими с новыми осями y' и z' , получим

$$\begin{aligned} \vec{p}_{y'} &= \vec{p}_x \cos(x, y') + \vec{p}_y \cos(y, y') + \vec{p}_z \cos(z, y'), \\ \vec{p}_{z'} &= \vec{p}_x \cos(x, z') + \vec{p}_y \cos(y, z') + \vec{p}_z \cos(z, z'). \end{aligned}$$

Эти три равенства совпадают с соотношениями (3). Таким образом, по определению введенные нами векторы $\overset{1}{p}_x, \overset{1}{p}_y, \overset{1}{p}_z$ являются компонентами некоторого тензора, который называется *тензором упругих напряжений*.

Вектор $\overset{1}{p}_x$ действует на площадку, перпендикулярную к оси x' , и имеет скалярные составляющие p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} , первая из которых в нашем примере определяет нормальное напряжение (давление), а две другие – касательные напряжения. Аналогично могут быть представлены два других вектора $\overset{1}{p}_y, \overset{1}{p}_z$.

Пусть произвольный тензор Π определяется тремя векторами $\overset{1}{p}_x, \overset{1}{p}_y, \overset{1}{p}_z$, каждый из которых представлен с помощью трех скалярных компонент:

$$\begin{aligned}\overset{r}{p}_x &= \overset{r}{i} p_{xx} + \overset{r}{j} p_{xy} + \overset{r}{k} p_{xz}, \\ \overset{r}{p}_y &= \overset{r}{i} p_{yx} + \overset{r}{j} p_{yy} + \overset{r}{k} p_{yz}, \\ \overset{r}{p}_z &= \overset{r}{i} p_{zx} + \overset{r}{j} p_{zy} + \overset{r}{k} p_{zz}.\end{aligned}$$

Следовательно, произвольный тензор определяется девятью скалярными величинами.

$$\Pi = \begin{Bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

Заметим, в первой строке этой таблицы стоят компоненты первого вектора, во второй – второго и в третьей – третьего.

Для удобства дальнейшего изложения переименуем декартовы координаты x, y, z – в x_1, x_2, x_3 и орты i, j, k в $\overset{1}{i}, \overset{1}{j}, \overset{1}{k}$. Тогда разложение вектора $\overset{1}{a}$ запишем в виде

$$\overset{r}{a} = \overset{1}{i}_1 a_1 + \overset{1}{i}_2 a_2 + \overset{1}{i}_3 a_3. \quad (8)$$

Аналогично переименуем векторные компоненты тензора $\overset{1}{p}_x, \overset{1}{p}_y, \overset{1}{p}_z$ в $\overset{1}{p}_1, \overset{1}{p}_2, \overset{1}{p}_3$ и тензор Π представим следующим образом:

$$\Pi = \overset{1}{i_1} \overset{r}{p_1} + \overset{1}{i_2} \overset{r}{p_2} + \overset{1}{i_3} \overset{r}{p_3} . \quad (9)$$

С помощью девяти скалярных компонент его можно также записать в виде

$$\Pi = \begin{Bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix} . \quad (10)$$

Формула (2) определяет преобразование компонент вектора при переходе от системы координат $Oxyz$ к новой системе координат $Ox'y'z'$ с помощью направляющих косинусов. Выясним, как при этом преобразуются скалярные компоненты тензора. Но сначала введем новые обозначения для направляющих косинусов, которые представлены в таблице. Таким образом, из таблицы следует, что $\alpha_{ik} = \cos(x'_i, x_k)$. Напомним, что для направляющих косинусов имеют место следующие равенства, которыми мы в дальнейшем воспользуемся:

	x_1	x_2	x_3
x'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
x'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
x'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

$$\sum_{s=1}^3 \alpha_{is}^2 = 1 \quad (i=1, 2, 3), \quad \sum_{s=1}^3 \alpha_{is} \alpha_{ls} = 0 \quad (i, l=1, 2, 3, \quad i \neq l) . \quad (11)$$

Компоненты вектора $\overset{1}{a}$ в новой системе координат $Ox'y'z'$ обозначим a'_1, a'_2, a'_3 и через $\overset{1}{p'_1}, \overset{1}{p'_2}, \overset{1}{p'_3}$ векторные составляющие тензора Π , а через p'_{kl} ($k, l=1, 2, 3$) его скалярные компоненты, т. е. величины $p_{x'_k x'_l}$. В новых обозначениях равенство (2) запишется в виде

$$a_{x'_k} = a'_k = \sum_{l=1}^3 \alpha_{kl} a_l \quad (k=1, 2, 3) . \quad (12)$$

Аналогично равенство (3) можно представить в виде

$$\overset{\text{r}}{p}'_k = \sum_{l=1}^3 \alpha_{kl} \overset{\text{r}}{p}_l \quad (k=1, 2, 3) \quad (13)$$

или в прежних обозначениях

$$\overset{\text{r}}{p}_{x'_k} = \sum_{l=1}^3 \alpha_{kl} \overset{\text{r}}{p}_{x_l} \quad (k=1, 2, 3). \quad (13')$$

Выясним теперь, как изменяются скалярные компоненты тензора p_{rs} при переходе от старой системы координат $Ox_1x_2x_3$ к новой $Ox'_1x'_2x'_3$. По определению новая компонента тензора $p'_{kl} = p_{x'_kx'_l}$ есть проекция вектора $\overset{\text{r}}{p}_{x'_k}$ на ось x'_l . Для этого вектора по формуле (13'), заменив индекс суммирования l на r , получим

$$\overset{\text{r}}{p}_{x'_k} = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr} \overset{\text{r}}{p}_{x_r} \quad (k=1, 2, 3).$$

Спроектируем это векторное равенство на ось x'_l .

$$(\overset{\text{r}}{p}_{x'_k})_{x'_l} = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr} (\overset{\text{r}}{p}_{x_r})_{x'_l} \quad (k, l=1, 2, 3).$$

Теперь воспользуемся равенством (12) для вектора $\overset{\text{r}}{p}_{x_r}$, заменив в нем индекс l на s и x'_k на x'_l :

$$(\overset{\text{r}}{p}_{x_r})_{x'_l} = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} \overset{\text{r}}{p}_{x_r x_s} \quad (r, l=1, 2, 3).$$

Подставив полученное равенство в предыдущее, получим

$$p_{x'_kx'_l} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{x_r x_s} \quad (k, l=1, 2, 3).$$

Окончательно, перейдя к новым обозначениям, запишем соотношение между старыми и новыми скалярными компонентами тензора:

$$p'_{kl} = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs} \quad (k, l=1, 2, 3). \quad (14)$$

Полученную формулу можно рассматривать как обобщение на тензоры равенства (12) для векторов. Она имеет большое значение, и ей можно воспользоваться для введения нового определения тензоров.

Определение 3. Если для каждой прямолинейной прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ имеется совокупность девяти величин p_{kl} в виде таблицы (10), преобразующаяся в величины p'_{kl} в новой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$ по формулам (14), то совокупность этих девяти величин определяет *аффинный ортогональный тензор второго ранга* Π в пространстве трех измерений.

Записанную в новых обозначениях формулу для разложения векторов

$$p_k^r = \sum_{l=1}^3 i_l^r p_{kl} \quad (k=1, 2, 3)$$

подставим в равенство (9) и получим новое выражение для тензора

$$\Pi = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 i_k^r i_l^r p_{kl}. \quad (15)$$

Теперь рассмотрим примеры нескольких частных видов тензоров. Положим, что в некоторой системе координат $Ox_1x_2x_3$ мы имеем $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 1$, $p_{kl} = 0$, $k \neq l$. Это означает, что задан единичный тензор

$$I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

Иначе говоря, все его элементы определяются символом Кронекера

$$p_{kl} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (k, l=1, 2, 3).$$

Покажем, что такой тензор в любой другой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$ будет также единичным. Вычислим его новые компоненты по формуле (14).

$$p'_{kk} = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr}^2, \quad p'_{kl} = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{lr} \quad (k \neq l) \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Но из свойств направляющих косинусов (11) следует, что первая сумма равна единице, а вторая нулю, т. е. в новой системе координат тензор также единичный.

Заметим, что векторные компоненты единичного тензора будут следующими:

$$\overset{r}{p}_1 = \overset{1}{i}_1, \quad \overset{r}{p}_2 = \overset{1}{i}_2, \quad \overset{r}{p}_3 = \overset{1}{i}_3.$$

Поэтому из формулы (9) для него следует запись:

$$I = \overset{r}{i}_1 \overset{r}{i}_1 + \overset{r}{i}_2 \overset{r}{i}_2 + \overset{r}{i}_3 \overset{r}{i}_3 = \sum_{k=1}^3 \overset{r}{i}_k \overset{r}{i}_k. \quad (17)$$

Рассмотрим теперь другой важный пример тензора. Для этого возьмем два произвольных вектора $\overset{r}{a}, \overset{r}{b}$ и составим таблицу из их компонент в системе координат $Ox_1x_2x_3$ следующим образом:

$$\overset{r}{a} \overset{r}{b} = \begin{Bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

При переходе к новой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$ компоненты этих векторов преобразуются по формуле (12)

$$a'_k = \sum_{r=1}^3 \alpha_{kr} a_r \quad (k = 1, 2, 3), \quad b'_l = \sum_{s=1}^3 \alpha_{ls} b_s \quad (l = 1, 2, 3).$$

Перемножив почленно оба этих равенства, получим выражение для компонент таблицы.

$$a'_k b'_l = \sum_{r=1}^3 \sum_{s=1}^3 \alpha_{kr} \alpha_{ls} a_r b_s \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Отсюда видно, что элементы таблицы (18) преобразуются по формулам (14), следовательно, определенное нами выражение $\overset{\text{r}}{a}\overset{\text{r}}{b}$ является тензором.

Определение 4. Тензор $\overset{\text{r}}{a}\overset{\text{r}}{b}$, скалярные элементы которого определяются по формуле (18), называется *диадой*.

Теперь мы видим, что произвольный тензор Π , представленный формулой (9), есть не что иное, как сумма трех диад: $\overset{\text{r}}{i}_1 \overset{\text{r}}{p}_1, \overset{\text{r}}{i}_2 \overset{\text{r}}{p}_2, \overset{\text{r}}{i}_3 \overset{\text{r}}{p}_3$.

