УДК 53
К93

Р е ц е н з е н т
д-р физ.-мат. наук, проф. *Е.К. Наими*

Авторы: Ю.Х. Векилов, Ю.М. Кузьмин, С.И. Мухин, Я.М. Муковский

К93 **Курс теоретической физики в задачах и упражнениях/** Ю.Х. Векилов, Ю.М. Кузьмин, С.И. Мухин, Я.М. Муковский; Под ред. Ю.Х. Векилова. – М.: МИСиС, 2007. – 341 с.

Учебное пособие содержит задачи с решениями по следующим разделам курса теоретической физики: механика, теория упругости, электродинамика, квантовая механика и статистическая физика. Задачи по каждому из разделов предваряет краткое теоретическое введение, а также приводятся примеры решения задач данного типа. В конце пособия дано краткое математическое приложение.

Содержание пособия соответствует программам данных разделов курса.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальностям «Физика металлов» и «Физика полупроводников», а также может быть использовано преподавателями при составлении домашних заданий по этим дисциплинам.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

Траектории частиц механической системы описываются набором обобщенных координат $z_1(t),...,z_N(t)$. Лагранжиан механической системы $L(z_i(t), \dot{z}_i(t),t)$ зависит от координат $z_1(t),..., z_N(t)$ и связанных с ними скоростей $\dot{z}_1(t)$,..., $\dot{z}_N(t)$ и определяет динамику системы. Точки над символами, как всегда, обозначают производную по времени d/dt. Лагранжиан $L(z_i(t), \dot{z}_i(t),t)$ является функцией от скоростей $\dot{z}_i(t)$ не выше второй степени. Интеграл по времени от лагранжиана вдоль произвольной траектории системы, определяемой некоторой совокупностью функций координат частиц $z_1(t),..., z_N(t)$, задает функционал $S[z_i]$, называемый *действием*, на данной траектории системы между моментами времени t_a и t_b:

$$S[z_i] = \int_{t_a}^{t_b} L\left(z_i(t), \dot{z}_i(t), t\right) \mathrm{d}t. \qquad (1.1)$$

Согласно *принципу наименьшего действия Гамильтона* механическая система реально движется по траектории $z_1(t),..., z_N(t)$, на которой действие $S[z_i]$ минимально. Непосредственная (прямая) минимизация действия производится на определенном классе пробных траекторий, согласно способу, описанному в задаче 1.1. Непрямая минимизация действия производится методом Эйлера, который приводит в данном случае к дифференциальным уравнениям Лагранжа, как описано в 1.2.

Задача 1.1. Частица в поле $U(z) = -Fz$ за время τ перемещается из точки $z = 0$ в точку $z = a$. Найти закон движения частицы, предполагая, что он имеет вид $z(t) = At^2 + Bt + C$, и подбирая коэффициенты A, B и C так, чтобы действие имело наименьшее значение.

Решение. Полагая $z = 0$ при $t = 0$, находим $C = 0$ и из условия $z = a$ при $t = \tau$ находим $B = a/\tau - A\tau$. Используя функцию $z(t) = At^2 + (a/\tau - A\tau)t$, вычисляем действие

$$S = \int_0^{\tau} L(z, \dot{z})\mathrm{d}t = \int_0^{\tau} [\frac{m\dot{z}^2}{2} - U(z)]\mathrm{d}t = mA^2\tau^3/6 + ma^2/(2\tau) - FA\tau^3/6 + Fa\tau/2. \qquad (1.2)$$

Из условия $\delta S/\delta A = 0$, определяющего минимум действия, находим $A = F/(2m)$. Очевидно, закон движения:

$$z(t) = Ft^2/(2m) + [a/\tau - F\tau/(2m)]t \qquad (1.3)$$

в данном случае является точным. Однако приведенное решение задачи позволяет утверждать лишь то, что при найденном законе движения действие принимает наименьшее значение среди значений, принимаемых при движении по любому другому закону из законов предложенного вида.

1.1. Уравнения движения

1.1.1. Уравнение Лагранжа. Принцип относительности Галилея. Интегралы движения

Действие $S[z_i]$ экстремально на траектории реального движения $z_i(t)$ в сравнении со всеми другими траекториями, близкими к данной: $z_i'(t) = z_i(t) + \delta z_i(t)$, которые имеют такие же концевые точки: $z'_i(t_a) = z_i(t_a)$ и $z'_i(t_b) = z_i(t_b)$. Это свойство действия выражается равенством нулю вариации действия $\delta_1 S[z_i]$ в линейном приближении по вариации траектории $\delta z_i(t)$:

$$\delta_1 S[z_i] = \{S[z_i + \delta z_i] - S[z_i]\}|_{\text{лин}} = 0 \qquad (1.4)$$

с граничным условием

$$\delta z_i(t_a) = 0,\ \delta z_i(t_b) = 0. \qquad (1.5)$$

Траектория $z_i(t)$, зануляющая первую вариацию действия, удовлетворяет уравнению Лагранжа, являющемуся, по сути, уравнением Эйлера для экстремума функционала $S[z_i]$:

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\partial L/\partial \dot{z}_i) = \partial L/\partial z_i;\ i = 1,...,N. \qquad (1.6)$$

Количество уравнений Лагранжа определяется количеством обобщенных координат, описывающих движение механической системы $z_1,..., z_N$. Система отсчета, по отношению к которой время является однородным, а пространство – однородным и изотропным, называется *инерциальной*. Если какая-либо система отсчета движется прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы, то она также инерциальна. Во всех инерциальных системах одинаковы свойства пространства и времени, а также одинаковы и законы механики. Это утверждение называется *принципом относительности Галилея*.

Координаты $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ одной и той же точки, а также время t и t' в двух различных системах отсчета K и K' связаны *преобразованием Галилея*:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v}\,t; \tag{1.7}$$

$$t' = t, \tag{1.8}$$

где $\mathbf{v}$ – это скорость движения системы K' относительно системы K.

Лагранжиан замкнутой системы материальных точек, т.е. системы, на которую не действуют никакие внешние тела, имеет общий вид

$$L = \sum_a \; [m_a \mathrm{v}_a^2/2] - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots), \tag{1.9}$$

где $\mathbf{r}_a$ – радиус-вектор a-й точки, а $\mathbf{v}_a$ – ее скорость.

Первый член в (1.9) называют кинетической энергией, а функцию U – потенциальной энергией системы материальных точек. Декартовы координаты могут быть менее удобными для описания системы со связями, т.е. с дополнительными условиями, налагающими определенные ограничения на совместное изменение различных декартовых координат. Для учета связей вводят обобщенные координаты. Их количество $N_{\text{об}} = N - N_{\text{св}}$, где N – количество декартовых координат, $N_{\text{св}}$ – количество налагаемых ограничений (связей). Если движение описывается не декартовыми координатами точек, а некоторыми обобщенными координатами z_i, то для получения лагранжиана проводят соответствующее преобразование:

$$x_a = f_a(z_1, \ldots, z_{N\text{об}}),\ \mathrm{d}x_a/\mathrm{d}t = \sum_k \; (\partial f_a/\partial z_k)\, \dot{z}_k. \tag{1.10}$$

Подстановка выражений (1.10) в общее выражение для лагранжиана (1.9) приводит к лагранжиану, выраженному через обобщенные координаты и скорости:

$$L = \sum_{i,k} \; [a_{ik}(z)\, \dot{z}_i \dot{z}_k] - U(z_1, \ldots, z_{N\text{об}}), \tag{1.11}$$

где a_{ik} – функции только от координат*.

Лагранжиан двух невзаимодействующих систем частиц A и B равен сумме лагранжианов каждой из систем: $L_{AB} = L_A + L_B$. Потенциальная энергия механической системы во внешнем поле, вообще говоря, явно зависит от времени: $U(z_1, \ldots, z_N, t)$. Сила, действующая на a-ю частицу,

---

* $a_{ik} = m_{ik}/2$, тензор m_{ik} иногда называют тензором обобщенных масс.

$$\mathbf{F}_a = -\,\partial U/\,\partial \mathbf{r}_a. \qquad (1.12)$$

Функции координат и скоростей частиц системы, которые сохраняют постоянные значения при движении частиц, зависящие лишь от начальных условий, называются *интегралами (инвариантами) движения*. При движении замкнутой механической системы с N степенями свободы число независимых интегралов движения равно $2N - 1$. Это следует из того, что общее решение N уравнений второго порядка (1.6), т.е. уравнений Лагранжа, содержит $2N$ произвольных постоянных. Поскольку система замкнута, вид решения не зависит от выбора начала отсчета времени t_0. Следовательно, константа t_0 входит в решения аддитивно со временем t: $t + t_0$. Исключая $t + t_0$ из $2N$ функций координат z_i и скоростей $\dot{z}_i$ ($i = 1,..., N$), выражаем оставшиеся $2N - 1$ постоянные C_i ($i = 1,..., 2N - 1$) в виде функций от координат и скоростей: z_i и $\dot{z}_i$ ($i = 1,..., N$). Полученные таким образом $2N - 1$ функций и являются интегралами движения замкнутой системы с N степенями свободы.

Аддитивными интегралами движения механической системы называются сохраняющиеся величины, значения которых для всей системы равны сумме значений для каждой из невзаимодействующих ее частей в отдельности. Существуют следующие аддитивные интегралы движения: энергия E, импульс $\mathbf{p}$, и момент импульса $\mathbf{M}$ системы:

$$E = \sum_i \; [\,\dot{z}_i(\partial L/\partial \dot{z}_i)\,] - L = \sum_a \; [m_a v_a^2/2] + U(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...); \qquad (1.13)$$

$$\mathbf{p} = \sum_a \; [\partial L/\partial \mathbf{v}_a\,] = \sum_a \; [m_a \mathbf{v}_a]; \qquad (1.14)$$

$$\mathbf{M} = \sum_a \; [\,\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a\,], \qquad (1.15)$$

где $\mathbf{p}_a = \partial L/\partial \mathbf{v}_a$ – импульс a-й частицы.

Сохранение энергии E связано с однородностью времени, в силу чего лагранжиан замкнутой системы или системы в постоянном внешнем поле не зависит явно от времени: $\partial L/\partial t = 0$. Сохранение импульса $\mathbf{p}$ связано с однородностью пространства, в силу чего вариация лагранжиана при любом параллельном переносе $\boldsymbol{\varepsilon}$ замкнутой системы как целого в пространстве равна нулю: $\boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{L} = 0$. Сохранение момента импульса $\mathbf{M}$ связано с изотропией пространства, в силу чего

вариация лагранжиана при повороте на любой угол φ замкнутой системы в пространстве как целого равна нулю: $\delta_\varphi L = 0$.

В общем случае обобщенную координату z_i, не входящую явным образом в лагранжиан, называют *циклической*. Из уравнения Лагранжа (1.6) следует сохранение соответствующего обобщенного импульса p_i:

$$d/dt[\partial L/\partial \dot{z}_i] = \partial L/\partial z_i = 0; \rightarrow p_i \equiv \partial L/\partial \dot{z}_i = \text{const}. \qquad (1.16)$$

Задача 1.2. Найти интегралы движения, если вид действия не меняется при: а) пространственном сдвиге; б) повороте; в) сдвиге начала отсчета времени; г) винтовом сдвиге вдоль оси z.

Ответ: а) импульс; б) момент импульса; в) энергия; г) $M_z + hp_z/(2\pi) = \text{const}$ (h – шаг винта).

Задача 1.3. Найти интегралы движения для частицы, движущейся:

1) в однородном поле $U(\mathbf{r}) = -\mathbf{Fr}$;

2) в поле $U(\mathbf{r})$, где $U(\mathbf{r})$ – однородная функция: $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$. (Уточнить, при каком n преобразование подобия не меняет вид действия.);

3) в поле бегущей волны $U(\mathbf{r},t) = U(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$, где $\mathbf{v}$ – постоянный вектор;

4) в магнитном поле, заданном векторным потенциалом $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, где $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – однородная функция;

5) в электромагнитном поле, вращающемся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси z.

Решение. 1. Потенциальная энергия $U(\mathbf{r}) = -\mathbf{Fr}$, а с ней вместе и действие, не изменяются при сдвигах в направлении, перпендикулярном $\mathbf{F}$, и при поворотах относительно оси, параллельной $\mathbf{F}$. Поэтому интегралами движения являются компоненты импульса, перпендикулярные $\mathbf{F}$, и компонента момента импульса, параллельная $\mathbf{F}$. Так как функция Лагранжа не зависит от времени, интегралом движения является энергия. Утверждение, что различные точки в некоторой области «равноправны», означает, что во всех этих точках равны значения потенциальной энергии (а не силы!). Пространство, в котором имеется однородное поле, отнюдь не однородно.

2. Преобразование подобия не меняет вида действия при $n = 2$. В этом случае $\mathbf{pr} - 2Et = \text{const}$. Например, для центрального поля $U = \alpha/r^2$ этот интеграл, переписанный в виде $m\dot{r}r - 2Et = \text{const}$, с учетом со-

отношения $\dot{r} = \sqrt{(2/m)\left[E - \alpha/t^2 - M^2/\left(2mr^2\right)\right]}$ определяет зависимость $r(t)$, где M – момент импульса относительно центра поля (проекция).

3. $E - \mathbf{Vp} = \text{const}$.

4. $\mathbf{pr} - 2Et = \text{const}$, где $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + (e/c)\mathbf{A}$, если $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \alpha^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

5. $E - p_\varphi\Omega = \text{const}$.

Задача 1.4. Найти интегралы движения для частицы в однородном магнитном поле **H**, если векторный потенциал **A** задан в виде:

1. $\mathbf{A} = (1/2)[\,\mathbf{Hr}\,]$;

2. $A_x = A_z = 0$, $A_y = xH$, или $\mathbf{A} = (0, xH, 0)$.

Решение. 1. Пусть ось z параллельна полю **H**. Сдвиг вдоль оси z и поворот вокруг нее не изменяют вида **A**, а следовательно, и вида действия. Поэтому интегралами движения являются

$p_z = \partial L/\partial \dot{z} = m\dot{z}$ и $M_z = xp_y - yp_x = m(x\dot{y} - y\dot{x}) + [(eH)/(2c)](x^2 + y^2)$.

Кроме того, интегралом движения является энергия $E = (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$.

2. $E = (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, $p'_y = m\dot{y} + (e/c)Hx$, $p'_z = m\dot{z}$.

Соображения симметрии позволяют определить различные интегралы движения в зависимости от выбора векторного потенциала данного поля H. Но все величины: E, $p_z = p'_z$, M_z, p'_y – являются интегралами движения независимо от выбора **A**.

1.1.2. Интегрирование уравнений движения Лагранжа

1.1.2.1. Движение частицы в одномерном потенциальном поле

Одномерным называют движение механической системы с одной степенью свободы, которую назовем x. Если потенциальная энергия $U(x)$ не зависит от времени явно, то уравнения Лагранжа интегрируются в общем виде:

$$t = \sqrt{(m/2)} \int \mathrm{d}x/\sqrt{\left[E - U(x)\right]} + \text{const}, \qquad (1.17)$$

где две произвольные постоянные в решении (1.17) имеют смысл полной энергии E и начала отсчета времени $t_0 = \text{const}$.

В силу положительности кинетической энергии движение происходит только в тех областях пространства, где $U(x) < E$. Точки x_a, огра-

ничивающие области движения, находятся из уравнения $U(x_a) = E$ и называются *точками остановки (поворота)*. Если область движения ограничена двумя такими точками, то движение называется *финитным*. Если же область движения не ограничена хотя бы с одной стороны, то такое движение называется *инфинитным*. Период колебаний T между двумя точками поворота x_a и x_b определяется по формуле

$$\mathrm{T(E)} = \sqrt{(2m)} \int_{x_b}^{x_a} \mathrm{d}x / \sqrt{E - U(x)}\,, \qquad (1.18)$$

где пределы являются корнями уравнения $U(x_{a,b}) = E$ при данном значении E.

Задача 1.5. Определить закон движения частицы в поле $U(x)$:

а) $U(x) = A[\exp(-2\alpha x) - 2\exp(-\alpha x)]$ – потенциал Морса (рис. 1.1);

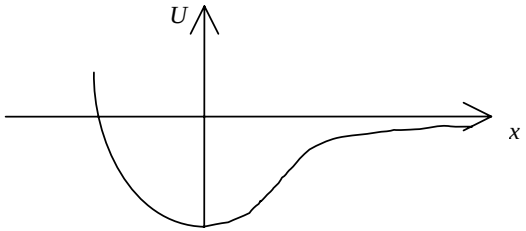

Рис. 1.1

б) $U(x) = -U_0/[\mathrm{ch}^2(\alpha x)]$ (рис. 1.2);

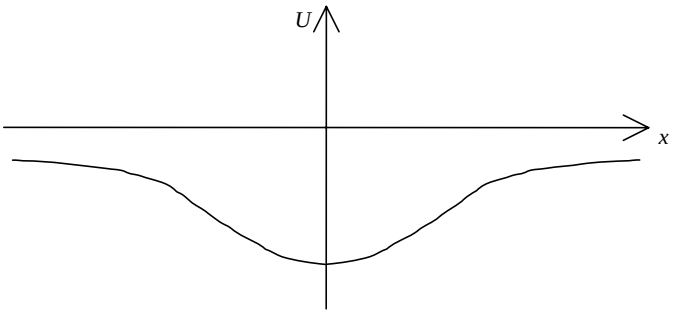

Рис. 1.2

в) $U(x) = U_0\mathrm{tg}^2(\alpha x)$ (рис. 1.3).

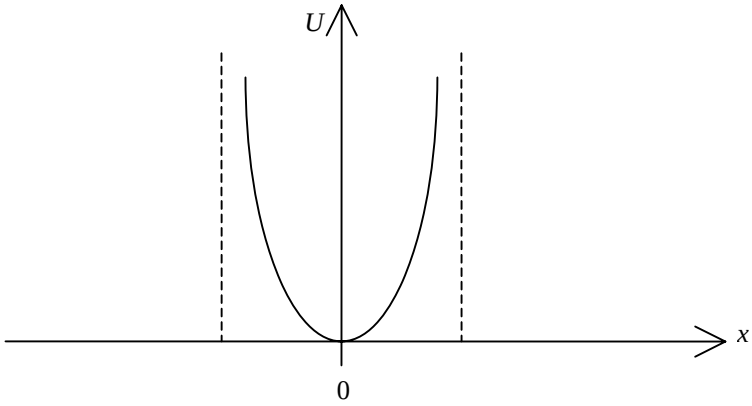

Рис. 1.3

Ответы:

а) $x(t) = (1/\alpha)\,\mathrm{Arch}\left\{\left[\left(|E| + U_0\right)/|E|\right]\sin\left[\alpha t\sqrt{\left(2|E|/m\right) + C}\right]\right\}$ при $E < 0$;

б) $x(t) = \pm(1/\alpha)\,\mathrm{Arsh}\left\{\left[\left(E + U_0\right)/E\right]\mathrm{sh}\left[\alpha t\sqrt{\left(2E/m\right) + C}\right]\right\}$ при $E > 0$;

в) $x(t) = \pm(1/\alpha)\,\mathrm{Arsh}\left[\alpha t\sqrt{\left(2U_0/m\right) + C}\right]$ при $E = 0$, $\{\mathrm{Arsh}(x) = \ln[x + (x^2 + 1)]\}$.

Задача 1.6. Найти закон движения частицы в поле $U(x) = -Ax^4$, если энергия ее равна нулю.

Ответ. $x(t) = -\sqrt{\dfrac{m}{2A}}\,t^{-1}$.

Задача 1.7. Найти изменение закона движения частицы, вызванное добавлением к полю $U(x)$ малой добавки $\delta U(x)$:

1) $U(x) = m\omega^2x^2/2$, $\delta U(x) = m\alpha x^3/3$;

2) $U(x) = \begin{cases} \alpha/x^2 & \text{при} \quad x < \alpha; \\ \infty & \text{при} \quad x > \alpha; \end{cases}$ $\delta U(x) = Fx$.

Решение. 1. Невозмущенное движение $x_0(t) = a\sin(\omega t)$; $E = ma^2\omega^2$. (1.19)

Поправка $\delta t(x) = (\alpha/3\omega^3)\left[\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)} + a^2/\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)} - 2a\right]$. (1.20)

Подставляя (1.19) и (1.20) в формулу

$$x = x_0(t) - x'_0(t)\,\delta t(x_0(t)),$$

получаем

$$x(t) = a\sin(\omega t) - \alpha a^3/(3\omega^2)\cos(\omega t)[\cos(\omega t) + 1/\cos(\omega t) - 2].$$

С точностью до членов первого порядка малости по $\alpha a^2/\omega^2$ включительно

$$x(t) = a\sin(\omega t + \varphi) + \alpha a^3/(2\omega^2) - [\alpha a^3/(6\omega^2)]\cos[2(\omega t + \varphi)],$$

где $\varphi = -2\alpha a^2/(3\omega^2)$.

Задача 1.8. Найти изменение периода движения частицы, вызванное добавлением к полю $U(x)$ малой добавки $\delta U(x)$:

1) $U(x) = m\omega^2x^2/2$ (гармонический осциллятор), $\delta U(x) = m\beta x^4/4$;

2) $U(x) = m\omega^2x^2/2$, $\delta U(x) = m\alpha x^3/3$;

3) $U(x) = A[\exp(-2\alpha x) - 2\exp(-\alpha x)]$, $\delta U(x) = -V\exp(\alpha x)$, $V << A$.

Решение. 1. Ответ: $T = 3\pi\beta E/(2m\omega^5)$.

2. Графики потенциальной энергии $U(x)$ и $U(x) + \delta U(x)$ изображены на рис. 1.4.

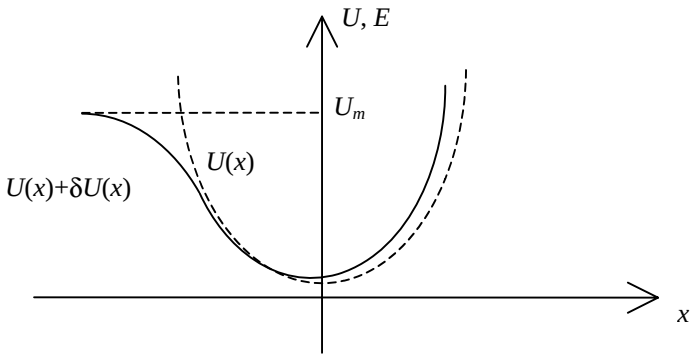

Рис. 1.4

Видно, что при $E > U_m = m\omega^6/6\alpha$ добавка делает движение инфинитным. При значениях E, близких к U_m, период колебаний неограниченно возрастает (как $|\ln(U_m - E)|$); поэтому нельзя рассчитывать, что в этом случае он определяется небольшим числом членов ряда

$$T = \sqrt{m/2}\sum_{n=0}^{\infty}\ [(-1)^n/n!\ ](\partial^n/\partial E^n)\int_{x_1}^{x_2}\ [\delta U(x)]^n \mathrm{d}x/\sqrt{\left[E-U\left(x\right)\right]}\ .$$

Если же $E << U_m$, то поправка к периоду $\delta T = 5\pi E/(18\omega U_m)$.

3. Ответ: $\delta T = \dfrac{3\pi AV\sqrt{m}}{2\alpha\sqrt[5]{E}\sqrt{2}}$; $E >> \sqrt{8AV}$.

1.1.2.2. Движение частицы в центральном поле. Задача Кеплера

Потенциальная энергия частицы в центральном поле $U(r)$ зависит только от расстояния $|\mathbf{r}| \equiv r$ до неподвижного центра поля. Сохраняется момент импульса частицы **M** относительно центра поля:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r},\mathbf{p}] = \text{const}. \qquad (1.21)$$

Вследствие (1.21) движение происходит в одной плоскости, в которой вводятся полярные координаты r и φ. Лагранжиан принимает вид

$$L = (m/2)(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t)^2 + r^2(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)^2 - U(r). \qquad (1.22)$$

Очевидно, координата φ является циклической. Соответствующий ей сохраняющийся обобщенный импульс

$$p_i = (\partial L/\partial \dot{z}_i) \equiv p_\varphi = mr^2(\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t) = \text{const} \equiv M \qquad (1.23)$$

является проекцией момента импульса **M** на ось, перпендикулярную плоскости орбиты частицы M_z. Также сохраняется полная энергия частицы E. Полное решение задачи в квадратурах о движении частицы в центральном поле, зависящее от двух интегралов движения M и E, а также от начальных условий t_0 и φ_0, имеет вид

$$t = \int \mathrm{d}r/\sqrt{\left\{(2/m)\left[E-U\left(r\right)\right]-M^2/\left(m^2r^2\right)\right\}} + t_0; \qquad (1.24)$$

$$\varphi = \int\left(M/r^2\right)\mathrm{d}r/\sqrt{\left\{(2/m)\left[E-U\left(r\right)\right]-M^2/r^2\right\}} + \varphi_0. \qquad (1.25)$$

Частный случай задачи о движении в центральном поле вида $U(r) = -\alpha/r$, соответствующем полю тяготения или кулоновскому полю, называется *задачей Кеплера*. В задаче Кеплера интегралы в

общих формулах (1.24) и (1.25) имеют первообразные в виде элементарных функций. Орбиту частицы можно записать в виде

$$p/r = 1 + e\cos(\varphi). \qquad (1.26)$$

Это уравнение определяет линию конического сечения с фокусом в начале координат; p и e называются соответственно *параметром* и *эксцентриситетом* орбиты:

$$p = M^2/(m\alpha);\ e = \sqrt{1 + 2EM^2/m\alpha^2}, \qquad (1.27)$$

причем сделанный выбор начала отсчета угла $\varphi = 0$ соответствует ближайшей к центру точке орбиты (*перигелий*). Из (1.26) следует, что при $E < 0$ движение финитно, эксцентриситет $e < 1$ и (1.26) описывает эллипс. В случае $E \geq 0$ движение инфинитно. При этом в случае $E > 0$ эксцентриситет $e > 1$ и (1.26) описывает гиперболу. В случае $E = 0$ $e = 1$ и (1.26) описывает параболу.

Задача 1.9. Найти траектории и законы движения частицы в поле

$$U = \begin{cases} -V & \text{при} \quad r < R, \\ 0 & \text{при} \quad r > R. \end{cases}$$

На рис. 1.5 показана сферическая прямоугольная потенциальная яма при различных значениях момента и энергии.

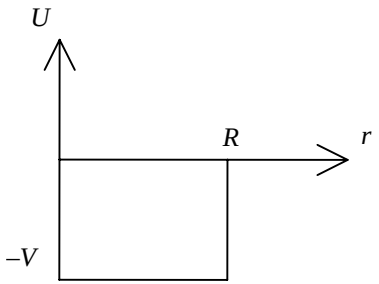

Рис. 1.5

Решение. Скорость частицы $\dot{r} = \sqrt{\left[\frac{2}{M}(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right]}$. Вне сферы радиусом R частица движется со скоростью $\sqrt{2E/m}$, а

внутри – со скоростью $\sqrt{\left[2\left(E+V\right)/m\right]}$. В зависимости от соотношения E и M получаются различные виды траекторий. При $[M^2/(2mR^2) - V] < E < M^2/(2mR^2)$ частица либо движется внутри сферы, испытывая отражения на границе (рис. 1.6,*а*), либо (если, кроме того, $E > 0$) может двигаться и вне сферы (траектория прямая, рис.1.6,*б*). При $M^2/(2mR^2) < E$ имеет место преломление траектории (см. рис.1.6,*б*).

Как выглядит траектория при $E = M^2/(2mR^2) - V$?

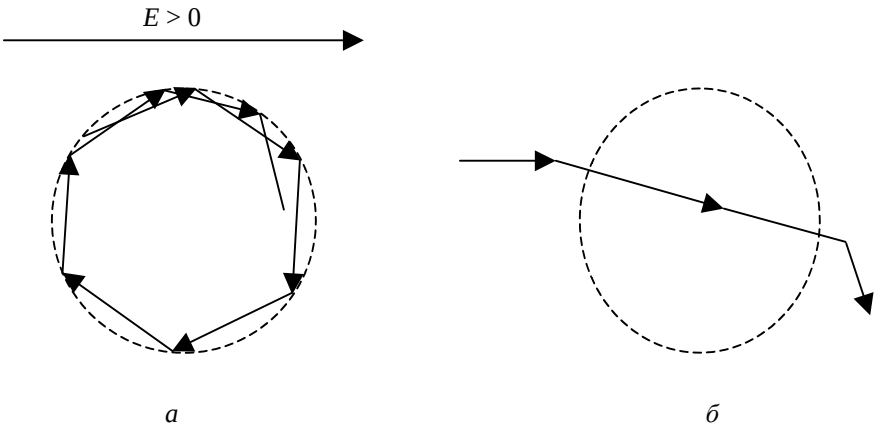

Рис. 1.6

Задача 1.10. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = \dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\beta}{r^2}$. Выразить изменение направления ее скорости при рассеянии через энергию и момент.

Решение. Для определения траектории движения используем следующие формулы:

$$\varphi = \int M\,\mathrm{d}r \Big/ \left\{ r^2 \sqrt{[2m(E - U_{\text{эф}})]} \right\}; \quad U_{\text{эф}} = U(r) + M^2/(2mr^2).$$

Интеграл, записанный в виде

$$\left(\tilde{M}/M\right)\varphi = \int \tilde{M}\mathrm{d}r \Big/ \left\{ r^2 \sqrt{2m\left[E - \tilde{M}^2/\left(2Mr^2\right) - \frac{\alpha}{r}\right]} \right\},$$

где $\tilde{M}^2 = M^2 + 2M\beta$, сводится к соответствующему интегралу в задаче Кеплера.

В результате вычисления получаем

$$r = p/[e \cos \gamma(\varphi - \psi) - 1],$$

где

$$p = (2/\alpha)[\beta + M^2/(2m)];\ e = \sqrt{\left[1 + \left(4E/\alpha^2\right)\left(\beta + M^2/(2m)\right)\right]};$$

$$\gamma = \sqrt{\left[1 + 2m\beta/M^2\right]},\ E > 0,\ \psi \text{ – произвольная постоянная.}$$

Траектория представляют собой кривую, получаемую из гиперболы уменьшением полярных углов в γ раз (рис.1.7). Постоянная ψ определяет ориентацию траектории. Направление асимптот определяется условием $r \to \infty$, при этом $e \cdot \cos(\varphi_{1,2} - \varphi) = 1$. Скорость отклоняется на угол

$$\pi - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pi - (2/\gamma)\arccos(1/e) =$$
$$= \pi - (2/\gamma)\ \mathrm{arctg}\sqrt{\left[\left(4E/\alpha^2\right)\left(\beta + M^2/2m\right)\right]}\ [(4E/\alpha^2)(\beta + M^2/2m)].$$

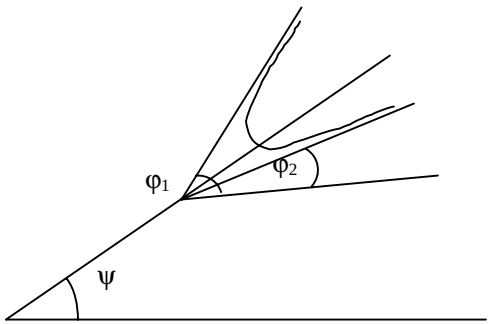

Рис. 1.7

Задача 1.11. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\beta}{r^2}$.

Найти угловое расстояние $\Delta\varphi$ между двумя последовательными прохождениями перигелия (точки $r = r_{\min}$), период радиальных колебаний T_r и период обращения T_φ. При каком условии траектория окажется замкнутой?

Решение. Уравнение траектории

$$r = p/[1 + e\cos\gamma(\varphi - \psi)],$$

где p, e, γ определены в задаче 1.10. При $E < 0$ движение финитное. Период тот же, что и в поле $U_0 = -\alpha/r$. Для определения T_r достаточно заметить, что добавление к полю U_0 добавки β/r^2 сказывается на радиальном движении так же, как увеличение M. Период же T_r в кулоновском поле U_0 от M не зависит.

$$T_r = \pi\alpha\sqrt{m/\sqrt{\left(2|E|\right)^3}}\ ,\ \Delta\varphi = 2\pi/\gamma,\ T_\varphi = \gamma T_r.$$

Траектория замкнутая, если γ – рациональное число. На рис. 1.8 изображена траектория для $\gamma \approx 5$.

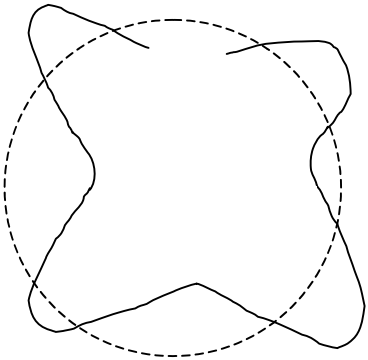

Рис. 1.8

Задача 1.12. Определить траекторию частицы в поле $U(r) = -\alpha/r - \beta/r$.

Решение. При $\beta < M^2/2m$ $\quad r = \tilde{p}\ /\{1 - \tilde{e}\cos[\tilde{\gamma}(\varphi - \psi)]\}$,

$$\tilde{p} = (2/\alpha)[M^2/2m - \beta],\ \tilde{\gamma} = \sqrt{1 - 2m\beta/M^2}\ ,$$

$$\tilde{e} = \sqrt{\left[1 + 4E/\alpha^2\left(M^2/2m - \beta\right)\right]}\ ;$$

если $E < 0$, то $\Delta\varphi = 2\pi/\gamma$, $T_\varphi = \tilde{\gamma}T_r$, T_r – то же, что в задаче 1.7. При $\beta > M^2/(2m)$ $r = p'/\{e\,\mathrm{sh}[\gamma'(\varphi - \psi)] + 1\}$, если $E > 0$, и

$r = p'/\{e\,\mathrm{ch}[\gamma'(\varphi - \psi)] + 1\}$, если $E < 0$.

Задача 1.13. При каких значениях момента импульса M возможно финитное движение частицы в поле $U(r) = -V\exp(-\chi^2 r^2)$?

Ответ. Финитное движение возможно при $M^2 < 8mV/(e^2\chi^2)$.

1.1.2.3. Рассеяние частиц. Формула Резерфорда

Упругим называется рассеяние частиц, которое не сопровождается изменением их внутреннего состояния. В этом случае в законе сохранения энергии при рассеянии внутреннюю энергию можно не учитывать. В системе центра инерции двух частиц задача о рассеянии сводится к рассмотрению рассеяния одной частицы массой m в поле $U(r)$ неподвижного силового центра, расположенного в центре инерции O. Взаимодействие между частицами считаем зависящим только от взаимного расстояния между ними. Траектория частицы в центральном поле симметрична по отношению к OB, соединяющей центр O с ближайшей точкой орбиты B (рис. 1.9).

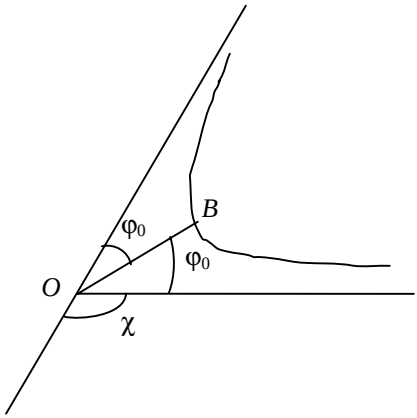

Рис. 1.9

Обозначим через φ_o угол асимптоты орбиты с прямой OB. Соответственно угол отклонения частицы в результате рассеяния в потенциале центра равен $\chi = |\pi - 2\varphi_0|$, где

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} (M/r^2)dr/\sqrt{\left\{2m\left[E - U(r)\right] - M^2 r^2\right\}}, \qquad (1.28)$$

причем минимальное расстояние до центра $r_{\min} = OB$ является корнем знаменателя подынтегрального выражения в (1.28).

При инфинитном движении вводят вместо интегралов движения M и E параметры v_∞ и ρ, являющиеся скоростью частицы на бесконечности и *прицельным расстоянием* соответственно. Последнее

равняется минимальному расстоянию до центра, на котором частица прошла бы мимо, если бы силовое поле $U(r)$ отсутствовало. С этими параметрами формула (1.28) приобретает вид

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} (\rho/r^2)\mathrm{d}r/\sqrt{\left\{1-2U\left(r\right)/\left(mv_\infty^2\right)-\rho^2/r^2\right\}}. \qquad (1.29)$$

При рассеянии пучка одинаковых частиц последние падают на рассеивающий центр с одинаковой начальной скоростью $\mathbf{v}_\infty$, но с различающимися прицельными расстояниями в интервале (ρ, $\rho + \mathrm{d}\rho$). Соответственно углы рассеяния частиц лежат в интервале (χ, $\chi + \mathrm{d}\chi$). Эффективным дифференциальным *сечением рассеяния* $\mathrm{d}\sigma$ называется отношение числа частиц $\mathrm{d}N$, рассеиваемых в единицу времени, на углы в интервале (χ, $\chi + \mathrm{d}\chi$), к числу частиц n, проходящих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка (предполагается однородность по сечению):

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}N/n. \qquad (1.30)$$

Эквивалентное выражение для сечения рассеяния имеет вид

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi\rho(\chi)\,|\mathrm{d}\rho(\chi)/\mathrm{d}\chi|\,\mathrm{d}\chi = [\rho(\chi)/\sin(\chi)]\,|\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\chi|\mathrm{d}o, \qquad (1.31)$$

где введено обозначение телесного угла между конусами с углами раствора χ и $\chi + \mathrm{d}\chi$:

$$\mathrm{d}o = 2\pi\sin(\chi)\mathrm{d}\chi.$$

Важным частным случаем является рассеяние частиц на центре с кулоновским потенциалом $U(r)= \alpha/r$. Из формулы (1.29) при этом следует

$$\varphi_0 = \arccos\{\alpha/(mv_\infty^2\rho)/\{1+ [\alpha/(mv_\infty^2\rho)]^2 \}= (\pi - \chi)/2. \qquad (1.32)$$

Находя с помощью (1.32) зависимость $\rho(\chi)$ и подставляя в общее выражение (1.31), получаем *формулу Резерфорда*:

$$\mathrm{d}\sigma = (\alpha/2mv_\infty^2)^2\mathrm{d}o/[\sin^4(\chi/2)]. \qquad (1.33)$$

Эффективное сечение (1.33) не зависит от знака α.

Задача 1.14. Найти эффективное дифференциальное сечение рассеяния частиц сферическим «потенциальным горбом»:

$$U(r)=\begin{cases} V & \text{при} \quad r<a, \\ 0 & \text{при} \quad r>a. \end{cases}$$

Решение

$$\mathrm{d}\sigma=\left\{\left(\frac{a^2n^2(n\cos(\theta/2)-1)}{4\cdot\cos(\theta/2)}\frac{(n-\cos(\theta/2))}{\left[1+n^2-2n\cos(\theta/2)\right]^2}+\frac{a^2}{4}\right)\mathrm{d}o\right.$$

при $0<\theta<\theta_m$, $\theta_m = 2\arccos n<\pi$,

где $n=\sqrt{(1-V/E)}$.

Чем вызвано отличие этого сечения от сечения рассеяния на потенциальной яме?

Задача 1.15. Найти сечение падения частиц в центр поля $U = \alpha/r - \beta/r^2$.

Решение

$$\sigma=\begin{cases} \pi\left[\beta/E-\alpha^2/(4E^2)\right] & \text{при} \quad E>\alpha^2/(2\beta), \\ 0 \quad \text{при} \quad E<\alpha^2/(2\beta). \end{cases}$$

Как изменится сечение при изменении знака α (см. задачу 1.12)?

Задача 1.16. Найти эффективное дифференциальное сечение рассеяния частиц в поле

$$U(r)=\begin{cases} \alpha|r-\alpha|/R & \text{при} \quad r<R, \\ 0 \quad \text{при} \quad r>R. \end{cases}$$

Решение. $\mathrm{d}\sigma = R^2(1+\lambda)\mathrm{d}o\ /\ \{4[1+\lambda\sin^2(\theta/2)]^2\}$, где $\lambda = 4RE\,(RE + \alpha)/\alpha^2$,

где $\lambda = -1$, $\mathrm{d}\sigma = 0$ – каналирование.

Как объяснить результат, получаемый при $(\alpha + 2RE) = 0$?

1.2. Малые колебания

1.2.1. Свободные одномерные колебания. Колебания систем со многими степенями свободы. Вынужденные колебания. Резонанс

Малые одномерные колебания механической системы вблизи положения устойчивого равновесия z_0 по обобщенной координате z описываются лагранжианом

$$L = m\dot{z}^2/2 - k(z - z_0)^2/2, \qquad (1.34)$$

где $k = U''(z_0)$ – вторая производная потенциальной энергии по координате в точке минимума, а первый член в (1.34) – кинетическая энергия системы. Систему с лагранжианом (1.34) называют *одномерным осциллятором*. Соответствующее уравнение Лагранжа после замены $u = z - z_0$ принимает вид

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0;\ \omega = \sqrt{(k/m)}\,. \qquad (1.35)$$

Общее решение уравнения (1.35) представляется линейной комбинацией гармонических функций:

$$u(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) = a \cos(\omega t + \alpha), \qquad (1.36)$$

где введены параметры – *амплитуда колебаний* a и *фаза* α согласно соотношениям

$$a = \sqrt{\left(c_1^2 + c_2^2\right)},\ \mathrm{tg}\,\alpha = -c_2/c_1.$$

Параметр ω называется *циклической частотой* гармонического колебательного движения, которое описывается соотношением (1.36). Обобщение Лагранжиана (1.34) на случай N степеней свободы, $z_1(t),\ldots, z_N(t)$, проводится введением потенциальной энергии U, имеющей минимум при $z_i = z_{i0}$. Вводим опять малые смещения относительно положения равновесия: $u_i = z_i - z_{i0}$ и представляем потенциальную энергию U, отсчитанную от ее минимального значения $U(z_{10},\ldots, z_{N0})$, в виде положительно определенной квадратичной формы:

$$U - U(z_{10},\ldots, z_{N0}) = (1/2)\sum_{i,k}\left(k_{i,k}u_i u_k\right). \qquad (1.37)$$

Вводя также кинетическую энергию по аналогии с (1.34), получаем следующий Лагранжиан системы гармонических осцилляторов:

$$L = (1/2)\sum_{i,k} [m_{i,k}(\mathrm{d}u_i/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}u_k/\mathrm{d}t) - k_{i,k}u_iu_k], \qquad (1.38)$$

где коэффициенты $m_{i,k}$ и $k_{i,k}$ симметричны по индексам i,k.

Уравнения Лагранжа представляют собой систему N однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\sum_k (m_{i,k}\ddot{u}_k + k_{i,k}u_k) = 0. \qquad (1.39)$$

Переходя к представлению Фурье по временной переменной t, ищем решения системы (1.38) в виде

$$u_k = A_k \exp(i\omega t). \qquad (1.40)$$

Подстановка (1.40) в (1.39) приводит к системе N однородных линейных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять постоянные коэффициенты A_k:

$$\sum_k (-\omega^2 m_{i,k} + k_{i,k})A_k = 0. \qquad (1.41)$$

Отличные от нуля решения A_k системы (1.41) существуют, когда ω^2 удовлетворяет *характеристическому* уравнению, т.е. условию равенства нулю детерминанта матрицы системы (1.41):

$$\det|-\omega^2 m_{i,k} + k_{i,k}| = 0. \qquad (1.42)$$

N вещественных решений ω_α ($\alpha = 1,..., N$) определяют набор собственных частот механической системы. Используя миноры $\Delta_{k\alpha}$ матрицы системы (1.41), вычисленные при заданных значениях ω_α, можно выразить исходные координаты осцилляторов u_i ($i = 1,\ldots, N$) через нормальные координаты Y_α, $\alpha = 1,..., N$ согласно формуле

$$u_i = \sum_\alpha \Delta_{i\alpha} Y_\alpha. \qquad (1.43)$$

В этих координатах уравнения Лагранжа разделяются и приобретают вид, полностью аналогичный (1.35):

$$\ddot{Y}_\alpha + \omega_\alpha^2 Y_\alpha = 0, \qquad (1.44)$$

где собственные частоты колебаний могут быть представлены в виде, аналогичном одномерному случаю (1.35): $\omega_\alpha^2 \equiv k_\alpha/m_\alpha$. Соответственно общее решение системы (1.39) приобретает вид

$$u_i = \sum_\alpha [\Delta_{i\alpha} C_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha)]. \qquad (1.45)$$

Решение (1.45) представляет собой линейную комбинацию N собственных колебаний системы с произвольными амплитудами C_α и фазами φ_α. В случае кратных корней характеристического уравнения (1.42) соответствующие миноры зануляются, и поэтому выбор коэффициентов в (1.43) для различных нормальных координат с одной и той же кратной частотой не однозначен и определяется начальными условиями.

Наличие внешней вынуждающей силы $F_k(t)$, воздействующей по оси координат u_k, отражается в добавлении к лагранжиану системы L_0 дополнительного слагаемого, входящего в выражение для потенциальной энергии системы:

$$L = L_0 + \sum_k [F_k(t) u_k]. \qquad (1.46)$$

Переходя к нормальным координатам согласно преобразованию (1.43), получаем следующие уравнения Лагранжа:

$$\ddot{Y}_\alpha + \omega_\alpha^2 Y_\alpha = f_\alpha(t), \qquad (1.47)$$

где $f_\alpha(t) \equiv \sum_k [F_k(t)\Delta_{k\alpha}/m_\alpha]$.

Общее решение уравнения (1.47) имеет вид

$$Y_\alpha(t) = \mathrm{Im}\{\exp(i\omega_\alpha t) \int_0^t f_\alpha(t')\exp(-i\,\omega_\alpha t')\mathrm{d}t' + C_\alpha)\}, \qquad (1.48)$$

где символ Im{...} означает взятие мнимой части комплексного числа, C_α – произвольная постоянная. В частном случае гармонической вынуждающей силы

$$f_\alpha(t) = f_0 \cos(\gamma t + \beta) \qquad (1.49)$$

решение также имеет вид суммы гармонических функций с собственной и внешней частотами ω_α и γ:

$$Y_\alpha(t) = C_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \varphi_\alpha) + f_0 \cos(\gamma t + \beta)/(\omega_\alpha^2 - \gamma^2). \qquad (1.50)$$

Решение (1.50) неприменимо в случае выполнения условия *резонанса*: $\omega_a = \gamma$. В последнем случае амплитуда колебаний растет линейно со временем вплоть до выхода системы из режима малых колебаний:

$$Y_\alpha(t) = C_\alpha \cos(\gamma t + \varphi_\alpha) + t f_0 \sin(\gamma t + \beta)/(2\gamma). \qquad (1.51)$$

Задача 1.17. Найти свободные колебания системы (рис. 1.10), если она находится в однородном поле тяжести и частица может двигаться только вертикально.

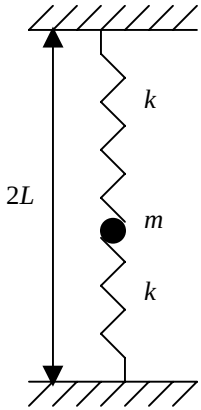

Рис. 1.10

Ответ. $\omega^2 = 2k/m$.

Задача 1.18. Найти свободные колебания системы (рис. 1.11), если частица может двигаться: 1) горизонтально; 2) вертикально.

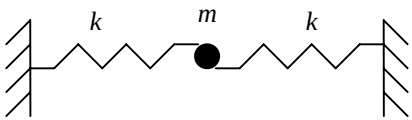

Рис. 1.11

Решение. 1. Скорость смещения из положения равновесия $\dot{x} = \dot{x}_0 \cos(\omega t) + (x_0\omega) \sin(\omega t)$, откуда

$$x(t) = \sqrt{\left(x_0^2 + \dot{x}_0^2 / \omega^2\right)} \cos(\omega t + \varphi),$$

где $\operatorname{tg} \varphi = -\dot{x}_0/(\omega x_0)$, $\omega^2 = 2k/m$.

2. Пусть натяжение одной пружины f. Для малых смещений $|y| << \sqrt{(fl/k)}$, где l – длина одной пружинки в положении равновесия, колебания гармонические $y = A \cos(\omega t + \varphi)$, $\omega^2 = 2f/(ml)$.

При $f = kl$ частота колебаний та же, что и в пункте 1. Если пружинки не натянуты ($f = 0$), колебания нелинейны, возвращающая сила $F = -\dfrac{ky^3 l}{l^2}$; частота

$$\omega = \sqrt{\pi}\sqrt{(2k/m)\, y_m / l} \ ,$$

где y_m – амплитуда колебаний. Если частица может двигаться в плоскости xy, то ее движение при $f \neq 0$ и малых смещениях представляет собой гармонические колебания вдоль осей x и y с частотами $\omega^2_x = 2k/m$ и $\omega^2_y = 2f/(ml)$ соответственно.

Задача 1.19. Найти установившиеся малые колебания плоского маятника, точка подвеса которого равномерно движется по окружности радиусом R с частотой Ω (рис. 1.12). Длина маятника l ($l >> R$).

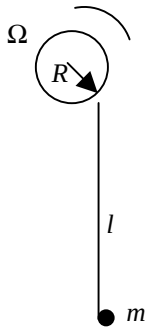

Рис. 1.12

Ответ. Угол отклонения маятника от вертикали $\varphi = [a\Omega^2/(g - l\Omega^2)] \cos(\Omega t)$, $|a\Omega^2/(g - l\Omega^2)| << 1$.

Задача 1.20. Найти частоту ω малых колебаний частицы в поле $U(x) = V\cos(\alpha x) - Fx$.

Ответ. $\omega^2 = (V\alpha^2/m)\sqrt{\left[1-\left(F/V\alpha\right)^2\right]}$; min $U(x)$ существует при $F < V\alpha$.

Задача 1.21. Точка массой m, несущая заряд q, может двигаться в поле тяжести по вертикали окружности радиусом R. В нижней части окружности закреплен заряд q. Найти положение равновесия и частоту малых колебаний точки (рис. 1.13).

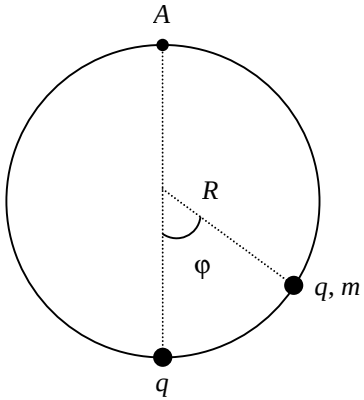

Рис. 1.13

Решение. $\omega^2 = (3g/R)\,|1 - x_0^2|$, где $x_0 = \sqrt[3]{\left[q^2/\left(8mgR^2\right)\right]}$. При $x_0 > 1$ точка A – положение устойчивого равновесия, а при $x_0 < 1$ – неустойчивого. Положение устойчивого равновесия φ_0 при $x_0 < 1$ определяется условием $\sin(\varphi_0/2) = x_0$.

Задача 1.22. Найти установившиеся колебания осциллятора под действием периодической силы $F(t) = F(t/\tau - n)$ при $n\tau < t < (n + 1)\tau$ (рис. 1.14).

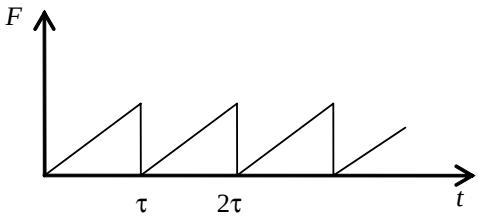

Рис. 1.14

Решение. В промежуток времени $0 \le t \le \tau$ колебания имеют вид

$$x = Ft/(m\omega^2\tau) + B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t).$$

Движение окажется установившимся, если $x(\tau) = x(0) = C$, $\dot{x}(\tau) = \dot{x}(0) = B\omega + F/(m\omega^2\tau)$. Эти условия приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} F\big/(m\omega^2) + B\sin(\omega t) + C\big[\cos(\omega t) - 1\big] = 0; \\ \qquad B\big[\cos(\omega t) - 1\big] - C\sin(\omega t) = 0, \end{cases}$$

определяющей постоянные B и C. Таким образом, при $0 \le t \le \tau$

$$x(t) = F/(m\omega^2)\{t/\tau - [\sin(\omega t - \omega\tau/2)]/[2\sin(\omega\tau/2)]\}.$$

Если же t лежит в промежутке $n\tau \le t \le (n + 1)\tau$ (где n – целое), то в правой части $x(t)$ следует заменить t на $t' = t - n\tau$ $(0 < t' < \tau)$.

При $\omega\tau$, близком к целому кратному 2π, второй член в последнем выражении оказывается очень большим – случай, близкий к резонансу. При $\omega\tau = 2\pi l$ (l – целое) установившихся колебаний быть не может (система уравнений, определяющая B и C, противоречива): представив силу в виде ряда Фурье

$$F(t) = F/2 - \sum_{l=1}^{\infty} [(F/\pi l)\sin(2\pi l/\tau)t,$$

увидим, что резонансную раскачку колебаний может вызывать каждая гармоника вынуждающей силы. При $\tau = 2\pi l/\omega$ для достаточно больших t (каких именно?)

$$x(t) \sim [-Ft/(2\pi m\omega l)]\sin(\omega t).$$

Задача 1.23. Найти установившиеся колебания осциллятора под действием периодической силы $F(t) = F[1 - \exp(-\lambda t')]$, $t' = t - n\tau$ при $n\tau < t < (n + 1)\tau$ (рис. 1.15).

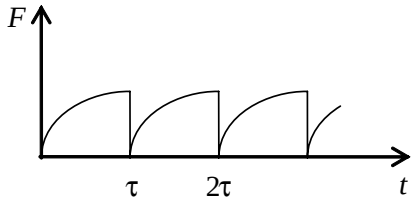

Рис. 1.15

Ответ. $A = \dfrac{4\lambda\omega^2}{m}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a|^2 n^2}{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2 n^2}.$

Задача 1.24. Найти нормальные колебания системы, изображенной на рис. 1.16, при которых частицы двигаются вертикально.

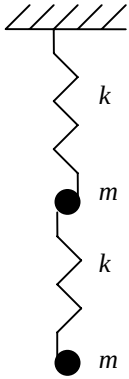

Рис. 1.16

Решение. В системе возможны два нормальных колебания, т.е. такие колебания, при которых частицы движутся с одинаковой частотой в фазе или противофазе (x_i – отклонения от положения равновесия, ср. с задачей 1.17):

1) $x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi)$, $x_2 = 2/(\sqrt{5-1})\,A\cos(\omega_1 t + \varphi)$;

2) $x_2 = B\cos(\omega_2 t + \psi)$, $x_2 = -2/(\sqrt{5-1})B\cos(\omega_2 t + \psi)$.

Здесь нормальные частоты $\omega^2_{1,2} = [(3 \pm \sqrt{5})/2](k/m)$.

Задача 1.25. Найти свободные колебания системы (рис. 1.17), если в начальный момент:

1) одна из частиц имеет скорость υ, скорость другой и отклонения обеих частиц от положения равновесия равны нулю;

2) одна из частиц отклонена от положения равновесия на расстояние a, отклонение другой и скорость равны нулю.

Частицы могут двигаться только вдоль прямой AB.

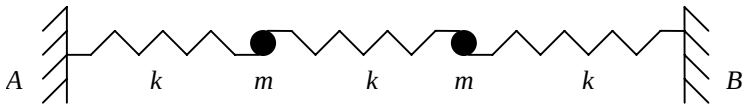

Рис. 1.17

Решение

1) $x_{1,2} = (\upsilon/2)\,[(1/\omega_1)\sin(\omega_1 t) \pm (1/\omega_2)\sin(\omega_2 t)]$; при $k_1 << k$ колебания имеют форму биений:

$x_1 = (\upsilon/\omega_1)\cos(\varepsilon t)\sin(\omega_1 t)$, $x_2 = -(\upsilon/\omega_1)\sin(\varepsilon t)\cos(\omega_1 t)$;

2) $x_{1,2} = (a/2)\,[\cos(\omega_1 t) \pm \cos(\omega_2 t)]$; при $k_1 << k$ $x_1 = a\cos(\varepsilon t)\cos(\omega_1 t)$,

$x_2 = a\sin(\varepsilon t)\sin(\omega_1 t)$. Всюду $\omega_1^2 = k/m$, $\omega_2^2 = (2k_1 + k)/m$, $\varepsilon = k_1\omega_1/(2k)$.

Задача 1.26. Найти нормальные колебания трех одинаковых частиц, связанных одинаковыми пружинками и могущих двигаться по кольцу (рис. 1.18). Определить нормальные координаты, приводящие функцию Лагранжа к сумме квадратов.

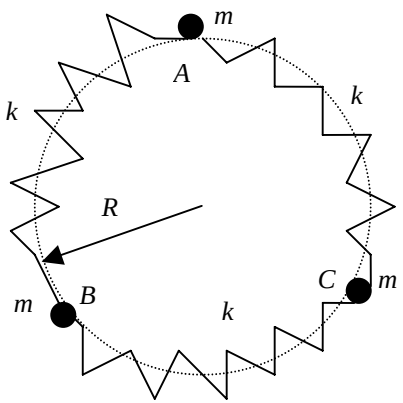

Рис. 1.18

Решение. Пусть x_i – смещение i-й частицы вдоль кольца. Функция Лагранжа системы

$L = (m/2)(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - (k/2)\,[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2]$.

Три частицы могут вращаться с постоянной угловой скоростью ω_0:

$$x_1 = x_2 = x_3 = C_1 t + C_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,q_1(t),\ \omega_1 = 0,\ C_1 = \omega_0 R,\ C_2 = 0. \qquad (1.52)$$

Колебания же частиц A и B навстречу друг другу с равной амплитудой

$$x_1 = -x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,q_2(t) = C_2\cos(\omega_2 t + C_4),\ x_3 = 0,\ \omega_2^2 = 3k/m \qquad (1.53)$$

происходят с той же частотой, что и колебания частиц B и C навстречу друг другу:

$$x_2 = -x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} q_3(t) = C_3\cos(\omega_3 t + C_6),\ x_1 = 0,\ \omega_3 = \omega_2. \qquad (1.54)$$

Введем «вектор смещения» $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Тогда колебания (1.52) – (1.54) можно представить в виде трех векторов (множители $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$ введены для того, чтобы нормировать векторы $\mathbf{r}_i$ условием $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k = \delta_{ik} q_i^2$):

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1,\ \mathbf{r}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_2,\ \mathbf{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} q_3.$$

Нормальные координаты должны диагонализовать одновременно обе квадратичные формы – для кинетической и для потенциальной энергии. Поскольку в функции Лагранжа системы L кинетическая энергия пропорциональна сумме квадратов скоростей, то преобразование от x_i к нормальным координатам, не меняющее ее вида, должно быть ортогональным, а векторы нормальных колебаний взаимно ортогональными. Векторы $\mathbf{r}_i$ независимы, но не ортогональны друг другу: $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 = 0$, но $\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \neq 0$. Чтобы получить нормальные координаты, нужно ортогонализовать векторы $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$. Заметим, что суперпозиция колебаний $\alpha\mathbf{r}_2 + \beta\mathbf{r}_3$ есть по-прежнему колебание с частотой $\omega_2 = \omega_3$. Поэтому колебания

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2,\ \mathbf{r}'_3 = \alpha\mathbf{r}_2 + \beta\mathbf{r}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} q_3,$$

где $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ найдены из условия $\mathbf{r}'_3\mathbf{r}'_2 = 0$ и условия нормировки $\mathbf{r}'_3$, являются нормальными колебаниями. Координаты q_i

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} q_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} q_2 + \dfrac{1}{\sqrt{6}} q_3; \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} q_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} q_2 + \dfrac{1}{\sqrt{6}} q_3; \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} q_1 - \dfrac{2}{\sqrt{6}} q_3 \end{cases}$$

приводят функцию Лагранжа к виду

$L = (m/2)\,(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega_2{}^2 q_2^2 + \dot{q}_3^2 - \omega_3{}^2 q_3{}^2)$.

Разумеется, любые координаты, полученные из q_2, q_3 ортогональным преобразованием, являются нормальными координатами (соответственно любые векторы, полученные из $\mathbf{r}'_2$, $\mathbf{r}'_3$ простым поворотом вокруг $\mathbf{r}_1$, являются векторами нормальных колебаний).

Задача 1.27. Найти нормальные колебания системы частиц, которые могут двигаться по кольцу (рис. 1.19).

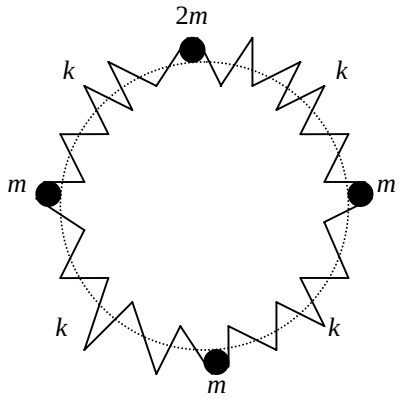

Рис. 1.19

Решение. Пусть x_i – смещение i-й частицы вдоль кольца. Два нормальных колебания легко угадываются:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1(t), \qquad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_2(t),$$

$$q_1(t) = C_1 t + C_2,\ q_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2),\ \omega_2^2 = 2k/m.$$

Два других вектора должны быть ортогональны к векторам $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, т.е. иметь вид

$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ -a - \dfrac{b}{2} \end{pmatrix} q(t)$. Подставляя $\mathbf{r}$ в уравнения движения первой и второй частиц

$$m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_4 - x_2) = 0\,;$$
$$m\ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1 - x_3) = 0\,,$$

получаем уравнения для определения величин a, b и частот

$(-m\omega^2 + 3k)a - (k/2)\,b = 0;$

$-2ka + (-m\omega^2 + 2k)\,b = 0.$

Отсюда находим $\omega^2_{3,4} = [(5 \pm \sqrt{5})/2]\,(k/m)$, $b_{3,4} = (1 \pm \sqrt{5})\,a_{3,4}$ или

$$\mathbf{r}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \pm \sqrt{5} \\ 1 \\ -\dfrac{3}{2} \mp \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} q_{3,4}(t),\ q_{3,4} = A_{3,4} \cos(\omega_{3,4} t + \varphi_{3,4}).$$

Задача 1.28. Найти установившиеся колебания системы (см. рис. 1.17), если точка A движется по закону $a \cos(\gamma t)$.

Решение

$x_1 = \{ak(k_1 + k_2 - m\gamma^2)/[m^2(\gamma^2 - \omega_1^2)(\gamma^2 - \omega_2^2)]\} \cos(\gamma t);$

$x_2 = \{ak\,k_1/[m^2(\gamma^2 - \omega_1^2)(\gamma^2 - \omega_2^2)]\} \cos(\gamma t),$

где $\omega_1^2 = k/m$, $\omega_2^2 = (k + 2k_1)/m$ (см. задачу 1.25).

Задача 1.29. Найти установившиеся колебания системы двух частиц на кольце (рис. 1.20), если точка A движется по кольцу по закону $a\cos(\gamma t)$. Исследовать зависимость амплитуд колебаний от частоты вынуждающей силы.

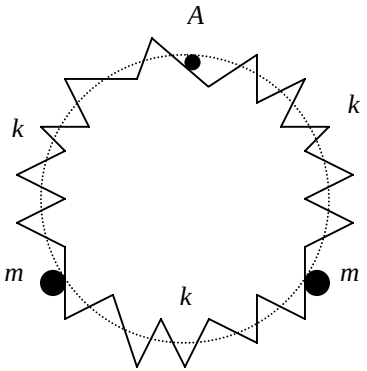

Рис. 1.20

Решение. $x_1 = x_2 = [ak]/(k - m\gamma^2)]\cos(\gamma t)$, где x_i – смещение вдоль кольца из положения равновесия i-й частицы. Резонанс возможен только на одной из нормальных частот при $\gamma^2 = k/m$.

Задача 1.30. Определить частоты нормальных колебаний системы N одинаковых частиц массой m, связанных одинаковыми пружинками жесткости k и могущих двигаться по прямой (рис. 1.21).

Указание. Удобно искать нормальные колебания в виде плоских волн.

Рис. 1.21

Решение. Функция Лагранжа системы

$$L(\dot{x}, x) = (m/2)\sum_{n=1}^{N} \dot{x}_n^2 - (k/2)\,[x_1^2 + \sum_{n=2}^{N} (x_n - x_{n-1})^2 + x_N^2], \quad (1.55)$$

где x_n – смещение n-й частицы из положения равновесия.

Введем также координату положения равновесия n-й частицы $X_n = na$, где a – равновесная длина одной пружинки. Система уравнений Лагранжа

$$\left.\begin{aligned} &m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) = 0; \\ &m\ddot{x}_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0,\ n = 2, 3, \ldots, N-1, \\ &m\ddot{x}_1 + k(2x_N - x_{N-1}) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.56)$$

эквивалентна системе

$$m\ \ddot{x}_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0,\ n = 2, 3, \ldots, N \qquad (1.57)$$

при дополнительном условии

$$x_0 = x_{N+1} = 0. \qquad (1.58)$$

Из физических соображений можно предвидеть, что нормальными колебаниями должны быть стоячие волны. Удобнее, однако, выбрать

$$x_n = A \exp\,[i(\omega t \pm n\varphi). \qquad (1.59)$$

При таком выборе система N уравнений сводится к одному уравнению

$$\omega^2 = 4(k/m)\sin^2(\varphi/2), \qquad (1.60)$$

которым определяется связь частоты с фазой φ. Смысл подстановки (1.59) заключается в выборе для x_n решения в виде бегущей волны с волновым вектором $p = \varphi/a$, так как $n\varphi = nap = px_n$. Уравнение (1.60) устанавливает, таким образом, связь между частотой и волновым вектором.

Условиям (1.58) можно удовлетворить, подбирая суперпозицию бегущих в обе стороны волн $x_n = A \exp\,[i(\omega t - n\varphi)] + B \exp[i(\omega t + n\varphi)]$. Условие $x_0 = 0$ дает $A = -B$ или $x = 2tB\cdot[\sin\,(n\varphi)]\exp\,(i\omega t)$, т.е. стоячую волну. Из условия на другом конце $x_{N+1} = 0$ определяются возможные значения частот («спектр частот»). Уравнение $\sin\,(N + 1)\,\varphi = 0$ приводит к N независимым решениям:

$$\varphi_s = \pi s/(N + 1),\ s = 1, 2, \ldots, N. \qquad (1.61)$$

В самом деле, $s = 0$, $s = N + 1$ дают нулевые решения, а для $s = N + l$ фаза $\varphi_{N+1} = -\varphi_{N-l+2} + 2\pi$, т.е. решения, отвечающие $s = N + l$, выражаются через решения, отвечающие $s = N - l + 2$. Из (1.60) и (1.61) находим N различных частот:

$$\omega_s = 2\sqrt{(k/m)\sin(\varphi_s/2)} = 2\sqrt{(k/m)\sin\{\pi s/[2(N+1)]\}},$$

$$s = 1, 2, \ldots, N. \qquad (1.62)$$

На рис. 1.22 различные частоты укладываются дискретными точками на синусоиду.

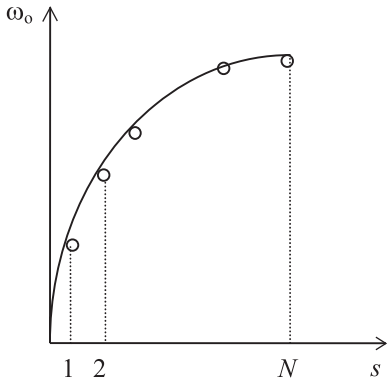

Рис. 1.22

Вектор нормального колебания, отвечающего s-й частоте,

$$r_s = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_N \end{pmatrix} = \sqrt{[2/(N+1)]} \times \begin{pmatrix} \sin(\varphi_s) \\ \sin(2\varphi_s) \\ \ldots \\ \sin(N\varphi_s) \end{pmatrix} q_s(t), \qquad (1.63)$$

где $q_s(t) = \mathrm{Re}[2iB_s\exp(i\omega_s t)] = C_s\cos(\omega_s t + \alpha_s)$ – s-я нормальная координата, а множитель

$$\sqrt{[2/(N+1)]} = [\sum_{n=1}^{N} (\sin^2(n\varphi_s)]^{-1/2}$$

введен для нормировки:

$$(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_{s'}) = \delta_{s\,s'}\, q_s^2.$$

Общее решение есть суперпозиция всех нормальных колебаний

$$x_n = \sum_{s=1}^{N} \left\{ \sqrt{\left[2/\left(N+1\right)\right]} \sin[n\varphi_s q_s(t)] \right\}.$$

Матрица перехода от x_n к q_s

$$U_{ns} = \sqrt{\left[2/\left(N+1\right)\right]}\ \sin[\pi ns/(N+1)]$$

является ортогональной матрицей, приводящей функцию Лагранжа к сумме квадратов, отвечающих набору N различных осцилляторов:

$$L = \sum_{s=1}^{N} L_s(q_s, \dot{q}_s),\ L_s(q_s, \dot{q}_s) = (m/2)\,[\,\dot{q}_s^{\,2} - \omega_s^2 q_s^2].$$

Задача 1.31. Определить свободные колебания системы частиц, могущих двигаться по прямой:

1) $2N$ частиц массами m и M, соединенных одинаковыми пружинками жесткости k (рис. 1.23);

Рис. 1.23

2) $2N$ частиц массами m, соединенных пружинками жесткости k и K (рис. 1.24).

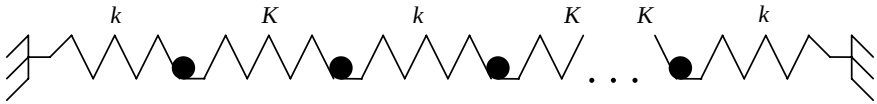

Рис. 1.24

Решение. 1. Уравнения движения

$$m\ddot{x}_{2n-1} + k(2x_{2n-1} - x_{2n-2} - x_{2n}) = 0; \qquad (1.64)$$

$$M\ddot{x}_{2n} + k(2x_{2n} - x_{2n-1} - x_{2n+1}) = 0,$$

причем $x_0 = x_{2N+1} = 0$, $n = 1, 2,..., N$.

Ищем решение в виде бегущих волн разной амплитуды:

$$x_{2n-1} = A \exp\{i[\omega t \pm (2n-1)\varphi]\}, \qquad (1.65)$$

$$x_{2n} = B \exp[i(\omega t \pm 2n\varphi)].$$

Для определения A и B получаем систему однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned}(-m\omega^2 + 2k)A - k[\exp(-i\varphi) + \exp(i\varphi)]B = 0,\\ k[\exp(-i\varphi) + \exp(i\varphi)]A + (-M\omega^2 + 2k)B = 0,\end{aligned}\right\} \qquad (1.66)$$

имеющих нетривиальные решения, только если детерминант обращается в нуль. Это условие определяет связь частоты с фазой:

$$\omega^2_{(\pm)} = (k/\mu)\left\{1 \pm \sqrt{\left[1 - 4\mu^2 \sin^2(\varphi)/(m/M)\right]}\right\}, \ \mu = (mM)/(m+M). \qquad (1.67)$$

Дополнительным условиям удовлетворяют только определенные линейные комбинации бегущих волн (1.65), а именно:

$$x_{2n-1} = A_s \sin(2n-1)\varphi_s \cos(\varphi_s t + \alpha_s);$$
$$x_{2n} = B_s \sin(2n\varphi_s)\cos(\omega_s t + \alpha_s),$$

у которых $\varphi_s = \pi s/(2N+1)$. Так как $\varphi_{2N+1-s} = \pi - \varphi_s$, то различные частоты при выборе определенного знака в (1.67) мы получим лишь для $s = 1, 2, \ldots N$. На рис. 1.25 они укладываются дискретными точками на две различные кривые, одну из них ($\omega_{(-)}$) принято называть акустической, другую ($\omega_{(+)}$) оптической.

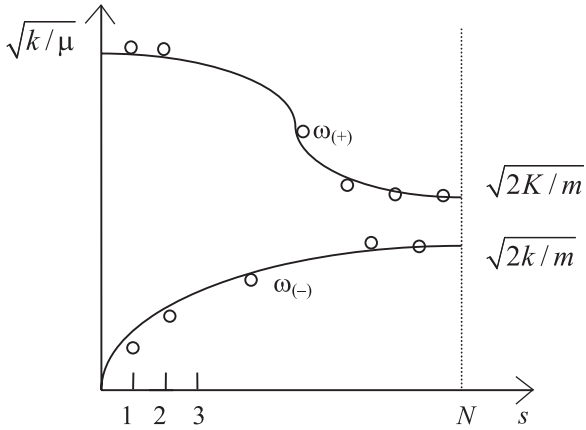

Рис. 1.25

Общее решение имеет вид

$$x_{2n-1} = \sin(2n-1)\varphi_s[A_{(+)s}\cos(\omega_{(+)s}t + \alpha_s) + A_{(-)s}\cos(\omega_{(-)s}t + \beta_s)];$$
$$x_{2n} = \sin(2n\varphi_s)[B_{(+)s}\cos(\omega_{(+)s}t + \alpha_s) + B_{(-)s}\cos(\omega_{(-)s}t + \beta_s)],$$

где $A_{(\pm)s}$ и $B_{(\pm)s}$ связаны, согласно (1.66), соотношением

$$B_{(\pm)s} = A_{(\pm)s}[2k - m\omega^2_{(\pm)s}]/[2k\cos(\varphi_s)].$$

Замечательно, что $B_{(-)s}$ и $A_{(-)s}$, отвечающие акустическим частотам, имеют одинаковые знаки, а $B_{(+)s}$ и $A_{(+)s}$ для оптических частот имеют противоположные знаки (т.е. соседние частицы массами m и M колеблются в противофазе). Распределение амплитуд колебаний для случая $N = 10$, $s = 2$ показано на рис. 1.26, где на оси ординат отложены номера частиц, а на оси абсцисс – соответствующие им амплитуды (*а* – для акустических, *б* – для оптических колебаний).

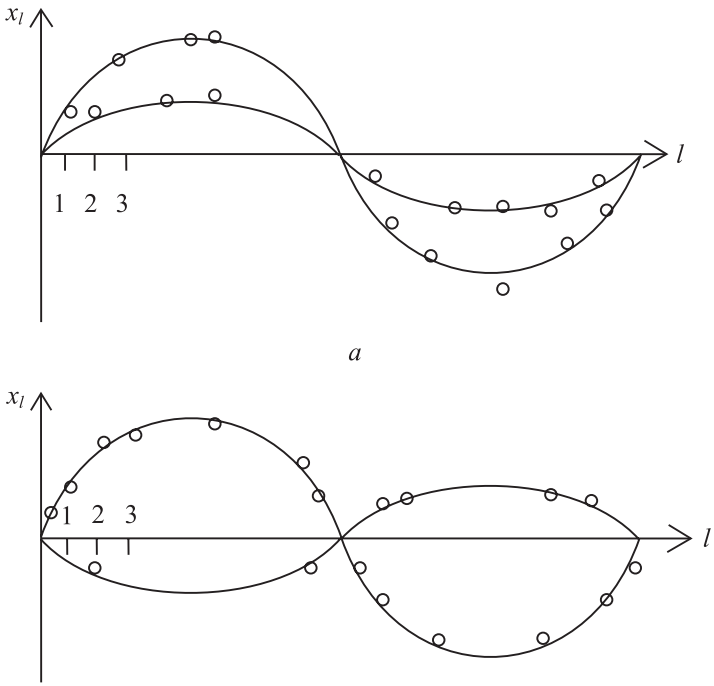

Рис. 1.26

Каким образом можно получить из результатов данной задачи предельный случай $m = M$?

2. Нормальные колебания

$$x^{(s)}_{2n} = A_s \sin(2n\varphi_s)\cos(\omega_s t + \alpha),$$

$$x^{(s)}_{2n-1} = A_s\{[K\sin(2n\varphi_s) + k\sin(2n-2)\varphi_s/(k + K - m\omega_s^2)]\}\cos(\omega_s t + \alpha),$$

где $\omega_s^2 = (1/m)\{K + k \pm[(K-k)^2 + 4Kk\cos^2(\varphi_s)]\}$,
а φ_s определяется из уравнения

$$\mathrm{tg}[(2N+1)\varphi_s] = -[(K-k)/(K+k)]\mathrm{tg}(\varphi_s),\ s = 1, 2,\ldots N;\ 0 < \varphi_s < \pi/2.$$

Кривые для оптической и акустической ветвей частот представлены на рис. 1.27.

Как совершить переход к предельному случаю $K = k$?

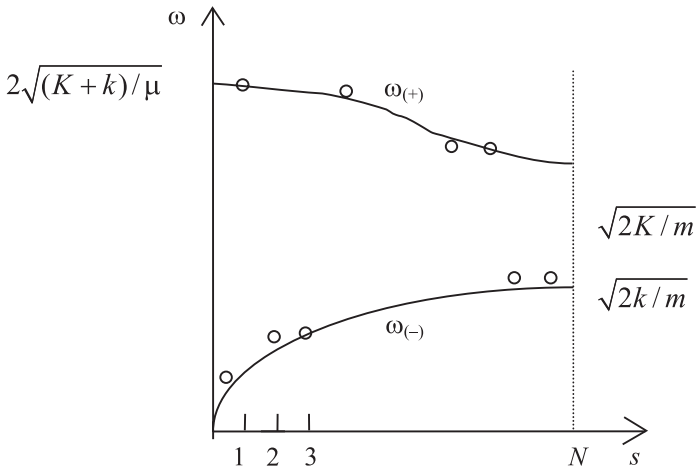

Рис. 1.27

Задача 1.32. Найти установившиеся колебания системы, описанной в задаче 1.30, если точка A движется по закону $a\cos(\gamma t)$.

Решение. Решение уравнений движения

$$m_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0,\ n = 1, 2,\ldots N \qquad (1.68)$$

(дополнительные условия $x_0 = 0$, $x_{N+1} = a\cos(\gamma t)$) ищем в виде стоячих волн

$$x_n = A \sin(n\varphi)\cos(\gamma t)$$

так, чтобы сразу удовлетворить первому дополнительному условию. Тогда из второго условия находим константу $A = a/[\sin(N + 1)\varphi]$, а из уравнений (1.68) – фазу $\sin^2(\varphi/2) = m\gamma^2/(4k)$. При $\gamma^2 < 4k/m$ установившиеся колебания

$$x_n = \{a \sin(n\varphi)/[\sin(N + 1)\varphi]\} \cos(\gamma t) \qquad (1.69)$$

имеют большую амплитуду, если знаменатель $\sin(N + 1)\varphi$ близок к нулю. Но именно это условие и определяет спектр нормальных частот ω_s (см. задачу 1.30), т.е. при этом мы имеем случай, близкий к резонансу $\gamma \approx \omega_s$. При $\gamma << \omega_1 = 2(k/m)\sin[\pi/[2(N + 1)]$ колебания (1.69) соответствуют медленному растяжению и сжатию всех пружинок как целого:

$$x_n = a\,[n/(N + 1)]\cos(\gamma t).$$

Если $\gamma^2 > 4k/m$, то, сделав в (1.69) замену $\varphi = \pi - i\psi$, получим

$$x_n = a\,\{[\mathrm{sh}(n\psi)]/[\mathrm{sh}(N+1)\psi]\}\cos(\gamma t);\ \mathrm{ch}^2(\psi/2) = m\gamma^2/(4k).$$

Колебания затухают (при $n\psi >> 1$ – экспоненциально) к левому концу цепочки. Естественность этого результата особенно очевидна для $\gamma^2 >> 4k/m$, когда частота вынуждающей силы лежит гораздо выше спектра нормальных частот. В этом случае крайняя правая частица колеблется с малой амплитудой в противофазе с вынуждающей силой, а $(N - 1)$-я частица в первом приближении покоится. Затем можно движение $(N - 1)$-й частицы рассматривать как вынужденное колебание, вызванное вынуждающей силой большой частоты со стороны N-й частицы, и т.д.

Отметим, что в явлениях так называемого полного внешнего отражения имеет место аналогичное затухание волны (например, при отражении коротких радиоволн от ионосферы и рентгеновских лучей от поверхности кристалла).

Какой вид имеет установившееся колебание при $\gamma^2 = 4k/m$?

1.2.2. Затухающие колебания

Движение тела в среде не является чисто механическим, поскольку часть энергии движущегося тела переходит в тепло в процессе трения. Если колебания происходят медленно по сравнению с диссипативными процессами в среде, то можно свести задачу к чисто ме-

ханической введением в уравнения Лагранжа системы производных от *диссипативной функции F*, являющейся положительной квадратичной формой скоростей:

$$d/dt(\partial L/\partial \dot{z}_i) = \partial L/\partial z_i - \partial F/\partial \dot{z}_i,\ i = 1, ..., N; \qquad (1.70)$$

$$F = (1/2)\sum_{i,k} \alpha_{ik}\dot{z}_i\dot{z}_k. \qquad (1.71)$$

При таком определении сила трения f_i пропорциональна (и противоположно направлена) скорости частицы:

$$f_i = -\partial F/\partial \dot{z}_i = -\sum_k \alpha_{ik}\dot{z}_k. \qquad (1.72)$$

Используя (1.70), можно доказать справедливость соотношения, определяющего скорость потери механической системой энергии E при трении о среду:

$$\dot{E} = -2F. \qquad (1.73)$$

В частном случае движения гармонического осциллятора с одной степенью свободы уравнение Лагранжа (1.70) принимает вид, отличный от (1.35):

$$\ddot{u} + 2\lambda\dot{u} + \omega_0^2 u = 0;\ \omega_0 = (k/m);\ 2\lambda = \alpha/m. \qquad (1.74)$$

Параметр λ называется *коэффициентом затухания*. Общее решение уравнения (1.74) имеет вид

$$u = C_1 \exp(s_1 t) + C_2 \exp(s_2 t), \qquad (1.75)$$

где корни характеристического уравнения

$$s_{1,(2)} = -\lambda \pm(\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2}. \qquad (1.76)$$

При $\lambda < \omega_0$ решение (1.75) и (1.76) описывает *затухающие колебания*:

$$u = a\exp(-\lambda t)\cos(\omega t + \varphi),\ \omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2}. \qquad (1.77)$$

При $\lambda > \omega_0$ решение (1.75) и (1.76) описывает *апериодические затухающие* колебания, поскольку $s_{1,(2)}$ теперь вещественны:

$$u = C_1 \exp\{-[\lambda - (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2} t]\} + C_2 \exp\{-[\lambda + (\lambda^2 - \omega_0^2)^{1/2} t]\}. \qquad (1.78)$$

При $\lambda = \omega_0$ движение также затухает по апериодическому закону:

$$u = (C_1 + C_2 t)\exp(-\lambda t). \qquad (1.79)$$

Уравнение вынужденных колебаний одномерного осциллятора с учетом диссипации теперь имеет вид (ср. (1.47)):

$$\ddot{u} + 2\lambda\dot{u} + \omega_0^2 u = f_0\cos(\gamma t). \qquad (1.80)$$

Решение этого уравнения таково (ср. (1.50)):

$$u = a\exp(-\lambda t)\cos(\omega t + \varphi) + f_0\cos(\gamma t + \delta)/[(\gamma^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]^{1/2}, \qquad (1.81)$$

где использованы параметры, определенные согласно следующим формулам:

$$\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{1/2};\ \mathrm{tg}(\delta) = 2\lambda\gamma/(\gamma^2 - \omega_0^2). \qquad (1.82)$$

Первое слагаемое, в отличие от бездиссипативного движения (1.81), экспоненциально затухает со временем. Таким образом, по прошествии достаточно длительного отрезка времени остаются лишь вынужденные колебания, описываемые вторым членом в (1.81), т.е. не зависят от начальных условий. Наличие трения изменяет, по сравнению с бездиссипативным случаем, зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты (см. (1.50)). При выполнении условия резонанса ($\omega_0 = \gamma$) амплитуда вынужденного колебания достигает максимума, оставаясь, однако, конечной.

