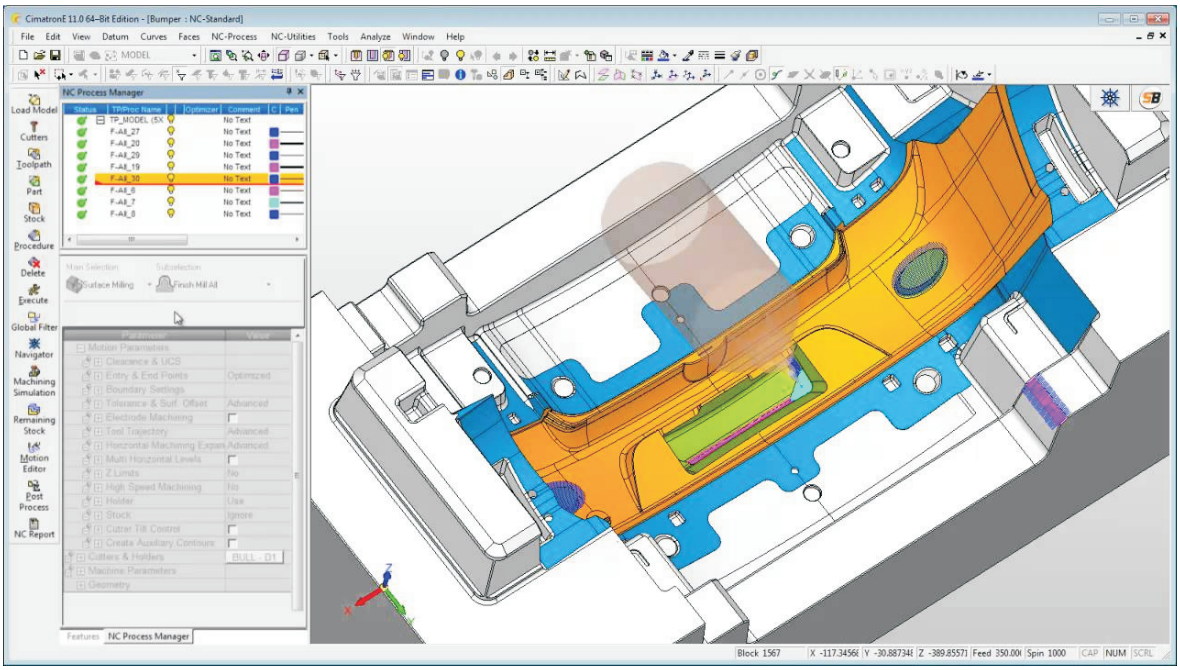
Н.М. БОДУНОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГИБКИ ТОНКОСТЕННЫХ ДЕТАЛЕЙ АВИАТЕХНИКИ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Учебное пособие



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАЗАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.Н. ТУПОЛЕВА-КАИ»

Н.М. БОДУНОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГИБКИ ТОНКОСТЕННЫХ ДЕТАЛЕЙ АВИАТЕХНИКИ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Учебное пособие

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим управлением
КНИТУ-КАИ

Казань 2019

УДК 539.3: 621.981
Бод 75

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук В.Г. Низамов
(КГАСУ);
кандидат технических наук Б.И. Найшулер
(КЦ КАЗ им. С.П. Горбунова)

Бодунов Н.М.

Бод 75 Моделирование процессов гибки тонкостенных деталей авиатехники с учетом геометрической нелинейности: учебное пособие/ Н.М. Бодунов. – Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2019. – 180 с.

ISBN 987-5-7579-2376-5

Излагается нелинейная теория больших перемещений при плоском упруго-пластическом изгибе тонких заготовок. В краткой форме освещены технологические процессы пластического формообразования тонкостенных деталей авиатехники. Приводятся методики расчета по определению силовых параметров, настроечных и программируемых параметров гибочного оборудования, предназначенного для изготовления деталей из листового и профильного материала с учетом геометрической нелинейности. Теоретический материал иллюстрирован примерами решения соответствующих технологических задач.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 24.03.04 (160100) «Авиастроение» и 22.03.01 (150100) «Материаловедение и технологии материалов», а также может быть полезным при курсовом и дипломном проектировании, магистрам и аспирантам соответствующих специальностей.

Ил. 76. Табл. 5. Библиогр. 84 назв.

УДК 539.3: 621.981

ISBN 987-5-7579-2376-5

ВВЕДЕНИЕ

Перспективным направлением развития современного машиностроения является создание и внедрение прогрессивной техники и технологии. Данная тенденция распространяется как на изделие в целом, так и на его элементы. К числу последних относятся тонкостенные элементы из листового и профильного металла. Они широко применяются в различных отраслях машиностроения и особенно, в авиастроении, где до 70 % деталей являются тонкостенными и составляют каркас и обшивку основных агрегатов летательного аппарата (ЛА). Большинство деталей, формирующих наружный контур (нервюры, шпангоуты, рамы, обшивки, обтекатели и др.) и многие детали внутреннего оборудования ЛА (полы, перегородки, панели, приборные щитки и т.д.) производятся различными способами пластического деформирования в заготовительно-штамповочных цехах.

Отличительными чертами современного заготовительно-штамповочного производства (ЗШП) являются высокая производительность труда, рациональное использование исходного материала, широкие возможности механизации и автоматизации технологических процессов, высокая точность воспроизведения размеров деталей и т.д. Однако ЗШП имеет существенные отличительные черты, обусловленные спецификой объекта производства. Поэтому модернизация старых и проектирование новых технологий ЗШП является трудоемкой задачей. Это объясняется тем, что процессы пластического деформирования (положенные в основу ЗШП) трудно формализовать по сравнению с процессами механической обработки деталей. При их проектировании предполагается решение целого ряда весьма сложных задач. Большое количество исходной информации, многообразие методик расчета технологических параметров (во многих случаях приближенных) и вариантов разработки технических средств разных типоразмеров деталей, а также сложная кинематика перемещения формующей оснастки – все это требует создания объемной базы данных и возможностей автоматизированного выбора оптимальных проектных решений.

Несовершенство методов расчета технологических процессов, технологической оснастки, применение в производственных условиях приближенных решений приводит к принятию неоптимальных, а зачастую и неверных решений при оценке предельной степени формоизменения, при учете пружинения и т.д. В результате в ЗШП сохраняется достаточно большой объем ручных доводочных работ.

Изготовление тонкостенных криволинейных деталей в ЗШП осуществляется пластическим деформированием плоских (листовых) и прямолинейных (профильных) заготовок различными методами гибки на универсальном и специализированном оборудовании. Особенностью пластического формообразования тонкостенных деталей является пружинение материала и изменение геометрии детали после разгрузки. Это усложняет теорию и практику технологических расчетов, проектирование формообразующей оснастки с учетом пружинения материала. Применение компьютерных технологий в технологической подготовки производства (ТПП) требует разработки соответствующего математического обеспечения, необходимого для решения различных практических задач при проектировании технологических процессов.

Автоматизация производства предполагает функционирование многочисленных взаимосвязанных технических средств различных объектов производства на основе компьютерной техники, программного управления, групповой организации производства и мощного специального программного обеспечения, которое определяется обычно, как CAD/CAM/CAE. В таком производстве особое значение приобретает оборудование с числовым программным управлением (ЧПУ), позволяющее не только автоматическое управление обработкой деталей, но и программирование такой обработки дистанционно с передачей управляющих программ по специальным каналам связи.

Широкое применение гибочного оборудования с ЧПУ расширяет технологические возможности изготовления деталей, обеспечивает высокую стабильность процессов формообразования и является технологическим гарантом высокого качества деталей. Создание точных математических моделей и научно-обоснованных методов расчета технологических параметров является основой для автоматизированного проектирования формообразующей оснастки и настроечных (программируемых) параметров, что значительно сокращает трудоемкость и сроки технологической подготовки производства. Учет различных факторов, порождающих погрешности формообразования (пружинение, физическая и геометрическая нелинейность и др.) повышает точность изготовления деталей и, следовательно, сокращает объем доводочных работ, повышает производительность труда и уменьшает технологическую себестоимость изделий.

Например, изготовление технологической оснастки на станках с ЧПУ позволяет снизить трудоемкость изготовления в 6–8 раз, учет пружинения снижает трудоемкость доводочных работ в 2,5–3 раза, комплексная автоматизация проектирования и изготовления технологической оснастки в ЗШП позволяет снизить технологическую себестоимость деталей в 3,5–4 раза.

Учебное пособие посвящено одному из основных факторов, влияющих на точность формообразования, – геометрической нелинейности в различных процессах гибки тонкостенных деталей (свободная гибка, гибка-обтяжка, гибка-прокатка, гибка-намотка и др.). При написании учебного пособия использовались материалы научных исследований, проведенных в разное время на кафедре «Производства летательных аппаратов» КНИТУ-КАИ.

Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ГИБКИ ТОНКОСТЕННЫХ ДЕТАЛЕЙ

§ 1.1. Анализ номенклатуры тонкостенных деталей авиатехники

Тонкостенные детали одинарной кривизны входят в конструкцию изделий самого различного назначения и составляют в машиностроении по номенклатуре и объему один их наиболее распространенных классов [21, 53, 54, 57]. Наибольшее применение они находят в самолето- и судостроении, нефтехимическом и сельскохозяйственном машиностроении и в других областях. На рис. 1.1 приведены характерные разновидности тонкостенных деталей.

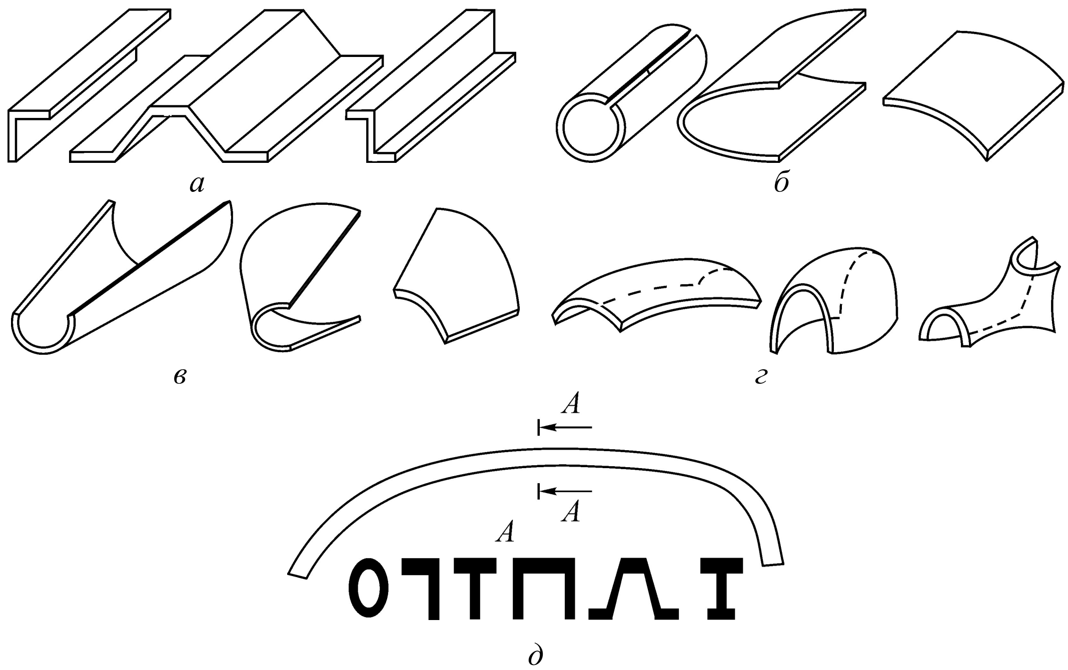


Рис. 1.1. Типовые тонкостенные детали из листов и профилей:
а – угловые; *б* – цилиндрические; *в* – конические; *г* – выпуклые и выпукло-вогнутые;
д – криволинейные из профилей

Силовая конструкция основных агрегатов планера современных ЛА чаще всего выполняется в виде оболочки, подкрепленной продольным и поперечным набором из профилей [46, 76]. Оболочечные и профильные детали являются наиболее характерными для самолетостроения и занимают большую долю по трудоемкости изготовления. Габариты рассматриваемых деталей измеряются в широком диапазоне – от малых до больших размеров. Кроме того, в конструкциях ЛА используется большое количество деталей из труб, которые являются элементами трубопроводных систем различного функционального назначения. Конструкции ЛА проектируются из расчета минимального веса, что достигается максимальным приближением их к равнопрочной. Поэтому наблюдается большое количество деталей переменного сечения. Переменность сечения часто продиктована также конструктивно-технологическими соображениями.

В качестве основных конструкционных материалов в авиастроении применяются алюминиевые и титановые сплавы, коррозионно-стойкие, жаростойкие и жаропрочные стали, все шире внедряются композиционные материалы [22, 68, 76]. Например, увеличивается доля титановых сплавов в конструкциях авиационной техники всех типов и назначений. В планере самолетов фирмы «Боинг» (Боинг 727 – Боинг 767 – Боинг 777 – Боинг 787) динамика применения титановых сплавов выглядит следующим образом: 1 – 3 – 10 – 20 % соответственно [1]. В современном авиационном двигателе доля титановых сплавов составляет более 30–35 %. В последнее время по всем группам материалов достигнуто существенное улучшение их свойств. Создаются новые модификации, достигающие пониженной плотности, повышенной жесткости и прочности, с высокими ресурсными характеристиками при возможности изготовления их них широкой номенклатуры изделий, например, алюминиевые-литиевые сплавы нового поколения. Перспективные материалы и технологии позволяют обеспечить снижение на 20 % массы планера современных самолетов и вертолетов, повышение их ресурса с 15–20 до 40 тысяч часов, увеличение межремонтного срока с 6–8 до 10–12 лет. Соответственно авиационные двигатели при этом имеют улучшенные на 10–15 % весовые характеристики и топливную экономичность, повышенные в 1,5–2 раза надежность и ресурс и уменьшенную в 3 раза эмиссию. Более полные сведения о материалах, применяемых для листовых и профильных деталей ЛА, содержатся в справочной литературе. Основные принципы выбора материала для авиационных конструкций приведены в специальной литературе [1, 68].

Специфические свойства новых материалов обусловливают использование нового оборудования и новых технологических процессов, т.е. требуют существенной перестройки производства.

Классификация тонкостенных деталей из листового и профильного материала, проведенная по конструктивно-технологическим признакам, позволяет сформировать группы деталей с одинаковыми технологическими признаками изготовления [2, 16, 20, 21, 49, 50, 53, 54, 57, 76]. Конструктивно-технологический код деталей создает основу механизации и автоматизации технологической подготовки производства с применением компьютеров на базе комплексной типизации и унификации технологических процессов и средств технологического оснащения ЗШП [2, 9, 46, 54, 68].

§ 1.2. Основные способы и специальные средства формообразования криволинейных тонкостенных деталей

Методы и средства пластического формообразования тонкостенных криволинейных деталей зависят от формы и габаритов контура, типа поперечного сечения, качества материала, коэффициента его использования, точности изделия и масштабов производства.

За последние годы разработаны и внедрены в производство многие виды технологического оборудования с ЧПУ, что значительно облегчает изготовление деталей, исключает ручные доводочные операции, позволяет изготавливать детали значительно больших габаритов и с более высокой точностью. На рис. 1.2–1.4 приведены некоторые принципиальные схемы способов формообразования криволинейных деталей из листового и профильного материала, широко используемых в авиастроении. Эти способы характеризуются различными схемами нагружения, видами инструмента, оснастки, оборудования и обладают определенными технологическими возможностями [21, 22, 27, 50, 53, 54, 76].

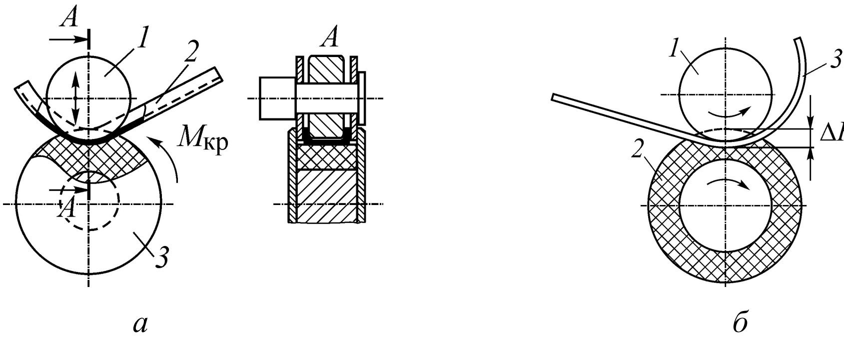


Рис. 1.2. Гибка на ротационной машине с эластичным покрытием валка заготовок: *а* – профильных; *б* – листовых; *1* – жесткий валок; *2* – валок с эластичным покрытием; *3* – заготовка

Из всех методов гибки, применяемых в авиастроении, особую группу составляют свободная гибка (рис. 1.3, *б*) и гибка-прокатка (рис. 1.3, *в*). Они не требуют специальной оснастки и могут быть реализованы на универсальном оборудовании (детали различной формы получаются путем изменения настроечных параметров гибочной оснастки), что очень важно при мелкосерийном производстве.

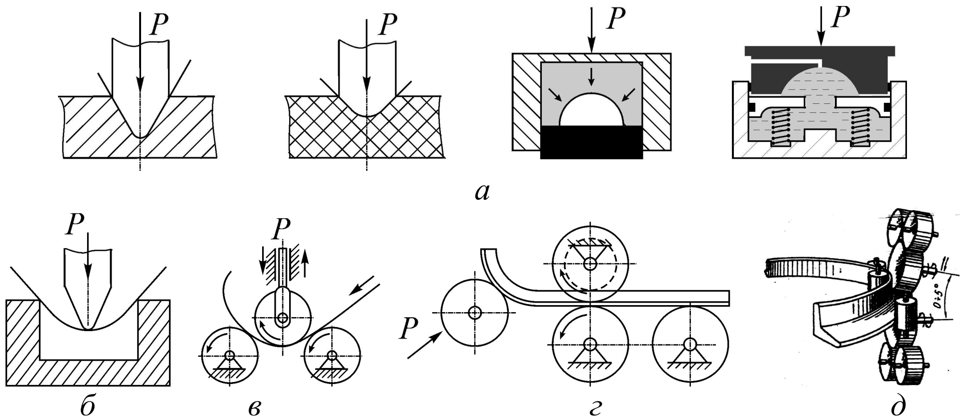


Рис. 1.3. Способы пластического формообразования тонкостенных деталей из листового и профильного материалов:
а и *б* – сопряженная и свободная гибки соответственно; *в* и *г* – гибка-прокатка на валковых машинах и роликовых станках соответственно; *д* – гибка-раскатка; *е* – обтяжка листовых деталей; *ж* – гибка проталкиванием через фильеру; *з* – ротационно-радиальная раздача и профилирование кольцевых деталей; *и* – гибка-намотка с растяжением; *к* – гибка-обтяжка с растяжением; *л* – гибка впередвижку (см. также с. 9)

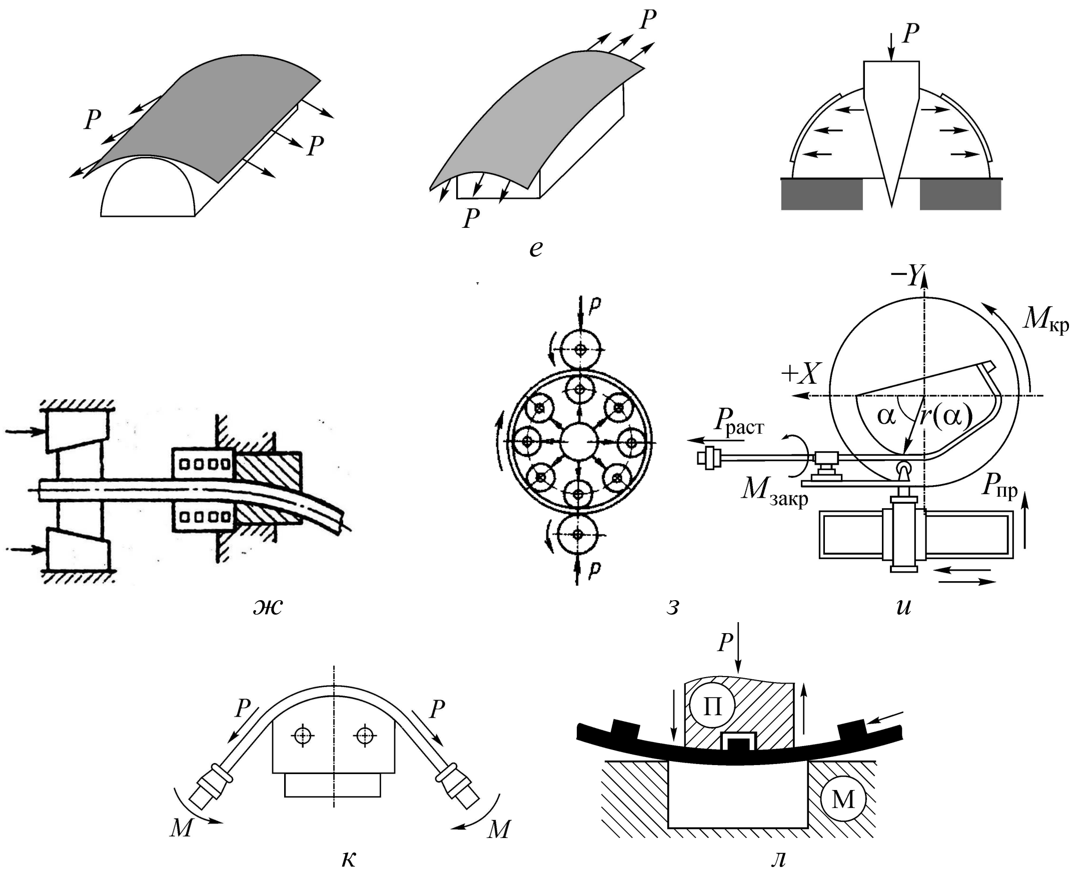


Рис. 1.3. Окончание

При изготовлении трубопроводов из цельной заготовки (в качестве альтернативы сварке и резьбовому соединению) все чаще применяется гибка труб (рис. 1.4).

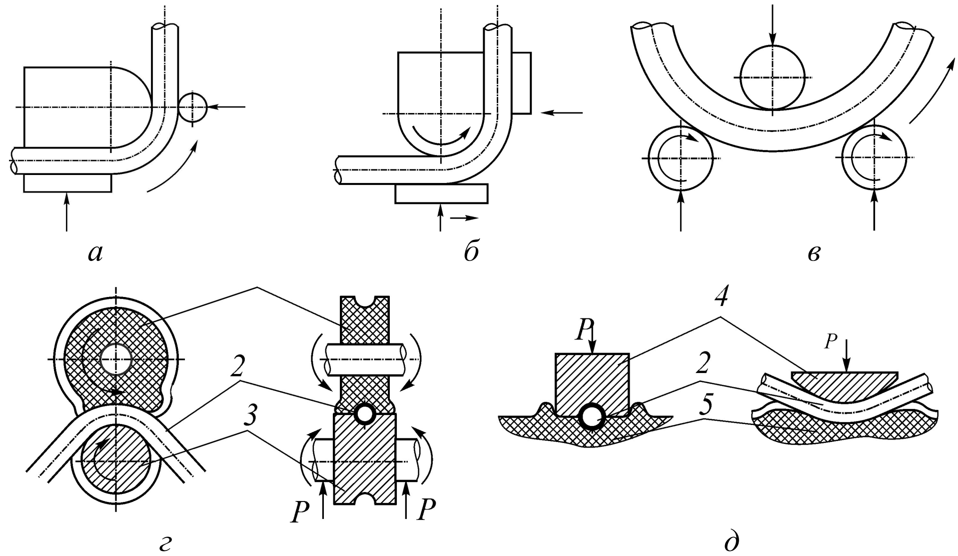


Рис. 1.4. Способы гибки трубчатых заготовок:
а – обкаткой (максимальный угол 180°); *б* – намоткой (максимальный угол 180°); *в* – в роликах (максимальный угол 360°); *г* – прокаткой между жестким валком и валком с эластичным покрытием; *д* – вдавливание жестким инструментом в эластичную среду,
1 – эластичный валок; *2* – изгибаемая труба; *3* – жесткий валок; *4* – жесткая оправка;
5 – эластичная среда

При разработке технологических процессов изготовления деталей любым из приведенных на рис. 1.2 – 1.4 способов возникает ряд технологических задач, от правильного решения которых зависит точность и экономичность изготовления тонкостенных деталей. Важнейшими являются следующие задачи [53, 54].

1. Расчет силовых факторов процесса формообразования. Необходимость в определении силовых параметров возникает при проектировании технологического оборудования для осуществления новых способов формообразования, а также при выборе соответствующего по мощности оборудования для формообразования известными способами деталей заданной формы и размеров.

2. Расчет пружинения при пластическом изгибе и изгибе с растяжением. Пружинение уменьшает кривизну деталей после разгрузки по сравнению с ее значением в активной стадии деформирования. Поэтому для получения деталей заданной кривизны необходимо расчетным путем определить величину пружинения и учесть ее в процессе формообразования (рис. 1.5).

3. Определение рациональной формы технологической оснастки и величины параметров настройки оборудования (для оборудования с ЧПУ – программируемые параметры), обеспечивающих изготовление деталей с заданной точностью (т.е. по известной кривизне изгиба необходимо определить обеспечивающие ее образование силовые факторы процесса или параметры настройки оборудования).

Постановка приведенных задач обусловлена зависимостью формы деталей от формы сопряжения с ними оснастки (например, при гибке в инструментальных штампах (см. рис. 1.3, *а*), гибке-обтяжке с растяжением (см. рис. 1.3, *к*)), а также от параметров настройки оборудования (свободная гибка и гибка-прокатка). Поэтому форма оснастки и величина параметров настройки должны определяться с учетом факторов, влияющих на точность процесса формообразования.

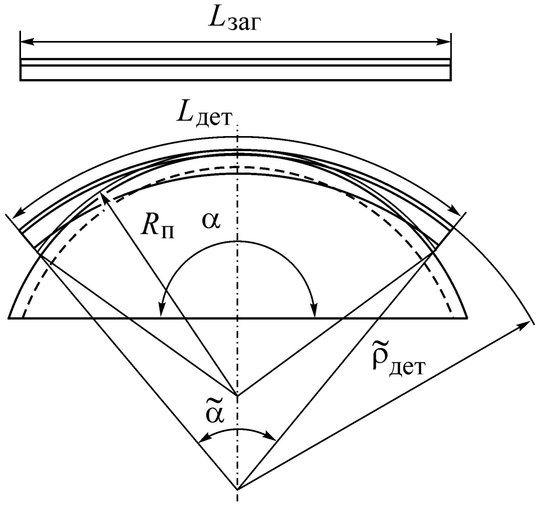


Рис. 1.5. Упругая отдача при гибке деталей из профилей

С различными методиками расчета технологических параметров процессов пластического формообразования тонкостенных деталей ЛА можно ознакомиться в работах [6–11, 15, 16, 18–23, 27, 32, 34, 36, 37, 39, 49–54, 57, 61, 63, 66–68, 72, 76]. В них, кроме анализа существующих технологических процессов и оборудования, рассматриваются также перспективные направления совершенствования существующих и разработки новых методов пластического формообразования тонкостенных деталей, основанные, в первую очередь, на повышении точности режимов формообразования, интенсификации режимов обработки заготовок, уровня механизации и автоматизации работ.

В настоящее время технологические операции по изготовлению деталей выполняются на специализированном оборудовании, оснащенном, как правило, современными системами ЧПУ. Качество формообразования заготовок зависит от правильности проектирования оснастки и технологии процесса. Технология формообразования определяется программой управления рабочими органами оборудования. Автоматизация процессов производства с применением устройств ЧПУ, создание систем автоматизированного проектирования (САПР) требуют математического обеспечения, создаваемого на основе разработки теории пластического формообразования с учетом основных факторов, влияющих на точность изделия.

В качестве примера нового оборудования рассмотрим пресс листогибочный гидравлический с ЧПУ усилием 630 кН модель ИП 1428Ф3 (рис. 1.6), предназначенный для многопереходной свободной гибки листового материала. Программируются: величина закрытой высоты и перемещение заднего упора (ширина отгибаемой кромки). Набор программы осуществляется на пульте системы программного управления. Возможно программирование полного цикла изготовления детали по всем переходам с заданной точностью. Для обеспечения постоянного угла гибки по всей длине детали в столе пресса смонтирован механизм компенсации прогиба стола. Листогиб с синхронизацией передвижения двух гидроцилиндров работает по программе, записываемой с сенсорной панели пульта управления, установленного на фронтальной плоскости листогиба.

Программа с полуавтоматическим режимом работы в табличном виде вводится по кадрам: глубина погружения пуансона в матрицу от верхней плоскости матрицы с точностью 0,01 мм; величина расстояния горизонтального упора от линии гиба с точностью 0,1 мм; величина расстояния вертикального упора от датчика опорной точки с точностью 1 мм; установка одного из трех ручьев матрицы путем передвижения матрицы в горизонтальной плоскости. В памяти системы управления листогибом закладывается 10 программ по 10 кадров каждая. Это означает, что на листогибе можно изготовить деталь с количеством гибов до 10 за один цикл обработки и повторить изготовление аналогов из одинаковых заготовок сколько угодно раз. На ввод программы гиба затрачивается незначительное время. В наладочном режиме с пульта управления листогиба задается и корректируется глубина погружения пуансона в матрицу для определения нужного угла гиба, а также величина расстояния до матрицы для перехода с быстрого на рабочий ход.

Рис. 1.6. Общий вид листогибочного гидравлического пресса модели ИП 1428Ф3

§ 1.3. Напряженно-деформированное состояние при упруго-пластическом изгибе тонкостенных заготовок

Технологические процессы пластического формообразования тонкостенных криволинейных деталей основаны на создании в заготовке детали неравномерных по высоте сечения напряжений и деформаций. Например, при гибке-прокатке и свободной гибке это достигается при принудительном изгибании заготовки на специальном оборудовании. Необходимо подчеркнуть, что деталь необратимо изменит свою форму только лишь в случае упруго-пластического напряженно-деформированного состояния.

При простом растяжении (сжатии) точным аналитическим выражением истинной диаграммы зависимости напряжений от деформаций ($\sigma - \varepsilon$) является аппроксимация ее линейно-степенной функцией [50]:

$$\sigma = K\varepsilon^n \text{ при } \varepsilon > \varepsilon_p;\ \sigma = E\varepsilon \text{ при } 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_p, \qquad (1.1)$$

где E – модуль упругости материала; ε_p, σ_p – точка перехода линейной зависимости в степенную, $\varepsilon_р = (K / E)^{1/(1-n)}$, $\sigma_р = E\varepsilon_р$; K, n – константы упрочнения, которые определяются через механические характеристики материала, $n = \lg(\sigma_в / \sigma_т)/\lg(\varepsilon_в / \varepsilon_т)$, $K = \sigma_в / \varepsilon_в^n$; $\sigma_т$, $\varepsilon_т$ – координаты точки условного предела текучести; $\sigma_в$, $\varepsilon_в$ – координаты предела прочности.

Точность линейно-степенной аппроксимации $\sigma - \varepsilon$ сопоставима с точностью определения механических констант материала, что совершенно достаточно для практики расчетов. При изгибе на большую кривизну зона упругих деформаций относительно мала и без большой погрешности степенную зависимость можно распространить на всю высоту сечения.

В некоторых схемах пластического формообразования аналитическое решение при степенной зависимости $\sigma - \varepsilon$ не достигается. В этом случае используют линейно-полигональную зависимость $\sigma - \varepsilon$, имеющую следующий вид: $\sigma = E\varepsilon$ при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_p$; $\sigma = B\varepsilon + C$ при $\varepsilon > \varepsilon_p$, где $B = (\sigma_в - \sigma_т)/(\varepsilon_в - \varepsilon_т)$; $C = \sigma_т - B\varepsilon_т$; $\varepsilon_p = C/(E - B)$; $\sigma_p = E\varepsilon_p$.

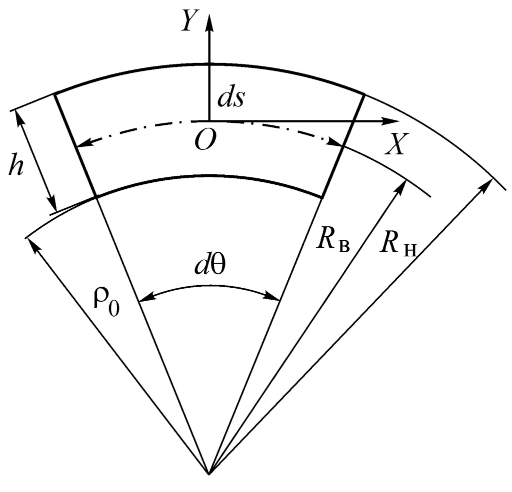


Рис. 1.7. Изогнутый элемент бесконечно малой длины

Пластический изгиб является формообразующим процессом, в результате которого плоская или прямолинейная заготовка превращается в изделие с заданно остаточной кривизной. Изогнутое состояние заготовки характеризуется кривизной наружной $(1/R_н)$ и внутренней $(1/R_в)$ поверхностей, кривизной нейтрального слоя (κ_0) и центральным углом загиба θ, образованным нормалями к касательным в концевых точках дуги нейтрального слоя (рис. 1.7). Будем рассматривать изгиб на большие относительные радиусы кривизны $\bar{\rho} = \rho / h > 2$, при которых взаимное нажатие волокн друг на друга пренебрежимо мало. Поэтому при пластическом изгибе справедлива гипотеза плоских сечений. Благодаря этому тангенциальная деформация произвольного волокна пропорциональна кривизне нейтрального слоя $\varepsilon = \kappa_0 \rho_0$, где $\kappa_0 = 1/\rho_0$. После разгрузки (снятия внешних сил) указанные параметры изменяются вследствие пружинения материала, приобретая остаточные значения $\tilde{R}_{н}$, $\tilde{R}_{в}$, $\tilde{\rho}_0$, $\tilde{\theta}$ в полученной детали.

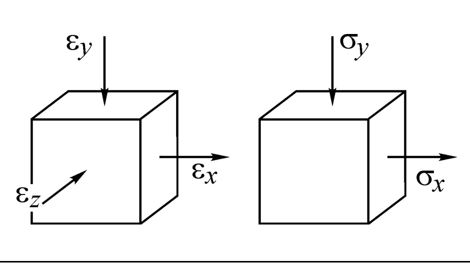
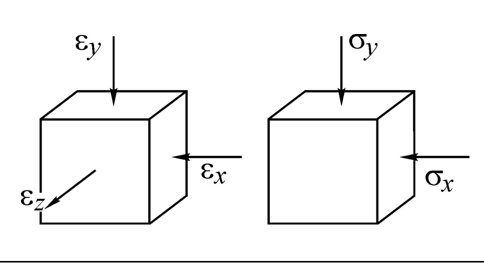
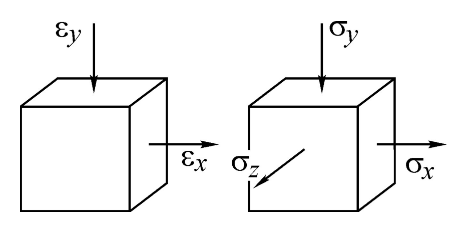
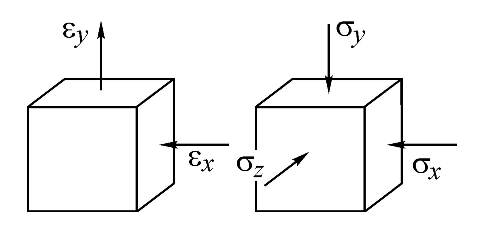
Напряженно-деформированное состояние (НДС) при упруго-пластическом изгибе зависит от схемы нагружения, физико-механических свойств материала, геометрических параметров сечения (в том числе от соотношения размеров поперечного сечения изгибаемого элемента) и кривизны изгиба элемента. Чистый изгиб элемента предполагает отсутствие касательных напряжений в поперечных сечениях, а доминирующими являются нормальные напряжения в тангенциальном направлении.

В табл. 1.1 показаны схемы НДС при чистом изгибе узких и широких заготовок в системе координат с началом на нейтральной линии и осями Oz, Oy, Ox, направленными, соответственно, по оси поворота сечения, нормали и касательной к нейтральной линии [54]. При изгибе широких заготовок ($b > 20h$) в формулах (1.1), а также во всех приводимых далее формулах величины E и K надо заменить на приведенные модуль упругости и константу упрочнения:

$$E_{п} = \frac{E}{1-\mu^2} = \frac{4}{3}E; \; K_{п} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{n+1} K,$$

где μ – коэффициент Пуассона.

Таблица 1.1

Поперечное сечение	Зоны деформации по высоте сечения	
	Растянутая от изгиба зона ($y > 0$)	Сжатая от изгиба зона ($y < 0$)
Узкое		
Широкое		

Таким образом, при пластическом изгибе широких и узких заготовок соотношение между напряжениями в волокнах элемента и деформациями их от изгиба выражаются аналогичными по структуре формулами. Различие состоит лишь в величинах $E_{\text{п}}$ и $K_{\text{п}}$. Отмеченное обстоятельство дает основание в дальнейшем рассматривать единую теорию пластического изгиба широких и узких заготовок.

§ 1.4. Расчет технологических параметров процесса гибки деталей из листового и профильного материала

Нейтральный слой (н.с.) разделяет зоны растяжения и сжатия при изгибе, и его положение определяется из условия равенства нулю проекции внутренних сил на ось x:

$$\int_F \sigma_x dF = 0, \tag{1.2}$$

где F – площадь поперечного сечения заготовки произвольной формы.

Для сечения комплексной формы, когда нейтральный слой и упругое ядро $2y_{\text{р}}$ $(y_{\text{р}} = \varepsilon_{\text{р}} \kappa_0)$ попадают целиком на стенку профиля (рис. 1.8), после интегрирования выражения (1.2) получим [54]:

$$b_1\left[y_{\text{н}}^{n+1} - (h_1 - y_{\text{н}})^{n+1}\right] + b_2\left[(y_{\text{н}} + h_2)^{n+1} - y_{\text{н}}^{n+1}\right] -$$

$$- b_3\left[(h_1 + h_3 - y_{\text{н}})^{n+1} - (h_1 - y_{\text{н}})^{n+1}\right] = 0. \tag{1.3}$$

Отметим, что при изгибе ось поворота сечений смещается относительно центра тяжести сечения в сторону его большей ширины на величину $y_{\text{ц}} = y_{\text{н}} - y_{\text{цт}}$. Поскольку начало координат помещено на нейтральном при упруго-пластическом изгибе слое, то по отношению к нему центр тяжести сечения может иметь положительную ординату смещения $(+y_{\text{ц}})$, когда более широкая его сторона расположена в зоне сжатия от изгиба, и отрицательную $(-y_{\text{ц}})$ при расположении ее в зоне растяжения.

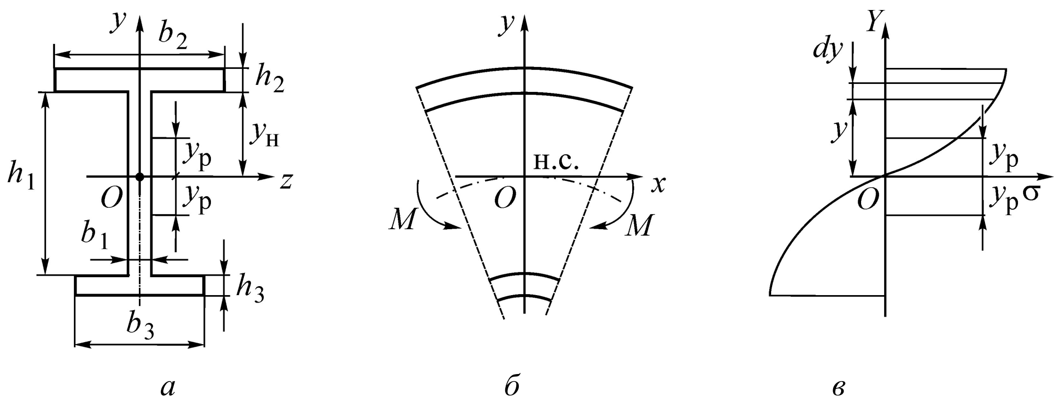


Рис. 1.8. Упруго-пластический изгиб элемента сложного сечения (комплексной формы): *а* – поперечное сечение элемента; *б* – схема нагружения; *в* – эпюра поперечных сил

Таким образом, при упруго-пластическом изгибе радиусы кривизны нейтрального слоя ρ_0 и слоя, проходящего через центр тяжести сечения $\rho_ц$, связаны соотношением $\rho_ц = \rho_0 \pm y_ц$.

Уравнение (1.3) для нахождения положения нейтрального слоя $y_н$ является нелинейным. Решить его можно, используя метод итераций [24, 69], предварительно представив уравнение (1.3) в виде:

$$y_н = \varphi_1(y_н). \tag{1.4}$$

Для более простой формы поперечного сечения, которая является составной частью комплексной формы, конкретное выражение (1.2) получают приравниванием нулю отсутствующих значений параметров b_i, h_i. Очевидно, что для сечений, имеющих две ортогональные оси симметрии, одна из которых – ось z перпендикулярна плоскости изгиба и будет принадлежать нейтральному слою.

Связь между кривизной нейтрального слоя и изгибающим моментом в конце деформирования, т.е. перед снятием деформирующих усилий, определяется из условия равенства внешнего M_z и внутреннего моментов:

$$M_z = \int_F \sigma_x y dF. \tag{1.5}$$

Разделяя упругую и пластическую зоны сечения, получим:

$$M_z = \kappa_0 E J_{упр} + \kappa_0^n K J_{пл}, \tag{1.6}$$

где $J_{упр} = \int_{F_{упр}} y^2 dF$; $J_{пл} = \int_{F_{пл}} y^{n+1} dF$.

Зависимость (1.6) нелинейна и справедлива для любой формы сечения, моменты инерции $J_{упр}$ и $J_{пл}$ являются геометрическими характеристиками сечения, зависящими от радиуса кривизны ρ_0. Для комплексной формы (см. рис. 1.8) имеем

$$J_{упр} = \frac{2}{3} b_1 y_p^3;\ J_{пл} = \frac{1}{n+2}\Big\{ b_1\Big[(h_1 - y_н)^{n+2} + y_н^{n+2} - 2y_р^{n+2} \Big] +$$

$$+ b_2\Big[(y_н + h_2)^{n+2} - y_н^{n+2} \Big] + b_3\Big[(h_1 + h_3 - y_н)^{n+2} - (h_1 - y_н)^{n+2} \Big]\Big\}. \tag{1.7}$$

Выражение (1.5), как и (1.2), в зависимости от положения упругого ядра сечения может принимать различные варианты формы записи для каждого конкретного сочетания нагрузки и формы сечения. Например, для прямоугольной формы сечения из (1.7) получим:

$$J_{упр} = \frac{2}{3} b y_р^3;\quad J_{пл} = \frac{2b}{n+2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{n+2} - y_р^{n+2} \right]. \tag{1.8}$$

После снятия внешней нагрузки под действием неуравновешенного внутреннего момента происходит обратная по знаку упругая деформация элемента, изменяющая созданную кривизну изгиба. При этой деформации сечения поворачиваются относительно оси, проходящей через их центр тяжести, и кривизна нейтрального при разгрузке слоя уменьшается на величину $\kappa'_{\text{ц}} = M / EJ_z$, где J_z – момент инерции сечения относительно центральной оси z, перпендикулярной к плоскости изгиба.

Остаточная после пружинения кривизна $\tilde{\kappa}_{\text{ц}}$ $(\tilde{\kappa}_{\text{ц}} = 1/\tilde{\rho}_{\text{ц}})$ слоя, проходящего через центры тяжести поперечных сечений элемента с одной осью симметрии, равна разности ее значений при нагружении и разгрузке:

$$\tilde{\kappa}_{\text{ц}} = \kappa_{\text{ц}} - \kappa'_{\text{ц}} = \kappa_{\text{ц}} - \left(\kappa_0 \frac{J_{\text{упр}}}{J_z} + \frac{KJ_{\text{пл}}}{EJ_z} \kappa_0^n \right). \tag{1.9}$$

Эта формула по известной кривизне пластического изгиба κ_0 (или $\kappa_{\text{ц}}$) позволяет определить кривизну $\tilde{\kappa}_{\text{ц}}$, остающуюся после пружинения.

Важная в технологическом отношении задача состоит в определении кривизны изгиба κ_0 в активной стадии деформации, на которую проектируется формообразующая оснастка или производится настройка гибочного оборудования с тем, чтобы после пружинения получить деталь с заданной кривизной $\tilde{\kappa}_0 = 1/\tilde{\rho}_0$. С этой целью преобразуем выражение (1.9) к следующему виду:

$$\frac{1}{\tilde{\rho}_0 \pm y_{\text{ц}}} = \frac{1}{\rho_0 \pm y_{\text{ц}}} - \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{J_{\text{упр}}}{J_z} + \frac{1}{\rho_0^n} \frac{KJ_{\text{пл}}}{EJ_z} \right). \tag{1.10}$$

В случае изгиба элемента с двойной симметрией поперечного сечения ось поворота сечения проходит через его центр тяжести как при нагружении, так и при разгрузке, поэтому параметр смещения $y_{\text{ц}} = 0$. Тогда предыдущие формулы упрощаются и примут вид

$$\tilde{\kappa}_0 = \kappa_0 - \kappa'_0 = \kappa_0 \left[1 - \left(\frac{J_{\text{упр}}}{J_z} + \frac{KJ_{\text{пл}}}{EJ_z} \kappa_0^{n-1} \right) \right], \tag{1.11}$$

где $\tilde{\kappa}_0 = 1/\tilde{\rho}_0$; $\kappa'_0 = M / EJ_z$.

