

Н.Г. БРУЕВИЧ, В.И. СЕРГЕЕВ

Основы нелинейной теории точности и надежности устройств



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
МАШИНОВЕДЕНИЯ

Н. Г. БРУЕВИЧ, В. И. СЕРГЕЕВ

ОСНОВЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ТОЧНОСТИ И НАДЕЖНОСТИ УСТРОЙСТВ

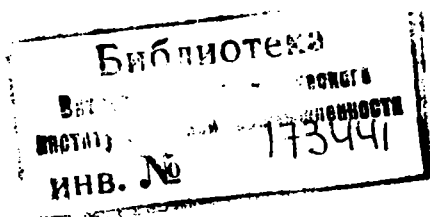


ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1976

Основы нелинейной теории точности и надежности устройств. Н. Г. Бруевич, В. И. Сергеев, М., «Наука», 1976.

В монографии изложены общие методы расчетного обоснования выбора основных параметров механических, электромеханических и электронных устройств, исходя из заданных требований по точности их функционирования как в момент их изготовления, так и в процессе длительной эксплуатации. Даны общие приемы определения ошибок выходных координат устройств и их производных в условиях, когда связь между выходными и входными координатами устройств описывается как конечными, так и дифференциальными уравнениями, записанными в детерминированном или стохастическом виде. Развита отдельные положения метода статистических испытаний и метода деревьев логических возможностей, предназначенных для отыскания законов распределения ошибок выходных координат и их производных. Приведены примеры, иллюстрирующие применение разработанных положений точности и надежности устройств непрерывного действия.

Рис. 40, табл. 36, библи. 39 назв.



Введение

Расчет точности в машиностроении и приборостроении с каждым годом приобретает все большее значение. Так, например, проектирование и конструирование многих машин и приборов становится невозможным без соответствующего расчетного обоснования их точности, в том числе и точности изготовления входящих в них отдельных узлов и деталей. Равным образом качественное изготовление последних вполне определенным образом связано с точностью как работы производственного оборудования, так и контрольно-измерительных и управляющих приборов, обеспечивающих предусмотренное протекание технологических процессов. Кроме того, в процессе сборки многих машин и приборов в целях повышения их точностных показателей применяются разнообразные приемы регулировок, что также должно учитываться соответствующими расчетами.

Таким образом, на всех основных этапах разработки и изготовления изделий машиностроения и приборостроения, начиная с разработки технического задания и кончая сборкой и отладкой, в общем случае в той или иной мере необходимы соответствующие расчеты на точность.

Первые работы по теории точности механизмов появились в 1941—1944 гг. [1—4] и были использованы при расчетном обосновании точности различных типов счетно-решающих механизмов [5]. Позднее появилась работа [6], в которой были решены аналогичные вопросы в приложении к механизмам с кинематическими парами качения и гибкими навивающимися звеньями.

В дальнейшем, в течение 10—15 лет, был накоплен достаточный статистический материал, позволяющий оценить круг задач, при решении которых наиболее эффективно использовался аппарат теории точности. Это дало возможность сформулировать основные направления учения о точности в машиностроении и приборостроении [7]. В этой же работе был подробно рассмотрен расчетный аппарат, применение которого дает возможность провести исследование точности кинематических и электрических цепей машин и приборов (для простоты называемых в дальнейшем устройствами) как в стадии проектирования, так и в момент их изготовления.

Здесь $f_0^* - f_0$ — систематическая ошибка устройства, вызванная при проектировании последним отступлением от идеальной зависимости, выражаемой уравнениями (2.1) или (2.2); $\sum_r (\partial f / \partial q_r)_0 \Delta q_r$ — инструментальная ошибка устройства, которая характеризует действие производственных погрешностей (первичных ошибок) отдельных элементов устройства (ошибки из-за отклонений реальных размеров звеньев от их номинальных величин в кинематических цепях, ошибки из-за отклонения реальных значений параметров элементов электрических цепей от их идеальных и т. п.).

Таким образом, ошибки $\Delta \varphi_1$ и $\Delta \varphi_2$ характеризуют достигнутую точность устройств в момент времени, соответствующий их изготовлению.

Для получения входящих в формулы (2.6) и (2.7) частных производных нет необходимости составлять уравнения вида (2.3) или отыскивать решение уравнений вида (2.4) с последующим их дифференцированием по параметрам, содержащим ошибки. Вместо этого следует воспользоваться методами преобразованного механизма [14] или преобразованной электрической цепи [15] или же определенным образом составить дифференциальное уравнение, решением которого будет являться само выражение частной производной [16].

Формулы (2.6) и (2.7) определяют ошибки устройств в виде линейной функции от первичных ошибок. Поэтому они являются приближенными. В теории точности рассмотрен вопрос о погрешности этих приближенных формул [14, 15].

Изложенные положения теории точности прошли экспериментальную проверку в условиях серийного изготовления ряда механизмов на приборостроительных заводах [20, 21]. Для фрикционного, винтового, карданного, кулачкового, коноидного, червячного и зубчатого механизмов на основе формул (2.6), (2.7) были найдены выражения, определяющие ошибки положения и перемещения. При соответствующей теоретико-вероятностной трактовке последних были получены формулы для расчета точности партии каждого из перечисленных видов механизмов, выполненных по одному конструкторскому и технологическому проекту.

На спроектированных на заводе специальных контрольно-измерительных установках, ряд конструкций которых описан в работе [20], были проведены, в зависимости от существа решаемой задачи, замеры ошибок положения или перемещения. Эти данные позволили построить эмпирические законы распределения. Последние, будучи сравненными по критерию согласия Пирсона с соответствующими теоретическими, с достаточно высокой вероятностью не опровергли гипотезы о нормальном законе распределения ошибок положения или перемещения, выявив тем самым принципиальную возможность применения центральной предель-

ной теоремы теории вероятностей при решении задач точности устройств.

Проведенные таким образом эксперименты подтвердили правильность разработанных основных положений линейной теории точности. Аналогичная по своей постановке проверка ряда положений теории точности была описана во многих других работах, обзор которых дан, в частности, в [7. 21].

Переходим к вопросу о надежности устройств в смысле удовлетворения выходных сигналов заданным допускам [10]. Как уже указывалось, первичные ошибки устройств меняются с течением времени в силу всевозможных износов элементов кинематических пар, вследствие происходящих в материалах деталей и элементах физико-химических процессов, например, таких, как коррозия, потеря изоляционных свойств обмотками проводников и т. п. В настоящее время экспериментальное изучение отмеченного характера изменения параметров деталей и элементов механических и электрических цепей в зависимости от условий их хранения и эксплуатации еще не дает исчерпывающих сведений, по которым можно судить о тех или иных достоверных закономерностях указанных явлений. Однако это экспериментальное изучение весьма важно, так как оно позволяет получить многочисленные реализации, по которым можно судить о характере изменения первичных ошибок в тех или иных конкретных условиях.

Для получения показателей изменений первичных ошибок в разных существенных случаях хранения и эксплуатации деталей и элементов устройств следует проводить статистическую обработку реализаций. Предположим, что эти показатели изменения первичных ошибок можно записать в виде линейной функции:

$$\Delta q_r = \Delta q_r^0 + L_r T, \quad (2.8)$$

где T — время, прошедшее с момента изготовления устройства (или с момента его последней отладки) и до текущего момента, когда устройство используется в соответствии со своим служебным предназначением; Δq_r^0 — начальное значение первичных ошибок.

Подставив (2.8) в (2.6) и (2.7), получим следующие общие выражения, определяющие ошибки выходной координаты устройства:

$$\Delta \Phi_1(f, T) = f_0^* - f_0 + \sum_r \left(\frac{\partial f}{\partial q_r} \right)_0 (\Delta q_r^0 + L_r T), \quad (2.9)$$

$$\Delta \Phi_2(f, T) = \int_{Q_0}^Q \left[f_0^* - f_0 + \sum_r \left(\frac{\partial f}{\partial q_r} \right)_0 (\Delta q_r^0 + L_r T) \right] dq. \quad (2.10)$$

Величину L_r и время T представим следующим образом:

$$L_r = L_r^* + L_r^{**}, \quad T = T^* + T^{**}, \quad (2.11)$$

В течение последнего десятилетия область применения аппарата теории точности претерпела качественное изменение. Это явилось следствием того, что последовательно повышающиеся требования к точности стали включать в себя показатели, которым должны удовлетворять устройства в течение некоторого, вполне определенного интервала времени с момента их изготовления. Так возникли общие вопросы точности и надежности устройств [8--10]. Иными словами, в настоящее время вопросы сохранения точности устройствами в течение некоторого времени их хранения и эксплуатации приобрели злободневное значение в самых разнообразных отраслях народного хозяйства.

Другое, не менее важное направление науки о точности, получившее развитие в течение последних лет, связано с ростом рабочих скоростей звеньев кинематических цепей различных устройств, приведшем к ощутимому влиянию на их показатели точности ошибок скоростей и ускорений. Это вызвало ряд ограничений, накладываемых на разработанные положения линейной теории точности [11], заключающиеся, в частности, в том, что не только ошибки положения (перемещения), но и их первые и вторые производные должны оставаться малыми величинами. Если указанные ограничения во многих случаях не являются существенными для механизмов с низшими кинематическими парами, то для механизмов с высшими кинематическими парами сделать подобное заключение не представляется возможным, поскольку для последних на величину ошибки скорости оказывают дополнительное влияние ошибки в направлении касательной в точке соприкосновения реальных элементов кинематической пары, а на величину ошибки ускорения — еще и ошибки радиусов кривизны.

Указанные обстоятельства выявили целесообразность постановки нелинейной задачи точности механизмов с низшими и высшими кинематическими парами [12, 13]. Здесь отметим, что аппарат нелинейной теории точности целесообразно использовать только в тех случаях, когда решение соответствующего круга задач нельзя осуществить с помощью линейной теории точности.

Таким образом, в последние годы в науке о точности устройств получили развитие два принципиально новых направления:

- 1) разработка на основе линейной теории точности аппарата исследования надежности устройств в смысле сохранения ими оговоренных техническими требованиями показателей точности в течение заданного времени хранения и эксплуатации;

- 2) создание основ нелинейной теории точности механизмов, работающих в кинематических и динамических условиях.

Общие вопросы точности и надежности устройств

§ 1. Общие замечания

Вопросы, связанные с исследованием надежности различных устройств, могут быть рассмотрены в двух аспектах: во-первых, ненадежность устройств из-за возможности возникновения в них внезапных отказов, (например, поломки деталей в механической цепи, обрыв или короткое замыкание в омическом сопротивлении электрической цепи и т. п.) и, во-вторых, ненадежность устройств из-за наличия в них вследствие хранения и эксплуатации накапливающихся с течением времени абсолютных величин первичных ошибок (например, ошибок в результате износа элементов кинематических пар механических цепей или ошибок ввиду изменения величин параметров электрической цепи вследствие старения ее элементов и т. п.).

Ниже будут рассмотрены последние из перечисленных вопросов, решение которых основывается на ряде разработанных общих положений линейной теории точности механических и электрических цепей [14—17]. В изложенной постановке решение задачи о надежности устройства сводится к определению с выбранной вероятностью времени его безотказной работы, в период которого соответствующие показатели точности удовлетворяют заданным допускам или техническим требованиям.

Наряду с этим может быть решена и обратная задача, заключающаяся в том, что по заданному времени эксплуатации и установленным допустимым срокам хранения на складе устройств требуется подобрать соответствующие допуски на изготовление их отдельных элементов, исходя из реальных возможностей производства. Как прямая, так и обратная задачи (в рассматриваемой постановке) могут быть, хотя бы в первом приближении, решены на основе разработанного аппарата линейной теории точности механических и электрических цепей. Естественно, что для решения этих задач требуется накопить соответствующий статистический материал.

Можно изучать точность конкретного экземпляра устройства или партии устройств, имеющих общее предназначение, общие конструкцию и технологию изготовления. Точность партии устройств можно рассматривать на стадии их проектирования, что

позволяет заранее предвидеть, какая точность при изготовлении будет получена. Поэтому такая постановка задачи особенно интересна.

Для изучения точности устройства нужно знать его схему, размеры звеньев, такие необходимые физические характеристики, как, например, массы звеньев, индуктивности, емкости, проводимости, коэффициенты усиления и т. н. Эти знания позволяют определить первичные ошибки и принадлежность их к тем или иным элементам устройства. В первом приближении можно установить, какие первичные ошибки оказывают влияние на выходной сигнал и какие не оказывают [14, 15, 17].

При изучении точности механизма обычно задаются положениями или движениями ведущих звеньев и имеющимися первичными ошибками механизма. Однако для определения действия зазоров в кинематических парах (направляющие, подшипники вращения и т. д.) на ошибку механизма нужно еще иметь сведения о внешних силах, приложенных к механизму. При задании положения ведущих звеньев силы рассматривают в статических условиях. При задании движений ведомых звеньев силы рассматривают в условиях кинетостатики, т. е. внешние силы подбирают так, чтобы реализовать выбранное движение ведущих звеньев.

Можно задаться действующими на механизм внешними силами, учесть добавочные степени свободы механизма, появившиеся от существования зазоров в кинематических парах. Составляя уравнения динамики такого механизма, как в работах [18, 19], можно определить удары в кинематических парах и соответствующие им силы реакции, которые во многих случаях существенно отличаются от сил реакций в механизмах с идеальными кинематическими парами.

Во всех работающих в кинематических условиях механизмах, за исключением фрикционных и с гибкими навивающимися звеньями, зависимости координат ведомых звеньев от координат ведущих звеньев описываются уравнениями в конечном виде. Поэтому при изучении статической или кинетостатической точности механизма приходится иметь дело с уравнениями, записываемыми в конечном виде. Точно так же зависимости выходных напряжений электрической цепи с одними только омическими сопротивлениями от входных напряжений и параметров цепи выражаются уравнениями в конечном виде. Если движение механизма задавать действующими на него силами или рассматривать электронное устройство, то зависимости между силами, выходными и входными сигналами описываются дифференциальными уравнениями. В некоторых случаях эти уравнения можно проинтегрировать в квадратурах. Таким образом, при изучении точности устройств приходится иметь дело с конечными или обыкновенными дифференциальными уравнениями.

§ 2. Точность устройств и их надежность в смысле удовлетворения выходных координат допускам

В общем случае устройство может иметь несколько входов и несколько выходов. Ниже, не налагая каких-либо ограничений на существо решаемых вопросов, будем рассматривать устройства с одним входом и описывать их поведение при помощи конечных уравнений или обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. При этом будем называть устройство идеальным, если оно может воспроизвести заданную зависимость с абсолютной точностью. В подобном идеальном устройстве связь между выходной (φ_0) и входной (q^0) координатами и параметрами (q_r^0) представляет собой заданную математическую зависимость, которую представим в следующих двух формах записи:

$$\varphi_0 = f_1^0(q^0, q_r^0), \quad (2.1)$$

$$d\varphi_0/dq^0 = f_2^0(q^0, q_r^0). \quad (2.2)$$

В действительности идеальных устройств не существует, поскольку всегда при физическом осуществлении любого вида их звеньев возникают первичные ошибки, являющиеся следствием технологических особенностей производства, монтажа и т. п. (например: ошибки в изготовлении элементов низших и высших кинематических пар и ошибки, связанные со сборкой звеньев в механических цепях; ошибки в изготовлении омических сопротивлений и паразитные емкости в электрических цепях и т. п.). Поэтому в реальных устройствах уравнения (2.1) и (2.2) принимают следующий вид:

$$\varphi = f_1(q, q_r), \quad (2.3)$$

$$d\varphi/dq = f_2(q, q_r), \quad (2.4)$$

где $\varphi = \varphi^0 + \Delta\varphi$ — выходная координата реального устройства; $q = q^0 + \Delta q$, $q_r = q_r^0 + \Delta q_r$ — входная координата и параметры реального устройства соответственно; $\Delta\varphi$, Δq и Δq_r — соответствующие малые величины.

В этом случае ошибка выходной координаты реального устройства может быть записана так:

$$\Delta\varphi_e = f_e - f_e^0 \quad (e = 1, 2). \quad (2.5)$$

Разложим функцию f_e в ряд Тейлора по приращениям Δq_r и ввиду малости последних ограничимся линейными членами разложения.

Тогда при $\Delta q = 0$ получим

$$\Delta\varphi_1 = f_0^* - f_0 + \sum_r \left(\frac{\partial f}{\partial q_r} \right)_0 \Delta q_r, \quad (2.6)$$

$$\Delta\varphi_2 = \int_{q_0}^q \left[f_0^* - f_0 + \sum_r \left(\frac{\partial f}{\partial q_r} \right)_0 \Delta q_r \right] dq. \quad (2.7)$$

где T^* — продолжительность хранения устройства; T^{**} — общая суммарная продолжительность работы устройства; оба промежутка времени отсчитываются с момента его изготовления или последней отладки.

Обозначим:

$$\Phi_1(f, 0) = f_0^* - f_0 + \sum_r (\partial f / \partial q_r)_0 \Delta q_r^0, \quad (2.12)$$

$$\Phi_2(f, T) = T \sum_r (\partial f / \partial q_r)_0 L_r. \quad (2.13)$$

С учетом выражений (2.11) равенство (2.13) принимает вид

$$\Phi_2(f, T) = \Phi_2(f, T^*) + \Phi_2(f, T^{**}),$$

где

$$\Phi_2(f, T^*) = T^* \sum_r (\partial f / \partial q_r)_0 L_r^*, \quad (2.14)$$

$$\Phi_2(f, T^{**}) = T^{**} \sum_r (\partial f / \partial q_r)_0 L_r^{**}. \quad (2.15)$$

Тогда, основываясь на выражениях (2.12) — (2.15), формулы (2.9) и (2.10) запишем так:

$$\Delta \Phi_1(f, T) = \Phi_1(f, 0) + \Phi_2(f, T), \quad (2.16)$$

$$\Delta \Phi_2(f, T) = \int_{q_0}^q [\Phi_1(f, 0) + \Phi_2(f, T)] dq, \quad (2.17)$$

Формулы (2.16) и (2.17) позволяют вычислить ошибку конкретного экземпляра механического или электрического устройства при известных величинах первичных ошибок и усредненных показателях изменения ряда последних в функции времени. При массовом (серийном) производстве однотипных устройств и идентичных условиях их эксплуатации входящие в формулу (2.8) параметры Δq_r^0 и L_r в зависимости от физической природы их возникновения могут носить систематический или случайный характер. В последнем случае q_r^0 и L_r будем рассматривать в виде случайных величин, заданных своими законами распределения; при недостаточном объеме статистического материала придется ограничиться знанием таких характеристик, как математическое ожидание (M) и среднее квадратическое отклонение (σ). С учетом сделанных замечаний согласно (2.16) и (2.17) выражения для математического ожидания и дисперсии ошибок $\Delta \Phi_1$ и $\Delta \Phi_2$ могут быть записаны следующим образом;

$$M[\Delta \Phi_1] = M[\Phi_1] + M[\Phi_2], \quad (2.18)$$

$$M[\Delta \Phi_2] = \int_{q_0}^q (M[\Phi_1] + M[\Phi_2]) dq, \quad (2.19)$$

$$\sigma^2 [\Delta q_1] = \sigma^2 [\Phi_1 + \Phi_2], \quad (2.20)$$

$$\sigma^2 [\Delta q_2] = \sigma^2 \left[\int_{Q_0}^Q (\Phi_1 + \Phi_2) dq \right]. \quad (2.21)$$

В теории точности создан метод определения значений

$$M [\Delta q_i], \quad M [(\partial f / \partial q_s)_0 \Delta q_s], \quad \sigma^2 [\Delta q_i], \quad \sigma^2 [(\partial f / \partial q_s)_0 \Delta q_s]$$

в зависимости от заданных величин допусков и известных законов распределения первичных ошибок и законов распределения частных производных [22].

Закон распределения надежности партии устройств в смысле удовлетворения выходных координат допуском можно найти, основываясь на формулах (2.16) и (2.17) при соответствующей их теоретико-вероятностной трактовке, как это делается в задачах теории точности [14, 22]. Так как первичных ошибок, действующих на надежность (в равной мере как и на точность) устройств, в общем случае много, то следует выявить возможности, приводящие к удовлетворению условий центральной предельной теоремы теории вероятностей. В последнем случае надежность устройства определяется нормальным законом распределения, дающим в функции времени вероятность удовлетворения выходных координат заданным техническим условиям. Иными словами, дело сводится к определению выражений $M [\Delta \varphi_e (f, t)]$ и $\sigma^2 [\Delta \varphi_e (f, t)]$. Если условия центральной предельной теоремы теории вероятностей в процессе эксплуатации устройств не соблюдаются, а векторные ошибки отсутствуют, то закон распределения ошибок выходных координат устройств может быть найден методом композиции с последующим его сопоставлением с заданными техническими условиями на показатели точности эксплуатации устройств. В более общем случае закон распределения выходной ошибки устройства можно найти на основе фундаментальной формулы теории точности, применяя для этой цели метод деревьев логических возможностей или метод статистических испытаний.

Основываясь на изложенных соображениях, надежность устройства будем определять так [8]:

$$P'_{\text{П}} = \text{Вер} [|\Delta \varphi| \leq \xi, \mathfrak{M}_{\text{вых}} \geq \mathfrak{M}], \quad (2.22)$$

где ξ — половина поля допуска, принятая постоянной или функцией q или T (все зависит от особенностей изучаемого устройства и требований к условиям его эксплуатации); $\mathfrak{M}_{\text{вых}}$ — мощность сигнала на выходе; $\mathfrak{M}$ — величина выходной мощности устройства, необходимая для его нормального функционирования.

Для обеспечения надежности механизма иногда необходимо, чтобы силы реакции и частоты соударений в кинематических парах удовлетворяли бы некоторым ограничениям. В противном случае возникающие сотрясения и вибрации вызывают изменение заданного закона движения ведущих звеньев, что приводит к ухуд-

шению технологического процесса, в выполнении которого используется механизм. Силы реакции и соударения зависят от действия внешних сил, конструктивной схемы и положения ведущих звеньев и первичных ошибок механизма. При действии на механизм стохастических или одновременно стохастических и детерминированных внешних сил надежность в рассматриваемом случае

$$P_{\text{III}} = \text{Вер} [R_h \leq R_h^*, \omega_h \leq \omega_h^*], \quad (2.23)$$

где R_h — сила реакции в кинематической паре номер h ; R_h^* — допустимая наибольшая величина силы реакции; ω_h — частота соударений в кинематической паре h ; ω_h^* — допустимая наибольшая величина частоты соударений в этой паре.

Стохастические внешние силы могут действовать вдоль одной прямой, в плоскости или пространстве. В простейшем случае эти силы задаются одномерным дифференциальным законом распределения. В настоящей работе стохастические внешние силы принимают не зависящими от времени или, иначе говоря, от положений ведущих звеньев механизма. Пользуясь законом распределения внешних сил, находят для каждого положения ведущих звеньев механизма дифференциальный закон распределения величин сил реакции в каждой кинематической паре отдельно и отмечают направления сил реакции.

В результате для кинематической пары номер h получают

$$\text{Вер} [R_h \leq R_h^*].$$

Если зазоры в кинематических парах настолько малы, что позволяют пренебречь свободным движением одного элемента пары относительно другого, то соударений в парах не будет. (Силы реакции в кинематических парах находят по методам кинетостатики механизмов). Тогда формула (2.23) принимает вид

$$P_{\text{III}} = \prod_h \text{Вер} [R_h \leq R_h^*]. \quad (2.24)$$

При наличии относительно больших зазоров в кинематических парах нельзя пренебрегать свободным движением одного элемента пары относительно другого. В этом случае силы реакции в кинематических парах находят по методу, предложенному в работе [18]. Этот же метод позволяет определить число соударений в каждой кинематической паре за один период работы механизма. Для механизма с одним ведущим звеном понятие «период» очевидно. При нескольких ведущих звеньях понятие «период» труднее определить. Формула (2.24), записанная в более общей форме, имеет вид

$$P_{\text{III}} = \prod_h \text{Вер} [R_h \leq R_h^*] \wedge \text{Вер} [\omega_h \leq \omega_h^*]. \quad (2.25)$$

При действии на механизм только детерминированных внешних сил подсчитанная по формуле (2.24) величина P_{III} может

равняться только единице или нулю. Во втором случае нужно так изменить параметры механизма, чтобы получить новые значения величин R_h^* , всегда большие или равные R_h . Словом, в этом случае отсутствует вероятностная постановка задачи.

Теперь можно записать общую формулу надежности устройства, заключающуюся в том, что ошибка выходного сигнала и мощность на выходе удовлетворяют техническим требованиям, силы реакции в кинематических парах и частота соударений в них не превышают некоторых заданных наибольших значений, т. е.

$$P_{III} = P'_{III} \cdot P''_{III}. \quad (2.26)$$

Если устройство электронное или заранее известно, что силы реакции в кинематических парах устройства не выходят из допустимых границ, то

$$P_{III} = P'_{III} \cdot 1 = P'_{III}. \quad (2.27)$$

Трудность отыскания законов распределения выходного сигнала приводит к тому, что часто надежность устройства определяют из условий [см. формулы (2.12) — (2.14), (2.24)]:

$$|M(\Phi_1) + M(\Phi_2) \pm 3\{M[\Phi_1 - M(\Phi_1)]^2 + \\ + M[\Phi_2 - M(\Phi_2)]^2\}^{1/2}| \leq \xi, \quad (2.28)$$

$$R_h \leq R_h^*, \quad h = 1, 2, 3 \dots$$

Половина поля допуска выбирается на основе следующего равенства:

$$\xi = A |M(\Phi_1)| + B (M[\Phi_1 - M(\Phi_1)]^2)^{1/2}, \quad (2.29)$$

где A, B — целые положительные числа. Их выбор обуславливает необходимый запас точности при эксплуатации.

Выражение (2.28) с учетом (2.12) и (2.13) приведем к следующему виду:

$$ST^2 + 2NT + F = 0, \quad (2.30)$$

где $S = 9M[\Phi_2 - M(\Phi_2)]^2 - [M(\Phi_2)]^2$,

$$N = WM(\Phi_2)[\xi - WM(\Phi_1)], \quad (2.31)$$

$$F = 9M[\Phi_1 - M(\Phi_1)]^2 - [\xi - WM(\Phi_1)]^2,$$

$$W = \begin{cases} 1 & \text{при } M(\Phi_1) + M(\Phi_2) > 0, \\ -1 & \text{при } M(\Phi_1) + M(\Phi_2) < 0. \end{cases}$$

В соответствии с (2.31) коэффициенты S, N и F не зависят от T . Таким образом, (2.30) — это квадратное уравнение, из решения которого может быть найдена величина $T > 0$, определяющая эксплуатационную надежность устройства.

Следует заметить, что при изложенном рассмотрении в общем случае остается неясным, с какой вероятностью удовлетворяются выражения, характеризующие неравенствами (2.28).

Надежность электронных устройств, а также механизмов, в которых заранее известно, что силы реакции в кинематических парах не превышают заданной величины, определяется формулой (2.28). Считается, что в течение промежутка времени T устройство остается надежным.

Изучение технологии массового изготовления деталей позволяет найти корреляционную функцию ошибки выходного сигнала, выяснить специфические особенности действия всех групп первичных ошибок и определить наиболее эффективные приемы регулировки с целью уменьшения ошибки выходного сигнала [17].

§ 3. Надежность устройств в смысле отсутствия грубых первичных ошибок

Грубые первичные ошибки могут появиться в устройствах во время эксплуатации или хранения.

Многие детали могут быть носителями не одной, а нескольких грубых первичных ошибок. Надежность детали есть вероятность отсутствия всех возможных ее грубых ошибок. Поэтому надежность детали равна произведению надежностей: каждый сомножитель есть вероятность отсутствия одной определенной грубой ошибки из числа всех возможных грубых ошибок. Бывает, что вероятность отсутствия некоторой грубой первичной ошибки зависит от других грубых ошибок детали. Тогда надежность, в смысле отсутствия первой грубой ошибки, будет условной вероятностью. Для другой грубой первичной ошибки надежность детали, наоборот, может не зависеть от прочих грубых ошибок; эта надежность есть безусловная вероятность.

Пусть, например, деталь номер s может иметь две грубые первичные ошибки. Надежность P_s детали равна

$$P_s = P'_s \cdot P''_s.$$

Будем, например, рассматривать венцы зубчатых колес. В них могут быть две грубые первичные ошибки: во-первых, поломка зуба, во-вторых, толщина зуба может быть больше номинальной толщины и немного выйти из допусков. В первом случае не будет передано вращение от ведущего зубчатого колеса к ведомому. Пусть утолщенный зуб столь незначительно выходит из допуска на толщину, что вероятности его поломки и поломки зуба, удовлетворяющего этому допуску, под воздействием одних и тех же сил в одних и тех же условиях можно считать одинаковыми. Тогда вероятность P'_s отсутствия поломки зуба не будет зависеть от вышеупомянутого утолщения. Во втором случае толстый зуб, в силу лежащих в границах допуска неточностей толщины зубьев второго венца, может заклинить между зубьями второго

зубчатого венца. В зависимости от передаваемой мощности и условий работы оба венца или не смогут вращаться, или же заклиненный зуб будет сломан. Если ранее толстый зуб был сломан, а отломанные части не попали между зубчатыми венцами, то заклинивание будет невозможно. Если же отломанные части попадут между зубчатыми венцами, то возможность заклинивания возрастет. Следовательно, вероятность P'_s отсутствия заклинивания зависит от того, все ли зубцы не сломаны или имеется сломанный зуб. Итак, P'_s есть безусловная вероятность. P'_s — условная вероятность.

В омическом сопротивлении возможны обрыв и короткое замыкание. Вероятность отсутствия короткого замыкания обозначим через P_s . Оборванное омическое сопротивление не может коротко замкнуться после обрыва, $P'_s = 1$. С другой стороны, коротко замкнутое сопротивление может сохранить свою прочность на обрыв или же перегореть. Во втором случае обрыв будет результатом короткого замыкания и появления вследствие этого большого тока. Обозначим через P''_s вероятность отсутствия обрыва. Иногда эта вероятность не зависит от наличия или отсутствия короткого замыкания. В других случаях после короткого замыкания обязательно появляется обрыв.

Итак, если $P'_s = 0$, то надежность сопротивления, в смысле отсутствия обрыва, не меняется или сопротивление обязательно обрывается в силу перегорания; во втором случае в результате короткого замыкания $P''_s = 0$. В случае обратного порядка появления грубых ошибок будет следующее. Если сначала $P'_s = 0$, то обязательно $P''_s = 1$, т. е. оборванное сопротивление не может коротко замкнуться.

В рассматриваемом аспекте теории надежности принято изучать надежность до появления первой грубой первичной ошибки, вызывающей отказ устройства. Устройство изготавливают и эксплуатируют таким образом, чтобы оно выключалось при появлении первого отказа. Устройство снова запускается, как только грубая ошибка будет устранена, поэтому предыдущая грубая ошибка не повлияет на последующие.

Теперь в зубчатых венцах надежность отсутствия поломки зуба P'_s , надежность отсутствия заклинивания зуба P''_s одного венца между зубцами другого венца можно считать определяемыми безусловными законами распределения.

В омическом сопротивлении надежность в смысле отсутствия короткого замыкания P_s , надежность отсутствия обрыва P'_s теперь тоже можно считать определяемыми безусловными законами распределения.

При рассмотрении надежности устройства в смысле отсутствия грубых первичных ошибок все детали устройства можно разбить на две группы. К первой группе относим такие детали, отказ

любой из которых приводит к отказу устройства в целом:

$$P_I = \prod_s P_{I,s}. \quad (3.1)$$

Здесь $P_{I,s}$ — надежность детали номер s , когда учитываются только грубые первичные ошибки; P_I — надежность устройства, образованного такими деталями.

Ко второй группе относим детали, обладающие свойством, заключающимся в том, что отказ одной детали, вызванный появлением одной определенной грубой ее первичной ошибки, не приводит к отказу устройства. Эти детали следует разделить на подгруппы. Устройство откажет, когда все детали одной или нескольких подгрупп откажут. Обозначив через P_{II} надежность такой детали номер i , через $\pi^{(k)}$ — надежность подгруппы, состоящей из k деталей, имеем

$$1 - \pi^{(k)} = (1 - P_{II,1})(1 - P_{II,2}) \dots (1 - P_{II,k}). \quad (3.2)$$

Надежность P_{II} устройства в отношении рассматриваемых грубых ошибок таких деталей равна

$$P_{II} = \prod_m \pi_m^{(k)}, \quad (3.3)$$

где m — число подгрупп.

Пусть детали второй группы устройства состоят, например, из подгруппы, имеющей две детали, и подгруппы из трех деталей. Детали без определенной грубой первичной ошибки имеют одинаковые надежности, равные 0,9. Согласно (3.2)

$$\pi^{(2)} = 2P_{II,1} - P_{II,1}^2 = 0,99,$$

$$\pi^{(3)} = 3P_{II,1} - 3P_{II,1}^2 + P_{II,1}^3 = 0,999.$$

Надежность устройства в смысле отсутствия этой грубой ошибки у деталей второй группы в соответствии с (3.3) равна

$$P_{II} = \pi^{(2)} \pi^{(3)} = 0,989.$$

Так как надежность подгруппы выше надежности ее деталей, то для повышения надежности устройства иногда специально вводят в устройство такие подгруппы [9].

Состав и схема подгруппы зависят от относительных величин надежностей детали, отдельно определяющих вероятность отсутствия каждой грубой первичной ошибки.

Желание сохранить точность в случае отказа некоторых деталей подгруппы заставляет предъявлять новые требования к составу и схеме подгруппы. Эти требования заключаются в том, что при отказе некоторых деталей и при номинальных значениях всех параметров исправных деталей выходной сигнал, выработанный подгруппой, должен иметь номинальную величину.

Наконец, сделаем специальное замечание о надежности механизмов в смысле отсутствия грубых ошибок. Невозможность поломки зависит от структуры и динамики того механизма, в состав которого звено входит. Выше было указано, что силы реакций в кинематических парах меняются и могут деформировать звенья. Пользуясь методом, кратко описанным выше, можно подсчитать число деформаций каждого звена в отдельности за время полной работы механизма, считая с момента его изготовления. Тогда можно найти усталостную прочность звеньев в функции времени полной работы механизма и, следовательно, получить надежности $P_{I,s}$ и $P_{II,i}$.

§ 4. Примеры определения надежности устройств

Пример 4.1

На рис. 1 представлен винтовой механизм, состоящий из стойки 1, ходового винта 2, гайки 3 и пружины 4. Ошибка положения винтового механизма при наличии в нем скалярных и векторных первичных ошибок может быть записана так [14, 17]:

$$\Phi_1 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right)_0 \Delta q_i + \sum_s \left(\frac{\partial f}{\partial q_s} \right) \Delta q_s. \quad (4.1)$$

Предположим, что функция Φ_2 является следствием износа элементов торцевой (1—2) кинематической пары и из эксперименталь-

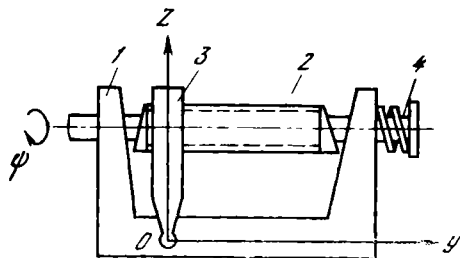


Рис. 1

ных данных удалось установить закономерность ее изменения вида (2.8), т. е.

$$\Phi_2 = \Delta q_1^0 + L_1 T^{**}. \quad (4.2)$$

где Δq_1^0 — амплитуда торцового биения во вращательной паре 1—2, являющаяся следствием перекоса торцовых плоскостей 1 (Δq_1) и 2 (Δq_2), поэтому $\Delta q_1^0 = \inf (\Delta q_1, \Delta q_2)$.

Составляющая функции Φ_1 из-за наличия в ней ошибки осевого биения ходового винта имеет вид

$$(\Phi_1)_{\Delta q_1^0} = \Delta q_1^0 \cos(\psi_1 + \psi_0), \quad (4.3)$$

где ψ_0 — начальная фаза векторной первичной ошибки.

В этом случае при помощи выражений (2.35) — (2.37) и принимая во внимание принятую на рис. 1 систему отсчета согласно равенству (2.16) получим

$$\Delta y_1 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right)_0 \Delta q_i + \sum_s \left(\frac{\partial f}{\partial q_s} \right)_0 \Delta q_s + (\Delta q_1^0 + L_1 T^{**}) \cos(\psi_1 + \psi_0). \quad (4.4)$$

Положим, что из статистических данных удалось установить следующие соотношения: $\delta [\Phi_2] / \sigma [\Phi_1] \ll 1$ и $L_1 = 14 \cdot 10^{-1}$ мм/час. Тогда, основываясь на приведенных в работах [17, 22] законах

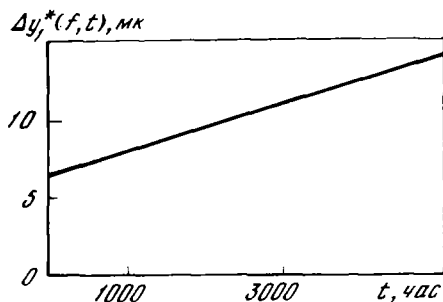


Рис. 2

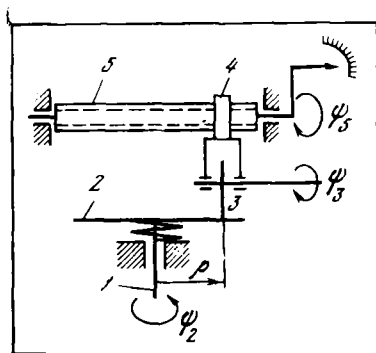


Рис. 3

распределения скалярных первичных ошибок, модулей векторных первичных ошибок и начальных фаз последних, по формулам (2.18) и (2.20) могут быть подсчитаны величины $M |\Delta y_1|$ и $\sigma [\Delta y_1]$, являющиеся параметрами закона распределения ошибки винтового механизма $\Delta y_1(f, t)$. Результаты расчета функции $\Delta y_1^*(f, t)$, характеризующей практически предельное значение ошибки механизма, приведены в виде графика на рис. 2.

График на рис. 2 позволяет вычислить величину $y_1^*(f, t)$ и решить обратную задачу. Так, например, если для партии винтовых механизмов техническими условиями оговорена величина $\Delta y_1^*(f, T)$, то можно найти соответствующее допустимое среднее время их эксплуатации.

Если показатель точности партии механизмов, представленный в виде изображенного на рис. 2 графика, не удовлетворяет заданным техническим условиям, то следует принять меры, приводящие к уменьшению величины L_1 (например, при изготовлении элементов кинематической пары 1—2 использовать другие, более стойкие в отношении износа материалы), или ужесточать допуски на отдельные первичные ошибки механизма.

Пример. 4.2

На рис. 3 изображен фрикционный механизм, состоящий из опоры 1, диска 2, ролика 3, каретки 4, ходового винта 5.

При использовании фрикционного механизма в качестве интегрирующего имеем

$$\Psi_3 - \Psi_3^0 = \int_{\Psi_2^0}^{\Psi_2} \kappa \Psi_3 d\Psi_2, \quad (4.5)$$

где $\kappa = h(1 - \vartheta)2\pi r$ — постоянная механизма; ϑ — коэффициент проскальзывания между диском и роликом (здесь будем полагать ϑ в виде медленно изменяющейся функции времени, которую в процессе одного рабочего цикла устройства можно принять постоянной); h — шаг ходового винта; r — радиус ролика.

Нетрудно заметить, что в отличие от винтового механизма во фрикционном механизме положение его звеньев описывается при помощи дифференциального уравнения (2.2), вследствие чего ошибка выходной координаты фрикционного механизма может быть вычислена на основе формулы (2.17).

Зададимся следующими первичными ошибками механизма: ошибкой шага ходового винта Δh , ошибкой радиуса ролика Δr , ошибкой установки в начальное положение ходового винта $\Delta \Psi_5$, которые в партии механизмов будем считать случайными величинами. В соответствии с принятой формой изменения величин первичных ошибок с течением времени положим

$$\begin{aligned} \Delta h &= \Delta h^0 + L_h T^{**}, & \Delta r &= \Delta r^0 + L_r T^{**}, \\ \Delta \Psi_5 &= \Delta \Psi_5^0 + L_\Psi T^{**}, & \vartheta &= \vartheta^0 + L_\vartheta T^{**}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Тогда по формуле (2.17) с учетом выражений (2.12), (2.13) и (4.6) находим

$$\Phi_1(f, 0) = \kappa_0 \left[(\Psi_2^* - \Psi_2^0) \Delta \Psi_5 + \left(\frac{\Delta h}{h} - \frac{\Delta r}{r} - \vartheta \right) \int_{\Psi_2^0}^{\Psi_2} \Psi_3^0 d\Psi_2 \right], \quad (4.7)$$

$$\Phi_2(f, T^{**}) = T^{**} \kappa_0 \left[(\Psi_2^* - \Psi_2^0) L_\Psi + \left(\frac{L_h}{h} - \frac{L_r}{r} - L_\vartheta \right) \int_{\Psi_2^0}^{\Psi_2} \Psi_3^0 d\Psi_2 \right]. \quad (4.8)$$

Примем во внимание приведенные в работе [17] расчетные значения параметров фрикционного механизма и законов распределения его первичных ошибок, а также возможность повышения точности фрикционных механизмов путем соответствующих регулировок. Тогда на основании выражения (4.7) получим

$$M |\Phi_1(f, 0)| = 0, \quad (4.9)$$

$$\sigma^2 |\Phi_1(f, 0)| = 1,44, \text{ рад}^2. \quad (4.10)$$

При проведении расчетов по формуле (4.8) будем исходить из предположения, что в процессе полного времени эксплуатации механизмов производится их периодическая регулировка для обеспечения следующего условия:

$$M |\Phi_2(f, t)| \approx 0, \quad t \leq T^{**}. \quad (4.11)$$

Пусть, например, величины

$$\begin{aligned} \sigma^2 [L_\omega] &= 2 \cdot 10^{-12} \text{ 1/час}^2, & \sigma^2 [L_r] &= 17.5 \cdot 10^{-12} \text{ мм}^2/\text{час}^2, \\ \sigma^2 [L_h] &= 9.4 \cdot 10^{-12} \text{ мм}^2/\text{час}^2, & \sigma^2 [\theta] &= 1 \cdot 10^{-12} \text{ 1/час}^2. \end{aligned}$$

Тогда, основываясь на изложенном, имеем

$$\sigma^2 [\Phi_2(f, T^{**})] \approx 25 \cdot 10^{-8} (T^{**})^2, \text{ рад}^2. \quad (4.12)$$

Обозначим через ξ величину половины поля допуска, задаваемого техническими условиями на надежность партии фрикционных механизмов, выполненных по одному проекту, и предположим, что ошибка выходной координаты фрикционного механизма распределена по закону Гаусса. Тогда в соответствии с выражениями (4.9) — (4.12) имеем

$$\xi(f, T^{**}) = 3 [1.44 + 25 \cdot 10^{-8} (T^{**})^2]^{1/2}.$$

При $\xi = 4.7 \text{ рад}$ находим

$$T^{**} \approx 2000 \text{ час}. \quad (4.13)$$

Таким образом, согласно (4.13) и с учетом сделанных оговорок партия фрикционных механизмов сможет выполнять работу в среднем около 2000 час для каждого экземпляра механизма.