Поскольку строки таблично представленного тензора состоят из компонент его векторов, векторные компоненты диады $\overset{\text{r}}{a}\overset{\text{r}}{b}$ будут следующими:

$$\overset{\text{r}}{p}_1 = a_1 \overset{\text{r}}{b}, \quad \overset{\text{r}}{p}_2 = a_2 \overset{\text{r}}{b}, \quad \overset{\text{r}}{p}_3 = a_3 \overset{\text{r}}{b}.$$

Это очень важное свойство диады понадобится в дальнейшем, в частности при вычислении ее дивергенции.

Введем понятие тензора, сопряженного к тензору Π , заданному формулой (10).

Определение 5. Тензор Π_c называется *сопряженным тензором*, если он определяется формулой

$$\Pi_c = \begin{Bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что диада, полученная при перестановке векторов

$$\overset{\text{r}}{b}\overset{\text{r}}{a} = \begin{Bmatrix} b_1 a_1 & b_1 a_2 & b_1 a_3 \\ b_2 a_1 & b_2 a_2 & b_2 a_3 \\ b_3 a_1 & b_3 a_2 & b_3 a_3 \end{Bmatrix},$$

является сопряженной к диаде $\overset{\text{r}}{a}\overset{\text{r}}{b}$, т. е. $\overset{\text{r}}{b}\overset{\text{r}}{a} = (\overset{\text{r}}{a}\overset{\text{r}}{b})_c$.

3.2. РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРОВ

Сумма двух тензоров Π' со скалярными компонентами p'_{kl} и Π'' с компонентами p''_{kl} равна тензору Π с компонентами p_{kl} , если справедливо равенство

$$p_{kl} = p'_{kl} + p''_{kl} \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (1)$$

Соответствующие соотношения справедливы и для векторных составляющих этих тензоров.

$$\overset{1}{p}_k = \overset{1}{p}'_k + \overset{1}{p}''_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Аналогично определяется и умножение скаляра на тензор, т. е. компонентами тензора $\lambda \Pi$ являются λp_{kl} . Оба эти правила следуют из линейности тензоров.

Определение 6. Тензор Π , скалярные компоненты которого удовлетворяют равенствам

$$p_{kl} = p_{lk} \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad (3)$$

называется *симметричным тензором*.

Из определения следует, что такой тензор определяется шестью величинами вместо девяти для произвольного тензора. Поскольку его компоненты симметричны относительно главной диагонали, то его сопряженный тензор равен ему самому:

$$\Pi_c = \Pi. \quad (4)$$

Определение 7. Тензор Π , скалярные компоненты которого удовлетворяют равенствам

$$p_{kl} = -p_{lk} \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad (5)$$

называется *антисимметричным тензором*.

Очевидно, что все его компоненты на главной диагонали равны нулю, поскольку $p_{kk} = -p_{kk} \quad (k = 1, 2, 3)$. Очевидно, что такой тензор определяется всего тремя величинами.

Введем вектор $\overline{\varpi} = \overset{1}{i}_1 \overline{\varpi}_1 + \overset{1}{i}_2 \overline{\varpi}_2 + \overset{1}{i}_3 \overline{\varpi}_3$ и обозначим компоненты антисимметричного тензора

$$\overline{\varpi}_1 = p_{32} = -p_{23}, \quad \overline{\varpi}_2 = p_{13} = -p_{31}, \quad \overline{\varpi}_3 = p_{21} = -p_{12},$$

тогда этот тензор можно записать в виде:

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & -\varpi_3 & \varpi_2 \\ \varpi_3 & 0 & -\varpi_1 \\ -\varpi_2 & \varpi_1 & 0 \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Связь антисимметричного тензора A с вектором $\overset{1}{\varpi}$ мы установим позднее. А сейчас запишем выражения для его векторных компонент, вспомнив, что каждая его строка соответствует одной компоненте:

$$\begin{aligned} \overset{r}{p}_1 &= -\varpi_3 \overset{r}{i}_2 + \varpi_2 \overset{r}{i}_3 = \overset{r}{i}_1 \times \overset{r}{\varpi}, \\ \overset{r}{p}_2 &= \varpi_3 \overset{r}{i}_1 - \varpi_1 \overset{r}{i}_3 = \overset{r}{i}_2 \times \overset{r}{\varpi}, \\ \overset{r}{p}_3 &= -\varpi_2 \overset{r}{i}_1 + \varpi_1 \overset{r}{i}_2 = \overset{r}{i}_3 \times \overset{r}{\varpi}. \end{aligned} \quad (7)$$

Можно видеть, что операция сопряжения сохраняет исходный антисимметричный тензор с точностью до знака

$$A_c = -A. \quad (8)$$

Теперь познакомимся с двумя теоремами о разложении произвольного тензора.

Теорема 1. *Всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму симметричного и антисимметричного тензоров.*

Доказательство этой теоремы конструктивно, т. е. оно определяет сам алгоритм этого разложения. Пусть произвольный тензор Π представлен в виде суммы симметричного Φ и антисимметричного A тензоров

$$\Pi = \Phi + A.$$

Выполним почленно операцию сопряжения для этого равенства

$$\Pi_c = \Phi_c + A_c.$$

Теперь, воспользовавшись равенствами (4) и (8), запишем:

$$\Pi_c = \Phi - A.$$

С помощью полученного равенства и равенства (9) можно найти симметричный и антисимметричный тензор.

$$\Phi = (\Pi + \Pi_c)/2, \quad A = (\Pi - \Pi_c)/2. \quad (9)$$

Эти формулы определяют алгоритм разложения тензора на симметричный и антисимметричный, из них и следует однозначность разложения.

Теорема 2. *Любой тензор может быть представлен в виде суммы трех диад.*

Вспомним, что первоначально для произвольного тензора было записано выражение:

$$\Pi = \overset{1}{i}_1 \overset{1}{r} p_1 + \overset{1}{i}_2 \overset{1}{r} p_2 + \overset{1}{i}_3 \overset{1}{r} p_3.$$

Можно видеть, что каждое из этих слагаемых является диадой, следовательно, тензор Π уже тогда был представлен в виде суммы трех диад. Однако такое представление не является однозначным. Разложим тензор Π на сумму каких-то других диад

$$\Pi = \overset{1}{a}_1 \overset{1}{b}_1 + \overset{1}{a}_2 \overset{1}{b}_2 + \overset{1}{a}_3 \overset{1}{b}_3,$$

где $\overset{1}{a}_1, \overset{1}{a}_2, \overset{1}{a}_3, \overset{1}{b}_1, \overset{1}{b}_2, \overset{1}{b}_3$ – некоторые векторы. Вспоминая, что перестановка порядка векторов в диаде дает нам сопряженный тензор, получим равенство

$$\Pi_c = \overset{1}{b}_1 \overset{1}{a}_1 + \overset{1}{b}_2 \overset{1}{a}_2 + \overset{1}{b}_3 \overset{1}{a}_3.$$

Эта простая теорема 2 имеет большое значение, поскольку многие задачи для тензоров легко решаются для диад. И с помощью этой теоремы полученные результаты могут быть обобщены на произвольный тензор.

3.3. УМНОЖЕНИЕ ТЕНЗОРА НА ВЕКТОР

Пусть даны произвольный тензор

$$\Pi = \overset{1}{i}_1 \overset{1}{r} p_1 + \overset{1}{i}_2 \overset{1}{r} p_2 + \overset{1}{i}_3 \overset{1}{r} p_3 = \begin{Bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix}$$

и некоторый вектор

$$\overset{\text{r}}{a} = \overset{1}{i}_1 a_1 + \overset{1}{i}_2 a_2 + \overset{1}{i}_3 a_3.$$

В настоящем параграфе определим для них операции умножения.

Определение 8. Под скалярным произведением тензора Π на вектор $\overset{1}{a}$ справа понимается вектор $\overset{1}{a}'$:

$$\begin{aligned} \overset{\text{r}}{a}' &= \Pi \cdot \overset{\text{r}}{a} = \overset{1}{i}_1 (\overset{\text{r}}{p}_1 \cdot \overset{\text{r}}{a}) + \overset{1}{i}_2 (\overset{\text{r}}{p}_2 \cdot \overset{\text{r}}{a}) + \overset{1}{i}_3 (\overset{\text{r}}{p}_3 \cdot \overset{\text{r}}{a}) = \\ &= \overset{1}{i}_1 (p_{11} a_1 + p_{12} a_2 + p_{13} a_3) + \overset{1}{i}_2 (p_{21} a_1 + p_{22} a_2 + p_{23} a_3) + \\ &\quad + \overset{1}{i}_3 (p_{31} a_1 + p_{32} a_2 + p_{33} a_3). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь в круглых скобках содержатся выражения для компонент вектора $\overset{1}{a}'$. Формула (1) представляет собой алгоритм умножения, аналогичный умножению матрицы на вектор справа.

Теперь выясним, как это умножение происходит для диады. Возьмем произвольную диаду

$$\overset{\text{r}}{b} \overset{\text{r}}{c} = \begin{Bmatrix} b_1 c_1 & b_1 c_2 & b_1 c_3 \\ b_2 c_1 & b_2 c_2 & b_2 c_3 \\ b_3 c_1 & b_3 c_2 & b_3 c_3 \end{Bmatrix}.$$

Воспользовавшись формулой (1), получим выражения для компонент вектора $\overset{1}{a}'$

$$\begin{aligned} a'_1 &= b_1 c_1 a_1 + b_1 c_2 a_2 + b_1 c_3 a_3 = b_1 (\overset{1}{c} \cdot \overset{1}{a}), \\ a'_2 &= b_2 c_1 a_1 + b_2 c_2 a_2 + b_2 c_3 a_3 = b_2 (\overset{\text{r}}{c} \cdot \overset{\text{r}}{a}), \\ a'_3 &= b_3 c_1 a_1 + b_3 c_2 a_2 + b_3 c_3 a_3 = b_3 (\overset{\text{r}}{c} \cdot \overset{\text{r}}{a}). \end{aligned}$$

Отсюда получим более простое выражение для скалярного умножения диады на вектор справа

$$(\overset{\text{r}}{b} \overset{\text{r}}{c}) \cdot \overset{\text{r}}{a} = \overset{\text{r}}{b} (\overset{\text{r}}{c} \cdot \overset{\text{r}}{a}). \quad (2)$$