Задача 1.33. На осциллятор с трением (собственная частота ω_o, сила трения $f_{тр} = -2\lambda m\dot{x}$) действует вынуждающая сила $F(t)$. Найти:

а) среднюю работу A этой силы при установившихся колебаниях, если $F(t) = f_1\cos(\omega t) + f_2\cos(2\omega t)$;

б) среднюю за большой промежуток времени работу силы $F(t) = f_1\cos(\omega_1 t) + f_2\cos(\omega_2 t)$ при установившихся колебаниях.

Решение

а) $\langle A\rangle = (1/T)\int F(t)\dot{x}(t)\,dt = (\lambda\omega^2/m)\{f_1^2/[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2] + 4f_2^2/[(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16\lambda^2\omega^2]\}$,

т.е. каждая из двух гармоник силы передает энергию независимо от другой (здесь период $T = 2\pi/\omega$).

б) $\langle A\rangle = (\lambda/m)\{f_1^2\omega_1^2/(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2\omega_1^2] + f_2^2\omega_2^2/(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\lambda^2\omega_2^2]\}$.

При усреднении за большой промежуток времени $T >> 2\pi/\omega_{1,2}$ оказывается, что каждая из сил $f_1\cos(\omega_1 t)$ и $f_2\cos(\omega_2 t)$ действует на осциллятор независимо. Это связано с тем, что лишь средние квадраты тригонометрических функций отличны от нуля:

$(1/T)\sin^2(\omega_1 t)\mathrm{d}t = 1/2 + 1/(4\omega_1 T)[1 - \sin(2\omega_1 T)] \to 1/2$ при $T \to \infty$, а средние значения перекрестных произведений типа $\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_1 t)$, $\sin(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$ и т.д. исчезают, например, $(1/T)\int_0^T \sin(\omega_1 t)\sin(\omega_2 t)\mathrm{d}t =$ $= [1 - \cos(\omega_1 - \omega_2)\ T]\ /\ [2\cdot(\omega_1 - \omega_2)\ T] - [1 - \cos(\omega_1 + \omega_2)\ T]/$ $/[2(\omega_1 + \omega_2)\ T] \to 0$ при $T \to \infty$.

1.3. Метод Гамильтона в классической механике

1.3.1. Уравнения движения Гамильтона. Канонические преобразования. Скобки Пуассона

Альтернативный подход к описанию движения механических систем с помощью обобщенных координат $z_i(t)$ и импульсов $p_i(t)$, $i = 1, \ldots, N$, основан на введении функции Гамильтона $H(z_i(t),p_i(t),t)$ вместо функции Лагранжа $L(z_i(t), \dot{z}(t),t)$. Такой переход осуществляется с помощью *преобразования Лежандра* и с использованием тождества для полного дифференциала лагранжиана как функции координат и скоростей:

$$\mathrm{d}\Big(\sum_i p_i \dot{z}_i - L\Big) = -\sum_i (\mathrm{d}p_i/\mathrm{d}t)\mathrm{d}z_i + \sum_i \dot{z}_i\,\mathrm{d}p_i. \qquad (1.83)$$

Рассматривая выражение в левой части (1.83) как дифференциал функции, называемой гамильтонианом,

$$H(z_i(t),p_i(t),t) = \sum_i p_i \dot{z}_i - L, \qquad (1.84)$$

получаем *уравнения Гамильтона*

$$\dot{z}_i = \partial H/\partial p_i,\ \ \dot{p}_i = -\partial H/\partial z_i,\ i = 1,\ldots, N. \qquad (1.85)$$

Уравнения (1.85) составляют систему $2N$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2N$ неизвестных функций $z_i(t)$ и $p_i(t)$ и называются *каноническими*. $2N$-мерное пространство всех импульсов p_i и координат z_i называется *фазовым пространством* системы. Наряду с уравнениями Лагранжа (1.6) уравнения Гамильтона (1.85) полностью описывают динамику механической системы.

Произвольная функция O координат и импульсов изменяется вдоль некоторой траектории:

$$\mathrm{d}O(z_i(t), p_i(t), t)/\mathrm{d}t = \partial O/\partial t + (\partial O/\partial z_i)\,\dot{z}_i + (\partial O/\partial p_i)\,\dot{p}_i, \qquad (1.86)$$

где по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование. Если траектория совпадает с траекторией реального движения, производные по времени и dp_i/dt находятся из уравнений Гамильтона (1.85). Подстановка (1.85) в (1.86) приводит к выражению

$$dO(z_i(t),p_i(t),t)/dt = (\partial H/\partial p_i)(\partial O/\partial z_i) - (\partial O/\partial p_i)(\partial H/\partial z_i) + (\partial O/\partial t) = \\ = \{H,O\} + \partial O/\partial t. \quad (1.87)$$

Здесь введено определение скобок Пуассона:

$$\{A,B\} = (\partial A/\partial p_i)(\partial B/\partial z_i) - (\partial B/\partial p_i)(\partial A/\partial z_i), \quad (1.88)$$

где по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование. Скобки Пуассона являются важным математическим инструментом для отыскания интегралов движения механических систем. В частности, согласно *теореме Пуассона*, если функции координат и импульсов частиц механической системы a и b – интегралы движения, то их скобки Пуассона $\{a, b\} = c$ также являются интегралом движения. Доказательство этой теоремы очевидно, если a и b не зависят явно от времени, поскольку тогда оно непосредственно следует из тождества Якоби:

$$\{a,\{b,c\}\} + \{b,\{c,a\}\} + \{c,\{a,b\}\} = 0, \quad (1.89)$$

в котором следует положить $c = H$ и воспользоваться соотношением (1.87) для интегралов движения a и b: $\{H,a\}= 0$; $\{H,b\} = 0$. Другие важные свойства скобок Пуассона следуют непосредственно из определения (1.88):

$$\{a, b\} = -\{b, a\};\ \{p_i, z_k\} = \delta_{ik};\ \{z_i, z_k\} = 0;\ \{p_i, p_k\} = 0. \quad (1.90)$$

Уравнения Лагранжа (1.6) инвариантны относительно преобразований координат, называемых *точечными преобразованиями*:

$$Q_i = Q_i(z_1,...,z_s, t),\ i = 1,..., s, \quad (1.91)$$

где s равно числу степеней свободы механической системы. Уравнения Гамильтона (1.85) инвариантны на более широком классе преобразований координат и импульсов, которые называются *каноническими преобразованиями*:

$$Q_i = Q_i(z_1,..., z_s, p_i,... p_s; t);\ P = P_i(z_1,... z_s, p_i,... p_s; t),\ i = 1,..., s. \quad (1.92)$$

Уравнения Гамильтона в новых переменных имеют вид (1.85), однако с новым гамильтонианом H':

$$H' = H + \partial F/\partial t, \quad (1.93)$$

где F – *производящая функция*, которая определяет конкретный вид канонического преобразования посредством уравнений

$$p_i = \partial F/\partial z_i,\ P_i = -\partial F/\partial Q_i,\ F = F(z_i ... z_s;\ Q_1,... Q_s,\ t);\ i = 1,..., s. \quad (1.94)$$

Другая возможная форма уравнений канонического преобразования получается при выборе производящей функции вида

$$F = F(z_i ... z_s;\ P_1,... P_s,\ t);\ p_i = \partial F/\partial z_i,\ Q_i = \partial F/\partial P_i;\ i = 1,..., s. \quad (1.95)$$

Возможны также производящие функции $F(p, Q, t)$ и $F(p, P, t)$. Если производящая функция не зависит от времени, то согласно (1.93) $H' = H$, и канонические преобразования имеют вид

$$Q_i = Q_i(z_i,... z_s,\ p_i,..., p_s);\ P_i = P_i(z_i,... z_s,\ p_i,..., p_s),\ i = 1,..., s. \quad (1.96)$$

Укажем важное свойство скобок Пуассона. Скобки Пуассона инвариантны относительно канонических преобразований:

$$\{f, g\}_{p,z} = \{f, g\}_{P,Q}, \quad (1.97)$$

где индексы указывают, по каким переменным (старым или новым) проводится дифференцирование.

В заключение отметим, что якобиан любого канонического преобразования равен единице, т.е. соответствующие объемы в канонически сопряженных фазовых пространствах одинаковы:

$$\int\ldots\int dz_1\ldots dz_s dp_1\ldots dp_s = \int\ldots\int dQ_1\ldots dQ_s dP_1\ldots dQ_s. \quad (1.98)$$

Задача 1.34. Определить функцию Гамильтона ангармонического осциллятора, функция Лагранжа которого $L = \dot{x}^2/2 - \omega^2 x^2/2 - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2$.

Решение. $H = p^2/[2(1 + 2\beta x)] - \omega^2 x^2/2 + \alpha x^3$. В частности, для малых колебаний ($|\alpha x| << \omega^2$, $|\beta x| << 1$) $H = p^2/2 - \omega^2 x^2/2 + \alpha x^3 - \beta x p^2 + 2\beta^2 x^2 p^2 - ...$

и с точностью по α, β членов добавка к функции Гамильтона гармонического осциллятора связана с добавкой к функции Лагранжа соотношением $\delta H = -\delta L$.

Задача 1.35. Найти закон движения частицы, функция Гамильтона которой

$$H(x,p) = p^2/2 + \omega_0^2 x^2/2 + \lambda(p^2/2 + \omega_0^2 x^2/2)^2.$$

Решение. $x = a\cos(\omega t + \varphi)$, $p = -\omega_0 a \sin(\omega t + \varphi)$, где $\omega = (1 + 2\lambda E_0)\omega_0$, $E_0 = (1/2)\omega_0^2 a^2$.

Задача 1.36. Найти функцию Лагранжа, если функция Гамильтона:

а) $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}^2/(2m) - \mathbf{pa}$ ($\mathbf{a}$ = const);

б) $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = c|\mathbf{p}|/[n(\mathbf{p}, \mathbf{r})]$.

Решение:

а) $L = m[(\mathbf{v} - \mathbf{a})^2]/2$;

б) $L = 0$; подобные «частицы» нельзя описывать с помощью функции Лагранжа.

Задача 1.37. Найти лагранжиан механической системы, гамильтониан которой имеет следующий вид:

а) $H = q_1p_2 - q_2p_1 + a(p_1^2 + p_2^2)$;

б) $H = p_1p_2 + q_1q_2$.

Решение:

а) $L = \left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right)/4a + (q_2\dot{q}_1 - q_1\dot{q}_2)/2a + (q_1^2 + q_2^2)/4a$;

б) $L = \dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1q_2$.

1.3.2. Уравнение движения Гамильтона – Якоби

Рассматривая определенное в уравнении (1.1) действие S, вычисленное на траекториях движения механической системы как функцию от координат частиц в заданный момент времени, получаем *уравнение Гамильтона – Якоби*:

$$\partial S/\partial t + H(z_1,...,z_s, \partial S/\partial z_1,..., \partial S/\partial z_s, t) = 0 \qquad (1.99)$$

для функции $S(z_1,...,z_s, t)$. Уравнение Гамильтона – Якоби является еще одним альтернативным видом описания уравнений движения наряду с уравнениями Лагранжа и Гамильтона. Решение (1.99) ищется в виде полного интеграла уравнения:

$$S = f(t, z_1,...,z_s; \alpha_i,..., \alpha_s) + A, \qquad (1.100)$$

где $\alpha_i,..., \alpha_s$ и A – $(s + 1)$-я произвольная постоянная (по числу независимых переменных $z_1,...,z_s, t$). Рассматривая $f(t, z_1,...,z_s; \alpha_i,..., \alpha_s)$ в качестве производящей функции канонического преобразования, а величины $\alpha_i,..., \alpha_s$ – в качестве новых импульсов, получаем s уравнений типа (1.95) для новых координат $\beta_1,..., \beta_s$:

$$\beta_i = \partial S/\partial\alpha_i, \; i = 1,..., s. \qquad (1.101)$$

Используя равенство (1.93) с производящей функцией $f(t, z_1,..., z_s; \alpha_1,..., \alpha_s)$, удовлетворяющей уравнению (1.99), находим, что в новых

переменных гамильтониан равен нулю: $H' = H + (\partial f/\partial t) = 0$. Следовательно, координаты $\beta_1,..., \beta_s$ являются постоянными в силу уравнений Гамильтона (1.99) с $H = 0$. Таким образом, уравнения (1.101) представляют собою систему уравнений для нахождения s координат $z_1,..., z_s$ как функций времени t и $2s$ постоянных $\alpha_1,..., \alpha_s$ и $\beta_1,..., \beta_s$. Зависимость от времени импульсов находится затем из уравнений $p_i = \partial S/\partial z_i$ с использованием полного интеграла S из (1.100).

Задача 1.38. Найти траекторию и закон движения частицы в поле $U(r)$ с помощью уравнения Гамильтона – Якоби: а) $U(r) = -Fx$; б) $U(r) = m\omega_1^2x^2/2 + m\omega_2^2y^2/2$.

Решение. См. задачу 1.1.

1.3.3. Адиабатические инварианты

Адиабатическим инвариантом I называется функция координат и импульсов, которая остается неизменной при движении системы с медленно меняющимися параметрами (или в переменном внешнем поле). Параметр λ считается медленно (*адиабатически*) меняющимся со временем, если его относительное изменение за время характерного периода движения системы T является малым. Таким образом, полная механическая энергия системы E не сохраняется. Адиабатический инвариант I является сохраняющейся во времени функцией от медленно изменяющихся со временем величин E и λ. Для периодического движения с одной степенью свободы адиабатический инвариант I равен площади в фазовом пространстве системы, ограниченной ее замкнутой фазовой траекторией:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p\mathrm{d}q, \qquad (1.102)$$

где интеграл берется по траектории движения при фиксированных значениях величин энергии E и параметра λ. Адиабатический инвариант обладает свойством

$$2\pi(\partial I(E,\lambda)/\partial E) = T, \qquad (1.103)$$

где параметр λ считается второй независимой переменной наряду с энергией системы E: $I = I(E,\lambda)$.

Пример. Определим адиабатический инвариант для одномерного осциллятора. Его функция Гамильтона $H = p^2/2m + m\omega^2q^2/2$, где ω – собственная частота осциллятора. Уравнение фазовой траектории

дается законом сохранения энергии $H(p, q) = E$. Это есть эллипс с полуосями $(2mE)^{1/2}$ и $(2E/m\omega^2)^{1/2}$ и его площадь (деленная на 2π) $I = E/\omega$. Адиабатическая инвариантность этой величины означает, что при медленном изменении параметров осциллятора его энергия меняется пропорционально частоте. Вопрос о точности сохранения адиабатического инварианта $I = E/\omega$ сводится к установлению связи между коэффициентами $c_\pm$ в асимптотических (при $t \to \pm\infty$) выражениях $q = \mathrm{Re}\,[c_\pm \exp(i\omega_\pm t)]$ решения уравнения движения осциллятора $\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0$, в котором частота ω является медленно меняющейся функцией времени (стремящейся при $t \to \pm\infty$ к постоянным пределам $\omega_\pm$); предельные значения I выражаются через эти коэффициенты: $I_\pm = (1/2)\omega_\pm|c_\pm|^2$. Решение этой задачи может быть заимствовано из квантовой механики, если обратить внимание на формальное совпадение написанного уравнения движения с уравнением Шредингера $\psi'' + k^2(x)\psi = 0$ для одномерного движения частицы над медленно меняющейся (квазиклассической) «потенциальной ступенькой»: задача об определении связи между асимптотическими (при $x \to \infty$) выражениями ψ есть задача о нахождении «коэффициента отражения» от потенциальной ступеньки.

С помощью величины I можно дать новую формулировку уравнения движения замкнутой системы (с постоянными параметрами). Проведем каноническое преобразование переменных p, q, выбрав при этом величину I в качестве нового «импульса». Роль производящей функции должно играть при этом «укороченное действие» S_0, выраженное как функция q и I. Действительно, S_0 определяется при заданной энергии системы. Но для замкнутой системы I является функцией одной только энергии, и поэтому S_0 можно с тем же успехом выразить в виде функции $S_0(q, I)$, а частная производная $(\partial S_0/\partial q)_E = p$ совпадает с производной $(\partial S_0/\partial q)_I$ при постоянном I. Поэтому имеем $p = \partial S_0(q, I)/\partial q$, что соответствует первой из формул канонического преобразования. Вторая же формула определит новую «координату», которую обозначим как w: $w = \partial S_0(q, I)/\partial I$.

Переменные I и w называют *каноническими переменными*, причем I называется в этой связи *переменной действия*, а w – *угловой переменной*.

Поскольку производящая функция $S_0(q, I)$ не зависит явно от времени, то новая функция Гамильтона H' совпадает со старой H, выраженной в виде функции новых переменных. Другими словами, H' есть энергия, выраженная в функции переменной действия $E(t)$. Со-

ответственно уравнения Гамильтона для канонических переменных имеют вид $\dot{I} = 0$, $\dot{w} = \mathrm{d}E(t)/\mathrm{d}I$.

Из первого имеем, как и должно быть, $I = \mathrm{const}$ – вместе с энергией постоянна и величина I. Из второго же видим, что угловая переменная является линейной функцией времени $w = (\mathrm{d}E/\mathrm{d}t)t + \mathrm{const}$. Действие $S_0(q, I)$ является неоднозначной функцией координаты. По истечении каждого периода эта функция не возвращается к исходному значению, а получает приращение $\Delta S_0 = 2\pi I$, как это очевидно из формулы $S_0 = \int p\mathrm{d}q$ и определения $I = \frac{1}{2\pi}\oint p\mathrm{d}q$. За то же время угловая переменная, следовательно, получает приращение $\Delta w = \Delta(\partial S_0/\partial I) = (\partial/\partial I)\Delta s_0 = 2\pi$.

(В этом же можно убедиться и непосредственно с помощью формулы $w = (\mathrm{d}E/\mathrm{d}t)t + \mathrm{const}$ и выражения $2\pi(\partial I/\partial t) = T$). Если мы выразим q и p через канонические переменные, то эти функции не будут менять своих значений при изменении w на 2π (при заданном значении I). Другими словами, всякая однозначная функция $F(p, q)$, будучи выражена через канонические переменные, является периодической функцией w с периодом 2π.

2. ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

2.1. Тензоры деформации и напряжений

Положение каждой точки тела определяется ее радиусом-вектором **r** (с компонентами $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) в некоторой системе координат. При деформировании тела все его точки, вообще говоря, смещаются. Рассмотрим какую-нибудь определенную точку тела. Если радиус-вектор **r** (с компонентами x_i) какой-нибудь точки тела до деформирования был **r**, то в деформированном теле он будет иметь некоторое другое значение **r'** (с компонентами x_i'). Смещение точки тела при деформировании изобразится тогда вектором **r'** – **r**, который обозначим **u**:

$$u_i = x_i' - x_i. \tag{2.1}$$

Вектор **u** называют *вектором деформации* (или *вектором смещения*).

Пусть расстояние между точками до деформирования было

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2}\ ,$$

а после деформирования стало

$$\mathrm{d}l' = \sqrt{\mathrm{d}x_1'^2 + \mathrm{d}x_2'^2 + \mathrm{d}x_3'^2}\ .$$

Подставляя $\mathrm{d}x_i' = \mathrm{d}x_i + \mathrm{d}u_i = \mathrm{d}x_i + \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k$, получаем

$$\mathrm{d}l'^2 = \mathrm{d}l^2 + 2u_{ik}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_k, \tag{2.2}$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \tag{2.3}$$

Этими выражениями определяется изменение элемента длины при деформировании тела. Тензор u_{ik} называют *тензором деформации;* по своему определению он симметричен:

$$u_{ik} = u_{ki} \tag{2.4}$$

Относительные удлинения элементов длины вдоль различных направлений главных осей тензора деформации (в данной точке) равны с точностью до величин высших порядков

$$\sqrt{1+2u^{(i)}}-1\approx u^{(i)},$$

т.е. равны непосредственно главным значениям тензора u_{ih}. Сумма диагональных компонент тензора деформации дает относительное изменение объема $(\mathrm{d}V' - \mathrm{d}V)/\mathrm{d}V = u_{ii}$, где введено условное обозначение, подразумевающее суммирование по дважды повторяющимся индексам:

$$u_{ii} = u_{11} + u_{22} + u_{33}.$$

Соответствующие формулы, выражающие компоненты тензора деформации через производные от компонент вектора смещения в различных координатах, имеют вид

в сферических координатах r, θ, ϕ:

$$u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\ u_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r},$$

$$u_\phi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta+\frac{u_r}{r},$$

$$2u_{\theta\phi}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial\theta}-u_\phi\operatorname{ctg}\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\phi},$$

$$2u_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta},$$

$$2u_{\phi r}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}+\frac{\partial u_\phi}{\partial r}-\frac{u_\phi}{r}.$$

в цилиндрических координатах r, ϕ, z :

$$u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\ u_{\phi\phi}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}+\frac{u_r}{r},\ u_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$2u_{\phi z}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\phi}+\frac{\partial u_\phi}{\partial z},\ 2u_{rz}=\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r},$$

$$2u_{r\phi}=\frac{\partial u_\phi}{\partial r}-\frac{u_\phi}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\phi}.$$

Если **F** – сила, действующая на единицу объема (с компонентами F_i), то тензор σ_{ik},, через который выражается сила $F_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$, называют *тензором напряжений*, $\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$ есть i-я компонента силы, действующей на элемент поверхности $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$, компонента σ_{ik} тензора напряжений есть i-я компонента силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярную оси x_k. Так, на единичную площадку, перпендикулярную оси x, действуют нормальная к ней (направленная вдоль оси x) сила σ_{xx} и тангенциальные (направленные по осям y и z) силы σ_{yx} и σ_{zx}.

Момент сил, действующих на некоторый объем тела, представится тогда в виде

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)\mathrm{d}V = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)\mathrm{d}f_l + \int_V (\sigma_{ik} - \sigma_{ki})\mathrm{d}V, \quad (2.5)$$

откуда следует, что $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$.

В случае равномерного *всестороннего сжатия* тела тензор напряжений

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}. \quad (2.6)$$

Все его компоненты, отличные от нуля, равны давлению.

В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться в каждом элементе объеме тела, т.е. должно быть $F_i = 0$. Таким образом, уравнения равновесия деформированного тела имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0.$$

Пусть P есть внешняя сила, действующая на единицу площади поверхности тела, так что на элемент поверхности $\mathrm{d}f$ действует сила $P\mathrm{d}f$. В равновесии она должна компенсироваться силой $-\sigma_{ik}\mathrm{d}f_k$, действующей на тот же элемент поверхности со стороны внутренних напряжений. Таким образом, должно быть

$$P_i\mathrm{d}f - \sigma_{ik}\mathrm{d}f_k = 0.$$

Написав $\mathrm{d}f_k$ в виде $\mathrm{d}f_k = n_k\mathrm{d}f$, где **n** – единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности, находим отсюда $\sigma_{ik}n_k = P_i$.

Это и есть условие, которое должно выполняться на всей поверхности находящегося в равновесии тела.

2.2. Деформация тела. Закон Гука

Формула

$$\delta R = -\sigma_{ik}\delta u_{ik} \tag{2.7}$$

определяет работу δR по изменению деформации тела через изменение тензора деформации.

Если деформация тела достаточно мала, то по прекращении действия вызвавших деформацию внешних сил тело возвращается в исходное недеформированное состояние. Такие деформации называют *упругими*. При больших деформациях прекращение действия внешних сил не приводит к полному исчезновению деформации – остается некоторая остаточная деформация, так что состояние тела отличается от того, в каком оно находилось до приложения к нему сил. Такие деформации называют *пластическими*.

Основное термодинамическое соотношение для деформируемых тел

$$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S + \sigma_{ik}\mathrm{d}u_{ik}, \tag{2.8}$$

При равномерном всестороннем сжатии тензор напряжений $\sigma_{ih} = -p\delta_{ih}$.

В этом случае

$$\sigma_{ik}\mathrm{d}u_{ik} = -p\delta_{ik}\mathrm{d}u_{ik} = -p\mathrm{d}u_{ii} = -p\mathrm{d}V,$$

где $\mathrm{d}V$ – относительное изменение единичного объема.

Приращение свободной энергии тела $F = E - TS$ имеет вид

$$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T + \sigma_{ik}\mathrm{d}u_{ik}.$$

2.2.1. Закон Гука

Разлагая F по степеням u_{ik}, получаем с точностью до членов второго порядка выражение для свободной энергии деформированного изотропного тела:

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2}u_{ii}^2 + \mu u_{ik}^2 . \tag{2.9}$$

Величины λ и μ называются *коэффициентами Ламэ*.

Изменение объема при деформации определяется суммой u_{ii}. Если эта сумма равна нулю, то это значит, что при деформировании объем данного тела остается неизменным и меняется только его форма. Такие деформации без изменения объема называют *сдвигом*.

Обратным случаем является деформация, сопровождаемая изменением объема, но без изменения формы. Каждый элемент объема тела при такой деформации остается подобным самому себе. Тензор такой деформации имеет вид $u_{ik} = \text{const}\cdot\delta_{ik}$. Такую деформацию называют *всесторонним сжатием*. Всякую деформацию можно представить в виде суммы деформаций чистого сдвига и всестороннего сжатия:

$$u_{ik} = (u_{ik} - 1/3\delta_{ik}u_{ll}) + 1/3\delta_{ik}u_{ll}. \qquad (2.10)$$

Первый член справа представляет собой чистый сдвиг, поскольку сумма его диагональных компонентов равна нулю ($\delta_{ii} = 3$). Второй же член связан со всесторонним сжатием.

Воспользовавшись указанным разложением произвольной деформации на сдвиг и всестороннее сжатие, вместо (2.9) можно написать

$$F = \mu(u_{ik} - 1/3\delta_{ik}u_{ll})^2 + K/2u_{ll}^2, \qquad (2.11)$$

где опущен член F_0, равный свободной энергии недеформированного тела.

Величины K и μ называют соответственно *модулем всестороннего сжатия* и *модулем сдвига; K* связано с коэффициентами Ламэ соотношением

$$K = \lambda + 2/3\mu. \qquad (2.12)$$

Отсюда имеем для тензора напряжений

$$\sigma_{ik} = Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - 1/3\delta_{ik}u_{ll}). \qquad (2.13)$$

Это выражение определяет тензор напряжений через тензор деформации для изотропного тела. Из него видно, что если деформация является чистым сдвигом или чистым всесторонним сжатием, то связь между σ_{ik} и u_{ik} определяется соответственно одним только модулем сдвига или модулем всестороннего сжатия.

Обратные формулы, выражающие u_{ik} через σ_{ik}, имеют вид

$$u_{ik} = \frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll} + \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll}\right). \qquad (2.14)$$

При всестороннем (равномерном) сжатии

$$u_{ii} = -p/K. \qquad (2.15)$$

Поскольку деформации малы, то u_{ii} и p – малые величины, при этом отношение u_{ii}/p относительного изменения объема к давлению в дифференциальном виде записывается как $\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$. Таким образом, $\frac{1}{K} = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$. Величину *1/K* называют *коэффициентом всестороннего сжатия* (или просто коэффициентом сжатия).

Тензор деформации u_{ik} является линейной функцией тензора напряжений σ_{ik}., т.е. деформация пропорциональна приложенным к телу силам. Этот закон, имеющий место для малых деформаций, называют *законом Гука*.

2.2.2. Однородные деформации

Деформации, при которых тензор деформации постоянен вдоль всего объема тела, называются *однородными*. Например, однородной деформацией является равномерное всестороннее сжатие.

Пример. Рассмотрим теперь *простое растяжение* (или сжатие) стержня. Пусть стержень расположен вдоль оси z и к его концам приложены силы, растягивающие его в противоположные стороны. Эти силы действуют равномерно на всю поверхность концов стержня; пусть сила, действующая на единицу поверхности, будет равна p.

Поскольку деформация однородна, т. е. u_{ik} постоянны вдоль тела, то постоянен также и тензор напряжений σ_{ik}, а поэтому его можно определить непосредственно из граничных условий. На боковой поверхности стержня внешние силы отсутствуют, откуда следует, что $\sigma_{ik}n_k = 0$. Поскольку единичный вектор $\mathbf{n}$ на боковой поверхности перпендикулярен к оси z, т.е. имеет только компоненты n_x, n_y, то отсюда следует, что все компоненты σ_{ik}, за исключением только σ_{zz}, равны нулю. На поверхности концов стержня имеем $\sigma_{ik}n_i = p$, откуда $\sigma_{zz} = p$.

Из общего выражения (2.14), связывающего компоненты тензоров деформации и напряжений, мы видим, что все компоненты u_{ik} с $i \neq k$ равны нулю. Для остальных компонент находим

$$u_{xx} = u_{yy} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3K}\right)p; \; u_{zz} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{3K}\right)p\,. \qquad (2.16)$$

Компонента u_{zz} определяет относительное удлинение стержня вдоль оси z. Коэффициент при p называют *коэффициентом растяжения*, а обратную величину – *модулем растяжения* (или *модулем Юнга) E:*

$$u_{zz} = p/E, \qquad (2.17)$$

где
$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}\,. \qquad (2.18)$$

Компоненты u_{xx} и u_{yy} определяют относительное сжатие стержня в поперечном направлении. Отношение поперечного сжатия к продольному растяжению называют *коэффициентом Пуассона:*

$$u_{xx} = -\sigma u_{zz}\,, \qquad (2.19)$$

где $\sigma = \dfrac{3K - 2\mu}{3K + \mu}$.

Тензор напряжений выражается через тензор деформации согласно

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\sigma}\left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}\delta_{ik}\right); \qquad (2.20)$$

обратно:

$$u_{ik} = \frac{1}{E}\left((1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\sigma_{ll}\delta_{ik}\right) \qquad (2.21)$$

или в расписанном по компонентам виде:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)u_{xx} + \sigma\left(u_{yy} + u_{zz}\right)\right],\\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)u_{yy} + \sigma\left(u_{xx} + u_{zz}\right)\right],\\
\sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\left[(1-\sigma)u_{zz} + \sigma\left(u_{xx} + u_{yy}\right)\right],\\
\sigma_{xy} &= \frac{E}{(1+\sigma)}u_{xy},\; \sigma_{xz} = \frac{E}{(1+\sigma)}u_{xz},\; \sigma_{yz} = \frac{E}{(1+\sigma)}u_{yz}
\end{aligned} \qquad (2.22)$$

и обратные формулы:

$$
\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \sigma\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right], \\
u_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \sigma\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right)\right], \\
u_{zz} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \sigma\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right], \\
u_{xy} &= \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xy},\ u_{xz} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xz},\ u_{yz} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{yz}.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Рассмотрим теперь сжатие стержня, боковые стороны которого закреплены так, что его поперечные размеры не могут меняться. Внешние силы, производящие сжатие стержня, приложены к его основаниям и действуют вдоль его длины, которую мы опять выберем в качестве оси z. Такую деформацию называют *односторонним сжатием*. Поскольку стержень деформируется только вдоль оси z, то из всех компонент u_{ik} от нуля отлична только u_{zz}. Из (2.22) имеем теперь

$$
\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz},\ \ \sigma_{zz} = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}u_{zz}.
$$

Обозначая опять сжимающую силу посредством p ($\sigma_{zz} = p$; p отрицательно при сжатии), имеем

$$
u_{zz} = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}p\ .
$$

Коэффициент при p называется коэффициентам одностороннего сжатия. Для напряжений, возникающих в поперечном направлении, имеем

$$
\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{p\sigma}{(1-\sigma)}.
$$

2.3. Уравнения равновесия изотропных тел

Подставим в общие уравнения $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0,$ где ρ – плотность, **g** – вектор ускорения силы тяжести, выражение (2.20) для тензора напряжений. Имеем

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\sigma} \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k}.$$

Подставляя сюда $u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_k} + \frac{\partial u_k}{\partial u_i} \right),$ получаем уравнения равновесия в виде

$$\frac{E}{2(1+\sigma)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{E\sigma}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} + \rho g_i = 0. \qquad (2.24)$$

Эти уравнения удобно переписать в векторных обозначениях. В этих обозначениях величины $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}$ являются компонентами вектора Δ**u**, а $\frac{\partial u_i}{\partial x_l} \equiv \operatorname{div} \mathbf{u}$. Таким образом, уравнения равновесия приобретают вид

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = -\rho \mathbf{g} \frac{2(1+\sigma)}{E}. \qquad (2.25)$$

Иногда бывает удобным писать это уравнение в несколько ином виде, воспользовавшись известной формулой векторного анализа:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}.$$

Тогда (2.25) приобретает вид

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = -\rho \mathbf{g} \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{E(1-\sigma)}. \qquad (2.26)$$

Если деформация вызывается не объемными силами, а силами, приложенными к поверхности тела, то уравнение равновесия будет иметь вид

$$(1 - 2\sigma)\Delta \mathbf{u} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \qquad (2.27)$$

или в другом виде

$$2(1-\sigma)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u} - (1-2\sigma)\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{u} = 0. \qquad (2.28)$$

Внешние силы входят в решение только через посредство граничных условий.

Применяя к уравнению (2.27) операцию div, имеем

$$\Delta\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \qquad (2.29)$$

т. е. величина div **u** (определяющая изменение объема при деформации) является гармонической функцией. Применяя к уравнению (2.27) оператор Лапласа Δ, получаем

$$\Delta\Delta\mathbf{u} = 0, \qquad (2.30)$$

т. е. в равновесии вектор деформации удовлетворяет *бигармоническому уравнению*.

В случае *плоской деформации* во всем теле одна из компонент вектора смещения равна нулю ($u_z = 0$), а компоненты u_x, u_y зависят только от x, y. При этом тождественно обращаются в нуль компоненты u_{zz}, u_{xz}, u_{yz} тензора деформации, а с ними и компоненты σ_{xz}, и σ_{yz} тензора напряжений (но не продольное напряжение σ_{zz}, существование которого должно обеспечить постоянство длины тела вдоль оси z).

Поскольку все величины не зависят от координаты z, то уравнения равновесия (при отсутствии внешних объемных сил) $\dfrac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0$ сводятся в данном случае к двум уравнениям:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} = 0. \qquad (2.31)$$

Наиболее общим видом функций σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy}, удовлетворяющих этим уравнениям, является

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = \frac{\partial^2\chi}{\partial x\partial y}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}, \qquad (2.32)$$

где χ – произвольная функция от x и y. Легко получить уравнение, которому должна удовлетворять эта функция. Такое уравнение должно существовать в силу того, что три величины σ_{xx}, σ_{xy}, σ_{yy} выражаются в действительности всего через две величины u_x, u_y и по-

тому не являются независимыми. С помощью формул (2.22) найдем для плоской деформации

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}(u_{xx} + u_{yy}).$$

Но $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \Delta\chi$; $u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \equiv \operatorname{div}\mathbf{u}$, и поскольку $\operatorname{div}\mathbf{u}$ есть гармоническая функция, то функция χ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta\chi = 0, \tag{2.33}$$

т.е. является бигармонической. Функцию χ называют *функцией напряжений*.

Продольное напряжение σ_{zz} определяется по формуле

$$\sigma_{zz} = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}(u_{xx} + u_{yy}) = \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

или

$$\sigma_{zz} = \sigma\Delta\chi. \tag{2.34}$$

Задача 2.1. Поле деформации цилиндра радиусом R имеет вид $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0{,}1\boldsymbol{\rho}\sin\left(\frac{\pi\rho}{2R}\right)$; $\boldsymbol{\rho} = \{x, y\}$ – радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра z; $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$.

Определить продольное напряжение на поверхности цилиндра $\sigma_{zz}(R)$, считая коэффициент Пуассона σ и модуль Юнга E заданными.

Решение. Используем закон Гука, выражающий тензор напряжений через тензор деформации, и учтем, что в данном случае деформация не зависит от координаты z:

$$\sigma_{zz}(R) = \frac{E\sigma\left(u_{xx}(R) + u_{yy}(R)\right)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} = 0{,}2\frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}.$$

Задача 2.2. Поле деформации упругого тела имеет вид $u_x = u_y = \frac{\alpha}{3}(x^3 + y^3)$, $u_z = \alpha(x^2 + y^2)z$, $\alpha = \text{const}$. Определить поверхности постоянного напряжения $\sigma_{zz} = \text{const}$.

Решение. Используем закон Гука, выражающий тензор напряжений через тензор деформации:

$$\sigma_{zz} = \frac{E\left[\sigma\left(u_{xx}(R) + u_{yy}(R)\right) + \left(1-\sigma\right)u_{zz}\right]}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} = \frac{E\alpha\left(x^2 + y^2\right)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} = \text{const}.$$

Следовательно, поверхности постоянного напряжения $\sigma_{zz} = \text{const}$ – коаксиальные цилиндры с общей осью *z*.

Задача 2.3. Поле деформации однородно деформированного стержня имеет вид $u_x = -\alpha\sigma x$, $u_y = -\alpha\sigma y$, где σ – коэффициент Пуассона, $\alpha = \text{const} > 0$.

Определить растягивающее давление *p*, если модуль Юнга равен *E*.

Решение. Используя определение коэффициента Пуассона, находим $u_{zz} = -\sigma^{-1}u_{xx} = -\sigma^{-1}u_{yy} = \alpha$.

Одновременно связь между растягивающим давлением *p* и компонентой тензора деформации u_{zz} определяется модулем Юнга *E*: $u_{zz} = p/E$, откуда находим $p = \alpha E$.

Задача 2.4. Поле деформации упругого стержня длиной *l* имеет вид (*z* – координата вдоль оси стержня)

$$u_x = \frac{\sigma}{E} f_0(l-z)x;\ u_y = \frac{\sigma}{E} f_0(l-z)y;\ u_z = -\frac{f_0}{2E}\left[l^2 - (l-z)^2 - \sigma(x^2 + y^2)\right],$$

где *E* и σ – упругие модули; $f_0 = \text{const}$.

Определить давление и скалывающее напряжение, действующие на боковую поверхность стержня (радиус стержня *R*).

Решение. Определяем давление *p* как компоненту σ_{xx} на боковой поверхности стержня, учитывая цилиндрическую симметрию задачи:

$$p = \sigma_{xx} = \frac{E\left[\sigma\left(u_{zz}(R) + u_{yy}(R)\right) + \left(1-\sigma\right)u_{xx}(R)\right]}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \cdot 0 \equiv 0.$$

Для определения скалывающих напряжений вычислим компоненты тензора напряжений σ_{xy} и σ_{xz}, пользуясь соотношениями

$$\sigma_{yz} = \frac{Eu_{xy}}{(1+\sigma)} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) = 0; \ \sigma_{xz} = \frac{Eu_{xz}}{(1+\sigma)} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = 0.$$

Задача 2.5. Определить деформацию $u(z)$ (однородную по сечению) стержня, который закреплен одним концом ($z = 0$) на оси центрифуги, вращающейся с постоянной частотой ω. Плотность стержня ρ, длина l, модуль Юнга E.

Решение. В системе отсчета, вращающейся вместе со стержнем, на единицу его объема действует центробежная растягивающая сила $f_z(z) = \rho\omega^2 z$. Уравнение равновесия деформированного стержня имеет вид $\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = -\rho\omega^2 z$. Выражая компоненту тензора напряжений σ_{zz} через тензор деформации $\sigma_{zz} = Eu_{zz} = E\frac{\partial u_z}{\partial z}$ и подставляя полученное выражение в уравнение равновесия, получаем уравнение для поля продольной деформации стержня: $E\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = -\rho\omega^2 z$. Граничные условия имеют вид: $u_z(0) = 0$ (закрепленный конец стержня), $u_{zz}(l) = 0$ (свободный конец стержня). Решение уравнения равновесия ищем в виде линейной комбинации общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $u_z = u_0(z) + u_1(z) \equiv C + Az - \frac{\rho\omega^2}{6E}z^3$. Неизвестные коэффициенты находятся из граничных условий, так что решение принимает вид $u_z = \frac{\rho\omega^2 z}{6E}\left(3l^2 - z^2\right)$.

Задача 2.6. Определить деформацию круглой пластинки радиусом R с заделанными краями, расположенной горизонтально в поле тяжести.

Решение. Выбираем полярные координаты с началом в центре пластинки. Сила, действующая на единицу площади поверхности

пластинки, равна $P = \rho hg$. Уравнение равновесия пластинки $D\,\Delta^2\zeta = P$ приобретает вид

$$\Delta^2\zeta = 64\beta\,, \qquad \beta = 3\rho g\left(1-\sigma^2\right)/16h^2E$$

(положительные ζ соответствуют смещению по направлению действия силы тяжести). Поскольку ζ есть функция от r, то для Δ в полярных координатах надо писать $\Delta = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$. Общий интеграл этого уравнения есть

$$\zeta = \beta r^4 + ar^2 + b + cr^2\ln\frac{r}{R} + \mathrm{d}\ln\frac{r}{R}.$$

В данном случае надо положить $\mathrm{d} = 0$, так как $\ln\frac{r}{R}$ обращается при $r = 0$ в бесконечность, а также $c = 0$, так как этот член приводит к особой точке у $\Delta\zeta$ при $r = 0$ (это соответствовало бы силе, приложенной к центру пластинки). Постоянные a и b определяются из граничных условий $\zeta = 0$, $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r} = 0$ при $r = R$. В результате находим

$$\zeta = \beta\left(R^2 - r^2\right)^2.$$

Задача 2.7. Определить деформацию круглой пластинки радиусом R с опертыми краями, расположенной горизонтально в поле тяжести.

Решение. Граничные условия $\zeta = 0$, $\frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2} + \sigma\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0$ в случае круглой пластинки приобретают вид

$$\zeta = 0\,, \qquad \frac{\partial^2\zeta}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}r} = 0.$$

Решение, аналогичное решению задачи 2.6, приводит к результату

$$\zeta = \beta\left(R^2 - r^2\right)\left(\frac{5+\sigma}{1+\sigma}R^2 - r^2\right).$$

2.4. Слабый изгиб стержней

Изгиб является слабым, если направление касательной **t** к стержню медленно меняется вдоль его длины, т.е. производная $\mathrm{d}\mathbf{t}/\mathrm{d}l$ мала. Другими словами, радиус кривизны изогнутого стержня в каждой точке должен быть велик по сравнению с длиной стержня. Практически это условие сводится к требованию малости поперечного прогиба стержня по сравнению с его длиной.

Уравнения

$$EI_2X'''' - K_x = 0 \text{ и } EI_1Y'''' - K_y = 0 \tag{2.35}$$

определяют зависимость прогибов X и Y от z, т.е. форму слабо изогнутого стержня (**K** – действующая на стержень внешняя сила, отнесенная к единице его длины).

Сила **F** внутренних напряжений, действующая на поперечное сечение стержня, выражается так:

$$F_x = -EI_2X'''; \; F_y = -EI_1Y'''. \tag{2.36}$$

Таким образом, вторые производные определяют момент сил внутренних напряжений, а третьи производные определяют сами эти силы. Силу (2.36) называют *перерезывающей силой*. Если изгиб производится сосредоточенными силами, то перерезывающая сила постоянна вдоль каждого из отрезков стержня между точками приложения сил и в каждой точке испытывает скачок, равный приложенной внешней силе. Величины EI_2 и EI_1 называют жесткостью стержня на изгиб соответственно в главных плоскостях x, z и y, z.

Если приложенные к стержню внешние силы действуют в одной плоскости, то изгиб стержня произойдет в одной плоскости, и уравнения равновесия принимают вид

$$X'''' = \frac{\cos\alpha}{I_2E}K, \; Y'''' = \frac{\sin\alpha}{I_1E}K,$$

где α – угол между плоскостью действия сил и первой главной плоскостью изгиба (плоскость x, z).

В случае либо очень сильного растяжения T, либо при достаточно малом EI, что может быть связано с малой толщиной h (*струна*), уравнения равновесия имеют вид

$$TX'' + K_x = 0, \; TY'' + K_y = 0. \tag{2.37}$$

Концы струны представляются закрепленными в том смысле, что их координаты заданы, т.е.

$$X = Y = 0.$$

Задача 2.8. Определить форму прогиба стержня длиной l под влиянием собственного веса при различных способах закрепления его концов.

Решение. Искомая форма определяется решением уравнения

$$\zeta'''' = q/EI$$

(q – вес единицы длины стержня) с теми или другими граничными условиями на его концах, сформулированными в тексте. При различных способах закрепления концов стержня получаются различные формы прогиба и максимальные смещения – так называемые стрелки прогиба (начало координат везде выбрано в одном из концов стержня):

а) оба конца стержня заделаны:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2 (z-l)^2, \;\; \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{384}\frac{ql^4}{EI};$$

б) оба конца оперты:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z\left(z^3 - 2lz^2 + l^3\right), \;\; \zeta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI};$$

в) один конец ($z = l$) заделан, а другой ($z = 0$) оперт:

$$\zeta = \frac{q}{48EI} z\left(2z^3 - 3lz^2 + l^3\right), \;\; \zeta\left(0,42l\right) = 0,0054\frac{ql^4}{EI};$$

г) один конец ($z = 0$) заделан, а другой ($z = l$) свободен:

$$\zeta = \frac{q}{24EI} z^2\left(z^2 - 4lz + 6l^2\right), \;\; \zeta\left(l\right) = \frac{1}{8}\frac{ql^4}{EI}.$$

Задача 2.9. Определить форму прогиба стержня длиной l с опертыми концами, с моментом инерции кругового сечения I, если к стержню приложена внешняя сила $\vec{K} = \{K_x(z), 0, 0\}$, где $K_x(z) = f_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)$; $f_0 = \text{const}$. Модуль Юнга равен E.

Решение. Уравнение равновесия стержня под действием распределенной силы имеет вид $EIX^{''''}(z)-K_x(z)=0.$ Граничные условия на опертых концах стержня соответствуют отсутствию поперечных смещений и моментов сил: $X(0)=X(l)=0$; $X^{''}(0)=X^{''}(l)=0$. Общее решение уравнения равновесия есть сумма общего решения однородного дифференциального уравнения $X_0(z)$ при $K_x(z)\equiv 0$ и частного решения $X_1(z)$: $X(z)=X_0(z)+X_1(z)$. Отбор решения $X_0(z)$ производится так, чтобы достигалось согласие полного решения с граничными условиями. В данном случае это приводит к следующему результату: $X_0(z)\equiv 0$, $X(z)=\dfrac{f_0}{EI\left(\pi/l\right)^4}\sin\left(\dfrac{\pi z}{l}\right)$.

Задача 2.10. Определить форму прогиба стержня кругового сечения (момент инерции *I*) под действием силы тяжести (ускорение *g*). Погонная плотность стержня ρ, длина *l*, модуль Юнга *E*. Стержень лежит на острие, расположенном в точке $z=l/2$.

Решение. Очевидно, сосредоточенная сила, приложенная к стержню со стороны острия, равна весу стержня по абсолютной величине и направлена противоположно силе тяжести: $f(x=l/2)=\rho gl.$ Уравнение равновесия стержня имеет вид $EIZ^{''''}(x)=-\rho g$, причем сосредоточенная сила $f(x=l/2)$ задает условие разрыва третьей производной: $EI\left[Z^{'''}\left(\dfrac{l}{2}-0\right)-Z^{'''}\left(\dfrac{l}{2}+0\right)\right]=-\rho gl;$ производные же более низкого порядка и сама функция $Z(x)$ непрерывны в этой точке. Дополнительные граничные условия характеризуют свободные концы стержня: $Z''(x=0,l)=Z'''(x=0,l)=0.$ Ищем решение в виде общего решения однородного уравнения (при $g=0$) и частного решения неоднородного уравнения:

$$Z(x)=A_{\pm}+B_{\pm}x+C_{\pm}x^2+D_{\pm}x^3-\frac{\rho g}{24EI}x^4,$$

где нижние индексы у коэффициентов отличают два сопредельных интервала изменения переменной *x*: $\left(0,l/2\right)$ и $\left(l/2,l\right)$. Подстановка данных решений в описанные выше граничные условия и условия поведения в точке $x=l/2$ не приводит к единственному решению.

Это связано с двумя обстоятельствами. Первое, тривиальное, дополнительное условие состоит в фиксации исходного (до деформации) положения стержня по вертикали, например заданием условия: $z(l/2)=0$. Этого условия оказывается недостаточно для определения всех восьми неопределенных коэффициентов в общем решении. Еще одно дополнительное условие может быть получено из простых соображений: потребуем отсутствия проекции силы тяжести стержня вдоль его оси в точке опоры на острие, т.е. $Z'(l/2)=0$.

После наложения данных дополнительных условий задача становится полностью определенной и решение принимает вид $Z(0\le x\le l/2)=-\dfrac{\rho g}{24EI}\left(\dfrac{3}{16}l^4-\dfrac{1}{2}l^3x+x^4\right)$, причем $Z(l/2\le x\le l)$ получается из данного выражения заменой $x\to l-x$.

Задача 2.11. Определить форму прогиба стержня под влиянием приложенной к его середине сосредоточенной силы *f*.

Решение. Везде, кроме точки $z=l/2$, имеем уравнение $\zeta''''=0$. Граничные условия в концах стержня ($z=0$ и $z=l$) определяются способом закрепления; в точке же $z=l/2$ должны быть непрерывны ζ, ζ', ζ'', а разность перерезывающих сил $F=-EI\zeta'''$ по обе стороны этой точки должна быть равна силе *f*.

Форма стержня (на участке $0\le z\le l/2$) и стрелка прогиба даются следующими формулами:

а) оба конца стержня заделаны:

$$\zeta=\frac{f}{48EI}z^2(3l-4z),\ \ \zeta\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{fl^3}{192EI};$$

б) оба конца стержня оперты:

$$\zeta=\frac{f}{48EI}z\left(3l^2-4z^2\right),\ \ \zeta\left(\frac{l}{2}\right)=\frac{fl^3}{48EI}.$$

Форма стержня симметрична относительно его середины, так что функция $\zeta(z)$ на участке $l/2\le z\le l$ получается отсюда простой заменой z и $l-z$.

2.5. Устойчивость упругих систем

При отсутствии поперечных изгибающих внешних сил уравнения равновесия сжатого стержня имеют очевидное решение $X=Y=0$,

соответствующее стержню, остающемуся при воздействии продольной силы T прямолинейным. Это решение соответствует устойчивому равновесию стержня лишь до тех пор, пока сжимающая сила $|T|$ остается меньше некоторого критического значения $T_{\text{кр}}$. При $|T| < T_{\text{кр}}$ прямолинейная форма стержня устойчива по отношению к произвольному малому возмущению. При $|T| > T_{\text{кр}}$ прямолинейная форма отвечает неустойчивому равновесию. При $|T| = T_{\text{кр}}$ наряду с решением $X = Y = 0$ должны существовать еще и состояния слабого изгиба, которые тоже являются равновесными. Поэтому критическое значение $T_{\text{кр}}$ можно определить как то значение $|T|$, при котором у уравнений

$$EI_2 X'''' + |T| X'' = 0, \;\; EI_1 Y'''' + |T| Y'' = 0 \qquad (2.38)$$

появляется отличное от нуля решение. Само же это решение определяет характер деформации, которой подвергнется стержень непосредственно после потери им устойчивости.

Задача 2.12. Определить критическую сжимающую силу для стержня с шарнирно закрепленными концами.

Решение. Поскольку нас интересует наименьшее значение $|T|$, при котором появляется отличное от нуля решение уравнений (2.38) ($EI_2 X'''' + |T| X'' = 0$, $EI_1 Y'''' + |T| Y'' = 0$), то достаточно рассмотреть лишь то из этих двух уравнений, которое содержит меньшее из I_1, I_2; пусть $I_2 < I_1$. Ищем решение уравнения

$$EI_2 X'''' + |T| X'' = 0$$

в виде

$$X = A + Bz + C\sin kz + D\cos kz, \;\; k = \left(|T| / EI_2\right)^{1/2}.$$

Отличное от нуля решение, удовлетворяющее условиям $X = 0$, $X'' = 0$ при $z = 0$ и $z = l$, есть

$$X = C\sin kz,$$

причем должно быть $\sin kz = 0$. Отсюда находим искомую критическую силу

$$T_{\text{кр}} = \pi^2 EI_2 / l^2 .$$

Задача 2.13. То же для стержня с заделанными концами.

Ответ: $T_{\text{кр}} = 4\pi^2 EI_2 / l^2$.

Задача 2.14. То же для стержня, один из концов которого заделан, а другой свободен.

Ответ: $T_{\text{кр}} = \pi^2 EI_2 / 4l^2$.

Задача 2.15. Определить критическую сжимающую силу для стержня (кругового сечения) с шарнирно закрепленными концами, лежащего на упругом основании.

Решение. На изогнутый стержень, лежащий на упругом основании, действует сила $K = -\alpha\zeta$, пропорциональная прогибу ζ. Вместо уравнений (2.38) ($EI_2 X'''' + |T| X'' = 0$, $EI_1 Y'''' + |T| Y'' = 0$) здесь надо рассмотреть уравнение

$$EIX'''' + |T| X'' + \alpha X + 0.$$

Аналогичное исследование приводит к решению

$$X = A\sin\frac{n\pi}{l} z; \;\; T_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}\left(n^2 + \frac{\alpha l^4}{n^2\pi^4 EI}\right),$$

причем для n должно быть взято то из целых значений, для которого получается наименьшее значение $T_{\text{кр}}$. При достаточно больших значениях α получается $n > 1$, т.е. после потери устойчивости стержень принимает форму с несколькими пучностями.

Задача 2.16. Стержень кругового сечения подвергнут кручению, и его концы заделаны. Определить критическую величину кручения, после которой прямолинейная форма стержня делается неустойчивой.

Решение. Критическое значение угла кручения определяется появлением отличных от нуля решений уравнений слабого изгиба закрученного стержня. Для вывода уравнения подставляем выражение для момента сил внутренних напряжений **M**:

$$\mathbf{M} = EI\left[\mathbf{t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}l}\right] + C\tau\mathbf{t}$$

(τ – постоянный угол кручения) в уравнение $\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}l} = [\mathbf{F}\mathbf{t}]$; это дает

$$EI\left[\mathbf{t}\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{t}}{\mathrm{d}l^2}\right] + C\tau\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}l} - [\mathbf{F}\mathbf{t}] = 0\,.$$

Дифференцируем это уравнение; поскольку изгиб слабый, то при дифференцировании первого и третьего членов можно считать $\mathbf{t}$ постоянным, равным вектору $\mathbf{t}_0$, направленному по оси стержня (оси z). Помня также, что $\mathrm{d}\mathbf{F}/\mathrm{d}l = 0$ (внешние силы по длине стержня отсутствуют), получаем

$$EI\left[\mathbf{t}_0\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{t}}{\mathrm{d}l^3}\right] + C\tau\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{t}}{\mathrm{d}l^2} = 0$$

или в компонентах:

$$Y'''' - æX''' = 0,\ X'''' + æY''' = 0,$$

где $æ = C\tau/EI$.

Введя в качестве неизвестной функции $\xi = X + iY$, получим уравнение

$$\xi'''' - iæ\xi''' = 0.$$

Ищем решение, удовлетворяющее условиям $\xi = 0$, $\xi' = 0$ при $z = 0$ и $z = l$ в виде

$$\xi = a\left(1 + iæz - \mathrm{e}^{iæz}\right) + bz^2,$$

и находим в качестве условия совместимости для получающихся для a и b уравнений соотношение

$$e^{iæl} = \frac{2 + iæl}{2 - iæl},\ \ \frac{æl}{2} = \mathrm{tg}\ \frac{æl}{2}.$$

Наименьший корень этого уравнения $æl/2 = 4{,}49$, так что

$$\tau_{\text{кр}} = \frac{8,98EL}{Cl}.$$

Задача 2.17. То же для стержня с шарнирно закрепленными концами.

Решение. Здесь получается

$$\xi = a\left(1 - e^{i\text{æ}z} - \frac{\text{æ}^2}{2}z^2\right) + bz,$$

причем æ определяется из $e^{i\text{æ}l} = 1$, т.е. $\text{æ}l = 2\pi$. Поэтому искомый критический угол кручения

$$\tau_{\text{кр}} = 2\pi EI/Cl.$$

Задача 2.18. Определить предел устойчивости вертикального стержня, находящегося под действием собственного веса; нижний конец стержня заделан.

Решение. Если продольное натяжение $F_z \equiv T$ меняется вдоль длины стержня, то в первом члене (2.38) ($\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{M}}{\mathrm{d}l^2} = \left[\frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}l}\mathbf{t}\right] + \left[\mathbf{F}\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}l}\right]$) $\frac{\mathrm{d}F_z}{\mathrm{d}l} \neq 0$ и вместо уравнений равновесия $I_2EX'''' - TX'' - K_x = 0$ и $I_1EY'''' - TY'' - K_y = 0$ получается

$$I_2EX'''' - \left(TX'\right)' - K_x = 0;$$
$$I_1EY'''' - \left(TY'\right)' - K_y = 0.$$

В данном случае поперечные изгибающие силы отсутствуют по всей длине стержня, а $T = -q\left(l - z\right)$, где q – вес единицы длины стержня, а z отсчитывается от его нижнего конца. Предполагая, что $I_2 < I_1$, рассматриваем уравнение

$$I_2EX''' = TX' = -q\left(l - z\right)X'$$

(при $z = l$ автоматически имеем $X''' = 0$). Общий интеграл этого уравнения для функции $u = X'$ есть

$$u = \eta^{1/3}\left[aJ_{-1/3}(\eta) + bJ_{1/3}(\eta)\right],$$

где

$$\eta = \frac{2}{3}\left(\frac{q}{EI_2}(l-z)^3\right)^{1/2}.$$

Граничные условия $X' = 0$ при $z = 0$ и $X'' = 0$ при $z = l$ дают для функции $u(\eta)$ условия

$$u = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \eta_0 \equiv \frac{2}{3}\left(\frac{ql^3}{EI_2}\right)^{1/2} \text{ и } u'\eta^{1/3} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0.$$

Чтобы удовлетворить этим условиям, надо положить $b = 0$, причем $J_{-1/3}(\eta_0) = 0$. Наименьший корень этого уравнения $\eta_0 = 1{,}87$, откуда находим критическую длину стержня

$$l_{\text{кр}} = 1{,}98\left(\frac{EI_2}{q}\right)^{1/3}.$$

Задача 2.19. Определить предельную длину круглого стержня, превышение которой сделает его неустойчивым к прогибу под действием сжимающей силы *T*, приложенной вдоль оси стержня с шарнирно закрепленными концами. Длина стержня *l*, модуль Юнга *E*, момент инерции поперечного сечения стержня *I*.

Решение. Неустойчивость означает появление ненулевого решения уравнения равновесия стержня $EIX''''(z) + |T|X''(z) = 0$, удовлетворяющего граничным условиям $X = 0$, $X'' = 0$ в точках $z = 0$, l.

Общее решение уравнения равновесия имеет вид $X(z) = A + Bz + C\sin(kz) + D\cos(kz)$, где $k = \left(|T|/EI\right)^{1/2}$. Удовлетворяющее граничным условиям решение имеет вид $X(z) = C\sin(kz)$ при условии $kl = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Первое ненулевое решение с $n = 1$ появляется при условии $l \geq l_{\text{кр}} = \pi\left(EI/|T|\right)^{1/2}$.

2.6. Колебания стержней и пластинок

Уравнение продольных колебаний в стержнях имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0. \qquad (2.39)$$

Скорость распространения продольных волн в стержнях равна скорости продольных волн в тонких пластинках. Уравнение продольных колебаний в тонких пластинках имеет вид

$$\left(E/\rho\right)^{1/2}; \qquad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} &= \frac{1}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} &= \frac{1}{1-\sigma^2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2(1-\sigma)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \qquad (2.41)$$

Если плоская волна распространяется вдоль оси x (т.е. деформация зависит только от координаты x), то уравнения (2.41) сильно упрощаются и принимают вид

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho\left(1-\sigma^2\right)}\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + 0, \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - \frac{E}{2\rho(1+\sigma)}\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = 0. \qquad (2.42)$$

Скорость распространения волны с колебаниями, параллельными направлению распространения,

$$u_x = \left(\frac{E}{\rho\left(1-\sigma^2\right)}\right)^{1/2}. \qquad (2.43)$$

Скорость же волны (u_y) с колебаниями, перпендикулярными направлению распространения (лежащими в плоскости пластинки), равна скорости c_t поперечных волн в неограниченной среде.

Задача 2.20. Определить частоты радиальных собственных колебаний упругого шара радиусом R.

Решение. Выбираем сферические координаты с началом в центре шара. При радиальных колебаниях **u** направлено по радиусу и зависит только от **r** (и от t). Поэтому rot **u** = 0. Введем «потенциал» смещения φ согласно $u_r = u = \partial\varphi/\partial r$. Выраженное через φ уравнение

движения сводится к волновому уравнению $c_l^2\Delta\varphi=\ddot{\varphi}$, которое для периодических по времени $\left(\sim e^{-i\omega t}\right)$ колебаний имеет вид

$$\Delta\varphi\equiv\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)=-k^2\varphi,\quad k=\frac{\omega}{c_l}.$$

Решение, конечное во всем объеме шара, включая его центр, есть

$$\varphi=A\frac{\sin kr}{r}$$

(временной множитель не пишем). Радиальные напряжения

$$\sigma_{rr}=\rho\left\{\left(c_l^2-2c_t^2\right)u_{ii}+2c_t^2u_{rr}\right\}=\rho\left\{\left(c_l^2-2c_t^2\right)\Delta\varphi+2c_t^2\varphi''\right\}$$

или с учетом уравнения (2.39)

$$\frac{1}{\rho}\sigma_{rr}=-\omega^2\varphi-4c_t^2\frac{1}{r}\varphi'.$$

Граничное условие $\sigma_{rr}(R)=0$ приводит к уравнению

$$\frac{\operatorname{tg}kR}{kR}=\frac{1}{1-\left(kRc_l/2c_t\right)^2}.$$

Его корни определяют частоты свободных колебаний $\omega=c_lk$.

Задача 2.21. Определить частоты продольных собственных колебаний стержня длиной *l*, один из концов которого закреплен, а другой свободен.

Решение. На закрепленном конце $(z=0)$ должно быть $u_z=0$, а на свободном конце $(z=l)$ $\sigma_{zz}=Eu_{zz}=0$, т.е. $\partial u_z/\partial z=0$. Ищем решение уравнения (2.39) ($\frac{\partial^2u_z}{\partial z^2}-\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}=0$) в виде

$$u_z=A\cos\left(\omega t+\alpha\right)\sin kz,\quad k=\omega\left(\rho/E\right)^{1/2}.$$

Из условия при $z=l$ имеем $\cos kl=0$, откуда для собственных частот находим

$$\omega = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} \frac{\pi}{2l}(2n+1) \text{ (n – целые числа).}$$

Задача 2.22. То же для стержня, оба конца которого свободны закреплены.

Решение. В обоих случаях

$$\omega = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} \frac{\pi}{l} n.$$

Задача 2.23. Определить частоты свободных колебаний струны длиной l.

Решение. Уравнение движения струны

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{\rho S}{T}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

[ср. с уравнением равновесия (2.37)]. Граничные условия: $X = 0$ при $z = 0, l$. Собственные частоты

$$\omega = \left(\frac{\rho S}{T}\right)^{1/2} \frac{n\pi}{l}.$$

Задача 2.24. Определить частоты поперечных собственных колебаний стержня длиной l с заделанными концами.

Решение. Уравнение, описывающее малые колебания изгиба стержня, $\rho S\ddot{X} = EI_y \dfrac{\partial^4 X}{\partial z^4}$, при подстановке в него

$$X = X_0(z)\cos(\omega t + \alpha)$$

принимает вид

$$\frac{d^4 X_0}{dz^4} = æ^4 X_0, \quad æ^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{EI_y}.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$X_0 = A\cos æz + B\sin æz + C\sin æz + D\sin æz.$$

Постоянные A, B, C, D определяются из граничных условий $X=0$, $dX/dz=0$ при $z=0, l$. В результате находим

$$X_0 = A\{(\sin æl - \operatorname{sh} æl)\ (\cos æz - \operatorname{ch} æz) - (\cos æl - \operatorname{ch} æl)\ (\sin æz - \operatorname{sh} æz)\}$$

и уравнение

$$\cos æl \operatorname{ch} æl = 1,$$

корни которого определяют собственные частоты колебаний. Наименьшая из собственных частот

$$\omega_{\min} = \frac{22,4}{l^2}\frac{EI_y}{\rho S}.$$

Задача 2.25. То же для стержня с опертыми концами.

Решение. Аналогично решению задачи 2.24. Результат:

$$X_0 = A\sin æz,$$

а частоты определяются из $\sin æl = 0$, т.е.

$$æ = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Наименьшая частота

$$\omega_{\min} = \frac{9,87}{l^2}\frac{EI_y}{\rho S}.$$

Задача 2.26. То же для стержня, заделанного на одном конце и свободного на другом.

Решение. Аналогично решению задачи 2.24 получаем для смещения

$$X_0 = A\{(\cos æl + \operatorname{ch} æl)\ (\cos æz - \operatorname{ch} æz) + (\sin æl - \operatorname{sh} æl)\ (\sin æz - \operatorname{sh} æz)\}$$

(закрепленный конец $z=0$, свободный $z=l$), и уравнение

$$\cos æl \operatorname{ch} æl + 1 = 0$$

для собственных частот. Наименьшая частота

$$\omega_{\min} = \frac{3,52}{l^2}\frac{EI_y}{\rho S}.$$

Задача 2.27. Определить собственные частоты колебаний (поперечных) стержня длиной l с круговым сечением с моментом инерции I, погонной плотностью ρ, модулем Юнга I. Стержень «приклеен» к упругому основанию жесткости α (т.е. при изгибе на стержень со стороны основания действует сила $K_x = -\alpha \cdot X(z)$, пропорциональная $X(z)$ – прогибу по оси x). Считать концы стержня опертыми.

Решение. Уравнение колебаний стержня имеет вид $\rho\ddot{X}(z,t) = -EI\dfrac{\partial^4 X}{\partial z^4} - \alpha X$ с граничными условиями $X(0) = X(l) = 0$; $X''(0) = X''(l) = 0$, которые означают нулевые внешние силы и моменты сил. Решение ищем методом разделения переменных: $X(z,t) = A\cos(\omega t + \alpha)x(z)$. Тогда получается следующее уравнение для $x(z)$: $kx = \dfrac{\partial^4 x}{\partial z^4}$, $k = \dfrac{\rho\omega^2 - \alpha}{EI}$. Решение, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид $x(z) = a\sin(kz)$, причем $k = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^4$, $n = 1, 2, \ldots$ Отсюда получаем окончательный ответ для набора частот собственных колебаний стержня на подложке: $\omega_n^2 = \dfrac{\alpha + EI\left(\pi n/l\right)^4}{\rho}$.

Задача 2.28. Определить собственные колебания прямоугольной пластинки (длины сторон a и b) с опертыми краями.

Решение. Уравнение свободных колебаний пластинки $\rho\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + \dfrac{D}{h}\Delta^2\zeta = 0$ при подстановке в него

$$\zeta = \zeta_0\left(x, y\right)\cos\left(\omega t + \alpha\right)$$

приобретает вид

$$\Delta\Delta\zeta_0 - æ^4\zeta_0 = 0,\ \ æ^4 = \omega^2\frac{12\rho\left(1-\sigma^2\right)}{h^2 E}.$$

Выбираем оси координат по сторонам пластинки. Граничные условия для опертой пластинки $\zeta = 0$, $\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + \sigma \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l} \dfrac{\partial \zeta}{\partial n} = 0$ приобретают вид

$$\text{при } x = 0,\ a\text{:}\ \zeta = 0,\ \partial^2 \zeta / \partial x^2 = 0;$$
$$\text{при } y = 0,\ b\text{:}\ \zeta = 0,\ \partial^2 \zeta / \partial y^2 = 0.$$

Удовлетворяющее этим условиям решение есть

$$\zeta_0 = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

(m, n – целые числа), причем частоты определяются равенством

$$\omega = \frac{Eh}{12\rho\left(1-\sigma^2\right)} \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right].$$

Задача 2.29. Определить собственные частоты колебаний мембраны прямоугольной формы с длинами сторон a и b.

Решение. Уравнение колебаний мембраны

$$T \Delta \zeta = \rho h \ddot{\zeta}$$

(ср. с уравнением равновесия $T \Delta \zeta + P = 0$). Края мембраны должны быть закреплены так, что $\zeta = 0$. Соответствующее решение для прямоугольной мембраны есть

$$\zeta = A \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \omega t,$$

где собственные частоты

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho h} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

(m, n – целые числа).

3. ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1. Общие сведения

3.1.1. Уравнения электромагнитного поля

При наличии электрических зарядов в пространстве устанавливается возбужденное состояние, которое называется электромагнитным полем. Его силовыми характеристиками являются напряженности электрического и магнитного полей. Их пространственные и временные производные связаны уравнениями Максвелла. Уравнения Максвелла не вытекают из каких-либо общих теоретических положений, а являются обобщенной записью наблюдаемых на опыте закономерностей.

Дифференциальная форма уравнений поля:	*Интегральная форма уравнений поля:*
$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$;	$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{S}$;
$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$;	$\oint \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}J + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{S}$;
$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$;	$\oint \mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{S} = 0 = 0$;
$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$;	$\oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi e$.

Здесь плотность заряда $\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0}\frac{\Delta e}{\Delta V}$ и соответственно заряд $e = \int \rho\,\mathrm{d}V$.

Связь между математическим определением дискретного распределения точечных зарядов и непрерывной функцией $\rho(\vec{r})$ можно установить с помощью δ-функции:

$$\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \text{ или } \rho(\mathbf{r}) = \sum e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

(суммирование по всем зарядам), где δ-функция определяется соотношениями

$\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$;

$\delta(x) = \infty$ при $x = 0$;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1,\ \int_a^b f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0);\ a < 0 < b.$$

Соответственно плотность тока $\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v} = \sum_a e_a \mathbf{v}(\mathbf{r}_a)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$.

Непосредственного из системы уравнений Максвелла следует уравнение непрерывности: $\operatorname{div}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, выражающее закон сохранения заряда.

Одним из важных следствий, вытекающих из системы уравнений Максвелла, является существование энергии электромагнитного поля. В интегральной форме закон сохранения энергии W имеет следующий вид:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \int \mathbf{jE}\,\mathrm{d}V = -\oint \mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}\,\mathrm{d}V,$$

где $\mathbf{F} = \dfrac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ – плотность потока энергии (вектор Пойнтинга);

$\dfrac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}$ – плотность энергии электромагнитного поля.

В дифференциальной форме закон сохранения энергии записывается так:

$\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}\right) = -\mathbf{jE} - \operatorname{div}\mathbf{F}$, т.е. изменение энергии единицы объема поля равно работе, произведенной над зарядами в этом объеме и дивергенции плотности потока энергии.

Вопросы и задания

1. Показать, что система уравнений Максвелла в дифференциальной форме непосредственно следует из опытных законов Кулона, Био – Савара, Фарадея.
2. Дать физическую интерпретацию уравнениям Максвелла в дифференциальной и интегральной форме.
3. Дать математическую характеристику системы уравнений Максвелла. Является ли система уравнений полной?
4. Удовлетворяют ли уравнения поля требованию суперпозиции?
5. Получить уравнение непрерывности из уравнений Максвелла.
6. Представить уравнение непрерывности в интегральной форме.
7. Ввести ток смещения $\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, исходя из уравнения непрерывности.

3.1.2. Уравнения электромагнитного поля в материальных средах

3.1.2.1. Основные уравнения (уравнения макроскопической электродинамики)

Характер электромагнитных процессов в веществе зависит от его свойств. В веществе поле быстро меняется от точки к точке и во времени. Поэтому физическое значение имеют лишь средние значения соответствующих величин. Характеристики поля в веществе определяют как среднее по физически бесконечно малому объему: $\langle f \rangle = \frac{1}{V}\int f \, \mathrm{d}V$.

Система уравнений поля в средах имеет следующий вид:

Дифференциальная форма уравнений поля:	*Интегральная форма уравнений поля:*
$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$;	$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\oint \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$
$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$;	$\oint \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}J + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\oint \mathbf{D}\,\mathrm{d}\mathbf{S}$;
$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho$;	$\oint \mathbf{D}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi\int \rho\,\mathrm{d}V = 4\pi e$;
$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$;	$\oint \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = 0$,

где $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ – вектор электрической индукции; $\mathbf{P}$ – поляризация среды; $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{m}$ – вектор индукции магнитного поля; $\mathbf{m}$ – намагниченность; $\mathbf{j}$ – плотность тока проводимости; ρ – плотность свободных зарядов. $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ являются средними значениями напряженностей электрического и магнитного полей в среде.

Уравнения связывают пять основных величин: **E**, **B**, **H**, **D** и **j**. Чтобы при заданном распределении зарядов и токов уравнения допускали единственное решение для векторов поля, к этим уравнениям добавляются соотношения, описывающие поведение веществ под влиянием поля – уравнения связи или материальные уравнения:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H};$$
$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E},$$

где ε, μ – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды; σ – удельная проводимость среды.

Последнее соотношение выражает закон Ома в дифференциальной форме.

Уравнения электромагнитного поля в веществе в отличие от уравнений поля в вакууме имеют ограниченную область применимости вследствие ограниченной применимости уравнений связи только для слабых полей.

3.1.2.2. Граничные уравнения на поверхности раздела

На границе раздела двух сред, характеризуемых проницаемостями ε_1, ε_2, μ_1, μ_2, поведение векторов **E**, **B**, **H**, **D** определяется следующим образом:

1. Нормальные составляющие вектора **D** испытывают скачок:

$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma$, где σ – поверхностная плотность заряда.

2. Тангенциальные составляющие вектора **E** непрерывны:

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

3. Нормальные составляющие вектора **B** непрерывны:

$$B_{1n} = B_{2n}.$$

4. Тангенциальные составляющие вектора **H** претерпевают разрыв непрерывности, определяемый соотношением

$$\left[\mathbf{n}_1, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1\right] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_S,$$

где $\mathbf{j}_S$ – поверхностная плотность тока. Если $\mathbf{j}_S = 0$, то $H_{1t} = H_{2t}$.

Вопросы

1. Почему нельзя пользоваться уравнениями поля в дифференциальной форме на границе раздела двух сред?

2. Как получить граничные условия для векторов **E**, **B**, **H**, **D**?

3.2. Электростатика

3.2.1. Электростатическое поле

3.2.1.1. Поле в вакууме

Электростатическое поле – поле неподвижных зарядов. В этом случае все производные по времени и токи равны нулю и уравнения Максвелла в вакууме имеют следующий вид:

Дифференциальная форма уравнений поля:	*Интегральная форма уравнений поля:*
$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho;$	$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi e;$
$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0;$	$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = 0;;$
$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0;$	$\oint \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = 0;$
$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0;$	$\oint \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = 0.$

Система уравнений распадается на систему независимых уравнений для электрического и магнитного полей. Для **H** получается тривиальное решение $\mathbf{H} = 0$, так как неподвижные заряды не окружены магнитным полем. Полагая $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, получаем уравнение Пуассона: $\Delta\varphi = -4\pi\rho$.

Таким образом, уравнения электростатики полностью эквивалентны уравнению Пуассона. Если заряды расположены в конечной области пространства, окружающего точку, выбранную за начало координат, то при $r \to \infty$ напряженность поля должна убывать не медленнее чем $1/r^2$. Поэтому решения уравнения Пуассона должны удовлетворять требованию $\varphi \to 0$ при $r \to \infty$.

При $\rho = 0$ потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta\varphi = 0$.

Уравнение Пуассона для точечного заряда имеет вид

$$\Delta\frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R}).$$

Потенциал и плотность точечного заряда выражаются формулами

$$\varphi = \frac{e}{R};\ \rho = e\delta(\mathbf{R}).$$

Общее решение уравнения Пуассона имеет следующий вид:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,\mathrm{d}V,$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки поля; $\mathbf{r}'$ – радиус-вектор точки источника поля.

3.2.1.2. Поле в веществе

Дифференциальная форма уравнений поля	*Интегральная форма уравнений поля*
$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0;$	$\oint \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = 0;$
$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho;$	$\oint \mathbf{D}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi e;$
$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0;$	$\oint \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = 0;$
$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0;$	$\oint \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$

Эти уравнения полностью определяют электростатическое поле в среде.

В однородном диэлектрике ε = const, поэтому для скалярного потенциала получается уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},$$

откуда следует, что потенциал поля, создаваемого зарядами с объемной плотностью свободного заряда ρ, можно записать в виде

$$\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho}{r}\,\mathrm{d}V.$$

Поле точечного заряда в диэлектрической среде

$$\mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{\varepsilon R^3}.$$

На границе раздела двух диэлектриков потенциал удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi_1 = \varphi_2;\ \varepsilon_2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_2 - \varepsilon_1\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_1 = 4\pi\sigma.$$

Основные задачи электростатики:

– по заданному распределению зарядов найти распределение потенциала и электрического поля во всем пространстве – так называемая *прямая задача*;

– найти распределение заряда по известному распределению потенциала – *обратная задача*.

Вопросы и задания

1. Какой характер носит поле в электростатике (потенциальный, соленоидальный)?

2. Почему скалярный потенциал определен неоднозначно?

3. Показать, что из уравнений Лапласа следует, что потенциал электрического поля нигде не имеет ни максимума, ни минимума.

4. Пояснить, откуда следуют граничные условия для потенциала.

5. Какой вид имеет уравнение для потенциала в неоднородном диэлектрике?

6. Чему равно поле внутри проводника при внесении его в электростатическое поле?

7. Как направлено поле у поверхности проводника при отсутствии тока?

8. Показать, что в проводящей среде, характеризуемой константами ε и μ, заряды со временем рассасываются. Определить характерное время рассасывания – время релаксации (максвелловское время релаксации).

Примечание. Воспользуйтесь уравнением непрерывности. ***Ответ***. $\tau = \dfrac{\varepsilon}{4\pi\sigma}$.

9. Справедлив ли в электростатике третий закон Ньютона?

3.2.2. Электростатическая энергия зарядов

Энергия системы зарядов должна быть равна энергии электростатического поля:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}^2\,\mathrm{d}V.$$

Подставив $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ и преобразовав подынтегральное выражение, получим

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\,\mathrm{d}V.$$

Для системы точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2}\sum_i e_i \varphi_i \,, \tag{3.1}$$

где $\sum_i$ сумма– по всем зарядам; φ_i – потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке локализации заряда e_i. Потенциалы

$$\varphi_i = \sum_k \frac{e_k}{R_{ik}} \,,$$

R_{ik} – расстояние между i-м и k-м зарядами.

Для указанной системы зарядов последнее выражение содержит бесконечный член, происходящий от потенциала собственного поля заряда. Этот член является собственной потенциальной энергией системы зарядов, он лишен физического смысла и должен быть опущен. Поэтому в формуле (3.1) остается только энергия взаимодействия зарядов:

$$W' = \frac{1}{2}\sum_i e_i' \varphi_i' \,, \text{ где } \varphi_i' = \sum_{k \neq i} \frac{e_k}{R_{ik}} \,.$$

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов

$$W_{12}' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}} \,.$$

Энергия электростатического поля в среде

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{ED}\,\mathrm{d}V. \tag{3.2}$$

Выражение (3.2) можно преобразовать к виду

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\,\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int \sigma\varphi\,\mathrm{d}S, \tag{3.3}$$

где σ – поверхностная плотность заряда.

Формула (3.3) получается подстановкой $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ в выражение (3.2), использованием формулы $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{D}) = \mathbf{D}\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{div}\mathbf{D}$ и переходом к интегралам.

Задача 3.1. Найти потенциал φ и поле **E** элементарного электрического диполя на расстояниях $R >> p/c$.

Ответ. $\varphi = \dfrac{\mathbf{pR}}{R^3}$; $\mathbf{E} = \dfrac{3(\mathbf{pr})\mathbf{R}}{R^5} - \dfrac{\mathbf{p}}{R^3}$.

В сферической системе координат поле имеет вид

$$E_R = \frac{2p\cos\theta}{R^3};$$

$$E_\theta = \frac{p\sin\theta}{R^3};$$

$$E_\alpha = 0.$$

Задача 3.2. Найти потенциал и поле равномерно заряженного по объему с плотностью ρ шара радиусом a. Решить, применяя: 1) теорему Гаусса; 2) уравнение Пуассона.

Решение *с использованием уравнения Пуассона*. Из условия симметрии следует, что потенциал в любой точке зависит только от расстояния R этой точки до центра шара. Внутри шара $\Delta\varphi = -4\pi\rho$. В сферических координатах это уравнение имеет вид

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) = -4\pi\rho \ (\rho = \text{const});$$

$$\varphi = \varphi_1 = -\frac{2\pi\rho}{3}R^2 + \frac{A_1}{R} + A_2.$$

Вне шара $\Delta\varphi = 0$ ($\rho = 0$);

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right) = 0; \quad \varphi_2 = \frac{A_3}{R} + A_4.$$

Из условий конечности при $R = 0$ $A_1 = 0$.

Из условий обращения в нуль при $R \to \infty$ $A_4 = 0$. Значения A_2 и A_3 определяются из граничных условий при $R = a$: $\varphi_1 = \varphi_2$; $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial R}\right)_1 = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial R}\right)_2$.

Ответ. $\varphi = 2\pi\rho\left(a^2 - \dfrac{R^2}{3}\right)$, $E = \dfrac{4\pi}{3}\rho R$ $(R \le a)$; $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}\rho a^3\dfrac{1}{R}$, $E = \dfrac{4\pi}{3}\rho a^3\dfrac{1}{R^2}$ $(R > a)$.

Задача 3.3. Найти потенциал φ и напряженность **E** электрического поля сферы, равномерно заряженной по поверхности. Заряд сферы *e*, радиус *a*. Решить, применяя: 1) теорему Гаусса; 2) уравнение Лапласа.

Ответ. Внутри шара $\varphi = \text{const} = \dfrac{e}{a}$, $\mathbf{E} = 0$; вне шара $\varphi = \dfrac{e}{R}$; $\mathbf{E} = \dfrac{e}{R^2}\dfrac{\mathbf{R}}{R}$.

Задача 3.4. Бесконечно длинный круговой цилиндр радиусом *R* равномерно заряжен по поверхности так, что на единицу его длины приходится заряд χ. Найти потенциал φ и напряженность поля **E**. Решить, применяя: 1) теорему Гаусса; 2) уравнение Пуассона.

Ответ. $\varphi = \varphi_0$; $\mathbf{E} = 0$ ($r \le R$);

$$\varphi = \varphi_0 - 2\chi \ln\frac{r}{R};\ \mathbf{E} = \frac{2\chi}{r}\frac{\mathbf{r}}{r}\ \ (r > R),$$

где φ_0 – потенциал на поверхности; *r* – расстояние от оси цилиндра.

Задача 3.5. Бесконечно плоская пластина толщиной *a* равномерно заряжена по объему с плотностью ρ. Найти потенциал φ и напряженность **E** электрического поля. Рассмотреть предельный случай бесконечно заряженной плоскости, полагая, что при $a \to 0$

$\rho \to \infty$, $\ln(a\rho) = \sigma = \text{const}$.

Решение. Исходя из симметрии считаем, что потенциал зависит только от координаты *x*, перпендикулярной пластине. Тогда $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -4\pi\rho$. Решая уравнение Пуассона, получаем:

внутри пластины $\varphi = -2\pi\rho x^2 + Ax + B$;

вне пластины $\varphi = Cx + D$.