Для решения технологической задачи определения кривизны в конце активной стадии деформирования κ_0 по заданной остаточной кривизне $\tilde{\kappa}_0$ выражения (1.10) и (1.11) должны быть приведены к виду

$$\kappa_0 = \varphi_2(\tilde{\kappa}_0; \kappa_0), \tag{1.12}$$

удобному для применения метода итераций [24]. Численное решение уравнений (1.4) и (1.12) относительно $y_{\text{н}}$ и κ_0 может быть выполнено на компьютере с любой наперед заданной точностью. Алгоритм расчета представлен на рис. 1.9, где δ – допустимая точность вычислений.

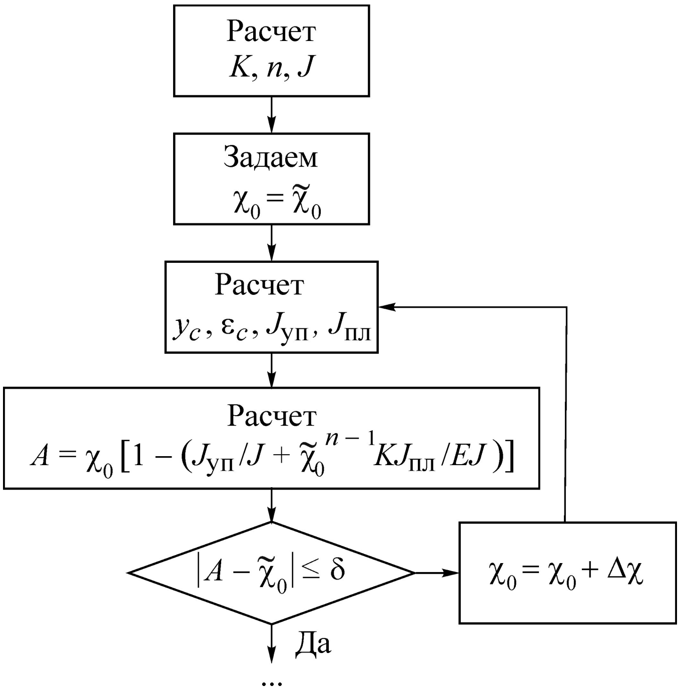


Рис. 1.9. Алгоритм расчета кривизны в активной стадии нагружения

Методики расчета технологических параметров формообразования деталей из профилей методом пластического изгиба с растяжением при простом нагружении и при различных схемах сложного нагружения приведены в работах [50, 51, 53, 54].

При пластическом формообразовании тонкостенных деталей из листового и профильного материала могут появиться нежелательные побочные деформации (рис. 1.10), вызванные различными причинами. К их числу относятся: особенности формы поперечных сечений, специфика НДС, дефекты формообразующей оснастки, неправильная настройка оборудования и др. Искажение изогнутых деталей трудно поддается правке, приводит к увеличению объема ручных доводочных работ, что увеличивает себестоимость изготовления деталей.

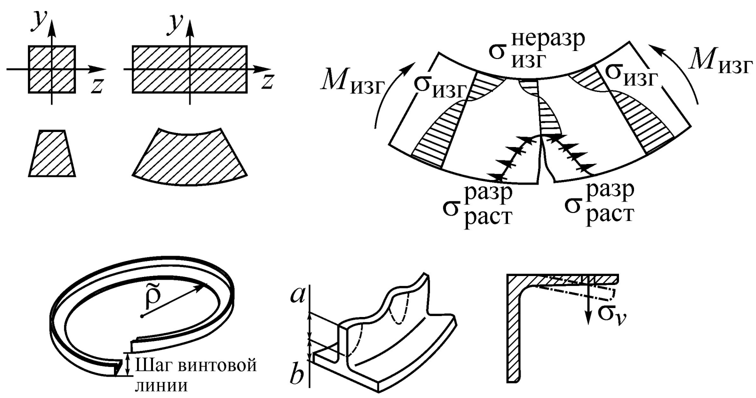


Рис.1.10. Нежелательные побочные дефекты при гибке тонкостенных деталей:
а – искажение поперечного сечения узкой и широкой заготовок; *б* – разрушение наиболее деформированного волокна; *в* – спиральность изогнутого несимметричного профиля; *г* – образование гофров в сжатой зоне профиля; *д* – малкованность профиля

Расчетное прогнозирование возможности появления нежелательных побочных деформаций играет важную роль для грамотного назначения режимов формообразования названных деталей. Физическая природа появления указанных побочных деформаций, количественная их оценка, технологические приемы их недопущения или их ликвидации приведены в работах [16, 21–23, 27, 36, 49, 50, 53, 54, 66–68, 76] и др.

Получение деталей с необходимой степенью точности без появления побочных деформаций достигается за счет выбора оптимальной схемы деформирования и способа интенсификации процесса формообразования (температурной, силовой и пр.). Технологические параметры выбранного процесса должны быть такими, чтобы в процессе формообразования не допустить появления неисправимого брака.

§ 1.5. Компьютерное проектирование технологии пластического формообразования криволинейных тонкостенных деталей

Применение компьютерных технологий в технологической подготовке производства требует разработки математических моделей для решения различных задач при проектировании технологических процессов. Оптимальный технологический процесс должен обеспечить получение детали за минимальное число переходов с обеспечением требуемых деформаций во всех элементах заготовки без превышения предельно-допустимых деформаций в опасных сечениях.

Гибка – одна из наиболее сложных и трудоемких операции технологического процесса изготовления деталей, которая выполняется на специализированном оборудовании с ЧПУ. Насущными проблемами и целями в области технологии формообразования гибкой (или обтяжкой) на данный момент являются [9, 15, 63]:

– оптимальное управление гибочным оборудованием;

– проектирование гибочной оснастки (или параметров настройки оборудования для несопряженных схем гибки) с учетом кинематических возможностей оборудования;

– предсказание вероятности появления технологических отказов (нежелательных побочных деформаций) и оценка качества деталей;

– прогноз влияния эффекта упругой разгрузки и корректировка гибочной оснастки на величину пружинения в случае гибки по сопряженной схеме.

Проектирование гибочной оснастки и технологии формообразования составляет большой процент трудоемкости в общем объеме производства подобных деталей. Подготовка технологической оснастки и управляющих программ для гибочного оборудования в настоящее время осуществляется автоматически с помощью компьютерных систем (САПР), базирующихся на моделировании процесса формообразования.

Компьютерное проектирование технологии формообразования тонкостенных деталей методом обтяжки происходит по схеме, приведенной на рис. 1.11, с учетом входных данных: геометрии детали; данных о материале заготовки (кривая упрочнения); кинематической модели оборудования [63].

Геометрия детали задает окончательную требуемую форму детали. Основываясь на форме детали, проектируют оснастку для ее изготовления – гибочный пуансон. На основании данных о материале заготовки строится математическая модель материала, которая позволит в дальнейшем (при вычислениях) предсказать его свойства и поведение.

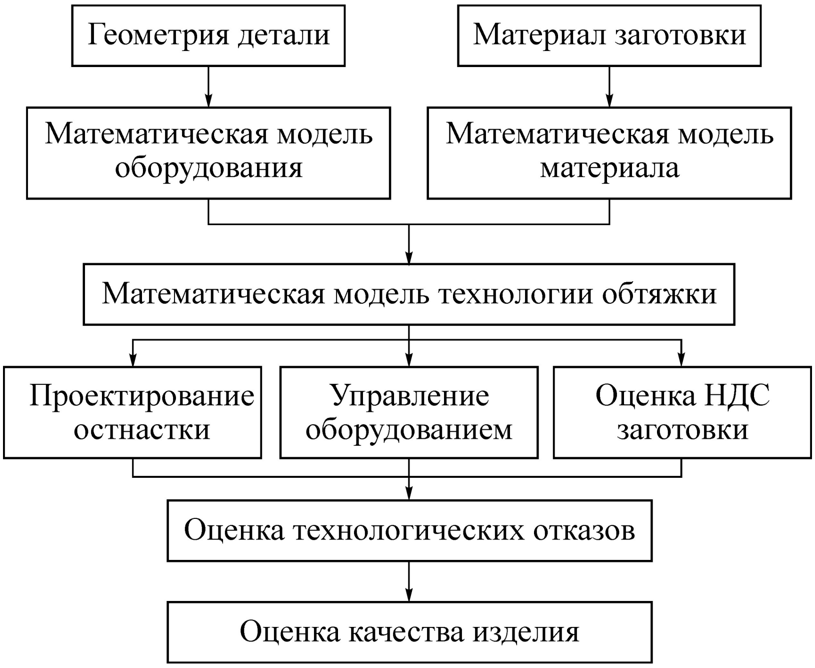


Рис. 1.11. Структура схемы автоматизированной системы проектирования технологии обтяжки

Кинематическая модель оборудования позволяет построить операционную модель, т.е. модель, позволяющую составить и тестировать управляющие программы для гибочного оборудования, проверять допустимость тех или иных манипуляций, детектировать превышение силовых или кинематических возможностей оборудования и т.д.

На основании перечисленных данных и моделей выполняется автоматическое проектирование управляющей программы, которая исключает появление нежелательных побочных деформаций.

Автоматизированная система проектирования технологии (АСТПП) формообразования тонкостенных деталей на основе единой информационной среды и с использованием сетевых информационных технологий реализуется в ЗШП в виде программно-методических комплексов (ПМК) технологической подготовки производства [2, 68].

Компьютерное моделирование технологии, выполненное на основе математического моделирования процесса формообразования, позволяет:

– значительно сократить материальные расходы и время для подготовки производства;

– уменьшить, а иногда и полностью исключить дорогостоящий натурный (физический) эксперимент;

– предсказать вероятность технологических отказов и подсказать необходимость использования технологических приемов борьбы с браком;

– исключить ошибки в проектировании гибочной оснастки, скорректировать в случае необходимости оснастку на величину пружинения.

§ 1.6. Геометрическая нелинейность при поперечном пластическом изгибе

Формообразование тонкостенных деталей одинарной кривизны из листового и профильного металла гибкой в штампах, гибкой-прокатной на валковых и роликовых станках и некоторыми другими методами (гибка-обтяжка и гибка-намотка) по схемам нагружения идентичны поперечному упруго-пластическому изгибу консоли или двухопорной балки. Таким образом, технологическая задача определения деформационных параметров формообразуемых деталей сводится к рассмотрению упруго-пластического изгиба элемента при его нагружении до образования необходимой кривизны изгиба в соответствующих сечениях [50].

Наибольшую сложность при анализе поперечного упругопластического изгиба вызывает геометрическая нелинейность процесса, обусловленная большими угловыми и линейными перемещениями тонкой заготовки при ее нагружении. Задачи данного типа являются статически неопределимыми. При их решении требуется дополнительно привлекать уравнения изогнутой оси заготовки в декартовой системе координат:

$$\frac{y''}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{3/4}} = \kappa\left(M\right), \tag{1.13}$$

где y', y'' – первая и вторая производные по x.

В дуговых координатах уравнение (1.13) записывается

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \kappa(M), \tag{1.14}$$

где ϑ – угол наклона касательной в текущей точке изогнутой заготовки; s – длина дуги изогнутой заготовки, отсчитанная от некоторой точки, принятой за начало.

Несопряженные схемы формообразования тонкостенных деталей методами гибки (свободная гибка и гибка-прокатка) сопровождаются большими угловыми и линейными перемещениями поперечных сечений заготовки в процессе нагружения и разгрузки. При этом существенно изменяются направления действия и точки приложения внешних деформирующих сил в неподвижной системе координат. Следствием данной особенности является так называемая геометрическая нелинейность, при которой справедливы следующие утверждения:

а) гипотеза начальных размеров неприменима, условие равновесия изогнутого элемента необходимо записывать с учетом конечного формоизменения;

б) в любом сечении изогнутого элемента внутренние силы и моменты, а также величины перемещений являются нелинейными функциями внешних нагрузок.

В теории гибких стержней задачи, решаемые с учетом геометрической нелинейности, в зависимости от схемы нагружения делятся на определенные классы [65]. К основному классу относятся задачи, в которых распределенная нагрузка отсутствует, а сосредоточенные силы и моменты приложены только по концам элемента, имеющего по длине постоянное сечение и кривизну. При этом произвольными могут быть: концевые опоры; тип формы равновесия (с точками или без точек изгиба, в которых кривизна равна нулю); величина, направление и закон перемещения внешних нагрузок (поступательное, следящее); рабочая длина гибкого элемента может быть переменной за счет проскальзывания на опорах или наматывания на шаблон (гибочный пуансон).

Многие существующие методики расчета настроечных параметров оборудования для реализации гибки листовых и профильных деталей в большинстве случаев базируются на гипотезах, которые существенно упрощают расчетные схемы решаемых задач [23, 27, 49, 66, 67, 76]. Они могут служить для прикидочных расчетов пружинения или для формулировки кинематических требований к гибочным органам проектируемого технологического оборудования. Базой для создания уточненных методик расчета настроечных параметров оборудования, обеспечивающих бездоводочную гибку листовых и профильных деталей, является работа проф. М.И.Лысова [50].

Наличие компьютерной техники характеризует тот факт, что интерес для современного производства будут представлять методики расчета, обеспечивающие высокую точность выходных данных, так как только в этом случае можно существенно повысить производительность труда и снизить себестоимость изготовления деталей, а также загрузить дорогостоящее технологическое оборудование с ЧПУ, которое позволяет реализовывать оптимальные схемы деформирования.

Основная цель работы – создание уточненных и разработка новых методик расчета настроечных (или программируемых) параметров оборудования с учетом геометрической нелинейности для бездоводочной гибки тонкостенных деталей или гибки с последующей минимальной доводкой. Предлагаемые в данном учебном пособии методики расчета настроечных параметров оборудования для гибки листовых и профильных деталей являются достаточно строгими, так как в них сравнительно мало допущений и упрощений. Они ориентированы на применение компьютеров, так как ввиду своей сложности «ручные» расчеты по ним затруднительны.

§ 1.7. Аппроксимация зависимости между кривизной и изгибающим моментом при пластическом изгибе

Зависимость внутреннего изгибающего момента от кривизны нейтрального слоя (1.6) имеет сложный характер и лишь в редких случаях (при упрощенных математических моделях процессов гибки) может быть выражена однозначной аналитической функцией. В основном эту зависимость приходится находить только численными методами в виде конечного множества точек, принадлежащих кривой $M-\kappa$. Решить данную проблему удается за счет соответствующих аппроксимаций зависимости $M-\kappa$, выбор которых зависит от способа решения уравнений (1.13) и (1.14).

Для процессов с большой кривизной изгиба, из-за малости упругого ядра, степенную зависимость $\sigma-\varepsilon$ можно распространить на всю высоту поперечного сечения. В этом случае зависимость (1.6) сводится к виду

$$M_z = \kappa^n K J_{\text{пл}}, \tag{1.15}$$

где $J_{\text{пл}} = \int\limits_{F_{\text{пл}}} y^{n+1} dF -$ геометрический параметр поперечного сечения, аналогичный моменту инерции, который определяется для конкретной формы сечения. Зависимость (1.15) использовалась в работах [50, 53] для нахождения настроечных параметров свободной гибки и гибки-прокатки с учетом геометрической и физической нелинейности.

В работах [51, 57] применялась линеаризация распределения напряжений по высоте сечения профиля комплексной формы (см. рис. 1.8), а именно, линейное изменение напряжений с локальным модулем упрочнения $E_{0\text{р}}$ при $y>0$ и с модулем упругости E при $y<0$. Это позволило получить в явном виде решение задачи по расчету технологических параметров процесса гибки тонкостенных деталей. Полученные формулы являются едиными для всех схем простого и сложного нагружения изгибом с растяжением, своеобразие и различие которых учитываются входящими в формулы соответствующими коэффициентами. Благодаря этому обеспечивается единый алгоритм и программа расчета на компьютере технологических параметров процесса пластического формообразования. Например, для пластического растяжения с изгибом момент внутренних сил в сечении выражается следующей формулой:

$$M = \kappa \sum_{i=1}^{3} b_i \left[E_{0\text{р}} \int\limits_{(y>0)} y^2 dy + E \int\limits_{(y<0)} y^2 dy \right] = B_2 \kappa, \tag{1.16}$$

где $B_2 = \dfrac{1}{3} \Big\{ b_1 \left[E_{0\text{р}} y_{\text{н}}^3 + E(h_1 - y_{\text{н}})^3 \right] + b_2 E_{0\text{р}} \left[(h_2 + y_{\text{н}})^3 - y_{\text{н}}^3 \right] +$

$+ b_2 E \left[(h_1 - v + h_3)^3 - (h_1 - y_{\text{н}})^3 \right] \Big\};$

$$y_{\text{н}} = B_1 - \left(B_1^2 - D_1\right)^{1/2}; \;\; B_1 = \frac{b_1h_1 + b_2h_2 + b_3h_3}{1 - E_{0\text{р}} / E};$$

$$D_1 = \frac{b_1h_1^2 - b_2h_2^2E_{0\text{р}} / E + b_3(2h_1h_2 + h_3^2)}{1 - E_{0\text{р}} / E}.$$

Для данного случая остаточная кривизна вычисляется по формуле $\tilde{\kappa} = \kappa\left(1 - B_{21}/EJ\right)$. Соответственно для получения детали с заданной кривизной формообразующая оснастка с учетом пружинения материала должна иметь кривизну $\kappa = \tilde{\kappa}/\left(1 - B_2/EJ\right)$. В работе [52] с использованием зависимости (1.16) исследовалась деформация гибкого элемента при сложном нагружении пластическим растяжением и изгибом с учетом геометрической нелинейности. Найденные в ней формулы для вычисления кривизны изгиба и перемещения точек оси пластически деформированного элемента позволяют рассчитать управляющие координаты, реализующие процесс гибки-обтяжки на станках ПГР с ЧПУ.

В некоторых работах учет геометрической нелинейности процессов гибки тонкостенных деталей связан с решением уравнения (1.13) при выполнении условия $(y')^2 \approx 0$. В этом случае имеем

$$y'' = \kappa(M). \tag{1.17}$$

Например, с использованием аппроксимации зависимости $\kappa(M)$ многочленом

$$\kappa = BM^3 + CM \tag{1.18}$$

в работе [59] предложен численно-аналитический метод расчета параметров формообразования при гибке профильных деталей методом намотки с растяжением. Существуют и другие методики решения уравнения (1.17), имеющие также упрощенный характер [21, 27–30, 35, 49, 54, 56, 66 и др.].

Одной из наиболее удобной и точной для практической реализации является полигональная аппроксимация зависимости $M - \kappa$ (аппроксимация ломаной линией (рис. 1.12)) [54, 55]. По аналогии с упругим изгибом, для которого справедливо соотношение $M = EJ\kappa$, запишем

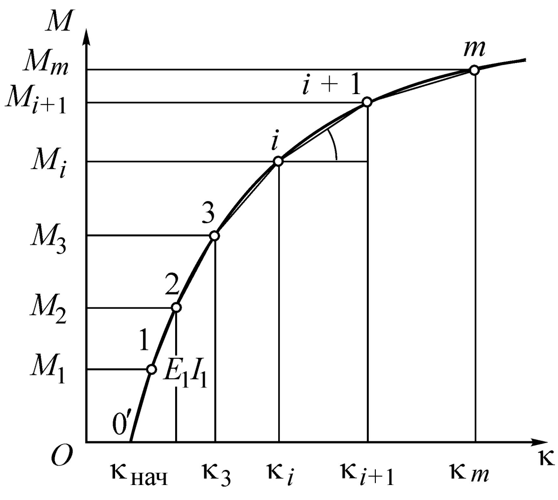


Рис. 1.12.Аппроксимация зависимости изгибающего момента от кривизны ломаной линией

$$M = E_i J\kappa + M_i^*, \tag{1.19}$$

где J – момент инерции текущего сечения элемента; E_i, M_i^* – коэффициенты, определяемые из следующих соотношений:

$$E_i = \frac{M_i - M_{i-1}}{\kappa_i - \kappa_{i-1}} \frac{1}{J},$$
$$M_i^* = M_i - E_i J \kappa_i; \tag{1.20}$$

$i-1$, i – порядковый номер узловых точек кривой M – κ, между которыми, согласно аппроксимации (1.19), момент изменяется линейно от M_{i-1} до M_i.

Значение моментов в узловых точках определяется из известной зависимости (1.6).

Число отрезков при аппроксимации может быть произвольным и выбирается из условия точности. Например, при количестве узловых точек $m = 5\ldots7$ разность между точным значением внутреннего изгибающего момента и значением, вычисленным по формуле (1.19), не превышает $2\ldots3\%$.

Положение точки 0′ на рис. 1.12 определяется начальной кривизной заготовки. Для первоначально плоской заготовки $(\kappa_{нач} = 0)$ точка 0′ совпадает с точкой начала координат *O*, а для заготовки с начальной кривизной $(\kappa_{нач} > 0)$ точка 0′ сдвинута вправо по оси абсцисс на величину $\kappa_{нач}$.

Наиболее точной аппроксимацией зависимости $\bar{\kappa}(\bar{M})$ является эрмитовый сплайн третьего порядка, который на интервале $[\bar{M}_{i-1}, \bar{M}_i]$ совпадает с кубическим полиномом [31, 33, 60]:

$$P_3(\bar{M}) = \frac{P_3'(\bar{M}_{i-1})}{(\bar{M}_i - \bar{M}_{i-1})^2}(\bar{M}_i - \bar{M})^2(\bar{M} - \bar{M}_{i-1}) - \frac{P_3'(\bar{M}_i)}{(\bar{M}_i - \bar{M}_{i-1})^2}(\bar{M} - \bar{M}_{i-1})^2 \times$$
$$\times(\bar{M}_i - \bar{M}) + \frac{P_3(\bar{M}_{i-1})}{(\bar{M}_i - \bar{M}_{i-1})^3}(\bar{M}_i - \bar{M})^2\left[2(\bar{M} - \bar{M}_{i-1}) + \bar{M}_i - \bar{M}_{i-1}\right] +$$
$$+\frac{P_3(\bar{M}_i)}{(\bar{M}_i - \bar{M}_{i-1})^3}(\bar{M} - \bar{M}_{i-1})^2 \times \left[2(\bar{M}_i - \bar{M}) + \bar{M}_i - \bar{M}_{i-1}\right], \tag{1.21}$$

где $P_3(\bar{M}_i) = \bar{\kappa}_i$;

$$P_3'(\bar{M}_i) = \frac{\bar{\kappa}_{i+1} - \bar{\kappa}_i}{\bar{M}_{i+1} - \bar{M}_i}\frac{\bar{M}_i - \bar{M}_{i-1}}{\bar{M}_{i+1} - \bar{M}_{i-1}} + \frac{\bar{\kappa}_i - \bar{\kappa}_{i-1}}{\bar{M}_i - \bar{M}_{i-1}}\frac{\bar{M}_{i+1} - \bar{M}_i}{\bar{M}_{i+1} - \bar{M}_{i-1}};\ i = \overline{2, m-1};$$
$$P_3'(\bar{M}_1) = \frac{\bar{\kappa}_2 - \bar{\kappa}_1}{\bar{M}_2 - \bar{M}_1};\ P_3'(\bar{M}_m) = \frac{\bar{\kappa}_m - \bar{\kappa}_{m-1}}{\bar{M}_m - \bar{M}_{m-1}}.$$

Здесь для удобства дальнейших численных расчетов зависимость $\kappa(M)$ была приведена к безразмерному виду следующим образом: $\bar{\kappa} = \kappa / \kappa^*$; $\bar{M} = M / M^*$, где κ^*, M^* – произвольные параметры, которые выбираются исходя из конкретных условий рассматриваемой задачи. Например, при анализе процесса гибки-обтяжки на станках ПГР это могут быть значения активной кривизны и изгибающего момента, обеспечивающие получение заданной остаточной кривизны детали.

Глава 2. МЕТОДИКА РАСЧЕТА БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ ГИБКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

В основу гл. 2 положены результаты, представленные в работе [65]. Ограничимся решением плоской задачи процесса деформирования гибкого стержня. Гибким называют стержень, материал которого подчиняется закону Гука и даже при сильном искривлении напряжения в нем не превосходят предела пропорциональности. Форма упругой кривой (упруго изогнутой продольной оси) такого стрежня при наличии больших перемещений от начального состояния получила название *эластика* [26]. Особенности решения задач эластики заключаются в том, что при рассмотрении процесса деформирования гибкого стержня следует учитывать характер изменения действия внешних сил в процессе их перемещений вместе со стержнем, возможность нарушения таких многих известных принципов, как суперпозиция, взаимность работ и др. Постановка различных прикладных задач эластики и их решение приведены в работах [3–5, 25, 26, 41, 43–45, 47, 48, 62, 64, 65, 75, 79] и др.

Необходимость изучения задачи упругого изгиба гибкого стержня заключается и в том, что она позволяет, в конечном итоге, согласно теореме А.А.Ильюшина о разгрузке, определить конечную форму тонкостенной криволинейной детали, изготовленной по заданной схеме гибки с учетом геометрической нелинейности процесса деформирования [53].

§ 2.1. Особенности действия сил при сильном изгибе тонких стержней

При исследовании больших перемещений изгиба тонкого стержня, в отличие от случая малых перемещений, все задачи становятся статически неопределимыми. Это связано с тем, что все опорные реакции (силы и моменты) существенно зависят от значений искомых перемещений при изгибе.

Это видно на примере поперечного изгиба консольно-защемленного гибкого стержня (рис. 2.1, *а*), где существенное значение имеет не только прогиб y_1 на незакрепленном конце, но и смещение u_1 вдоль оси x. Поэтому момент реакции в заделке, в отличие от обычного выражения $M_0 = Pl$, будет $M_0 = Px_1 = P(l - |u_1|)$.

Для случая изгиба стержня (рис. 2.1, *б*) в отличие от обычного значения реакции $P = Q/2$ имеем выражение $P = Q/(2\cos\vartheta_1)$. Здесь сила P отклоняется от вертикали на угол ϑ_1 поворота стержня на опоре. Для данного случая существенным является также и изменение длины изгибаемой части стержня за счет скольжения его по двум опорам в процессе изгиба.

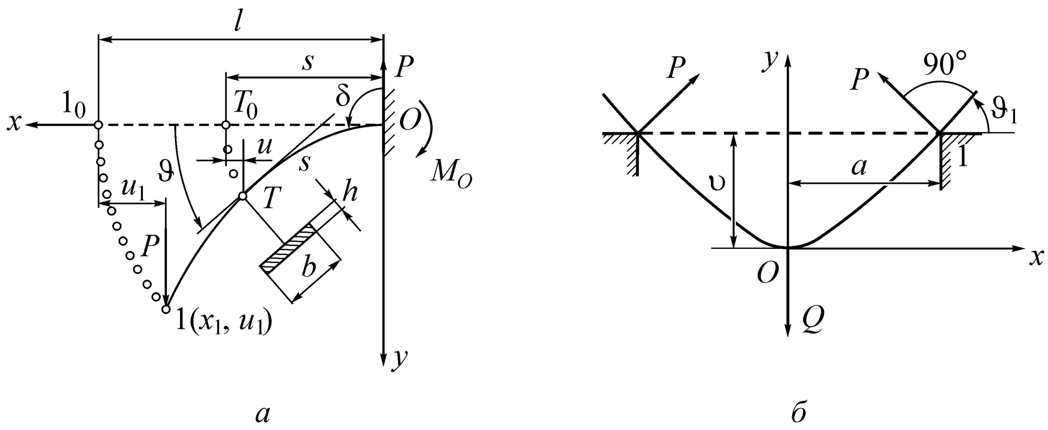


Рис. 2.1. Поперечный изгиб тонкого стержня:
а – консольно-защемленного; *б* – лежащего на двух опорах

Сказанное относится и к поведению внутренних сил и моментов, возникающих в произвольных сечениях стержня. Так, внутренний изгибающий момент в поперечном сечении T (рис. 2.1, *а*) вместо обычного $M = P(l - s)$ будет иметь значение $M = P(x_1 - x) = P(l - s - |u_1 - u|)$. Внутренняя сила при этом будет иметь две составляющие: поперечную (перерезывающую) $P\cos\vartheta$ и продольную (растягивающую) $P\sin\vartheta$ силы, где $\vartheta -$ угол поворота сечения T при изгибе (угол наклона упругой линии в данной точке). При этом, ввиду малости перемещения при растяжении по сравнению с перемещениями при изгибе, длину упругой линии s (как и длину l) стержня считаем неизменной в процессе изгиба.

Другим важным фактором в случае больших перемещений является столь же большое перемещение векторов внешних сил и моментов, под действием которых происходит изгиб. При этом закон перемещения вектора внешней силы зависит от искомых перемещений при изгибе стержня и имеется зависимость между ними, причем заранее неизвестная. Например, при поперечном изгибе консольной балки (рис. 2.1, *а*) внешняя сила P сохраняет в процессе изгиба вертикальное направление. Тогда имеются зависимости $y_1 = y_1(P)$ и $u_1 = u_1(P)$ (статические характеристики стержня), определяющие поступательное перемещение вектора силы в процессе изгиба.

В общем случае имеем три вида перемещения внешних сил в процессе поперечного изгиба:

1) поступательное перемещение, когда вектор силы перемещается в процессе изгиба параллельно самому себе (рис. 2.1, *а*);

2) следящее перемещение, когда вектор силы сохраняет в процессе изгиба постоянный угол с направлением упругой линии в точке приложения силы, т.е. следит за поворотом соответствующего сечения стержня (рис. 2.1, *б*);

3) общий случай перемещения, когда сила не остается параллельной и не следит за поворотом упругой линии.

В каждом из трех видов перемещения сил могут быть следующие варианты: точка приложения силы все время связана с определенной точкой упругой линии; точка приложения силы перемещается вдоль упругой линии.

Кроме того, возможны случаи, когда значение изгибающей силы может быть задано и когда значение изгибающей силы находится в явной зависимости от перемещений при изгибе и поэтому определяется только в процессе расчета этих перемещений. Все сказанное относится к внешним изгибающим моментам и действию распределенных нагрузок.

Важно отметить, что характер действия силы в процессе изгиба стержня зависит от закона перемещения вектора силы. Однако конечный результат при заданном значении вектора силы не зависит от предыстории его перемещения. Это вытекает из того, что рассматривается процесс изгиба как последовательность статических состояний равновесия. Кроме того, в отличие от линейной теории изгиба стержней в случае больших перемещений при изгибе несправедлив принцип суперпозиции решений, т.е. принцип простого сложения результатов действия различных сил.

§ 2.2. Уравнение упругой линии

Будем рассматривать прямые и первоначально кривые стержни при любых видах закреплений на концах и нагрузок (сил и моментов) как сосредоточенных, так и распределенных. Точным уравнением упругого равновесия при плоском изгибе криволинейного стержня является выражение:

$$\kappa - \kappa_0 = M / H, \tag{2.1}$$

где M – внутренний изгибающий момент в данном сечении стержня; H – жесткость стержня при изгибе; $H = EJ$; E – модуль упругости (модуль Юнга); J – осевой момент инерции площади поперечного сечения; κ, κ_0 – кривизны в данной точке соответственно упруго изогнутой продольной оси стержня и начального очертания ее. Для первоначально прямого стержня в выражении (2.1) надо положить $\kappa_0 = 0$.

Используя точное выражение кривизны продольной оси запишем выражение (2.1) в следующем виде:

$$\frac{d\vartheta}{ds} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{H}, \tag{2.2}$$

где $\vartheta, \theta -$ углы наклона касательной в текущей точке соответственно упругой линии и начальной кривой. Длина дуги s продольной оси стержня считается в каждой точке неизменной в процессе изгиба. В дальнейшем 0 и 1 будут обозначать начальную и концевую точки упругой линии, а через $0'$ начало системы координат x,y.

На рис. 2.2 проиллюстрировано правило выбора знаков для кривизны и изгибающего момента с использованием правой системы координат, при этом отсчет углов считаем положительным против часовой стрелки. Значение угла наклона касательной ϑ_0 в начале 0 упругой линии необходимо выбирать в интервале $-180° \le \vartheta_0 \le 180°$. Кривизна κ в данной точке упругой линии считается положительной, если угол наклона касательной ϑ к упругой линии увеличивается с увеличением длины дуги s (рис. 2.2, *а*), и наоборот, кривизна κ будет отрицательной, если при возрастании s угол ϑ уменьшается (рис. 2.2, *б*).

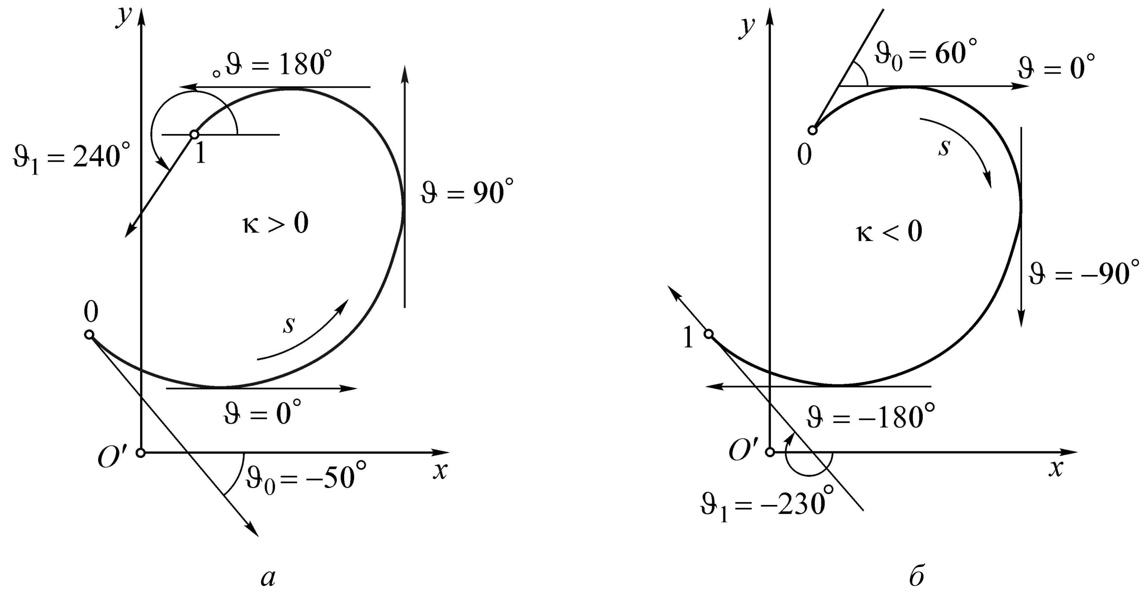


Рис. 2.2. Правило выбора знаков для кривизны и изгибающего момента при упругом изгибе: *а* – $\kappa > 0$; *б* – $\kappa < 0$

Изгибающий момент M в любом сечении стержня считается положительным, если он стремится увеличить значение кривизны. При этом надо учитывать знак кривизны, т.е. положительный момент увеличивает положительную кривизну или уменьшает по абсолютному значению отрицательную кривизну. При обратном действии изгибающий момент будет отрицательным.

Для нахождения основных параметров (кривизны, прогибов и углов наклона касательной), характеризующих деформированное состояние стержня, нужно знать величину внешнего изгибающего момента, действующего в произвольной точке. Составим точное выражение для изгибающего момента при произвольных нагружениях и очертаниях упругой линии стержня. Считаем, что упругая линия была получена в результате того, что стержень произвольной начальной кривизны был нагружен некоторым числом сосредоточенных сил и моментов, а также произвольно распределенных по длине стержня силовой и моментной нагрузки.

В общем случае упругую линию всегда можно разбить на участки так, чтобы сосредоточенные силы P_0, P_1 и внешние изгибающие моменты M_0, M_1 были приложены только по концам 0 и 1 (рис. 2.3) рассматриваемого участка упругой линии (они взяты с учетом нагрузки отрезанных частей стержня в изогнутом состоянии). По длине дуги s упругой линии приложены также распределенные силовая $q(s)$ и моментная $m(s)$ нагрузки. Переменность предусматривается для силовой распределенной нагрузки и ее угла наклона $\mu(s)$. Начальную кривизну стержня κ_0 будем также считать переменной по длине s.

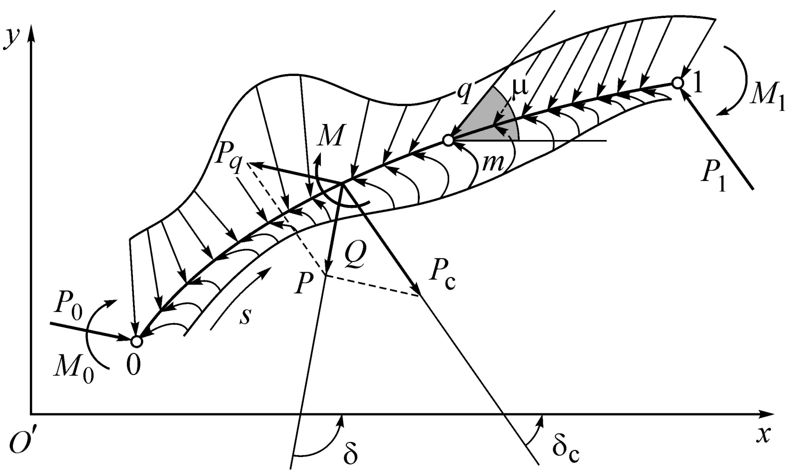


Рис. 2.3. Расчетная схема изгиба элемента под действием произвольной силовой и моментной нагрузок

Для составления выражения внутренних изгибающих моментов $M(s)$ разрежем упругую линию стержня в произвольной точке $Q(x, y)$ и рассмотрим равновесие части Q_1 упругой линии. На рис. 2.3 через P_c обозначен вектор силы, уравновешивающий сосредоточенную силу P_1 $(P_c = P_1)$. За основным направлением выбираем направление силы, приложенной в начальной точке рассматриваемого участка упругой линии. Введем угол δ_c, отсчитываемый против часовой стрелки от направления силы P_c к оси x, т.е. угол наклона оси x к вектору силы P_c. Через P_q обозначен вектор силы, уравновешивающей распределенную силовую нагрузку $q(s)$ на участке Q_1. Вектор силы P обозначает сумму векторов P_c и P_q, а угол δ есть угол наклона оси x к этому суммарному вектору внутренних сил в произвольном сечении Q изогнутого стержня.

Из расчетной схемы формоизменения стержня (рис.2.3) запишем внутренний изгибающий момент в произвольном сечении $Q(x, y)$:

$$M = M_P + M_q + M_m + M_1, \qquad (2.3)$$

где $M_P = P_c(y_1 - y)\cos\delta_c + P_c(x_1 - x)\sin\delta_c$; $M_m = \int_s^l m ds$;

$M_q = \int_s^l (y - y_Q) q\cos\mu ds - \int_s^l (x - x_Q) q\sin\mu ds$. В данном случае, если координаты x_Q, y_Q играют роль постоянных, то, отбрасывая индекс Q в выражении для M_q, получим $M_q = \int_s^l (y\cos\mu - x\sin\mu) q ds - y\int_s^l q\cos\mu ds + x\int_s^l q\sin\mu ds.$

Продифференцировав выражение (2.3) по дуге s, найдем

$$\frac{dM}{ds} = -P_c\frac{dy}{ds}\cos\delta_c - P_c\frac{dx}{ds}\sin\delta_c - (y\cos\mu - x\sin\mu)q -$$
$$-\frac{dy}{ds}\int_s^l q\cos\mu ds + yq\cos\mu + \frac{dx}{ds}\int_s^l q\sin\mu ds - xq\sin\mu x + m. \qquad (2.4)$$

Используя очевидные соотношения

$$\frac{dy}{ds} = \sin\vartheta, \frac{dx}{ds} = \cos\vartheta, \; P_q\cos\delta_q = \int_s^l q\cos\mu ds, \; P_q\sin\delta_q = \int_s^l q\sin\mu ds$$

(угол δ_q отсчитывается аналогично углу δ_c), преобразуем выражение (2.4) к виду

$$\frac{dM}{ds} = -P_c\sin(\vartheta + \delta_c) - P_q\sin(\vartheta + \delta_q) + m. \qquad (2.5)$$

Уравнение (2.5) является общим для всех рассматриваемых задач нелинейной теории плоского упругого изгиба тонкого стержня. Продифференцировав выражение (2.5) по s и подставив его в (2.2), получим (при $H = \text{const}$) уравнение:

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} - \frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{P_c}{H}\sin(\vartheta + \delta_c) - \frac{P_q}{H}\sin(\vartheta + \delta_q) + \frac{m}{H}. \qquad (2.6)$$

Введя обозначения

$$\beta_c^2 = P_c l^2 / H, \beta_q^2 = P_q l^2 / H, \xi_c = \vartheta + \delta_c, \xi_q = \vartheta + \delta_q,$$

получим вместо (2.6) искомое уравнение в безразмерном виде:

$$l^2\frac{d^2\vartheta}{ds^2} = -\beta_c^2\sin\xi_c - \beta_q^2\sin\xi_q + \frac{ml^2}{H} + l^2\frac{d^2\theta}{ds^2}. \qquad (2.7)$$

Здесь $s, l-$ длина дуги в произвольной точке T и полная длина изгибаемого элемента.

Отметим, что если первоначальное очертание криволинейного стержня есть дуга окружности, то геометрия упругой линии не изменится при замене криволинейного стержня прямым, нагруженным по концам моментами $M_{экв} = H\kappa_0$, где начальная кривизна κ_0 берется с учетом ее знака. Это является выражением эквивалентности начальной кривизны стержня и изгибающего момента при сколь угодно больших упругих перемещениях при изгибе. Это положение можно распространить и на произвольно переменную начальную кривизну, но для этого потребовалось бы приложение распределенной моментной нагрузки.

Согласно работе [65] все задачи эластики при больших перемещениях делятся на три класса: 1) задачи основного класса; 2) задачи, сводящиеся к основному классу; 3) задачи, не сводящиеся к основному классу.

К основному классу относятся все задачи, которые обладают следующими признаками: а) начальная кривизна продольной оси стержня κ_0 постоянна (в частности, равна нулю); б) изгибная жесткость постоянна; в) изгиб происходит только под действием сосредоточенных сил P и изгибающих моментов M_0, M_1, приложенных по концам стержня 0 и 1. При этом произвольными могут быть схемы приложения силы и моментов, виды перемещения их в процессе изгиба, схемы закреплений в опорах и т.п. В результате для всех многообразных задач основного класса точное дифференциальное уравнение равновесия упругой линии стержня имеет следующий компактный вид:

$$l^2 \frac{d^2\xi}{ds^2} = -\beta^2 \sin\xi, \tag{2.8}$$

где опущен индекс «с», а в левой части вместо ϑ стоит ξ, так как величина δ_c в выражении $\xi_c = \vartheta + \delta_c$ является постоянной в каждом данном равновесном состоянии и $d\xi = d\vartheta$. Величины l, δ, β являются постоянными для данной упругой линии.

К задачам, сводящимся к основному классу, относятся такие, при которых упругую линию можно разбить на конечное число участков конечной длины, каждый из которых удовлетворяет всем условиям задачи основного класса. В этом случае уравнение упругой линии (2.8) записывается для каждого участка. Затем записываются условия связей на стыках этих участков, что дает необходимое и достаточное число уравнений для решения задачи. При этом важно использовать симметрию, если таковая есть в рассматриваемой задаче. Например, используя симметрию в случае изгиба стержня, приведенного на рис. 2.1, *б*, можно путем разбиения получить две одинаковые задачи основного класса. Вследствие этого достаточно решить одну из них.

К классу задач, не сводящихся к основному, относятся такие задачи, в которых не соблюдается какое-либо из условий, определяющих задачи двух описанных классов. Сюда относятся задачи с распределенными нагрузками, а также задачи для тонких стержней с произвольно изменяющимися начальной кривизной и площадью поперечного сечения. Для решения этого класса задач необходимо пользоваться уравнением (2.7), которое можно решить только численным методом, например, методом конечных разностей [70, 75].

Отметим, что при одних и тех же схемах нагружения и системах, налагаемых на концах стержня связей, оказывается возможным возникновение нескольких форм равновесия. Однако произвол здесь ограничен, так как всегда имеется определенная строгая закономерность в построении возможных форм равновесия упругой линии в каждой задаче. Эта проблема подробно изложена в работах [26, 65].

Опишем геометрию упругой линии. Пусть первоначальное очертание рассматриваемого участка продольной оси стержня имеет вид $0_0 1_0$ (штриховая линия на рис. 2.4). В процессе изгиба этот участок займет равновесное положение 01. Для определения прогиба и смещения в произвольной точке T введем оси упругих перемещений u, v. При этом ось смещений u направим по касательной к первоначальной кривой $0_0 1_0$ в данной точке T_0 в сторону возрастания s, а ось v – нормали таким образом, чтобы образовалась правая система координат u, v, если неподвижная система координат x, y правая.