Определение 9. Под скалярным произведением тензора Π на вектор $\overset{1}{a}$ слева понимается вектор $\overset{1}{a}''$:

$$\begin{aligned}\overset{\text{r}}{a}'' &= \overset{\text{r}}{a} \cdot \Pi = (\overset{\text{r}}{a} \cdot \overset{\text{r}}{i}_1) \overset{\text{r}}{p}_1 + (\overset{\text{r}}{a} \cdot \overset{\text{r}}{i}_2) \overset{\text{r}}{p}_2 + (\overset{\text{r}}{a} \cdot \overset{\text{r}}{i}_3) \overset{\text{r}}{p}_3 = \\ &= a_1 \overset{\text{r}}{p}_1 + a_2 \overset{\text{r}}{p}_2 + a_3 \overset{\text{r}}{p}_3.\end{aligned}\quad (3)$$

Отсюда получим выражения для компонент вектора $\overset{\text{r}}{a}''$

$$\begin{aligned}a_1'' &= a_1 p_{11} + a_2 p_{21} + a_3 p_{31}, \\ a_2'' &= a_1 p_{12} + a_2 p_{22} + a_3 p_{32}, \\ a_3'' &= a_1 p_{13} + a_2 p_{23} + a_3 p_{33}.\end{aligned}\quad (4)$$

Аналогично изложенному выше можно получить формулу для скалярного умножения диады $\overset{\text{r}}{b} \overset{\text{r}}{c}$ на вектор $\overset{\text{r}}{a}$ слева:

$$\overset{\text{r}}{a} \cdot (\overset{\text{r}}{b} \overset{\text{r}}{c}) = (\overset{\text{r}}{a} \cdot \overset{\text{r}}{b}) \overset{\text{r}}{c}.\quad (5)$$

На основании выражений (2) и (5) сформулируем общее правило:

при скалярном умножении диады на вектор его необходимо умножить скалярно на ближайший к нему вектор диады. При этом второй вектор диады задает направление полученного в результате умножения вектора.

Если умножать скалярно сопряженный тензор Π_c на вектор $\overset{\text{r}}{a}$ справа, то в формуле (1) все скалярные компоненты p_{kl} надо заменить на p_{lk} . Но тогда компоненты вектора $\Pi_c \cdot \overset{\text{r}}{a}$ совпадут с компонентами вектора $\overset{\text{r}}{a} \cdot \Pi$. Таким образом, для произвольного тензора Π и вектора $\overset{\text{r}}{a}$ имеет место равенство

$$\overset{\text{r}}{a} \cdot \Pi = \Pi_c \cdot \overset{\text{r}}{a}.\quad (6)$$

Теперь рассмотрим один важный пример. В поле вектора $\overset{\text{r}}{a}(\overset{\text{r}}{r}) = \overset{\text{r}}{a}(x_1, x_2, x_3)$ возьмем бесконечно малое приращение аргумента $d\overset{\text{r}}{r} = \overset{\text{r}}{i}_1 d\overset{\text{r}}{x}_1 + \overset{\text{r}}{i}_2 d\overset{\text{r}}{x}_2 + \overset{\text{r}}{i}_3 d\overset{\text{r}}{x}_3$ и получим приращение вектора $d\overset{\text{r}}{a} = \overset{\text{r}}{i}_1 d\overset{\text{r}}{a}_1 + \overset{\text{r}}{i}_2 d\overset{\text{r}}{a}_2 + \overset{\text{r}}{i}_3 d\overset{\text{r}}{a}_3$. По правилу вычисления дифференциала функции многих независимых аргументов получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
da_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3} dx_3, \\
da_2 &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3} dx_3, \\
da_3 &= \frac{\partial a_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} dx_3.
\end{aligned} \tag{7}$$

Переходя к другой системе координат, нетрудно убедиться, что таблица из частных производных выражения (7) образует некоторый тензор.

Определение 10. Коэффициенты линейных соотношений (7) образуют тензор, который называется *тензором, производным от вектора $\overset{1}{a}$ по вектору $\overset{1}{r}$* , и для него вводится обозначение $\frac{d\overset{1}{a}}{d\overset{1}{r}}$. Для краткости его называют просто *производным тензором*.

$$\frac{d\overset{1}{a}}{d\overset{1}{r}} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{array} \right\}. \tag{8}$$

Этот тензор имеет большое значение. В частности, с его помощью будут получены некоторые дифференциальные операции векторного анализа. Полный дифференциал вектора $\overset{1}{a}$ представим в виде скалярного произведения производного тензора и вектора $d\overset{1}{r}$:

$$d\overset{1}{a} = \frac{d\overset{1}{a}}{d\overset{1}{r}} \cdot d\overset{1}{r}. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться, что, выполнив это умножение по формуле (1), получим вектор $d\overset{1}{a}$ с компонентами (7).

Запишем тензор, сопряженный с производным тензором, и обозначим его следующим образом:

$$\text{grad}^{\mathbf{r}} \overset{\mathbf{r}}{a} = \nabla^{\mathbf{r}} \overset{\mathbf{r}}{a} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{a}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{a}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{a}_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{a}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{a}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{a}_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{a}_1}{\partial x_3} & \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{a}_2}{\partial x_3} & \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{a}_3}{\partial x_3} \end{array} \right\}. \quad (10)$$

Этот тензор называется *градиентом вектора* $\overset{\mathbf{r}}{a}$. Напомним, что оператор Гамильтона ∇ есть дифференциальный оператор, обладающий свойствами вектора.

$$\nabla = \overset{\mathbf{r}}{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \overset{\mathbf{r}}{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \overset{\mathbf{r}}{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Поэтому выражение $\nabla^{\mathbf{r}} \overset{\mathbf{r}}{a}$ можно рассматривать как диаду и, расписав ее по общему правилу для диад, получим таблицу (10).

Введенные нами тензоры $\frac{d\overset{\mathbf{r}}{a}}{d\mathbf{r}}$ и $\nabla^{\mathbf{r}} \overset{\mathbf{r}}{a}$ являются взаимно сопряженными, поэтому для их скалярных произведений с вектором можно воспользоваться равенством (6)

$$d\overset{\mathbf{r}}{a} = \frac{d\overset{\mathbf{r}}{a}}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r} \cdot \left(\frac{d\overset{\mathbf{r}}{a}}{d\mathbf{r}} \right)_c = d\mathbf{r} \cdot \nabla^{\mathbf{r}} \overset{\mathbf{r}}{a}. \quad (11)$$

Полученное равенство аналогично выражению для полного дифференциала скалярной функции

$$d\varphi = d\mathbf{r}^{\mathbf{r}} \cdot \text{grad} \varphi = d\mathbf{r}^{\mathbf{r}} \cdot \nabla \varphi.$$

Для правой части равенства (11) воспользуемся правилом скалярного умножения диады на вектор слева (5).

$$d\mathbf{r}^{\mathbf{r}} \cdot \nabla^{\mathbf{r}} \overset{\mathbf{r}}{a} = (d\mathbf{r}^{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \overset{\mathbf{r}}{a}.$$

Заменив в этом равенстве $d\mathbf{r}^{\mathbf{r}}$ на произвольный вектор $\overset{\mathbf{r}}{v}$, получим

$$\overset{\mathbf{r}}{v} \cdot \nabla^{\mathbf{r}} \overset{\mathbf{r}}{a} = (\overset{\mathbf{r}}{v} \cdot \nabla) \overset{\mathbf{r}}{a}. \quad (12)$$

Здесь в правой части стоит градиент вектора $\overset{1}{a}$ по вектору $\overset{1}{v}$, поэтому можно сформулировать следующее утверждение, которое демонстрирует некоторую связь тензорного исчисления с векторным анализом.

Градиент вектора $\overset{1}{a}$ по вектору $\overset{1}{v}$ есть скалярное произведение тензора $\nabla \overset{1}{a}$, сопряженного с производным тензором, на вектор $\overset{1}{v}$ слева.

Для градиента вектора $\overset{1}{a}$ по вектору $\overset{1}{v}$ можно получить также следующее выражение:

$$(\overset{1}{v} \cdot \nabla) \overset{1}{a} = \overset{1}{v} \cdot \nabla \overset{1}{a} = (\nabla \overset{1}{a})_c \cdot \overset{1}{v} = \frac{d\overset{1}{a}}{d\overset{1}{r}} \cdot \overset{1}{v}. \quad (13)$$

Разложим производный тензор на сумму симметричного и антисимметричного тензоров $\frac{d\overset{1}{a}}{d\overset{1}{r}} = \Phi + A$, где для симметричного тензора получим выражение

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{d\overset{1}{a}}{d\overset{1}{r}} + \nabla \overset{1}{a} \right) = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\theta_3 & \frac{1}{2}\theta_2 \\ \frac{1}{2}\theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\theta_1 \\ \frac{1}{2}\theta_2 & \frac{1}{2}\theta_1 & \varepsilon_3 \end{array} \right\}, \quad (14)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial a_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial a_3}{\partial x_3},$$

$$\theta_1 = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \quad \theta_2 = \frac{\partial a_1}{\partial x_3} + \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \quad \theta_3 = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}.$$

Определение 11. Если $\overset{1}{a}(\overset{1}{r})$ есть вектор перемещения частиц сплошной среды, то тензор Φ , определяемый формулой (14), называется *тензором деформаций*.

Теперь выпишем антисимметричный тензор.

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{a}}{dr} - \nabla \mathbf{a} \right) = \begin{Bmatrix} 0 & -\varpi_3 & \varpi_2 \\ \varpi_3 & 0 & -\varpi_1 \\ -\varpi_2 & \varpi_1 & 0 \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

$$\varpi_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right), \quad \varpi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right), \quad \varpi_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right).$$

Полученные выражения для компонент вектора $\frac{1}{\varpi}$ позволяют записать для него равенство

$$\frac{\mathbf{r}}{\varpi} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{a}. \quad (16)$$

На основании полученного равенства можно сделать вывод, что производный тензор $\frac{d\mathbf{a}}{dr}$ является симметричным ($A = 0$) лишь тогда, когда вектор $\mathbf{a}$ потенциальный, т. е. для $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$, поскольку в этом случае

$$\frac{\mathbf{r}}{\varpi} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

на основании следствия из теоремы Стокса.