Наложим условие калибровки $\varphi(0) = 0$. Полагая $A = B = 0$ (объяснить почему), постоянные *C* и *D* определяем из граничных условий.

Задача 3.6. Показать, что в полости цилиндрического конденсатора напряженность поля определяется формулой $E = \dfrac{2\chi}{r^2}\mathbf{r}$. Решить, применяя: 1) теорему Гаусса; 2) уравнение Пуассона.

Задача 3.7. Показать, что в полости шарового конденсатора поле определяется формулой $\mathbf{E} = \dfrac{e}{R^3}\mathbf{R}$. Решить, применяя: 1) теорему Гаусса; 2) уравнение Пуассона.

Задача 3.8. Поверхность бесконечно длинного кругового цилиндра равномерно заряжена так, что на единицу его длины приходится заряд χ. Найти поле внутри и вне цилиндра. Показать, что скачок электрического вектора при прохождении через поверхность цилиндра равен $4\pi\sigma$. Решить задачу, применяя: 1) теорему Гаусса; 2) уравнение Пуассона.

Ответ. Внутри цилиндра $E = 0$; вне цилиндра $E = \dfrac{2\chi\vec{r}}{r^2}$.

Задача 3.9. Заряд распределен в пространстве по периодическому закону $\rho = \rho_0 \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$, образуя бесконечную пространственную периодическую решетку. Найти потенциал φ электрического поля.

Ответ. $\varphi(x, y, z) = \dfrac{4\pi\rho_0}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cos\alpha x \cos\beta y \cos\gamma z$.

Задача 3.10. Плоскость $z = 0$ заряжена с плотностью, меняющейся по периодическому закону $\sigma = \sigma_0 \sin \alpha x \sin \beta y$, где σ_0, α, β – постоянные. Найти потенциал этой системы зарядов.

Ответ. При $z > 0$ $\varphi = \dfrac{2\pi\sigma_0}{\lambda} e^{-\lambda z} \sin\alpha x \sin\beta y$, $\lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Задача 3.11. Внутри шара радиусом R, равномерно заряженного по объему с плотностью ρ, имеется незаряженная полость, радиус которой R_1, а центр отстоит от центра шара на расстояние a ($a + R_1 < R$). Найти поле $\mathbf{E}$.

Ответ. $\mathbf{E} = \dfrac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r} - \dfrac{4}{3}\pi\rho(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \dfrac{4}{3}\pi\rho\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ – радиус-вектор центра полости.

Задача 3.12. Заряд электрона распределен в атоме водорода, находящемся в нормальном состоянии, с плотностью $\rho(r) = -\dfrac{e_0}{\pi a_Б^3} \exp\left(-\dfrac{2r}{a_Б}\right)$, где $a_Б$ – боровский радиус; $a_Б = 0{,}52 \cdot 10^{-10}$ см; $e_0 = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный заряд. Найти потенциал φ_e и напряженность $\mathbf{E}_e$ электрического поля электронного заряда, а также полный потенциал φ и напряженность $\mathbf{E}$ поля в атоме, считая, что протонный заряд сосредоточен в начале координат.

Ответ. $\varphi_e(r) = -\frac{e_0}{r}\left(1 - e^{-\frac{2r}{a_Б}}\right) + \frac{e_0}{a_Б} e^{-\frac{2r}{a_Б}}$;

$$E_e(r) = -\frac{e_0}{r^2}\left[1 - \left(\frac{2r}{a_Б} + 1\right) e^{-\frac{2r}{a_Б}}\right] + \frac{2e_0}{a_Б^2} e^{-\frac{2r}{a_Б}}.$$

Потенциал полного электрического поля в атоме $\varphi(r) = \varphi_e(r) + \frac{e_o}{r}$.

Задача 3.13. Вычислить потенциал поля, создаваемого в вакууме тонким металлическим кольцом радиусом *a*, несущим заряд *q*. Найти поле на оси кольца.

Решение. В цилиндрических координатах ρ, φ, *z* (рис. 3.1) потенциал поля

$$\varphi(r) = \int \frac{\chi}{r} \mathrm{d}l = 2\chi \int_0^{\pi} \frac{a}{r} \mathrm{d}\psi = 2\chi a \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{a^2 + \rho^2 + z^2 - 2a\rho\cos\psi}},$$

где $\chi = \frac{q}{2\pi a}$.

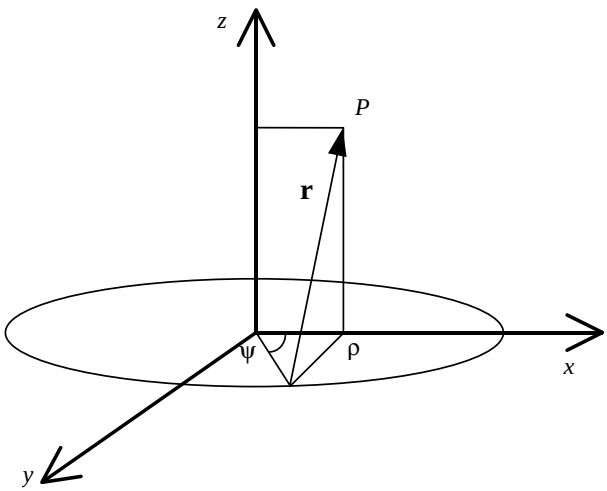

Рис. 3.1

Введем $2\theta = \psi - \pi$, тогда $d\psi = 2d\theta\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = -\cos\psi$,

$$\varphi(r) = \frac{4\chi a}{A}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{2q}{\pi\sqrt{A}}K(k),$$

где $A = (a+\rho)^2 + z^2$; $k^2 = \dfrac{4a\rho}{(a+\rho)^2 + z^2}$; $K(k)$ – эллиптический интеграл 1-го рода.

Потенциал и поле на оси кольца найти самостоятельно.

Задача 3.14. Каким распределением зарядов создается потенциал, имеющий в сферических координатах вид $\varphi(r) = \dfrac{q\exp(-\alpha r)}{r}$, где q, α – постоянные. Полный заряд системы равен нулю.

Решение. $\Delta\varphi = -4\pi\rho$. Представив оператор Лапласа в сферических координатах и продифференцировав, получим $\rho(r) = -q\dfrac{\alpha^2}{4\pi r}e^{-\alpha r}$. Проверим правильность этого результата. Полный заряд e внутри сферы радиусом R

$$e_R = \int \rho\, dV = -\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\alpha^2}{4\pi r}e^{-\alpha r}r^2\sin\theta\, d\varphi d\theta dr = (\alpha R + 1)e^{-\alpha R} - 1.$$

При $R = 0$ $e_0 = 0$. При $R = \infty$ $e_\infty = -1$, что противоречит исходному условию $e_\infty = 0$. Чтобы найти ошибку, преобразуем дифференциальное уравнение $E_r = -\dfrac{d\varphi}{dr} = e^{-\alpha r}(\alpha r + 1)\dfrac{1}{r^2}$ в интегральное $\oint E_R R^2 d\Omega = 4\pi e_R$, откуда $e_R = (\alpha R + 1)e^{-\alpha R}$; $e_0 = 1$; $e_\infty = 0$. Таким образом, чтобы получить правильный результат, надо добавить к распределению плотности заряда новый член: $\rho(r) = -\dfrac{q\alpha^2}{4\pi r}e^{-\alpha r} + \delta(\mathbf{r})$, тогда

$$\Delta\varphi = -4\pi q\delta(\mathbf{r}) + \frac{q\alpha^2 e^{-\alpha r}}{r} = 4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Объяснить полученный результат.

Задача 3.15. Найти энергию заряженного по объёму шара радиусом a.

Ответ. $W = \frac{3}{5}\frac{e^2}{a}$.

Задача 3.16. Найти энергию заряженного шара, когда заряд распределен по его поверхности.

Ответ. $W = \frac{e^2}{2a}$.

Задача 3.17. Показать, что при расстоянии между зарядами e_1 и e_2, достаточно большом по сравнению с их размерами, энергия взаимодействия этих зарядов, равная $W_{12} = \frac{1}{8\pi}\int 2\left(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\right) \mathrm{d}V$, сводится к выражениям $W = \frac{e_1 e_2}{r_{12}}$ или $W = \frac{1}{2}(e_1\varphi_1 + e_2\varphi_2)$.

Решение. Представим W_{12} в виде

$$W_{12} = \frac{1}{8\pi}\int 2\left(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\right) \mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi}\int (\nabla\varphi_1)(\nabla\varphi_2)\, \mathrm{d}V.$$

Выделим малую сферу S, охватывающую заряд e_2, и применим теорему Грина:

$$\int \{\varphi_1 \Delta\varphi_2 + (\nabla\varphi_1)(\nabla\varphi_2)\}\, \mathrm{d}V = \oint \varphi_1 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\, \mathrm{d}S;$$

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\oint \varphi_1 \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, \mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi}\int \varphi_1 \Delta\varphi_2\, \mathrm{d}V.$$

Вне сферы S $\Delta\varphi_2 = 0$ и $\int \varphi_1 \Delta\varphi_2\, \mathrm{d}V = 0$. При большем удалении e_1 и e_2 друг от друга φ_1 можно считать равным e_1/r. Следовательно,

$W_{12} = \frac{\varphi_1}{4\pi}\oint \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\, \mathrm{d}S = -\frac{e_1}{4\pi r}\oint E_{2n}\, \mathrm{d}S = \frac{e_1 e_2}{r}$ (нормаль направлена внутрь сферы).

Задача 3.18. Вычислить энергию и силу взаимодействия двух параллельных и бесконечных нитей, равномерно заряженных с линейной плотностью χ и $-\chi$, расположенных на расстоянии a друг от друга в однородной среде с диэлектрической проницаемостью ε.

Решение. Энергия единицы длины одной нити в поле другой $W = \chi\varphi$, где φ – потенциал поля, создаваемого второй нитью в месте нахождения первой, $\varphi = \frac{2\chi \ln a}{\varepsilon}$. Отсюда энергия $W = \frac{2\chi^2}{\varepsilon}\ln a$. Следовательно, сила F, действующая на единицу длины нити, равна $F = -\frac{\partial W}{\partial a} = -\frac{2\chi}{\varepsilon\, a}$.

3.2.3. Электростатическое поле системы зарядов на больших расстояниях

3.2.3.1. Дипольный момент

Потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке $\mathbf{R}_0$, равен $\varphi = \sum_i \frac{e_i}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_i|}$, где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор заряда (рис. 3.2).

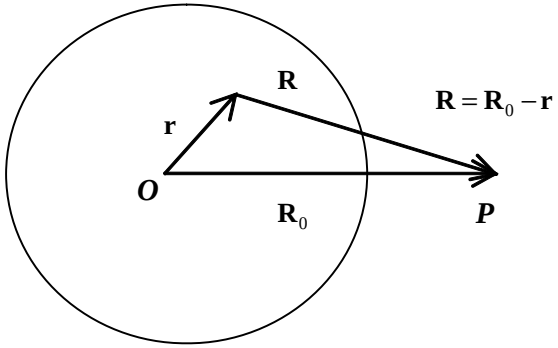

Рис. 3.2

Для расстояний, больших размеров системы, разлагая выражение для потенциала в ряд по степеням параметра $\frac{r_i}{R_0} << 1$ с точностью до первого порядка, получаем $\varphi = \frac{\sum_i e_i}{R} - \sum_i e_e \left(\mathbf{r}_i \operatorname{grad}\left(\frac{1}{R_0}\right)\right)$. Сумма $\mathbf{p} = \sum_i e_i \mathbf{r}_i$ называется дипольным моментом системы зарядов.

Задания

1. Показать, что дипольный момент электрически нейтральной системы зарядов не зависит от выбора начала координат.

2. Показать, что в случае нейтральной системы зарядов при соответствующем выборе начала координат дипольный член в разложении равен нулю.

3. Найти напряженность поля электрически нейтральной системы зарядов на больших расстояниях от системы.

4. Записать выражение для потенциала и дипольного момента при непрерывном распределении зарядов.

3.2.3.2. Мультипольные моменты

В разложении потенциала по степеням $\frac{r_i}{R_0}$: $\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \ldots$

третий член разложения равен $\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{i,\alpha,\beta} e_i x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0}$, где x_α – компоненты вектора **r**; X_α – компоненты вектора $\mathbf{R}_0$, α, β = 1, 2, 3.

Так как функция $\frac{1}{R_0}$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\frac{1}{R_0} \equiv \delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{X_\alpha X_\beta}\frac{1}{R_0} = 0$, то можно написать

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{i,\alpha,\beta} e_i\left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{3}r^2\delta_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0} = \frac{1}{6}\sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{1}{R_0},$$

где $D_{\alpha\beta}$ – симметричный тензор второго ранга, определяемый по формуле

$$D_{\alpha\beta} = \sum_i e_i\left(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}\right),$$

называется квадрупольным моментом системы ($\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера). Так как сумма диагональных компонентов тензора $\sum_\alpha D_{\alpha\alpha} = 0$, то симметричный тензор второго ранга имеет всего пять независимых компонент. С его помощью запишем

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{6}\sum_{\alpha,\beta} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{D_{\alpha\beta}}{6}\left(\frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3}\right).$$

Если дипольный момент электронейтральной системы зарядов равен нулю, то разложение φ начинается с $\varphi^{(2)}$. Примером такой системы является система из двух диполей с противоположными направлениями дипольных моментов, находящихся на бесконечно малом расстоянии друг от друга. Учет высших членов разложения дает потенциал поля мультиполей любого порядка.

Вопросы и задания

1. Чему соответствует нулевой член разложения по мультиполям?
2. Показать, что в системе главных осей (не диагональные элементы равны нулю) лишь два из трех главных значений независимы.
3. Сколько независимых компонент у тензора квадрупольного момента аксиально-симметричного распределения зарядов?
4. Какой вывод следует из наличия у системы зарядов квадрупольного момента?
5. Верно ли утверждение, что если $Q_{\alpha\beta} = 0$, то система зарядов сферически симметрична?
6. Установить связь между тензорами квадрупольного момента и момента инерции в общем случае и в главных осях.

По определению компоненты тензора момента инерции равны:

$$I_{xx} = \int \rho\,(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}V; \qquad I_{xy} = -\int \rho\, xy\,\mathrm{d}V;$$

$$I_{yy} = \int \rho\,(x^2 + z^2)\,\mathrm{d}V; \qquad I_{xz} = -\int \rho\, xz\,\mathrm{d}V;$$

$$I_{zz} = \int \rho\,(z^2 + y^2)\,\mathrm{d}V; \qquad I_{yz} = -\int \rho\, yz\,\mathrm{d}V.$$

Задача 3.19. Вычислить потенциал и напряженность поля, создаваемого в вакууме аксиально-симметричным квадруполем: $D_{zz} = D$, $D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D$.

Ответ. $\varphi = \frac{3}{4}\frac{D}{r^3}(3\cos^2\theta - 1)$, где θ – полярный угол.

Задача 3.20. Чему равен квадрупольный момент октуполя – восемь зарядов расположены в вершинах куба с правильным чередованием знаков.

Задача 3.21. Эллипсоид с полуосями a, b, c равномерно заряжен по объему, его полный заряд q. Найти потенциал φ на больших расстояниях от эллипсоида с точностью до квадрупольного члена. Рассмотреть частные случаи эллипсоида вращения с полуосями $a = b$ и c и шара ($a = b = c$).

Ответ. $\varphi(x, y, z) = \dfrac{q}{2r} + q\dfrac{a^2(3x^2 - r^2) + b^2(3y^2 - r^2) + c^2(3z^2 - r^2)}{10r^5}$;

при $a = b$ $\varphi(r, \theta) = \dfrac{q}{2r} + q\dfrac{c^2 - a^2}{5}\dfrac{P_1(\cos\theta)}{r^3}$, где $P_1(\cos\theta)$ – полином Лежандра;

при $a = b = c$ $\varphi = \dfrac{q}{2r}$.

Задача 3.22. Вычислить тензор квадрупольного момента двух концентрических колец радиусами a и b, несущих заряды q и $-q$. Найти потенциал на большом расстоянии от этой системы зарядов.

Решение. Распределение зарядов аксиально-симметрично. В этом случае тензор квадрупольного момента $D_{\alpha\beta} = \sum_i e_i \left(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta}\right)$ приводится к виду $D_{zz} = D = -\sum_i e_i r^2 = -q(a^2 - b^2)$. Так как $\sum_{\alpha\alpha} D_{\alpha\alpha} = 0$, то $D_{xx} = D_{yy} = -\dfrac{1}{2}D = \dfrac{1}{2}q(a^2 - b^2)$.

В сферических координатах с полярной осью вдоль оси симметрии и полюсом в центре колец $\varphi(r, 0) = -\dfrac{q(a^2 - b^2)}{4R_0^3}(3\cos^2\theta - 1)$. Это потенциал линейного квадруполя, у которого заряды находятся на расстоянии $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}$ от центрального заряда $2q$.

Задача 3.23. Найти потенциал поля φ на больших расстояниях, если:

а) заряды q, $-2q$, q расположены по оси z на расстоянии a друг от друга (линейный квадруполь);

б) заряды $\pm q$ расположены в вершинах квадрата со стороной a так, что соседние заряды имеют разные знаки; в начале координат нахо-

дится заряд $+q$, стороны квадрата параллельны осям X и Y (плоский квадруполь).

Ответ: а) $\varphi \approx qa^2 \dfrac{3z^2 - R^2}{R^5}$;

б) $\varphi \approx \dfrac{3qa^2 \sin^2\theta \cos\alpha \sin\alpha}{R^3}$, где θ – полярный угол; α – азимут.

3.2.4. Энергия системы зарядов во внешнем поле

Потенциальная энергия системы зарядов

$$W = \sum_i e_i \varphi_i(\mathbf{r}_i),$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор i-го заряда; $\varphi(\mathbf{r}_i)$ – потенциал внешнего поля в точке $\mathbf{r}_i$.

Пусть поле слабо меняется на протяжении системы зарядов. Выбрав начало координат внутри системы и разложив W по степеням $\mathbf{r}_i$, получим: $W = W^{(0)} + W^{(1)} + W^{(2)} + \ldots$,

где $W^{(0)} = \sum_i e_i \varphi_0$, $W^{(1)} = \operatorname{grad}\varphi_0 \sum_i e_i r_i = -\mathbf{E}_0\mathbf{p}$,

$$W^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{i,\alpha,\beta} e_i x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\sum_i e_i\left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{2}r^2\delta_{\alpha\beta}\right) = \sum_{\alpha,\beta}\frac{D_{\alpha\beta}}{6}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial X_\alpha \partial X_\beta};$$

φ_0 и E_0 – потенциал и напряженность электрического поля в начале координат.

Задания

1. Дать характеристику первых трех членов разложения.
2. Что устанавливает квадрупольный член разложения W? Записать его в системе главных осей тензора $D_{\alpha\beta}$ через производные электрического поля.
3. Объяснить, почему сферически симметричные поля не только притягивают, но и притягиваются как точечные.
4. Записать выражение для силы, действующей на систему зарядов во внешнем поле. Рассмотреть электрически нейтральную систему.
5. Записать выражение для момента сил, действующих на электрически нейтральную систему.

6. Найти энергию взаимодействия двух диполей $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, находящихся на большом расстоянии друг от друга.

Ответ. $W = \dfrac{(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) R^2 - 3(\mathbf{p}_1, \mathbf{R})(\mathbf{p}_2, \mathbf{R})}{R^5}$, где $\mathbf{R}$ – вектор расстояния между диполями.

Задача 3.24. Определить поле равномерно поляризованного шара.

Решение. Поле равномерно поляризованного шара должно быть тождественно с полем двух сдвинутых друг относительно друга на отрезок $2l$ (l – смещение центра сферы) шаров радиусом a, равномерно заряженных разноименными электрическими зарядами (поле диполя). Общий заряд каждого шара будет равен $e' = eNV$, где $V = (4/3)\pi a^3$ – объем шара; N – число зарядов каждого знака на единицу объема. Внешнее поле такого шара тождественно с полем диполя момента $\mathbf{p} = 2e'\mathbf{l}$. Потенциал и дипольный момент равны:

$$\varphi_e = 2eNV\frac{\mathbf{e}(l)\mathbf{R}}{R^3} = V\frac{\mathbf{pR}}{R^3} \quad (R \geq 0);$$

$$\mathbf{p} = \sum_i e_i(\mathbf{R}_i \pm \mathbf{l}) = 2e\mathbf{l}N .$$

Внутри шара $\varphi_i = \dfrac{4\pi}{3}R^3\dfrac{\mathbf{pR}}{R^3} = \dfrac{4\pi}{3}\mathbf{pR}$ $(r \leq a)$,

$\varphi_i = \varphi_+ + \varphi_-$,

где $\varphi_+ = 2\pi\rho\left(a^2 - \dfrac{R_+^2}{3}\right)$, $\varphi_- = -2\pi\rho\left(a^2 - \dfrac{R_-^2}{3}\right)$, $\mathbf{R}_+ = \mathbf{R} + \mathbf{l}$, $\mathbf{R}_- = \mathbf{R} - \mathbf{l}$,

$\mathbf{R}_+^2 - \mathbf{R}_-^2 = 4\mathbf{Rl}$ (R_+ и R_- – расстояние точки поля от центра соответствующих шаров),

$$\varphi_i = \frac{8\pi\rho}{3}\mathbf{lR} = \frac{4\pi}{3}\mathbf{pR}, \quad \mathbf{E}_i = -\nabla\varphi_i = -\frac{4\pi}{3}\nabla(\mathbf{pR}) = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{p} .$$

Задача 3.25. В однородном поле помещен шар радиусом a из диэлектрика. Найти поле при наличии шара. $\mathbf{E}_0$ – напряженность поля без шара, направленная вдоль оси OZ. Потенциал поля без шара $\varphi = -E_0 z$, ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика.

Решение. Ищем решение в виде суммы невозмущенного поля плюс поле диполя (дипольное приближение).

Для $R > a$ $\varphi_1 = E_0 z + \frac{p_z}{R^2} = E_0 R\cos\theta + \frac{p\cos\theta}{R^2}$.

Для $R < a$ положим $\varphi_2 = -E_2 z = -E_2 R\cos\theta$, E_2 – поле внутри шара. Такой выбор потенциалов удовлетворяет граничным условиям и уравнению Лапласа, которое имеет два решения, зависящих от cos θ: $AR\cos\theta$ и $(B\cos\theta)/R^2$. При $R \to \infty$ влияние поляризованного шара исчезает, $\frac{p\cos\theta}{R^2} \to 0$, поэтому асимптотическое значение потенциала равно $\varphi_1(R) = -E_0 R\cos\theta$. При $R \to 0$ $\frac{p\cos\theta}{R^2} \to \infty$, поэтому этот член должен отсутствовать в выражении для потенциала внутри шара при $R < a$.

Используем граничные условия при $R = a$: $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$, $\varepsilon_1 \frac{\partial\varphi_1(a)}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial\varphi_2(a)}{\partial n}$.

Получаем уравнения для определения констант p и E_2:

$$-E_0 a + \frac{p}{a^2} = -E_2 a,$$

$$\varepsilon_1 E_0 + \frac{2p_1\varepsilon_1}{a^3} = \varepsilon_2 E.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$p = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E_0 a^3; \quad E_2 = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} E_0.$$

В данной задаче $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$, и поэтому находим потенциал вне и внутри шара в виде:

$$\varphi_1 = -E_0 R\cos\theta + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 a^3 \cos\theta, \quad \varphi_2 = -\frac{3}{\varepsilon + 2} E_0 R\cos\theta.$$

Поляризуемость шара $\alpha = \frac{p}{E_2} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3$.

Задача 3.26. В однородное поле в вакууме с напряженностью E вносится незаряженный изолированный проводник в форме шара радиусом a. Определить установившееся поле, поляризуемость шара и плотность зарядов, индуцированных на поверхности шара.

Решение. Вне шара внешнее поле складывается с полем диполя P поляризованного проводящего шара. Внутри шара напряженность электрического поля равна нулю. Поэтому ищем потенциал искомого поля в виде

$$\varphi_1 = -c \text{ при } r < a;$$

$$\varphi_2 = -E_0 R\cos\theta + \frac{p}{R^2}\cos\theta \text{ при } r > a.$$

Граничные условия при $R = a$: $\varphi_1 = \varphi_2$; $\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma$. Из граничных условий находим $c = 0$, $p = a^3E_0$. Получаем

плотность индуцированных зарядов $\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial R}\right) = \frac{3}{4\pi}E_0\cos\theta$;

поляризуемость шара равна a^3.

Задача 3.27. Точечный заряд q находится на одинаковом расстоянии a от взаимно перпендикулярных заземленных полуплоскостей. Определить создаваемое поле.

Решение. Примем проводящие полуплоскости за координатные плоскости xz и yz ($x \geq 0$, $y \geq 0$, z). В первом квадранте, где находится заряд, поле создается данным зарядом q, и его изображениями ($-q$) и вторичным изображением («изображением изображений») $+q$.

$\varphi = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_3} + \frac{q}{r_4}$, где r_1, r_2, r_3, r_4 – расстояния от рассматриваемой точки поля до заряда q и его изображений.

Задача 3.28. Два однородных диэлектрика с проницаемостью ε_1 и ε_2 граничат по бесконечной плоскости. По одну сторону от этой границы в первой среде на расстоянии a от нее находится заряд q. Определить потенциал создаваемого им поля и поверхностную плотность связанных зарядов на границе раздела сред.

Решение. Поверхность раздела сред совпадает с плоскостью $z = 0$. Согласно методу изображений поле в первой среде равно полю заряда q и его изображения q'. Во второй среде потенциал определяется потенциалом заряда q''. Заряд q'' определяется потоком электрического поля заряда q, который проникает во вторую среду. Потенциал искомого поля ищем в виде

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{q'}{\varepsilon_2 r_2},\ z > 0,$$

$\varphi_2 = \dfrac{q''}{\varepsilon_2 r_1}$, $z < 0$, где $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}$; $r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}$.

Граничные условия при $z = 0$:

$$\varphi_1 = \varphi_2,\ \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}.$$

Из граничных условий находим

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q;\ q'' = \frac{r\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} q.$$

Поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{qa}{\varepsilon_1 r^3},\ r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Весь поверхностный связанный заряд равен $\dfrac{q'}{\varepsilon_1}$.

Задача 3.29. Проводящий шар радиусом *a* окружен концентрическим слоем диэлектрика радиусом *b*. Найти емкость шара. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика *ε*.

Решение. Напряженность поля

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon r^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r} & \text{при } r \ge a; \\ 0 & \text{при } r < a, \end{cases}$$

отсюда следует:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{r} + c_3 & \text{при } r > b, \\ \dfrac{q}{\varepsilon r} + c_2 & \text{при } a \le r \le b, \\ c_1 & \text{при } r < a. \end{cases}$$

Граничные условия:

$\varphi(b + 0) = \varphi(b - 0)$;

$\varphi(a + 0) = \varphi(a - 0)$.

Условие калибровки $\varphi(\infty) = 0$.

Из этих условий находим константы:

$$c_1 = \frac{q}{\varepsilon a}\left[1 + \frac{a}{b}(\varepsilon - 1)\right];,$$

$$c_2 = \frac{q}{b}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon};$$

$c_3 = 0$.

Емкость шара $C = \dfrac{q}{\varphi(a)} = \dfrac{q}{c_1} = \dfrac{\varepsilon a}{1 + \dfrac{a}{b}(\varepsilon - 1)}$.

3.3. Магнитостатика

Магнитостатика – раздел электродинамики, в котором изучаются свойства постоянного во времени магнитного и электрического полей при наличии постоянных токов.

Если заряды совершают финитное движение, при котором частицы остаются все время в конечной области пространства и импульсы всегда конечны, то такое движение имеет стационарный характер. В этом случае среднее по времени магнитное поле $\langle \mathbf{H} \rangle = \dfrac{1}{T}\int \mathbf{H}\mathrm{d}t$ будет функцией только координат и не будет зависеть от времени:

$$\lim \left\langle \frac{\mathrm{d}\mathbf{H}}{\mathrm{d}t} \right\rangle_{T\to\infty} = \frac{1}{T}\int \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{\mathbf{H}(T) - \mathbf{H}(0)}{T} = 0 .$$

Система уравнений Максвелла для магнитостатики имеет вид (*дифференциальная форма уравнений поля*):

$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}$, где $\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v}$; $\mathbf{v}$ – скорость движения зарядов;

$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$;

$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$;

$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$, $\rho = \sum_i e_i'\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$.

Уравнение непрерывности принимает следующий вид:

$$\operatorname{div}\mathbf{j}=0;$$

интегральная форма уравнений поля:

$$\oint(\mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{S})=0,$$

$$\oint(\mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{l})=\frac{4\pi}{c}\int(\mathbf{j},\mathrm{d}\mathbf{S})=\frac{4\pi}{c}I.$$

Последнее уравнение представляет собой закон полного тока: *циркуляция вектора* $\mathbf{H}$ *по контуру равна полному току I, пронизывающему этот контур.*

При вычислении циркуляции удобно брать контур вдоль магнитной силовой линии, тогда $(\mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{l})=|\mathbf{H}||\mathrm{d}\mathbf{l}|$ и интеграл для вектора превращается в интеграл для скаляров, что значительно упрощает расчеты. Поэтому интегральная форма пригодна для проводников простой и симметричной формы, для которых можно сразу определить форму силовых линий исходя из соображений симметрии. В более сложных случаях следует использовать дифференциальную форму уравнений.

Введем вектор-потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ из соотношения $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$, что непосредственно следует из уравнения $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$. Вектор-потенциал $\mathbf{A}$ определен неоднозначно с точностью до градиента некоторого скаляра grad χ (объяснить почему!), поэтому можно наложить условие $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$ (кулоновская калибровка). Тогда, подставляя $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$ в уравнение поля, получаем

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}-\mathbf{A}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\quad \operatorname{rotrot}\mathbf{A}=\operatorname{graddiv}\mathbf{A}-\Delta\mathbf{A}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Отсюда при условии $\operatorname{div}\mathbf{A}=0$ получаем уравнение Пуассона для компонент вектора $\mathbf{A}$:

$$\Delta\mathbf{A}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

Предполагается, что все компоненты вектор-потенциала $\mathbf{A}$ системы зарядов, совершающих медленное и стационарное движение, убывают на бесконечности не медленнее чем по закону $1/r$. Тогда, по аналогии с решением скалярного уравнения Пуассона, можно написать

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}}{R}\,\mathrm{d}V,$$

где R – расстояние от точки наблюдения поля до элемента объема. Переходя от интеграла к сумме по зарядам $\mathbf{j} = \rho\,\mathbf{v}$, $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, получаем

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\sum_i \frac{e_i \mathbf{v}_i}{R_i}.$$

где $\mathbf{v}_i$ – скорость зарядов.

Пример. Рассмотрим линейное поле системы зарядов, совершающих стационарное движение на больших расстояниях от системы (см. рис. 3.2). Вектор-потенциал в точке наблюдения P равен $\mathbf{A} = \frac{1}{c}\sum_i \frac{e_i \mathbf{v}_i}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_i|}$.

Разложив это выражение в ряд по степеням $\frac{r_i}{R_0}$ и применив процедуру, аналогичную разложению по мультиполям, с точностью до членов первого порядка получим $\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\sum_i e_i \mathbf{v}_i - \frac{1}{c}\sum_i e_i \mathbf{v}_i \left(\mathbf{r}_i \nabla \frac{1}{R_0}\right)$.

Усреднив по периоду T и учтя, что $\frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_i e_i \mathbf{v}_i\right)\mathrm{d}t =$ $= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\sum_i e_i \mathbf{r}_i\right)\mathrm{d}t = 0$, получим

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\sum_i e_i \mathbf{v}_i \left(\mathbf{r}_i \nabla \frac{1}{R_0}\right) = \frac{1}{cR_0^3}\sum_i e_i \mathbf{v}_i (\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_0).$$

Так как $\sum_i e_i (\mathbf{R}_0, \mathbf{r}_i)\mathbf{v}_i = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i e_i \mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_0) + \frac{1}{2}\sum_i e_i \left[\mathbf{v}_i (\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_0) - \mathbf{r}_i (\mathbf{v}_i, \mathbf{R}_0)\right]$,

то $\mathbf{A} = \frac{1}{2cR_0^3}\sum_i e_i \left[\mathbf{v}_i (\mathbf{r}_i, \mathbf{R}_0) - \mathbf{r}_i (\mathbf{v}_i, \mathbf{R}_0)\right]$.

Введем вектор магнитного момента системы зарядов (токов)

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum_i e_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] = \frac{1}{2c}\int [\mathbf{r}_i, \mathbf{j}_i]\,\mathrm{d}^3 r,$$

тогда $$\mathbf{A} = \frac{[\mathbf{m}, \mathbf{R}_0]}{R_0^3} = \left[\nabla \frac{1}{R_0}, \mathbf{m}\right].$$

Полученное выражение напоминает скалярный потенциал φ поля (в дипольном приближении) электронейтральной системы неподвижных зарядов на больших расстояниях.

В средах уравнения Максвелла и граничные условия в магнитостатике приобретают следующий вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} B_{2n} - B_{1n} = 0, \\ H_{2t} - H_{1t} = \dfrac{4\pi}{c} j_{\text{пов}}. \end{cases}$$

Плотность тока **j** определяется по закону Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}),$$

где $\mathbf{E}_{\text{стор}}$ – поле сторонних сил (в замкнутом проводнике токи могут возникнуть тогда, когда отлично от нуля поле сторонних сил). Очевидно, на границе проводника $j_n = 0$.

Вопросы и задания

1. Объяснить, почему вектор-потенциал **A** определяется неоднозначно. Сказывается ли эта неоднозначность на физических результатах?

2. Из выражения $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ и решения уравнения Пуассона $\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}}{r}\,\mathrm{d}V$ получить закон Био – Савара: $\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{r}]}{r^3}\,\mathrm{d}V$. Показать, что закон Био – Савара для линейных токов имеет вид $\mathbf{H} = \sum_k \frac{I_k}{c}\oint_{L_k} \frac{[\mathrm{d}\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}$.

3. Найти отношение магнитного момента к механическому моменту количества движения **L** для системы зарядов с постоянным отношением заряда к массе.

4. Найти отношение **M** к **L** для системы из двух зарядов.

Решение. Если r – расстояние между зарядами e_1 и e_2, то в системе центра инерции

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\mathbf{r}\ ;\ \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\mathbf{r}\ ;$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c}\sum_i e_i\left[\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i\right] = \frac{1}{2c}\left\{\frac{e_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}\left[\mathbf{r}, \mathbf{v}\right] + \frac{e_2 m_1}{(m_1+m_2)^2}\left[\mathbf{r}, \mathbf{v}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1}\frac{1}{m_1+m_2} + \frac{e_2}{m_2}\frac{1}{m_1+m_2}\right)\left[\mathbf{r}\cdot\mu\mathbf{v}\right] = \frac{1}{2c}\left[\frac{e_1}{m_1}\frac{1}{m_1+m_2} + \frac{e_2}{m_2}\frac{1}{m_1+m_2}\right]\mathbf{L}\ ,$$

где $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ – приведенная масса.

Задача 3.30. По бесконечно длинному полому цилиндру проходит ток, равномерно распределенный по сечению цилиндра. Определить плотность тока и напряженность магнитного поля: 1) внутри, 2) вне и 3) в стенке цилиндра. Внутренний и внешний радиусы цилиндра *a* и *b* (рис. 3.3).

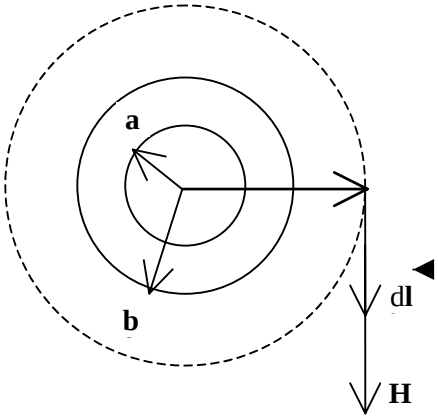

Рис. 3.3

Решение. 1. Выберем точку **r** вне цилиндра и проведем через нее магнитную силовую линию. С учетом симметрии ясно, что силовая линия – концентрическая окружность радиусом *r*. Вычислим циркуляцию вектора напряженности магнитного поля *H* по контуру магнитной силовой линии: $\oint(\mathbf{H}d\mathbf{l}) = \oint H\ d\mathbf{l} = H\cdot 2\pi r$ ($r > b$).

При вычислении интеграла мы учли, что векторы **H** и **dl** вдоль магнитной силовой линии всегда колинеарны, а вектор напряженности магнитного поля постоянен по модулю. Полный ток, пронизы-

вающий контур, равен $I = j\pi(b^2 - a^2)$. Согласно закону полного тока $H \cdot 2\pi r = (4\pi/c)\, j\pi(b^2 - a^2)$. Следовательно, получаем $H = \dfrac{2\pi}{cr} j(b^2 - a^2)$.

2. Выберем точку внутри цилиндра и проведем через нее контур в виде концентрической окружности. Поскольку внутри цилиндра ток отсутствует, то $H = 0$.

3. Выберем точку в стенке цилиндра и проведем через нее концентрическую окружность радиусом r. Ток, пронизывающий этот контур, равен

$$I = j\pi(r^2 - a^2),\ a < r < b.$$

Поэтому напряженность магнитного поля $H = \dfrac{2\pi}{cr} j(r^2 - a^2)$.

Задача 3.31. Бесконечно длинный проводник имеет форму круглого цилиндра радиусом a, внутри которого имеется цилиндрическая полость радиусом b. Расстояние между осями обоих цилиндров R. По проводнику проходит ток, равномерно распределенный по сечению. Плотность тока j. Определить напряженность магнитного поля внутри полости (рис. 3.4).

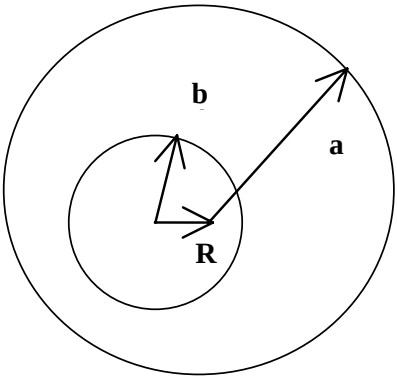

Рис. 3.4

Решение. Распределение магнитного поля в данном проводнике эквивалентно распределению в сплошном проводнике, в котором через сечение полости пропущен встречный ток плотностью j. Напряженность магнитного поля в любой точке будет суммой векторов напряженности поля от каждого тока в отдельности.

Возьмем точку внутри полости, для которой $\mathbf{r}_1$ – радиус-вектор, проведенный в эту точку из центра полости, $\mathbf{r}_2$ – радиус-вектор, про-

веденный в эту точку из центра цилиндра. Напряженность магнитного поля (см. задачу 3.30)

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1, \ \mathbf{H}_1 = \frac{2\pi j r_1^2}{c r_1} \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{r}_1]}{j r_1} = \frac{2\pi}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{r}_1],$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{2\pi j r_2^2}{c r_2} \frac{[\mathbf{j}, \mathbf{r}_2]}{j r_2} = \frac{2\pi}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{r}_2],$$

где $j = \dfrac{I}{\pi(a^2 + b^2)}$.

Множители $\dfrac{[\mathbf{j}, \mathbf{r}]}{j r}$ указывают направление вектора напряженности магнитных полей. Тогда $\mathbf{H} = \dfrac{2\pi}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{R}]$, где $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Задача 3.32. Одинаково направленные токи текут по параллельным бесконечно тонким плоскостям. Вычислить напряженность магнитного поля между плоскостями и вне них. Поверхностная плотность тока λ. Рассмотреть случай противоположных токов.

Решение. *Параллельные токи*. Возьмем сначала плоскости конечной ширины *l*, в окончательных формулах устремим *l* к бесконечности. Через выбранную точку вне плоскостей проведем контур, как показано на рис. 3.5.

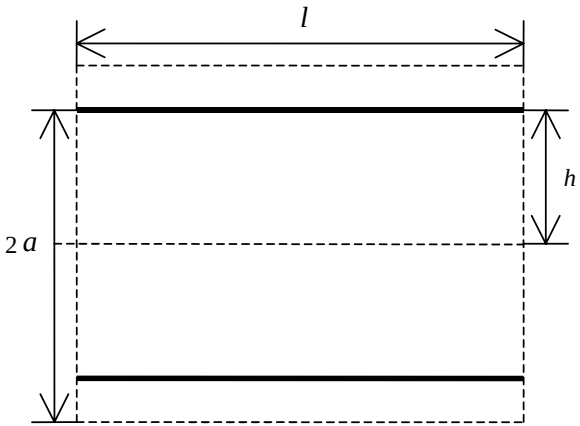

Рис. 3.5

Из симметрии системы видно, что магнитная силовая линия проходит параллельно поверхности плоскостей. На боковых же частях контура, перпендикулярных плоскостям, напряженность магнитного поля непостоянна, но при $l >> h$ вкладом боковых частей контура в циркуляцию вектора напряженности магнитного поля можно пренебречь. Из закона полного тока получаем $\oint(\mathbf{H}d\mathbf{l}) = H\,2l = \frac{4\pi}{c}\lambda\,2l$, $H = \frac{4\pi}{c}\lambda$.

Возьмем точку между пластинами и проведем два контура с общей стороной вокруг плоскостей (рис. 3.6). Полная напряженность магнитного поля $H = H_1 - H_2 = 0$, так как

$$H_1 = H_2 = \frac{2\pi}{c}\lambda .$$

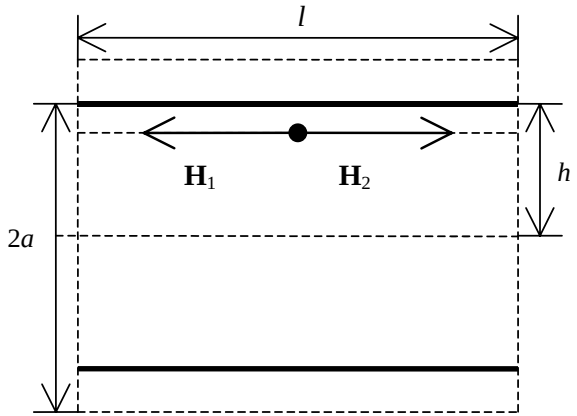

Рис. 3.6

Противоположные токи. Повторяя вычисления в том же порядке, легко убедиться, что вне плоскостей $H = 0$, между плоскостями $H = \frac{2\pi}{c}\lambda$.

Задача 3.33. Вычислить напряженность магнитного поля, создаваемого в вакууме тонким прямолинейным проводником длиной $2L$, по которому проходит ток I. Рассмотреть предел $L \to \infty$ (рис. 3.7).

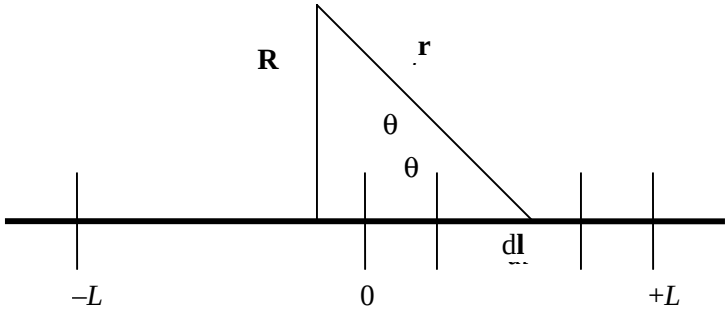

Рис. 3.7

Решение. Напряженность поля согласно закону Био – Савара

$$\mathbf{H} = \frac{I}{c}\int_{-L}^{+L}\frac{[\mathrm{d}\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3} = \frac{I}{c}\int_{-L}^{+L}\frac{\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}\mathbf{n} = \frac{I}{c}\int_{-L}^{+L}\frac{\mathrm{d}lR}{\left[R^2+(L-z)^2\right]^{3/2}}\mathbf{n} =$$

$$= \frac{I}{cR}\left\{\frac{L-z}{\left[R^2+(L-z)^2\right]^{1/2}} + \frac{L+z}{\left[R^2+(L+z)^2\right]^{1/2}}\right\}\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор направления магнитной напряженности, направленный по касательной к окружности радиусом R. В случае бесконечно длинного проводника ($L \to \infty$) $H = \dfrac{2l}{cR}$.

Задача 3.34. По круговому контуру радиусом R проходит ток I. Вычислить напряженность магнитного поля на оси контура. Решить самостоятельно.

Задача 3.35. Вычислить вектор-потенциал и напряженность магнитного поля, создаваемого в вакууме прямолинейным током I длиною $2L$. Рассмотреть предел $L \to \infty$ (рис. 3.7).

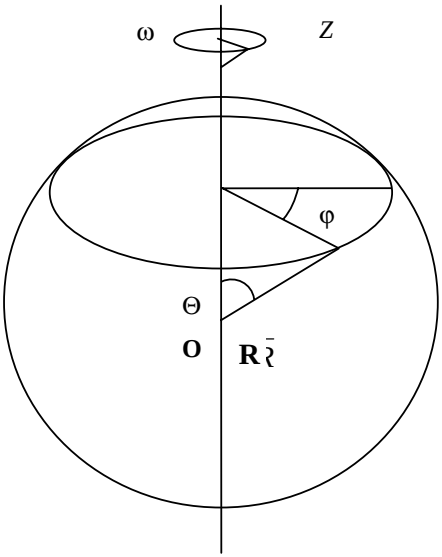

Рис. 3.8

Решение. Решение уравнения Пуассона для векторного потенциала имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3 r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

В нашем случае эта формула записывается следующим образом:

$$A_z = \frac{I}{c}\int_{-L}^{+L}\frac{\mathrm{d}\xi}{r} = \frac{I}{c}\int_{-L}^{+L}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{R^2+(\xi-z)^2}} = -\int_{z+L}^{z-L}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{R^2+t^2}} =$$

$$= \frac{I}{c}\ln\frac{z+L+\sqrt{R^2+(z+L)^2}}{z-L+\sqrt{R^2+(z-L)^2}} = \frac{I}{c}\left(\operatorname{arsh}\frac{z+L}{R} - \operatorname{arsh}\frac{z-L}{R}\right).$$

При вычислении интеграла использована замена переменных $t = z - \xi$. В предельном случае $L \to \infty$, положив $z = 0$, получаем $A_z = \mathrm{const} - \frac{2I}{c}\ln R$.

Компоненты вектора напряженности магнитного поля в цилиндрической системе координат равны $H_R = H_z = 0$,

$$H = H_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial R} = \frac{I}{cR}\left\{\frac{L+z}{\sqrt{R^2+(L+z)^2}} + \frac{L-z}{\sqrt{R^2+(L-z)^2}}\right\}.$$

Последняя формула совпадает с результатом задачи 3.33.

Задача 3.36. Вычислить вектор-потенциал и напряженность магнитного поля, создаваемого током I, равномерно распределенным по сечению бесконечно длинного цилиндрического проводника радиусом a. Магнитная проницаемость провода $\mu = 1$, окружающая среда – вакуум.

Решение. Векторный потенциал **A** связан с током следующей зависимостью:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}}{r}\,\mathrm{d}V.$$

Так как $j_x = j_y = 0$, то, следовательно, $A_x = A_y = 0$. Компоненту A_z найдем, решая уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left(R\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}R}\right) = \begin{cases} -\dfrac{4\pi}{c}\dfrac{I}{\pi a^2} & \text{при} \quad R < a; \\ 0 & \text{при} \quad R \geq a. \end{cases}.$$

Проинтегрировав, получим:

внутри проводника $A_z = -\dfrac{IR^2}{ca^2} + c_1 \ln R + c_2$;

вне проводника $A_z = c_3 \ln R + c_4$.

Постоянную c_4 положим равной нулю (калибровка потенциала). Так как поле конечно, то $c_1 = 0$. Постоянные c_2 и c_3 определяются из граничного условия и условия непрерывности $\vec{A}$. Окончательно будем иметь

$$A_z = \begin{cases} -\dfrac{I}{c}\dfrac{R^2}{a^2} + \dfrac{I}{c} - \dfrac{2l}{c}\ln a & \text{при} \quad R < a; \\ -\dfrac{2I}{c}\ln R & \text{при} \quad R \geq a. \end{cases}$$

Напряженность электрического тока в цилиндрических координатах определяется уравнением

$$H = H_0 = -\frac{\partial A_z}{\partial R} = \begin{cases} \dfrac{2I}{ca^2}R & \text{при} \quad R < a; \\ \dfrac{2I}{cR} & \text{при} \quad R \geq a. \end{cases}$$

Задача 3.37. Однородный немагнитный шар радиусом R, равномерно заряженный по объему, вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр шара. Плотность заряда ρ. Определить магнитный момент шара (см. рис. 3.8).

Решение. Каждый элемент заряженного объема при вращении шара создает ток

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\rho\,\mathrm{d}V, \text{ где } \mathrm{d}V = r^2\mathrm{d}r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi.$$

Этот элементарный ток, текущий по кругу радиусом $r\sin\theta$, создает элементарный магнитный момент $\mathrm{d}M = \dfrac{\mathrm{d}I}{c}S$, где $S = \pi r^2\sin^2\theta$.

Полный магнитный момент заряженного вращающегося шара

$$M = \frac{1}{2c}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\omega\rho r^4\sin^3\theta\;\mathrm{d}\theta\;\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{15c}\omega\rho R^5.$$

Задача 3.38. Вычислить силу взаимодействия в вакууме между двумя параллельными и равными токами I, расстояние между которыми $2a$.

Решение. Напряженность магнитного поля на расстоянии $2a$ от прямолинейного тока I_1 $H_1 = \dfrac{I_1}{ca}$.

На элемент объема проводника с током действует сила $\mathrm{d}\mathbf{F} = \dfrac{1}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{H}]\,\mathrm{d}V$. В нашем случае на каждую единицу длины тока I_2 действует со стороны другого тока I_1 сила

$$F_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2 a}.$$

При выводе последней формулы следует помнить, что $\mathbf{H}_1 \perp \mathbf{H}_2$. Для силы, действующей на единицу длины тока I_1 со стороны тока I_2, получается такое же выражение: $F_{21} = F_{12}$.

Задача 3.39. Прямоугольная рамка, стороны которой равны a и b, может вращаться в воздухе вокруг своей оси симметрии, расположенной перпендикулярно направлению однородного магнитного поля. Напряженность поля H. По рамке проходит ток I. Определить момент сил, действующих на рамку (рис. 3.9).

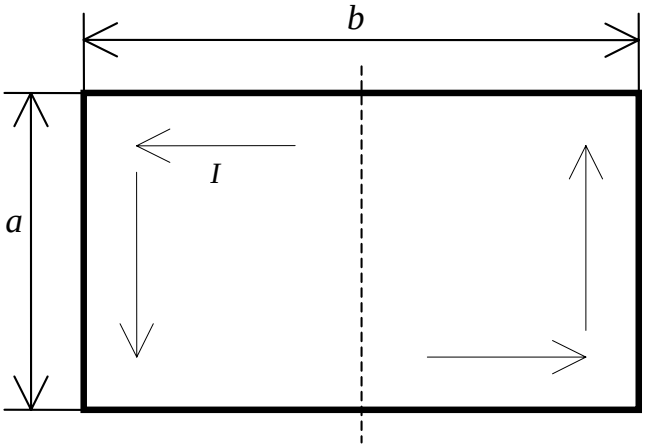

Рис. 3.9

Решение. Силы, действующие на горизонтальные стороны рамки, взаимно уравновешены – суммарный момент этих сил равен нулю. Сила, действующая на вертикальную сторону рамки, $F = \dfrac{IHa}{c}$.

Пусть угол между плоскостью рамки и направлением внешнего магнитного поля равен θ. Тогда момент сил, действующих на рамку, относительно оси вращения

$$M = F\, b \sin\theta = \frac{1}{c} IH\, ab \sin\theta .$$

Задача 3.40. Определить движение нерелятивистского электрона в однородном магнитном поле. Напряженность поля H, начальная скорость $\mathbf{v}_0$ составляет угол α с направлением поля (рис. 3.10).

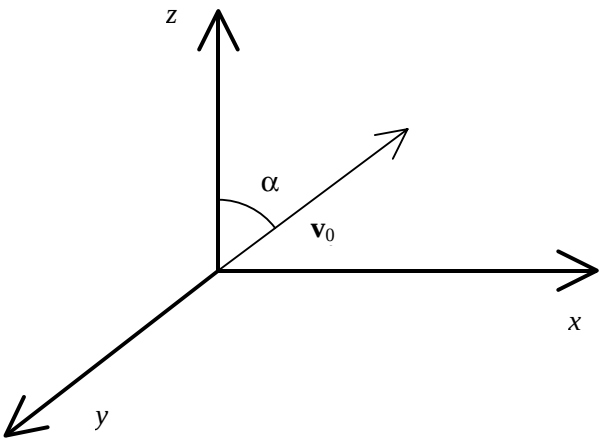

Рис. 3.10

Решение. На движущийся в магнитном поле электрон действует сила Лоренца $\mathbf{F} = \dfrac{e[\mathbf{v}, \mathbf{H}]}{c}$. Уравнения движения электрона имеют вид

$$m\frac{\mathrm{d}\nu_x}{\mathrm{d}t} = \frac{eH}{c}\nu_y;$$
$$m\frac{\mathrm{d}\nu_y}{\mathrm{d}t} = -\frac{eH}{c}\nu_x;$$
$$m\frac{\mathrm{d}\nu_z}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Начальное условие $\mathbf{v}_{t=0} = \mathbf{v}_0$. Легко проверить, что решение системы уравнений имеет следующий вид:

$$\nu_x = \nu_0 \sin\alpha \sin\omega t;$$
$$\nu_y = \nu_0 \sin\alpha \cos\omega t;$$
$$\nu_z = \nu_0 \cos\alpha,$$

где $\omega = eH/(mc)$. Положим, что при $t = 0$ координаты электрона $x = y = z = 0$. Интегрируя компоненты скорости по времени, получаем

$$x(t) = -\frac{\nu_0}{\omega}\sin\alpha\cos\omega t;$$

$$y(t) = -\frac{\nu_0}{\omega}\sin\alpha\sin\omega t;$$

$$z(t) = -\nu_0 t\cos\alpha\,.$$

Следовательно, в плоскости *xy* электрон равномерно движется по окружности радиусом $R = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\nu_0 mc}{eH}\sin\alpha$. В направлении *z* скорость электрона постоянна. Поэтому траектория электрона – винтовая линия с шагом $l = \frac{2\pi R}{\nu_0\sin\alpha}\nu_0\cos\alpha = \frac{2\pi mc}{eH}\nu_0\cos\alpha$.

3.4. Квазистационарное электромагнитное поле

Существует широкий класс задач, в которых можно пренебречь токами смещения $\mathbf{j}_{\text{см}} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, так как изменения поля в рассматриваемой области пространства настолько медленны, что можно пренебречь эффектами запаздывания. Такое поле называется квазистационарным. Критерием применимости квазистационарного приближения, очевидно, является малость размеров *a* рассматриваемой области по сравнению с длиной волны λ электромагнитного колебания.

Выведем уравнения Максвелла для квазистационарного поля. Сначала сохраним ток смещения в уравнениях Максвелла:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0\,.$$

Продифференцируем первое уравнение по времени и подействуем операцией rot на второе уравнение. В результате получим

$$\operatorname{rot}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2};$$

$$-c\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Так как $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=-\Delta\mathbf{E}+\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}=-\Delta\mathbf{E}$, то $\Delta\mathbf{E}=\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$.

Для плоской волны напряженность электрического поля

$$\mathbf{E}(x,t)=\mathbf{E}_0e^{i(kx-\omega t)}=\mathbf{E}_0e^{i\left(\frac{\omega}{c}x-\omega t\right)}=\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}\left(1+\frac{i\omega}{c}x+\ldots\right).$$

Пренебрежение запаздыванием означает $\frac{\omega x}{c}<<1$, а так как $\frac{\omega}{c}=\frac{2\pi}{cT}=\frac{2\pi}{\lambda}$, то это неравенство принимает вид $x << \lambda$, или $a << \lambda$. Оценим порядок членов в этом уравнении.

Пусть T – характерное время процесса, a – размер области. Перейдем к новым координатам:

$x = a\xi$, $y = a\eta$, $z = a\pi$, $t = T\tau$,

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\xi},\ \frac{\partial}{\partial y}=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\eta},\ \frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\pi},\ \frac{\partial}{\partial t}=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\tau},\ \Delta_{xyz}=\frac{1}{a^2}\Delta_{\xi\eta\pi}.$$

Тогда $\Delta_{\xi\eta\pi}\mathbf{E}=\frac{4\pi a^2}{c^2T}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial\tau}+\frac{a^2}{c^2T}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$, $\frac{a}{cT}=\frac{a}{\lambda}$.

При $\frac{a}{\lambda}<<1$ второй член сравнительно мал и им можно пренебречь, что означает пренебрежение токами смещения. Подставляя $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$, получаем $\Delta\mathbf{E}=\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$, $\mu = 1$, аналогично для магнитного поля $\Delta\mathbf{H}=\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$. Полученные уравнения для $\Delta\mathbf{E}$ и $\Delta\mathbf{H}$ подобны уравнению теплопроводности (или диффузии) $\frac{\partial\theta}{\partial t}=D\Delta\theta$, где D – коэффициент теплопроводности (или диффузии). Для проводящей среды, очевидно, критерием применимости квазистационарного приближения является малость токов смещения по сравнению с токами проводимости.

Задача 3.41. Конденсатор емкостью c и зарядом q в начальный момент времени замкнут на сопротивление R, с которым последовательно включена индуктивность L. Определить заряд на обкладках конденсатора как функцию времени.

Решение. Разность потенциалов на обкладках конденсатора $U = \frac{q}{c}$. Падение напряжения на активном сопротивлении равно IR. ЭДС самоиндукции равна $\frac{1}{c^2} L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$. Поскольку в цепи нет сторонних электродвижущих сил, то суммарная ЭДС для всей цепи равна нулю: $\frac{1}{c^2} L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR - \frac{q}{c} = 0$. Подставляя в это уравнение выражение силы тока через заряд $I = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, получаем $\frac{1}{c^2} L \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{c} = 0$.

Начальное условие: при $t = 0$ $q = q_0$ и $I = 0$. Общее решение уравнения имеет вид

$$q(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}.$$

Здесь постоянные k_1 и k_2 – корни характеристического уравнения $\frac{L}{c^2} k^2 + Rk + \frac{1}{c} = 0$, равные $k_{1,2} = -\frac{c^2 R}{2L} \pm \sqrt{\frac{c^4 R^2}{4L} - \frac{c}{L}}$.

Из начальных условий следует: $A_1 = \frac{k_2}{k_2 - k_1} q_0$, $A_2 = \frac{k_1}{k_2 - k_1} q_0$.

Проанализируем характер разряда конденсатора при различных значениях параметров C, L, R. Если $\frac{R}{2L} \geq \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то k_1 и k_2 – действительные числа и разряд конденсатора носит апериодический характер. Если $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то k_1 и k_2 – комплексные числа и разряд конденсатора носит характер затухающих колебаний.

Задача 3.42. Плоский контур вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле вокруг оси, перпендикулярной полю. Напряженность поля H. Самоиндукция контура L, сопротивление R.

Площадь, ограниченная контуром, равна S. Определить ЭДС индукции в контуре и силу тока.

Решение. Магнитный поток, пронизывающий контур, изменяется со временем по закону $\Phi = HS\cos(\omega t + \varphi_0)$, где φ_0 – угол между нормалью к плоскости контура и направлением поля в начальный момент t = 0. ЭДС индукции $E_{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c}HS\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$. Суммарная ЭДС для всей цепи равна нулю при отсутствии сторонних ЭДС: $E_{\text{инд}} - \frac{L}{c^2}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - RI = 0$. Решение этого уравнения имеет вид

$$I = A_0 e^{-\frac{c^2 R}{L}} + \frac{\omega SH}{\sqrt{c^2R^2 + \frac{1}{c^2\omega^2L^2}}}\sin(\omega t + \varphi_0 - \theta),\ \text{где}\ \operatorname{tg}\theta = \frac{\omega t}{c^2 R};\ A_0 -$$

постоянная интегрирования, которая определяется начальной силой тока.

Задача 3.43. Стержень длиной l вращается вокруг одного из своих концов в плоскости, перпендикулярной направлению однородного магнитного поля H. Определить ЭДС индукции между концами стержня.

Решение. Элемент стержня dr, находящийся на расстоянии r от центра вращения, в секунду пересекает магнитное поле на площади dS = ωrdr. По закону Фарадея на этом элементе индуцируется ЭДС. Полная ЭДС между концами стержня

$$E_{\text{инд}} = \int_0^l \frac{1}{c}H\omega r\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\frac{\omega}{c}Hl^2.$$

Задача 3.44. Математический маятник, состоящий из проводящей нити длиной l, на которой подвешен металлический шарик, может колебаться в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю H, касаясь при этом проводящей дуги круга. Точка O подвеса маятника и дуга круга соединены электрически с обкладками конденсатора, емкость которого C. Определить период малых колебаний маятника (рис. 3.11).

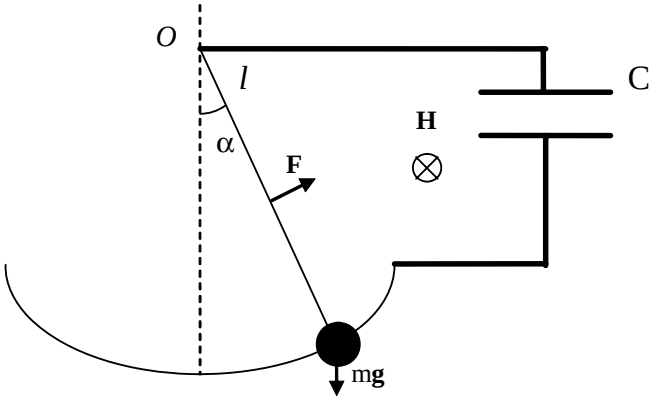

Рис. 3.11

Решение. При движении маятника в нем индуцируется ЭДС (см. предыдущую задачу): $E_{\text{инд}} = \frac{1}{2c}\omega H l^2 = \frac{1}{2c} H l^2 \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}$. Сила тока в контуре $I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(CE_{\text{инд}}\right) = \frac{CHl^2}{2c}\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}$.

На нить маятника действует сила $\mathbf{F} = \frac{I}{c}\left[\mathbf{l}, \mathbf{H}\right] = \frac{CH^2 l^3}{2c}\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор направления силы. Момент силы относительно точки подвеса

$$M = \frac{Fl}{2} = \frac{CH^2 l^4}{4c^2}\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2}.$$

Уравнение движения маятника, на который, кроме силы тяжести, действует посторонняя сила, имеет вид $Q\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\sin\alpha - M$, где $Q = ml^2$ – момент инерции маятника. Подставляя выражение для момента силы в уравнение движения, получаем

$$\left(Q + \frac{CH^2 l^4}{4c^2}\right)\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -mgl\sin\alpha.$$

При малых колебаниях можно приближенно считать $\sin\alpha \approx \alpha$. Тогда получаем уравнение вида $\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \omega_0^2\alpha = 0$, где ω_0 – круговая частота колебаний маятника,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{1}{1+\frac{CH^2l^2}{2c^2m}}}\text{, период колебаний } T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Задача 3.45. Имеется полубесконечная проводящая среда с плоской поверхностью раздела. На границе существует переменное электрическое поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i\omega t)$. Проводимость среды σ, магнитная проницаемость μ. Найти распределение электрического поля внутри проводящей среды.

Решение. Переменное электрическое поле внутри проводника описывается уравнением $\Delta\mathbf{E} = \frac{4\pi\mu}{c^2}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}$. Для синусоидального поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}$ получаем $\Delta\mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma\mu\, i\omega}{c^2}\mathbf{E}$, $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Пусть плоская граница перпендикулярна оси z. Предположим, что электрическое поле направлено вдоль оси x. Ищем решение уравнения внутри среды в виде $E_x(z) = E_x(0)e^{-\rho z}$. Подставляя это решение в дифференциальное уравнение, получаем характеристическое уравнение $\rho^2 = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\mu\sigma$. Положим $\rho = n + ix$, тогда

$$n^2 - x^2 + 2inx = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\mu\sigma;$$

$$n^2 = x^2, \quad 2nx = \frac{4\pi\omega\mu\sigma}{c^2}.$$

Таким образом, решение можно записать в виде

$$E_x(z) = E_x(0)e^{-nz}\cos(\omega t - xz);$$

$$x = n = \frac{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}{c}.$$

Глубина проникновения поля в проводящую среду характеризуется параметром

$$\delta = \frac{1}{n} = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}.$$

Задача 3.46. Металлический цилиндр радиусом a бесконечной длины с проводимостью σ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$ расположен так, что его ось совпадает с осью бесконечного соленоида радиусом b, по которому течет ток $I = I_0 e^{-i\omega t}$. Найти магнитное поле во всем пространстве, а также распределение тока j в цилиндре.

Решение. Вихревые токи в цилиндре будут течь подобно токам соленоида. Так как поле соленоида во внешнем пространстве равно нулю, а внутри направлено по оси соленоида, то в пространстве между цилиндром и соленоидом однородное магнитное поле H_0, а внутри цилиндра поле определяется уравнением $\Delta\mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$. Для нашей задачи с цилиндрической симметрией уравнение принимает вид

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r} + k^2 H = 0, \text{ здесь } k^2 = \frac{1+i}{\delta},\ \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}},$$

$$H = H_z(r),\ H_\alpha = H_r = 0.$$

Граничное условие: $H(\alpha) = H_0$.

Уравнение, конечное при $r = 0$, имеет вид $H = cJ_0(kr)$, где $J_0(kr)$ – функция Бесселя нулевого порядка. Из граничного условия находим $c = \frac{H_0}{J_0(ka)}$. Вне цилиндра магнитное пол

$H = H_0$ при $a \le r \le b$,

$H = 0$ при $r > b$.

Плотность тока внутри цилиндра вычисляется на основе следующих формул:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E};$$

$$j = j_\alpha = \sigma E_\alpha = \frac{kc}{4\pi}\frac{J_1(kr)}{J_0(ka)}H_0;$$

$$E_r = E_z = 0,$$

где $J_1(kr)$ – функция Бесселя первого порядка.

3.5. Переменное электромагнитное поле

3.5.1. Потенциалы электромагнитного поля

Система уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j};$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=0;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0$$

содержит шесть неизвестных проекций напряженностей поля: $\mathbf{E}(E_x,E_y,E_z)$, $\mathbf{H}(H_x,H_y,H_z)$. Число уравнений можно уменьшить введением скалярного потенциала φ и вектор-потенциала **A**, определив их соотношениями $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$. Потенциалы определены неоднозначно относительно градиентного преобразования:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}'-\operatorname{grad}\chi,$$

$$\varphi=\varphi'+\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t},$$

где χ – произвольный скаляр.

Уравнения Максвелла инвариантны по отношению к градиентному преобразованию (калибровочная или установочная инвариантность).

Уравнения для потенциалов произвольного электромагнитного поля имеют следующий вид:

$$\Delta\mathbf{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j};\ \Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho\ \text{(уравнение Д'Аламбера)}$$

при дополнительном условии калибровки потенциалов (условие Лоренца):

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0.$$

Частные решения уравнений для потенциалов имеют следующий вид:

$$\varphi(x,y,z,t)=\int\frac{\rho\left(x',y',z',t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}V';$$

$$\mathbf{A}(x,y,z,t)=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}\left(x',y',z',t-\dfrac{R}{c}\right)}{R}\mathrm{d}V',$$

где $R^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$;

x, y, z – координаты точки наблюдения; x', y', z' – координаты точки источника.

Эти решения называются запаздывающими потенциалами. Другое линейно независимое решение, представляющее опережающие потенциалы, вследствие принципа причинности отбрасываем.

Вопросы

1. Могут ли одному и тому же полю соответствовать различные потенциалы?

2. Можно ли положить скалярный потенциал φ = 0, если вектор-потенциал **A** равен нулю?

3.5.2. Поле системы зарядов на больших расстояниях

Рассмотрим поле, создаваемое системой зарядов на расстояниях, больших по сравнению с ее собственными размерами (рис. 3.12), P – точка наблюдения, d – линейный размер системы.

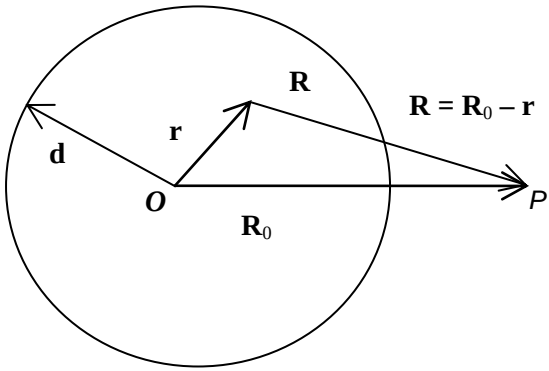

Рис. 3.12

При $R_0 >> r$ приближенно имеем

$$\mathbf{R} = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| = |R_0| - r\,\mathrm{grad}|\mathbf{R}_0| + ... \cong |R_0| - \mathbf{r}\frac{\mathbf{R}_0}{R} = |\mathbf{R}_0| - \mathbf{rn}\,.$$

Тогда на большом расстоянии от системы зарядов находим потенциалы поля в монопольном приближении:

$$\varphi = \frac{1}{R_0}\int \rho\left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}}{c}\right)\mathrm{d}V\,;$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}\left(t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{rn}}{c}\right)\mathrm{d}V\,,$$

где $\frac{\mathbf{rn}}{c}$ – время запаздывания внутри системы.

3.5.3. Дипольное излучение

Временем $\frac{\mathbf{rn}}{c}$ можно пренебречь, если за это время распределение зарядов мало меняется. Пусть T – время, за которое распределение зарядов меняется заметным образом (период излучения). Тогда высказанное справедливо при условии (условие квазистационарности) $\frac{\mathbf{rn}}{c} \approx \frac{d}{c} << T$, где d – линейный размер системы. Можно сказать, что это условие сводится к тому, что скорости зарядов должны быть много меньше скорости света. Разлагая выражение для потенциалов по $\frac{\mathbf{rn}}{c}$ (по собственному времени запаздывания) и ограничиваясь первым членом разложения, получаем

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)\mathrm{d}V = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}\,\mathrm{d}V\,,$$

где $t' = t - \frac{R_0}{c}$.

Это выражение преобразуется к виду

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}\,,$$

где $\mathbf{P}$ – электрический дипольный момент системы зарядов.

Аналогично для скалярного потенциала, разлагая в ряд по $\frac{\mathbf{rn}}{c}$ для электронейтральной системы в дипольном приближении на больших расстояниях, получаем $\varphi = \frac{\mathbf{nP}}{cR}$.

Смысл полученных результатов заключается в том, что при движении зарядов в системе, т.е. при изменении ее дипольного момента, в окружающем пространстве возникает электромагнитное поле. Система неравномерно движущихся зарядов называется излучателем.

3.5.3.1. Электромагнитное поле дипольного излучателя

Найдем распределение электрического и магнитного полей. Так как $\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}$, то из условий Лоренца $\operatorname{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ следует $\varphi = -\operatorname{div}\frac{\mathbf{P}}{R_0}$, тогда

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{P}}{R_0},$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{\mathbf{P}}{R_0} - \frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{P}.$$

При дальнейшем решении задачи удобно ввести вектор, называемый вектором Герца:

$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{P}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)}{R_0}$, тогда $\mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{Z}$, $\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{Z}$, $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{Z}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)$, $\mathbf{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{Z}\left(t - \frac{R_0}{c}\right)$.

Введем сферическую систему координат r, θ, φ с полярной осью, ориентированной по вектору $\mathbf{P}$. Компоненты $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в сферической системе имеют следующий вид:

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(a_\varphi \sin\theta\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}a_\theta\,;$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_\varphi)\,;$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}a_r\,;$$

$$Z_R = Z\cos\theta, \quad Z_\theta = -\sin\theta\,,\ E_R = -\frac{2\cos\theta}{R}\frac{\partial Z}{\partial R}, \quad E_\varphi = 0\,,$$

$$H_R = H_0 = 0\,,\ H_\varphi = -\sin\theta\frac{1}{c}\frac{\partial^2 Z}{\partial t\partial R}\,,\ E_0 = \frac{\sin\theta}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial Z}{\partial R}\right).$$

Предположим, что дипольный момент системы меняется по гармоническому закону:

$$P = P_0\exp\left\{i\omega\left(t - \frac{R_0}{c}\right)\right\}, \text{ тогда } H_\varphi = \sin\theta\left(\frac{i\omega}{R_0^2} + \frac{(i\omega)^2}{cR_0}\right)P\,,$$

$$E_R = 2\cos\theta\left(\frac{P}{R_0^3} + \frac{i\omega}{cR_0^2}P\right),\ E_0 = \sin\theta\left(\frac{1}{R_0^3} + \frac{i\omega}{cR_0^2} + \frac{(i\omega)^2}{c^2R_0}\right).$$

Рассмотрим поле на расстояниях $R_0 > \frac{2\pi c}{\omega} = \lambda > d$, где λ – длина волны излучателя. Эта область называется волновой зоной. Пренебрегая членами высшего порядка малости, получаем

$$H_\varphi = \frac{(i\omega)^2 P}{cR_0} = \frac{\sin\theta}{cR_0}\ddot{P}\,;$$

$$E_\theta = \sin\frac{(i\omega)^2}{lR_0}P = \frac{\sin\theta}{l^2R_0}\ddot{P}\,,\ E_R = 0\,.$$

Эти решения представляют собой сферические волны. Видно, что заряды могут излучать только в том случае, если они движутся с ускорением. Зная напряженности поля, можно найти интенсивность излучения дипольного излучателя. Вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ для дипольного излучения равен $\frac{1}{4\pi c^3}\frac{\ddot{P}^2}{R_0^2}\sin^2\theta$. То обстоятельство, что $\mathbf{S}$ отличен от нуля и всегда направлен от излучающей системы,

означает, что имеется поток электромагнитной энергии, излучаемой системой в окружающее пространство. Интенсивность излучения внутрь телесного угла $\mathrm{d}\Omega$ равна

$$\mathrm{d}I = \mathbf{S}R_0^2\mathbf{n}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E},\mathbf{H}\right]R_0^2\mathbf{n}\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}\Omega = \frac{\ddot{P}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\Omega.$$

Полная интенсивность излучения

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{P}^2.$$

Рассмотрим поле на расстояниях $d < R < \lambda$. Эта область называется ближней зоной, где можно пренебречь запаздыванием, т.е. $P_0 e^{i\omega\left(t-\frac{R_0}{c}\right)} \sim P_0 e^{i\omega t}$, так как $\frac{R_0\omega}{c} \sim \frac{R}{\lambda} << 1$. Пренебрегая в выражениях для H и E членами высшего порядка малости, получаем

$$H_\varphi = \frac{i\omega}{c}\sin\theta\frac{P}{R_0^2},\ E_R = 2\cos\theta\frac{P}{R_0^2},\ E_0\sin\theta\frac{P}{R_0^2}.$$

Таким образом, в ближней зоне поле имеет квазистационарный характер.

3.5.3.2. Магнитно-дипольное излучение

Рассмотрим излучение электромагнитного поля переменным магнитным диполем. Если учесть следующие члены разложения по степени $\frac{\mathbf{rn}}{c}$, то можно получить выражение для интенсивности излучения от магнитного дипольного момента $I = \frac{2}{3c^2}\ddot{\mathbf{m}}^2$. Простейшая система, эквивалентная переменному магнитному моменту, – замкнутый проволочный контур, в котором возбуждается переменный ток (рамка с током).

В волновой зоне поле магнитно-дипольного излучения отличается от поля электрического излучения заменой **E** на **H** и **H** на **E**, т.е. $E_R = E_0 = H_R = H_\varphi = 0$,

$$E_\varphi = H_0 = -\frac{\sin\theta}{cR_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}m\left(t-\frac{R_0}{c}\right).$$

3.5.4. Плоские электромагнитные волны

В вакууме при $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ уравнения для потенциалов приобретают вид однородных волновых уравнений:

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0\,;\ \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0\,.$$

Общее решение однородного волнового уравнения в любой заданный момент времени представляет собой суперпозицию плоских волн (волновой пакет):

$$f(\mathbf{r},t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[A_k e^{i(\mathbf{k}\,\mathbf{r}+\omega t)} + B_k e^{j(\mathbf{k}\,\mathbf{r}-\omega t)}\right]\mathrm{d}^3k\,,$$

где под $f(\mathbf{r},t)$ подразумевается скалярно-векторный потенциал.

Излучающая система частиц, передавая энергию и импульс полю излучения, испытывает со стороны этого поля обратное воздействие. Для дипольного излучения сила лучистого торможения (трения) $\mathbf{F}_S = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\mathbf{v}}$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ (реакция излучения).

3.5.5. Взаимодействие заряженных частиц с излучением

3.5.5.1. Рассеяние электромагнитных волн

Поле электромагнитной волны действует на частицы системы с силой Лоренца $\mathbf{F} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v},\mathbf{H}]\right)$. Так как в электромагнитной волне $|\mathbf{H}| = |\mathbf{E}|$, то магнитная часть силы Лоренца меньше электрической в $\frac{v}{c}$ раз. Каждая частица системы, приобретая ускорение, становится излучателем. Процесс рассеяния характеризуется эффективным сечением рассеяния $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}I/|\mathbf{S}|$; $\mathrm{d}\sigma$ выражает отношение интенсивности, рассеянной внутрь телесного угла $\mathrm{d}\Omega$, к плоскости падающего потока.

3.5.5.2. Дисперсия света

Если в единице объема имеется N рассеивающих центров, то рассеянное излучение будет когерентно складываться с внешним полем и тем самым изменять эффективную скорость волны (явление преломления). Зависимость скорости волны от частоты называется дисперсией. Рассеянное излучение обусловлено электрической поляризацией объемных элементов. Тогда показатель преломления $\tilde{n} = \sqrt{\varepsilon}$, где диэлектрическая постоянная $\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha N$, N – число заряженных поляризуемых центров в 1 см^3, α – поляризуемость среды. В общем случае $\tilde{n}$ – величина комплексная, что связано с поглощением электромагнитной волны в среде.

Для нормальной дисперсии (без учета затухания) с рассеянием волны на электронах среды показатель преломления: $\tilde{n} = n_0 = 1 + \frac{2\pi Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$, где N – число электронов с частотой колебания ω_0; e – заряд частицы; m – масса частицы. Если электроны имеют различные энергии связи, то $\tilde{n} = 1 + \frac{2\pi Ne^2}{m}\sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2}$, $\sum_k N_k = N$ (N_k – число электронов с частотой колебания ω_k). Отношение N_k/N называется силой осциллятора: $\sum_k \frac{N_k}{N} = 1$. При $\omega = \omega_0$ $n = \infty$, что соответствует резонансу электромагнитной волны с колебаниями электронов. При $\omega >> \omega_0$ $n < 1$ (для рентгеновских лучей $n < 1$).

(График зависимости n от ω построить самостоятельно).

Если учесть затухание (поглощение) электромагнитной волны, то вблизи резонансной частоты кривая дисперсии будет меняться непрерывно, а не обращаться в бесконечность.

3.5.5.3. Электромагнитное поле в плазме

Система свободных заряженных частиц, взаимодействующих между собой через кулоновское поле, называется плазмой. Плазма обладает объемной упругостью подобно обычному газу. Поэтому в плазме возможно распространение продольной электрической (плазменной) волны. В присутствии магнитного поля в плазме могут воз-

никать как продольные, так и поперечные магнитоплазменные волны. Свободные заряды плазмы экранируют электрическое поле. Диэлектрическая постоянная плазмы $\varepsilon = 1 - \frac{4\pi N e^2}{m}$, где N – концентрация заряженных частиц плазмы; m – масса частицы; e – заряд частицы.

Вопросы и задания

1. Непосредственной подстановкой в выражение для потенциалов убедиться, что запаздывающие потенциалы удовлетворяют уравнению Д'Аламбера и условию Лоренца.

2. Записать уравнения, которым удовлетворяют электромагнитные потенциалы φ и $\mathbf{A}$, если вместо условий Лоренца наложить на них условие $\operatorname{div}\mathbf{A} = 0$ (кулоновская калибровка).

3. Заряд движется в однородном магнитном поле $\mathbf{H}$. Начальная скорость заряда $\vec{v} \perp \mathbf{H}$. Найти интенсивность излучения.

4. Найти среднюю (за один период) интенсивность излучения заряда, колеблющегося по гармоническому закону $r = r_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$.

5. Найти интенсивность излучения системы из двух частиц с зарядами e_1 и e_2 и массами m_1 и m_2.

6. Почему при столкновении двух одинаковых зарядов ($e_1 = e_2$, $m_1 = m_2$) не получается магнитно-дипольного излучения, если учитывать взаимодействие по закону Кулона?

7. Показать, что магнитно-дипольное излучение слабее дипольного в $\left(\frac{v}{c}\right)^2$ раз.

8. Показать, что магнитно-дипольное излучение отсутствует у системы, в которой отношение заряда к массе у всех движущихся частиц одинаково. Существует ли в этом случае электрическое дипольное излучение?

Задача 3.47. Точечный заряд q вращается равномерно по окружности радиусом a с угловой скоростью $\omega << \frac{c}{a}$. Определить создаваемые им в вакууме поле излучения и интенсивность излучения.

Решение. Поле излучения переменного диполя определяется формулами

$$\mathbf{H} = \left[\frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{P}_0\right]\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\cos(\mathbf{k}\,\mathbf{r} - \omega t)}{r}; \ \mathbf{E} = \left[\mathbf{H}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right];$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{P}\cos(\omega t)$ – переменный дипольный момент излучения.

Плотность потока этого излучения $\mathbf{S} = \dfrac{\ddot{\mathbf{P}}^2 \sin^2\theta}{4\pi c^3 r^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r}$.

Точечный заряд, вращающийся по окружности, эквивалентен двум взаимно перпендикулярным диполям, направленным по осям OX и OY и сдвинутым по фазе на 90°: $P_x = aq\cos\omega t$, $P_y = aq\sin\omega t$. Поэтому поле излучения заряда определяется выражениями вида

$$\mathbf{H} = \left\{\left[\frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{i}\right]\cos(\mathbf{kr} - \omega t) + \left[\frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{j}\right]\sin(\mathbf{kr} - \omega t)\right\}\frac{aq}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2;$$

$$\mathbf{E} = \left[\mathbf{H}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right].$$

Интенсивность излучения в заданном направлении $S = \dfrac{\omega^4 a^2 q^2}{8\pi c^3 r^2}\left(\sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2\right)$, где θ_1 и θ_2 – углы межу направлениями излучения и осями OX и OY соответственно (рис. 3.13).

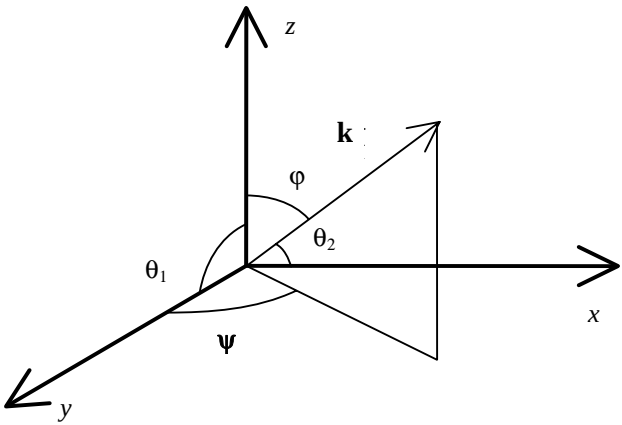

Рис. 3.13

Из рис. 3.13 видно, что между углами θ_1 и θ_2 и углами φ и ψ в сферической системе координат существуют соотношения:

$\cos\theta_1 = \sin\varphi\cos\psi$, $\cos\theta_2 = \sin\varphi\sin\psi$. Следовательно, интенсивность излучения в данном направлении $S = \dfrac{\omega^4 a^2 q^2}{4\pi c^3 r^2}\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin^2\varphi\right)$.