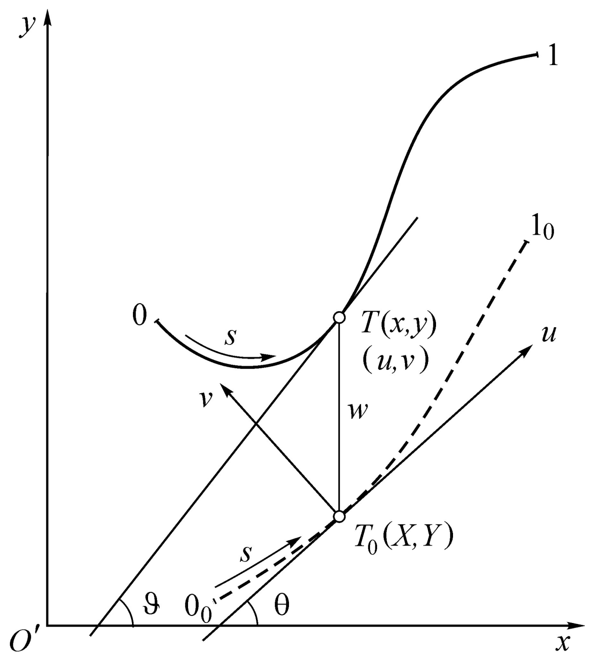


Рис. 2.4. Расчетная схема для определения смещений в случае больших перемещений при изгибе

Полное линейное и угловое перемещения при изгибе в произвольной точке T вычисляются по формулам $w = \sqrt{u^2 + v^2}$; $\gamma = \vartheta - \theta$.

Оси упругих перемещений при рассмотрении изгиба криволинейного стержня меняют свое направление от точки к точке в соответствии с изменением угла наклона касательной к первоначальному очертанию стержня $\theta(s)$. В случае изгиба прямого стержня, направления осей упругих перемещений u, v будут совпадать с направлениями неподвижных осей x, y, если ось x направлена вдоль первоначального положения продольной оси стержня.

В дальнейшем очертание упругой линии изогнутого стержня будем определять в неподвижной системе координат x, y. В этом случае будем иметь

$$u = (x - X)\cos\theta + (y - Y)\sin\theta; v = (y - Y)\cos\theta - (x - X)\sin\theta, \qquad (2.9)$$

где X, Y – координаты начального положения произвольной точки T_0; x, y – координаты точки T упругой линии. В случае изгиба прямого стержня формулы (2.9) упрощаются, так как $\theta = 0$.

Дифференциальные уравнения упругой линии (2.7) и (2.8) записаны относительно угловой координаты ϑ (или ξ) как функции длины дуги s упругой линии. Поэтому, решив уравнение упругой линии, получим результат в виде $\vartheta(s)$. Из простых геометрических соотношений следует

$$dx = \cos\vartheta(s)\, ds, \; dy = \sin\vartheta(s)\, ds. \qquad (2.10)$$

Далее из соотношений (2.10) могут быть получены параметрические уравнения упругой линии $x = x(s), \; y = y(s)$.

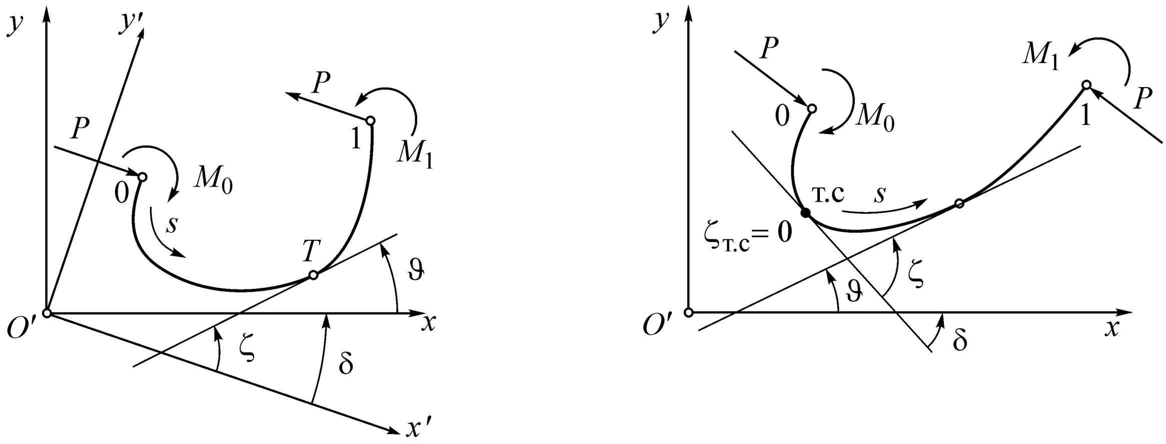
§ 2.3. Решение уравнения упругой линии с помощью метода эллиптических параметров

Умножим левую и правую стороны уравнения (2.8) на соответствующие части тождества $2(d\xi / ds)ds = 4d(\xi / 2)$ и, используя известную формулу $\sin\xi = 2\sin(\xi / 2)\cos(\xi / 2)$, в результате однократного интегрирования найдем

$$\left(l\frac{d\xi}{ds} \right)^2 = 4\beta^2 \left(C - \sin^2\frac{\xi}{2} \right), \qquad (2.11)$$

где C – произвольная постоянная, определяемая из начальных условий.

Левая часть уравнения (2.11) есть квадрат кривизны ($d\xi / ds = d\vartheta / ds = \kappa$), следовательно, первый интеграл (2.11) дает значение кривизны в произвольной точке. Так как левая часть уравнения (2.11) положительна, то значение $C > 0$ и не может быть меньше, чем значение $\sin^2(\xi / 2)$ на всей упругой линии (рис. 2.5). Согласно работе [65] в зависимости от начальных условий и схемы нагружения форма изогнутого элемента может быть двух видов: перегибного и бесперегибного, различающихся соответственно наличием или отсутствием на контуре точек, в которых кривизна $\kappa = 0$ (рис. 2.6, 2.7).



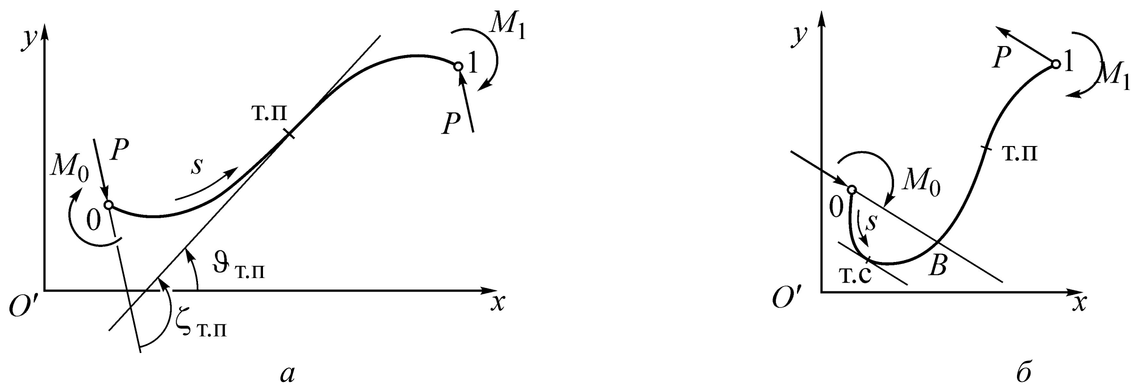
а *б*

Рис. 2.5. Расчетная схема:
а – изгибная деформация элемента малой жесткости; *б* – параметры формы равновесия произвольного вида

Введем понятия точек сжатия и растяжения. Точка сжатия определяется тем, что в данном сечении изогнутого стержня внутренняя сила *P* является чисто сжимающей. В этой точке имеем $\xi_{\text{т.с}} = 0$, $(\sin^2(\xi/2))_{\text{т.с}} = 0$. В точке растяжения внутренняя сила *P* является чисто растягивающей и в ней $\xi_{\text{т.р}} = 180°$, $(\sin^2(\xi/2))_{\text{т.р}} = 1$.

Формы перегибного рода (рис. 2.6) будут тогда, когда имеет место условие

$$\left(\sin^2\frac{\xi}{2}\right)_{\max} \le C < 1. \qquad (2.12)$$



а *б*

Рис. 2.6. Расчетные схемы параметров формы равновесия перегибного вида:
а – без точки сжатия; *б* – с точкой сжатия

В точке перегиба выполняется условие $(\sin^2(\xi/2))_{\text{т.п}} = C$. Условие (2.12) допускает существование на упругой линии точек перегиба и точек сжатия (точки растяжения невозможны), т.е. точки перегиба и сжатия могут появиться, но не обязательно. Их не будет, если вдоль упругой линии выполняется условие $0 < (\sin^2(\xi/2)) < C$.

Формы бесперегибного рода (рис. 2.7) имеют место, когда выполняется условие

$$C > 1, \tag{2.13}$$

допускающее наличие на упругой линии точек растяжения и сжатия (точки перегиба невозможны).

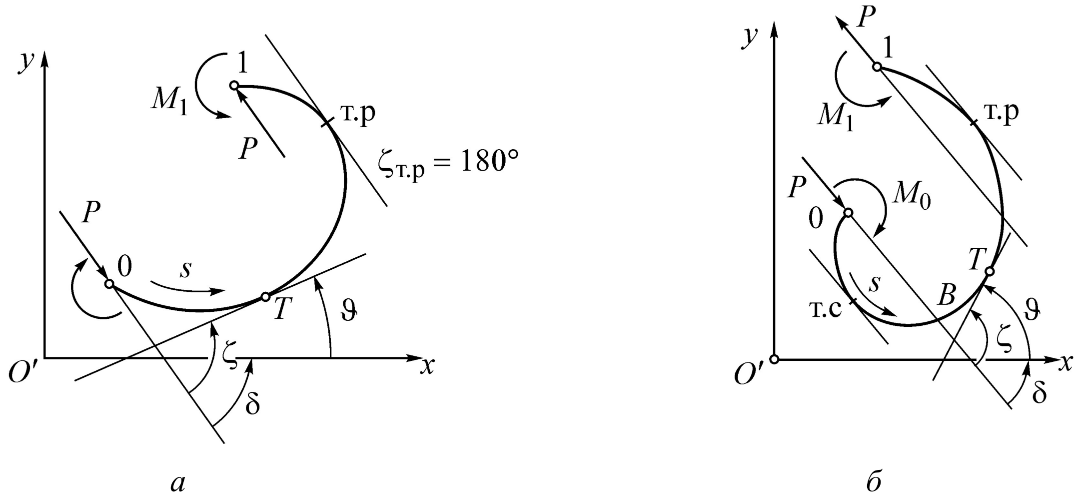


Рис. 2.7. Расчетные схемы параметров формы равновесия бесперегибного вида: *а* – без точки сжатия; *б* – с точкой сжатия и точкой растяжения

Условие $C = 1$ соответствует переходной форме равновесия упругой линии. В этом случае возможна точка сжатия, а точки перегиба и растяжения, сливаясь, уходят в бесконечность ($s \to \infty$). Очертание упругой линии (см. рис. 2.5, *б*) относится к любому роду форм равновесия упругой линии (перегибного, бесперегибного и, в частности, переходного).

Отметим важное свойство симметрии форм равновесия упругой линии: во-первых, точки перегиба являются центрами симметрии в плоскости кривизны для участков упругой линии, прилежащих к этой точке; во-вторых, точки сжатия и точки растяжения обладают тем свойством, что проведенные через них нормали являются осями симметрии прилежащих к ним участков упругой линии.

Дальнейшее решение дифференциального уравнения (2.11) основано на выражении константы C и независимой переменной ξ через единые параметры k и φ для формы:

- перегибного рода

$$C = k^2,\ \sin(\xi/2) = k\sin\varphi; \tag{2.14}$$

- бесперегибного рода

$$C = 1/k^2,\ \sin(\xi/2) = \sin\varphi. \tag{2.15}$$

В обоих случаях $0 \le k \le 1$. Значение $k = 1$ соответствует переходной форме. Выбор новой переменной φ будем определять таким образом, чтобы она, начиная с точки 0 упругой линии, непрерывно возрастала, независимо от того, как меняется величина ξ, для чего примем $d\varphi / ds > 0, -90° \le \varphi \le +\infty$. При этом начальное значение ξ в точке 0 выбираем из интервала $-180° \le \xi_0 \le 180°$.

Подставив выражения (2.14), (2.15) в (2.11), получим для формы:

- перегибного рода

$$l \frac{d\xi}{ds} = 2\beta k \cos\varphi, \tag{2.16}$$

$$l \frac{d\varphi}{ds} = \beta\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}; \tag{2.17}$$

- бесперегибного рода

$$l \frac{d\xi}{ds} = \frac{2\beta}{k}\Lambda(\varphi), \tag{2.18}$$

$$l \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\beta}{k}\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\,. \tag{2.19}$$

Здесь введена новая функция $\Lambda(\varphi) = \pm\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}$, где вместо двойного знака ставится знак кривизны упругой линии (он постоянен вдоль всей упругой линии).

Если выражения (2.14) и (2.15) продифференцировать по *s*, то получим связь между производными φ и ξ соответственно для форм перегибного и бесперегибного рода:

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{2k\cos\varphi}{\cos(\xi/2)}\frac{d\varphi}{ds}, \quad \frac{d\xi}{ds} = \frac{2\cos\varphi}{\cos(\xi/2)}\frac{d\varphi}{ds}. \tag{2.20}$$

Значениями ξ в соответствии с выражениями (2.14) и (2.15) соответственно для форм перегибного и бесперегибного рода будут

$$\xi = 2\arcsin(k\sin\varphi); \tag{2.21}$$

$$\xi = \xi_0 \pm 2(\varphi - \varphi_0) = 2[\arcsin(\sin\varphi_0) \pm (\varphi - \varphi_0)]. \tag{2.22}$$

Здесь для arcsin берется его главное значение, а вместо двойного знака ставится знак кривизны упругой линии (для форм бесперегибного рода это постоянный знак вдоль всей упругой линии, либо +, либо -).

Произведем второе интегрирование вдоль упругой линии от ее начальной точки (s = 0, $\varphi = \varphi_0$) до произвольной текущей точки (s, φ). Тогда из выражений (2.17) и (2.19) получим для формы:

- перегибного рода

$$\beta\frac{s}{l} = F(\varphi) - F(\varphi_0); \tag{2.23}$$

• бесперегибного рода

$$\beta\frac{s}{l}=k\left[F(\varphi)-F\left(\varphi_0\right)\right], \tag{2.24}$$

где $F(\varphi)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ – эллиптический интеграл Лежандра первого рода, в котором k – модуль, φ – амплитуда. Величина $\alpha=\arcsin k$ – модулярный угол эллиптического интеграла.

Функции, обратные эллиптическим интегралам, называются эллиптическими функциями или функциями Якоби. И эллиптические интегралы, и эллиптические функции являются специальными функциями. Они не могут быть выражены через элементарные функции. Однако их свойства хорошо изучены, существуют справочники и математические таблицы, в которых можно найти формулы для вычисления специальных функций с заданной точностью*. Для разных значений эллиптических модулей k $(0\le k\le 1)$ функция $F(\varphi)$ принимает различные значения, начиная от $F(\varphi)=\varphi$ при $k=0$ и до $F(\varphi)=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$ при $k=1$, если брать эллиптическую амплитуду в интервале $0\le\varphi\le\pi/2$.

При $\varphi=0$ имеем $F(\varphi)=0$, а при $\varphi=\pi/2$ получим значение полного эллиптического интеграла первого рода, обозначаемого $F(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, который зависит только от величины k. При изменении эллиптической амплитуды φ за пределами интервала $0\le\varphi\le\pi/2$ имеют место соотношения $F(\varphi)=2nF(k)\pm F(\varphi)$ при $\varphi=n\pi+\varphi$, где ϕ берется из интервала $0\le\varphi\le\pi/2$.

Выражения (2.23) и (2.24) связывают значения переменной φ с длиной дуги s, а следовательно, с действующей силой P. Найдем аналогичную связь для внутреннего изгибающего момента в произвольной точке упругой линии. Введем обозначение ω для безразмерной величины:

$$\omega=\frac{M+H\kappa_0}{\sqrt{PH}}, \tag{2.25}$$

тогда уравнение равновесия упругой линии (2.1) примет вид

$$l\kappa=\beta\omega. \tag{2.26}$$

---

* *Абрамовиц, М.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган; под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Учитывая, что $l\kappa = ld\vartheta / ds = ld\xi / ds$, на основании формулы (2.16) для форм перегибного рода получим

$$\omega = 2k\cos\varphi, \tag{2.27}$$

а из формулы (2.18) для форм бесперегибного рода следует:

$$\omega = (2/k)\Lambda(\varphi). \tag{2.28}$$

Соотношения (2.27) и (2.28) обеспечивают связь значений переменной φ вдоль упругой линии с внутренним изгибающим моментом *M* в произвольном сечении стержня при учете начальной кривизны стержня κ_0 в соответствии с выражением (2.25).

Величина внутреннего изгибающего момента в любом сечении упругого стержня выражается следующим образом:

$$M = \frac{\omega}{\sqrt{PH}} - H\kappa_0 = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)Pl - H\kappa_0.$$

Получим зависимости для нахождения линейных перемещений точек упругой линии в прямоугольной системе координат (см. рис. 2.5, *б*). Для этого введем специальные оси координат x', y', ориентированные по направлению силы, приложенной в точке 0. Здесь имеют место следующие дифференциальные соотношения:

$$dx' = \cos\xi ds = \left(2\cos^2\frac{\xi}{2} - 1\right)ds;\ \ dy' = \sin\xi ds = 2\sin\frac{\xi}{2}\cos\left(\frac{\xi}{2} - 1\right)ds.$$

Переход к первоначальной системе координат x, y определится формулами

$$x = x'\cos\delta + y'\sin\delta,\ \ y = y'\cos\delta - x'\sin\delta. \tag{2.29}$$

Далее преобразуем уравнения для dx' и dy' с помощью соотношений (2.14)–(2.19) и с учетом $\cos^2(\xi/2) = 1 - 1/k^2 + (1 - k^2\sin^2\varphi)/k^2$ для случая форм бесперегибного рода. В результате получим дифференциальные уравнения для координат точек упругой линии соответственно для формы:

- перегибного рода

$$\frac{dx'}{l} = \frac{2}{\beta}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi - \frac{ds}{l},\ \ \frac{dy'}{l} = \frac{2}{\beta}k\sin\varphi d\varphi; \tag{2.30}$$

- бесперегибного рода

$$\frac{dx'}{l} = \frac{2}{k\beta}\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi - \left(\frac{2}{k^2} - 1\right)\frac{ds}{l},\ \ \frac{dy'}{l} = \frac{2}{k\beta}\left(\pm\frac{k^2\sin 2\varphi}{2\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\right)d\varphi \tag{2.31}$$

(здесь вместо двойного знака надо поставить знак кривизны упругой линии).

После интегрирования выражений (2.30) и (2.31) получим уравнение упругой линии в осях, ориентированных по направлению силы для формы:

- перегибного рода

$$\frac{x'-x'_0}{l}=\frac{2}{\beta}\left[E(\varphi)-E(\varphi_0)\right]-\frac{s}{l},\quad \frac{y'-y'_0}{l}=\frac{2}{\beta}k\left(\cos\varphi_0-\cos\varphi\right); \tag{2.32}$$

- бесперегибного рода

$$\frac{x'-x'_0}{l}=\frac{2}{k\beta}\left[E(\varphi)-E(\varphi_0)\right]-\left(\frac{2}{k^2}-1\right)\frac{s}{l},\quad \frac{y'-y'_0}{l}=\frac{2}{k\beta}\left[\Lambda(\varphi_0)-\Lambda(\varphi)\right], \tag{2.33}$$

где $E(\varphi)=\int\limits_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi-$ эллиптический интеграл Лежандра второго рода. Значения эллиптических интегралов $E(\varphi)$ даются в сборниках математических таблиц. Для разных значений эллиптических модулей k $(0\le k\le 1)$ функция $E(\varphi)$ принимает различные значения, начиная от $E(\varphi)=\varphi$ при $k=0$ и до $E(\varphi)=\sin\varphi$ при $k=1$, если изменение эллиптической амплитуды ограничить интервалом $0\le\varphi\le\pi/2$.

При $\varphi = 0$ имеем $E(\varphi) = 0$, а при $\varphi = \pi/2$ получим значение полного эллиптического интеграла второго рода

$$E(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

который зависит только от величины k. При изменении амплитуды φ за пределами интервала $0\le\varphi\le\pi/2$ имеют место соотношения $E(\varphi)=2nE(k)\pm E(\varphi)$ при $\varphi=n\pi+\varphi$, где φ берется из интервала $0\le\varphi\le\pi/2$.

Таким образом, определяются координаты упругой линии (2.32) и (2.33) в системе координат x', y', ориентированной по направлению силы. Однако при непоступательном перемещении силы в процессе изгиба эти координаты будут подвижными. Но в любом случае, определив эти координаты, можно затем по выражениям (2.29) вернуться к исходным неподвижным осям координат x, y.

Выпишем полученные формулы для произвольной точки упругой линии, применительно к начальной 0 и концевой 1 точкам для формы:

- перегибного рода

$$\beta=F(\varphi_1)-F(\varphi_0),\ \beta=\sqrt{Pl^2/H}, \tag{2.34}$$

$$\omega_0=2k\cos\varphi_0,\ \omega_1=2k\cos\varphi_1, \tag{2.35}$$

$$\xi_0=2\arcsin(k\sin\varphi_0),\ \xi_1=2\arcsin(k\sin\varphi_1) \tag{2.36}$$

(для arcsin выбирается главное значение),

$$\frac{x_1' - x_0'}{l} = \frac{2}{\beta}\left[E(\varphi_1) - E(\varphi_0)\right] - 1, \quad \frac{y_1' - y_0'}{l} = \frac{2}{\beta}k\left(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1\right); \qquad (2.37)$$

• бесперегибного рода

$$\beta = k\left[F(\varphi_1) - F(\varphi_0)\right], \quad \beta = \sqrt{Pl^2 / H}, \qquad (2.38)$$

$$\omega_0 = (2/k)\Lambda(\varphi_0), \quad \omega_1 = (2/k)\Lambda(\varphi_1), \qquad (2.39)$$

$$\xi_0 = 2\arcsin(\sin\varphi_0), \quad \xi_1 = \xi_0 \pm 2(\varphi_1 - \varphi_0), \qquad (2.40)$$

$$\frac{x_1' - x_0'}{l} = \frac{2}{k\beta}[E(\varphi_1) - E(\varphi_0] - \left(\frac{2}{k^2} - 1\right), \quad \frac{y_1' - y_0'}{l} = \frac{2}{k\beta}[\Lambda(\varphi_0) - \Lambda(\varphi_1)], \quad (2.41)$$

где для арксинуса берется его главное значение, а вместо двойного знака ставится знак кривизны данной упругой линии.

Изгибающие моменты на концах 0 и 1 вычисляются по формулам

$$M_0 = \left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)Pl - H\kappa_0; \quad M_1 = \left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)Pl - H\kappa_1.$$

Во всех приведенных выражениях значение эллиптической амплитуды φ_0 в соответствии с (2.36) и (2.39) выбирается согласно табл. 2.1.

Таблица 2.1

Кривизна в начальной точке	Интервал значений	
	угла ξ_0 в начальной точке	эллиптической амплитуды
$\kappa_0 > 0$	$-180° \le \xi_0 \le 0$	$-90° \le \varphi_0 \le 0$
	$0 \le \xi_0 < 180°$	$0 \le \varphi_0 < 90°$
$\kappa_0 < 0$	$180° \ge \xi_0 \ge 0$	$90° \le \varphi_0 \le 180°$
	$0 \ge \xi_0 \ge -180°$	$180° \le \varphi_0 \le 270°$

Таким образом, обеспечивается единообразие последующих расчетных формул. Эллиптическая амплитуда φ однозначно связана с длиной дуги s уравнением упругой линии (2.23) (или (2.24)). Через эту переменную определяются координаты точек упругой линии (2.32) (или (2.33)), а также углы наклона касательной в произвольном сечении стержня (2.21) (или (2.22)) и изгибающие моменты (2.27) (или (2.28)). Числовые значения величин k, φ_0 и φ_1 (эллиптические параметры упругой линии) однозначно определяют очертание упругой линии. Если для каких-либо двух упругих линий разной длины для различных очертаний продольной оси стержня и различных схем нагружения и связей (опор) имеем одинаковые эллиптические параметры, то эти две упругие линии будут геометрически подобны друг другу.

Учитывая обозначения

$$\beta = \sqrt{Pl^2 / H},\ \ \xi = \vartheta + \delta \tag{2.42}$$

и выражение (2.25), видим, что параметры k, φ_0 и φ_1 непосредственно связаны через формулы (2.34)–(2.37) (или (2.38)–(2.41)) с силой P изгибающими моментами M_0, M_1 и углами наклона касательной ϑ_0, ϑ_1 на концах упругой линии 0 и 1. Ввиду того, что одинаковые значения эллиптических параметров определяют подобие упругих линий в различных случаях упругого изгиба, то величинам β, ω_0, ω_1, ξ_0, ξ_1 присваиваются следующие наименования:

- силовой коэффициент подобия

$$\beta = \sqrt{Pl^2 / H}; \tag{2.43}$$

- моментные коэффициенты подобия

$$\omega_0 = \frac{M_0 + H\kappa_0}{\sqrt{PH}},\ \ \omega_1 = \frac{M_0 + H\kappa_1}{\sqrt{PH}}; \tag{2.44}$$

- угловые коэффициенты подобия

$$\xi_0 = \vartheta_0 + \delta,\ \ \xi_1 = \vartheta_1 + \delta. \tag{2.45}$$

Так как для определения формы упругой линии в безразмерном виде достаточно знания трех параметров k, φ_0 и φ_1, то из выражений (2.43)–(2.45) только три будут независимыми, а остальные два могут быть выражены через заданные. При решении конкретных задач из условия задачи выясняется, какие величины, входящие в выражения (2.25) и (2.42), являются известными. Этим определяются три коэффициента из $\beta, \omega_0, \omega_1, \xi_0, \xi_1$, которые вычисляются непосредственно. Затем через найденные коэффициенты по соответствующим формулам (2.34)–(2.37) (или (2.38)–(2.41)) определяются эллиптические параметры k, φ_0 и φ_1.

Обобщая сказанное, отметим, что решение практических задач получаем из соответствующих трансцендентных уравнений по методу последовательных приближений с использованием числовых значений эллиптических интегралов для различных величин аргументов.

Эллиптические интегралы не выражаются в элементарных функциях, поэтому представление таких интегралов приближенными выражениями оказывается полезным как в аналитических выкладках, так и при вычислениях. Выделим работу [5], в которой на основе квадратичной аппроксимации полных эллиптических интегралов первого и второго рода и некоторых соотношений теории эллиптических функций, связывающих неполные и полные интегралы, построено более простое решение для представления формы гибкого стержня при плоском изгибе.

Отметим работу [45], в которой рассматривается изгиб стержней при термомеханическом нагружении в условиях больших перемещений с учетом удлинения термоупругой линии. Считается, что температурное поле одномерное и изменяется по высоте поперечного сечения. Показано, что под действием температурного поля все слои стержня деформируются и перемещения, связанные с удлинением упругой линии и перемещения, с изменением кривизны, могут быть одного порядка. На основании полученных формул и результатов установлено, что изменение кривизны зависит не только от изгибающего момента, но и от деформации термоупругой линии. Это дает возможность более точно определить форму стержня и силовые факторы, силы реакции при стесненном деформировании. Такая постановка является актуальной при деформировании материалов в интервале температур фазовых превращений, например, стержни с памятью формы в интервале температур термоупругих мартенситных превращений.

Пример 2.1. Найдем значения эллиптических параметров для случая изгиба консольного стержня сосредоточенной силой при ее поступательном перемещении (см. рис.2.1, *а*). Здесь известными являются величины: $M_1 = 0$, $\kappa_0 = 0$, $\vartheta_0 = 0, \delta = 90^0$. По формулам (2.43)–(2.45) вычисляем величины $\beta = \sqrt{Pl^2 / H}$, $\omega_1 = 0$, $\xi_0 = 90°$. Так как $M_1 = 0$, то кривизна $\kappa_1 = 0$. Поэтому упругая линия принимает форму перегибного рода. Из формул (2.34)–(2.36) получаем уравнения

$$F(\varphi_1) - F(\varphi_0) = \sqrt{Pl^2 / H};\;\; 2k\cos\varphi_1 = 0;\; 2k\sin\varphi_0 = \sin 45°, \qquad (2.46)$$

из которых находим значения параметров k, φ_0 и $\varphi_1 = 90°$. Вдоль упругой линии выполняются условия: $\sqrt{2}/2 \le k < 1$, $45° < \varphi_0 \le 90°$, $\varphi_0 \le \varphi < 90°$. Распределение значений φ вдоль упругой линии $\varphi(s)$ определяется уравнением (2.23). Тогда изгибающий момент найдется по формулам (2.25) и (2.27), а очертание упругой линии – по формулам (2.29) и (2.32). Так как $\delta = 90°$, то $x = y'$, $y = -x'$. Если в формуле (2.46) задавать различные значения силы P, определяя каждый раз соответствующие значения k_0 и φ_0, то по формулам (2.29) и (2.37) найдем координаты концевой точки 1 изогнутого стержня:

$$\frac{x_1}{l} = \frac{2}{\beta} k\cos\varphi_0;\; \frac{y_1}{l} = 1 - \frac{2}{\beta}\left[E(k) - E(\varphi_0)\right];\; \vartheta_1 = 2\alpha - 90°.$$

Пусть $P = 3{,}4055H / l^2$; $\beta = 1{,}8454$. По таблице функций эллиптических параметров [65] находим $\alpha = 75°; F(\varphi_0) = 0{,}9227; E(\varphi_0) = 0{,}7387; E(k) = 1{,}0764;$ $2k\cos\varphi_0 = 1{,}3161$. Далее определяем $x_1 / l = 0{,}7132; y_1 / l = 0{,}634; \vartheta_1 = 60°.$

Найдем на упругой линии координаты двух промежуточных точек, в которых соответственно имеем $\vartheta = 30°$ и $\vartheta = 45°$. Длина дуги и координаты в произвольных точках определяются по формулам:

$$\frac{s}{l} = \frac{1}{\beta}\left[F(\varphi) - F(\varphi_0)\right]; \quad \frac{x}{l} = \frac{2}{\beta}k(\cos\varphi_0 - \cos\varphi); \quad \frac{y}{l} = \frac{s}{l} - \frac{2}{\beta}\left[E(\varphi) - E(\varphi_0)\right].$$

Из условия $\xi = 90° + \vartheta$, находим: для первой точки $\xi = 120°$, $F(\varphi) = 1{,}4076$, $E(\varphi) = 0{,}9147$, $2k\cos\varphi = 0{,}8555$, $s/l = 0{,}2628$, $x/l = 0{,}2494$, $y/l = 0{,}0721$ для второй точки имеем $\xi = 135°$, $F(\varphi) = 1{,}7791$, $E(\varphi) = 0{,}9864$, $2k\cos\varphi = 0{,}5637$, $s/l = 0{,}4641$, $x/l = 0{,}4077$, $y/l = 0{,}1956$.

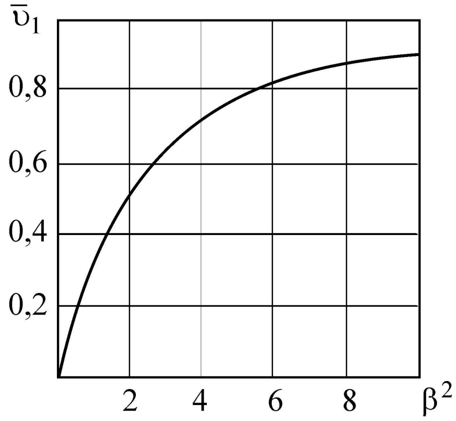


Рис. 2.8. Пример расчета

На рис. 2.8 приведены некоторые результаты расчетов, где $\bar{\vartheta}_1 = \vartheta_1/(\pi/2)$.

<u>Пример 2.2</u>. Рассмотрим изгиб стержня, один конец которого защемлен, а ко второму концу приложена сила под некоторым углом γ (рис. 2.9). В концевой точке *1*, как точке перегиба, имеем $\varphi_1 = 90°$, а значения k и φ_0 определяются из специальных таблиц функций эллиптических параметров. При этом $\sin(\gamma/2) \le k \le 1$, $90° \ge \varphi_0 \ge \gamma/2$.

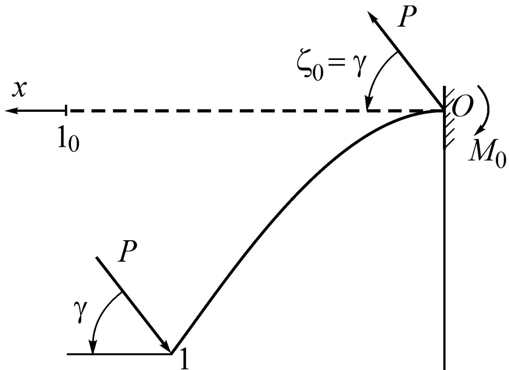


Рис. 2.9. Продольно-поперечный изгиб стержня при поступательном перемещении силы

Решение задачи осуществляется методом последовательного приближения. Сначала по формуле (2.43) определяем величину β. Затем, задаваясь рядом значений k, по формуле $\varphi_0 = \arcsin[(1/k)(\sin(\gamma/2))]$ находим соответствующее значение φ_0, а по таблицам – эллиптические интегралы. Значение k, при котором наступает равенство $\beta = F(k) - F(\varphi_0)$, будет модулем эллиптических интегралов упругой линии деформированного стержня. Уравнения упругой линии имеют вид

$$x = x'\cos\gamma + y'\sin\gamma, \quad y = y'\cos\gamma - x'\sin\gamma,$$

где $x'/l = (2/\beta)\left[E(\varphi) - E(\varphi_0)\right] - s/l$; $y'/l = (2k/\beta)(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$.

Координаты концевой точки 1 определяются по следующим формулам:

$$\frac{x_1}{l} = \left\{\frac{2}{\beta}\left[E(k) - E(\varphi_0)\right] - 1\right\}\cos\gamma + \frac{2}{\beta}k\cos\varphi_0\sin\gamma;$$

$$\frac{y_1}{l} = \frac{2}{\beta}k\cos\varphi_0\cos\gamma - \left\{\frac{2}{\beta}\left[E(k) - E(\varphi_0)\right] - 1\right\}\sin\gamma.$$

Произведя вычисления по приведенным формулам, результаты расчетов можно представить в виде графиков $\beta = f_1(\bar{x}_1, \gamma)$ и $\beta = f_2(\bar{y}_1, \gamma)$, где $\bar{x}_1 = x_1 / l$; $\bar{y}_1 = y_1 / l$. Эти графики позволяют быстро решить прямую задачу, когда по силе необходимо найти деформацию стержня и обратную задачу, когда по известной деформации нужно найти силу, вызывающую эту деформацию. Кривые $\beta = f_1(\bar{x}_1, \gamma)$ и $\beta = f_2(\bar{y}_1, \gamma)$ могут быть аппроксимированы сравнительно простыми функциями, например, $\bar{x}_1 = 1 - 0,4\exp\left[-(1/\beta - 0,61)(2,38 + 2/\sin\gamma)\right]$ или $\beta = (2,38 + 2/\sin\gamma)\big/\left[\ln 0,4(1 - \bar{x}_1) + 0,61(2,38 + 2/\sin\gamma)\right]$.

Анализ показал, что эти функции пригодны для расчета гибких стержней при изменении угла γ до 90°. Во всех случаях погрешность по сравнению с точным решением не превышает 1 %.

<u>Пример 2.3.</u> Рассмотрим изгиб консольного стержня при следящем перемещении силы (рис. 2.10). В данном случае угол γ наклона силы к неподвижной оси x постепенно уменьшается от 90°, переходя через нулевое значение и становясь отрицательным. Поэтому каждое состояние упругой линии будет соответствовать некоторому случаю продольно-поперечного изгиба, но с неизвестным углом γ, если задана сила P, или с неизвестной силой P, если задан угол γ. Эти неизвестные определяются в результате расчета различного очертания упругой линии изогнутого стержня. Заметим, что форма II, для которой $\gamma < 0$, отличается от формы I наличием точки сжатия.

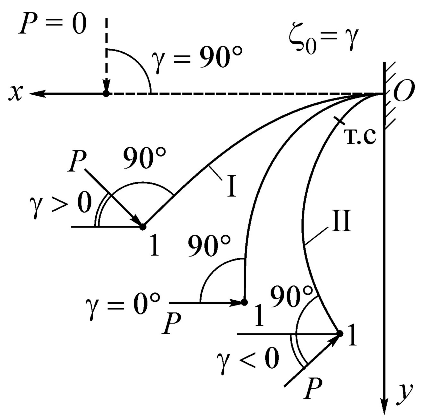


Рис. 2.10. Расчетная схема изгиба стержня при следящем перемещении силы

Пусть задана сила P. Неизвестный угол γ для форм I и II изменяется в следующих пределах: $\mathrm{I}: 90° \geq \gamma \geq 0$, $\mathrm{II}: 0 \geq \gamma \geq -90°$. Известными являются следующие коэффициенты подобия: $\beta = \sqrt{Pl^2 / H}$, ω_0, $\xi_1 = 90°$. Для определения эллиптических параметров имеем следующие выражения:

$$\mathrm{I}: F(k) - F(\varphi_0) = \beta,\ \varphi_1 = 90°,\ k = \sqrt{2}/2 \quad (\alpha = 45°);$$

$$\mathrm{II}: F(k) + F(\varphi_0) = \beta,\ \varphi_1 = 90°,\ k = \sqrt{2}/2.$$

Используя специальные таблицы [65], определяем неизвестное значение φ_0, а следовательно, и величины $F(\varphi_0)$, $E(\varphi_0)$, ξ_0 и ω_0. На основании этих данных находим изгибающий момент в заделке $M_0 = \omega_0\sqrt{PH}$ и угол γ соответственно для форм I и II:

$$\mathrm{I}: \gamma = |\xi_0|, \text{ т.е. } \gamma > 0;$$

$$\mathrm{II}: \gamma = -|\xi_0|, \text{ т.е. } \gamma < 0.$$

Затем по формулам $x = x'\cos\gamma + y'\sin\gamma,\ y = y'\cos\gamma - x'\sin\gamma$ получаем уравнение упругой линии для форм I и II:

$$\mathrm{I}:\ \frac{x'}{l} = \frac{2}{\beta}\big[E(\varphi) - E(\varphi_0)\big] - \frac{s}{l},\quad \frac{y'}{l} = \frac{2}{\beta}k(\cos\varphi_0 - \cos\varphi);$$

$$\mathrm{II}:\ \frac{x'}{l} = \frac{2}{\beta}\big[E(\varphi) - E(\varphi_0)\big] - \frac{s}{l},\ (0 \le s \le s_{\text{т.с}}),\quad \frac{y'}{l} = \frac{2}{\beta}k(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

$$\frac{x'}{l} = \frac{2}{\beta}\big[E(\varphi) + E(\varphi_0)\big] - \frac{s}{l},\quad (s_{\text{т.с}} \le s \le l).$$

Здесь значение φ в произвольной точке s упругой линии определяется по таблицам функций эллиптических параметров с учетом α = 45° для каждой из форм I и II согласно следующим уравнениям:

$\mathrm{I}: F(\varphi) = F(\varphi_0) + \beta(s/l);$

$\mathrm{II}: F(\varphi) = F(\varphi_0) - \beta(s/l) \quad (0 \le s \le s_{\text{т.с}}), \qquad F(\varphi) = \beta(s/l) - F(\varphi_0) \quad (s_{\text{т.с}} \le s \le l).$

Величина $s_{\text{т.с}}$ находится по формуле $s_{\text{т.с}}/l = F(\varphi_0)/\beta$. Для определения координаты концевой точки 1 упругой линии $\varphi_1 = 90°$, поэтому имеем

$$\mathrm{I}:\ \frac{x'}{l} = \frac{2}{\beta}\big[E(k) - E(\varphi_0)\big] - 1,\ \frac{y'}{l} = \frac{2}{\beta}k\cos\varphi_0;$$

$$\mathrm{II}:\ \frac{x'}{l} = \frac{2}{\beta}\big[E(k) + E(\varphi_0)\big] - 1,\ \frac{y'}{l} = -\frac{2}{\beta}k\cos\varphi_0.$$

Полученный результат подставляется в формулы, для определения x, y с учетом знака угла γ.

Таким образом, приведенные здесь уравнения полностью и точно решают в конечной форме любую задачу основного класса по готовым формулам и без составления и интегрирования дифференциальных уравнений.

§ 2.4. Метод эллиптических параметров в задачах, сводящихся к основному классу

При решении многих прикладных задач удается всю длину стержня разбить на конечное число участков, каждый из которых по отдельности находится в условиях задачи основного класса. Если рассматриваемая задача обладает симметрией, то длина стержня может быть разбита на две или более одинаковых частей. В этом случае исходная задача сводится к решению одной задачи основного класса и заключается в определении трех эллиптических параметров k, φ_0 и φ_1. Если же участки, на которые разбита длина стержня, неодинаковы, то в общем случае решаются n задач основного класса. При решении такой задачи требуется определить $k_1, \varphi_{01}, \varphi_{11}, \ ..., k_n, \varphi_{0n}, \varphi_{1n}$, для чего, кроме заданных на каждом участке величин, должны использоваться уравнения связи между участками.

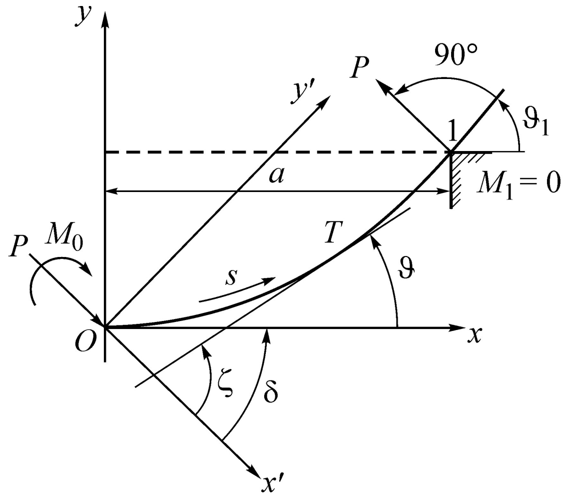


Рис.2.11. Расчетная схема изгиба стержня, лежащего на двух опорах

Пример 2.4. Рассмотрим решение задачи, приведенной на рис. 2.1, *б*. Эта задача в виду ее симметрии, сводится к решению только одной задачи (рис. 2.11), из условия которой следует, что $M_1 = 0$, $P = Q/(2\cos\vartheta_1)$, $\delta = 90° - \vartheta_1$, $\vartheta_0 = 0$, $x_1 = a$. Известными являются $\xi_1 = 90°$, $\omega_1 = 0$, а неизвестными – величины β, ϑ_1, P, δ. Также неизвестна длина упругой линии l, которая в процессе изгиба увеличивается при сохранении постоянной координаты a.

Точка 1 является точкой перегиба, поэтому $\varphi_1 = 90°$ и $k = \sqrt{2}/2$. Для определения параметра φ_0 надо знать еще один коэффициент подобия. Будем задавать угол δ. Из схемы (рис. 2.11) вытекает $\xi_0 = \delta$ и далее $\sin\varphi_0 = \left(\frac{1}{k}\right)\times \times\sin\left(\frac{\xi_0}{2}\right)$. Отсюда определяем значение φ_0 по заданному углу δ, при этом $0 < \varphi_0 \le 90°$. Запишем выражение $x_1 = a = x_1'\cos\delta + y_1'\sin\delta$ и, учитывая условие $\varphi_1 = 90°$, а также формулы (2.34) и (2.37), получим

$$\frac{a}{l} = \left[\frac{2\left[E(k) - E(\varphi_0)\right]}{F(k) - F(\varphi_0)} - 1\right]\cos\delta + \frac{2k\cos\varphi_0}{F(k) - F(\varphi_0)}\sin\delta,$$

откуда определяется значение l длины дуги 01 упругой линии. После этого, согласно (2.34) и (2.43), найдем силу реакции $P = \left(\frac{H}{l^2}\right)\left[F(\varphi_1) - F(\varphi_0)\right]^2$. Далее находим, какой внешней силе Q (см. рис. 2.1, *б*) соответствует тот угол δ, который был задан в начале решения, а именно $Q = 2P\sin\delta$. Затем вычисляем поворот концевого сечения стержня $\vartheta_1 = 90° - \delta$ и все остальные характеристики. Например, прогиб v в середине стержня вычисляется по формуле $\frac{v}{l} = \frac{y_1}{l} = \frac{2}{\beta}k\cos\varphi_0\cos\delta - \left\{\frac{2}{\beta}\left[E(k) - E(\varphi_0)\right] - 1\right\}\sin\delta.$

Пример 2.5. Рассмотрим случай, когда необходимо решать две различные взаимосвязанные задачи основного класса (рис. 2.12, *а*). В данном случае имеем два участка (рис. 2.12, *б*), каждый из которых находится в условиях, соответствующих задаче основного класса.