Пример 4.3

На рис. 4 представлена принципиальная схема электронного интегратора с усилителем постоянного тока УПТ-4. Интегратор имеет следующие ошибки: ΔR — ошибка в сопротивлении R , ΔC — ошибка в емкости C , ΔA — добавочная проводимость в цепи обратной связи из-за неточностей монтажа, $K \neq \infty$ — коэффициент усиления усилителя без обратной связи, Δ_e — дрейф нуля.

На вход интегратора подается входное напряжение $U_{вх}$, представляющее собой интегрируемую функцию. Искомый интеграл изображается выходным напряжением $U_{вых}$. При нулевых начальных условиях приближенное линейное выражение ошибки выходного напряжения интегратора равно

$$\Delta U_{вых} = \frac{B}{C_0} \Delta A + \frac{N}{R_0 C_0} (\Delta R + \Delta C) - \frac{B+N}{R_0 C_0 K} + \Delta_e + \frac{1}{R_0 C_0} \int_0^t \Delta_e \alpha \tau, \quad (4.14)$$

где

$$B = -U_{0, \text{внх}} t + \frac{1}{R_0 C_0} \int_0^t \left[\int_0^{\tau} U_{\text{вх}} d\tau' \right] d\tau, \quad N = \int_0^t U_{\text{вх}} d\tau.$$

Предположим, что ошибка $\Delta U_{\text{внх}}$ подчиняется закону распределения Гаусса:

$$P(\Delta U_{\text{внх}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{(\Delta^* U_{\text{внх}})^2}{2\sigma^2} \right], \quad (4.15)$$

где

$$\Delta^* U_{\text{внх}} = \Delta U_{\text{внх}} - M[\Delta U_{\text{внх}}], \quad \sigma^2 = M[(\Delta^* U_{\text{внх}})^2].$$

Тогда надежность интегратора при условии удовлетворения технических условий, задаваемых, например, в виде $M[\Delta U_{\text{внх}}] \pm \xi$,

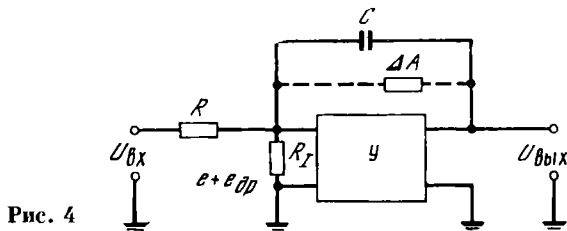


Рис. 4

может быть вычислена на формуле

$$P = \frac{1}{2} \left[E \left(\frac{\xi + M[\Delta U_{\text{внх}}]}{\sqrt{2}\sigma[\Delta U_{\text{внх}}]} \right) - E \left(\frac{\xi - M[\Delta U_{\text{внх}}]}{\sqrt{2}\sigma[\Delta U_{\text{внх}}]} \right) \right]. \quad (4.16)$$

Здесь E — табулированные функции Лапласа.

Согласно техническим требованиям на рассматриваемый тип усилителя постоянного тока величина $\xi = 0,5 \text{ в}$ (0,5% от наибольшего значения выходного напряжения, равного 100 в). В этом случае, задавшись величинами математических ожиданий и дисперсий перечисленных выше первичных ошибок усилителя и принимая ошибку дрейфа нуля в виде линейной функции времени, по формулам (2.19) и (2.21) могут быть подсчитаны $M[\Delta U_{\text{внх}}]$ и $\sigma^2[\Delta U_{\text{внх}}]$, что позволяет по формуле (4.16) найти соответствующие значения вероятностей. На рис. 5 изображены графики изменения надежности усилителя, построенные для трех видов детерминированной функции $U_{\text{внх}}$ по приведенным в работе [9] значениям соответствующих теоретико-вероятностных характеристик первичных ошибок.

Пример 4.4

На рис. 6 представлена принципиальная схема однокаскадного усилителя с транзистором типа МП16Б и общим эмиттером.

Рассмотрим следующие первичные ошибки усилителя: ошибки емкостей — ΔC_1 и ΔC_2 , ошибки в сопротивлениях — ΔR_1 , ΔR_2 ,

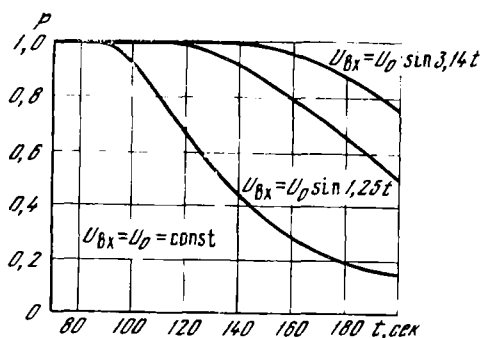


Рис. 5

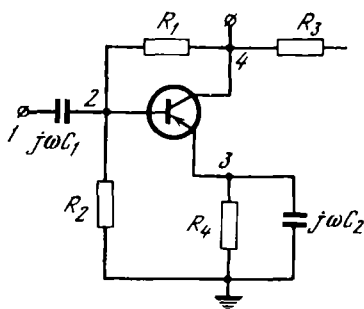


Рис. 6

ΔR_3 , ΔR_4 , ошибки проводимостей между полюсами транзистора — $\Delta G_{2,4}$, $\Delta G_{1,2}$, $\Delta G_{2,3}$, $\Delta G_{3,2}$, $\Delta G_{3,4}$, $\Delta G_{4,3}$. Перечисленные первичные ошибки позволили получить следующее выражение для относительной ошибки выходного напряжения усилителя:

$$\begin{aligned} \Delta U_{\text{вых}}/U_{\text{вых}} = & J_{R_1} \Delta R_1 + J_{R_2} \Delta R_2 + J_{R_3} \Delta R_3 + J_{R_4} \Delta R_4 + \\ & + J_{C_1} j\omega \Delta C_1 + J_{C_2} j\omega \Delta C_2 + J_{G_{2,3}} \Delta G_{2,3} + J_{G_{3,2}} \Delta G_{3,2} + \\ & + J_{G_{4,3}} \Delta G_{4,3} - J_{G_{2,4}} \Delta G_{2,4} - J_{G_{3,4}} \Delta G_{3,4}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где

$$\Delta C'_u = C_u^0 \left[\left(\frac{\Delta C_u}{C_u^0} \right)_{\text{пр}} + L_u \left(\frac{\Delta C_u, t^0}{C_u^0} \right)_{\text{тем}} t^0 + L_u \left(\frac{\Delta C_u, T}{C_u^0} \right)_{\text{ст}} T \right],$$

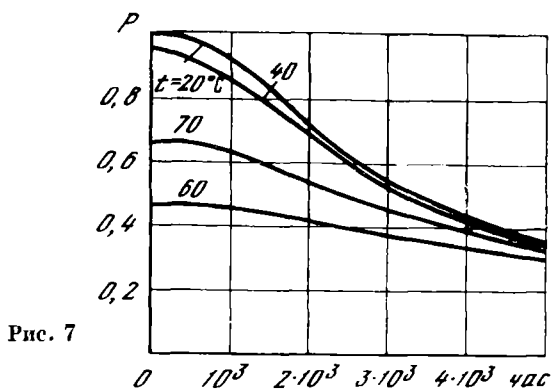
$$u = 1, 2; \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \Delta G_{mn} = & G_{mn}^0 \left[\left(\frac{\Delta G_{mn}}{G_{mn}^0} \right)_{\text{пр}} + L_{mn} \left(\frac{\Delta G_{mn}, t^0}{G_{mn}^0} \right)_{\text{тем}} t^0 + \right. \\ & \left. + L_{mn} \left(\frac{\Delta G_{mn}, T}{G_{mn}^0} \right)_{\text{ст}} T \right] \quad (m = 2, 3, 4; n = 2, 3, 4; m \neq n); \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \Delta R_z = & -R_z^0 \left[\left(\frac{\Delta R_z}{R_z^0} \right)_{\text{пр}} + L_z \left(\frac{\Delta R_z, t^0}{R_z^0} \right)_{\text{тем}} t^0 + \right. \\ & \left. + L_z \left(\frac{\Delta R_z, T}{R_z^0} \right)_{\text{ст}} T \right], \quad z = 1, 2, 3, 4; \end{aligned} \quad (4.20)$$

J_{C_u} , J_{mn} и J_{R_z} — частные производные, стоящие при первичных ошибках.

Принятые в равенствах (4.18) — (4.20) индексы «пр», «тем» и «ст» означают соответствующие составляющие ошибок, являющиеся следствием производственных погрешностей, изменения температуры окружающей среды по отношению к расчетной и старения материала.



Формула (4.17) при соответствующей теоретико-вероятностной трактовке позволяет изложенным выше образом получить величины $M[\Delta U_{\text{вых}}]$ и $\sigma^2[\Delta U_{\text{вых}}]$ в виде функций всех рассмотренных первичных ошибок. На рис. 7 приведены полученные по формуле (4.16) результаты расчета надежности партии усилителей в предположении, что ошибка $\Delta U_{\text{вых}}$ подчинена нормальному закону распределения.

Изложенный материал позволяет в стадии проектирования устройств:

1) по известным образом изменяющимся законам распределения или числовым характеристикам законов распределения отдельных элементов подсчитать (хотя бы в первом приближении) соответствующие ожидаемые показатели точности и надежности устройств и тем самым выбрать и обосновать их схемное решение, удовлетворяющее заданным техническим условиям (иными словами, подобные расчеты позволяют ответить на вопрос о целесообразности выбора той или иной схемы устройства в целях его использования для решения заданного круга задач);

2) по оговоренному допускаемому времени хранения и эксплуатации устройства назначить реально выполнимые допуски на отдельные его элементы с тем, чтобы выходная ошибка устройства с определенной вероятностью удовлетворяла поставленным техническим условиям.

Основы нелинейной теории точности механизмов с низшими кинематическими парами

§ 5. Общие замечания

В нелинейной постановке задачи точности механизмов основное внимание уделяется методу определения ошибок положения, скоростей и ускорений ведомых звеньев механизма, имеющего известные первичные ошибки. Метод заключается в прямом применении вычислительной математики и вычислительной техники к решению уравнений, описывающих поведения механизма, без преобразования уравнений к явному виду и без упрощения уравнений путем разложений в соответствующие ряды. Ошибки механизма могут быть как малыми, так и большими.

При рассмотрении партии механизмов, выполненных по одному конструкторскому и технологическому проекту, приходится считать, что в механизме первичные ошибки случайны и их законы распределения известны. В этом случае поведение механизма описывается системой стохастических уравнений, для решения которых предлагается два метода, из которых один основан на так называемых деревьях логических возможностей, а другой — на развитии метода статистических испытаний. Оба метода пригодны как для малых, так и для больших первичных ошибок и позволяют находить законы распределения или гистограммы ошибок положения, скоростей и ускорений ведомых звеньев. Кроме того, решаются вопросы, связанные с изменением действия подвижных звеньев на неподвижное звено, возникшим от первичных ошибок механизма.

При рассмотрении задачи точности механизмов, работающих в кинематических условиях, приходится иметь дело с уравнениями в конечном виде, а при работающих в динамических условиях — с дифференциальными уравнениями.

Следует иметь в виду, что изложенный ниже аппарат по нелинейной теории точности механизмов будет полезен в тех случаях, когда изучаемый вопрос нельзя решить с помощью линейной теории точности.

В гл. I в рамках линейной теории точности были изложены некоторые общие вопросы точности и надежности устройств. Излагаемый ниже материал нелинейной теории точности также

может быть использован при решении задач проблем надежности, когда подобная постановка задач связана с исследованием точности функционирования устройств за время их эксплуатации.

§ 6. Информация, необходимая для решения нелинейной задачи теории точности

Пусть заданы уравнения механизма с низшими парами, определяющие координаты ведомых звеньев в функции координат ведущих звеньев. Уравнения написаны для механизма, не имеющего первичных ошибок, и для механизма, у которого первичные ошибки существуют. Число уравнений в обоих случаях не меньше числа обобщенных координат ведомых звеньев:

$$F_l(\alpha_j, q_r, \varphi_v) = 0, \quad (6.1)$$

$$j = 1, 2, \dots, j^*; \quad r = 1, 2, \dots, r^*; \quad v = 1, 2, \dots, v^*;$$

$$l = 1, 2, \dots, l^*;$$

α — координата ведущего звена; j^* — число координат всех ведущих звеньев, равное сумме чисел степеней свободы этих звеньев; φ — координата ведомого звена; v^* — число координат всех ведомых звеньев, равное сумме чисел степеней свободы ведомых звеньев; q_r — постоянные параметры механизма, имеющие номинальные значения при отсутствии первичных ошибок механизма; r^* — число параметров.

Механизм с одним ведущим звеном и одним ведомым, имеющими по одной степени свободы, описывается единственным уравнением:

$$F(\alpha, q_r, \varphi) = 0. \quad (6.1')$$

Скорости и ускорения ведомых звеньев определяются уравнениями, полученными путем дифференцирования уравнений (6.1) по времени,

$$\sum_j \frac{\partial F_l}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j + \sum_v \frac{\partial F_l}{\partial \varphi_v} \dot{\varphi}_v = 0, \quad (6.2)$$

$$\sum_j \left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial \alpha_j^2} \ddot{\alpha}_j + \frac{\partial F_l}{\partial \alpha_j} \ddot{\alpha}_j \right) + \sum_v \left(\frac{\partial^2 F_l}{\partial \varphi_v^2} \ddot{\varphi}_v + \frac{\partial F_l}{\partial \varphi_v} \ddot{\varphi}_v \right) = 0, \quad (6.3)$$

$$\text{где } \dot{\varphi}_v = \sum_j \frac{\partial \varphi_v}{\partial \alpha_j} \dot{\alpha}_j.$$

Здесь принято, что время не входит в уравнения (6.1) в явном виде, первичные ошибки механизма не зависят от времени или изменяются столь медленно, что их скорости и ускорения на несколько порядков меньше скоростей и ускорений звеньев механизма (можно еще так сказать: первичные ошибки изменяются за весьма длительное время эксплуатации и хранения механизма; эти изменения могут ограничить долговечность механизма).

Первичные ошибки могут быть детерминированы, и тогда все q_i в уравнениях будут известны. Это имеет место при рассмотрении конкретного экземпляра механизма. Но встречаются и случайные первичные ошибки. В одних случаях они принимают любое значение в границах допусков, и нужно лишь знать законы распределения величин ошибок внутри допусков. В других случаях первичные ошибки имеют конечные числа значений с заданными вероятностями. В общем случае число значений первичных ошибок бесконечно велико. При рассмотрении партии спроектированных механизмов (или спроектированных и построенных) первичные ошибки являются случайными величинами.

Если зазоры в кинематических парах малы и можно пренебречь добавочными перемещениями одних элементов пар относительно других в границах зазоров, то рассмотренная информация и информация о движении ведущих звеньев достаточны. В самом деле, механизм будет иметь число степеней свободы, равное числу независимых координат ведущих звеньев. Решая уравнения (6.1) — (6.3) для механизмов без первичных ошибок и с первичными ошибками, найдем ошибки положения, скоростей и ускорений ведомых звеньев в зависимости от движения ведущих звеньев. Это будут ошибки, найденные в условиях кинематики.

При рассмотрении динамики механизма могут быть два случая.

Во-первых, иногда важно иметь не только малые ошибки ведомых звеньев, необходимо еще строго осуществлять определенные движения ведущих звеньев. Тогда заданными будут движения ведущих звеньев. Движения ведомых звеньев определяются по уравнениям (6.1) — (6.3) в условиях отсутствия всех первичных ошибок. Часть внешних сил на основе принципа Даламбера придется так подобрать, чтобы точно осуществить нужные движения ведущих звеньев механизма без ошибок. В изучаемом случае появляются новые первичные ошибки, заключающиеся в несовпадении сил, действующих на механизм, с силами, найденными на основе применения принципа Даламбера. Если важна упругость звеньев, то другие первичные ошибки состоят в отклонении упругости существующих звеньев от соответствующих номинальных значений. Затем существующие величины масс звеньев будут не совпадать с заданными величинами. Расположение массы каждого звена отклонится от заданного: не совпадет положение центра тяжести, моменты инерции относительно трех некомпланарных, пересекающихся в одной точке, осей координат, центробежные моменты инерции относительно тех же осей. Теперь необходимо иметь информацию о новых первичных ошибках, которые могут быть детерминированными или стохастическими. Находят в этих кинестатических условиях движение ведомых звеньев механизма с первичными ошибками. Так получают ошибки положения, скоростей, ускорений ведомых звеньев, которые не совпадают с одноименными ошибками, полученными в кинематических условиях. Несовпадение ошибок положения вызвано силовыми

деформациями звеньев, а ошибок скоростей и ускорений — тем что движения ведущих звеньев механизма с первичными ошибками будут иными, чем в кинематических условиях.

Во-вторых, в других случаях не важно строго соблюдать движение ведущих звеньев. Тогда следует задаться внешними силами, а не движениями ведущих звеньев. В остальном необходимо иметь информацию, рассмотренную выше. Решают уравнения (6.1), (6.2) и составляют выражения кинетической энергии и обобщенных сил механизма. Из уравнений Лагранжа 2-го рода, написанных для механизма без первичных ошибок, находят движения ведущих и ведомых звеньев, движения считаются «идеальными». Далее решают уравнения Лагранжа для механизма с первичными ошибками. Находят ошибки положения, скоростей и ускорений ведомых звеньев, которые теперь получены в динамических условиях. Ошибки скоростей и ускорений не совпадут с одноименными ошибками в кинематических и кинетостатических условиях.

§ 7. Сущность моделирования на ЭЦВМ

Уравнения (6.1) — (6.3) и уравнения, полученные применением принципа Даламбера или на основе использования уравнений Лагранжа 2-го рода, могут быть детерминированными или некоторые из слагаемых в уравнениях будут случайными. Все зависит от природы первичных ошибок. Задача моделирования состоит в решении упомянутых уравнений для механизма без первичных ошибок, уравнения в этом случае будут детерминированными. Затем приходится решать уравнения для механизма с первичными ошибками, уравнения теперь могут быть как детерминированными, так и стохастическими. В обоих случаях находят движения ведомых звеньев. Путем вычитания первого решения из второго находят ошибки положений, скоростей и ускорений ведомых звеньев.

При стохастическом характере первичных ошибок задача моделированная также заключается в том, чтобы представить первичные ошибки случайными числами, подчиняющимися законам распределения первичных ошибок и лежащими в границах, соответствующих допускам. Требуемое количество чисел, представляющих первичную ошибку, зависит от того, насколько точно и с какой вероятностью эти числа представляют закон распределения первичной ошибки. Затем находят все возможные случайные сочетания случайных значений первичных ошибок, если число случайных сочетаний не весьма велико. Определяют вероятность каждого случайного сочетания на основе законов распределения первичных ошибок. При весьма большом или бесконечно большом числе случайных сочетаний, случайных значений первичных ошибок находят только некоторое число случайных сочетаний. В обоих случаях стохастические уравнения последовательно решают для условий, указанных в каждом очередном случайном сочетании.

Далее задача моделирования заключается в отыскании законов распределения (или гистограмм) ошибок положения, скоростей, ускорений ведомых звеньев на основе имеющихся случайных сочетаний случайных значений первичных ошибок. Эта часть моделирования проводится по-разному для конечных и бесконечных стохастических процессов. Речь идет о процессах, образованных первичными ошибками. В первом случае каждая первичная ошибка принимает конечное число случайных значений с заданными вероятностями. Во втором случае первичные ошибки непрерывны в границах допусков.

Координаты, скорости, ускорения ведомых звеньев механизма вычисляют при выбранных значениях координат ведущих звеньев. Обозначим через A_u число выбранных положений ведущего звена номер u . Вычисление ошибок ведомых звеньев придется производить в следующем числе положений механизма:

$$\prod_u^U A_u. \quad (7.1)$$

§ 8. Вычисление ошибок механизмов, когда первичные ошибки детерминированы

Как известно, первичными ошибками механизма, изучаемого в кинематических условиях, называют отклонения расположений в звене элементов кинематических пар от идеальных положений и отклонения существующих поверхностей элементов от заданных геометрических форм [14]. Для механизма, работающего в условиях динамики, добавляются первичные ошибки, состоящие в отклонении величин и направлений внешних сил, действующих на механизм, величин масс звеньев от заданных значений, упругих и прочностных свойств звеньев от заданных характеристик. в неправильностях распределения масс в звеньях.

Пусть первичные ошибки механизма детерминированы и известны. Если механизм содержит пассивные связи, как, например, плоские или сферические механизмы, то следует убедиться в том, можно ли механизм собрать при имеющихся первичных ошибках или он стал фермой в силу превращения пассивных связей в активные. В других случаях подвижность механизма сохраняется по причине существования зазоров в кинематических парах, т. е. в кинематических парах появляются новые перемещения одного элемента относительно другого, не существующие при идеальных кинематических парах. Тогда уравнение (6.1) и их производные по времени следует уточнить, приняв во внимание новые свойства кинематических пар. Наконец, первичные ошибки могут не повлиять на пассивные связи: плоские механизмы остаются плоскими, сферические — сферическими и т. д.

Уравнения (6.1) — (6.3) во всех случаях, кроме превращения механизма в ферму, решают на вычислительной машине в условиях кинематики; в условиях динамики следует еще решить уравнения,

трения в шатунном подшипнике, направленную по касательной к его поверхности (см. рис. 8), отнесем к внешним силам. Следовательно, обобщенные силы в уравнении Лагранжа оказываются зависящими от обобщенных координат, их скоростей и ускорений поскольку от этих же величин зависит значение R .

Опуская промежуточные выкладки, связанные с определением выражений для обобщенных сил и выводом дифференциального уравнения второго порядка относительно обобщенной координаты γ (для замкнутой кинематической цепи), приведем последнее в следующем виде [19]:

$$\begin{aligned} & \ddot{\gamma} \Delta [M_2 \sin^2 \gamma + M_3 \operatorname{tg} \beta \sin 2\gamma + M_4 \cos^2 \gamma - \\ & - \frac{m_2 (k_1 \operatorname{sign} \dot{\gamma} + k_2 \dot{\gamma} + k_3 \dot{\gamma}^2)}{2 [\sin \tau + (k_1 \operatorname{sign} \dot{\gamma} + k_2 \dot{\gamma} + k_3 \dot{\gamma}^2) \sin \tau_1]}] \times \\ & \times \left[\frac{\cos \gamma}{6 \cos \beta} - \left(\sin \gamma + \frac{\cos \gamma \operatorname{tg} \beta}{2} \right) \sin \gamma + \frac{\cos \gamma \cos \beta}{2} \right] - \\ & - \dot{\gamma}^2 \Delta \left(\frac{M_2 - M_4}{2} \sin 2\gamma + M_3 \operatorname{tg} \beta \cos 2\gamma \right) - \\ & - r \omega^2 [M_2 \cos \alpha \sin \gamma + M_3 \operatorname{tg} \beta \cos (\alpha + \gamma) - M_4 \sin \alpha \cos \gamma] + \\ & + (M_3 \sin \gamma + M_4 \operatorname{tg} \beta \cos \gamma) \frac{(r \omega \cos \alpha + \dot{\gamma} \Delta \sin \gamma)^2}{l \cos^3 \beta} - \\ & - \frac{m_2 (k_1 \operatorname{sign} \dot{\gamma} + k_2 \dot{\gamma} + k_3 \dot{\gamma}^2)}{2 [\sin \tau + (k_1 \operatorname{sign} \dot{\gamma} + k_2 \dot{\gamma} + k_3 \dot{\gamma}^2) \sin \tau_1]} \times \\ & \times \left\{ \frac{l}{6} \left[(\beta^2 - \omega^2) \operatorname{tg} \beta - \dot{\gamma}^2 \frac{\Delta \sin \gamma}{l \cos \beta} \right] - \left[(\beta^2 - \omega^2) \operatorname{tg} \beta - \right. \right. \\ & - \left. \dot{\gamma}^2 \frac{\Delta \sin \gamma}{l \cos \beta} \right] \frac{l}{2} \sin \beta - \frac{l}{2} \beta^2 \cos \beta - r \omega^2 \cos \alpha - \dot{\gamma}^2 \Delta \cos \gamma \Big] \sin \beta - \\ & - \frac{l}{2} \left(\omega^2 \sin \beta + \dot{\gamma}^2 \frac{\Delta \sin \gamma}{l} \right) \cos \beta + g \cos \beta \Big\} - \\ & - \frac{m_2 g \cos \gamma}{2} - (\sin \gamma + \cos \gamma \operatorname{tg} \beta) F(\alpha), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где $M_0 = \frac{M_4}{\cos^2 \beta} - m_3$; $M_2 = m_2 + m_3$; $M_3 = \frac{m_2}{2} + m_3$; $M_4 = \frac{m_2}{3} + m_3$; m_2, m_3 — массы шатуна и ползуна соответственно; $F(\alpha)$ — приложенная к механизму внешняя сила, которая принята изменяющейся по следующему закону:

$$F(\alpha) = P \operatorname{sign}(\sin \alpha), \quad P = \text{const.} \quad (8.3)$$

Уравнение движения механизма в условиях разомкнутого состояния его кинематической цепи запишем так:

$$\begin{aligned} M_2 \ddot{x} - M_3 \operatorname{tg} \beta \ddot{y} &= M_2 r \omega^2 \cos \alpha + M_3 r \omega^2 \sin \alpha \operatorname{tg} \beta + \\ & + \frac{M_3 (r \omega \cos \alpha + \dot{\gamma} \Delta \cos \gamma)^2}{l \cos^3 \beta} - F(\alpha); \end{aligned}$$

$$-M_3 \lg \beta \ddot{x} + M_0 \ddot{y} - M_0 r \omega^2 \sin \alpha - M_3 \lg \beta r \omega^2 \cos \alpha - \quad (8.4)$$

$$- \frac{M_4 \lg \beta (r \omega \cos \alpha + \dot{y})^2}{l \cos^2 \beta} - \left[\frac{m_2 g}{2} + F(\alpha) \lg \beta \right].$$

Из рассмотрения уравнений (8.2) и (8.4) следует, что первое из них записано в полярной системе координат, а последние — в декартовой (см. рис. 8). Целесообразность подобного подхода к составлению соответствующих уравнений связана с существенными упрощениями, имеющими место при составлении программ вычислений на ЭЦВМ траекторий движения отдельных звеньев механизма. Последовательное решение уравнений (8.2) и (8.4) обеспечивается выполнением следующего условия:

$$R \geq \mu(R), \quad (8.5)$$

где μ — некоторая малая величина, определяемая точностью решения.

При удовлетворении неравенства (8.5) на ЭЦВМ осуществляется решение уравнения (8.2), в противном случае — системы уравнений (8.4). Описание соответствующего моделирующего алгоритма, реализующего решение дифференциальных уравнений (8.2) и (8.4) с учетом неравенства (8.5), приведено в [19]. Ниже, на основании указанного моделирующего алгоритма, в табл. 1—3 приведены характерные данные расчетов, выполненные для кривошипно-ползунного механизма в условиях, когда сила трения может быть записана в полной или укороченной форме выражения (8.1), а внешнее воздействие подчиняется закономерности вида (8.3).

Таблица 1

$$k_2 \quad k_3 = F(\alpha) \quad 0; \quad \omega = 5 \text{ сек}^{-1}; \quad \Lambda = 3 \cdot 10^{-5} \text{ м}; \quad r/l = 0,4; \quad m_2/m_3 = 0,12$$

Показатель	k_1			
	0	0,001	0,01	0,1
Значения α , при которых происходят разрывы клемматической цепи, градусы	88, 92, 95 282—294	88, 92 296, 323	88, 93	88
Максимальная длительность отрыва (по углу α):	1°27'	1°22'	1°20'	48'
а) на участках, предшествующих нарушению контакта $R_{\max}/R_{\text{н макс}}$	4,6	5,1	4,9	1,6
б) на участках движения без нарушения контакта $R_{\max}/R_{\text{н макс}}$	1,7	5,8	2,9	2,2
Максимальная скорость относительного движения при восстановлении контакта, м/сек	0,0267	0,027	0,025	0,015
Продолжительность переходного процесса (по α), градусы	—	83	13	1,6

Таблица 2

 $\omega = 5 \cdot \text{сек}^{-1}$; $\Delta = 3 \cdot 10^{-5}$ м; $r/l = 0,5$; $m_2/m_3 = 0,12$; $F(\alpha) = 0$

k_1	0	0	0	0	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
k_2	0	0	0,01	0,1	0	0	0	0,01	0,1	0,01	0,01
k_3	0,01	0,1	0	0	0	0,01	0,1	0	0	0,01	0,1
Продолжительность переходного процесса (по α), градусы	—	—	34,7	5,7	12	12	7,6	8,9	3,8	5,2	4,1

Таблица 3

 $\Delta = 3 \cdot 10^{-5}$ м; $F_{\text{тр}} = 0$; $r/l = 0,1$; $m_2/m_3 = 0,12$

Показатель	Р, н				
	0	1000	2000	4647,5	10 000
Значения α , при которых происходят разрывы кинематической цепи, градусы	88, 92, 95 282—294	101, 105 180	115 117	180	180
Максимальная длительность отрыва (по углу α)	1·27'	32'	25'	16'	13'
а) на участках, предшествующих нарушению контакта $R_{\text{max}}/R_{\text{и max}}$	4,6	9,5	6,2	1	1
б) на участках движения без нарушения контакта $R_{\text{max}}/R_{\text{и max}}$	1,7	24,5	98,5	20,4	15,7
Максимальная скорость относительного движения при восстановлении контакта, м/сек	0,0267	0,07	0,11	0,01	0,27
Время свободного движения, сек	0,005	0,0018	0,0015	0,0009	0,0007

В работе [19] было показано, что при $F_{\text{тр}} = 0$ возникшее колебательное движение точки контакта в условиях замкнутости кинематической цепи не прекращается, вследствие чего изменения величины реакции носят колебательный характер на всем рассматриваемом интервале изменения независимой переменной. При этом, как правило, не удавалось выявить периодичности указанного движения. Аналогичное явление имеет место также в условиях $F_{\text{тр}} = -Rk_3\dot{\gamma}^2$ (см. табл. 2). Однако в большинстве расчетных случаев наличие $F_{\text{тр}} \neq 0$ приводит к затуханию колебаний величины R , возникающих, в частности, из-за нарушения контакта в кинематической паре с зазором. Проведенные расчеты показали, что при наличии трения в паре с зазором продолжительность переходного процесса убывает с ростом значений коэффициентов k_1 ,

k_2 и k_3 , каждый из которых в качественном отношении может оказывать различное влияние на протекание переходного процесса. При немалых значениях сил трения в ряде расчетных случаев уже на втором обороте вращения кривошипа механизма наблюдался установившийся режим движения независимо от выбора начальных условий последнего.

Согласно данным табл. 1 и 3 $F_{тр}$ в отличие от $F(\alpha)$ не оказывает существенного влияния ни на длительность (по углу α) разомкнутого состояния кинематической цепи, ни на скорость относительного движения элементов кинематической пары при восстановлении контакта, а действие изменения величин модулей указанных сил идентично в отношении уменьшения количества участков движения, сопровождающихся явлениями разрыва кинематической цепи. При проведении расчетов, в частности, было выбрано значение $P = 4647,5$ н, соответствующее максимальной силе инерции, действующей на массу m_3 (см. табл. 3). В этом случае кривошипно-ползунный механизм с зазором в динамическом отношении ведет себя подобно идеальному механизму до углов поворота $\alpha = \pi$. При этом зазор полностью выбран, и график зависимости реакции в паре кривошип — шатун совпадает с соответствующим графиком реакции в идеальном механизме [19].

Таким образом, силы трения в кинематических парах с зазорами и внешнее воздействие оказывают существенное влияние на характер динамических показателей механизма.

§ 9. Применение метода деревьев логических возможностей в нелинейной задаче точности механизмов

В настоящее время в связи с непрерывно увеличивающимися возможностями вычислительной техники все большее значение приобретает развитие методов решения задач в области машиностроения, основанных на математическом моделировании, прежде всего метод статистических испытаний (метод СИ) и метод деревьев логических возможностей (метод ДЛВ).

Отметим, что метод ДЛВ, основанный на использовании ряда теорем, касающихся свойств линейных графов, впервые при решении рассматриваемого круга задач был успешно применен при разработке и проверке приближенных формул для расчета точности фрикционных механизмов [23]. Однако в линейной теории точности возможности применения метода ДЛВ ограничиваются, по-видимому, одним только построением закона распределения ошибки положения (или перемещения), основанным на рассмотрении лагранжева дерева, ветвям которого, инцидентным одной вершине, приписывается вполне определенная «масса» вероятности. Поэтому данный метод ввиду очевидных трудностей, связанных с относительно большим объемом трудоемких вычислительных работ, в течение многих лет не получал дальнейшего развития при решении задач в рамках линейной теории точности.

При разработке нелинейной теории точности [12, 24] было показано, что при использовании средств вычислительной техники метод ДЛВ наряду с методом СИ может быть применен при исследовании точности самых разнообразных устройств, поведение которых описывается как конечными, так и обыкновенными дифференциальными уравнениями (в том числе с существенными нелинейностями). При этом в ряде инженерных задач относительно невысокой сложности применение метода ДЛВ может дать определенные преимущества по сравнению с методом СИ ввиду простоты формирования законов распределения случайных чисел, характеризующих собой в определенном масштабе соответствующие величины производственных погрешностей (первичных ошибок) в изготовлении отдельных звеньев и элементов устройств. Отмеченное обстоятельство приобретает особое значение в случае, когда законы распределения первичных ошибок получены эмпирическим путем и не поддаются аппроксимации с желаемой точностью при помощи относительно несложных аналитических выражений.

Кроме того, следует иметь в виду, что метод ДЛВ позволяет отыскивать решение стохастических уравнений на ЭЦВМ и АВМ без какого-либо формального преобразования соответствующего алгоритма или вида машинного уравнения, составленных для решения задачи в детерминированной постановке.

Перейдем к рассмотрению метода ДЛВ в приложении к решению задач в области теории точности, используя для этой цели ряд понятий, принятых в работах [12, 24, 25].

Пусть имеется некоторое пространство логических возможностей. В этом пространстве может быть построено так называемое дерево, представляющее собой связанный граф, в котором нет ни одного контура. Каждая ветвь такого дерева характеризует один из возможных исходов опыта, заключающегося в том, что при измерении некоторого параметра звена или элемента устройства была выявлена конкретная величина соответствующей первичной ошибки.

В условиях массового изготовления устройств по одному конструкторскому и технологическому проекту все первичные ошибки принимают случайный характер, причем их модули ограничены соответствующими полями допусков. Тогда каждой ветви дерева приписывается некоторая вероятностная мера, представляющая собой безусловную или условную вероятность получения отдельных одноименных первичных ошибок или возможного сочетания разноименных первичных ошибок.

Сначала будем рассматривать первичные ошибки, представляющие собой независимые (в статистическом смысле) скалярные величины. Для многих типовых технологических процессов изготовления отдельных звеньев и элементов устройств подобное ограничение не является существенным [14, 17, 22].

Обычно принимают, что в условиях массового изготовления

устройств первичные ошибки подчиняются непрерывным законам распределения, усеченным в границах поля допуска. При этом при проведении практических расчетов нормирующие множители в большинстве случаев не вводятся вследствие малости величин соответствующих поправок по отношению к требуемой точности решения рассматриваемого круга задач.

Отметим следующее обстоятельство. В общем случае первичные ошибки, удовлетворяющие заданным техническим условиям на точность производства, могут принимать любые значения внутри ограничивающего их поля допуска. Однако технические средства измерения качества изготовления звеньев и элементов устройств обычно дают дискретные значения скалярных первичных ошибок, причем дискретность определяется точностью отсчета выбранных средств измерения. Таким образом в вопросах исследования точности устройств приходится иметь дело с конечным (или в предельном случае бесконечным) счетным множеством значений первичных ошибок.

При проведении аналитических расчетов, характерных для линейной теории точности, полученные по экспериментальным данным дискретные законы распределения первичных ошибок, как правило, аппроксимируются простейшими аналитическими зависимостями, которые в ряде случаев принимаются за теоретические законы распределения. Поэтому метод СИ, дающий возможность формировать дискретные законы распределения с шагом, отвечающим требованиям, которые предъявляются к измерительным средствам в условиях производства, в принципиальном отношении является не менее строгим по сравнению с аналитическим методом расчета точности устройств, для которого первичные ошибки принимаются подчиненными непрерывным законам распределения.

Метод ДЛВ также основывается на представлении законов распределения первичных ошибок в виде дискретных и во многих случаях (например, при наличии в устройствах нескольких разноименных первичных ошибок), не уступая по своим показателям точности методу СИ, позволяет решить задачи более коротким и простым путем. Отмеченное обстоятельство определяется тем, что при применении метода ДЛВ, во-первых, требуется меньшее количество вариантов возможных случайных сочетаний разноименных первичных ошибок и, во-вторых, нет необходимости в формировании законов распределения первичных ошибок при помощи генераторов случайных чисел, таблиц псевдослучайных чисел и т. п.

Поясним каждое из указанных обстоятельств. Первое из них основывается на представлении закона распределения в виде некоторой дискретной последовательности сравнительно небольшого количества значений одноименных первичных ошибок, каждому из которых приписывается соответствующая «масса» вероятности. Тогда любое отдельное случайное сочетание случайных значений разноименных первичных ошибок представляет собой так назы-

ваемую реализацию, вероятность появления которой определяется «массами» вероятностей выбранных значений первичных ошибок. Поэтому в методе ДЛВ каждая полученная указанным образом реализация образует вполне определенный путь в дереве логических возможностей и имеет сравнительно легко определяемую вероятность. Очевидно также следующее: число путей в дереве логических возможностей значительно меньше соответствующего числа реализаций, необходимых для решения задачи по методу СИ. Вместе с тем точность решения задач по методу ДЛВ в общем случае ниже точности решения по методу СИ. Это относится, в частности, к задачам нелинейной теории точности, в которых имеет место относительно большое количество разноименных первичных ошибок, распределенных по выбранным из теоретических соображений законам, формирование которых может быть осуществлено сравнительно несложным путем.

Из изложенного следует, что для отмеченного выше второго обстоятельства, характерного для метода ДЛВ, формирование произвольного вида закона распределения случайных величин производится по одному общему правилу и не связывается с необходимостью наличия для проводимых расчетов аналитического выражения закона распределения. Кроме того, в методе ДЛВ в отличие от метода СИ при формировании законов распределения отпадает необходимость статистической проверки качества полученных тем или иным способом псевдослучайных чисел по таким категориям, как «случайность», «некоррелированность» и др.

Отмеченное выше дает основание полагать, что метод ДЛВ в условиях его дальнейшего развития может стать действенным аппаратом исследования достаточно широкого круга прикладных задач, при решении которых в настоящее время используются возможности, основанные на применении разработанных положений метода СИ [26, 27].

Разберем на простейшем примере графический и табличный способы построения дерева логических возможностей, для случая, когда требуется определить законы распределения ошибок ведомых звеньев механизма в предположении, что первичные ошибки случайны и принимают конечное число значений с заданными вероятностями.