Задача 3.48. Заряженная сферическая капля совершает радиальные пульсации. Полный заряд капли q. Найти электромагнитное поле вне распределения зарядов.

Решение. Для сферически-симметричного распределения зарядов все мультипольные моменты, кроме монополя, равны нулю. Поэтому вне капли существует только постоянное электростатическое поле $\mathbf{E} = \dfrac{q\mathbf{r}}{r^3}$, $\mathbf{H} = 0$.

Задача 3.49. Частица массой m и зарядом q пролетает со скоростью v мимо неподвижного заряда q_1 на прицельном расстоянии a. Вычислить энергию, теряемую движущейся частицей на электромагнитные излучения, если скорость настолько велика, что отклонение от прямолинейного движения можно считать малым.

Решение. Полная мгновенная интенсивность излучения переменного диполя $J = \dfrac{2}{3}\dfrac{q^2}{c^3}\dot{\mathbf{v}}^2$. Энергия, излучаемая частицей при торможении в поле неподвижного центра, $W = \dfrac{2}{3}\dfrac{q^2}{c^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dot{\mathbf{v}}^2(t)\,\mathrm{d}t$. Пренебрегая реакцией излучения, можно найти ускорение частицы: $|\dot{\mathbf{v}}| = \dfrac{F}{m} = \dfrac{|qq_1|}{mr^2}$. Расстояние между частицами в момент времени t $r = \sqrt{a^2 + v^2 t}$. Энергия, теряемая на излучение частицей,

$$W = \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\left(\frac{qq_1}{m}\right)^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\left(a^2 + v^2t^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\left(\frac{qq_1^2}{m}\right)\left\{\frac{t}{2a^2\left(a^2 + v^2t^2\right)} + \frac{1}{2a^3v}\operatorname{arctg}\frac{vt}{a}\right\}_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{3}\frac{\pi q^4 q_1^2}{m^2c^3a^3v}.$$

Задача 3.50. Равномерно намагниченный шар радиусом a с намагниченностью $\mathbf{M}$ вращается с постоянной частотой ω вокруг оси,

проходящей через центр шара и составляющий угол φ с направлением **M**. Найти поле излучения. Определить плотность потока излучения в данном направлении и полную интенсивность излучения.

Решение. Поля излучения магнитного диполя

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\left[\left[\ddot{\mathbf{m}}(t), \frac{\mathbf{r}}{r}\right], \frac{\mathbf{r}}{r}\right]}{\mathbf{r}}, \ \mathbf{E} = \left[\mathbf{H}, \frac{\mathbf{r}}{r}\right],$$

где $\mathbf{m}(t)$ – переменный магнитный момент; $\frac{\mathbf{r}}{r}$ – единичный вектор в направлении распространения электромагнитной волны.

Пусть ось вращения шара направлена по оси *OZ*. Полный магнитный момент шара

$$\mathbf{m} = \frac{4}{3}\pi a^3 \mathbf{M}.$$

Излучение намагниченного вращающегося шара эквивалентно излучению двух магнитных диполей, направленное по осям *OX* и *OY*, сдвинутых по фазе на π/2:

$$m_x(t) = m \sin\varphi \cos\omega, \ tm_y(t) = tm \sin\varphi \sin\omega.$$

Следовательно, поле излучения шара определяется формулами

$$\mathbf{H} = \left\{\left[\frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{i}\right]\sin\left(\mathbf{kr} - \omega t\right) + \left[\frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{j}\right]\cos\left(\mathbf{kr} - \omega t\right)\right\}\frac{m\sin\varphi}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2,$$

$$\mathbf{E} = \left\{-\left[\frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{i}\right]\cos\left(\mathbf{kr} - \omega t\right) - \left[\frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{j}\right]\sin\left(\mathbf{kr} - \omega t\right)\right\}\frac{m\sin\varphi}{r}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2.$$

Интенсивность излучения в заданном направлении $S = \frac{\omega^4 m^2 \sin^2\varphi}{4\pi c^3 r^2}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)$, где φ – угол между направлением излучения и осью *OZ*. Полная интенсивность излучения по всем направлениям $J = \frac{2m^2\omega^4 \sin^2\varphi}{3c^3}$.

Задача 3.51. Определить поле излучения, создаваемого заданным распределением плотности тока частотой ω: $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0(\xi)e^{-i\omega t}$.

Решение. Поле излучения выражается через вектор Герца: $\mathbf{Z}_c(\mathbf{r},t)=\int\frac{\mathbf{P}\left(\xi,t-\frac{r}{c}\right)}{r}\mathrm{d}^3\xi$, $\mathbf{j}=\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$. Следовательно, $\mathbf{P}=\frac{i}{\omega}\mathbf{j}_0(\xi)e^{-i\omega t}$, $\mathbf{Z}_c=\frac{i}{\omega}e^{-i\omega t}\int\mathbf{j}_0(\xi)\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{r}\mathrm{d}\xi$. Отсюда получаем $\mathbf{E}=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{Z}_c-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Z_c}{\partial t^2}=$

$$=\frac{i}{\omega}e^{-i\omega t}\int\left\{\left(\mathbf{j}_0\nabla\right)\nabla+k^2\mathbf{j}_0\right\}\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{r}\mathrm{d}^3\xi;$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}\mathrm{rot}\frac{\partial\mathbf{Z}_c}{\partial t}=\frac{1}{c}e^{i\omega t}\int\left[\nabla,\mathbf{j}_0\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{r}\right]\mathrm{d}^3\xi.$$

Задача 3.52. Найти поле излучения в вакууме линейной антенны длиной *l*, питаемой током $I(\xi)=I_0\sin n\pi\left(\frac{\xi}{l}+\frac{1}{2}\right)e^{-i\omega t}$, где *n* = 1, 2, 3 …, $-\frac{l}{2}\le\xi\le\frac{1}{2}$.

Решение. Поле излучения линейной антенны определяется вектором Герца (см. задачу 3.51): $\mathbf{Z}_e=\frac{i}{\omega}e^{-i\omega t}I_0\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\sin n\pi\left(\frac{\xi}{l}+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mathbf{kr}}}{r'}\mathrm{d}\xi\xi_0$, где ξ_0 – единичный вектор направления антенны. В антенне устанавливается стоячая волна с частотой $\omega=\frac{\pi n}{e}c$ и волновым вектором $k=\frac{\pi a}{e}$. Из рис. 3.14 видно, что расстояние между точками наблюдения и элементом тока в антенне в волновой зоне $r'=\sqrt{r^2+\xi^2-2r\xi\cos\theta}\approx r\left(1-\frac{\xi\cos\theta}{r}\right)$.

В знаменателе подынтегральной функции можно заменить r' на *r*, пренебрегая малым членом, так как знаменатель – медленно изменяющаяся функция. Но в показателе экспоненты этот малый член следует сохранить ввиду быстро осциллирующего характера этой функции. После упрощений получаем интеграл вида

$$\mathbf{Z}_e = \frac{iI_0}{\omega}\frac{e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}}{r}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sin k\left(\xi + \frac{l}{2}\right)e^{-ik\xi\cos\theta}d\xi\xi_0 \ .$$

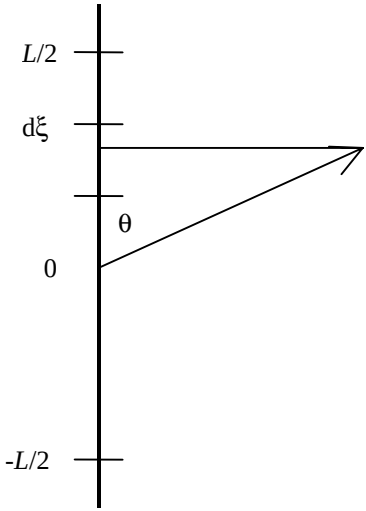

Рис. 3.14

В результате интегрирования получаем вектор Герца в виде $\mathbf{Z}_e = \frac{icI_0}{\omega^2}F(\theta)\frac{e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}}{r}\xi_0$, где $F(\theta) = \frac{2\cos\left(n\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$, n = 1, 3, 5, …, $F(\theta) = \frac{i2\sin\left(n\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin^2\theta}$, n = 2, 4, 6 …

Вычислим поле излучения в сферических координатах:

$$H_\varphi = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\,Z_c = \frac{1}{cr}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}(rZ_\theta) = -\frac{\sin\theta}{cr}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}(rZ_c) = \frac{iI_0}{c}F(\theta)\sin\theta\frac{e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}}{r};$$

$H_r = H_\theta = 0$, $E_\theta = H_\varphi$, $E_\varphi = H_\varphi = 0$.

Интенсивность излучения в заданном направлении

$$S_r = \frac{c}{8\pi} E_\theta H_\varphi^* = \frac{I_0^2 \sin^2\theta \left|F(\theta)\right|}{8\pi c r^2} =$$

$$= \frac{I_0^2}{2\pi c r^2 \sin^2\theta} \begin{cases} \cos^2\left(n\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right) \text{ при } n = 1, 3, 5, \ldots \\ \sin^2\left(n\dfrac{\pi}{2}\cos\theta\right) \text{ при } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

Задача 3.53. Найти выражение для силы лучистого трения, рассматривая колебания связанного заряда.

Решение. Уравнение затухающих колебаний связанного заряда имеет вид $m\ddot{x} = -\alpha x + F_S$, где $\alpha = \omega_0^2 m$ – квазиупругая постоянная. Умножим уравнение колебаний на $\dot{x}$: $m\ddot{x}\dot{x} + \alpha \dot{x}x = F_S \dot{x}$ и преобразуем к виду

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mx^2}{2} + \frac{\alpha}{2}x^2\right) = F_S \dot{x} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{x}^2 .$$

Так как $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}\dddot{x}) = \ddot{x}^2 + \dot{x}\dddot{x}$, то $F_S \dot{x} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{x}\dddot{x} - \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}\dddot{x})$. Так как среднее по периоду колебаний члена с производной по времени равно нулю, то после усреднения получим

$$F_S = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\langle \dddot{x} \rangle .$$

Задача 3.54. На свободный электрон падает в вакууме плоская электромагнитная волна. Вычислить полный эффективный поперечник рассеяния, пренебрегая реакцией излучения и релятивистскими эффектами.

Решение. Эффективный поперечник рассеяния равен отношению интенсивности рассеиваемой энергии к плотности потока падающей энергии. Полная интенсивность рассеиваемой электроном энергии $J = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\mathbf{v}}^2$, где $\dot{\mathbf{v}} = \frac{e\mathbf{E}}{m}$. Плотность потока энергии падающей волны $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}E^2$. Следовательно, эффективный поперечник рассеяния

$$\sigma = \frac{J}{S} = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{m^2c^4} = \frac{8\pi}{3}r_0^3,$$

где $r_0 = \dfrac{e^2}{mc^2}$ – классический радиус электрона.

Задача 3.55. Вычислить эффективное дифференциальное сечение рассеяния свободным электроном плоской монохроматической волны для следующих случаев:

а) падающая волна линейно поляризована;

б) падающая волна эллиптически поляризована.

Найти степень деполяризации рассеянного света.

Решение. Степенью деполяризации называется отношение $\dfrac{I_1}{I_2}$, где I_1 и I_2 – наименьшая и наибольшая интенсивности рассеянной волны, поляризованной во взаимно перпендикулярных направлениях соответственно. Эффективное дифференциальное сечение рассеяния определяется формулой $\mathrm{d}\sigma = \dfrac{\mathrm{d}I}{|\mathbf{S}|}$, где $\mathrm{d}I$ – интенсивность рассеянного излучения в направлении $\mathrm{d}\Omega$, $|\mathbf{S}|$ – интенсивность падающей волны.

Если падающая волна линейно поляризована, то колебания электрона в поле волны также линейно поляризованы в том же направлении. Следовательно, интенсивность излучения колеблющегося электрона в телесном угле $\mathrm{d}\Omega$ равна $\mathrm{d}I = \dfrac{\sin^2\theta}{4\pi c^3}e^2\dot{\mathbf{v}}^2\, d\Omega$, где θ – угол между данным направлением рассеяния и направлением колебания электрона; $\dot{\mathbf{v}} = \dfrac{e\mathbf{E}}{m}$. Аналогично задаче 3.54 получаем

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{e^4}{m^2c^4}\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega = r_0^2\sin^2\theta\mathrm{d}\Omega.$$

Пусть A и B – полуоси эллипса поляризации; θ_1 и θ_2 – углы между данным направлением рассеяния и полуосями A и B. Эллиптически поляризованная волна получается как суперпозиция двух линейно

поляризованных волн с амплитудами A и B, поэтому из предыдущей части задачи получаем $\mathrm{d}\sigma = r_0^2 \dfrac{A^2 \sin^2\theta_1 + B^2 \sin^2\theta_2}{A^2 + B^2}\mathrm{d}\Omega$.

Вычислим полное эффективное сечение рассеяния. Направим ось вдоль направления рассеяния падающей волны, оси OX и OY направлены вдоль осей поляризации. При этих условиях $\cos\theta_1 = \sin\theta\cos\varphi$; $\cos\theta_2 = \sin\theta\sin\varphi$, где θ и φ – сферические углы направления рассеяния. Поэтому $\mathrm{d}\sigma = r_0^2\left(1 - \sin^2\theta \dfrac{A^2\cos^2\varphi + B^2\sin^2\varphi}{A^2 + B^2}\right)\mathrm{d}\Omega$.

Интегрируя по всем угла, получаем полное сечение рассеяния

$$\sigma = \int \mathrm{d}\sigma = r_0^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \sin^2\theta \frac{A^2\cos^2\varphi + B^2\sin^2\varphi}{A^2 + B^2}\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{8}\pi r r_0^2 .$$

Этот результат совпадает с результатом предыдущей задачи.

Задача 3.56. Пусть на частицу падает плоская волна, распространяющаяся вдоль оси OZ. Уравнение движения частицы имеет вид $m\dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = e\mathbf{E}$, где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}$ – напряженность электрического поля волны.

Решение. Будем считать, что длина волны велика и на частицу действует сила $e\mathbf{E} = eE_0 e^{-i\omega t}$. Начальные условия удобно выразить в следующем виде: $\mathbf{r}(0) = 0$, $\dot{\mathbf{r}} = 0$. Частное решение уравнения движения, описывающее вынужденное колебание частицы, имеет вид $\mathbf{r}(t) = -\dfrac{e}{m\omega^2}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} = -\dfrac{e}{m\omega^2}\mathbf{E}$ Стационарное движение частицы – это колебание в плоскости XY с частотой ω и с амплитудой $\dfrac{eE_0}{m\omega^2}$.

Задача 3.57. Найти диэлектрическую проницаемость и проводимость электронной плазмы с концентрацией частиц N. Электроны считать свободными (бесстолкновительная плазма).

Решение. Диэлектрическая проницаемость плазмы может быть найдена из соотношения $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \varepsilon\mathbf{E}$, где $\mathbf{P} = Ne\mathbf{r}$ – полный дипольный момент (поляризация) плазмы. Используя результаты зада-

чи 3.56, получаем $\varepsilon = 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m\omega^2}$. Скорость электронов $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = i\frac{e}{m\omega}\mathbf{E}$. Отсюда плотность электронного тока $\mathbf{j} = Ne\mathbf{v} = i\frac{Ne^2}{m\omega}\mathbf{E}$. Поэтому проводимость $\sigma = i\frac{Ne^2}{m\omega}$. При отсутствии столкновений электронов нет диссипации энергии, поэтому проводимость имеет реактивный характер, т.е. является чисто мнимой величиной.

Задача 3.58. Найти частоту чисто электрической продольной плазменной волны.

Решение. Рассмотрим нейтральную в целом плазму. Если отсутствуют внешние источники, то средний заряд и средний ток в плазме равны нулю. Из уравнений Максвелла следует $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$.

Покажем, что при этих условиях в плазме может существовать чисто электрическая продольная волна ($H = 0$). Положим $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp\left[(i\mathbf{kr} - \omega t)\right]$, причем $\mathbf{E}_0 \| \mathbf{k}$. Тогда $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = 0$, если $\varepsilon = 0$. Используя выражение для диэлектрической проницаемости плазмы, найденное в задаче 3.57, получим уравнение для определения частоты продольных электрических (плазменных) волн: $\varepsilon = 1 - \frac{4\pi Ne}{m\omega^2} = 0$.

Отсюда плазменная частота $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi Ne^2}{m}}$. Плазменные волны аналогичны продольным упругим волнам в твердых телах, но упругость плазмы возникает из-за дальнодействующих кулоновских сил, а не из-за короткодействующих межатомных сил. Электронный газ в металле и полупроводниках образует плазму высокой плотности. Плазменная частота достигает $10^{15}\ldots10^{16}$ Гц.

Задача 3.59. Плазма находится в однородном магнитном поле H_0. В направлении магнитного поля распространяется плоская монохроматическая волна. Определить закон движения электронов в поле волны и коэффициент преломления электромагнитных волн в плазме.

Решение. Пусть поле H_0 направлено вдоль оси *OZ*. Уравнение движения электронов в поле волны $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}\left[\mathbf{v}, \mathbf{H}_0\right]$, или в проекциях на оси координат: $\ddot{X} = \frac{e}{m}E_x + \frac{eH_0}{c}\dot{y}$,

$$\ddot{Y} = \frac{e}{m}E_y - \frac{eH_0}{c}\dot{x}, \ \ddot{Z} = 0.$$

Удобно ввести новые комплексные переменные: $\xi = x + iy, \varepsilon = E_x + iE_y, H = H_x + iH_y$. Тогда уравнение движения примет компактный вид $\ddot{\xi} = \frac{e}{m}\varepsilon - i\frac{eH_0}{c}\xi$. Учитывая, что для плоской электромагнитной волны, распространяющейся вдоль оси *OZ*, $E_z = H_z = 0$, получаем уравнения Максвелла в новой системе переменных:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} = \frac{i}{c}\frac{\partial H}{\partial t};$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -i\frac{4\pi}{c}j - \frac{i}{c}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t},$$

где $j = j_x + ij_y = Ne\xi$ – комплексная плотность тока в плазме.

Решение системы линейных уравнений Максвелла ищем в виде $\varepsilon = Ae^{\pm i(kz-\omega t)}$, $H = Be^{\pm i(kz-\omega t)}$, $\xi = ae^{\pm i(kz-\omega t)}$. Подставляя эти решения в систему уравнений Максвелла, получаем систему линейных однородных уравнений для определения неизвестных амплитуд *A*, *B* и *a*:

$$a\left(-\omega^2 \pm \frac{eH}{mc}\omega\right) = \frac{e}{m}A;$$

$$ikA = \frac{\omega}{c}B;$$

$$ikB = -\omega\frac{4\pi}{c}Nea - \frac{\omega}{c}A.$$

Эта система уравнений имеет решение, если детерминант, составленный из коэффициентов в уравнениях, равен нулю. Раскрывая этот детерминант, получаем уравнение, связывающее частоту и волновой

вектор волны в плазме: $\frac{k^2c^2}{\omega^2}=1-4\pi\frac{\frac{Ne}{m}}{\omega^2\pm\omega\frac{eH_0}{mc}}$. Отсюда сразу получаем коэффициент преломления электромагнитной волны в плазме $n=\frac{kc}{\omega}=\left(1-\frac{4\pi\frac{Ne^2}{m}}{\omega^2\pm\omega\frac{eH_0}{mc}}\right)^{1/2}$. Движение электронов определяется из соотношения $\xi=\frac{a}{A}\varepsilon$, тогда, возвращаясь к исходным обозначениям, получаем закон движения электрона в виде $\mathbf{r}=-\frac{e}{m}\frac{\mathbf{E}}{\omega^2\pm\omega\frac{eH_0}{mc}}$.

Задача 3.60. Найти зависимость показателя преломления среды от частоты.

Решение. Показатель преломления $\tilde{n}=\sqrt{\varepsilon}=\sqrt{1+4\pi\alpha N}$. Поляризация связана со смещением отдельного электрона соотношением $\mathbf{P}=N\alpha\mathbf{E}=Ne\mathbf{r}$. Уравнение движения связанного электрона в поляризованной плоской волне имеет вид $m\ddot{\mathbf{r}}+m\gamma\dot{\mathbf{r}}+\beta\mathbf{r}=e\mathbf{E}_0e^{i\omega t}$, где $\gamma-$ коэффициент трения; $\beta-$ квазиупругая постоянная. Для установившегося процесса решение пропорционально $e^{i\omega t}$: $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0e^{i\omega t}$, откуда после подстановки в уравнение движения электрона $\mathbf{r}_0=\frac{e\mathbf{E}_0}{m\left(\omega_0^2-\omega^2+r\gamma\omega\right)}$. Подставляя **r** в уравнения для $\tilde{n}$ и **p**, имеем

$$\varepsilon=1+\frac{4\pi Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega};$$

$$\tilde{n}\cong1+\frac{2\pi Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\gamma\omega}.$$

Представляя $\tilde{n}$ в виде $\tilde{n}=n_0-ix$, где $n_0=\mathrm{Re}\,\tilde{n}$, получаем $\chi=\mathrm{Im}\,\tilde{n}$. Из уравнения для $\tilde{n}$ следует

$$n_0 = 1 + \frac{2\pi Ne^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2};$$

$$\chi = \frac{2\pi Ne^2}{m} \frac{\gamma m}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + \gamma^2\omega^2}.$$

Задача 3.61. Плоская монохроматическая волна распространяется в среде, способной поляризоваться. Оценить глубину слоя δ, на которой интенсивность волны затухает в *e* раз.

Решение. Пусть волна распространяется вдоль оси *OX*, тогда

$E_y = E_0 e^{i(\omega t - kx)}$, $H_z = H_0 e^{i(\omega t - kx)}$, где $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}\tilde{n}$, $\tilde{n} = n_0 - ix$.

При этом

$$E_y = E_0 e^{-\frac{\omega\chi}{c}x} e^{i\omega\left(t - \frac{n_0 x}{c}\right)};$$

$$H_z = H_0 e^{-\frac{\omega\chi}{c}x} e^{i\omega\left(t - \frac{n_0 x}{c}\right)}.$$

Таким образом, волна в среде распространяется с затухающей амплитудой. Вектор Пойнтинга $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} E_0 H_0 e^{-\frac{2\omega\chi}{c}x} \cos^2\omega\left(t - \frac{n_0 x}{c}\right)$. Усредняя $\mathbf{S}$ по времени $t >> T$ (T – период колебаний), имеем $\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} E_0 H_0 e^{-\frac{2\omega\chi}{c}x}$, откуда следует, что $\delta = \frac{c}{2\omega x}$.

Оценить δ самостоятельно: а) при $\omega >> \omega_0$, б) при $\omega << \omega_0$.

3.6. Специальная теория относительности

3.6.1. Постулаты

1. Все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, т.е. уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы к другой.

2. Любые взаимодействия между телами распространяются в вакууме со скоростью, не превышающей предельную скорость, равную скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с. Скорость света в вакууме

одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит ни от скорости источника, ни от скорости наблюдателя.

3.6.2. Преобразования Лоренца

Преобразования координат и времени в теории относительности при переходе от одной инерциальной системы отсчета (K) к другой (K') имеют следующий вид (рис. 3.15):

$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \; y' = y, \; z' = z, \; t' = \frac{t' - \frac{\upsilon x}{c}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon}{c}}}.$$

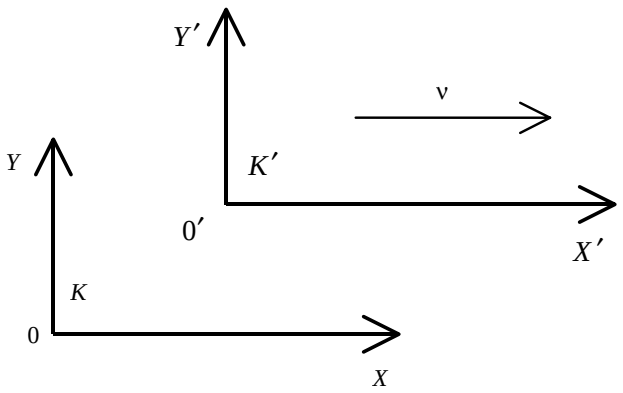

Рис. 3.15

Следствия из преобразований Лоренца:

1. Сокращение длины движущихся тел в направлении движения $l = l_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$, где l_0 – длина тела в системе отсчета, в которой тело покоится; l – длина тела, измеренная наблюдателем, относительно которого тело движется.

2. Замедление хода движущихся часов $t_2 - t_1 = \dfrac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$, где $t_2' - t_1'$ – время, показываемое часами в системе, в которой находится наблюдатель; $t_2 - t_1$ – время, показываемое движущимися часами.

3. Из преобразований Лоренца непосредственно вытекает закон сложения скоростей в теории относительности:

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_x' + \upsilon}{1 + \dfrac{\upsilon_x \upsilon}{c^2}}; \quad \upsilon_y = \upsilon_y' \sqrt{1 - \frac{\upsilon}{c^2}}; \quad \upsilon_z = \frac{\upsilon_z' \sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{\upsilon_x \upsilon}{c^2}},$$

где $\boldsymbol{\upsilon}$ – скорость тела в системе (K), $\boldsymbol{\upsilon}'$ – скорость тела в системе (K').

3.6.3. Инварианты теории относительности

1. Интервал $S_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 =$
$= c^2(t_2' - t_1') - (x_2' - x_1') - (y_2' - y_1') - (z_2' - z_1')$.

В сокращенной записи: $S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - r_{12}'^2 = \mathrm{Inv}$.

Интервалы бывают *временноподобные* и *пространственноподобные*.

Временноподобные: $S_{12}^2 > 0$, $S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0$. Для двух событий, разделенных временноподобным интервалом, всегда можно найти такую систему отсчета, в которой два события происходят в одном месте.

Пространственноподобные: $S_{12}^2 < 0$, $S_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - r_{12}^2 = -r_{12}'^2 < 0$. Для двух событий, разделенных пространственноподобным интервалом, всегда можно подобрать такую систему отсчета, в которой оба события происходят в один и тот же момент времени, но в разных местах.

2. Собственное время $\mathrm{d}\tau = \dfrac{\mathrm{d}S}{c} = \mathrm{Inv}$ – это время, отсчитываемое по часам, движущимся с данным телом. Учитывая зависимость интервала времени от скорости системы отсчета, эта формула может быть записана в виде $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \dfrac{\upsilon^2}{c^2}}$, где $\mathrm{d}t$ – промежуток времени, показываемый часами в системе, в которой находится наблюдатель.

3.6.4. Четырехмерные векторы и тензоры. Ковариантная система уравнений

Если ввести координату $x_4 = ict$ и переобозначить координаты $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$, то непосредственно можно показать, что преобразования Лоренца являются ортогональными преобразованиями (поворот осей) в четырехмерном пространстве: $x_i' = \alpha_{ik} x_k$, где матрица преобразования

$$\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\dfrac{\upsilon}{c}\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -t\dfrac{\upsilon}{c}\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}, \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Результат непосредственно следует из постулатов теории относительности и свойств ортогонального преобразования.

Совокупность четырех величин $A_i(A_1, A_2, A_3, A_4)$, которые при преобразовании четырехмерной системы координат преобразуются, как координаты x_i, называется четырехмерным вектором: $A_i' = \alpha_{ik} A_k$ или для компонент:

$$A_1' = \frac{A_1 + i\dfrac{\upsilon}{c}A_4}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}, \ A_2 = A_2', \ A_3 = A_3', \ A_4' = \frac{A_4 - i\dfrac{\upsilon}{c}A_1}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Квадрат для четырехмерного вектора – инвариант преобразований Лоренца. Совокупность шестнадцати величин A_{ik}, которые при преобразовании координат $x_i' = \alpha_{ik} x_k$ преобразуются, как произведения координат, т.е. по формулам $A_{ik}' = \alpha_{im}\alpha_{kn}A_{mn}$, называется четырехмерным тензором (4-тензором) второго ранга. Величина, не меняющаяся при преобразовании Лоренца, называется лоренц-скаляром или лоренц-инвариантом.

Согласно постулату теории относительности, законы физики должны иметь одинаковую форму в различных лоренцевых системах координат, т.е. уравнения, описывающие эти законы, должны быть

написаны так, чтобы обе их части имели одинаковые трансформационные свойства (ковариантность уравнений).

Примеры 4-векторов:

а) четырехмерный вектор скорости $u_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}S}$;

б) четырехмерный вектор ускорения $\omega_i = \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}S^2}$;

в) четырехмерный волновой вектор $k_i = \left(\mathbf{k}, i\frac{\omega}{c}\right)$, где трехмерный волновой вектор $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$ ($\mathbf{n}$– единичный вектор направления распространения волны).

3.6.5. Релятивистская механика. Энергия и импульс

Импульс релятивистской частицы связан с ее скоростью соотношением $\mathbf{P} = \frac{m\boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$. Полная энергия свободно движущейся частицы $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$, при $\frac{\upsilon}{c} << 1$ $E = mc^2 + \frac{m\upsilon^2}{2}$. Величина $E_0 = mc^2$ называется энергией покоя. В механике Ньютона такое понятие отсутствует. Импульс и энергия частицы являются пространственной и временной составляющими четырехмерного вектора импульса: $P_i = \left(\mathbf{P}, P_4 = \frac{i}{c}E\right)$.

3.6.6. Электродинамика теории относительности

Уравнения электромагнитного поля могут быть записаны в четырехмерной форме, ковариантной относительно преобразований Лоренца. Приведем основные соотношения релятивистской электродинамики.

1. *4-вектор плотности тока* $j_i = (\mathbf{j},\ j_4 = ic\rho)$. Пространственные компоненты – обычный трехмерный вектор плотности тока **j**, временная $j = ic\rho$, где ρ – плотность заряда.

2. *4-вектор-потенциал. Уравнение для потенциалов*. Если ввести четырехмерный вектор-потенциал $A_i = (\mathbf{A},\ A_4 = i\varphi)$ и четырёхмерный оператор Лапласа, называемый оператором Д'Аламбера, $\Box = \left(\Delta, -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$, то уравнение для потенциалов можно представить в ковариантной форме $\Box A_i = -\frac{4\pi}{c} j_i$.

3. *Ковариантная форма уравнений для* **E** *и* **H**. Скалярный и векторный потенциалы определяются в виде $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. Если эти соотношения записать в четырехмерном виде, то оказывается, что электрическое и магнитное поле являются элементами антисимметричного 4-тензора второго ранга, называемого тензором электромагнитного поля: $F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}$,

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -E_x \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}.$$

4. *Уравнения Максвелла*. Два неоднородных уравнения имеют вид $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$ и $\operatorname{rot} H - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$. Правые части являются составляющими 4-вектора j_i. Левые части тоже должны быть составляющими 4-вектора. Из определения F_{ik} следует, что эти уравнения принимают ковариантную форму $\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i} = \frac{4\pi}{c} j_i$, где $i, k = 1, 2, 3, 4$. Аналогичным образом, два однородных векторных уравнения Максвелла

$\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}=0$ сводятся к четырем уравнениям $\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_j}+\frac{\partial F_{kj}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{ji}}{\partial x_k}=0$, $i, j, k = 1, 2, 3, 4$.

5. *4-вектор плотности силы Лоренца*. Силу Лоренца, действующую на единицу объема, можно записать в виде $\mathbf{f}=\rho\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{H}]\right)$. Выписывая явно составляющие f и выражая компоненты **E** и **H** через F_{ik}, можно силу Лоренца представить в виде $f_i=\frac{1}{c}j_kF_{ik}$, где $f_i=\left(\mathbf{f}, f_4=\frac{i}{c}\rho(\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{E})\right)$ – 4-вектор плотности силы Лоренца; f_4 – временная компонента, имеющая смысл работы поля, совершаемой над зарядом в единицу времени в единице объема. Пространственная часть 4-вектора f_i определяется скоростью изменения импульса единицы объема.

Вопросы и задания

1. При предельном переходе $c \to \infty$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Объясните физический смысл такого перехода. Возможны ли скорости, превышающие скорость света в вакууме?

2. Покажите, что уравнения Максвелла не инвариантны относительно преобразований Галилея. (Достаточно доказать неинвариантность волнового уравнения $\Delta f-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0$.)

3. Из формул для преобразования скоростей в теории относительности покажите, что невозможно движение тел с $\upsilon > c$.

4. В координатах $x - t$, выбрав какое-нибудь событие за начало отсчета, покажите области, соответствующие временноподобным и пространственноподобным интервалам. Каким интервалом разделены события, между которыми есть причинно-следственная связь?

5. Уравнение движения в теории относительности можно записать в четырехмерной форме, если ввести 4-вектор “силы Минковского” $F_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(mcu_i)$. Объясните смысл пространственных и временной компонент этого 4-вектора.

6. Выразите скорость частицы $\boldsymbol{\upsilon}$ через ее импульс $\mathbf{m}$. Найти приближенные выражения кинетической энергии частицы с массой с точность до $\frac{\upsilon^4}{c^4}$ при $\upsilon << c$.

7. Равна ли масса сложной частицы сумме масс ее составляющих?

Задача 3.62. В системе K частица равномерно вращается по кругу с угловой скоростью ω в плоскости XY. Система K' движется по оси x относительно системы K со скоростью υ. Найти компоненты ускорения частицы в системе K'. Вычислить u_i^2. Показать, что 4-векторы скорости и ускорения взаимно перпендикулярны.

Решение. Для системы K'

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - x}{1 - \frac{\upsilon_x \upsilon}{c^2}}; \quad \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon_x \upsilon}{c^2}}; \quad x = r\cos\omega t; \quad \upsilon_x = -\omega r \sin\omega t;$$

$$\left.\begin{aligned} a'_x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\upsilon'_x = \frac{\mathrm{d}\upsilon'_x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \\ a'_y &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\upsilon'_y = \frac{\mathrm{d}\upsilon'_x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} \end{aligned}\right\}; \tag{3.4}$$

$$\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - \frac{\upsilon}{c^2}\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}; \quad \mathrm{d}x = -\omega r \sin\omega t \mathrm{d}t; \quad \mathrm{d}t' = \frac{\left(1 + \frac{\upsilon}{c^2}\omega r \sin\omega t\right)}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\mathrm{d}t.$$

Подставляя две последние формулы в систему (3.4), находим нужный результат.

Задача 3.63. С помощью правил преобразования компонент для 4-вектора скорости u_i получить формулы преобразования скоростей (тело движется вдоль оси X).

Решение. Так как $v_x = v$, $v_y = 0$, $v_x = 0$, $u'_i = \alpha_{ik} u_k$, то $u'_1 = \gamma u_1 + i\frac{\upsilon}{c}\gamma u_4$, $u'_4 = \gamma u_4 - i\frac{\upsilon}{c}\gamma u_1$, где $\gamma = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2}$. Подставляя

известные выражения для компонент u_i в предыдущие формулы, получаем

$$\frac{v'}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{1}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\left(\frac{v}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-\frac{\frac{\upsilon}{c}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right);$$

$$\frac{i}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\frac{i}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(\frac{i}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}-\frac{i\frac{v\,\upsilon}{c}}{c\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right).$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$v'=\frac{v-\upsilon}{1-\frac{v\,\upsilon}{c^2}}.$$

Задача 3.64. В основе релятивистской электродинамики лежит предположение об инвариантности и сохранении заряда. Показать, что это непосредственно следует из преобразований Лоренца для 4-вектора плотности тока.

Решение. Пусть в системе K покоится заряд $\rho\,\mathrm{d}V$. Система K' движется по отношению к системе K со скоростью υ. Из преобразований Лоренца следует, что

$j_4=ic\rho=\frac{ic\rho'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$; $\rho\,\mathrm{d}V=\frac{\rho'\,dV'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$, а так как $\mathrm{d}\upsilon'=\mathrm{d}\upsilon\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c}}$, то полный заряд

$$\rho'\,\mathrm{d}V'=\rho\,\mathrm{d}V.$$

Задача 3.65. В системе K покоится заряд. Найти электромагнитное поле в системе K'.

Решение. Компоненты напряженности **E** и **H** являются временными и пространственными компонентами тензора электромагнитного поля F_{ik}. В системе K имеется только электрическое поле. Оп-

ределим поле в системе K'. Компонент тензора F_{ik} преобразуется по правилу $F'_{ik} = \alpha_{im}\alpha_{kn}F_{mn}$, отсюда для магнитного поля:

$$H'_x = 0,$$

$$H'_4 = F'_{31} = \alpha_{3m}\alpha_{1n}F_{mn} = \alpha_{33}\alpha_{11}F_{31} + \alpha_{41}\alpha_{33}F_{34} = \alpha_{41}\alpha_{33}F_{34} = \gamma\frac{\upsilon}{c}E_z,$$

$$H'_z = F'_{12} = \alpha_{1m}\alpha_{2n}F_{mn} = \alpha_{11}\alpha_{2n}F_{n1} + \alpha_{14}\alpha_{2n}F_{n4} = \alpha_{14}\alpha_{22}F_{24} = -\gamma\frac{\upsilon}{c}E_y,$$

$$H'_x = F'_{23} = \alpha_{2m}\alpha_{3n}F_{mn} = 0;$$

для электрического поля: $iE'_y = F'_{42} = \alpha_{4m}\alpha_{2n}F_{mn} = \gamma F_{42} = ijE_y$, $E'_y = \gamma E_y$,

$iE'_z = F_{43} = iE_z$, $E'_z = \gamma E$, $iE_x = F'_{41} = F_{41}iE_x$, $E'_x = E_x$.

Показать самостоятельно, что $H^2 - E^2 = (H')^2 - (E')^2$ есть инвариант.

Задача 3.66. Найти потенциал электромагнитного поля произвольно движущегося электрического заряда *e*.

Решение. Пусть координаты точки *P*, где определяется поле, есть координаты заряда $x_1, x_2, x_3, x_4 = ict$. Четырехмерное расстояние между двумя событиями: испускание электромагнитной волны в момент *t* и приходом ее в точку наблюдения *P* – равно

$$R_i = \left(\mathbf{R}_\alpha, R_4 = ic(t-t')\right) = x_i - \xi_i,$$

где $R_\alpha^2 = r^2 = (x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 + (x_3-\xi_3)^2$,

тогда $R_4 = ic(t-t') = ir$ и $R_1^2 = R_\alpha^2 + R_4^2 = r^2 - c^2(t-t')^2 = 0.$

В системе, в которой заряд покоится, компоненты 4-вектор-потенциала

$$A_1^{(0)} = A_2^{(0)} = A_3^{(0)} = 0,\ A_4^{(0)} = i\varphi^{(0)} = i\frac{e}{r_0}.$$

Компоненты 4-вектора скорости

$$U_1^{(0)} = U_2^{(0)} = U_3^{(0)} = 0, \quad U_4^{(0)} = i\gamma = i.$$

Последнее равенство учитывает, что $\gamma = \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1$, поскольку скорость заряда в этой системе равна нулю.

Скалярное произведение двух четырехмерных векторов есть лоренц-инвариант:

$R_i U_i = R_i^{(0)} U_i^{(0)} = \mathrm{Inv}$, и поскольку $R_i^{(0)} U_i^{(0)} = R_4^{(0)} U_4^{(0)} = i r_0 i = -r_0$, то $r_0 = -R_i U_i$.

Поэтому 4-вектор-потенциал в любой лоренцевой системе можно записать в виде $A_i = \frac{eU_i}{r_0} = -\frac{eU_i}{R_k U_k}$. Преобразуем полученный результат к более удобному виду. Для этого запишем $R_i U_i = R_\alpha U_\alpha + R_4 U_4$, где

$U_\alpha = \alpha \frac{\upsilon_\alpha}{c}$, $\quad U_4 = i\gamma$, $\quad R_\alpha = r_\alpha$, $\quad R_4 = c(t - t') = ir$,

$R_i U_i = \frac{\gamma}{c}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\upsilon}) - \gamma r = -\gamma\left(r - \frac{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\upsilon})}{c}\right)$. Таким образом, окончательно получаем выражения для потенциалов произвольно движущегося заряда (потенциалы Лиенара – Вихерта):

$$\mathbf{A} = \frac{e\boldsymbol{\upsilon}}{c\left(r - \frac{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\upsilon})}{c}\right)}; \quad \varphi = \frac{e}{r - \frac{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\upsilon})}{c}}.$$

Следует отметить, что все величины, стоящие в правой части этих выражений, отнесены не к моменту времени *t*, а к моменту времени $t' = t - \frac{r}{c}$ (запаздывающие потенциалы), так как поле в данной точке определяется состоянием источника в предшествующий момент времени. Запаздывание определяем временем, необходимым для прохождения светом расстояния *r*. Для непрерывного распределения зарядов, пренебрегая величиной $\frac{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\upsilon})}{c}$ (что возможно при $\frac{\upsilon}{c} << 1$), получаем

$$\mathbf{A}(t) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}\left(t' = t - \frac{r}{c}\right) d\upsilon}{r} \quad \text{и} \quad \varphi(t) = \int \frac{\rho\left(t' = t - \frac{r}{c}\right)}{r} d\upsilon.$$

Задача 3.67. Найти потери энергии частицы, движущейся в линейном ускорителе.

Решение.

Получим формулу интенсивности дипольного излучения в релятивистском случае. При $\upsilon << c$

$$J = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3 m^2}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}\right)^2. \qquad (3.5)$$

Эта формула справедлива в системе отсчета, где тело покоится, т.е. $\boldsymbol{\upsilon} = 0, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = 0$. Далее воспользуемся уравнением

$\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}S}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}S}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}S}\right)^2$, в котором предполагается $P_i = P_i\left(\mathbf{P}, \frac{i}{c}\varepsilon\right)$, $\varepsilon = \gamma mc^2$. При $\upsilon \to 0$ $\varepsilon \to mc^2$, $\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}S} \to \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}S}$. Так как $c^2\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}S}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \mathrm{Inv}$, то для любой системы отсчета

$$J = \frac{2e^2}{3m^2c}\left[\left(\frac{\mathrm{d}P_i}{\mathrm{d}S}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}S}\right)^2\right]. \qquad (3.6)$$

Так как $\mathrm{d}S = \frac{c\mathrm{d}t}{\gamma}$ и $\varepsilon = \gamma mc^2$, то выражение (3.6) перепишем в виде

$J = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^2\left[\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]$. Поскольку $\varepsilon = c\sqrt{m^2c^2 + P^2}$, $\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{c^2P}{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$, то очевидно, что $J = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\frac{\varepsilon^2}{m^2c^4}\frac{m^2c^4}{\varepsilon^2}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}\right)^2$. В линейном ускорителе импульс меняется только по величине.

Поскольку $\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}x}\right)^2$, то $J = \frac{2}{3}\frac{e^2}{m^2c^3}\left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}x}\right)^2$. Преобразуем последнее выражение с помощью соотношения $\left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$, тогда

получим $J=\frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\frac{c}{\upsilon}$, откуда видно, что потери на излучение не зависят от энергии частицы, а зависят только от ее изменения на пройденном пути. Формула для потерь на излучение справедлива при любых скоростях υ вплоть до $\upsilon=c$.

Пусть $\upsilon=c$. Так как $\frac{J}{\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}}$ характеризует отношение теряемой энергии к приобретенной, то разгон частицы возможен лишь при $\frac{J}{\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}}<1$: $\frac{J}{\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}}=\frac{2}{3}r_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)=\frac{2}{3}\frac{r_0}{\delta x}\frac{\delta\varepsilon}{mc^2}$, где $r_0=\frac{e^2}{mc^2}$ – классический радиус электрона. Таким образом, если на участке $\delta x=r_0$ изменение энергии $\delta\varepsilon\approx mc^2$, то $\frac{J}{\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}}$~1 и частица ускоряться не будет.

Задача 3.68. Найти потери на излучение частицы, движущейся в синхротроне.

Решение.

$$J=\frac{2e^2}{3m^2c^3}\left(\frac{e}{mc^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}r}\right)^2.$$

Частица движется по окружности.

$$\mathbf{P}=\frac{m\boldsymbol{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=\gamma m\boldsymbol{\upsilon};\qquad \gamma=\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right)^{-1/2};\qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}=\gamma m;\qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}}{\mathrm{d}t}+m\boldsymbol{\upsilon}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t};$$

$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\gamma^3}{\beta}\frac{1}{c^2}\left(\boldsymbol{\upsilon}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}}{\mathrm{d}t}\right)$; $\left(\boldsymbol{\upsilon}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\upsilon}}{\mathrm{d}t}\right)=0$; при движении по окружности $\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}=\gamma\frac{m\upsilon^2}{R}=\gamma m\omega^2R$ или $\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t}=\omega P$, так как $\upsilon=\omega R$. Тогда

$$J=\frac{2e^2}{3m^2c^3}\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^2\gamma^2m^2\omega^4R^2=\frac{2e^2}{3m^2c^3}\left(\frac{\varepsilon}{mc^2}\right)^2\omega^2P^2;$$

$$\omega^2 P^2 = \omega^2\gamma^2 m^2 \upsilon^2;\ \varepsilon = \gamma mc^2;\ \beta = \frac{\upsilon}{c};\ \omega^2 P^2 = \omega^2 \frac{\varepsilon^2}{c^4}\upsilon^2 = \frac{\omega^2\varepsilon^2}{c^4}\beta^2 = \frac{\omega\varepsilon^2}{Rc}\beta^3.$$

Отсюда $J = \frac{2}{3}\frac{e^2}{R}\omega\beta^3\left(\frac{e}{mc^2}\right)^4$.

Пусть $\beta = \frac{\upsilon}{c} \sim 1$, тогда $J = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega}{R}\beta^3\left(\frac{e}{mc^2}\right)^4$. Энергия излучения за один оборот, когда R можно считать постоянным, равна $J \cdot T = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{R}\omega\beta^3\left(\frac{e}{mc^2}\right)^4$, где $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Задача 3.69. Как преобразуется частота и волновой вектор монохроматической волны при переходе от неподвижной системы отсчета к движущейся? Сравнить эффект Допплера в оптике и акустике. Компоненты трехмерного волнового вектора $\mathbf{k}\left(k_x, k_y, k_z\right)$ в движущейся системе найти самостоятельно.

Решение. Из преобразований для временной компоненты 4-волнового вектора $k_4' = \frac{k_4 - \frac{i}{c}\upsilon k_1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$ следует $\omega' = \frac{\omega - \upsilon k_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$. Если источник света (звезда) расположен в системе *K*, то $\omega_0 = \frac{\omega\left(1-\frac{\upsilon}{c}\cos\theta\right)}{\sqrt{1-\frac{\upsilon}{c^2}}}$, где θ – угол между направлением движения источника и лучом зрения, ω_0 – частота (спектральной линии) в системе, где источник покоится; ω – частота, измеряемая неподвижным наблюдателем. Тогда $\omega = \frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{\upsilon}{c}\cos\theta}$.

При $\upsilon = 0$ $\omega = \omega_0$, при $\frac{\upsilon}{c} << 1$ $\omega \approx \omega_0\left(1+\frac{\upsilon}{c}\cos\theta\right)$. Это нерелятивистский эффект Допплера.

Рассмотрим продольный эффект Допплера. Пусть источник движется по лучу. Получим: при $\theta = 0$

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{\upsilon}{c}}\omega_0 = \sqrt{\frac{1+\frac{\upsilon}{c}}{1-\frac{\upsilon}{c}}}\omega_0;\ \text{при}\ \theta = \pi\ \ \omega = \frac{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1+\frac{\upsilon}{c}}\omega_0 = \sqrt{\frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{1+\frac{\upsilon}{c}}}\omega_0.$$

Рассмотрим релятивистский поперечный эффект Допплера. Положим $\theta = \pi/2$. Тогда $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$.

Задача 3.70. Световая волна с частотой ω_0 падает нормально к поверхности плоского зеркала, движущегося равномерно со скоростью υ в направлении распространения падающего света. Определить частоту отраженной световой волны.

Решение. В системе отсчета, в которой зеркало неподвижно, частота падающего света $\omega_1 = \frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\omega_0$. В той же системе отсчета частота отраженного света равна частоте падающего, но в исходной системе отсчета частота отраженной волны $\omega = \frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\omega_1 = \frac{1-\frac{\upsilon}{c}}{1+\frac{\upsilon}{c}}\omega_0$.

4. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

4.1. Волны де Бройля. Волновые пакеты

Гипотеза де Бройля исходит из сходства микрочастиц со светом: подобно свету микрочастицы обладают и корпускулярными и волновыми свойствами. Параметры волнового процесса, связанного с движением микрочастицы, определяются по динамическим переменным частицы: энергии ε и импульсу $\mathbf{p}$. Связь между волновыми и корпускулярными характеристиками описывается уравнениями

$$\varepsilon = \hbar\,\omega; \qquad \mathbf{p} = \hbar\,\mathbf{k}\,;$$

где $\hbar = h / 2\pi$ (h – постоянная Планка); ω – круговая частота волны; $k = 2\pi / \lambda$ – волновой вектор.

Для описания движения свободной микрочастицы, обладающей энергией $\varepsilon = m_0\,c^2 + \dfrac{p^2}{2\,m}$ и импульсом $\mathbf{p}$ можно воспользоваться выражением для плоской монохроматической волны (волны де Бройля) $\psi\,(x, t) = A\,e^{ikx - i\omega t}$. Однако, поскольку плоская волна распределена по всему пространству, она не может быть использована для описания движения частицы с импульсом $\mathbf{p} = \hbar\,\mathbf{k}$, локализованной в узкой области.

Чтобы получить волну, которая ограничена определенной областью пространства, нужно составить группу волн (волновой пакет), образуемую различными волновыми векторами. Фазы и амплитуды этих волн выбрать таким образом, чтобы при их интерференции волны усиливали друг друга в малой области пространства, вне которой результирующая амплитуда их быстро спадала до нуля из-за интерференции:

$$\psi\,(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\,(k)\,e^{ikx - i\omega(k)t}\,\mathrm{d}k,$$

где Фурье-образ

$$f\,(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi\,(x, 0)\,e^{ikx}\,\mathrm{d}x\,.$$

Выбор функции $f(k)$ определяет вид волновой функции ψ. Отметим, что Фурье-образ гауссовой функции также гауссова функция.

Первоначальные предположения о том, что волна де Бройля есть материальный процесс, описывающий природу частиц, оказались

несостоятельными. Фазовая скорость волны больше скорости света, а волновой пакет, описывающий локализованную частицу, со временем расплывается в пространстве из-за дисперсии.

Максом Борном была дана общепринятая в настоящее время, а именно статистическая интерпретация волн де Бройля: физический смысл имеет не сама волновая функция $\psi(x,t)$, а квадрат ее модуля $|\psi|^2 = \psi \cdot \psi^*$, характеризующий плотность вероятности нахождения частицы в точке в момент *t*. Таким образом, волны де Бройля – это волны вероятности, а не материальные волны.

Задача 4.1. Построить волновую функцию $\psi(x)$ (Фурье-преобразование), если заданы волновые пакеты в *k*-пространстве с различными $f(k)$ (Фурье-образ).

а) $f(k) = \exp\left[-\dfrac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2}\right]$ – гауссов волновой пакет.

Решение. Волновая функция

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(k)\, e^{ikx} \mathrm{d}k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2} + i k x} \mathrm{d}k =$$

$$= e^{i k_0 x - \frac{x^2 (\Delta k)^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2} + i (k-k_0) x + \frac{x^2 (\Delta k)^2}{2}} \mathrm{d}k =$$

$$= \sqrt{2\pi\, \Delta k}\, \exp\left[i\, k_0 x - \frac{1}{2} x^2 (\Delta k)^2\right].$$

Результирующий пакет гауссовой формы имеет максимум при $x = 0$ и становится малым при больших *x* (рис. 4.1).

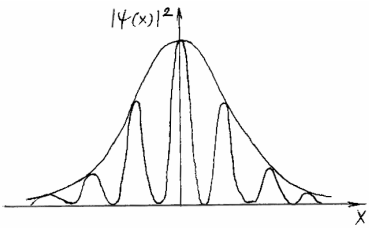

Рис. 4.1

б) $f(k) = A = \text{const}$ в интервале от $k_0 - \Delta k$ до $k_0 + \Delta k$, $\Delta k << k_0$ (рис. 4.2).

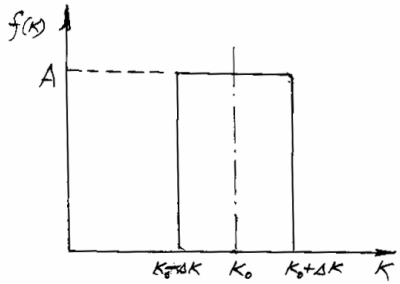

Рис. 4.2

Решение. Волновая функция

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(k)\, e^{ik(x-x_0)}\, \mathrm{d}k = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{ik(x-x_0)}\, \mathrm{d}k =$$

$$= \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \Delta k\,(x-x_0)}{x-x_0}\, e^{ik_0(x-x_0)} \equiv B(x)\, e^{ik_0(x-x_0)},$$

где $B(x)$ – амплитуда пакета достигает максимума в точке $x = x_0$ (рис. 4.3).

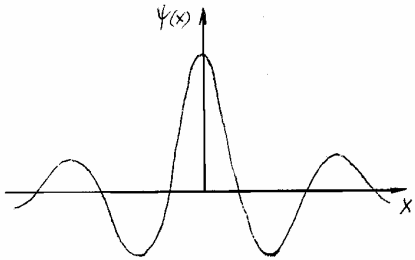

Рис. 4.3

Так как эта функция быстро спадает до нуля при $\Delta x > \dfrac{1}{\Delta k}$, то отсюда следует, что произведение ширины пакета в k-пространстве на ширину в x-пространстве порядка единицы, т.е. $\Delta k \Delta x > 1$.

Задача 4.2. Исследовать движение волнового пакета $f(k) = f(k_0) = A$, $\Delta k << k_0$ в пространстве. Дисперсию не учитывать.

Решение. Волновая функция

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(k)\,e^{ikx-i\omega_k t}\,\mathrm{d}k=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{ikx-i\omega_k t}\,\mathrm{d}k\,.$$

Разлагая частоту ω_k в ряд по степеням $k-k_0$, получаем

$$\omega_k=\omega_{k_0}+\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}(k-k_0)+\ldots$$

и, вводя новую переменную $\xi=k-k_0$, находим

$$\psi(x,t)=\frac{A}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ik_0x-i\omega_{k_0}t}\int\limits_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i\xi\left[x-\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}t\right]}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

После интегрирования получим

$$\psi(x,t)=\frac{2A}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sin\left\{\left[x-\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}t\right]\Delta k\right\}}{x-\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}t}\,e^{ik_0x-i\omega_{k_0}t}\equiv B(x,t)\,e^{ik_0x-i\omega_{k_0}t}\,.$$

Функцию $B(x,t)$ можно рассматривать как амплитуду почти монохроматической волны, а $k_0x-\omega_{k_0}t$ – как ее фазу. Вид функции $\psi(x,t)$ показан на рис. 4.3. Своего наибольшего значения амплитуда $B(x,t)$ достигает в точке $x_{\max}=\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}t$. Отсюда следует, что центр группы волн движется с групповой скоростью, равной $\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right)_{k_0}$.

Задача 4.3. Найти групповую скорость $v_{\text{гр}}$ движения и закон расплывания $\Delta x(t)$ волнового пакета $\psi(x,0)=\sqrt{\frac{\pi}{(\Delta x_0)^2}}\exp\left[-\frac{x^2}{2(\Delta x_0)^2}\right]$, имеющего в момент $t=0$ гауссову форму.

Решение. Волновой пакет в момент t может быть записан в виде

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(k)\,e^{ikx-i\omega(k)t}\mathrm{d}k\,,$$

где $f(k)$ – Фурье-образ волнового пакета не зависит от времени и может быть найден по волновому пакету при $t=0$ (см. задачу 4.1,а), т.е.

$$f(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(x,0)\,e^{-ikx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{(\Delta x_0)^2}}\;e^{-\frac{x^2}{2(\Delta x_0)^2}-i(k-k_0)x}\mathrm{d}x\,.$$

Показатель экспоненты правой подынтегральной функции приведем к полному квадрату, тогда интеграл сведется к интегралу Пуассона. Для этого примем $\dfrac{1}{2(\Delta x_0)^2}=\alpha$; $i(k-k_0)=\beta$.

Тогда

$$-\alpha x^2-\beta x=-\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)+\frac{\beta^2}{4\alpha}=-\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{\beta^2}{4\alpha}\,.$$

Интегрируя это выражение и переходя к старым обозначениям, получаем

$$f(k)=\sqrt{\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(k-k_0)^2(\Delta x_0)^2\right].$$

Подставляя $f(k)\lim\limits_{x\to\infty}$ в формулу для $\psi(x,t)$, получаем

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(k-k_0)^2(\Delta x_0)^2+\right.$$

$$\left.+i(k-k_0)x+i\,k_0\,x-\frac{i\hbar k^2 t}{2m}\right]\mathrm{d}k\,,$$

здесь мы учли соотношение

$$\omega=\frac{p^2}{\hbar\,2m}=\frac{\hbar k^2}{2m}\,.$$

Повторим процедуру приведения показателя экспоненты к полному квадрату:

$$-\frac{1}{2}\left[(\Delta x_0)^2+\frac{i\hbar t}{m}\right](k-k_0)^2+i\left(x-\frac{\hbar k_0 t}{m}\right)(k-k_0)+i k_0 x-\frac{i\hbar k_0^2}{2m}t\equiv$$

$$\equiv -a\xi^2+b\xi+c=-a\left(\xi-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a}+c,$$

где $\xi=k-k_0$; $a=\frac{1}{2}\left[(\Delta x_0)^2+\frac{i\hbar t}{m}\right]$; $b=i(x-vt)$;

$$c=i k_0 x-i\omega_{k_0}t;\ v=\frac{\hbar k_0}{m};\ \omega_{k_0}=\frac{\hbar k_0}{2m}.$$

В результате интегрирования получаем

$$\psi(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{(\Delta x_0)^2+\frac{i\hbar t}{m}}}\exp\left\{-\frac{(x-vt)^2}{2\left[(\Delta x_0)^2+\frac{i\hbar t}{m}\right]}+i k_0 x-i\omega_{k_0}t\right\}\equiv$$

$$\equiv B(x,t)\exp\left(i k_0 x-i\omega_{k_0}t\right).$$

Модуляция амплитуды пакета определяется множителем

$$\exp\left\{-\frac{(x-vt)^2}{2\left[(\Delta x_0)^2+\frac{i\hbar t}{m}\right]}\right\}=$$

$$=\exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{2(\Delta x)^2}\right]\exp\left\{\frac{i\hbar t}{2m}\frac{(x-vt)^2}{\left[(\Delta x_0)^4+\frac{\hbar^2 t^2}{m^2}\right]}\right\},$$

где $(\Delta x)^2=(\Delta x_0)^2+\frac{\hbar^2 t^2}{m^2(\Delta x_0)^2}=(\Delta x_0)^2\left[1+\frac{\hbar^2 t^2}{m^2(\Delta x_0)^4}\right]$.

Таким образом, в x-пространстве получается пакет, максимум которого перемещается со скоростью $v_{\text{гр}} = \left(\mathrm{d}\omega / \mathrm{d}k\right)_{k_0}$, а эффективная ширина изменяется со временем по закону

$$\Delta x(t) = (\Delta x_0)\sqrt{1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 (\Delta x_0)^4}}\,.$$

Из полученной формулы следует, что для частицы с $m = 1$ г расплывание $\Delta x(t) \approx 10^{-1}$ см достигается через 10^{25} с, т.е. волновой пакет практически не расплывается. Для электрона $m \approx 10^{-27}$ г и $\Delta x_0 \approx 10^{-8}$ см через 1 с достигается расплывание $\Delta x \approx 10^{8}$ см.

Вопросы и задания

1. Показать, что фазовая скорость может превышать скорость света.
2. Найти связь групповой скорости волнового пакета с параметрами движения микрочастицы.
3. Построить волновые функции $\psi(x)$, если заданы их Фурье-образы в k-пространстве:

а) $f(k) = A e^{-\alpha(k-k_0)}$, $\Delta k \sim \dfrac{1}{\alpha}$;

б) $f(k) = A\cos\alpha(k-k_0)$, $\Delta k \sim \dfrac{1}{\alpha}$;

в) $f(k) = A\left[1 - \dfrac{(k-k_0)}{\alpha}\right]$, $\Delta k \sim \dfrac{1}{\alpha}$;

г) $f(k) = A\left[1 - \dfrac{(k-k_0)^2}{\alpha^2}\right]$.

4.2. Волновое уравнение. Стационарные состояния. Одномерное движение. Спектр энергии и волновые функции

Волновое уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta\Psi + V(\mathbf{r}, t)\Psi \qquad (4.1)$$

описывает движение частицы массой μ в силовом поле $V(\mathbf{r}, t)$. Если потенциальная энергия V не зависит от времени, то частное решение этого уравнения имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \Psi(\mathbf{r}), \tag{4.2}$$

где для функции $\Psi(\mathbf{r})$, зависящей только от координат частицы, после подстановки (4.2) в (4.1) получаем уравнение

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}, t) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}), \tag{4.3}$$

называемое уравнением Шредингера для стационарных состояний.

Волновая функция $\Psi(\mathbf{r})$ является собственной функцией оператора энергии $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + \hat{V}$, а E соответствующим ей собственным значением энергии. Плотность вероятности координат частицы, находящейся в состоянии (4.2), не зависит от времени

$$\left| \Psi(\mathbf{r}, t) \right|^2 = \left| \Psi(\mathbf{r}, 0) \right|^2,$$

и собственные функции (4.2) характеризуют стационарные состояния частицы. В этих состояниях энергия E имеет определенное значение.

Физически приемлемые решения $\Psi(\mathbf{r})$ уравнения (4.3) существуют лишь при определенных значениях E, что определяется условиями, накладываемыми на волновую функцию $\Psi(\mathbf{r})$: волновая функция должна быть однозначной, конечной и непрерывной вместе со своим градиентом.

Собственные функции оператора энергии можно разделить на два типа: 1) волновые функции, локализованные в конечной области и принадлежащие дискретным собственным значениям E; 2) волновые функции, остающиеся конечными на больших расстояниях (бегущие гармонические волны) с непрерывным спектром E.

Пример 4.1. Волновые функции, локализованные в конечной области

Атом водорода в нормальном (1S) состоянии. Потенциальная энергия электрона в поле протона $V(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{r}$. Оператор Гамильтона $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta - \frac{e^2}{r}$. Волновая функция $\Psi = \Psi(|\mathbf{r}|)$ зависит только от модуля радиуса-вектора (центрально-симметричное поле).

В сферических координатах уравнение Шредингера (4.3) имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\left(r\,\Psi\right)'' - \frac{e^2}{r}\Psi = E_1\,\Psi\,, \qquad (4.4)$$

где E_1 – энергия основного 1S состояния.

Обозначая $r\Psi = f$, перепишем уравнение (4.4) в виде

$$f'' + \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{e^2}{r}\,f + \frac{2\mu}{\hbar^2}E_1\,f = 0\,. \qquad (4.5)$$

Ищем частное решение уравнения (4.5) в виде $f = A\,r\,e^{-\alpha r}$, где $\alpha^2 = -\frac{2\mu}{\hbar^2}E_1$.

Тогда $\Psi = A\,e^{-\alpha r}$ регулярно при $r \to 0$ и $r \to \infty$. Действительно, при $r \to \infty$ уравнение (4.5) переходит в

$$f'' - \alpha^2\,f = 0\,. \qquad (4.6)$$

Решение (4.6) есть $f = A\,e^{-\alpha r} + B\,e^{\alpha r}$.

Чтобы решение оставалось конечным при $r \to \infty$, полагаем $B = 0$. Следовательно, выбранный вид решения уравнения (4.5) удовлетворяет граничным условиям, и, подставляя его в (4.5), имеем

$$-2\,\alpha + \alpha^2\,r + \frac{2\mu\,e^2}{\hbar_2} + \frac{2\mu}{\hbar_2}E_1\,r = 0\,,$$

а так как $\alpha^2 = -\frac{2\mu}{\hbar^2}E_1$, получаем

$$\alpha = \frac{\mu\,e^2}{\hbar^2}; \qquad E_1 = -\frac{\mu\,e^4}{2\,\hbar^2} \equiv -R\,\hbar\,.$$

Из условия нормировки $A^2\int\limits_0^\infty e^{-2\alpha r}\,4\pi r^2\,dr = 1$ следует, что $A = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi}}$. Таким образом, вероятность найти электрон в интервале от r до $r + \Delta r$ равна

$$\mathrm{d}W = 4\pi\,A^2\,e^{-2\alpha r}r^2\,\mathrm{d}r\,.$$

Исследуем зависимость dW от r: при $r = 0$ d$W = 0$; при $r \to \infty$ d$W \to 0$; при всех r от 0 до ∞ d$W > 0$.

Следовательно, $\mathrm{d}W(r)$ имеет максимум при $r = r_0$, который определяем из условия $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r}\right)\right|_{r_0} = 0$.

Дифференцируя dW, получаем $r_0 = \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{\hbar^2}{\mu\, e^2}$, видно, что r_0 равен радиусу первой боровской орбиты. Но в отличие от боровской теории, r_0 соответствует не определенной орбите, а есть реальное расстояние, на котором вероятность нахождения электрона является наибольшей, причем вероятность конечна при всех $r < \infty$.

Вывод. В рассматриваемой задаче уравнение Шредингера для нормального состояния атома водорода имеет при $E = E_1 = -\dfrac{\mu\, e^4}{2\,\hbar^2}$ непрерывное и конечное решение в области $0 < r < \infty$ (условие необходимое и достаточное).

Пример 4.2. Делокализованная волновая функция

Свободное одномерное движение частицы происходит в интервале $-\infty < x < \infty$. Потенциальная энергия $V = 0$, и уравнение Шредингера (4.3) принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2\,\mu}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} = E\,\Psi. \qquad (4.7)$$

Введя обозначение

$$k^2 = \frac{2\,\mu\, E^2}{\hbar^2} = \frac{p^2}{\hbar^2},$$

перепишем уравнение (4.7) в виде

$$\Psi'' + k^2\,\Psi = 0. \qquad (4.8)$$

Уравнение (4.8) имеет конечные во всем пространстве решения при любом положительном значении энергии $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$, включая нуль (непрерывный энергетический спектр).

Решение (4.8) есть $\Psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$.

Учтя зависимость волновых функций стационарных состояний от времени, представим решение уравнения (4.1) в виде (4.2):

$$\Psi(x, t) = \Psi(x)\, e^{-i\omega t},$$

где $\omega = \frac{E}{\hbar}$. Так как $k = \frac{p}{\hbar}$, то

$$\Psi(x, t) = A e^{-i\frac{Et}{\hbar} + i\frac{px}{\hbar}}$$

для одной плоской бегущей волны.

Каждая функция только что полученного вида описывает состояние, в котором частица обладает определенной энергией E и импульсом p. Это есть плоская волна, распространяющаяся в положительном направлении с частотой $\omega = \frac{E}{\hbar}$ и длиной волны $\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{p}$ (длина волны де Бройля).

Частица не локализована и не удерживается в рассматриваемой области. Координата частицы остается полностью не определенной. В настоящем случае модуль волновой функции на больших расстояниях остается конечным и нормировочный интеграл $\int |\Psi|^2 \mathrm{d}v$ расходится. Способ нормировки таких функций иной, чем для функций дискретного спектра.

Задача 4.4. Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний частицы, находящейся в прямоугольной яме с бесконечными стенками (рис. 4.4).

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad x \le 0; \\ 0 & \text{при} \quad 0 < x < a; \\ \infty & \text{при} \quad x \ge a. \end{cases}$$

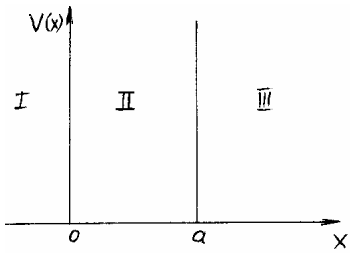

Рис. 4.4

Решение. Вначале исследуем поведение $\Psi(x)$ и $\Psi'(x)$ в области, где $V(x)$ претерпевает бесконечный скачок. Предположим, что в области I

$$V = V_0,\ 0 \le E \le V_0,$$

а затем перейдем к пределу $V_0 \to \infty$.

Составим уравнение Шредингера для областей I и II.

В области I

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\,\Psi = E\,\Psi;$$

обозначая

$$æ^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[V - E\right],$$

перепишем его в виде

$$\Psi'' - æ^2\Psi = 0.$$

В области II

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} = E\,\Psi$$

или

$$\Psi'' + k^2\,\Psi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{2\mu}{\hbar^2}E$.

Общее решение этих уравнений соответственно имеет вид:
в области I

$$\Psi(x) = Ce^{-æ x} + De^{æ x},\ x \le 0;$$

в области II

$$\Psi(x) = A \sin k\,x + B \cos k\,x, \quad 0 < x < a.$$

Из условия ограниченности $\Psi(x)$ при $x \to \pm\infty$ полагаем $C = 0$.

Из условия непрерывности $\Psi(x)$ и $\Psi'(x)$ при $x = 0$ следует, что

$$\begin{cases} D = B; \\ kA = æ\,D. \end{cases}$$

Так как при $V \to \infty$ $æ \to \infty$, решение при $x < 0$ и при $x > a$ должно быть конечным. Из (I) следует, что $D \to 0$. Следовательно, $B = 0$, а коэффициент A неопределен. Таким образом, на поверхности, где потенциал обращается в бесконечность, волновая функция равна нулю, а ее производная, вообще говоря, испытывает скачок при $V_0 \to \infty$.

Итак, граничными условиями задачи являются $\Psi(0) = \Psi(a) = 0$. Таким образом, в областях I и III $\Psi(x) = 0$.

Решением уравнения Шредингера в области II, удовлетворяющим граничным условиям, является функция $\Psi(x) = A \sin kx$. Из условия $\Psi(a) = 0$ находим спектр энергии частицы:

$$\sin ka = 0;$$
$$ka = n\pi;$$

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2\mu a^2},$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Значение $n = 0$ опускаем, так как при этом волновая функция $\Psi(x) = A \sin \frac{\pi n x}{a}$ тождественно обращается в нуль, что в квантовой механике соответствует полному отсутствию любого состояния. (Отрицательные значения n можно опустить, так как волновые функции

при отрицательных n равны волновым функциям при положительных n, взятым с обратным знаком.)

Таким образом, энергетический спектр является дискретным. Коэффициент A находим из условия нормировки волновой функции:

$$\int_0^a |\Psi_n|^2 \, dx = 1; \; A = \sqrt{\frac{2}{a}}.$$

Итак, волновые функции стационарных состояний имеют вид

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n x}{a}.$$

Задания

1. Выписать собственные функции $\Psi_n(x)$ при $n = 1, 2, 4$. Сравнить их с известными решениями для колебания струны с закрепленными концами, которые образуют стоячие волны.

2. Показать, что волновые функции $\Psi_n(x)$, принадлежащие различным n, ортогональны, т.е.

$$\int_0^a \Psi_{n'}^* \Psi_n \, dx = \delta_{nn'} .$$

3. Исследовать зависимость расстояния между уровнями энергии от ширины ямы.

4. Найти среднее значение координаты частицы в яме в n-м стационарном состоянии.

5. Исходя из соотношения неопределенностей объяснить существование ненулевой энергии основного состояния ($n = 1$) частицы в яме.

Задача 4.5. Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний частицы, находящейся в трехмерной прямоугольной яме с бесконечными стенками. Область пространства, в котором движется частица, определяется неравенствами

$$0 < y < a_2 \; ; \; 0 < z < a_3.$$

Граничные условия задачи:

$$\Psi(0, y, z) = \Psi(x, 0, z) = \Psi(x, y, 0) =$$
$$= \Psi(a_1, y, z) = \Psi(x, a_2, z) = \Psi(x, y, a_3) = 0.$$

Применить метод разделения переменных.

Ответ.

$$E_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu}\left(\frac{n_1^2}{a_1^2} + \frac{n_2^2}{a_2^2} + \frac{n_3^2}{a_3^2}\right);$$

$$\Psi_{n_1, n_2, n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{a_1 a_2 a_3}} \sin\frac{\pi n_1 x}{a_1} \sin\frac{\pi n_2 y}{a_2} \sin\frac{\pi n_3 z}{a_3}.$$

Задача 4.6. Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний в несимметричной прямоугольной потенциальной яме (рис. 4.5).

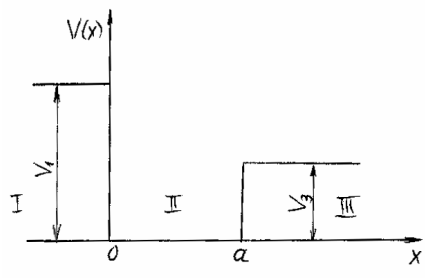

Рис. 4.5

Решение. Составим уравнение Шредингера для областей I, II, III:

I. $-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{d^2\Psi}{dx^2} + V_1\,\Psi(x) = E\,\Psi(x), \qquad x \le 0;$

II. $-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\,\Psi(x), \qquad 0 < x < a;,$

III. $-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + V_2\Psi(x) = E\,\Psi(x), \quad a \le x \le \infty.$

Перепишем их, введя $æ_1 = \sqrt{\dfrac{2\mu\ (V_1 - E)}{\hbar^2}}$; $k = \sqrt{\dfrac{2\mu E}{\hbar^2}}$; $æ_2 = \sqrt{\dfrac{2\mu (V_2 - E)}{\hbar^2}}$:

I. $\Psi'' - æ_1^2 \Psi = 0$;

II. $\Psi'' + k^2\ \Psi = 0$;

III. $\Psi'' - æ_2^2 \Psi = 0$.

Решениями этих уравнений будут функции:

I. $\Psi_{\mathrm{I}}(x) = A\, e^{-æ_1 x} + B\, e^{æ_1 x}$;

II. $\Psi_{\mathrm{II}}(x) = C \sin(k\, x + \delta)$;

III. $\Psi_{\mathrm{III}}(x) = D\, e^{-æ_2 x} + F\, e^{æ_2 x}$.

Из граничных условий на бесконечности $\Psi(\pm\infty) = 0$ следует, что $A = 0$, $F = 0$. Из условий непрерывности Ψ и Ψ' при $x = 0$ и $x = a$ следует:

$\Psi_{\mathrm{I}}(0) = \Psi_{\mathrm{II}}(0)$; $\Psi_{\mathrm{II}}(a) = \Psi_{\mathrm{III}}(a)$;

$\Psi'_{\mathrm{I}}(0) = \Psi'_{\mathrm{II}}(0)$; $\Psi'_{\mathrm{II}}(a) = \Psi'_{\mathrm{III}}(a)$,

следовательно

$$B = C \sin\delta; \qquad C \sin(k\, a + \delta) = D\, e^{-æ_2 x};$$

$$B\, æ_1 = Ck \cos\delta; \qquad C\, k \cos(k\, a + \delta) = -D\ æ_2\, e^{-æ_2 x},$$

откуда $æ_1 = k \operatorname{ctg}\delta$; $k \operatorname{ctg}(k\, a + \delta) = -æ_2$;

$$\sin\delta = \frac{k\,\hbar}{\sqrt{2\mu V_1}}; \quad \sin(k\, a + \delta) = -\frac{k\,\hbar}{\sqrt{2\mu V_2}};$$

$$\delta = \arcsin\frac{k\,\hbar}{\sqrt{2\mu V_1}}; \quad k\, a + \delta = -\arcsin\frac{k\,\hbar}{\sqrt{2\mu V_2}}.$$

Исключая δ, получаем трансцендентное уравнение

$$k\, a = n\,\pi - \arcsin\frac{k\,\hbar}{\sqrt{2\mu V_1}} - \arcsin\frac{k\,\hbar}{\sqrt{2\mu V_2}} \tag{4.9}$$

(где $n = 1, 2, 3, \ldots$; значения арксинуса берутся между 0 и $\dfrac{\pi}{2}$), корни которого определяют уровни энергии $E_i = \dfrac{\hbar^2\, k^2}{2\mu}$. При каждом n име-

ется один корень. Так как согласно условию $V_1 > V_2$, то значения k должны лежать в интервале между 0 и $\frac{\sqrt{2\mu V_2}}{\hbar}$ (аргумент арксинуса не может превышать 1). Корни уравнения (4.9) можно найти графическим способом (рис. 4.6). Они определяются точками пересечения прямой $y = k\,a$ с кривыми

$$y = n\,\pi - \arcsin\frac{k\,\hbar}{\sqrt{2\,\mu\,V_1}} - \arcsin\frac{k\,\hbar}{\sqrt{2\,\mu\,V_2}}\ .$$

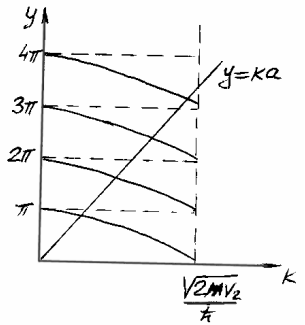

Рис. 4.6

При $n = 1$ неравенство

$$a\,\frac{\sqrt{2\,\mu\,V_2}}{\hbar} \geq \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{V_2}{V_1}}$$

есть условие существования в яме по крайней мере одного уровня энергии.

При уменьшении глубины ямы V_2 и ширины a число пересечений (корней) уменьшается. При данных $V_2 \neq V_1$ всегда будет существовать настолько малая ширина ямы a, что не будет ни одного дискретного уровня. При $V_1 = V_2 = V$ (симметричная яма) выражение (4.9) сводится к

$$ka = n\pi - 2\arcsin\frac{k\,\hbar}{\sqrt{2\,\mu\,V}}\,. \qquad (4.10)$$

Поскольку $a\dfrac{\sqrt{2\mu V_1}}{\hbar} \geq \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 0$ при любых V и a, то всегда имеется по крайней мере один уровень энергии.

Найдем значение единственного дискретного уровня при $a\dfrac{\sqrt{2\mu V}}{\hbar^2} \leq 1$. Так как $\arcsin x = \pi - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$, то

$$ka = \pi - 2\arcsin\frac{k\hbar}{\sqrt{2\mu V}} = \arcsin\left(2\frac{k\hbar}{\sqrt{2\mu V}}\sqrt{1-\frac{k^2\hbar^2}{2\mu V}}\right).$$

Разлагая в ряд правую часть полученного соотношения, находим

$$\frac{2k\hbar}{\sqrt{2\mu V}}\sqrt{1-\frac{k^2\hbar^2}{2\mu V}} = ka,$$

откуда

$$E = V - \left(\frac{\mu a^2}{2\hbar^2}\right)V^2.$$

Число уровней при любых значениях V и a равно N, где N находится из соотношения

$$N > a\frac{\sqrt{2\mu V}}{\pi\hbar} > N - 1. \qquad (4.11)$$

Это непосредственно следует из условия пересечения прямой и монотонно убывающей функции $y = N\pi - 2\arcsin\dfrac{k\hbar}{\sqrt{2\mu V}}$.

При $k = \dfrac{\sqrt{2\mu V}}{\hbar}$ его можно представить в виде $ka - y > a$ или в явном виде $\dfrac{a\sqrt{2\mu V}}{\hbar} > N\pi - \pi = \pi(N-1)$, откуда следует уравнение (4.11).

Задания

1. Найти решение задачи при $V_1 \to \infty$.
2. Проанализировать поведение решения при $V_1 = V_2 = \infty$.

Задача 4.7. Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний частицы, находящейся в прямоугольной потенциальной яме, вид которой представлен на рис. 4.7.

$$V(x)=\begin{cases} \infty & \text{при } x\le 0; \\ 0 & \text{при } 0<x<a; \\ V_0 & \text{при } x\ge a. \end{cases}$$

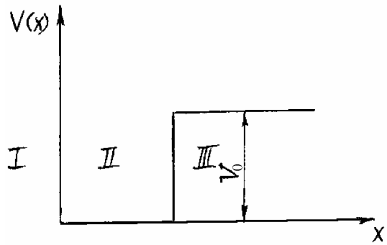

Рис. 4.7

Решение. В области I $\Psi(x) = 0$. Составим уравнение Шредингера для областей II и III.

В области II

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2\Psi}{dx^2}=E\Psi$$

или при $k^2=\dfrac{2\mu E}{\hbar^2}$

$$\Psi''+k^2\Psi=0. \qquad (4.12)$$

В области III

$$\Psi''-æ^2\Psi=0, \qquad (4.13)$$

где

$$æ^2=\frac{2\mu}{\hbar^2}(V_0-E), \qquad E<V_0.$$

Граничные условия задачи:

а) $\Psi_{II}(0) = 0$; в) $\Psi_{II}'(a) = \Psi_{III}'(a)$;

б) $\Psi_{II}(a) = \Psi_{III}(a)$; г) $\Psi_{III}(+\infty) = 0$.

Решения уравнений (4.12) и (4.13) ищем в виде

$\Psi_{II}(x) = A\sin(k\,x + \delta)$; $\Psi_{III}(x) = B\,e^{æ x} + C\,e^{-æ x}$.

Из граничного условия «г» следует, что $B = 0$; из условия «а» $A\sin\delta = 0$, поэтому $\delta = \pi l$, где $l = 0, 1, \ldots$. Из условий «в» и «б» следует, что

$$A\sin(k\,a) = C\,e^{-æ a}; \qquad A\,k\cos(ka) = -C\,æ\,e^{-æ a}.$$

Поделив второе соотношение на первое, получим трансцендентное уравнение для определения спектра энергии

$$\operatorname{ctg} k\,a = -\frac{æ}{k}$$

или

$$\sin k\,a = \pm\frac{k\,a}{a\sqrt{k^2 + æ^2}} = \pm\sqrt{\frac{\hbar^2}{2\,\mu\,V_0\,a^2}}\,k\,a. \qquad (4.14)$$

Уравнение (4.14) неявным образом определяет уровни энергии, причем должны быть взяты те корни уравнения, для которых $\operatorname{ctg} k\,a < 0$.

Корни уравнения (4.14) можно найти графическим методом. Так, корни уравнения вида

$$\pm\sin x = \alpha\,x, \text{ где } x = k\,a; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2\,\mu\,V_0\,a^2}}$$

определяются точками пересечения прямой $y = k\,x$ с кривыми (рис. 4.8). Сплошные участки кривых соответствуют $\operatorname{ctg} ka < 0$.

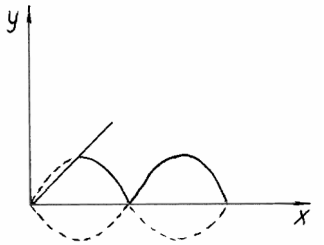

Рис. 4.8

При очень больших α (т.е. при малых V и a) точки пересечения отсутствуют. Первая точка пересечения появляется при

$$\alpha\frac{\pi}{2}=1, \quad \alpha=\frac{2}{\pi}, \quad x=\frac{\pi}{2}.$$

Подставляя α и x в уравнение (4.14), получаем минимальную глубину ямы V_0, при которой появляется первый уровень энергии:

$$V_{0\min}=\frac{\pi^2\hbar^2}{8\mu a^2},$$

т.е. уровни энергии в яме появляются при $V_0 a^2 > \dfrac{\pi^2\hbar^2}{8\mu}$.