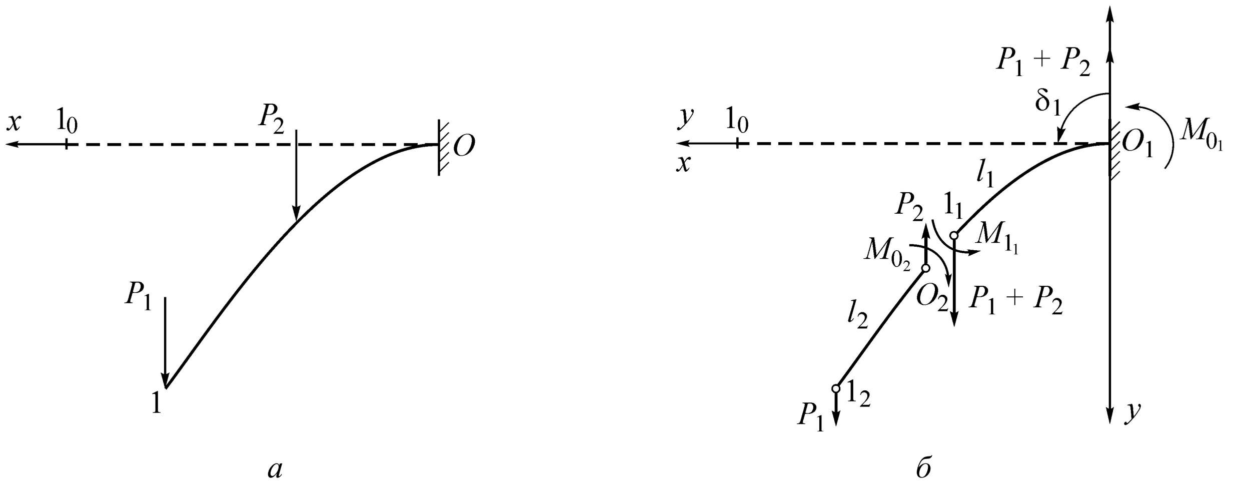


Рис. 2.12. Схема консольного изгиба стержня под действием двух сил:
а – нагружения стержня; *б* – расчетная

Из условия задачи известно, что $\beta_1 = \sqrt{(P_1+P_2)l_1^2 / H_1}$; $\beta_2 = \sqrt{P_1 l_2^2 / H_2}$; $\delta_1 = \delta_2 = \xi_{0_1} = 90°$; $M_{1_2} = 0$. Кроме того, из условия сопряжения участков имеем $M_{0_2} = M_{1_1}$, $\vartheta_{0_2} = \vartheta_{1_1}$, поэтому известными являются коэффициенты подобия β_1, β_2, ω_{1_2}, $\xi_{0_1} = 90°$ и $\xi_{0_2} = \xi_{1_1}$, $\omega_{0_2} / \omega_{1_1} = \sqrt{(P_1+P_2)/P_1}$.

Этого достаточно для определения шести эллиптических параметров: k_1, φ_{0_1}, φ_{1_1} и k_2, φ_{0_2}, φ_{1_2}. Заметим, что второй участок имеет точку перегиба 1_2. Первый участок может относиться как к формам перегибного, так и бесперегибного рода. Вследствие того, что в начальном состоянии стержня, как кривизна, так и внешний момент равны нулю, то в начале процесса деформирования первый участок примет форму перегибного рода (хотя и без точки перегиба). Тогда из формул (2.34) – (2.37) следует:

$$\varphi_{1_2} = 90°;\ k_1 \sin\vartheta_{0_1} = \sqrt{2}/2;$$

$$F(\varphi_{1_1}) - F(\varphi_{0_1}) = \beta_1;$$

$$F(k_2) - F(\varphi_{0_2}) = \beta_2;$$

$$k_2 \cos\varphi_{0_2} = k_1 \cos\varphi_{1_1};\ k_2 \sin\varphi_{0_2} = k_1 \sin\varphi_{1_1}.$$

Из этих равенств определяются эллиптические параметры для обоих участков, а затем и остальные характеристики. При этом надо учесть, что координаты для первого участка находятся по формулам $x = y'$, $y = -x'$, а для второго – $x = y' + y'_{1_1}$, $y = -(x' + x'_{1_1})$.

§ 2.5. Численный метод расчета перемещений при изгибе стержней

Описанный в § 2.3 метод эллиптических параметров, как и изложенный в работе [65] метод упругих параметров (графо-аналитический метод), является важным для качественного исследования различных форм равновесия упругой линии при сильном изгибе тонких стержней. Указанные методы позволяют во многих задачах довести до конца также и численные расчеты. Однако точные решения в специальных функциях нелинейной задачи деформирования криволинейного стержня можно получить только в ограниченном числе частных случаев.

Решение многих задач основного класса и задач, сводящихся к основному классу, связано со значительными расчетными трудностями. Еще большие трудности имеют место при решении задач, не сводящихся к основному классу (случаи распределенных нагрузок; сосредоточенных нагрузок, приложенных не только по концам стержня; сложные законы изменения жесткости поперечного сечения по длине стержня; переменной начальной кривизны, исключая кусочно-постоянный закон изменения и т.п.).

Эти задачи не имеют точного решения. В этих случаях допускается всю длину оси изогнутого стержня разбивать на конечное число отрезков малой длины. Предполагается, что вся распределенная на каждом отрезке нагрузка сосредоточена на одном его конце, там же сосредоточено все изменение жесткости при изгибе и начальной кривизне оси стержня, которые имеют место на отрезке. Тогда каждый отрезок находится в условиях задачи, относящихся к основному классу. Математическое описание процесса нахождения решения таких задач с помощью диаграмм упругих параметров возможно в общем случае лишь в дифференциальной форме. Численные методы расчета, базирующиеся на использовании диаграмм упругих параметров, изложены в работе [65]. Подход, описываемый далее, лежит в основе различных методов физической дискретизации. Под термином «физическая дискретизация» понимается любая процедура, сводящая бесконечное число степеней свободы к конечному числу путем перехода к дискретной физической модели. Однако при этом остается открытым вопрос о сходимости, устойчивости и аппроксимации приближенного решения [24].

1. Постановка исходной дифференциальной краевой задачи. Представим уравнение упругой линии (2.6) для общего случая сильного изгиба тонких стержней в безразмерном виде:

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2} = -\frac{P_c l^2}{H}\sin\left(\vartheta+\delta_c\right) - \frac{P_q l^2}{H}\sin\left(\vartheta+\delta_q\right) + \frac{ml^2}{H} + \frac{d^2\theta}{ds^2},\ 0 \le s \le 1, \quad (2.47)$$

где $s = s^*/l$, s^* – текущая длина дуги упругой линии; l – длина стержня.

Значения всех переменных в начальной (s = 0) и концевой (s = 1) точках упругой линии стержня (см. рис. 2.3) будем снабжать соответственно индексами 0 и 1. Решение дифференциального уравнения (2.47) ищем в виде $\vartheta=\vartheta(s)$. Кроме того, требуется определять координаты точек упругой линии

$$\frac{x}{l}=\int_0^s \cos(\vartheta(s))ds\,,\ \frac{y}{l}=\int_0^s \sin(\vartheta(s))ds\,. \tag{2.48}$$

В различных прикладных задачах сильного изгиба стержней входящие в уравнение (2.47) величины могут задаваться по-разному. Различными могут быть и граничные условия на концах стержня. Рассмотрим два основных варианта граничных условий:

- условие первого рода

$$\vartheta(s)=c_0 \text{ при } s=0,\ \vartheta(s)=c_1 \text{ при } s=1; \tag{2.49}$$

- условия второго рода

$$\vartheta(s)=c_0 \text{ при } s=0,\ \frac{d\vartheta}{ds}=c_2 \text{ при } s=1. \tag{2.50}$$

Условия (2.49) имеют место при обоих закрепленных концах стержня, а условия (2.50) – при одном свободном конце 1, где задается величина кривизны

$$\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)_1=\frac{M_1 l}{H}+l\kappa_0=c_2\,,$$

что имеет место, например, при изгибе консольно закрепленного стержня. В дальнейшем ограничимся этими двумя родами краевых условий, но могут встретиться и другие варианты граничных условий [65].

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f_1(s,\vartheta)&=-\frac{P_\text{c}(\vartheta)l^2}{H}\sin\left(\vartheta+\delta_\text{c}(\vartheta)\right)-\frac{P_q(s,\vartheta)l^2}{H}\sin\left(\vartheta+\delta_q(s,\vartheta)\right);\\ f_2(s)&=\frac{ml^2}{H}+\frac{d^2\theta(s)}{ds^2}, \end{aligned} \tag{2.51}$$

тогда уравнение (2.47) примет следующий вид:

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2}=f_1(s,\vartheta)+f_2(s)\equiv f(s,\vartheta),\qquad 0\le s\le 1. \tag{2.52}$$

Решение сложных задач сильного изгиба тонких стержней (краевая задача (2.47), (2.49), (2.50)) возможно лишь при использовании численных методов, ориентированных на использование компьютера. Рассмотрим кратко некоторые из них.

Известен ряд некоторых численных методов решения плоских геометрически нелинейных задач расчета стержней, которые представляют собой метод последовательных приближений, на каждом шаге которого решается линейная задача. Например, по методике решения геометрически нелинейных задач расчета упругих стержневых систем методом начальных параметров* расчет ведется итерационным путем с использованием дифференциальных уравнений линейной задачи, по которой определяются изгибающие моменты в поперечных сечениях стержня и соответствующие им кривизны. Последние в следующей итерации рассматриваются как кривизны оси недеформированного криволинейного стержня. Расчет ведется, пока изгибающие моменты, найденные в двух соседних итерациях, совпадут (с заданной точностью). При расчете продольная ось стержня разбивается на достаточно большое (например, равное 100–1000) число участков одинаковой или разной длины. Отметим, что для достижения приемлемой точности требуется, как правило, большое число разбиений при дискретизации решаемой задачи. Объем вычислений при этом резко возрастает за счет большого числа итераций (порядка 50 и выше). Кроме того, при реализации данного метода наблюдается осцилляция решения (деформированная ось в каждом приближении располагается между осями, полученными в двух предыдущих приближениях). С помощью данного метода в работе [56] разработана методика расчета усилия растяжения в процессе гибки-намотки с учетом кривизны неотформованного участка профильной заготовки.

Вариационные методы используются преимущественно при решении линейных задач. Однако, как показано в работах [41,62], на основе вариационных принципов механики можно получить форму упругой линии кривой деформированного стержня при больших перемещениях. Использование вариационных принципов механики при решении задач эластики позволяет получать исходные уравнения движения, решение которых при известных начальных и граничных условиях раскрывает суть происходящих физических процессов.

К недискретным численным методам можно отнести методы последовательных приближений и пристрелки. Теоретическим обоснованием метода последовательных приближений служит принцип сжимающих отображений**. Детальное изучение возможностей метода осуществляется с помощью перехода от уравнения (2.2) к соответствующему интегральному уравнению. Однако применение этого метода ограничено, так как использование принципа сжимающих отображений приводит к жестким ограничениям значения физических характеристик упругих систем. Метод пристрелки может быть применен для стержня переменной жесткости произвольной конфигурации [47].

---

* *Шпиро, И.Г.* Расчет гибких стержней методом начальных параметров /И.Г. Шпиро, С.Г. Кузнецова // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1981. – №12. – С.46–50.

** *Красносельский, М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М.А. Красносельский. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 392 с.

Суть этого метода заключается в подборе таких неизвестных краевых условий на одном конце интервала, чтобы выполнились заданные краевые условия на другом конце интервала. Эта задача решается методом последовательных приближений, в процессе которого заданное приближение уточняется методом Ньютона. Матрица производных в этом методе ищется приближенно, а для решения серии задач Коши можно использовать метод Рунге – Кутта 4-го порядка. Заметим, что уравнение (2.2) в декартовой системе координат является одномерным вариантом эллиптического уравнения в частных производных, в силу чего при пошаговом интегрировании уравнения (2.2) и с учетом граничных условий можно ожидать некоторую неустойчивость [24, 69]. Действительно, интегрирование вперед от начала интервала или назад от конца эквивалентно решению задачи Коши для эллиптического уравнения, а этот процесс является неустойчивым. Построение решения путем сшивания на середине также неэффективно, поскольку вопрос о сходимости приближенного решения остается невыясненным.

Подытожив изложенное, можно сделать вывод о том, что при численном решении задачи сильного изгиба тонких стержней наиболее подходящими являются методы, основанные на математической дискретизации исходной краевой задачи. Таких методов достаточно много.

Доступный «пониманию» компьютера вычислительный алгоритм, т.е. последовательность операций (арифметических, логических и т.д.), в результате выполнения которых находится решение, должен удовлетворять определенным требованиям. К ним относится, прежде всего, необходимость получить решение с заданной точностью за разумное и по возможности минимальное число действий. При этом объемы обрабатываемой информации не могут превышать возможностей емкости машинной памяти. В процессе вычислений нельзя допускать возникновения не воспринимаемых компьютером слишком больших (и слишком малых) чисел. Структура алгоритма должна учитывать архитектуру вычислительной системы, быть достаточно простой и т.д.

Возможны различные способы математической дискретизации исходной дифференциальной краевой задачи (2.47), (2.49), (2.50). В настоящее время при численном решении плоских геометрически нелинейных задач расчета стержней используются различные модификации метода конечных элементов (МКЭ) и метода конечных разностей (МКР) [4,25,43,44,47,48,65,73,75,79 и др.], каждый из которых обладает своими достоинствами и недостатками. Все разрабатываемые модификации МКЭ и МКР имеют своей целью увеличить вычислительные возможности программ с целью расширения сферы их применения. Более подробно прикладная теория МКЭ и МКР изложена в специальной литературе, которой достаточно много.

2. Метод конечных элементов **[43].** Кратко изложим сущность МКЭ и основные этапы его практической реализации. Основная идея МКЭ состоит в том, что любую непрерывную величину можно аппроксимировать моделью, состоящей из отдельных элементов (участков). На каждом из них исследуемая непрерывная величина аппроксимируется кусочно-непрерывной функцией, которая строится на значениях исследуемой непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемого элемента. В общем случае искомая величина заранее неизвестна. Нужно определить значение этой величины в некоторых внутренних точках области. Дискретную модель, однако, легко построить, если сначала предположить, что известны числовые значения этой величины в некоторых внутренних точках области. После этого можно перейти к общему случаю. Обычно при построении дискретной модели непрерывной величины поступают следующим образом.

1. Область непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области.

2. В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек, которые называются узловыми точками или просто узлами.

3. Значение непрерывной величины в каждой узловой точке первоначально считается известным, однако надо исходить из того, что эти значения в действительности еще предстоит определить путем наложения на них дополнительных ограничений в зависимости от физической сущности задачи (чаще всего из условия минимизации некоторой величины).

4. Используя значения исследуемой непрерывной величины в узловых точках и ту или иную аппроксимирующую функцию, далее определяют значения исследуемой величины внутри области.

Заметим, что аппроксимирующие функции чаще всего выбираются в виде линейных, квадратичных или кубических полиномов. Для каждого элемента можно выбирать свой полином, но полиномы подбираются таким образом, чтобы сохранить непрерывность величины вдоль границ элемента. Таким образом, при использовании МКЭ решение краевой задачи для заданной области ищется в виде набора функций, определенных на некоторых подобластях (конечных элементах).

Применительно к нелинейному деформированию тонких стержней наиболее существенные результаты получены в рамках нелинейного варианта МКЭ. Успех применения МКЭ к решению прикладных задач во многом определяется задаваемыми функциями формы, которые должны удовлетворять свойством полноты. Обеспечение таких свойств для конечных элементов криволинейной формы всегда сопряжено с определенными трудностями, исследования в этом направлении очень актуальны. Эффективное применение МКЭ к расчету тонкостенных конструкций ЛА связано с уточненным описанием их геометрических характеристик. Решение этой задачи открывает возможность использования алгоритмов автоматической разбивки на элементы, что упрощает исследование сходимости решения.

Отметим работы [47,48], в которых на основе соотношений, описывающих деформирование криволинейных стержней, построен метод, в рамках которого получены новые эффективные конечно-элементные аппроксимации в стержнях. Использование таких аппроксимаций позволяет существенно сократить количество неизвестных в конечно-элементной модели стержня. Например, при решении тестовой задачи о сжатии эллиптического кольца двумя противоположными силами заданная точность в сравнении с точным решением задачи [65] была достигнута при использовании двух разработанных конечных элементов ($N = 2$). Лицензированный конечно-элементный комплекс COSMOS/M дает такую же точность при $N = 30$ элементах. Для стержневой модели самолета с естественной круткой стержней построена методика расчета форм и частот колебаний. Примененное в аппроксимации кривой описание поворота ее бесконечно малого элемента и использование глобальных компонентов векторных функций позволило авторам записать в алгоритмичной форме уравнения нелинейного деформирования пространственного криволинейного стержня, осевая линия которого при этом может иметь скачки кривизны и изломы. Кроме того, записаны уравнения обратной задачи нелинейного деформирования стержня. Для численного решения этих уравнений применен метод пристрелки.

3. Конечно-разностный метод. Основная идея применения разностных схем состоит в замене непрерывных переменных дискретными. Функции и аргументы заменяются набором чисел, заданных в точках множества, называемого сеткой, а разность аргументов в соседних узлах сетки называют шагом сетки. При решении дифференциальных уравнений производные в уравнениях и граничных условиях заменяются отношением конечных разностей функций и аргументов. В результате исходная краевая задача заменяется системой алгебраических уравнений. Считается, что разностное уравнение аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если при неограниченном измельчении сетки разностное уравнение стремится к точному.

Заметим, что построение разностной схемы может быть осуществлено различными способами и при этом возникает проблема построения наилучшей схемы для данной задачи. При выборе разностной схемы можно руководствоваться различными критериями: минимальное время счета, обеспечение высокой точности расчета и т.д. Для нелинейных задач теория разностных схем, как правило, не развита и исследование устойчивости в этих случаях сопряжено с большими трудностями. Здесь при разработке численных алгоритмов важное значение обычно придается однородности разностной схемы, т.е. возможности проведения расчетов по единому алгоритму без выделения нерегулярностей и особенностей. При рассмотрении сложных нелинейных задач могут применяться апостериорные исследования с соответствующими корректировками в программе.

Изложим численный метод, в котором при переходе от исходной дифференциальной краевой задачи к дискретной применим разностный метод, а для решения результирующей нелинейной системы алгебраических уравнений воспользуемся итерационным методом Ньютона [65]. Возникающие в методе Ньютона системы линейных уравнений с трехдиагональными матрицами могут быть решены методом немонотонной прогонки. Таковы два основных этапа численного метода, предлагаемого для решения любых задач расчета сильного изгиба тонких стержней. При этом следует отметить, что из аппроксимации и устойчивости разностной схемы следует сходимость приближенного решения к точному решению [70, 73].

Рассмотрим этап построения разностной задачи. Для этого уравнение (2.52) с условиями (2.49) или (2.50) на непрерывной области $0 \le s \le 1$ аппроксимируем на равномерной сетке $\overline{\omega}$ с шагом h и N узлами:

$$\overline{\omega} = \{s_i = (i-1)h,\ i = 1,2,\dots,N,\ h = 1/(N-1)\}$$

следующей разностной схемой в случае краевых условий первого рода:

$$A(U)_i = F_i,\ \ 2 \le i \le N-1,\ u_1 = c_0,\ \ i = 1,\ \ u_N = c_1,\ \ i = N, \tag{2.53}$$

или в случае краевых условий второго рода:

$$A(U)_i = F_i,\ \ 2 \le i \le N-1,\ u_1 = c_0,\ \ i = 1,$$

$$\frac{2}{h}u_{s,N} + \frac{P_{\text{c}}(u_N)l^2\sin\left(u_N + \delta_{\text{c}}(u_N)\right)}{H} +$$

$$+\frac{P_q(1,u_N)l^2\sin\left(u_N + \delta_q(1,u_N)\right)}{H} = \frac{2}{h}c_2, \quad i = N. \tag{2.54}$$

Здесь использованы следующие обозначения:

u_i – значение сеточной функции U в i-м узле сетки, которое принимается за приближенное решение для дифференциальной задачи $U = (u_1, u_2, \dots, u_N)^{\text{т}}$;

$A(U)_i$ – значение в i-м узле сетки нелинейного оператора $A(U)$ разностной схемы:

$$A(U)_i = u_{\bar{s}s,i} + \frac{P_{\text{c}}(s_i,u_i)l^2}{H}\sin\left(u_i + \delta_{\text{c}}(s_i,u_i)\right) +$$

$$+\frac{P_q(s_i,u_i)l^2}{H}\sin\left(u_i + \delta_q(s_i,u_i)\right), \quad 2 \le i \le N-1; \tag{2.55}$$

F_i – значение правой части разностной схемы в i-м узле сетки:

$$F_i = \frac{m(s_i)l^2}{H} + \left(\frac{d^2\theta(s_i)}{ds^2}\right)_i, \quad 2 \le i \le N-1. \tag{2.56}$$

$u_{\bar{s}s,i}$ – разностная производная второго порядка в i-м узле сетки:

$$u_{\bar{s}s,i} = \frac{1}{h}\left(\frac{u_{i-1} - u_i}{h} - \frac{u_i - u_{i+1}}{h}\right), \quad 2 \le i \le N-1, \tag{2.57}$$

причем

$$u_{\bar{s},N} = \frac{1}{h}(u_N - u_{N-1}). \tag{2.58}$$

Рассмотрим более общую задачу, когда изгибаемый стержень составлен из n участков, разделенных между собой (рис. 2.13, *а*) либо точками приложения сосредоточенных сил или моментов, либо границами участков распределенных нагрузок, либо ступенчатым изменением поперечного сечения стержня, либо ступенчатым изменением начальной кривизны стержня. На границах стыков таких участков должны соблюдаться условия непрерывности упругой линии:

$$(\vartheta)_{\text{лев}} = (\vartheta)_{\text{прав}}; \quad (d\vartheta/ds)_{\text{лев}} = (d\vartheta/ds)_{\text{прав}} \tag{2.59}$$

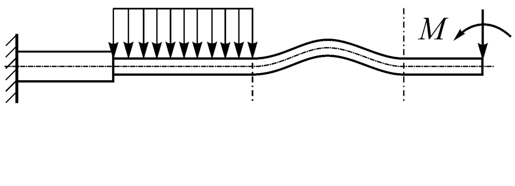
или

$$(d\vartheta/ds)_{\text{прав}} = (d\vartheta/ds)_{\text{лев}} = \Delta(d\theta/ds), \tag{2.60}$$

если в точке стыка ступенчато меняется начальная кривизна стержня, или

$$(d\vartheta/ds)_{\text{прав}} = (d\vartheta/ds)_{\text{лев}} = Ml/H,$$

если в точке стыка приложен сосредоточенный момент M.



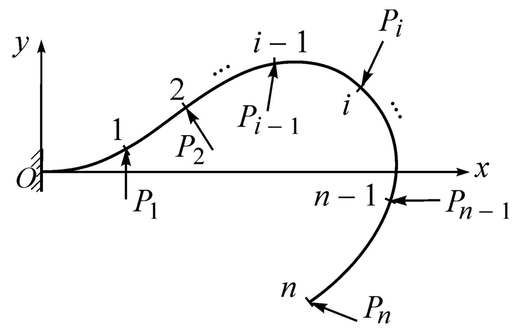


Рис. 2.13. Изгиб стержня под действием сложной нагрузки:
а – схема нагружения; *б* – расчетная схема

Для каждого участка упругой линии стержня составляется дифференциальное уравнение типа (2.52), в котором согласно (2.51), функции $f_1(s,\vartheta)$

и f_2(s) должны вычисляться на каждом участке с учетом силовых факторов, присутствующих на других участках стержня. Например, в случае изгиба консольно закрепленного тонкого стержня произвольного очертания несколькими сосредоточенными силами (рис. 2.13, *б*) на каждом L-м участке получим выражение для суммарной силы P_{cL} и ее угла наклона δ_{cL}:

$$P_{\text{c}L}=\sqrt{\left(\sum_{k=L}^{n}P_{xk}\right)^2+\left(\sum_{k=L}^{n}P_{yk}\right)^2}\,, \tag{2.61}$$

где P_x, P_y – проекции векторов приложенных к стержню сил;

$$\delta_{\text{c}L}=-\text{arctg}\left(\sum_{k=L}^{n}P_{yk}\Big/\sum_{k=L}^{n}P_{xk}\right). \tag{2.62}$$

Запишем дифференциальное уравнение упругой линии (2.47) для каждого L-го участка стержня, где примем $s_{L-1}\le s\le s_L$, $L=1,2,...,n$. В общем случае при наличии нескольких сосредоточенных и распределенных нагрузок и при переменной начальной кривизне стержня имеем уравнение вида

$$\frac{d^2\vartheta}{ds^2}=-\overline{P}_{\text{c}L}(\vartheta)\sin(\vartheta+\delta_{\text{c}L}(\vartheta))-\overline{P}_{qL}(s,\vartheta)\sin(\vartheta+\delta_{qL}(s,\vartheta))+f_{2L}(s), \tag{2.63}$$

где $\overline{P}_{\text{c}L}=\dfrac{P_{\text{c}L}l^2}{H_L}$; $\overline{P}_{qL}=\dfrac{P_{qL}l^2}{H_L}$; $f_{\text{c}L}(s)=\dfrac{m_L l^2}{H_L}+\dfrac{d^2\theta}{ds^2}$; l – длина стержня, s_L – безразмерная длина дуги s в концевой точке L-го участка стержня, отсчитанная от начальной точки 0 стержня. Величины $P_{\text{c}L}$ и $\delta_{\text{c}L}$ определяются формулами (2.61) и (2.62).

На концах стержня можно записать условия (2.49) либо (2.50), где $c_2=M_1 l/H_n+l\kappa_0^1$.

Для построения разностной схемы, аппроксимирующей дифференциальную задачу (2.63), введем квазиравномерную сетку ϖ^*, т.е. сетку с шагом *h(L)*, равномерную на каждом из *n* участков стержня. В этом случае разностную аппроксимацию дифференциальной задачи представим в случае краевых условий первого рода следующим образом:

$$\tilde{A}(U)_i=\tilde{F}_i;\ 2\le i\le N-1;\ u_1=c_0;\ i=1,\ u_N=c_1;\ i=N. \tag{2.64}$$

В случае краевых условий второго рода имеем

$$\tilde{A}(U)_i=\tilde{F}_i;\ 2\le i\le N-1;\ u_1=c_0;\ i=1.$$

$$\frac{2}{h(N-1)+h(N)}u_{\bar{s}N}+\frac{P_{\text{c}}(1,u_N)(1,u_N)l^2}{H(1)}\sin\left(u_N+\delta_{\text{c}}(1,u_N)\right)+ \tag{2.65}$$

$$+\frac{P_q(1,u_N)l^2}{H(1)}\sin\left(u_N+\delta_q(1,u_N)\right)=\frac{2}{h(N-1)+h(N)}c_2,\quad i=N. \quad (2.65)$$

Здесь $\tilde{A}(U)_i$ – значение в i-м узле квазиравномерной сетки нелинейного оператора разностной схемы $\tilde{A}(U)$:

$$\tilde{A}(U)_i=u_{\overline{s}\overline{s},i}+\frac{P_c(s_i,u_i)l^2}{H(s_i)}\sin\left(u_i+\delta_c(s_i,u_i)\right)+$$

$$+\frac{P_q(s_i,u_i)l^2}{H(s_i)}\sin\left(u_i+\delta_c(s_i,u_i)\right),\quad 2\le i\le N-1; \quad (2.66)$$

$\tilde{F}_i$ – значение правой части разностной схемы в i-м узле квазиравномерной сетки:

$$\tilde{F}_i=\frac{m(s_i)l^2}{H(s_i)}+\left(\frac{d^2\theta(s_i)}{ds^2}\right)_i,\ 2\le i\le N-1; \quad (2.67)$$

$u_{\overline{s}\overline{s},i}$ – разностная производная второго порядка в i-м узле сетки:

$$u_{\overline{s}\overline{s},i}=\frac{2}{h(i)+h(i+1)}\left[\frac{u_{i-1}-u_i}{h(i)}-\frac{u_i-u_{i+1}}{h(i+1)}\right],\ 2\le i\le N-1,\quad 2\le i\le N-1, \quad (2.68)$$

где $h(i)=s_i-s_{i-1}$ – шаг сетки в i-м узле с координатой s_i, $2\le i\le N$.

Таким образом, на первом этапе решения исходные краевые дифференциальные задачи (2.47) и (2.63) сведены к системам нелинейных уравнений вида

$$A(U)=F, \quad (2.69)$$

где A – нелинейный оператор; F – правая часть разностной схемы (включая краевые условия).

Вопросы исследования сходимости и точности построенных разностных задач подробно изучены в теории разностных схем, приведенных в работах [70,71]. Рассмотрим второй этап численного метода, состоящий в решении нелинейных разностных задач методом Ньютона [65]. Для решения системы (2.69) воспользуемся итерационным методом Ньютона – Канторовича [42], в котором итерационные приближения U_{k+1} сеточной функции U находятся по следующей схеме:

$$B_k(U_{k+1}-U_k)+A(U_k)=F,\quad k=0,1,2,..., \quad (2.70)$$

причем в качестве U_0 берется произвольное начальное итерационное приближение $U_0\in R^N$, а линейный оператор $B_k=A'(U_k)$ есть производная Гато оператора A в точке U_k. Вычислим оператор Гато, учитывая дифференцируемость функций $\varphi_i(U) = (A(U))_i$ – значений оператора в i-м узле сетки. Воспользуемся тем фактом, что если в (N+1)-мерном пространстве оператор A имеет производную, то производная Гато вычисляется как матрица $B(U)$ частных производных: $\partial\varphi_i(u_1,u_2,...,u_N)/\partial u_j$, $i=1,2,...,N$, $j=1,2,...,N$. Вид функций $\varphi_i(u_1,u_2,...,u_N)$ получим из краевого условия в начальной точке стержня при s = 0:

$$\varphi_0(u_1,u_2,...,u_N) = u_0, \tag{2.71}$$

из формул (2.55) или (2.66), определяющих действие оператора A во внутренних узлах сетки:

$$\varphi_i(u_1,u_2,...,u_N) = u_{\overline{ss},i} + \frac{P_c(s_i,u_i)l^2}{H}\sin(u_1,u_2,...,u_N) +$$

$$+\frac{P_q(s_i,u_i)l^2}{H}\sin(u_1,u_2,...,u_N), \quad 2\le i\le N-1 \tag{2.72}$$

и из краевого условия в концевой точке стержня при s = 1:

- в случае краевого условия первого рода

$$\varphi_N(u_1,u_2,...,u_N) = u_1 - c_1 \tag{2.73}$$

или

- в случае краевого условия второго рода

$$\varphi_N(u_1,u_2,...,u_N) = \frac{2}{h(N)}\left(u_{\overline{s},N} - c_2\right) + \frac{P_c(s_N,u_N)l^2}{H}\sin\left(u_N + \delta_c(s_N,u_N)\right) +$$

$$+\frac{P_q(s_N,u_N)l^2}{H}\sin\left(u_N + \delta_q(s_N,u_N)\right). \tag{2.74}$$

Вычислим частные производные $\partial\varphi_i/\partial u_j$:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} = 1,\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_{i-1}} = \frac{2}{h_i + h_{i+1}}\frac{1}{h_i},\ \frac{\partial\phi_i}{\partial u_{i+1}} = \frac{2}{h_i + h_{i+1}}\frac{1}{h_{i+1}};$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_i} = -\frac{2}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right) + \psi_i;$$

$$\psi_i = \frac{\partial P_c(s_i,u_i)}{\partial u_i}\frac{l^2}{H}\sin\left(u_i + \delta_c(s_i,u_i)\right) + \frac{P_c(s_i,u_i)l^2}{H}\cos\left(u_i + \delta_c(s_i,u_i)\right)\times$$

$$\times\left(1 + \frac{\partial\delta_c(s_i,u_i)}{\partial u_i}\right) + \frac{\partial P_q(s_i,u_i)}{\partial u_i}\frac{l^2}{H}\sin\left(u_i + \delta_c(s_i,u_i)\right) + \frac{P_q(s_i,u_i)l^2}{H}\times \tag{2.75}$$

$$\times\cos\left(u_i+\delta_c\left(s_i,u_i\right)\right)\left(1+\frac{\partial\delta_c(s_i,u_i)}{\partial u_i}\right),\quad i=2,3,...,N-1, \tag{2.75}$$

• в случае краевого условия первого рода

$$\frac{\partial\phi_N}{\partial u_N}=1;$$

• в случае краевого условия второго рода в концевой точке (s = 1) стержня

$$\frac{\partial\varphi_N}{\partial u_{N-1}}=\frac{2}{h_N^2},\ \frac{\partial\phi}{\partial u_N}=-\frac{2}{h_N^2}+\psi_N.$$

Остальные частные производные $\partial\varphi_i\,/\,\partial u_j$ равны нулю.

Таким образом, в нашем случае производная Гато нелинейного оператора A разностной схемы есть трехдиагональная матрица B вида

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ -a_2 & c_2 & -b_3 & 0 & & & 0 & \\ 0 & -a_3 & c_3 & -b_4 & & & & \\ \hdashline & & & & -a_{N-2} & c_{N-2} & -b_{N-1} & 0 \\ & 0 & & & 0 & -a_{N-1} & c_{N-1} & -b_N \\ & & & & 0 & 0 & -a_N & c_N \end{pmatrix} \tag{2.76}$$

с элементами

$$c_i=\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_i},\ a_i=-\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_{i-1}},\ b_i=-\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_{i+1}},\ i=1,2,...,N. \tag{2.77}$$

Алгоритм расчета сильного изгиба тонких стержней, использующий итерационный процесс по методу Ньютона, выглядит следующим образом.

Этап 1. Номер итерации k = 0. Задание начальных приближений u_0 угла наклона касательной ϑ в узлах сетки, расчет функции f_2(s) правой части дифференциального уравнения упругой линии, а также значений кривизны κ_0 и краевого условия в концевой точке s = 1 стержня, задание требуемой точности вычислений ε и максимального числа итераций при решении нелинейных систем уравнений.

Рассмотрим более подробно действия на данном этапе. Зададим начальное приближение для U в следующем виде:

$$U_0=\left(c_0,(u_0)_2,...,(u_0)_{N-1},(u_0)_N\right)^{\mathrm{T}},$$

где имеем $(u_0)_N = c_1$ – в случае краевого условия первого рода и $(u_0)_N$ – произвольно в случае краевого условия второго рода в концевой (s = 1) точке стержня.

Остановимся теперь на вычислении правых частей дифференциального уравнения упругой линии стержня и краевого условия. Для кривых стержней общего вида линия первоначального очертания обычно задается как функция $y = f(x)$, определяющая конфигурацию стержня в декартовой системе координат xOy. Известно, что при этом кривизна упругой линии определяется следующей формулой:

$$\frac{1}{l}\frac{d\theta}{ds} = \kappa_0 = \frac{d^2y/dx^2}{\left[1+\left(dy/dx\right)^2\right]^{3/2}},, \tag{2.78}$$

а координаты s и x связаны соотношением

$$s = \frac{1}{l}\int_0^x \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx \tag{2.79}$$

или, иначе

$$\Phi(x,s) = \int_0^x \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx - ls = 0. \tag{2.80}$$

Введем обозначения

$$\frac{dy}{dx} = f'(x),\ \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x),\ \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x),\ F(x,s) = \frac{f''(x)}{\left(1+[f'(x)]^2\right)^{3/2}}.$$

По правилу дифференцирования сложной функции после ряда преобразований найдем:

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = l^2\,\frac{f'''(x)\left(1+[f'(x)]^2\right)-3f'(x)[f''(x)]^2}{\left(1+[f'(x)]^2\right)^3}. \tag{2.81}$$

Из выражения (2.78) находим

$$\kappa_0\big|_{s=1} = \left.\frac{f''(x)}{\left(1+[f'(x)]^2\right)^{3/2}}\right|_{s=1}, \tag{2.82}$$

откуда следует алгоритм вычисления значений $\left.\left(d^2\theta/ds^2\right)\right|_{s_i}$ и $\kappa_0\,|_{s_n} = 1$. Для всех узлов сетки $i = 1,2,\ldots,N$ необходимо найти корни $x_i = x(s_i)$ уравнения

$$\Phi(x,s_i) = 0 \tag{2.83}$$

и, подставив найденные корни в формулы (2.81) и (2.82), получить искомые значения. Уравнение (2.83) будем решать с помощью метода Ньютона:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\Phi(x^{(k)}, s_i)}{\Phi'(x^{(k)}, s_i)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\Phi'(x,s) = d\Phi / dx = \sqrt{1+[f'(x)]^2}$. При этом $x^{(0)}$ будет начальным приближением, задаваемым для нулевого номера итерации (k=0), тогда

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\int\limits_0^{x^{(k)}} \sqrt{1+[f'(z)]^2}\,dz - ls}{\sqrt{1+\left[f'(x^{(k)})\right]^2}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Итак, для произвольных функций $y = f(x)$ алгоритм вычисления координат x_i, соответствующих узлам сетки s_i, заключается в следующих действиях:

1) задаем i=1, $x_1^{(0)}$ и ε – точность решения;

2) вычисляем

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - \frac{\int\limits_0^{x_i^{(k)}} \sqrt{1+[f'(z)]^2}\,dz - ls_i}{\sqrt{1+\left[f'(x_i^{(k)})\right]^2}}; \tag{2.84}$$

3) вычисления x_i по формуле (2.84) продолжаются до тех пор, пока выполняется условие $\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \geq \varepsilon$;

4) если $\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \neq$ или $\leq \varepsilon$, то принимаем значение $x_i = x_i^{(k+1)}$;

5) далее для: $i = i + 1$ до $i = N$ задаем $x^{(0)}{}_{i+1} = x_i$ и переходим к п. 2.

Этап 2. Вычисление вектора невязки r_k: $r_k = A(U_k) - F$.

Этап 3. Вычисление элементов c_i $(i = 1,2,..., N)$ главной диагонали матрицы оператора B_k по формулам (2.77).

Этап. 4. Вычисление поправки $W_k = B_k^{-1} r_k$ как решения уравнения

$$B_k W_k = r_k. \tag{2.85}$$

На этом этапе для вычисления поправки W_k требуется решить систему нелинейных уравнений с трехдиагональной матрицей B оператора Гато. Для решения указанных систем следует использовать метод немонотонной прогонки, алгоритм которого подробно описан в [71]. Данный метод является вариантом метода исключения Гаусса с выбором по строке ведущего элемента исключения, позволяющим получить сравнительно устойчивый к погрешностям округления алгоритм (что и предопределяет выбор данного алгоритма).

Этап 5. Определение итерационного приближения U_{k+1} номера k + 1 для искомой функции ϑ(s): $U_{k+1} = U_k - W_k$.

Этап 6. Проверка выполнения условия окончания итераций: если $\| U_{k+1} - U_k \| \le \varepsilon \| U_k \|$, то $U = U_{k+1}$ и следует перейти к следующему этапу. В противном случае $k = k + 1$ и следует перейти к этапу 2, содержащему критерий окончания итераций, которые завершаются, если среднеквадратичная разность двух соседних приближений становится меньше заданной малой величины ε. Здесь $\| z \| -$ норма произвольного вектора z, которая определяется следующим образом: $\|z\| = \left(\sum_{i=1}^{N} z_i^2 \right)^{1/2}$.

Этап 7. Конфигурации упругой линии изогнутого стержня в декартовой системе координат $\frac{x}{l} = \int_0^s \cos(\vartheta(s))ds,\ \frac{y}{l} = \int_0^s \sin(\vartheta(s))ds$ вычисляются по формуле трапеций в результате численного интегрирования следующим образом в случае:

- равномерной сетки

$$\begin{gathered} \frac{x_i}{l} = \frac{h}{2}\left(1 + 2\sum_{j=2}^{i-1} \cos\vartheta_j + \cos\vartheta_i\right), \\ \frac{y_i}{l} = \frac{h}{2}\left(0 + 2\sum_{j=2}^{i-1} \sin\vartheta_j + \sin\vartheta_i\right); \end{gathered} \tag{2.86}$$

- квазиравномерной сетки

$$\begin{gathered} \frac{x_i}{l} = \sum_{j=1}^{i-1} h(j+1)\frac{\cos\vartheta_j + \cos\vartheta_{j+1}}{2}, \\ \frac{y_i}{l} = \sum_{j=1}^{i-1} h(j+1)\frac{\sin\vartheta_j + \sin\vartheta_{j+1}}{2}. \end{gathered} \tag{2.87}$$

Отметим, что погрешность численного интегрирования в методе трапеций на сетке с N узлами оценивается величиной [24]: $\max\limits_{[a,b]}[\varphi''(z)]\frac{b-a}{12N^2}$. Отсюда получим, что в рассматриваемом случае погрешность численного интегрирования при определении координат x и y по приближенно вычисленным значениям функции ϑ_i не превосходит величины $h_*^2/12$, где h_* – максимальный шаг квазиравномерной сетки.

Предложенный конечно-разностный метод позволяет единообразно решать на компьютере любые задачи всех трех классов.

4. Расчет гибких стержней на основе теории конечного элемента в деформированном состоянии. Главное достоинство этого метода, учитывающего физическую и геометрическую нелинейность, по сравнению с традиционными методами МКЭ и МКР, заключается в том, что при расчете статически определимых систем не решается система линейных алгебраических уравнений, а при расчете статически неопределимых систем решается система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных усилий в «лишних» связях основной системы метода сил, порядок которой не зависит от числа конечных элементов [64]. При этом на сам конечный элемент и связи между элементами не накладывается никаких ограничений.

Алгоритм расчета заключается в следующем. По заданным внешним нагрузкам, геометрическим характеристикам сечений, конфигурации и условиям закрепления стержня или системы, а также по известной связи между напряжениями и деформациями отыскивается устойчивая форма равновесия. Для этого используются статические уравнения равновесия конечного элемента в деформированном состоянии, полученные геометрические соотношения и уравнения связи между конечными элементами, с помощью которых описывается деформированное состояние стержня или системы через параметры начального сечения и линейные алгебраические уравнения относительно неизвестных усилий в «лишних» связях основной системы метода сил.

Стержень, как элемент стержневой системы, нагруженный произвольными нагрузками в плоскости изгиба, разбивается на конечное число участков равной или неравной длины. Все нагрузки приводятся к сосредоточенным. Границы участков необходимо располагать в местах приложения сосредоточенных нагрузок, переломов на геометрической оси, в местах изменения высоты сечения стержня. Стержень с переменным сечением по длине разбивается на ряд участков, и рассматривается как стержень с участками постоянного сечения, ступенчато изменяющихся на границах участков. За приведенное сечение принимается ее сечение в середине участка.

Элемент конечной длины s_j, выделенный из стержня приведен на рис. 2.14, *а*, где показано положение геометрической и нейтральной осей. Из уравнений равновесия элемента следует

$$\begin{cases} R_{jB} = R_{jA}, \\ T_{jB} = T_{jA}, \\ M_{jB} = M_{jA} + R_{jA}\Delta x_j - T_{jA}\Delta y_j. \end{cases} \quad (2.88)$$

Из условия стыка элементов s_j и s_{j+1} (рис.2.15, *б*) получим:

$$\begin{cases} R_{(j+1)A} = R_{jB} - P_j \cos\theta_j, \\ T_{(j+1)A} = T_{jB} + P_j \sin\theta_j, \\ M_{(j+1)A} = M_{jB} + m_j. \end{cases} \tag{2.89}$$

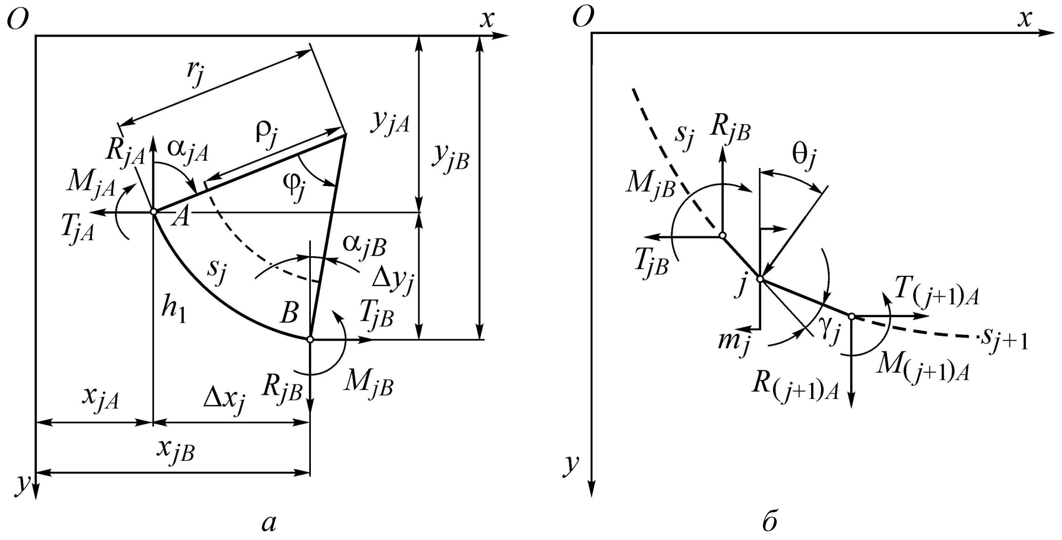


Рис. 2.14. Расчетная схема:
а – равновесие деформированного конечного элемента; *б*– сопряжение соседних участков

Из рассмотрения геометрии деформированного элемента получим связь между координатами x, y, α в концевых точках, радиусом кривизны и длиной дуги отрезка:

$$\begin{cases} x_{jB} = x_{jA} + \Delta x_j; \\ y_{jB} = y_{jA} + \Delta y_j; \\ \alpha_{jB} = \alpha_{jA} - \varphi_j; \\ \Delta x_j = r_j \left(\sin\alpha_{jA} - \sin\alpha_{jB}\right); \\ \Delta y_j = r_j \left(\cos\alpha_{jB} - \cos\alpha_{jA}\right); \\ s_j = r_j \varphi_j. \end{cases} \tag{2.90}$$

По заданным координатам x, y точек A и B участков s_j, радиусам кривизны окружностей r_j по соотношениям (2.90) найдем

$$\begin{cases} \varphi_j = 2\arcsin\left(\sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}\right); \\ \theta_j = \mathrm{arctg}\left(\Delta y_j / \Delta x_j\right); \\ \alpha_{jA} = \theta_j + \varphi_j/2; \\ \alpha_{jB} = \theta_j - \varphi_j/2; \\ s_j = r_j \phi_j. \end{cases} \tag{2.91}$$

Отметим, что для определения положения нейтральной оси, определяемой величиной $\Delta r_j = r_j - \rho_j$, и радиуса кривизны ρ_j привлекаются известные формулы для стержней, работающих в упругой или упруго-пластических стадиях. При этом для среднего участка должны быть заданы расчетные усилия

$$N_j^{\text{c}} = R_{jB} \sin\left(\alpha_{jB} + \frac{\varphi_j}{2}\right) + T_{jB} \cos\left(\alpha_{jB} + \frac{\varphi_j}{2}\right); \ M_j^{\text{c}} = \frac{\left(M_{jA} + M_{jB}\right)}{2},$$

начальная кривизна, форма поперечного сечения, зависимость между напряжениями и деформациями. Полученные величины ρ_j и Δr_j принимаются постоянными на длине участка s_j.