Итак, пусть механизм имеет несколько первичных ошибок, каждая из которых принимает конечное число случайных значений с заданными вероятностями. Все возможные комбинации значений разных ошибок можно представить с помощью дерева логических возможностей. На рис. 9 представлено дерево, на котором буквами a , b , c , g обозначены разноименные первичные ошибки. Построение начато из точки O , пазываемой вершиной первого ранга или корнем. Ошибка a имеет только одну детерминированную величину, так как вероятность ее появления $P_a = 1$. Прямая a , выходящая из корня дерева, в терминологии, принятой для

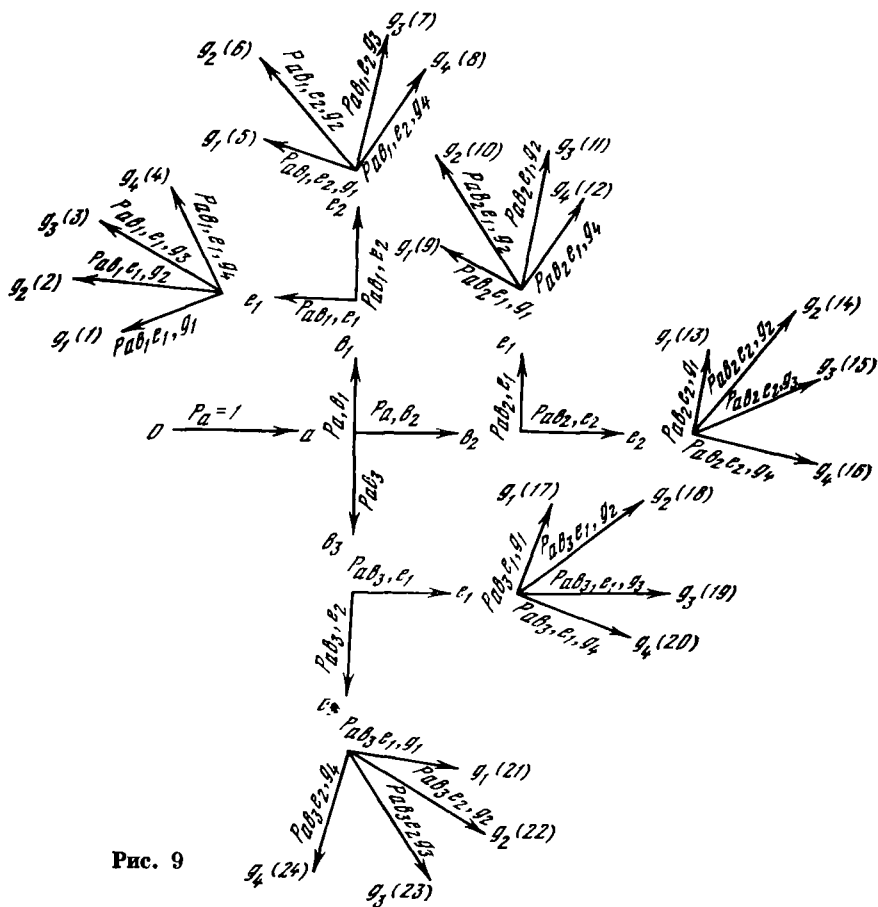


Рис. 9

деревьев, называется ребром или ветвью первого ранга или первого ряда. Конец отрезка, обозначенный точкой a , называют вершиной или точкой ветвления второго ранга или второго ряда. Как показывает рисунок, ошибка b имеет три случайных значения обозначенные через b_1, b_2, b_3 . Вероятности появления этих ошибок определены условными вероятностями $P_{a,b_1}, P_{a,b_2}, P_{a,b_3}$.

Отрезки ab_1, ab_2, ab_3 называют ребрами, или ветвями второго ранга или второго ряда. Ветви, выходящие из точки ветвления, образуют пучок. Сумма вероятностей ветвей любого пучка должна равняться единице. Концы ветвей второго ранга, обозначенные буквами b_1, b_2, b_3 , образуют вершины или точки ветвления третьего ранга или третьего ряда.

Ошибка e принимает только два случайных значения. Условные вероятности

$$P_{ab_1, e_1}, P_{ab_1, e_2}, P_{ab_2, e_1}, P_{ab_2, e_2}, P_{ab_3, e_1}, P_{ab_3, e_2},$$

соответственно относятся к отрезкам b_1e_1 , b_1e_2 , b_2e_1 , b_2e_2 , b_3e_1 , b_3e_2 , которые образуют ребра или ветви третьего ранга или ряда. Концы e_1 и e_2 этих ветвей дают вершины или пучки ветвления четвертого ранга или ряда.

Ошибка g принимает четыре случайных значения, изображенные отрезками $e_1g_1, e_1g_2, e_1g_3, e_1g_4$ или отрезками $e_2g_1, e_2g_2, e_2g_3, e_2g_4$.

Условные вероятности появления разных значений ошибки равны

$$P_{ab_1e_1, g_1}, P_{ab_1e_1, g_2}, P_{ab_1e_1, g_3}, P_{ab_1e_1, g_4},$$

$$P_{ab_1e_2, g_1}, P_{ab_1e_2, g_2}, P_{ab_1e_2, g_3}, P_{ab_1e_2, g_4},$$

• • • • •

$$P_{ab_3e_2, g_1}, P_{ab_3e_2, g_2}, P_{ab_3e_2, g_3}, P_{ab_3e_2, g_4}.$$

Отрезки, отображающие значения ошибки g , называют ребрами или ветвями четвертого ранга или порядка.

Отрезки, соответствующие четырём значениям ошибки g и выходящие из одной точки ветвления, образуют пучок ветвей. На рис. 9 имеется шесть таких пучков.

Согласно рисунку, имеются 24 пути, ведущие от начала к концу (от корня дерева к его вершинам).

Обозначим через n_j число случайных значений первичной ошибки номер j . Число путей в дереве, согласно (7.1), равно

$$N_{\text{путей}} = \prod_j^J n_j, \quad (9.1)$$

где J — число первичных ошибок. На рис. 9 имеем $n_a = 1$, $n_b = 3$, $n_c = 2$, $n_d = 4$.

Каждый путь образован из определенных ветвей и соответствует некоторой логической возможности. Вероятность пути равна произведению вероятностей ветвей, образующих путь.

Вероятности разных величин ошибок и условный характер вероятностей определяются технологией изготовления деталей и сборки механизмов. Во многих случаях вероятности ошибок, возникших в элементах кинематических пар, принадлежащих разным звеньям, будут независимы друг от друга. Первичные ошибки, принадлежащие одному элементу кинематической пары, тоже иногда могут быть независимыми. Словом, здесь необходимо воспользоваться результатами анализа производства [14, 17, 22].

Если в плоском механизме рассматривают ошибки длин звеньев, а в сферическом — ошибки углов звеньев, то можно считать, что в дереве через a , b , c , d , e , f , g изображены фактические длины или углы звеньев.

Легко показать, что сумма вероятностей путей от корня до вершин, образованных ветвями одного ранга (ряда), всегда равна единице.

Дерево логических возможностей можно пачипать строить с любой ошибки и дальше вводить ошибки в каком угодно порядке.

В самом деле, число ветвей равно числу значений, приписываемых данной случайной величине; вероятности ветвей, зависящие от технологии изготовления и сборки механизма, также не изменяются.

Следует проверить, не превращаются ли в условиях каких-либо вариантов некоторые пассивные связи механизма в активные, а механизм — в ферму. Затем вычисляют уравнения механизма для каждого оставшегося пути по очереди и находят ошибки ведомых звеньев. Последние ошибки имеют вероятность, равную вероятности соответствующего пути.

Как было уже отмечено, далеко не всегда вероятности разных значений случайных ошибок носят условный характер. Тогда каждому ребру в дереве будет приписана безусловная вероятность. Все пучки, составленные из ветвей одного ранга или ряда дерева, имеют одинаковое содержание. Такие пучки называют эквивалентными. Каждый ряд дерева будет составлен из своих эквивалентных пучков. Тогда говорят, что первичные ошибки механизма образуют процесс с независимыми значениями.

Может случиться, что в механизме все первичные ошибки совпадают по числу и возможным величинам случайных значений, одинаковые случайные значения разных ошибок имеют одинаковые вероятности. В дереве логических возможностей все пучки ветвей, а не только пучки одного ряда, эквивалентны. Процесс, образованный такими первичными ошибками, известен под названием процесса независимых испытаний.

Таблица 4

		c_1	c_2
		P_{c_1}	P_{c_2}
Oab_1	P_{b_1}	$P_{b_1} P_{c_1}$	$P_{b_1} P_{c_2}$
Oab_2	P_{b_2}	$P_{b_2} P_{c_1}$	$P_{b_2} P_{c_2}$
Oab_3	P_{b_3}	$P_{b_3} P_{c_1}$	$P_{b_3} P_{c_2}$

Дерево логических возможностей очень наглядно, когда общее число значений случайных величин относительно невелико. При умеренном числе случайных значений можно пользоваться таблицами.

В левом столбце табл. 4 записаны пути от корня O до концов ветвей второго ранга. Вторым слева столбец указывает вероят-

ности этих путей. Верхняя строчка таблицы содержит обозначения концов ветвей третьего ранга. Вторая сверху строчка указывает вероятности появления ветвей третьего ранга. В пересечении вертикальных и горизонтальных полос записаны вероятности путей от корня до вершин ветвей третьего ранга. В таблице сумма вероятностей всех путей, заканчивающихся на ветвях одного ранга, должна равняться единице.

Таким же образом составлена табл. 5. В пересечении вертикальных и горизонтальных полос записаны вероятности путей, начинающихся в корне и заканчивающихся в концах ветвей четвертого ранга. Первые четыре буквы пути указаны в левом прямоугольнике соответствующей горизонтальной полосы. Последняя буква пути содержится в верхнем прямоугольнике надлежащей вертикали.

Таблица 5

		g_1	g_2	g_3	g_4
		P_{g_1}	P_{g_2}	P_{g_3}	P_{g_4}
Oab_1e_1	$P_{b_1}P_{e_1}$	$P_{b_1}P_{e_1}P_{g_1}$	$P_{b_1}P_{e_1}P_{g_2}$	$P_{b_1}P_{e_1}P_{g_3}$	$P_{b_1}P_{e_1}P_{g_4}$
Oab_1e_2	$P_{b_1}P_{e_2}$	$P_{b_1}P_{e_2}P_{g_1}$	$P_{b_1}P_{e_2}P_{g_2}$	$P_{b_1}P_{e_2}P_{g_3}$	$P_{b_1}P_{e_2}P_{g_4}$
Oab_2e_1	$P_{b_2}P_{e_1}$	$P_{b_2}P_{e_1}P_{g_1}$	$P_{b_2}P_{e_1}P_{g_2}$	$P_{b_2}P_{e_1}P_{g_3}$	$P_{b_2}P_{e_1}P_{g_4}$
Oab_2e_2	$P_{b_2}P_{e_2}$	$P_{b_2}P_{e_2}P_{g_1}$	$P_{b_2}P_{e_2}P_{g_2}$	$P_{b_2}P_{e_2}P_{g_3}$	$P_{b_2}P_{e_2}P_{g_4}$
Oab_3e_1	$P_{b_3}P_{e_1}$	$P_{b_3}P_{e_1}P_{g_1}$	$P_{b_3}P_{e_1}P_{g_2}$	$P_{b_3}P_{e_1}P_{g_3}$	$P_{b_3}P_{e_1}P_{g_4}$
Oab_3e_2	$P_{b_3}P_{e_2}$	$P_{b_3}P_{e_2}P_{g_1}$	$P_{b_3}P_{e_2}P_{g_2}$	$P_{b_3}P_{e_2}P_{g_3}$	$P_{b_3}P_{e_2}P_{g_4}$

Табл. 4 и 5 полностью содержат информацию, имеющуюся на рис. 9. Эти таблицы можно составлять по заданным условиям, не имея начерченного дерева.

Таблицы для процесса независимых испытаний более просты, чем сейчас рассмотренные, так как для процесса независимых испытаний все пучки ветвей дерева эквивалентны.

Если формула (9.1) дает большое число путей, то можно поступить следующим образом. Все случайные дискретные первичные ошибки разбивают на несколько отдельных групп таким образом, чтобы любая ошибка, входящая в одну группу, отсутствовала во

всех прочих группах. Группы должны содержать такие количества первичных ошибок, чтобы для каждой группы можно было удобно построить такую же таблицу, как табл. 5. Число таблиц равно числу групп. Таблицы содержат полную информацию о всех путях.

Берем в какой-либо таблице вероятности, записанные на пересечении полос. Каждую вероятность умножаем по очереди на все вероятности, записанные в пересечении полос другой таблицы. В результате будут найдены вероятности всех путей, образованных случайными первичными ошибками, входящими в рассмотренные две группы. Левый прямоугольник горизонтальной и верхний прямоугольник вертикальной пересекающихся полос в каждой из двух таблиц содержит информацию о случайных значениях первичных ошибок, образующих путь. После этого можно проделать те же операции над результатом обработки таблиц двух групп первичных ошибок и таблицей третьей группы первичных ошибок и т. д.

Таким образом, вычисление вероятностей путей и определение набора случайных значений первичных ошибок для каждого пути распадается на несколько этапов: построение таблиц для каждой группы первичных ошибок; определение путей для первичных ошибок, входящих в две группы; определение путей при первичных ошибках, входящих в три группы, и т. д.

Может случиться, что на некоторых этапах вероятности некоторых путей (при принятой точности вычислений) приходится считать равными нулю. Такие пути, начиная с изучаемого этапа, не рассматриваются. Вероятности всех прочих путей этапа делят на нормирующий множитель. Возможен другой случай, когда на некотором этапе вероятности всех путей при принятой точности вычислений приходится считать равными нулю. Это значит, что такой этап и последующие этапы нельзя рассматривать при существующей точности вычислений.

Пример 9.1

Сферический четырехзвенный шарнирный механизм представлен на рис. 10. Номинальные углы сторон следующие: $a = \pi/2$, $b = 45^\circ$, $e = 75^\circ$, $g = 60^\circ$. Звено a неподвижно, звено b — ведущее, g — ведомое.

Сторона a имеет пренебрежимо малую ошибку угла. Ошибки углов прочих сторон приходится учитывать. Фактические величины углов трех сторон и вероятности существования этих углов представлены в табл. 6.

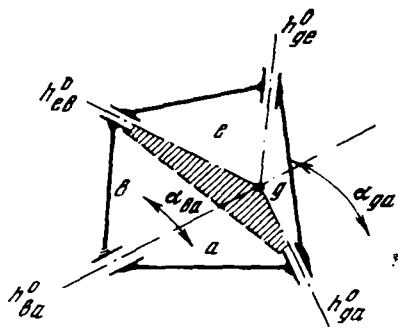


Рис. 10

Таблица 6

$b_1 = 44^\circ$	$b_2 = 44,5^\circ$	$b_3 = 46^\circ$	
$P_{b_1} = 0,10$	$P_{b_2} = 0,50$	$P_{b_3} = 0,40$	
$e_1 = 74,5^\circ$	$e_2 = 75,5^\circ$		
$P_{e_1} = 0,50$	$P_{e_2} = 0,50$		
$g_1 = 59^\circ$	$g_2 = 59,5^\circ$	$g_3 = 60,5^\circ$	$g_4 = 64^\circ$
$P_{g_1} = 0,10$	$P_{g_2} = 0,40$	$P_{g_3} = 0,45$	$P_{g_4} = 0,15$

Ввиду малости можно пренебречь прочими первичными ошибками механизма.

Угол α_{ga} поворота ведомого звена зависит от угла α_{ba} поворота ведущего следующим образом:

$$\cos \alpha_{ga} = -\frac{1}{s_g} x \left[c_b (c_e - s_b c_g \cos \alpha_{ba}) - s_b \sin \alpha_{ba} \cdot \frac{1}{z} \right].$$

В этой формуле синусы и косинусы постоянных углов сторон обозначены так: $s_b, s_e, s_g, c_b, c_e, c_g$.

Угловая скорость ведомого звена равна

$$\omega_{ga} = s_b x (c_b \cos \alpha_{ba} - yz) \omega_{ba}, \quad (9.2)$$

где $\omega_{ga} = \frac{d\alpha_{ga}}{dt}$,

$$x = (1 - s_b^2 \cos^2 \alpha_{ba})^{-1},$$

$$y = \sin \alpha_{ba} (c_g - s_b c_e \cos \alpha_{ba}),$$

$$z = [s_e s_g^2 - (c_e c_g - s_b \cos \alpha_{ba})^2]^{-1/2}.$$

Угловое ускорение ведомого звена имеет величину

$$\dot{\omega}_{ga} = s_b \left\{ \frac{dx}{d\alpha_{ba}} (c_b \cos \alpha_{ba} - yz) - x \left(c_b \sin \alpha_{ba} + \right. \right. \\ \left. \left. + y \frac{dz}{d\alpha_{ba}} + z \frac{dy}{d\alpha_{ba}} \right) \right\} \omega_{ba}^2 + u \dot{\omega}_{ba}.$$

Здесь

$$dx/d\alpha_{ba} = -s_b^2 x^2 \sin 2\alpha_{ba},$$

$$dy/d\alpha_{ba} = c_g \cos \alpha_{ba} - s_b c_e \cos 2\alpha_{ba},$$

$$dz/d\alpha_{ba} = s_b \sin \alpha_{ba} (c_e c_g - s_b \cos \alpha_{ba}) z^3,$$

$$u = \omega_{ga}/\omega_{ba}.$$

Найти вероятности всех путей дерева логических возможностей, образованных фактическими размерами сторон механизма.

Найти для a_{ba} (60), $\omega_{ba} = 10 \text{ сек}^{-1}$ const ошибки положений, скоростей и ускорений ведомого звена механизма; определить для этих ошибок законы распределения.

Решение. Из условий примера и пользуясь табл. 5, получаем вероятности для 24 путей в дереве логических возможностей. Каждый путь является случайным сочетанием случайных значений углов сторон шарнирного сферического четырехзвенника. Других сочетаний нет.

Таблица 7

			$g_1 = 59$	$g_2 = 59,5$	$g_3 = 60,5$	$g_4 = 61^\circ$
$a = \frac{\pi}{2}$ $P_a = 1$	$b_1 = 44^\circ$	$e_1 = 74,5^\circ$	0,0050	0,0200	0,0175	0,0075
		$e_2 = 75,5^\circ$	0,0050	0,0200	0,0175	0,0075
	$b_2 = 44,5^\circ$	$e_1 = 74,5^\circ$	0,0250	0,1000	0,0875	0,0375
		$e_2 = 75,0$	0,0250	0,1000	0,0875	0,0375
	$b_3 = 46^\circ$	$e_1 = 74,5^\circ$	0,0200	0,0800	0,0700	0,0300
		$e_2 = 75,5^\circ$	0,0200	0,0800	0,0700	0,0300

В табл. 7 на пересечении вертикальных и горизонтальных полос записаны вероятности сочетания тех величин углов, которые указаны в трех левых прямоугольниках горизонтальных полос и в верхних прямоугольниках вертикальных полос. Возьмем, например, пересечение третьей сверху горизонтальной полосы и второй слева вертикальной. В пересечении стоит цифра 0,1000. Значит, вероятность одновременного появления углов $b_2 = 44,5^\circ$; $e_1 = 74,5^\circ$; $g_2 = 59,5^\circ$ равна 0,1000.

Уравнения были решены на ЭЦВМ типа «Минск».

Результаты вычислений даны в табл. 8. В левом столбце записаны комбинации значений первичных ошибок, образующие 24 пути. Следующие три столбца дают величины ошибок $\Delta\omega_{ga}$, $\Delta\dot{\omega}_{ga}$, $\Delta\alpha_{ga}$, в правый столбец — вероятности их появления.

Пример 9.2

Рассмотреть динамические ошибки сферического механизма, описанного в примере 9.1.

Массы трех подвижных звеньев и размещение масс в звеньях удобно определять моментами инерции массы каждого звена относительно неподвижных осей вращения.

Номинальные значения моментов инерции звена e относительно осей ba и ga равны $J_{e, ba} = 2 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 \cdot \text{см}$, $J_{e, ga} = 1 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 \cdot \text{см}$.

Таблица 8

Первичные ошибки	$\Delta\omega_{ga}, \text{сек}^{-1}$	$\Delta\dot{\omega}_{ga}, \text{сек}^{-2}$	$\Delta x_{ga}, \text{рад}$	P
$e_1 b_1 g_1$	-0,084050	1,055168	0,025921	0,005000
$e_1 b_1 g_2$	-0,002503	1,144055	0,028592	0,020000
$e_1 b_1 g_3$	0,158351	1,303603	0,033931	0,017500
$e_1 b_1 g_4$	0,137690	1,374555	0,036600	0,007500
$e_1 b_2 g_1$	-0,113832	0,309620	0,015437	0,025000
$e_1 b_2 g_2$	-0,031295	0,391186	0,018150	0,100000
$e_1 b_2 g_3$	0,131511	0,535932	0,023573	0,087500
$e_1 b_2 g_4$	0,211813	0,599404	0,026283	0,037500
$e_1 b_3 g_1$	-0,207775	-1,801376	-0,016067	0,020000
$e_1 b_3 g_2$	-0,122260	-1,743298	-0,013228	0,080000
$e_1 b_3 g_3$	0,046416	-1,645987	-0,007556	0,070000
$e_1 b_3 g_4$	0,129612	-1,606456	-0,004724	0,030000
$e_2 b_1 g_1$	-0,126478	1,597475	0,004842	0,005000
$e_2 b_1 g_2$	-0,044689	1,673300	0,007616	0,020000
$e_2 b_1 g_3$	0,116608	1,808455	0,013154	0,017500
$e_2 b_1 g_4$	0,196149	1,868036	0,015918	0,007500
$e_2 b_2 g_1$	-0,157404	0,869071	-0,005664	0,025000
$e_2 b_2 g_2$	-0,074614	0,937256	-0,002847	0,100000
$e_2 b_2 g_3$	0,088659	1,057014	0,002774	0,087500
$e_2 b_2 g_4$	0,169173	1,108842	0,005579	0,037500
$e_2 b_3 g_1$	-0,254839	-1,188087	-0,037236	0,020000
$e_2 b_3 g_2$	-0,169035	-1,144386	-0,034293	0,080000
$e_2 b_3 g_3$	0,000177	-1,073909	-0,028422	0,070000
$e_2 b_3 g_4$	0,083619	-1,046877	-0,025494	0,030000

Номинальные значения моментов инерции масс ведущего и ведомого звеньев таковы: $J_{b,ba} = 3 \text{ кл}^2 \cdot \text{сек}^2 \cdot \text{см}$, $J_{g,ga} = 1,5 \text{ кл}^2 \cdot \text{сек}^2 \cdot \text{см}$.

Фактические значения моментов инерции звеньев и вероятности их существования приведены в табл. 9.

Принято, что радиусы инерции масс заменяющих точек относительно неподвижных осей вращения ba и ga пренебрежимо

Таблица 9

$I_{e, ba, 1} = 1,8$	$I_{e, ba, 2} = 2,2$	$I_{e, ga, 1} = 0,9$	$I_{e, ga, 2} = 1,1$
$P_{I_{e, ba, 1}} = 0,3$	$P_{I_{e, ba, 2}} = 0,7$	$P_{I_{e, ga, 1}} = 0,5$	$P_{I_{e, ga, 2}} = 0,5$
$I_{b, ba, 1} = 2,7$	$I_{b, ba, 2} = 3,3$	$I_{g, ga, 1} = 1,4$	$I_{g, ga, 2} = 1,7$
$P_{I_{b, ba, 1}} = 0,4$	$P_{I_{b, ba, 2}} = 0,6$	$P_{I_{g, ga, 1}} = 0,2$	$P_{I_{g, ga, 2}} = 0,8$

мало различаются в идеальном механизме и в механизме с ошибками:

$$\rho_{e, ba} = x_e \operatorname{tg} b, \quad \rho_{e, ga} = y_e \operatorname{tg} g;$$

$$\rho_{b, ba} = x_b \operatorname{tg} b, \quad \rho_{g, ga} = y_g \operatorname{tg} g;$$

$$x_e = x_b = OA = 30 \text{ см}, \quad y_e = y_g = OB = 20 \text{ см}.$$

На ведущее звено механизма действует постоянный вращающий момент

$$M_{ba} = 10 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

На ведомое звено действует тормозящий момент M_{ga} , пропорциональный квадрату угловой скорости вращения звена:

$$M_{ga} = -K\omega_{ga}^2, \quad K = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{сек}^2 \text{см}.$$

Ошибки величин моментов сил столь малы, что этими ошибками пренебрегаем.

Идеальным считается механизм, не имеющий первичных ошибок и осуществляющий движение под действием вышеупомянутых моментов сил.

Начальные условия движения механизмов следующие:

$$\alpha_{ba}^{(0)} = 50^\circ, \quad \omega_{ba}^{(0)} = 10 \text{ сек}^{-1}.$$

Требуется определить ошибки положений, скоростей и ускорений ведомого звена и ошибку в величинах сил и моментов сил действия подвижных звеньев на неподвижное звено механизма, найти законы распределения, математические ожидания и дисперсии ошибок, когда угол поворота ведущего звена $\alpha_{ba} = 60^\circ$.

Р е ш е н и е. Заменяем массы подвижных звеньев массами точек, расположенных на осях ba , eb , ge , ga . Заменяющие точки звена e расположены на осях eb и ge . Сумма моментов инерции относительно оси ba заменяющих точек на оси eb равна $J_{e, ba}$, а сумма моментов инерции (относительно оси ga) заменяющих точек на оси ge равна $J_{e, ga}$. Сумма моментов инерции относительно оси ba заменяющих точек ведущего звена равна $J_{b, ba}$. Очевидно, $J_{g, ga}$ равно сумме моментов инерции относительно оси ga заменяющих точек ведомого звена.

Несомненно, технология изготовления не налагает никаких связей между фактическими весами и распределением масс отдельных звеньев. Поэтому случайный процесс, образованный расщеплением тех моментов инерции, которые рассмотрены выше, есть процесс с независимыми значениями. На рис. 11 представлено дерево логических возможностей этого процесса. В дереве имеется 16 путей от корня O' до вершин, образованных пучками ветвей $J_{g, ga, 1} J_{g, ga, 2}$. В табл. 10 подсчитаны вероятности путей дерева, представленного на рис. 11. Вероятности записаны на пересечении горизонтальных и вертикальных полос.

Таблица 10

		$I_{g, ga, 1} = 1,4$		$I_{g, ga, 2} = 1,7$	
		$I_{b, ba, 1} = 2,7$	$I_{b, ba, 2} = 3,3$	$I_{b, ba, 1} = 2,7$	$I_{b, ba, 2} = 3,3$
$I_{e, ba, 1} = 1,8$	$I_{e, ga, 1} = 0,9$	0,0120	0,0180	0,0480	0,0720
	$I_{e, ga, 2} = 1,1$	0,0120	0,0180	0,0480	0,0720
$I_{e, ba, 2} = 2,2$	$I_{e, ga, 1} = 0,9$	0,0280	0,0420	0,1120	0,1680
	$I_{e, ga, 2} = 1,1$	0,0280	0,0420	0,1120	0,1680

столбцов левой части таблицы содержат информацию, взятую из табл. 10.

Приступаем к составлению уравнения динамики сферического механизма.

Кинетическая энергия механизма

$$T = \frac{1}{2} [(I_{e, ba} + I_{b, ba}) \omega_{ba}^2 + (I_{e, ga} + I_{g, ga}) \omega_{ga}^2],$$

поэтому

$$\frac{1}{2} d [(I_{e, ba} + I_{b, ba}) \omega_{ba}^2 + (I_{e, ga} + I_{g, ga}) \omega_{ga}^2] = M_{ba} d\alpha_{ba} + M_{ga} d\alpha_{ga}.$$

Введем обозначение

$$u_{\alpha} = s_{\alpha} x (c_b \cos \alpha_{ba} - yz). \quad (9.3)$$

Тогда согласно (9.2)

$$\omega_{ga} = u_{\alpha} \omega_{ba}.$$

Так как

$$\frac{1}{2} \frac{d(\omega_{ga}^2)}{d\alpha_{ba}} = \frac{1}{2} \frac{d(u_{\alpha}^2)}{d\alpha_{ba}} \omega_{ba}^2 + u_{\alpha}^2 \frac{d\omega_{ba}}{d\alpha_{ba}} \omega_{ba},$$

$$M_{ga} \frac{d\alpha_{ga}}{d\alpha_{ba}} = M_{ga} \frac{\omega_{ga}}{\omega_{ba}} = -Ku_{\alpha}^3 \omega_{ba}^2,$$

то уравнение движения принимает вид

$$[(I_{e, ba} + I_{b, ba}) + (I_{e, ga} + I_{g, ga}) u_{\alpha}^2] \omega_{ba} \frac{d\omega_{ba}}{d\alpha_{ba}} + \frac{1}{2} (I_{e, ga} + I_{g, ga}) \frac{d(u_{\alpha}^2)}{d\alpha_{ba}} \omega_{ba}^2 + Ku_{\alpha}^3 \omega_{ba}^2 = M_{ba}. \quad (9.4)$$

Таблица 11

						$g_1 = 59^\circ$					$e_2 = 75,5^\circ$				
						1	2	3	4	5	6				

Таблица 11 (продолжение)

		13	14	15	16	17	18
		$\beta_3 = 60,5^\circ$					
		$e_1 = 74,5^\circ$			$e_2 = 75,5^\circ$		
		$b_1 = 44^\circ$	$b_2 = 44,5^\circ$	$b_3 = 46^\circ$	$b_1 = 44^\circ$	$b_2 = 44,5^\circ$	$b_3 = 46^\circ$
		0,0175	0,0875	0,0700	0,0175	0,0875	0,0700
$I_{b, ba, 1} = 2,7$	$I_{e, ga, 1} = 0,9$	0,0420	2,40	10,50	8,40	2,40	10,50
	$I_{e, ga, 2} = 1,1$	0,0420	2,40	10,50	8,40	2,40	10,50
	$I_{e, ga, 1} = 0,9$	0,0280	4,90	24,50	19,60	4,90	24,50
	$I_{e, ga, 2} = 1,1$	0,0280	4,90	24,50	19,60	4,90	24,50
	$I_{e, ga, 1} = 0,9$	0,0180	3,45	15,75	12,60	3,45	15,75
	$I_{e, ga, 2} = 1,1$	0,0180	3,45	15,75	12,60	3,45	15,75
$I_{b, ba, 2} = 3,3$	$I_{e, ga, 1} = 0,9$	0,0420	7,35	36,75	29,40	7,35	36,75
	$I_{e, ga, 2} = 1,1$	0,0420	7,35	36,75	29,40	7,35	36,75
$I_{b, ba, 1} = 2,7$	$I_{e, ga, 1} = 0,9$	0,0480	8,40	42,00	33,60	8,40	42,00
	$I_{e, ga, 2} = 1,1$	0,0480	8,40	42,00	33,60	8,40	42,00
	$I_{e, ga, 1} = 0,9$	0,1120	19,60	98,00	78,40	19,60	98,00
	$I_{e, ga, 2} = 1,1$	0,1120	19,60	98,00	78,40	19,60	98,00
	$I_{e, ga, 1} = 0,9$	0,0720	12,60	63,00	50,40	12,60	63,00
	$I_{e, ga, 2} = 1,1$	0,0720	12,60	63,00	50,40	12,60	63,00
$I_{b, ba, 2} = 3,3$	$I_{e, ga, 1} = 0,9$	0,1680	29,40	147,00	117,60	29,40	147,00
	$I_{e, ga, 2} = 1,1$	0,1680	29,40	147,00	117,60	29,40	147,00

Таблица 44 (окончание)

										19	20	21	22	23	24
										$\beta_4 = 61^\circ$					
										$\alpha_1 = 74,5^\circ$					
										$\alpha_2 = 75,5^\circ$					
										$\beta_1 = 44^\circ$					$\beta_2 = 44,5^\circ$
										$\beta_3 = 46^\circ$					$\beta_4 = 46,2^\circ$
										$b_1 = 44^\circ$					$b_2 = 44,5^\circ$
										$b_3 = 46^\circ$					$b_4 = 46,2^\circ$
										$b_5 = 46,5^\circ$					$b_6 = 47^\circ$
										$b_7 = 47,5^\circ$					$b_8 = 48^\circ$
										$b_9 = 48,5^\circ$					$b_{10} = 49^\circ$
										$b_{11} = 49,5^\circ$					$b_{12} = 50^\circ$
										$b_{13} = 50,5^\circ$					$b_{14} = 51^\circ$
										$b_{15} = 51,5^\circ$					$b_{16} = 52^\circ$
										$b_{17} = 52,5^\circ$					$b_{18} = 53^\circ$
										$b_{19} = 53,5^\circ$					$b_{20} = 54^\circ$
										$b_{21} = 54,5^\circ$					$b_{22} = 55^\circ$
										$b_{23} = 55,5^\circ$					$b_{24} = 56^\circ$
										$b_{25} = 56,5^\circ$					$b_{26} = 57^\circ$
										$b_{27} = 57,5^\circ$					$b_{28} = 58^\circ$
										$b_{29} = 58,5^\circ$					$b_{30} = 59^\circ$
										$b_{31} = 59,5^\circ$					$b_{32} = 60^\circ$
										$b_{33} = 60,5^\circ$					$b_{34} = 61^\circ$
										$b_{35} = 61,5^\circ$					$b_{36} = 62^\circ$
										$b_{37} = 62,5^\circ$					$b_{38} = 63^\circ$
										$b_{39} = 63,5^\circ$					$b_{40} = 64^\circ$
										$b_{41} = 64,5^\circ$					$b_{42} = 65^\circ$
										$b_{43} = 65,5^\circ$					$b_{44} = 66^\circ$
										$b_{45} = 66,5^\circ$					$b_{46} = 67^\circ$
										$b_{47} = 67,5^\circ$					$b_{48} = 68^\circ$
										$b_{49} = 68,5^\circ$					$b_{50} = 69^\circ$
										$b_{51} = 69,5^\circ$					$b_{52} = 70^\circ$
										$b_{53} = 70,5^\circ$					$b_{54} = 71^\circ$
										$b_{55} = 71,5^\circ$					$b_{56} = 72^\circ$
										$b_{57} = 72,5^\circ$					$b_{58} = 73^\circ$
										$b_{59} = 73,5^\circ$					$b_{60} = 74^\circ$
										$b_{61} = 74,5^\circ$					$b_{62} = 75^\circ$
										$b_{63} = 75,5^\circ$					$b_{64} = 76^\circ$
										$b_{65} = 76,5^\circ$					$b_{66} = 77^\circ$
										$b_{67} = 77,5^\circ$					$b_{68} = 78^\circ$
										$b_{69} = 78,5^\circ$					$b_{70} = 79^\circ$
										$b_{71} = 79,5^\circ$					$b_{72} = 80^\circ$
										$b_{73} = 80,5^\circ$					$b_{74} = 81^\circ$
										$b_{75} = 81,5^\circ$					$b_{76} = 82^\circ$
										$b_{77} = 82,5^\circ$					$b_{78} = 83^\circ$
										$b_{79} = 83,5^\circ$					$b_{80} = 84^\circ$
										$b_{81} = 84,5^\circ$					$b_{82} = 85^\circ$
										$b_{83} = 85,5^\circ$					$b_{84} = 86^\circ$
										$b_{85} = 86,5^\circ$					$b_{86} = 87^\circ$
										$b_{87} = 87,5^\circ$					$b_{88} = 88^\circ$
										$b_{89} = 88,5^\circ$					$b_{90} = 89^\circ$
										$b_{91} = 89,5^\circ$					$b_{92} = 90^\circ$
										$b_{93} = 90,5^\circ$					$b_{94} = 91^\circ$
										$b_{95} = 91,5^\circ$					$b_{96} = 92^\circ$
										$b_{97} = 92,5^\circ$					$b_{98} = 93^\circ$
										$b_{99} = 93,5^\circ$					$b_{100} = 94^\circ$
										$b_{101} = 94,5^\circ$					$b_{102} = 95^\circ$
										$b_{103} = 95,5^\circ$					$b_{104} = 96^\circ$
										$b_{105} = 96,5^\circ$					$b_{106} = 97^\circ$
										$b_{107} = 97,5^\circ$					$b_{108} = 98^\circ$
										$b_{109} = 98,5^\circ$					$b_{110} = 99^\circ$
										$b_{111} = 99,5^\circ$					$b_{112} = 100^\circ$

Примечание. Числа, стоящие в пересечении горизонтальных и вертикальных полос, нужно множить на 10⁻⁴.

Уравнение (9.4) придется интегрировать для идеального механизма и механизма с первичными ошибками в условиях всех 384 путей табл. 11. Таким образом, определяются движения ведущих звеньев. Ошибки положения ведомого звена, зависящие от положения ведущего звена и от первичных ошибок в условиях кинематики, такие же, как в предыдущем примере 9.1. Ошибки скоростей и ускорений ведомого звена должны иметь новые значения, так как идеальный механизм и механизм с первичными ошибками

имеют иные, чем в предыдущем примере, скорости и ускорения ведущего звена. Законы распределения этих ошибок надлежит строить на основе вероятностей 384 путей.

Переходим к рассмотрению действия подвижных звеньев механизма на неподвижное звено. На рис. 12 ось OZ прямоугольной системы координат перпендикулярна осям шарниров ba и ga , начало координат взято в общей точке пересечения осей шарниров механизма.

Действие подвижных звеньев на неподвижное звено определя-

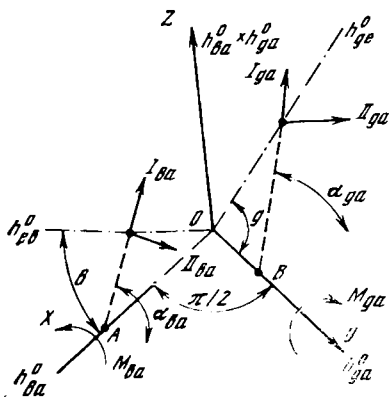


Рис. 12

ются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
 X &= -(I_{e,ga} + I_{g,ga}) \rho_{e,ga}^{-1} (\cos \alpha_{ga} \omega_{ga}^2 + \sin \alpha_{ga} \dot{\omega}_{ga}); \\
 Y &= (I_{e,ba} + I_{b,ba}) \rho_{e,ba}^{-1} (\cos \alpha_{ba} \omega_{ba}^2 + \sin \alpha_{ba} \dot{\omega}_{ba}); \\
 Z &= (I_{e,ga} + I_{g,ga}) \rho_{e,ga}^{-1} (\sin \alpha_{ga} \omega_{ga}^2 - \cos \alpha_{ga} \dot{\omega}_{ga}) + \\
 &\quad + (I_{e,ba} + I_{b,ba}) \rho_{e,ba}^{-1} (\sin \alpha_{ba} \omega_{ba}^2 - \cos \alpha_{ba} \dot{\omega}_{ba}); \\
 M_X &= M_{ba} + (I_{e,ga} + I_{g,ga}) \operatorname{tg} g^{-1} (\sin \alpha_{ga} \omega_{ga}^2 - \cos \alpha_{ga} \dot{\omega}_{ga}) - \\
 &\quad - I_{e,ba} \dot{\omega}_{ba}; \\
 M_Y &= M_{ga} - (I_{e,ba} + I_{b,ba}) \operatorname{tg} b^{-1} (\sin \alpha_{ba} \omega_{ba}^2 - \cos \alpha_{ba} \dot{\omega}_{ba}) - \\
 &\quad - I_{e,ga} \dot{\omega}_{ga}; \\
 M_Z &= (I_{e,ga} + I_{g,ga}) \operatorname{tg} g^{-1} (\cos \alpha_{ga} \omega_{ga}^2 + \sin \alpha_{ga} \dot{\omega}_{ga}) + \\
 &\quad + (I_{e,ba} + I_{b,ba}) \operatorname{tg} \beta^{-1} (\cos \alpha_{ba} \omega_{ba}^2 + \sin \alpha_{ba} \dot{\omega}_{ba}).
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

Эти уравнения нужно решить для механизма без ошибок и механизма с ошибками для всех 384 путей согласно табл. 11. Вычитая из второго решения первое, найдем ошибки компонент сил и

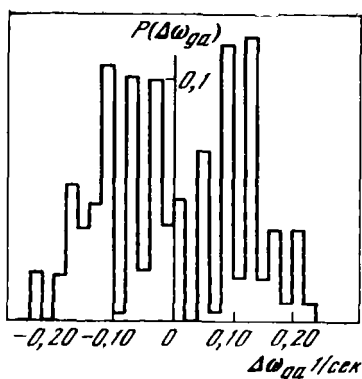


Рис. 13

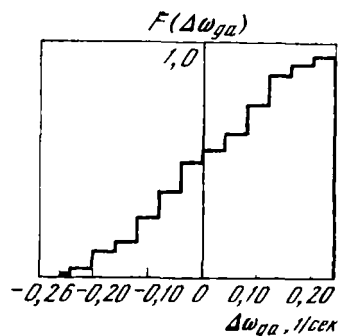


Рис. 14

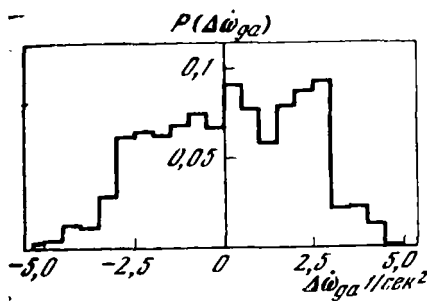


Рис. 15

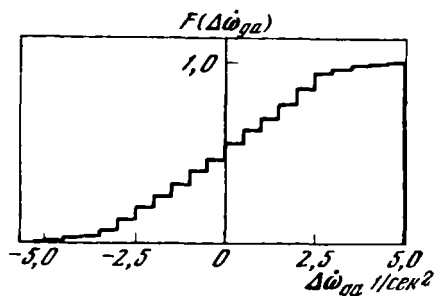


Рис. 16

моментов сил. Затем для каждого пути отдельно следует найти

$$\Delta W = [(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2]^{1/2}, \quad (9.6)$$

$$\Delta M_0 W = [(\Delta M_X)^2 + (\Delta M_Y)^2 + (\Delta M_Z)^2]^{1/2}.$$

Вероятности этих ошибок находят по вероятностям путей дерева логических возможностей.

Были составлены программы решения уравнений (9.3)—(9.6) на ЭЦВМ типа «Минск».