Оказывается, что скалярное умножение симметричного и антисимметричного тензоров на вектор имеют свои особенности. Так, в силу того, что симметричный тензор совпадает со своим сопряженным, получим

$$\mathbf{a} \cdot \Phi = \Phi_c \cdot \mathbf{a} = \Phi \cdot \mathbf{a}.$$

Таким образом, при скалярном умножении симметричного тензора на вектор порядок сомножителей может быть изменен.

Возьмем произвольный антисимметричный тензор

$$A = \begin{Bmatrix} 0 & -\varpi_3 & \varpi_2 \\ \varpi_3 & 0 & -\varpi_1 \\ -\varpi_2 & \varpi_1 & 0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

и вычислим его произведение на вектор $\overset{1}{a}$ справа $\overset{1}{b} = A \cdot \overset{1}{a}$. Тогда получим

$$b_1 = -\varpi_3 a_2 + \varpi_2 a_3,$$

$$b_2 = -\varpi_1 a_3 + \varpi_3 a_1,$$

$$b_3 = -\varpi_2 a_1 + \varpi_1 a_2.$$

Отсюда следует, что вектор $\overset{1}{b}$ есть векторное произведение вектора $\overset{1}{\varpi}$ на вектор $\overset{1}{a}$:

$$A \cdot \overset{1}{a} = \varpi \times \overset{1}{a}.$$

Вычислив аналогично скалярное произведение $\overset{1}{a} \cdot A$, окончательно получим

$$A \cdot \overset{1}{a} = \varpi \times \overset{1}{a} = -\overset{1}{a} \cdot A. \quad (18)$$

Пусть вектор $\overset{1}{a}(\overset{1}{r})$ есть вектор перемещений частиц сплошной среды.

Как показано выше, производный тензор $\frac{d\overset{1}{a}}{d\overset{1}{r}}$ может быть разложен на сумму симметричного Φ и антисимметричного A тензоров. Следовательно, для произвольного приращения вектора можно получить равенство

$$d\overset{1}{a} = \frac{d\overset{1}{a}}{d\overset{1}{r}} \cdot d\overset{1}{r} = \Phi \cdot d\overset{1}{r} + A \cdot d\overset{1}{r}. \quad (19)$$

Для второго слагаемого с помощью формул (16) и (18) имеем

$$A \cdot d\overset{1}{r} = \overset{1}{\varpi} \times d\overset{1}{r} = \frac{1}{2} \text{rot } \overset{1}{a} \times d\overset{1}{r}.$$

Окончательно равенство (19) примет вид

$$d\overset{1}{a} = \Phi \cdot d\overset{1}{r} + \frac{1}{2} \text{rot } \overset{1}{a} \times d\overset{1}{r}. \quad (20)$$

Эта формула означает, что перемещение точек бесконечно малого объема можно представить в виде суммы двух слагаемых, из них первое

определяет деформацию объема, а второе – поворот объема как целого.

Здесь нам осталось ввести векторное умножение тензора $\Pi = \overset{1}{i}_1 \overset{1}{r} p_1 + \overset{1}{i}_2 \overset{1}{r} p_2 + \overset{1}{i}_3 \overset{1}{r} p_3$ на вектор $\overset{1}{a}$.

Определение 12. Под векторным произведением тензора Π на вектор $\overset{1}{a}$ справа понимается новый тензор Π' , вычисленный по формуле

$$\Pi' = \Pi \times \overset{1}{r} \overset{1}{a} = \overset{1}{i}_1 (\overset{1}{r} p_1 \times \overset{1}{a}) + \overset{1}{i}_2 (\overset{1}{r} p_2 \times \overset{1}{a}) + \overset{1}{i}_3 (\overset{1}{r} p_3 \times \overset{1}{a}). \quad (21)$$

По аналогии со скалярным умножением для диады $\overset{1}{b} \overset{1}{c}$ можно также получить более простую формулу

$$(\overset{1}{b} \overset{1}{c}) \times \overset{1}{a} = \overset{1}{b} (\overset{1}{c} \times \overset{1}{a}). \quad (22)$$

Для ее вывода необходимо вспомнить, что векторными компонентами диады являются $\overset{1}{p}_1 = \overset{1}{b}_1 \overset{1}{c}$, $\overset{1}{p}_2 = \overset{1}{b}_2 \overset{1}{c}$, $\overset{1}{p}_3 = \overset{1}{b}_3 \overset{1}{c}$. В результате умножения получаем новую диаду, вторым вектором которой является векторное произведение векторов $\overset{1}{c} \times \overset{1}{a}$.

Теперь определим векторное умножение тензора на вектор слева.

Определение 13. Под векторным произведением тензора Π на вектор $\overset{1}{a}$ слева понимается новый тензор Π'' :

$$\Pi'' = \overset{1}{a} \times \Pi = (\overset{1}{a} \times \overset{1}{i}_1) \overset{1}{r} p_1 + (\overset{1}{a} \times \overset{1}{i}_2) \overset{1}{r} p_2 + (\overset{1}{a} \times \overset{1}{i}_3) \overset{1}{r} p_3. \quad (23)$$

В этом случае для диады можно также получить более простую формулу

$$\overset{1}{a} \times (\overset{1}{b} \overset{1}{c}) = (\overset{1}{a} \times \overset{1}{b}) \overset{1}{c}. \quad (24)$$

В результате также получаем новую диаду. Таким образом, можно сформулировать правило.

При векторном умножении диады на вектор его необходимо умножить векторно на ближайший к нему вектор диады. В результате такого умножения получается новая диада.

Теперь рассмотрим пример, который установит связь между антисимметричным тензором A и вектором $\overset{1}{\omega}$, из компонент которого он состоит (17). Возьмем единичный тензор

$$I = \overset{1}{i}_1 \overset{1}{i}_1 + \overset{1}{i}_2 \overset{1}{i}_2 + \overset{1}{i}_3 \overset{1}{i}_3,$$

векторные компоненты которого $\overset{\mathbf{r}}{p}_1 = \overset{\mathbf{i}}{i}_1, \overset{\mathbf{r}}{p}_2 = \overset{\mathbf{i}}{i}_2, \overset{\mathbf{r}}{p}_3 = \overset{\mathbf{i}}{i}_3$. С его помощью построим тензор

$$\Psi = \overset{\mathbf{r}}{\omega} \times I = (\overset{\mathbf{r}}{\omega} \times \overset{\mathbf{i}}{i}_1) \overset{\mathbf{i}}{i}_1 + (\overset{\mathbf{r}}{\omega} \times \overset{\mathbf{i}}{i}_2) \overset{\mathbf{i}}{i}_2 + (\overset{\mathbf{r}}{\omega} \times \overset{\mathbf{i}}{i}_3) \overset{\mathbf{i}}{i}_3.$$

Умножим скалярно тензор Ψ на произвольный вектор $\overset{\mathbf{i}}{a}$ справа.

$$\begin{aligned} \Psi \cdot \overset{\mathbf{r}}{a} &= (\overset{\mathbf{r}}{\omega} \times \overset{\mathbf{i}}{i}_1)(\overset{\mathbf{i}}{i}_1 \cdot \overset{\mathbf{r}}{a}) + (\overset{\mathbf{r}}{\omega} \times \overset{\mathbf{i}}{i}_2)(\overset{\mathbf{i}}{i}_2 \cdot \overset{\mathbf{r}}{a}) + (\overset{\mathbf{r}}{\omega} \times \overset{\mathbf{i}}{i}_3)(\overset{\mathbf{i}}{i}_3 \cdot \overset{\mathbf{r}}{a}) = \\ &= (\overset{\mathbf{r}}{\omega} \times \overset{\mathbf{i}}{i}_1) a_1 + (\overset{\mathbf{r}}{\omega} \times \overset{\mathbf{i}}{i}_2) a_2 + (\overset{\mathbf{r}}{\omega} \times \overset{\mathbf{i}}{i}_3) a_3 = \overset{\mathbf{r}}{\omega} \times \overset{\mathbf{r}}{a}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученный результат с формулой (18), можно утверждать, что $\Psi = A$. Иначе говоря, любой антисимметричный тензор может быть представлен в виде векторного произведения единичного тензора на вектор $\overset{\mathbf{i}}{\omega}$ слева:

$$A = \overset{\mathbf{i}}{\omega} \times I.$$

3.4. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТЕНЗОРОВ

Пусть даны произвольный тензор A со скалярными элементами a_{kl} и тензор B с элементами b_{kl} . Образует скалярное произведение тензора B на какой-либо вектор $\overset{\mathbf{i}}{c}$ справа:

$$\overset{\mathbf{i}}{c}' = B \cdot \overset{\mathbf{i}}{c}. \quad (1)$$

Теперь умножим тензор A на вектор $\overset{\mathbf{i}}{c}'$ справа:

$$\overset{\mathbf{i}}{c}'' = A \cdot \overset{\mathbf{i}}{c}' = A \cdot B \cdot \overset{\mathbf{i}}{c}. \quad (2)$$

Определение 14. Если переход от вектора $\overset{\mathbf{i}}{c}$ к вектору $\overset{\mathbf{i}}{c}''$ осуществляется с помощью одного тензора Π со скалярными элементами p_{kl} :

$$\overset{\mathbf{i}}{c}'' = \Pi \cdot \overset{\mathbf{i}}{c}, \quad (3)$$

то тензор Π называется *скалярным произведением* тензоров A и B .

$$\Pi = A \cdot B = AB. \quad (4)$$

Найдем выражение для элементов p_{kl} через элементы a_{kl} и b_{kl} . Из определения скалярного умножения тензора на вектор получим (1)

$$c'_r = \sum_{l=1}^3 b_{rl} c_l \quad (r=1, 2, 3).$$

Аналогично из равенства (2) имеем

$$c''_k = \sum_{r=1}^3 a_{kr} c'_r = \sum_{r=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{kr} b_{rl} c_l = \sum_{l=1}^3 \sum_{r=1}^3 a_{kr} b_{rl} c_l, \quad k=1, 2, 3.$$

С другой стороны, из равенства (3) можно получить следующее выражение:

$$c''_k = \sum_{l=1}^3 p_{kl} c_l \quad (k=1, 2, 3).$$

Сравнивая два последние равенства, которые справедливы для произвольного вектора $\vec{c}$, окончательно получим

$$p_{kl} = \sum_{r=1}^3 a_{kr} b_{rl} \quad (k, l=1, 2, 3). \quad (5)$$

Определение 15. Скалярным произведением AB двух тензоров A и B называется тензор Π , компоненты которого определяются по формуле (5).