Сопряжения элементов s_j и s_{j+1} производится по геометрической оси. Если она имеет перелом в точке сопряжения *j* (рис. 2.14, *б*), то уравнения связи смежных сечений имеют вид

$$\begin{cases} x_{(j+1)A} = x_{jB}; \\ y_{9j+1)A} = y_{jB}; \\ \alpha_{(j+1)A} = \alpha_{jB} - \gamma_j. \end{cases} \tag{2.92}$$

Если геометрическая ось не имеет переломов в точке *j*, то $\gamma_j = 0$.

В статически определимых системах из уравнений равновесия вычисляются три силовых параметра R_0, T_0, M_0 в начальном сечении при заданной схеме малых деформаций или по недеформированной схеме. По уравнениям (2.88), (2.89) и (2.92) определяются расчетные усилия по серединам расчетных участков. Затем находятся величины ρ_j и Δr_j. По уравнениям (2.90) – (2.92) определяется деформированное состояние системы при заданных геометрических параметрах x_0, y_0, α_0 начального сечения. Если известны только два параметра, например x_0 и y_0, то третий α_0 выводится из условия закрепления стержня в какой-либо точке. Поскольку первоначальная схема деформаций системы задавалась произвольно, корректировка α_0 уточняется методом последовательного приближения для принятой расчетной схемы деформаций по приведенному алгоритму. Оценка точности решения по данному методу зависит от точности описания геометрии системы в исходном состоянии, точности определения НДС сечения и вычисления осевой относительной деформации и кривизны, точности удовлетворения кинематических условий, правомерности допущения постоянства кривизны на дискретном участке. Для оценки точности метода в работе [64] использовался упругий консольный стержень, сжатый продольной силой $N = 1{,}1\,N_э$, где $N_э = \dfrac{\pi^2 H}{L^2}$ – эйлерово критическое значение продольного усилия. Для расчетного участка (конечного элемента) длины $s_j = 0{,}05L$ и относительной погрешности двух смежных приближений определения прогибов в $0{,}1\%$ результаты численного расчета отличались от точного решения не более, чем на 1%. При $s_j = 0{,}1L$ и относительной погрешности двух смежных приближений определения прогибов в 1% результаты численного расчета отличаются от точного решения примерно на 5%.

Методики расчета технологических параметров процесса гибки-намотки тонкостенных деталей ЛА и свободной гибки в универсальных штампах, основанные на теории конечного элемента в деформированном состоянии, приведены в работах [28] и [58].

Глава 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ ТОНКИХ ЗАГОТОВОК С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В гл. 2 рассматривался метод эллиптических параметров, который был применен к определению очертания упругой линии при изгибе тонкого стержня, когда значение прогиба было сравнимо с длиной стержня. В этой главе представлено решение аналогичной задачи для случая плоского упруго-пластического изгиба, подробно изложенной в работах [50, 53, 54].

§ 3.1. Уравнение изогнутой оси

При рассмотрении силовых схем многих процессов гибки тонкостенных деталей из листового и профильного материала (свободная гибка, гибка-прокатка и др.) можно сделать вывод о том, что они имеют много общего. Во всех этих случаях заготовка принимает форму, зависящую от параметров настройки гибочной оснастки и ее можно представить в виде пластически изогнутого элемента конечной длины, по концам которого действуют сосредоточенные силы и моменты (рис. 3.1).

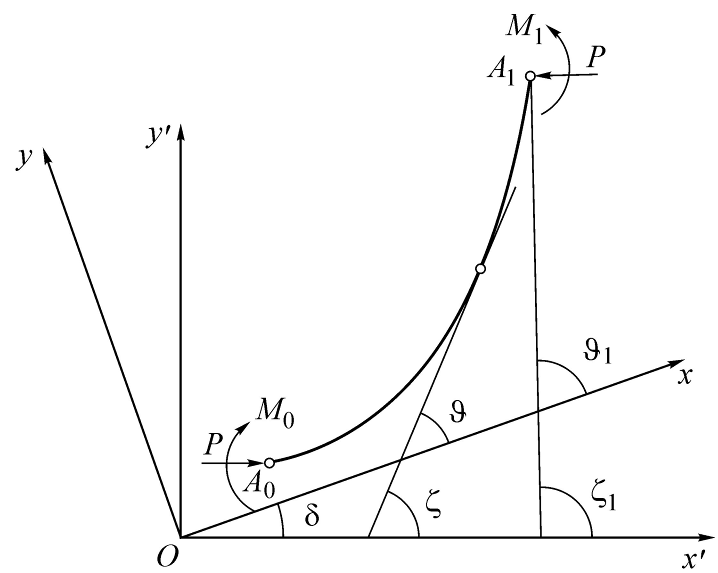


Рис. 3.1. Расчетная схема пластической деформации элемента малой жесткости

Для нахождения основных параметров (кривизны κ, прогибов y и углов наклона касательной ϑ), характеризующих деформированное состояние тонкостенной заготовки нужно знать величину внешнего изгибающего момента, действующего в произвольной точке изогнутого элемента. Учитывая геометрическую нелинейность, запишем в дифференциальной форме выражение момента от внешних сил в произвольном сечении (см. § 2.2):

$$\frac{dM}{ds} = -P\sin(\vartheta + \delta). \tag{3.1}$$

Подставляя в выражение (3.1) значение внутреннего изгибающего момента (1.15) при степенной связи напряжений и деформаций и выражая кривизну через угол смежности ϑ и дугу $\kappa = d\vartheta / ds$, после дифференцирования получим

$$\frac{d^2\xi}{ds^2}\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^{n-1} = -\frac{P}{nH}\sin\xi\,, \tag{3.2}$$

где $H = KJ_{\text{пл}}$, $\xi = \vartheta + \delta$, $\delta = \text{const.}$, $\xi = \vartheta + \delta$, $\delta = \text{const}$

Умножим левую и правую стороны уравнения (3.2) на $d\xi$ и проинтегрируем его. В результате после замены $\cos\xi = 1 - 2\sin^2(\xi/2)$, получим

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^{n+1} = \frac{2(n+1)}{nH}P\left(C - \sin^2\frac{\xi}{2}\right). \tag{3.3}$$

Для форм равновесия с точками перегиба**,** в которых кривизна изгиба $\kappa_0 = d\vartheta / ds = 0$, постоянная интегрирования C может иметь значение в пределах $\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right) \le C < 1$. Дальнейшее решение дифференциального уравнения основано на выражении константы C и независимой переменной ξ через единые параметры k и φ:

$$C = k^{2,},\ \xi = 2\arcsin(k\sin\varphi). \tag{3.4}$$

Тогда уравнение (3.3) преобразуется к виду

$$\frac{d\xi}{ds} = 2\lambda(k\cos\varphi)^{\frac{2}{1+n}}\,, \tag{3.5}$$

где $\lambda = \frac{1}{2}\left[\frac{2(1+n)P}{nH}\right]^{\frac{1}{1+n}}$ – силовой коэффициент, отражающий силовые факторы нагружения и условную жестокость сечения пластически изгибаемого элемента. Дифференцируя второе выражение из системы (3.4), имеем $d\xi = \frac{2k\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$.

Подставляя найденное выражение для $d\xi$ в (3.5), получим:

$$\frac{d\varphi}{ds}=\lambda(\cos\varphi)^m\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},\quad m=\frac{1-n}{1+n}. \qquad (3.6)$$

В уравнении (3.6) значение k постоянно, а φ переменно по длине изогнутого элемента. Интегрируя выражение (3.6) от начальной $(\varphi_0, s=0)$ до произвольной (φ, s) точек нейтрального слоя, получим

$$\lambda s=\frac{1}{k^m}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^m\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \qquad (3.7)$$

В правой части (3.7) имеем эллиптический интеграл с модулем k и амплитудой φ. В конечном виде такие интегралы не берутся. Их нахождение основано на разложении в ряд подынтегральной функции при помощи преобразований Лежандра с последующим определением суммы ряда. Лежандром составлены таблицы значений эллиптического $F(k,\varphi)=\int_0^{\phi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ и второго рода

$$E(k.\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}d\varphi$$
.

Для сведения интеграла (3.7) к табулированным формам выполним следующие преобразования

$$\lambda s=\frac{1}{k^m}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\cos^P\varphi d\varphi}{\cos^3\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad p=3-m. \qquad (3.8)$$

Поскольку р – не целое число, то функцию $\cos^p\varphi$ представим тригонометрическим рядом Фурье: $\cos^P\varphi=a_0+\sum_{i=1}^{\infty}a_i\cos i\varphi+\sum_{i=1}^{\infty}b_i\sin i\varphi$. По признаку сходимости Дирихле данный ряд является сходящимся. С известной точностью его можно ограничить конечным числом членов. Количественный анализ показывает, что ряд из семи членов (i = 7) достаточно близко выражает значение функции $\cos^P\varphi$.. Коэффициенты ряда могут быть определены по формуле Эйлера – Фурье или методами практического гармонического анализа. Вследствие четности функций $\cos^P\varphi$. коэффициенты $b_i=0$. Кроме того, коэффициенты a_i с четными индексами также равны нулю.

Таким образом, ряд Фурье сводится к следующей сумме $\cos^P\varphi=a_1\cos\varphi+a_3\cos 3\varphi+a_5\cos 5\kappa+a_7\cos 7\varphi$. Выразим косинусы кратных дуг через степенные значения тригонометрических функций:

$$\cos^P\varphi=c_1\cos\varphi+c_2\cos^3\varphi+c_5\cos^5\kappa+c_4\cos^7\varphi, \qquad (3.9)$$

где $c_1 = a_1 - 3a_3 + 5a_5 - 7a_7$; $c_3 = 16a_5 - 112a_7$; $c_2 = 4a_3 - 20a_5 + 56a_7$; $c_3 = 16a_5 - 112a_7$; $c_4 = 64a_7$.

На рис. 3.2 приведены графики $c_i = f(n)$, позволяющие определять коэффициенты c_i для материалов с различными значениями показателей упрочнения n. Подставим (3.9) в (3.8):

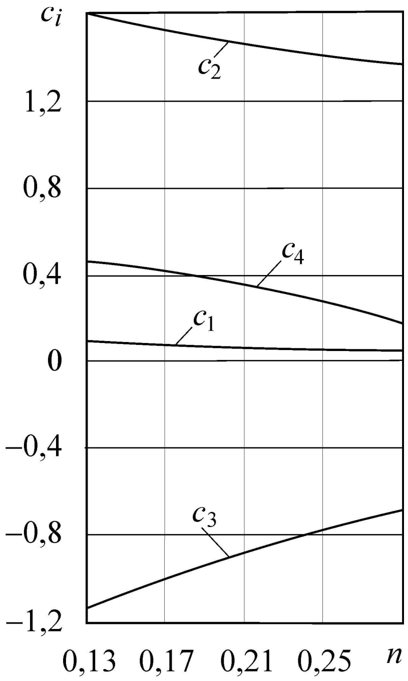


Рис. 3.2. Графики $c_i = f(n)$

$$k^m \lambda s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left(\frac{c_1}{\cos^2 \varphi} + c_2 + c_3 \cos^2 \varphi + c_4 \cos^4 \varphi \right) \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad (3.10)$$

где $\Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$.

Правая часть выражения (3.10) содержит алгебраическую сумму эллиптических интегралов канонической формы. Такие типы интегралов преобразуются к стандартным формам эллиптических интегралов Лежандра при помощи известных формул теории эллиптических функций. В результате преобразований и вычислений соответствующих интегралов получим следующее решение уравнения (3.10):

$$k^m \lambda s = \psi_1(k, \varphi) - \psi_1(k, \varphi_0), \quad (3.11)$$

где $\psi_1(k, \varphi_i) = M_1 F(k, \varphi_i) + N_1 E(k, \varphi_i) + Q_1(k, \varphi_i)$,

$$M_1 = c_1 + c_2 - \frac{1-k^2}{k^2} c_3 - \frac{(1-k^2)(3k^2-2)}{3k^4} c_4, \; N_1 = \frac{2(2k^2-1)}{3k^4} - \frac{1}{1-k^2} c_1 + \frac{1}{k^2} c_3,$$

$Q_1 = \left[\frac{\mathrm{tg}\varphi}{1-k^2} c_1 + \frac{\sin 2\varphi}{6k^2} c_4 \right] \Delta\varphi$, $F(k, \varphi)$, $E(k, \varphi)$ – эллиптические интегралы первого и второго рода в форме Лежандра.

Выражение (3.11) является решением дифференциального уравнения равновесия оси нейтрального слоя пластически изогнутого элемента. Оно устанавливает зависимость между внешними факторами нагружения (λ и s) и главными эллиптическими параметрами (k, φ_0, φ), через которые выражается кривизна оси изогнутого элемента. Для определения этих параметров необходимы дополнительно еще два уравнения. Одним из них может быть зависимость (3.4), в которой угловой параметр ξ является известным при конкретных граничных условиях рассматриваемых задач. Для получения другого уравнения из выражений (1.15) и (3.5) находим:

$$M_{\Pi} = \left[\frac{M}{(2\lambda)^n K J_{\text{пл}}} \right]^{\frac{1+n}{2n}} = k \cos \varphi. \quad (3.12)$$

Моментный коэффициент $M_П$ определяется из граничных условий решаемых задач. Таким образом, кривизна в любой точке оси пластически изогнутого элемента для форм равновесия перегибного вида определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} k^m \lambda s = \psi_1(k,\varphi) - \psi_1(k,\varphi_0); \\ \xi = 2\arcsin(k\sin\varphi); \\ M_П = k\cos\varphi, \end{cases} \tag{3.13}$$

которая представляет собой параметрически заданное уравнение изогнутой оси.

§ 3.2. Определение эллиптических параметров уравнения изогнутой оси для поступательного и следящего перемещения силы

При выводе системы (3.13) не накладывались ограничения на поведение силы в процессе изгиба. Она рассматривалась как переменный вектор, который в процессе деформации может изменять также и модуль направления. В полученных уравнениях оба указанных параметра вектора силы отражены в силовом коэффициенте λ и угловом параметре δ.

Наибольший практический интерес из возможных законов изменения вектора силы в процессе деформации представляют:

а) поступательное перемещение силы, когда вектор силы не меняет своего направления в процессе деформации элемента;

б) следящее перемещение силы, когда вектор силы в процессе деформации меняет направление так, что всегда сохраняет неизменным угол с касательной к нейтральной линии в точке своего приложения.

Рассмотрим методику решения системы (3.13) для указанных законов изменения вектора силы в процессе деформации.

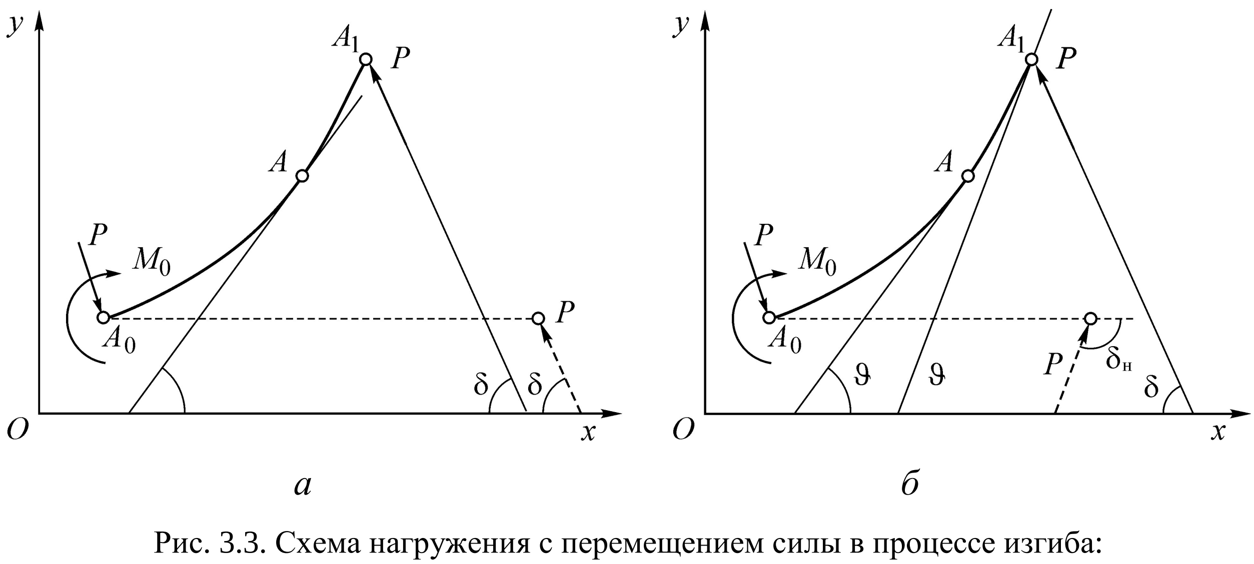


Рис. 3.3. Схема нагружения с перемещением силы в процессе изгиба: *а* – поступательным; *б* – следящим

Поступательное перемещение силы (рис. 3.3, а). Неподвижную систему координат *xOy* ориентируем так, чтобы ось *Ox* была параллельна касательной к нейтральному слою в начальной точке, т.е. $\vartheta_0 = 0$. В процессе изгиба всегда δ = const, поэтому в начальной точке A_0 угловой параметр ξ_0 также постоянен: $\xi_0 = \vartheta_0 + \delta = \text{const}$. В концевой точке A_1 $(s = l, \varphi = \varphi_1)$ в виду того, что изгибающий момент равен нулю согласно (3.12), моментный коэффициент $M_{\Pi} = 0$. Подчиняя уравнения системы (3.13) найденным граничным условиям, можно определить главные эллиптические параметры *k* и φ. Из третьего уравнения системы, записанного для концевой точки нейтрального слоя, следует $\varphi_1 = \pi / 2$. Применяя второе уравнение системы к начальной точке A_0 нейтрального слоя, в которой $\xi = \xi_0 = \delta$ и $\varphi = \varphi_0$, находим

$$k \cos\varphi_0 = \sin\frac{\delta}{2} = \text{const}, \tag{3.14}$$

из чего следует, что при поступательном перемещении силы модуль *k* зависит от амплитуды φ_0 в начальной точке A_0. Значение модуля *k* будет различным на разных стадиях изгиба, в соответствии с изменением амплитуды φ_0 в процессе деформации.

Применяя первое уравнение системы (3.13) к концевой точке изогнутого элемента, получаем

$$k^m \lambda l = \psi_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \psi_1\left(k, \varphi_0\right). \tag{3.15}$$

Из совместного решения системы уравнений (3.14) и (3.15) вычисляются параметры *k* и φ_0.

Следящее перемещение силы (рис. 3.3, б). В данном случае угловой параметр δ, характеризующий направление силы в неподвижной системе координат, будет переменным в процессе изгиба элемента. Ориентируем неподвижную систему координат так, чтобы ось 0*x* была параллельна касательной в начальной точке нейтрального слоя. В любой стадии процесса имеем

$$\xi_1 = \vartheta_1 + \delta = \delta_{\text{н}} = \text{const},\ \xi = \vartheta_0 + \delta = \delta.$$

В этом случае, как и в предыдущем, для концевой точке $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$. Применяя второе уравнение (3.13) к концевой точке нейтрального слоя, найдем $k = \sin\left(\dfrac{\delta_{\text{н}}}{2}\right)$, т.е. в рассматриваемом случае модуль *k* является величиной постоянной в процессе деформации. Второй параметр φ_0 определяем по уравнению (3.15) при известных конкретных значениях λ, *l* и *k*.

Амплитуды φ в промежуточных точках нейтрального слоя деформированной заготовки, отстоящих от начальной точки по дуге на расстоянии s, в обоих случаях определяются решением уравнения

$$\frac{s}{l}=\frac{\psi_1(k,\varphi)-\psi_1(k,\varphi_0)}{\psi_1(k,\pi/2)-\psi_1(k,\varphi_0)}. \tag{3.16}$$

При известных эллиптических параметрах k и φ кривизна в точках нейтрального слоя пластически изогнутого элемента $\kappa_0=d\xi/ds$ вычисляется по формуле (3.5).

§ 3.3. Определение перемещений точек изогнутой оси

Составляющие искомых перемещений определим в подвижной системе координат $x'Oy'$, ось абсцисс которой ориентирована параллельно направлению действия внешней силы P, а начало этой системы совмещено с началом неподвижной произвольно-выбранной системы координат xOy (рис. 3.1). При этом подвижная система оказывается повернутой относительно неподвижной на угол δ, и связь между координатами выражается следующими формулами перехода:

$$x=x'\cos\delta+y'\sin\delta,\ y=y'\cos\delta-x'\sin\delta. \tag{3.17}$$

Возьмем на изогнутой оси произвольную точку $A(x',y')$, касательная в которой составляет с осью $0x'$ угол ξ. Проекции дифференциала дуги изогнутой оси в окрестности этой точки на оси координат будут:

$$dx'=ds\cos\xi,\ dy'=ds\sin\xi. \tag{3.18}$$

Для нахождения составляющих перемещений необходимо проинтегрировать составленные дифференциальные уравнения (3.18) от начальной (x_0',y_0',φ_0) до рассматриваемой (x',y',φ) точки изогнутого элемента. Приведем без вывода найденные в работах [50, 53, 54] выражения для координат точек оси деформированного элемента с учетом геометрической нелинейности:

$$\begin{aligned}\lambda\left(x'-x_0'\right)&=\frac{\left(1-2k^2\right)}{k^m}\left[\psi_1(k,\varphi)-\psi_1\left(k,\varphi_0\right)\right]+2k^{2-m}\left[\psi_2(k,\varphi)-\psi_2\left(k,\varphi_0\right)\right];\\ \lambda\left(y'-y_0'\right)&=\frac{2k^{1-m}}{m-1}\left(\cos^{1-m}\varphi-\cos^{1-m}\varphi_0\right),\end{aligned} \tag{3.19}$$

где $\psi_2\left(k,\varphi_i\right)=M_2F\left(k,\varphi_i\right)+N_2E\left(k,\varphi_i\right)+Q_2\left(k,\varphi_i\right)$;

$$M_2=c_1-\frac{1-k^2}{k^2}c_2+\frac{\left(2-5k^2+3k^4\right)}{3k^4}c_3-\frac{\left(8-27k^2+34k^4-15k^6\right)}{15k^6}c_4;$$

$$N_2 = \frac{c_2}{k^2} + \frac{2\left(2k^2 - 1\right)}{3k^4} c_3 + \frac{\left(8 - 23k^2 + 23k^4\right)}{15k^6} c_4;$$

$$Q_2 = \left[\frac{\cos\varphi}{3k^2} c_3 + \left(\frac{\cos^3\varphi}{5k^2} + \frac{4(2k^2 - 1)\cos\varphi}{15k^4} \right) c_4 \right] \sin\varphi\Delta\varphi.$$

Отметим, что входящие в решение (3.19) эллиптические параметры k и φ известны из решения ранее рассматриваемой системы уравнений (3.13).

§ 3.4. Определение геометрических параметров изогнутой оси для случая, когда деформирующая сила нормальна к последней в процессе изгиба

Схема нагружения, при которой активная деформирующая сила при следящем законе перемещения нормальна к нейтральному слою в точке своего приложения, является одной их распространенных. Данная схема встречается при гибке тонкостенных деталей в универсальных штампах, при гибке на валковых станках и др.

В рассматриваемом случае для любой степени деформации имеем:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \pi / 2; \\ \delta_н = \pi / 2; \\ k = \sqrt{2} / 2; \\ \vartheta_0 = 0; \\ \xi_0 = \delta, \cos\delta = \cos^2\varphi_0. \end{cases} \qquad (3.20)$$

При этих условиях исключается необходимость при решении уравнения (3.6) прибегать к разложению в тригонометрический ряд с ограниченным числом членов подынтегральной функции $\cos^p\varphi$ и появляется возможность получить иное, более точное решение.

Проинтегрируем уравнение (3.6) по всей длине изгибаемого элемента

$$k^m \lambda l = \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^m\varphi\Delta\varphi} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^m\varphi\Delta\varphi} - \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\cos^m\varphi\Delta\varphi}. \qquad (3.21)$$

С учетом условий (3.20) первое слагаемое уравнения (3.21) преобразуется в интеграл Эйлера первого рода, который выражается через гамма-функции:

$$J_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\cos^m\varphi\Delta\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^1 z^{q-1} \left(1 - z\right)^{p'-2} dz = \sqrt{2} B\left(p', q\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{\Gamma(q)\Gamma(p')}{\Gamma(p' + q)},$$

где $q = \frac{1-m}{4}$; $p' = \frac{1}{2}$; $z = \cos^4\varphi$.

Значение гамма-функций для различных величин p' и q приводится в специальной справочной литературе.

Второе слагаемое уравнения (3.21) вычисляется по следующей формуле:

$$J_2 = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\cos^m \varphi \Delta\varphi} = M_1 F\left(k, \varphi_0\right) + N_1 E\left(k, \varphi_0\right) + Q_1\left(k, \varphi_0\right) = \psi_1(k, \varphi_0),$$

величины M_1, N_1 и Q_1 вычисляются по (3.11) при условии $k = \sqrt{2}/2$.

Подставляя в (3.21) известные значения интегралов правой части, получим

$$\lambda l = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^m \left[\frac{\sqrt{2}B(p', q)}{4} - \psi_1(k, \varphi_0)\right]. \quad (3.22)$$

В найденном решении (3.22) параметры p', q и коэффициенты M_1, N_1 зависят только от механических свойств материала и для его конкретных марок являются постоянными величинами. Выражение (3.22) содержит одно неизвестное φ_0, которое определяется отсюда при конкретных внешних факторах деформации λ и l.

При известных главных параметрах k, φ_0 и φ_1 амплитуды в промежуточных точках изогнутой оси определяются по формуле:

$$\frac{s}{l} = \frac{\psi_1(k, \varphi) - \psi_1(k, \varphi_0)}{\sqrt{2}B(p', q) - \psi_1(k, \varphi_0)}. \quad (3.23)$$

Зная эллиптические параметры k и φ в любой точке изогнутой оси, можно вычислить по формуле (3.5) ее кривизну.

При определении перемещений выделим характерную точку изогнутой оси, в которой имеем $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; $\kappa_0 = 0$. Для всех точек, кроме указанной, составляющие перемещения определяются в подвижной системе координат уравнениями (3.19). Составляющие перемещения концевой точки A_1 изогнутого элемента в подвижной системе координат (рис. 3.1) вычисляются следующим образом:

$$k^m \lambda\left(x_1' - x'\right) = \frac{\sqrt{2}B\left(p', q'\right)}{4} - \psi_2\left(k, \varphi_0\right);$$
$$\lambda\left(y_1' - y_0'\right) = \frac{2k^{1-m} \cos^{1-m} \varphi_0}{1-m}, \quad (3.24)$$

где $q' = (3-m)/4$, $p' = 1/2$.

Если начало координат совместить с начальной точкой A_0 и ориентировать ось $0x$ по касательной к нейтральному слою, то имеем $x_0' = y_0' = \vartheta_0 = 0$, $\xi_0 = \delta$ и $\delta = 2\arcsin(k \sin\varphi_0)$. Используя формулы перехода (3.17), при известном значении угла δ найдем выражения для составляющих перемещения концевой точки A_1 в неподвижной системе координат:

$$\lambda x_1 = \frac{\dfrac{\sqrt{2}B(p',q')}{4} - \psi_2(k,\varphi_0)}{k^m}\cos\delta + \frac{2k^{1-m}\cos^{1-m}\varphi_0}{1-m}\sin\delta;$$
$$\lambda y_1 = \frac{2k^{1-m}\cos^{1-m}\varphi_0}{1-m}\cos\delta - \frac{\dfrac{\sqrt{2}B(p',q')}{4} - \psi_2(k,\varphi_0)}{k^m}\sin\delta. \qquad (3.25)$$

При решении многих технологических задач часто бывает необходимым вычислять искомые параметры процесса формообразования в зависимости не от действующей силы, а от создаваемого ею радиуса кривизны ρ_0 в начальной точке A_0 изгибаемого элемента. С этой целью преобразуем уравнения (3.22) и (3.25) к следующему виду:

$$\frac{l}{\rho_0} = 2k\left(\cos\varphi_0\right)^{2/(1+n)}\left[\frac{\sqrt{2}B(p',q')}{4} - \psi_1(k,\varphi_0)\right];$$
$$\frac{x_1}{\rho_0} = 2k\left(\cos\varphi_0\right)^{2/(1+n)}\left[\frac{\sqrt{2}B(p',q')}{4} - \psi_2(k,\varphi_0)\right]\cos\delta + \frac{2k^2(1+n)\cos^2\varphi_0}{n}\sin\delta; \qquad (3.26)$$
$$\frac{y_1}{\rho_0} = \frac{2k^2(1+n)\cos^2\varphi_0}{n}\cos\delta - 2k\left(\cos\varphi_0\right)^{2/(1+n)}\times\left[\frac{\sqrt{2}B(p',q')}{4} - \psi_2(k,\varphi_0)\right]\sin\delta.$$

По первому уравнению (3.26) при заданных значениях ρ_0, l определяется эллиптический параметр φ_0, а по двум другим – составляющие относительного перемещения точки A_1, соответствующие значениям ρ_0 и φ_0.

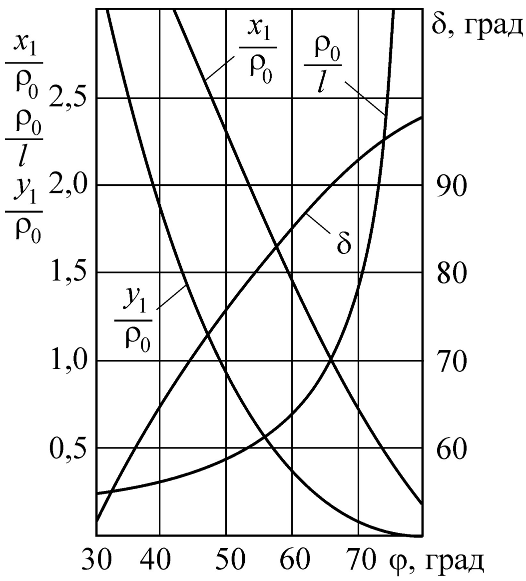


Рис. 3.4. Графики функций ρ_0/l, x_1/ρ_0, y_1/ρ_0 и для материала Д16Т

По приведенным зависимостям составляются алгоритм и программа для расчета на компьютере технологических параметров. Также при этом могут быть построены расчетные графики для конкретных марок материалов (рис. 3.4).

Пример 3.1. Тонкостенная заготовка из материала Д16Т толщиной h = 2 мм и длиной l = 150 мм подвергается изгибу на радиус кривизны ρ_0 = 75 мм. Определить перемещение y_1 конца заготовки, при котором в опорном сечении создается заданная кривизна изгиба. При заданном отношении ρ_0/l = 0,5 по соответствующим графикам (рис. 3.4) находим амплитуду φ_0 = 54° и угол поворота нормали к концевой точке изогнутой заготовки δ = 50°. При известных значениях φ_0 и δ по третьему уравнению (3.26) вычисляем y_1/ρ_0 = 0,65, откуда искомое перемещение будет равно y_1 = 49 мм.

§ 3.5. Учет геометрической нелинейности при произвольной связи изгибающего момента и кривизны

Для данного случая зависимость изгибающего момента от кривизны задана в виде ломаной линии с произвольным числом m отрезков (рис.1.12). Аналитически эта зависимость выражается уравнением (1.19). Данная аппроксимация зависимости $M(\kappa)$ может быть использована для заготовок с начальной кривизной $\kappa_{\text{нач}}$, для упруго-деформируемых заготовок, для заготовок с малыми пластическими деформациями (в этом случае формула (1.15) дает большую погрешность) [54, 55].

Используя приведенную в § 2.3 методику решения уравнения упругой линии и опуская промежуточные результаты, получим

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = \frac{4P}{E_i J}\left(C_i - \sin^2\frac{\xi}{2}\right). \tag{3.27}$$

Левая часть уравнения (3.27) представляет собой квадрат кривизны. Постоянные интегрирования C_i можно найти из граничных условий, так как в точках $0'$, 1, 2, …i, …$(i_k - 1)$ (см. рис. 1.12) кривизны заранее известны и равны соответственно κ_0, κ_1, κ_2, …κ_i,… $\kappa_{i\text{-}1}$ (величины κ_i являются абсциссами узловых точек полигональной аппроксимации кривой $M(\kappa)$).

Дальнейшее решение дифференциального уравнения (3.27) основано на выражении константы C_i и независимой переменной ξ через единые параметры k_i и φ. Так как условию $\sin^2(\xi/2) \le C_i < 0$ соответствуют формы равновесия изогнутого элемента перегибного рода, то в уравнении (3.27) сделаем замену

$$C_i = k_i^2,\ \sin(\xi/2) = k_i \sin\varphi. \tag{3.28}$$

Варианту $C_i > 1$ соответствуют формы равновесия изогнутого элемента бесперегибного рода. В этом случае в уравнении (3.27) сделаем замену

$$C_i = 1/k_i^2,\ \sin(\xi/2) = \sin\varphi. \tag{3.29}$$

Условие $C_i = 1$ соответствует переходной форме равновесия изогнутой линии.

Из уравнений (3.28) и (3.29) найдем выражения для дифференциала угла ξ формы:

- перегибного рода

$$d\xi = \frac{2k_i \cos\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k_i^2 \sin^2\varphi}}, \tag{3.30}$$

- бесперегибного рода

$$d\xi = 2d\varphi. \tag{3.31}$$

Подставив выражения (3.28) и (3.29) в (3.27), получим для формы:

- перегибного рода

$$\frac{d\xi}{ds} = \kappa = 2\lambda_i k_i \cos\varphi ; \tag{3.32}$$

- бесперегибного рода

$$\frac{d\xi}{ds} = \kappa = \frac{2\lambda_i}{k_i} \sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \varphi}, \tag{3.33}$$

где $\lambda_i = \sqrt{\dfrac{P}{E_i J}}$.

Дифференциал дуги запишем из выражений (3.30)–(3.33) для формы:

- перегибного рода

$$ds = \frac{1}{\lambda_i} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \varphi}}, \tag{3.34}$$

- бесперегибного рода

$$ds = \frac{k_i}{\lambda_i} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \varphi}}. \tag{3.35}$$

Интегрируя (3.34) и (3.35), найдем длину дуги i-го участка изогнутого элемента для формы:

- перегибного рода

$$\Delta s_i = \frac{1}{\lambda_i} \left[F(\varphi_i^1, k_i) - F(\varphi_i^0, k_i) \right]; \tag{3.36}$$

- бесперегибного рода

$$\Delta s_i = \frac{k_i}{\lambda_i} \left[F(\varphi_i^1, k_i) - F(\varphi_i^0, k_i) \right], \tag{3.37}$$

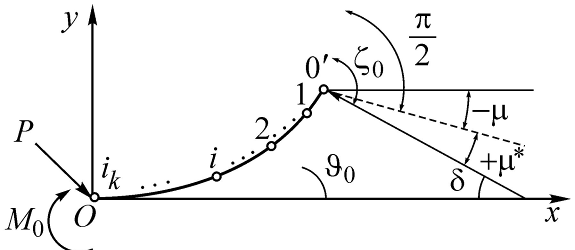


Рис. 3.5. Расчетная схема формоизменения тонкостенной заготовки

где $F(\varphi, k)$ – эллиптический интеграл первого рода.

Из простых геометрических соотношений $dx = \cos\vartheta ds$ и $dy = \sin\vartheta ds$ определяются перемещения точек изогнутой оси элемента (рис. 3.5). В результате после целого ряда преобразований координаты i-й точки могут быть найдены в виде сумм соответствующих приращений [54]:

$$x_i = \sum_{i=i+1}^{i=i_k} \Delta x_i; \;\; y_i = \sum_{i=i+1}^{i=i_k} \Delta y_i, \tag{3.38}$$

где $\Delta x_i = \psi_1(\phi, k_i)\cos\delta + \psi_2(\phi, k_i)\sin\delta;$

$\Delta y_i = \psi_2(\varphi, k_i)\cos\delta - \psi_1(\varphi, k_i)\sin\delta.$

В формулах (3.38) имеем для формы:

- перегибного рода

$$\psi_1(\phi, k_i) = \frac{1}{\lambda_i}\left[2E\left(\varphi_i^1, k_i\right) - 2E\left(\varphi_i^0, k_i\right) - F\left(\varphi_i^1, k_i\right) + F\left(\varphi_i^0, k_i\right)\right],$$

$$\psi_2(\varphi, k_i) = -\frac{2k_i}{\lambda_i}\left(\cos\varphi_i^1 - \cos\varphi_i^0\right);$$

- бесперегибного рода

$$\psi_1(\varphi, k_i) = \frac{k_i}{\lambda_i}\left\{\frac{k_i^2 - 2}{k_i^2}\left[\left[F\left(\varphi_i^1, k_i\right) - F\left(\varphi_i^0, k_i\right)\right] - \frac{2}{k_i}\left[E\left(\varphi_i^0, k_i\right) - E\left(\kappa_i^1, k_i\right)\right]\right]\right\},$$

$$\psi_2(\varphi, k_i) = \frac{2}{\lambda_i k_i}\left[\sqrt{1 - k_i^2 \sin\varphi_i^1} - \sqrt{1 - k_i^2 \sin\varphi_i^0}\right].$$

Здесь $E(\varphi, k)$ – эллиптический интеграл второго рода.

Для проведения последующих расчетов по формулам (3.32), (3.33), (3.36)–(3.38) необходимо определить параметры $\varphi_i^0, \varphi_i^1, k_i$. При этом φ_i^0, φ_i^1 – значения амплитуды φ на *i*-м участке, соответственно, в точках *i* и *i* – 1, а k_i – значение модуля *k* на *i*-м участке.

Считая угол отклонения силы *P* от нормали к изогнутому элементу в точке 0′ (рис. 3.5) заданным, запишем: $\xi_{0'} = \frac{\pi}{2} + \mu^*$; $\delta = \xi_{0'} - \vartheta_{0'}$. Например, при гибке-прокатке на трехвалковых машинах, когда нижние валки ведущие, угол μ^* берется со знаком «минус» для зоны нагружения и со знаком «плюс» для зоны разгрузки. Определение параметров $\varphi_i^0, \varphi_i^1, k_i$ произведем для произвольных *P* и $\vartheta_{0'}$. Подставляя выражение k_i из уравнения (3.32) во второе уравнение системы (3.28), получим формулу для нахождения φ_i^1, соответствующую для формы перегибного рода:

$$\varphi_i^1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{2\lambda_\mathrm{i}\sin(\xi_{i-1}/2)}{\kappa_{i-1}}\right). \tag{3.39}$$

Для формы бесперегибного рода, используя второе уравнение системы (3.29), найдем

$$\varphi_i^1 = \xi_{i-1}/2. \tag{3.40}$$

Формулы (3.39) и (3.40) определяют параметр φ_i^1 для точки *i*-1, которая является верхней точкой *i*-го участка. Также в точке *i*-1 известна кривизна κ_{i-1} и коэффициент *i*-го участка λ_i. Поэтому из выражений (3.32) и (3.33) находим формулы для определения модуля k_i для формы:

• перегибного рода

$$k_i = \frac{\kappa_{i-1}}{2\lambda_i \cos\varphi_i^1}; \tag{3.41}$$

• для формы бесперегибного рода

$$k_i = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\kappa_{i-1}}{2\lambda_i}\right)^2 + \sin^2\varphi_i^1}}. \tag{3.42}$$

Далее, считая $\vartheta_i = 0$, по формулам (3.28) и (3.29) вычислим φ_i^0 для формы:

• перегибного рода

$$\varphi_i^0 = \arcsin\left(\frac{1}{k_i}\sin\frac{\delta}{2}\right); \tag{3.43}$$

• бесперегибного рода

$$\varphi_i^0 = \arcsin\left(\frac{\delta}{2}\right). \tag{3.44}$$

Если значение кривизны, полученное по формулам (3.32) и (3.33) для φ_i^0 при выполнении условия $\vartheta_i = 0$ будет меньше κ_i, то дальнейшие расчеты параметров прекращаются. В противном случае значения φ_i^0 находятся по формулам, полученным из уравнений (3.32) и (3.33) при $\kappa = \kappa_i$ для формы:

• перегибного рода

$$\kappa_i^0 = \arccos\left(\frac{\kappa_i}{2\lambda_i k_i}\right); \tag{3.45}$$

• бесперегибного рода

$$\varphi_i^0 = \arcsin\sqrt{\frac{1}{k_i^2} - \left(\frac{\kappa_i}{2\lambda_i}\right)^2}. \tag{3.46}$$

Угол наклона касательной ϑ_i найдем из выражений (3.28) и (3.29) для формы:

• перегибного рода

$$\vartheta_i = 2\arcsin\left(k_i \sin\kappa_i^0\right) - \delta; \tag{3.47}$$

• бесперегибного рода

$$\vartheta_i = 2\varphi_i^0 - \delta. \tag{3.48}$$

Параметры φ^0, φ^1, k для участка $i = i+1$ определяются в той же последовательности, что и для i-го участка. Расчеты надо начинать с $i = 1$, увеличивая i до выполнения условия $\vartheta_i = 0$.Этому условию соответствует конечное значение $i = i_k$ (см. рис. 3.5).

В изложенном виде представленная методика полностью описывает упруго-пластический изгиб как первоначально прямолинейной заготовки, так и дугообразной заготовки постоянной. Расчетная схема заготовки (см. рис. 3.1) может применяться в своем общем случае (при $i_k > 1$) для расчета зоны нагружения, а в частном случае (при $i_k = 1$) для расчета зоны разгрузки процессов гибки тонкостенных деталей из листового и профильного материала.

§ 3.6. Расчет пружинения тонкостенной заготовки, подвергнутой упруго-пластическому изгибу

Как отмечалось в гл. 1, конечной целью при расчете пружинения (см. формулу (1.11)) является определение формы детали, которая остается после снятия внешних деформирующих сил, для последующего сравнения ее формы с заданной формой детали, а также внесения соответствующих корректировок настроечных параметров гибочного оборудования при несовпадении этих форм. Для рассматриваемого случая* (см. рис. 3.1) кривизна изогнутой заготовки в активной стадии переменна, поэтому расчеты по формуле (1.11) следует производить, как минимум, для нескольких точек каждого участка, чтобы получить численные значения функции $\tilde{\kappa}(s)$, которая полностью характеризует геометрию остаточной формы детали. В обозначениях § 3.5 формула (1.11) примет вид:

$$\tilde{\kappa} = \kappa - \frac{M}{E_1 J}. \tag{3.49}$$

Считая, что длина дуги при пружинении не изменяется $(d\tilde{s} = ds)$, для расчета остаточного угла $\tilde{\vartheta}$ выразим кривизну через угол смежности и дифференциал дуги:

$$d\tilde{\vartheta} = \tilde{\kappa} ds. \tag{3.50}$$

---

* *Сосов, Н.В.* Исследование и разработка технологических процессов свободной гибки и гибки-прокатки листовых и профильных деталей летательных аппаратов: автореф. дисс. … канд. техн. наук. – Казань, 1984. – 16 с.