Для идеального механизма при угле поворота ведущего звена $\alpha_{ba} = 60^\circ$ получились следующие результаты:

$$\begin{aligned} \omega_{ba} &= 10,3137 \text{ сек}^{-1}, & \dot{\omega}_{ba} &= -1,4913 \text{ сек}^{-2}, \\ \omega_{ga} &= -0,7118 \text{ сек}^{-1}, & \dot{\omega}_{ga} &= -101,1947 \text{ сек}^{-2}, \\ X &= 5,9554 \text{ кг}, & M_0 X &= 97,5272 \text{ кг} \cdot \text{см}, \\ Y &= 8,6491 \text{ кг}, & M_0 Y &= -363,1881 \text{ кг} \cdot \text{см}, \\ Z &= 19,7050 \text{ кг}, & M_0 Z &= 140,3638 \text{ кг} \cdot \text{см}. \end{aligned}$$

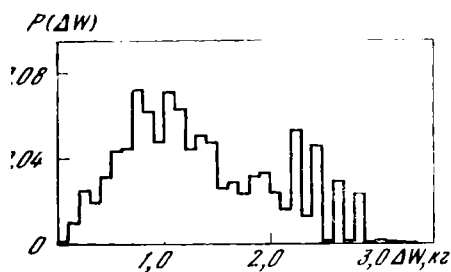


Рис. 17

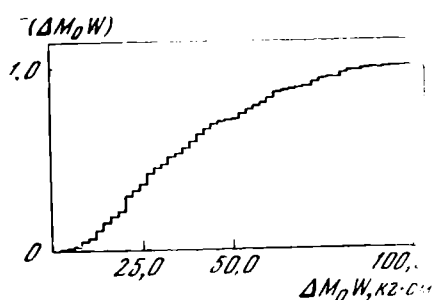


Рис. 18

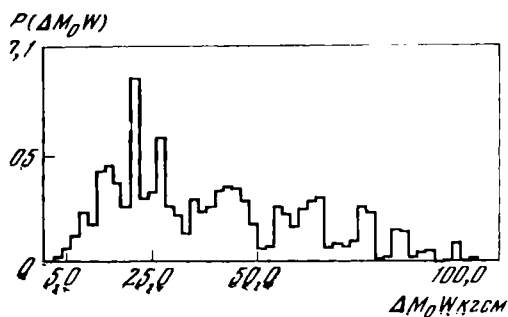


Рис. 19

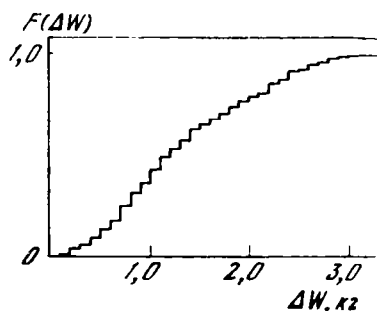


Рис. 20

В механизмах с первичными ошибками искомые ошибки ведомого звена изменяются в следующих диапазонах:

$\Delta\omega_{ga}, \text{сек}^{-1}$	от $-0,2457$ до $0,2436$	
$\Delta\dot{\omega}_{ga}, \text{сек}^{-2}$	$-5,3179$	$4,5153$
$\Delta W, \text{кг}$	$0,0752$	$3,3532$
$\Delta M_0 W, \text{кг·см}$	$2,0944$	$104,8327$

Искомые ошибки имеют следующие значения дисперсий и математических ожиданий:

$D[\Delta\omega_{ga}] = 0,0138 \text{ сек}^{-2}$	$D[\Delta W] = 0,5247 \text{ кг}^2,$
$M[\Delta\omega_{ga}] = 0,0012 \text{ сек}^{-1}$	$M[\Delta W] = 1,3775 \text{ кг},$
$D[\Delta\dot{\omega}_{ga}] = 4,2917 \text{ сек}^{-4}$	$D[\Delta M_0 W] = 507,9678 \text{ кг}^2 \cdot \text{см}^2,$
$M[\Delta\dot{\omega}_{ga}] = 0,1404 \text{ сек}^{-2},$	$M[\Delta M_0 W] = 39,5211 \text{ кг} \cdot \text{см}.$

Табл. 12 дает значения искомых ошибок и их вероятностей в условиях первой строчки табл. 11. Это значит (в кг·см·сек^2), что $J_{g,ga,1} = 1,4$, $J_{b,ba,1} = 2,7$, $J_{c,ca,1} = 1,8$, $J_{e,ga,1} = 0,9$.

Полная информация о величинах искомых ошибок и их вероятностях содержится в комплекте из 16 таких же таблиц. Каждая из таблиц содержит информацию, относящуюся к условиям, записанным на определенной строчке табл. 11.

Таблица 12

	$P \cdot 10^2$	$\Delta W, \text{ нЛ}$	$\Delta M_0 W, \text{ нГсм}$	$\Delta \omega_{ga}, \text{ сек}^{-1}$	$\Delta \dot{\omega}_{ga}, \text{ сек}^{-2}$
$e_1 b_1 g_1$	0,006	1,6774	27,7234	-0,0842	1,7842
g_2	0,024	1,5210	22,7619	-0,0506	0,5105
g_3	0,021	1,2386	16,7806	0,1541	-2,0693
g_4	0,009	1,1232	17,4146	0,2342	-3,3756
$e_1 b_2 g_1$	0,030	1,9671	37,8372	-0,1129	1,4804
g_2	0,120	1,8043	32,4728	-0,0332	0,1650
g_3	0,105	1,4971	23,4984	0,1271	-2,5023
g_4	0,045	1,3595	20,8565	0,2078	-3,8545
$e_1 b_3 g_1$	0,024	2,8374	68,3397	-0,2022	0,8707
g_2	0,096	2,6860	62,8809	-0,1211	-0,5662
g_3	0,084	2,3260	52,2698	0,0424	-3,4893
g_4	0,036	2,1595	47,2759	0,1247	-4,9761
$e_2 b_1 g_1$	0,006	1,7805	28,5392	-0,1243	3,1959
g_2	0,024	1,6280	23,5823	-0,0455	1,9324
g_3	0,021	1,3503	17,1138	0,1129	-0,6260
g_4	0,009	1,2339	17,1922	0,1926	-1,9211
$e_2 b_2 g_1$	0,030	2,0774	38,8401	-0,1538	2,9354
g_2	0,120	1,9159	33,5732	-0,0746	1,6316
g_3	0,105	1,6158	24,6040	0,0851	-1,0116
g_4	0,045	1,4799	21,7428	0,1653	-2,3510
$e_2 b_3 g_1$	0,024	2,9568	69,4340	-0,2457	2,4536
g_2	0,096	2,7900	64,1242	-0,1649	1,0328
g_3	0,084	2,4590	53,7903	-0,0023	-1,8571
g_4	0,036	2,2968	48,9108	0,0796	-3,3265

На основе комплекта таблиц были построены дифференциальные и интегральные законы распределения ошибок $\Delta \omega_{ga}$, $\Delta \dot{\omega}_{ga}$, ΔW , $\Delta M_0 W$, представленные на рис. 13—20.

Пример 9.3

Исследовать влияние сил сухого трения на точность работы автоматических весов, предназначенных для сортировки изготовленных деталей по весу на несколько весовых категорий (рис. 21). Динамический принцип взвешивания деталей позволяет осуществить высокую производительность и точность работы контрольно-измерительного устройства, состоящего из следующих основных частей: пружины 1, платформы 2, соленоида 3 и фотоэлектрического элемента 4.

Процесс измерения веса детали заключается в следующем: на неподвижную в начальном положении платформу устанавливается

измеряемая деталь, в результате чего платформа снимается с упора посредством соленоида и совершает один период свободных колебаний, после окончания которого вновь останавливается упором. Величина амплитуды колебаний, пропорциональная весу детали Y , измеряется фотоэлектрическим элементом в виде электрических импульсов, подсчитываемых электронным счетчиком, при помощи которого осуществляется необходимая корректировка

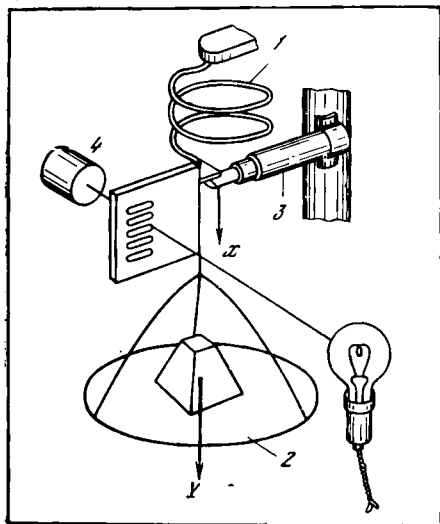


Рис. 21

$$\dot{x}_0^* = 2Y/c$$

и тем самым найден путь, пройденный платформой в ее расчетном движении.

С учетом малой силы сухого трения ΔF уравнение движения системы запишем так:

$$m(\ddot{x}_0 + \Delta\ddot{x}) + c(x_0 + \Delta x) + \Delta F \operatorname{sign}(\dot{x}_0 + \Delta\dot{x}) = Y. \quad (9.11)$$

Из (9.11) вычтем (9.7), в результате чего получим следующее уравнение, описывающее дополнительное движение системы:

$$m\Delta\ddot{x} + c\Delta x + \Delta F \operatorname{sign}(\dot{x}_0 + \Delta\dot{x}) = 0. \quad (9.12)$$

Подставим в (9.12) выражение (9.9):

$$m\Delta\ddot{x} + c\Delta x + \Delta F \operatorname{sign}\left(\frac{Y\omega}{c} \sin \omega t + \Delta\dot{x}\right) = 0. \quad (9.13)$$

Пусть в партии контрольно-измерительных устройств величина ΔF является случайной и подчиняется усеченному закону Релея

$$\eta(\Delta F) = \frac{\Delta F}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{\Delta F^2}{2\sigma_0^2}\right), \quad (0 \leq \Delta F \leq 3,5\sigma_0).$$

положения исполнительных рабочих органов металлорежущего станка.

В соответствии с выбранной системой отсчета уравнение движения идеальной системы принимает вид

$$m\ddot{x}_0 + cx_0 = Y, \quad (9.7)$$

где c — жесткость пружины.

При $x_0(0) = \dot{x}_0(0) = 0$ решением (9.7) будет

$$x_0(t) = \frac{Y}{c}(1 - \cos \omega t). \quad (9.8)$$

Откуда

$$\dot{x}_0(t) = \frac{Y\omega}{c} \sin \omega t, \quad (9.9)$$

где $\omega = \sqrt{c/m}$.

Из (9.8) может быть найдена величина размаха колебаний

$$(9.10)$$

Кривую закона Релея разобьем на n участков (рис. 22, $n = 7$), для каждого из которых согласно (9.13) будем иметь

$$m\Delta\ddot{x}_i + c\Delta\dot{x}_i + \Delta F_i \operatorname{sign} \left(\frac{Y\omega}{c} \sin \omega t + \Delta x_i \right) = 0. \quad (9.14)$$

Таким образом, процесс решения задачи может быть основан на использовании метода ДЛВ, если принять во внимание, что каждому решению (9.14) будет соответствовать вполне определенная вероятность P_i , определяемая i -й ветвью первого ранга на дереве.

Зададимся следующими величинами параметров контрольно-измерительного устройства $Y = 1000$ г; $m = 1$ г·сек²/см; $c = 200$ г/см; $(\sigma_0)_{\Delta F} = 1$ г и примем шаг разбиения закона распределения Релея $\Delta F^* = 0,5 \cdot \sigma = \text{const.}$

Поскольку амплитуда колебаний пропорциональна измеряемому весу детали, то имеет место следующее очевидное равенство:

$$\Delta Y_i / Y = \Delta x_{i, \max} / 2x_0,$$

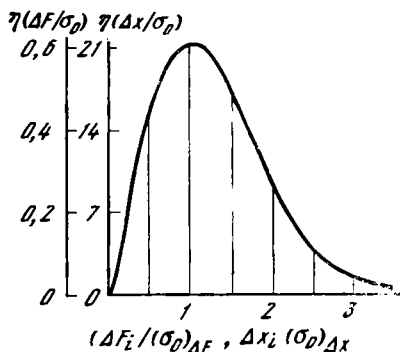


Рис. 22

которое характеризует относи-

тельную погрешность в измерении веса изготовленной детали.

Решение уравнений (9.14) было проведено на АВМ типа МН-7.

В табл. 13 для относительных величин модуля сил сухого трения проведены соответствующие величины относительных погрешностей в измерении веса деталей и указаны вероятности их появления, основанные на принятом разбиении на участки дифференциального закона распределения $\eta(\Delta F)$.

Таблица 13

$\frac{\Delta F_i}{(\sigma_0)_{\Delta F}}, \frac{\Delta x_i}{(\sigma_0)_{\Delta x}}$	0,25	0,75	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25
P_i	0,11	0,28	0,29	0,19	0,09	0,03	0,01
$\frac{\Delta x_{i \max}}{2x_0^*}, \%$	0,04	0,11	0,20	0,27	0,36	0,44	0,53

Для каждого единичного экземпляра динамических весов $\Delta F = \text{const.}$ При рассмотрении выполненной по одному проекту партии динамических весов величина ΔF становится случайной и подчиняется принятому выше закону распределения. Пройденный платформой путь в ее дополнительном движении зависит от вели-

чины ΔF (при прочих равных условиях). При этом согласно принятой схеме расчета вероятность появления тех или иных значений Δx_i определяется вероятностью входящих в i -ю группу величины ΔF_i . Так как в настоящей задаче $\Delta x \propto (\Delta F)$ является «почти линейной» функцией, то $\eta(\Delta x)$ может в первом приближении рассматриваться как закон распределения Релея. Для приведенных выше числовых данных на рис. 22 изображен закон распределения $\eta(\Delta x)$, параметр которого $(\sigma_0)_{\Delta x} \approx 0,032$ см.

Как видно из табл. 13, малые силы сухого трения оказывают весьма существенное влияние на показатели точности динамических весов. В частности, нетрудно заметить, что с вероятностью $P = 0,99$ относительная погрешность измерительной системы не превышает 0,44% при среднем значении погрешности, равной 0,2% (для закона распределения Релея $M\{\Delta x\} = 1,25(\sigma_0)_{\Delta x}$).

§ 10. Применение метода статистических испытаний (метод Монте-Карло) в нелинейной задаче точности механизмов

Весьма распространен случай, когда каждая из первичных ошибок может принимать, согласно заданному закону распределения, любое значение в границах допуска. Тогда первичная ошибка имеет бесконечно большое число значений. Следовательно, уменьшение изучаемого числа случайных сочетаний случайных значений первичных ошибок является актуальным. В дальнейшем каждое случайное сочетание случайных значений первичных ошибок будем называть реализацией. Очевидно, каждый путь в дереве логических возможностей, построенном для дискретных случайных величин, дает одну реализацию, имеющую легко определимую вероятность.

Если не пользоваться всеми существующими в данной задаче реализациями, то необходимо выработать ограниченное число реализаций, удовлетворяющих следующим условиям: каждая реализация должна быть действительно случайным сочетанием случайных значений всех первичных ошибок, подчиняющихся надлежащим законам распределения; в случае процессов с независимыми значениями или испытаниями законы распределения первичных ошибок должны быть независимыми между собой; при существовании некоторых условий, рассмотренных в предыдущем параграфе, вероятности появления разных значений одной первичной ошибки зависят от полученных значений предшествующих первичных ошибок; что касается числа реализаций, то оно должно быть таково, чтобы искомые ошибки были найдены с желаемой точностью.

Остановимся на вопросе о числе необходимых реализаций. Каждая первичная ошибка представляется набором случайных чисел χ_k , подчиняющихся тому же закону распределения, как первичная ошибка номер k ; числа удовлетворяют следующему

неравенству:

$$\mu_k \xi'_k \leq \chi_k \leq \mu_k \xi_k, \quad (10.1)$$

где ξ'_k , ξ_k — нижний и верхний пределы поля допуска для первичной ошибки помер k ; μ_k обозначен масштаб представления первичной ошибки. Количество случайных чисел в наборе, согласно теореме Я. Бернулли [28], определяется тем, что отношение количества L_k чисел, лежащих в границах неравенств (10.1), к общему количеству N_k чисел набора, как лежащих, так и не лежащих в границах неравенств, должно мало отклоняться от вероятности P_k удовлетворения первичной ошибки допуском:

$$\left| \frac{L_k}{N_k} - P_k \right| \leq \delta_k, \quad (10.2)$$

где δ_k — малое положительное число. Это неравенство должно соблюдаться с выбранной вероятностью.

Если первичные ошибки независимы друг от друга, то для представления каждой из них нужно образовывать свой набор случайных чисел, руководствуясь предыдущими неравенствами.

В реализации каждое значение первичной ошибки представляется соответствующим случайным числом. Поэтому необходимое число L реализаций равно наибольшему из L_k :

$$L = \max L_k. \quad (10.3)$$

Принимая во внимание (10.3), преобразуем неравенство (10.2) к такому виду:

$$\left| \frac{L}{N_k} - P_k \right| \leq \delta_k.$$

Теперь N_k — общее количество случайных чисел, представляющих первичную ошибку помер k , причем L чисел из них удовлетворяют неравенству (10.1). Во всех наборах содержится

$$\sum_{k=1}^I N_k \quad (10.4)$$

случайных чисел, где I — общее число первичных ошибок.

Рассмотрим [27] подробнее неравенство (10.2). Введем случайные числа $\vartheta^{(k)}$ согласно следующим условиям:

$$\vartheta^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \chi_k \text{ удовлетворяет неравенству (10.1),} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (10.5)$$

Тогда

$$\frac{L_k}{N_k} = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} \vartheta_i^{(k)}.$$

Случайные числа $\vartheta_i^{(k)}$ не зависят друг от друга, количество их велико, действуют они приблизительно одинаково, поэтому согласно предельной теореме теории вероятностей можно считать, что случайные числа L_k/N_k подчиняются закону, близкому к закону распределения Гаусса.

На основании (10.5)

$$\begin{aligned} M[\vartheta^{(k)}] &= 0(1 - P_k) + 1P_k = P_k \\ D[\vartheta^{(k)}] &= M\{\{\vartheta^{(k)}\}^2\} - \{M[\vartheta^{(k)}]\}^2 = 0(1 - P_k) + 1P_k - P_k^2 = \\ &= P_k(1 - P_k). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} M\left[\frac{L_k}{N_k}\right] &= \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} M[\vartheta_i^{(k)}] = \frac{N_k P_k}{N_k} = P_k, \\ D\left[\frac{L_k}{N_k}\right] &= \frac{1}{N_k^2} \sum_{i=1}^{N_k} D[\vartheta_i^{(k)}] = \frac{P_k(1 - P_k)}{N_k}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Поэтому можно принять, что δ_k пропорционально среднему квадратическому отклонению, имеющему величину, определяемую нижней формулой системы (10.6). Из (10.2) получаем следующее неравенство:

$$\left| \frac{L_k}{N_k} - P \right| \leq \lambda'_k \sqrt{\frac{P_k(1 - P_k)}{N_k}}, \quad (10.7)$$

которое не удовлетворяется с вероятностями, приведенными ниже;

λ'_k	4,5	4,0	3,6	3,0	2,6	2,0
$P_k, \%$	0,0006	0,0064	0,032	0,27	0,94	4,56

Существует еще другой критерий [27] качества представления первичной ошибки номер k набором чисел χ_k , удовлетворяющих неравенствам (10.1). В критерии сравнивают среднее значение

$$\bar{\chi}_k = \frac{1}{L_k} \sum_{i=1}^{L_k} (\chi_k)_i$$

с математическим ожиданием среднего значения

$$M[\bar{\chi}_k] = \frac{1}{L_k} \sum_{i=1}^{L_k} M[\chi_k]_i = a_k.$$

Математическое ожидание случайного числа χ_k равно произведению масштаба на математическое ожидание ошибки ΔL_k ,

удовлетворяющей допускам

$$a_k = \mu_k M[\Delta l_k].$$

Сравнение осуществляют на основе неравенства Чебышева [28], заключающегося в следующем: каково бы ни было положительное число α , вероятность того, что случайная величина χ_k отклонится от своего математического ожидания не меньше чем на α , ограничена сверху величиной D_k/α^2 :

$$P(|\chi_k - a_k| \geq \alpha) \leq D_k/\alpha^2,$$

где D_k — дисперсия случайного числа χ_k . Верхний предел вероятности отклонения больше чем на α записывается так:

$$P(|\chi_k - a_k| > \alpha) < D_k/\alpha^2.$$

Вероятность противоположного события имеет величину

$$P(|\chi_k - a_k| \leq \alpha) \geq 1 - D_k/\alpha^2.$$

Обозначим D_k/α^2 через ε_k . Тогда

$$\alpha = \sqrt{D_k/\varepsilon_k}, \quad P(|\chi_k - a_k| \leq \sqrt{D_k/\varepsilon_k}) \geq 1 - \varepsilon_k. \quad (10.8)$$

Применим это равенство к среднему значению $\bar{\chi}_k$. Обратим внимание на то, что в силу независимости значений $(\chi_i)_i$ друг от друга и равенства их дисперсий

$$D[\chi_k] = \frac{1}{L_k^2} \sum_{i=1}^{L_k} D[\chi_k]_i = \frac{D}{L_k} = \frac{\sigma_k^2}{L_k}.$$

Неравенство (10.8) дает следующее:

$$P\left(|\bar{\chi}_k - a_k| \leq \sqrt{\frac{D_k}{\varepsilon_k L_k}}\right) \geq 1 - \varepsilon_k.$$

Запишем последний результат таким образом

$$|\bar{\chi}_k - a_k| \leq \gamma_k \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_k L_k}} \quad (P \geq 1 - \varepsilon_k). \quad (10.9)$$

Среднее квадратическое отклонение σ_k равно произведению масштаба на среднее квадратическое отклонение первичной ошибки, взятой в границах допусков. Число L_k подбирают так, чтобы неравенство выполнялось с высокой вероятностью.

Полезно отметить, что, вместо неравенства (10.7) и для оценки его левой части, можно составить другое выражение на основе выражения (10.8). Однако тогда получится меньшая нижняя граница вероятности выполнения нового неравенства. Это происходит от того, что неравенство Чебышева справедливо при любом законе распределения, а в неравенстве (10.7) учтена сходимости закона распределения частоты L_k/N_k к нормальному.

Неравенства (10.7) и (10.9) показывают, что с увеличением количеств N_k и L_k случайных чисел в наборе увеличивается вероятность выполнения этих неравенств. Отсюда следует, что улучшается представление первичной ошибки случайными числами.

При пользовании двумя неравенствами необходимое число L реализаций [см. (10.3)] равно наибольшему числу L_k в этих неравенствах. Значит, число реализаций не особенно сильно [не так, как в формуле (9.1)] зависит от числа первичных ошибок.

Реализации создают с помощью генератора случайных чисел [27], который можно поочередно настраивать на нужные законы распределения. Генераторы в известной мере можно заменять алгоритмами получения псевдослучайных чисел по закону равной вероятности и специальными программами вычислений с целью получения нужных законов распределения. Для дальнейшего изложения неважно, каким путем вырабатываются числа, подчиняющиеся нужному закону распределения. Поэтому дальше будем говорить о генераторах, понимая под этим не только генераторы, но и алгоритмы получения псевдослучайных чисел (в случае необходимости последние будут особо оговариваться).

Если механизм с его первичными ошибками образует случайный процесс с независимыми значениями или независимыми испытаниями, то реализации можно начинать строить с изображения любой первичной ошибки механизма и далее рассматривать ошибки в любом порядке. Настраивают генератор случайных чисел на закон распределения этой первичной ошибки. Число, выданное генератором, дает конкретную величину ошибки. Перестраивают генератор на закон распределения другой первичной ошибки. Генератор дает новое число, принимаемое за конкретную величину второй ошибки. Перестраивают генератор на закон распределения третьей первичной ошибки и поступают, как в первых двух случаях. Так продолжают до исчерпания всех первичных ошибок. В результате получается случайное сочетание значений всех первичных ошибок, т. е. реализация. Все полученные сведения записывают. Таким же путем строят вторую, третью и т. д. реализации, пока не наберут нужное число. Комплект реализаций является «моделью» того же числа построенных и измеренных первичных ошибок механизмов. Конечно, реализации строятся по законам распределения первичных ошибок механизмов, изготовленных по единому проекту и по одной и той же технологии производства.

В общих чертах решение задачи точности механизмов на основе использования описанных реализаций производится так же, как при привлечении так называемых путей дерева логических возможностей. Все же в обоих случаях имеются и различия. Будем рассматривать вычисления только для одного сочетания положений ведущих звеньев механизма.

Находят координаты, скорости и ускорения всех ведомых звеньев механизма, не имеющего ошибок. Затем обращаются к меха-

низму с ошибками и находят координаты, скорости и ускорения ведомых звеньев для условий каждой реализации в отдельности. Получается столько решений, сколько имеется реализаций. Из последних решений вычитают соответственно координаты, скорости и ускорения ведомых звеньев механизма без ошибок. Имея наборы ошибок положения для каждого ведомого звена механизма отдельно, строим для этого звена гистограмму, дающую частоты, приблизительно равные вероятности разных величин ошибок. Точно так же поступают с ошибками скоростей и ускорений ведомых звеньев с целью получения их гистограмм. По гистограммам находят среднее значение каждой из ошибок и среднее квадратическое отклонение для нее.

Теперь продолжим рассмотрение точности определения ошибок ведомых звеньев механизма и гистограмм ошибок. Неточности получения ошибок ведомых звеньев происходят от того, что существуют не равные нулю вероятности получения неудачного представления первичных ошибок случайными числами. Последние числа входят в вычисления ошибок ведомых звеньев и вызывают погрешности величин ошибок этих звеньев. Интересно найти вероятности появления этих погрешностей.

Неравенства (10.7) и (10.9) стохастически взаимно связаны, во-первых, условиями (10.5), а во-вторых, тем обстоятельством, что с увеличением N_k увеличивается также L_k . Вероятность выполнения обоих неравенств для первичной ошибки равна произведению вероятностей выполнения каждого неравенства отдельно. Один сомножитель будет безусловной вероятностью, а другой — условной. Берем в качестве безусловной вероятности наименьшую из двух вероятностей. Тогда условная вероятность равна вероятности выполнения другого неравенства, когда N_k и L_k выбраны по более трудно удовлетворимому неравенству. Условная вероятность легко вычисляется по формулам неравенств, если в соответствующее неравенство подставить надлежащее L_k или N_k .

Обозначим:

$$\theta_k = \begin{cases} P'_k(1 - \varepsilon_k)_{\text{усл}}, & \text{если } P'_k < 1 - \varepsilon_k, \\ (1 - \varepsilon_k)(P'_k)_{\text{усл}}, & \text{если } 1 - \varepsilon_k < P'_k. \end{cases} \quad (10.10)$$

Обозначим через κ вероятность неудачного представления случайными числами всех независимых первичных ошибок или некоторых первичных ошибок в любом сочетании или хотя бы какой-либо одной первичной ошибки. Тогда

$$\kappa < 1 - \prod_{k=1}^{J-F} \theta_k. \quad (10.11)$$

Произведение, стоящее в правой части (10.11), содержит вероятности, относящиеся только к действующим первичным ошибкам. Так, при рассмотрении ошибок положения ведомых звеньев дей-

ствующими первичными ошибками будут неправильности расположения элементов кинематических пар в звеньях и неправильности поверхностей этих элементов. Что касается ошибок величин и направлений сил, приложенных к механизму, ошибок в распределении масс звеньев и ошибок в упругих свойствах звеньев, то они действуют, если упругие и пластические деформации пренебрежимо малы. Верхний предел $J - F$ числа сомножителей показывает, что следует перемножить вероятности только действующих первичных ошибок.

В формуле (10.11) правая и левая части соединены одним знаком неравенства, знак равенства отсутствует. Дело в том, что могут существовать первичные ошибки, отсутствие действия которых труднее обнаружить, так как для этого необходимо выполнить вычисление ошибок ведомых звеньев.

Наконец, следует учесть, что вычисления всегда выполняются с определенной точностью, вероятность неудачного представления случайными числами всех первичных ошибок низка и часто оказывается за пределами точности вычислений.

Существует еще другая причина неточности определения ошибок ведомых звеньев и гистограмм ошибок. Она заключается в том, что реализации, полученные описанным путем, образуют недостаточно многочисленную выборку по отношению к числу случайных сочетаний случайных значений первичных ошибок. В условиях случайных сочетаний нужно определять ошибки ведомых звеньев.

Выбираем по нижеследующему условию масштаб μ_k для представления числами поля допуска ошибки номер k :

$$\mu_k (\xi_k - \xi'_k) = 1 - 2^{-w} \approx 1,$$

где w — число разрядов в разрядной сетке цифровой части числа (без знаковых разрядов) в вычислительной машине.

Всякое число, меньшее 2^{-w} , не уместается в разрядной сетке, для машины оно то же, что нуль. Первичная ошибка представляется набором дискретных случайных чисел, неодинаковых чисел будет не больше 2^w , некоторые числа могут отсутствовать, другие — повторяться. Все зависит от закона распределения первичной ошибки и от величины представляющего набора случайных чисел. Если набор «не сколь угодно большой, но конечный», то при каждом новом рассмотрении первичной ошибки последняя будет представлена набором случайных чисел, не совпадающим с предыдущими числами, даже если бы все наборы имели одинаковые количества чисел. Отметим, что это несовпадение наборов существенно.

Допустим, что все первичные ошибки представлены своими наборами, имеющими по L случайных чисел. Тогда ошибки ведомых звеньев нужно определить при [см. (9.1)]

$$N_{CC} = L^J \quad (10.12)$$

случайных сочетаний случайных значений первичных ошибок. L реализаций составляют выборку. Отношение числа реализаций к числу случайных сочетаний случайных значений первичных ошибок равно

$$V = L^{-(J-1)}. \quad (10.13)$$

Если увеличить количество L чисел в наборах, представляющих первичные ошибки, то, как уже было отмечено, получаются новые наборы, формула (10.13) остается справедливой. Однако выборка составит еще меньшую часть числа случайных сочетаний случайных значений первичных ошибок.

Оценим теперь число, названное нами «сколь угодно большим, но конечным». Дискретность чисел, вырабатываемых в вычислительной машине, приводит к тому, что непрерывная случайная величина заменяется дискретной, имеющей $E = 2^w$ случайных значений. В самом деле, произведение наименьшего числа, представляемого в разрядной сетке, на E , равно $E \cdot 2^{-w} = 1$.

В случае закона равной вероятности в наборе будет 2^w чисел, имеющих равные вероятности. При других законах распределения числа будут иметь разные вероятности. Иначе говоря, некоторые числа будут многократно повторяться в соответствии с их вероятностями, причем вероятности всех чисел, как одинаковых, так и неодинаковых, равны. Общее количество N_k чисел набора, как одинаковых, так и неодинаковых, зависит от закона распределения:

$$N_k = \Phi(2^w). \quad (10.14)$$

Итак, вторая причина неточности определения ошибок ведомых звеньев заключается в том, что при изменении чисел набора, представляющего закон распределения первичной ошибки, невозможно получить достаточно большую выборку, составленную из реализаций.

Для преодоления описанных трудностей заменяем непрерывные случайные первичные ошибки, удовлетворяющие допускам, дискретными случайными ошибками, имеющими сравнительно небольшие количества n_k значений. Необходимо, чтобы в течение всех статистических испытаний наборы дискретных чисел, представляющие законы распределения первичных ошибок, не менялись. Делаем число статистических испытаний во много раз больше самого большого количества чисел в наборах. Величину каждой первичной ошибки при любом испытании берут случайным образом в том наборе, который представляет закон распределения этой ошибки. Теперь по мере увеличения числа испытаний частоты появления каждого случайного значения любой первичной ошибки будут приближаться к вероятностям.

При использовании псевдослучайных чисел сначала образуют набор чисел, подчиняющихся закону равной вероятности. Выбирают количество чисел в наборе в зависимости от алгоритма пере-

хода к закону распределения, которому подчиняется данная первичная ошибка. Набор, представляющий последний закон распределения, должен быть сравнительно небольшим. Его записываем в той последовательности, как он был образован. При проведении статистических испытаний числовое значение каждой первичной ошибки берут в случайной последовательности в соответствующем наборе.

Можно пользоваться наборами случайных, а не псевдослучайных, дискретных чисел, представляющими законы распределения первичных ошибок. В каждом наборе содержится сравнительно небольшое количество чисел. Случайные числа, например, представляют только старшими разрядами разрядной сетки цифровой части числа. Тогда нулем будет всякое число, меньшее 2^{-r} . В течение всех испытаний наборы не меняются. Числовые значения каждой первичной ошибки берут в случайной последовательности в соответствующем наборе.

Вероятности дискретных значений определяются с помощью уравнения

$$\int_{\xi_k}^{\xi_k} p_k d\chi_k = \sum_{i=1}^{n_k} \int_{\xi_{k(i-1)}}^{\xi_{ki}} p_k d\chi_k = 1, \quad \xi_{k0} = \xi'_k, \quad \xi_{kn_k} = \xi_k,$$

где p_k — частное от деления плотности вероятности непрерывной первичной ошибки, удовлетворяющей или не удовлетворяющей допуску, на нормирующий множитель

$$P_{ki} = \int_{\xi_{k(i-1)}}^{\xi_{ki}} p_k d\chi_k, \quad (10.15)$$

где P_{ki} — вероятность случайного значения номер i первичной ошибки номер k .

Величины и математические ожидания дискретных значений первичной ошибки находим из условия

$$a_k = \int_{\xi_k}^{\xi_k} p_k \chi_k d\chi_k = \sum_{i=1}^{n_k} \int_{\xi_{k(i-1)}}^{\xi_{ki}} p_k \chi_k d\chi_k. \quad (10.16)$$

Отсюда

$$a_{ki} = \int_{\xi_{k(i-1)}}^{\xi_{ki}} p_k \chi_k d\chi_k = \chi_{ki} P_{ki}, \quad (10.17)$$

где χ_{ki} , a_{ki} — величина и математическое ожидание случайного значения номер i первичной ошибки номер k . Формулы

показывают, что

$$a^k = \sum_{i=1}^{n_k} a_{ki}^k.$$

Переходим к рассмотрению дисперсий

$$D[\chi_k] = \int_{\xi_k}^{\xi_k} p_k(\chi_k - a_k)^2 d\chi_k = \sum_{i=1}^n \int_{\xi_{k(i-1)}}^{\xi_{ki}} p_k(\chi_k - a_k)^2 d\chi_k.$$

Введем новую переменную ξ_i

$$\chi_k = \chi_{ki} + \xi_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned} D[\chi_k] = & \sum_{i=1}^{n_k} \left\{ \int_{\xi_{k(i-1)}}^{\xi_{ki}-\chi_k} p_k(\xi_i)^2 d\xi_i - 2(a_k - \chi_{ki}) \int_{\xi_{k(i-1)}}^{\xi_{ki}-\chi_{ki}} p_k \xi_i d\xi_i \right\} + \\ & + \sum_{i=1}^{n_k} \left[(a_k - \chi_{ki})^2 \int_{\xi_{k(i-1)}}^{\xi_{ki}} p_k d\xi_i \right]. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Интегралы в фигурных скобках малы, так как область интегрирования каждого интеграла мала. Суммирование по i содержит небольшое число этих интегралов. Поэтому сумма тоже мала. Обозначим сумму по i через $\delta(D[\chi_k])$. Тогда дисперсия первичной ошибки номер k при переходе к дискретному распределению равна

$$\sum_{i=1}^{n_k} D[\chi_{ki}] = \sum_{i=1}^{n_k} \chi_{ki}^2 P_{ki} - a_k^2 = D[\chi_k] - \delta([\chi_k]). \quad (10.19)$$

Теперь формулы (10.2) — (10.13) не имеют значения. Ошибки ведомых звеньев придется определять при

$$N'_{CC} = \prod_{k=1}^J n_k \quad (10.20)$$

случайных сочетаний случайных значений первичных ошибок (сравнить с (10.12)). Это число не зависит от числа реализаций.

Выбираем L таким, чтобы была как можно большей величина отношения

$$V' = L/N'_{CC},$$

где N'_{CC} определяется по (10.20). Что касается реализаций, то они образуются, как было изложено выше. Все различие заклю-

чается в том, что генератор случайных чисел должен выдавать сигналы по дискретным законам распределения. Число реализаций выбирают согласно последней формуле.

Есть еще одна причина, затрудняющая надлежащий выбор числа реализаций. Дело заключается в том, что выбор следует оценивать по качеству приближения гистограммы искомой случайной величины к ее теоретическому закону распределения. К сожалению, последний закон распределения весьма часто бывает неизвестен. Таким образом, предложение о переходе от

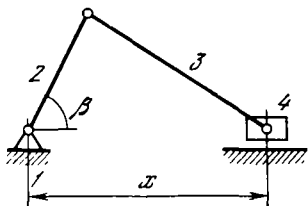


Рис. 23

непрерывных случайных величин к дискретным (см. формулы (10.15) — (10.18)) в некоторых случаях может быть весьма полезным.

Пример 10.1

На рис. 23 изображен четырехзвенный плоский кривошипно-ползунный механизм, состоящий из стойки 1, кривошипа 2, шатуна 3 и ползуна 4. Обозначим действительные значения длин звеньев 2 и 3 следующим образом:

$$l_2 = l_2^0 + \Delta l_2, \quad l_3 = l_3^0 + \Delta l_3,$$

где l_2^0 и l_3^0 — номинальные значения длин звеньев 2 и 3; Δl_2 и Δl_3 — скалярные первичные ошибки в длинах кривошипа и шатуна.

Ошибку положения кривошипно-ползунного механизма запишем так:

$$\Delta x = \Delta l_2 \cos \beta + (l_3^0 + \Delta l_3) \sqrt{1 - \left(\frac{l_2^0 + \Delta l_2}{l_3^0 + \Delta l_3} \sin \beta \right)^2} - l_3^0 \sqrt{1 - \left(\frac{l_2^0}{l_3^0} \sin \beta \right)^2}. \quad (10.21)$$

Так как ошибка скорости и ошибка ускорения механизма являются соответственно первой и второй производной от ошибки положения, то, дифференцируя (10.21) по времени, находим

$$\frac{d}{dt}(\Delta x) = -\omega \sin \beta \left[\Delta l_2 + \frac{(l_2^0 + \Delta l_2)^2 \cos \beta}{(l_3^0 + \Delta l_3) \sqrt{1 - \left(\frac{l_2^0 + \Delta l_2}{l_3^0 + \Delta l_3} \sin \beta \right)^2}} - \frac{(l_2^0)^2 \cos \beta}{l_3^0 \sqrt{1 - \left(\frac{l_2^0}{l_3^0} \sin \beta \right)^2}} \right]; \quad (10.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\Delta x) = \omega^2 \{ & -\Delta l_2 \cos \beta + (1 - 2 \cos^2 \beta) \times \\ & \times \left[\frac{(l_2^0 + \Delta l_2)^2}{(l_3^0 + \Delta l_3) \sqrt{1 - \left(\frac{l_2^0 + \Delta l_2}{l_3^0 + \Delta l_3} \sin \beta \right)^2}} - \right. \\ & \left. - \frac{(l_2^0)^2}{l_3^0 \sqrt{1 - \left(\frac{l_2^0}{l_3^0} \sin \beta \right)^2}} \right] - (\sin \beta \cos \beta)^2 \times \\ & \times \left[\frac{(l_2^0 + \Delta l_2)^4}{(l_3^0 + \Delta l_3)^3 \left[1 - \left(\frac{l_2^0 + \Delta l_2}{l_3^0 + \Delta l_3} \sin \beta \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{(l_2^0)^4}{(l_3^0)^3 \left[1 - \left(\frac{l_2^0}{l_3^0} \sin \beta \right)^2 \right]^{3/2}} \right] \}. \end{aligned} \quad (10.23)$$

Предположим, что кривошипно-ползунный механизм является составной частью сложной кинематической цепи, отдельные участки которой включают в себя механизмы с высшими кинематическими парами или описываются неявными функциями. В этих условиях становится очевидной целесообразность применения изложенного метода статистических испытаний для исследования точности партии кривошипно-ползунных механизмов, выполненных по одному проекту.

При проведении расчетов примем:

а) $l_2^0 = 100$ мм, $l_3^0 = 200$ мм, $\omega = 1$ сек⁻¹;

б) ошибки Δl_2 и Δl_3 распределенными по закону Гаусса с параметрами $M[\Delta l_2] = M[\Delta l_3] = 0$ и $\sigma[\Delta l_2]$, $\sigma[\Delta l_3]$. Поскольку обе ошибки Δl_2 и Δl_3 имеют идентичные законы распределения, естественно положить $L_2 = L_3 = \max L_k$ ($k = 1, 2$) и, в частности, для законов Гаусса принять $P_2 = P_3 = 0,997$.