Задание

Исследовать поведение решения при $V_0 \to \infty$ и сравнить с результатами задачи 4.4.

Задача 4.8. Найти волновые функции стационарных состояний и уровни энергии плоского ротатора с моментом инерции I.

Решение. Плоский ротатор – вращающаяся в плоскости система из двух связанных друг с другом частиц. Задача о движении такой системы сводится к исследованию движения одной частицы с приведенной массой $M=\dfrac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$ вокруг неподвижного центра. Потенциальная энергия $V(r) = V(a) = \text{const}$, где a – радиус окружности, по которой движется частица. Так как отсчет потенциальной энергии можно производить от любого значения, положим $V(a) = 0$.

Волновая функция $\Psi=\Psi(\varphi)$, где φ – азимутальный угол. Уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{\hbar^2}{2I}\frac{d^2\Psi}{d\varphi^2}=E\Psi \tag{4.15}$$

или

$$\Psi''+m^2\Psi=0,$$

где

$$m^2=\frac{2IE}{\hbar^2}. \tag{4.16}$$

Из непрерывности Ψ и Ψ' в области $0 \le \varphi \le 2\pi$ и требования однозначности (т.е. периодичности по углу φ) $\Psi(\varphi) = \Psi(\varphi + 2\pi)$ следует, что решение уравнения (4.15) есть $\Psi = A \exp(i\, m\, \varphi)$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Из условия нормировки

$$\int_0^{2\pi} |\Psi|^2 \, d\varphi = 1, \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ .$$

Соответствующий уровень энергии

$$E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I} .$$

Все уровни с $m \ne 0$ двукратно вырождены.

Задача 4.9. Найти волновые функции стационарных состояний и уровни энергии частицы, которая свободно движется по замкнутому двойному витку радиусом *R*. Масса частицы *m*.

Следует учесть, что в отличие от предшествующей задачи волновая функция и ее производная непрерывны в области $0 \le \varphi \le 4\pi$.

Задание

Найти спектр энергии плоского ротатора в постоянном магнитном поле.

Задача 4.10. Найти волновые функции стационарных состояний и уровни энергии частицы в двумерной плоской потенциальной яме вида

$$V(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho \le a; \\ \infty & \text{при } \rho > a, \end{cases}$$

где ρ – полярный радиус.

Решение. Спектр энергии и волновые функции частицы в одномерной яме и в центрально-симметричной потенциальной яме качественно различаются. Симметрия системы относительно поворотов вокруг центра ямы приводит к сохранению момента количества движения в стационарном состоянии частицы. Поэтому волновые функции стационарных состояний в плоской яме зависят от двух квантовых чисел *n* и *m*. Составим уравнение Шредингера для волновой функции внутри круга радиусом $\rho = a$:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \Psi = E \Psi$$

или

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{2\mu E}{\hbar^2}$.

Граничные условия: $\Psi(\rho, \varphi) = 0$ при $\rho = a$, где φ – азимутальный угол.

В полярной системе координат уравнение Шредингера принимает вид

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi(\rho, \varphi) \right] + \frac{\partial^2 \Psi(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^2} + \rho^2 k^2 \Psi(\rho, \varphi) = 0.$$

Подстановка $\Psi(\rho, \varphi) = R(\rho)\,\Phi(\varphi)$ приводит к разделению переменных, откуда

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = \text{const} = -m^2;` \qquad (4.17)$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \left(k^2 \rho^2 - m^2\right) R = 0. \qquad (4.18)$$

Решением уравнения (4.17) является функция $\Phi_m(\varphi) = A\, e^{i m \varphi}$.

Из условий однозначности и ограниченности $\Phi_m(\varphi)$ следует, что $\Phi_m(\varphi) = \Phi_m(\varphi + 2\pi)$ и, следовательно, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Из условий нормировки

$$A^2 \int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi)\, \Phi_m(\varphi)\, d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 1; \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Решением уравнения (4.18) является радиальная функция

$$R(\rho) = C_1 J_m(k\rho) + C_2 N_m(k\rho),$$

где $J_m(k\rho)$ и $N_m(k\rho)$ – бесселевы функции первого и второго рода соответственно.

Ограниченность волновой функции при $\rho = 0$ требует, чтобы $C_2 = 0$. Из граничного условия при $\rho = a$ получаем трансцендентное уравнение для определения уровней энергии частицы $J_m(k\,a) = 0$.

Следовательно, $k\,a = \lambda_n^{(m)}$, где $\lambda_n^{(m)}$ – n-й корень m-й бесселевой функции. Спектр энергии имеет вид

$$E_{mn} = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2}\left[\lambda_n^{(m)} \right]^2.$$

Задание

Вычислить нормировку радиальной функции $R(\rho)$.

Задача 4.11. Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний линейного гармонического осциллятора.

Решение. Квантово-механический осциллятор является квантовым аналогом частицы, совершающей малые линейные колебания около положения равновесия. Потенциальная энергия линейного осциллятора

$$V(x) = \frac{\mu\,\omega^2\,x^2}{2},$$

уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mu\omega^2 x^2}{2}\Psi = E\Psi. \qquad (4.19)$$

Введем обозначения

$$\frac{2\,\mu\,E}{\hbar^2} = æ^2; \quad \frac{\mu\,\omega}{\hbar^2} = \lambda$$

и перепишем уравнение (4.19) в виде

$$\Psi'' + (æ^2 - \lambda^2\,x^2)\,\Psi = 0. \qquad (4.20)$$

Исследуем асимптотику решения уравнения (4.20) при $x \to \pm\infty$. При больших x в уравнении (4.20) можно опустить член $æ^2\Psi$ и уравнение приобретет вид

$$\Psi''_\infty - \lambda^2\,x^2\,\Psi_\infty = 0. \qquad (4.21)$$

Решения уравнения (4.21) ищем в виде

$$\Psi = \exp[-\varepsilon\,\lambda^2\,x^2].$$

Подставляя Ψ в (4.21), получаем

$$4\,\varepsilon^2\,x^2\,\lambda^4 - \lambda^2\,x^2 = 0,$$

откуда

$$\varepsilon = \pm\frac{1}{2}\lambda^{-1}; \quad \Psi_\infty = C_1 e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2} + C_2\,e^{\frac{1}{2}\lambda x^2}.$$

Из условия ограниченности Ψ при $x \to \pm\infty$ следует, что $C_2 = 0$. Коэффициент C_1 можно положить равным единице, так как волновая функция еще не нормирована. Таким образом, асимптотическое ре-

шение уравнения (4.20) при $x \to \infty$ есть $\Psi_\infty = e^{-\frac{1}{2}\lambda x^2}$. Общее решение уравнения (4.20) ищется в виде

$$\Psi = \Psi_\infty F(x), \tag{4.22}$$

где $F(x)$ – новая неизвестная функция, которая при $x \to \infty$ ведет себя как x^n.

Подставляя (4.22) в (4.20), получаем следующее уравнение для F:

$$F'' - 2\lambda x F' - \lambda F + æ^2 F = 0. \tag{4.23}$$

Точка $x = 0$ не является особой точкой этого уравнения, и его решение ищем в виде степенного ряда

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Из физических соображений члены с отрицательными n отбрасываем, так как при $n = -1$

$$F \sim \frac{a_{-1}}{x} \to \infty \quad \text{при} \quad x \to 0 \quad \text{и т.д.}$$

Итак,

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad F' = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1};$$

$$F'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\, a_{n+2}\, x^n .$$

Подставляя в уравнение (4.23) и группируя члены с одинаковыми степенями, получаем

$$\sum x^m \left[(m+2)(m+1)\, a_{m+2} - 2\lambda m\, a_m + (æ^2 - \lambda)\, a_m \right] = 0 .$$

Приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях x^m, найдем рекуррентное соотношение для определения коэффициентов

$$a_{m+2} = a_m \frac{\lambda(2m+1) - æ^2}{(m+2)(m+1)} .$$

Это соотношение связывает коэффициенты a_{m+2} с a_m, и поэтому ряд $F(x)$ будет содержать только четные степени x, если минимальное m четное, или только нечетные в противоположном случае:

$$F = \sum_{m=0,\,2,\,\ldots} a_m\, x^m \quad \text{либо} \quad F = \sum_{m=1,\,3,\,\ldots} a_m\, x^m .$$

При больших m ряд перестает быть знакопеременным и будет расходиться при $x \to \infty$. Действительно, при $m >> 1$

$$\frac{a_m}{a_{m+2}} = \frac{(m+2)\,(m+1)}{\lambda\,(2m+1) - \chi^2} \sim \frac{m}{2\lambda} .$$

Рассмотрим функцию

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} B_k\, x^k ;$$

$$B_k = \frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)!}; \quad B_{k+2} = \frac{1}{\left(\frac{k+2}{2}\right)!};$$

$$\frac{B_k}{B_{k+2}} = \frac{\left(\frac{k}{2}+1\right)!}{k\,!} \sim \frac{k}{2} .$$

Следовательно, $F\,(x)$ ведет себя так же, как $e^{x^2/2}$. Поэтому его нужно оборвать на некоторой максимальной степени $m = N$, потребовав, чтобы $a_N \neq 0$, а $a_{N+2} = 0$. Отсюда

$$F\,(x) = a_n\, x^n + a_{n-2}\, x^{n-2} + \ldots + \begin{cases} a_1 x & \text{при } n = 1, 3, \ldots; \\ a_0 & \text{при } n = 0, 2, 4, \ldots . \end{cases}$$

(В точке $x = 0$ все решения с нечетными n дают нуль.) Тогда решение есть полином степени N и должно выполняться условие $\lambda\,(2\,N + 1) = æ^2\, N$,

откуда следует

$$\frac{2\,\mu\, E}{\hbar^2} = \frac{\mu\,\omega}{\hbar}\,(2\,N + 1);$$

$$E = \frac{\hbar\,\omega}{2}\,(2\,N + 1) = \hbar\,\omega\,(N + \frac{1}{2});$$

$$N = 0, 1, 2, \ldots .$$

Характерным для полученного решения является наличие нулевой энергии $E_0 = \frac{\hbar\,\omega}{2}$.

Найдем волновую функцию гармонического осциллятора $\Psi_N\,(x) = e^{-\frac{1}{2}\lambda\,x^2}\;F_N\,(x)$.

Конечный степенной ряд для функции $F_N\,(x)$ представляет собой известный в математической физике полином Эрмита:

$$F_N(x) = H_N(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\,\frac{\mathrm{d}^N}{\mathrm{d}\xi^N}\,e^{\xi^{-2}}\,,$$

где $\xi = \sqrt{\lambda\,x}$.

В качестве примера выпишем полином Эрмита для N = 0, 1, 2:

$$H_0\,(\xi) = 1; \quad H_1\,(\xi) = 2\,\xi; \quad H_2\,(\xi) = 4\,\xi^2 - 2 \quad \text{и т.д.}$$

Итак, искомое решение уравнения Шредингера для линейного осциллятора имеет вид

$$\Psi_N\,(\xi) = A_N\;e^{-\frac{\xi^2}{2.}}\;H_N\,(\xi).$$

Из условия нормировки

$$A_N = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\;\frac{1}{\sqrt{2^N\;N\,!}}.$$

Задания

1. Показать графически вид волновых функций осциллятора для N = 0, 1. Рассмотреть соответствие распределения плотностей вероятности по классической и квантовой теориям.

2. Найти среднее значение координаты частицы $< x >$ и ее импульса $< p >$ в стационарном состоянии осциллятора.

3. Оценить из соотношения неопределенностей нулевую энергию (энергию нулевых колебаний).

Задача 4.12. Рассмотреть движение пространственного трехмерного осциллятора, собственные частоты которого в трех взаимно перпендикулярных направлениях различны и равны соответственно ω_1, ω_2, ω_3. Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний. Решение уравнения Шредингера искать в виде

$$\Psi\,(x, y, z) = \Psi_1\,(x)\,\Psi_2\,(y)\,\Psi_3\,(z).$$

Ответ.

$$E = \hbar\,\omega_1\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\,\omega_2\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\,\omega_3\left(n_3 + \frac{1}{2}\right);$$

$$\Psi_{n_1,n_2,n_3}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = A\exp\left\{-\frac{\xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2} + \xi_3^{\,2}}{2}\right\} H_{n_1}(\xi_1)\,H_{n_2}(\xi_2)\,H_{n_3}(\xi_3),$$

где $\xi_1 = \sqrt{\dfrac{\mu\omega_1}{\hbar}}x$ и т.д.

Задания

1. Найти уровни энергии изотропного осциллятора, у которого $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$.

2. Показать, что кратность вырождения n-го уровня энергии равна

$$\sum_{n_1=0}^{n+1}(n - n_1 + 1) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2},$$

где $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Задача 4.13. Найти волновую функцию и коэффициенты отражения и прохождения частицы, движущейся в одномерном потенциальном поле V_0 (потенциальный барьер), вида

$$V(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\infty \le x < 0; \\ V_0 \text{ при } 0 \le x. \end{cases}$$

Случай, когда энергия частицы $E < V_0$, показан на рис. 4.9.

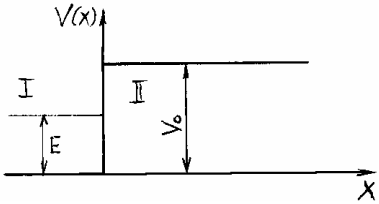

Рис. 4.9

В рассмотренных выше задачах на собственные значения для частицы в потенциальных ямах определялись уровни энергии с использованием граничных условий на Ψ-функцию. В рассматриваемой задаче (и в трех последующих) энергия задается заранее и в зависимости от нее определяется асимптотическое поведение волновой функции на больших расстояниях. Согласно классической механике частица с энергией

$E < V_0$, движущаяся слева направо, дойдя до «стенки», отражается от нее и движется в обратном направлении; при $E > V_0$ частица продолжает двигаться в прежнем направлении с уменьшенной скоростью. В квантовой механике даже при $E > V_0$ частица может «отразиться» от барьера, а при $E < V_0$ «проникнуть» в область $x > 0$.

Решение. Уравнение Шредингера:

в области I $-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} = E\Psi_{\mathrm{I}}$

или $\Psi_{\mathrm{I}}'' + k^2\Psi_{\mathrm{I}} = 0$,

где $k^2 = \dfrac{2\mu}{\hbar^2}E$;

в области II $\Psi_{\mathrm{II}}'' - æ^2\Psi_{\mathrm{II}} = 0$,

где $æ^2 = \dfrac{2\mu(V_0 - E)}{\hbar^2}$.

Решениями этих уравнений являются функции

$$\Psi_{\mathrm{I}}(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx};$$
$$\Psi_2(x) = C_3 e^{æx} + C_4 e^{-æx},$$

где $C_1 e^{ikx}$ – волна, падающая на потенциальный барьер;

$C_2 e^{-ikx}$ – отраженная волна.

Из условия конечности $\Psi(+\infty) \neq \infty$ следует, что $C_3 = 0$. Плотность потока вероятности в падающей волне выберем так, чтобы $C_1 = 1$. Коэффициенты C_2 и C_4 определяем, сшивая решения в точке $x = 0$.

Из условия непрерывности Ψ и Ψ' при $x = 0$ получим

$$1 + C_2 = C_4;$$
$$ik + ikC_2 = -æC_4,$$

откуда

$$C_2 = -\frac{æ + ik}{æ - ik}; \quad C_4 = -\frac{2ik}{æ - ik};$$

$$\Psi_{\mathrm{II}} = C_4 e^{-æx} = -\frac{2ik}{æ - ik}e^{-æx}.$$

Плотность вероятности нахождения частиц в области II

$$|\Psi_{\text{II}}|^2 = |C_4|^2 e^{-2æx} = \frac{4k^2}{æ^2 + k^2} e^{-2æx}.$$

$|\Psi_{\text{II}}|^2 \neq 0$ и экспоненциально затухает вглубь области II, на расстоянии $x_0 = \dfrac{1}{2æ}$ убывает в e раз. Это расстояние называется глубиной проникновения. Проникновение частиц называется туннельным эффектом. Туннельный эффект – явление квантовое (при $\hbar \to 0$ глубина проникновения стремится к нулю). Его объяснение кроется в соотношении неопределенностей. В квантовой механике деление полной энергии на потенциальную и кинетическую не имеет смысла: одновременно определить точное значение координаты и импульса частицы невозможно. При определении координаты частицы внутри барьера с точностью $<\Delta x^2>$ возникает неопределенность импульса $<\Delta p^2> \geq \dfrac{\hbar^2}{2<\Delta x^2>}$, откуда вытекает $\dfrac{<\Delta p^2>}{2\mu} \geq V_0 - E$, т.е. изменение энергии частицы при измерении должно быть больше той энергии, которой ей недостает до высоты барьера V_0.

Коэффициент отражения R определим как отношение плотности j_1 отражающего потока к падающему j_0:

$$R = \frac{|j_1|}{|j_0|}.$$

Соответственно коэффициент прохождения частицы D есть отношение плотности потока вероятности в прошедшей волне к плотности потока падающей:

$$D = \frac{|j_2|}{|j_0|}.$$

По определению плотности потока вероятности

$$j = \frac{\hbar}{2\mu i}\left(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*\right);$$

$$j_1 = \frac{\hbar}{2\mu i}\left\{ C_2^* e^{ikx} C_2(-ik) e^{-ikx} - C_2 e^{-ikx} C_2^* (ik) e^{ikx} \right\} = \frac{\hbar k}{\mu} |C_2|^2;$$

$$j_0 = \frac{\hbar k}{\mu} |C_1|^2, \qquad j_2 = 0.$$

Отсюда

$$R = \left| C_2 \right|^2 = \left| \frac{k - i\,æ}{k + i\,æ} \right|^2 = 1, \qquad D = 0.$$

Это условие сохранения числа частиц при отражении.

Задания

1. Оценить эффективную глубину проникновения для электрона при $V_0 - E \sim 1$ эВ.

2. Показать, что отражение от барьера приводит к сдвигу фазы волны.

3. Найти коэффициенты отражения R и прохождения D для случая, когда энергия частицы E больше высоты барьера V_0.

Задача 4.14. Найти коэффициент прохождения частицы через прямоугольный барьер вида (рис. 4.10)

$V(x) = 0$ при $-\infty < x < 0$;

$V(x) = V_0$ при $0 \le x \le a$;

$V(x) = 0$ при $a < x < \infty$.

Рассмотреть случаи, когда энергия частицы: 1) $E < V_0$ и 2) $E > V_0$.

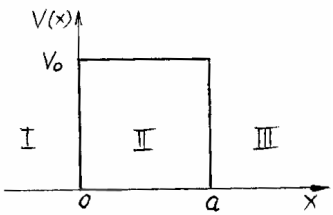

Рис. 4.10

Решение

1. Подбарьерное туннелирование ($E < V_0$).

Запишем уравнение Шредингера:

в области I

$$\Psi_{\mathrm{I}}'' + k^2 \Psi_{\mathrm{II}} = 0;\ k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E;$$

в области II

$$\Psi_{\mathrm{II}}'' - æ^2 \Psi_{\mathrm{II}} = 0,\ æ^2 = \frac{2\mu (V_0 - E)}{\hbar^2};$$

в области III

$$\Psi''_{\text{III}} + k^2\,\Psi_{\text{III}} = 0\,.$$

Граничные условия

$$\Psi_{\text{I}}\,(0) = \Psi_{\text{II}}(0)\,; \quad \Psi_{\text{II}}\,(a) = \Psi_{\text{III}}\,(a)\,;$$

$$\Psi'_{\text{I}}\,(0) = \Psi'_{\text{II}}(0)\,; \quad \Psi'_{\text{II}}\,(a) = \Psi'_{\text{III}}\,(a)\,.$$

Решения уравнений для областей I, II, III соответственно имеют вид

$$\Psi_{\text{I}} = A_1\,e^{ikx} + B_1\,e^{ikx}\,;$$

$$\Psi_{\text{II}} = A_2\,e^{-æx} + B_2\,e^{æx}\,;$$

$$\Psi_{\text{III}} = A_3\,e^{ikx} + B_3\,e^{-ikx}.$$

Коэффициент прохождения (прозрачности) D равен отношению плотности потоков вероятности прошедшей и падающей волны:

$$D = \frac{|j_3|}{|j_0|}\,.$$

Непосредственно вычисляя, получаем

$$j_0 = \frac{\hbar\,k}{\mu}\,A_1^{\,2}\,; \qquad j_3 = \frac{\hbar\,k}{\mu}\,A_3^{\,2}\,; \qquad D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}\,.$$

Из граничных условий имеем (учитывая, что $B_3 = 0$, так как нет отражения при $x > a$)

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2\,;$$

$$i\,k\,(A_1 - B_1) = æ\,(A_2 - B_2)\,;$$

$$A_2 e^{æa} + B_2 e^{-æa} = A_3 e^{ika}\,; \tag{4.24}$$

$$æ\left(A_2 e^{æa} - B_2 e^{-æa}\right) = ikA_3 e^{ika}\,.$$

Решая эту систему уравнений относительно A_3, получаем

$$A_3 = \frac{-4i\,k\,æ\,e^{-ika}A_2}{\left[2(æ^2 - k^2)\,\mathrm{sh}\,æ\,a - 4i\,k\,æ\,\mathrm{ch}\,æ\,a\right]}\,;$$

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \frac{4k^2æ^2}{\left[(æ^2 + k^2)\,\mathrm{sh}^2\,æ\,a + 4k^2æ^2\right]} =$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{æ^2 + k^2}{4k^2æ^2}\,\mathrm{sh}^2 æa} = \left[1 + \frac{V_0^{\,2}}{4\,E\,(V_0 - E)}\,\mathrm{sh}^2\sqrt{\frac{2\,\mu}{\hbar}\,(V_0 - E)\,a}\,\right]^{-1}.$$

Рассмотрим асимптотику решения при $E << V_0$ и $E \to V_0$:

а) $E << V_0$ (высокий и широкий барьер): $\alpha\, a >> 1$, где $\alpha = \sqrt{æ^2 + k^2}$;

$$\text{sh}\, æ\, a = \frac{e^{æa} - e^{-æa}}{2} \cong \frac{1}{2} e^{æa} ;$$

$$D = \frac{16 æ^2 k^2}{\alpha^4} e^{-æa} = D_0 e^{-2æa} .$$

б) $E \to V_0$, $æ \to 0$, $k \to \alpha$;

$$\frac{\text{sh}\, æ\, a}{æ} \to a , \; D = \frac{1}{1 + \dfrac{\alpha^2\, a^2}{4}} = \frac{1}{1 + \dfrac{\mu\, V_0\, a^2}{2\, \hbar^2}} .$$

2. Надбарьерное туннелирование ($E > V_0$).

Так как $E > V_0$, то внутри барьера можно определить волновое число $\gamma^2 = \dfrac{2\mu\,(E - V_0)}{\hbar^2}$.

Решение в области II имеет вид

$$\Psi_{\text{II}} = A_2\, e^{i\gamma x} + B_2\, e^{-i\gamma x},$$

где $\gamma = i\, æ$.

Заменим в системе уравнений (4.24) æ на $-i\,\gamma$ и, решив систему уравнений (4.24) для коэффициентов отражения R и прозрачности D, получим

$$R = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \left[1 + \frac{4k^2\gamma^2}{(k^2 - \gamma^2)\sin^2 \gamma a}\right]^{-1} = \frac{1}{1 + \dfrac{4E\,(E - V_0)}{V_0^{\,2} \sin^2 \gamma a}} ; \qquad (4.25)$$

$$D = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2} = \left[1 + \frac{(k^2 - \gamma^2)\sin^2 \gamma a}{4k^2\gamma^2}\right]^{-1} \equiv \frac{1}{1 + \dfrac{V_0^{\,2} \sin^2 \gamma\, a}{4E\,(E - V_0)}} .$$

Очевидно $R + D = 1$.

При $E \to V_0$

$$D = \left[1 + \frac{\mu\, V_0\, a^2}{2\,\hbar}\right]^{-1} .$$

При увеличении E коэффициент прозрачности колеблется между единицей и нижним пределом. При $\gamma a = \pi, 2\pi, \ldots$, т.е. когда на

протяжении барьера укладывается целое число полуволн, имеет место полное пропускание (рассмотреть оптическую аналогию).

Задания

1. Обосновать выражение для коэффициентов прозрачности на случай барьера произвольной формы (рис. 4.11).

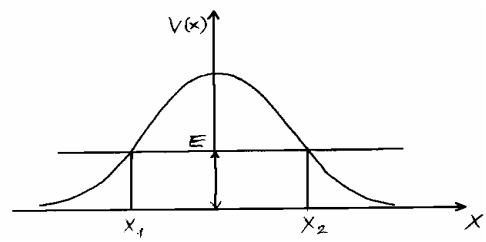

Рис. 4.11

Ответ. $D = D_0 \exp\left[-2 \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[2\mu (V(x) - E) \right]^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \right]$,

где x_1, x_2 – точки, в которых частица соответственно входит в барьер и покидает его (точки поворота).

2. Вычислить коэффициент прохождения электронов через поверхность металла под действием сильного электрического поля напряженности ε. Высота барьера при отсутствии поля равна A.

Ответ. $D = D_0 \exp\left\{ -\frac{4\sqrt{2\mu}}{3\hbar} \frac{A^{3/2}}{e\varepsilon} \right\}$.

3. Определить коэффициент прохождения частицы через потенциальный барьер в виде δ-функции: $U(x) = \alpha\,\delta(x)$. Показать, что ответ совпадает с результатом задачи 4.14, если произвести предельный переход: $a \to 0$, $V_0\, a \to \alpha$.

Задача 4.15. Вычислить коэффициенты прохождения и отражения частицы, проходящей над ямой конечной глубины. Частица налетает на яму слева (рис. 4.12).

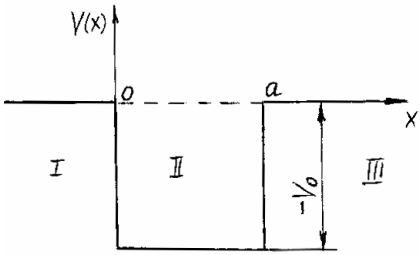

Рис. 4.12

Решение. Напишем уравнения Шредингера для трех областей:

I. $-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_1(x)}{\mathrm{d}x^2} = E\Psi_1(x);$

II. $-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_2(x)}{\mathrm{d}x^2} = E\Psi_2(x) + V_0\Psi_2(x);$

III. $-\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{\mathrm{d}^2\Psi_3(x)}{\mathrm{d}x^2} = E\Psi_3(x).$

Граничные условия: $\Psi_1(0) = \Psi_2(0)$; $\quad \Psi_2(a) = \Psi_3(a)$;

$\Psi_1'(0) = \Psi_2'(0)$; $\quad \Psi_2'(a) = \Psi_3'(a)$; $\quad |\Psi_1(-\infty)|^2 = 1.$

В волновой функции $\Psi_3(x)$ при $x \to +\infty$ отсутствует отраженная волна. Сравнивая эту задачу с задачей о прохождении частицы через прямоугольный барьер с высотой V_0 и шириной a, видим, что уравнение Шредингера для обеих задач отличается только знаком потенциальной энергии, а граничные условия совпадают. Поэтому можно получить коэффициенты прохождения и отражения от ямы, если в формулах коэффициента волновой функции для прямоугольного барьера сделать замену:

$$æ = \sqrt{\frac{2\mu(V_0 - E)}{\hbar^2}} \to \sqrt{\frac{2\mu(-V_0 - E)}{\hbar^2}} \to i\,k_2\,.$$

Коэффициент прохождения над ямой принимает вид

$$D = \frac{4k_1^2 k_2^2}{4k_1^2 k_2^2 + (k_2^2 - k_1^2)\sin^2 k\,a}.$$

Коэффициент отражения

$$R = \frac{(k_2^2 - k_1^2)\sin^2 k_2\,a}{4k_1^2 k_2^2 + (k_2^2 - k_1^2)\sin^2 k_2 a}.$$

При $k_2\, a = n\,\pi$ (n = 1, 2, ...) яма не отражает частицу (R = 0, D = 1). При $k_2\, a = (2\,n + 1)\dfrac{\pi}{2}$ (n = 0, 1, ...) коэффициент отражения максимален. Это явление можно наглядно описать, как рассеяние частицы на яме с захватом в яму на короткое время $\Delta\, t$ и последующее излучение – так называемое рассеяние частицы на виртуальных уровнях ямы. При таком захвате частицы закон сохранения энергии не нарушается, так как энергия частицы во время захвата неопределена:

$$\Delta\, E \sim \frac{h}{\Delta\, t}.$$

Коэффициенты прохождения и отражения являются аналитическими функциями аргументов k_1 и k_2. Аналитически продолжим функции D и R в комплексную плоскость k_1 с действительной оси и найдем полюса этих функций. Легко видеть, что полюса D и R определяются из уравнения

$$4\, k_1^{\,2}\, k_2^{\,2} + (\, k_2^{\,2} - k_1^{\,2})\sin^2 k_2\, a = 0$$

или

$$\sin k_2\, a = \frac{2\, i\, k_1 k_2}{k_2^{\,2} - k_1^{\,2}}.$$

Это трансцендентное уравнение имеет действительные корни только для чисто мнимых k_1 и совпадает с уравнением, определяющим дискретные уровни энергии в яме. Следовательно, полюса функций D и R определяют уровни энергии в яме.

Задача 4.16. Найти значения энергий, при которых частицы не отражаются от потенциального барьера вида

$$U(x) = \alpha\left[\ \delta(x) + \delta\,(x - a)\ \right],$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Решение. Считаем, что частица движется слева направо при падении на двойной потенциальный барьер. Волновая функция, являющаяся решением уравнения Шредингера с энергией E, имеет вид

$$\Psi_k(x) = \begin{cases} \exp\,(i\, k\, x) & \text{при } x < 0\,; \\ A\sin k\, x + B\cos k\, x & \text{при } 0 < x < a\ ; \\ C\exp\left[ik\,(x - a)\right] & \text{при } x > a\,, \end{cases} \qquad (4.26)$$

где $k = \sqrt{\dfrac{2\,\mu}{\hbar^2}E}$.

В области $x < 0$ отраженная волна $D\exp(-i\,k\,x)$ отсутствует в соответствии с условием неотражения частицы. Выполняя сшивание волновой функции в (I) в точках $x = 0$ и $x = a$, находим

$$B = 1; \quad kA - ik = 2\mu\alpha/\hbar^2;$$
$$A\sin k\,a + B\cos k\,a = C;$$
$$i\,k\,C - k\,A\cos k\,a + k\,B\sin k\,a = 2\mu\alpha C/\hbar^2 \qquad (4.27)$$

Система алгебраических уравнений (4.27) для определения величин A, B, C, вообще говоря, переопределена. Она имеет решение лишь при выполнении условия

$$\mathrm{tg}\,ka = -k\hbar^2/\alpha\mu \qquad (4.28)$$

Это условие и определяет значения энергии $E = \dfrac{\hbar^2\,k^2}{2\mu}$, при которых частицы не отражаются от рассматриваемого потенциального барьера.

4.3. Операторы. Теория представлений. Матрицы

4.3.1. Операторы

В квантовой механике каждая динамическая переменная представлена линейным самосопряженным оператором.

Оператор $\hat{F}$ является линейным, если он удовлетворяет следующим требованиям:

а) $\hat{F}\,(\Psi_1 + \Psi_2) = \hat{F}\,\Psi_1 + \hat{F}\,\Psi_2$;

б) $\hat{F}\,(\alpha\,\Psi) = \alpha\,\hat{F}\,\Psi$, где α – комплексное число.

Оператор $\hat{F}^+$ называется эрмитовосопряженным оператору $\hat{F}$, если

$$\int \Psi_1^* \hat{F} + \Psi_2 \mathrm{d}V = \int \Psi_2 \hat{F}^* \Psi_1^* \mathrm{d}V.$$

Приведем ряд свойств эрмитового сопряжения:

1) $\hat{F} = \hat{A}\,\hat{B}$, $\hat{F}^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$;

2) $\left(\hat{F}^+\right)^+ = \hat{F}$.

Оператор $\hat{F}$ называется самосопряженным или эрмитовым, если

$$\hat{F} = \hat{F}^{+}, \text{ т.е. } \int \Psi_1^* \hat{F} \Psi_2 \, dV = \int \Psi_2 \hat{F}^* \Psi_1^* \, dV.$$

Свойства самосопряженных операторов:

1) собственные значения вещественны;

2) собственные функции ортогональны.

Собственные функции являются решениями задачи на собственные значения

$$\hat{F}\Psi_n = F_n \Psi_n,$$

где Ψ_n – собственная функция оператора $\hat{F}$; F_n – собственное значение.

Спектр собственных значений может быть дискретным или непрерывным. Алгебра операторов – алгебра некоммутативных величин: в общем случае $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Вопросы и задания

1. С какими физическими принципами связана эрмитовость операторов динамических переменных в квантовой механике?
2. Проверить указанные свойства эрмитового сопряжения.
3. Доказать свойства самосопряженных операторов.
4. Когда операторы коммутируют?

Задача 4.17. Показать, что оператор комплексного сопряжения не является ни линейным (1), ни эрмитовым (2).

Решение. Пусть $\hat{F}$ – оператор комплексного сопряжения, т.е.

$$\hat{F}(\alpha \Psi) = \alpha^* \hat{F} \Psi = \alpha^* \Psi^*.$$

1. Так как

$$\hat{F}(\alpha_1 \Psi_1 + \alpha_2 \Psi_2) = \alpha_1^* \hat{F} \Psi_1 + \alpha_2^* \hat{F} \Psi_2 \neq \alpha_1 \hat{F} \Psi_1 + \alpha_2 \hat{F} \Psi_2,$$

то, следовательно, оператор $\hat{F}$ не является линейным.

2. По определению эрмитовского (самосопряженного) оператора

$$\int \Psi_1^* \hat{F} \Psi_2 \, \mathrm{d}V = \int \Psi_2 \hat{F}^* \Psi_1^* \, \mathrm{d}V.$$

В рассматриваемом случае

$$\int \Psi_1^* \hat{F} \Psi_2 \, \mathrm{d}V = \int \Psi_1^* \Psi_2^* \, \mathrm{d}V,$$

но

$$\int \Psi_2 \hat{F}^* \Psi_1^* \, \mathrm{d}V = \int \Psi_2 \left(\hat{F} \Psi_1\right)^* \mathrm{d}V = \int \Psi_1 \Psi_2 \, \mathrm{d}V \neq \int \Psi_1^* \Psi_2^* \, \mathrm{d}V.$$

Следовательно, оператор комплексного сопряжения $\hat{F}$ неэрмитов.

Задача 4.18.

1. Показать, что оператор $\hat{F} = i$ – антиэрмитов, т.е. $\hat{F} = -\hat{F}^{+}$.

2. Проверить эрмитовость операторов:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$; $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ – оператор проекции импульса на ось x;

$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ – оператор кинетической энергии.

Ответ. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ – неэрмитов; $-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ – эрмитов;

$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ – эрмитов.

3. Показать, что оператор $\hat{x}\,\hat{p}_x$ неэрмитов.

Пример решения. Рассмотрим оператор $\hat{F} = -i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. По определению эрмитовского оператора

$$\int \Psi_1^* \hat{F}\,\Psi_2\,\mathrm{d}V = \int \Psi_2\,\hat{F}^*\,\Psi_1^*\,\mathrm{d}V.$$

Проверим выполнение этого равенства для данного $\hat{F}$.

Так как $\Psi_1(\pm\infty) = \Psi_2(\pm\infty) = 0$, то получаем

$$\int \Psi_1^*\left(-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\Psi_2\mathrm{d}V = i\hbar\Psi_1^*\Psi_2\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int \Psi_2 i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Psi_1^*\mathrm{d}V = \int \Psi_2\hat{F}\Psi_1^*\mathrm{d}V =$$

$$= \int \Psi_2\hat{F}\Psi_1^*\mathrm{d}V.$$

Задача 4.19. Показать, что система тригонометрических функций $\{\cos k\,x; \sin k\,x\}$ является системой собственных функций оператора $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$.

Примечание. См. задачу 4.6 о прямоугольной яме.

Задача 4.20. Найти собственные функции и собственные значения операторов проекции момента импульса $\hat{L}_z = -i\,\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$.

Решение. Уравнение на собственные значения оператора $\hat{L}_z$ имеет вид $\hat{L}_z\,\Phi(\varphi) = L_z\,\Phi(\varphi)$;

$$-i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\Phi\,(\varphi)=L_z\;\Phi\,(\varphi)\,;$$

$$\frac{\partial\Phi\,(\varphi)}{\Phi\,(\varphi)}=i\,L_z\;\partial\varphi\,;$$

$$\Phi\,(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,\mathrm{e}^{im\varphi}$$

и так как $\Phi\,(\varphi)=\Phi\,(\varphi+2\,\pi)$,

то $L_z=\hbar\,m$, где $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

Задача 4.21. Найти собственные функции оператора импульса $\hat{\mathbf{p}}$ свободной частицы.

Ответ. $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})=\left(\dfrac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2}e^{\frac{i\,\mathbf{pr}}{\hbar}}$.

Задача 4.22. Найти собственные значения и собственные функции оператора квадрата момента импульса $\hat{L}^2$.

Решение. Уравнение $\hat{L}^2\,Y\,(\theta,\varphi)=a\,Y$ определяет задачу на собственные значения для оператора $\hat{L}^2$. В сферических координатах

$$\hat{L}^2=-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right],$$

следовательно,

$$-\frac{\hbar^2}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial Y\,(\theta,\varphi)}{\partial\theta}-\frac{\hbar^2}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y\,(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}=a\,Y\,(\theta,\varphi)\,.$$

Решениями полученного уравнения являются сферические функции (гармоники); $Y\,(\theta,\varphi)$ – класс функций, заданных на сфере единичного радиуса. Решения уравнения существуют при $a=\hbar^2\,l\,(l+1)$ и имеют вид

$$Y\,(\theta,\varphi)=Y_{lm}\,(\theta,\varphi)=\left[\frac{2\,l+1}{4\,\hbar}\frac{(\,l-|\,m\,|\,)\,!}{(\,l+|\,m\,|\,)\,!}\right]^{1/2}P_l^m\,(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{im\varphi}\,,$$

где l = 0; 1; 2; ... ; m = 0; ±1; ±2; ... ;

$P_l^m(\cos\theta) = P_l^m(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \dfrac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x)$ – присоединенный полином Лежандра, в котором $P_l(x)$ – полином Лежандра, определяемый формулой Родрига:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} (x^2 - 1)^l .$$

Полином Лежандра образует полную ортонормированную систему функций на интервале. Сферические функции также образуют полную ортонормированную систему функций на интервале $-1 \le x \le 1$:

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x)\, P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l\,l'} .$$

Приведем несколько значений функций:

$$Y_{0,0} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}; \; Y_{1,1} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta\, e^{i\varphi}; \; Y_{1,0} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\theta;$$

$$Y_{1,-1} = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\theta\, e^{-i\varphi}.$$

Задача 4.23. Вычислить коммутаторы $\left[\hat{x}, \hat{p}_x\right]$; $\left[\hat{x}, \hat{p}_y\right]$; $\left[f(\hat{x}), \hat{p}_x\right]$; $\left[\hat{x}, f\left(\hat{p}\right)\right]$, где $f(\hat{x})$ и $f(\hat{p})$ – функции операторов $\hat{x}$ и $\hat{p}$ соответственно, например, $f(\hat{p}) = \dfrac{\hat{p}^2}{2m}$.

Задача 4.24. Вычислить коммутаторы $[\hat{H}, \hat{x}]$; $[\hat{H}, \hat{p}]$; $[\hat{H}, f(\hat{p})]$.

Вопросы

1. Коммутируют ли операторы кинетической и потенциальной энергии? Возможно ли в квантовой механике одновременное измерение кинетической и потенциальной, полной и потенциальной энергии?

2. Используя результаты задачи 4.23, доказать теоремы Эренфеста:

$$< \frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}t} > = < \frac{\hat{p}}{m} > ;$$

$$< \frac{\mathrm{d}\hat{p}}{\mathrm{d}t} > = - < \nabla \hat{V} > .$$

Задача 4.25. Даны три оператора $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$. Выразить коммутатор произведения $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ через коммутаторы [$\hat{A}$, $\hat{C}$] и [$\hat{B}$, $\hat{C}$].

Ответ. [$\hat{A}\ \hat{B}$, $\hat{C}$] = $\hat{A}$[$\hat{B}$, $\hat{C}$] + [$\hat{A}$, $\hat{C}$] $\hat{B}$.

Задача 4.26.

1. Доказать перестановочные соотношения для операторов проекций момента импульса:

$$\hat{L}_x\,\hat{L}_y - \hat{L}_y\,\hat{L}_x = i\,\hbar\,\hat{L}_z\,;$$

$$\hat{L}_y\,\hat{L}_z - \hat{L}_z\,\hat{L}_y = i\,\hbar\,\hat{L}_x\,;$$

$$\hat{L}_z\,\hat{L}_x - \hat{L}_x\,\hat{L}_z = i\,\hbar\,\hat{L}_y\,;$$

$$[\,\hat{L}^2\,,\hat{L}_x\,] = [\,\hat{L}^2\,,\hat{L}_y\,] = [\,\hat{L}^2\,,\hat{L}_z\,] = 0\,.$$

2. Вычислить коммутаторы [$\hat{L}_x$, $\hat{x}$]; [$\hat{L}_x$, $\hat{y}$]; [$\hat{L}_i$, $\hat{p}_k$] (i, $k = x, y, z$).

3. Проверить, является ли эрмитовым оператор $\hat{F}$, определяемый равенством $\hat{F}\,\Psi\,(x) = \frac{1}{2}\big(\Psi\,(x+a) + \Psi\,(x-a)\,\big)$; здесь a – вещественное число, $\Psi(x)$ – произвольная волновая функция.

4. Оператор трансляции $\hat{A}$ определен условием $\hat{A}\,f\,(x) = f\,(x+a)$, где $f(x)$ – любая волновая функция; a – вещественная постоянная. Известно, что волновая функция $\Psi(x)$ свободной частицы является собственной функцией оператора $\hat{A}$ с собственным значением – 1. Какие значения может при этом иметь импульс p_x частицы в данном состоянии $\Psi(x)$?

Указание. Представить $\Psi(x)$ в виде разложения по собственным функциям оператора импульса $\hat{p}_x$.

4.3.2. Вычисление вероятностей и средних, переход к другим представлениям

Постулат разложения: любая волновая функция Ψ может быть разложена в ряд по собственным функциям эрмитового оператора $\hat{F}$:

$$\Psi = \sum_n a_n \Psi_n\,,$$

где коэффициенты $a_n = \int \Psi_n^*\,\Psi\,\mathrm{d}V$ (так как $\int \Psi_m^*\,\Psi_n\,\mathrm{d}V = \delta_{nm}$).

$\left| a_n \right|^2$ определяет вероятность соответствующего значения F_n величины F в состоянии Ψ.

Для непрерывного спектра сумма заменяется интегралом, например, при разложении по собственным функциям оператора импульса

$$\Psi(x) = \int a_p \, \varphi_p \, (x) \, \mathrm{d}p .$$

По определению среднее значение $\hat{F}$ в состоянии Ψ есть

$$< F > = \int \Psi_n^* \, F \, \Psi \, \mathrm{d}V \quad \text{или} \quad < F > = \sum_n \left| a_n \right|^2 F_n .$$

Амплитуды a_p, a_n (коэффициенты Фурье) являются волновой функцией в соответствующем представлении. Так, например, a_p – волновая функция в p-представлении и т.д.

Задача 4.27. Найти распределение вероятностей различных значений импульса для нормального состояния частицы, находящейся в бесконечно глубокой яме (прямоугольной потенциальной).

Решение. Коэффициенты разложения функции $\Psi = \sqrt{\dfrac{2}{a}} \sin \dfrac{\pi n x}{a}$ по собственным функциям оператора импульса $\varphi_p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 \pi \hbar}} \exp\left[\dfrac{ipx}{\hbar} \right]$ равны (n = 1):

$$a_p = \int \varphi_p^*(x) \, \Psi(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a \pi \hbar}} \int_0^a \sin \frac{\pi x}{a} \exp\left[-\frac{ipx}{\hbar} \right] \mathrm{d}x .$$

Соответственно

$$\left| a_p \right|^2 = \frac{4 \pi \hbar^3 a}{\left(p^2 a^2 - \pi^2 \hbar^2 \right)^2} \cos^2 \frac{pa}{2 \hbar} .$$

Задача 4.28. Найти возможные значения проекции момента импульса, их вероятности и среднее значение момента в состоянии плоского ротатора, описываемого волновой функцией $\Psi = A \cos^2 \varphi$.

Решение

Нормируем волновую функцию

$$A^2 \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi \, d\varphi = 1; \; A = \frac{2}{\sqrt{3 \pi}} .$$

Значения L_z определяются отличными от нуля членами разложения Ψ в ряд по собственным функциям оператора $\hat{L}_z$.

$$\Psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi};$$

$$L_z = \hbar m;$$

$$\Psi = A\cos^2\varphi = A\frac{1+\cos 2\varphi}{2} = \frac{2}{\sqrt{3\pi}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{2i\varphi} + \frac{1}{4}e^{-2i\varphi}\right);$$

$$L_z = 0, \pm 2\hbar.$$

Их вероятности равны соответственно

$$|a_0|^2 = \frac{2}{3}; \quad |a_2|^2 = \frac{1}{6}; \quad |a_{-2}|^2 = \frac{1}{6}.$$

Среднее значение

$$< L_z > = \sum_{L_z} |a_{L_z}|^2 L_z = 0 \cdot \frac{2}{3} + 2\hbar\frac{1}{6} - 2\hbar\frac{1}{6} = 0.$$

Задача 4.29. Состояние частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме (прямоугольной) описывается волновой функцией $\Psi(x) = A\,x\,(a-x)$, где a – ширина ямы.

Найти распределение вероятностей различных значений энергии частицы, а также среднее значение и среднюю квадратичную флуктуацию энергии.

Решение. Чтобы получить вероятности, нормированные на единицу, нормируем исходную Ψ-функцию

$$A^2\int_0^a x^2(x-a)^2\,\mathrm{d}x = 1; \quad A^2 = 30\,a^{-5}.$$

Разложим Ψ по волновым функциям $\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n x}{a}$ стационарных состояний частицы в яме:

$$\Psi(x) = \sum_n a_n\,\Psi_n(x).$$

Искомые вероятности

$$|a_n|^2 = \left|\int_0^a \Psi(x)\Psi_n(x)\mathrm{d}x\right|^2 = \frac{30}{a^5}\frac{2}{a}\left[\int_0^a x(a-x)\sin\frac{\pi n x}{a}\mathrm{d}x\right]^2 = \frac{240}{(\pi n)^6}\left[1-(-1)^n\right]^2.$$

Обратить внимание на четность (относительно середины ямы) функций, представленных в заданной суперпозиции.

Вероятность нахождения на основном уровне

$$|\,a_1\,|^2 = \frac{240}{\pi^6}\,2^2 \sim 0{,}999\,,$$

а суммарная вероятность нахождения на всех возбужденных уровнях (n = 3, 5 ...) составляет 0,001. (Объяснить этот результат.)

Средняя энергия частицы в рассматриваемом состоянии $< E > = \sum_{n=1}^{\infty} |\,a_n\,|^2\, E_n$, где $E_n = \dfrac{\pi^2\,\hbar^2\,n^2}{2\,\mu\,a^2}$ (n = 1, 2, 3 ...) .

Подставляя значения $|\,a_n\,|^2$, получаем

$$< E > = \frac{\pi^2\,\hbar^2}{2\,\mu\,a^2}\,\frac{240\cdot 2^2}{\pi^6}\,\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{1}{n^4}\,.$$

Числовой ряд

$$\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{1}{n^4} = 1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots+\frac{1}{(2\,k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

(Получить этот результат с помощью усреднения гамильтониана по Ψ-функциям.)

Средняя квадратичная флуктуация энергии

$$< \Delta\,E > = \sqrt{\overline{(E-\bar{E})^2}} = \sqrt{\bar{E}^2 - \left(\bar{E}\right)^2}\,;$$

$$\overline{E^2} = \sum_{n=1}^{\infty}|\,a_n\,|^2\,E^2{}_n = \left(\frac{\pi^2\,\hbar^2}{2\,\mu\,a^2}\right)^2\frac{960}{\pi^6}\sum_{n=1,3}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 30\left(\frac{\hbar^2}{\mu\,a^2}\right)^2.$$

Так как $\sum_{n=1,3}^{\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi}{8}$, то $< \Delta\,E > = \sqrt{5}\,\dfrac{\hbar^2}{\mu\,a^2}$, что сравнимо с $< E > \sim E_1$. Это объясняется заметным вкладом возбужденных уровней в $< E^2 >$.

Задача 4.30. Определить распределение вероятностей различных значений импульса для осциллятора.

Решение. Вместо процедуры разложения волновой функции стационарного состояния по собственным функциям оператора импульса удобнее решить задачу в **p**-представлении. В **p**-представлении оператор координаты

$$\hat{x} = i\,\hbar \frac{\partial}{\partial p_x};$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2\,\mu} - \frac{\mu\,\omega^2\,\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial p^2{}_x};$$

$a\,(p)$ – волновая функция в p-представлении, $a(p) = \int \Psi_n \varphi_p^*(x)\mathrm{d}x.$

Соответствующее уравнение Шредингера ($p_x \equiv p$)

$$\hat{H}\;a\,(p) = E\;a\,(p)$$

имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}^2 a\,(p)}{\mathrm{d}p^2} + \frac{2}{\mu\,\omega^2\,\hbar^2}\left(E - \frac{p^2}{2\,\mu}\right) a\,(p) = 0\,.$$

Это уравнение аналогично уравнению для задачи 4.11 (с заменой $x\sqrt{\dfrac{\mu\,\omega}{\hbar}}$ на $\dfrac{p}{\sqrt{\hbar\,\mu\,\omega}}$).

Таким образом, искомое распределение вероятностей есть

$$\left|\,a\,(p)\,\right|^2 = \frac{1}{2^n\;n\,!\sqrt{\hbar\,\mu\,\omega\,\pi}}\,e^{-p^2/\hbar\mu\omega}\,H_n^2\left(\frac{p}{\sqrt{\hbar\,\mu\,\omega}}\right).$$

Задача 4.31. Показать, что равенство $L^2 = \hbar^2\,l\,(l+1)$ получается с помощью элементарных формул теории вероятности, исходя из того, что возможные проекции момента импульса на произвольную ось равны $\hbar\,m$.

Решение. Представим $<\hat{L}^2>$ в виде

$$<\hat{L}^2> = <\hat{L}_x{}^2> + <\hat{L}_y{}^2> + <\hat{L}_z{}^2> = 3<\hat{L}_x{}^2>.$$

$$<L_x{}^2> = \hbar^2 <m^2> = \hbar^2\,\frac{\sum\limits_{m=-l}^{l} m^2}{2l+1} = \hbar^2\,\frac{2\sum\limits_{m=1}^{l} m^2}{2l+1} =$$

$$= \frac{2\,\hbar^2}{2l+1}\,\frac{l\,(l+1)\,(2l+1)}{6} = \frac{\hbar^2\,l\,(l+1)}{3}.$$

Таким образом, $<L^2> = \hbar^2\,l\,(l+1)$.

4.3.3. Теория представлений, матрицы

В матричном представлении динамические переменные описываются квадратными матрицами

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A_{mn} \end{vmatrix},$$

где матричные элементы $A_{mn} = \int \varphi_m^* \hat{A} \varphi_n \mathrm{d}V$, φ_m – собственные функции эрмитового оператора *B*.

Волновые функции Ψ и Ψ^* заменяются на матрицы-столбцы и матрицы-строчки:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}; \quad (a_1^*, a_2^*, \dots).$$

Чтобы задать оператор $\hat{A}$ в матричном виде, надо разложить произвольную волновую функцию, на которую действует оператор $\hat{A}$, по собственным функциям φ_n эрмитового оператора $\hat{B}$ и определить соответствующие коэффициенты разложения. Тогда результат действия оператора $\hat{A}$ может быть представлен в следующей форме:

$$\hat{A}\Psi = \sum_n \sum_m a_n A_{mn} \varphi_m;$$

$$\hat{A}\Psi = \sum_m A_{mn} \varphi_m,$$

где $a_n = \int \varphi_n^* \Psi \, \mathrm{d}V$.

В этом случае оператор $\hat{A}$ задан на пространстве собственных функций оператора $\hat{B}$ матрицей чисел A_{mn}.

Если $\hat{B}$ есть оператор импульса, то имеем дело с импульсным представлением (**p**-представлением). Если $\hat{B} = \hat{H}$, то соответствующее представление называется энергетическим (*E*-представлением).

В собственном представлении оператор $\hat{H}$ задается диагональной матрицей:

$$\hat{H} = \begin{vmatrix} E_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & E_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & E_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

элементами H_{mn} которой являются собственные значения E_n оператора:

$$\hat{H}\ \varphi_n = E_n\ \varphi_n\ ;$$

$$H_{mn} = \int \varphi_m^*\ \hat{H}\varphi_n\ \mathrm{d}V = E_n\delta_{mn}.$$

Волновые функции задаются матрицами-столбцами.

Пусть в каком-то представлении

$$\Psi(x) = \sum_n a_n\ \varphi_n\ = \sum_n \left(\int \varphi_n^*\ \Psi\ dV\right)\varphi_n \equiv \sum_n < \varphi_n \mid \Psi > \varphi_n\ .$$

Волновая функция задана определением всех коэффициентов $a_n = < \varphi_n \mid \Psi >$, которые можно записать в виде столбца

$$\Psi \sim \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}.$$

В собственном представлении все $a_n = 0$, за исключением $a_m = a_n = 1$.

Действительно,

$$\varphi_n = \sum_m a_{mn}\ \varphi_m = \sum_m < \varphi_m \mid \varphi_n > \varphi_m = \varphi_m\ \delta_{mn}\ ;$$

$$\varphi_n \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} (m = n).$$

То, что квадратные таблицы чисел A_{mn} (а также одностолбцовые (a_n)) являются матрицами, можно доказать, проверив эквивалентность операций их умножения и сложения аналогичным действиям с матрицей.

Таким образом, волновая функция Ψ может рассматриваться как вектор в пространстве функций с бесконечно большим числом измерений (пространство Гильберта). Каждой квантово-механической величине F, характеризующей состояние системы, соответствует определённая система собственных функций оператора $\hat{F}$, отвечающих собственным значениям $F_1, F_2, F_3, \ldots$, а компонентами вектора Ψ являются амплитуды a_1, a_2, a_3, ..., a_n:

$$\Psi(x) = \sum_n a_n \Psi_n(x).$$

Совокупность амплитуд $a_n = \int \Psi_n^* \Psi(x) \mathrm{d}V$ представляет волновую функцию в F-представлении.

Основные свойства матриц:

1. Сложение матриц

$(A+B)_{mn} = A_{mn} + B_{mn}$.

2. Умножение на произвольное комплексное число

$\alpha(A_{ik}) = (\alpha A_{ik})$.

3. Две матрицы равны, если каждый элемент первой равен матричному элементу второй.

4. Умножение матриц. При умножении матрицы A на матрицу B получается матрица $C = AB$, элементы которой равны (рис. 4.13) $c_{ik} = \sum_m a_{im} b_{mk}$ (правило перемножения – строка на столбец).

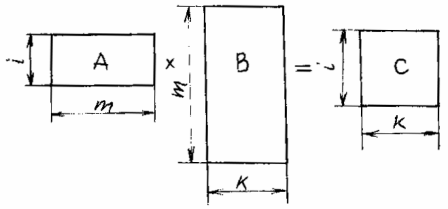

Рис. 4.13

Из других свойств приведем следующие:

1. Транспонированная матрица – матрица A, в которой строчки и столбцы поменялись местами:

$\tilde{A}_{ik} = A_{ki}$.

2. Матрица A^+ является эрмитовосопряженной по отношению к исходной матрице A, если $A^+_{ik} = A^*_{ki}$.

3. $\left(A \cdot B\right)^+ = B^+ A^+$.

4. Унитарная матрица – это матрица S, в которой ее эрмитовосопряженная равна обратной:

$S^+ = S^{-1}$ или $S^+ S^{-1} = 1$.

Важность унитарных матриц в следующем.

С помощью унитарных матриц осуществляется переход от одного представления (базиса) к другому – так называемые унитарные канонические преобразования. При унитарных преобразованиях сохраняются:

1) нормировка произвольной волновой функции;

2) ортогональность волновых функций;

3) связи между операторами в новом и старом представлениях.

Переход от системы координат, образованной базисными векторами Ψ_m, к системе координат, образованной базисными векторами φ_n, получается, если разложить функции Ψ_m по базису φ_n:

$$\Psi_n = \sum_m S_{nm}\, \varphi_m = \hat{S}\, \varphi_n ,$$

где $\hat{S}$ – унитарная матрица.

В новом представлении оператор $\hat{F}$ имеет вид $\hat{F}' = \hat{S}^{-1}\, \hat{F}\, \hat{S}$.

Задача 4.32. Выразить оператор координаты **r** в импульсном p-представлении.

Решение. Для среднего значения имеем

$$<\hat{\mathbf{r}}> = \int \Psi^*\, \hat{\mathbf{r}}\, \Psi \mathrm{d}V,$$

или $<\hat{\mathbf{r}}> = \int a^*(\mathbf{p})\, \hat{\mathbf{r}}\, a\, \mathbf{p}\, \mathrm{d}^3 p,$

где $a(\mathbf{p})$ – коэффициенты разложения волновой функции по собственным функциям $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ оператора импульса

$$a(\mathbf{p}) = \Psi(\mathbf{r})\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\mathrm{d}V.$$

Собственные функции $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ определяются решениями уравнения

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})=\mathbf{p}\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r});$$

$$\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})=A\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\,\mathbf{r}\right).$$

Из условия нормировки $\int\varphi^*_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})\varphi_{\mathbf{p}_1}(\mathbf{r})\mathrm{d}^3r=\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)$

$$A=\frac{1}{(2\,\pi\,\hbar)^{3/2}};\quad \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\,\mathbf{r}\right).$$

Подставляя $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$ и вычисляя $r\,\Psi$, получаем

$$\mathbf{r}\Psi(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int\mathbf{r}\,a\,\mathbf{p}\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\,\mathbf{r}\right)\mathrm{d}^3p=$$

$$=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int i\,\hbar\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\,\mathbf{r}\right)\frac{\partial a(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}\mathrm{d}^3p;$$

$$<\mathbf{r}>=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\iint\Psi^*\mathbf{r}\,i\,\hbar\,\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\,\mathbf{r}\right)\frac{\partial a(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}\mathrm{d}^3p\,\mathrm{d}^3r=$$

$$=\int i\,\hbar\,a^*\,(\mathbf{p})\frac{\partial a(\mathbf{p})}{\partial\mathbf{p}}\mathrm{d}^3p.$$

Следовательно, в **p**-представлении оператор

$$\hat{\mathbf{r}}=i\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}\equiv i\,\hbar\nabla_{\mathbf{p}}.$$

Задача 4.33. Написать волновые функции в **r**- и **p**-представлениях:
1) для покоящейся частицы;
2) для частицы, локализованной в точке $\mathbf{r}_0$.

Решение. 1. Волновая функция покоящейся частицы есть собственная функция оператора импульса **p** в **r**-представлении при $p = 0$:

$$\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\,p\,\mathbf{r}\right)\quad \text{т.е.}\quad \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}=\mathrm{const}\quad (\text{или}$$

$\lambda=\hbar/\,p=\infty$).

В **p**-представлении $\mathbf{p}C_{p_0}(\mathbf{p})=\mathbf{p}_0C_{p_0}(\mathbf{p})$ или $(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)C_{p_0}(\mathbf{p})=0.$ При $\mathbf{p}\neq\mathbf{p}_0$ $C_{p_0}(\mathbf{p})=0.$

Из условия нормировки

$$\int C_{\mathbf{p}_0}{}^*(\mathbf{p}) C_{p_0}(\mathbf{p}) \mathrm{d}^3 p = \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_0')$$

(спектр оператора $\hat{\mathbf{p}}$ непрерывный) получаем

$$C_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}).$$

При $\hat{\mathbf{p}}_0 = 0$ $C_{\mathbf{p}_0}(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p})$.

2. Ψ-функция локализованной частицы – собственная функция оператора $\hat{\mathbf{r}}$, принадлежащая собственному значению $\mathbf{r}_0$, очевидно имеет в $\hat{\mathbf{r}}$-представлении вид

$$\Psi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Это следует из соотношений

$$\hat{\mathbf{r}}\, \Psi_{\hat{\mathbf{r}}_0}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_0 \Psi_{\hat{\mathbf{r}}_0}(\mathbf{r});$$

$$(\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}_0)\Psi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = 0.$$

В $\mathbf{p}$-представлении уравнение для собственных функций имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} C_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{p}) = \mathbf{r}_0 C_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{p}),$$

откуда $C_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{p}) = \dfrac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \exp\left(-\dfrac{i}{\hbar}\mathbf{p}\,\mathbf{r}_0\right)$ (нормировка на δ-функцию).

Если частица локализована в начале координат, то при $\mathbf{r}_0 = 0$ имеем

$$\Psi_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r});$$

$$C_{\mathbf{r}_0}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} = \mathrm{const}.$$

Задача 4.34. Найти матрицы координаты и импульса в энергетическом представлении для частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечными стенками.

Задача 4.35. Показать, что среднее значение производной по времени физической величины, не зависящей от времени, в стационарном состоянии дискретного спектра равно нулю.

Решение. Для среднего значения производной по времени физической величины $\dot{F}$ имеем

$$< \hat{\dot{F}} > = \frac{i}{\hbar} < \left[\hat{H}, \hat{F} \right] >.$$

Пусть Ψ_n – собственные функции оператора $\hat{H}$.

$$< \dot{\hat{F}} >= \int \Psi_n^* \, \dot{\hat{F}} \, \Psi_n \, \mathrm{d}V = \dot{F}_{nn} = \frac{i}{\hbar}(\hat{H}\hat{F} - \hat{F}\hat{H})_{nn} =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\sum_k (H_{nk} \, F_{nk} - F_{nk} \, H_{nk}) = \frac{i}{\hbar}\sum_k (E_n \, \delta_{nk} \, F_{nk} - F_{nk} \, E_n \, \delta_{nk}) = 0 .$$

Задача 4.36. Найти матрицы операторов проекций момента импульса $\hat{L}\,(\hat{L}_x, \, \hat{L}_y, \, \hat{L}_z)$ в $(\hat{L}^2, \hat{L}_z)$-представлении.

Решение

Матрицы операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{L}_z$ диагональные, собственные значения $\hat{L}_z$ равны $\hbar \, m$, причем $m^2 \, \hbar^2 < L^2$, где L^2 – собственные значения оператора $\hat{L}^2$.

Вместо операторов $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ введем их комплексные комбинации:

$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i \, \hat{L}_y$; $\hat{L}_- = \hat{L}_x - i \, \hat{L}_y$.

Тогда

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = \hat{L}_+ \, \hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar \, \hat{L}_z = \hat{L}_- \, \hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar \, \hat{L}_z . \quad (4.29)$$

Вычислим коммутатор

$$\left[\left(\hat{L}_x + i \, \hat{L}_y\right), \hat{L}_z \right] = \hat{L}_x\hat{L}_z + i \, \hat{L}_y\hat{L}_z - \hat{L}_z\hat{L}_x - i \, \hat{L}_z\hat{L}_y = -\hbar\left(\hat{L}_x + i \, \hat{L}_y\right). \quad (4.30)$$

Подействуем на уравнение $\hat{L}_z\Psi_m = \hbar \, m \, \Psi_m$ оператором $\hat{L}_+$:

$$\left(\hat{L}_x + i \, \hat{L}_y \right) \hat{L}_z\Psi_m = \hbar \, m \left(\hat{L}_x + i \, \hat{L}_y \right) \Psi_m . \quad (4.31)$$

Используя перестановочное соотношение (4.30), из уравнения (4.31) получаем

$$\hat{L}_z \left(\hat{L}_x + i \, \hat{L}_y \right) \Psi_m = \hbar \, m \left(\hat{L}_x + i \, \hat{L}_y \right) \Psi_m + \hbar \left(\hat{L}_x + i \, \hat{L}_y \right) \Psi_m =$$

$$= \hbar \, (m+1) \left(\hat{L}_x + i \, \hat{L}_y \right) \Psi_m \equiv \hbar \, (m+1) \, \hat{L}_+\hat{L}_m .$$

Аналогично

$$\hat{L}_z\hat{L}_-\Psi_m = \hbar \, (m-1) \, \hat{L}_-\Psi_m .$$

Таким образом, из полученных соотношений следует, что функция $\hat{L}_+\Psi_m$ или $\hat{L}_-\Psi_m$ есть собственная функция, соответствующая значению $\hbar\,(m+1)$ или $\hbar\,(m-1)$ величины $\hat{L}_z$.

Следовательно,

$\hat{L}_+\Psi_m = \text{const}\,\Psi_{m+1}$;

$\hat{L}_-\Psi_m = \text{const}\,\Psi_{m-1}$.

При $m = l$ $\quad \hat{L}_+\Psi_l = 0$.

Применяя к этому равенству оператор $\hat{L}_-$, получаем

$\left(\hat{L}_-\hat{L}_+\right)\Psi_l = \left(\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\,\hat{L}_z\right)\Psi_l = 0$.

Отсюда следует, что

$\hat{L}^2\Psi_l = L^2\Psi_l = \hat{L}_z^2\Psi_l + \hbar\,\hat{L}_z\Psi_l = \hbar^2\,l\,(l+1)\,\Psi_l$;

так как $\hat{L}_z^2\,\Psi_l = \hbar^2\,l^2\,\Psi_l$, то

$\hat{L}_z\,\Psi_l = \hbar\,l\,\Psi_l$.

Следовательно, собственные значения оператора $\hat{L}^2$ равны

$L^2 = \hbar^2\,l\,(l+1)$.

Найдем матричные элементы операторов $\hat{L}_+$ и $\hat{L}_-$.

$L_{+m'm} = \int \Psi^*_{+m'}\,L_+\,\Psi_m\,\mathrm{d}V = \text{const}\,\delta_{+m'm+1}$,

т.е. не равны нулю только матричные элементы $(L_+)_{m+1,m}$. Соответственно для $\hat{L}_-$ не равны нулю только $(L_-)_{m-1,m}$. Поскольку операторы $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ – эрмитовы (т.е. $\hat{L}_x = \hat{L}_x^{\,+}$), то

$\left(\hat{L}_-\right)_{m-1,m} = \left(\hat{L}_+\right)^*_{m-1,m}$.

Воспользовавшись равенством $\hat{L}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\,\hat{L}_z$, получаем $\hat{L}_+\hat{L}_-$, откуда $(L_-)_{m-1,m} = (L_+)_{m,m-1} = \hbar\sqrt{(l+m)\,(l-m+1)}$.

Поскольку $\hat{L}_x = \dfrac{1}{2}\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right)$, $\hat{L}_y = -\dfrac{i}{2}\left(\hat{L}_+ - \hat{L}_-\right)$, то для матричных элементов $\hat{L}_x$ и $\hat{L}_y$ получим

$(L_x)_{m,m-1} = (L_x)_{m-1,m} = \hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,/\,2$;

$(L_y)_{m,m-1} = (L_y)_{m-1,m} = -i\hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,/\,2$.

Найдем теперь матричные элементы операторов $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ для различных значений квантового числа l:

а) $l = 0$ – нулевая матрица;

б) $l = 1$:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{L}_z = \hbar\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

в) при $l = \frac{1}{2}$ получаются матрицы

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z; \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_y;$$

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x,$$

где $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ – спиновые матрицы Паули. Случай $l = \frac{1}{2}$ соответствует спину электрона.

Задания

1. Вычислить коммутаторы

$$\left[\hat{L}_i, \hat{\mathbf{r}}^2\right], \left[\hat{L}_i, \hat{\mathbf{p}}^2\right], \left[\hat{L}_i, (\hat{\mathbf{p}}\,\hat{\mathbf{r}})\right], \left[\hat{L}_i, (\hat{\mathbf{p}}\,\hat{\mathbf{r}})^2\right],$$

где $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{L}}$ – операторы радиуса-вектора, импульса и момента импульса частицы; $I = x, y, z$.

2. Вычислить коммутатор $\left[\hat{L}_i, \hat{x}_k\,\hat{x}_l\right]$; i, k, l – индексы осей координат.

Задача 4.37

1. Показать, что спиновые матрицы Паули являются унитарными и эрмитовыми.

2. Проверить коммутационные и антикоммутационные соотношения для спиновых матриц Паули:

$$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y - \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = 2\,i\,\hat{\sigma}_z; \qquad \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x = 0;$$

$$\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z - \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = 2\,i\,\hat{\sigma}_x; \qquad \hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y = 0;$$

$$\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = 2\,i\,\hat{\sigma}_y; \qquad \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z = 0.$$

3. Показать, что

$$\hat{\sigma}_x{}^2 = \hat{\sigma}_y{}^2 = \hat{\sigma}_z{}^2 = 1; \qquad \hat{\sigma}^2 = 3;$$

$$\hat{S}^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(\hat{\sigma}_x{}^2 + \hat{\sigma}_y{}^2 + \hat{\sigma}_z{}^2\right) = \frac{3\hbar^2}{4}.$$

Задача 4.38. Найти собственные функции и собственные значения операторов проекций спина электрона в $\hat{S}_z$ -представлении.

Решение

Уравнение для собственных функций $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ и собственных значений S_x оператора $\hat{S}_x$ имеет вид

$$\hat{S}_x \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = S_x \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Так как $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}\hat{\sigma}_x$, получаем

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = S_x \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & c_2 \\ \frac{\hbar}{2} & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & c_1 \\ S_x & c_2 \end{pmatrix}.$$

Раскрывая это равенство, имеем $\begin{cases} (\hbar/2)\, c_2 = S_x\, c_1\,; \\ (\hbar/2)\, c_1 = S_x\, c_2\,, \end{cases}$

откуда следует $S_x = \pm\frac{\hbar}{2}$.

При $S_x = +\frac{\hbar}{2}$ $c_1 = c_2$ и так как $|\,c_1\,|^2 + |\,c_2\,|^2 = 1$ (условие нормировки), то окончательно получаем

$$\varphi_{S_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\alpha_1},$$

где α_1 – произвольная фаза.

При $S_x = -\frac{\hbar}{2}$ $c_1 = -c_2$

$$\varphi_{S_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\alpha_2}.$$

Аналогичным образом находятся собственные функции и собственные значения операторов $\hat{S}_y$ и $\hat{S}_z$ (сделать самостоятельно).

Задача 4.39. Найти собственные функции и собственные значения операторов квадрата полного спина $\hat{\Sigma}^2$ и проекции полного спина $\hat{\Sigma}_z{}^2$ двух частиц со спином 1/2 .

Решение

Суммарный спин двух частиц

$$\hat{\vec{\Sigma}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2 ,$$

где $\hat{\mathbf{S}}_1$ и $\hat{\mathbf{S}}_2$ – операторы спина первой и второй частиц, действующие на спиновые координаты своей частицы, соответственно.

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{\mathbf{S}}_1\hat{\mathbf{S}}_2 = \frac{3}{4}\hbar^2 + 2\hbar^2\frac{1}{4}\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2;;$$

$$\hat{\Sigma}_z = \frac{\hbar}{2}\left(\hat{\sigma}_{1z} + \hat{\sigma}_{2z}\right).$$

Одночастичные спиновые функции соответственно равны

$$\varphi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \varphi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Можно построить четыре независимые функции или системы двух частиц:

$$\begin{array}{l|l} \uparrow\uparrow & \Psi_1 = \varphi_\uparrow(1)\,\varphi_\uparrow(2); \\ \uparrow\downarrow & \Psi_2 = \varphi_\uparrow(1)\,\varphi_\downarrow(2); \\ \downarrow\uparrow & \Psi_3 = \varphi_\downarrow(1)\,\varphi_\uparrow(2); \\ \downarrow\downarrow & \Psi_4 = \varphi_\downarrow(1)\,\varphi_\downarrow(2). \end{array}$$

Произвольная функция Ψ может быть разложена в ряд по этим функциям:

$$\Psi = \sum_i a_i\,\Psi_i ,$$

где $\sum_i |\,a_i\,|^2 = 1.$

Можно показать, что $\hat{\Sigma}_z\Psi_1 = \hbar\,\Psi_1$; $\hat{\Sigma}_z\Psi_2 = \hat{\Sigma}_z\Psi_3 = 0$; $\hat{\Sigma}_z\Psi_4 = -\hbar\Psi_4$ (проверить самостоятельно).

Таким образом, в состояниях 1–4 проекции полного спина на ось z равны $1\hbar$; 0; 0; $-1\hbar$ соответственно.

Определим собственные функции, принадлежащие одновременно операторам $\hat{\Sigma}^2$ и $\hat{\Sigma}_z$ (т.е. $\hat{\Sigma}_z$ и $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2$):

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2 = \hat{\sigma}_{1x}\,\hat{\sigma}_{2x} + \hat{\sigma}_{1y}\,\hat{\sigma}_{2y} + \hat{\sigma}_{1z}\,\hat{\sigma}_{2z}$.

Проверкой убедимся, что

$$\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\right)\Psi_1 = \Psi_1;$$

$$\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\right)\Psi_2 = -\Psi_2 + 2\Psi_3; \tag{4.32}$$

$$\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\right)\Psi_3 = -\Psi_3 + 2\Psi_2; \tag{4.33}$$

$$\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\right)\Psi_4 = \Psi_4. \tag{4.34}$$

Таким образом, лишь Ψ_1 и Ψ_4 являются собственными функциями оператора $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2$ с собственными значениями $\sigma_1\,\sigma_2 = 1$. Поэтому ищем собственную функцию $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2$ в виде линейной комбинации $b\,\Psi_2 + c\,\Psi_3$ из решения уравнения

$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2\,(b\,\Psi_2 + c\,\Psi_3) = \lambda\,(b\,\Psi_2 + c\,\Psi_3)$.

Подставляя (4.32) и (4.33) в (4.34), получаем

$\Psi_2\,(-b + 2\,c) + \Psi_3\,(-c + 2\,b) = \lambda\,(b\,\Psi_2 + c\,\Psi_3)$.

Умножая на Ψ_2^* и суммируя по индексам спинов, имеем

$-b + 2\,c = \lambda\,b$.

Умножая на Ψ_3^*, имеем

$-c + 2\,b = \lambda\,c$.

Решая эти уравнения относительно λ, получаем

$\lambda = -1 \pm 2$.

Следовательно, собственные значения λ равны 1 и – 4.

Таким образом, соответствующие нормированные собственные функции

$$\Psi_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\Psi_2 + \Psi_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,\varphi_\uparrow(1)\,\varphi_\downarrow(2) + \varphi_\downarrow(1)\,\varphi_\uparrow(2)\,\right];$$

$$\Psi_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\Psi_2 - \Psi_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,\varphi_\uparrow(1)\,\varphi_\downarrow(2) - \varphi_\downarrow(1)\,\varphi_\uparrow(2)\,\right].$$

Функции Ψ_1, Ψ_4, Ψ_5 являются собственными функциями оператора $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_1\hat{\boldsymbol{\sigma}}_2$ с собственным значением, равным единице, и соответственно оператора $\hat{\Sigma}^2$ с собственным значением $2\hbar^2$. Но так как $\hat{\Sigma}^2\Psi = \hbar^2 \sum(\sum+1)\,\Psi$; $\hbar^2\,\Sigma\,(\Sigma+1) = 2\,\hbar^2$, то $\Sigma = 1$.

Функция Ψ_6 соответствует $\sigma_1\,\sigma_3 = -3$ и соответственно $\Sigma = 0$.

Таким образом, получаются три состояния, образующие триплет Ψ_1, Ψ_4, Ψ_5 с полным спином $\Sigma = 1$ и проекцией спина Σ_z, равной $1\hbar$, $-1\hbar$, и одно состояние Ψ_6 синглет с антипараллельными спинами $\Sigma = 0$, $\Sigma_z = 0$.

Задача 4.40. Решить задачу на собственные значения для линейного гармонического осциллятора матричным методом.

Решение. Задачу решаем в гейзенберговском энергетическом представлении. Гамильтониан системы есть

$$\hat{H} = -\frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{\mu\,\omega^2\,\hat{x}^2}{2}, \tag{4.35}$$

где $\hat{p}$ и $\hat{x}$ – матрицы, связь между которыми определяется уравнениями движения в гейзенберговской форме:

$$\dot{\hat{x}} = \frac{\hat{p}}{\mu}\ , \quad \dot{\hat{p}} = -\nabla\,\hat{V}\,. \tag{4.36}$$

Отсюда следует, что оператор $\hat{x}$ удовлетворяет следующему уравнению движения:

$$\ddot{\hat{x}} + \omega^2\,\hat{x} = 0 \tag{4.37}$$

или в матричном виде

$$(\ddot{x})_{mn} + \omega^2\,x_{mn} = 0\,. \tag{4.38}$$

Так как

$$x_{mn}(t) = x_{mn}\,e^{i\omega_{mn}t},$$

где $\omega_{mn} = \dfrac{1}{\hbar}(E_m - E_n)$,

то

$$\ddot{x}_{mn} = -\,\omega_{mn}^2\,x_{mn}\,. \tag{4.39}$$

Подставляя (4.39) в (4.38), получаем

$$(\omega^2 - \omega_{mn}^2)\, x_{mn} = 0\,. \qquad (4.40)$$

Из (4.40) следует, что равны нулю все x_{mn}, за исключением тех, при которых $\omega_{mn} = \pm\,\omega$.

Пронумеруем состояния таким образом, что

$\omega_{m,m-1} = +\,\omega;\;\; \omega_{m,m+1} = -\,\omega$.

Тогда отличны от нуля только матричные элементы $x_{m,m+1}$. Так как волновые функции стационарных состояний действительные, то все x_{mn} действительные и $x_{mn} = x_{nm}$. Определим $x_{m,m\pm1}$ из соотношения коммутации:

$$\hat{\dot{x}}\hat{x} - \hat{x}\hat{\dot{x}} = -\,i\,\frac{\hbar}{\mu}$$

или

$$(\dot{x}x)_{mn} - (x\dot{x})_{mn} = -\,i\,\frac{\hbar}{\mu}\,\delta_{mn}\,;$$

$$i\sum_k (\omega_{mk}\; x_{mk}\; x_{kn} - x_{mk}\; \omega_{kn}\; x_{kn}) = -\,i\,\frac{\hbar}{\mu}\,\delta_{mn}\,;$$

$$\left(x_{m+1,m}\right)^2 - \left(x_{m,m-1}\right)^2 = \frac{\hbar}{2\,\mu\,\omega}\,. \qquad (4.41)$$

Решая уравнение (4.41), получаем значение, соответствующее первому – нормальному состоянию осциллятора, равным нулю. Соответственно $x_{0,-1} = 0$;

$$x_{m-1,m} = x_{m,m-1} = \sqrt{\frac{m\,\hbar}{2\,\mu\,\omega}}\,. \qquad (4.42)$$

В E-представлении матрица оператора $\hat{H}$ диагональна. Следовательно,

$$H_{mm} = E_m = \frac{\mu}{2}\left[(\dot{x}^2)_{mm} + \omega^2 (x^2)_{mm}\right] = \frac{\mu}{2}\sum_k (\omega^2 + \omega_{km}{}^2)\, x_{km}^2\,.$$

И так как в сумме члены с $k = m \pm 1$ по k отличны от нуля, то, используя (4.42), получаем

$$E_m = \hbar\,\omega\left(m + \frac{1}{2}\right),\; m = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots\,.$$

Примечание. Вместо операторов $\hat{p}$ и $\hat{x}$ удобно ввести операторы уничтожения и рождения возбуждения $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$, определяемые соотношениями

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\mu\,\omega}{\hbar}}\,\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{\mu\,\omega\,\hbar}}\,\hat{p}\right); \quad \hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\mu\,\omega}{\hbar}}\,\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{\mu\,\omega\,\hbar}}\,\hat{p}\right).$$

Из (4.42) следует, что $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ имеют следующие отличные от нуля матричные элементы:

$$\left(\hat{a}^+\right)_{n,n-1} = \left(\hat{a}\right)_{n-1,n}, \tag{4.43}$$

т.е. у $\hat{a}^+$ отличны от нуля матричные элементы, соответствующие переходу $n-1 \to n$; у $\hat{a}$ – переходу $n \to n-1$. Из (4.43) следует, что $\hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1$.

В новом представлении гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \hbar\,\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right).$$

4.4. Движение в центральном поле с аксиальной симметрией

4.4.1. Разделение переменных

Гамильтониан частицы в цилиндрических переменных ρ, φ, *z* имеет вид

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\,\mu}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] + U\,(\rho). \tag{4.44}$$

Операторы проекций импульса и момент импульса $\hat{p}_z$ и $\hat{M}_z$ на ось симметрии коммутируют друг с другом и с гамильтонианом $\hat{H}$. Поэтому собственные функции операторов $\hat{p}_z$, $\hat{M}_z$ и $\hat{H}$, образующие полную систему функций, могут быть записаны в виде, разделенном по цилиндрическим переменным, т.е. по радиусу-вектору ρ и азимутальному углу φ в плоскости, перпендикулярной оси цилиндрической симметрии *z*:

$$\Psi_{n_\rho m p_z} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2\hbar}}\exp\left[i\,(\frac{p_z z}{\hbar} + m\,\varphi)\right]\theta_{n_\rho|\,m\,|}(\rho), \tag{4.45}$$

где $\theta_{n_\rho|m|}(\rho)$ – решение радиального уравнения Шредингера для «поперечного» движения частицы в плоскости, перпендикулярной оси z:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}+\frac{m^2}{\rho^2}\right]\theta_{n_\rho|m|}(\rho)+U(\rho)\theta_{n_\rho|m|}=E_{n_\rho|m|}\,\theta_{n_\rho|m|}, \quad (4.46)$$

значения $E_{n_\rho|m|}$ задают энергетический спектр “поперечного” движения частицы; n_ρ – радиальное квантовое число, совпадающее с числом нулей радиальной функции (не считая нулей при $\rho = 0$ и $\rho = \infty$).

Волновой функции (4.45) отвечает энергия частицы

$$E_{n_\rho|m|p_z} = E_{n_\rho|m|} + p_z^2/2\mu .$$

Квантовое число $m = 0, \pm 1, \ldots$ характеризует величину момента импульса $M_z = m\hbar$.

Задача 4.41. Найти энергетические уровни дискретного спектра частицы в двумерном поле $U(\rho) = -\alpha/\rho$. Определить кратность вырождения уровней. Сравнить с кулоновским полем $U(r) = -\alpha/r$.