Подставив (1.19), (3.49) в (3.50), получим:

$$d\tilde{\vartheta} = \frac{E_1 - E_i}{E_1}\,\kappa ds + \frac{M_i^*}{E_1 J}\,ds. \tag{3.51}$$

Проинтегрируем выражение (3.51) для i-го участка с нижним пределом в i-й точке и верхним пределом в (i – 1)-й точке. В результате после некоторых преобразований получим

$$\Delta\tilde{\vartheta}_i = \frac{E_1 - E_i}{E_1}\left(\vartheta_{i-1} - \vartheta_i\right) + \frac{M_i^*}{E_1 J}\Delta s_i. \tag{3.52}$$

Суммирование значений (3.51) дает полный угол загиба

$$\tilde{\vartheta} = \sum_{i=1}^{i=i_k} \Delta\tilde{\vartheta}_i\ . \tag{3.53}$$

Чтобы найти координаты точки $\tilde{x}, \tilde{y}$ изогнутого элемента после пружинения, воспользуемся уравнениями

$$d\tilde{x} = ds\cos\tilde{\vartheta}, d\tilde{y} = ds\sin\tilde{\vartheta}; \tag{3.54}$$

в которых дифференциал дуги определяется уравнениями (3.34) и (3.35), а угол $\tilde{\vartheta}$ есть неопределенный интеграл от (3.51) имеющий с учетом граничных условий следующий вид:

$$\tilde{\vartheta} = \frac{E_1 - E_i}{E_1}\left(\vartheta - \vartheta_i\right) + \frac{M_i^*}{E_1 J}(s - s_i) + \tilde{\vartheta}_i, \tag{3.55}$$

где $\tilde{\vartheta}_i = \sum\limits_{i=i+1}^{i=i_k} \Delta\tilde{\vartheta}_i$.

Таким образом, все неизвестные, входящие в выражения (3.54), выражаются через параметры φ^0, φ^1, k, которые определены для граничных точек любого i-го участка. Взяв эти параметры в качестве основных переменных и проинтегрировав, (3.54) в пределах i-го участка, получим следующие выражения для формы:

- перегибного рода

$$\begin{gathered}\Delta\tilde{x}_i = \frac{1}{\lambda_i}\int\limits_{\varphi_i^0}^{\varphi_i^1}\left\{\frac{1}{\sqrt{1 - k_i^2\sin^2\varphi}}\cos\left[\frac{E_1 - E_i}{E_1}\Big(2\arcsin\big(k_i\sin\varphi\big) -\right.\right.\\ \left.\left.-2\arcsin\big(k_i\sin\varphi_i^0\big)\Big) - \frac{M_i^*}{\lambda_i E_1 J}\Big(F(\varphi, k_i) - F(\varphi_i^0, k_i)\Big)\right]\right\}d\varphi,\end{gathered} \tag{3.56}$$

$$\Delta\tilde{y}_i = \frac{1}{\lambda_i}\int_{\varphi_i^0}^{\varphi_i^1}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-k_i^2\sin^2\varphi}}\sin\left[\frac{E_1-E_i}{E_1}\Big(2\arcsin\big(k_i\sin\varphi\big)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\arcsin\big(k_i\sin\varphi_i^0\big)\Big)-\frac{M_i^*}{\lambda_i E_1 J}\Big(F(\varphi,k_i)-F(\varphi_i^0,k_i)\Big)\right]\right\}d\varphi; \quad (3.56)$$

• бесперегибного рода

$$\Delta\tilde{x}_i = \frac{k_i}{\lambda_i}\int_{\varphi_i^0}^{\varphi_i^1}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-k_i^2\sin^2\varphi}}\cos\left[\frac{E_1-E_i}{E_1}\Big(2\varphi-2\varphi_i^0\Big)-\frac{M_i^*k_i}{\lambda_i E_1 J}\Big(F(\varphi,k_i)-F(\varphi_i^0,k_i)\Big)\right]\right\}d\varphi,$$

$$\Delta\tilde{y}_i = \frac{k_i}{\lambda_i}\int_{\varphi_i^0}^{\varphi_i^1}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-k_i^2\sin^2\varphi}}\sin\left[\frac{E_1-E_i}{E_1}\Big(2\varphi-2\varphi_i^0\Big)-\frac{M_i^*k_i}{\lambda_i E_1 J}\Big(F(\varphi,k_i)-F(\varphi_i^0,k_i)\Big)\right]\right\}d\varphi. \quad (3.57)$$

Координаты i-й точки изогнутого элемента $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$ после пружинения найдем следующим образом:

$$\tilde{x}_i = \sum_{i=i+1}^{i=i_k}\Delta\tilde{x}_i; \quad \tilde{y}_i = \sum_{i=i+1}^{i=i_k}\Delta\tilde{y}_i. \quad (3.58)$$

Геометрические характеристики остаточной формы детали $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i, \tilde{\vartheta}_i$, определяемые по формулам (3.55) и (3.58) с помощью параметров φ^0, φ^1, k, рассчитываются только для узловых точек. Количество узловых точек на изогнутой заготовке, для которых найдены параметры φ^0, φ^1, k, зависит от величины деформирующей силы P, начальной длины заготовки s_0 и от степени разбиения зависимости $M(\kappa)$ на аппроксимирующие участки. Равномерность расположения узловых точек по длине изогнутой заготовки может быть обеспечена путем соответствующего подбора значений M_i при аппроксимации $M(\kappa)$ ломаной линией (рис. 1.12). Если по точностным соображениям остаточную форму получаемой тонкостенной детали нужно охарактеризовать не только в узловых точках, но и в каких-либо промежуточных точках, то эти точки следует взять на аппроксимирующих отрезках ломаной линии, аналитически записанной в виде уравнения (1.19), а расчет для них вести как для узловых точек.

§ 3.7. Расчет технологических параметров свободной гибки с учетом геометрической нелинейности

Сущность исследуемого процесса заключается в пластическом изгибе заготовки в ручье матрицы путем соответствующего перемещения пуансона (рис. 3.6). В процессе деформирования гибочная оснастка контактирует с заготовкой лишь в нескольких точках и не препятствует ей принять форму изгиба, соответствующую силовой схеме нагружения. Это позволяет сделать процесс универсальным, т.е. на одном комплекте инструмента получать детали различной формы путем изменения настроечных параметров гибочной оснастки.

При большом ходе гибочного пуансона $H_{\text{П}}$, соизмеримым с шириной ручья матрицы $B_{\text{М}}$, изогнутый элемент в ручье матрицы имеет переменную кривизну $\kappa = f(s)$. Форма изогнутого элемента существенно отличается от исходной, а его длина в ручье матрицы является функцией угла загиба θ, кривизны заготовки κ_0 в точке контакта ее с пуансоном и ширины ручья матрицы. Вследствие указанных особенностей при рассмотрении процесса формообразования, гипотеза начальных размеров неприменима.

Рассмотрим методику расчета параметров процесса свободной гибки с учетом геометрической нелинейности [50, 53]. Она основана на использовании метода эллиптических параметров (см. разд. 3.1–3.4) при чисто степенной связи напряжений и деформаций $\sigma = K\varepsilon^n$, дающей возможность получить однозначную аналитическую зависимость (1.15) изгибающего момента от кривизны.

1. Пружинение при свободной гибке. Остаточный угол детали (рис. 3.6), согласно теореме о разгрузке, после пружинения материала находится по формуле

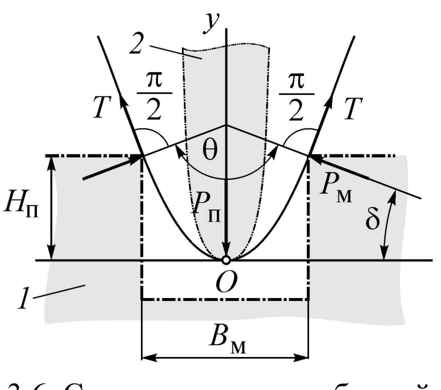


Рис. 3.6. Схема процесса свободной гибки в универсальных штампах:
1 – матрица, *2* – пуансон

$$\tilde{\theta} = \theta - \theta' \tag{3.59}$$

где $\theta = \pi - 2\delta;\ \theta' = \pi - 2\delta'$.

Согласно (3.59) определение угла пружинения и остаточного угла при свободной гибке сводится к нахождению углов δ и δ′, образуемых с осью Ox нормалями к изогнутому элементу в точках контакта его с матрицей при истинном и фиктивном состояниях равновесия. Для следящего перемещения силы в процессе деформации в § 3.2–3.4 получены следующие уравнения для истинного состояния равновесия:

$$\kappa_0 = 2\lambda\left(\frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{1+n}};\quad \delta = 2\arcsin\left(\frac{\sin\varphi_0}{\sqrt{2}}\right). \tag{3.60}$$

Здесь $\lambda = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2(1+n)P_{\text{м}}}{nKJ_{\text{пл}}}\right]^{\frac{1}{1+n}};\ J_{\text{пл}} = \int\limits_{(F)} y^{1+n}dF.$

Известное решение аналогичной задачи в упругой постановке (см. гл. 2) выражается зависимостями:

$$\kappa_0' = \sqrt{\frac{2P_{\text{м}}}{EJ}}\cos\varphi_0;\ \ \delta' = 2\arcsin\left(\frac{\sin\varphi_0}{\sqrt{2}}\right). \tag{3.61}$$

Соотношение между кривизной изгиба κ_0 и величиной ее изменения вследствие пружинения κ_0' имеет вид

$$\kappa_0' = \frac{KJ_{\text{пл}}}{EJ}\kappa_0^n. \tag{3.62}$$

Используя выражения (3.60)–(3.62), после целого ряда преобразований найдем выражение для определения угла пружинения $\Delta\theta$ в виде зависимости от угла загиба θ и кривизны контура при вершине κ_0:

$$\Delta\theta = \theta' = 2\arcsin\left[C_{\text{М}}\kappa_0^{3n-1}\sin\frac{\theta}{2}\right], \tag{3.63}$$

где $C_{\text{М}} = \dfrac{(1+n)KJ_{\text{пл}}}{2nEJ}$ – коэффициент, зависящий от механических свойств материала и геометрических параметров поперечного сечения изгибаемого элемента.

По найденному углу пружинения $\Delta\theta$ вычислим по формуле (3.59) остающийся после разгрузки угол загиба

$$\tilde{\theta} = \theta - 2\arcsin\left[C_{\text{М}}\kappa_0^{3n-1}\sin\frac{\theta}{2}\right]. \tag{3.64}$$

Формулы (3.63) и (3.64) позволяют решать прямую технологическую задачу (по заданному θ находить $\Delta\theta$ и $\tilde{\theta}$).

Для решения обратной технологической задачи (по заданному $\tilde{\theta}$ найти $\Delta\theta$ и θ) используется следующее уравнение:

$$\theta = 2\operatorname{arctg}\left[\frac{\sin(\tilde{\theta}/2)}{\sin(\tilde{\theta}/2) - C_{\text{М}}\kappa_0^{3n-1}}\right]. \tag{3.65}$$

2. Геометрические и кинематические параметры формообразующего инструмента. Основные геометрические параметры формообразующих элементов штампа – это ширина матрицы $B_{\text{М}}$, радиус кривизны при вершине пуансона $R_{\text{П}}$. Кинематическим параметром является ход пуансона относительно матрицы $H_{\text{П}}$. Рассмотрим изогнутое статическое состояние заготовки в ручье матрицы. В обозначениях рис. 3.7 справедливы следующие соотношения:

$$B_{\text{м}} = 2x_1, H_{\text{п}} = y_1. \tag{3.66}$$

Для определения координат x_1, y_1, соответствующих точке контакта заготовки с ребром матрицы $A(x_1, y_1)$, используем параметрические уравнения (3.26). Входящие в них параметры φ_0 и δ зависят от угла загиба θ и связаны между собой выражениями (3.59) и (3.60), из совместного решения которых находим:

$$\varphi_0 = \arccos\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]. \tag{3.67}$$

В рассматриваемой задаче параметр $k = \sqrt{2}/2$. В конечном итоге запишем аналитические зависимости, позволяющие определять геометрические параметры формообразующих элементов штампа и параметры кинематической настройки пресса:

$$\frac{B_{\text{м}}}{\rho_0} = 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2+n}{1+n}}\Phi(B,\psi_2) + \frac{1+n}{n}\sin\theta, \tag{3.68}$$

$$\frac{H_{\text{п}}}{\rho_0} = \frac{1+n}{n}\sin^2\frac{\theta}{2} - \sqrt{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{2+n}{1+n}}\cos\frac{\theta}{2}\Phi(B,\psi_2). \tag{3.69}$$

Здесь $\Phi(B,\psi_2) = \dfrac{\sqrt{2}B(p',q')}{4} - \psi_2(k,\varphi_0)$.

Анализ формул (3.68) и (3.69) показывает, что существует взаимная зависимость между геометрическими параметрами формуемой детали и шириной матрицы. При использовании матрицы с заданным размером $B_{\text{м}}$ нельзя получить детали с любым сочетанием угла изгиба $\tilde{\theta}$ и минимального радиуса кривизны $\tilde{\rho}_0$. Изгиб на заданный угол θ можно реализовать лишь при одном единственном значении радиуса ρ_0, определяемом из уравнения (3.68). Если требуется изготовить деталь с заданными размерами $\tilde{\rho}_0$ и $\tilde{\theta}$, то для этого надо иметь матрицу с ручьем определенной ширины, определяемой из уравнения (3.68). Зависимости (3.68) и (3.69) позволяют решать следующие типы технологических задач.

• Первый тип задач состоит в определении величин $B_{\text{м}}$, $R_{\text{п}}$ и $H_{\text{п}}$ для получения после разгрузки детали с геометрическими параметрами $\tilde{\rho}_0$ и $\tilde{\theta}$. В этом случае предварительно вычисляются величина изменения угла загиба $\Delta\theta$ и радиуса кривизны ρ_0' вследствие пружинения материала и находятся ρ_0 и θ, которые необходимо создать в процессе формообразования. Далее по формулам (3.68) и (3.69) определяются искомые настроечные параметры $B_{\text{м}}$ и $H_{\text{п}}$. Радиус закругления пуансона $R_{\text{п}}$ может быть меньше или равен значению ρ_0. Решение данной задачи можно осуществить с помощью компьютера или по номограммам, построенным по формулам (3.68) и (3.69). На рис. 3.7 приведены соответствующие графики для материала Д16АТ. Аналогичным образом можно построить подобные графики и для других материалов.

• Второй тип задач заключается в определении максимально допустимого радиуса пуансона $R_п$ и величины хода пунсона $H_п$ при изготовлении детали с заданным углом загиба $\tilde{\theta}$ на матрице с определенной шириной ручья $B_м$. В данном случае необходимо определить минимальный радиус кривизны ρ_0, который будет иметь заготовка при изгибе ее в матрице с шириной ручья $B_м$ до угла загиба θ (с учетом пружинения). Особенностью данного случая является то, что определению подлежат две взаимозависимые неизвестные величины ρ_0 и θ. Их нахождение возможно при совместном решении уравнений (3.65) и (3.68). Наряду с численным методом решения этой системы на компьютере возможно и ее номографирование (рис. 3.7, *б*). Последовательность нахождения искомых параметров следующая: по заданным значениям $B_м/h$, используя номограмму (рис. 3.7, *б*), находим $\bar{\rho}_0$; далее по $\tilde{\theta}$ и $\bar{\rho}_0$ определяем $H_п/\bar{\rho}_0$. Радиус закругления пуансона вычисляется из выражения $R_п \le (\bar{\rho}_0 h - h/2)$.

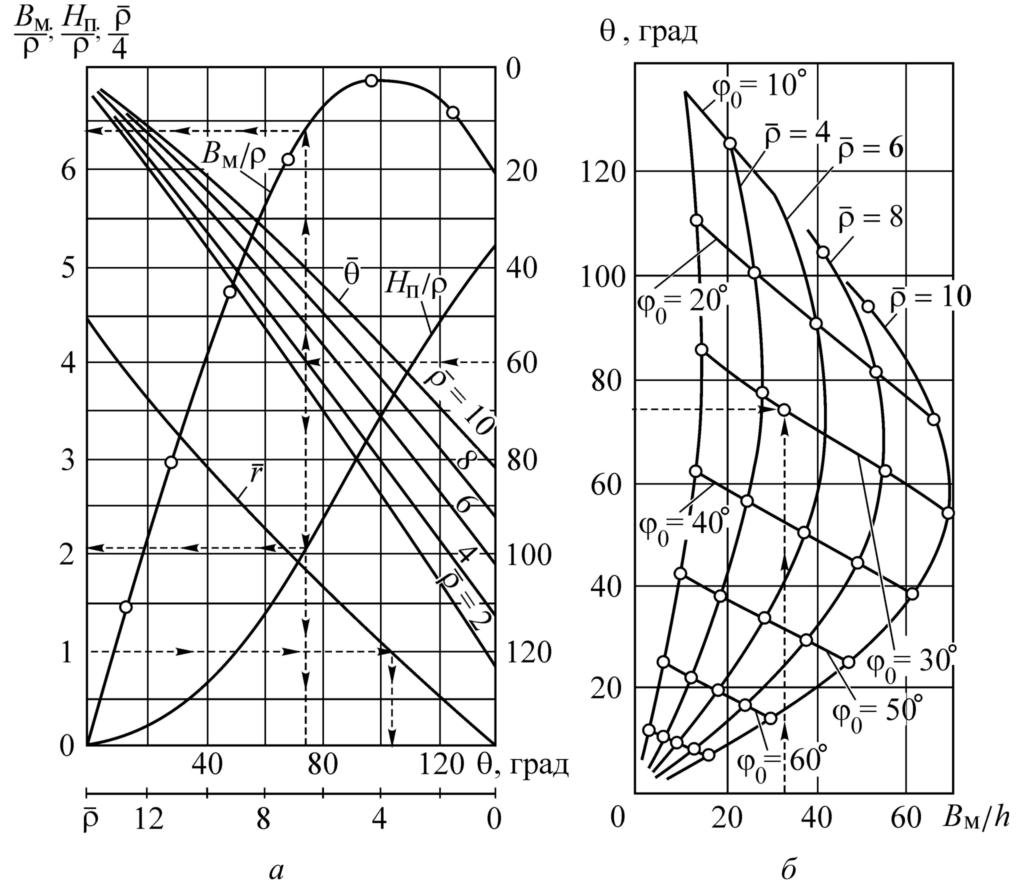


Рис. 3.7. Номограмма для определения:
а – пружинения, ширины матрицы и хода пуансона в зависимости от радиуса кривизны и угла загиба детали; *б* – радиуса закругления пуансона при свободной гибке

• Этот тип задач заключается в определении геометрических параметров формы изгиба заготовки при заданных величинах $H_п$ и $B_м$. Поделив (3.68) на (3.69), получим уравнение, которое выражает зависимость $B_м/H_п$ от одного параметра изгиба (угол θ):

$$\frac{B_{\text{м}}}{H_{\text{п}}}=\frac{2\sqrt{2}\left[\sin(\theta/2)\right]^{\frac{2+n}{1+n}}\Phi(B,\psi_2)+\dfrac{1+n}{n}\sin\theta}{\dfrac{1+n}{n}\sin^2(\theta/2)-\sqrt{2}\left[\sin(\theta/2)\right]^{\frac{2+n}{1+n}}\cos(\theta/2)\Phi(B,\psi_2)}. \qquad (3.70)$$

Из формулы (3.70) следует, что данный угол θ можно реализовать только при определенном соотношении $B_{\text{м}}/H_{\text{п}}$. Типовой график зависимости $B_{\text{м}}/H_{\text{п}} = f(\theta)$, построенной по данным рис. 3.7, *а*, представлен на рис. 3.8.

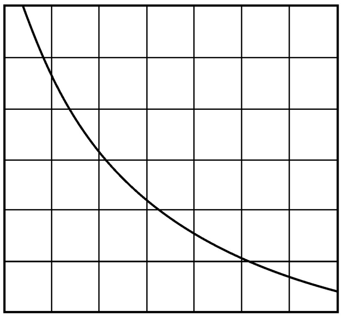


Рис. 3.8. График зависимости отношения $B_{\text{м}}/H_{\text{п}}$ от угла θ

При заданных значениях $H_{\text{п}}$ и $B_{\text{м}}$ находим отношение $B_{\text{м}}/H_{\text{п}}$ и далее, по графику (рис. 3.8), определяем угол θ. По найденному значению θ, используя номограмму (рис. 3.7, *а*), определяем величину $B_{\text{м}}/\rho_0$. Относительный радиус гибки вычисляется по формуле $\bar{\rho}_0=\dfrac{\rho_0}{h}=\dfrac{B_{\text{м}}/(B_{\text{м}}/\rho_0)}{h}$. По значениям $\bar{\rho}_0$ и θ, используя рис. 3.7, *а* находим искомые $\tilde{\theta}$ и относительный остаточный радиус кривизны $\bar{r}$ $(\bar{r}=\tilde{\rho}_0/h)$.

3. Усилие формообразования при свободной гибке. В процессе деформирования на заготовку действуют активная сила давления пуансона $P_{\text{п}}$ и реакции $P_{\text{м}}$ стороны матрицы. Запишем уравнения равновесия с учетом сил трения заготовки о матрицу

$$P_{\text{п}}=2P_{\text{м}}\cos(\theta/2)\left[1+f\,\text{tg}(\theta/2)\right], \qquad (3.71)$$

где f – коэффициент трения заготовки о ребро матрицы.

Подставив сюда выражение для $P_{\text{м}}=\dfrac{nKJ_{\text{пл}}\kappa_0^{1+n}}{(1+n)\cos\delta}$, найденное из системы (3.60), получим

$$P_{\text{п}}=\frac{2nKJ_{\text{пл}}\kappa_0^{1+n}}{(1+n)}\left[f+\text{ctg}(\theta/2)\right]. \qquad (3.72)$$

Усилие штамповки зависит от механических свойств материала и поперечного сечения заготовки, радиуса кривизны и угла загиба, создаваемых в процессе формообразования. При прочих равных условиях усилие возрастает с увеличением кривизны κ_0, на которую производится изгиб. Увеличение угла загиба θ сопровождается уменьшением усилия $P_{\text{п}}$, что объясняется существующей взаимосвязью между геометрическими параметрами формы изгиба ρ_0, θ и шириной матрицей $B_{\text{м}}$. При постоянстве радиуса кривизны ρ_0 увеличение угла загиба θ сопровождается уменьшением потребного усилия гибки.

Пример 3.2. Определим технологические параметры процесса для изготовления свободной гибкой из листового материала Д16АТ детали толщиной 3 мм, имеющей $\tilde{\rho}_0 = 12$ мм, $\tilde{\theta} = 60°$ и ширину $b = 100$ мм. Алгоритм расчета следующий. Определяем относительный остаточный радиус кривизны $\bar{r} = 4$. По номограмме (рис. 3.7, *а*), связывающей $\bar{r}/4$ и $\bar{\rho}_0$, находим $\bar{\rho}_0 = 3{,}7$ и вычисляем $\rho_0 = 11{,}1$ мм. По номограмме (рис. 3.7, *а*) для известных $\tilde{\rho}_0$ и $\bar{r}$ находим угол $\theta = 75°$. По номограмме (рис. 3.7, *б*) для известного угла θ определяем относительные величины $\bar{H}_п = H_п / \rho_0 = 2{,}05$ и $\bar{B}_м = B_м / \rho_0 = 6{,}45$. Далее вычисляем $H_п$ = 22,7 мм и $B_м$ = 71,5 мм. Усилие гибки вычисляем по формуле (3.72) и оно равно $P_п$ = 2348,3 Н. При этом учитывали, что K = 736 Н/мм^2, n = 0,19, f = 0,15, а момент инерции $J_{пл}$ вычислялся по формуле $J_{пл} = 2b(h/2)^{n+2} / (n+2) = 221{,}9$.

***4. Уточненный расчет параметров процессов свободной гибки* [55].** Воспользуемся методикой учета геометрической нелинейности изогнутого элемента при произвольной связи изгибающего момента и кривизны, приведенной в § 3.5. Подставив выражения (1.19) и (3.34) в соотношения (1.11) и $d\theta = \kappa_0 ds$, получим после интегрирования:

$$\Delta\tilde{\theta}_i = \int\limits_{\varphi_i^0}^{\varphi_i^1} \tilde{\kappa} ds = \frac{E_1 - E_i}{E_1} 2\arcsin(k_i \sin\varphi)\Big|_{\varphi_i^0}^{\varphi_i^1} - \frac{M_i^*}{\lambda_i E_1 J}\left(F(\varphi_i^1, k_i) - F(\varphi_i^0, k_i)\right)$$

или с учетом (3.28) (3.36)

$$\Delta\tilde{\theta}_i = \frac{E_1 - E_i}{E_1}(\theta_i - \theta_{i-1}) - \frac{M_i^*}{E_1 J}\Delta s_i. \qquad (3.73)$$

Полный остаточный угол загиба, ход пуансона, ширина матрицы и длина заготовки вычисляются следующим образом:

$$\tilde{\theta} = \sum_{i=i+1}^{i=i_k} \Delta\tilde{\theta}_i,\ H_п = \sum_{i=i+1}^{i=i_k} \Delta\tilde{y}_i, B_м = \sum_{i=i+1}^{i=i_k} \Delta\tilde{x}_i, s = \sum_{i=i+1}^{i=i_k} \Delta s_i. \qquad (3.74)$$

Здесь $\Delta\tilde{x}_i, \Delta\tilde{y}_i \Delta s_i$ определяем по формулам (3.36) и (3.38).

§ 3.8. Методика решения в эллиптических параметрах задачи упруго-пластического изгиба консольно защемленного элемента под действием распределенной нагрузки

1. Расчетно-силовая модель консольного упруго-пластического изгиба заготовки распределенной нагрузкой. Ротационное формообразование эластичной средой (РФЭС) – это сравнительно молодое направление развития технологии и прессового оборудования для изготовления деталей из листовых и профильных материалов [36, 37]. Областью применения РФЭС является формообразование цилиндрических и конических обечаек, прямошовных трубчатых заготовок, тонкостенных профилей и рифленых или гофрированных панелей плоской или криволинейной формы. В авиастроении широкое распространение получили процессы РФЭС, реализуемые на двухвалковых листогибочных машинах моделей ЛГМЭ (см. рис. 1.2).

Исходя из силовых схем представления ротационной гибки эластичными формующими и формообразующими элементами [37], обобщенную расчетно-силовую модель консольного упруго-пластического изгиба тонкостенной заготовки под действием распределенной нагрузки представим следующим образом.

Считаем, что консольно защемленный элемент имеет длину l, ширину b, а также в общем случае переменную вдоль длины l кривизну $\kappa_{нач}$ и толщину h. К данному элементу приложена внешняя распределенная силовая нагрузка q, переменная как по направлению, так и по величине вдоль длины l элемента, но постоянная вдоль ширины b и перпендикулярная к этому направлению для любого сечения элемента (рис. 3.9). Заменим заделку консольно защемленного элемента уравновешивающей силой P_0 и изгибающим моментом M_0 и рассмотрим равновесие нейтральной линии такого упруго-пластического изогнутого элемента под действием распределенной нагрузки q (рис. 3.10).

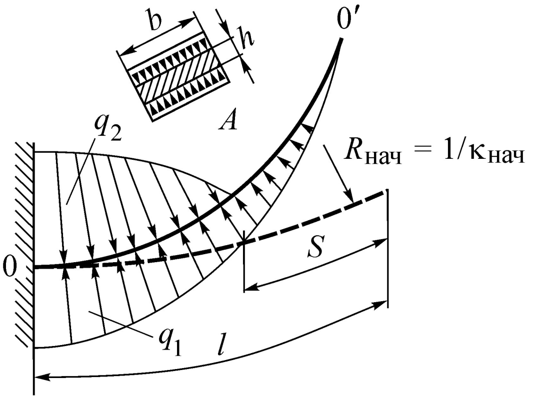


Рис. 3.9. Схема консольного изгиба элемента под действием распределительной нагрузки

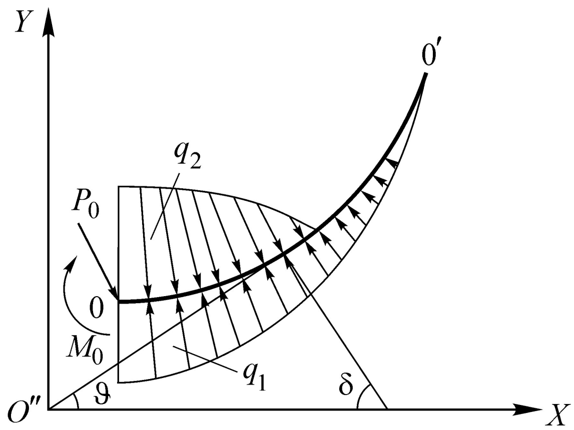


Рис. 3.10. Силовая схема консольного изгиба элемента

Исходя из силовых схем представления ротационной гибки эластичными формующими и формообразующими элементами [37], обобщенную расчетно-силовую модель консольного упруго-пластического изгиба тонкостенной заготовки под действием распределенной нагрузки представим следующим образом.

Считаем, что консольно защемленный элемент имеет длину l, ширину b, а также в общем случае переменную вдоль длины l кривизну $\kappa_{нач}$ и толщину h. К данному элементу приложена внешняя распределенная силовая нагрузка q, переменная как по направлению, так и по величине вдоль длины l элемента, но постоянная вдоль ширины b и перпендикулярная к этому направлению для любого сечения элемента (рис. 3.9). Заменим заделку консольно защемленного

элемента уравновешивающей силой P_0 и изгибающим моментом M_0 и рассмотрим равновесие нейтральной линии такого упруго-пластического изогнутого элемента под действием распределенной нагрузки q (рис. 3.10).

С учетом геометрической нелинейности процесса деформирования запишем для рассматриваемого случая (см. гл. 2) дифференциальное уравнение равновесия:

$$\frac{dM}{dS} = -P_q \sin(\vartheta + \delta) = -\sin\vartheta P_q \cos\delta - \cos\vartheta P_q \sin\delta, \tag{3.75}$$

где $P_q \sin\delta = \int\limits_{0'}^{s_A} q_1 \sin\mu_1 ds - \int\limits_{s_B}^{s_A} q_2 \sin\mu_2 ds$; $P_q \cos\delta = \int\limits_{0'}^{s_A} q_1 \cos\mu_1 ds - \int\limits_{s_B}^{s_A} q_2 \cos\mu_2 ds$.

Здесь M – момент внутренних сил, действующий в сечении, проходящем через текущую точку A элемента 00′; μ_1, μ_2 – углы наклона текущей распределенной нагрузки q_1 и q_2 к оси $O''X$; s_A, s_B – длины дуг изогнутой нейтральной линии элемента, отсчитываемые от точки 0′ до текущей точки A и B; P_q – суммарная сила в текущей точке A от q_1 и q_2, действующих на участке изогнутого элемента от точки 0′ до A; ϑ – угол наклона касательной к текущей точке A изогнутой нейтральной линии элемента; δ – угол наклона силы P_q к оси $O''X$ в текущей точке A изогнутого элемента.

Для решения уравнения (3.75) в эллиптических параметрах с приведением основных аналитических зависимостей к конечному виду воспользуемся приведенной в § 3.5 методикой учета геометрической нелинейности изогнутого элемента при произвольной связи изгибающего момента и кривизны, а также некоторыми допущениями.

Используем аппроксимацию нелинейной зависимости внутреннего изгибающего момента M от возникающей кривизны к нейтральной оси в сечениях изгибаемого элемента в виде ломаной линии (см. рис. 1.12), которая аналитически выражается формулой, сходной с (1.19):

$$M = E_j J\kappa + M_j^*, \tag{3.76}$$

где $E_j = \dfrac{M_{i+1} - M_i}{\kappa_{i+1} - \kappa_i}\dfrac{1}{J}$, $M_j^* = M_{i+1} - E_j J\kappa_{i+1}$.

Считая изменение $\Delta\kappa = \kappa_{i+1} - \kappa_i$ достаточно малым, примем следующую схему упруго-пластического изгиба элемента (рис. 3.11) произвольно распределенной нагрузкой q. На нейтральной линии изогнутого элемента символами 0′, 1, 2, 3, ,…, i – 1, i, i + 1, отметим точки, в которых получаемая кривизна соответствует кривизне $\kappa_{нач}$, κ_1, κ, …, κ_{i-1}, κ_i,…, установленной при использовании зависимости (3.76), и потребуем соответствия внутреннего изгибающего момента в этих точках внешнему изгибающему моменту, возникающему от действия на элемент 00′ распределенной силовой нагрузки q. На рис. 3.12 изображена эпюра внешнего изгибающего момента вдоль изогнутого под нагрузкой q элемента 00′ и показано соответствие установленным узловым точкам 0′, 1, 2, 3, ,…, $i-1$, i, i + 1,…, 0 на нейтральной линии изогнутого элемента значений внешнего изгибающего момента $M_{0'}=0$, M_1, M_2,…, M_{i-1}, M_i,…, M_0.

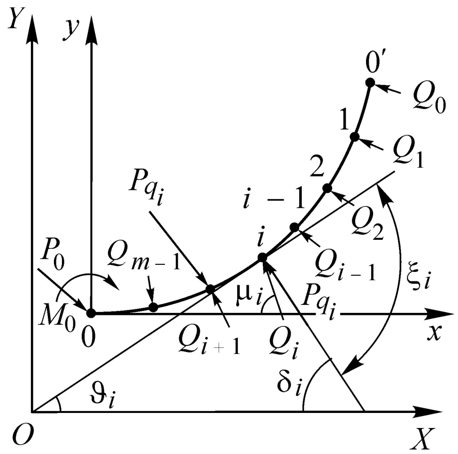


Рис. 3.11. Расчетная схема консольного изгиба элемента под действием распределенной нагрузки

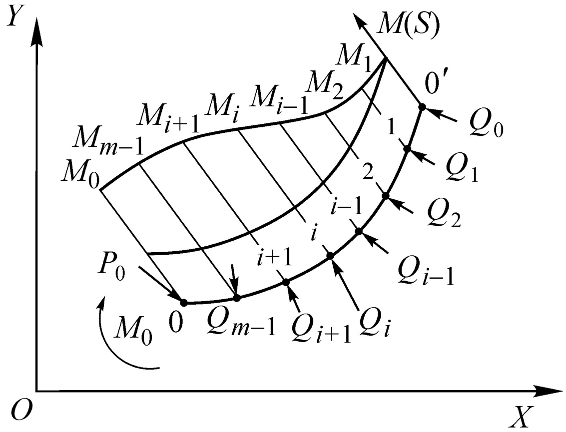


Рис. 3.12. Эпюра изгибающего момента вдоль изогнутого элемента

Заменим произвольно распределенную нагрузку q сосредоточенными в точках 0′, 1, 2, 3, ,…, $i-1$, i, i + 1,…, 0 силами, которые вычисляются следующим образом:

$$Q_i=\left(\left\{\int_{s_i}^{s_{i+1}}\left[q_1(s)\sin\mu_1(s)-q_2(s)\sin\mu_2(s)\right]ds\right\}^2+\right.$$

$$\left.+\left\{\int_{s_i}^{s_{i+1}}\left[q_1(s)\cos\mu_1(s)-q_2(s)\cos\mu_2(s)\right]ds\right\}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.77)$$

Угол приложения сосредоточенных сил к изогнутому элементу определяется из выражения

$$\mu_i=\operatorname{arctg}\left\{\frac{\int_{s_i}^{s_{i+1}}\left[q_1(s)\sin\mu_1(s)-q_2(s)\sin\mu_2(s)\right]ds}{\int_{s_i}^{s_{i+1}}\left[q_1(s)\cos\mu_1(s)-q_2(s)\cos\mu_2(s)\right]ds}\right\}. \qquad (3.78)$$

Здесь s_i, s_{i+1} – длина дуги изогнутой нейтральной линии элемента, отсчитываемая от точки O до текущей i-й точки.

Учитывая выражения (3.77) и (3.78), запишем выражение для определения суммарной силы P_{q_i}, действующей в i-й точке:

$$P_{q_i} = \sqrt{\left(\sum_{e=0'}^{i} Q_e \sin\mu_e \right)^2 + \left(\sum_{e=0'}^{i} Q_e \cos\mu_e \right)^2} . \qquad (3.79)$$

При этом угол наклона суммарной силы P_{q_i} к оси $0X$ равен

$$\delta_i = \operatorname{arctg}\left[\sum_{e=0'}^{i} Q_e \sin\mu_e \Big/ \sum_{e=0'}^{i} Q_e \cos\mu_e \right]. \qquad (3.80)$$

Заметим, что усилие P_{q_i} является постоянной по величине и направлению на участке дуги нейтральной линии длиной $s_i < s < s_{i+1}$, и изменяется только при переходе через следующую узловую точку $i+1$, где приложена сосредоточенная сила Q_{i+1} (на участке $s_{i+1} < s < s_{i+2}$ она опять имеет постоянное значение и направление и т.д.). Кроме того считаем, что для каждого малого участка изогнутой линии $s < \Delta s_j = s_{i+1} - s_i$ угол $\delta_i = \text{const}$.

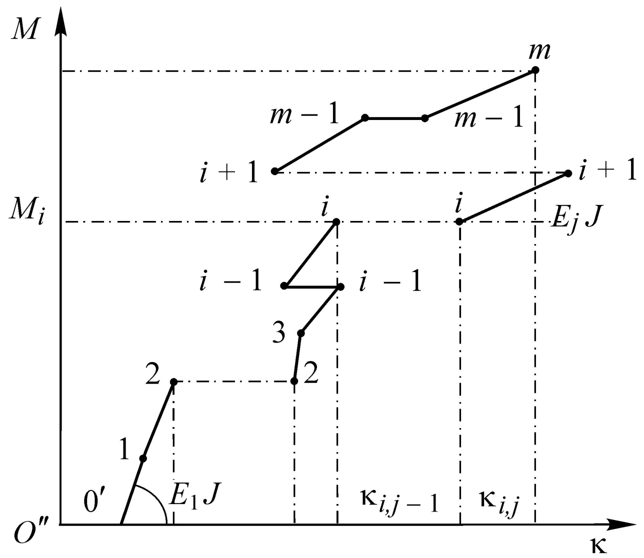


Рис. 3.13. Расположение узловых точек на графике $M = f(\kappa)$ при упруго-пластическом изгибе элемента

Для выбранной расчетной схемы изменения начальной кривизны $\kappa_{нач}$ нейтральной линии и толщины h заготовки на каждом участке элемента между двумя сечениями, проходящими через соседние точки 0' и 1, 1 и 2, … i и i+1, … считаем достаточно малыми, их значения на участке принимаем равными некоторому осредненному значению $\kappa_{нач1}$ и h_1, $\kappa_{нач2}$ и h_2, ..., $\kappa_{нач j}$ и h_j, … ($j = \overline{1, m}$, m – количество участков разбиения элемента, $j = i+1$). Тогда связь между кривизной нейтральной линии изогнутого элемента $00'$ и изгибающим моментом выразится кусочно-ступенчатой зависимостью (рис. 3.13). В случае постоянства $\kappa_{нач}$ и h по всему элементу $00'$ зависимость $M = f(\kappa)$ вдоль нейтральной линии соответствует изображенной на рис. 3.12.

2. Основные разрешающие уравнения в эллиптических параметрах. Воспользовавшись результатами, изложенными в § 3.5, запишем для j-го участка нейтральной линии изогнутого элемента следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 = \frac{4P_{q_i}}{E_j J_j}\left(C_j - \sin^2\frac{\xi}{2}\right), \qquad (3.81)$$

дальнейшее решение которого основано на выражении константы C_j и независимой переменной ξ через единые параметры k_j и φ.

Далее на основании работы [37] приведем без выводов аналитические зависимости, справедливые для расчетов на каждом отдельном j-м участке, вытекающие из решения уравнения (3.81). Они позволяют вычислить основные геометрические параметры, характеризующие деформированное состояние изогнутого элемента. Зависимости сгруппированы по две, первые из которых описывают форму равновесия изогнутого элемента перегибного рода, вторые – бесперегибного.

Выражения, позволяющие вычислить кривизну изогнутого элемента в любом сочетании, имеют вид для формы:

- перегибного рода

$$\frac{d\xi}{ds} = \kappa = 2\lambda_j k_j \cos\varphi; \qquad (3.82)$$

- бесперегибного рода

$$\frac{d\xi}{ds} = \kappa = \frac{2\lambda_j}{k_j}\sqrt{1 - k_j^2 \sin^2\varphi}, \qquad (3.83)$$

где $\lambda_i = \sqrt{\dfrac{P_{q_j}}{E_i J_j}}$, $J_j = \dfrac{bh_j^3}{12}$.

Длина дуги j-го участка изогнутого элемента вычисляется по формуле для формы:

- перегибного рода

$$\Delta s_j = \frac{1}{\lambda_j}\left[F(\varphi_i, k_j) - F(\varphi_{i+1}, k_j)\right]; \qquad (3.84)$$

- бесперегибного рода

$$\Delta s_i = \frac{k_j}{\lambda_j}\left[F(\varphi_i, k_j) - F(\varphi_{i+1}, k_j)\right], \qquad (3.85)$$

где $F(\varphi, k) -$ эллиптический интеграл первого рода.

Зависимости для нахождения линейных перемещений точек нейтральной линии изогнутого элемента определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta x_j &= \cos\delta_j \Psi_1(\varphi, k_j) + \sin\delta_j \Psi_2(\varphi, k_j), \\ \Delta y_j &= \cos\delta_j \Psi_2(\varphi, k_j) - \sin\delta_j \Psi_1(\varphi, k_j). \end{aligned} \qquad (3.86)$$

Здесь для форм равновесия перегибного рода имеем

$$\psi_1(\varphi,k_j)=\frac{1}{\lambda_j}\left[2E\left(\varphi_i,k_j\right)-2E\left(\varphi_{i+1},k_j\right)-F\left(\varphi_i,k_j\right)+F\left(\varphi_{i+1},k_j\right)\right];$$

$$\psi_2(\varphi,k_j)=-\frac{2k_j}{\lambda_j}\left(\cos\varphi_i-\cos\varphi_{i+1}\right),$$

а для форм равновесия бесперегибного рода

$$\psi_1(\varphi,k_j)=\frac{k_j}{\lambda_j}\left\{\frac{k_j^2-2}{k_j^2}\left[F\left(\varphi_i,k_j\right)-F\left(\varphi_{i+1},k_j\right)\right]-\frac{2}{k_j}\left[E\left(\varphi_{i+1},k_j\right)-E\left(\varphi_i,k_j\right)\right]\right\};$$

$$\psi_2(\varphi,k_j)=\frac{2}{\lambda_j k_j}\left[\sqrt{1-k_j^2\sin\varphi_i}-\sqrt{1-k_j^2\sin\varphi_{i+1}}\right],$$

где $E(\varphi,k)-$ эллиптический интеграл второго рода.

Приращения Δx_j и Δy_j определяют местоположение *i*-й точки нейтральной линии изогнутого элемента в текущих координатах (относительно системы координат с началом в $(i+1)$-й точке и осями, параллельными осям $O''X$ и $O''Y$). Положение $(i+1)$-й точки относительно концевой точки O' нейтральной линии изогнутого элемента определяется в виде сумм соответствующих приращений:

$$x_{i+1}=\sum_{j=1}^{i+1}\Delta x_j;\ \ y_{i+1}=\sum_{j=1}^{i+1}\Delta y_j, \tag{3.87}$$

а относительно точки 0:

$$x_{i+1}=\sum_{j=j+1}^{i_k}\Delta x_j;\ \ y_{i+1}=\sum_{j=j+1}^{i_k}\Delta y_j, \tag{3.88}$$

где i_k- порядковый номер узловой конечной точки 0 на нейтральной линии изогнутого элемента.

Входящие в формулы (3.82)–(3.88) эллиптические параметры φ_i, φ_{i+1}, k_j определяем соответствующим образом из граничных условий.