Нетрудно заметить, что это умножение осуществляется по тому же правилу, что и умножение двух квадратных матриц. Аналогично с матрицами вводится определитель тензора Π :

$$D(\Pi) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Поскольку скалярное умножение двух тензоров $\Pi = AB$ осуществляется аналогично умножению матриц, для определителя произведения тензоров имеет место аналогичное равенство

$$D(\Pi) = D(A)D(B). \quad (6)$$

Теперь выясним, по какому правилу скалярно перемножаются диады. Для этого возьмем две диады $A = \overset{1}{p}\overset{1}{q}$, $B = \overset{1}{r}\overset{1}{s}$ и повторим для них вывод, приведенный в начале параграфа. При этом воспользуемся правилом скалярного умножения диады на вектор справа

$$\overset{1}{c}' = B \cdot \overset{1}{c} = (\overset{1}{r}\overset{1}{s}) \cdot \overset{1}{c} = \overset{1}{r}(\overset{1}{s} \cdot \overset{1}{c}).$$

Далее умножим диаду $A = \overset{1}{p}\overset{1}{q}$ на вектор $\overset{1}{c}'$ справа

$$c'' = A \cdot \overset{1}{c}' = (\overset{1}{p}\overset{1}{q}) \cdot \overset{1}{c}' = \overset{1}{p}(\overset{1}{q} \cdot \overset{1}{c}') = \overset{1}{p}(\overset{1}{q} \cdot \overset{1}{r})(\overset{1}{s} \cdot \overset{1}{c}) = ((\overset{1}{q} \cdot \overset{1}{r})\overset{1}{p}\overset{1}{s}) \cdot \overset{1}{c}. \quad (7)$$

Для получения последнего равенства мы воспользовались правилом скалярного умножения диады на вектор, но в обратном направлении. Сравнивая полученное равенство с равенством (3), окончательно получим

$$\Pi = (\overset{1}{p}\overset{1}{q}) \cdot (\overset{1}{r}\overset{1}{s}) = (\overset{1}{q} \cdot \overset{1}{r})\overset{1}{p}\overset{1}{s}. \quad (8)$$

Таким образом, в результате скалярного перемножения двух диад получена новая диада, составленная из первого вектора первой диады и последнего вектора второй диады, два других вектора просто перемножаются скалярно.

Заметим, что скалярное произведение тензоров *ассоциативно* по отношению к скалярному множителю m

$$(m A) \cdot B = m(A \cdot B), \quad A \cdot (m B) = m(A \cdot B), \quad (9)$$

а также к произведению трех тензоров

$$(AB) \cdot C = A \cdot (BC) = ABC. \quad (10)$$

Скалярное произведение тензоров, как, впрочем, и матриц, *некоммутативно*, т. е., вообще говоря, $AB \neq BA$. Приведем следующий пример. Пусть $A = \overset{1}{i}_1\overset{1}{i}_2$ и $B = \overset{1}{i}_2\overset{1}{i}_1$, тогда очевидно, что произведения $AB = \overset{1}{i}_1\overset{1}{i}_1$ и $BA = \overset{1}{i}_2\overset{1}{i}_2$ не равны друг другу.

Скалярное произведение двух тензоров может равняться нулю, хотя оба сомножителя отличны от нуля. Например, тензор $A = \overset{1}{i}_1\overset{1}{i}_2$ отличен от нуля, но его произведение само на себя $AA = \overset{1}{i}_1(\overset{1}{i}_2 \cdot \overset{1}{i}_1)\overset{1}{i}_2$ обращается в нуль, поскольку скалярное произведение $(\overset{1}{i}_2 \cdot \overset{1}{i}_1)$ равно нулю.

Таким образом, если скалярное произведение двух тензоров обращается в нуль, то это не означает, что один из сомножителей равен нулю.

Введем *классификацию тензоров* по отношению к скалярному умножению. Для этого рассмотрим произведение

$$\overset{\text{r}}{r}' = A \cdot \overset{\text{r}}{r}, \quad (11)$$

где векторы $\overset{\text{r}}{r}$ всевозможные.

Определение 16. Если в произведении (11):

- 1° Все векторы $\overset{\text{r}}{r}'$ равны нулю, то тензор A называется *нулевым*.
- 2° Все векторы $\overset{\text{r}}{r}'$ коллинеарны, то тензор A называется *линейным*.
- 3° Все векторы $\overset{\text{r}}{r}'$ компланарны, то тензор A называется *планарным*.
- 4° Все векторы $\overset{\text{r}}{r}'$ всевозможные, то тензор A называется *полным*.

Покажем например, что любая диада $\overset{\text{r}}{a}\overset{\text{r}}{b}$ есть линейный тензор. Умножим ее скалярно на произвольный вектор $\overset{\text{r}}{r}$.

$$\overset{\text{r}}{r}' = (\overset{\text{r}}{a}\overset{\text{r}}{b}) \cdot \overset{\text{r}}{r} = \overset{\text{r}}{a}(\overset{\text{r}}{b} \cdot \overset{\text{r}}{r}).$$

Отсюда видно, что все векторы $\overset{\text{r}}{r}'$ будут коллинеарны вектору $\overset{\text{r}}{a}$ и при изменении вектора $\overset{\text{r}}{r}$ будет изменяться лишь скаляр, на который вектор $\overset{\text{r}}{a}$ умножается. Следовательно, диада $\overset{\text{r}}{a}\overset{\text{r}}{b}$ является линейным тензором.

Теперь выясним, каким условиям удовлетворяет полный тензор.

Теорема 3 (о полноте тензора). *Для того чтобы тензор Π был полным, необходимо и достаточно, чтобы его определитель был отличен от нуля*

$$D(\Pi) \neq 0. \quad (12)$$

Сначала докажем необходимость. Пусть Π — полный тензор, тогда представим его в виде суммы трех диад

$$\Pi = \begin{Bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ p_{21} & 0 & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & p_{12} & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & p_{32} & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 & p_{13} \\ 0 & 0 & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{Bmatrix}.$$

Из этой записи следует, что тензор Π может быть записан в виде

$$\Pi = \overset{\text{r}}{p}_1 \overset{\text{r}}{i}_1 + \overset{\text{r}}{p}_2 \overset{\text{r}}{i}_2 + \overset{\text{r}}{p}_3 \overset{\text{r}}{i}_3, \quad (13)$$

где векторы $\overset{\mathbf{r}}{p}_1, \overset{\mathbf{r}}{p}_2, \overset{\mathbf{r}}{p}_3$ имеют скалярные компоненты $(p_{11}, p_{21}, p_{31}), (p_{12}, p_{22}, p_{32})$ и (p_{13}, p_{23}, p_{33}) соответственно. Для произвольного вектора $\overset{\mathbf{r}}{r} = x_1 \overset{\mathbf{r}}{i}_1 + x_2 \overset{\mathbf{r}}{i}_2 + x_3 \overset{\mathbf{r}}{i}_3$ вычислим скалярное произведение его на тензор Π справа

$$\begin{aligned} \overset{\mathbf{r}}{r}' = \Pi \cdot \overset{\mathbf{r}}{r} &= (\overset{\mathbf{r}}{p}_1 \overset{\mathbf{r}}{i}_1 + \overset{\mathbf{r}}{p}_2 \overset{\mathbf{r}}{i}_2 + \overset{\mathbf{r}}{p}_3 \overset{\mathbf{r}}{i}_3) \cdot \overset{\mathbf{r}}{r} = \overset{\mathbf{r}}{p}_1 (\overset{\mathbf{r}}{i}_1 \cdot \overset{\mathbf{r}}{r}) + \overset{\mathbf{r}}{p}_2 (\overset{\mathbf{r}}{i}_2 \cdot \overset{\mathbf{r}}{r}) + \overset{\mathbf{r}}{p}_3 (\overset{\mathbf{r}}{i}_3 \cdot \overset{\mathbf{r}}{r}) = \\ &= x_1 \overset{\mathbf{r}}{p}_1 + x_2 \overset{\mathbf{r}}{p}_2 + x_3 \overset{\mathbf{r}}{p}_3. \end{aligned}$$

Таким образом, каждый вектор $\overset{\mathbf{r}}{r}'$ есть линейная комбинация трех векторов $\overset{\mathbf{r}}{p}_1, \overset{\mathbf{r}}{p}_2, \overset{\mathbf{r}}{p}_3$ и, следовательно, векторы $\overset{\mathbf{r}}{r}'$ могут быть произвольными только в том случае, если эти три вектора некомпланарны. А необходимым условием их некомпланарности является неравенство нулю их смешанного произведения

$$\overset{\mathbf{r}}{p}_1 \cdot (\overset{\mathbf{r}}{p}_2 \times \overset{\mathbf{r}}{p}_3) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (14)$$

Нетрудно заметить, что мы получили определитель сопряженного тензора. Поскольку определитель тензора Π равен определителю сопряженного, то получим

$$D(\Pi) = D(\Pi_c) \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность доказывается с помощью тех же выкладок, но выполненных в обратном порядке. Приведем схему этого доказательства. Пусть $D(\Pi) \neq 0$, из этого следует, что векторы $\overset{\mathbf{r}}{p}_1, \overset{\mathbf{r}}{p}_2, \overset{\mathbf{r}}{p}_3$ некомпланарны. Поскольку любой вектор $\overset{\mathbf{r}}{r}'$ есть линейная комбинация этих векторов, то векторы $\overset{\mathbf{r}}{r}'$ всевозможные. Следовательно, тензор Π по определению является полным, что и требовалось доказать.

Теперь введем понятие обратного тензора.

Определение 17. Если существует тензор B такой, что $B \cdot \Pi = I$, то тензор B называется *обратным тензором* и обозначается Π^{-1} :

$$\Pi^{-1} \cdot \Pi = I . \quad (15)$$

Вероятно, обратный тензор существует не для каждого тензора. Возьмем знак определителя от обеих частей равенства (15):

$$D(\Pi^{-1} \cdot \Pi) = D(\Pi^{-1}) D(\Pi) = 1 .$$

Отсюда следует, что определитель тензора Π не должен быть равным нулю, т. е. он должен быть полным. Оказывается, что это требование является важным условием существования обратного тензора, что и утверждает следующая теорема.