Решение. Уравнение Шредингера для радиальной части собственной функции гамильтониана

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}\right]\chi_{n_\rho|m|}-\frac{\alpha}{\rho}\chi_{n_\rho|m|}=E_{n_\rho|m|}\chi_{n_\rho|m|}$$

заменой функции $\chi_{n_\rho|m|} = u_{n_\rho m}/\sqrt{\rho}$ приводится к виду

$$\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}-\frac{m^2-1/4}{\rho^2}\right]u_{n_\rho m}-\frac{\alpha}{\rho}u_{n_\rho m}=E_{n_\rho m}u_{n_\rho m}. \quad (4.47)$$

Это уравнение и граничные условия $u_{n_\rho m}(0)=0$, $u_{n_\rho m}(\infty)=0$ совершенно аналогичны тем, которые возникают при нахождении радиальной волновой функции $u_{n_\rho l}$ и уровней энергии частицы в кулоновском поле $U(r) = -\alpha/r$, если записать собственную функцию гамильтониана в виде $\Psi_{n_r lm} = Y_{lm}u_{n_r l}(r)/r$. Различие состоит только в замене множителя $l(l+1)$ (в центробежной энергии) на величину $m^2 - 1/4$. Учитывая хорошо известное выражение

$$E_{n_r l} = -\frac{\mu\,\alpha^2}{2\hbar^2\,(n_r + l + 1)^2} \tag{4.48}$$

для энергетических уровней частицы в кулоновском поле и заменяя, согласно сказанному выше, величину $l + 1/2$ на $|\,m\,|$, находим энергетический спектр частицы в двумерном поле $U(\rho) = -\alpha/\rho$:

$$E_{n_\rho |\,m\,|} = -\frac{\mu\,\alpha^2}{2\hbar^2\,(n_\rho + |\,m\,| + 1/2)^2}. \tag{4.49}$$

Из выражения (4.49) видно, что в рассматриваемом поле, как и в кулоновском, имеет место случайное вырождение, так как энергия зависит только от комбинации $n_\rho + |\,m\,|$ квантовых чисел n_ρ и m. Если ввести квантовое число $N = n_\rho + |\,m\,| + 1$ (являющееся аналогом главного квантового числа $n = n_r + l + 1$ в кулоновском поле), то выражение (4.49) можно записать в виде

$$E_N = -\frac{\mu\,\alpha^2}{2\hbar^2\,(N - 1/2)^2},\ N = 1, 2, \ldots \tag{4.50}$$

Энергетический уровень E_N имеет следующую кратность вырождения:

$$g\,(N) = 1 + \sum_{|\,m\,|=1}^{N-1} 2 = 2N - 1.$$

4.4.2. Движение в магнитном поле

В кулоновской калибровке для векторного потенциала $\mathbf{A}$ div$\mathbf{A} = 0$ гамильтониан заряженной частицы в магнитном поле $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\left[\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})\right]^2 \tag{4.51}$$

или

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2\mu} - \frac{e}{\mu c}\mathbf{A}\mathbf{p} + \frac{e^2}{2\mu c^2}\mathbf{A}^2. \tag{4.52}$$

Примером выбора векторного потенциала $\mathbf{A}$, соответствующего постоянному внешнему магнитному полю $\mathbf{H} = \{0, 0, H_0\}$, является выбор

$$A_x = 0\,; \qquad A_y = H_0\,x\,; \qquad A_z = 0$$

или

$$A_x = -\,H_0\,y\,; \qquad A_y = 0\,; \qquad A_z = 0\,.$$

Задача 4.42. Найти среднее магнитное поле $H(0)$, создаваемое в начале координат заряженной бесспиновой частицей, находящейся в кулоновском поле ядра $U(r) = -\,Z\,e^2 / r$ в 1*s*- и 2*p*-состояниях.

Решение. Согласно классической электродинамике магнитное поле тока с объемной плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{H}(\mathbf{R}) = \frac{1}{c}\int \frac{j(\mathbf{r})(\mathbf{R}-\mathbf{r})}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\,\mathrm{d}V. \tag{4.53}$$

Если внешнее магнитное поле отсутствует, то

$$\mathbf{j} = -\frac{ie\hbar}{2\mu}(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi) \tag{4.54}$$

($-e$ – заряд частицы). С учетом вида волновой функции легко находим, что в 1*s*-состоянии $\mathbf{j} = 0$ и $\mathbf{H} \equiv 0$.

Волновая функция произвольного 2*p*-состояния частицы имеет вид

$$\Psi = \sqrt{\frac{1}{32\pi a^5}}(\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{r})e^{-r/2a}, \tag{4.55}$$

где $a = \hbar / (Ze^2\mu)$ и $|\varepsilon|^2 = 1$. В зависимости от значения проекции $M_z = m\,\hbar$ момента импульса частицы в направлении поля вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ принимает следующие значения:

$$\boldsymbol{\varepsilon}\,(m = 0) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\;(0,\,0,\,i)\,;\;\; \boldsymbol{\varepsilon}\,(m = \pm 1) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\;(\pm i,\,1,\,0).$$

На основании уравнений (4.53) – (4.55) имеем

$$\mathbf{H}(0) = -\frac{i\,e\,\hbar}{64\,\pi\,\mu\,c\,a^5}\int \frac{e^{-r/a}}{r^3}\Big[\mathbf{r},\boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}^*\mathbf{r})\Big]\mathrm{d}V\,. \tag{4.56}$$

При получении (4.56) полезно учесть, что в выражении (4.55) для тока следует действовать оператором ∇ лишь на сомножители $(\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{r})$

и $(\boldsymbol{\varepsilon}^* \mathbf{r})$ в волновой функции, так как $[\mathbf{r}\,\nabla f(r)] = 0$; $\nabla(\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{r}) = \boldsymbol{\varepsilon}$. Введя вектор $\mathbf{b} = [\boldsymbol{\varepsilon}^* \boldsymbol{\varepsilon}]$, легко находим

$$[\mathbf{r}, \boldsymbol{\varepsilon}^*(\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{r}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}^* \mathbf{r})] = [\mathbf{r}[\mathbf{r}\,\mathbf{b}]] = \mathbf{r}(\mathbf{r}\,\mathbf{b}) - \mathbf{b}\,r^2,$$

и интеграл, входящий в выражение (4.56), принимает вид

$$\int \frac{1}{r^3} e^{-r/a} \{\mathbf{r}\ (\mathbf{r}\,\mathbf{b})\ -\ \mathbf{b}\,r^2\}\ \mathrm{d}V \equiv \mathbf{I}. \qquad (4.57)$$

Для вычисления вектора **I** рассмотрим интеграл

$$\int \frac{1}{r^3} e^{-r/a} x_i\, x_k\, \mathrm{d}V = C\,\delta_{ik}\,. \qquad (4.58)$$

Взяв в соотношении (4.58) свертку по индексам i и k, имеем

$$3\,C = \int \frac{\exp(-r/a)}{r}\ \mathrm{d}V = 4\pi\, a^2, \qquad (4.59)$$

и из (4.57) – (4.59) следует $\mathbf{I} = -\dfrac{8\pi a^2}{3}\mathbf{b}$; окончательное выражение для магнитного поля

$$\mathbf{H}(0) = \frac{i\,e\,\hbar}{24\mu\,c\,a^3}[\boldsymbol{\varepsilon}^* \boldsymbol{\varepsilon}]. \qquad (4.60)$$

Выпишем значения магнитного поля **H** (0) в $2p$-состояниях частицы для определенных величин m проекции момента на ось z. Для этого учтем вид векторов $\boldsymbol{\varepsilon}(m)$ при различных m и используем уравнение (4.60):

$$H\,(0)_{m=0} = 0,\ H\,(0)_{m=\pm 1} = (0,\ 0, \mp \frac{e\,\hbar}{24\mu\,c\,a^3}).$$

Задача 4.43. Частица со спином $S = 1/2$ и магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$ находится в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}(t)$ вида $H_x = H_0 \cos(\omega_0\, t)$; $H_y = H_0 \sin(\omega_0\, t)$; $H_z = H_1$, где H_0, H_1, ω_0 – постоянные величины. При $t = 0$ частица находилась в состоянии, в котором проекция спина на ось z равна $S_z = 1/2$. Найти вероятности различных значений проекции спина на ось z в момент времени t. Обсудить, в частности, случай, когда $|H_0 / H_1| << 1$; обратить внимание на резо-

нансный характер зависимости вероятности «переворота» спина от частоты ω_0 в этом случае.

Решение. Спиновый гамильтониан и уравнение Шредингера для спиновой волновой функции имеют вид

$$\hat{H} = -\mu \mathbf{H}(t)\hat{\boldsymbol{\sigma}} = -\mu \begin{pmatrix} H_1 & H_0 \exp(-i\omega_0 t) \\ H_0 \exp(-i\omega_0 t) & -H_1 \end{pmatrix}; \ \Psi = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix};$$

$$i\hbar\, a = -\mu H_1 a - \mu H_0 \exp(-i\,\omega_0\, t)\, b; \qquad (4.61)$$
$$i\hbar\, b = -\mu H_0 \exp(i\,\omega_0\, t)\, a + \mu H_1 b.$$

Перейдя к новым функциям $\tilde{a}(t)$, $\tilde{b}(t)$ согласно формулам

$$a = \exp\left(-\frac{i\,\omega_0\, t}{2}\right)\tilde{a}, \ b = \exp\left(\frac{i\,\omega_0\, t}{2}\right)\tilde{b},$$

перепишем систему уравнений (4.61) в виде

$$i\,\dot{\tilde{a}} = -\gamma_1 \tilde{a} - \gamma_2 \tilde{b}; \ i\,\dot{\tilde{b}} = -\gamma_2 \tilde{a} - \gamma_1 \tilde{b}, \qquad (4.62)$$

где $\gamma_1 = \mu H_1 / \hbar + \omega_0 / 2$; $\gamma_2 = \mu H_0 / \hbar$.

По общим правилам находим решение системы уравнений (4.62) в виде

$$\tilde{a}(t) = C_1 \exp(i\,\omega\, t) + C_2 \exp(-i\,\omega\, t);$$

$$\tilde{b}(t) = \frac{\omega - \gamma_1}{\gamma_2} C_1 \exp(i\,\omega\, t) + \frac{-\omega - \gamma_1}{\gamma_2} C_2 \exp(-i\,\omega\, t),$$

где $\omega = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$.

Учитывая, что согласно начальным условиям $\tilde{a}(0) = a(0) = 1$; $\tilde{b}(0) = b(0) = 0$, находим окончательный вид нормированной волновой функции:

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} \left[(\omega + \gamma_1)\, e^{i\omega t} + (\omega - \gamma_1)\, e^{-i\omega t} \right] \exp\left(\frac{i\,\omega_0\, t}{2}\right) \\ 2i\,\gamma_2 \sin \omega t \exp\left(\frac{i\,\omega_0\, t}{2}\right) \end{pmatrix},$$

так что вероятность переворота спина (т.е. значения проекции $S_z = -\frac{1}{2}$) в момент времени t

$$W\left(S_z=-\frac{1}{2},t\right)=\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2\sin^2\omega\,t\equiv g\sin^2\omega\,t,$$

где $g=\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2=\frac{H_0^2}{H_0^2+(H_1+\hbar\,\omega_0/2\mu)^2}$.

Значение g (а с нею и вероятность переворота спина) при $|H_0|<<|H_1|$ мало по сравнению с единицей при всех значениях частоты ω_0 за исключением узкой области вблизи точки $(\omega_o)_{рез}=-2\mu H_1/\hbar$ шириной порядка $|\Delta\omega_o|\sim H_0\,\mu/\hbar$.

4.5. Теория возмущений

Теория возмущений – один из основных методов приближенного решения задач квантовой механики.

Во многих случаях гамильтониан квантовой системы можно представить в виде

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\lambda\hat{V},$$

где $\hat{H}_0$ – гамильтониан невозмущенной системы, для которого известно точное решение уравнения $\hat{H}_0\Psi_n^{(0)}=E_n^{(0)}\Psi_n^{(o)}$;

$\hat{V}$ – оператор возмущения;

λ – безразмерный параметр малости.

Возмущения бывают стационарные и нестационарные.

Рассмотрим сначала стационарное возмущение, при котором оператор возмущения не зависит от времени. Точные волновые функции и уровни энергии можно представить в виде рядов

$\Psi_n=\Psi_n^{(0)}+\lambda\Psi_n^{(1)}+\lambda^2\Psi_n^{(2)}+\ldots$;

$E_n=E_n^{(0)}+\lambda E_n^{(1)}+\lambda^2E_n^{(2)}+\ldots$.

Если невозмущенные функции $\Psi_n^{(0)}$ невырождены, то поправки первого и второго порядка находятся из формул

$$\Psi_n^{(1)}=\sum_{m\neq n}\frac{<m|\hat{V}|n>}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}\Psi_m^{(0)};$$

$$E_n^{(1)}=<n|\hat{V}|n>;\quad E_n^{(2)}=\sum_{m\neq n}\frac{|<m|\hat{V}|n>|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}}.$$

Если функции $\Psi_n^{(0)}$ (n = 1, 2, ... S) вырождены, то в приближении первого порядка по возмущению уровни энергии находятся из секулярного уравнения

$$\begin{vmatrix} H_{11}-E & H_{12} & \dots \\ H_{21} & H_{22}-E & \dots \\ H_{31} & H_{32} & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & H_{SS}-E \end{vmatrix} = 0,$$

где $H_{ik} = \langle i \mid \hat{H} \mid k \rangle$.

S корней этого уравнения (среди которых могут быть кратные) дают уровни энергии, появляющиеся в результате расщепления вырожденного уровня под действием возмущения.

Рассмотрим нестационарное возмущение. В этом случае волновая функция разлагается по собственным функциям $\Psi_n(\mathbf{r})e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}}$ невозмущенного гамильтониана:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t)\, \Psi_n(\mathbf{r}) e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}}.$$

Подстановкой в уравнение Шредингера получается система уравнений для коэффициентов

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}a_n(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_n H_{mn}(t) a_n e^{i\,\omega_{mn} t};$$

$$\omega_{mn} = \frac{1}{\hbar}(E_n - E_m).$$

Разлагая $a_n(t)$ в ряд по степеням λ:

$a_n = a_n^{(0)} + \lambda\, a_n^{(1)} + \lambda^2\, a_n^{(2)} + \dots,$

получаем

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a_m^{(r+1)} = \sum_n H_{mn}(t) a_n^{(r)} e^{i\,\omega_{mn} t}$$

и соответственно в приближении первого порядка по возмущению

$$a_m^{(1)} = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} H_{mn}(t)\, e^{i\,\omega_{mn} t} \mathrm{d}t.$$

При $t = -\infty$ $a_m^{(1)} = 0$ система находится в невозмущенном состоянии.

Если возмущение между моментами включения и выключения имеет постоянное значение, то вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии m,

$$\left| a_m^{(1)}(t) \right|^2 = \frac{4 \left| H_{mn} \right|^2}{\hbar^2 \omega_{mn}^2} \sin^2\left(\frac{\omega_{mn}}{2} t \right).$$

Соответственно вероятность перехода в единицу времени

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| H_{mn} \right|^2 \rho(m),$$

где $\rho(m)$ – плотность конечных состояний.

4.5.1. Стационарные возмущения в невырожденных системах

Задача 4.44. На электрон в одномерной бесконечно глубокой яме действует постоянное электрическое поле $\boldsymbol{\varepsilon}$. Найти сдвиг уровней энергии.

Решение. Оператор взаимодействия электрона с внешним электрическим полем имеет вид

$$\hat{H}' = -(\hat{\boldsymbol{\alpha}}\, \boldsymbol{\varepsilon}),$$

где $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = e\,\hat{\mathbf{r}}$ – оператор дипольного момента. В данной одномерной задаче $\boldsymbol{\varepsilon} \parallel \mathbf{r}$, поэтому $\hat{H}' = -e\,x\,\boldsymbol{\varepsilon}$.

Поправка первого порядка к уровню энергии

$$E_n^{(1)} = \langle n \left| \hat{H}' \right| n \rangle = -e\,\frac{a}{2}\,\varepsilon.$$

Поправка второго порядка к энергии E_n

$$E_n^{(2)} = \sum_m{}' \frac{\left| \langle n \left| \hat{H}' \right| m \rangle \right|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} =$$

$$= e^2 \varepsilon^2 \sum_{\substack{m-n=2k+1 \\ k=0,1,2,..}}{}' \left(\frac{8a\,m\,n}{\pi^2 (m^2 - n^2)^2} \right)^2 \frac{1}{\dfrac{\pi^2 \hbar^2}{2\mu\, a^2}(n^2 - m^2)} =$$

$$= \frac{128 e^2 \varepsilon^2 \mu}{\hbar^2 \pi^6} \sum_{m-n=2k+1} \frac{m^2 n^2}{(n^2 - m^2)^5}.$$

Поправка первого порядка $E_n^{(1)}$ не имеет физического смысла. Дело в том, что в одномерной яме все уровни энергии невырождены, а для невырожденного состояния сдвиг энергии в электрическом поле в первом приближении равен нулю (отсутствует линейный эффект Штарка). Полученный сдвиг $E_n^{(1)}$ не зависит от номера уровня, т.е. весь энергетический спектр сдвигается на постоянную величину. Этот фиктивный сдвиг легко исключить, если начало координат поместить в середину ямы. Тогда $< n \,|\, \hat{x} \,|\, n > = 0$, $E_n^{(1)} = 0$ для всех n.

Задача 4.45. Плоский заряженный ротатор помещен во внешнее электрическое поле ε. Найти сдвиг уровней энергии ротатора с моментом инерции J и вычислить коэффициент электрической восприимчивости.

Решение. Гамильтониан возмущения имеет вид

$$\hat{H}' = -(\hat{\mathbf{d}}\,\boldsymbol{\varepsilon}) = -\mathrm{d}\,\varepsilon \cos\hat{\varphi}.$$

Невозмущенные волновые функции и уровни энергии равны (см. задачу 4.8 о плоском ротаторе):

$$\varphi_m^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{im\varphi};$$

$$E_m^{(0)} = \frac{\hbar^2 m^2}{2J};$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Матричные элементы гамильтониана возмущения

$$< m \,|\, H' \,|\, m' > = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}E \cos\varphi e^{i(m'-m)\varphi}\mathrm{d}\varphi = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad m' \neq m+1; \\ -\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{2} & \text{для} \quad m' = m \pm 1. \end{cases}$$

Поправка первого порядка к уровню энергии

$$E_n^{(1)} = < m \,|\, \hat{H}' \,|\, m > = 0.$$

Поправка второго порядка

$$E_m^{(2)} = \frac{\left| < m \,|\, \hat{H}' \,|\, m-1 > \right|^2}{E_m^{(0)} - E_{m-1}^{(0)}} + \frac{\left| < m \,|\, \hat{H}' \,|\, m+1 > \right|^2}{E_m^{(0)} - E_{m+1}^{(0)}} =$$

$$= \frac{J\,\mathrm{d}^2\,\varepsilon^2}{2\hbar^2}\left[\frac{1}{m^2-(m-1)^2} + \frac{1}{m^2-(m+1)^2}\right] = \frac{J\,\mathrm{d}^2\,\varepsilon^2}{\hbar^2(4m^2-1)}.$$

При помещении квантово-механической системы во внешнее электрическое поле $\boldsymbol{\varepsilon}$ происходит поляризация системы. Работа поляризации $-\frac{\mathbf{P}\,\boldsymbol{\varepsilon}}{2}$, где $\mathbf{P}$ – вектор поляризации, равный среднему дипольному моменту системы. Так как $\mathbf{P} = \alpha\,\boldsymbol{\varepsilon}$, где α – коэффициент электрической восприимчивости, то изменение энергии системы в результате поляризации $\Delta E = -\frac{\alpha\,\varepsilon^2}{2}$. Если ротатор находится в состоянии φ_m, то из равенства $\Delta E = E_m^{(2)}$ получаем коэффициент электрической восприимчивости ротатора

$$\alpha = -\frac{J\mathrm{d}^2}{\hbar^2(4m^2-1)}.$$

При $m \neq 0$ $\alpha < 0$, т.е. средний дипольный момент противоположен внешнему электрическому полю. При $m = 0$ $\alpha > 0$.

Так как уровни энергии невозмущенного ротатора дважды вырождены, то на первый взгляд кажется, что поправка первого порядка должна быть отлична от нуля, т.е. должен существовать линейный эффект Штарка. В действительности вырождение ротатора не снимается в постоянном и однородном электрическом поле вплоть до второго приближения по возмущению включительно. Поэтому линейный эффект Штарка отсутствует, и можно применять теорию возмущений в невырожденных системах вплоть до второго порядка.

Задача 4.46. Линейный осциллятор помещен в постоянное электрическое поле $\boldsymbol{\varepsilon}$. Найти сдвиг уровней энергии осциллятора.

Решение.

Задачу решим двумя способами: точным методом и с помощью теории возмущений.

Точное решение

Уравнение Шредингера для линейного осциллятора во внешнем электрическом поле имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Psi_n(x) + \left(\frac{\mu\,\omega^2\,x^2}{2} - e\,x\,\varepsilon\right)\Psi_n(x) = E_n\Psi_n(x),$$

где μ – масса частицы;

$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ – классическая частота осциллятора;

k – коэффициент возвращающей силы.

Сделаем тождественную подстановку:

$$\frac{\mu\,\omega^2 x^2}{2} - ex\varepsilon = \frac{\mu\,\omega^2}{2}\left(x - \frac{e\,\varepsilon}{\mu\,\omega^2}\right)^2 - \frac{e^2\,\varepsilon^2}{2\mu\,\omega^2}.$$

Уравнение Шредингера принимает вид

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Psi_n(x) + \frac{\mu\,\omega^2}{2}\left(x - \frac{e\,\varepsilon}{\mu\,\omega^2}\right)^2 = \left(E_n + \frac{e^2\,\varepsilon^2}{2\mu\,\omega^2}\right)\Psi_n(x).$$

Из вида уравнения можно сделать вывод, что во внешнем постоянном электрическом поле все уровни энергии осциллятора изменяются на $\frac{e^2\,\varepsilon^2}{2\mu\,\omega^2}$, т.е.

$$E_n = \hbar\,\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{e^2\,\varepsilon^2}{2\mu\,\omega^2},$$

а среднее значение координаты осциллятора сдвигается от нуля на $\frac{e\,\varepsilon}{\mu\,\omega^2}$.

Приближенное решение

Оператор возмущения для линейного осциллятора во внешнем электрическом поле имеет вид

$$\hat{H}' = -e\,\hat{x}\,\varepsilon.$$

Матричные элементы координаты осциллятора

$$<n|\,\hat{x}\,|n+1> = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\,\omega}}\;\sqrt{n+1};$$

$$<n|\,\hat{x}\,|n-1> = \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\,\omega}}\;\sqrt{n}.$$

Остальные матричные элементы равны нулю. Невозмущенные уровни энергии

$$E_n^{(0)} = \hbar\,\omega\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

В первом порядке по возмущению поправка к энергии $E_n^{(1)}$ равна нулю:

$$E_n^{(1)} = <n|\,\hat{H}'\,|n> = -e\,\varepsilon\,.<n|\,\hat{x}\,|n> = 0.$$

Во втором порядке по возмущению поправка к энергии

$$E_n^{(2)} = \sum_{n'} \frac{\left| < n \left| \hat{H}' \right| n' > \right|^2}{E_n^{(0)} - E_{n'}^{(0)}} =$$

$$= e^2 \varepsilon^2 \left\{ \frac{\left| < n \left| x \right| n+1 > \right|^2}{-\hbar\,\omega} + \frac{\left| < n \left| x \right| n-1 > \right|^2}{\hbar\,\omega} \right\} = -\frac{e^2 \varepsilon^2}{2\mu\,\omega^2}.$$

Во втором порядке по возмущению поправка к уровню энергии приводит к точному результату. Этот исключительный результат объясняется особыми правилами отбора для матричных элементов координаты осциллятора и эквидистантностью спектра энергии осциллятора.

Задача 4.47. Найти уровни энергии ангармонического осциллятора, считая ангармонизм колебаний малым.

Решение. Потенциальная энергия ангармонического осциллятора

$$u(x) = \frac{\mu\,\omega^2 x^2}{2} + \lambda\, x^3,$$

где μ – масса колеблющейся частицы; ω – классическая частота осциллятора; λ – константа ангармонизма.

Будем считать $\lambda << 1$, тогда ангармонический член можно рассматривать как возмущение гармонического осциллятора:

$$\hat{H}' = \lambda\, \hat{x}^3.$$

Вычислим матричный элемент

$$< n' \left| \hat{x}^3 \right| n > = \sum_{m,l} \; < n \left| \hat{x} \right| m > \; < m \left| \hat{x} \right| l > \; < l \left| \hat{x} \right| n > .$$

Из правила отбора для матрицы координаты гармонического осциллятора следует, что в данной сумме отличны от нуля только члены, для которых

$$m = n' \pm 1; \qquad l = n \pm 1; \qquad l = m \pm 1.$$

Отсюда следует, что единственные отличные от нуля матричные элементы существуют при $n' = n \pm 3$ и $n' = n \pm 1$:

$$< n+3 \left| \hat{x}^3 \right| n > = \left(\frac{\hbar}{2\mu\,\omega} \right)^{3/2} \sqrt{(n+3)\,(n+2)\,(n+1)};$$

$$< n-3 \left| \hat{x}^3 \right| n > = \left(\frac{\hbar}{2\mu\,\omega} \right)^{3/2} \sqrt{(n-2)\,(n-1)\,n}\,;$$

$$< n+1 \left| \hat{x}^3 \right| n > = \left(\frac{\hbar}{2\mu\,\omega} \right)^{3/2} \left[\sqrt{(n+2)^2\,(n+1)} + \sqrt{(n+1)^3} + \sqrt{(n+1)\,n^2} \right];$$

$$< n-1 \left| \hat{x}^3 \right| n > = \left(\frac{\hbar}{2\mu\,\omega} \right)^{3/2} \left[\sqrt{n^3} + \sqrt{(n-1)^2 n} + \sqrt{n\,(n+1)^2} \right];$$

остальные матричные элементы оператора $\hat{x}^3$ равны нулю.

Поправка второго порядка к уровню энергии осциллятора

$$E_n^{(2)} = -\lambda^2 \sum_{m=n\pm3;\,n\pm1} \frac{\left| < n \left| \hat{x} \right| m > \right|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} =$$

$$= -\frac{\lambda^2}{\hbar\,\omega} \left(\frac{\hbar}{2\mu\,\omega} \right)^3 30 \left(n^2 + n + \frac{11}{30} \right).$$

Найдем условие применимости полученных формул. Теория возмущений применима, если $\dfrac{< n \left| \hat{H}' \right| n' >}{E_n^{(0)} - E_{n'}^{(0)}} << 1$.

Для нашей задачи это условие имеет вид $\dfrac{\lambda \left(\dfrac{\hbar\,n}{2\mu\,\omega} \right)^{3/2}}{\hbar\,\omega} << 1$. Следовательно,

$$n << \left(\frac{\hbar\,\omega}{\lambda} \right)^{2/3} \frac{2\mu\,\omega}{\hbar}.$$

С точки зрения классической механики это условие означает, что амплитуда колебаний не должна быть очень большой.

4.5.2. Теория возмущений для вырожденных систем

Задача 4.48. Найти расщепление уровней плоского ротатора во внешнем постоянном магнитном поле. Направление поля **H** перпендикулярно плоскости ротатора.

Решение. Гамильтониан возмущения

$$\hat{H}' = -\frac{e}{\mu c}\mathbf{L}\,\mathbf{H},$$

где **L** – оператор момента количества движения ротатора. Уровни энергии

$$E_m^{(0)} = \frac{\hbar^2 m^2}{2J}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Во внешнем магнитном поле вырождение уровней снимается. Каждый уровень расщепляется на два подуровня (нормальный эффект Зеемана). Величина расщепления

$$\Delta E_m = \langle m \left| \hat{H}' \right| m \rangle - \langle -m \left| H' \right| -m \rangle = \frac{2e\,H}{\mu c}\, m .$$

Задача 4.49. Найти сдвиг уровней энергии с главным квантовым числом $n = 2$ (линейный эффект Штарка) для атома водорода, находящегося во внешнем электрическом поле $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Решение. Ось z направлена вдоль внешнего электрического поля. Тогда гамильтониан возмущения можно написать в виде $\hat{H}' = e\,\hat{z}\,\varepsilon$.

Невозмущенные волновые функции четырехкратно вырожденного уровня $n = 2$ имеют вид

$$\Psi_{2S0} = \frac{2 - \frac{r}{a}}{4\sqrt{2\pi a^3}}\, e^{-\frac{r}{2a}} ;$$

$$\Psi_{2p1} = \frac{\frac{r}{a}}{8\sqrt{\pi a^3}}\, e^{-\frac{r}{2a}} \sin\theta\, e^{i\varphi} ;$$

$$\Psi_{2p0} = \frac{\frac{r}{a}}{8\sqrt{\pi a^3}}\, e^{-\frac{r}{2a}} \sqrt{2}\cos\theta ;$$

$$\Psi_{2p-1} = \frac{\frac{r}{a}}{8\sqrt{\pi a^3}}\, e^{-\frac{r}{2a}} \sin\theta\, e^{-i\varphi} ,$$

где a – боровский радиус.

Оператор $\hat{L}_z$ коммутирует с полным гамильтонианом, так как $[\,\hat{L}_z\,,\,\hat{z}\,] = 0$, поэтому магнитное квантовое число m сохраняется в присутствии электрического поля.

Вычислим матрицу гамильтониана возмущения в подпространстве вырожденных собственных функций уровня $n = 2$. Ввиду сохранения магнитного квантового числа m матричные элементы между состояниями с различными значениями m равны нулю:

$$< 2s0 \mid \hat{H}' \mid 2p1 > = < 2s0 \mid \hat{H}' \mid 2p-1 > = < 2p+1 \mid \hat{H}' \mid 2p-1 > = 0;$$

$$< 2s0 \mid \hat{H}' \mid 2s0 > = \frac{e\varepsilon}{32\pi a^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{r}{a}\right)^2 e^{-\frac{r}{a}} r^3 \cos\theta \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = 0;$$

$$< 2p0 \mid \hat{H}' \mid 2p0 > = \frac{e\varepsilon}{32\pi a^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^5}{a^2} e^{-\frac{r}{a}} \cos^3\theta \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = 0;$$

следующие матричные элементы отличны от нуля:

$$< 2s0 \mid \hat{H}' \mid 2p0 > = \frac{e\varepsilon}{32\pi a^3} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r}{a}} \left(2 - \frac{r}{a}\right)^2 \frac{r^4}{a} \cos^2\theta \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \frac{e\varepsilon}{32\pi a^3} \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty e^{-\frac{r}{a}} \left(2 - \frac{r}{a}\right) r^4 dr = \frac{e\varepsilon}{32\pi a^4} \frac{4\pi}{3} \left\{48a^4 - 120a^4\right\} = -3e\varepsilon a.$$

Матрица гамильтониана возмущения имеет вид

$$e\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -3a & 0 & 0 \\ -3a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем эту матрицу к диагональному виду, для чего секулярный детерминант приравняем нулю:

$$e\varepsilon \begin{vmatrix} -\lambda & -3a & 0 & 0 \\ -3a & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_1 = +3e\varepsilon a; \quad \lambda_2 = 3e\varepsilon a; \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Смысл этого уравнения заключается в том, что в электрическом поле снимается вырождение состояний $2s0$ и $2p0$, причем величина расщепления равна $6e\varepsilon a$, а состояния $2p1$ и $2p-1$ остаются вырожденными.

4.5.3. Нестационарные возмущения

Задача 4.50. Найти дифференциальное сечение рассеяния заряженной частицы с зарядом $z\,e$ в поле заряженного центра с зарядом $Z\,e$.

Решение. Дифференциальное сечение рассеяния в потенциальном поле $u(\mathbf{r})$ в борновском приближении

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{1}{4\pi^2\hbar^4}\frac{p^2}{v^2}\left|u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\right|^2,$$

где v – начальная скорость частицы;

$\mathrm{d}\Omega$ – элемент телесного угла;

$$u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\equiv<\mathbf{p}\ \left|u\right|\mathbf{p}'>=\frac{1}{v}\int u(\mathbf{r})e^{(\bar{p}-\bar{p}')\bar{r}}\mathrm{d}^3r\,;$$

$\mathbf{p}$ – импульс падающей частицы;

$\mathbf{p}'$ – импульс рассеянной частицы.

В нашей задаче потенциальная энергия заряда в поле заряда Ze $u = z\,Z\,e^2/r$.

Матричный элемент этой потенциальной энергии, взятой по плоским волнам,

$$u(\mathbf{p}-\mathbf{p}')=zZe^2\int\frac{1}{|\mathbf{r}|}e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\mathbf{r}}\mathrm{d}^3r.$$

Для вычисления этого интеграла учтем соотношение

$$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}|}=-4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Это равенство следует из того факта, что решение уравнения Пуассона для электростатического потенциала единичного точечного заряда, помещенного в начале координат, имеет вид $-\dfrac{1}{|\mathbf{r}|}$ (закон Кулона). Фурье-образ этого равенства имеет вид

$$\int\frac{e^{ikr}}{|\mathbf{r}|}\mathrm{d}^3r=\frac{4\pi}{k^2}.$$

При выводе этой формулы мы учли, что

$$\delta(\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikr}\mathrm{d}^3k\,.$$

Таким образом, окончательно получаем матричный элемент потенциальной энергии

$$u(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = \frac{4\pi zZe^2}{\frac{1}{\hbar^2}\left|\mathbf{p}-\mathbf{p}'\right|^2} = \frac{4\pi\hbar^2 zZe^2}{4p^2\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

где $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$, так как столкновение упругое;

θ – угол между импульсами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$.

Дифференциальное сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{z^2Z^2}{4}\left(\frac{\mu e^2}{p^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$ – это формула Резерфорда.

Этот результат получается не только в борновском приближении, но и при точном решении для случая кулоновского поля. Критерий применимости рассматриваемого решения для кулоновского поля

$\sqrt{\frac{\mu}{2E}}\,\frac{v\,a}{\hbar} \sim \frac{Z\,e^2}{\hbar\,v} << 1$, где v – скорость частицы; a – область, в которой действует поле, означает малость изменения фазы волны.

Полученный критерий применимости можно записать в другом виде:

$$2\alpha\frac{c}{v} << 1, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar\,c} = \frac{1}{137}.$$

Задача 4.51. На атом водорода, находящийся в основном состоянии, действует однородное, периодическое во времени электрическое поле. Найти минимальную частоту, необходимую для ионизации атома, и вычислить вероятность ионизации в единицу времени.

Решение. Вероятность перехода из состояния дискретного спектра в интервал непрерывного спектра под действием периодического поля с частотой ω

$$dW_{n\nu} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle n|\,\hat{A}\,|\nu\rangle\right|^2 \delta(E_\nu - E_n^{(0)} - \hbar\omega)\,d\nu,$$

где ν – набор величин, характеризующих состояние непрерывного спектра;

n – набор квантовых чисел, характеризующих состояние дискретного спектра;

$\hat{A}$ – амплитуда гамильтониана возмущения.

Для нашей задачи гамильтониан возмущения

$$\hat{H}'(t) = e(\hat{\mathbf{r}}\,\boldsymbol{\varepsilon}\,(t)) = \hat{A}\,e^{i\,\omega t} + \hat{A}^{+}e^{-i\,\omega t},$$

где $\hat{A} = \frac{1}{2}e(\hat{\mathbf{r}}\,\boldsymbol{\varepsilon}_0)$.

Сохранение энергии при ионизации обеспечивается наличием δ-функции от энергии в выражении для вероятности перехода:

$$\hbar\,\omega = E_{\nu} - E_n^{(0)}.$$

Для атома водорода в основном состоянии $E_1 = \frac{m\,e^4}{2\hbar^2}$, поэтому $\omega_{\min} = \frac{m\,e^4}{2\hbar^3}$.

Вычислим матричный элемент

$$< n \left| \hat{A} \right| \nu > = \int \Psi_n^{*(0)} \hat{A}\,\Psi_{\nu}\,\mathrm{d}\tau.$$

Волновые функции электрона в связанном и свободном состояниях имеют вид

$$\Psi_n^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{\pi\,a^3}} e^{-\frac{r}{a}};$$

$$\Psi_{\nu} \equiv \Psi_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{3}}} e^{i(\mathbf{kr})}.$$

Матричный элемент принимает вид

$$< n \left| \hat{A} \right| v > = \frac{i\,e}{2(2\pi)^{3/2}(\pi a^3)^{1/2}} \int e^{-\frac{r}{a} + i(\mathbf{kr})} (\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{r})\mathrm{d}^3 r.$$

Введем сферическую систему координат с полярной осью вдоль **k**, угол между **k** и $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ обозначим λ (рис. 4.14). Тогда

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_0\,\mathbf{r}) = \varepsilon_0\,r\left[\cos\lambda\cos\theta + \sin\lambda\sin\theta\cos(\varphi - \varphi_0)\right],$$

где φ_0 – азимутальный угол $\boldsymbol{\varepsilon}_0$.

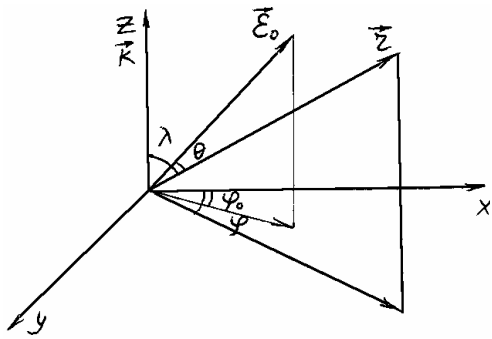

Рис. 4.14

После подстановки в матричный элемент второй член после интегрирования по φ дает нуль. Полагая $\cos\theta \equiv s$, получаем

$$< n\left|\hat{A}\right|v >= \frac{i\,e}{2^{\frac{5}{2}}\pi^2 a^{\frac{3}{2}}} 2\pi\delta_0 \cos\lambda \int_{-1}^{+1}\left\{\int_0^{\infty} e^{i\,k\,r\,s}\, e^{-\frac{r}{a}}\, r^3 \mathrm{d}r\right\} s\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{i\,e\,\delta_0 \cos\lambda}{\pi(2a)^{\frac{3}{2}}} \int_{-1}^{+1} \frac{3!\,s\,\mathrm{d}s}{(\frac{1}{a} - i\,k\,s)^4} = \frac{e\,\varepsilon_0 \cos\lambda}{\pi(2a)^{\frac{3}{2}}} \frac{18\,k\,a^5}{(1+k^2a^2)^3}.$$

Так как $E_\nu = \dfrac{\hbar^2\,k^2}{2\mu}$, интервал состояний для свободной частицы

$$\mathrm{d}\nu = \mathrm{d}^3\,k = k^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\Omega_k = k^2\,\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}E_\nu}\,\mathrm{d}\Omega_k\,\mathrm{d}E_\nu = \frac{\mu\,k}{\hbar^2}\,\mathrm{d}\Omega_k\,\mathrm{d}E_\nu\,,$$

где $\mathrm{d}\,\Omega_k$ – элемент телесного угла с осью вдоль вектора **k**.

Вероятность вылета электрона в состояние, принадлежащее интервалу $\mathrm{d}\Omega_k\,\mathrm{d}E_\nu$,

$$\mathrm{d}\,W_{n\nu} = \frac{2^6}{\pi}\,\frac{m\,a^7 e^2}{\hbar^3}\,\frac{\varepsilon_0{}^2\,k^3\cos^2\lambda}{(1+k^2\,a^2)^6}\,\delta\,(E_\nu - E_n^{(0)} - \hbar\omega)\,\mathrm{d}\Omega_k\,\mathrm{d}E_\nu\,.$$

Проинтегрируем $\mathrm{d}W_{n\nu}$ по E_ν, учитывая свойство δ-функции:

$$\mathrm{d}\,W_k = \frac{64a^3}{\pi\,\hbar}\,\delta_0{}^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^6\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right)^{\frac{3}{2}} \cos\lambda\,\mathrm{d}\Omega_k\,.$$

При выводе этой формулы мы учли следующие соотношения:

$$E_\nu = E_n^{(0)} + \hbar\,\omega; \qquad k^2 = \frac{2\mu\,E_\nu}{\hbar^2} = \frac{2\mu}{\hbar}(\omega - \omega_0);$$

$$E_n^{(0)} = -\frac{\mu\,e^4}{4\hbar^2} = -\hbar\,\omega_0; \quad a = \frac{\hbar^2}{\mu\,e^2}; \quad 1 + k^2 a^2 = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Угловое распределение электронов имеет осевую симметрию. Это совершенно естественно, так как в задаче имеется только одно выделенное направление, задаваемое внешним полем.

4.6. Вариационный метод

Вариационный метод наряду с теорией возмущения широко применяется для приближенных расчетов квантовых систем. Наиболее часто он используется для расчета основного (низшего) состояния системы. Вариационный метод основан на неравенстве

$$E_0 \le \int \psi^*(\mathbf{r})\,\hat{H}\,\psi(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3 r \equiv I, \tag{4.63}$$

где $\psi(\bar{r})$ – произвольная пробная волновая функция, удовлетворяющая условию нормировки

$$\int \psi^*(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r})\,\mathrm{d}^3 r = 1. \tag{4.64}$$

Равенство (т.е. абсолютный минимум интеграла I) в соотношении (4.63) достигается, если $\psi(\mathbf{r})$ – точная собственная функция основного состояния гамильтониана $\hat{H}$. Чем меньше отличается пробная функция от точной собственной функции, тем ближе интеграл I к энергии основного состояния.

Рассмотрим один из вариационных методов – метод Ритца. В этом методе выбирается класс пробных функций, зависящих от нескольких параметров. Класс пробных функций выбирается на основании предварительных оценок и из физических соображений. Пробные функции должны достаточно близко воспроизводить особенности поведения точной собственной функции.

Пусть $\psi(\mathbf{r}, \alpha, \beta, ...)$ – пробная функция, зависящая от параметров $\alpha, \beta, ...$. Интеграл I также будет зависеть от параметров $\alpha, \beta, ...$. Из условия минимума интеграла $I(\alpha, \beta, ...)$ можно найти пробную функцию, наиболее близкую к точной собственной функции. Отыскание минимума сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \frac{\partial I}{\partial \beta} = ... = 0. \qquad (4.65)$$

Корни этой системы α_0, β_0, ... после подстановки в интеграл I дают наименьшее, т.е. наиболее близкое к истинному, приближенное значение энергии

$$E = I\,(\alpha_0, \beta_0, ...) = \min I\,(\alpha, \beta, ...). \qquad (4.66)$$

Задача 4.52. Найти методом Ритца энергию основного состояния одномерного гармонического осциллятора.

Решение. Гамильтониан осциллятора имеет вид

$$\hat{H} = \frac{p^2 x}{2\mu} + \frac{k\,\hat{x}^2}{2}.$$

Выберем систему единиц, для которой $\hbar = \mu = R = 1$. Тогда энергия осциллятора выражается безразмерным числом, что удобно при численных расчетах.

Точная волновая функция и энергия основного состояния квантового осциллятора в данной системе единиц имеют вид

$$\psi_0\,(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \quad E_0 = \frac{1}{2}.$$

Функция $\psi_0\,(x)$ может быть грубо аппроксимирована треугольной функцией

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\alpha}x + 1 & \text{при } 0 \le x \le \alpha; \\ \dfrac{1}{\alpha}x + 1 & \text{при } -\alpha \le x \le 0, \end{cases}$$

используя которую, получаем

$$E\,(\alpha) = \frac{-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,f(x)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f^2(x)\,\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} x^2\ f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f^2(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{\alpha^2}{30}}{\frac{2}{3}\alpha} = \frac{1}{20}\alpha^2 + \frac{3}{2}\frac{1}{\alpha^2} = =$$

$$= \frac{\partial E(\alpha)}{\partial\,\alpha}\bigg|_{\alpha_0} = \left(\frac{1}{10}\alpha - \frac{3}{\alpha^3}\right)\bigg|_{\alpha_0} = 0, \qquad \alpha_0 = \sqrt[4]{30} = 2{,}34\,.$$

Следовательно, минимальное значение интеграла на классе функций треугольного вид

$E\,(\alpha_0) = 0{,}548$.

Это значение энергии основного состояния не более чем на 10 % отличается от точного значения. Такая точность вполне достаточна для многих полуколичественных расчетов и оценок.

Задача 4.53. Найти методом Ритца энергию основного состояния трехмерного квантового осциллятора.

Решение. Гамильтониан трехмерного осциллятора в системе единиц задачи 4.52 имеет вид

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\hat{r}^2}{2}\,.$$

Точная волновая функция и энергия основного состояния трехмерного осциллятора соответственно равны:

$$\psi_0(\mathbf{r}) = C\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right); \qquad E = \frac{3}{2}.$$

В качестве пробных функций возьмем функции вида

$$f\,(r) = A\,(1+\alpha\, r)\, e^{-\alpha\, r}\,.$$

Эти функции лучше аппроксимируют точную волновую функцию, чем пробные функции в задаче 4.52. Вычислим нормирующий множитель A:

$$\int \left| f\,(r)\right|^2\ \mathrm{d}^3 r = 4\pi\, A^2 \int\limits_0^{\infty} (1+\alpha\, r)^2\ e^{-2\alpha\, r} r^2\ \mathrm{d}r =$$

$$= 4\pi\, A^2\left[\frac{2!}{(2\alpha)^3} + 2\alpha\frac{3!}{(3\alpha)^4} + \frac{4!\,\alpha^2}{(2\alpha)^5}\right] = \frac{7\pi\, A^2}{\alpha^3} = 1\,,$$

отсюда $A = \dfrac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{7\pi}}$;

$$E(\alpha) = -\frac{1}{2}\int f(r)\nabla^2 f(r)\,\mathrm{d}^3r + \frac{1}{2}\int \left| f(r)\right|^2 \mathrm{d}^3r =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left|\nabla\ f(r)\right|^2 \mathrm{d}^3r + \frac{1}{2}\int r^2 \left| f(r)\right|^2 \mathrm{d}^3r =$$

$$= A^2\alpha^4\, 4\pi \int_0^\infty r^4 e^{-2\alpha r}\mathrm{d}r + \frac{1}{2}4\pi\, A^2 \int_0^\infty (1+\alpha\, r)^2 e^{-2\alpha r} r^4 \mathrm{d}r = \frac{3}{14}\alpha^2 + \frac{81}{28}\frac{1}{\alpha^2}.$$

α_0 определяется из уравнения

$$\left.\frac{\partial E_\alpha}{\partial\,\alpha}\right|_{\alpha_0} = \left.\frac{3}{7}\alpha - \frac{81}{14\alpha^3}\right|_{\alpha_0} = 0; \qquad \alpha_0^2 = 3\sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$E(\alpha_0) = \frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1{,}575.$$

Этот результат отличается от точного значения энергии основного состояния на 5 %, т.е. использование лучшей аппроксимации волновой функции уменьшило погрешность по сравнению с задачей 4.52 в два раза.

Еще большую точность результата можно получить, если использовать более точную и гибкую аппроксимацию с помощью пробных функций, зависящих от двух и более параметров.

Задача 4.54. Вычислить энергию основного состояния атома водорода вариационным методом Ритца, используя два типа пробных функций:

1) $f_1 = A(1+\alpha\, r)\exp(-\alpha\, r)$;

2) $f_2 = B\exp\left(-\alpha\dfrac{r^2}{2}\right)$.

Решение. Нормирующие множители пробных функций

$$A = \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{7\pi}}; \qquad B = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Вычислим среднее значение гамильтониана на пробной функции

$$E(\alpha) = \frac{\hbar^2}{2\mu}\int \left|\ \nabla\ f_1(r)\right|^2 \mathrm{d}^3r - e^2\int \frac{1}{r}\left|\ f_1(r)\right|^2 \mathrm{d}^3r =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2\mu} 4\pi A^2 \int_0^\infty r^4 e^{-2\alpha r} \mathrm{d}r - e^2 4\pi A^2 \int \frac{1}{r} (1+\alpha r)^2 e^{-2\alpha r} r^2 \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{13}{14} \frac{\hbar^2 \alpha^2}{\mu} - \frac{9}{7} e^2 \alpha .$$

Из условия минимума $E(\alpha)$ находим минимизирующее значение параметра α_o :

$$\left. \frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{\hbar^2}{\mu} \alpha - 3e^2 \right|_{\alpha_0} = 0 ; \quad \alpha_0 = \frac{3\mu e^2}{\hbar^2} .$$

Приближенное значение энергии основного состояния

$$E(\alpha_0) = -\frac{27}{59} \frac{\mu e^4}{\hbar^2} \approx -\frac{m e^4}{2{,}07\hbar^2} .$$

Далее вычислим аналогичным образом приближенное значение энергии основного состояния по функции $f_2(r)$:

$$E(\alpha) = \frac{\hbar^2}{2\mu} 4\pi B^2 \int_0^\infty (\alpha r)^2 e^{-\alpha r^2} r^2 \mathrm{d}r - e^2 4\pi B^2 \int_0^\infty e^{-\alpha r^2} r^4 \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\hbar^2}{\mu} \frac{3}{4} \alpha - 2e^2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{1/2} .$$

Вариационный параметр α_o находим из уравнения

$$\left. \frac{\partial E(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} = \left. \frac{3}{2} \frac{\hbar^2}{\mu} - 2e^2 (\alpha \pi)^{1/2} \right|_{\alpha_0} = 0 .$$

Получаем $\alpha_0 = \frac{\mu c^4}{\hbar^4} \frac{16}{9\pi}$.

Следовательно, соответствующий уровень энергии

$$E(\alpha_0) = -\frac{48}{36\pi} \frac{\mu e^4}{\hbar^2} \approx -\frac{m e^4}{2{,}3\hbar^2} .$$

Сравнение с точным значением энергии основного состояния $E_0 = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2}$ показывает, что функция $f_1(r)$ лучше аппроксимирует точную волновую функцию атома водорода, чем функция $f_2(r)$.

4.7. Тождественность частиц

4.7.1. Волновая функция системы тождественных частиц

Задача 4.55. В системе двух одинаковых бозонов со спином $S = 0$ одна частица находится в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi_1(r)$, другая – $\Psi_2(r)$. Эти функции нормированы на единицу и имеют определенные, причем противоположные, четности. Найти в указанном состоянии системы распределение по координатам одной частицы при произвольном (не фиксированном) положении другой. Каковы вероятности того, что в области пространства $z \geq 0$ находятся:

а) одна частица;

б) обе частицы?

Сравнить полученные значения со случаем различимых частиц.

Решение. Нормированная волновая функция рассматриваемого состояния системы

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\Psi_1(\mathbf{r}_1)\,\Psi_2(\mathbf{r}_2) + \Psi_2(\mathbf{r}_1)\Psi_1(\mathbf{r}_2)\right\} \tag{4.67}$$

(здесь учтена ортогональность функций Ψ_1 и Ψ_2) .

Распределение по координатам одной частицы при произвольном положении другой имеет вид

$$\mathrm{d}w = \left\{\int \left|\Psi(\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}, \mathbf{r}_2)\right|^2\right\}\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\left\{\left|\Psi_1(\mathbf{r})\right|^2 + \left|\Psi_2(\mathbf{r})\right|\right\}\mathrm{d}V. \tag{4.68}$$

По своей форме (4.68) представляет распределение по координатам первой частицы; в силу симметрии волновой функции точно такой же вид имеет распределение по координатам второй частицы; распределение же по координатам одной из двух одинаковых частиц представляет полусумму (для нормировки на 1) указанных одночастичных распределений и ввиду их одинаковости совпадает с каждым из них.

Используя соотношения

$$\int_{z\geq 0}\left|\psi_{1,2}(\mathbf{r})\right|^2\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int\left|\psi_{1,2}(\mathbf{r})\right|^2\mathrm{d}V = \frac{1}{2}, \tag{4.69}$$

легко находим с помощью (4.68), что вероятность нахождения одной частицы в области полупространства $z \geq 0$ равна $W_1(z \geq 0) = \dfrac{1}{2}$ (при

этом положение другой частицы не фиксируется), а вероятность нахождения в области $z \geq 0$ обеих частиц одновременно

$$W_2(z_{1,2} \geq 0)\int_{z_1>0}\int_{z_2>0}\left|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\right|^2 \mathrm{d}V_1 \mathrm{d}V_2 = \frac{1}{4}\left\{1+4\left|S\right|^2\right\}; \qquad (4.70)$$

$$S = \int_{z\geq 0} \psi_1^*(\mathbf{r})\, \psi_2(\mathbf{r})\, \mathrm{d}V, \qquad (4.71)$$

что отличается от значения $\frac{1}{4}$ для различимых частиц (в последнем случае не требуется производить симметризацию волновой функции вида (4.67)). Полученный результат (4.70) иллюстрирует существование интерференции амплитуд различных (но тождественных !) частиц. Качественно эту интерференцию амплитуд бозонов можно охарактеризовать как тенденцию к взаимному сближению:

$$W_2 > W_{\text{разл}} = \frac{1}{2}.$$

Задача 4.56. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для случая системы, состоящей из двух одинаковых фермионов, находящихся в одном и том же спиновом состоянии.

Решение. Задача решается аналогично задаче 4.55. Волновая функция имеет вид

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\Psi_1(\mathbf{r}_1)\Psi_2(\mathbf{r}_2) - \psi_2(\mathbf{r}_1)\Psi_1(\mathbf{r}_2)\right\} x_\alpha x_\beta, \qquad (4.72)$$

где α и β – спиновые переменные 1-й и 2-й частицы.

Распределение по координатам одной частицы при произвольном положении другой имеет точно такой же вид, как и в предыдущей задаче (см. формулу (4.68)). В данной задаче при нахождении распределения по координатам следует выполнить суммирование по спиновым переменным. Соответственно вероятность нахождения одной частицы в области $z \geq 0$ также равна $\frac{1}{2}$, а для вероятности нахождения в области $z \geq 0$ обеих частиц получается выражение

$$W_2(z_{1,2} \geq 0) = \frac{1}{4}\left\{1 - 4\left|S\right|^2\right\} \qquad (4.73)$$

(сравнить с формулами (4.70) и (4.71) задачи 4.55).

Полученный результат (4.73), как и в предыдущей задаче, иллюстрирует существование интерференции между различными тождественными частицами. Однако в случае фермионов характер интерференции противоположен тому, который имеет место для бозонов, и качественно его можно описать как тенденцию фермионов к взаимному отталкиванию.

Задача 4.57. Для системы из двух одинаковых бозонов со спином $S = 0$ найти функцию распределения по относительному расстоянию между частицами. Как проявляется в полученном распределении тождественность частиц? Какой смысл имеет выражение $\int \left|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\right|^2 \mathrm{d}\mathbf{r}$ (где $\Psi\ (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ – нормированная волновая функция системы)?

Решение. Перейдем от переменных $\mathbf{r}_{1,2}$ к переменным $\mathbf{R} = \dfrac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

При этом

$$\mathrm{d}w = \left|\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\right|^2 \mathrm{d}V_1\, \mathrm{d}V_2 = \left|\Psi\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2},\ \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right)\right|^2 \mathrm{d}^3R\, \mathrm{d}^3r. \qquad (4.74)$$

Выражение (4.74) описывает распределение по координатам центра масс и относительному расстоянию между частицами. Выполнив в нем интегрирование по координатам **R**, получим распределение по относительному расстоянию между частицами в виде

$$\mathrm{d}w = f(\mathbf{r})\mathrm{d}^3r, \quad f(\mathbf{r}) = \int \left|\Psi\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2},\ \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right)\right|^2 \mathrm{d}^3R. \qquad (4.75)$$

Распределения (4.74) и (4.75) при замене **r** на –**r**, что соответствует перестановке координат частиц (или изменению их нумерации), не изменяются.

Учитывая (4.75), замечаем, что приведенное в условии задачи выражение $f(\mathbf{r}) = 0$, т.е. представляет плотность вероятности нахождения частиц на расстоянии $r = 0$ друг от друга, т.е. в одной и той же точке пространства.

4.7.2. Многоэлектронный атом, молекулы

Задача 4.58. Какие значения может принимать момент относительного движения электронов в орто- и парасостояниях гелиеподобных атомов?

Ответ. В орто-(пара-) состояниях гелиеподобных атомов момент относительного движения электронов может принимать только нечетные (четные) значения.

Задача 4.59. Найти распределение электронов по импульсам в нейтральном атоме с зарядом ядра Z согласно модели Томаса – Ферми. Учесть, что универсальная функция $\chi(x)$ этой модели, определяющая объемную плотность электронов, монотонно убывает с ростом x. Используя полученный результат, найти зависимость от заряда ядра Z средних величин импульса и кинетической энергии электрона.

Решение. Как известно, в модели Томаса – Ферми максимальное значение $p_0(r)$ импульса электронов в точке r связано с объемной плотностью электронов соотношением

$$\frac{p_0^3(r)}{3\pi^2} = n(r) = \frac{32Z^2}{9\pi^3}\left[\frac{\chi(x)}{x}\right]^{3/2}, \quad x = \frac{r\,Z^{1/3}}{b},$$

где $\chi(x)$ – универсальная функция модели.

Переписав это соотношение в виде

$$f(x) \equiv \frac{\chi(x)}{x} = \left(\frac{3\pi\, p_0^3(r)}{32Z^2}\right)^{2/3} \equiv y, \tag{4.76}$$

введем функцию $g(y)$, обратную функции $y = f(x)$:

$$x = f^{-1}(y) = g(y). \tag{4.77}$$

Так как функция $\chi(x)/x$, как и $\chi(x)$, является функцией переменной x, то функция $g(y)$ – однозначно определенная и монотонная (отметим, что $g(0) = \infty$, $g(\infty) = 0$).

В модели Томаса – Ферми движение электронов в самосогласованном поле рассматривается квазиклассически, причем все числа заполнения состояний дискретного спектра равны единице. Так как число состояний

$$\Delta N = \frac{2\Delta\Gamma}{(2\pi)^3} = \frac{2\Delta V_q \Delta V_p}{(2\pi)^3} \quad (\hbar = 1),$$

то при выборе $\Delta V_p \equiv \mathrm{d}^3 p$, а в качестве ΔV_q – объема, в котором электроны могут иметь импульс p, величина ΔN имеет смысл числа электронов, импульсы которых заключены в соответствующем интервале $\mathrm{d}^3 p$. Значение ΔV_q легко получить на основании соотношений (4.76) и (4.77):

$$\Delta V_q = \frac{4\pi}{3} r^3(p) = \frac{4\pi b^3}{3Z} x^3(p) = \frac{4\pi b^3}{3Z} \left\{ g\left[\left(\frac{3\pi\, p^3}{32Z^2} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \right\}^3 ,$$

где $b = (3\pi\ /\ 4)^{2/3} / 2$ и окончательное выражение для распределения электронов по импульсам в модели Томаса – Ферми принимает вид

$$\mathrm{d}n(p) = \frac{3}{128Z} \left\{ g\left[\left(\frac{3\pi\, p^3}{32Z^2} \right)^{2/3} \right] \right\}^3 \mathrm{d}^3 p\,. \qquad (4.78)$$

По смыслу вывода распределение (4.78) нормировано на полное число электронов $\int \mathrm{d}n\,(p) = Z$ (это можно доказать и непосредственно). Поэтому выражение $\mathrm{d}w = \frac{1}{Z}\mathrm{d}n$ является функцией распределения по импульсам отдельного электрона. Легко находим

$$\overline{p^n} = \int p^n \mathrm{d}w = \tilde{c}_n Z^{2n/3}, \qquad (4.79)$$

где

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{3}\left(\frac{32}{3\pi} \right)^{n/3} \int_0^\infty x^{n/3} g^3(x^{2/3})\,\mathrm{d}x\,.$$

Согласно формуле (4.79) характерная величина импульса электрона в атоме растет с ростом Z пропорционально $Z^{2/3}$. Этот результат можно было бы получить более просто (не прибегая к рассмотрению распределения электронов по импульсам), воспользовавшись теоремой вириала и учтя, что характерные расстояния в атоме пропорциональны $Z^{-1/3}$.

Задача 4.60. Найти эффективный (средний) потенциал $\varphi(r)$, действующий на заряженную частицу, пролетающую сквозь невозбужденный атом водорода (пренебрегая поляризацией послед-

него). Получить предельные значения $\varphi(r)$ для больших и малых расстояний частицы от атома.

Решение. Искомый потенциал представляет электростатический потенциал $\varphi(r)$ системы, характеризуемой объемной плотностью заряда вида

$$\rho(\mathbf{r}) = e\,\delta(\mathbf{r}) - e\left|\Psi_0(\mathbf{r})\right|^2, \tag{4.80}$$

где Ψ_0 – волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода;

$\Psi_0(r) = (\pi a^3)^{-1/2} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$; $a = \frac{\hbar^2}{Z e^2 \mu}$ – боровский радиус (для водорода $Z = 1$).

Первое слагаемое в (4.80) описывает плотность заряда, связанную с наличием протона, второе представляет объемную плотность заряда электронного «облака».

Найдем $\varphi(r)$, используя общее решение уравнения Пуассона, известное из электростатики:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}\,\mathrm{d}\mathbf{r}' = \frac{e}{r} - e\int \frac{\left|\Psi_0(\mathbf{r}')\right|}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\,\mathrm{d}\mathbf{r}'. \tag{4.81}$$

С учетом формул

$$\frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} = \begin{cases} \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} p_1(\cos\theta)(\mathrm{r}'/\mathrm{r})^l & \text{при } \mathrm{r}' < \mathrm{r}; \\ \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} p_1(\cos\theta)(\mathrm{r}/\mathrm{r}')^l & \text{при } \mathrm{r}' > \mathrm{r} \end{cases} \tag{4.82}$$

(где θ – угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$), выполняем интегрирование в формуле (4.81), используя сферическую систему координат с полярной осью z вдоль вектора $\mathbf{r}$. При интегрировании по углу θ из сумм, входящих в (4.82), остается только первое слагаемое с $l = 0$ (из-за ортогональности полиномов Лежандра), и (4.81) принимает вид

$$\varphi(r) = \frac{e}{r} - \frac{4e}{a^3}\left\{\frac{1}{r}\int_0^r e^{-2r'/a}(r')^2\,\mathrm{d}r' + \int_r^{\infty} e^{-2r'/a} r'\,\mathrm{d}r'\right\}. \tag{4.83}$$

Выполняя интегрирование в (4.83), находим

$$\varphi(r) = e\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)e^{-2r/a}. \qquad (4.84)$$

Предельные случаи: $\varphi(r) \approx \frac{e}{r}$, $r \to 0$, – кулоновское поле протона;

$\varphi(r) \approx \frac{l}{a}e^{-2r/a}$, $r \to \infty$ – практически полная экранировка протона электроном.

Задача 4.61. Получить выражение для энергии $E_0(R)$ основного терма молекулярного иона водорода H_2^+ вариационным методом, проаппроксимировав волновую функцию терма функцией вида

$$\Psi_{\text{проб}}(r) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi R^3}}\, e^{-\alpha r/R},$$

где r – расстояние электрона от центра отрезка, соединяющего ядра – протоны; α – вариационный параметр.

Выбрав в полученном выражении $E_0(R, \alpha)$ параметр $\alpha = 1{,}9$ (при таком значении α функция двух переменных $E_0(R, \alpha)$ имеет абсолютный минимум при некотором R_0, которое следует определить), найти размер иона (R_0 – расстояние между ядрами иона в положении равновесия), минимальную энергию терма E_0 и энергию нулевых колебаний ядер – протонов иона $E_{\text{кол},0}$. Сравнить полученные результаты с экспериментальными данными $R_0 \approx 2{,}0$ ат. ед., $E_{\text{кол},0} \approx 0{,}0044$ ат. ед.

Можно ли на основании решения данной задачи сделать вывод о существовании стабильного иона H_2^+?

Решение. Среднее значение оператора Гамильтона, записанное в атомных единицах $\hbar = m = 1$:

$$\hat{H}_{\text{эл}} = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}/2|} - \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{R}/2|} + \frac{1}{|\mathbf{R}|},$$

в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi_{\text{проб}}(r)$, равно

$$E_0(R, \alpha) = \overline{\hat{H}}_{\text{эл}} = \frac{\alpha^2}{2R^2} - \frac{1}{R}\left[3 - 2(2 + \alpha)e^{-\alpha}\right]. \qquad (4.85)$$

Учитывая, что пробная функция имеет вид «водородной» функции, для средних $\overline{|\mathbf{R}|}$ и $\overline{|\mathbf{r} \pm \mathbf{R}/2|^{-1}}$, можно использовать хорошо известные значения. В частности, $\overline{|\mathbf{r} \pm \mathbf{R}/2|^{-1}}$ определяется с использованием формулы (4.84), если в ней принять $r = R/2$, $a = R/\alpha$, $l = 1$ и вычесть слагаемое $2/R$, описывающее потенциал ядра:

$$\overline{|\mathbf{r} \pm \mathbf{R}/2|^{-1}} = [\,2 - (2 + \alpha)\, e^{-\alpha}\,]/R.$$

Выражение (4.85) в соответствии с общей идеей вариационного метода можно рассматривать как некоторое приближенное значение истинной энергии $E_0(R)$ основного терма, причем наилучшее приближение получается при таком выборе параметра α, при котором это выражение принимает минимальное значение (как функция переменной α; значение $\alpha(R)$ определяется условием $\partial E_0(R, \alpha)/\partial\alpha = 0$ и является функцией переменной R). Ограничившись указанным в условии задачи значением $\alpha = 1{,}9$, имеем, согласно (4.85), приближенное выражение для энергии основного терма иона H_2^+ вида

$$E_0(R) = \frac{1{,}80}{R^2} - \frac{1{,}83}{R}. \qquad (4.86)$$

С помощью (4.86) находим искомые характеристики терма: $R_0 = 1{,}97$ ат. ед. (из условия $\partial E_0(R_0)/\partial R = 0$), $E_0 \equiv E_0(R_0) - 0{,}47$ ат. ед.,

$$E_{\text{кол},0} = \omega_l/2 = \frac{1}{2}\sqrt{E_0''(R_0)\,(2m_l/m_p)} = 0{,}008 \text{ ат. ед.}$$

В рассматриваемом приближении значение $E_0 = -0{,}47$ ат. ед. выше энергии основного состояния атома водорода, равной $-0{,}50$ ат. ед., и нельзя сделать вывод о существовании устойчивого иона. Значительное расхождение рассчитанного и экспериментального значений энергии нулевых колебаний ядер $H^+{}_2$ – протонов легко объяснить тем, что при расчетах не проводилось варьирование параметра α, и поэтому график зависимости $E_0(R)$ из выражения (4.86) вблизи точки минимума R_0 идет вверх более круто, чем график более точной зависимости, получаемой из (4.85) при варьировании α. Это приводит к завышенному значению величины $E_0''(R_0)$, а с нею и энергии нулевых колебаний.

4.8. Теория рассеяния. Борновское приближение

Основными характеристиками рассеяния частиц являются амплитуда рассеяния f и дифференциальное сечение рассеяния $\mathrm{d}\sigma = \left| f^2 \right| \mathrm{d}\Omega$, где $\mathrm{d}\Omega$ – элемент телесного угла. При этом полное сечение рассеяния

$$\sigma = \int \left| f \right|^2 \mathrm{d}\Omega.$$

Задача 4.62. Показать, что амплитуда рассеяния частицы в произвольном внешнем поле может быть выражена через волновую функцию в области действия потенциала:

$$f(\mathbf{k}_0, \mathbf{k}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \psi^{+}_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{r})\, \mathrm{d}V,$$

где $\mathbf{k}_0$, $\mathbf{k}$ – волновые векторы частицы до и после рассеяния; $\psi^{(+)}_{\mathbf{k}_0}$ – волновая функция, имеющая при $r \to \infty$ асимптотическое поведение вида

$$\psi^{+}_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{r}) \approx e^{-i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} + \frac{f(\mathbf{k}_0, \mathbf{k})}{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Решение. Отыскание решения уравнения Шредингера $(k = \sqrt{2mE/\hbar^2} > 0)$

$$\left[\Delta + k^2\right] \psi^{(+)}_{\mathbf{k}_0} = \frac{2m}{\hbar^2} U(\mathbf{r}) \psi^{+}_{\mathbf{k}_0},$$

имеющего приведенную в условии задачи асимптотику при $r \to \infty$, эквивалентно решению интегрального уравнения

$$\psi^{(+)}_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_0\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \frac{e^{i\mathbf{k}\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} U(\mathbf{r}') \psi^{(+)}_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{r}')\, \mathrm{d}V'. \qquad (4.87)$$

Переход от дифференциальной формы уравнения Шредингера к интегральной осуществляется стандартным образом с помощью функции Грина $G^{(+)}_E$ уравнения Шредингера для свободных частиц, имеющей вид

$$G_E^{(+)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\,\mathbf{k}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|};$$

$$(\Delta + k^2) G_E^{(+)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

При $r \to \infty$ имеем

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{i\,\mathbf{k}\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r} e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{r}} e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{r}'}, \quad \mathbf{k} = k\frac{\mathbf{r}}{r},$$

и соотношение (4.87) принимает вид

$$\psi_{\mathbf{k}}^{(+)}(\mathbf{r}) \approx e^{i\,\mathbf{k}_0\,\mathbf{r}} + \frac{1}{r} e^{i\,k\,r} \left(-\frac{m}{2\,\pi\,\hbar^2} \right) \int e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{r}'}\, U(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}_0}^{(+)}(\mathbf{r}')\, \mathrm{d}V', \qquad (4.88)$$

из которого и вытекает приведенное в условии задачи представление амплитуды рассеяния, удобное для различных приближенных расчетов. Так, при $\psi_{\mathbf{k}_0}^{(+)} \approx e^{i\,\mathbf{k}_0\,\mathbf{r}}$ из (4.88) получаем амплитуду рассеяния в первом борновском приближении.

Задача 4.63. Найти в борновском приближении амплитуду рассеяния и полное сечение рассеяния частиц в полях $U(r)$, указанных ниже. Исследовать предельные случаи малых и больших энергий частиц. Указать условия применимости рассмотрения:

а) $U(r) = \alpha\,\delta\,(r-R)$; б) $U(r) = U_0\, e^{-\frac{r}{R}}$;

в) $U(r) = \dfrac{\alpha}{r} e^{-\frac{r}{R}}$; г) $U(r) = \dfrac{\alpha}{r^2}$;

д) $U(r) = \begin{cases} U_0, & \text{при} \quad r < R, \\ 0 & \text{при} \quad r < R; \end{cases}$ е) $U(r) = U_0\, e^{-\frac{r^2}{R^2}}$.

Решение. В борновском приближении расчет амплитуды рассеяния сводится к вычислению интеграла

$$f = -\frac{m}{2\,\pi\,\hbar^2} \int e^{-i\,\mathbf{q}\,\mathbf{r}} U(r)\, \mathrm{d}V = \frac{i\,m}{\hbar^2\, q} \int_0^\infty U(r) \left[e^{i\,q\,r} - e^{-i\,q\,r} \right] r\, \mathrm{d}r. \qquad (4.89)$$

Так как $\mathrm{d}\sigma = |f|^2\, \mathrm{d}\Omega$, то полное сечение рассеяния в борновском приближении

$$\sigma(E)=\int|f|^2\,\mathrm{d}\Omega=2\pi\int_0^{\pi}|f|^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi\hbar^2}{2mE}\int_0^{8mE/\hbar^2}f^2(q)\,\mathrm{d}q^2 \qquad (4.90)$$

(напомним, что $\mathbf{q}=\mathbf{k}-\mathbf{k}_0$, $\quad q=2k\sin(\theta/2)$).

Ниже приведено вычисление интегралов (4.89) и (4.90) в разных полях.

В поле *а*

$$f=-\frac{2m\,\alpha\,R^2}{\hbar^2}\frac{\sin q\,R}{q\,R};\quad \sigma(E)=\frac{4\pi\,m\,\alpha^2R^2}{\hbar^2\,E}\int_0^{\sqrt{\frac{8m\,E\,R^2}{\hbar^2}}}\frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Интеграл, определяющий $\sigma(E)$, не выражается через элементарные функции (его можно выразить через интегральный синус).

Предельные случаи малых $(k\,R<<1)$ и больших $(k\,R>>1)$ энергий:

$$\underset{E\to 0}{\sigma(E)}\approx\frac{16\pi\,m^2\,\alpha^2\,R^4}{\hbar^4};\qquad \underset{E\to\infty}{\sigma(E)}\approx\frac{\pi\,m\,\alpha^2\,R^2}{\hbar^2\,E}\ln\frac{8m\,E\,R^2}{\hbar^2}$$

(при $E\to\infty$ интеграл в выражении для $\sigma(E)$ расходится; для его вычисления следует заменить осциллирующий множитель $\sin^2 x$ средним значением, равным 1/2).

Условием применимости полученных выражений является выполнение хотя бы одного из двух неравенств: $m\,R\,|\,\alpha\,|<<\hbar^2$ или $|\,\alpha\,|<<\hbar\,v$.

В поле *б*

$$f=\frac{4m\,U_0R^3}{\hbar^2\left(1+q^2\,R^2\right)^2};\qquad \sigma(E)=\frac{8\pi\,m\,R^4U_0^2}{3\hbar^2\,E}\left[1-\frac{1}{\left(1+\frac{8m\,E\,R^2}{\hbar^2}\right)^3}\right];$$

$$\underset{E\to 0}{\sigma(E)}\approx\frac{64\pi\,m^2\,R^6\,U_0^2}{\hbar^4};\qquad \underset{E\to\infty}{\sigma(E)}\approx\frac{8\pi\,m\,R^4\,U_0^2}{3\hbar^2\,E}.$$

Условия применимости: $m\,R^2\,|\,U_0\,|<<\hbar^2$ или $R\,|\,U_0\,|<<\hbar\,v$.

В поле *в*

$$f=-\frac{2m\,\alpha\,R^2}{\hbar^2(1+q^2R^2)};\quad \sigma(E)=16\pi\left(\frac{m\,\alpha\,R^2}{\hbar^2}\right)^2\frac{1}{1+\dfrac{8m\,R^2E}{\hbar^2}};$$

$$\underset{E\to 0}{\sigma(E)}\approx 16\pi\left(\frac{m\,\alpha\,R^2}{\hbar^2}\right)^2;\quad \underset{E\to\infty}{\sigma(E)}\approx\frac{2\pi\,m\,\alpha^2\,R^2}{\hbar^2E}.$$

Условия применимости: $m\,R|\ \alpha\ |<<\hbar^2$ или $|\,\alpha\,|<<\hbar\,v$.

В поле *г*

$$f=-\frac{\pi\,m\,\alpha}{\hbar^2q};\ \text{условие применимости: } m\,|\,\alpha\,|<<\hbar^2.$$

Полное сечение рассеяния равно бесконечности из-за медленного убывания потенциала на больших расстояниях $r\to\infty$.

В поле *д*

$$f=\frac{2m\,U_0}{\hbar^2}\left[\frac{R\cos(q\,R)}{q^2}-\frac{\sin(q\,R)}{q^3}\right];$$

$$\sigma\left(E=\frac{\hbar^2\,k^2}{2m}\right)=\frac{2\pi}{k^2}\left(\frac{m\,U_0\,R^2}{\hbar^2}\right)^2\left[1-\frac{1}{(2k\,R)^2}+\frac{\sin(4k\,R)}{(2k\,R)^3}-\frac{\sin^2(2k\,R)}{(2k\,R)^4}\right];$$

$$\underset{E\to 0}{\sigma(E)}\approx\frac{16\pi\,m^2U_0^2\,R^6}{9\hbar^4};\quad \underset{E\to\infty}{\sigma(E)}\approx\frac{\pi\,m\,U_0^2\,R^4}{\hbar^2\,E}.$$

Условие применимости: $m\,R^2|\,U_0\,|<<\hbar^2$ или $R\,|\,U_0\,|<<\hbar\,v$.

В поле *е*

$$f=-\frac{\sqrt{\pi}\,m\,U_0R^3}{2\hbar^2}\,e^{-\frac{q^2R^2}{4}};$$

$$\sigma(E)=\frac{\pi^2\,m\,U_0^2\,R^4}{4\hbar^2\,E}\left[1-\exp\left(-\frac{4m\,E\,R^2}{\hbar^2}\right)\right];$$

$$\underset{E\to 0}{\sigma(E)}\approx\frac{\pi^2\,m^2\,U_0^2R^6}{\hbar^4};\quad \underset{E\to\infty}{\sigma(E)}\approx\frac{\pi^2\,m\,U_0^2R^4}{4\hbar^2\,E}.$$

Условие применимости: $m\,R^2|\,U_0\,|<<\hbar^2$ или $R\,|\,U_0\,|<<\hbar\,v$.

Так как в рассматриваемом случае борновская амплитуда убывает при больших q^2 экспоненциально, то при достаточно больших зна-

чениях q^2 борновское приближение неприменимо. Соответственно в выражении для полного сечения рассеяния учет экспоненциально малого слагаемого является превышением точности.

Задача 4.64. Найти точные значения фазовых сдвигов *s*-волн в поле:

$$U(r) = \begin{cases} \infty \text{ при } & r < R; \\ 0 \text{ при } & r > R. \end{cases}$$

Используя полученные результаты, найти для указанного поля сечение рассеяния медленных частиц. Указать условия применимости полученных выражений.

Решение. Для вычисления фазового сдвига *s*-волны необходимо найти сферически-симметричное (так как $l = 0$) решение уравнения Шредингера, асимптотика которого $\psi_0(r) \sim \frac{1}{r}\sin(kr + \delta_0)$ при $r \to \infty$ дает искомое значение $\delta_0(k)$.

Уравнение Шредингера при $r > R$ для функции $\chi(r)$, связанной с волновой функцией Ψ_0 соотношением $\chi = r\Psi_0$, и его решение, удовлетворяющее граничному условию $\chi(R) = 0$, имеют вид

$$\chi'' + k^2\chi = 0; \quad \chi(r) = A\sin[\,k\,(r - R)\,]. \tag{4.91}$$

Из (4.91) следует: $\delta_0(k) = -k\,R$.

5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

5.1. Основные положения термодинамики

Состояния любой термодинамической системы могут быть заданы с помощью ряда внешних и внутренних параметров. Внешние параметры – величины, определяющие положение внешних тел, функции обобщенных координат внешних тел, с которыми взаимодействует рассматриваемая система. Внутренние параметры системы – любые функции координат и скоростей молекул, входящих в систему координат внешних тел. Для характеристики состояния системы необходимо задать еще температуру системы.

Состоянием термодинамического равновесия называется состояние, в которое с течением времени приходит система, находящаяся при определенных внешних условиях (например, для газа, находящегося в сосуде, внешними параметрами являются объем сосуда и температура стенок сосуда).

При термодинамическом равновесии все внутренние параметры системы – функции внешних параметров и температуры. При равновесии энергия будет функцией внешних параметров и температуры. Поэтому все внутренние параметры системы – функции внешних параметров и энергии системы.

Основные термодинамические параметры – объем V, давление p, температура T. Давление газа на стенки сосуда – внутренний параметр, объем сосуда V и температура стенок сосуда T – внешние параметры.

При наличии внешних полей внешними параметрами являются напряженность электрического E и магнитного H полей и т.д.

Связь между параметрами устанавливается уравнениями состояния.

Пример 5.1. Уравнение состояния для идеального газа имеет вид

$$pV = RT,$$

для реальных газов лучшим приближением является уравнение Ван дер Ваальса

$$(p + a/V^2)(V - b) = RT.$$

Общий вид уравнения состояния

$$f(p,V,T) = 0.$$

Первое начало выражает принцип сохранения энергии:

$$dU = \delta Q - \delta A, \qquad (5.1)$$

где U – внутренняя энергия системы, являющаяся функцией состояния:

$$U = U(p,V,T,...);$$

A – работа, совершаемая системой при изменении состояния системы.

$\delta A < 0$, если работа совершается внешними телами над системой. Работа отлична от нуля только при перемещении внешних тел. Работа расширения газа $\delta A = p\mathrm{d}V$. В общем случае $\delta A = X_i \mathrm{d}x_i$, где X_i и x_i – обобщенные силы и обобщенные координаты:

$$X_i \mathrm{d}x_i = \begin{cases} p\mathrm{d}V, \\ F\mathrm{d}r, \\ M\mathrm{d}\varphi, \end{cases}$$

где F – сила; M – момент количества движения.

Так же, как и работа δA, количество теплоты δQ, полученное системой, не является полным дифференциалом и зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое.

Второе начало. Одна из формулировок: невозможно перенести тепло от менее нагретого тела к более нагретому без каких-либо изменений в окружающих телах.

Для обратимых (равновесных или квазистатических) процессов из данной формулировки следует существование функции состояния системы – энтропии:

$$\mathrm{d}S = \delta Q/T. \qquad (5.2)$$

Температура, таким образом, является интегрирующим множителем. Энтропия системы в термодинамике вводится чисто формально как функция состояния: $S = S(p,V,T)$.

Для замкнутого обратимого процесса

$$\mathrm{d}Q/T = 0 \text{ (равенство Клаузиуса).} \qquad (5.3)$$

Третье начало. При $T \to 0$ энтропия системы стремится к нулю. В формальной термодинамике третье начало – эмпирический закон. Обоснование его следует из законов квантовой статистики. Часто третье начало формулируют как принцип недостижимости абсолютного нуля, что следует из условия $S = 0$ при $T = 0$. Если $S = 0$, то можно построить

вечный двигатель второго рода с помощью цикла из двух адиабат $S = S_1$ и $S = S_2$, соединенных изотермой $T = 0$, на которой $S = 0$.

5.1.1. Основные соотношения равновесной термодинамики

Изменение состояния системы может происходить различными способами: при $T = \text{const}$, $V = \text{const}$, $p = \text{const}$ и т.д. Для описания различных процессов вводится целый класс функций состояния – термодинамических потенциалов.

Объединив уравнения (5.1) и (5.2), можно получить совместную запись I и II начал термодинамики в виде

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V \tag{5.4}$$

или в более общем виде

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - \sum X_i \mathrm{d}x_i - p\mathrm{d}V. \tag{5.4a}$$

5.1.2. Свободная энергия

Эта функция состояния вводится, когда в качестве внешних параметров выбраны V и T. Используя преобразование Лежандра, получаем

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}(TS) - S\mathrm{d}T.$$

Запишем (5.4) в виде

$$\mathrm{d}(TS) - S\mathrm{d}T = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V;$$
$$\mathrm{d}(U - TS) = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V.$$

Функция $\Psi = U - TS$ называется свободной энергией Гельмгольца:

$$\mathrm{d}\Psi = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V. \tag{5.5}$$

При наличии внешних полей

$$\mathrm{d}\Psi = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V - \sum X_i \mathrm{d}x_i.$$

Смысл свободной энергии при $T = \text{const}$:

$$\mathrm{d}\Psi = -p\mathrm{d}V = -\delta A,$$

т.е. Ψ равна работе внешних сил при изотермическом процессе.

5.1.3. Термодинамический потенциал (свободная энергия Гиббса)

Совершая преобразование

$$p\mathrm{d}V = \mathrm{d}(pV) - V\mathrm{d}p,$$

получаем

$$\mathrm{d}(\Psi + pV) = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p. \qquad (5.6)$$

Функция $\Phi(p, T) = \Psi + pV$ – свободная энергия Гиббса, или термодинамический потенциал. При $p = \mathrm{const}$ (изобарический процесс)

$$\mathrm{d}\Phi = -S\mathrm{d}T = -\mathrm{d}Q.$$

В случаях, когда в качестве внешних параметров удобно пользоваться внешним давлением и температурой, вводится *энтальпия*:

$$\begin{gathered} H = U + pV; \\ \mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V - V\mathrm{d}p; \\ \mathrm{d}Q = \mathrm{d}(U + pV) - V\mathrm{d}p; \\ \mathrm{d}H = \mathrm{d}Q + V\mathrm{d}p = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p. \end{gathered} \qquad (5.7)$$

Из определения термодинамических потенциалов и их дифференциалов следует ряд соотношений:

а) $p = T(\partial S/\partial V)_U$, $T = (\partial U/\partial S)_V$,

$p = (\partial\Psi/\partial V)_T$, $S = -(\partial\Psi/\partial T)_V$,

$S = -(\partial\Phi/\partial T)_p$, $V = (\partial\Phi/\partial p)_T$,

$C_V = T(\partial S/\partial T)_V = -T(\partial^2\Psi/\partial T^2)_V$,

$C_p = T(\partial S/\partial T)_p = -T(\partial^2\Phi/\partial T^2)_p$,

где C_V и C_p – теплоемкости соответственно при постоянном объеме и давлении:

$$k_S = (1/V)(\partial V/\partial p)_S = (1/V)(\partial^2 H/\partial p^2)_S;$$
$$k_T = (1/V)(\partial V/\partial p)_T = (1/V)(\partial^2\Psi/\partial p^2)_T,$$

где k_S и k_T – адиабатическая и изотермическая сжимаемости;

б) уравнение Гиббса–Гельмгольца

$$U = \Psi - T(\partial\Psi/\partial T)_V = -T^2(\partial/\partial T)(\Psi/T)_V.$$

Дифференциальные соотношения для термодинамических потенциалов можно обобщить на случай систем с переменным числом частиц. Например, для однокомпонентной системы

$$\mathrm{d}\Phi = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p + \mu\mathrm{d}N,$$

где μ – химический потенциал; N – число частиц (молекул) в системе.