Уравнения для вычисления амплитуды φ_i имеют вид для формы:

- перегибного рода

$$\varphi_i=\operatorname{arctg}\left(\frac{2\lambda_j\sin(\xi_i/2)}{\kappa_j}\right); \tag{3.89}$$

- бесперегибного рода

$$\varphi_i=\xi_i/2. \tag{3.90}$$

Модуль k_j вычисляется следующим образом для формы:

• перегибного рода

$$k_j = \frac{\kappa_i}{2\lambda_j \cos\varphi_i}; \tag{3.91}$$

• бесперегибного рода

$$k_j = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\kappa_i}{2\lambda_i}\right)^2 + \sin^2\varphi_i}}. \tag{3.92}$$

Амплитуду φ_{i+1} определяем из зависимостей (3.91) (3.92), полагая в них $\kappa = \kappa_{i+1}$ и $\varphi = \varphi_{i+1}$, в результате получим для формы:

– перегибного рода

$$\varphi_{i+1} = \arccos\left(\frac{\kappa_{i+1}}{2\lambda_j k_j}\right); \tag{3.93}$$

• бесперегибного рода

$$\varphi_{i+1} = \arcsin\left[\sqrt{\frac{1}{k_j^2} - \left(\frac{\kappa_{i+1}}{2\lambda_j}\right)^2}\right]. \tag{3.94}$$

Для определения эллиптических параметров φ_i, φ_{i+1}, k_j по приведенным зависимостям необходимо знать угол ξ_i, который представляет собой сумму углов ϑ_i и δ_i, а также закон распределения погонной нагрузки q по длине l элемента. Угол δ_i определяется из выражения (3.80), если известны углы $\mu(s)$ приложения погонной нагрузки к изгибаемому элементу. Угол ϑ_i и определяется из выражений, аналогичных (3.28) и (3.39) для значений δ_{i-1}, φ_i и k_{j-1}, найденных для предыдущего $(j-1)$-го участка для формы:

• перегибного рода

$$\vartheta_i = 2\arcsin\left(k_{j-1}\sin\varphi_i\right) - \delta_{i-1}; \tag{3.95}$$

• бесперегибного рода

$$\vartheta_i = 2\varphi_i - \delta_{i-1}. \tag{3.96}$$

Аналогичным образом вычисляем угол ϑ_{i+1} для значений δ_i, φ_{i+1}, и k_j текущего участка для формы:

• перегибного рода

$$\vartheta_{i+1} = 2\arcsin\left(k_j \sin\varphi_{i+1}\right) - \delta_i; \tag{3.97}$$

• беспeрегибного рода

$$\vartheta_{i+1} = 2\varphi_{i+1} - \delta_i . \tag{3.98}$$

Отметим, что уравнения (3.97) справедливы для вычисления углов ϑ_i, начиная с $i = 1$ (для $i = 0$ они не годны, так как не существует предыдущего участка).

3. Порядок расчета силовых и геометрических параметров консольного изгиба заготовки распределенной нагрузкой. Для проведения численных расчетов по приведенным зависимостям, кроме закона распределения погонной нагрузки q необходимо задавать еще и начальный угол ϑ_0. В этом случае соответствие угла $\vartheta_{0'}$ реальному для заданной нагрузки достигается посредством варьирования его величины с использованием в качестве контрольного параметра сходимости, например, значение угла ϑ_0, который является известным (например, $\vartheta_0 = 0$, если ось OX параллельна касательной к точке 0 нейтральной линии изогнутого элемента, находящейся в районе заделки (рис. 3.11)).

Расчет по зависимостям (3.82)–(3.98) проводим по участкам, начиная с i = 1. В случае, если надо определить параметры промежуточных сечений на участке j, то для этого достаточно изменить параметр φ в пределах его значений на участке ($\varphi_{i+1} < \varphi \le \varphi_i$), вставляя эти значения вместо φ_{i+1}.

Точностью вычислений данной методики можно управлять, задав, например, допустимую погрешность $\left|\vartheta_i - \vartheta_i^*\right| \le \omega_\vartheta$, где ϑ_i вычисляется по зависимостям (3.95) и (3.96), а ϑ_i^* – по той же зависимости, но для параметров φ_i, δ_i и k_j. Если значение $\left|\vartheta_i - \vartheta_i^*\right|$ больше заданной погрешности, то надо взять большее число отрезков аппроксимации зависимости $M = f(\kappa)$ ломаной линией.

Приведенные формулы позволяют производить расчеты силовых и геометрических параметров как упруго-пластического консольного изгиба, так и упругого консольного изгиба элемента, в том числе переменной толщины и с начальной переменной кривизной, под распределенной нагрузкой. Эти две задачи изгиба, как уже отмечалось ранее, имеют место при гибке-прокатке тонкостенных заготовок как с использованием эластичной среды, так и без нее: упруго-пластический консольный изгиб – в зоне нагружения, упругий изгиб – в зоне разгрузки. При этом в случае упругого консольного изгиба элемента в разработанной методике необходимо учесть, что зависимость $M = f(\kappa)$ – линейная и поэтому в уравнении (3.76) для изгибаемого участка с постоянной начальной кривизной и толщиной:

$$E_2 = E_3 = \ldots E_j = \ldots E_1, \; M_1^* = M_2^* = M_3^* = \ldots \tag{3.99}$$

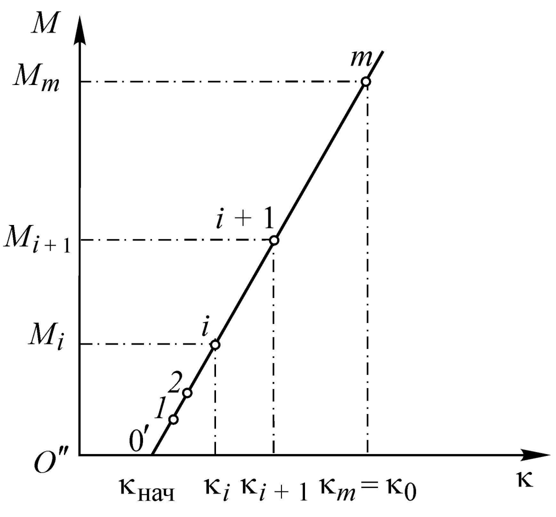
Среди существующих задач консольного изгиба тонкостенного элемента под распределенной нагрузкой возможны два варианта. Первый вариант – когда изгибают первоначально плоский или искривленный элемент с начальными нулевыми внутренними напряжениями. Второй вариант – когда изгибают искривленный элемент, в котором имеются остаточные напряжения от предыдущего изгиба (этот вариант соответствует представлению изгиба заготовки при гибке-прокатке в зоне разгрузки, когда заготовка после гибки-прокатки приобретает заданную криволинейную форму контура).

Для расчета параметров изгиба по первому варианту в предложенной методике необходимо учесть только равенства (3.99) для зависимости (3.76) и то, что деформация при этом изгибе удовлетворяет условию $\varepsilon < \varepsilon_т$. Расположение узловых точек 0′, 1, 2, 3, …, $i-1$, i, $i+1$, m на линейной зависимости $M = f(\kappa)$ для первого варианта приведено на рис. 3.14, *а*.

Для расчета параметров изгиба по второму варианту линейная зависимость выражается формулой:

$$M = E_i J\left(\kappa - \tilde{\kappa}_0\right). \tag{3.100}$$

Данную зависимость используем для расчета изгибающих моментов в узловых точках 0′, 1, 2, 3, …, $i-1$, i, $i+1$, m. Расположение указанных узловых точек на линейной зависимости $M = f(\kappa)$ для этого варианта (в случае изгиба элемента постоянной толщины и начальной кривизны) приведено на рис. 3.14, *б*.



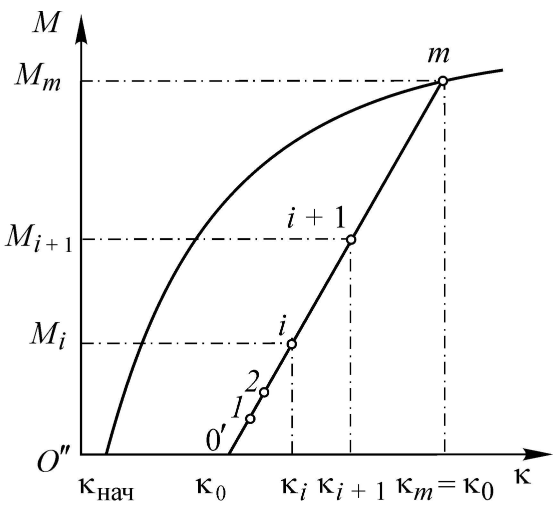


Рис. 3. 14. Расположение узловых точек $M = f(\kappa)$ при изгибе элемента: *а* – упругом; *б* – упругом повторном

В выражении (3.100) κ_0 – кривизна поперечного сечения элемента, полученная им после предыдущего пластического изгиба, до которого элемент был плоским или имел первоначальную кривизну в указанном поперечном сечении $\kappa_{нач}$ с нулевыми внутренними напряжениями. Отметим также, что в случае изгиба элемента с разной толщиной и (или) начальной кривизной необходимо для каждого характерного участка определить свои параметры аппроксимации зависимости $M = f(\kappa)$ ломаной линией и узловые точки $0'$, 1, 2, 3, …, $i-1$, i, $i+1$, m. При этом для обеспечения соответствия внутреннего и внешнего изгибающих моментов в узловых точках необходимо, чтобы изгибающие моменты M_1, M_2, …, M_i, …, M_m в этих точках по величине были равными для всех характерных участков.

При выводе основных уравнений подразумевалось, что кривизна и изгибающий момент в изогнутом элементе 00' (см. рис 3.11) увеличиваются, начиная с точки 0' и далее от сечения к сечению вплоть до заделки. Задачи такого вида имеют место при одно- и двухвалковой гибке-прокатке листовых заготовок на постоянную или слабоизменяющуюся, одного знака, одинарную кривизну поверхности, т.е. при формообразовании листовых цилиндрических и конусных деталей кругового контура, которые составляют основной класс деталей, применяемых в производстве ЛА и в других отраслях машиностроения [37].

Однако в общей постановке принятой силовой схемы (рис. 3.10) при наличии знакопеременной силовой нагрузки q вид изогнутого элемента 00' может быть разнообразным, в том числе со знакопеременной кривизной и соответственно со знакопеременным изгибающим моментом в сечениях изогнутого элемента. Такие задачи имеют место в производственной сфере, например, при гибке-прокатке двумя валками с эластичным покрытием знакопеременных (гофрированных) листовых деталей и др. Приведенная методика обеспечивает решение и таких задач. В работе [37] изложен алгоритм расчета параметров консольного изгиба тонкостенной заготовки на знакопеременную кривизну.

4. Общий порядок расчета параметров гибки тонкостенных деталей процессами РФЭС. Приведенные формулы позволяют вычислить кривизну, относительные угловые и линейные перемещения нейтральной линии изогнутого элемента при заданных механических свойствах и геометрии изгибаемой заготовки, а также распределенной нагрузке (рис. 3.15).

В виду того, что в указанной математической модели расчета требуется, чтобы распределенная нагрузка была задана, в практических расчетах для ее нахождения можно использовать линейную зависимость [37]

$$q = E_э \varepsilon, \tag{3.101}$$

где $E_э$ – коэффициент пропорциональности (приведенный модуль упругости эластичного покрытия).

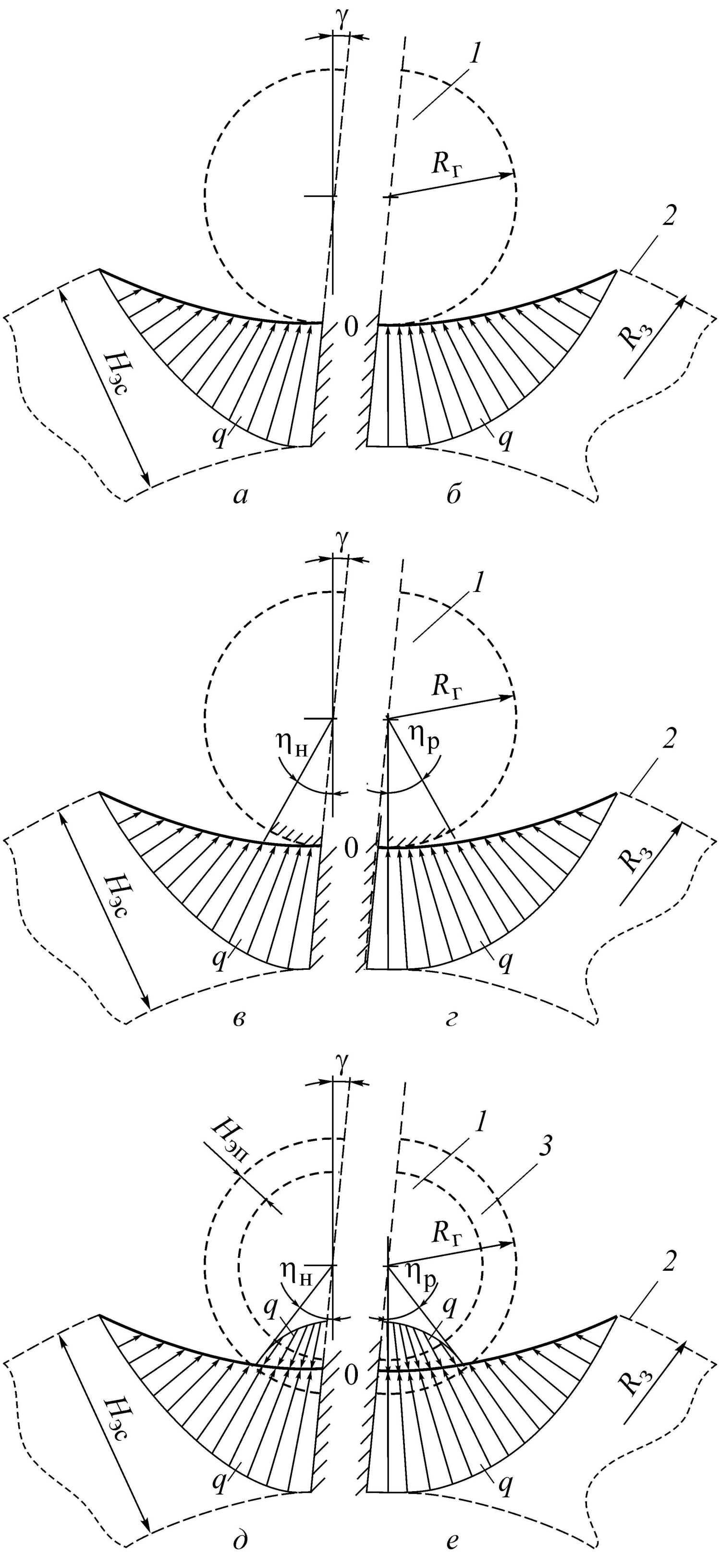


Рис. 3.15. Схемы представления упруго-пластического изгиба заготовки в зонах нагружения (*а, в г*) и разгрузки (*б, г, е*) при гибке на листогибочных машинах моделей ЛГМЭ: *1* – гибочный валок; *2* и *3* – эластичные покрытия (*а, б* – свободная (несопряженная) гибка; *в, г* – сопряженная гибка; *д, е* – переменно-сопряженная гибка)

Угол приложения нагрузки к заготовке в расчетах, не требующих высокой точности, можно принять неизменным (как в работе [36] или нормальным к нейтральной оси изгибаемой заготовки).

Исходные параметры для проведения расчетов по предложенной математической модели механические параметры изгибаемого материала заготовки, ее геометрические размеры, требуемый радиус изгиба заготовки, геометрические параметры гибочной оснастки и эластичных формующих и формообразующих элементов и их механические параметры.

Варьируемые параметры для осуществления замкнутости решения по данной математической модели: положение точки условного разделения изогнутого элемента заготовки на зоны нагружения и разгрузки; точки касания заготовки с эластичным покрытием формующего элемента.

Варьируемые параметры для осуществления замкнутости решения по данной математической модели: положение точки условного разделения изогнутого элемента заготовки на зоны нагружения и разгрузки; точки касания заготовки с эластичным покрытием формующего элемента.

Для задач одно- и двухвалковой гибки-прокатки считаем, что стыкуемость решений обеспечена, если найденные параметры удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\left| H_{\text{н}} - H_{\text{р}} \right| \leq \omega_H; \quad P_{q_0} \leq \omega_P, \tag{3.102}$$

где ω_{H}, $\omega_{\text{р}}$ – допускаемая погрешность вычислений; $H_{\text{н}}, H_{\text{р}}$ – соответственно расстояния от точки условного разделения зоны гибки до выбранной неподвижной системы координат, рассчитанные отдельно для зон нагружения и разгрузки.

Исходя из принятой математической модели и реального процесса одно - и двухвалкой гибки-прокатки общий порядок расчета представим следующими этапами [37].

<u>Этап 1.</u> Определяем активную кривизну по остаточной (требуемой) кривизне, на которую необходимо изогнуть тонкостенную заготовку.

<u>Этап 2.</u> Аппроксимируем зависимость $M = f(\text{к})$ линейно-ломаной зависимостью (3.76), разбив ее на m участков; количество разбиений по узловым точкам определяем исходя из требуемой точности вычислений.

<u>Этап 3</u>. Задаем положение точки условного разделения зоны гибки и шаг варьирования.

<u>Этап 4.</u> Задаем величину H и шаг варьирования (для переменно-сопряженной гибки). Дальнейшие пункты последовательности вычислений производим отдельно для зоны нагружения и зоны разгрузки.

Этап 5. Задаем положение точки границы зоны нагружения–разгрузки (задаем величину зоны сопряжения, если необходима сопряженная гибка или угол γ, определяющий границу перехода зоны нагружения в зону разгрузки (рис. 3.15)) и шаг варьирования (для двухвалковой гибки).

Этап 6. Задаем угол ϑ_0 и шаг варьирования.

Этап 7. Задаем величину $Q_{0'}$ варьирования на первом участке.

Этап 8. Вычисляем геометрические параметры изогнутого элемента на первом участке в зоне нагружения по описанной ранее математической модели.

Этап 9. Вычисляем действительное значение усилия $Q_{0'}$ на первом участке исходя из определенной геометрии изогнутого элемента на первом участке.

Этап 10. Если разность между вычисленным и заданным значениями усилия по абсолютной величине больше заданной погрешности вычислений, то варьируем величину усилия и производим вычисления на первом участке до тех пор, пока указанная разность не удовлетворит заданную точность вычислений.

Этап 11. Проверяем, вступила ли тонкостенная заготовка в контакт с эластичным покрытием гибочного валка. Если произошел контакт, то определяем его точку, варьируя величину кривизны ($\kappa_i < \kappa \le \kappa_{i+1}$), вставляя ее вместо величины κ_{i+1} и производя расчеты с этапа 8 (для переменно-сопряженной гибки-прокатки).

Этап 12. Аналогичным образом вычисляем геометрию и силовые параметры на последующих участках.

Этап 13. Считаем, что параметр $H_{\text{н}}$ (или $H_{\text{р}}$) определен с заданной точностью, если на последнем участке $P_{q_0} = 0$ (с заданной погрешностью). Если выполняется условие $P_{q_0} > 0$, то увеличиваем значение $H_{\text{н}}$ (или $H_{\text{р}}$), если $P_{q_0} < 0 -$ уменьшаем и повторяем расчет с этапа 5.

Этап 14. Если выполняется условие $H_{\text{н}} < H_{\text{р}}$, то увеличиваем угол γ, если наоборот – уменьшаем (при сопряженной гибке варьируем положение зоны сопряжения) и расчет повторяем с этапа 5 до тех пор, пока разность величин $H_{\text{н}}$ и $H_{\text{р}}$ не будет соответствовать заданной погрешности вычислений. Если разность $\left|H_{\text{н}} - H_{\text{р}}\right|$ меньше заданной погрешности, то считаем, что настроечные и силовые параметры процесса формообразования определены с заданной точностью, и расчет прекращаем.

Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ ТОНКИХ ЗАГОТОВОК С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Метод эллиптических параметров, рассмотренный ранее в гл. 2 и 3, относится к аналитическим методам решения задач упруго-пластического деформирования тонкостенных заготовок с учетом геометрической и физической нелинейности. Как известно, аналитические методы приводят к более наглядным по сравнению с численными методами решениям. Такие решения позволяют анализировать влияние тех или иных факторов на конечный результат. Однако часто при практической реализации аналитических решений окончательный результат получают опять-таки с использованием численных методов, например, методов вычисления входящих в решения интегралов со сложными подынтегральными функциями (см. гл. 3) и пр.

Рассмотренный в этой главе численный метод свободен от многих недостатков, присущих аналитическим методам, удобен при расчетах тонких заготовок с различными краевыми условиями и с произвольной внешней нагрузкой. Он обладает повышенной точностью, простотой задания исходных данных и универсальной математической моделью [10, 13, 18, 35, 38]. В основу конечно-разностных методов положена идея замены системы дифференциальных операторов рассматриваемой краевой задачи их разностными аналогами. Подобное преобразование позволяет перейти от процедуры решения сложных систем дифференциальных уравнений к решению систем алгебраических уравнений на основе подробно разработанного аппарата линейной алгебры [24, 25, 38, 70].

Отметим, что дискретизация области часто делается и при расчете на основе аналитических решений (см. § 3.5), однако в этих случаях она производится на заключительных этапах, реализуемых после получения аналитического решения.

§ 4.1. Изгиб стержня при следящем и поступательном перемещении силы

В качестве примера рассмотрим случай изгиба тонкого консольно-защемленного стержня длиной L (рис. 4.1). В процессе деформации, как отмечалось в гл. 3, наибольший практический интерес представляют следующие возможные законы изменения вектора силы P: следящее (при этом сохраняется неизменным значение угла $\delta_н$) и поступательное (сохраняется неизменным значение угла δ) перемещения силы. Будем считать, что деформирующая нагрузка P прикладывается квазистатически, а процесс деформирования будем рассматривать как последовательную смену состояний равновесия.

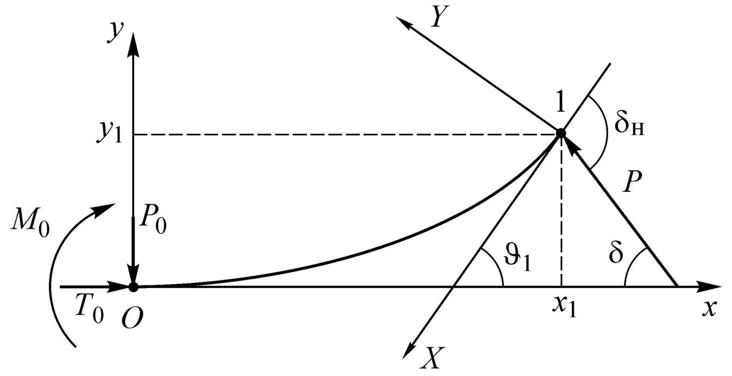


Рис. 4.1. Расчетная схема деформации элемента малой жесткости

Деформирование состояния стержня в системе координат $x0y$ при следящем и поступательном перемещениях силы описывается следующей математической моделью, в которую входят:

- точное выражение кривизны стержня

$$\frac{y''}{\left[1+\left(y'\right)^2\right]^{3/2}} = \kappa(M),\ x\in\left[0,x_1\right]; \tag{4.1}$$

- уравнения равновесия системы

$$T_0 - P\cos\delta = 0,\ P_0 - P\sin\delta = 0,\quad T_0 y_1 + P_0 x_1 = M_0; \tag{4.2}$$

- интегральное выражение для определения длины дуги

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx; \tag{4.3}$$

- краевые условия

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \tag{4.4}$$

Здесь $\delta = \delta_н - \vartheta_1$, $\vartheta_1 = \operatorname{arctg}\left(y'(x)\right)\big|_{x=x_1}$; $M = M_0 - T_0 y - P_0 x$.

Физические особенности задачи определяются зависимостью кривизны от изгибающего момента $\kappa = f(M)$, учитывающей вид диаграммы $\sigma-\varepsilon$, схему нагружения и жесткость сечения заготовки. Например, в случае пластического изгиба с растяжением функция $\kappa = f(M)$ в явном виде не разрешается и задается в виде таблицы $\left(\kappa_i, M_i\right)$, $i=\overline{1,m}$. При ее построении используются уравнения равновесия стержня в произвольном поперечном сечении в геометрически нелинейной постановке. Для рассматриваемого случая зависимость аппроксимируется эрмитовым сплайном третьего порядка (1.21).

Для удобства дальнейших численных расчетов введем безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{x_1};\ \ \bar{x}_1 = \frac{x_1}{L};\ \ \bar{y} = \frac{y}{y^*};\ \ \bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa^*};\ \ \bar{M} = \frac{M}{M^*};\ \ \bar{s} = \frac{s}{L}, \tag{4.5}$$

где $y^* = \kappa^* \bar{x}_1^2 L^2$; κ^*, M^* – произвольные параметры, которые выбираются исходя из конкретных условий, например, это могут быть значения кривизны и изгибающего момента в сечении 0, полученные из решения упругой задачи (см. гл. 2)) или из решения уравнения (4.1) при условии $y'(x) = 0$.

После подстановки (4.5) в систему (4.1)–(4.3) и краевые условия (4.4) получим математическую модель деформированного состояния стержня в безразмерном виде:

$$\frac{\bar{y}''}{\left[1+\left(\kappa^*\bar{x}_1 L\bar{y}'\right)^2\right]^{3/2}} = \bar{\kappa}(\bar{M}),\ \ \bar{x} \in [0,1]; \tag{4.6}$$

$$\bar{s}(\bar{x}) = \bar{x}_1 \int\limits_0^{\bar{x}} \sqrt{1+\left(\kappa^*\bar{x}_1 L\bar{y}'\right)^2}\, d\bar{x}; \tag{4.7}$$

$$\bar{y}(0) = 0,\ \bar{y}'(0) = 0. \tag{4.8}$$

Здесь $\bar{M} = A\bar{x} + B\bar{y} + C$, а параметр y^* в выражении (4.5) выбирался таким образом, чтобы вид уравнений (4.1) и (4.6) совпадал.

Далее рассмотрим особенности расчета при следящем и поступательном перемещении деформирующей силы *P*, что выразится в различных значениях коэффициентов *A*, *B* и *C*, входящих в уравнение (4.6).

Следящее перемещение силы $(\delta_н = \mathrm{const})$. Используя известные геометрические соотношения

$$\sin\delta = \sin\left(\delta_н - \vartheta_1\right) = \sin\delta_н \cos\vartheta_1 - \cos\delta_н \sin\vartheta_1;$$
$$\cos\delta = \cos\left(\delta_н - \vartheta_1\right) = \cos\delta_н \cos\vartheta_1 + \sin\delta_н \sin\vartheta_1;$$
$$\sin\vartheta_1 = \frac{\mathrm{tg}\,\vartheta_1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\vartheta_1}}, \cos\vartheta_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\vartheta_1}},$$

после целого ряда преобразований получим следующие выражения для коэффициентов *A*, *B* и *C*:

$$A=\frac{P\bar{x}_1 L\left(\kappa^*\bar{x}_1 L\bar{y}_1'\cos\delta_н-\sin\delta_н\right)}{M^*\sqrt{1+\left(\kappa^*\bar{x}_1 L\bar{y}_1'\right)^2}};$$

$$B=-\frac{P\,\kappa^*\bar{x}_1^2 L^2\left(\cos\delta_н+\kappa^*\bar{x}_1\,L\bar{y}_1'\sin\delta_н\right)}{M^*\sqrt{1+\left(\kappa^*\bar{x}_1 L\bar{y}_1'\right)^2}};$$

$$C=\frac{P\bar{x}_1 L\left\{\left[1+\left(\kappa^*\bar{x}_1 L\right)^2\bar{y}_1\bar{y}_1'\right]\sin\delta_н+\kappa^*\bar{x}_1 L\left(\bar{y}_1-\bar{y}_1'\right)\cos\delta_н\right\}}{M^*\sqrt{1+\left(\kappa^*\bar{x}_1 L\bar{y}_1'\right)^2}},$$

где $\bar{y}_1=\bar{y}(1),\ \bar{y}_1'=\bar{y}'(1)=\mathrm{arctg}\left(\bar{y}'(\bar{x})\right)\big|_{\bar{x}=1}$.

Сведем уравнения (4.6) и (4.7) к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}&z_1'=z_2,\ z_2'=\left[1+\left(\kappa^* L z_2 z_4\right)^2\right]^{3/2}\bar{\kappa}\left(\bar{x},z_1,z_3,z_4,z_6\right);\\&z_3'=0,\ z_4'=0;\ z_5'=\sqrt{1+\left(\kappa^* L z_2 z_4\right)^2},\ z_6'=0.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Здесь $z_1(\bar{x})=\bar{y}(\bar{x}),\ z_2(\bar{x})=\bar{y}'(\bar{x}),\ z_3(\bar{x})=\bar{y}(1),\ z_4(\bar{x})=\bar{x}_1;$

$$z_5(\bar{x})=\int_0^{\bar{x}}\sqrt{1+\left(\kappa^* L\bar{x}_1\bar{y}'\right)^2}\,d\bar{x};$$

$$z_6(\bar{x})=\bar{y}'(1).$$

Краевые условия (4.8) примут вид

$$\begin{aligned}&z_1(0)=z_2(0)=z_5(0)=0;\\&z_1(1)-z_3(1)=0;\\&z_2(1)-z_6(1)=0;\\&z_4(1)z_5(1)-1=0.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Введем на отрезке изменения аргумента $\bar{x}\in[0{,}1]$ равномерную разностную сетку с шагом $\Delta\bar{x}=1/N$, где точки $\bar{x}^i=(i-1)\Delta\bar{x}\quad(i=1,2,...N+1)-$ узлы сетки, а $z_1^i, z_2^i,.., z_6^i$ – значения сеточных функций в узлах. В результате краевая задача (4.9), (4.10) с помощью конечно- разностной формулы второго порядка (формулы трапеций [70]) сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно $z_1^i, z_2^i,.., z_6^i$. Система нелинейных уравнений решается с помощью модифицированного метода Ньютона [74], позволяющий обеспечить заданную точность решения и задавать более грубые начальные приближения, чем в классическом случае. Возникающие в методе Ньютона системы линейных матричных уравнений решаются методом матричной прогонки с ортогонализацией (см. приложение).

Поступательное перемещение силы $(\delta = \text{const})$. Для данного случая имеем следующие выражения для коэффициентов *A*, *B* и *C*:

$$A = -\frac{P\overline{x}_1 L\sin\delta}{M^*};\;\; B = -\frac{P\,\kappa^*(\overline{x}_1 L)^2\cos\delta}{M^*};\;\; C = \frac{P\overline{x}_1 L\left(\sin\delta + \kappa^*\overline{x}_1 L\overline{y}_1\cos\delta\right)}{M^*}.$$

Вместо краевой задачи (4.9) и (4.10) имеем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
&z_1' = z_2;\\
&z_2' = \left[1+\left(\kappa^* L z_2 z_4\right)^2\right]^{3/2}\overline{\kappa}\left(\overline{x}, z_1, z_3, z_4\right);\\
&z_3' = 0;\\
&z_4' = 0,\;\; z_5' = \sqrt{1+\left(\kappa^* L z_2 z_4\right)^2}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

с граничными условиями

$$z_1(0) = z_2(0) = z_5(0) = 0;\;\; z_1(1) - z_3(1) = 0;\;\; z_4(1) z_5(1) - 1 = 0. \tag{4.12}$$

Заметим, что решение задачи можно получить и в системе координат, связанной с точкой *1* (см. рис. 4.1). В этом случае меняется порядок разрешающей системы уравнений и вид параметров *A*, *B*, *C*, а ход решения остается прежним. При поступательном перемещении силы *P* разрешающая система дифференциальных уравнений первого порядка в системе координат *X1Y* и соответствующие ей краевые условия запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
&z_1' = z_2;\\
&z_2' = \left[1+\left(\kappa^* L z_2 z_3\right)^2\right]^{3/2}\overline{\kappa}\left(\overline{X}, z_1, z_3, z_5\right);\\
&z_3' = 0;\\
&z_4' = \sqrt{1+\left(\kappa^* L z_2 z_3\right)^2};\\
&z_5' = 0.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
&z_1(0) = z_2(0) = z_4(0) = 0;\\
&z_2(1) - z_5(1) = 0;\\
&z_4(1) z_3(1) - 1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Здесь $z_1\left(\overline{X}\right) = \overline{Y}\left(\overline{x}\right);$

$$\begin{aligned}
&z_2\left(\overline{X}\right) = \overline{Y}'\left(\overline{X}\right);\\
&z_3\left(\overline{X}\right) = \overline{X}_0;\\
&z_4\left(\overline{X}\right) = \int_0^{\overline{X}} \sqrt{1+\left(\kappa^* L\overline{X}_0\overline{Y}'\right)^2}\, d\overline{X};\\
&z_5\left(\overline{X}\right) = \overline{Y}_0'.
\end{aligned}$$

В выражениях (4.5) при этом учитывались соотношения $\overline{X} = \dfrac{X}{X_0}$; $\overline{X}_0 = \dfrac{X_0}{L}$; $\overline{Y} = \dfrac{Y}{\kappa^* \overline{X}_0^2 L^2}$, а коэффициенты A, B и C, входящие во второе уравнение системы (4.13), имеют вид:

$$A = \frac{P\overline{X}_0 L\left(\kappa^* \overline{X}_0 L \overline{Y}_0' \cos\delta + \sin\delta\right)}{M^* \sqrt{1+\left(\kappa^* \overline{X}_0 L \overline{Y}_0'\right)^2}};\ B = \frac{P\,\kappa^* \overline{X}_0^2 L^2 \left(\cos\delta - \kappa^* \overline{X}_0 L \overline{Y}_0' \sin\delta\right)}{M^* \sqrt{1+\left(\kappa^* \overline{X}_0 L \overline{Y}_0'\right)^2}};\ C=0.$$

Аналогично, при следящем перемещении силы получим

$$\begin{aligned} &z_1' = z_2;\\ &z_2' = \left[1+\left(\kappa^* L z_2 z_3\right)^2\right]^{3/2} \overline{\kappa}\left(\overline{X}, z_1, z_3\right);\\ &z_3' = 0,\ z_4' = \sqrt{1+\left(\kappa^* L z_2 z_3\right)^2}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} &z_1(0) = z_2(0) = z_4(0) = 0;\\ &z_4(1) z_3(1) - 1 = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Здесь $A = \dfrac{P\overline{X}_0 L \sin\delta_{\text{н}}}{M^*}$; $B = \dfrac{P\,\kappa^* \overline{X}_0^2 L^2 \cos\delta_{\text{н}}}{M^*}$, $C = 0$.

Целесообразность выбора системы координат определяется удобством при решении конкретной практической задачи.

Отметим, что конечно-разностный метод обладает большими возможностями и применим к широкому классу задач. Однако разностная задача только тогда имеет практическую ценность, когда обладает свойствами сходимости и устойчивости (см. § 2.5). Первое из этих свойств должно гарантировать сходимость приближенного решения к точному, а второе – слабую зависимость результатов расчета от неизбежных ошибок округления. Во многих случаях практической деятельности при решении сложных задач не удается выполнить строгое исследование сходимости и устойчивости. В связи с этим большое значение приобретают тестовые задачи, на которых можно проверить пригодность разностной схемы.

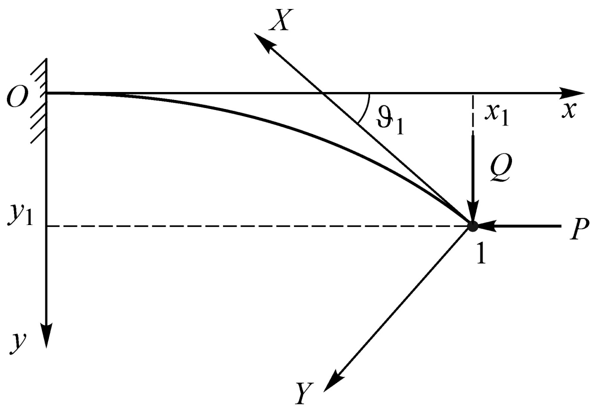


Рис. 4.2. Изгиб гибкого стержня под действием вертикальной и горизонтальной сил

<u>Пример 4.</u> Рассмотрим упругий изгиб гибкого стержня длиной L и постоянной жесткости H (см. формулы (4.1) и (4.2) при условии $\kappa(M) = M / H$) под воздействием вертикальной и горизонтальной сил (Q и P) на свободном конце (рис. 4.2).

В табл. 4.1 представлено сравнение результатов расчетов относительных координат свободного конца стержня при различных сочетаниях внешней нагрузки с результатами вычислений в других работах. В работе [65] получено аналитическое решение через эллиптические интегралы, а в работе [75] – для решения нелинейной краевой задачи построена трехточечная разностная схема четвертого порядка, а в работе [79] – использовался метод конечных элементов. Во всех рассматриваемых случаях и вариантах нагрузки имеем

$$M^* = QL;\ \kappa^* = QL/H \equiv a/L, a = QL^2/H,\ b = PL^2/H,\ N = 100,\ \Delta = 10^{-6},$$

где Δ – задаваемая точность решения.

Таблица 4.1

Параметр		Числовые значения x_1/L. y_1/L							
		расчет		по методике [65]		по методике [75]		по методике [79]	
a	b	x_1/L	y_1/L	x_1/L	y_1/L	x_1/L	y_1/L	x_1/L	y_1/L
0,7306	0	0,9676	0,2301	0,9676	0,2301	–	–	–	–
3	0	0,7456	0,6033	0,7456	0,6033	–	–	–	–
3,4055	0	0,7132	0,6338	0,7132	0,6338	–	–	–	–
5	0	0,6124	0,7138	–	–	–	–	0,6124	0,7138
8	0	0,4952	0,785	0,496	0,785	–	–		–
3	2	0,5119	0,7588	–	–	0,512	0,7588	–	–
5	3	0,3195	0,8269	–	–	0,3195		–	–
2	3	0,4107	0,79	–	–	0,4107	0,7901	–	–

В системе координат $x0y$ краевая задача записывается следующим образом:

$$z_1' = z_2;$$

$$z_2' = \left[1 + \left(a z_2 z_4\right)^2\right]^{3/2} \left[z_4(1-\bar{x}) + b z_4^2 (z_3 - z_1)\right];$$

$$z_3' = 0;$$

$$z_4' = 0;\ z_5' = \sqrt{1 + \left(a z_2 z_4\right)^2}.$$

$$z_1(0) = z_2(0) = z_5(0) = 0;\ z_1(1) - z_3(1) = 0;\ z_4(1) z_5(1) - 1 = 0,$$

где $z_1(\bar{x}) = \bar{y}(\bar{x});\ \ z_2(\bar{x}) = \bar{y}'(\bar{x});\ \ z_3(\bar{x}) = \bar{y}_1;\ \ z_4(\bar{x}) = \bar{x}_1;\ \ z_5(\bar{x}) = \int\limits_0^{\bar{x}} \sqrt{1 + \left(a \bar{x}_1 \bar{y}'\right)^2}\, d\bar{x};$

$M = Q(x_1 - x) + P(y_1 - y);\ \bar{x} = x / x_1;\ \ \bar{x}_1 = x_1 / L;\ \bar{y} = y / \left(\bar{x}_1^2 L a\right).$

Аналогичный результат был получен при решении задачи в других системах координат. В частности, для системы координат *X1Y* имеем

$$z_1' = z_2,\ z_2' = z_4\left[1+\left(a z_2 z_4\right)^2\right]^{3/2}\left[1+\left(a z_3 z_4\right)^2\right]^{-1/2}\times$$
$$\times\left[(1+bz_3z_4)\bar{X}+z_1z_4\left(a^2z_3z_4-b\right)\right];$$

$$z_3' = 0,\ z_4' = 0;\ z_5' = \sqrt{1+\left(az_2z_4\right)^2};$$
$$z_1(0) = z_2(0) = z_5(0) = 0;\ z_2(1)-z_3(1) = 0;\ z_4(1)z_5(1)-1 = 0,$$

где $z_1\left(\bar{X}\right)=\bar{Y}\left(\bar{X}\right),\ z_2\left(\bar{X}\right)=\bar{Y}'\left(\bar{X}\right),\ z_3\left(\bar{X}\right)=\bar{Y}_0',\ z_4\left(\bar{X}\right)=\bar{X}_0,$

$$z_5\left(\bar{X}\right)=\int_0^{\bar{X}}\sqrt{1+\left(a\bar{X}_0\bar{Y}'\right)^2}d\bar{X},\ M=\left(P\sin\vartheta_1+Q\cos\vartheta_1\right)X+$$
$$+\left(Q\sin\vartheta_1-P\cos\vartheta_1\right)Y,\ \bar{X}=X/X_0,\bar{X}_0=X_0/L,\bar{Y}=Y/\left(\bar{X}_0^2La\right).$$

Решив краевую задачу, далее по формулам $x_1 = X_0\cos\vartheta_1+Y_0\sin\vartheta_1$; $y_1 = X_0\sin\vartheta_1 - Y_0\cos\vartheta_1$ $\left(\vartheta_1=\operatorname{arctg}\left(\bar{X}_0a\bar{Y}_0'\right)\right)$ найдем искомые координаты x_1 и y_1.

В дуговых координатах s,ϑ (отсчет s ведется от точки 0) разрешающие уравнения с соответствующими граничными условиями имеют следующий вид:

$$z_1' = b\left(z_5-z_3\right)+a\left(z_6-z_4\right);$$
$$z_2' = -b\sin z_1 - a\cos z_1,\ z_3' = \sin z_1;$$
$$z_4' = \cos z_1,\ z_5' = 0,\ z_6' = 0;$$
$$z_1(0) = z_3(0) = z_4(0) = 0,\ z_2(1) = 0;$$
$$z_3(1)-z_5(1) = 0,\ z_4(1)-z_6(1) = 0.$$

Здесь $z_1 = \vartheta$, $z_2 = d\vartheta/ds$; $z_3=\bar{y}=\int_0^{\bar{s}}\sin\vartheta d\bar{s}$; $z_4=\bar{x}=\int_0^{\bar{s}}\cos\vartheta d\bar{s}$; $z_5=\bar{y}_1$, $z_6=\bar{x}_1$; $\bar{x}=x/L,\bar{y}=y/L,\bar{s}=s/L.$

Изложенная в этой главе универсальная методика расчета геометрических параметров изогнутой оси стержня при различных законах нагружения позволяет решать многие практические задачи, связанные с пластическим формообразованием деталей из листового и профильного материала методами гибки на различном технологическом оборудовании (ПГР, СПО, КГЛ, ЛГС, ЛГМ, ЛГМЭ и др.). Можно относительно просто и в широком диапазоне варьировать параметры решаемой задачи и получать исчерпывающую информацию об исследуемом процессе. Отметим, что сочетание автоматизированного расчета силовых и настроечных параметров исследуемого процесса, программного управления технологическим оборудованием и возможности оперативного замера действительных механических характеристик обрабатываемой заготовки (например, для упреждающей корректировки настроечных параметров листогибочной машины) позволяет существенно повысить производительность труда с одновременным значительным снижением объема ручных доводочных работ.

§ 4.2. Численный метод решения задачи упруго-пластического изгиба консольно защемленного элемента под действием произвольно распределенной нагрузки

Изложим методику расчета больших перемещений консольно-защемленного элемента при воздействии произвольно заданной распределенной нагрузки p (рис. 4.3). Рассматриваемая задача представляет практический интерес, так как позволяет в дальнейшем рассчитать основные параметры гибки тонкостенных деталей на двухвалковых листогибочных машинах типа ЛГМЭ с эластичными формующими и формообразующими валками (см. § 3.8).

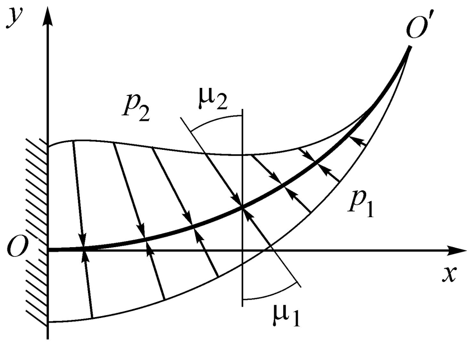


Рис. 4.3. Схема консольного изгиба элемента под действием произвольно заданной распределенной нагрузки

Допуская сколь угодно большие угловые и линейные перемещения сечений элемента, запишем точное выражение кривизны для рассматриваемого случая в следующем виде [38, 40, 78]:

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \kappa(M), \tag{4.17}$$

где M – момент внутренних сил в сечении, проходящем через текущую точку элемента OO', который уравновешивается внешним изгибающим моментом $M(s)$, возникающим от действия на элемент OO' распределенной силовой нагрузки p; ϑ – угол наклона касательной к текущей точке изогнутой нейтральной линии элемента; s – длина дуги изогнутой нейтральной линии элемента, отсчитываемая от точки 0' до текущей точки; $\mu_1(s)$ и $\mu_2(s)$ – углы наклона текущей распределенной нагрузки $p_1(s)$ и $p_2(s)$ относительно оси $0y$;

$$M(s) = \int_0^s \Big\{ p_1(\xi)\Big[\big(x(s)-x(\xi)\big)\cos\mu_1(\xi) + \big(y(s)-y(\xi)\big)\sin\mu_1(\xi)\Big] -$$

$$- p_2(\xi)\Big[\big(x(s)-x(\xi)\big)\cos\mu_2(\xi) + \big(y(s)-y(\xi)\big)\sin\mu_2(\xi)\Big]\Big\} d\xi.$$

На концах изогнутого элемента 00' выполняются граничные условия:

$$\vartheta'(0)=0,\ \vartheta(l)=0. \tag{4.18}$$

Здесь ϑ' – первая производная по s.

Величины κ_0 и M_0 в точке O определяются из решения технологической задачи в точке O (см. § 1.4). Отметим, что при заданной силовой нагрузке $p_1(s)$ и $p_2(s)$ значению κ_0 соответствует строго определенное значение длины l изогнутого элемента OO'.