Теорема 4 (о существовании обратного тензора). *Полнота тензора есть необходимое и достаточное условие существования обратного тензора.*

Необходимость. Пусть $\Pi_{\mathbf{r}}$ – полный тензор, тогда по определению для всевозможных векторов $\mathbf{r}$ векторы

$$\mathbf{r}' = \Pi \cdot \mathbf{r} \quad (16)$$

также являются всевозможными. Следовательно, для каждого вектора $\mathbf{r}'$ имеется соответствующий ему вектор $\mathbf{r}$ и они могут быть связаны соотношением

$$\mathbf{r} = B \cdot \mathbf{r}' ,$$

где B – некоторый тензор. Комбинируя это соотношение с равенством (16), получим

$$B \cdot \Pi \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} .$$

Откуда в силу произвольности вектора $\mathbf{r}$ следует, что $B \cdot \Pi = I$, и отсюда по определению получим, что B есть обратный тензор Π^{-1} , что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть для тензора Π существует обратный тензор Π^{-1} и равенство

$$\mathbf{r} = \Pi^{-1} \cdot \mathbf{r}' ,$$

справедливо для всевозможных векторов $\mathbf{r}'$. Но тогда в равенстве (16) векторы $\mathbf{r}'$ также могут быть всевозможными, если брать всевозможные

векторы $\overset{1}{r}$. Следовательно, тензор Π – полный по определению, что и требовалось доказать.

3.5. ГЛАВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕНЗОРА. ИНВАРИАНТЫ ТЕНЗОРА

В § 3.1 были получены соотношения, по которым преобразуются скалярные компоненты тензора при переходе от одной системы координат к другой. Здесь мы найдем некоторые особые направления для тензора и некоторые выражения, которые не изменяются в результате таких преобразований.

Возьмем некоторый тензор Π и различные векторы $\overset{1}{a}$, отличные от нуля. С их помощью образуем скалярное произведение

$$\overset{1}{b} = \Pi \cdot \overset{r}{a}.$$

Определение 18. Если вектор $\overset{1}{b}$ коллинеарен вектору $\overset{1}{a}$

$$\overset{1}{b} = \Pi \cdot \overset{r}{a} = \lambda \overset{r}{a},$$

то направление вектора $\overset{1}{a}$ называется *главным направлением* тензора Π , а величина λ называется *главным значением* тензора Π .

Пусть в некоторой системе координат тензор Π имеет компоненты p_{kl} ($k, l = 1, 2, 3$), и a_1, a_2, a_3 – составляющие вектора $\overset{1}{a}$, тогда соотношение

$$\Pi \cdot \overset{1}{a} = \lambda \overset{1}{a} \quad (1)$$

по определению скалярного умножения равносильно трем равенствам

$$\begin{aligned} p_{11} a_1 + p_{12} a_2 + p_{13} a_3 &= \lambda a_1, \\ p_{21} a_1 + p_{22} a_2 + p_{23} a_3 &= \lambda a_2, \\ p_{31} a_1 + p_{32} a_2 + p_{33} a_3 &= \lambda a_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Если стоящие в правой части произведения перенести влево, то полученные равенства можно рассматривать как систему линейных однородных уравнений относительно a_1, a_2, a_3 . Эта система имеет нетривиальное решение только тогда, когда ее определитель равен нулю

$$D(\Pi - \lambda I) = \begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Раскрывая определитель, получим уравнение третьей степени относительно λ , решение которого дает, вообще говоря, три корня. Если они вещественны, то из решения системы (2) для каждого λ находят-ся a_1, a_2, a_3 с точностью до постоянного множителя, т. е. $a_1 : a_2 : a_3$. Эти соотношения и дают нам три главных направления.

Теперь раскроем определитель в равенстве (3) и запишем полученное кубическое уравнение

$$D(\Pi - \lambda I) = -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda + I_3 = 0, \quad (4)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} I_1 &= p_{11} + p_{22} + p_{33}, \\ I_2 &= \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{11} & p_{13} \\ p_{31} & p_{33} \end{vmatrix}, \\ I_3 &= \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Известно, что корни кубического уравнения связаны с его коэффициентами следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \\ I_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1, \\ I_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned}$$

По аналогии с линейными операторами можно показать, что главные значения тензора Π не зависят от того, в какой системе координат они вычисляются, т. е. они определяются самим тензором. Следовательно, и параметры I_1, I_2, I_3 не зависят от системы координат.

Определение 19. Параметры I_1, I_2, I_3 , определяемые по формулам (5), называются *инвариантами тензора* Π .

Комбинируя равенства (5), можно получить также выражения для других инвариантов тензора.

Вернемся теперь к тензору, производному от вектора $\overset{1}{a}$ по вектору $\overset{1}{r}$, введенному нами ранее:

$$\frac{d\overset{1}{a}}{d\overset{1}{r}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix}.$$

Составим для него первый инвариант

$$I_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}. \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что нами получена дивергенция вектора $\overset{1}{a}$. Таким образом, первый инвариант производного тензора равен дивергенции вектора $\overset{1}{a}$, для которого построен производный тензор.

Вычислим скалярное произведение тензоров A и B с компонентами a_{kl} и b_{kl} соответственно. Тогда для компонент p_{kl} тензора $\Pi = A \cdot B$ получим равенства

$$p_{kl} = \sum_{r=1}^3 a_{kr} b_{rl} \quad (k, l = 1, 2, 3).$$

Вычислим теперь первый инвариант I_1 для полученного тензора Π . Поскольку у элементов, стоящих на главной диагонали, индексы k и l совпадают, в результате получим

$$I_1 = \sum_{k=1}^3 \sum_{r=1}^3 a_{kr} b_{rk}. \quad (7)$$

Определение 20. Выражение, стоящее в правой части равенства (7), определяет *бискалярное произведение* тензоров A и B , которое обозначается $A \cdot B$.

Бискалярное произведение играет большую роль в математике и механике. Например, оно присутствует в векторной записи уравнения энергии в механике сплошной среды, которое будет приведено позднее.

Из формулы (7) следует, что бискалярное произведение вычисляется следующим образом. Компоненты первой строки первого тензора умножаются на соответствующие компоненты первого столбца второго тензора, второй строки – на второй столбец и третьей строки – на третий столбец, и все произведения суммируются. В результате получается скалярная величина. Напомним, что скалярное умножения тензоров дает тензор.

3.6. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ТЕНЗОРА ПО СКАЛЯРНОМУ АРГУМЕНТУ. ДИВЕРГЕНЦИЯ ТЕНЗОРА

До настоящего момента мы имели дело с постоянными тензорами. Теперь рассмотрим тензор $\Pi(t)$, зависящий от скалярного аргумента. Это означает, что все его векторные компоненты зависят от аргумента t :

$$\Pi(t) = \overset{1}{i} \overset{r}{p}_1(t) + \overset{2}{i} \overset{r}{p}_2(t) + \overset{3}{i} \overset{r}{p}_3(t). \quad (1)$$

От этого аргумента зависят также скалярные компоненты тензора

$$\Pi(t) = \begin{Bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) \\ p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t) \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

Аналогично скалярным и векторным функциям для тензора вводится понятие производной.

Определение 21. *Производной тензора $\Pi(t)$ по скалярному аргументу t называется предел отношения изменения тензора к приращению аргумента, если последний стремится к нулю.*

Математически это записывается следующим образом:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pi(t + \Delta t) - \Pi(t)}{\Delta t}. \quad (3)$$

Будем ставить точку над скаляром и вектором для обозначения их производной. Используя правило вычитания тензоров и деления на скаляр, получим выражения для производной тензора через производные его компонент

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \dot{i}_1 \overset{\cdot}{p}_1(t) + \dot{i}_2 \overset{\cdot}{p}_2(t) + \dot{i}_3 \overset{\cdot}{p}_3(t), \quad (4)$$

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \begin{Bmatrix} \overset{\cdot}{p}_{11}(t) & \overset{\cdot}{p}_{12}(t) & \overset{\cdot}{p}_{13}(t) \\ \overset{\cdot}{p}_{21}(t) & \overset{\cdot}{p}_{22}(t) & \overset{\cdot}{p}_{23}(t) \\ \overset{\cdot}{p}_{31}(t) & \overset{\cdot}{p}_{32}(t) & \overset{\cdot}{p}_{33}(t) \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Используя правила скалярного и векторного умножения тензора на вектор, нетрудно получить формулы для производных от этих произведений

$$\frac{d(\Pi \cdot \overset{\cdot}{a})}{dt} = \frac{d\Pi}{dt} \cdot \overset{\cdot}{a} + \Pi \cdot \frac{d\overset{\cdot}{a}}{dt}, \quad (6)$$

$$\frac{d(\Pi \times \overset{\cdot}{a})}{dt} = \frac{d\Pi}{dt} \times \overset{\cdot}{a} + \Pi \times \frac{d\overset{\cdot}{a}}{dt}. \quad (7)$$

Не следует забывать, что порядок сомножителей в этих формулах важен. Для производной от скалярного произведения тензоров имеет место формула, подобная (6).