Р е ш е н и е

Решение примера начнем с сопоставления дифференциальных законов распределения ошибки положения $\eta(\Delta x)$, получаемых по методам композиции $\eta_1^0(\Delta x)$, дерева логических возможностей $\eta_2(\Delta x)$ и статистических испытаний $\eta_3(\Delta x)$, для некоторых фиксированных значений положения звена 2 кривошипно-ползунного механизма. Для указанной цели наибольший интерес представ-

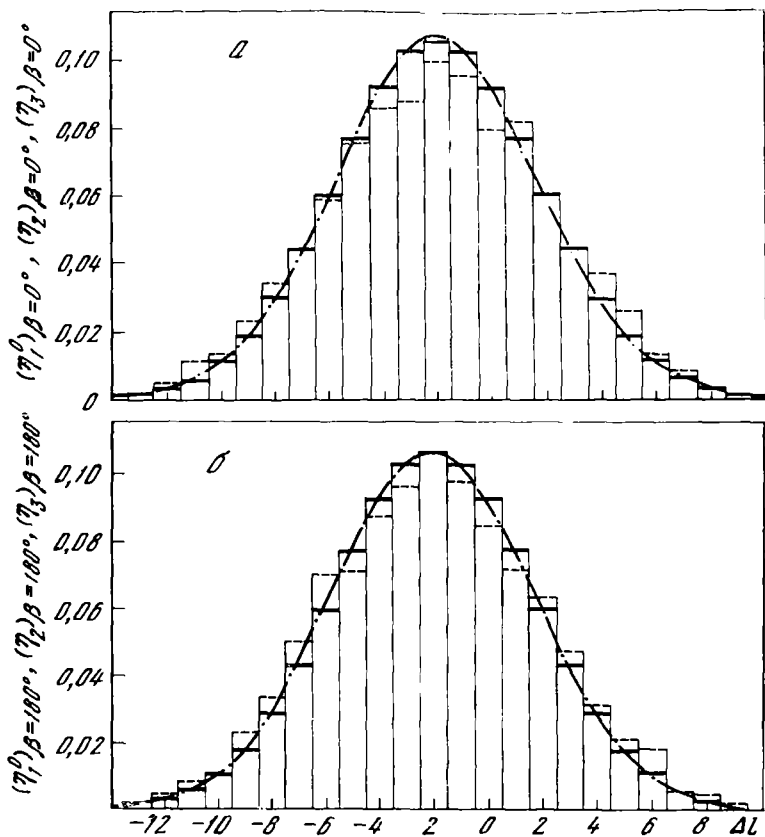


Рис. 24

ляют две угловые координаты положения кривошипа механизма, характеризуемые значением параметра $\beta = 0^\circ$ и 180° .

Согласно (10.21) в этом случае ошибка положения механизма представляет собою линейную функцию от рассматриваемых первичных ошибок. Поэтому, принимая во внимание приведенные выше параметры законов распределения первичных ошибок Δl_2 и Δl_3 , получим

$$\eta_1^0(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \{(\sigma[\Delta l_2])^2 + (\sigma[\Delta l_3])^2\}}} \exp\left(-\frac{(\Delta x)^2}{2 \{(\sigma[\Delta l_2])^2 + (\sigma[\Delta l_3])^2\}}\right). \quad (10.24)$$

Построенные по (10.24) дифференциальные законы распределения $(\eta_1^0)_{\beta=0}$ и $(\eta_1^0)_{\beta=180^\circ}$ приведены штрих-пунктирными линиями на рис. 24, а и б соответственно. Там же нанесены гистограммы законов распределения ошибки положения — $\eta_2(\Delta x)$ (сплошной линией) и $\eta_3(\Delta x)$ (пунктирной линией). Для построения $\eta_2(\Delta x)$

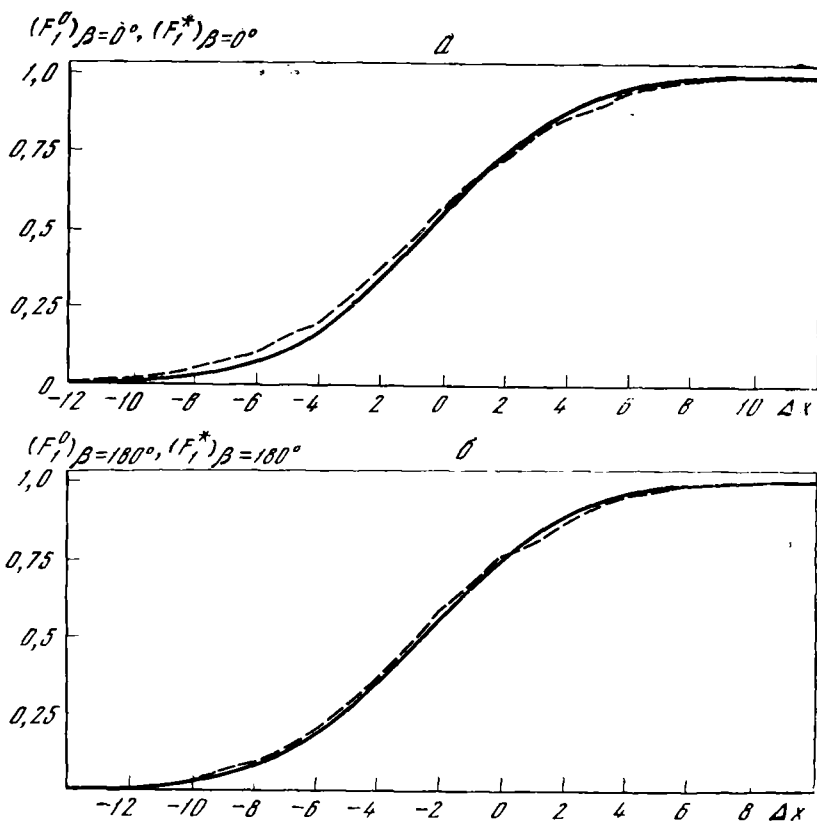


Рис. 25

абсциссы исходных законов распределения $\eta(\Delta l_2)$ и $\eta(\Delta l_3)$ были соответственно разделены на 11 и 21 равных участков, а при построении $\eta_3(\Delta x)$ ввиду идентичности законов распределения случайных величин Δl_2 и Δl_3 условие (10.3) приняло вид

$$L_2 = L_3 = \max L_k \text{ (при } N_k = 500 \text{)}.$$

Из рассмотрения приведенных на рис. 24, а и б графиков η_1^0 , η_2 , η_3 нетрудно заметить, что законы распределения η_2 и η_1^0 практически мало отличаются друг от друга. Приведенное по критерию согласия А. Н. Колмогорова сопоставление законов распределения η_2 и η_1^0 показало, что $P(\lambda)_{\beta=0^\circ} \approx P(\lambda)_{\beta=180^\circ}$. Здесь $P(\lambda)$ — табулированная функция [28], характеризующая вероятность неопровержения гипотезы о соответствии эмпирического и теоретического законов распределения, первой из которых в рассматриваемом случае строился на основе данных, полученных по методу ДЛВ. Следует заметить, что при округлении величин в

табл. 14 до трех знаков происходит почти полное их совпадение. Имеющиеся расхождения между η_2 и η_1^0 являются следствием замены как непрерывного нормального закона распределения первичных ошибок дискретным, так и возникающих погрешностей, связанных с регистрацией и обработкой данных, полученных для η_2 при помощи ЭЦВМ. Соответствующие величины математических ожиданий и средних квадратических отклонений, изображенных на рис. 24, а и б законов распределения η_1^0 , η_2 и η_3 , приведены в табл. 15.

Таблица 14

x	Закон распределения, полученный методом ДЛВ η_2	Теоретический гауссовский закон распределения η_1^0	x	Закон распределения, полученный методом ДЛВ η_2	Теоретический гауссовский закон распределения η_1^0
± 0	0,10689	0,10660	± 8	0,01077	0,01092
± 1	0,10315	0,10304	± 9	0,00573	0,00591
± 2	0,09268	0,09223	± 10	0,00273	0,00299
± 3	0,07754	0,07782	± 11	0,00112	0,00140
± 4	0,06040	0,06047	± 12	0,00038	0,00060
± 5	0,04380	0,04370	± 13	0,00010	0,00025
± 6	0,02956	0,02851	± 14	0,00002	0,00010
± 7	0,01854	0,01871	± 15	0,00000	0,00002

Таблица 15

	$\beta - 0^\circ$			$\beta - 180^\circ$		
	η_1^0	η_2	η_3	η_1^0	η_2	η_3
M	0,00	0,00	-0,15	0,00	0,00	-0,04
σ	3,70	3,70	4,02	3,70	3,70	3,92

Совершенно очевидно, что в абсолютном большинстве случаев решение задачи точности механизмов в ее нелинейной постановке не может быть сведено к нахождению закона распределения ошибки положения методом композиции исходных законов распределения первичных ошибок. Поэтому изложенное выше дает основание полагать, что за «теоретический» закон распределения ошибки положения во многих случаях можно приближенно принимать закон распределения, полученный по методу ДЛВ.

В частности, при решении рассматриваемого примера на ЭВЦМ переход от законов распределения непрерывно изменяющихся

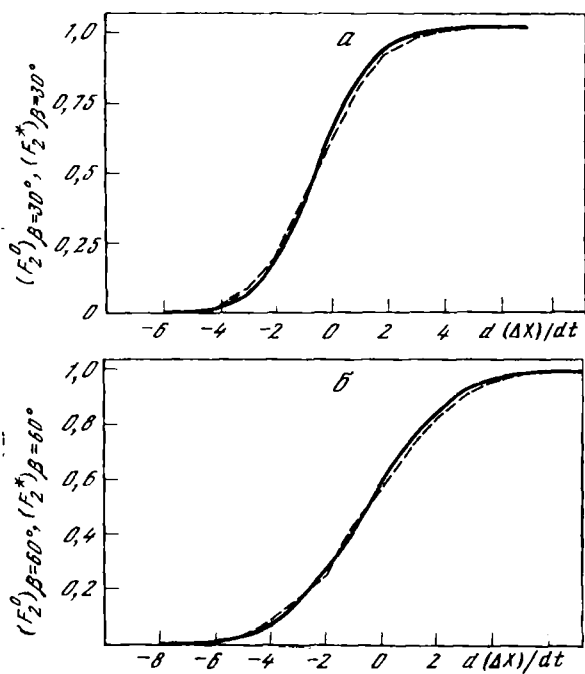


Рис. 26

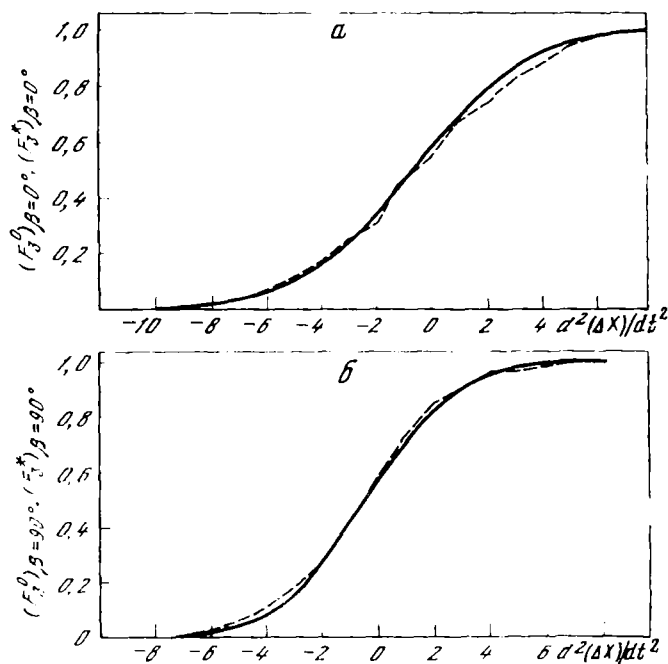


Рис. 27

Таблица 16

Δl_2	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5					
$P_{\Delta l_2}$	0,236	0,199	0,118	0,049	0,014	0,002					
Δl_3	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 7	± 8	± 9	± 10
$P_{\Delta l_3}$	0,120	0,114	0,100	0,080	0,059	0,039	0,024	0,013	0,007	0,003	0,001

случайных величин Δl_2 и Δl_3 к соответствующим законам распределения дискретных величин был осуществлен при помощи данных, представленных в табл. 16.

В приводимых ниже расчетах по формулам (10.21) — (10.23) для выработки последовательности случайных чисел, характеризующих первичные ошибки механизма, использован алгоритм М—0170, взятый из библиотеки стандартных программ ЭЦВМ типа «Минск».

С учетом изложенного отыскание законов распределения величин Δx , $\frac{d}{dt}(\Delta x)$ и $\frac{d^2}{dt^2}(\Delta x)$ было осуществлено на ЭЦВМ для значений $\beta = 0, 30, 60, \dots, 270, 300, 330^\circ$. На рис. 25, а и б приведены интегральные законы распределения $F_1(\Delta x)$ при $\beta = 0^\circ$ (а) и $\beta = 180^\circ$ (б), на рис. 26, а и б — $F_2\left[\frac{d}{dt}(\Delta x)\right]$ при $\beta = 30^\circ$ (а) и $\beta = 60^\circ$ (б) и на рис. 27, а и б — $F_3\left[\frac{d^2}{dt^2}(\Delta x)\right]$ при $\beta = 0^\circ$ (а) и $\beta = 90^\circ$ (б), на рисунках сплошными линиями нанесены теоретические законы F_1^0 , F_2^0 и F_3^0 , а пунктирными — законы распределения F_1^* , F_2^* и F_3^* , полученные по методу статистических испытаний. Здесь под F_i^0 ($i = 1, 2, 3$) будем понимать законы распределения ошибок положения, скорости и ускорения, построенные по методу композиции или методу ДЛВ.

Проведенное по критерию А. П. Колмогорова сопоставление законов распределения F_i^* и F_i^0 дало следующие характерные результаты:

а) для F_1^* и F_1^0 $P(\lambda)_{\beta=0^\circ} = 0,53$; $P(\lambda)_{\beta=180^\circ} = 0,79$;

б) для F_2^* и F_2^0 $P(\lambda)_{\beta=30^\circ} = 0,86$, $P(\lambda)_{\beta=60^\circ} = 0,86$;

в) для F_3^* и F_3^0 $P(\lambda)_{\beta=0^\circ} = 0,37$, $P(\lambda)_{\beta=90^\circ} = 0,84$.

Полученные значения вероятностей $P(\lambda)$ не являются малыми и поэтому не противоречат гипотезе о том, что случайные величины Δx , $\frac{d}{dt}(\Delta x)$ и $\frac{d^2}{dt^2}(\Delta x)$ распределены по законам, соответствующим теоретическим.

Описание общих моделирующих алгоритмов решения задач точности механизмов, имеющих скалярные и векторные первичные ошибки в нижних кинематических парах, дано в работе [29].

Основы нелинейной теории точности механизмов с плоскими высшими кинематическими парами

§ 11. Общие замечания

Существующие положения линейной теории точности механизмов с высшими кинематическими парами относительно просты в тех случаях, когда первичные ошибки механизмов малы, а исследование их точности можно ограничить нахождением ошибок положения или перемещения. Для рассматриваемого класса механизмов, к которому, в частности, относятся зубчатые, червячные, кулачковые механизмы, весьма важно иметь соответственно постоянное или изменяющееся по заданному закону передаточное отношение от ведущего звена к ведомому. Поэтому приходится находить ошибки скорости и ускорения ведомого звена, вызванные ошибками в изготовлении элементов высшей пары. В линейной теории точности показано [14], что ошибка передаточного отношения зависит от многих первичных ошибок зубчатой передачи и от производной тех ошибок профилей зубцов, которые измерены по нормали. Исследование ошибки передаточного отношения заканчивается замечанием о том, что производную можно получить, только основываясь на знании конкретных условий производства зубчатых колес. Наконец, в линейной теории не рассматриваются вопросы, связанные с определением ускорений, вызванных неправильностями изготовления поверхностей элементов высшей кинематической пары. Приходится такие ошибки скоростей и ускорений изучать в рамках нелинейной теории.

Ниже рассматриваются вопросы, связанные с точностью конкретного и проектируемого механизмов с высшими плоскими кинематическими парами, и его надежность в смысле сохранения точности в процессе эксплуатации и хранения. Предложен метод оценки тех ошибок проектируемых элементов высшей кинематической пары, которые могут возникнуть в процессе изготовления и эксплуатации.

Ошибки ведомых звеньев пространственных механизмов с высшими парами, имеющих две степени свободы (например, коноидные механизмы), можно определять методом, предлагаемым для изучения ошибки механизмов с плоскими высшими парами.

§ 12. Сущность метода исследования элементов высшей кинематической пары

Поверхность элемента высшей идеальной плоской кинематической пары образована перемещением прямой, перпендикулярной плоскости движения механизма. Это будет цилиндрическая поверхность, вполне определяемая кривой сечения поверхности плоскостью, параллельной плоскости движения механизма.

Поверхности элементов реальной высшей плоской кинематической пары не являются цилиндрическими. Несовпадение элементов реальной и расчетной одноименных высших кинематических пар происходит от неточности изготовления, износа поверхностей элементов, физико-химических процессов и деформаций, протекающих во время эксплуатации и хранения механизмов. Кривые сечения реальной поверхности плоскостью, параллельной движению, не имеют известного аналитического выражения. Поэтому в условиях, возможно близких к эксплуатационным, измеряют поверхность реального элемента высшей кинематической пары с помощью щупа с цилиндрической поверхностью на конце, заменяющей поверхность другого элемента той же пары на всей длине образующей этого элемента. В результате измерения получают отдельные точки кривой или всю кривую, которая является средней кривой сечения реальной поверхности плоскостями, параллельными плоскости движения. Затем вычисляют отклонения средней кривой сечения от расчетного профиля. Отклонения описывают аппроксимирующей функцией, в частности применяются интерполирующие полиномы. После этого средняя кривая сечения реальной поверхности будет описана системой уравнений, состоящих из уравнения расчетного профиля и упомянутого выше уравнения отклонений.

Это описание более точно, чем прямое получение приближенного уравнения средней кривой сечения реального элемента теми же методами. В самом деле, во втором случае при отсутствии отклонений среднего сечения реального элемента от расчетного профиля не получится уравнения этого профиля, если аппроксимирующая функция не совпадет с уравнением расчетного профиля. Если важны не только отклонения, но и их производные, то следует измерить касательные средней кривой сечения, а затем аппроксимировать отклонения интерполяционным полиномом с двукратными узлами, учитывающими не только отклонения кривых, но и отклонения касательных в местах измерения.

Изучение конкретного экземпляра реального элемента высшей пары часто ограничивают экспериментальным определением некоторых точек средней кривой сечения, вычислением отклонений этих точек от соответствующих значений расчетного профиля. Если отклонения удовлетворяют допускам на изготовление элементов, то при некоторых условиях отклонения средней кривой сечения в промежутках между точками измерения тоже удовлет-

воряют допускам. Условия заключаются в том, что при изготовлении элементов пар должна возникнуть достаточная корреляционная связь между отклонениями реальной поверхности и расчетной, измеренными в разных точках. Однако перечисленных сведений недостаточно для определения центров кривизны средней кривой сечения конкретного экземпляра реального элемента. Необходимы сведения о средней кривой сечения в промежутках между местами измерения. Если эти сведения не удастся получить, то остается предположить, что отклонения средней кривой от расчетного профиля описываются аппроксимирующей функцией, значения которой в местах измерения совпадают с результатами измерения и, кроме того, всюду удовлетворяют допускам. Однако такая средняя кривая сечения не будет принадлежать конкретному экземпляру реального элемента (см. § 14).

Предположим теперь, что мы записали среднюю кривую сечения конкретного экземпляра реального элемента. Пусть изучаемая часть средней кривой сечения является эквидистантой расчетного профиля. Тогда средняя кривая и расчетный профиль в любых двух соответствующих точках кривых будут иметь общую нормаль. Радиус кривизны на таком участке средней кривой равен алгебраической сумме радиуса кривизны расчетного профиля и расстояния между обеими кривыми, измеренного по нормали. Поэтому всегда следует строить эквидистанту расчетного профиля, причем расстояние между кривыми делать равным средней величине измеренных по нормальям отклонений средней кривой сечения от расчетного профиля. Далее в зависимости от отклонения средней кривой сечения от построенной эквидистанты выбирают аппроксимирующую функцию и строят новую эквидистанту расчетного профиля. Расстояние между ними делают равным средней величине отклонений аппроксимирующей кривой от расчетного профиля. Таким образом, задача заключается в таком подборе аппроксимирующей кривой, чтобы была минимальной сумма квадратов разностей отклонений от обеих эквидистант (см. § 14).

При проектировании механизма с плоской высшей кинематической парой приходится выбирать методы обработки поверхностей элементов пары, обеспечивающие надлежащую точность и качество поверхностей. Это значит, что отклонение реальной поверхности от расчетной в любой точке должно удовлетворять устанавливаемым при проектировании допускам с высокой (близкой к единице) вероятностью. Методами изготовления поверхностей определяются законы распределения отклонений средней реальной кривой сечения от расчетного профиля в любой точке. Кроме того, методы изготовления устанавливают корреляционные связи между отклонениями, измеренными в разных точках. На этапе проектирования, когда ни один экземпляр механизма не изготовлен, расчет ошибок является стохастической, а не детерминированной задачей. Поэтому приходится искать распределения центров

кривизны средних реальных кривых сечения. Эти кривая описывается уравнением расчетной кривой сечения и случайной функцией, аппроксимирующей случайный процесс, состоящий из отклонений средних реальных кривых сечения от расчетной. Качество аппроксимации оценивается следующим образом: законы распределения, полученные по аппроксимирующей функции, не должны противоречить заданным законам распределения отклонений средних реальных кривых сечения от расчетной (см. § 16).

В заключение все же отметим, что элементы идеальных высших плоских кинематических пар могут иметь нецилиндрические поверхности.

§ 13. Ошибки ведомого звена конкретного экземпляра механизма с плоской высшей кинематической парой

На рис. 28 представлен трехзвешный плоский механизм, имеющий низшие (вращательные) пары E, F и высшую пару 2—3. Заданы ошибки профиля элементов высшей пары, измеренные по нормали, указаны ошибки расположения элементов этой пары в звеньях, известны ошибки вращательных пар. На основании этой информации были составлены уравнения, описывающие реально существующие средние кривые сечения элементов этой пары. Для заданного положения ведущего звена 2 известна точка соприкосновения элементов высшей пары в идеальном механизме. Найдены точки пересечения средних реальных кривых сечения с нормалью, проведенной в точке соприкосновения элементов высшей пары идеального механизма, а для точек пересечения — фактические центры кривизны. Задача заключается в том, чтобы определить ошибки положений, скоростей и ускорений механизма.

На рис. 29 представлены оба элемента высшей пары, принадлежащие звеньям $i, i + 1$. Идеальные элементы соприкасаются в точке A_i . Через O_i, O_{i+1} обозначены центры кривизны идеальных элементов для точки A_i , а через $II, (I + 1) (I + 1)$ — дуги соприкасающихся кругов, проходящие через ту же точку. Центры кривизны средних кривых сечения элементов высшей пары с ошибками обозначены через O'_i, O'_{i+1} . Ошибки средних профилей, измеренные по нормали в идеальной высшей паре для точки соприкосновения, равны

$$A_i A'_i = \lambda \rho_i, \quad A_i A'_{i+1} = \Delta \rho_{i+1}. \quad (13.1)$$

Через $I' I', (I + 1)' (I + 1)'$ обозначены дуги соприкасающихся кругов для фактически существующих средних профилей. Углы γ_i, γ_{i+1} , образованные нормалью к идеальным и средним фактически существующим кривым сечения, отсчитываем от идеальной к фактически существующей нормали.

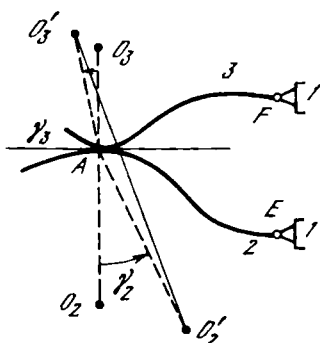


Рис. 28

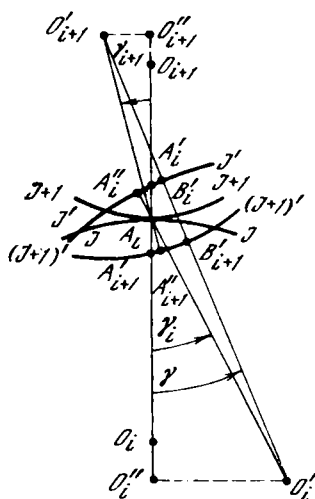


Рис. 29

Сначала рассмотрим изменение положения элемента $i + 1$ относительно элемента i , происходящее от ошибок профилей. Это изменение измеряется по направлению нормали $O'_i O'_{i+1}$ средних кривых сечения элементов с ошибками. Как показывает рис. 29, до этого изменения расстояние между точками O'_i, O'_{i+1} может быть записано так:

$$l_{i, i+1}^{(0)} = [(O'_i A_i)^2 + (O'_{i+1} A_i)^2 + 2O'_i A_i \cdot O'_{i+1} A_i \cos(\gamma_{i+1} - \gamma_i)]^{1/2}.$$

После изменения положения элемента $i + 1$ средняя реальная кривая сечения последнего будет касаться средней реальной кривой сечения элемента i в точке B'_i , лежащей на прямой $O'_i O'_{i+1}$. Точка B'_{i+1} , принадлежащая элементу $i + 1$, совпадает с точкой B'_i . Слившиеся вместе точки B'_{i+1}, B'_i образуют точку соприкосновения B_i . Расстояние между точками O'_i, O'_{i+1} станет

$$l_{i, i+1} = O'_i A_i + O'_{i+1} A_i + \Delta \rho'_i + \Delta \rho'_{i+1}, \quad (13.2)$$

где $\Delta \rho'_i = A_i A''_i$, $\Delta \rho'_{i+1} = A_i A''_{i+1}$,

Следовательно, изменение положения элемента $i + 1$ определяется следующим изменением расстояния между точками O'_i, O'_{i+1} :

$$\Delta l_{i, i+1} = O'_i A_i + O'_{i+1} A_i + \Delta \rho'_i + \Delta \rho'_{i+1} - [(O'_i A_i)^2 + (O'_{i+1} A_i)^2 + 2O'_i A_i O'_{i+1} A_i \cos(\gamma_{i+1} - \gamma_i)]^{1/2}.$$

Если разность углов γ_{i+1} и γ_i мала, то с точностью до малых величин первого порядка включительно имеем

$$\Delta l_{i, i+1} \approx \Delta \rho'_i + \Delta \rho'_{i+1}. \quad (13.4)$$

На рис. 30 треугольник $A_i A'_i A''_i$ представлен в большем масштабе по сравнению с предыдущим рисунком. Стороны $A_i A'_i$, $A_i A''_i$ обозначаются согласно формулам (13.1) и (13.2). Дуга $A'_i A''_i$ принадлежит окружности с центром O'_i , дуга $A_i A''_i$ — другой окружности с центром A_i . Поэтому

$$A_i A''_i = A_i A'_i = \Delta \rho_i.$$

Согласно рис. 30

$$0 < (\Delta \rho_i - \Delta \rho'_i) < \Delta \rho_i (1 - \cos \gamma_i).$$

Если угол γ_i мал, то с точностью до малых первого порядка включительно имеем

$$\Delta \rho_i = \Delta \rho'_i.$$

Поэтому формулу (13.4) можно привести к такому виду:

$$\Delta l_{i, i+1} \approx \Delta \rho_i + \Delta \rho_{i+1}.$$

Нетрудно заметить, что полученное выражение не отличается от соответствующего в линейной теории точности [14].

Пусть γ — угол между нормальными к профилям идеальных элементов и к средним кривым сечения реальных элементов высшей пары. Согласно рис. 29

$$\cos \gamma = \frac{O'_i A_i \cos \gamma_i + O'_{i+1} A_i \cos \gamma_{i+1}}{l_{i, i+1}^{(0)}}.$$

Приступаем к построению четырехзвенного плоского шарнирного механизма, эквивалентного изучаемому трехзвенному механизму с высшей парой, имеющему первичные ошибки. Эквивалентность заключается в том, что положения, скорости и ускорения ведомых звеньев обоих механизмов совпадают. В четырехзвенном эквивалентном механизме

$$EF = l_1 + \Delta l_1,$$

где Δl_1 — ошибка, существующая в механизме с высшей парой. Пусть второе и третье звенья этого механизма имеют ошибки эксцентриситета $\Delta \mathcal{E}_2$, $\Delta \mathcal{E}_3$. Тогда профили элементов высшей пары будут сдвинуты из правильных положений на величины $\Delta \mathcal{E}_2$, $\Delta \mathcal{E}_3$ по известным нам направлениям. На рис. 31, а представлено второе звено механизма с высшей парой, EII — риска в теле этого звена, предназначенная для определения положения звена относительно прямой EF (см. рис. 28). Смещение $\Delta \mathcal{E}_2$ происходит по направлению, определяемому углом $\beta_{\mathcal{E}_2}$. В результате центр кривизны O'_2 будет занимать в теле звена 2 положение O''_2 .

Согласно рис. 31, б в результате сдвига на величину $\Delta \mathcal{E}_3$ центр кривизны займет в теле звена 3 положение O'''_3 . Риска $FIII$

в теле звена 3 служит для определения положения ведомого звена относительно прямой EF . Отсюда следует, что ведущее звено 2 четырехзвенного эквивалентного механизма имеет длину, равную EO_2''' , ведомое звено 3 — FO_3''' . Оба звена соединены шарнирами в точках O_2''' , O_3''' с промежуточным звеном 2—3. Если перекосы элементов высшей пары в теле звеньев 2 и 3 отсутствуют, то длина промежуточного звена равна $l_{i,i+1}$. Так как перекосы всегда малы, то учет их влияния можно производить таким же образом, как в линейной теории точности. Длина промежуточного

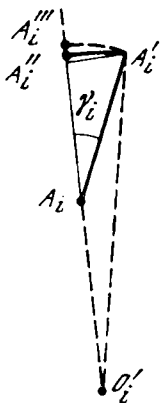
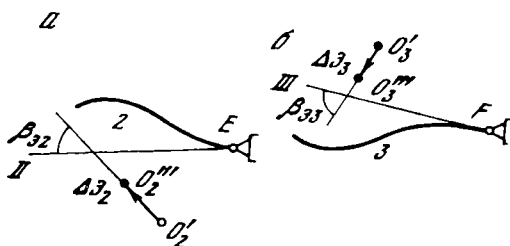


Рис. 30

Рис. 31



звена будет определяться суммой величин $l_{2,3}$ и действием перекосов. Таким образом, мы получили все элементы четырехзвенного эквивалентного шарнирного механизма для изучаемого положения трехзвенного механизма с высшей парой. Находим положение, скорость и ускорение ведомого звена эквивалентного механизма с низшими парами, как это делалось выше, в гл. II.

Ошибки положений, скоростей, ускорений изучаемого реального механизма с плоской высшей парой равны соответственно разностям положений, скоростей, ускорений ведомых звеньев эквивалентного механизма с низшими парами и идеального механизма с высшей парой.

Эквивалентный четырехзвенный механизм приходится отдельно строить для каждого положения трехзвенного механизма с высшей парой.

§ 14. Центры кривизны кривой пересечения плоскости с поверхностью конкретного элемента реальной высшей кинематической пары

Пусть имеется конкретный реальный экземпляр механизма с высшей кинематической парой. Будем считать, что для исследования элементов высшей пары уже правильно выбраны «средняя реальная кривая сечения» или просто «реальная кривая сечения».

Нам еще понадобится «расчетная кривая сечения», получаемая при пересечении плоскости и поверхности идеального элемента высшей пары. Требуется найти центры кривизны реальных кривых для точек соприкосновения элементов высшей кинематической пары механизма.

Формулы кривизны кривой в декартовой и полярной системах координат показывают, что радиус кривизны кривой в заданной ее точке зависит от координаты точки и от первой и второй ее производных. Поэтому достаточно измерить в точке кривой ее координату и две производные, чтобы получить радиус кривизны и направление касательной. К сожалению, вторую производную нельзя непосредственно измерить, а косвенные ее измерения затруднительны. В силу изложенного выше стараются подобрать уравнение реальной кривой и дифференцированием получить выражения производных.

Обычно с необходимой точностью измеряют координаты ряда точек реальной кривой, а касательные в точках к кривой не измеряют. Об участках реальной кривой между точками измерения известно только то, что они удовлетворяют допускам. Вычисляют разности координат реальной и расчетной кривых сечения для всех точек измерения, т. е. определяют ошибки реальной кривой сечения. Если недостающие сведения о реальной кривой сечения нельзя дополнить измерениями, принимают, что ее отклонения от расчетной всюду точно описываются интерполяционным полиномом при однократных узлах, совпадающих с местами измерения [30]. По этой формуле находят ошибки в промежутках между узлами и проверяют, всюду ли кривая интерполирования укладывается в допуск. Изменяя число узлов интерполирования, расставляя между узлами, систему координат, добиваются того, чтобы кривая интерполирования удовлетворяла допускам.

Можно с необходимой точностью измерять не только координаты точек реальной кривой сечения, но и касательные к кривой в этих точках. На основе измерений и расчетов определяют разности координат и разности тангенсов углов наклона касательных реальной и расчетной кривых в узлах, которые теперь будут двукратными. По формулам Эрмита для интерполирования при двукратных узлах [31, 32] находят ошибки координат реальной кривой в функции независимой переменной, определяющей положения узлов. Вычисляя величины ошибок координат в промежутках между узлами и проверяют, удовлетворяют ли эти ошибки допускам.

Пусть теперь реальная кривая сечения записана при помощи точного прибора. Строим эквидистанту расчетной кривой, отстоящую от последней на расстоянии, которое равно средней величине отклонений реальной кривой сечения от расчетной, измеренных по нормальям к расчетной кривой:

$$\Delta \rho_{cp}^n = \frac{1}{l - k + 1} \sum_{i=k}^l \Delta \rho_i^n, \quad (14.1)$$

где $\Delta\rho_i^n$ — отклонение, измеренное по направлению нормали номер i ; k — номер той нормали, на которой начинается область аппроксимации; l — номер нормали, на которой оканчивается область аппроксимации.

Описываем отклонения реальной кривой сечения от расчетной аппроксимирующей функцией f и строим вторую эквидистанту расчетной кривой сечения, отстоящую от последней на расстоянии, которое равно средней величине отклонений аппроксимирующей кривой от расчетной, измеренных по нормальям последней:

$$\Delta\rho_{a, \text{cp}}^n = \frac{1}{l-k+1} \sum_{i=1}^l \Delta\rho_{a, i}^n, \quad (14.2)$$

где $\Delta\rho_{a, i}^n$ — отклонение аппроксимирующей кривой от расчетной, измеренное по направлению нормали номер i .

Введем оценочную функцию

$$\Phi = \frac{1}{e^2} \sum_{i=k}^l (e_{a, i} - e_i)^2, \quad (14.3)$$

где $e_{a, i}$ — отклонение аппроксимирующей кривой от второй эквидистанты, измеренное по нормали номер i к последней; e_i — отклонение реальной кривой сечения от первой эквидистанты, измеренной по той же нормали i ; e^2 — сумма квадратов отклонений реальной кривой сечения от первой эквидистанты расчетной кривой, измеренных по нормальям к последней. С учетом (14.1) и (14.2) имеем

$$e_{a, i} = \Delta\rho_{a, i}^n - \Delta\rho_{a, \text{cp}}^n, \quad e_i = \Delta\rho_i^n - \Delta\rho_{\text{cp}}^n, \quad e^2 = \sum_{i=k}^l e_i^2. \quad (14.4)$$

Если измерены производные отклонений реальной кривой сечения от расчетной, взятые по независимой переменной расчетной кривой, то можно ввести еще другую оценочную функцию

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{\dot{e}^2} \sum_{i=k}^l (\dot{e}_{a, i} - \dot{e}_i)^2, \quad (14.5)$$

где $\dot{e}_{a, i}$, $\dot{e}_i$ — производные отклонений, взятые по независимой переменной расчетной кривой; $\dot{e}^2$ — сумма квадратов производных отклонений; с учетом (14.4)

$$\dot{e}_{a, i} = \dot{\Delta\rho}_{ai}^n, \quad \dot{e}_i = \dot{\Delta\rho}_i^n, \quad \dot{e}^2 = \sum_{i=k}^l \dot{e}_i^2. \quad (14.6)$$

Здесь

$$\dot{\Delta\rho}_{a, i}^n = d(\Delta\rho_{ai}^n)/dx, \quad \dot{\Delta\rho}_i^n = d(\Delta\rho_i^n)/dx,$$

(x — независимая переменная в уравнении расчетной кривой сечения).

Заметим, что оценочные функции (14.3) и (14.5) — безразмерные величины. Если отклонения реальной кривой сечения от расчетной измерены в каком-либо постоянном масштабе, а аппроксимирующая функция линейна относительно отклонений, то оценочные функции не изменятся. Значит, если отклонения нескольких реальных кривых сечения от расчетной пропорциональны между собой, то оптимальная аппроксимирующая функция для них будет одна и та же.

При совпадении отклонений реальной и аппроксимирующей кривых от первой и второй эквидистант оценочная функция $\Phi = 0$. При совпадении производных отклонений будем иметь $\dot{\Phi} = 0$. Поэтому аппроксимирующая функция f считается оптимально выбранной, когда она дает минимум оценочной функции Φ или оценочных функций Φ и $\dot{\Phi}$.

Наилучший выбор достигается надлежащими видом функции f и значениями постоянных ее параметров, а также тем, что в области аппроксимации выбирают некоторую часть, дающую наименьшую величину оценочной функции.

Система, состоящая из уравнения расчетной кривой сечения и функции, аппроксимирующей отклонение реальной кривой сечения от расчетной, приближенно описывает реальную кривую сечения. Пользуясь этой системой, можно определять направление нормали и длину радиуса кривизны реальной кривой сечения.

Пусть известно уравнение расчетной кривой в прямоугольной системе координат. Ошибкой $\Delta y(x)$ ординаты реальной кривой называют разность ординат $y(x)$, $y_0(x)$ реальной и расчетной кривых:

$$\Delta y(x) = y(x) - y_0(x). \quad (14.7)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \Delta y, & \frac{dy}{dx} &= dy_0/dx + d\Delta y/dx, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= d^2y_0/dx^2 + d^2\Delta y/dx^2. \end{aligned} \quad (14.8)$$

Производные dy_0/dx , d^2y_0/dx^2 , входящие в (14.8), находят по уравнению расчетной кривой. Выше было изложено, как найти выражение (14.7). Далее определяют первую и вторую производные аппроксимирующей функции по координате x . Обозначим через τ угол, образованный осью абсцисс и касательной к реальной кривой сечения:

$$\operatorname{tg} \tau = dy_0/dx + d\Delta y/dx = dy/dx. \quad (14.9)$$

Радиус кривизны реальной кривой определяется следующим выражением:

$$R(x) = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}. \quad (14.10)$$

Если все $\Delta y = 0$, то производные кривой (14.7) равны нулю. Поэтому формула (14.10) дает радиус кривизны расчетной кривой.

Если произведение

$$(d^2y_0/dx^2 + d^2\Delta y/dx^2) \frac{d^2y}{dx^2}$$

имеет знак плюс, то центр кривизны реальной кривой расположен с той же стороны, что и центр кривизны расчетной кривой по отношению к последней.

Предположим теперь, что уравнение расчетной кривой составлено в полярной системе координат. Обозначим: ε — полярный угол, r и r_0 — соответственно длины радиусов-векторов реальной и расчетной кривых. Так как

$$\Delta r(\varepsilon) = r(\varepsilon) - r_0(\varepsilon), \quad (14.11)$$

то

$$r = r_0 + \Delta r, \quad dr/d\varepsilon = dr_0/d\varepsilon + d\Delta r/d\varepsilon, \\ d^2r/d\varepsilon^2 = d^2r_0/d\varepsilon^2 + d^2\Delta r/d\varepsilon^2.$$

Если измерить Δr в точках реальной кривой, имеющих полярные углы выбранной величины, то в результате получим зависимость (14.11). Выбор аппроксимирующей функции $f(\varepsilon)$ определяет ошибку Δr . Далее могут быть найдены первая и вторая производные этой функции.

Обозначим через ν угол между радиусом-вектором и касательной к реальной кривой. Тогда

$$\operatorname{ctg} \nu = dr/rd\varepsilon = dr_0/rd\varepsilon + d\Delta r/rd\varepsilon. \quad (14.12)$$

Радиус кривизны реальной кривой сечения имеет величину

$$R(\varepsilon) = \frac{[r^2 + (d^2/d\varepsilon)^2]^{3/2}}{r^2 + 2(dr/d\varepsilon)^2 - r(d^2r/d\varepsilon^2)}. \quad (14.13)$$

§ 15. Применение интерполяционных полиномов в исследовании кривых сечения реальных элементов высшей кинематической пары плоскостью

Аппроксимацию отклонений реальной кривой сечения от расчетной кривой будем осуществлять интерполяционными полиномами Ньютона или Лагранжа при неравных или равных расстояниях между соседними однократными узлами [30, 32]. Полином Ньютона имеет вид

$$f(x) = F(x_0) + \sum_{i=1}^n f(x_0, x_1, \dots, x_i) A(x)_0, i-1, \quad (15.1)$$

где x — независимая переменная, т. е. абсцисса при использовании прямоугольной системой координат или полярный угол ε в случае полярной системы координат:

$$\alpha_m = x - x_m, \quad \alpha_{lm} = x_l - x_m, \quad \alpha_{lm} = -\alpha_{ml};$$

m, l принадлежат множеству $M_1 = \{0, 1, 2, \dots\}$ целых положительных чисел. При $l = m$ имеем $\alpha_{lm} = 0$, поэтому

$$A(\alpha)_{0, i-1} = \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1} = A_{0, 1, 2, \dots, i-1},$$

$$f(x_0, x_1) = \frac{F(x_1) - F(x_0)}{\alpha_{10}}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{\alpha_{21}},$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{\alpha_{20}}, \dots$$

Вообще

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{\alpha_{n0}}.$$

Заметим, что для последовательности значений функций $F(x_0), F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$ отклонения реальной кривой сечения от расчетной, существующие при значениях независимой переменной x , равных $x_0, x_1, \dots, x_n$, т. е. отклонения в узлах интерполирования, обычно совпадают с местами измерения

$$F(x_m) = y(x_m) - y_0(x_m) = y_m - y_{0m}.$$

При рассмотрении конкретной кривой сечения величины $F(x_m)$, а значит, и величины $f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_i)$ детерминированы и постоянны. При изучении случайных кривых сечения, являющихся реализациями случайного процесса, ранее перечисленные величины будут случайными, не зависящими от переменной x .

Величины $A(\alpha)_{0, i-1}$ всегда неслучайны и зависят от переменной x .