При T = const, p = const $\Phi = \mu N$ и μ имеет смысл термодинамического потенциала, приходящегося на одну молекулу.

Задача 5.1. Вычислить основные термодинамические потенциалы классического идеального газа, считая теплоемкость C_V постоянной.

Решение. По определению молярная теплоемкость

$$C_V = (1/\upsilon)(\delta Q/\delta T)_V = (1/\upsilon)(\partial U/\partial T)_V,$$

где υ – число молей.

Отсюда следует: $U = \upsilon C_V T + U_0$. Энтропию находят из дифференциального равенства $dS = (1/T)dU + (1/T)p dV$:

$$S = \upsilon(C_V/T)dT + (p/T)dV = \upsilon C_V \ln T + \upsilon R \ln V + S_0.$$

При интегрировании второго интеграла по объему мы использовали уравнение состояния идеального газа: $pV = \upsilon RT$.

Свободная энергия

$$\Psi = U - TS = \upsilon C_V T - \upsilon C_V T \ln T - \upsilon RT \ln V + U_0 - TS.$$

Термодинамический потенциал

$$\Phi = \Psi + pV = \upsilon C_p T - \upsilon C_p T \ln T + \upsilon R T \ln p - \upsilon R T \ln R + U_0 - TS_0.$$

Энтальпия

$$H = U + pV = \upsilon C_P T + U_0.$$

Как определить постоянные интегрирования U_0 и S_0?

U_0 есть внутренняя энергия идеального газа при абсолютном нуле, и с точки зрения классической физики $U_0 = 0$. Для определения константы S_0 неприменимо третье начало термодинамики, так как при $T \to 0$ $S \to 0$, что бессмысленно. Такой результат получился из-за того, что при низких температурах поведение газа описывается законами квантовой механики с иным уравнением состояния, причем теплоемкость перестает быть постоянной и при $T \to 0$ $C_V \to 0$.

Но если не интересоваться абсолютной величиной термодинамических потенциалов, то при достаточно высоких температурах, когда применима классическая механика для описания движения частиц идеального газа, можно использовать полученные формулы для нахождения изменения термодинамических величин при изменении внешних параметров.

Задача 5.2. Два одинаковых идеальных газа находятся в объемах V_1 иV_2 в количестве υ_1 и υ_2 молей, температура газов T_1 и T_2. Затем сосуды соединяются. Найти изменение энтропии. Сосуды теплоизолированы от окружающей среды.

Решение. Энтропия системы до соединения сосудов $S_{\mathrm{I}} = \upsilon_1 C_V \ln T_1 + \upsilon_2 C_V \ln T_2 + \upsilon_1 R \ln V_1 + \upsilon_2 R \ln V_2 + 2S_0$. Температура газа T после соединения сосудов может быть найдена из закона сохранения энергии: $\upsilon_1 C_V T_1 + \upsilon_2 C_V T_2 = (\upsilon_1 + \upsilon_2) C_V T$; $T = (\upsilon_1 T_1 + \upsilon_2 T_2)/(\upsilon_1 + \upsilon_2)$.

Энтропия газа после соединения сосудов:

$$S_{\mathrm{II}} = (\upsilon_1 + \upsilon_2) C_V \ln T + (\upsilon_1 + \upsilon_2) R \ln [(V_1 + V_2)/2].$$

Изменение энтропии

$$\Delta S = S_{\mathrm{I}} - S_{\mathrm{II}}.$$

При вычислении энтропии газа после соединения сосудов вместо полного объема системы $V_1 + V_2$ следует брать половинный объем системы $(V_1 + V_2)/2$, чтобы учесть тождественность частиц газа в обоих сосудах. Если в сосудах до соединения были разные газы, то следует брать полный объем.

Задача 5.3. Найти основные термодинамические потенциалы фотонного газа.

Решение. Фотонный газ – это равновесное тепловое излучение в замкнутой полости, нагретой до температуры T. Уравнение состояния фотонного газа следует из закона Стефана – Больцмана для плотности энергии излучения абсолютно черного тела: $U/V = \sigma T^4$. Свободная энергия может быть найдена с помощью соотношения Гиббса – Гельмгольца:

$$\Psi/T = -\int \sigma T^2 \mathrm{d}T = -1/3\sigma T^3 V + S_0;\ \Psi = -1/3\sigma T^4 V + TS_0. \qquad (5.8)$$

Энтропия фотонного газа

$$S = -(\partial\Psi/\partial T)_V = (4/3)\,\sigma T^3 V + S_0;$$

фотонный газ – это квантовый релятивистский газ, к которому применимо третье начало термодинамики, поэтому получаем

$$S_0 = 0. \qquad (5.9)$$

Давление фотонного газа

$$p = -(\partial\Psi/\partial T)_T = (1/3)\,\sigma T^4 = (1/3)U/V. \qquad (5.10)$$

Из выражений (5.8) – (5.10) следует, что термодинамический потенциал

$$\Phi = \Psi + pV = 0,$$

отсюда и $\mu = 0$.

Тождественное равенство $\Phi = 0$ не случайно и всегда выполняется для систем с переменным числом частиц, зависящим от температуры: количество фотонов в равновесном излучении возрастает с ростом температуры. Энтальпия фотонного газа $H = U + pV = (4/3)\,\sigma T^4 V$.

5.2. Необходимые понятия теории вероятностей

Вероятность данного события определяется относительной частотой его появления. Вероятность i-го состояния системы определяется как предел отношения времени t, в течение которого система находится в этом состоянии, к полному времени наблюдения при неограниченном возрастании последнего: $W = \lim (t/T)$, $T \to \infty$.

Пусть в i-м состоянии величина F имеет значение F_i. Величина W, таким образом, характеризует вероятность данного значения величины F_i.

Рассмотрим случай, когда состояние системы меняется непрерывным образом. В этом случае определение теряет смысл, так как в состоянии, в котором величина F имеет определенное значение F_i, система будет проводить бесконечно малое время. Поэтому для непрерывно изменяющихся величин необходимо говорить об определенном интервале значений этой величины – о вероятности того, что F имеет значения, лежащие в интервале от F до $F + \mathrm{d}F$. Эта вероятность, очевидно, равна $\mathrm{d}W = \lim (\Delta t/T)$, где Δt – время, в течение которого система находится в состоянии, соответствующем интервалу значений от F до $F + \mathrm{d}F$. Ее удобно представить в виде $\mathrm{d}W = \rho(F)\mathrm{d}F$, где $\rho(F)$ – вероятность или функция распределения.

Закон сложения вероятностей. Вероятность нахождения системы в одном из двух исключающих друг друга состояниях равна сумме вероятностей нахождения системы в каждом из состояний: $W = W_i + W_j + W_k$, если состояния i, j, k взаимно исключают друг друга.

Закон умножения вероятностей (для статистически независимых событий). Если системы α, β, γ,... независимы друг от друга и W_i, W_j, W_k – вероятности состояния этих систем, то полная вероятность того, что система α находится с состоянии i, система β – в состоянии j, система γ – в состоянии k и т.д., равна произведению вероятностей: $W = W_i W_j W_k$.

Условие нормировки. Очевидно, что вероятность нахождения системы в произвольном допустимом состоянии равна единице:

$$\mathrm{d}W = \rho(F)\mathrm{d}F = 1.$$

Статистическое среднее (математическое ожидание). Если F_i – значение величины F; N_i – число измерений, приводящих к этому значению; N – полное число измерений, то математическое ожидание определяется как

$$F = \lim(\sum F_i N_i)/N.$$

Для величин, изменяющихся непрерывно, аналогичные выражения будут иметь вид

$$\mathrm{d}F = F\mathrm{d}W = F\rho(F)\mathrm{d}F.$$

Среднее значение отклонения от среднего значения случайной величины F равно нулю: $\overline{\Delta F} = \overline{F - \overline{F}} = 0$, а критерием отклонений от среднего является среднее квадратичное отклонение (дисперсия) или квадратичная флуктуация: $\overline{\Delta F^2} = \overline{\left(F - \overline{F}\right)^2} = F^2 - \overline{F^2}$. Относительная флуктуация

$$\delta = \left[\overline{\Delta F^2} / \overline{F^2}\right]^{1/2}.$$

Величина $\overline{F^n} = \int F^n \rho(F)\mathrm{d}F$ называется n-м моментом распределения. Величина $\overline{\left(F - \overline{F}\right)^n} = \int \left(F - \overline{F}\right)^n \rho(F)\mathrm{d}F$ называется n-м центральным моментом. Величина $\overline{\left(F - \overline{F}\right)^2} = \overline{\Delta F^2} = \int \left(F - \overline{F}\right)^2 \rho(F)\mathrm{d}F$ называется вторым центральным моментом или дисперсией. Если имеются две случайные величины a и b, то между ними (и их функциями) возможна статистическая связь, или корреляция, определяемая соотношением $\overline{\left(a - \overline{a}\right)\left(b - \overline{b}\right)} = \overline{ab} - \overline{a}\,\overline{b}$. Если a и b статистически независимы, то $\overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$ и корреляция равна нулю.

Если система состоит из N независимых частей, то относительная флуктуация любой аддитивной функции состояния системы обратно пропорциональна корню из N: $\left[\overline{\Delta F^2} / \overline{F^2}\right]^{1/2} \sim 1/N^{1/2}$.

Действительно, для аддитивной величины $F = \sum F_i$:

$$F = \sum F_i \sim N;\ \Delta F^2 = \overline{\sum_i \left(\Delta F_i\right)^2} + \overline{\sum_{i,j} \Delta F_i \Delta F_j}\ .$$

Для независимых величин $\Delta F_i \Delta F_j = 0$ и $\Delta F^2 = \overline{\sum_i \left(\Delta F_i\right)^2} \sim N$.

Таким образом, $\left[\overline{\Delta F^2} / \overline{F^2}\right]^{1/2} \sim N^{1/2}/N \sim 1/N^{1/2}$.

Задача 5.4. Найти среднюю скорость и средний модуль скорости молекулы идеального газа.

Решение. Из кинетической теории газов известно, что распределение Максвелла как функция модуля скорости имеет вид

$$f(v)\mathrm{d}v = 4\pi[m/(2\pi kT)]^{3/2}(1/V)\exp[-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/(2kT)]\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z,$$

а распределение по компонентам скоростей

$$\mathrm{d}w = (1/V)[m/(2\pi kT)]^{3/2}\exp[-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/(2kT)]\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z.$$

Тогда

$$v = (m/2\pi kT)^{3/2}(1/V)\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k})\times$$
$$\times\exp\left[-mv^2/(2\pi kT)\right] = 0\,.$$

Интеграл по скоростям обращается в нуль из-за нечетности подынтегральной функции. Этот результат имеет ясный физический смысл: при хаотическом движении молекул газа количество частиц, движущихся в противоположных направлениях с одинаковой скоростью, одинаково для обоих направлений движения. Но среднее значение абсолютного значения скорости не равно нулю. Напишем интеграл по пространству скоростей в сферической системе координат:

$$\left|\overline{v}\right| = \left(m/\left(2\pi kT\right)\right)^{3/2}\left(1/V\right)\int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} v\exp\left[-mv^2/\left(2kT\right)\right]v^2\mathrm{d}v\sin\Theta\,\mathrm{d}\Theta\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left(m/\left(2kT\right)\right)^{3/2}4\pi\int_0^{+\infty}\exp\left[-mv^2/\left(2kT\right)\right]v^2\mathrm{d}\left(v^2/2\right) = \left(8kT/\left(\pi m\right)\right)^{1/2}.$$

Интеграл по координатам при усреднении с распределением Максвелла дает множитель V – физический объем системы, который сокращается с множителем $1/V$ в нормирующем множителе.

Задача 5.5. Найти среднее значение энергии ε и среднеквадратичную флуктуацию энергии молекулы идеального газа.

Решение. Среднее значение энергии

$$\overline{\varepsilon} = \left(m/\left(2\pi kT\right)\right)^{3/2} 4\pi \int_0^{+\infty} \left(mv^2/2\right)\exp\left[-mv^2/\left(2kT\right)\right]v^2 \mathrm{d}v = (3/2)kT.$$

При интегрировании мы использовали формулу

$$\int_0^{+\infty} x^{2k} \exp\left(-\alpha x^2\right)\mathrm{d}x = (1/2)\,(\partial^k/\partial(-\alpha)^k)(\pi/\alpha)^{1/2},$$

при $k = 2$ получаем $\int_0^{+\infty} x^4 \exp\left(-\alpha x^2\right)\mathrm{d}x = (3/8)\pi/\alpha^{5/2}$;

$$\overline{\varepsilon^2} = \left[m/\left(2\pi kT\right)\right]^{3/2} 4\pi \int_0^{+\infty} \left(m^2v^4/4\right)\exp\left[-mv^2/\left(2kT\right)\right]v^2 \mathrm{d}v = \left(15k^2T^2\right)/4.$$

Среднеквадратичная флуктуация (дисперсия) энергии

$\overline{\varepsilon^2} - \overline{\varepsilon}^2 = (15k^2T^2)/4 - (9k^2T^2)/4 = (3k^2T^2)/2.$

Задача 5.6. Определить наиболее вероятную скорость и наиболее вероятную энергию молекулы идеального газа.

Решение. Распределение Максвелла как функция модуля скорости частиц на графике (рис. 5.1) имеет вид кривой с максимумом.

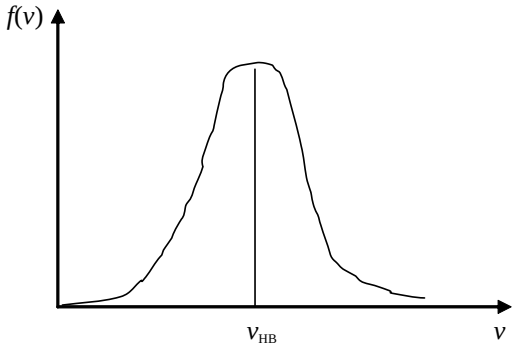

Рис. 5.1

Наиболее вероятная скорость $v_{нв}$ соответствует максимуму распределения Максвелла и находится из условия $df(v)/dv = -[mv^3/(kT)] + 2v = 0$:

$$v_{нв} = (2kT/m)^{1/2};\ \varepsilon_{нв} = mv_{нв}^2/2 = kT.$$

Задача 5.7. Определить среднее число соударений в одну секунду отдельной частицы идеального газа со всеми остальными частицами. Частицы считать абсолютно упругими шариками радиусом R.

Решение. Будем считать все молекулы, кроме выделенной, неподвижными. Это всегда можно сделать, так как при рассмотрении столкновения двух частиц одну из них можно считать неподвижной, а другую движущейся с относительной скоростью $v_{отн}$ и имеющей приведенную массу $\mu = m/2$. Скорость выделенной частицы описывается распределением Максвелла с массой $\mu = m/2$. Число столкновений в 1 с равно числу частиц, находящихся в цилиндре с площадью основания, равной эффективному сечению σ, и высотой, равной скорости относительного движения $v_{отн}$: $I = \rho v_{отн}\sigma$, где ρ – плотность газа. Средняя частота столкновений $I = \rho v_{отн}\sigma = (N/V)(8kT/(\pi\mu))^{1/2}\sigma$. В нашем случае эффективное сечение столкновения равно геометрическому сечению частицы.

Окончательно получаем $I = N/V4[kT/(\pi\mu)]^{1/2}4\pi R^2 = (16R^2N/V)\ldots(\pi kT/m)^{1/2}$.

Задача 5.8. Идеальный газ находится в сосуде под давлением p. Определить скорость истечения газа в вакуум через небольшое отверстие с площадью сечения σ.

Решение. Пусть стенка сосуда с отверстием перпендикулярна оси OX. Скорость истечения газа через отверстие с площадью сечения σ равна потоку газа в 1 с через это отверстие:

$$I = \rho v_x\sigma = (N/V)\sigma[m/(2\pi kT)]^{3/2}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v_x\exp[-mv^2/(2kT)]dv_xdv_ydv_z =$$

$= (N/V)\sigma(kT/(2\pi m))^{1/2}$. Учитывая, что $N/V = p/(kT)$ и $v = [8\pi kT/(\pi m)]^{1/2}$, получаем результат в виде $I = \rho\sigma v/(4kT)$.

Задача 5.9. В сосуде с идеальным газом проделано небольшое отверстие с площадью сечения σ. Найти число частиц, попадающих на круглый диск радиусом R, расположенный на расстоянии h от отверстия. Плоскость диска параллельна плоскости отверстия. Центры отверстия и диска лежат на одном перпендикуляре к плоскости диска.

Решение. Поток частиц, пролетающих через отверстие и вылетающих в интервале углов θ, $\theta + d\theta$,

$$dI(\theta) = (N/V)(m/(2\pi kT))^{3/2} \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} v\cos\theta \exp(-v^2/(2kT))v^2 dv d\varphi \sin\theta\, d\theta =$$

$$= (\sigma/2)(N/V)v \cos\theta \sin\theta\, d\theta.$$

Число частиц, попадающих за 1 с в диск,

$$I = \int_0^{\theta_0} (\sigma/2)(N/V)v \cos\theta \sin\theta\, d\theta = (\sigma/4)(N/V)vR^2/(h^2 + R^2),$$

где $\theta_0 = \mathrm{arctg}\, R/h$.

5.3. Классическая статистическая механика

Рассмотрим консервативную классическую систему из частиц с f степенями свободы. Системе будет соответствовать совокупность f обобщенных координат $q_1, \ldots, q_f$ и обобщенных скоростей $\dot{q}_1,...,\dot{q}_f$.

Функция Лагранжа системы определяется соотношением

$$L(q, \dot{q}) = T - U,$$

где T – кинетическая энергия; U – потенциальная энергия.

Уравнения движения системы могут быть представлены в форме Эйлера – Лагранжа:

$$(d/dt)(\partial L/\partial \dot{q}_i) - \partial L/\partial q_i = 0 \qquad (5.11)$$

при $i = 1, 2, \ldots, f$.

Пример 5.2. Если q_i – декартовы координаты x_i, то уравнение (5.11) выражает второй закон Ньютона: $L = (1/2)\sum m\ddot{x}_i^2 - U$. Из (5.11) следует, что $m\ddot{x}_i = -\partial U/\partial x_i = F_i$ $i = 1, 2, \ldots, f$.

Уравнения движения механической системы могут быть представлены в форме Гамильтона. Уравнения в форме Гамильтона замещают систему f дифференциальных уравнений (5.11) на $2f$ дифференциальных уравнений первого порядка. Обобщенные импульсы определяются соотношением $p_i = \partial L/\partial \dot{q}_i$, а функция Гамильтона

$$H(p_i, q_i) = \sum p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i). \qquad (5.12)$$

Если рассматривать движение в инерциальной системе координат, когда отсутствует магнитное поле, то гамильтониан равен сумме кинетической и потенциальной энергий.

Из уравнений (5.11) и (5.12) непосредственно следуют уравнения Гамильтона в канонической форме:

$$\partial H/\partial p_i = \dot{q}_i\,;\ \partial H/\partial q_i = -\,\dot{p}_i\,. \qquad (5.13)$$

Пример 5.3. Для классического одномерного гармонического осциллятора имеем

$$T = (1/2)m\,\dot{x}^2\,;$$
$$U = (1/2)m\omega^2x^2;$$
$$L = (1/2)m\,\dot{x}^2 - (1/2)m\omega^2x^2.$$

Уравнения Лагранжа принимают вид

$$m\,\ddot{x} + m\omega^2x = 0.$$

Обобщенный импульс

$$p = m\,\dot{x}\,.$$

Гамильтониан

$$H = p\ \dot{x} - (1/2)m\,\dot{x}^2 + (1/2)m\omega^2x^2 = p^2/(2m) + (m\omega^2x^2)/2.$$

Уравнения движения в форме Гамильтона

$$p/m = \dot{x}\ \text{(определение импульса);}$$
$$m\omega^2x = -\,\dot{p} = -m\,\ddot{x}\ \text{(совпадает с уравнением Лагранжа)}$$

имеют интегралы

$$x = x_0\cos(\omega t) + [p_0/(m\omega)]\sin(\omega t);$$
$$p = -\,\omega x_0\sin(\omega t) + (p_0/m)\cos(\omega t).$$

Соответственно, интеграл энергии
$H_i = p^2/(2m) + m\omega^2x^2/2 = E$.

Состояние всей механической системы, имеющей f степеней свободы, можно представить точкой в $2f$-мерном *фазовом пространстве* (p_i, q_i), называемом *Г-пространством*.

Состояние системы из N атомов представляется точкой в $6N$-мерном Г-пространстве переменных p_i и q_i. С течением времени Г-точка будет перемещаться согласно уравнениям движения Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i,\ \ \dot{p}_i = \partial H/\partial q_i,\ i = 1, 2, \ldots, f.$$

Пример 5.4. Идеальный одноатомный газ находится в сосуде прямоугольной формы (рис. 5.2).

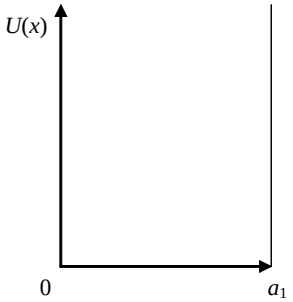

Рис. 5.2

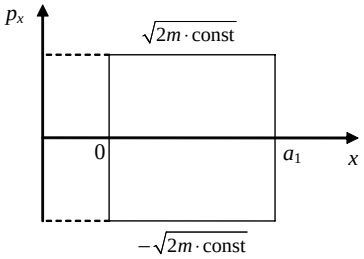

Рис. 5.3

Для такого газа гамильтон

$$H = 1/(2m)\sum(p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2) + \sum[U(x_i) + U(y_i) + U(z_i)].$$

Изоэнергетическая поверхность в 3N-мерном пространстве импульсов определяется уравнением $\sum(p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2) = \text{const}$ и представляет 3N-мерную сферу. След поверхности энергии на двумерной плоскости определяется уравнением (рис. 5.3) $p_{ix}^2/(2m) + U(x) = \text{const}$.

Пример 5.5. Парадокс Гиббса.

Пусть газ помещен в две камеры объемом V_1 и V_2, разделенные в начале непроницаемой перегородкой. Затем перегородка удаляется, и молекулы обеих порций газа начинают взаимно диффундировать. В результате этого процесса произойдет перемешивание газов. Мы будем считать, что температуры и давления газов до смешивания были равны между собой.

Найдем изменение энтропии при смешивании двух порций газа. При этом нужно различать два случая: смешивание различных и одинаковых по своей природе газов.

Начнем с рассмотрения первого случая.

Энтропии различных газов до смешивания даются выражениями

$$S_1^0 = N_1 k\ln(V_1/N_1) + N_1 f(T);$$
$$S_2^0 = N_2 k\ln(V_2/N_2) + N_2 f(T),$$

где $f(T)$ – часть энтропии, не зависящая от объема.

Полная энтропия системы до смешивания

$$S^0 = S_1^0 + S_2^0.$$

После смешивания каждый из идеальных газов будет вести себя так, как будто бы другого газа не было, и занимать весь суммарный объем ($V_1 + V_2$).

Температура смеси будет равна исходной температуре газа. Поэтому после смешивания энтропия каждого из газов будет

$$S_1^0 = N_1 k \ln[(V_1 + V_2)/N_1)] + N_1 f(T);$$
$$S_2^0 = N_2 k \ln[(V_1 + V_2)/N_2)] + N_2 f(T).$$

Энтропия смеси, состоящей из двух невзаимодействующих идеальных газов, равна сумме их энтропий, т.е.

$$S = S_1 + S_2.$$

Изменение полной энтропии всей системы при смешивании

$$\Delta S = S - S^0 = N_1 k \ln[(V_1 + V_2)/N_1)] + N_2 k \ln[(V_1 + V_2)/N_2)] - \\ - N_1 k \ln(V_1/N_1) - N_2 k \ln(V_2/N_2).$$

При данной температуре и давлении

$$(V_1 + V_2)/V_1 = [(N_1 + N_2)kT/p]/(N_1 kT/p) = [(N_1 + N_2)/N_1$$

и аналогично для $(V_1 + V_2)/V_2$, так что изменение энтропии

$$\Delta S = N_1 k \ln[(N_1 + N_2)/N_1)] + N_2 k \ln[(N_1 + N_2)/N_2)].$$

Таким образом, энтропия смеси больше, чем энтропия исходных газов.

Процесс смешивания двух различных газов является необратимым. Происхождение этой необратимости вполне понятно. Когда перегородка, разделяющая газы, удаляется, начинается взаимная диффузия газов. До смешения существовала «правильность» в расположении молекул: молекулы одного газа находились в одной части сосуда, молекулы второго газа – в другой.

После того как в результате диффузии полностью перемешаются оба газа, наступит равномерное, совершенно хаотическое распределение молекул и вероятность состояния увеличится. Для обратного разделения газов необходимо затратить некоторую работу, которую в принципе можно вычислить.

Рассмотрим теперь процесс смешивания двух порций одинаковых газов. Газы могут считаться одинаковыми в том случае, когда они ведут себя идентично во всех возможных внешних полях.

Энтропия двух порций одного газа до смешения

$$S_1 = N_1 k \ln(V_1/N_1) + N_2 k \ln(V_2/N_2) + (N_1 + N_2) f(T).$$

Энтропия всего газа после смешения

$$S_2 = (N_1 + N_2)k\ln[(V_1 + V_2)/(N_1 + N_2)] + (N_1 + N_2)f(T).$$

Тогда изменение энтропии

$$\Delta S = S_2 - S_1 = (N_1 + N_2)k\ln[(V_1 + V_2)/(N_1 + N_2)] - N_1k\ln(V_1/N_1) - N_2k\ln(V_2/N_2).$$

Но из уравнения состояния газа следует, что при постоянном давлении и температуре

$$(V_1 + V_2)/(N_1 + N_2) = V_1/N_1 = V_2/N_2,$$

поэтому $\Delta S = 0$. Таким образом, изменение энтропии при смешивании двух порций одного газа действительно тождественно равно нулю. Этот результат, находящийся в полном согласии с опытом, тесно связан с предположением о тождественности между собой всех частиц данного газа. Благодаря этой тождественности перемешивание их между собой не является физическим событием. При смешении двух порций одного газа при постоянном давлении и температуре распределение молекул во всем объеме сразу оказывается равномерным и хаотическим и никакой взаимной диффузии не происходит. Нужно подчеркнуть, что молекулы или атомы могут считаться принадлежащими к одному сорту и потому тождественными только в том случае, если они имеют одинаковую химическую структуру, массу и все другие характеристики. Это означает, что даже различные изотопы одного элемента или атомы, находящиеся в разных энергетических состояниях, нельзя считать тождественными. Смешение разных изотопов газа представляет необратимый процесс, для их разделения нужно совершить работу.

Задача 5.10. Для линейного гармонического осциллятора с энергией ε вычислить фазовый объем Γ, ограниченный гиперповерхностью энергии. Оценить объем элементарной фазовой ячейки, используя формулу энергетического спектра

$$\varepsilon_n = h\nu(n + 1/2), \text{ где } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Решение. Координата x и импульс p гармонического осциллятора связаны законом сохранения энергии ε: $p^2(t)/(2m) + m\omega^2x^2(t)/2 = \varepsilon = \text{const}$. Поэтому фазовая траектория является эллипсом с полуосями: $a = (2m\varepsilon)^{1/2}$; $b = [2\varepsilon/(m\omega^2)]^{1/2}$. Площадь эллипса (фазовый объем)

$$\Gamma(\varepsilon) = \pi ab = 2\pi\varepsilon/\omega = \varepsilon/\nu, \text{ где } \nu = \omega/(2\pi).$$

Полагая $\varepsilon = \varepsilon_n = h\nu(n + 1/2)$ и отсчитывая энергию от энергии нулевых колебаний $\varepsilon_0 = h\nu/2$, находим объем элементарной фазовой ячейки, приходящийся на одно (квантовое) состояние осциллятора: $\Delta\Gamma = (\varepsilon_n - \varepsilon_0)/(\nu n) = h\nu n/\nu n = h$.

Задача 5.11. Найти фазовый объем изоэнергетической поверхности и плотность состояний частиц газа, для которых зависимость энергии от импульса (закон дисперсии)

$$\varepsilon = p_x^2/(2m_1) + p_y^2/(2m_2) + p_z^2/(2m_3).$$

Решение. Уравнение изоэнергетической поверхности имеет вид

$$p_x^2/(2m_1) + p_y^2/(2m_2) + p_z^2/(2m_3) = \varepsilon_0.$$

Это уравнение поверхности эллипсоида с главными полуосями:

$$a = (2m_1\varepsilon_0)^{1/2},\ b = (2m_2\varepsilon_0)^{1/2},\ c = (2m_3\varepsilon_0)^{1/2}.$$

Фазовый объем $\Gamma(\varepsilon_0) = (4\pi/3)(8m_1m_2m_3)^{1/2}\varepsilon_o^{3/2}V$, где V – физический объем системы. Плотность состояний

$$g(\varepsilon) = (1/h^3)\,\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}\varepsilon = 2\pi V/h^3(8m_1m_2m_3)^{1/2}\varepsilon^{1/2}.$$

Задача 5.12. Определить фазовую траекторию точки массой m, которая движется в постоянном гравитационном поле из точки z_o с начальной скоростью v_o, направленной вертикально вверх.

Решение. Из закона сохранения энергии следует:

$$p_o^2/(2m) + mgz_o = p^2/(2m) + mgz.$$

Фазовая траектория представляет собой параболу (рис. 5.4).

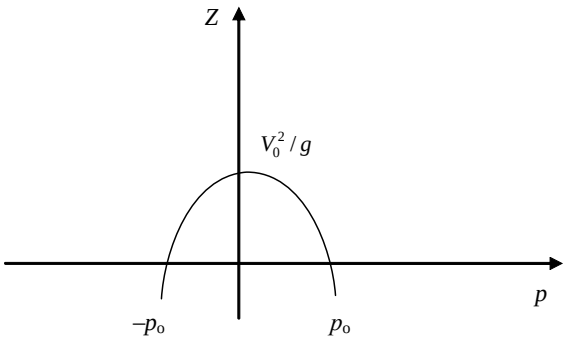

Рис. 5.4

Задача 5.13. Определить фазовую траекторию для линейного гармонического осциллятора с затуханием, движение которого описывается уравнением

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,\ \omega_0 = (k/m)^{1/2} \text{ при условии } \gamma << \omega_0.$$

Решение. В начальный момент скорость и координаты осциллятора равны v_0 и x_0 соответственно.

Решение уравнения движения для осциллятора с такими начальными условиями имеет вид

$$x = \exp(-\gamma t/2)\,(x_0 \cos(\omega_0 t) + (v_0/\omega_0)\sin(\omega_0 t)).$$

Скорость в момент t равна

$$v = -\gamma x/2 + \exp(-\gamma t/2)\,(v_0 \cos(\omega_0 t) - \omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t)).$$

Так как $\gamma << \omega_0$, то

$$v/\omega_0 \sim \exp(-\gamma t/2)\,((v_0/\omega_0)\,(\cos(\omega_0 t) - x_0 \sin(\omega_0 t)).$$

Отсюда $(x^2 + p^2/k^2) = (x_0^2 + p_0^2/k^2)\exp(-\gamma t)$, где $p = mv$.

Уравнение траектории представляет собой эллиптическую спираль (рис. 5.5).

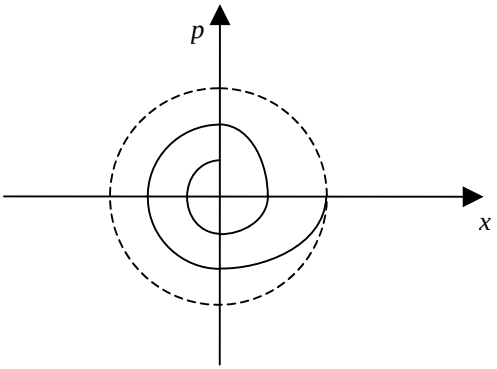

Рис. 5.5

5.4. Метод ансамблей Гиббса

Элемент фазового Г-пространства $d\Gamma = \Pi\ dq_i dp_i$. Изображающая точка в фазовом пространстве в общем случае будет двигаться по произвольной траектории (которая из-за взаимодействия системы с

окружающей средой не лежит на поверхности постоянной энергии и многократно проходит через любой малый объем фазового пространства). Вероятность пребывания изображающей точки в любом элементе фазового объема равна $dW(p, q) = \rho(p, q)d\Gamma$, где $\rho(p, q)$ – плотность вероятности или функции распределения; $\int \rho(p, q)\, d\Gamma = 1$ (нормировка).

Среднее значение любой функции импульсов

$$<F(p, q)> = \int \rho(p, q)\, F(p, q)\, d\Gamma.$$

Для движения системы частиц, подчиняющихся уравнениям Гамильтона, имеет место **теорема Лиувилля** о сохранении фазового объема: объем, занимаемый непрерывно распределенной совокупностью фазовых точек при движении этих точек, не меняется, т.е.

$$d\rho/dt = \partial\rho/\partial t - [H, \rho] = 0,$$

где $[H, \rho]$ – скобка Пуассона.

Для стационарного распределения

$$\partial\rho/\partial t = 0,\ [H, \rho] = 0.$$

В этом случае энергия и функция от энергии являются интегралами движения.

Рассмотрим систему, находящуюся в состоянии термодинамического равновесия. Значения всех внутренних параметров системы (координат, скоростей и функций от величин для частиц, составляющих систему) зависят только от температуры и внешних параметров. Энергия системы при равновесии также зависит от температуры. Таким образом, все внутренние параметры будут функциями энергии. Параметры системы флуктуируют со временем. Значение любой функции состояния системы при термодинамическом равновесии представляет среднее по времени от любой функции состояния:

$$< F > = \lim_{t\to\infty}(1/t)\int_0^\infty F(p, q)dt\ .$$

Чтобы вычислить $<F>$, необходимо знать законы изменения состояния системы во времени и, пользуясь ими, найти зависимость всех q и p от времени.

Основная идея статистики состоит в замене средних по времени математическими ожиданиями от функции $F(p, q)$, взятыми с помощью функций распределения вероятности. В этом суть метода Гиббса.

Метод Гиббса заключается в следующем. Вместо того чтобы следить за движением одной изображающей точки и отыскивать среднее по времени, можно представить совокупность – ансамбль изображающих точек, распределенных с плотностью ρ в Г-пространстве, т.е. ансамбль тождественных систем, хаотически распределенных по возможным состояниям. Ансамбль представляет собой исследуемую систему, в которой любая конфигурация координат и скоростей, доступная для данной системы, в процессе изменения ее со временем представлена в нем. Средние по времени отдельной системы заменяются средними по ансамблю (усреднение проводится в фиксированный момент времени по всем системам ансамбля).

5.4.1. Микроканоническое распределение (ансамбль) Гиббса

Вероятность распределения для изолированной (находящейся в адиабатической оболочке) системы дается микроканоническим распределением. Для микроканонического распределения плотность вероятности постоянна и отлична от нуля только в бесконечно тонком слое между двумя поверхностями энергии, в остальной части фазового пространства она равна нулю: $\rho(H) = \delta[H(p, q) - E]/\Omega(E)$;

$$\Omega(E) = \mathrm{d}\Gamma(E)/\mathrm{d}E;\ \mathrm{d}\Gamma(E) = \mathrm{d}^N p\ \mathrm{d}^N q;$$

$H(p, q) < \mathrm{E}$, $\delta[H - \mathrm{E}]$ – функция Дирака.

5.4.2. Каноническое распределение (ансамбль) Гиббса

Реальные системы обмениваются энергией с окружающей средой. Рассмотрим систему, окруженную большим термостатом определенной температуры (рассматриваемая система и термостат вместе образуют адиабатически изолированную систему; энергией взаимодействия системы и термостата пренебрегаем).

Плотность вероятности состояния системы дается каноническим распределением

$$\rho(H) = (1/Z)\exp[-H/\theta], \qquad (5.14)$$

где $H = H(p, q)$ – гамильтониан (энергия) системы; Z – статистический интеграл, определяемый из условия нормировки:

$$Z = \int \exp[-H(p,q)/\theta] \cdot d\Gamma = = \int \exp(-E/\theta)\Omega(E)dE; \qquad (5.15а)$$

$$1/\theta = \partial \ln \Omega(E)/\partial E,$$

θ – модуль канонического распределения (статистическая температура).

$$\theta = kT.$$

Все вычисления термодинамических величин на основе канонических ансамблей начинаются с определения статистического интеграла. Термодинамические соотношения получаются из формулы

$$Z = \exp[-\Psi(V, T)/\theta], \qquad (5.15б)$$

где $\Psi(V, T)$ – свободная энергия, $\Psi(V,T) = -\theta \ln Z$.

Если энергия складывается аддитивно из энергий отдельных частиц, то

$$\Psi = -\theta \ln Z = -\theta N \ln Z_1,$$

где Z_1 – статистический интеграл, взятый в μ-пространстве – фазовом пространстве одной частицы.

Внутренняя энергия U представляет собой среднюю по ансамблю энергию системы

$$U = \overline{E} = (1/Z) \int E \exp(H(p, q)/\theta)\, d\Gamma.$$

Все другие функции можно получить из функции $\Psi(V, T)$ с помощью термодинамических соотношений, приведенных в 5.1, например:

$$S = -(\partial\Psi/\partial T)_V,\ U = \Psi - T(\partial\Psi/\partial T)_V \text{ и т.д.}$$

Пример 5.6. Для идеального одноатомного газа из N молекул ($3N$ степеней свободы) функция Гамильтона

$$H = (1/2)\Sigma\,(p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2) + \Sigma\, U(x_i, y_i, z_i).$$

Внутри сосуда $U = 0$; на стенках U – бесконечно большое.

$$Z = \int \exp(-H/\theta) d\Gamma = V^N (2\pi m\, \theta)^{3N/2},$$

так как

$$\iiint\limits_V \exp\,[-U(x_i,y_i,z_i)/\theta]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = V,$$

где V – объем сосуда, а интегралы имеют вид типа

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\,(-p_{ix}{}^2/(2m\,\theta))\mathrm{d}p_{ix} = (2\pi\, m\,\theta)^{1/2};$$

$$\Psi = -\,\theta\ln Z = -N\,\theta\,\ln V - (3N\,\theta/2)\,\ln\theta + (3N\theta/2)\,\ln(2\pi m);$$
$$p = -(\partial\Psi/\partial V)_T = N\,\theta/V;$$
$$U = \Psi - \theta\,(\partial\Psi/\partial\theta) = 3N\,\theta/2;$$
$$\mathrm{C}_v = \partial U/\partial T = (3/2)R.$$

Вероятность того, что молекула будет иметь импульсы и координаты в интервалах

p_x, $p_x + \mathrm{d}p_x$; p_y, $p_y + \mathrm{d}p_y$; p_z, $p_z + \mathrm{d}p_z$; x, $x + \mathrm{d}x$; y, $y + \mathrm{d}y$; z, $z + \mathrm{d}z$, дается каноническим распределением

$$\mathrm{d}W = \rho\mathrm{d}\Gamma = A\,\exp[-(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2)/(2m\theta)]\,\mathrm{d}p_x\,\mathrm{d}p_y\,\mathrm{d}p_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Вероятность того, что абсолютная величина скорости лежит между v и $v + \mathrm{d}v$, будет равна $4\pi[m/(2\pi\theta)]^{3/2}\,\exp[-(mv^2/(2\theta))]\,v^2\mathrm{d}v$.

5.4.3. Большое каноническое распределение (ансамбль) Гиббса

Вероятность состояния системы, которая может обмениваться не только энергией с тепловым резервуаром, но и частицами (находится в контакте с источником частиц), дается большим каноническим распределением

$$\rho = \exp[\Omega + \mu N - H)/\theta], \tag{5.16}$$

где $\Omega = PV$ – большой термодинамический потенциал (P – внешний параметр); μ – химический потенциал.

Большая статистическая сумма

$$Z = \exp[-\Omega/\theta] = \sum_N \exp\,(\mu N/\theta)\,\int \exp\,(-H/\theta)\,\mathrm{d}\Gamma(N). \tag{5.17}$$

Определяя термодинамический потенциал $\Phi = -\theta\,\ln Z$, можно найти другие термодинамические функции.

Задача 5.14. Начертить фазовые траектории одномерного движения материальных точек в поле силы тяжести с ускорением g = const и проиллюстрировать справедливость теоремы Лиувилля.

Решение. Фазовые траектории представляют собой параболы с вершиной на оси p (рис. 5.6) и описываются выражением $p^2 - p_0^2 = -2m^2 g\,(q_0 - q)$.

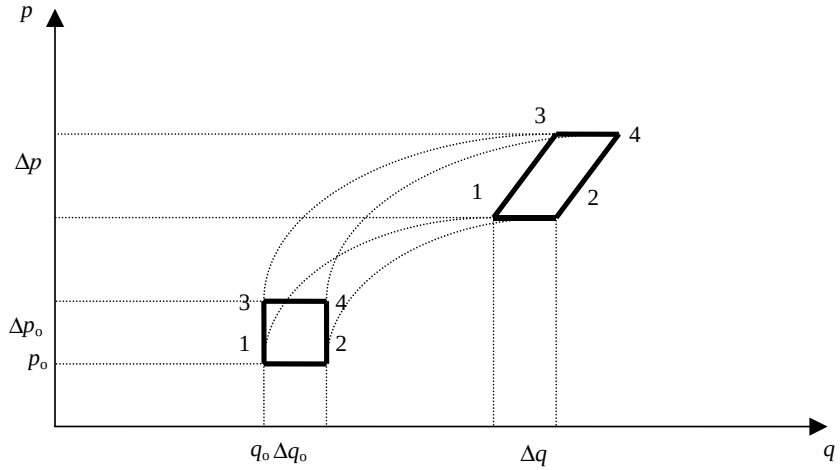

Рис. 5.6

Объем, занимаемый фазовыми точками, имеющими при t_0 координаты из интервала q_0, $q_0 + \Delta q_0$ и p_0, $p_0 + \Delta p_0$, сохраняется ($\Delta\Gamma_0 = \Delta\Gamma_1$). Это равнозначно сохранению фазовой плотности (теорема Лиувилля).

Задача 5.15. Проверить теорему Лиувилля для ансамбля: 1) частиц, движущихся по инерции; 2) линейных осцилляторов; 3) линейных осцилляторов, совершающих вынужденные колебания под действием периодического возмущения.

Решение. 1. Для $t = 0$ $q = q_0 + (p_0/m)\,t$, $p = p_0$, якобиан перехода от переменных (q_0, p_0) к (q, p)

$$D = \partial(p,q)/\partial(p_0,q_0) = \begin{vmatrix} \partial q/\partial q_0 & \partial q/\partial p_0 \\ \partial p/\partial q_0 & \partial p/\partial p_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t/m \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

а, следовательно, $d\Gamma_0 = d\Gamma$.

2. $\ddot{q} - \omega_0^2 q = 0$;

$q = q_0 \cos(\omega_0 t) - [p_0/(m\omega_0)] \sin(\omega_0 t)$;

$p = p_0 \cos(\omega_0 t) - qm\omega_0 \sin(\omega_0 t)$;

$$D = \begin{vmatrix} \cos(\omega_0 t) & [1/(m\omega_0)]\sin(\omega_0 t) \\ -m\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{vmatrix} = 1.$$

3. $\ddot{q} - \omega_0^2 q = a\cos(\omega t)$, решая, получим:

$q = q_0 \cos(\omega_0 t) + [p_0/(m\omega_0)] \sin(\omega_0 t) + A\cos(\omega t)$, $A = a/(\omega_0^2 - \omega^2)$;

$p = p_0 \cos(\omega_0 t) - m\omega_0 q_o \sin(\omega_0 t) - [ma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)] \sin(\omega t)$;

$$D = \begin{vmatrix} \cos(\omega_0 t) & [1/(m\omega_0)]\sin(\omega_0 t) \\ -m\omega_0 \sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{vmatrix} = 1.$$

Задача 5.16. Определить среднюю энергию и давление идеального газа из частиц в объеме V. Закон дисперсии частицы газа: $\varepsilon(p) = ap^2$; $a > 0$, $l > 0$.

Решение. Статистический интеграл

$$Z = 4\pi V \int_0^\infty \exp[-ap^2/(kT)]\, p^2 \mathrm{d}p.$$

После замены переменной $x = ap^2/(kT)$ интеграл приводится к гамма-функции:

$$Z = (4\pi/l)\,(kT/a)^{3/l}\, V \int_0^\infty \exp(-x)\, x^{3/l}\, \mathrm{d}x = (4\pi/l)(kT/a)^{3/l}\, V\Gamma(3/l).$$

Средняя энергия

$$E = (N/\mathrm{Z})\,[\partial \mathrm{Z}/\partial(-1/(kT))] = (1/l)\,3NkT.$$

В частности, при $l = 2$ получаем закон равнораспределения по степеням свободы для частиц с тремя степенями свободы. Свободная энергия газа

$$F = -NkT \ln \mathrm{Z} = -NkT \ln(4\pi/l)\, V\,(kT/\mathrm{a})^{3/l}\Gamma(3/l).$$

Давление газа $p = -(\partial F/\partial V)_T = NkT/V$.

Задача 5.17. Цилиндр заполнен идеальным газом и вращается вокруг оси, проходящей через центр основания цилиндра. Угловая скорость вращения ω, длина цилиндра l, радиус цилиндра R, число мо-

лекул газа N. Определить распределение плотности газа и давления на боковые стенки.

Решение. На вращающийся газ в цилиндре объемом $V = \pi r^2 l$ действует поле центробежных сил инерции с потенциалом

$$U_{цб} = -\int_0^r m\,\omega^2\, r' \mathrm{d}r' = -\, m\,\omega^2\, r^2/2.$$

Функция распределения Максвелла – Больцмана газа имеет вид

$$f(v, r) = A \exp\,[-mv^2/(2kT) + m\,\omega^2\, r^2/(2kT)],$$

где нормирующий множитель

$$\mathrm{A} = \left\{\int\int\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int_0^R\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \exp\,[-mv^2/(2kT) + m\,\omega^2\, r^2/(2kT)]\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\right\}^{-1} =$$
$$= \{[m/(2\pi kT)]^{3/2}\,[2\pi kTl/(m\,\omega^2)]\,[\exp\,(m\,\omega^2 R^2/(2kT)) - 1]\}^{-1}.$$

Плотность газа в точке на расстоянии r от оси вращения пропорциональна плотности вероятности нахождения частицы в этой же точке физического объема:

$$n(r) = N\int f(v,r)\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y\mathrm{d}v_z = (N/V)\,[2kT/(m\omega^2 R^2)]\,\exp[m\,\omega^2\, r^2/(2kT)]/$$
$$/\{\exp\,[m\,\omega^2\, r^2/(2kT)] - 1\}.$$

Свободная энергия газа во вращающемся цилиндре

$$\Psi = NkT \ln A = NkT \ln[m/(2\pi kT)]^{3/2\cdot}\, 2\pi kTl/(m\,\omega^2) +$$
$$+\, NkT \ln\{\exp(m\,\omega^2 R^2/(2kT)) - 1\}.$$

Давление на боковые стенки

$$p = -(\partial\Psi/\partial V)_T = -[\partial\Psi/(2\pi Rl\,\partial \mathrm{R})] =$$
$$= (NkT/V)\,[m\,\omega^2 R^2/(2kT)]\,\exp[m\,\omega^2 R^2/(2kT)]/[1 - \exp(m\,\omega^2 R^2)/(2kT)].$$

Задача 5.18. Идеальный газ находится в сосуде, который закрыт подвижным поршнем, нагруженным грузом массой M. Найти средний объем системы. Площадь поршня S, число частиц газа N.

Решение. Функция Гамильтона системы газ – поршень имеет вид

$$H = \Sigma\, H(p_i, q_i) + p_м^2/(2M) + Mgz,$$

где $p_м$ и z – импульс и координата поршня. Статистический интеграл системы

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\,[-H\,(p_i, q_i)/kT] \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\Gamma \exp[-p_м^2/(2MkT)]\mathrm{d}p_м \int_0^{\infty} \exp\,[-Mgz/(kT)]\,S\mathrm{d}z =$$

$$= (2\pi mkT)^{3N/2}\, V^N\, (2\pi MkT)^{1/2}\, [SkT/(Mg)].$$

Здесь $\mathrm{d}\Gamma = \mathrm{d}p_1 .... \mathrm{d}p_{3N} \cdot \mathrm{d}q_1 ..... \mathrm{d}q_{3N}$. Учитывая, что $Mg = pS$ (p – давление) и что при фиксированном объеме $V^N = (kT/p)^N$, получаем

$$Z = (2\pi m)^{(3N+1)/2} (M/m)^{1/2}\, (kT)^{(5N/2+3/2)} p^{-1-N}.$$

Средний объем системы $V = (\partial\Phi/\partial p)_T = [(N + 1)/p]\, kT$. Здесь $\Phi = -NkT \ln Z$ – термодинамический потенциал системы в переменных p, T (свободная энергия Гиббса).

Задача 5.19. Найти теплоемкость системы одномерных ангармонических осцилляторов.

Решение. Потенциальная энергия осциллятора при малых смещениях может быть представлена в виде разложения по степеням смещения:

$$V(u) = \alpha u^2 - \beta u^3 - \gamma u^4 + ...$$

Будем считать, что при малых смещениях второй и третий члены малы по сравнению с первым (слабая ангармоничность). Тогда при вычислении статистического интеграла можно подынтегральную экспоненту разложить в ряд по этим малым параметрам:

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\,[-\alpha u^2/(kT)] \exp\,[(\beta u^3 + \gamma u^4)/(kT)]\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\alpha u^2/(kT)]\,\{1 + (\beta u^3 + \gamma u^4)/(kT) + (1/2)\,[(\beta u^3 + \gamma u^4)/(kT)]^{1/2}\}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\alpha u^2/(kT)]\,\{1 + \gamma u^4/(kT) + (1/2)\,(\beta^2 u^6)/(kT^2) + ...\}\,\mathrm{d}u =$$

$$= (\pi kT/\alpha)^{1/2}\{1 + (3/4)\,[\gamma/(kT)](kT/\alpha)^2 + (1/2)\,(15/8)\,[\beta^2/(kT)^2](kT/\alpha)^3\} =$$

$$= (\pi kT/\alpha)^{1/2}\,\{1 + (3/4)\,(\gamma kT/\alpha^2) + (15/16)\,(\beta^2 kT/\alpha^3)\}.$$

Средняя энергия одного осциллятора

$$\bar{\varepsilon} = kT^2(\partial \ln Z/\partial T) =$$

$$= kT^2\,(\mathrm{d}/\mathrm{d}T)\,\{(1/2)\,\ln(\pi kT/\alpha) + \ln[1 + (3/4)\,[(\gamma/\alpha^2) + (5/4)(\beta^2/\alpha^2)]\,kT\} =$$

$$= (1/2)kT + kT^2.\mathrm{d}/\mathrm{d}T\,\{(3/4)\,(\gamma/\alpha^2 + (5/4)\,(\beta^2/\alpha^2)\,kT + ...\} =$$

$$= (1/2)kT + (3/4)\,[\gamma/\alpha^2 + (5/4)\,(\beta^2/\alpha^2)]\,(kT^2) + ...$$

Теплоемкость на один осциллятор составляет

$$C = \partial \bar{\varepsilon} / \partial T = k/2 + (3/2)\,(\gamma/\alpha^2 + 5\beta/\alpha^3)\,kT.$$

Задача 5.20. Вычислить средний дипольный момент газа жестких диполей во внешнем электрическом поле $\boldsymbol{\varepsilon}$. Найти диэлектрическую восприимчивость газа в слабых полях. Предполагается, что диполи между собой не взаимодействуют.

Решение. Потенциальная энергия жесткого диполя $\mathbf{d}$ во внешнем электрическом поле $\boldsymbol{\varepsilon}$ равна $u = -(\mathbf{d}, \boldsymbol{\varepsilon}) = d_o\, \varepsilon \cos\theta$, где d_o – модуль вектора дипольного момента молекулы газа. Вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ направлен в направлении оси OZ. Статистический интеграл имеет вид

$$Z = A^{-1} = Z_k \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \exp\,[d_o\, \varepsilon \cos\theta/(kT)]\, d\omega,$$

где Z_k – статистический интеграл, соответствующий кинетической энергии молекул газа; $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ – элемент телесного угла, в котором лежит направление вектора $\mathbf{d}$:

$$Z = Z_k\,[4\pi kT/(d_0\, \varepsilon)]\, \mathrm{sh}[d_0\, \varepsilon/(kT)].$$

Среднее значение дипольного момента газа

$$P = (N/V) d_0 \cos\theta = (1/Z)\,[\partial Z/\partial(\varepsilon/(kT))] = (N/V)\, d_0 L[d_0\varepsilon/(kT)],$$

где $L(x) = \mathrm{cth}\, x - 1/x$ – функция Ланжевена.

График этой функции представлен на рис. 5.7.

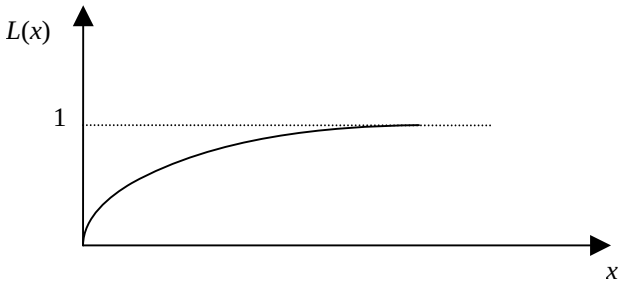

Рис. 5.7

Из графика видно, что при малых значениях аргумента $x = d_o\varepsilon/(kT)$ (в слабом электрическом поле или при высокой температуре) средний дипольный момент прямо пропорционален аргументу x. Это подтверждается прямым вычислением $L(x)$ при малых x:

$$L(x) = (1/x + x/3 - 1/x\,) = x/3.$$

Здесь мы использовали разложение cth x в ряд при малых x: $\text{cth}\, x = 1/x + x/3 + ...$ Константа диэлектрической восприимчивости газа

$$\alpha = \partial p/\partial \varepsilon = [d_o^2/(3kT)]\,(N/V).$$

В сильных электрических полях функция $L(x)$ стремится к насыщению ($L(x) \to 1$), что означает ориентацию почти всех диполей в направлении сильного внешнего электрического поля; одновременно диэлектрическая восприимчивость газа стремится к нулю.

Задача 5.21. Найти среднюю намагниченность газа взаимодействующих магнитных диполей.

Решение. Потенциальная энергия магнитного диполя μ во внешнем магнитном поле H равна $U = -(\mu\mathbf{H}) = -\mu_0 H \cos\theta$. Сравнивая это выражение с потенциальной энергией электрического диполя, убеждаемся в их полной аналогии. Поэтому, если отсутствует взаимодействие между диполями, средняя величина магнитного диполя (намагниченность) единицы объема газа (см. предыдущую задачу):

$$M = (N/V)\,\mu_0 \cos\theta = (\mu_0 N/V)\,L[\mu_0 H_0/(kT)],$$

где $L(x)$ – функция Ланжевена; H_0 – внешнее магнитное поле.

Взаимодействие между диполями приводит к тому, что на каждый диполь помимо внешнего магнитного поля действует среднее поле соседних диполей, пропорциональное средней упорядоченности, т.е. намагниченности диполей газа. Это поле H_{cc} называется самосогласованным внутренним полем Вейса H_{cc}: $H_{cc} = \gamma M$. Полное поле, действующее на магнитный диполь, $H = H_0 + \gamma M$. Подставляя это поле в уравнение Ланжевена, приходим к нелинейному уравнению, описывающему поведение намагниченности газа магнитных диполей при различной температуре и внешнем магнитном поле:

$$M = (\mu_0 N/V)\,L[\mu_0(H_0 + \gamma M)/(kT)].$$

Исследуем корни этого трансцендентного уравнения графическим методом. Будем считать, что внешнее поле отсутствует ($H_0 = 0$). Введем новые обозначения: $y = \mu_0\gamma M/(kT)$, тогда

$$kT/(\mu_0\gamma)\,y = (N/V)\,L(y).$$

Пересечения графиков функций в левой (прямые *а* и *б*) и правой (кривая *в*) частях этого уравнения дают корни уравнения (рис. 5.8).

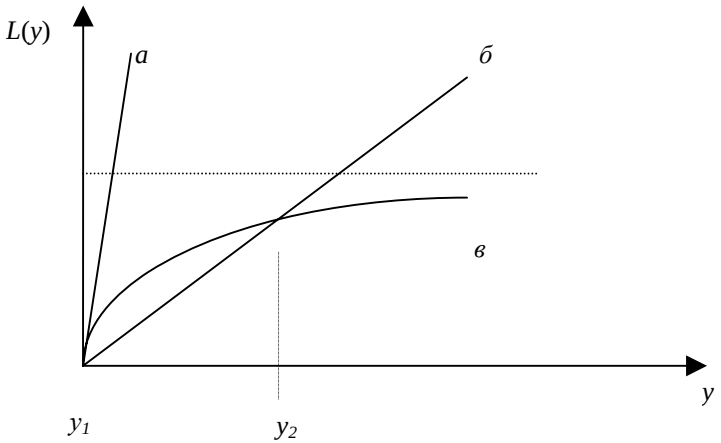

Рис. 5.8

При высокой температуре тангенс угла наклона линейной функции велик (прямая *а*) и графики пересекаются в одной точке $y_1 = 0$. При понижении температуры тангенс угла наклона уменьшается и при некоторой критической температуре T_C (температура Кюри) возникает касание кривой Ланжевена и прямой в начале координат. Ниже этой температуры графики пересекаются в двух точках: $y_1 = 0$ и $y_2 \neq 0$ (прямая *б*). При дальнейшем понижении температуры ненулевой корень возрастает по абсолютной величине. Физический смысл полученных решений нелинейного уравнения состоит в следующем.

При высокой температуре без внешнего поля отсутствует намагниченность в системе, диполи полностью разупорядочены: $M = [kT/(\gamma\mu_0)]\, y_1 = 0$. При понижении температуры ниже точки Кюри в газе возникает спонтанная намагниченность $M = [kT/(\gamma\mu_0)]\; y_2 \neq 0$. При стремлении температуры к нулю намагниченность стремится к предельному значению $\mu_o N/V$. Температура Кюри определяется из условия касания двух кривых:

$$T_C = \mu_o^2 (N/V)\, \gamma/(3k).$$

Рассмотренная задача лежит в основе теории ферромагнетизма Вейса. Эта теория не отвечает на вопрос о природе сил взаимодействия между магнитными моментами. Ответ на этот вопрос дала квантовая теория ферромагнетизма, которая объяснила это взаимодействие наличием обменных сил между электронами в твердых телах и смогла вычислить коэффициент γ из микроскопической картины тела. Но главная идея Вейса – наличие самосогласованного эффектив-

ного внутреннего поля, пропорционального упорядоченности в системе – оказалась чрезвычайно плодотворной и играет основную роль не только в теории ферромагнитного упорядочения, но и в теориях других фазовых переходов (сверхпроводимость, сегнетоэлектричество, атомное упорядочение в сплавах и т.д.).

Однако метод самосогласованного поля не учитывает флуктуации параметра порядка. В одномерных системах эти флуктуации приводят к разрушению дальнего порядка при любой конечной температуре. Точный расчет фазового перехода возможен лишь для одномерных и двумерных систем. Следующая задача дает точный расчет для упрощенной модели магнетиков – модели Изинга.

Задача 5.22. Определить свободную энергию и корреляционную функцию для классической цепочки Изинга.

Решение. Модель Изинга описывает магнитный кристалл, в узлах которого находятся атомы со спинами $\sigma = 1/2$. Спины могут быть направлены вверх или вниз. Энергия взаимодействия спина $\sigma^Z = \pm 1/2$ с магнитным полем h равна $E_h = \pm\mu_B h$. Гамильтониан (энергия) классической цепочки Изинга имеет вид

$$H = K\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^Z\ \sigma_{i+1}{}^Z - h\sum\sigma_i{}^Z,$$

где N – число узлов в цепочке; $\sigma_i{}^Z$ – магнитный диполь, проекция которого на ось z принимает два возможных значения: $\sigma_i{}^Z = 1$; h – внешнее магнитное поле ($\mu_в = 1$ в атомной системе единиц). Свободная энергия $\Psi = -k_в T\ln Z$, где статистическая сумма

$$Z = \sum\exp[-H(\{\sigma_i{}^Z\})/k_B T],$$

и суммирование проводится по всем различным конфигурациям диполей, отличающимся значениями $\sigma_i{}^Z = 1$ в узлах цепочки $i = 1, ..., N$. Запишем Z в виде N-кратного произведения двух матриц 2×2, элементы которых получаются перебором всех возможных значений $\sigma_i{}^Z$:

$$T_1(\sigma_1{}^Z,\sigma_2{}^Z) = \exp(\tilde{K}\,\sigma_1{}^Z\sigma_2{}^Z) = \begin{pmatrix} e^{\tilde{K}} \text{ при } e^{-\tilde{K}} \\ e^{-\tilde{K}} \text{ при } e^{\tilde{K}} \end{pmatrix};$$

$$T_2(\sigma^Z) = \exp(h\sigma^Z) = \begin{pmatrix} e^{\tilde{h}} \text{ при } e^{-\tilde{h}} \\ e^{-\tilde{h}} \text{ при } e^{\tilde{h}} \end{pmatrix}.$$

$Z = \sum \Pi\, T_1(\sigma_i^Z, \sigma_{i+1}^Z)\, T_2(\sigma_i^Z) = T_\Gamma\, (T_1\, T_2)^N$, где $T_\Gamma A$ обозначает след матрицы A, равный сумме всех ее диагональных элементов; $\tilde{K} = K/(k_в T)$; $\tilde{h} = h/(k_в T)$.

Как известно, след матрицы инвариантен по отношению к каноническому преобразованию $T_\Gamma A = T_\Gamma(UAU^{-1})$. Следовательно, $T_\Gamma A^N = T_\Gamma(UA^N U^{-1}) = T_\Gamma(UAU^{-1})^N$. Выбирая U такой, чтобы UAU^{-1} была диагональна, т.е. $UAU^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$, находим $Z = \varepsilon_1^N + \varepsilon_2^N$, где ε_1 и ε_2 – собственные значения матрицы $(T_1 T_2)$.

$\varepsilon_{1,2} = e^{\tilde{K}}\, \mathrm{ch}(\tilde{h}) \pm [\, e^{2\tilde{K}}\, \mathrm{sh}^2(\tilde{h}) + e^{-2\tilde{K}}\,]^{1/2}$. Отсюда находим свободную энергию цепочки Изинга $F = -k_в T \ln(\varepsilon_1^N + \varepsilon_2^N)$.

Определим также парную корреляционную функцию для двух произвольных диполей σ_i^Z и σ_i^Z в узлах i и j. Цепочки Изинга в нулевом магнитном поле $h = 0$

$$< \sigma_i^Z\, \sigma_j^Z > = (1/Z)\, \Sigma\, \exp[-H/(k_в T)]\, \sigma_i^Z\, \sigma_j^Z.$$

Этот коррелятор можно представить в виде произведения матриц 2×2, аналогично вычислению статистической суммы Z:

$$< \sigma_i^Z\, \sigma_j^Z > = (1/Z) T_\Gamma[(T_1)^i\, \sigma^Z (T_1)^{j-i}\, \sigma^z (T_1)^{N-j}],$$

где предположено $j \geq i$ и матрица σ^Z – это матрица Паули: $\sigma^Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Опять воспользуемся инвариантностью следа матрицы и запишем

$$< \sigma_i^Z\, \sigma_j^Z > = (1/Z)\, T_\Gamma[(\tilde{T}_1)^i\, \tilde{\sigma}^Z\, (\tilde{T}_1)^{j-i} \tilde{\sigma}^Z\, (\tilde{T}_1)^{N-j}],$$

где $\tilde{T}_1 = UT_1U^{-1}$; $\tilde{\sigma}^Z = U\sigma^Z U^{-1}$.

Выберем преобразование U, которое приводит T_1 к диагональному виду: $\tilde{T}_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$.

В этом представлении матрица σ^Z принимает вид $\tilde{\sigma}^Z = U\, \sigma^Z\, U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В результате находим

$$< \sigma_i^Z \sigma_j^Z > = (1/Z)(\varepsilon_1^{N-j+i} \cdot \varepsilon_2^{j-i} + \varepsilon_2^{N-j+i} \varepsilon_1^{j-i}) =$$
$$= (\varepsilon_1^{N-j+i} \cdot \varepsilon_2^{j-i} + \varepsilon_2^{N-j+i} \varepsilon_1^{j-i})/(\varepsilon_1^{N} + \varepsilon_2^{N}),$$

где $\varepsilon_{1,2}$ определяем, положив $h = 0$ в формулах, полученных выше: $\varepsilon_1 = 2\mathrm{ch}\,\tilde{K}$; $\varepsilon_2 = 2\mathrm{sh}\,\tilde{K}$.

В пределе $N \to \infty$ находим, учитывая, что $(\varepsilon_2/\varepsilon_1)^N = (th\,\tilde{K})^N \to 0$, $<\sigma_i^Z \sigma_j^Z> = (th\,\tilde{K})^{j-i}$.

Перейдем от номера узла i к его пространственной координате $x_i = a_i$ вдоль цепочки, где a – период цепочки, равный расстоянию между соседними узлами i и $i + 1$. Тогда коррелятор $<\sigma_i^Z \sigma_j^Z>$ может быть записан в виде $< \sigma^Z(x)\, \sigma^Z(0) > = \exp(-|x|/\zeta)$, где корреляционная длина $\zeta^{-1} = a^{-1}\ln(\mathrm{cth}\,\tilde{K})$. В пределе низких температур ($T \to 0$) $\tilde{K} \equiv K/(k_в T) \to \infty$ получаем

$$\zeta/a \approx (1/2)\exp(2\tilde{K}); \; (1/2)\exp[2K/(k_в T)] >> 1; \; K >> k_в T.$$

Таким образом, корреляция между диполями цепочки Изинга убывает экспоненциально к нулю на расстояниях $x > \zeta$. При этом корреляционная длина ζ растет с понижением температуры и обращается в бесконечность ($\zeta = \infty$) при $T = 0$. Обращение ζ в бесконечность означает возникновение дальнего порядка в ориентации спинов на цепочке Изинга при нулевой температуре (ферромагнитный фазовый переход). Подобный точный расчет для двумерной модели Изинга (на квадратной решетке), выполненный Онзагером, приводит к следующим результатам:

$$< \sigma^Z (\Gamma)\, \sigma^Z(0) > \sim N_o, \text{ где } N_o = 0 \text{ при } T > T_c \text{ и } N_o^2 > 0 \text{ при } T < T_c,$$

где $T_c > 0$ – температура упорядочения спинов по направлению.

Задача 5.23. Тело, заряженное до потенциала φ_o, помещено в плазму, состоящую из равного количества электронов (заряд –e) и ионов (заряд +e). Определить дебаевский радиус экранирования, считая температуру электронов T_e и ионов T_i различной, а плазму – квазинейтральной. Число частиц в единице объема n_o.

Решение. Потенциал в любой точке плазмы определяется из решения уравнения Пуассона: $\Delta\varphi = -4\pi e(n_i - n_e)$. На поверхности заряженного тела $\varphi = \varphi_o$ по условию задачи. Плотность частиц в точке с потенциалом $\varphi(r)$ определяется функцией распределения Больцмана:

$$n_i(r) = n_0 \exp\{-e\varphi(r)/(kT_i)\};$$
$$n_e(r) = n_0 \cdot \exp\{-e\varphi(r)/(kT_e)\}.$$

Если потенциальная энергия мала по сравнению с тепловой ($e\varphi/kT << 1$), то экспоненту можно разложить в ряд и ограничиться линейным членом. Подставляя это разложение в уравнение Пуассона, получаем

$$\Delta\varphi = 4\pi n_0 e^2 \, [(T_e + T_i)/ (T_e - T_i)] \, \varphi.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\varphi = 0$, имеет вид

$$\varphi(r) = A \exp(-\lambda r)/r,$$

где $\lambda^{-1} = \{T_e T_i/[4\pi e n_0^2 (T_e - T_i)]\}^{1/2}$ – дебаевский радиус экранирования.

Постоянную A можно найти из условия $\varphi = \varphi_0$ на поверхности заряженного тела.

5.5. Флуктуации

Существование флуктуаций следует из законов статистической механики. В макроскопической системе заметной вероятностью обладают только очень малые флуктуации: в системах с малым числом степеней свободы возможны флуктуации большого масштаба и применение термодинамических законов уже становится необоснованным. В большинстве случаев в качестве меры флуктуации достаточно принять только среднее квадратичное отклонение, или дисперсию $\overline{\Delta F^2}$, так как высшие центральные моменты малы, и относительную флуктуацию $\delta = [\overline{\Delta F^2} / \overline{F}^2]^{1/2}$.

Рассмотрим флуктуации некоторых физических величин.

1. Флуктуация энергии $\overline{\Delta E^2} = \overline{E^2} - \overline{E}^2$,

так как $\overline{E} = -(\partial/\partial\beta) \ln [Z(\beta)]$, $\beta = 1/(kT)$,

то $\partial \overline{E} /\partial\beta = -(1/Z)(\partial^2 Z/\partial\beta^2) + (1/Z^2)(\partial Z/\partial\beta)^2$;

$\overline{E^2} = (1/Z) E^2 \exp(-\beta E) \, d\Gamma = (1/Z)(\partial^2 Z/\partial\beta^2)$;

$\overline{\Delta E^2} = (1/Z)(\partial^2 Z/\partial\beta^2) - (1/Z^2)(\partial Z/\partial\beta)^2$.

Таким образом, $\overline{\Delta E^2} = -\partial E/\partial\beta$.

В то же время $C_v = \partial \overline{E} /\partial T = (\partial \overline{E} /\partial\beta)(d\beta/dT) = -[1/(kT^2)](\partial \overline{E} /\partial\beta)$;

$\overline{\Delta E^2} = kT^2 C_v$.

В случае идеального газа $C_v \sim N k_Б$; $\overline{E} \sim NkT$; $\delta \sim 1/N^{1/2}$.

Для твердого тела $C_v \sim N k(T/\theta)^3$; $\overline{E} \sim NkT(T/\theta)^3$; $\delta \sim [1/N(\theta/T)^3]^{1/2}$.

Таким образом, мерой флуктуации энергии системы, находящейся в термостате, является ее теплоемкость.

Относительная флуктуация

$\delta = (\overline{\Delta E^2} / \overline{E^2})^{1/2} = (kT^2 C_v / \overline{E^2})^{1/2}$.

2. Флуктуация давления газа, находящегося в термостате.

Давление $p = (\partial \overline{E} / \partial V)_T$.

Из п.1 следует: $\overline{\Delta p^2} = \overline{p^2} - \overline{p}^2 = (1/\beta)(\partial \overline{p} / \partial V)$.

Для идеального газа $\overline{p} V = RT$;

$\partial p / \partial V = -RT/V^2$; $R = k_Б N$;

$\overline{p^2} = p^2/N$; $\delta = (\overline{\Delta p^2} / \overline{p^2})^{1/2} = 1/(N)^{1/2}$.

3. Флуктуация объема.

Аналогично п. 2 имеем: $\overline{\Delta V^2} = -(1/\beta), (\partial \overline{V} / \partial p)_T$, где $(\partial \overline{V} / \partial p)_T = \kappa_T$ – изотермическая сжимаемость. Флуктуации растут с увеличением сжимаемости газа. Для идеального газа $\overline{V} = RT/p$; $(\partial V/\partial p) = -RT/p^2$; $\overline{\Delta V^2} = V^2/N$;

$$\delta = (\overline{\Delta V^2} / \overline{V}^2)^{1/2} = 1/N^{1/2}.$$

При увеличении числа частиц N флуктуации сглаживаются.

4. Флуктуации плотности.

Пусть V – объем сосуда, содержащего N частиц, $nV = N = \text{const}$. Тогда

$$\Delta n V + n \Delta V = 0;$$

$(\overline{\Delta n} / n)^2 = = (\overline{\Delta V} / V)^2 = (1/\beta)(\partial V/\partial p)(1/V^2)$; $(\Delta n/n)^2 = -\theta V^2 (\partial V/\partial p)_T$.

Для идеального газа $\delta = (\overline{\Delta n^2} / n^2)^{1/2} = 1/N^{1/2}$.

Для газа, подчиняющегося уравнению Ван дер Ваальса, в критической точке $(\partial p/\partial V)_{T=Tk\to 0}$, $k_s \to 0$, и флуктуации плотности стремятся к бесконечности (поведение газа в критической точке требует специального исследования).

5. Флуктуации концентрации в большом каноническом ансамбле.

Среднее число частиц

$$\overline{N} = \partial\Omega/\partial\mu = (1/\beta)(\partial/\partial\mu)\ln Z = (1/\beta)\partial Z/(Z\partial\mu);$$

$$\overline{N^2} = (1/\beta)^2(1/Z)(\partial^2 Z/\partial\mu^2),$$

поэтому $\overline{\Delta N^2} = \overline{N^2} - \overline{N}^2 = \beta^{1/2}\,[(1/Z)(\partial^2 Z/\partial\mu^2) - (1/Z^2)\,(\partial Z/\,\partial\mu)^2\,] =$ $= kT(\partial N/\partial\mu)$.

Задача 5.24. Легкий маятник совершает случайные колебания под действием ударов молекул воздуха. Длина маятника l, масса m, случайный угол отклонения от вертикали φ. Найти $<\varphi^2>$ и $<\varphi^4>$, считая средние отклонения маятника малыми.

Решение. Случайная энергия маятника $E = (ml^2\omega^2)/2 + mgl(1 - \cos\varphi)$.

При малом угле отклонения φ приближенно получаем

$E = (m\,l^2\,\omega^2)/2 + (mgl\,\varphi^2)/2$, где $\omega = \partial\varphi/\partial t$ – случайная угловая скорость. Статистический интеграл маятника со случайным движением

$$Z = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp[-ml^2\omega^2/(2kT) - mgl\varphi^2/(2kT)]\; l^2 d\omega d\varphi.$$

При вычислении этого интеграла учтем, что масса макроскопического маятника много больше массы молекулы, а поэтому $mgl/(2kT) >> 1$. Следовательно, $\exp[-mgl\varphi^2/(2kT)]$ очень быстро убывает с ростом угла φ, и поэтому без большой ошибки интеграл по углу можно вычислить в бесконечных пределах. В результате получаем

$$Z = [2\pi kT/(ml^2)]^{1/2}\,[2\pi kT/(mgl)l^{1/2}\;;$$

$$<\varphi^2> = (1/Z)\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \varphi^2\exp[-ml^2\;\omega^2/(2kT) - mgl\;\varphi^2/(2kT)]l^2 d\omega d\varphi =$$

$$= (1/Z)\{\partial Z/\partial[-mgl/(2kT)]\} = kT/(mgl);$$

$$<\varphi^4> = (1/Z)\,\{\partial^2 Z/\partial[-mgl/(2kT)]^2 = 2[kT/(mgl)]^2.$$

Задача 5.25. Натянутая струна длиной l флуктуационно колеблется под действием случайной силы, приложенной к точке x струны. Сила натяжения струны F при малых смещениях считается постоянной. Найти средний квадрат флуктуационного отклонения точек натянутой струны.

Решение. Рассмотрим струну со случайным отклонением u в точке x. Потенциальная энергия растянутой струны при таком отклонении

$$U = F\,\Delta l = F\,[(x^2 + u^2)^{1/2} - x] + F\{[(l-x)^2 + u^2]^{1/2} - (l-x)\}\;F\,lu^2/\,[2x(l-x)].$$

Статистический интеграл случайно колеблющейся струны

$$Z = Z_k \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-Flu^2/(2x(l-x)kT)]\, du,$$

где Z_k – статистический интеграл, связанный с кинетической энергией колеблющейся струны.

Подобно предыдущей задаче интегрирование по смещению u можно без большой ошибки проводить между бесконечными пределами: $Z = Z_k[2\pi kTx(l-x)/Fl]^{1/2}$;

$$<u> = (1/Z) - \partial Z/\partial\{-Fl/[2x(l-x)kT]\} = kTx(l-x)/(F\,l).$$

Задача 5.26. Найти среднеквадратичную флуктуацию дипольного момента газа жестких электрических диполей.

Решение. Используя решение задачи о среднем дипольном моменте жестких диполей, имеем $Z = Z_k(2kT)/(d_0\varepsilon)\ \mathrm{sh}[(d_0\varepsilon)/(kT)]$.

$$<d^2> - <d>^2 = \partial^2 \ln Z/\partial(\varepsilon/kT)^2 = d_0^2\ \{-1/\mathrm{ch}^2[d_0\varepsilon/(kT)] + [kT/(d_0\varepsilon)]^2\}.$$

5.6. Квантовая статистика

5.6.1. Общие положения

Общие методы статистической физики, такие, как метод Гиббса, могут быть применены в квантовой статистике так же, как и в классической, но состояние системы определяется уже по законам не классической, а квантовой механики на основе соотношения неопределенностей и уравнения Шредингера. Стационарные состояния квантово-механической системы из N частиц описываются волновой функцией $\Psi_n(q) = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n)$, которая определяется из стационарного уравнения Шредингера:

$$\hat{H}\,\Psi_n(q) = E_n\,\Psi_n(q).$$

Совокупность микроскопических состояний образует дискретную совокупность квантовых состояний, определяемых квантовым числом n (n = 1, 2, ...). По аналогии с классической статистикой вероятность состояния с энергией E_n для системы, помещенной в термостат, дается выражением

$$W_n = \exp[(F - E_n)/\theta\ ]; \qquad (5.18)$$

$$F = -\,\theta \ln Z, \qquad (5.19)$$

где статистическая сумма $Z = \Sigma \exp(-E_n/\theta)$.

Под суммированием по n понимается суммирование по дискретным уровням системы и интегрирование по непрерывному спектру.

Если уровни вырождены, то

$$W_n = \exp[(F - E_n)/\theta)\,\Omega(E_n), \tag{5.20}$$

где $\Omega(E_n)$ – кратность вырождения n-го уровня.

Как и в классической статистике, средние, взятые с помощью канонического распределения, дают значения физических величин, относящихся к термодинамическому равновесию. Среднее значение по каноническому ансамблю физической величины, представленной оператором $\hat{A}$, равно

$$\overline{A} = \Sigma[A_{nn}\exp(-E_n/\theta)]/\Sigma[\exp(-E_n/\theta)], \tag{5.21}$$

где $A_{nn} = \int\Psi_n^*(q)\,\hat{A}\,\Psi_n(q)\,\mathrm{d}q$ – среднее значение A в состоянии $\Psi_n(q)$.

Очевидно, среднее значение энергии

$$\overline{E} = \Sigma\,[E_n \exp(-E_n/\theta)]/\,\Sigma\,[\exp(-E_n/\theta)]. \tag{5.22}$$

Из (5.19) можно найти свободную энергию F и другие термодинамические функции.

Большое каноническое распределение, описывающее вероятность состояния системы, находящейся в термостате, для которой не сохраняется число частиц, дается выражением

$$W_n = (1/Z)\,\exp[-(E_n - \mu N)/\theta], \tag{5.23}$$

где большая статистическая сумма

$$Z = \Sigma\,[\exp(\mu N/\theta)]\,z = \Sigma\,[\exp(\mu N/\theta)]\,\Sigma\,[\exp(-E_n/\theta)]. \tag{5.24}$$

Термодинамический потенциал определяется аналогично (5.19) по формуле

$$\Phi = -\,\theta \ln Z. \tag{5.25}$$

Для частиц разного сорта

$$Z = \Sigma \ldots \Sigma\,\exp[-(E_n - N_i\mu_i)/\theta)]. \tag{5.26}$$

5.6.2. Статистика Ферми – Дирака и Бозе – Эйнштейна

Рассмотрим систему из N невзаимодействующих частиц определенного типа. В квантовой механике частицы одного типа неразличимы (принцип тождественности частиц). В силу принципа тождественности частиц каждое квантовое состояние системы полностью определено, когда заданы значения чисел заполнения одночастичных состояний $\{m\}$. Совокупность чисел заполнения $\{n_i\}$ определяет квантовые числа всей системы. Тогда

$E_n = \Sigma\varepsilon_i n_i$, $N = \Sigma n_i$, где ε_i – энергия одной частицы.

Большая статистическая сумма

$$Z = \Sigma\,[\exp(\varepsilon_i - \mu)/(kT)]^{n_i}, \qquad (5.27)$$

где суммирование ведется по числу частиц в одночастичных состояниях ε_i.

В силу принципа тождественности частиц, симметрии волновых функций и принципа Паули возможны лишь два случая:

1) $n_i = 0$ или $n_i = 1$ для частиц с полуцелым спином;

2) $n_i = 1, 2,...$ (произвольное целое число) для частиц с целым спином.

Используя (5.24), можно получить для средних чисел заполнения состояние с энергией ε_i следующие выражения:

$$\overline{n_i} = 1/\{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/(kT)] + 1\} \text{ (статистика Ферми – Дирака)}; \quad (5.28)$$

$$\overline{n_i} = 1/\{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/(kT)] - 1\} \text{ (статистика Бозе – Эйнштейна)}. \quad (5.29)$$

Энергия E и число частиц N всей системы равны соответственно

$$\overline{E} = \Sigma\,\varepsilon_i n_i = \Sigma\,\varepsilon_i/\{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/(kT)] \pm 1\}; \qquad (5.30)$$

$$N = \Sigma\,n_i = \Sigma\,1/\{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/(kT)] \pm 1\}. \qquad (5.31)$$

Для непрерывного спектра

$$N = \int g(\varepsilon)d\varepsilon\,/\{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/(kT)] \pm 1\}, \qquad (5.32)$$

где $g(\varepsilon)$ – плотность состояний.

При малой плотности частиц и высокой температуре, ($\overline{n} << 1$, $(\varepsilon - \mu) >> kT$), когда выполняется условие $(N/V) << (2mkT/h^2)^{3/2}$, обе

квантовые статистики сводятся к классическому пределу – распределению Больцмана:

$$\overline{n} = \exp[(\mu - \varepsilon)/(kT)]. \qquad (5.33)$$

5.6.2.1. Высокие температуры

При высоких температурах T квантовая статистика приводит к классическим результатам. Энергия системы, независимо от ее структуры, пропорциональна f: $E = \overline{\varepsilon} \sim f(kT/2)$, а теплоемкость не зависит от температуры: $C_v \sim f(k/2) = \text{const}$. Тогда $\overline{\Delta\varepsilon^2} \sim 1/f$, т.е. при увеличении числа степеней свободы величина относительной флуктуации энергии убывает и практически обращается в нуль для макроскопических систем, содержащих большое число частиц.