В предыдущем параграфе мы показали, что для любого полного тензора Π существует ему обратный Π^{-1} . Выведем формулу для производной последнего. Из определения обратного тензора следует

$$\Pi \cdot \Pi^{-1} = I,$$

где I — единичный тензор. Продифференцируем это равенство почленно по t :

$$\frac{d\Pi}{dt} \cdot \Pi^{-1} + \Pi \cdot \frac{d\Pi^{-1}}{dt} = 0$$

Перенесем первое слагаемое вправо и умножим обе части равенства на тензор Π^{-1} скалярно слева. Тогда получим искомое равенство

$$\frac{d\Pi^{-1}}{dt} = -\Pi^{-1} \cdot \frac{d\Pi}{dt} \cdot \Pi^{-1}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь тензорное поле. Это означает, что в каждой точке пространства задана тензорная функция

$$\Pi(\vec{r}) = \overset{1}{i}_1 \overset{1}{r} \overset{1}{p}_1(\vec{r}) + \overset{1}{i}_2 \overset{1}{r} \overset{1}{p}_2(\vec{r}) + \overset{1}{i}_3 \overset{1}{r} \overset{1}{p}_3(\vec{r}). \quad (9)$$

В каждой точке пространства зададим также единичный вектор $\overset{1}{n}$ и введем вектор $\overset{1}{p}_n$, умножив тензор Π на вектор $\overset{1}{n}$ скалярно слева

$$\overset{1}{p}_n = \overset{1}{n} \cdot \Pi = \overset{1}{p}_1(\vec{r}) \cos(\overset{1}{n}, x_1) + \overset{1}{p}_2(\vec{r}) \cos(\overset{1}{n}, x_2) + \overset{1}{p}_3(\vec{r}) \cos(\overset{1}{n}, x_3). \quad (10)$$

Здесь мы ввели направляющие косинусы вектора $\overset{1}{n}$ вместо скалярных произведений этого вектора на орты $\overset{1}{i}_1, \overset{1}{i}_2, \overset{1}{i}_3$. Рассмотрим интеграл от вектора $\overset{1}{p}_n$ по некоторой замкнутой поверхности S , окружающей объем V :

$$\oint_S \overset{1}{p}_n dS = \oint_S [\overset{1}{p}_1 \cos(\overset{1}{n}, x_1) + \overset{1}{p}_2 \cos(\overset{1}{n}, x_2) + \overset{1}{p}_3 \cos(\overset{1}{n}, x_3)] dS, \quad (11)$$

где $\overset{1}{n}$ – вектор местной нормали к поверхности. Преобразуем этот интеграл к объемному, воспользовавшись формулой Гаусса–Остроградского. Однако эта формула преобразует лишь проекцию вектора на нормаль

$$\oint_S a_n dS = \oint_S [a_1 \cos(\overset{1}{n}, x_1) + a_2 \cos(\overset{1}{n}, x_2) + a_3 \cos(\overset{1}{n}, x_3)] dS = \int_V \text{div } \vec{a}.$$

Поэтому в выражении (11) выпишем члены, содержащие сначала орты $\overset{1}{i}_1$:

$$\overset{1}{i}_1 \oint_S [p_{11} \cos(\overset{1}{n}, x_1) + p_{21} \cos(\overset{1}{n}, x_2) + p_{31} \cos(\overset{1}{n}, x_3)] dS.$$

Подынтегральное выражение можно рассматривать как проекцию некоторого вектора с компонентами p_{11}, p_{21}, p_{31} на единичный вектор $\overset{\mathbf{r}}{n}$, поэтому для него можно воспользоваться формулой Гаусса–Остроградского.

$$\begin{aligned} \oint_S [p_{11} \cos(\overset{\mathbf{r}}{n}, x_1) + p_{21} \cos(\overset{\mathbf{r}}{n}, x_2) + p_{31} \cos(\overset{\mathbf{r}}{n}, x_3)] dS = \\ = \oint_V \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} \right) dV. \end{aligned}$$

Выполняя аналогичные преобразования для членов выражения (11), содержащих орты $\overset{\mathbf{r}}{i}_2, \overset{\mathbf{r}}{i}_3$, получим

$$\begin{aligned} \oint_S \overset{\mathbf{r}}{p}_n dS = \oint_V \left(\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} \right) dV + \oint_V \left(\frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_3} \right) dV + \\ + \oint_V \left(\frac{\partial p_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3} \right) dV. \end{aligned}$$

Теперь перегруппируем члены в правой части, собирая слагаемые с производными по одному аргументу:

$$\oint_S \overset{\mathbf{r}}{p}_n dS = \oint_V \left(\frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{p}_3}{\partial x_3} \right) dV. \quad (12)$$

Интеграл по объему вычислим, воспользовавшись теоремой о среднем:

$$\oint_S \overset{\mathbf{r}}{p}_n dS = V \left(\frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \overset{\mathbf{r}}{p}_3}{\partial x_3} \right)_M. \quad (13)$$

Здесь M – некоторая внутренняя точка области V .

Введем определение дивергенции тензора аналогично определению дивергенции вектора.

Определение 22. Дивергенцией тензора Π называется предел отношения интеграла по замкнутой поверхности от вектора $\overset{\mathbf{r}}{p}_n$ (10) к объему, ограниченному этой поверхностью, когда последний стремится к нулю:

$$\operatorname{div} \Pi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_S \vec{p}_n dS. \quad (14)$$

Теперь найдем формулу, по которой вычисляется дивергенция тензора Π . Для этого равенство (13) разделим почленно на V и перейдем к пределу при V , стремящемся к нулю. При этом точка M остается внутренней точкой области V :

$$\operatorname{div} \Pi = \frac{\partial \vec{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \vec{p}_3}{\partial x_3}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что дивергенция тензора является вектором. По формуле (15) нетрудно вычислить дивергенцию тензора Π , если выписаны его векторные компоненты $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$. Следует заметить, что формула (15) похожа на формулу для дивергенции вектора, только под знаками производных в той стоят скалярные компоненты вектора.

В равенстве (12) выражение в скобках заменим на $\operatorname{div} \Pi$ и воспользуемся формулой (10):

$$\oint_S \vec{p}_n dS = \oint_S \vec{n} \cdot \Pi dS = \int_V \operatorname{div} \Pi dV. \quad (16)$$

Это равенство носит название *формулы Гаусса–Остроградского для тензора*. Она также сходна с формулой Гаусса–Остроградского для вектора.

Теперь продемонстрируем, как используются тензоры при записи уравнений механики сплошной среды. Сначала выведем уравнение движения. В движущейся сплошной среде вырежем малый объем V , который содержится внутри замкнутой поверхности S . Пусть ρ — плотность среды, $\vec{F}$ — вектор внешних сил на единицу объема, $\frac{d\vec{v}}{dt}$ — ускорение и $\vec{p}_n$ — напряжение, действующее на площадку поверхности S с вектором нормали $\vec{n}$. В первом параграфе настоящей главы мы уже выписывали формулу равновесия всех сил, действующих на некоторый объем сплошной среды. Воспользуемся ей еще раз:

$$\int_V \rho \left(\vec{F} - \frac{d\vec{v}}{dt} \right) dV + \oint_S \vec{p}_n dS = 0. \quad (17)$$

Здесь вектор $\dot{p}_n$ равен скалярному произведению $\dot{n} \cdot \Pi$, где тензор Π есть тензор упругих напряжений. Воспользуемся формулой Гаусса–Остроградского для тензоров (16), чтобы преобразовать поверхностный интеграл в равенстве (17) в объемный:

$$\int_V \left\{ \rho \left(\dot{F} - \frac{d\dot{v}}{dt} \right) + \operatorname{div} \Pi \right\} dV = 0.$$

В силу произвольности области интегрирования V подынтегральное выражение должно быть также равно нулю:

$$\rho \left(\dot{F} - \frac{d\dot{v}}{dt} \right) + \operatorname{div} \Pi = 0. \quad (18)$$

Таким образом, нами получено уравнение, которое называется *уравнением движения сплошной среды*.

И в завершение параграфа выпишем *уравнение энергии сплошной среды*

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \Pi \cdot D - \operatorname{div} \dot{q}. \quad (19)$$

Здесь T – температура среды; c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме; $\dot{q}$ – плотность потока тепла; D – тензор деформаций, который был нами получен в предыдущем параграфе. Как видно, в формуле (19) присутствует бискалярное произведение тензоров Π и D .

3.7. ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ТЕНЗОРОВ

Помимо декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 в трехмерном пространстве можно ввести произвольную криволинейную систему координат q_1, q_2, q_3 . Если она ортогональна, то для расстояния между двумя бесконечно близкими точками ds можно записать следующее равенство:

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \quad (1)$$

где $H_i = H_i(q_1, q_2, q_3)$ – коэффициенты Ляме.

Если в трехмерном пространстве задать некоторую поверхность, то положение точки на ней может быть задано двумя криволинейными координатами q_1, q_2 и для расстояния между двумя бесконечно близкими точками ds в общем случае неортогональных координат можно выписать формулу

$$ds^2 = g_{11} dq_1^2 + 2g_{12} dq_1 dq_2 + g_{22} dq_2^2. \quad (2)$$

Здесь $g_{ik} = g_{ik}(q_1, q_2)$ – метрические коэффициенты.

Рассмотрим теперь произвольное m -мерное евклидово пространство E^m , в котором задана некоторая ортогональная система координат $x_1, x_2, \dots, x_m$. Тогда аналогично формуле (1) для элемента длины можно записать выражение

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_m^2 = \sum_{\alpha=1}^m dx_{\alpha}^2. \quad (3)$$

Подобно тому, как в трехмерном пространстве мы рассматривали поверхность, которую можно рассматривать как подпространство двух измерений, в пространстве E^m можно выделить подпространство R^n ($n \leq m$) размерности n . В подпространстве R^n введем произвольную криволинейную систему координат $q_1, q_2, \dots, q_n$. Тогда можно установить связь между декартовыми координатами точек подпространства R^n и их криволинейными координатами

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ x_2 &= x_2(q_1, q_2, \dots, q_n), \\ &\vdots \\ x_m &= x_m(q_1, q_2, \dots, q_n). \end{aligned} \quad (4)$$

Расстояние между двумя бесконечно близкими точками ds подпространства R^n может быть вычислено по формуле (3), где вместо dx_α следует подставить их выражения, полученные из формулы (4):

$$dx_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_n} dq_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} dq_i, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m,$$

$$dx_\alpha^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} dq_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} dq_k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} dq_i dq_k, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m.$$

Подставим полученное выражение для dx_α^2 в формулу (3) и поменяем местами знаки суммирования

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n g_{ik} dq_i dq_k, \quad (5)$$

где введено обозначение

$$g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Формула (5) устанавливает метрику пространства R^n . Коэффициенты g_{ik} равны g_{ki} по определению (6) и называются метрическими коэффициентами. Они образуют ковариантный метрический тензор в пространстве R^n .

Теперь перейдем к общей теории тензоров. Но сначала дадим общие определения скаляра и вектора. Для этого рассмотрим пространство n измерений R^n , каждая точка которого определяется координатами (не обязательно декартовыми) $x^1, x^2, \dots, x^n$. В этом пространстве введем новые координаты $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \dots, \mathcal{X}^n$, которые связаны со старыми соотношениями

$$x^\alpha = x^\alpha(\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \dots, \mathcal{X}^n), \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Формула (7) определяет переход от новых координат к старым. Будем считать, что все функции x^α , стоящие в правой части, однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные в каждой точке пространства. Кроме того, Якобиан этого преобразования J отличен от нуля

$$J = \frac{D(x^1, x^2, \dots, x^n)}{D(\mathcal{X}_0^1, \mathcal{X}_0^2, \dots, \mathcal{X}_0^n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \mathcal{X}_0^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \mathcal{X}_0^2} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial \mathcal{X}_0^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \mathcal{X}_0^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \mathcal{X}_0^2} & \dots & \frac{\partial x^2}{\partial \mathcal{X}_0^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \mathcal{X}_0^1} & \frac{\partial x^n}{\partial \mathcal{X}_0^2} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial \mathcal{X}_0^n} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (8)$$

При этих условиях уравнения (7) можно решить относительно $\mathcal{X}_0^1, \mathcal{X}_0^2, \dots, \mathcal{X}_0^n$

$$\mathcal{X}_0^\alpha = \mathcal{X}_0^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Это означает, что преобразования координат взаимно однозначны.