Первая производная полинома (15.1)

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \sum_{i=1}^n f(x_0, x_1, \dots, x_i) A'(\alpha)_{0, i-1}, \quad (15.2)$$

где

$$\text{при } i = 1 \quad A'(\alpha)_{0, 0} = 1,$$

$$\text{при } i > 1 \quad A'(\alpha)_{0, i-1} = \sum_{l \in M_{i-1}} A_{0, 1, \dots, l-1, l+1, \dots, i-1},$$

$$M_{i-1} = \{0, 1, 2, \dots, i-1\}.$$

Вторая производная полинома (15.1)

$$f''(x) = \sum_{i=2}^n f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) A''(\alpha)_{0, i-1}, \quad (15.3)$$

где

$$\text{при } i = 2 \quad A''(\alpha)_{0,1} = 2,$$

$$\text{при } i > 2 \quad A''(\alpha)_{0,i-1} = 2 \sum_{\substack{l \in M_{i-1} \\ m \in M_{l-1}}} A_{0,1,\dots,m-1,m+1,\dots,l-1,l+1,\dots,i-1},$$

$$M_{l-1} = \{0, 1, 2, \dots, l_{i-1}\}.$$

При вычислении интерполяционного полинома может быть использована следующая зависимость:

$$A(\ddot{\alpha})_{0,k} \alpha_{k+1} = A(\alpha)_{0,k+1}, \quad k = \{0, 1, 2, \dots, n-2\}.$$

Отсюда

$$A'(\alpha)_{0,k} \alpha_{k+1} + A(\ddot{\alpha})_{0,k} = A'(\alpha)_{0,k+1},$$

$$A''(\alpha)_{0,k} \alpha_{k+1} + 2A'(\alpha)_{0,k} = A''(\ddot{\alpha})_{0,k+1}.$$

Формулы Ньютона и ее производные дают в узлах интерполирования и в промежутках между ними отклонения реальной кривой сечения от расчетной и производных отклонений

$$\Delta y(x) = f(x), \quad \dot{\Delta y}(x) = f'(x), \quad \ddot{\Delta y}(x) = f''(x). \quad (15.4)$$

Полином Лагранжа запишем так:

$$\Delta y(x) = \sum_{i=1}^n X_i \Delta y(x_i), \quad (15.5)$$

где $\Delta y(x)$ — отклонение реальной кривой сечения от расчетной при текущем значении независимой переменной x ; $\Delta y(x_i) = \Delta y_i$ — отклонение, измеренное и вычисленное при значении $x = x_i$, т. е. в узле номер i . Отклонение Δy_i не зависит от текущей независимой переменной

$$X_i = U_i/V_i, \quad (15.6)$$

где

$$U_i = \alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1} \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n,$$

$$V_i = \alpha_{i1} \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{i,i-1} \alpha_{i,i+1}, \dots, \alpha_{i,n}.$$

Числитель (15.6) зависит от x , знаменатель — постоянен.

X_i является безразмерной величиной, не зависящей от равных расстояний между соседними узлами. При разных расстояниях между соседними узлами эта величина не зависит от масштаба, в котором взяты расстояния.

В случае конкретной кривой сечения величины $\Delta y(x_i)$ постоянны. При существовании случайных кривых сечения отклонения $\Delta y(x_i)$ будут случайными и не зависящими от текущей переменной x (это случайные параметры). Тогда $\Delta y(x)$ тоже будет случайным, но зависящим от x , т. е. будет случайной функцией, линейным образом зависящей от случайных параметров.

Первую производную полинома Лагранжа в соответствии с (15.5) запишем так:

$$\dot{\Delta}y(x) = \frac{d}{dx}[\Delta y(x)] = \sum_{i=1}^n X'_i \Delta y_i, \quad (15.7)$$

где $X'_i = U'_i/V_i$ (ед. длины)⁻¹,

При равных расстояниях между соседними узлами коэффициенты X'_i обратно пропорциональны этому расстоянию:

$$U'_i = \sum_{l \in M_{1,n}} \alpha_1 \dot{\alpha}_2, \dots, \dot{\alpha}_{i-1} \alpha_{i+1}, \dots, \dot{\alpha}_{l-1} \alpha_{l+1}, \dots, \dot{\alpha}_n. \quad (15.8)$$

Здесь $M_{1,n} = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$.

Вторая производная полинома (15.5)

$$\ddot{\Delta}y(x) = \frac{d^2}{dx^2}[\Delta y(x)] = \sum_{i=1}^n X''_i \Delta y_i, \quad (15.9)$$

где $X''_i = U''_i/V_i$ (ед. длины)⁻².

При равных расстояниях между соседними узлами коэффициенты X''_i обратно пропорциональны квадрату этого расстояния:

$$U''_i = 2 \sum_{\substack{l \in M_{1,n} \\ m \in M_{1,l-1}}} \alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1} \dot{\alpha}_{i+1}, \dots, \alpha_{m-1} \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{l-1} \alpha_{l+1}, \dots, \dot{\alpha}_n. \quad (15.10)$$

Здесь $M_{1,n} = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, l-1\}$.

Например, первые две производные функции U_1 , входящей в коэффициент X_1 , равны

$$U'_1 = \sum_{l \in M_{2,n}} \alpha_2 \alpha_3, \dots, \dot{\alpha}_{l-1} \alpha_{l+1}, \dots, \dot{\alpha}_n, \quad (15.11)$$

$$M_{2,n} = \{2, 3, \dots, n-1, n\};$$

$$U''_1 = 2 \sum_{\substack{l \in M_{2,n} \\ m \in M_{2,l-1}}} \dot{\alpha}_2 \alpha_3, \dots, \dot{\alpha}_{m-1} \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_{l-1} \dot{\alpha}_{l+1}, \dots, \dot{\alpha}_n, \quad (15.12)$$

$$M_{2,l-1} = \{2, 3, \dots, l-2, l-1\}.$$

Заменяя в левых частях (15.11) и (15.12) подстрочный индекс 1 на индекс i , а в правых частях, наоборот, индекс i на индекс 1, получим производные функции U_i . В самом деле, в множествах $M_{2,n}$, $M_{2,l-1}$ придется заменить исключение единицы на исключение числа i и восстановить индекс 1. Тогда первое и второе из упомянутых множеств совпадут соответственно с множествами $M_{1,n}$ и $M_{1,l-1}$, определяющими суммирование по формулам (15.8) и (15.10).

Аппроксимацию интерполяционными полиномами улучшают посредством выбора соответствующего числа однократных узлов интерполирования, подбора неодинаковых расстояний между соседними узлами или подбора одинакового расстояния между всеми соседними узлами путем использования наиболее подходящей части области интерполирования.

Существуют программы выполнения на ЭЦВМ вычислений интерполяционных полиномов по Лагранжу и их первых двух производных [33].

§ 16. Примеры определения центров кривизны конкретной реальной кривой сечения

Пример 16.1

На некотором участке теоретический профиль кулачка — прямая. На прямой выбраны точки, имеющие абсциссы согласно второй строчке табл. 17. Реальный профиль в точках, имеющих эти абсциссы, был образован с помощью случайных чисел χ_i , подчиняющихся закону равной вероятности и помещенных в третьей строке табл. 17.

Таблица 17

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
0	1	4	5	7	12	15	16	20	25	30
0	19	-86,1	43,2	-19	74	99,6	-0,90	-31,2	148	4,5

Рассматривается реальный профиль

$$y_i = \psi \chi_i, \quad \psi = 10^{-4}.$$

Проверить, удовлетворяют ли значения интерполирующей функции между узлами допускам, если за половину поля допуска принять наибольшую величину случайного числа $\psi \chi_9 = 0,0148$.

Вычислить величины углов, образованных осью абсцисс и касательными реальной кривой сечения кулачка; вычислить радиусы кривизны этой кривой.

Решение. Пользуемся прямоугольной системой координат, абсцисса которой совпадает с расчетной прямой сечения кулачка. Составляем интерполяционный полином Ньютона, имеющий 11 однократных узлов в точках, абсциссы которых указаны во второй строке табл. 17. Полином описывает отклонения реальной кривой сечения от расчетной и дополняет отсутствующую информацию о реальной кривой между узлами. Значит, профиль кулачка, к изучению которого мы приступаем, в промежутках между узлами может не совпадать с профилем рассматриваемого кулачка.

Таблица 18

x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}
2 -0,023	3 -0,024	4,5 -0,001	6 +0,006	8 -0,012	9 -0,017	10 -0,014	11 -0,004
x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}
15,5 +0,005	18 -0,011	21 -0,004	22 -0,018	23 -0,038	24 -0,043	27 0,529	29 1,066

ка. Полином в промежутках между узлами имеет значения, приведенные в табл. 18. Эти значения дают числовые величины ординат реальной кривой сечения.

Данные табл. 18 показывают, что интерполирующая функция $y_l = f(x)$ удовлетворяет заданной величине допуска только на интервале от $x_5 = 12$ до $x_8 = 20$. На участке от $x_1 = 1$ до $x_9 = 25$ эта функция удовлетворяет допуску $\pm 0,043$. Так как уравнение расчетной кривой сечения $y_0(x) = 0$, то выражения (14.9) и (14.10) имеют вид

$$\tau(x_l) = \operatorname{arctg} [f'(x_l)], \quad R(x_l) = \frac{\{1 + [f'(x_l)]^2\}^{1/2}}{f''(x_l)}.$$

В узлах интерполирования реальной кривой сечения $R(x_l)$, $\tau(x_l)$ имеют значения, приведенные в табл. 19.

Итак, угол, образованный осью ХХ и касательной к реальной кривой, невелик во всех узлах, за исключением девятого и десятого. Знак при величине радиуса кривизны показывает, как расположен центр кривизны — выше или ниже оси ХХ.

Пример 16.2

На некотором участке теоретический профиль кулачка представляет собой дугу окружности радиуса $R_0 = 100$ мм. Реальная кривая сечения поверхности кулачка была снята точным профилографом. На участке от $\varepsilon = 0$ до $\varepsilon = 30^\circ$ отклонения этой кривой от расчетной заданы табл. 20.

Требуется подобрать функцию, оптимально аппроксимирующую отклонения реальной кривой сечения от расчетной кривой. Найти значения первой и второй производных отклонений реальной кривой от расчетной и центры кривизны реальной кривой сечения в точках $\varepsilon = 12^\circ$, $\varepsilon = 15^\circ$, $\varepsilon = 18^\circ$.

Таблица 19

Номера узлов	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$R(x_l)$	-4,7 -47,0	-70,5 -704,5	-324,4 -3242,6	-36,4 -363,5	19,6 196,1	-4,0 -40,1
$\tau(x_l)$	3°43'27" 20'38"	-1°39'42" -10'19"	55'00" 03'26"	24'04" 01'43"	-34'23" -3'26"	37'49" 3'26"

Номера узлов	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	ψ
$R(x_l)$	2,9 29,5	-9,1 -91,5	2,5 24,9	-0,8 -7,5	98 370,6 75 853,5	10 ⁻⁴ 10 ⁻⁵
$\tau(x_l)$	-30'56" -2'38"	-32'23" -3'39"	10'19" 1'42"	6°14'43" 37'49"	-65°25'54" -12°01'56"	10 ⁻⁴ 10 ⁻⁵

Таблица 20

ϵ°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$10^4 \Delta p_i^n, \text{ м.м.}$	10	-9	-3	-49	96	-59	-4	53	73	43	-9

ϵ°	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$10^4 \Delta p_i^n, \text{ м.м.}$	-33	-20	3	84	25	26	100	28	-14	-40

ϵ°	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$10^4 \Delta p_i^n, \text{ м.м.}$	58	60	21	-100	-95	150	50	30	0	10

Р е ш е н и е. Для решения вопросов, изложенных в § 14, подбираем функцию, аппроксимирующую отклонения, исходя из требования минимума величины оценочной функции Φ и используя выражения (14.3) и (14.4). Затем находим величины ошибок аппроксимации подобранных таким образом функций и выбираем среди последних такие, которые дают минимальные из наибольших ошибок аппроксимации. Наконец, сравниваем эти

ошибки аппроксимации с отклонениями реальной кривой от расчетной в тех же точках. Если отношения ошибок к отклонениям по абсолютной величине меньше единицы во всех точках измерения или в большинстве точек и оценочная функция, следовательно, меньше единицы, то отклонения аппроксимируются оптимальной функцией. Если же этого нет, то оценочная функция равна или больше единицы, поэтому следует продолжить поиски оптимальной аппроксимирующей функции. Расчет центров кривизны реальной кривой сечения может показать, что направления касательной и величины радиуса-вектора пренебрежимо мало отличаются от тех же геометрических элементов расчетной кривой. Тогда изучаемыми отклонениями реальной кривой от расчетной можно пренебречь, реальная кривая аппроксимируется уравнениями расчетной кривой.

Ищем оптимальные аппроксимирующие функции среди интерполяционных и алгебраических полиномов. Начнем с поисков среди интерполяционных полиномов Лагранжа с 5, 7, 9 узлами. В этих полиномах искомыми постоянными являются абсциссы x_i или полярные углы ε_i , определяющие положение узлов интерполирования. Так как в узлах интерполирования значения функции $\Delta r(\varepsilon)$, вычисленные по полиному, совпадают с отклонениями в этих местах реальной кривой от расчетной, то считаем, что в знаменателе формулы (14.3) e^2 состоит только из суммы квадратов отклонений e_i , измеренных по нормальям между узлами. Обозначим получающуюся оценочную функцию через Φ' . Эта функция предъявляет повышенные требования к точности интерполирования в промежутках между узлами. Делаем подбор оптимальных интерполяционных полиномов, руководствуясь Φ' . Для сравнения же качества аппроксимации интерполяционными алгебраическими полиномами пользуемся функцией Φ согласно формуле (14.3). Накладываем такие добавочные требования на выбор интерполяционного полинома. Узлы могут лежать только на 31 нормали, указанных в табл. 20, а не в промежутках между ними. На любой из нормалей узлы могут отсутствовать или быть в единственном числе. Интересующие нас точки реальной кривой сечения, лежащие на 12, 15, 18 нормалях, должны находиться внутри области интерполирования. При этих условиях была составлена программа стохастического метода * автоматического поиска узлов интерполирования на ЭЦВМ «Минск-2».

Так как расчетная кривая сечения есть окружность, то в выражении радиуса-вектора реальной кривой сечения

$$r = r_0 + \Delta r$$

первое слагаемое постоянно:

$$dr/d\varepsilon = d\Delta r/d\varepsilon = \dot{\Delta r}, \quad d^2r/d\varepsilon^2 = d^2\Delta r/d\varepsilon^2 = \ddot{\Delta r}.$$

* Программу составила Б. О. Мардер [33]. Вычисления примеров на ЭЦВМ выполнены Б. О. Мардер и Е. Л. Логиновой.

Формулы (14.12) и (14.13) преобразуются так:

$$\operatorname{ctg} \nu = \frac{\dot{\Delta} r}{r}, \quad R(\epsilon) = \frac{[r - (\dot{\Delta} r)^2]^{3/2}}{r^2 + 2(\dot{\Delta} r)^2 - r \cdot \dot{\Delta} r}.$$

Вычисления показали, что следующие полиномы имеют наименьшие оценочные функции среди всех рассмотренных полиномов (табл. 21).

Таблица 21

Показатель	Номера нормалей с узлами		
	8, 10, 13, 18, 20	4, 6, 9, 12, 13, 18, 19	5, 7, 10, 12, 13, 18, 22, 25, 26
Φ	0,476	0,396	0,251
Φ'	0,524	0,565	0,485

В столбцах 1, 3, 5 табл. 22 даны ошибки аппроксимации вышеуказанными интерполяционными полиномами, равные расстоянию между аппроксимирующей кривой и кривой отклонения реальной кривой от расчетной. Эти расстояния равны [см. пояснения к формулам (14.1), (14.2)]

$$\Delta \rho_{a,i}^n - \Delta \rho_i^n.$$

Из данных табл. 22 видно, что ошибки аппроксимации не превышают 0,0081 мм, когда отклонения реальной кривой сечения от расчетной имеют величины, указанные в табл. 20.

В тех же столбцах 1, 3, 5 табл. 23 даны отношения ошибки аппроксимации к величине отклонения реальной кривой от расчетной, если пользоваться теми же интерполяционными полиномами. Отношения вычислялись по формуле

$$(\Delta \rho_{a,i}^n - \Delta \rho_i^n) / \Delta \rho_i^n.$$

Столбец 1 показывает, что только один раз (на нормали 19) ошибка аппроксимации оказалась больше абсолютной величины отклонения реальной кривой от расчетной. Согласно столбцу 3 подобное событие произошло три раза — на нормалях 10, 15, 16. Для последней нормали это отношение наибольшее. Столбец 5 свидетельствует, что это событие произошло три раза на нормалях 19, 20, 23. Самая большая абсолютная величина этого отношения получена на нормали 19. Если выносить суждение о качестве аппроксимации в зависимости от абсолютной величины отношения, то придется отдать предпочтение полиному с пятью узлами.

Одновременно среди рассмотренных интерполяционных полиномов были найдены те полиномы, которые имеют наибольшую оценочную функцию. У полинома с пятью узлами оценочная функция Φ' немного больше $5,4 \cdot 10^5$. Наибольшая относительная ошибка аппроксимации этим полиномом отклонения реальной

Таблица 22

Номер нормали	Полином					
	интерпо- ляционный	алгебраи- ческий	интерпо- ляционный	алгебраи- ческий	интерпо- ляционный	алгебраиче- ский
4			0,0000	—0,0010		
5			0,0035	0,0026	0,0000	0,0000
6			0,0000	—0,0006	0,0003	—0,0003
7			—0,0013	—0,0016	0,0000	0,0007
8	0,0000	0,0012	—0,0015	—0,0014	—0,0016	—0,0003
9	—0,0025	—0,0024	0,0000	0,0004	—0,0017	—0,0007
10	0,0000	—0,0002	0,0020	0,0024	0,0000	0,0003
11	0,0016	0,0016	0,0018	0,0018	0,0007	0,0006
12	0,0009	0,0013	0,0000	—0,0005	0,0000	0,0001
13	0,0000	0,0009	0,0000	—0,0013	0,0000	0,0007
14	—0,0065	—0,0052	—0,0038	—0,0059	—0,0055	—0,0042
15	0,0008	0,0024	0,0063	0,0037	0,0021	0,0037
16	0,0016	0,0032	0,0081	0,0054	0,0022	0,0035
17	—0,0059	—0,0045	—0,0015	—0,0037	—0,0062	—0,0058
18	0,0000	0,0009	0,0000	—0,0009	0,0000	—0,0009
19	0,0016	0,0017	0,0000	0,0008	0,0041	0,0019
20	0,0000	—0,0008			0,0080	0,0049
21					0,0000	—0,0033
22					0,0000	—0,0031
23					0,0042	0,0014
24					0,0063	0,0035
25					0,0000	—0,0026
26					0,0000	0,0009
27						
Ф	0,476	0,328	0,396	0,343	0,251	0,175
Ф'	0,524		0,565		0,485	
Номер столбца	1	2	3	4	5	6

кривой от расчетной оказывается (по абсолютной величине) несколько больше $2,56 \cdot 10^4$, а обычно относительная ошибка выражается величиною порядка 10^2 — 10^3 и т. д.

Таким образом, отбор интерполяционных полиномов по величине Φ' является крайне существенным для успеха аппроксимации.

Далее была рассмотрена аппроксимация отклонений реальной кривой сечения от расчетной с помощью алгебраических по-

Таблица 23

Номер нормали	Полином					
	интерпо- ляционный	алгебраи- ческий	интерпо- ляционный	алгебраи- ческий	интерпо- ляционный	алгебраиче- ский
4			0,000	-0,104		
5			-0,590	-0,444	0,000	-0,005
6			0,000	1,556	-0,751	0,704
7			-0,251	-0,300	0,000	0,132
8	0,000	0,159	-0,211	-0,195	-0,221	-0,043
9	-0,570	-0,549	0,000	0,085	-0,394	-0,166
10	0,000	0,265	-2,262	-2,670	0,000	-0,359
11	-0,498	-0,474	-0,535	-0,553	-0,200	-0,181
12	-0,469	-0,642	0,000	0,268	0,000	-0,045
13	0,000	2,879	0,000	-4,378	0,000	2,205
14	-0,772	-0,615	-0,458	-0,707	-0,655	-0,501
15	0,333	0,977	2,525	1,471	0,826	1,463
16	0,599	1,236	3,110	2,066	0,832	1,329
17	-0,593	-0,451	-0,152	-0,368	-0,616	-0,578
18	0,000	0,321	0,000	-0,335	0,000	-0,329
19	-1,111	-1,200	0,000	-0,538	-2,939	-1,372
20	0,000	0,209			-2,000	1,236
21					-0,002	-0,569
22					0,000	-0,518
23					-2,020	-0,667
24					-0,528	-0,291
25					0,000	0,272
26					0,000	-0,059
27						
Ф	0,476	0,328	0,396	0,343	0,251	0,175
Ф'	0,524		0,565		0,485	
Номер столбца	1	2	3	4	5	6

линомов 4, 6, 8-й степеней, линейных относительно постоянных. Постоянные подбирались по способу наименьших квадратов. В столбцах 2, 4, 6 табл. 22 даны ошибки аппроксимации алгебраическими полиномами 4, 6, 8-й степеней. Таблица показывает, что эти ошибки такого же порядка, как при аппроксимации интерполяционными полиномами с 5, 7, 9 узлами. Однако максимальная ошибка при пользовании интерполяционным полиномом больше по абсолютной величине наибольшей ошибки, чем при

применении алгебраического полинома, в 1,25—1,38 раза. В тех же четных столбцах табл. 23 даны относительные ошибки аппроксимации. Оказывается, что при пользовании алгебраическим полиномом чаще встречаются относительные ошибки, большие единицы по абсолютной величине. В случае полиномов 4 и 6-й степени особенно велики по абсолютному значению наибольшие относительные ошибки.

Были вычислены первые и вторые производные отклонения реальной кривой от расчетной (см. табл. 24, строки 1—6, n — номера нормалей с узлами интерполирования) для аппроксимации шестью способами, указанными в табл. 22 и 23, и найдены нормали и радиусы кривизны реальной кривой сечения в точках, лежащих на нормалях 12, 15, 18 (табл. 24, строки 7—12). Центры кривизны найдены для двух случаев: когда числа, стоящие во второй и четвертой строках табл. 20, записаны в масштабе 10^{-4} и 10^{-2} .

Табл. 24 показывает (см. верхние записи на строках 7—12), что в первом случае при всех способах аппроксимаций ошибки направления касательной реальной кривой сечения меньше одной минуты; ошибки в величине радиуса кривизны, происходящие от неправильностей реальной кривой сечения, лежат в границах от $-1,7 \cdot 10^{-3}$ до $+2,7 \cdot 10^{-3}$ мм, т. е. составляют от $-1,7 \cdot 10^{-3}$ до $2,5 \cdot 10^{-3}\%$ величины радиуса расчетной кривой. Поэтому такими отклонениями реальной кривой от расчетной можно пренебречь и определять центры кривизны по расчетной кривой. При ошибках отклонения, увеличенных в 100 раз приходится принимать во внимание ошибки отклонения и аппроксимировать последние.

В заключение следует отметить, что трудоемкости определения оптимального интерполяционного полинома и оптимального алгебраического несравнимы: отыскать первый полином невозможно без применения ЭЦВМ и без существования программы автоматического поиска оптимума.

§ 17. Случайный процесс, образованный кривыми пересечения экземпляров реального элемента высшей кинематической пары плоскостью

Переходим к изучению вопросов точности партии механизмов, которые будут изготовлены по единому конструкторскому и технологическому проектам. Пусть в этих условиях разрабатываются конструкция и методы изготовления элементов высшей кинематической пары. Выбрана расчетная кривая, получающаяся в пересечении плоскости, параллельной плоскости движения, с элементом расчетной высшей кинематической пары. Для каждого элемента назначено поле допуска, в котором должны лежать все кривые пересечения экземпляров реального элемента плоскостью.

Таблица 24

Номер строки	Пара- метры	Номер нормали	$\frac{n}{8, 10, 11, 18, 20}$	Алгебраиче- ский полином	$\frac{n}{4, 6, 9, 12, 13, 18, 19}$	Алгебраиче- ский полином	$\frac{n}{5, 7, 10, 12, 13, 18, 22, 23, 26}$	Алгебраиче- ский полином
1	Δr	12	1070·10 ⁻⁶	1569·10 ⁻⁶	9387·10 ⁻⁷	2274·10 ⁻⁷	1674·10 ⁻⁶	2078·10 ⁻⁶
2		15	1180·10 ⁻⁶	1358·10 ⁻⁶	3453·10 ⁻⁶	3403·10 ⁻⁶	9482·10 ⁻⁷	9706·10 ⁻⁷
3		18	—1928·10 ⁻⁶	—2585·10 ⁻⁶	—6246·10 ⁻⁶	—4731·10 ⁻⁶	—7134·10 ⁻⁷	—2068·10 ⁻⁶
4	$\dot{\Delta} r$	12	7642·10 ⁻⁷	8492·10 ⁻⁷	2885·10 ⁻⁶	2697·10 ⁻⁶	1713·10 ⁻⁶	2154·10 ⁻⁶
5		15	—5949·10 ⁻⁷	—8411·10 ⁻⁷	—2439·10 ⁻⁶	—1971·10 ⁻⁶	—1546·10 ⁻⁶	—2167·10 ⁻⁶
6		18	1382·10 ⁻⁶	—1638·10 ⁻⁶	9140·10 ⁻⁷	1440·10 ⁻⁶	1013·10 ⁻⁶	1035·10 ⁻⁶
7		12	90°	90°	90°	90°	90°	90°
			89° 57	89° 47	89° 57	89° 59	89° 56	89° 53
			90°	90°	90°	90°	90°	90°
8	v	15	89° 56	89° 52	89° 48	89° 49	89° 57	89° 57
			—90°	—90°	—90°	—90°	—90°	—90°
			—89° 53	89° 47	—89° 39	—89° 44	—89° 53	—89° 53
9		18	100,000	100,000	100,004	100,000	100,000	100,000
			99,970	100,757	100,089	100,017	99,971	100,025
			100,003	100,004	100,006	100,004	100,003	100,004
10	R, m	12	100,274	99,553	100,637	100,427	100,302	100,399
		15	100,001	100,002	100,004	100,003	100,004	100,003
		18	100,142	101,355	100,369	100,326	100,382	100,291
11	Φ		0,476	0,328	0,306	0,343	0,251	0,175
			0,524		0,565		0,485	
Число изученных ва- риантов		7331	12 438		4020			
Номер столбца		1	2		3		4	
		5	6		7		8	

При наличии производственных ошибок реальные кривые пересечения являются реализациями расчетной кривой. Требуется рассмотреть, как кривые пересечения плоскости и реального экземпляра элемента высшей пары удовлетворяют допускам.

Для решения поставленной задачи пужно изготовить согласно разработанной технологии партию экземпляров элемента высшей кинематической пары. Отклонения реальных кривых сечения от расчетной рассматривают при заданных значениях абсциссы или полярного угла и измеряют по направлениям оси ординат или радиусов-векторов соответственно. Отдельно записывают отклонения каждой реальной кривой сечения, которые она имела в точках измерения. Записи будут реализациями, показывающими неточность получения расчетной кривой. В результате получится таблица, содержащая сведения, во-первых, об отклонениях каждой реальной кривой сечения от расчетной кривой, и, во-вторых, о том, каков набор отклонений в каждом месте измерений. Этой информации достаточно, чтобы осуществить корреляционный анализ между отклонениями в разных точках измерений и составить гистограммы отклонений в каждой точке измерения. Таким образом, мы получаем сведения о корреляционных связях между случайными отклонениями (параметрами) и о гистограммах последних.

При подобном подходе к решению задачи точности механизмов возникают следующие основные вопросы: во-первых, каким образом удостовериться в том, что в промежутках между выбранными точками измерения ошибки Δu или Δr для всей совокупности реализаций лежат с заданной вероятностью внутри поля допуска на всем интервале изменения соответствующей независимой переменной, и, во-вторых, как с достаточной для практических расчетов точностью описать отклонения реальных кривых от расчетной.

На первый вопрос ответ можно получить только путем обмеров кривых сечения в дополнительных точках для отобранных экземпляров из опытной партии. Здесь важно найти достаточные условия, при соблюдении которых удовлетворение допускам реальных кривых сечения в местах измерения обеспечивает нахождение этих кривых в поле допуска на всем интервале изменения независимой переменной. Ответ на второй вопрос будет дан на основе аппроксимаций выражений $\Delta u(x)$ или $\Delta r(\epsilon)$. Будем считать аппроксимацию удовлетворительной, если вероятности нахождения в допуске отклонений реальных кривых сечения от расчетной и аппроксимирующей кривой не будут различаться существенным образом.

Более строгое требование, которое считаем достаточным при рассмотрении не только отклонений реальных кривых сечения от расчетной, но и производных отклонений по координате x или ϵ , состоит в следующем: гистограммы отклонений, вычисленные по аппроксимирующим кривым, ни в одной точке не должны противо-

речить заданным законам распределения отклонений реальных кривых сечения от расчетной кривой.

Требование стараются удовлетворить выбором вида случайной аппроксимирующей функции, значений ее постоянных параметров, законов распределения случайных параметров, входящих в нее, и корреляционных связей между параметрами, выбором области изменений независимой переменной этой функции. Если для аппроксимации взять интерполяционный полином, то следует подбирать, исходя из поставленного требования, кратность и число узлов интерполирования, постоянные параметры, являющиеся координатами узлов, т. е. положения узлов, законы распределения значений полинома в узлах и корреляционные связи между этими значениями, а иногда и законы распределения первой производной полинома в узлах. Далее следует выбрать часть области интерполирования (часть области значений независимой переменной полинома), внутри которой полиномом осуществляется аппроксимация. При пользовании полиномами с однократными узлами и равными расстояниями между соседними узлами можно подбирать число узлов, расстояние между соседними узлами, законы распределения значений полинома в узлах и корреляционные связи между значениями, подбирать часть области интерполирования, внутри которой полиномом осуществляется аппроксимация.

Оценочной функцией качества аппроксимации будет критерий согласия χ^2 или иной критерий, известный в теории вероятностей.

При решении стохастических задач отклонение каждой реальной кривой от расчетной лучше описывать интерполяционным полиномом Лагранжа, а не полиномом Ньютона. Дело заключается в том, что случайный сомножитель, когда используется полином Лагранжа, равен измеренному отклонению в рассматриваемом узле, обозначенному через $\Delta y(x_i)$ или $\Delta r(\epsilon_i)$ [см. пояснения к формуле (15.5)]. При пользовании полиномом Ньютона случайные сомножители линейно зависят от отклонений, относящихся ко всем рассмотренным узлам [см. пояснения к формуле (15.4)]. Поэтому переход от интерполяционного полинома, представляющего отклонения одной реальной кривой сечения от расчетной, к интерполяционному полиному, представляющему отклонения другой реальной кривой сечения, весьма прост, если пользоваться формулой Лагранжа, но требует новых вычислений, включая отыскания гистограмм сомножителей, в случае применения формулы Ньютона.

На основании изложенного получим набор интерполяционных функций Лагранжа, представляющий случайный процесс, заключающийся в отклонениях реальных кривых сечения от расчетной кривой.

Поскольку $\Delta y(x)$ согласно (15.5) является линейной функцией случайных параметров Δy_i , то закон распределения $\Delta y(x)$ можно

найти методом композиции и определить для него математическое ожидание M и дисперсию σ^2 :

$$M[\Delta y(x)] = \sum_{i=1}^n X_i M[\Delta y_i], \quad (17.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2[\Delta y(x)] = & \sum_{i=1}^n X_i^2 \sigma^2[\Delta y_i] + 2(X_1 X_2 M[\Delta y_1 \Delta y_2] + \\ & + X_{n-1} X_n M[\Delta y_{n-1} \Delta y_n]) + 2(X_1 X_3 M[\Delta y_1 \Delta y_3] + \dots + \\ & + X_{n-2} X_n M[\Delta y_{n-2} \Delta y_n]) + \dots + 2X_1 X_n M[\Delta y_1 \Delta y_n]. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Если важны сведения о случайном процессе, состоящем из отклонений реальных кривых сечения от расчетной, и сведения о производных этого процесса, то в общем случае полезно измерять в экземплярах элемента высшей кинематической пары опытной партии не только координаты точек реальной кривой, но и положения касательных к кривой в этих точках. Тогда для каждой реальной кривой в каждом узле будут отдельно известны отклонения от расчетной кривой и ошибки тангенсов углов. Записываем указанные сведения в таблицу, содержание которой позволит осуществить, во-первых, корреляционный анализ между отклонениями в разных узлах и между ошибками тангенсов углов и, во-вторых, построить гистограммы отклонений реальных кривых от расчетной и гистограммы ошибок тангенсов углов в каждом узле. Словом, обмеры дадут информацию о процессе отклонений и о первой производной этого процесса.

Выше, в § 14, было отмечено, что вторые производные реальной кривой сечения нельзя измерить.

Имея такую информацию, описываем отклонения реальной кривой сечения от расчетной с помощью формулы интерполирования Эрмита для случая двукратных узлов [32]. В этом случае интерполяционным полиномом Эрмита будет представляться процесс отклонений реальных кривых сечения от расчетной кривой, если гистограммы отклонений, вычисленные по полиному Эрмита, и гистограммы ошибок первой производной, вычисленные по производной полинома, не будут противоречить заданным законам распределения отклонений реальных кривых сечения от расчетной кривой сечения и заданным законам распределения первой производной процесса отклонений. Сформулированное сейчас условие не противоречит условию, изложенному в начале настоящего параграфа и относящемуся к случаю, когда важны как сам процесс отклонения, так и его производные.

Остановимся на весьма существенном частном случае, для которого отклонения реальных кривых сечения от расчетной кривой, измеренные в любых точках расчетной кривой по направлению оси

ординат или радиуса-вектора, подчиняются нормальному закону распределения. Тогда по корреляционной функции процесса отклонений просто найти корреляционные функции и дисперсии первой и второй производной процесса. Производные процесса тоже подчиняются нормальному закону распределения. Значит, в этом случае достаточно измерить только отклонения реальных кривых сечения от расчетной кривой и излишне измерять касательные кривой отклонения реальных кривых сечения. Процесс отклонения удобно изобразить интерполяционным полиномом Лагранжа при однократных узлах. Так как формулы (15.5) линейны относительно параметров Δy_i , подчиняющихся нормальному закону распределения, то $\Delta y(x)$ и производные $\frac{d}{dx} \Delta y(x)$ при любом x тоже подчиняются этому закону.

Пусть отклонения реальных кривых сечения от расчетной кривой сечения образуют стационарный случайный процесс. Это значит, что во всех точках измерения получается один и тот же закон распределения отклонений. Тогда достаточно один раз выполнить исследование закона распределения отклонений, а результаты можно использовать при рассмотрении разных взаимных положений элементов пары.

Допустим, что случайные параметры подчиняются нормальному закону распределения, имеющему заданные числовые характеристики. Между случайными параметрами может отсутствовать или существовать корреляционная связь. В первом случае

$$M[\Delta y(x)] = M[\Delta y_i] \sum_{i=1}^n X_i = M[\Delta y_i], \quad (17.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2[\Delta y(x)] = \sigma^2[\Delta y] \left\{ \sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\rho(l) [X_1 X_2 + \right. \\ \left. + X_2 X_3 + \dots + X_{n-1} X_n] + 2\rho(l) [X_1 X_3 + \dots + X_{n-2} X_n] + \right. \\ \left. + \dots + 2\rho[(n-1)l] X_1 X_n \right\}, \quad (17.4) \end{aligned}$$

где $l = \text{const}$ — выбранное расстояние между соседними узлами интерполирования; $\rho[(k-1)l]$ — коэффициенты корреляции, причем $k = \{2, 3, 4, \dots, n\}$.

В формулах (17.3) и (17.4) учтено, что в условиях стационарного случайного процесса числовые характеристики закона распределения последнего не зависят от номера узла, вследствие чего $M[\Delta y_i] = M[\Delta y]$, $\sigma[\Delta y_i] = \sigma[\Delta y]$ и, кроме того, согласно [34] сумма

$$\sum_{i=1}^n X_i = 1.$$

Если случайный процесс, состоящий из отклонений реальной кривой сечения от расчетной, подчиняется нормальному закону распределения, то качество аппроксимации процесса можно оценить следующим образом. Пусть $\sigma_0 [x] = \sigma_0 [y(x) - y_0(x)]$ есть среднее квадратическое отклонение процесса; $\sigma [x] = \sigma [\Delta y(x)]$ — среднее квадратическое отклонение величин, полученных на основе (15.5), т. е. величин, аппроксимирующих процесс; последнее среднее квадратическое отклонение вычисляются по (17.2). Выберем более удобную оценочную функцию для суждения о качестве аппроксимации:

$$\Phi_0 = \frac{\Delta \sigma [x]}{\sigma_0 [x]} = \frac{\sigma [x] - \sigma_0 [x]}{\sigma_0 [x]} \leq a. \quad (17.5)$$

В случае стационарного случайного процесса $\sigma_0 [x] = \sigma_0$, поэтому $\sigma [x]$ определяется формулой (17.4)

$$\Phi_0 = \frac{\Delta \sigma [x]}{\sigma_0} = \frac{\sigma [x] - \sigma_0}{\sigma_0} \leq a. \quad (17.6)$$

С течением времени эксплуатации механизмов с высшими кинематическими парами следует снова обмерить входящие в партию экземпляры каждого элемента высшей пары с целью получения отклонений реальной кривой сечения от расчетной. Далее с результатами измерений поступают таким же образом, как и выше, когда учитывались производственные неточности реальных элементов этих пар.

Пример 17.1

Изготовлены три партии плоских кулачков, выполненных по одному конструкторскому и технологическому проекту. Теоретический профиль кулачков на некотором участке характеризуется отрезком прямой. Пусть во всех экземплярах изготовленных кулачков в пяти точках, отстоящих по оси абсцисс на расстоянии $l = 3 \text{ мм}$, были измерены по оси ординат отклонения реальных сечений от расчетной прямой, которая принята за ось абсцисс. Обработка результатов измерений показала, что отклонения подчиняются одному общему для всех партий кулачков нормальному закону распределения с параметрами $M_0 = 0$ и $\sigma_0 = 0,01 \text{ мм}$, а корреляционная функция имеет вид

$$K_{\Delta y(x)}(\xi) = \sigma_0^2 e^{-\mu^2 \xi^2}, \quad (17.7)$$

где ξ — интервал изменения независимой переменной (в единицах длины или в радианах).

Величины μ^2 приведены в табл. 25.

Требуется выявить, насколько качественным будет описание отклонений посредством интерполяционного полинома Лагранжа, если поле допуска лежит в границах $\pm 3\sigma_0$.

Решение. Согласно формуле (17.3) в рассматриваемом случае $M[\Delta y(x)] = 0$. Разместим начало координат в крайнем

левом узле, тогда все узлы будут лежать на положительной части оси абсцисс. Нумеруем узлы слева направо от первого до пято-

Т а б л и ц а 25

Корреляционная связь	μ^2	$\kappa = \frac{1}{\mu}$
Слабая	0,04470661	4,7294875
Средняя	0,01117665	9,4589750
Сильная	0,0015496	25,407000

го, после чего координаты узлов запишем так:

$$x_i = (i - 1)l, \quad i \in \{1, 2, \dots, 5\}.$$

В каждом промежутке между двумя соседними узлами выберем пять точек таким образом, чтобы расстояния между соседними точками или узлом и соседней точкой было равным $l/6$. Всего будет двадцать точек, которые вновь нумеруем слева направо. Координаты точек следующие:

$$x^{(s)} = \left(k^{(s)} + \frac{1}{6} q^{(s)} \right) l, \quad s \in \{1, 2, \dots, 20\},$$

где

$$k^{(s)} = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leq s \leq 5 \\ 1, & \text{если } 6 \leq s \leq 10 \\ 2, & \text{если } 11 \leq s \leq 15 \\ 3, & \text{если } 16 \leq s \leq 20 \end{cases} \quad q^{(s)} = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in \{1, 6, 11, 16\} \\ 2, & \text{если } s \in \{2, 7, 12, 17\} \\ 3, & \text{если } s \in \{3, 8, 13, 18\} \\ 4, & \text{если } s \in \{4, 9, 14, 19\} \\ 5, & \text{если } s \in \{5, 10, 15, 20\} \end{cases}$$

Тогда

$$\alpha_i^{(s)} = x - x_i = \left(k^{(s)} + \frac{1}{6} q^{(s)} - i + 1 \right) l,$$

$$U_i^{(s)} = \alpha_1^{(s)}, \dots, \alpha_{i-1}^{(s)} \alpha_{i+1}^{(s)}, \dots, \alpha_5^{(s)},$$

$$V_1 = \alpha_{12} \alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{15} = 24l^4 V_6, \quad V_2 = \alpha_{21} \alpha_{23} \alpha_{24} \alpha_{25} = -6l^4 = V_4,$$

$$V_3 = \alpha_{32} \alpha_{31} \alpha_{34} \alpha_{35} = 4l^4, \quad x_i^{(s)} = U_i^{(s)} / V_i.$$

Если начало координат поместить в крайнем правом узле, а ось абсцисс направить справа налево, то нумерация узлов и промежуточных точек будет осуществляться справа налево. Предыдущие формулы останутся справедливыми.