В системе с малым числом степеней свободы флуктуации могут быть велики, а применять законы статистической термодинамики к такой системе уже нельзя.

5.6.2.2. Низкие температуры

При низких температурах существенны квантовые эффекты, что сказывается на величине флуктуаций энергии в системе.

Пример 5.7. Энергия кристаллической решетки при $T << \theta_D = \pi\omega_{\max}/k$,
где θ_D – характеристическая дебаевская температура,

$$E = 3\pi^4 NkT^4/(5\theta_D^3);$$
$$C_v = 12\,\pi^4\, NkT^3/(5\theta_D^3);$$
$$\overline{\delta\varepsilon^2} = 20/(3\pi^4)\,(\theta_D/T)^2\,(1/N).$$

Флуктуации убывают с числом частиц N, но растут при понижении температуры и могут быть большими даже в системах с большим числом частиц.

Вопрос

Каковы причины роста флуктуаций энергии в квантовой системе при понижении T?

Пример 5.8. Флуктуации в идеальном газе, подчиняющемся статистике Ферми.

Так как $n_i = 1/\{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/(kT)] + 1\}$ и $\Delta n_i^2 = (1/\beta)\,(\partial n/\partial\mu)$,

$\beta = 1/(kT)$, то $(\partial n/\partial\mu) = \beta\, n_i(1 - n_i)$ и $\Delta n_i^2 = n_i(1 - n_i)$ (см. в 5.5 о флуктуациях).

Абсолютные квадратичные флуктуации обращаются в нуль для состояний с энергиями значительно ниже энергии Ферми, для которых $n_i = 1$, а также для состояний с $E > E_F$, для которых $n_i = 0$.

Пример 5.9. Для газа, подчиняющегося статистике Бозе – Эйнштейна,

$$n_i = 1/\ \{\exp[(\varepsilon_i - \mu)/(kT)] - 1\}.$$

Следовательно, $\overline{\Delta n_i^2} = \overline{n}_i\,(1 + n_i)$; $\delta^2 = \overline{\Delta n_i^2}\,/\,\overline{n_i^2} = 1 + 1/n_i$. Относительная флуктуация $\delta \approx 1$ даже при больших n_i.

Задача 5.27. Исследовать поведение флуктуации энергии в квантовой системе с f степенями свободы при высоких и при низких температурах.

Решение. Так же, как и в классическом случае (см. 5.5), абсолютная квадратичная флуктуация энергии

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon^2} - \overline{\varepsilon}^2 =$$
$$= \{\Sigma\, \varepsilon_i^2 \exp[-\varepsilon_i/(kT)]\, \omega(\varepsilon_i)\}/\{\Sigma \exp[-\varepsilon_i/(kT)]\, \omega(\varepsilon_i)\} -$$
$$- \{(\Sigma\, \varepsilon_i \exp[-\varepsilon_i/(kT)]\, \omega(\varepsilon_i))^2\}/\{(\Sigma \exp[-\varepsilon_i/(kT)]\, \omega(\varepsilon_i))^2\} =$$
$$= \partial/\partial[-1/(kT)]\ \{\Sigma\, \varepsilon_i \exp[-\varepsilon_i/(kT)]\, \omega(\varepsilon_i)\}/\{\Sigma \exp[-\varepsilon_i/(kT)]\, \omega(\varepsilon_i)\} =$$
$$= kT^2\, (\partial\varepsilon/\partial T)_v = kT^2 C_v;\ \delta\varepsilon^2 = \Delta\varepsilon^2/\varepsilon^2 = kT^2 C_v/\varepsilon^2.$$

Задача 5.28. Вырожденный электронный газ ($\exp(\mu/kT) << 1$) в металле (модель Зоммерфельда – электронный газ в потенциальном ящике). Найти химический потенциал (уровень Ферми), энергию и другие термодинамические характеристики.

Решение. Согласно принципу Паули при $T = 0$ К будут заполнены электронами первые $N/2$ состояния с энергиями $\varepsilon < \varepsilon_{max}$, N – полное число электронов. Все остальные состояния с $\varepsilon > \varepsilon_{max}$ будут свободными. При конечных температурах $T > 0$ фермиевское распределение начнет «размываться» (рис. 5.9).

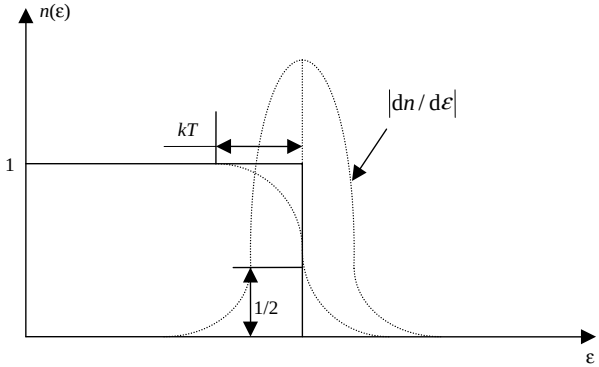

Рис. 5.9

Уровень Ферми определяется из условия нормировки

$$N = \int_0^\infty [g(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon]/\ \{\exp[(\varepsilon - \mu)/(kT)] + 1\}.$$

Для свободных электронов

$$g(\varepsilon) = 4\pi V(2m/h^2)^{3/2}\ \varepsilon^{1/2}.$$

Энергия электронного газа

$$\overline{E} = \int_0^\infty \varepsilon\, g(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon\ /\{\exp[(\varepsilon - \mu)/(kT)] + 1\} =$$

$$= 4\pi V(2m/h^2)^{3/2}\int_0^\infty \varepsilon^{3/2}\ \mathrm{d}\varepsilon\ /\{\exp[(\varepsilon - \mu)/(kT)] + 1\}.$$

Интегралы вида

$$F_{1/2}(\eta) = \int_0^\infty x^{1/2}\mathrm{d}x/[\exp(x - \eta) + 1] \text{ и } F_{3/2}(\eta) = \int_0^\infty x^{3/2}\mathrm{d}x/[\exp(x - \eta) + 1]$$

называются фермиевскими и в общем виде не берутся. Для их вычисления при низких температурах используем следующий прием (метод Зоммерфельда): пусть $F = \int_0^\infty f\varepsilon^n\mathrm{d}\varepsilon$ ($n > 1$),

где $f = 1/\{\exp[(\varepsilon - \mu)/(kT)] + 1\}$. Интегрируя по частям, получаем

$$F = [f\,\varepsilon^{n+1}/(n+1)]\Big|_0^\infty + [1/(n+1)]\int_0^\infty \varepsilon^{n+1}(\partial f/\partial\varepsilon)d\varepsilon.$$

Первое слагаемое обращается в нуль. Функция $\partial f/\partial\varepsilon$ – четная функция аргумента и имеет резкий максимум при $\varepsilon = \mu$. Обозначим $(\varepsilon - \mu)/(kT) = y$. Тогда

$F = [-1/(n+1)]\int_{-\mu/kT}^{\infty} (\mu + kTy)^{n+1}\,(\partial f/\partial y)\,dy$. При низких температурах, заменяя нижний предел на $-\infty$, получаем

$$F = (-1/(n+1))\int_{-\infty}^{\infty} (\mu + kTy)^{n+1}\,(\partial f/\partial y)\,dy. \qquad (5.34)$$

В области $\partial f/\partial y = 0$ y мало. Разлагая в ряд (5.34), получаем

$$F = (-1/(n+1))\int_{-\infty}^{\infty} \mu^{n+1}\{1 + (n+1)(kTy/\mu) + [(n+1)n/2](kT/2)^2y^2 + ...\}\,(\partial f/\partial y)\,dy.$$

Так как $(\partial f/\partial y)$ – четная функция, то $\int_{-\infty}^{\infty} y(\partial f/\partial y)\,dy = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2(\partial f/\partial y)\,dy = 2\int_{-\infty}^{\infty} y^2(\partial f/\partial y)\,dy \neq 0.$$

Поэтому

$$F = -1/(n+1)\mu^{n+1}\{\int_{-\infty}^{\infty} (\partial f/\partial y)dy + (n+1)^n/2\,(kT/\mu)^2\int_{-\infty}^{\infty} y'(\partial f/\partial y)dy + ...\};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\partial f/\partial y)dy = f\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1/[\exp(y) + 1]\Big|_{-\infty}^{+\infty} = -1;$$

$$y^2(\partial f/\partial y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\exp(-y)dy/[\exp(-y) + 1]^2 =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} y^2\exp(-y)dy/[\exp(y) + 1] =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} y^2 [(\exp(-y) - 2\exp(-2y) + 3\exp(-3y) -.....]dy =$$

$$= 4(1 - 1/2^2 + 1/3^2 -.....) = 4\pi^2/12 = \pi^2/3.$$

Таким образом,

$$F = \mu^{n+1}/(n + 1)\{ 1 - [(n + 1)\, n\, \pi^2 /6]\, (kT/\mu)^2 \} + o[(kT/\mu)^{\nu}],\ \nu > 2.$$

Подставляя $n = 1/2$, получаем

$$N = [4\pi(2m)^{3/2}/h^3]\, V \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon^{1/2}d\varepsilon)/\{\exp[(\varepsilon - \mu)/(kT)] + 1\} =$$

$$= [4\pi(2m)^{3/2}/h^3]\, (2/3)\mu^{3/2}[1 - (3\pi/24)\, (kT/\mu)^2] =$$

$$= [8\pi(2m)^{3/2}/(3h^3)]\, \mu^{3/2} - (4\pi/h^3)\, (2m)^{3/2}\, V[\, \pi^2(kT)^2/(12\mu^{1/2})]. \qquad (5.35)$$

При $T = 0$ К второй член равен нулю:

$$N = (8\pi)\, (2m)^{3/2}/(3h^3).$$

В то же время

$$N = (8\pi/3)\, V\, (2m\varepsilon_{max}/h^2)^{3/2} \text{ или } \varepsilon_{max} = [h^2/(2m)]\, [(3/8\pi)\, (N/V)^{2/3}].$$

Сравнивая, находим, что уровень Ферми в металле при абсолютном нуле равен максимальной энергии электрона: $\mu_{T = 0} = \mu_0 = \varepsilon_{max}$.

При температурах, близких к нулю, но $T \neq 0$ К, определим μ, решая (5.35) методом последовательных приближений для $T = 0$:

$N = 2/3\, A\, \mu^{3/2}$;

$\mu_o^{3/2} = \mu^{3/2}[1 + (\pi^2/8)\, (kT/\mu)^2]$;

$\mu_0 = \mu\, [1 + (\pi^2/8)\, (kT/\mu)^2]^{2/3}$.

Так как $(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha$; $(1 + \alpha)^{-1} \approx 1 - \alpha$, в первом приближении получаем

$\mu = \mu_0[1 - (\pi^2/12)\, (kT/\mu_0)^2]$.

Аналогичные вычисления проводятся для энергии ($n = 3/2$) электронного газа:

$$\overline{E} = A\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^{3/2}d\varepsilon/\ \{\exp[(\varepsilon - \mu)/(kT)] + 1\};$$

$$\overline{E} = (2/5)A\mu_o^{5/2}\{1 + (\pi^2/6)\cdot(3/2)(5/2)(kT/\mu_0)^2\} =$$
$$= (2/5)A\mu_o^{5/2}\{1 + (5/8)\pi^2(kT/\mu_0)^2\}.$$

Окончательно получаем

$E = (3/5)N\mu_0[1 + (5/12)\pi^2(kT/\mu_0)^2]$.

Теплоемкость вырожденного электронного газа

$C_v = (\partial E/\partial T)_v = N\pi^2 k^2T/(2\mu_0)$.

Задача 5.29. Вычислить энтропию ферми-газа при низкой температуре.

Решение. Выражение для энтропии имеет вид

$$S = \int C_v dT/T.$$

При низких температурах $C_v = (\partial\overline{E}/\partial T)_v = N\pi^2 k^2T/(2\mu_0)$.

Тогда $S = N\pi^2 k^2T/(2\mu_0)$. При $T \to 0$ $S \to 0$ в соответствии с третьим началом термодинамики.

Задача 5.30. Найти отношение между числом молекул орто- и параводорода при высокой температуре.

Решение. Спектр энергии молекулы водорода можно считать чисто вращательным вплоть до температур ~10^3 К, так как колебания молекулы и тем более электронные состояния возбуждаются при значительно больших температурах.

Вращательные уровни энергии имеют вид $\varepsilon_l = \hbar^2 l(l + 1)/(2I)$, где l – орбитальное квантовое число; I – момент инерции молекулы.

Каждый уровень ε_l вырожден $2l + 1$ раз по проекции орбитального момента. Ядра молекулы водорода – протоны имеют спин 1/2 и, следовательно, являются фермионами. Как следует из квантовой механики, учет симметрии волновой функции по отношению к перестановкам тождественных частиц ведет к тому, что четность орбитального момента двухатомной молекулы водорода в основном состоянии электронной подсистемы совпадает с четностью суммарного спина ядер. Параводородом называется состояние молекулы H_2 с суммарным спином протонов $S = 0$. Соответственно состояния ортоводорода вырождены по направлению проекции полного спина: $2S + 1 = 3$. Отношение x числа молекул ортоводорода к числу молекул параводорода определяется отношением соответствующих статистических сумм:

$$x = \frac{3Z_{\text{орто}}}{Z_{\text{пара}}} = \frac{3\sum\limits_{i=1,3,5}(2l+1)\exp[-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2IkT}]}{\sum\limits_{i=2,4,6}(2l+1)\exp[-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2IkT}]}.$$

При $T \to 0$ $x \to 0$. При высоких температурах ($\hbar/(2IkT) << 1$) вращательный спектр можно считать непрерывным и статистические суммы $Z_{0\text{рт}}$ и $Z_{\text{пара}}$ заменить на статистический интеграл:

$$Z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (2l + 1)\exp[\hbar^2 l\,(l + 1)/(2IkT)]\mathrm{d}l = 2IkT/\hbar^2.$$

Поэтому при высоких температурах отношение между числом молекул орто- и параводорода $x = 3$.

Задача 5.31. Система имеет невырожденный спектр: $\varepsilon_n = n\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2,..., N$.

Найти среднюю энергию.

Решение. Статистическая сумма системы $Z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp(-h\omega n/kT) =$

$= 1/\{1 - \exp[-h\omega/(kT)]\} - \exp[-h\omega N/(kT)]/\{1 - \exp[-h\omega/(kT)]\} =$

$= \{1 - \exp[-h\omega N/(kT)]\}/\{1 - \exp[-h\omega/(kT)]\};$

$E = -\partial\ln Z/\partial[1/(kT)] = h\omega/\{\exp[h\omega/(kT)] - 1\} - h\omega N/\{\exp[h\omega N/(kT)] - 1\}.$

Задача 5.32. Определить температуру бозе-конденсации бозе-газа с законом дисперсии $\varepsilon = p^2/(2m)$.

Решение. Химический потенциал бозе-газа с понижением температуры монотонно убывает по абсолютной величине, оставаясь отрицательным, и достигает нуля при некоторой температуре T_c. Ниже этой температуры вплоть до абсолютного нуля химический потенциал равен нулю, поэтому число частиц в газе, описываемом распределением Бозе, теперь не сохраняется – число частиц с понижением температуры уменьшается и стремится к нулю при $T \to 0$. Это явление объясняется образованием при $T \to T_c$ бозе-конденсата, т.е. макроскопически большого числа частиц на низшем уровне $\varepsilon = 0$. С понижением температуры число частиц в бозе-конденсате возрастает, а число частиц на всех уровнях с $\varepsilon > 0$ уменьшается. Полное число частиц в системе, разумеется, сохраняется. Найдем химический потенциал бозе-газа при низкой температуре $T \approx T_c$ из условия сохранения полного числа частиц:

$$N = \int_0^\infty g(\varepsilon)/\{\exp[(\varepsilon - \mu)/(kT)] - 1\}\mathrm{d}\varepsilon;$$

$$N = [2\pi(2m)^{3/2}V/h^3] \int_0^\infty \varepsilon^{1/2}/\{\exp[(\varepsilon - \mu)/(kT)] - 1\}\mathrm{d}\varepsilon =$$

$$= [2\pi(2m)^{3/2}V/h^3] \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \exp[(\varepsilon - \mu)/(kT)]^n \varepsilon^{1/2}\, \mathrm{d}\varepsilon =$$

$$= [(2\pi mkT)^{3/2} V/h^3] \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \exp[\mu n/(kT)]\,(1/n^{3/2}).$$

Это трансцендентное уравнение неявно определяет химический потенциал как функцию числа частиц N, объема V и температуры T. Определим температуру бозе-кондесации T_c, положив в полученной формуле $\mu = 0$.

Учитывая, что $\sum_{n=1}^\infty 1/n^{3/2} = \zeta(3/2) = 2{,}612$, где $\zeta(x)$ – дзета-функция Римана, получаем температуру бозе-конденсата в виде

$$T_c = [h^2/(2{,}612)^{2/3}]\,(N/V)^{2/3}[1/(2\pi mk)].$$

Задача 5.33. Найти среднюю энергию фононного газа в модели Дебая в случае низких температур. Объем тела V, скорость продольных и поперечных фононов $v_\parallel$ и $v_\perp$ соответственно.

Решение. Закон дисперсии фононов в модели Дебая записывается выражением

$$\varepsilon = v_\parallel |\, p\, |,\ \varepsilon = v_\perp |\, p\, |.$$

Плотность состояний для фононного газа $g(\varepsilon) = (4\pi V/h^3)\,(1/v_\parallel^3 + 2/v_\perp^3)\varepsilon^2$.

Функция распределения для фононов имеет вид функции Планка:

$$n(\varepsilon) = 1/\{\exp[\varepsilon/(kT)] - 1\}.$$

Средняя энергия фононного газа

$$\overline{E} = \int_0^\infty \varepsilon^3/\{\exp[\varepsilon/(kT)] - 1\}\,(4\pi V/h^3)\,(1/v_\parallel^3 + 2/v_\perp^3)\mathrm{d}\varepsilon.$$

Максимальная энергия определяется условием равенства числа возможных типов фононов в кристалле числу степеней свободы атомов в кристалле:

$$\int_0^{\omega_{\max}} g(\varepsilon)d\varepsilon = 3N.$$

При низких температурах ($kT << \varepsilon_{\max}$) можно максимальную энергию $\varepsilon_{\max}$ устремить к бесконечности. Тогда получаем

$$\overline{E} = (4\pi V/h^3)\,(1/v_{\parallel}^3 + 2/v_{\perp}^3)\int_0^{\infty} \varepsilon^3/[\exp(\varepsilon/(kT)) - 1]d\varepsilon =$$

$$= (4\pi V/h^3)\,(1/v_{\parallel}^3 + 2/v_{\perp}^3)\,(kT)^4\int_0^{\infty} x^3/[\exp(x) - 1]\,dx =$$

$$= 4\pi^5/(15h^3)\,(1/v_{\parallel}^3 + 2/v_{\perp}^3)\,(kT)^4.$$

Задача 5.34. Определить среднюю энергию и давление вырожденного электронного ультрарелятивистского газа при $T = 0$.

Решение. Закон дисперсии газа $\varepsilon = c\,|\mathbf{p}|$. Плотность состояний с учетом двух направлений спина $g(\varepsilon) = [8\pi V/(h^3c^3)]\,\varepsilon^2$. Химический потенциал газа определяется из условия сохранения полного числа частиц:

$$N = \int_0^{\infty} n_F(\varepsilon)\,g(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^{\infty} [8\pi V/(h^3c^3)]\varepsilon^2 d\varepsilon = [8\pi V/(h^3c^3)]\,(\mu^3/3);$$

$$\mu = hc[3N/(8\pi V)]^{1/3}.$$

Средняя энергия газа

$$\overline{E} = \int_0^{\infty} \varepsilon\, n_F(\varepsilon)\,g(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^{\infty} [8\pi V/(h^3c^3)]\,\varepsilon^2 d\varepsilon =$$

$$= [8\pi V/(h^3c^3)]\,(\mu^4/4) = hc[3N/(8\pi V)]^{1/3}.$$

Давление газа при $T = 0$ может быть найдено по формуле

$$p = -(\partial\,\overline{E}\,/\partial V)_T = (1/3)\,(hc)\,[3N/(8\pi)]^{1/3}V^{-4/3} = (1/3)\,(\overline{E}\,/V).$$

Задача 5.35. Определить химический потенциал и теплоемкость ультрарелятивистского сильно вырожденного идеального ферми-газа с законом дисперсии $\varepsilon = c\,|\mathbf{p}|$.

Решение. Химический потенциал можно найти из условия сохранения полного числа частиц в системе:

$$N = \int_0^\infty n(\varepsilon)\, g(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = [8\pi V/(h^3c^3)] \int_0^\infty \varepsilon^2 \mathrm{d}\varepsilon \,/\{\exp\,[(\varepsilon - \mu)/(kT)] + 1\}.$$

Средняя энергия газа $\overline{E} = [8\pi V/(h^3c^3)] \int_0^\infty \varepsilon^3 \mathrm{d}\varepsilon/\{\exp[(\varepsilon - \mu)/(kT)] + 1\}$.

Используем формулу вычисления интегралов Ферми вида

$$F = \int_0^\infty \varepsilon^n \mathrm{d}\varepsilon/\{\exp\,[(\varepsilon - \mu)/(kT)] + 1\} =$$

$$= [\mu^{n=1}/(n + 1)]\{1 - [(n + 1)n\pi^2/6]\,(kT/\mu)^2 + ...\}.$$

Тогда получаем $N = [8\pi V\mu^3/(3h^3c^3)]\,[1 + (\pi kT/\mu)^2 + ...]$;

$$\overline{E} = [2\,\pi V\mu^4/(\,h^3c^3)]/[1 + 2(\pi kT/\mu)^2 + \ldots].$$

Химический потенциал при конечной температуре T

$$\mu = \mu_0[1 - (1/3)\,(\,\pi kT/\mu_0)^2 + ...],$$

где $\mu_0 = hc[3N/(8\pi V)]^{1/3}$ – химический потенциал газа при $T = 0$.

Средняя энергия

$$\overline{E} = [2\,\pi V\mu^4/(h^3c^3)]\,[1 + (2/3)\,(\pi kT/\mu_0)^2 + ...\,] =$$
$$= (3/4)\,\mu_0[1 + (2/3)\,(\,\pi kT/\mu_0)^2 + \ldots].$$

Теплоемкость при постоянном объеме

$$C_v = (\partial\,\overline{E}\,/\partial T)_v = Nk(\pi^2K^2T)/\mu_0.$$

Ультрарелятивистский ферми-газ возникает в случае, если кинетическая энергия частиц газа много больше энергии покоя:

$$\varepsilon = (m_oc^2 + p^2c^2)^{1/2} >> c\,|\mathbf{p}|.$$

Такой случай осуществляется в ферми-газе при наличии огромного давления, например, в недрах сверхплотных звезд (белых карликов).

Задача 5.36. Определить ток термоэлектронной эмиссии, когда электроны подчиняются статистике Ферми. Работа выхода электрона из металла W. Рассмотреть случай, когда $W - \mu >> kT$ (μ – химический потенциал).

Решение. Условие возможности вылета электрона через поверхность металла в вакуум имеет вид $p_x \geq (2mW)^{1/2}$. Плотность тока электронов, вылетающих через поверхность,

$$j_x = e\int\limits_{\sqrt{2mW}}^{\infty} dp_x\,(p_x/m)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_y\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_z\, z/h^3)[1/\{\exp[(\varepsilon-\mu)/(kT)]+1\}],$$

где $\varepsilon = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/(2m)$.

Введем цилиндрическую систему координат. Положим

$p_\perp = (p_y^2 + p_z^2)^{1/2}$.

Тогда получаем

$$j_x = e\int\limits_{\sqrt{2mW}}^{\infty} dp_x(p_x/m)\int\limits_{0}^{\infty} 2\pi p_\perp dp_\perp(2/h^3)\{\exp[(p_x^2+p_\perp^2)/(2mkT)-\mu/(kT)]+1\}^{-1} =$$

$$= (4\pi mkTe/h^3)\int\limits_{\sqrt{2mW}}^{\infty}(p_x/m)\ln\{1+\exp[(\mu-p_x^2/(2m))/(kT)]\}dp_x =$$

$$= (4\pi mkTe/h^3)\int\limits_{W}^{\infty} d\varepsilon_x\ln\{1+\exp[(\mu-\varepsilon_x)/(kT)]\}.$$

Поскольку $\exp[(\mu-\varepsilon_x)/(kT)] << 1$ при всех $\varepsilon_x >> W$, то, используя приближение $\ln(1+x) \approx x$, получаем формулу для плотности термоэлектронного тока в виде

$$j_x = (4\pi mkTe/h^3)\int\limits_{W}^{\infty} d\varepsilon_x\exp[(\mu-\varepsilon_x)/(kT)] =$$

$$= (4\pi me/h^3)(kT)^2\exp[(\mu-W)/(kT)].$$

Задача 5.37. Найти число ударов о стенку сосуда площадью σ частиц ферми-газа при $T = 0$. Плотность газа n, закон дисперсии $\varepsilon = p^2/(2m)$, спин $S = 1/2$.

Решение. Число ударов об стенку площадью σ равно потоку частиц через эту площадь перпендикулярно стенке. Плотность потока частиц вдоль оси Oz

$$j_z = \overline{nv_z} = 2n\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}(p_z/m)n_F(\mathbf{p})d^3p =$$

$$= 2n\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}(p_z/m)\theta(|\mathbf{p}|-p_F)dp_x dp_y dp_z =$$

$$= 2n\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{p_F}[(p^3\cos\alpha)/m]\sin\alpha\, d\alpha d\varphi dp = \pi n p^4/(2m),$$

где θ – функция Хевисайда: $\theta(p - p_F) = 1$ при $|\mathbf{p}| < p_F$, $\theta(p\text{-}p_F) = 0$ при $|\mathbf{p}| > p_F$.

Фермиевский импульс p_F найдем из соотношения

$$N/V = n = 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(|\mathbf{p}| - p_F)\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z = 8\pi\int\limits_{0}^{p_F} p^2\mathrm{d}p = 8\pi p_F^{\ 3}/3;$$

$$p_F = =3n/(8\pi)]^{1/3}.$$

Окончательно получаем, что число ударов о стенку

$I = j_z\,\sigma = [3n/(8\pi)]^{4/3}\,[\pi n/(2m)]\,\sigma = (3/8)^{4/3}\,[n^{7/3}/(\pi^{1/3}\,2m)]\sigma.$

Задания

1. Найти отношение числа молекул орто- и парадейтерия при высоких температурах (спин ядра дейтерия равен единице).
2. Доказать, что в двумерном бозе-газе невозможна бозе-конденсация.
3. Найти теплоемкость одно- и двумерной кристаллических решеток при низких температурах в рамках модели Дебая.
4. Найти энергию идеального бозе-газа вблизи точки бозе-конденсации.
5. Показать, что химический потенциал фононного газа равен нулю.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970. 503 с.

Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.

Голдстейн Г. Классическая механика. М.: Гостехтеоретиздат, 1957. 408 с.

Давыдов А.С. Квантовая механика. М.: Наука, 1973. 703 с.

Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.

Кронин Дж., Гринберг Д., Телегди В. Сборник задач по физике с решениями. М.: Атомиздат, 1971. 335 с.

Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1989. 767 с.

Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Механика. М.: Наука, 1988. 215 с.

Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Статистическая физика. М.: Наука, 1995. 605 с.

Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1988. 509 с.

Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.

Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 659 с.

Левич В.Г. Курс теоретической физики: В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1969. 910 с; Т. 2. М.: Наука, 1971. 936 с.

Сборник задач по теоретической физике/ Л.Г. Гречко, В.И. Сугаков, О.Ф. Томасевич, А.М. Федорченко. М.: Высш. шк., 1987. 319 с.

Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1989. 504 с.

Флюгге З. Задачи по квантовой механике: В 2 т. М.: Мир, 1974. Т 1. 341 с.; Т. 2. 315 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Векторы

Векторная алгебра

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = \mathbf{a}_0 a\,,$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные векторы (орты), направленные по осям x, y, z;

$\mathbf{a}_0$ – единичный вектор в направлении $\mathbf{a}$.

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}) = ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,; \qquad (\text{П}1.1)$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \equiv \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}; \qquad (\text{П}1.2)$$

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = ab\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})\,; \qquad (\text{П}1.2\text{а})$$

$$(\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{b}[\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{c}[\mathbf{a}, \mathbf{b}])\,; \qquad (\text{П}1.3)$$

$$[\mathbf{a}[\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\,; \qquad (\text{П}1.4)$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\,[\mathbf{c}, \mathbf{d}] = (\mathbf{a}, \mathbf{c})(\mathbf{b}, \mathbf{d}) - (\mathbf{a}, \mathbf{d})(\mathbf{b}, \mathbf{c})\,; \qquad (\text{П}1.5)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{1}{2}\{\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c})\} + \frac{1}{2}\{\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c})\} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}[\mathbf{c}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]] + \frac{1}{2}\{\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c})\}\,. \qquad (\text{П}1.6)$$

Из (П1.5) легко выводится основная формула сферической тригонометрии. Пусть $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ – единичные радиусы-векторы вершин сферического треугольника ABC со сторонами a, b с и углами α, β, γ. Полагая в (I,5) $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}_3$, $\mathbf{d} = \mathbf{r}_1$, находим

$$[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2][\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3] = (\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) - (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)\,. \qquad (\text{П}1.5\text{а})$$

По определению

$$\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \cos\gamma; \quad \mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 = \cos\alpha; \quad \mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 = \cos\beta;$$
$$\left|\left[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\right]\right| = \sin\gamma; \quad \left|\left[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3\right]\right| = \sin\beta;$$
$$\left[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3\right]\left[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\right] = \sin\beta \sin\gamma \cos\delta,$$

где δ – угол между плоскостями *OAB* и *OAC*(*O* – центр сферы).

Подстановка этих выражений в (П1.5а) дает основную формулу сферической тригонометрии:

$$\cos\alpha = \cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos\delta. \qquad (П1.5б)$$

Полярными называются такие векторы, которые не изменяются при инверсии координатных осей $\mathbf{r} \to (-\mathbf{r})$. К полярным векторам принадлежат такие векторы, как скорость, сила и т.п.

Аксиальными, или псевдовекторами, называются векторы, изменяющие свой знак при инверсии, т.е.

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = -\mathbf{a}(-\mathbf{r}). \qquad (П1.6)$$

Аксиальным вектором является вектор, выражающий векторное произведение двух полярных векторов.

Векторный анализ

Дифференцирование вектора, зависящего от скалярного аргумента:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathbf{a}_0(x)a(x) = \mathbf{a}_0\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} + a\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}_0}{\mathrm{d}x} = \mathbf{a}_0\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} + \mathbf{b},$$

где $\mathbf{b} = a\omega\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_0 \perp \mathbf{a}_0$ и $\omega = \left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}_0}{\mathrm{d}x}\right|$ – быстрота изменения угла φ, определяющего ориентацию вектора $\mathbf{a}$.

Полная производная от $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ по времени

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt} =$$
$$= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + v_x\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\mathrm{grad})\mathbf{A} \qquad (П1.7)$$

Скалярное поле

Скалярное поле $\varphi(\mathbf{r})$ характеризуется значением скаляра φ в каждой точке пространства. Быстрота пространственного изменения скаляра $\varphi(\mathbf{r})$ характеризуется производной по данному направлению $\mathbf{l}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\mathbf{l},\mathbf{i})+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\mathbf{l},\mathbf{j})+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\mathbf{l},\mathbf{k})=|\mathbf{l}||\mathrm{grad}\,\varphi|\cos(\mathbf{l},\mathrm{grad}\,\varphi) \quad (\text{П}1.8)$$

где градиент скаляра φ

$$\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k} \quad (\text{П}1.9)$$

представляет вектор, направленный в сторону быстрейшего возрастания φ и равный производной от φ в этом направлении.

Модуль градиента

$$|\mathrm{grad}\,\varphi|=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\,. \quad (\text{П}1.10)$$

Дифференциальный оператор «набла» ∇ (оператор Гамильтона) определяется соотношением

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\,. \quad (\text{П}1.11)$$

Значок ∇ не помечается шрифтом, так как это принято для векторов. Оператор есть символ, показывающий, какие операции нужно выполнить над стоящими после него функциями координат. Например, $\nabla\varphi$ означает, что от функции φ следует взять частные производные и построить вектор, компоненты которого равны этим частным производным.

С помощью (П1.11) можно формально записать (П1.9) в виде

$$\mathrm{grad}\,\varphi=\nabla\varphi\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\,. \quad (\text{П}1.12)$$

Из определения (П1.11) следует

$$\nabla r = \mathbf{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\mathbf{r}}{r}; \qquad (\text{П}1.13)$$

$$\text{grad}\ \varphi(r) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\ \text{grad}\ \mathbf{r} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{\mathbf{r}}{r}; \qquad (\text{П}1.14)$$

$$\text{grad}\ (\varphi + \psi) = \text{grad}\ \varphi + \ \text{grad}\ \psi; \qquad (\text{П}1.15)$$

$$\text{grad}\ \varphi\psi = \psi\ \text{grad}\ \varphi + \varphi\ \text{grad}\ \psi; \qquad (\text{П}1.16)$$

$$\text{grad}\ f(\varphi) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi}\ \text{grad}\ \varphi. \qquad (\text{П}1.17)$$

При вычислении градиента от функций, зависящих от расстояния r между двумя точками,

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

нужно различать градиенты по координатам точек (x, y, z) и (x_0, y_0, z_0).

Имеем

$$\text{grad}\ r = \frac{\mathbf{i}(x - x_0) + \mathbf{j}(y - y_0) + \mathbf{k}(z - z_0)}{r},$$

$$\text{grad}_0\ r = -\frac{\mathbf{i}(x - x_0) + \mathbf{j}(y - y_0) + \mathbf{k}(z - z_0)}{r}.$$

Следовательно,

$$\text{grad}_0\ \varphi(r) = -\text{grad}\ \varphi(r). \qquad (\text{П}1.18)$$

Линейный интеграл вектора $\mathbf{a}$ по контуру определяется соотношением

$$\int_L \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{l} = \int \left(a_x \mathrm{d}l_x + a_y \mathrm{d}l_y + a_z \mathrm{d}l_z\right).$$

Циркуляцией именуется интеграл по замкнутому контуру

$$\oint \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Если вектор $\mathbf{a}$ можно представить в виде

$$\mathbf{a} = \ \text{grad}\ \varphi,$$

то он называется потенциальным вектором, а φ – потенциалом.

Циркуляция потенциального вектора равна нулю:

$$\oint \operatorname{grad} \varphi \, d\mathbf{l} = 0; \qquad (П1.19)$$

$$\int_L \operatorname{grad} \varphi \, d\mathbf{l} = \varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_2). \qquad (П1.20)$$

Геометрическое изображение скалярного поля осуществляется нанесением линий равного потенциала: $\varphi = \text{const}$. Вектор $\operatorname{grad} \varphi$ направлен по нормали к поверхности $\varphi = \text{const}$. Чем быстрее происходит изменение функции φ, тем больше $\operatorname{grad} \varphi$ и тем ближе друг к другу расположены линии равного потенциала.

Поверхностным интегралом от функции $\varphi(\mathbf{r})$ называется

$$\int \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{S} = \int \varphi \, \mathbf{n} d\mathbf{S} = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \Delta \mathbf{S}_i.$$

Интеграл по замкнутой поверхности обозначается $\oint \varphi \, d\mathbf{S}$.

Рассмотрим интеграл по поверхности бесконечно малого параллелепипеда объемом $V \to 0$. Будем считать, что сторонами параллелепипеда являются бесконечно малые площадки $(dx\,dy)$, $(dx\,dz)$, $(dy\,dz)$ на координатных поверхностях (xy), (xz) и (yz), взятые у начала координат.

Имеем, очевидно,

$$\oint_{V \to 0} \varphi \, d\mathbf{S} = \mathbf{i}\{\varphi(0 + dx) dydz - \varphi(0) dydz\} +$$
$$+ \mathbf{j}\{\varphi(0 + dy) dxdz - \varphi(0) dxdz\} +$$
$$+ \mathbf{k}\{\varphi(0 + dz) dxdy - \varphi(0) dxdy\} =$$
$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dxdydz = \left(\mathbf{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) V,$$

откуда находим равенство

$$\operatorname{grad} \varphi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \varphi \, \mathbf{n} \, dS}{V}. \qquad (П1.21)$$

Формула (П1.21) позволяет дать второе интегральное определение оператора Гамильтона:

$$\nabla = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \mathbf{n}\, \mathrm{d}S}{V}, \qquad (\text{П}1.22)$$

идентичное с (П1.11).

Подчеркнем, что поскольку поверхность интегрирования стягивается в точку при стремлении V к нулю, интегральный оператор (П1.22) не зависит от формы этой поверхности.

Из (П1.21) следует интегральное соотношение

$$\oint \varphi\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \int \mathrm{grad}\, \varphi\, \mathrm{d}V, \qquad (\text{П}1.23)$$

связывающее поверхностный интеграл от скаляра φ с объемным интегралом от вектора $\mathrm{grad}\, \varphi$. Объем интегрирования правой части (П1.23) охватывается поверхностью S, по которой выполняется поверхностное интегрирование в левой части (П1.23).

Для доказательства формулы (П1.23) разобьем конечный объем на бесконечно малые объемы, для каждого из которых справедлива формула (П1.21). Проведем суммирование по всем этим объемам. Интегрирование по всем внутренним поверхностям, образующим границы между объемами, проводится дважды. При этом направления внешних нормалей будут противоположными и интегралы по внутренним поверхностям будут взаимно сокращаться. Останутся лишь интегралы по внешним поверхностям, образующие в сумме интеграл по поверхности, охватывающей объем V.

Векторное поле

Векторным полем называется область пространства, в каждой точке которой задано значение вектора $\mathbf{a}(\mathbf{r})$. Графическое изображение векторного поля осуществляется с помощью векторных линий. Вектор $\mathbf{a}(\mathbf{r}_0)$ является вектором касательной к векторной линии в точке $\mathbf{r}_0$. При этом векторные линии проводятся так, что густота линий пропорциональна абсолютному значению $|\mathbf{a}|$.

В векторном поле можно определить поток вектора через площадку, характеризуемую вектором $\mathrm{d}\mathbf{S}$ в виде

$$\mathrm{d}j = \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{S}. \qquad (\text{П}1.24)$$

Поверхностным интегралом от вектора **a** именуется величина

$$j = \int_S \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{S} = \int \mathbf{an}\mathrm{d}S = \int a_n \mathrm{d}S = \int a_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int a_y \mathrm{d}x\mathrm{d}z + \int a_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \quad (\text{П}1.25)$$

где $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}S\cos(\mathbf{n},\ \ \mathbf{i})$ и т.д.

Поверхностный интеграл представляет поток вектора **a** через поверхность *S*.

Если поверхность *S* замкнута, то поверхностный интеграл обозначается через $\oint \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{S}$. Для поверхностного интеграла по замкнутой поверхности имеет место теорема Гаусса – Остроградского:

$$\oint \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{S} = \int \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \mathrm{d}V. \quad (\text{П}1.26)$$

В (П1.26) интегрирование ведется по объему, охватываемому поверхностью интегрирования в поверхностном интеграле.

Доказательство проводится путем разбиения объема на бесконечно малые объемы. Оно может быть проведено формально с помощью определения (П1.22) оператора Гамильтона:

$$\nabla \mathbf{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint (\mathbf{an})\mathrm{d}S}{V}, \quad (\text{П}1.27)$$

откуда, как и при выводе (П1.23), суммируя элементарные объемы, получаем

$$\int (\nabla \mathbf{a})\mathrm{d}V = \oint \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Пользуясь определением (П1.11), приходим к теореме (П1.26).

Скалярная величина, допускающая два тождественных представления,

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}; \quad (\text{П}1.28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla \mathbf{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint \mathbf{an}\mathrm{d}S}{V}. \quad (\text{П}1.29)$$

основанных на разных формах оператора Гамильтона, именуется дивергенцией или расхождением вектора **a**. Теорему Гаусса – Остроградского можно переписать в виде

$$\oint \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{S} = \int \operatorname{div} \mathbf{a}\ \mathrm{d}V. \qquad (\text{П}1.30)$$

Дивергенция играет важнейшую роль в теории векторного поля.

Из выражения (П1.29) следует, что $\operatorname{div}\mathbf{a}$ представляет поток вектора $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ через бесконечно малую поверхность, окружающую данную точку поля **r**, отнесенный к единице объема.

Векторное поле называется соленоидальным, если в каждой точке поля

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = 0\,.$$

Это означает, что поток вектора через поперечное сечение трубки, образованной группой векторных линий, имеет постоянное значение вдоль трубки. В тех точках поля, в которых $\operatorname{div}\mathbf{a} \neq 0$, имеются источники ($\operatorname{div}\mathbf{a} > 0$) или стоки ($\operatorname{div}\mathbf{a} < 0$) поля. Численное значение $\operatorname{div}\mathbf{a}$ называют мощностью или обильностью источников поля.

Имеют место очевидные формулы:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\left(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\right) = \operatorname{div}\mathbf{a}_1 + \operatorname{div}\mathbf{a}_2\,;\\ \operatorname{div} c\mathbf{a} = c\ \operatorname{div}\mathbf{a} \quad (c = \mathrm{const})\,;\\ \operatorname{div}\varphi(\mathbf{r}) = -\operatorname{div}_0\varphi(r)\,,\end{gathered} \qquad (\text{П}1.31)$$

где

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\,;$$

индекс 0 означает дифференцирование по координатам x_0, y_0, z_0.

Пусть $\mathbf{a}(u)$ – вектор, зависящий только от скалярной величины u. Тогда

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(u) = \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u}\nabla u\right) = (\dot{\mathbf{a}}\ \operatorname{grad} u)\,, \qquad (\text{П}1.32)$$

где точкой обозначено дифференцирование по аргументу u.

Наряду с операцией $\operatorname{div}\mathbf{a}$, отвечающей скалярному произведению векторов ∇ и **a**, можно рассмотреть операцию образования вектора

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = [\nabla\mathbf{a}]. \qquad (П1.33)$$

Вектор, представляющий векторное произведение оператора Гамильтона ∇ и вектора **a**, носит название ротора или вихря вектора **a**.

Вычисление по формуле (П1.2) с учетом (П1.11) дает

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right). \qquad (П1.34)$$

Пользуясь теперь интегральным выражением оператора Гамильтона, имеем другое представление вектора:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint[\mathbf{n},\mathbf{a}]\mathrm{d}S}{V}. \qquad (П1.35)$$

Из определения (П1.35), аналогично (П1.23) и (П1.30), следует

$$\int \operatorname{rot}\mathbf{a}\,\mathrm{d}V = \oint[\mathrm{d}\mathbf{S}\mathbf{a}]. \qquad (П1.36)$$

Рассмотрим теперь проекцию вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ на произвольное направление, характеризуемое единичным вектором **N**. Из того же определения (П1.35) следует

$$\mathbf{N}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\mathbf{N}\oint[\mathbf{n},\mathbf{a}]\mathrm{d}S}{V} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint\mathbf{a}[\mathbf{N},\mathbf{n}]\mathrm{d}S}{V}.$$

Поскольку результат, получающийся после перехода к пределу, не зависит от формы поверхности, ее можно выбрать произвольно. Если направить ось z вдоль **N** и в качестве поверхности взять цилиндр с основанием S и высотой h, то

$$\oint\mathbf{a}[\mathbf{n},\mathbf{N}]\mathrm{d}S = \oint\mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{l}h.$$

В выражении справа интегрирование ведется по боковой поверхности цилиндра, поскольку на его основаниях $\mathbf{n}\|\mathbf{N}$ и их векторное

произведение обращается в нуль. Через $\mathrm{d}\mathbf{l}$ обозначен элемент длины на боковой поверхности, перпендикулярный векторам **n** и **N**.

Отсюда следует

$$\mathbf{N}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{h}{Sh}\oint \mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{l} = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint \mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{l}\,.$$

Разбивая произвольный объем на указанные малые объемы и проводя суммирование по ним, находим, что поверхностные интегралы по внутренним поверхностям и линейные интегралы по сторонам соприкасающихся ячеек взаимно сокращаются, так что

$$\oint \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{l} = \int \mathrm{rot}\ \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{S}\,. \qquad (\text{П}1.37)$$

Формула (П1.37), связывающая линейный интеграл от вектора **a** по произвольному замкнутому контуру с поверхностным интегралом от $\mathrm{rot}\ \mathbf{a}$, носит название теоремы Стокса.

Из вывода теоремы ясно, что интегрирование ведется по произвольной поверхности, опирающейся на контур интегрирования.

Из теоремы Стокса становится ясным геометрический смысл понятия ротора. Для того чтобы интеграл по замкнутому контуру от вектора **a** был отличен от нуля, необходимо, чтобы некоторые (хотя бы векторные) линии имели характер замкнутых кривых. Такими являются, например, линии вектора скорости вращения твердого тела или линии тока текущей жидкости, совершающей вихревое движение. Отсюда и название ротор или вихрь.

Из теоремы Стокса следует:

1) если $\mathbf{a} = \mathrm{grad}\ \varphi$, то $\oint \mathbf{a}\mathrm{d}\mathbf{l} = 0$. Следовательно,

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{a} = \mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\ \varphi = 0\,, \qquad (\text{П}1.38)$$

т.е. если **a** – потенциальный вектор, то поле вектора **a** является безвихревым. Наоборот, всякий вектор, поле которого является безвихревым, – вектор потенциальный;

2) если вектор **a** является соленоидальным, так что

$$\mathrm{div}\ \mathbf{a} = 0\,,$$

то его можно представить в виде некоторого вектора:

$$\mathbf{a} = \mathrm{rot}\ \mathbf{c}\,.$$

Наоборот, поле вектора **a**, ротор которого отличен от нуля, имеет соленоидальный характер:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=0.$$

Источники и стоки в вихревом поле отсутствуют. Доказательство этих утверждений проводится прямым вычислением. Например,

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=\nabla\left[\nabla\mathbf{a}\right]=\mathbf{a}\left[\nabla\nabla\right]=0.$$

Образования скаляра $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ являются основными операциями дифференцирования вектора.

Расхождение и вихрь вектора **a** определяют само векторное поле.

При вычислении дивергенции и вихря от вектора $\mathbf{a}(u)$, зависящего от скалярного аргумента *u*, получается

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(u)=\left(\nabla\mathbf{a}(u)\right)=\left(\nabla u\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u}\right)=\left(\operatorname{grad}u,\,\dot{\mathbf{a}}\right); \qquad (\text{П}1.39)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(u)=\left[\nabla u\frac{\mathrm{d}\mathbf{a}}{\mathrm{d}u}\right]=\left[\operatorname{grad}u,\,\dot{\mathbf{a}}\right], \qquad (\text{П}1.40)$$

где точка означает дифференцирование по скаляру *u*.

Вычисление производных от произведения и повторных производных. Эти операции осуществляются проще всего с помощью оператора Гамильтона. При этом должны соблюдаться два правила:

1. Оператор Гамильтона должен поочередно действовать на каждую расположенную за ним скалярную и векторную величины.

2. С оператором Гамильтона следует обращаться как с обычным вектором, но его нельзя переставлять местами с той величиной, на которую он действует, и выносить последнюю за знак ∇. Для ясности при выполнении промежуточных преобразований мы будем указывать величину, на которую действует оператор Гамильтона, индексом внизу, например ∇_φ или ∇_a.

Важнейшие примеры:

1. $\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\nabla\varphi\psi=\varphi\nabla_\psi\psi+\psi\nabla_\varphi\varphi=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi$. (П1.41)

2. $\operatorname{div}\psi\mathbf{a}=\nabla\varphi\mathbf{a}=\mathbf{a}\nabla_\varphi\varphi+\varphi\nabla_a\mathbf{a}=\mathbf{a}\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{div}\mathbf{a}$. (П1.42)

В частности,

$$\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r}\equiv\operatorname{div}\mathbf{n}=r\operatorname{grad}\frac{1}{r}+\frac{1}{r}\operatorname{div}\mathbf{r}=\frac{3}{r}-\frac{1}{r}=\frac{2}{r};$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a})=\left[\nabla,\,\varphi\mathbf{a}\right]=\varphi\left[\nabla_a\mathbf{a}\right]+\left[\nabla_\varphi\varphi,\,\mathbf{a}\right]=\varphi\operatorname{rot}\mathbf{a}+\left[\operatorname{grad}\varphi,\,\mathbf{a}\right]. \qquad (\text{П}1.43)$$

3. $\operatorname{div}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\nabla[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\nabla_a[\mathbf{a},\mathbf{b}]+\nabla_b[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\mathbf{b}[\nabla_a\mathbf{a}]-\nabla_b[\mathbf{b},\mathbf{a}]=$

$$=\mathbf{b}[\nabla_a\mathbf{a}]-\mathbf{a}[\nabla_b\mathbf{b}]=\mathbf{b}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a}-\mathbf{a}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{b}\,. \qquad (\text{П}1.44)$$

Мы провели циклическую перестановку векторов. Во втором слагаемом предварительно изменен порядок векторного умножения. В противном случае при циклической перестановке было бы нарушено правило 2: вектор **b** был бы передвинут за знак ∇_b.

4. $\mathrm{rot}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\left[\nabla[\mathbf{a},\mathbf{b}]\right]=\left[\nabla_a[\mathbf{a},\mathbf{b}]\right]+\left[\nabla_b[\mathbf{a},\mathbf{b}]\right]=(\nabla_a\mathbf{b})\mathbf{a}-(\nabla_a\mathbf{a})\mathbf{b}+$

$$+(\nabla_b\mathbf{b})\mathbf{a}-(\nabla_b\mathbf{a})\mathbf{b}=(\mathbf{b}\nabla_a)\mathbf{a}-\mathbf{b}(\nabla_a\mathbf{a})+\mathbf{a}(\nabla_b\mathbf{b})-(\mathbf{a}\nabla_b)\mathbf{b}=$$

$$=(\mathbf{b}\ \mathrm{grad})\mathbf{a}-(\mathbf{a}\ \mathrm{grad})\mathbf{b}+\mathbf{a}\ \mathrm{div}\ \mathbf{b}-\mathbf{b}\ \mathrm{div}\ \mathbf{a}\,. \qquad (\text{П}1.45)$$

Здесь $(\mathbf{a}\ \mathrm{grad})\equiv(\mathbf{a}\nabla)$ – скалярный дифференциальный оператор

$$(\mathbf{a}\nabla)=a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\,. \qquad (\text{П}1.46)$$

5. $\mathrm{grad}\,(\mathbf{a},\mathbf{b})=\nabla_a(\mathbf{a},\mathbf{b})+\nabla_b(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{b}\nabla_a)\mathbf{a}+\left[\mathbf{b}[\nabla_a\mathbf{a}]\right]+(\mathbf{a}\nabla_b)\mathbf{b}+$

$$+\left[\mathbf{a}[\nabla_b\mathbf{b}]\right]=(\mathbf{b}\ \mathrm{grad})\mathbf{a}+(\mathbf{a}\ \mathrm{grad})\mathbf{b}+[\mathbf{b}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a}]+[\mathbf{a}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{b}]\,. \qquad (\text{П}1.47)$$

6. $$\mathrm{grad}\ \frac{a^2}{2}=(\mathbf{a}\ \mathrm{grad})\mathbf{a}+[\mathbf{a}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a}]\,. \qquad (\text{П}1.48)$$

7. $$\mathrm{div\ grad}\ \varphi=(\nabla\nabla)\varphi=\Delta\varphi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi\,. \qquad (\text{П}1.49)$$

8. $$\mathrm{rot\ rot}\ \mathbf{a}=\left[\nabla[\nabla\mathbf{a}]\right]=\nabla(\nabla\mathbf{a})-(\nabla\nabla)\mathbf{a}=\ \mathrm{grad\ div}\ \mathbf{a}-\Delta\mathbf{a}\,. \qquad (\text{П}1.50)$$

9. $(\nabla\mathbf{a})\mathbf{b}=(\nabla_a\mathbf{a})\mathbf{b}+(\nabla_b\mathbf{a})\mathbf{b}=\mathbf{b}\ \mathrm{div}\ \mathbf{a}+(\mathbf{a}\nabla_b)\mathbf{b}=\mathbf{b}\ \mathrm{div}\ \mathbf{a}+(\mathbf{a}\ \mathrm{grad})\mathbf{b}$ (П1.51)

Из интегрального представления оператора Гамильтона следует формула

$$(\nabla\mathbf{a})\mathbf{b}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint(\mathbf{na})\mathbf{b}\mathrm{d}S\,,$$

из которой непосредственно получается

$$\int(\nabla\mathbf{a})\mathbf{b}\mathrm{d}\mathbf{V}=\oint(\mathbf{na})\mathbf{b}\mathrm{d}S \qquad (\text{П}1.52)$$

или, в силу (П1.51),

$$\oint(\mathbf{na})\mathbf{b}\mathrm{d}S=\int(\mathbf{b}\ \mathrm{div}\ \mathbf{a})\mathrm{d}V+\int(\mathbf{a}\ \mathrm{grad})\mathbf{b}\mathrm{d}V\ . \qquad (\text{П}1.53)$$

Получим и другое интегральное равенство:

$$\int\left[\mathbf{b}[\nabla\mathbf{a}]\right]\mathrm{d}V+\int\left[[\mathbf{a}\nabla]\mathbf{b}\right]\mathrm{d}V=-\oint\left[[\mathbf{na}]\mathbf{b}\right]\mathrm{d}S\ . \qquad (\text{П}1.54)$$

Из интегрального представления оператора Гамильтона следует формула

$$\left[[\nabla\mathbf{a}]\mathbf{b}\right]=\lim_{V\to 0}\oint\left[[\mathbf{n},\mathbf{a}]\mathbf{b}\right]\mathrm{d}S\ ,$$

откуда

$$\int\left[[\nabla\mathbf{a}]\mathbf{b}\right]\mathrm{d}V=\oint\left[[\mathbf{n},\mathbf{a}]\mathbf{b}\right]\mathrm{d}S\ . \qquad (\text{П}1.55)$$

С другой стороны, имеем

$$\left[[\nabla\mathbf{a}]\mathbf{b}\right]=\left[[\nabla_a\mathbf{a}]\mathbf{b}\right]+\left[[\nabla_b\mathbf{a}]\mathbf{b}\right]=-[\mathbf{b}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a}]-\left[[\mathbf{a}\nabla]\mathbf{b}\right].$$

Подставляя это в (П1.55), приходим к (П1.54).

Представление векторных операций в криволинейных координатах. Наряду с декартовыми координатами часто удобно пользоваться криволинейными координатами q_1, q_2 и q_3. Каждой точке **r** отвечает совокупность величин q_1, q_2 и q_3, т.е.

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(q_1,q_2,q_3)\ . \qquad (\text{П}1.56)$$

Поскольку векторные операции не связываются с какой-либо конкретной системой координатных осей, соотношения векторного анализа остаются справедливыми в любом координатном представлении. Однако конкретное выражение векторных операций в криволинейных координатах, естественно, не совпадает с декартовым.

Назовем три поверхности

$$q_i=q_i(x,\ y,\ z)=\mathrm{const}\quad (i=1,\ 2,\ 3)\ , \qquad (\text{П}1.57)$$

координатными поверхностями, а линии их пересечения координатными линиями. Очевидно, что совокупность трех координатных поверхностей является обобщением координатного трехгранника в декартовой системе координат. Направления координатных линий характеризуются единичными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Ортогональными системами координат именуют такие, в которых векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ взаимно перпендикулярны.

Производная по координатам q_i равна

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathbf{r}(q_1,\ q_2,\ q_3)}{\mathrm{dq_i}} = H_i \mathbf{e}_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (\text{П}1.58)$$

Вектор $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$ направлен по касательной к координатной линии q_i, и его величина H_i является функцией координат q_1, q_2, q_3. Очевидно,

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2. \qquad (\text{П}1.59)$$

Три величины H_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$ носят название коэффициентов Ляме. С их помощью можно написать

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = H_1 \mathrm{d}q_1 \mathbf{e}_1 + H_2 \mathrm{d}q_2 \mathbf{e}_2 + H_3 \mathrm{d}q_3 \mathbf{e}_3 \qquad (\text{П}1.60)$$

или, в проекциях,

$$(\mathrm{d}\mathbf{r})_1 = H_1 \mathrm{d}q_1; \quad (\mathrm{d}\mathbf{r})_2 = H_2 \mathrm{d}q_2; \quad (\mathrm{d}\mathbf{r})_3 = H_3 \mathrm{d}q_3. \qquad (\text{П}1.61)$$

Возводя (П1.60) в квадрат, находим квадрат длины в криволинейных ортогональных координатах:

$$(\mathrm{d}\mathbf{r})^2 = \mathrm{d}s^2 = H_1^2 \mathrm{d}q_1^2 + H_2^2 \mathrm{d}q_2^2 + H_3^2 \mathrm{d}q_3^2. \qquad (\text{П}1.62)$$

Элемент площади легко найти, рассматривая бесконечно малый параллелепипед, образованный координатными поверхностями. Площади его граней

$$\mathrm{d}S_1 = H_2 H_3 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3; \quad \mathrm{d}S_2 = H_1 H_3 \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_3; \quad \mathrm{d}S_3 = H_1 H_2 \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2. \qquad (\text{П}1.63)$$

Объем параллелепипеда

$$\mathrm{d}V = H_1 H_2 H_3 \mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2 \mathrm{d}q_3 . \qquad (\text{П}1.64)$$

Важнейшими ортогональными координатами являются цилиндрические и сферические координаты.

В сферических координатах

$$q_1 = r; \quad q_2 = \theta; \quad q_3 = \psi . \qquad (\text{П}1.65)$$

Очевидно, имеем

$$(\mathrm{d}\mathbf{r})_r = \mathrm{d}r; \quad (\mathrm{d}\mathbf{r})_\theta = r\mathrm{d}\theta; \quad (\mathrm{d}\mathbf{r})_\psi = r\sin\theta\, \mathrm{d}\psi . \qquad (\text{П}1.66)$$

Сравнение с (П1.61) дает

$$H_r = 1; \quad H_\theta = r; \quad H_\psi r\sin\theta;$$

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi . \qquad (\text{П}1.67)$$

В цилиндрической системе координат

$$q_1 = \rho; \quad q_2 = \psi; \quad q_3 = z;$$

$$(\mathrm{d}\mathbf{r})_\rho = \mathrm{d}\rho; \quad (\mathrm{d}\mathbf{r})_\psi = \rho\, \mathrm{d}\psi; \quad (\mathrm{d}\mathbf{r})_z = \mathrm{d}z , \qquad (\text{П}1.68)$$

и из (П1.61)

$$H_\rho = 1; \quad H_\psi = \rho; \quad H_z = 1;$$

$$\mathrm{d}V = \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\psi\, \mathrm{d}z . \qquad (\text{П}1.69)$$

Выражения для векторных операций получаются из их определений с учетом выписанных соотношений:

1. $$\mathrm{grad}\,\varphi = \frac{e_1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{e_2}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{e_3}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3} . \qquad (\text{П}1.70)$$

В частности, в сферической и цилиндрической системах координат соответственно имеем

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{e}_r \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\mathbf{e}_\psi}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} , \qquad (\text{П}1.71)$$

$$\mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{\mathbf{e}_\psi}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} . \qquad (\text{П}1.72)$$

2. $$\operatorname{div}\mathbf{a}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(a_1H_2H_3\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(a_2H_3H_1\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(a_3H_1H_2\right)\right].\quad(\text{П}1.73)$$

В сферических и цилиндрических координатах соответственно

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2a_r\right)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\ \mathrm{a}_\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\psi}{\partial\psi};\qquad(\text{П}1.74)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho a_\rho\right)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\psi}{\partial\psi}+\frac{\partial a_z}{\partial z}.\qquad(\text{П}1.75)$$

3. $$\left(\operatorname{rot}\mathbf{a}\right)_1=\frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial\left(a_3H_3\right)}{\partial q_2}-\frac{\partial\left(a_2H_2\right)}{\partial q_3}\right].\qquad(\text{П}1.76)$$

Остальные проекции получаются циклической перестановкой координат 1, 2, 3.

В сферических и цилиндрических координатах соответственно

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{a}\right)_r=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(a_\psi\sin\theta\right)}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\psi};\qquad(\text{П}1.77)$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{a}\right)_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\psi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\left(ra_\psi\right)}{\partial r};\qquad(\text{П}1.78)$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{a}\right)_\psi=\frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta r}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta};\qquad(\text{П}1.79)$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{a}\right)_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\psi}-\frac{\partial a_\psi}{\partial z};\qquad(\text{П}1.80)$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{a}\right)_\psi=\frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial\rho};\qquad(\text{П}1.81)$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{a}\right)_z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(a_\psi\rho\right)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\psi}.\qquad(\text{П}1.82)$$

4. Оператор Лапласа

$$\Delta=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right].\qquad(\text{П}1.83)$$

В сферических и цилиндрических координатах соответственно

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}; \quad (П1.84)$$

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (П1.85)$$

Приложение 2. Интеграл Фурье

Всякая периодическая в области $l = \frac{2\pi}{\omega}$ функция, т.е. функция, удовлетворяющая условию

$$f(t+l) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = f(t),$$

может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t\right) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\omega t}.$$

Коэффициенты Фурье даются формулой

$$f_n(\omega) = \frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} \mathbf{e}^{-in\omega\tau} f(\tau)\,d\tau.$$

Разложение в ряд Фурье означает, что произвольная периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ может быть представлена в виде наложения (спектра) бесконечного числа монохроматических функций с периодами $\frac{2\pi}{\omega}$, $\frac{2\pi}{2\omega}$, …, $\frac{2\pi}{n\omega}$ или частотами ω, 2ω, …, $n\omega$ и т.д.

Условия, при которых возможно разложение в ряд Фурье, обычно выполняются в физических приложениях.

Переходя к пределу, когда период неограниченно возрастает (т.е. $\omega \to 0$), а частоты сближаются между собой, можно получить разложение в интеграл Фурье:

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\,. \qquad (П2.1)$$

Функция $F(\omega)$, именуемая компонентой Фурье от функции $f(t)$, дается формулой

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad (П2.2)$$

Разложение в интеграл Фурье возможно, если свойства $f(t)$ обеспечиваются сходимостью (П2.1) – (П2.2). Обычно в физических приложениях $f(t)$ стремится к нулю при $t\to\pm\infty$, что обеспечивает сходимость этих выражений.

Интеграл Фурье можно записать в более симметричном виде:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}F(\omega)\mathrm{d}\omega\,; \qquad (П2.3)$$

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}f(t)\mathrm{d}t\,. \qquad (П2.4)$$

Если $f(t)$ – вещественная функция, то $F(\omega)$ – комплексная функция, причем

$$F^{*}(\omega)=F(-\omega)\,. \qquad (П2.5)$$

Формулы (П2.3) и (П2.4) можно объединить в виде выражения

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\tau\, e^{-i\omega\tau}f(\tau)\,, \qquad (П2.6)$$

также называемого часто интегралом Фурье.

Формула (П2.3) показывает, что $f(t)$ представляет собой сумму монохроматических составляющих $e^{i\omega t}$, которые берутся с весами (амплитудами) $\dfrac{F(\omega)\mathrm{d}\omega}{\sqrt{2\pi}}$.

Комплексную амплитуду $F(\omega)$ можно написать в виде

$$F(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \qquad (П2.7)$$

где $A(\omega)$ – модуль и $\varphi(\omega)$ – фаза функции $F(\omega)$, являющиеся вещественными функциями частоты ω.

В таком представлении для интеграла Фурье имеем

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{i(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega . \qquad (П2.8)$$

Докажем важное равенство, иногда именуемое соотношением Парсеваля для интеграла Фурье:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) \right)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\omega) \right|^2 d\omega . \qquad (П2.9)$$

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t) \right]^2 dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{i(\omega t + \varphi(\omega))} d\omega \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt \right] d\omega .$$

Но, по определению (П2.4),

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = F^*(\omega) = A(\omega)e^{-i\varphi(\omega)} .$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t) \right)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[A(\omega) \right]^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left| F(\omega) \right|^2 d\omega,$$

что и требовалось доказать.

Приложение 3. Дельта-функция и ее свойства

Дельта-функция была введена Дираком и оказалась весьма полезной при рассмотрении различных вопросов теоретической физики. δ-функция определяется соотношениями

$$\delta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$
$$\delta(x) = \infty \quad \text{при} \quad x = 0$$

так, что

$$\int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1, \qquad (\text{П3.1})$$

где $a < 0 < b$.

Из определения (П3.1) сразу следует основное свойство δ-функции:

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x = f(0), \quad a < 0 < b, \qquad (\text{П3.2})$$

а $f(x)$ – произвольная непрерывная функция x.

Действительно, благодаря свойствам δ-функции в интеграле (П3.2) играет роль лишь окрестность точки $x = 0$. Тогда функцию $f(x)$ можно в точке $x = 0$ вынести за знак интеграла, а оставшийся интеграл в силу (П3.1) равен единице. Интеграл (П3.2) можно переписать также в виде

$$\int f(x)\delta(x - x_0)\mathrm{d}x = f(x_0). \qquad (\text{П3.3})$$

Область интегрирования в (П3.3) должна включать точку $x = x_0$, иначе интеграл обращается в нуль:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \begin{cases} x_0 > b, \\ x_0 < a. \end{cases} \qquad (\text{П3.3а})$$

δ-функция не может входить ни в какие окончательные выражения. Всегда, когда пишется δ-функция, то имеется в виду в дальнейшем интегрирование по тем переменным, от которых она зависит; δ-функцию можно рассматривать как предел последовательности аналитических функций.

В частности, такими свойствами обладает выражение

$$F(\alpha, x) = \frac{\sin \alpha x}{\pi x},$$

которое ведет себя при $\alpha \to \infty$ как $\delta(x)$. Действительно, при $x = 0$ $F(\alpha, x)\big|_{x=0} = \dfrac{\alpha}{\pi}$ и расходится при $\alpha \to \infty$. При $x \neq 0$ $F(\alpha, x)$ сильно осциллирует около нулевого значения, причем с затухающей амплитудой. Наконец,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} \mathrm{d}x = 1$$

при любом α. Мы видим, следовательно, что

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x} = \delta(x). \qquad \text{(П3.4)}$$

Другие примеры δ-функции:

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha^2}; \qquad \text{(П3.4а)}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\alpha \to 0} \alpha e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}; \qquad \text{(П3.4б)}$$

$$\delta(x) = -\lim_{\alpha \to 0} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha \left(e^{\frac{x}{\alpha}} + 1 \right)^2}. \qquad \text{(П3.4в)}$$

Через δ-функцию выражается часто встречающийся интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathrm{d}k,$$

который следует понимать, как

$$\lim_{\alpha \to \infty} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{ikx} \mathrm{d}k = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{2}{x} \sin \alpha x.$$

Сравнивая это выражение с (П3.4), получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \mathrm{d}k = 2\pi \delta(x). \qquad \text{(П3.5)}$$

δ-функция может быть определена и как производная от некоторой разрывной функции $\varepsilon(x)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= 0, \quad x < 0; \\ \varepsilon(x) &= 1, \quad x > 0. \end{aligned} \tag{П3.6}$$

Очевидно, $\varepsilon'(x) = 0$ при $x \neq 0$. Покажем, что имеет место и равенство (П3.2):

$$\int_a^b f(x)\varepsilon'(x)\mathrm{d}x = f(x)\varepsilon(x)\Big|_a^b - \int_a^b \varepsilon(x) f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - \int_0^b f'(x)\mathrm{d}x = f(0).$$

Следовательно,

$$\varepsilon'(x) = \delta(x). \tag{П3.7}$$

Основные свойства δ-функции:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta'(-x) = -\delta'(x), \\
&x\delta(x) = 0, \quad x\delta'(x) = -\delta(x,) \\
&\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x), \quad a > 0, \\
&\delta\left(x^2 - a^2\right) = \frac{1}{2a}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right], \\
&\int \delta(a-x)\delta(x-b)\mathrm{d}x = \delta(a-b), \\
&f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \\
&\int f(x)\delta'(x-a)\mathrm{d}x = -f'(a), \\
&\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta^{(n)}(x) f(x) = (-1)^n f^{(n)}(0), \\
&\delta^{(n)}(-x) = (-1)^n \delta^{(n)}(x), \\
&x\delta^{(n)}(x) = -n\delta^{(n-1)}(x), \\
&\delta(f)\mathrm{d}f = \delta(x)\mathrm{d}x, \quad \delta\left[f(x)\right] = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|}\delta(x - x_0), \\
&\text{где } x_0 \text{ определено условием } f(x_0) = 0, \\
&\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i(\mathbf{kr} - \omega t)}\delta(\omega - \mathbf{kv})\mathrm{d}\mathbf{k}\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}\right\} \tag{П3.8}$$

Так как δ-функция имеет смысл, если только имеется в виду интегрирование по ее аргументу, то и эти равенства означают, что, умножая левую часть каждого из этих равенств на непрерывную функцию $f(x)$ и интегрирую по x, мы придем к тем же результатам, какие дадут и правые части равенств. Докажем, например, третье соотношение. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int f(x)x\delta(x)dx = f(x)x\,f(x)x\Big|_{x=0} = 0,$$

и соотношение доказано.

δ-функция оказывается часто полезной при рассмотрении интегралов Фурье. Так, если мы имеем разложение некоторой функции $f(x)$ в интеграл Фурье:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k)e^{ikx}\mathrm{d}k\,, \qquad (\text{П3.9})$$

то, пользуясь (П3.5), мы сразу получаем выражение для обращенного интеграла Фурье. Действительно, умножая левую и правую части равенства (П3.9) на $e^{-ik'x}$ и интегрируя по x, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ik'x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)e^{i(k-k')x}\mathrm{d}k\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')x}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')x}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)2\pi\delta(k-k')\mathrm{d}k = 2\pi c(k').$$

Следовательно, имеем

$$c(k') = \frac{1}{2\pi}\int f(x)e^{-ik'x}\mathrm{d}x. \qquad (\text{П3.10})$$

Аналогичные соотношения возникают и в более сложных случаях. Формулу (П3.5) можно рассматривать как разложение δ-функции в интеграл Фурье.

Рассмотрим теперь разложение δ-функции по полиномам Лежандра:

$$\delta(1-\xi) = \sum_l B_l P_l(\xi).$$

Коэффициенты B_l найдем, умножая левую и правую части равенства на $P_{l'}(\xi)$ и интегрируя по ξ. Учитывая, что

$$\int_{-1}^{+1} P_{l'}(\xi) P_l(\xi) \mathrm{d}\xi = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

и

$$P_l(1) = 1,$$

получаем

$$B_l = \frac{1}{2}(2l+1).$$

Окончательно имеем

$$\delta(1-\xi) = \frac{1}{2} \sum_l (2l+1) P_l(\xi). \qquad (\text{П3.11})$$

Докажем, наконец, следующее соотношение:

$$\Delta \frac{1}{\mathbf{r}} = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \qquad (\text{П3.12})$$

где

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z).$$

Для этого разложим функцию $\frac{1}{\mathbf{r}}$ в трехмерный интеграл Фурье:

$$\frac{1}{\mathbf{r}} = \int c(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{kr}} \mathrm{d}k_x \mathrm{d}k_y \mathrm{d}k_z . \qquad (\text{П3.13})$$

Соответственно для функции $c(\mathbf{k}) \equiv c(k_x, k_y, k_z)$ имеем, пользуясь (П3.10),

$$c(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{r} e^{-i\mathbf{kr}} \mathrm{d}V . \qquad (\text{П3.14})$$

В формуле (П3.14) интегрируем сначала по углу, выбирая полярную ось в направлении вектора **k**:

$$c(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{1}{\mathbf{r}} r^2 \mathrm{d}r \int_0^\pi e^{-ikr\cos\vartheta} \sin\vartheta d\vartheta = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{i}{k} \int_0^\infty \left(e^{-ikr} - e^{ikr}\right) \mathrm{d}r .$$

Последний интеграл берется обычно добавлением в подынтегральное выражение множителя $e^{-\alpha\,\mathbf{r}}$ и последующим устремлением в полученном результате α к нулю $(\alpha \to 0)$. Окончательно получим

$$c(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{k^2}.$$

Подставляя $c(\mathbf{k})$ в (П3.13), имеем

$$\frac{1}{\mathbf{r}} = \frac{2}{(2\pi)^2}\int \frac{1}{k^2} e^{i\mathbf{kr}} \mathrm{d}\mathbf{k}.$$

Беря лапласиан от левой и правой частей, получаем

$$\Delta\frac{1}{\mathbf{r}} = -\frac{2}{(2\pi)^2}\int e^{i\mathbf{kr}} \mathrm{d}\mathbf{k}$$

и, следовательно [см. (П3.5)],

$$\Delta\frac{1}{\mathbf{r}} = -\frac{2}{(2\pi)^2}(2\pi)^3 \delta(x)\delta(y)\delta(z) = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \qquad (\text{П3.15})$$

Отметим, что, как следует из (П3.1), δ-функция является размерной функцией, причем ее размерность обратна размерности ее аргумента.

Важная знаковая функция $\operatorname{sgn} x$ определена как

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad x > 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \qquad (\text{П3.16})$$

Ее фурье-образ

$$F_{\operatorname{sgn}}(\omega) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x e^{-\alpha|x|} e^{i\omega x} \mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to 0}\frac{i}{\pi}\frac{\omega}{\omega^2+\alpha^2} = P\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (\text{П3.17})$$

где P означает главное значение функции $\frac{1}{x}$;

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0; \end{cases} \qquad (\text{П3.18})$$

$$\int f(x) P\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = ⨍ \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x; \qquad (\text{П3.19})$$

где ⨍ – главное значение интеграла.

Обратное преобразование дает интегральное представление знаковой функции

$$\operatorname{sgn} x = \frac{i}{\pi} \fint \frac{e^{-i\omega x}}{\omega} \mathrm{d}\omega . \qquad (\text{П}3.20)$$

Отметим также другие полезные соотношения, включающие понятие δ-функции:

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x') \underset{(\varepsilon \to 0)}{\mathrm{d}x'} \to \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0; \end{cases} \qquad (\text{П}3.21)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \theta(x) = \delta(x); \qquad (\text{П}3.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(k) e^{irx} \mathrm{d}k = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}k e^{i\kappa(x+i\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{x + i\varepsilon} = iP\left(\frac{1}{x}\right) + \pi\delta(x) . \qquad (\text{П}3.23)$$

Последние три равенства обобщают соотношения (П3.5) и (П3.6), причем функция $\boldsymbol{\theta}(x)$ называется функцией Хэвисайда.

Важным в приложениях является следующее равенство, позволяющее переходить от декартовых координат к сферическим при интегрировании с δ-функцией. Именно, рассмотрим δ-функцию, центрированную в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\, \delta(z - z_0). \qquad (\text{П}3.24)$$

Согласно определению (П3.3а) применительно к трехмерному пространству

$$\int \mathbf{d}^3 r f(\mathbf{r}) \boldsymbol{\delta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}_0). \qquad (\text{П}3.25)$$

При переходе к интегрированию по сферическим координатам получаем

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \delta(r - r_0) \delta(\cos\theta - \cos\theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \qquad (\text{П}3.26)$$

где r_0, θ_0, φ_0 – сферические координаты радиуса-вектора $\mathbf{r}_0$.

Наконец, приведем полезные соотношения, использующие понятие δ-функции в связи с разложением периодических функций в ряд Фурье:

$$\sum_{q=-\infty}^{+\infty} \delta\left(x-qL\right)=\frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\frac{nx}{L}}. \qquad (П3.27)$$

В общем случае периодическая функция $f\left(x\right)$ с периодом L представляется в виде ряда Фурье:

$$f\left(x\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{ik_n x}, \qquad (П3.28)$$

где волновые векторы равны: $k_n = n\frac{2\pi}{L}$, а коэффициенты разложения C_n определяются интегралами:

$$C_n=\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} \mathrm{d}x e^{-ik_x n} f\left(x\right). \qquad (П3.29)$$

Приложение 4. Вычисление некоторых интегралов и формула Стирлинга

Вычисление некоторых интегралов

1. $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ (интеграл Пуассона),

$$I=2\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\,.$$

Имеем тождество

$$I^2=\frac{4}{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t\int_0^{\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{4}{\alpha}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\left(u^2+t^2\right)}\mathrm{d}t\mathrm{d}u\,.$$

Вводя полярные координаты

$$r^2=u^2+t^2;$$

$$\varphi=\mathrm{arctg}\,\frac{u}{t};$$

$$\mathrm{d}t\ \mathrm{d}u=r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi,$$

имеем

$$I^2 = \frac{4}{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{\alpha},$$

откуда

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

2. $I_{2n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n}\mathrm{d}x$.

Дифференцируя I по параметру α, находим

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}};$$

$$I_4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^4\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}};$$

$$I_{2n} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n}\mathrm{d}x = \frac{(2n-1)(2n-3)...5\cdot 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^{2n+1}}}.$$

3. $I_{2n+1} = \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n+1}\mathrm{d}x;$

$$I_0 = \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha}.$$

Дифференцируя I_1 по параметру α, получаем

$$I_{2n+1} = \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n+1}\mathrm{d}x = \frac{n!}{2\alpha^{n+1}}.$$

4. $\int\limits_0^{\infty} \ln\left(1-e^{-x}\right)\mathrm{d}x = x\ln\left(1-e^{-x}\right)\Big|_0^{\infty} - \int\limits_0^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{e^x-1} = -\int\limits_0^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{e^x-1}$.

Аналогично

$$\int\limits_0^{\infty} x^2\ln\left(1-e^{-x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln\left(1-e^{-x}\right)\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{3}\int\limits_0^{\infty}\frac{x^3\mathrm{d}x}{e^x-1} = -\frac{1}{3}\int\limits_0^{\infty}\frac{x^3\mathrm{d}x}{e^x-1}.$$

Последние интегралы вычисляются с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд:

$$\frac{1}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-x}e^{-nx}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(n+1)x},$$

откуда следует

$$\int_0^{\infty}\frac{x\mathrm{d}x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}xe^{-(n+1)}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6};$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^3\mathrm{d}x}{e^x-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty}x^3e^{-(n+1)}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{(n+1)^4}=\frac{6\pi^4}{90}=\frac{\pi^4}{15}.$$

5. $I=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{e^{-x}+1}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2e^{-x}\mathrm{d}x}{\left(e^{-x}+1\right)^2}=2\int_0^{\infty}\frac{x^2e^{-x}\mathrm{d}x}{\left(e^{-x}+1\right)^2}.$

Разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд, имеем

$$I=2\int_0^{\infty}x^2\left(e^{-x}-2e^{-2x}+3e^{-3x}-\ldots\right)\mathrm{d}x=4\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots\right)=4\cdot\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{3}.$$

Формула Стирлинга

При больших значениях числа N имеет место формула Стирлинга:

$$N!\approx N^Ne^{-N}\left(2\pi N\right)^{1/2}.$$

С точностью до множителя $\sqrt{2\pi}$ она получается из простого вычисления:

$$\ln N!=\sum_{n=1}^{N}\ln n,$$

и далее, используя формулу Эйлера – Маклорена, получаем

$$\sum_{n=1}^{N}\ln n\approx\int_1^N\ln x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\ln x\Big|_1^N+\mathbf{C}=N\ln N-N+\frac{1}{2}\ln N+\mathbf{C}.$$

Более точное вычисление приводит к значению $\mathbf{C}=\sqrt{2\pi}$.

Приложение 5. Некоторые специальные функции

Интеграл ошибок

Интеграл ошибок: $\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\alpha^2}\mathrm{d}\alpha$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Разложение при малых z: $\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z-\frac{z^3}{1!\cdot 3}+\frac{z^5}{2!\cdot 5}-\ldots\right)$.

Асимптотическая формула при больших z:

$$\Phi(z)\cong 1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-z^2}}{z}\left(1-\frac{1}{(2z)^2}+\frac{3\cdot 4}{(2z)^4}-\frac{4\cdot 5\cdot 6}{(2z)^6}+\ldots\right)$$

Функции Бесселя

Ряды функции Бесселя

$$J_\nu=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}-\ldots$$

Асимптотическая формула

$$J_\nu(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\ldots$$

Функции мнимого аргумента

$$I_\nu(x)=(-i)^\nu I_\nu(ix)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+\ldots$$

Асимптотическая формула

$$I_\nu(x)\cong\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}e^x+\ldots$$

Рекуррентные формулы:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu J_\nu(x)\right]=x^\nu J_{\nu-1}(x);$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right]=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu};$$

$$J_{\nu-1}(x)+J_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}J_\nu(x).$$

Для функций мнимого аргумента

$$I_{\nu-1}(x)-I_{\nu+1}(x)=\frac{2\nu}{x}I_\nu(x);\qquad K_{\nu-1}(x)-K_{\nu+1}(x)=-\frac{2\nu}{x}K_\nu(x);$$

$$I_{\nu-1}(x)+I_{\nu+1}(x)=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}I_\nu(x);\qquad K_{\nu-1}(x)+K_{\nu+1}(x)=-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}K_\nu(x);$$

$$I_0'(x)=I_1(x);\qquad K_0'(x)=-K_1(x).$$

Интегральные формулы

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ix\sin\varphi+in\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{(-i)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\cos\varphi+in\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{(-i)^n}{\pi}\int_{0}^{\pi}e^{ix\cos\varphi}\cos n\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Функции полуцелого порядка:

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x;$$

$$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x;$$

$$J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right);$$

$$J_{-3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{\cos x}{x}-\sin x\right).$$

Полиномы Лежандра

Производящая функция

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n P_n(x),\quad 0<\rho<1,\quad -1\le x\le 1.$$

Рекуррентная формула

$$(n+1)P_{n+1}(x)-x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0.$$

Формула Родрига

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right].$$

Уравнение полиномов Лежандра:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+n(n+1)y=0.$$

Интегральная формула:

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^n \mathrm{d}\varphi,\quad -1\le x\le 1;$$

$$P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right);$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right),\quad P_4(x)=\frac{1}{8}\left(35x^4-30x^2+3\right).$$

Присоединенные функции

Уравнение присоединенных функций:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0.$$

$$P_n^{(m)}(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x).$$

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|^2=\int_{-1}^{+1}\left[P_n^{(m)}(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Полиномы Чебышева – Эрмита

Производящая функция

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Рекуррентные формулы:

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x);\quad H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0.$$

Дифференциальная формула:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2}.$$

$$\left\|H_n\right\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}H_n^2(x)e^{-x^2}\mathrm{d}x=2^n n!\sqrt{\pi}.$$

ВЕКИЛОВ Юрий Хоренович
КУЗЬМИН Юрий Михайлович
МУХИН Сергей Иванович
МУКОВСКИЙ Яков Моисеевич

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
В ЗАДАЧАХ И УПРАЖНЕНИЯХ

Редактор *Л.В. Иванкова*

Компьютерная верстка *А.В. Калинкиной*

Подписано в печать 14.06.07	Бумага офсетная	
Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$	Печать офсетная	Уч.-изд. л. 21,25
Рег. № 873	Тираж 250 экз.	Заказ 1397

Московский государственный институт стали и сплавов,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательство «Учеба» МИСиС,
117419, Москва, ул. Орджоникидзе, 8/9
Тел.: 954-73-94, 954-19-22

Отпечатано в типографии издательства «Учеба» МИСиС,
117419, Москва, ул. Орджоникидзе, 8/9