Определение 23. Если для каждой системы координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ определена функция $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$, так что для другой системы координат $\mathcal{X}_0^1, \mathcal{X}_0^2, \dots, \mathcal{X}_0^n$ имеем функцию $\mathcal{f}(\mathcal{X}_0^1, \mathcal{X}_0^2, \dots, \mathcal{X}_0^n)$, и если при преобразовании координат (7) значения этих функций в соответствующих точках совпадают

$$f(x^1, x^2, \dots, x^n) = \mathcal{f}(\mathcal{X}_0^1, \mathcal{X}_0^2, \dots, \mathcal{X}_0^n), \quad (10)$$

то функция $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ есть *инвариант* или *скаляр*.

Примерами скаляров являются скалярное поле в n -мерном пространстве и расстояние между двумя бесконечно близкими точками ds , поскольку оно не зависит от системы координат, в которой вычисляется.

Перейдем теперь к новому определению вектора. По определению аффинного ортогонального вектора при повороте ортогональной системы координат имеем

$$\begin{aligned}x'_p &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\x'_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \\x'_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3,\end{aligned}\tag{11}$$

где α_{ik} – направляющие косинусы. В этом случае компоненты вектора $\frac{1}{a}$ преобразуются по тем же формулам

$$\begin{aligned}a'_p &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \alpha_{13}a_3, \\a'_2 &= \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{23}a_3, \\a'_3 &= \alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3.\end{aligned}\tag{12}$$

Обобщив представленное преобразование, запишем выражения для направляющих косинусов из формулы (11)

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial x'_p}{\partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, 3).\tag{13}$$

Тогда из (12) получим соотношения для преобразования компонент вектора.

$$a'_p = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x'_p}{\partial x_k} a_k \quad (i = 1, 2, 3).\tag{14}$$

Обобщим эти формулы на произвольную замену координат (7) в пространстве R^n и введем новое определение вектора.

Определение 24. Если для каждой системы координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ определена совокупность функций $A^1, A^2, \dots, A^n$, так что для другой системы координат $x^1_0, x^2_0, \dots, x^n_0$ имеем совокупность функций $A^1_0, A^2_0, \dots, A^n_0$, и если при преобразовании координат (7), (9) эти функции преобразуются по формулам

$$A^i_0 = \sum_{\alpha=1}^n A^\alpha \frac{\partial x^i_0}{\partial x^\alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, n),\tag{15}$$

то совокупность величин $A^1, A^2, \dots, A^n$ определяет контравариантный вектор A^i , а величины $A^1, A^2, \dots, A^n$ есть компоненты этого вектора.

Наиболее простым примером контравариантного вектора является вектор $d\mathcal{X}^i$ в пространстве R^n . В самом деле, если имеют место соотношения (9) между координатами $x^1, x^2, \dots, x^n$ и $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \dots, \mathcal{X}^n$, то справедливы равенства

$$d\mathcal{X}^i = \frac{\partial \mathcal{X}^i}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \mathcal{X}^i}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial \mathcal{X}^i}{\partial x^n} dx^n = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \mathcal{X}^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (16)$$

Отсюда следует, что компоненты вектора $d\mathcal{X}^i$ преобразуются по тем же правилам, что и компоненты контравариантного вектора.

Оказывается, что компоненты не всех векторов преобразуются по такому закону. Мы можем в этом убедиться, рассмотрев следующий пример. Запишем вектор градиента некоторой скалярной функции в декартовой системе координат в пространстве R^n

$$\text{grad } \varphi = i_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + i_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \dots + i_n \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}.$$

При переходе к другой системе координат по формулам (9) функция φ будет зависеть от переменных $\mathcal{X}^1, \mathcal{X}^2, \dots, \mathcal{X}^n$, и тогда для ее производных справедливо равенство

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathcal{X}^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \mathcal{X}^i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \mathcal{X}^i} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \mathcal{X}^i} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \mathcal{X}^i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

Введем обозначения для компонент вектора градиента

$$A_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}, \quad \mathcal{A}_i^{0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathcal{X}^i} \quad (\alpha, i=1, 2, \dots, n).$$

Тогда равенства (17) запишутся в следующем виде:

$$A_i^0 = \sum_{\alpha=1}^n A_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x_i^0} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

Теперь можно сформулировать определение других векторов.

Определение 25. Если для каждой системы координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ определена совокупность функций $A_1, A_2, \dots, A_n$, так что для другой системы координат $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n$ имеем совокупность функций $A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0$, и если при преобразовании координат (7), (9) эти функции преобразуются по формулам (18), то совокупность величин $A_1, A_2, \dots, A_n$ определяет *ковариантный вектор* A_i , а величины $A_1^0, A_2^0, \dots, A_n^0$ есть *компоненты* этого вектора.

Как видим, контравариантный и ковариантный векторы различаются правилами преобразования их компонент. Если в первом случае компоненты умножаются на производные новых координат по старым (15), то во втором случае используются обратные производные (18). Заметим, что часто знаки суммирования в этих формулах опускаются и предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Пример ковариантного вектора был нами только что рассмотрен – это вектор градиента в пространстве R^n .

Теперь, обобщив определение контравариантного вектора, можно определить контравариантный тензор.

Определение 26. Если для каждой системы координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ определена совокупность n^2 функций $A^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$), которые при преобразовании координат (7), (9) преобразуются по формулам

$$A^{ik} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n A^{\alpha\beta} \frac{\partial x_0^i}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x_0^k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (19)$$

то эти функции определяют *контравариантный тензор второго ранга*, составляющими которого они являются.

Если сравнить формулу (19) с формулой (14) из первого параграфа настоящей главы, то нетрудно убедиться, что они идентичны, поскольку направляющие косинусы, содержащиеся в формуле (14), могут быть представлены в виде

$$\alpha_{kr} = \frac{\partial x_0^k}{\partial x^r} \quad (k, r = 1, 2, 3) .$$

Теперь дадим определение ковариантного тензора.

Определение 27. Если для каждой системы координат $x^1, x^2, \dots, x^n$ определена совокупность n^2 функций $A_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$), которые при преобразовании координат (7), (9) преобразуются по формулам

$$A_{ik}^0 = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n A_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x_0^k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) , \quad (20)$$

то эти функции определяют *ковариантный тензор второго ранга*, составляющими которого они являются.

Подобным образом определяется *смешанный тензор второго ранга*. Его составляющие A_α^β преобразуются по формулам

$$A_i^k = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n A_\alpha^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial x_0^i} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^\beta} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) . \quad (21)$$

Аналогично определяются тензоры более высоких рангов. Например, составляющие тензора третьего ранга $A_{\alpha\beta}^\gamma$, два раза ковариантного и один раз контравариантного, преобразуются по формулам

$$A_{ik}^l = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^n A_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^\alpha}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x_0^k} \frac{\partial x_0^l}{\partial x^\gamma} \quad (i, k, l = 1, 2, \dots, n) . \quad (22)$$

Теперь на примере трехмерного пространства продемонстрируем, в чем заключается различие между контравариантным и ковариантным векторами. Для этого возьмем неортогональную систему координат x^1, x^2, x^3 и в точке M три единичных вектора $\overset{1}{e}_1, \overset{1}{e}_2, \overset{1}{e}_3$, направленных по касательным к координатным линиям. Тогда вектор $\overset{1}{a}$ может быть представлен в следующем виде:

$$\overset{1}{a} = A_{s_1} \overset{1}{e}_1 + A_{s_2} \overset{1}{e}_2 + A_{s_3} \overset{1}{e}_3 , \quad (23)$$

где A_{s_i} – косоугольные составляющие вектора $\overset{1}{a}$, которые могут быть выражены через его контравариантные компоненты A^i .

$$A_{s_i} = \sqrt{g_{ii}} A^i \quad (i=1, 2, 3). \quad (24)$$

Здесь по повторяющемуся индексу i суммирование не производится. Ковариантные метрические коэффициенты g_{ik} вычисляются по формулам

$$g_{ik} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial x^\alpha}{\partial x_0^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x_0^k} \quad (i, k=1, 2, 3).$$

Пусть теперь в той же системе координат введены в точке M три единичных вектора $\overset{1}{e}_1, \overset{1}{e}_2, \overset{1}{e}_3$, направленных по нормальям к координатным поверхностям. Тогда тот же вектор $\overset{1}{a}$ может быть представлен в следующем виде:

$$\overset{1}{a} = A_{n_1} \overset{1}{e}_1 + A_{n_2} \overset{1}{e}_2 + A_{n_3} \overset{1}{e}_3. \quad (25)$$

Эти косоугольные составляющие вектора $\overset{1}{a}$ выражаются через его ковариантные компоненты A_i

$$A_{n_i} = \sqrt{g^{ii}} A_i \quad (i=1, 2, 3), \quad (26)$$

где по повторяющемуся индексу i суммирование также не производится. Контравариантные метрические коэффициенты g^{ik} вычисляются по формулам

$$g^{ik} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial x_0^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x_0^k}{\partial x^\alpha} \quad (i, k=1, 2, 3).$$

Если же система координат x^1, x^2, x^3 ортогональна, то тройки единичных векторов совпадают, следовательно, совпадают и косоугольные составляющие $A_{s_i} = A_{n_i}$ ($i=1, 2, 3$). Вот почему в любой ортогональной системе координат вводится понятие просто вектора.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 1971. – 272 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
3. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 426 с.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1968. – 720 с.

Виталий Николаевич Ветлущий

**СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

Учебное пособие

Редактор *Т.П. Петроченко*
Технический редактор *Г.Е. Телятникова*
Компьютерная верстка *И.П. Брованова*

Подписано в печать 17.06.2005. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.
Уч.-изд. л. 7,43. Печ. л. 8,25. Изд. № 66. Заказ № Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20