Определяем дисперсии в двадцати промежуточных точках по формуле (17.4), которая в условиях рассматриваемого примера

принимает вид

$$\sigma^2 [\Delta y(x^{(s)})] = \sigma_0^2 \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i^{(s)})^2 + 2\rho(l) [X_1^{(s)} X_2^{(s)} + \dots + X_4^{(s)} X_5^{(s)}] + 2\rho(2l) [X_1^{(s)} X_3^{(s)} + \dots + X_3^{(s)} X_5^{(s)}] + 2\rho(3l) [X_1^{(s)} X_4^{(s)} + X_2^{(s)} X_5^{(s)}] + 2\rho(4l) [X_1^{(s)} X_5^{(s)}] \right\}. \quad (17.8)$$

По формуле (17.8) были подсчитаны величины $\sigma^{(s)} = \sigma [\Delta y(x^{(s)})]$ для всех двадцати точек при $l = 1$ и $l = 3$ мм, что позволило вычислить относительные ошибки $\Delta\sigma^{(s)}/\sigma_0$, % (здесь $\Delta\sigma^{(s)} = \sigma^{(s)} - \sigma_0$), величины которых приведены в табл. 26.

Таблица 26

l, мм	Корреляционная связь	Номера точек				
		1, 20 2, 24	2, 19 3, 23	3, 18 4, 22	4, 17 5, 21	5, 16 6, 20
1	Слабая	0,027	0,034	0,029	0,013	0,002
	Средняя	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Сильная	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	Слабая	1,918	4,020	4,565	3,591	1,802
	Средняя	0,205	0,274	0,245	0,165	0,074
	Сильная	0,001	0,001	0,001	0,001	0,000

l, мм	Корреляционная связь	Номера точек				
		6, 15 7, 18	7, 14 9, 17	8, 13 10, 16	9, 12 11, 15	10, 11 12, 16
1	Слабая	-0,005	-0,006	-0,005	-0,009	-0,001
	Средняя	-0,001	-0,001	0,000	0,000	0,000
	Сильная	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	Слабая	-1,230	-1,655	-1,394	-0,777	-0,224
	Средняя	-0,044	-0,057	-0,047	-0,026	-0,007
	Сильная	-0,002	0,000	0,000	0,000	0,000

Верхняя строчка дает номера промежуточных точек, которые равномерно возрастают слева направо. Нижняя строчка указывает общие номера промежуточных точек и узлов, тоже равномерно возрастающие слева направо. Очевидно, в узлах рассматриваемые относительные ошибки равны нулю.

Данные табл. 26 показывают, что при слабой корреляционной связи и $l = 3$ мм интерполяционный полином с плохой точностью

описывает случайный процесс, состоящий из отклонений реальной кривой сечения от расчетной. В остальных рассмотренных случаях этот полином описывает случайный процесс с относительной ошибкой, меньшей 0,28%.

На этом можно было бы закончить рассмотрение примера, если бы в дальнейшем нам не предстояло искать распределения центров кривизны реальных кривых сечения. Поэтому повторяем решение примера методом статистических испытаний.

Выбираем следующий порядок решения. Пользуясь специальным алгоритмом, изготавливаем набор из 1000 псевдослучайных чисел, подчиняющихся нормальному закону распределения с $M_0 = 0$ и $\sigma_0 = 0,01$ мм.

Далее, основываясь на характере корреляционной связи вида (17.7) и пользуясь другим специальным алгоритмом [26], образуем для каждого числового значения μ^2 по одной четверке других случайных чисел. Полученные таким образом три пятерки чисел изображают отклонения реального профиля от расчетной прямой в местах измерения, отстоящих от первого на расстояниях 1, 2l, 3l, 4l, когда корреляционная связь слабая, средняя, сильная. Для каждой корреляционной связи вырабатываем 1000 наборов из пяти таких чисел. Каждый набор подставляем в (15.5) и вычисляем $\Delta y(x)$. Проводим статистическую обработку величин $\Delta y(x^{(s)})$ в каждой промежуточной точке и отдельно для каждой силы корреляционной связи. Оказалось, что числовые характеристики наборов имеют следующие отклонения от заданных величин:

$$3 \leq M[\Delta y] \cdot 10^5 \leq 44, \quad 0.8\% \leq \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} \leq 6.4\%.$$

Проверка гистограмм наборов по критерию χ^2 показала, что гистограммы не противоречат нормальному закону распределения, имеющему $M_0 = 0$, $\sigma_0 = 0,01$ мм с вероятностями $P(\chi^2)$, приведенными в табл. 27.

Таблица 27

Корреляционная связь	$P(\chi^2)$
Слабая	0,276—0,637
Средняя	0,276—0,834
Сильная	0,350—0,834

Значит, статистическое применение интерполяционного полинома дает в 20 промежуточных точках нормальный закон распределения, имеющий заданные числовые характеристики и корреляционные связи.

Продолжаем рассмотрение теории. Нам нужно еще рассмотреть производные отклонений реальных кривых от расчетной, взя-

тые по координате x . Формулы (15.7) и (15.9) линейны относительно случайных параметров Δy_i . Законы распределения производных можно искать методами композиции или статистических испытаний. По формулам легко найти величины $M[\dot{\Delta}y(x)]$, $\sigma^2[\dot{\Delta}y(x)]$, $M[\ddot{\Delta}y(x)]$, $\sigma^2[\ddot{\Delta}y(x)]$, зависящие от расстояний между узлами.

Вернемся к важному частному случаю, когда отклонения реальных кривых сечения от расчетной во всех точках последней подчиняются нормальному закону распределения. Так будет в условиях автоматизированного изготовления элементов высшей пары [17]. Было ранее указано, что производные нормального стационарного процесса тоже подчиняются нормальному закону распределения, числовые характеристики которого просто найти. Корреляционная функция первой производной процесса

$$K_{\dot{\Delta}}(x_i, x_s) = \frac{\partial^2 K_{\Delta y(x)}(x_i, x_s)}{\partial x_i \partial x_s}, \quad (17.9)$$

где $K_{\Delta y(x)}(x_i, x_s)$ — корреляционная функция самого случайного процесса.

Корреляционную функцию второй производной процесса находят по корреляционной функции первой производной. При $x_i = x_s$ получаются дисперсии производных случайного процесса. Обозначим их через $\sigma_{\dot{\Delta}0}^2(x)$ и $\sigma_{\ddot{\Delta}0}^2(x)$.

Так как формулы (15.7) и (15.9) линейны относительно параметров Δy_i , имеющих нормальные законы распределения, то случайные функции $\dot{\Delta}y(x)$, $\ddot{\Delta}y(x)$ имеют тот же закон распределения. О качестве аппроксимации производных случайного процесса производными интерполяционного полинома можно судить по следующим оценочным функциям:

$$\Phi_{\sigma_{\dot{\Delta}}} = \frac{\Delta \sigma_{\dot{\Delta}}(x)}{\sigma_{\dot{\Delta}0}(x)} = \frac{\sigma_{\dot{\Delta}}(x) - \sigma_{\dot{\Delta}0}(x)}{\sigma_{\dot{\Delta}0}(x)} \leq b, \quad (17.10)$$

$$\Phi_{\sigma_{\ddot{\Delta}}} = \frac{\Delta \sigma_{\ddot{\Delta}}(x)}{\sigma_{\ddot{\Delta}0}(x)} = \frac{\sigma_{\ddot{\Delta}}(x) - \sigma_{\ddot{\Delta}0}(x)}{\sigma_{\ddot{\Delta}0}(x)} \leq c, \quad (17.11)$$

где

$$\sigma_{\dot{\Delta}}(x) = \sigma[\dot{\Delta}y(x)], \quad \sigma_{\ddot{\Delta}}(x) = \sigma[\ddot{\Delta}y(x)].$$

Таким образом, если процесс отклонений реальных кривых сечения от расчетной является нормальным и важен не только этот процесс, но и первые две его производные, то оценочная функция (17.5) заменяется тремя более удобными оценочными функциями (17.6), (17.10) и (17.11). Очень важно отметить, что высокое удовлетворение функции (17.6) повышает качество удовлетворения функциям (17.10) и (17.11).

Если процесс отклонений нормальный и стационарный, то производные процесса тоже будут нормальными стационарными. В этом случае корреляционная функция первой производной процесса вместо (17.9) определяется по формуле

$$K_{\dot{\Delta}}(\xi) = - \frac{d^2 K_{\Delta y(x)}(\xi)}{d\xi^2}. \quad (17.12)$$

При $\xi = 0$ получим дисперсию первой производной процесса, обозначим ее через $\sigma_{\dot{\Delta}0}^2$. Аналогично находят корреляционную функцию $K_{\ddot{\Delta}}(\xi)$ и дисперсию $\sigma_{\ddot{\Delta}0}^2$ второй производной процесса. В условиях этого процесса все случайные параметры Δy_i подчиняются одному закону распределения. Качество аппроксимации производных нормального стационарного случайного процесса производными (15.7) и (15.9) выявляют по оценочным функциям (17.10) и (17.11), в которых

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{\Delta}0}(x) &= \sigma_{\dot{\Delta}0}, \quad \sigma_{\ddot{\Delta}}(x) = \sigma_{\ddot{\Delta}0}, \\ \sigma^2[\dot{\Delta}y(x)] &= \sigma_0^2[\Delta y] \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i')^2 + \right. \\ &+ 2\rho(l)[X_1'X_2' + \dots + X_{n-1}'X_n'] + \dots + 2\rho[(n-1)l]X_1'X_n'\bigg\}, \end{aligned} \quad (17.13)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2[\ddot{\Delta}y(x)] &= \sigma_0^2[\Delta y] \left\{ \sum_{i=1}^n (X_i'')^2 + 2\rho(l)[X_1''X_2'' + \dots + \right. \\ &+ X_{n-1}''X_n''] + \dots + 2\rho[(n-1)l]X_1''X_n''\bigg\}, \end{aligned} \quad (17.14)$$

$$\begin{aligned} M[\dot{\Delta}y(x)] &= M_0[\Delta y] \sum_{i=1}^n X_i' = 0, \quad M[\ddot{\Delta}y(x)] = \\ &= M_0[\Delta y] \sum_{i=1}^n X_i'' = 0. \end{aligned} \quad (17.15)$$

В выражениях (17.13) — (17.15) числовые характеристики $M_0[\Delta y]$ и $\sigma_0[\Delta y]$ относятся к нормальному стационарному случайному процессу. Суммы

$$\sum_{i=1}^n X_i' = \sum_{i=1}^n X_i'' = 0, \text{ так как } \sum_{i=1}^n X_i = 1.$$

Выбор постоянных b, c для оценочных функций (17.10) и (17.11) рассмотрен ниже в примере 18.1.

Пример 17.2

Имеются производные случайного процесса, состоящего из отклонений реальных профилей от расчетного. Нужно установить: с какой точностью эти производные можно представить посредст-

вом произвольных интерполяционного полинома Лагранжа. Исходные условия изложены в примере 17.1.

Р е ш е н и е. По формуле (17.12) согласно выражению (17.7) находим

$$K_{\Delta}^{\cdot}(\xi) = 2\sigma_0^2 \mu^2 e^{-\mu^2 \xi^2} (1 - \mu^2 \xi^2). \quad (17.16)$$

Для второй производной, принимая во внимание (17.16), имеем

$$K_{\Delta}^{\cdot\cdot}(\xi) = 4\sigma_0^2 \mu^4 e^{-\mu^2 \xi^2} (3 - 12\mu^2 \xi^2 + 4\mu^4 \xi^4).$$

Отсюда при $\xi = 0$

$$\sigma_{\Delta 0}^{\cdot} = \sqrt{2} \sigma_0 \mu, \quad \sigma_{\Delta 0}^{\cdot\cdot} = 2\sqrt{3} \sigma_0 \mu^2. \quad (17.17)$$

Эти средние квадратические отклонения постоянны.

Задача заключается в подборе такого расстояния l между соседними узлами и такой части области интерполирования, чтобы числовые характеристики (17.4), (17.13), (17.14) возможно меньше отличались от σ_0 и от характеристик (17.17).

Покажем, как по формулам (15.11) и (15.12) найти производные функции U_i , чтобы вычислить $\hat{\lambda}y(x)$ и $\hat{\Delta}y(x)$, если полином имеет пять однократных узлов,

$$U_1' = \sum_{l \in M_{2,5}} \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5, \quad M_{2,5} = \{2, 3, 4, 5\},$$

$$U_1'' = 2 \sum_{\substack{l \in M_{2,5} \\ m \in M_{2,l-1}}} \alpha_2 \dots \alpha_{m-1} \alpha_{m+1} \dots \alpha_{l-1} \alpha_{l+1} \dots \alpha_5,$$

$$M_{2,l-1} = \{2, \dots, l-1\}.$$

Отсюда

$$U_1' = \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_4 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5,$$

$$U_1'' = 2(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_4 \alpha_5).$$

Из последних формул получаем производные функции U_i указанным в конце § 15 путем

$$U_2' = \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_4 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5,$$

$$U_3' = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_2 \alpha_4 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_4 \alpha_5,$$

$$U_4' = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_5,$$

$$U_5' = \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4,$$

$$U_2'' = 2(\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_4 \alpha_5),$$

$$U_3'' = 2(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_5 + \alpha_4 \alpha_5),$$

$$U_4'' = 2(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_5 + \alpha_3 \alpha_5 + \alpha_1 \alpha_5),$$

$$U_5'' = 2(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_4).$$

Тогда

$$X'_i(x) = U'_i(x)/V_i, \quad X''_i(x) = U''_i(x)/V_i.$$

Обозначим производные функции U_i в точке $x = x_l$ через U'_{li} , U''_{li} . Они получаются из производных U'_i , U''_i , если в последних сомножители α_i заменить через α_{li} . Тогда согласно формулам (15.7) и (15.9) найдем

$$\Delta y(x_l) = \sum_{i=1}^n X'_{li} \Delta y_i, \quad \ddot{\Delta} y(x_l) = \sum_{i=1}^n X''_{li} \Delta y_i,$$

где

$$X'_{li} = U'_{li}/V_i = U'_i(x_l)/V_i, \quad X''_{li} = U''_{li}/V_i = U''_i(x_l)/V_i.$$

Точка x_l может быть промежуточной между узлами или совпасть с одним из узлов.

Пусть эта точка совпадает, например, с третьим узлом $x = x_3$. Поступая указанным образом и пользуясь формулами (15.7) и (15.9), при $l = 3$ мм найдем

$$\Delta y(x_3) = \frac{1}{36} (\Delta y_1 - 8\Delta y_2 + 8\Delta y_4 - \Delta y_5), \quad (17.18)$$

$$\ddot{\Delta} y(x_3) = \frac{1}{108} (-\Delta y_1 + 16\Delta y_2 - 30\Delta y_3 + 16\Delta y_4 - \Delta y_5). \quad (17.19)$$

Тогда по формулам (17.13) и (17.14) можно вычислить средние квадратические отклонения при разных величинах корреляционных связей и при разных (всегда равных между собой) расстояниях между всеми соседними узлами.

В табл. 28 даны значения $\sigma[\Delta y(x_i)] = \sigma_{\Delta}^{(i)}$, $\sigma[\ddot{\Delta} y(x_i)] = \sigma_{\ddot{\Delta}}^{(i)}$ для случая, когда производные определены в узле интерполирования номер i .

Таблица 28

l, мм	Корреляционная связь	$10\sigma_{\Delta}^{(i)}$			$10\sigma_{\ddot{\Delta}}^{(i)}$		
		Номер узла					
		1; 5	2; 4	3	1; 5	2; 4	3
1	Слабая	0,297	0,300	0,298	0,195	0,153	0,154
	Средняя	0,149	0,150	0,150	0,040	0,039	0,039
	Сильная	0,050	0,056	0,056	0,010	0,006	0,006
3	Слабая	0,057	0,313	0,254	0,460	0,410	0,135
	Средняя	0,155	0,152	0,147	0,063	0,037	0,039
	Сильная	0,056	0,056	0,056	0,006	0,005	0,005

Таблица 29

Корреляционная связь	Номера узлов (точек)													
	1,25	2,24	3,23	4,22	5,21	6,20	7,19	8,18	9,17	10,16	11,15	12,14	13	
1	Слабая	-0,535	-0,301	0,000	0,201	0,435	0,502	0,469	0,334	0,134	-0,033	-0,201	-0,334	-0,368
	Средняя	-0,067	-0,067	0,000	0,067	0,067	0,067	0,067	0,067	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	Сильная	0,459	0,090	0,036	0,018	0,018	0,036	0,036	0,036	0,018	0,018	0,018	0,018	0,018
3	Слабая	90,568	37,219	5,685	-5,441	-3,813	1,237	4,649	4,805	1,873	-0,200	-8,829	-13,244	-14,916
	Средняя	3,746	0,936	0,267	0,602	1,204	1,605	1,605	1,204	0,535	-0,268	-1,003	-1,472	-1,672
	Сильная	-0,580	-0,071	0,000	0,036	0,054	0,072	0,054	0,036	0,018	0,000	-0,018	-0,036	-0,036

Таблица 30

Корреляционная связь	Номера узлов (точек)													
	1, 25	2, 24	3, 23	4, 22	5, 21	6, 20	7, 19	8, 18	9, 17	10, 16	11, 15	12, 14	13	
1	Слабая	25,692	16,983	10,222	5,256	1,885	-0,550	-1,182	-1,492	-1,356	-1,007	-0,639	-0,362	-0,265
	Средняя	4,106	2,686	1,627	0,878	0,413	0,129	-0,026	-0,077	-0,052	0,000	0,077	0,077	0,103
	Сильная	93,928	68,789	46,722	28,790	17,343	8,845	4,600	3,335	3,948	5,369	6,648	8,026	8,330
3	Слабая	197,031	143,126	94,712	52,218	16,396	-11,339	-28,908	-35,042	-32,208	-25,660	-19,081	-14,556	-6,503
	Средняя	76,141	52,867	33,187	17,694	6,353	-0,956	-4,752	-5,927	-5,441	-4,106	-2,714	-1,705	-1,369
	Сильная	3,166	1,955	1,175	0,596	0,199	-0,019	-0,131	-0,168	-0,149	-0,117	-0,075	-0,031	-0,031

В табл. 29 и 30 соответственно даны значения

$$\Delta \sigma_{\Delta}^{(s)} / \sigma_{\Delta 0}, \quad \Delta \sigma_{\Delta}^{(s)} / \sigma_{\Delta 0},$$

где s — последовательные номера всех точек между узлами и сами узлы. Первый узел сохраняет свой номер, второй узел отмечен номером 7, третий — номером 13, четвертый — номером 19, пятый — номером 25;

$$\sigma_{\Delta}^{(s)} = \sigma_{\Delta}^{(s)} - \sigma_{\Delta 0}, \quad \sigma_{\Delta}^{(s)} = \sigma_{\Delta}^{(s)} - \sigma_{\Delta 0},$$

где

$$\sigma_{\Delta}^{(s)} = \sigma [\dot{\Delta} y(x^{(s)})], \quad \sigma_{\Delta}^{(s)} = \sigma [\ddot{\Delta} y(x^{(s)})].$$

Приведенные в табл. 29 и 30 данные показывают, что самые большие абсолютные значения относительных ошибок получаются в первом и пятом узлах. Производные интерполяционного полинома лучше представляют первую производную случайного процесса и много хуже вторую. Из табл. 30 следует, что вторая производная интерполяционного полинома на участке между вторым и четвертым узлами или на несколько большем участке представляет вторую производную случайного процесса с точностью, указанной в табл. 31.

Таблица 31

l , мм	Корреляционная связь	Участок между точками (узлами)	$\left \frac{\Delta \sigma_{\Delta}^{(s)}}{\sigma_{\Delta 0}} \right , \%$
1	Слабая	6—20	$< 1,5$
2	Средняя	4—22	< 1
3	Сильная	4—22	$< 0,6$

Данные табл. 26 позволяют предвидеть содержание табл. 29. Сложнее связь между данными табл. 26 и 30, так как при сильной корреляционной связи последняя таблица содержит меньшие относительные ошибки при $l = 3$ и существенно большие, когда $l = 1$. Таблица же 26-я при сильной корреляционной связи дает немного большие на (0,002%) относительные ошибки, когда $l = 3$, а не $l = 1$. Все же в изучаемом примере из таблиц видно, что оценку качества записи случайного процесса интерполяционным полиномом по табл. 26 следует производить в зависимости от того, нужен ли нам только случайный процесс или нужны процесс и его первая производная, или процесс и его две первые производные.

На этом закончено рассмотрение примера. Но так как радиус кривизны нелинейным образом зависит от производных, то вос-

пользуемся методом статистических испытаний, принимая во внимание изложенное в конце примера 17.2. При каждой корреляционной связи отдельно находим 1000 подлежащих случайных сочетаний случайных значений параметров Δy_i ($i = 1, 2, \dots, 5$). Каждый набор подставляем в формулы (15.7) и (15.9). В результате получим 1000 реализаций первой и 1000 реализаций второй производных случайного интерполяционного полинома. Статистическая обработка реализаций позволяет получить средние и средние квадратические отклонения величины $\Delta y(x)$ и $\Delta y(x)$ или соответствующие гистограммы при выбранном значении независимой переменной x . Расчеты показали, что статистические распределения величины $\Delta y(x_5)$ и $\Delta y(x_5)$, определяемых по формулам (17.18) и (17.19), не противоречат нормальному закону распределения, имеющему ранее найденные числовые характеристики.

§ 18. Законы распределения положений центров кривизны реализаций, описывающих реальные элементы высших кинематических пар

Определение радиусов и центров кривизны кривых сечения экземпляров реального элемента высшей кинематической пары является стохастической задачей (см. § 17), которую удобно решать методом статистических испытаний. Для этого составляют тройку реализаций, при помощи которой осуществляется аппроксимация конкретного случая отклонения реальной кривой сечения от расчетной, и две первые производные аппроксимирующей функции, последние аппроксимируют производные процесса отклонений. Рассматриваемый случай отклонений характеризуется законами распределения отклонений при разных значениях независимой переменной x , корреляционными связями между этими отклонениями, числовыми значениями отклонений в местах измерения. Дополняют тройку реализаций уравнением расчетной кривой сечения. Напомним, что в § 17 аппроксимация осуществлялась интерполяционным полиномом Лагранжа.

Далее, выбирают на расчетной кривой сечения те интересные для дальнейшего точки, которыми изучаемый элемент касался бы другого элемента, если бы высшая кинематическая пара была бы идеальной. Выбор определяет значения независимой переменной x . Элементы реальной высшей кинематической пары касаются с реальными кривыми сечения в других точках (см. § 13). Для определения каждой из последних точек нужно знать центр кривизны изучаемой реальной кривой сечения, когда независимая переменная имеет одно из значений, выбранных вышеуказанным способом. Имея уравнения производных аппроксимирующей функции и производные уравнения расчетной кривой, вычисляют производные для случая, когда независимая переменная получила выбранные нами значения. Затем по формулам, приведенным в

§ 14, находят тангенсы углов, образованных касательными реальной кривой сечения и длины радиуса кривизны. Тем самым оказываются определенными центры кривизны реальной кривой сечения в выбранных точках. Записывают, что первая тройка реализаций при взятых значениях переменной x имеет вычисленные величины тангенсов углов, радиусов кривизны и вычисленные положения центра кривизны.

Формируют вторую тройку реализаций, включающую аппроксимацию нового случая отклонений реальной кривой сечения от расчетной и две производные аппроксимирующей функции. Новый случай отклонений отличается от предыдущего тем, что в местах измерения отклонений имеется другой набор числовых значений случайных параметров Δy_i , не зависящий от набора в первой тройке. Для второго набора при тех же значениях независимой переменной вычисляем и записываем значения тангенсов углов, радиусов кривизны, положений центров кривизны и т. д.

В результате получаются достаточно большие наборы величин тангенсов углов, радиусов кривизны, расположений центров кривизны при каждом выбранном значении независимой переменной x . Набор троек должен удовлетворять оценочным функциям, рассмотренным в предыдущем параграфе. Перенумеруем тройки набора в порядке их получения. Статистическая обработка этих данных дает гистограммы величины тангенсов углов и величин радиусов кривизны при каждом выбранном значении независимой переменной x .

Отметим, наконец, что законы распределения $\lg \tau$ и R связаны между собой уравнением аппроксимирующей кривой.

Пример 18.1

При принятом методе изготовления кулачков отклонения реальных кривых сечения от расчетной кривой описываются нормальным стационарным случайным процессом, имеющим равное нулю математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение $\sigma_0 = 0,01$ мм. Отклонения реальных кривых сечения от расчетной кривой, измеренные в разных точках, связаны корреляционными зависимостями, указанными в условиях примера 17.1.

Пайти распределение центров кривизны в тех точках реальных кривых сечениях, которые являются реализациями выбранной точки на расчетной прямой.

Решение. Воспользуемся декартовой системой координат, направив ось абсцисс параллельно расчетной прямой. Отклонения реальных кривых сечения от расчетной прямой представляем интерполяционным полиномом Лагранжа, записанным для пяти однократных узлов. По оси абсцисс соседние узлы отстоят друг от друга на расстоянии $l = 3$ мм. В заданной точке на прямой располагаем третий узел. В этих условиях

$$\lg \tau = \Delta y(x_3), \quad R(x_3) = \frac{\{1 - [\Delta y(x_3)]^2\}^{1/2}}{\Delta y(x_3)}.$$

Вырабатываем пять надлежащих случайных сочетаний случайных значений Δy_i в условиях, когда между случайными параметрами существует слабая, средняя и сильная корреляционные зависимости. Каждое сочетание значений Δy_i позволяет найти $\dot{\Delta}y(x_3)$, $\ddot{\Delta}y(x_3)$, а затем $R(x_3)$. В условиях каждого вида корреляционных зависимостей вырабатываем набор из 1000 случайных значений $R(x_3)$. Присоединяем к нему три набора, каждый из которых имеет по 1000 случайных значений $\lg \tau$. В результате получается три распределения центров кривизны реальных кривых в точках, соответствующих третьему узлу интерполирования.

На основе метода статистических испытаний составлена табл. 32.

Таблица 32

Вероятности значений $R(x_3)$	Корреляционная связь		
	слабая	средняя	сильная
Вер [$ R(x_3) \geq 1000 \text{ мм}$]	0,513	0,991	1,000
Вер [$ R(x_3) \geq 10\,000 \text{ мм}$]	0,054	0,179	0,940

Сильная корреляционная связь свидетельствует о более высоком качестве изготовления прямолинейного профиля кулачка.

Пример 18.2

Условия примера совпадают с условиями примера 18.1. Расчетная кривая является дугой окружности радиуса $R_A = 20 \text{ мм}$, точка A — центр окружности.

Найти распределение центров кривизны в тех точках реальных кривых, которые являются реализациями выбранной точки дуги окружности.

Решение. Выбираем декартову систему координат, абсцисса которой перпендикулярна прямой, проходящей через выбранную точку окружности и центр A . Обозначим через x_A и y_A координаты центра окружности. Составляем уравнение окружности и находим первую и вторую производные в выбранной точке:

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{R_A} = -0,05.$$

Имеем

$$\lg \tau = \dot{\Delta}y(x_A), \quad R(x_A) = \frac{\{1 + [\dot{\Delta}y(x_A)]^2\}^{1/2}}{\ddot{\Delta}y(x_A) - 0,05}.$$

Представим отклонения реальных кривых сечения от расчетной кривой интерполяционными полиномами с пятью однократными узлами. Третий узел располагаем в выбранной точке на окружности. Соседние узлы отстоят друг от друга на расстоянии $l = 3 \text{ мм}$,

измеренном по дуге окружности с радиусом R_A . Тогда абсциссы узлов удовлетворяют следующим условиям:

$$l_{43} = l_{32} = x_4 - x_3 = x_3 - x_2 = 2,989 \text{ мм},$$

$$l_{51} = l_{21} = x_5 - x_4 = x_2 - x_1 = 2,922 \text{ мм}.$$

Так как Δy_i подчиняются нормальному закону распределения, то при любой величине x значения полинома и производные от него тоже подчиняются нормальному закону. В условиях рассматриваемого примера

$$M [\Delta y (x)] = M [\dot{\Delta y} (x)] = M [\ddot{\Delta y} (x)] = 0.$$

Были подсчитаны величины $\sigma [\dot{\Delta y} (x_A)]$ и $\sigma [\ddot{\Delta y} (x_A)]$, когда l_{21} , l_{32} , l_{43} , l_{54} имеют найденные значения, и сравнены со значениями $\sigma [\dot{\Delta y} (x_3)]$, $\sigma [\ddot{\Delta y} (x_3)]$, приведенными в табл. 28. Упомянутые значения средних квадратических отклонений записаны в табл. 33.

Т а б л и ц а 33

Корреляционная связь	$10^2 \sigma [\dot{\Delta y} (x_A)]$	$10^2 \sigma [\dot{\Delta y} (x_3)]$	$10^2 \sigma [\ddot{\Delta y} (x_A)]$	$10^2 \sigma [\ddot{\Delta y} (x_3)]$
Слабая	0,256	0,254	0,136	0,135
Средняя	0,148	0,147	0,038	0,039
Сильная	0,055	0,056	0,005	0,005

Данные табл. 33 показывают, что несовпадение средних квадратических отклонений незначительно, и поэтому можно воспользоваться найденными в примере 17.2 выражениями (17.18), (17.19) для $\dot{\Delta y} (x_3)$, $\ddot{\Delta y} (x_3)$ и подставить их в формулы тангенса угла и радиуса кривизны.

Т а б л и ц а 34

Корреляционная связь	$M [R (x_A)], \text{мм}$	$\sigma [R (x_A)], \text{мм}$	$P (\chi^2)$
Слабая	-19,9998	0,039	0,253
Средняя	-20,004	0,159	0,677
Сильная	-20,0007	0,002	0,156

Методом статистических испытаний получены гистограммы величин радиусов кривизны реальных кривых сечения при разных корреляционных связях. Вычисленные числовые характеристики записаны в табл. 34. Там же помещены значения $P (\chi^2)$, которые указывают, что статистические распределения не противоречат гипотезе о нормальном законе распределения длин радиусов кривизны.

§ 19. Законы распределения ошибок скоростей и ускорений ведомого звена механизма с высшей кинематической парой

Пусть заданы схема механизма, номинальные размеры и конфигурации всех его звеньев, а также допуски и законы распределения ошибок элементов низших и высших кинематических пар. Кроме того, для последних дополнительно должна быть известна корреляционная функция или корреляционная матрица, характеризующая вид взаимосвязи ошибок на заданном интервале изменения независимой переменной.

Ошибки ведомого звена приходится определять в статических, кинематических и динамических условиях. В зависимости от условий будут разные деформации звеньев и элементов кинематических пар под действием приложенных сил; разные перемещения одного элемента относительно другого на величину зазоров в подшипниках, прямолинейных направляющих, цилиндрических и винтовых кинематических парах; разные величины износа соприкасающихся элементов пар. При рассмотрении точности работы механизмов в динамических условиях появляются новые, не действующие в кинематических условиях первичные ошибки — такие, как ошибки величин и распределений масс звеньев, величин коэффициентов упругости звеньев, величин и направлений сил, действующих на изучаемый механизм. Иными словами, величины ошибок ведомого звена механизма существенным образом зависят от реальных условий эксплуатации механизма.

Так как элементы высших кинематических пар изготавливаются с высокой точностью, то при условии точного изготовления также и элементов низших кинематических пар ошибки положения или перемещения ведомого звена механизма с высшей парой удобно находить согласно линейной теории точности [14]. Стохастическую задачу в линейной теории решают с помощью предельной теоремы теории вероятностей. Если эта теорема неприменима, то можно применить метод статистических испытаний, вырабатывая ряд надлежащих случайных сочетаний случайных значений всех первичных ошибок механизма, в том числе ошибок элементов высших пар, которые измеряют по нормальным к профилю элементов. Каждое надлежащее случайное сочетание подставляют в фундаментальную формулу линейной теории точности, записанную для каждого интересующего нас положения рассматриваемого механизма. Производя вычисления по этой формуле при выбранном положении ведущих звеньев, находят набор случайных значений ошибки положения и строят для нее гистограмму. Ошибка положения ведомого звена является случайным процессом, зависящим от координат ведущих звеньев.

Рассмотрим определение ошибок скоростей и ускорений конкретного экземпляра механизма с высшими кинематическими парами, когда заданы кинематические или даны кинетостатические

условия эксплуатации. О механизме необходимо иметь сведения, перечисленные в первом абзаце настоящего параграфа. Кроме того, придется задаться движениями ведущих звеньев и положениями последних, когда требуется найти ошибки скоростей и ускорений. Задачу решают по методу, изложенному в § 13 и уточненному в § 14—16. Таково определение ошибок в кинематических условиях, которые частично соответствуют функционированию механизма в условиях невесомости. Если вопрос об ошибках рассматривается в кинестатических условиях, то необходимо дополнительно знать массу каждого звена и ее распределение в звене, упругости звеньев, внешние силы, приложенные к механизму. В механизме с низшими парами, эквивалентном механизму с высшими парами в изучаемом положении, заменяющие звенья первого и заменяемые звенья второго, содержащие элементы высших пар, должны иметь одинаковые и одинаково расположенные массы. Находят скорости и ускорения механизма с низшими парами и ошибки скоростей и ускорений механизма с высшими парами (первое приближение). Находят также силы реакции, действующие на каждое звено в его элементах кинематических пар, которые уравновешивают внешние силы, приложенные к звену, и силы инерции звена. Определяют деформации элементов высших пар под действием этих сил. Заменяют механизм с высшими парами, имеющими деформированные элементы, механизмом с низшими парами, поступая, как изложено в § 13. Снова находят ошибки скоростей и ускорений ведомого звена (второе приближение) и сравнивают их с полученными в первом приближении. Если совпадение удовлетворительное, то следует считать второе приближение только контрольным. Если же приближение неудовлетворительное, то следует в процессе второго приближения определить силы реакции в кинематических парах и деформации элементов высших пар.

Третье приближение будет контрольным, если силы реакции и деформации элементов высших пар, полученные в процессе второго и третьего приближений, практически совпадают. Другой вариант оценки точности определения ошибок скоростей и ускорений ведомого звена механизма с высшими парами заключается в том, что эти ошибки, полученные в процессе второго и третьего приближений, практически совпадают.

Исследование ошибок скоростей и ускорений проектируемого механизма с высшими кинематическими парами начинается с составления набора троек для каждого элемента высшей пары. Прибавляют уравнение расчетной кривой сечения элемента. Каждая тройка позволяет найти тангенс угла наклона касательной, радиус кривизны и положение центра кривизны реальной кривой сечения (см. § 18). Остановимся на какой-нибудь одной реальной высшей кинематической паре. Берем из первого набора, относящегося к первому элементу пары, тройку под каким-либо номером, например первым.

Из второго набора, относящегося к другому элементу пары, тоже берем тройку под каким-либо номером, например первым во втором наборе. Возможность действовать изложенным образом основывается на том, что числовые значения случайных параметров Δu_i в одном наборе не зависят от числовых значений параметров в другом наборе. Отмечаем центры кривизны реальных кривых сечения обоих элементов при значениях независимой переменной x , которое определено изучаемым положением ведущего звена. Так же поступим с элементами других реальных высших кинематических пар механизма. Заменяем проектируемый механизм с высшими кинематическими парами эквивалентным механизмом с низшими парами (см. § 13). Это будет механизм, соответствующий выбранной реализации механизма с высшими кинематическими парами. Находим ошибки скоростей и ускорений ведомого звена в кинематических или кинетостатических условиях (в зависимости от постановки задачи). Повторяем определение ошибок скоростей и ускорений ведомого звена в условиях рассматриваемых троек и когда ведущее звено последовательно занимает все выбранные нами положения. Записываем ошибки скоростей и отдельно ошибки ускорений механизма с высшими парами при всех положениях ведущего звена.

Переходим ко второй реализации механизма с высшими кинематическими парами. Для этого в каждом наборе троек берем тройки под номером два. Отмечаем центры кривизны реальных кривых сечения при значениях независимой переменной x , определяемых теми же заданными положениями ведущих звеньев механизма. Образует эквивалентные механизмы с низшими парами (см. § 13). Определяем ошибки скоростей и ускорений в кинематических условиях при всех положениях ведущего звена. Записываем отдельно ошибки скоростей и ускорений под записями, сделанными в условиях первого набора троек.

Такие же операции предельваем с прочими тройками наборов. Получится число реализаций механизма с высшими парами, равное числу троек в наборе (все наборы следует сделать из одинакового числа троек). В условиях каждой реализации находим ошибки скоростей и ускорений ведомого звена при всех заданных положениях ведущих. Записываем результаты отдельно для ошибок скоростей и для ошибок ускорений. В итоге получатся две корреляционные матрицы. Статистическая обработка найденных значений ошибок даст гистограммы каждой ошибки при каждом выбранном положении ведущих звеньев. Кроме того, будут найдены корреляционные связи между каждой из ошибок при разных положениях ведущих звеньев. Таковы сведения о случайных процессах ошибок скоростей и ускорений ведомого звена, которые будут найдены в зависимости от положений ведущих звеньев, их скоростей и ускорений.

Известно, что с течением времени эксплуатации механизмов некоторые из первичных ошибок изменяют свои значения, напри-

мер, вследствие износа элементов низших и высших кинематических пар или от каких-либо других причин. Поэтому показатели точности механизмов с течением времени эксплуатации изменяются. В зависимости от постановки задачи круг этих вопросов может быть решен также на основе разработанных положений линейной и нелинейной теории точности.

Пример 19.1

На рис. 32 дана схема плоского аксепального кулачкового механизма, состоящего из кулачка 1 и толкателя 2. Кулачок образован дугами окружностей, имеющих радиусы $R_A = 20 \text{ мм}$, $R_0 = 30 \text{ мм}$, и касательными к окружностям. Расстояние $AO = 60 \text{ мм}$, радиус ролика $R_B = 10 \text{ мм}$.

Этот механизм изучается в положении, когда угол $\alpha = 0$. При изготовлении кулачка возникли ошибки, указанные в примере 18.2. Пренебрегаем прочими первичными ошибками кулачка, а также ошибками стойки, толкателя и ролика, имеющего центр B .

Угловая скорость вращения кулачка $da/dt = 10 \text{ сек}^{-1} = \text{const}$.

Требуется найти законы распределения ошибок скоростей и ускорений ведомого звена механизма.

Решение. В заданном положении механизма точки O , A , B лежат на одной прямой. Выбираем прямоугольную систему координат с началом в точке O , ось XX перпендикулярна OAB . Берем из примера 18.2 набор центров кривизны реальных кривых сечения в тех точках, которые соответствуют точке пересечения расчетного профиля кулака с прямой AB .

Если ошибки положения механизма малы, то положение толкателя определяется так:

$$Y_B = OB = 90 \text{ мм}.$$

Кулачковый механизм в рассматриваемом положении заменяются кривошипно-ползунным с шарниром, помещенным в центре кривизны, который может занимать любое из шести положений, изображенных на рис. 33: a , b — ($\tau > 0$, $l_3 > 0$); c — ($\tau > 0$, $l_3 < 0$); d — ($\tau < 0$, $l_3 > 0$); e — ($\tau < 0$, $l_3 < 0$). Согласно рис. 33

$$Y = l_2 \sin \nu + l_3 \cos \tau, \quad l_3 \sin \tau = l_2 \cos \nu, \quad (19.1)$$

где $l_2 = OG$; $l_3 = GB$.

Так как G — центр кривизны, то в рассматриваемом положении заменяющего механизма $l_2 = \text{const}$ и $l_3 = \text{const}$. Кривошип вращается со скоростью кулачка, т. е. $d\nu/dt = da/dt$.

Поэтому

$$\dot{Y} = l_2 \dot{\nu} \cos \nu - l_3 \dot{\tau} \sin \tau, \quad l_3 \dot{\tau} \cos \tau = -l_2 \dot{\nu} \sin \tau, \quad (19.2)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Y} = & -l_2 \dot{\nu}^2 \sin \nu - l_3 \dot{\tau}^2 \cos \tau - l_3 \ddot{\tau} \sin \tau, \\ & - l_3 \dot{\tau}^2 \sin \tau + l_3 \ddot{\tau} \cos \tau = -l_2 \dot{\nu}^2 \cos \nu. \end{aligned} \quad (19.3)$$

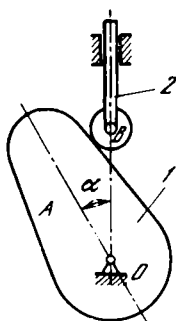


Рис. 32

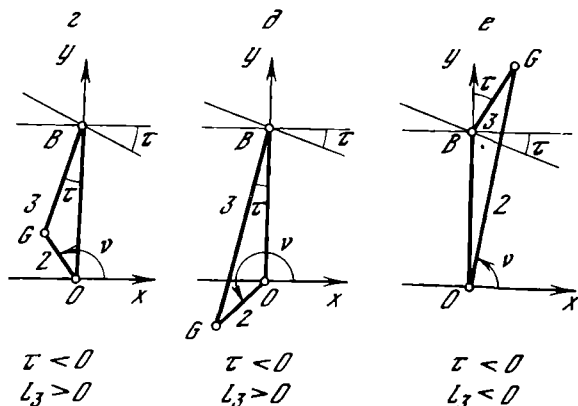
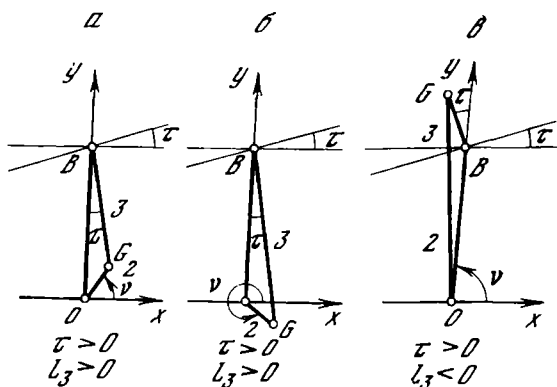


Рис. 33

Формулы (19.1) — (19.1) справедливы для всех шести положений механизмов, изображенных на рис. 33, если принять во внимание знаки при τ и l_3 .

В изучаемом положении заменяющего механизма $Y = Y_B$. Следовательно,

$$\dot{\tau} = -\frac{Y_B - l_3 \cos \tau}{l_3 \cos \tau} \dot{\nu}, \quad \dot{Y} = l_3 \sin \tau (\dot{\nu} - \dot{\tau}), \quad (19.4)$$

$$\dot{Y} = Y_B \dot{\tau} \operatorname{tg} \tau, \quad (19.5)$$

$$\ddot{Y} = Y_B \left(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \tau - \frac{Y_B}{l_3 \cos^3 \tau} \right) \dot{\nu}^2. \quad (19.6)$$

В расчетном механизме $\tau = 0$. Поэтому согласно (19.5) и (19.6) имеем

$$\dot{Y}_0 = 0, \quad \ddot{Y}_0 = Y_B \left[1 - \frac{Y_B}{(l_3)_0} \right] \dot{\nu}^2 = -18\,000 \text{ мм/сек}^2.$$

Теперь можно записать следующие выражения, определяющие ошибки скорости и ускорения толкателя кулачкового механизма:

$$\Delta \dot{Y} = \dot{Y} - \dot{Y}_0 = 900 \Delta y(x_A), \text{ мм/сек}, \quad (19.7)$$

$$\Delta \ddot{Y} = \ddot{Y} - \ddot{Y}_0 = 9000 \left\{ 3 + 2 [\Delta y(x_A)]^2 - \right. \\ \left. - \frac{90}{l_3} [1 + (\dot{Y} y(x_A))^2]^{1/2} \right\}, \text{ мм/сек}^2. \quad (19.8)$$

Формулы (19.7) и (19.8) являются справедливыми для всех шести изображенных на рис. 33 положений механизма при соблюдении следующих условий:

- 1) $l_3 = |R_B| - R(x_A) = \begin{cases} > 0, & \text{если } R(x_A) < 0, \\ < 0, & \text{если } R(x_A) > 0; \end{cases}$
- 2) $R(x_A) > 0$, если $\left[\frac{d^2 y_0}{dx^2} + \dot{\Delta y}(x_A) \right] \frac{d^2 y_0}{dx^2} < 0$;
- 3) $\lg \tau = \dot{\Delta y}(x_A)$.

Согласно формуле (19.7), ошибка скорости толкателя при всех изучаемых корреляционных связях распределена по нормальному закону с числовыми характеристиками: $M[\Delta \dot{Y}] = 0$ и средними квадратическими отклонениями, приведенными в табл. 35

Т а б л и ц а 35

Корреляционная связь	$\sigma[\Delta \dot{Y}]$
Слабая	2,308
Средняя	1,128
Сильная	0,494

Вследствие нелинейного характера зависимости (19.8) ошибку ускорения толкателя целесообразно определять методом статистических испытаний.

Как было показано в примере 18.2, законы распределения случайных величин $\dot{\Delta y}(x_A)$ и $\ddot{\Delta y}(x_A)$ практически мало отличаются от законов распределения случайных величин $\dot{\Delta y}(x_3)$ и $\ddot{\Delta y}(x_3)$. Поэтому, руководствуясь изложенным в примере 17.2, для каждого случайного сочетания величин Δy_i определяем случайные значения $\dot{\Delta y}(x_A)$ и $\ddot{\Delta y}(x_A)$. Затем вычисляем $R(x_A)$, и, наконец, согласно условию 1 настоящего примера, находим l_3 . Таким образом могут быть получены необходимые исходные данные для проведения расчетов методом статистических испытаний по формуле (19.8). Расчеты для 1000 подлежащих случайных сочетаний величин Δy_i были проведены на ЭЦВМ «Минск-2».

По результатам расчета были построены гистограммы распределения ошибок ускорений, а также подсчитаны величины $P(\chi^2)$, которые наряду с $M[\Delta\ddot{Y}]$ и $\sigma[\Delta\ddot{Y}]$ приведены в табл. 36.

Таблица 36

	Корреляционная связь		
	слабая	средняя	сильная
$M[\Delta\ddot{Y}]$	-0,409	-1,009	0,644
$\sigma[\Delta\ddot{Y}]$	35,087	34,056	19,568
$P(\chi^2)$	0,780	0,809	0,306

Данные табл. 36 не опровергают гипотезы о том, что при всех изучаемых корреляционных связях ошибка ускорения ведомого звена кулачкового механизма подчиняется нормальному закону распределения.

Описание общих моделирующих алгоритмов решения задач точности механизмов с высшими кинематическими парами дано в работах [29, 33].

§ 20. Примеры расчета точности устройств

Пример 20.1

Пусть требуется провести исследование точности счетно-решающего устройства, предназначенного для вычисления неявной функции x независимых переменных y и z , поведение которого описывается следующим уравнением:

$$\Phi(x, y, z) = 0. \quad (20.1)$$

Обычно при помощи счетно-решающего устройства значение x отыскивают методом последовательного приближения, основываясь на уравнении

$$\Phi_\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (20.2)$$

На рис. 34 представлена принципиальная схема счетно-решающего устройства, состоящая из двух основных частей, первая из которых 1 предназначена для формирования функции (20.2), а вторая 2 представляет собой чувствительный элемент (ч. э.), сравнивающий с нулем величину ε . Согласно (20.1) для идеального счетно-решающего устройства процесс решения (20.2) заканчивается при $\Phi_\varepsilon = \Phi(\varepsilon = 0)$.

Пусть функция (20.1) имеет следующее выражение:

$$z_0 - x_0 y_0 - y_0^2 \cos x_0 = 0, \quad (20.3)$$

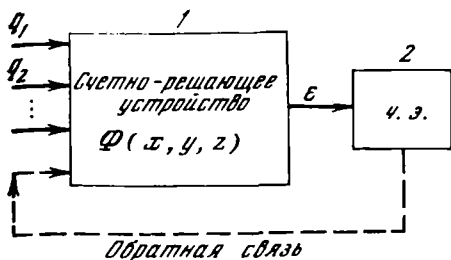


Рис. 34

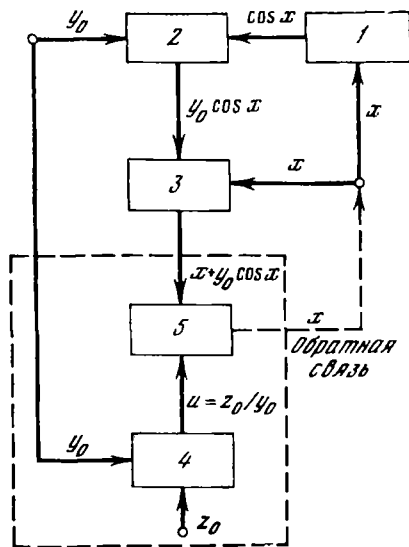


Рис. 35

которое преобразуем к виду

$$x_0 + y_0 \cdot \cos x_0 = u_0 \quad (u_0 = z_0/y_0). \quad (20.4)$$

На рис. 35 представлена принципиальная схема счетно-решающего устройства, реализующего зависимость (20.4) при помощи следующих механизмов: 1 — косинусного (кос.); 2 — множительного (мн.); 3 — суммирующего (сум.); 4 — делительного (дел.); 5 — чувствительного элемента (ч. э.).

В процессе работы счетно-решающего устройства его чувствительный элемент осуществляет непрерывное сравнение величин, поступающих к нему от суммирующего и делительного механизмов до тех пор, пока они не станут равными между собой. В результате вычисляется искомое значение x . Ниже чувствительный элемент и делительный механизм представлены в виде единого механизма сравнения, кроме того, все масштабы изображения переменных условно приняты равными единице, что не накладывает каких-либо существенных ограничений на рассматриваемый метод расчета.

Поскольку первичные ошибки присущи всем механизмам, входящим в счетно-решающее устройство, то последнее вместо уравнения (20.4) в действительности решает следующее:

$$x_0 + \Delta x + y_0 [\cos (x_0 + \Delta x) + \Delta_{\text{кос}}] + \Delta_{\text{мн}} + \Delta_{\text{сум}} = u_0 + \Delta_{\text{дел}}, \quad (20.5)$$

где $\Delta_{\text{кос}}$, $\Delta_{\text{мн}}$, $\Delta_{\text{сум}}$, $\Delta_{\text{дел}}$ — соответственно ошибки положения (перемещения) косинусного, множительного, суммирующего механизмов и механизма сравнения.

При проведении расчетов на точность сложных кинематических цепей обычно поступают следующим образом: для ряда входящих в них механизмов, показатели точности которых априорно известны, принимаются заданные законы распределения ошибок положения (перемещения); учет действия первичных ошибок остальных механизмов осуществляется обычным путем. Предположим, что для суммирующего механизма и механизма сравнения известны дифференциальные законы распределения ошибок перемеще-

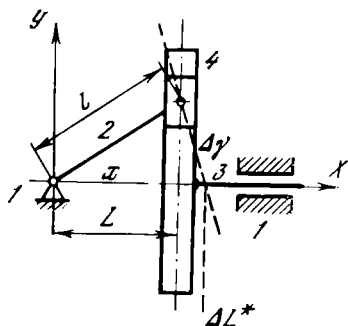


Рис. 36

ния η ($\Delta_{\text{сум}}$) и η ($\Delta_{\text{ср}}$), а для косинусного (рис. 36) и множительного (рис. 3) механизмов — основные действующие первичные ошибки и их ожидаемые законы распределения, параметры которых могут изменяться при применении тех или иных приемов регулировок.

В косинусном механизме примем во внимание следующие первичные ошибки: две скалярные — Δl (ошибки в длине кривошипа), $\Delta \gamma$ (неперпендикулярность осей прорези кулисы и поступательной пары 1—3) — и одну векторную ошибку ($\Delta_{\text{э}}$) — из-за эксцентриситета в ползуне, определяемого модулем Δq и аргументом θ . В результате ошибка косинусного механизма может быть записана так:

$$\Delta_{\text{кос}} = \Delta \gamma \sin \alpha + \frac{\Delta q \cos \theta}{l_0 + \Delta l}. \quad (20.6)$$

Соответственно для множительного механизма (рис. 3) учитываем [20]: ξ — проскальзывание в паре 2—3; Δr — ошибку радиуса ролика; $\Delta \rho_{\text{к}}$ — мертвый ход каретки; $\Delta \rho_{\text{в}}$ — мертвый ход винта; $\Delta_{\text{т}}$ — торцовое биение в паре 1—5; Δh — ошибку шага в паре 4—5. В этом случае имеем

$$\Delta_{\text{мн}} = \frac{y_0}{r_0(r_0 + \Delta r)} \left[r_0 \left(\Delta \rho_{\text{к}} + \Delta \rho_{\text{в}} + \Delta_{\text{т}} + \frac{\Delta h}{\delta} \right) (1 - \xi) - \frac{h_0}{2\pi} \times \right. \\ \left. \times (r_0 \xi + \Delta r) \cos \alpha \right], \quad (20.7)$$

где δ — эмпирический коэффициент, учитывающий наличие пассивных связей в реальной кинематической паре 4—5.

Принимая во внимание изложенное, после подстановки выражений (20.6) и (20.7) в (20.5) получим

$$x_0 + \Delta x + y_0 \left[\cos(x_0 + \Delta x) + \Delta \gamma \sin(x_0 + \Delta x) + \frac{\Delta q \cos \theta}{l_0 + \Delta l} \right] + \\ + \frac{y_0}{r_0(r_0 + \Delta r)} \left[r_0 \left(\Delta \rho_{\text{к}} + \Delta \rho_{\text{в}} + \Delta_{\text{т}} + \frac{\Delta h}{\delta} \right) (1 - \xi) - \frac{h_0}{2\pi} \times \right. \\ \left. \times (r_0 \xi + \Delta r) \cos(x_0 + \Delta x) \right] + \Delta_{\text{сум}} = u_0 + \Delta_{\text{ср}}. \quad (20.8)$$

Обозначим

$$a = y_0 \left[1 - \frac{h_0 (r_0 \xi + \Delta r)}{2\pi r_0 (r_0 + \Delta r)} \right], \quad b = y_0 \Delta \gamma, \quad (20.9)$$

$$c = y_0 \left[\frac{\Delta q \cos \theta}{l_0 + \Delta l} + \frac{1 + \xi}{r_0 + \Delta r} (\Delta \rho_K + \Delta \rho_B + \Delta_T + \frac{\Delta h}{\delta}) \right] + \\ + \Delta_{\text{сум}} - \Delta_{\text{ср}} - u_0.$$

С учетом (20.9) выражение (20.8) перепишем так:

$$x + a \cos x + b \sin x + c = 0, \quad (20.10)$$

где a, b, c — функции первичных ошибок.

Тогда ошибка в обработке счетно-решающим устройством величины x может быть представлена следующим образом:

$$\Delta x = x - x_0, \quad (20.11)$$

где величины x и x_0 определяются из решения уравнений (20.10) и (20.4) соответственно.

Основываясь на приведенных в литературе [20, 21] данных, выбираем следующие номинальные значения и законы распределения случайных параметров, входящих в уравнение (20.10):

1) для первичных ошибок $\Delta l, \Delta \gamma, \Delta r, \Delta \rho_K, \Delta h$ — законы распределения Гаусса с параметрами $M[\Delta l] = 0$ и $\sigma[\Delta l] = 0,0033$ мм, $M[\Delta \gamma] = 0$ и $\sigma[\Delta \gamma] = 0,004$ мм, $M[\Delta r] = -0,006$ и $\sigma[\Delta r] = 0,003$ мм, $M[\Delta \rho_K] = 0$ и $\sigma[\Delta \rho_K] = 0,003$ мм, $M[\Delta h] = 0$ и $\sigma[\Delta h] = 0,002$ мм, $\delta = 1,67$;

2) для первичной ошибки $\Delta \theta$ — модуль, распределенный по закону Релея с параметром $\sigma_*[\Delta q] = 0,0025$ мм, а аргумент θ — по закону равной вероятности в пределах $0 - 2\pi$;

3) для ошибок $\Delta \rho_B$ и Δ_T — законы распределения, заданные графиками вида

$$\eta(\Delta \rho_B) = 0,25e^{-284,8\Delta \rho_B} (0 < \Delta \rho_B \leq 0,016 \text{ мм}),$$

$$\eta(\Delta_T) = 0,24e^{-281,6\Delta_T} (0 < \Delta_T \leq 0,018 \text{ мм});$$

4) для ошибок $\Delta_{\text{сум}}$ и $\Delta_{\text{ср}}$ — законы распределения Гаусса с параметрами $M[\Delta_{\text{сум}}] = 0$ и $\sigma[\Delta_{\text{сум}}] = 0,0012$ мм, $M[\Delta_{\text{ср}}] = 0$ и $\sigma[\Delta_{\text{ср}}] = 0,001$;

5) проскальзывание в кинематической паре 2—3 фрикционно-го механизма принимаем постоянным ($\xi = 0,003$);

6) номинальные значения $l_0 = 50$ мм, $r_0 = 10$ мм; $h_0 = 2,5$ мм.

Наконец, в целях значительного сокращения числа вариантов решения (20.11) целесообразно выявить область существования последних исходя из специфических особенностей отдельных механизмов, входящих в структуру счетно-решающего устройства. Для этого по уравнению (20.3) были построены зависимости $z_0(x_0)_{y_0=\text{const}}$, $y_0(x_0)_{z_0=\text{const}}$, $z_0(y_0)_{x_0=\text{const}}$, позволившие получить следующую систему неравенств:

$$-1,1 \leq y_0 \leq -1, \quad 0 < z_0 \leq 0,8; \quad 0 < x_0 \leq \pi/4, \quad (20.12)$$

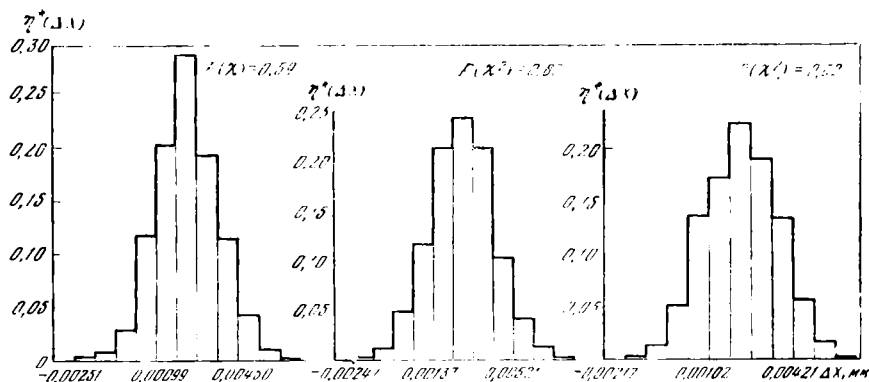


Рис. 37

которая в дальнейшем была использована при составлении моделирующего алгоритма, описанного в работе [29].

Расчет точности счетно-решающего устройства был проведен методом статистических испытаний для пятидесяти точек внутри области существования решений, оговоренной условиями (20.12). По данным расчета при $N = 1000$ для каждой из пятидесяти точек были построены гистограммы распределения ошибок $\eta^*(\Delta x)$ и вычислены значения математических ожиданий и средних квадратических отклонений. Характерный вид гистограмм распределения $\eta^*(\Delta x)$ представлен на рис. 37. Там же приведены соответствующие значения $P(\chi^2)$, подсчитанные по критерию Пирсона. Согласно им с достаточно высокой вероятностью не опровергается гипотеза о распределении ошибок Δx по закону Гаусса. Последнее обстоятельство существенным образом упрощает решение целого ряда вопросов, связанных, в частности, с анализом возможностей дальнейшего повышения точности устройств на основе применения разнообразных приемов регулировок.

Пример 20.2

Пусть рассматривается свободное движение автоколебательной системы, описываемое обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка

$$f_{\kappa}(y_{\kappa}^{(n)}, \dots, y_{\kappa}; B_1^0, \dots, B_r^0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_w; b_{w+1}^0, \dots, b_n^0; t) = 0 \\ (1 \leq \kappa \leq \kappa^*), \quad (20.13)$$

где B^0 и b^0 — расчетные значения параметров и констант, характеризующие соответственно линейную и нелинейную части уравнения; t — независимая переменная.

Входящие в уравнение (20.13) параметры $b_1, \dots, b_w$ могут быть представлены в следующем виде:

$$b_1 = b_1^0 + \Delta b_1, \dots; \quad b_z = b_z^0 + \Delta b_z, \dots; \quad b_w = b_w^0 + \Delta b_w \quad (1 \leq z \leq w), \quad (20.14)$$

где Δb_z — некоторые приращения указанных параметров.

Уравнение (20.13) позволяет на основе разработанных аналитических и графо-аналитических способов [17, 35] вычислить амплитуду A и частоту ω автоколебаний и тем самым найти первое приближение периодического решения

$$y_1 = A \sin \omega t. \quad (20.15)$$

В случае необходимости можно уточнить решения (20.15) путем отыскания конечного числа высших гармоник

$$y = A_1 \sin \omega t + \sum_{\mu=2}^{\mu=n} \varepsilon_\mu A_\mu \sin (\mu \omega t + \varphi_\mu), \quad (20.16)$$

где ε_μ — малый параметр.

Ниже входящие в выражения (20.14) величины $b_1, \dots, b_w$ будем полагать случайными с известными законами распределения $\eta(b_z)$. Определив для последних значения $M[b_z]$ и подставив их в уравнение (20.13), получим

$$f_{x,0}(y_x^{(n)}, \dots, y_x; B_1^0, \dots, B_w^0; M[b_1], \dots, M[b_w], b_{w+1}^0, \dots, b_n^0; t) = 0. \quad (20.17)$$

Найденные из решения (20.17) величины амплитуды и частоты автоколебаний можно принять за расчетные (A^0, ω^0), по отношению к которым следует рассматривать возможные отклонения значений A и ω . При этом будем предполагать наличие в системе устойчивых предельных циклов.

При проведении расчетов по методу ДЛВ непрерывные законы распределения $\eta(b_z)$ в области практически возможных значений изменения параметров b_z преобразуем в дискретные $\eta^*(b_z)$ (например, по приведенной в [24] методике). Это дает возможность в соответствии с изложенным в главе II материалом определить число и вероятности появления логических путей в дереве — и тем самым построить само дерево или составить идентичную ему таблицу. Тогда исходное уравнение (20.13) преобразуется к следующему виду:

$$f_{x, \iota}(y_x^{(n)}, \dots, y_x; B_1^0, \dots, B_w^0; b_1, \dots, b_w; b_{w+1}^0, \dots, b_n^0; t) = 0, \quad (1 \leq \iota \leq N), \quad (20.18)$$

где

$$b_1(b_1^{(1)}, \dots, b_1^{(i)}), \dots, b_w(b_w^{(1)}, \dots, b_w^{(j)}); \quad P_{b_i}(P_{b_i}^{(1)}, \dots, P_{b_i}^{(i)}), \dots, P_{b_w}(P_{b_w}^{(1)}, \dots, P_{b_w}^{(j)}). \quad (20.19)$$

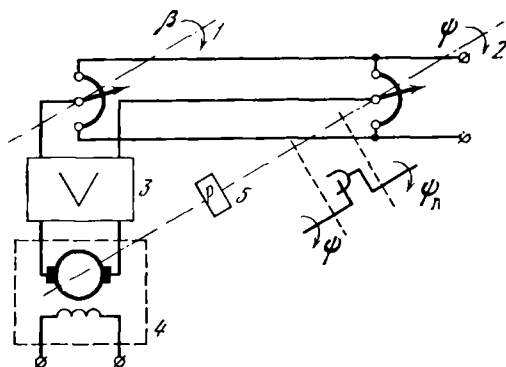


Рис. 38

Указанным путем, основываясь на методе ДЛВ, решается задача по выявлению влияния, оказываемого на установившееся движение динамической системы существенными нелинейностями, порождаемыми в условиях массового изготовления систем случайный характер. Одновременно с разобранной задачей может быть решена и другая, а именно связанная с исследованием качества переходного процесса. Это следует непосредственно из того, что решение различных вариантов уравнения (20.18) с учетом заданных условий (20.19) осуществляется на всем рассматриваемом интервале изменения независимой переменной.

Для проведения числовых расчетов по определению величины A воспользуемся изображенной на рис. 38 схемой следящей системы, основными элементами которой являются задающая ось 1, отрабатывающая ось 2, электронный усилитель 3, двигатель постоянного тока с независимым возбуждением 4, зубчатый редуктор 5.

Составим уравнение движения системы при следующих предположениях: электронный усилитель работает на линейной части статической характеристики, в цепи двигателя учитывается одновременно действие линейного и квадратичного трения, а в механическом приводе имеют место люфт и сухое трение. Статические характеристики перечисленных нелинейных звеньев следящей системы представлены соответственно на рис. 39, а — в.

В указанных условиях свободное движение системы описывается следующей системой уравнений [17]:

$$\begin{aligned} (T_1 p + 1) p \psi &= k_1 J - k_3 F_2(p\psi) - k_6 F_3(p\psi), \\ (T_2 p + 1) I &= -k_3 p \psi - k_2 k_4 F_1(\psi), \end{aligned} \quad (20.20)$$

где T_1 и T_2 — постоянные времени; $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ — коэффициенты, зависящие от параметров системы; p — оператор дифференцирования.

Основываясь на известных положениях метода гармонической линеаризации существенных нелинейностей [35], систему уравне-

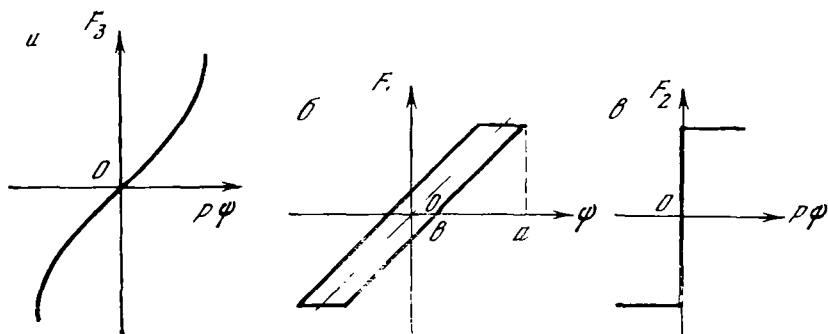


Рис. 39

ний (20.20) можно преобразовать к следующему виду:

$$T_2 q_3'(A) \omega^3 + (T_1 + T_2) \omega^2 + T_2 q_2'(A) \omega - k_1 k_2 k_4 q_1(A) = 0, \quad (20.21)$$

$$- T_1 T_2 \omega^3 + q_3'(A) \omega^2 + (1 + k_1 k_3) \omega + q_2'(A) + k_1 k_2 k_4 q_1'(A) = 0,$$

где $q_1(A)$, $q_1'(A)$, $q_2'(A)$, $q_3'(A)$ — гармонические коэффициенты усиления нелинейных звеньев, статические характеристики которых изображены на рис. 39, а—с.

Из совместного решения уравнений (20.21) могут быть вычислены амплитуды и частоты автоколебаний. Однако очевидны возникающие при этом трудности, особенно при исследовании точности системы, при котором в свете изложенного выше требуется провести многократное решение уравнений (20.21) с возможными последующими уточнениями вида (20.16).

Поэтому решение рассматриваемой задачи было проведено на АВМ типа МН-7 по методу ДЛВ, в основу которого были положены условия (20.19), составленные по схеме преобразования непрерывных законов распределения Релея в дискретные для двух независимых случайных параметров: приведенного момента сил сухого трения k_5 и люфта b в цепи механического привода следящей системы. Соответствующие расчетные значения параметров следящей системы и указанных законов распределения приведены в работе [17].

Результаты расчетов сведены в табл. 37 в виде амплитуды автоколебаний (в радианах) с указанной в скобках вероятностью их появления $P_{i,j}$. Величина $(P_{i,j})_{\max} = 0,084$ соответствует «массам» вероятностей, сосредоточенным в абсциссах $\eta^*(b)$ и $\eta^*(k_3)$ с координатами $M[b]$ и $M[k_5]$, величины $P_{i,j} = 0,000$ условно обозначают неравенства вида $P_{i,j} < 0,0005$.

Данные табл. 37 позволяют в достаточно полной форме произвести оценку влияния рассмотренных случайных параметров на амплитуду автоколебаний. На основе проведенного решения на АВМ аналогичным образом могут быть составлены также и другие

Т а б л и ц а 37

k_s	b_i						
	0,00125	0,00375	0,00625	0,00875	0,01125	0,01375	0,01625
0,001	0,0061 (0,012)	0,0174 (0,031)	0,0265 (0,032)	0,0350 (0,021)	0,0432 (0,010)	0,0506 (0,003)	0,0559 (0,001)
0,003	0,0050 (0,031)	0,0168 (0,078)	0,0255 (0,081)	0,0336 (0,053)	0,0423 (0,025)	0,0495 (0,008)	0,0546 (0,003)
0,005	0,0034 (0,032)	0,0156 (0,081)	0,0245 (0,084)	0,0322 (0,055)	0,0414 (0,026)	0,0484 (0,008)	0,0539 (0,003)
0,007		0,0144 (0,053)	0,0230 (0,055)	0,0315 (0,036)	0,0405 (0,017)	0,0473 (0,006)	0,0533 (0,002)
0,009		0,0135 (0,025)	0,0220 (0,026)	0,0308 (0,017)	0,0396 (0,008)	0,0462 (0,003)	0,0520 (0,001)
0,011		0,0123 (0,008)	0,0210 (0,008)	0,0301 (0,006)	0,0392 (0,003)	0,0451 (0,001)	0,0513 (0,000)
0,013		0,0108 (0,003)	0,0200 (0,003)	0,0294 (0,002)	0,0387 (0,001)	0,0440 (0,000)	0,0507 (0,000)

таблицы (например, относительно величины ω или параметров, характеризующих качество переходного процесса в следящей системе).

§ 21. Приложение нелинейной теории точности к решению задач надежности устройств

В главе I были рассмотрены некоторые общие вопросы точности и надежности устройств, решение которых основывалось на использовании аппарата линейной теории точности. Во многих случаях подобный подход к решению задач является вполне оправданным, так как, во-первых, постепенные отказы по точности функционирования устройств связаны, главным образом, с медленно протекающими физико-химическими процессами в отдельных их элементах и звеньях и, во-вторых, аппарату линейной теории точности присущи наглядность и простота его использования, а также возможность получения быстрой оценки работоспособности схемы в рассматриваемом аспекте.

В более общем случае, когда выполняется исследование надежности схемы сложного по своему конструктивному оформлению устройства или, например, поведение последнего описывается уравнениями в неявном виде, а сам расчет точности проводится на основе применения средств вычислительной техники, с методологической точки зрения надежность устройства также целесообразно осуществлять при помощи нелинейной теории точности. В указанных обстоятельствах при решении задачи может быть использован

аппарат, основанный как на применении метода статистических испытаний, так и метода деревьев логических возможностей.

В примере 20.2 при помощи последнего из указанных методов была решена задача, связанная с выявлением гистограммы распределения амплитуды автоколебаний следящей системы в предположении, что исходные законы распределения случайных величин остаются неизменными во времени.

Ниже при решении задачи надежности работы следящей системы будем полагать, что величины приращений $\Delta b_1, \dots, \Delta b_z$, входящие в равенства (20.14), могут быть записаны так:

$$b_1^{(T_v)} = b_1^0 + \Delta b_1(T_v), \dots, b_z^{(T_v)} = b_z^0 + \Delta b_z(T_v), \quad (21.1)$$

где T_v ($T_v \gg t$, $v = 1, 2, \dots, v^*$) — некоторая конечная дискретная последовательность отрезков времени.

Представим $\Delta b_1(T_v), \dots, \Delta b_z(T_v)$ как медленно изменяющиеся функции, для которых из теоретических соображений или экспериментальных данных известны законы распределения $\eta(\Delta b_1, T_v), \dots, \eta(\Delta b_z, T_v)$ или $\eta^*(\Delta b_1, T_v), \dots, \eta^*(\Delta b_z, T_v)$. В результате уравнения (20.18) преобразуются к виду

$$f_{x,v}^{(T_v)}(y_x^{(n)}, \dots, y_x; B_1^0, \dots, B_v^0; b_1^{(T_v)}, \dots, b_z^{(T_v)}, \dots, b_u^0; t) = 0. \quad (21.2)$$

Аналогичным образом вместо условий (20.19) будем иметь

$$b_1^{(T_v)} [b_1^{(1)}(T_v), \dots, b_1^{(i)}(T_v)], \dots, b_z^{(T_v)} [b_z^{(1)}(T_v), \dots, b_z^{(j)}(T_v)], \quad (21.3) \\ P_{b_1(T_v)} [P_{b_1^{(1)}(T_v)}^{(1)}, \dots, P_{b_1^{(i)}(T_v)}^{(i)}], \dots, P_{b_z(T_v)} [P_{b_z^{(1)}(T_v)}^{(1)}, \dots, P_{b_z^{(j)}(T_v)}^{(j)}].$$

Дискретные распределения (21.3) для каждого значения T_v позволяют вычертить схемы дерева логических возможностей (или составить эквивалентные им таблицы) и тем самым дают возможность в рассмотренной выше последовательности отыскать всю совокупность реализаций случайной функции, получаемую в виде решений уравнений (20.20). При этом значению $T_v = 0$ будет соответствовать уровень точности устройств, достигнутый в процессе их изготовления и настройки.

В частности, для рассмотренного выше примера 20.2 решения уравнений (20.20) с учетом условий (21.3) позволяют получить необходимые исходные данные для построения всей последовательности законов распределения $\eta^*(a, T_v)$. Характерный вид указанной последовательности приведен на рис. 40, а. Если техническими требованиями на эксплуатацию систем оговариваются вид зависимости $a_{\max}(T_v)$ и вероятность $P(T_v)$ ее удовлетворения, то нанесение $a_{\max}(T_v)$ на рис. 40, а дает возможность построить график (рис. 40, б), при помощи которого может быть оценена надежность работы партии систем по выбранным параметрам.

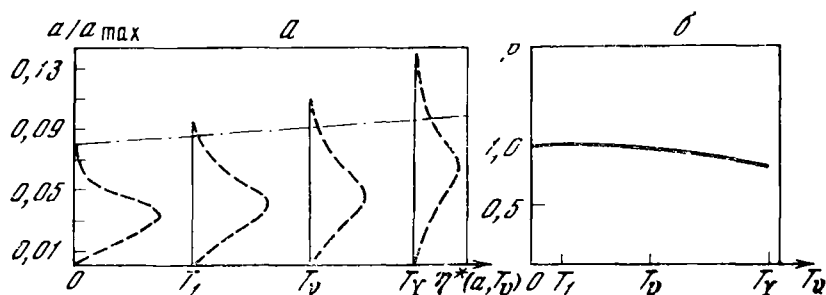


Рис. 40

Вопросы расчетного обоснования точности и надежности устройств были рассмотрены в предположении, что в системах возникают так называемые постепенные отказы, связанные со «старением» ее отдельных элементов, которое приводит к медленному изменению величин ряда параметров, а внезапные отказы отсутствуют. В более общем случае для оценки надежности систем, наряду с графиком $P(T_0)$, надо иметь зависимость $P^*(T_0)$, характеризующую вероятность отсутствия внезапных отказов в партии систем. Тогда при наличии необходимого объема статистического материала функция надежности систем может быть определена в рамках разработанных положений теории надежности [36—38]. В заключение следует упомянуть о больших возможностях использования отдельных разделов теории точности механизмов в задачах проектирования контрольно-измерительных устройств, широко используемых при оценке качества разнообразных изделий машиностроения [39].

1. Н. Г. Бруевич. О точности механизмов. М., Изд-во АН СССР, 1941.
2. Н. Г. Бруевич. Ошибки механизмов для черчения линий. М., Изд-во АН СССР, 1942.
3. Н. Г. Бруевич. Ошибки кулачковых механизмов с двумя степенями свободы. М., Изд-во АН СССР, 1942.
4. Н. Г. Бруевич. О точности основной формулы теории точности механизмов.— Изв. АН СССР, ОТН, 1944, № 9.
5. Н. А. Забелин. Расчет счетно-решающих механизмов на точность. М., Оборонгиз, 1949.
6. Н. Г. Бруевич. Ошибки механизмов с кинематическими параметрами качения или гибкими навивающимися звеньями.— Сб. «Точность механизмов и машин». М., Изд-во АН СССР, 1952.
7. Н. Г. Бруевич. Современные направления учения о точности в машиностроении и приборостроении. Теоретические основы конструирования машин. М., Машгиз, 1957.
8. Н. Г. Бруевич. О надежности и точности автоматического производства.— Изв. АН СССР, ОТН, 1959, № 4.
9. Н. Г. Бруевич. Вопросы надежности и точности электронных устройств в машиностроении и приборостроении.— Изв. АН СССР, ОТН (энергетика и автоматика), 1961, № 1.
10. Н. Г. Бруевич, В. И. Сергеев. Некоторые общие вопросы точности и надежности устройств.— Сб. «О точности и надежности в автоматизированном машиностроении». М., «Наука», 1965.
11. Н. Е. Кобринский. Кинематические и динамические ошибки плоских механизмов.— Изв. АН СССР, ОТН, 1944, № 3.
12. Н. Г. Бруевич, В. И. Сергеев. Основы нелинейной теории точности механизмов с низшими кинематическими параметрами.— Сб. «Точность механизмов и автоматизированных измерительных средств». М., «Наука», 1966.
13. Н. Г. Бруевич, В. И. Сергеев. Основы нелинейной теории точности механизмов с плоскими высшими кинематическими параметрами.— Сб. «Анализ и контроль точности в машиностроении». М., «Наука», 1970.
14. Н. Г. Бруевич. Точность механизмов. М., Гостехиздат, 1946.
15. М. Л. Бызовский. Основы динамической точности электрических и механических цепей. М., Изд-во АН СССР, 1958.
16. М. Л. Бызовский. Точность механизмов, у которых положение звеньев описывается дифференциальными уравнениями.— Изв. АН СССР, ОТН, 1947, № 11.
17. В. И. Сергеев. Основы инструментальной точности электромеханических цепей. М., Изд-во АН СССР, 1963.
18. В. Т. Серeda. Динамические ошибки реального кривошипно-шатунного механизма.— Труды Ин-та машиноведения, 1957, вып. 10.
19. В. И. Сергеев, К. М. Юдин. Исследование динамики плоских механизмов с зазорами. М., «Наука», 1974.

20. Сб. «Вопросы синтеза и точности сложных устройств непрерывного действия». М., Изд-во АН СССР, 1958.
21. Труды семинара по точности в машиностроении и приборостроении. Вып. 1—19. М., «Наука», 1951—1966.
22. *Н. А. Бородачев*. Основные вопросы теории точности производства. М., Изд-во АН СССР, 1950.
23. *В. И. Сергеев*. О точности лобовых фрикционных механизмов.— Сб. «Точность механизмов и машин». М., Изд-во АН СССР, 1954.
24. *В. И. Сергеев*. Метод деревьев логических возможностей и его применение в задачах машиностроения.— Сб. «Автоматизация научных исследований и измерений размеров в машиностроении». М., «Наука», 1968.
25. *Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон*. Введение в конечную математику. М., ИЛ, 1963.
26. *Н. П. Бусленко*. Математическое моделирование производственных процессов. М., «Наука», 1964.
27. *Н. П. Бусленко и др.* Метод статистических испытаний. М., Физматгиз, 1962.
28. *Е. С. Вентцель*. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1958.
29. *М. И. Коенов, Е. А. Правоторова, В. И. Сергеев*. Вероятностное моделирование в задачах точности. М., «Наука», 1973.
30. *Э. Уиттекер, Г. Робинсон*. Математическая обработка результатов наблюдений. М., Гостехиздат, 1933.
31. *А. Н. Брусевич, С. И. Ефтянов*. Аппроксимация нелинейных характеристик и спектры при гармоническом воздействии. М., «Советское радио», 1965.
32. *В. Л. Гончаров*. Теория интерполирования и приближения функций. М., Гостехиздат, 1934.
33. *Б. О. Мардер*. Программы для ЭЦВМ «Минск-2» интерполирования по Лагранжу и вычисления первых и вторых производных интерполяционного полинома.— Сб. «Автоматизация научных исследований и контроля точности в машиностроении». М., «Наука», 1967.
34. *Л. М. Кармазина, Л. В. Курочкина*. Таблицы интерполяционных коэффициентов. М., Изд-во АН СССР, 1956.
35. *Е. П. Попов, И. П. Пальтов*. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М., Физматгиз, 1960.
36. *Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев*. Математические методы в теории надежности. М., «Наука», 1965.
37. *Н. Г. Брусевич*. К вопросу о количественных оценках надежности изделий.— *Техническая кибернетика*, 1971, № 3.
38. *Н. Г. Брусевич, Ю. Г. Мильграм*. К вопросу об определении вероятностей безотказной работы на основе накопленного опыта и самообучения.— Сб. «Основные вопросы теории и практики надежности». М., «Советское радио», 1975.
39. *А. И. Иванцов*. Основы теории точности измерительных устройств. М., Изд-во стандартов, 1972.

Оглавление

Введение	3
Глава первая	
Общие вопросы точности и надежности устройств	
§ 1. Общие замечания	5
§ 2. Точность устройств и их надежность в смысле удовле- творения выходных координат допускам	7
§ 3. Надежность устройств в смысле отсутствия грубых первич- ных ошибок	14
§ 4. Примеры определения надежности устройств	17
Глава вторая	
Основы нелинейной теории точности механизмов с низшими кинематическими парами	
§ 5. Общие замечания	24
§ 6. Информация, необходимая для решения нелинейной задачи теории точности	25
§ 7. Сущность моделирования на ЭЦВМ	27
§ 8. Вычисление ошибок механизмов, когда первичные ошибки детерминированы	28
§ 9. Применение метода деревьев логических возможностей в не- линейной задаче точности механизмов	33
§ 10. Применение метода статистических испытаний (метод Монте- Карло) в нелинейной задаче точности механизмов	58
Глава третья	
Основы нелинейной теории точности механизмов с плоскими высшими кинематическими парами	
§ 11. Общие замечания	75
§ 12. Сущность метода исследования элементов высшей кинема- тической пары	76
§ 13. Ошибки ведомого звена конкретного экземпляра механизма с плоской высшей кинематической парой	78
§ 14. Центры кривизны кривой пересечения плоскости с поверх- ностью конкретного элемента реальной высшей кинематиче- ской пары	81

§ 15.	Применение интерполяционных полиномов в исследовании кривых сечений реальных элементов высшей кинематической пары плоскостью	85
§ 16.	Примеры определения центров кривизны конкретной реальной кривой сечения	89
§ 17.	Случайный процесс, образованный кривыми пересечения экземпляров реального элемента высшей кинематической пары плоскостью	96
§ 18.	Законы распределения положений центров кривизны реализаций, описывающих реальные элементы высших кинематических пар	112
§ 19.	Законы распределения ошибок скоростей и ускорений ведомого звена механизма с высшей кинематической парой . .	116
§ 20.	Примеры расчета точности устройств	122
§ 21.	Приложение нелинейной теории точности к решению задач надежности устройств	130
	Литература	133

Николай Григорьевич Брусил, Владимир Иванович Сергеев
Основы нелинейной теории точности и надежности устройств

*Утверждено к печати
Государственным научно-исследовательским институтом
машиноведения*

Редактор издательства *К. Ф. Пащковская*. Художник *П. В. Таганова*
Художественный редактор *А. П. Жданов*. Технический редактор *Е. Н. Евмянова*
Корректор *Т. В. Гурьева*

Сдано в набор 19/XII 1975 г. Подписано к печати 14/IV 1976 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага № 2. Усл. печ. л. 8,5. Уч.-изд. л. 9,4
Тираж 2150. Т-00700. Тип. зак. 72. Цена 63 коп.

Издательство «Наука». 103717 ГСП. Москва. Н-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121009, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10