Линейные перемещения точек нейтральной линии изогнутого элемента могут быть найдены после решения краевой задачи (4.17) и (4.18) по формулам

$$x=\int_s^l \cos\vartheta(\xi)d\xi,\ y=\int_s^l \sin\vartheta(\xi)d\xi. \tag{4.19}$$

Физические особенности задачи определяются нелинейной зависимостью $\kappa(M)$, которая в случае необходимости может учитывать сложность напряженного состояния [50, 54], переменную жесткость заготовки, а также вид диаграммы $\sigma-\varepsilon$, полученной при испытании на растяжение и сжатие сплавов соответствующих марок. В общем случае функция $\kappa(M)$ в явном виде не разрешается и задается в виде таблицы (κ_i, M_i), $i=\overline{1,n}$. Воспользуемся введенной ранее аппроксимацией зависимости $\kappa(M)$ в виде ломаной линии (рис. 4.4). Аналитически она выражается в следующем виде:

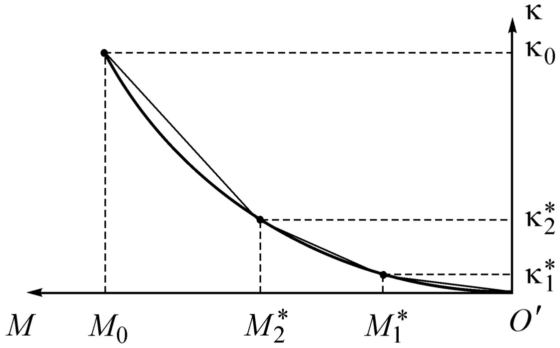


Рис. 4.4. Аппроксимация зависимости кривизны от изгибающего момента ломаной линией

$$\kappa=k_i\left[M(s)-M_{i-1}^*\right]+\kappa_{i-1}^*,\kappa_{i-1}^*<\kappa<\kappa_i^*, \tag{4.20}$$

где i, i+1 $(i=\overline{1,m})$ – порядковый номер узловых точек на кривой $\kappa(M)$, между которыми, согласно аппроксимации (4.20), кривизна изменяется линейно от κ_{i-1}^* до κ_i^*; $k_i=\left(\kappa_i^*-\kappa_{i-1}^*\right)/\left(M_i^*-M_{i-1}^*\right)$, $M_0^*=\kappa_0^*=0$. Значения величин M_i^*, κ_i^* в узловых точках определяются по известной методике [50, 54].

Таким образом, исходная задача сводится к задаче, когда изгибаемый элемент 00' составлен из m участков переменной жесткости и в пределах каждого участка решается уравнение (4.17), в котором подынтегральные функции должны вычисляться на каждом участке с учетом силовых факторов, присутствующих на других участках изогнутого элемента. На границе стыков таких участков (длины Δs_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ которых пока не определены) должны соблюдаться условия непрерывности изогнутой линии элемента OO', с учетом известных в этих точках значений кривизны κ_i^*. Также должны выполняться условия (4.18). Из решения поставленной задачи найдем длину изогнутого элемента OO':

$$l = \sum_{i=1}^{m} \Delta s_i. \tag{4.21}$$

Приведем порядок расчета силовых и геометрических параметров консольного изгиба заготовки распределенной нагрузкой. Для удобства дальнейших выкладок продифференцируем уравнение (4.17) для i-го участка по дуге s и с учетом преобразованных выражений (4.19) и (4.20) получим основное интегродифференциальное уравнение второго порядка в следующем виде:

$$\vartheta'' + k_i \int_0^s \left[p_1(\xi)\cos(\mu_1(\xi) - \vartheta(s)) - p_2(\xi)\cos(\mu_2(\xi) - \vartheta(s)) \right] d\xi = 0, \tag{4.22}$$

где ϑ'' – вторая производная по s.

Аналогично изложенному в § 4.1 и 4.2 уравнение (4.22) сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Для проведения численных расчетов необходимо задавать кроме распределения погонной нагрузки p еще и начальный угол $\vartheta(0)$. В этом случае соответствие угла $\vartheta(0)$ реальному для заданной нагрузки достигается посредством варьирования его значения с использованием угла $\vartheta(l) = 0$ в качестве контрольного параметра сходимости. Порядок расчета представим следующим алгоритмом.

1. Расчет проводим последовательно по участкам, начиная с i = 1. Задаем угол $\vartheta_0^{(0)}$. Решаем уравнение (4.22) с условиями $\vartheta_1(0) = \vartheta_{0'}^{(0)}, \vartheta_1'(0) = 0$ и находим, варьируя значение Δs_1, такое значение, чтобы выполнялось условие $\vartheta_1'(\Delta s_1) = \kappa_1^*$. Вычисляем угол $\vartheta_1(\Delta s_1)$.

2. Для 2-го участка решаем уравнение с условиями $\vartheta_2'(\Delta s_1) = \kappa_1^*$, $\vartheta_2(\Delta s_1) = \vartheta_1(\Delta s_1)$. Определяем длину участка Δs_2, при которой выполняется условие $\vartheta_2'(\Delta s_1 + \Delta s_2) = \kappa_2^*$. Вычисляем угол $\vartheta_2(\Delta s_1 + \Delta s_2)$.

3. Решаем краевую задачу, аналогичную i-му участку с условиями

$$\vartheta_i(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_{i-1}) = \vartheta_{i-1}(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_{i-1}),$$

$$\vartheta_i'(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_{i-1}) = \kappa_{i-1}^*.$$

Находим длину участка Δs_i из условия выполнения равенства $\vartheta_i'(\Delta s_1 +$ $+\Delta s_2 + \ldots + \Delta s_i) = \kappa_i^*$ и вычисляем угол $\vartheta_i(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_i)$. Точностью вычислений по предложенной методике можно управлять, задав, например, допустимую погрешность $\left|\vartheta_i'(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_i) - \kappa_i^*\right| \le \omega_{\vartheta'}$.

4. Из решения краевой задачи для последнего участка находим его длину Δs_m, при которой выполняется условие $\vartheta_m'(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_m) = \kappa_0$ и вычисляем значение угла $\vartheta_m(\Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_m)$. По формулам (4.19) и (4.21) далее найдем линейные перемещения точек нейтральной линии изогнутого элемента *OO*' и его длину. Проверяем равенство $\vartheta_m(l) = 0$.

5. Проверяем выполнение условия $\left|\vartheta_m(l)\right| \le \omega$, где ω – заданная точность решения (обычно ω = 0,0001). Если условие выполнено, то расчет закончен; если условие не выполняется, то переходим к п.1, где задаем новое значение угла $\vartheta_1(0) = \vartheta_{0'}^{(1)}$.

В качестве первого приближения для угла $\vartheta_{0'}^{(0)}$ и длины изогнутого элемента l можно выбрать решения упругой задачи с краевыми условиями (4.18) при m = 1. В этом случае в уравнении (4.22) заменяем параметр k_i на $k_1^{(0)} = \kappa_0 / M_0$. Полная длина изогнутого элемента l определяется из условия выполнения дополнительного равенства $\vartheta''(l) = \kappa_0$. Как показали численные расчеты, в этом случае для решения задачи упруго-пластического консольного изгиба достаточно трех-четырех приближений.

По изложенной методике можно проводить расчеты силовых и геометрических параметров как упруго-пластического консольного изгиба, так и упругого консольного изгиба элемента, в том числе переменной толщины под распределенной нагрузкой. Эти две задачи изгиба, как было уже сказано, имеют место при гибке-прокатке с использованием эластичной среды: упруго-пластический консольный изгиб – в зоне нагружения, упругий изгиб – в зоне разгрузки. Заметим, что в случае изгиба заготовки постоянного сечения решение упругой задачи существенно упрощается и здесь можно воспользоваться методикой, изложенной в работах [13, 38]. В этом случае в уравнении (4.22) необходимо заменить k_i на $k = 1/H$, где H – жесткость поперечного сечения тонкостенной заготовки.

<u>Пример 4.2.</u> Рассмотрим изгиб гибкого стержня с постоянным сечением и длиной l под воздействием произвольно заданной распределенной нагрузки $p_1(s) = p(s)$, $p(s) = qf(s/l)$, $p_2(s) = 0$, $\mu_1(s) = \beta\vartheta(s)$. Здесь функция f определяет характер распределения нагрузки вдоль длины стержня; постоянная q представляет усилие нагружения на единицу длины; параметр β характеризует поворот распределенной нагрузки в процессе деформирования. Этот случай имеет практический интерес для изучения процессов РФЭС при несопряженной и со-

пряженной гибке-прокатке на ротационных машинах с жестким формообразующим валком и с эластичным покрытием формообразующего валка (рис. 4.5).

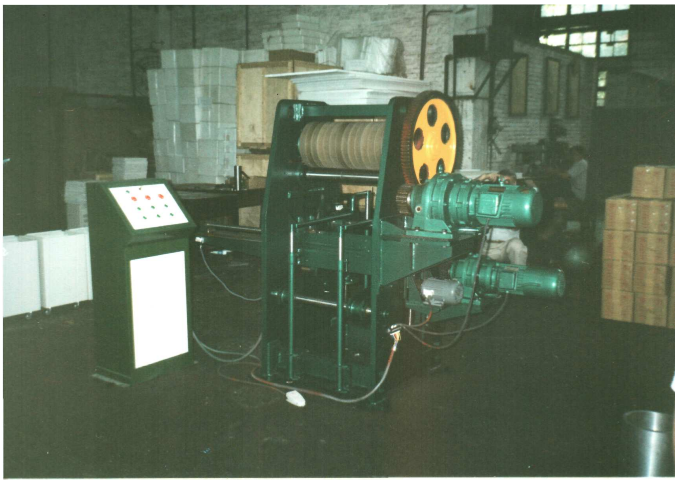


Рис. 4.5. Общий вид листогибочной машины типа ЛГМЭ

Для удобства расчета введем безразмерные переменные, тогда уравнение (4.22) преобразуется к следующему виду:

$$\vartheta'' + \lambda\int_0^\eta f(\xi)\left[\cos\left(\beta\vartheta(\xi) - \vartheta(\eta)\right)\right]d\xi = 0,\ \eta \in [0{,}1], \qquad (4.23)$$

где $\eta = s / l$; $\lambda = ql^3 / H$.

Для уравнения (4.23) имеем краевые условия

$$\vartheta'(0) = 0,\ \vartheta(1) = 0. \qquad (4.24)$$

Сведем уравнение (4.23) с краевыми условиями (4.24) к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2; \\ z_2' &= -z_3\cos z_1 - z_4\sin z_1; \\ z_3' &= \lambda f\cos(\beta z_1); \\ z_4' &= \lambda f\sin(\beta z_1), \end{aligned} \qquad (4.25)$$

с краевыми условиями

$$z_2(0) = 0;\ z_3(0) = 0;\ z_4(0) = 0;\ \ z_1(1) = 0. \qquad (4.26)$$

Здесь $z_1 = \vartheta(\eta)$;

$$z_2 = \vartheta'(\eta);$$

$$z_3 = \lambda\int_0^\eta f(\xi)\cos(\beta\,\vartheta(\xi))d\xi;$$

$$z_4 = \lambda\int_0^\eta f(\xi)\sin(\beta\,\vartheta(\xi))d\xi.$$

Далее по аналогии с § 4.1 введем на отрезке изменения аргумента $\eta \in [0,1]$ равномерную разностную сетку с шагом $\Delta\bar{\eta} = 1/N$, где $\bar{\eta}^i = (i-1)\Delta\bar{\eta}$ $(i = 1, 2, \ldots N+1)$ – узлы сетки; $z_1^i,\ z_2^i,\ z_3^i,\ z_4^i$ – значения сеточных функций в узлах. В результате краевая задача (4.23), (4.24) с помощью конечно-разностной формулы второго порядка сводится к системе нелинейных уравнений относительно $z_1^i,\ z_2^i,\ z_3^i,\ z_4^i$, которая решается с помощью модифицированного метода Ньютона. При решении рассматриваемой задачи на каждом участке строится равномерная сетка, шаг которой и соответственно число узлов определяются в зависимости от требуемой точности вычислений. Узлы сетки делят участки изогнутого элемента заготовки на отрезки так, что крайние узлы сетки на участке совпадают с границами участков. Упругие кривые изогнутого элемента могут быть найдены после решения краевой задачи (4.25) и (4.26) по формулам

$$\bar{x} = \frac{x}{l} = \int_{\eta}^{1} \cos\left(\vartheta(\xi)\right) d\xi; \quad \bar{y} = \frac{y}{l} = \int_{\eta}^{1} \sin\left(\vartheta(\xi)\right) d\xi. \tag{4.27}$$

Заметим, что решение поставленной задачи можно получить в системе отсчета, связанной с точкой 0 (см. рис.4.3). Тогда вместо краевой задачи (4.25) и (4.26) будем иметь систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&z_1' = z_2;\\
&z_2' = z_3 \cos z_1 + z_4 \sin z_1 - z_5 \cos z_1 - z_6 \sin z_1;\\
&z_3' = \lambda f \cos(\beta z_1);\\
&z_4' = \lambda f \sin(\beta z_1);\\
&z_5' = 0; \quad z_6' = 0
\end{aligned}$$

и соответствующие краевые условия

$$z_1(0) = 0; \quad z_3(0) = 0; \quad z_4(0) = 0; \quad z_2(1) = 0; \quad z_3(1) - z_5(1) = 0; \quad z_4(1) - z_6(1) = 0.$$

Здесь z_1, z_2, z_3, z_4 имеют те же обозначения, что в выражении (4.25), а $z_5 = \lambda \int_0^1 f(\xi) \cos(\beta\vartheta(\xi)) d\xi$; $z_6 = \lambda \int_0^1 f(\xi) \sin(\beta\vartheta(\xi)) d\xi$. Учтем при этом, что координаты x и y вычисляются по формулам (4.27), в которых пределы интегрирования изменяются от нуля до η.

На рис. 4.6 приведены кривые прогиба консольного элемента под действием равномерно распределенной нагрузки (f = l) для β = 0; 0,5; 1. Эти случаи частично рассматривались в работах [64, 65, 80–82 и др.]. Отметим, что β = 0 соответствует задаче изгиба консольного элемента под воздействием поступательной равномерно распределенной нагрузки, которая всегда прикладывается перпендикулярно недеформированной оси, а β = 1 представляет задачу при следящей распределенной нагрузке, перпендикулярной оси элемента. При разбивке $\eta \in [0,1]$ на 50 участков краевая задача (4.25), (4.26) сводится к системе 204 нелинейных алгебраических уравнений.

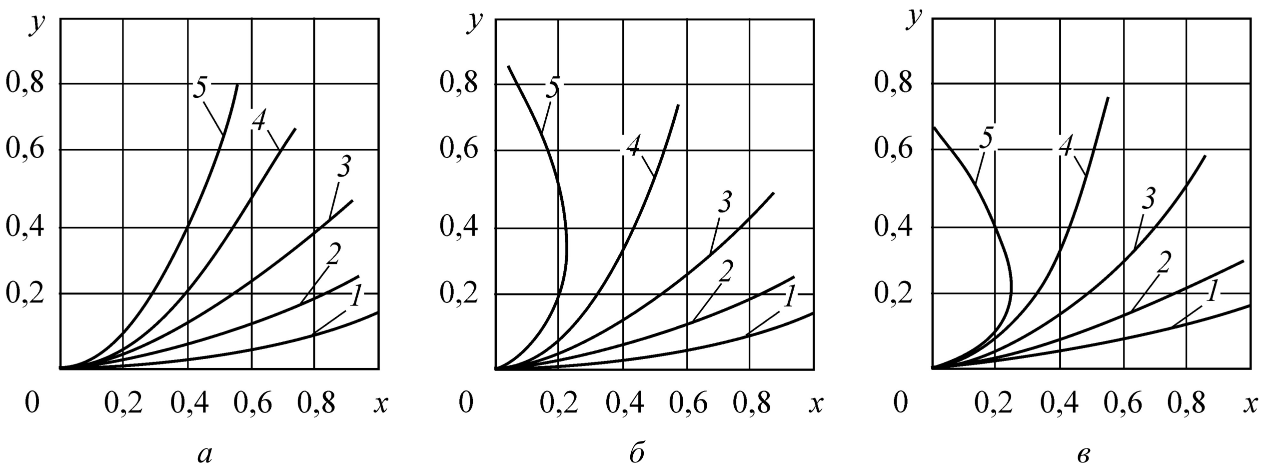


Рис. 4.6. Кривые прогиба консольного элемента
под действием равномерно распределенной нагрузки при: *а* – $\beta = 0$; *б* – $\beta = 0{,}5$; *в* – $\beta = 1$;
1 – $\lambda = 1$; *2* – $\lambda = 2$; *3* – $\lambda = 4$; *4* – $\lambda = 8$; *5* – $\lambda = 16$

В табл. 4.2 представлены результаты расчета концевого угла $\vartheta(0)$ в случае равномерно распределенной нагрузки при $\beta = 0$ в сравнении с результатами вычислений в других работах. Наибольшее совпадение наблюдается с работой [81], в которой использовался метод Рунге – Кутта четвертого порядка.

Таблица 4.2

λ	Значение $\vartheta(0)$, град		
	по методике [80]	по методике [81]	по предлагаемой методике
1,057	10,0	9,99	9,99
2,175	20,0	19,92	19,34
3,425	30,0	29,72	29,84
4,899	40,0	39,35	39,76
6,736	50,0	48,74	49,49
9,158	60,0	51,81	58,16
12,06	70,0	65,39	67,54

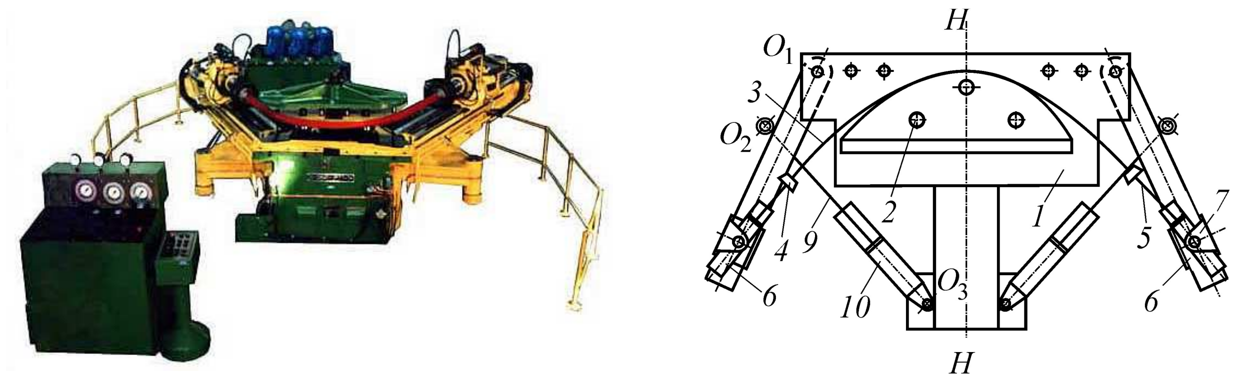
Приведенные алгоритмы решения пластической и упругой задачи дают возможность вычислять любые силовые и настроечные параметры процесса ротационной гибки на машинах типа ЛГМЭ по всем трем схемам [36, 37]. При этом изменится порядок разрешающих уравнений системы (4.25) и число краевых условий (4.26).

§ 4.3. Уточненный расчет параметров процессов гибки тонкостенных деталей с учетом геометрической нелинейности

Создание нового поколения технологического оборудования с программным управлением требует нового подхода к проектированию технологических процессов листовой штамповки с использованием при этом вычислительной техники. Развитие компьютерной техники и соответствующего программного обеспечения создает предпосылки для успешного решения задачи автоматизации технологических процессов на основе использования ЧПУ. Реальной основой для практической реализации автоматизированных технологических процессов является использование расчетных методов и CAD/CAM/CAE систем[*]. Адаптация и привлечение методов компьютерного проектирования и математического моделирования для технологических процессов гибки тонкостенных деталей является важнейшей задачей, которая востребована авиационным производством.

Разработка соответствующего технологического процесса изготовления криволинейных тонкостенных деталей из листового и профильного материала обусловливает необходимость проведения комплексного исследования кинематики формообразования заготовки, напряженно-деформированного состояния, предельных возможностей процесса и точности изготовления деталей. Для эффективного использования гибочного оборудования с ЧПУ необходимы расчетные методы, которые на основе математического моделирования условий технологического процесса позволяли бы получать оптимальные программы управления.

Разработка управляющей программы формообразования профильных деталей гибкой с растяжением на станках типа ПГР. Одним, из наиболее широко распространенных в авиастроении способов обработки металлов давлением при изготовлении деталей типа полок нервюр, стрингеров, шпангоутов и некоторых других является гибка профильных заготовок с растяжением. Эта операция выполняется на профилегибочных станках типа ПГР-6, ПГР-7 и ПГР-8 (рис. 4.7, *а*).



а *б*

Рис. 4.7. Профилегибочный станок типа ПГР:
а – общий вид станка; *б* – конструктивная схема

[*] *Раздайбедин, А.А.* Технологическое проектирование в СУБД и CAD/CAE системах: учебное пособие/ А.А. Раздайбедин, Н.М. Бодунов. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2008. – 88 с.

Изготовление деталей на этом оборудовании осуществляется путем изгиба с растяжением (в различных сочетаниях) заготовки по оправке (гибочные пуансону) определенной кривизны. Сочетание пластического растяжения и изгиба создает более однородное по сечению напряженное состояние, уменьшает величину пружинения и повышает точность изготавливаемых деталей. Гибочные пуансоны являются формообразующим инструментом и должны быть спроектированы с учетом пружинения при принятой схеме сложного нагружения [50, 53, 54].

В настоящее время в авиационной промышленности эксплуатируются станки ПГР с ЧПУ (станки ПГР-6А, ПГР-6АД, ПГР-7АД), позволяющие не только автоматизировать процесс формообразования, но и значительно расширить технологические возможности исследуемых процессов. Например, такая разновидность процесса сложного нагружения по схеме «растяжение – изгиб – растяжение», как «растяжение–изгиб–растяжение с дифференцированным по углу охвата приложением растягивающего усилия», может быть реализована только на станках с ЧПУ. По данной схеме на каждом из отдельных участков заготовки можно добиться гарантированных значений величины предварительного и дополнительного растяжений и, таким образом, уменьшить степень неуправляемости силой вторичного растяжения. В процессе гибки информация об угловых и линейных перемещениях рабочих органов станка ПГР поступает в мини-ЭВМ через датчики обратной связи углов поворота растяжных цилиндров и гибочных рычагов и перемещения штоков растяжных цилиндров. Сигналы с датчиков сравниваются с заданными в программе угловыми и линейными перемещениями (рис. 4.8). Скорректированный в мини-ЭВМ сигнал подается на систему управления станка. Достоинством этого оборудования является возможность управления с высокой точностью величиной перемещения растяжных цилиндров и угловых перемещений рабочих органов.

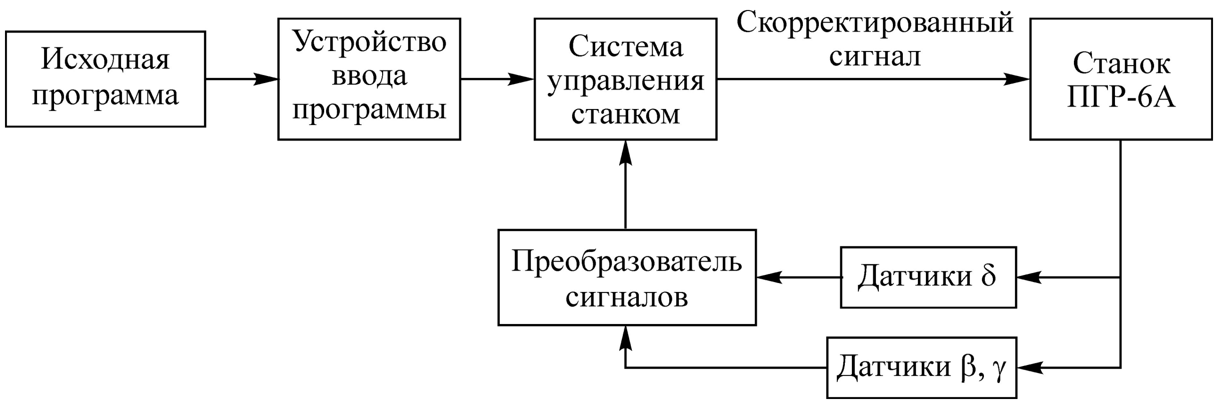


Рис. 4.8. Схема управления станком ПГР-6А

Отметим, что для высокопрочных материалов (высокопрочных алюминиевых и титановых сплавов и сталей), имеющих высокий модуль упругости и относительно большой разброс механических свойств, величина упругой разгрузки настолько значительна и отличается от расчетных значений, что указанная корректировка гибочной оснастки оказывается малоэффективной. Увеличение же усилия растяжения приводит к разрыву внешней, наиболее растянутой части сечения заготовки. Одним из наиболее эффективных способов термической интенсификации рассматриваемого процесса является электроконтактный нагрев деформируемой заготовки, позволяющий повысить пластические свойства материала заготовки [21, 22]. При реализации этого процесса практически полностью устраняется пружинение и повышается точность изготовления деталей. Корректировка оснастки и промежуточный отжиг в печах при этом не требуется.

Кинематическая модель процесса гибки на станках ПГР описывает перемещение краев заготовки относительно формообразующей оснастки и позволяет перейти к расчету движений рабочих органов с учетом конструктивных возможностей оборудования, которые в свою очередь накладывают ограничения на процесс деформирования заготовки*. Моделирование процесса формообразования криволинейных профильных деталей одинарной кривизны на станках ПГР с ЧПУ проведем на примере схемы сложного нагружения «растяжение–изгиб», как наиболее распространенной и имеющей ряд преимуществ практического плана. К ним относится простота точной реализации и контроля за ходом процесса деформирования, а также исключение вредного влияния трения профильной заготовки о гибочный пуансон.

Процесс пластического формообразования по схеме «растяжение–изгиб» осуществляется следующим образом (рис. 4.7, *б*). Деформируемая заготовка *3* фиксируется в зажимных патронах *4*, установленных на концах штоков *5* растяжных цилиндров *6*, которые шарнирно закреплены в каретках *7*, перемещающихся по направляющим (в зависимости от исходной длины заготовки) вдоль гибочных рычагов (крыльев) *8*. Гибочные рычаги находятся в исходном положении на одной оси, соединяющие центры их вращения (точки O_1). Затем включается гидропривод растяжных цилиндров и заготовка растягивается на определенную величину. Изгиб заготовки производится поворотом гибочных рычагов относительно неподвижного стола *1*, на котором установлен и закреплен обтяжной (гибочный) пуансон *2* с помощью штоков *9* гибочных гидроцилиндров *10*, шарнирно соединенных с гибочными рычагами (точка O_2) и со станиной (точка O_3).

В процессе гибки управление движением рабочих органов осуществляется системой ЧПУ, которая обеспечивает перемещение зажимных патронов по расчетной траектории. Управляющими параметрами являются смещения што-

* *Бодунов, Н.М.* Разработка математической модели и методики расчета параметров процесса изготовления деталей из профилей на гибочно-растяжном оборудовании с программным управлением: автореф. дисс…. канд. техн. наук. – Казань, 1993. – 16 с.

ков растяжных цилиндров (правого и левого) в зависимости от угла охвата заготовкой гибочной оснастки (правой и левой половины) и от угла поворота гибочных рычагов. Отметим, что для обеспечения постоянства растягивающей силы система ЧПУ станка должна обеспечить перемещение зажимных патронов растяжных цилиндров по строго определенной траектории, сохраняя при этом постоянство предварительного растяжения в зоне контакта заготовки с гибочным пуансоном.

В работах [16, 19, 20] приведена инженерная методика расчета программируемых параметров к системе ЧПУ станка ПГР-6А. При рассмотрении процесса огибания профильная заготовка представлялась гибкой нерастяжимой нитью (изгибная жесткость заготовки пренебрежимо мала), которой соответствовала продольная ось профиля, являющаяся нейтральной линией. В предположении, что при изгибе неотформованный участок заготовки tT' направлен по касательной к месту схода его с гибочного пуансона (точка t), были получены формулы для определения перемещений зажимных патронов δ' в зависимости от угла изгиба заготовки α (рис. 4.9).

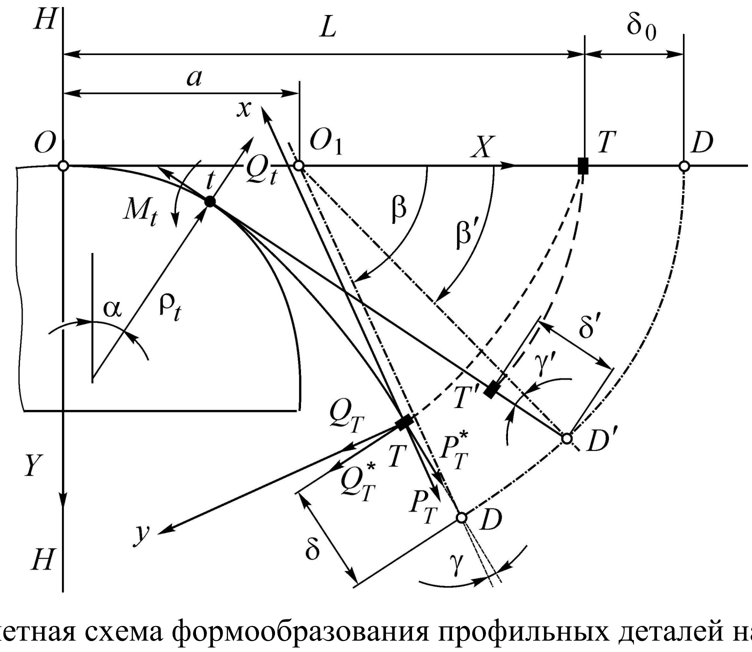


Рис. 4.9. Расчетная схема формообразования профильных деталей на станках ПРГ

Процесс формирования управляющих координат заключается в следующем. Задают угол $\alpha_i = i\Delta\alpha, \Delta\alpha = \alpha_п / m; \alpha_п -$ полный угол изгиба одной из половин детали; $m-$ количество программируемых точек для управляющей программы. Затем в соответствии с кинематическими возможностями оборудования вычисляются требуемые перемещения зажимных патронов $\delta' = f(\alpha)$, которые задают кривую для программоносителя. Эту методику рекомендуется использовать для изготовления деталей с большими радиусами кривизны, когда величина деформации предварительного растяжения ε_0 намного превышает величину деформации $\varepsilon_{\text{т}}$, соответствующую пределу текучести материала, но при этом выполняется условие $\varepsilon_0 + y_{\text{н}}/\rho_t \leq \varepsilon_{\text{доп}}$, где $y_{\text{н}}$ – ордината, определяющая положение нейтрального слоя по высоте сечения при пластическом изгибе; ρ_t – радиус кривизны нейтрального слоя изогнутого элемента, создаваемый при нагружении; $\varepsilon_{\text{доп}}$ – предельно допустимая деформация.

Преимущество данной модели – простота расчета, однако для повышения точности изготовления деталей необходимо более достоверное представление процесса формообразования. Для повышения точности изготовления деталей необходимо разработать математическую модель, которая позволяет точно описать реальный процесс формообразования [9, 12, 18, 19, 33, 78]. Например, пластический изгиб заготовок на малые радиусы кривизны при выполнении условия $\varepsilon_0 < \varepsilon_{\text{Т}}$ характеризуется большими угловыми и относительными линейными перемещениями сечений участка заготовки tT длиной $S = L - S_t$, где L – длина заготовки в активной стадии формообразования; S_t – длина кривой участка $0t$ контура гибочного пуансона (рис. 4.9). Точка 0 – вершина гибочного пуансона. Следовательно, учет геометрической нелинейности, при которой гипотеза начальных размеров неприменима и условие равновесия изогнутого элемента необходимо записывать с учетом конечного формоизменения, является необходимым условием при расчете перемещений исполнительных органов станка ПГР.

Перемещение δ зажимного патрона в процессе изгиба с учетом геометрической нелинейности вычисляем по следующей формуле [12]:

$$\delta = \left(L + \delta_0 - a\right)\cos\gamma - \left[Y_T \sin(\alpha + \theta_t - \theta_T) + \left(X_T - a\right)\cos(\alpha + \theta_t - \theta_T)\right], \quad (4.28)$$

где δ_0 – расстояние от оси поворота растяжного цилиндра до торца зажимного патрона перед началом изгиба (установочный параметр); a – конструктивный размер, а именно, расстояние от линии симметрии станка $H - H$ до оси поворота гибочного рычага (точка 0_1); γ – угол поворота растяжного цилиндра относительно гибочного рычага;

$$\gamma = \arcsin\left[\frac{Y_T \cos(\alpha + \theta_t - \theta_T) - (X_T - a)\sin(\alpha + \theta_t - \theta_T)}{L + \delta_0 - a}\right];$$

X_T, Y_T – координаты положения зажимного патрона (точка T) в процессе изгиба в неподвижной системе координат $X0Y$ станка, за которые принимаются касательная и нормаль к контуру гибочного пуансона в точке касания его прямолинейной заготовкой, растянутой в зажимных патронах растяжных цилиндров:

$$X_T = X_t + x_t \cos(\alpha + \theta_t) + y_t \sin(\alpha + \theta_t); \; Y_T = Y_t + x_t \sin(\alpha + \theta_t) - y_t \cos(\alpha + \theta_t);$$

X_t, Y_t и x_t, y_t – координаты точки t в системе координат $X0Y$ и в подвижной системе координат xTy соответственно; θ_t и θ_T – углы наклона касательной в точках t и T к кривой tT относительно оси x соответственно; $\theta_t = \mathrm{arctg}\left(y_t'\right)$; $\theta_T = \mathrm{arctg}\left(y_T'\right)$; y_t', y_T' – первые производные по x.

Угол β поворота гибочного рычага, соответствующий заданному углу α, определяем по формуле: $\beta = \alpha + \theta_t - \theta_T + \gamma$.

В уточненном расчете параметров управления процессом гибки основной задачей является определение геометрических величин x_t, y_t, θ_t и θ_T, а также силовых параметров P_t, Q_T и Q_t,, таких, при которых в процессе изгиба заготовки на угол α и активный радиус кривизны ρ_t обеспечиваются требуемые силовые параметры в точке t (усилие растяжения P_t и изгибающий момент M_t), что приводит к изготовлению детали с заданным остаточным радиусом кривизны $\tilde{\rho}_t$. Для нахождения величин x_t, y_t, θ_t и θ_T воспользуемся следующей методикой.

Деформированное состояние неотформованного участка заготовки tT описывается математической моделью, в которую входят уравнения (4.1) и (4.3), в которых $x \in [\,0, x_t\,]$, $M = P_T y + Q_T x$, уравнения равновесия системы

$$\begin{aligned} &P_t \cos\theta_t + Q_t \sin\theta_t - P_T = 0; \\ &P_t \sin\theta_t - Q_t \cos\theta_t + Q_T = 0; \\ &M_t - P_T y_t - Q_T x_t = 0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

и краевые условия

$$y(0) = 0; \ \ \kappa(M)\big|_{x = x_t} = \kappa_t, \tag{4.30}$$

где $\kappa_t = 1/\rho_t$.

Величины κ_t, P_t, M_t определяются из решения основной технологической задачи в точке t. Физические особенности задачи обусловлены зависимостью $\kappa(M)$, которая учитывает сложность нагружения (в данном случае – это «растяжение-изгиб»), переменную жесткость профиля, а также диаграммы $\sigma - \varepsilon$, полученные при испытании на растяжение сплавов соответствующих марок.

Неизвестные силовые параметры P_t, Q_T, Q_t определяем из уравнений равновесия (4.29):

$$P_T = \frac{M_t y_t' + P_t x_t \sqrt{1 + \left(y_t'\right)^2}}{x_t + y_t y_t'};$$

$$Q_T = \frac{M_t - P_t y_t \sqrt{1 + \left(y_t'\right)^2}}{x_t + y_t y_t'};$$

$$Q_t = P_t y_t' + \frac{M_t \sqrt{1 + \left(y_t'\right)^2} - P_t y_t \sqrt{1 + \left(y_t'\right)^2}}{x_t + y_t y_t'}.$$

По аналогии с § 4.1 введем безразмерные переменные (4.5), при этом $y^* = \kappa_t \overline{x}_1^2 S^2$; $\kappa^* = \kappa_t$, $M^* = M_t$. Подставив их в исходные выражения, получим преобразованную математическую модель

$$\frac{\overline{y}''}{\left[1+\left(\kappa_t \overline{x}_1 S \overline{y}'\right)^2\right]^{3/2}} = \overline{\kappa}(A\overline{x} + B\overline{y}),\ \overline{x} \in [0,1]; \tag{4.31}$$

$$\overline{s}(\overline{x}) = \overline{x}_1 \int_0^{\overline{x}} \sqrt{1+\left(\kappa_t \overline{x}_1 S \overline{y}'\right)^2}\, d\overline{x}\,; \tag{4.32}$$

$$\overline{y}(0) = 0; \qquad \overline{\kappa}\left(A\overline{x} + B\overline{y}\right)\Big|_{\overline{x}=1} = 1, \tag{4.33}$$

где $\overline{y}_t = \overline{y}(1)$; $\overline{y}_t' = \overline{y}'(1)$;

$$A = \frac{1 - \dfrac{P_t \kappa_t}{M_t} S^2 \overline{y}_t \overline{x}_t^2 \sqrt{1+\left(\kappa_t S\, \overline{x}_t \overline{y}_t'\right)^2}}{1+\left(\kappa_t S\, \overline{x}_t\right)^2 \overline{y}_t \overline{y}_t'};$$

$$B = \frac{\left(\kappa_t S\, \overline{x}_t\right)^2 \overline{y}_t' + \dfrac{P_t \kappa_t}{M_t} S^2 \overline{x}_t^2 \sqrt{1+\left(\kappa_t S\, \overline{x}_t \overline{y}_t'\right)^2}}{1+\left(\kappa_t S\, \overline{x}_t\right)^2 \overline{y}_t \overline{y}_t'}.$$

Сведем уравнения (4.31) и (4.32) к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
&z_1' = z_2\,;\\
&z_2' = f\left(\overline{x}, z_1, z_3, z_4, z_6\right)\left[1+\left(\kappa_t S\, z_6 z_2\right)^2\right]^{3/2};\\
&z_3' = 0;\\
&z_4' = 0;\\
&z_6' = 0;\\
&f\left(\overline{x}, z_1, z_3, z_4, z_6\right) = \overline{\kappa}\left(\overline{M}\right),
\end{aligned} \tag{4.34}$$

где $z_1 = \overline{y}\left(\overline{x}\right)$; $z_2 = \overline{y}'\left(\overline{x}\right)$; $z_3 = \overline{y}'(1)$; $z_4 = \overline{y}(1)$; $z_5 = \int_0^{\overline{x}} \sqrt{1+\left(\kappa_t S\ \overline{x}_t \overline{y}'\right)^2}\, d\overline{x}$;

$z_6 = \overline{x}_t$.

Краевые условия (4.33) примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
&z_1(0) = 0;\\
&z_5(0) = 0;\\
&z_1(1) - z_4(1) = 0;\\
&z_2(1) - z_3(1) = 0;
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$f\left(\bar{x}, z_1, z_3, z_4, z_6\right)\Big|_{\bar{x}=1} - 1 = 0;$$
$$z_6(1) z_5(1) - 1 = 0. \tag{4.35}$$

Краевая задача (4.34), (4.35) решается с помощью конечно-разностного метода (см. приложение). В результате находим следующие величины: $\bar{y}(\bar{x})$, $\bar{y}'(\bar{x})$, $\bar{\kappa}(\bar{x})$, $\bar{y}(1), \bar{y}'(1), \bar{x}'_t, P_T, Q_T, Q_t$. Как уже отмечалось, функция $\kappa(M)$ в явном виде не разрешается, а задается таблично (κ_i, M_i), где $i = \overline{1,m}$.

При построении таблицы используются уравнения равновесия неотформованного участка заготовки в произвольном поперечном сечении в геометрически нелинейной постановке:

$$P_i^* = P_T \cos\theta_i - Q_T \sin\theta_i;$$
$$Q_i^* = P_T \sin\theta_i + Q_T \cos\theta_i, \tag{4.36}$$

где $\theta_i = \operatorname{arctg}\left[\, y'(x_i)\,\right]$. В этом случае зависимость $\bar{\kappa}(\bar{M})$ аппроксимируется эрмитовым сплайном третьего порядка, который на интервале $\left[\bar{M}_{i-1}, \bar{M}_i\right]$ совпадает с кубическим полиномом (1.21).

Решив краевую задачу (4.34) и (4.35), находим величины

$$x_t = x_t S; \quad y_t = \kappa_t S^2 \bar{x}_t^2 \bar{y}(1); \;\; \theta_t = \operatorname{arctg}\left[\, \kappa_t S \bar{x}_t \bar{y}'(1)\,\right]; \;\; \theta_T = \operatorname{arctg}\left[\, \kappa_t S \bar{x}_t \bar{y}'(0)\,\right].$$

В точке T усилие растяжения P_T^* и перерезывающее усилие Q_T^* определяем по формулам (4.36).

Алгоритм решения задачи по расчету перемещений исполнительных органов станка ПГР следующий: задают углы $\alpha_i = i\Delta\alpha$; для каждого угла изгиба заготовки α_i при известных $\kappa_t(\alpha_i), M_t(\alpha_i)$ и (α_i) последовательно решают краевую задачу (4.34) и (4.35); далее по формуле (4.28) вычисляем значения функции $\delta = f(\alpha)$. Для каждого угла α_i, как было отмечено, функция $\kappa(M)$ является заранее неизвестной и определяется из внутреннего цикла. Порядок вычислений здесь следующий:

1) задаем $\kappa_i, i = \overline{1,m}$ и вычисляем M_i, используя уравнение

$$P_t = \int\limits_{(F)} \sigma_x dF, \quad M_t = \int\limits_{(F)} \sigma_x y dF;$$

2) аппроксимируем $\bar{\kappa}(\bar{M})$ кубическим сплайном;

3) решаем краевую задачу и находим в первом приближении величины

$$x_t^{(1)}, y_t^{(1)}, \theta_t^{(1)}, \theta_T^{(1)}, P_T^{(1)}, Q_T^{(1)}, Q_t^{(1)};$$

4) строим зависимость $\bar{\kappa}(\bar{M})$ во втором приближении с использованием уравнений равновесия неотформованного участка заготовки в произвольном поперечном сечении в геометрически нелинейной постановке;

5) решаем краевую задачу и находим во втором приближении величины

$$x_t^{(2)},\, y_t^{(2)},\, \theta_t^{(2)},\, \theta_T^{(2)},\, P_T^{(2)},\, Q_T^{(2)},\, Q_t^{(2)};$$

6) проверяем условия

$$|\Delta x_t| \le \omega_1,\, |\Delta y_t| \le \omega_2,\, |\Delta\theta_t| \le \omega_3,\, |\Delta\theta_T| \le \omega_4.$$

Здесь ω_t – заданная точность решения. Если все условия выполняются – расчет закончен, если хотя бы одно из условий не выполняется – переходим к п.4). Численный анализ показывает, что достаточно $2-3$ приближения.

Пример 4.3. В табл. 4.3 приведены результаты расчета величины δ по изложенной методике и величины δ', рассчитанной по инженерной методике для двутаврового профиля переменной кривизны из сплава СН-3М с размерами $b_1 = b_3 = 8$ мм; $h_1 = h_3 = 0{,}8175$ мм; $b_2 = 0{,}6$ мм; $h_2 = 43{,}365$ мм при следующих параметрах: $\varepsilon_0 = 0{,}0003$; $P_t = 221{,}5$ кГ; $L = 770{,}03$ мм; $\delta_0 = 659{,}97$ мм; радиусы пуансона $\rho^1_{\text{г.п}} = 1000$ мм; $\rho^2_{\text{г.п}} = 200$ мм; $\rho^3_{\text{г.п}} = 150$ мм; соответственно $\left(\rho^1_t = 976{,}033\right.$ мм; $\rho^2_t = 176{,}724$ мм; $\rho^3_t = 126{,}847$ мм и $M^1_t = 34020{,}2$ кГмм; $M^2_t = 53446{,}27$ кГмм; $M^3_t = 58321{,}5$ кГмм при $\alpha = 0 \div 30$; $30 \div 60$; $60 \div 90$ град); $a = 300$ мм (для станка ПГР-6А). В зависимости от длины S шаг Δx выбирался от 2,8 до 1 мм.

Например, при разбивке $\bar{x} \in [0{,}1]$ на 100 участков краевая задача (4.34), (4.35) сводится к решению 606 нелинейных алгебраических уравнений.

Таблица 4.3

Исходные параметры, град		Результат расчета, мм	
		по инженерной методике	по изложенной методике
α	γ	δ'	δ
0	0	659,97	659,97
3	1,443	659,49	655,02
12	1,904	654,16	649,39
18	1,675	649,414	645,6
33	– 3,479	642,1	647,43
39	– 4,708	642,57	652,23
48	– 6,607	647,31	662,78
57	– 8,542	657,04	676,59
63	– 10,85	666,4	698,09
69	– 12,07	678,13	712,34
78	– 13,82	700,28	736,72
81	– 14,38	708,9	745,59

Из результатов численных расчетов следует, что в случае гибки тонкостенных профилей малой жесткости на относительные радиусы $\overline{\rho}_t < 20$ $(\overline{\rho}_t = \rho_t / H,\ H -$ высота сечения профиля) при $\varepsilon_0 < \varepsilon_{\text{т}}$ необходим учет геометрической нелинейности при вычислении функции $\delta = f(\alpha)$. При этом надо учитывать ограничения на линейные и угловые перемещения исполнительных органов станка ПГР: $\delta_{\min} \le \delta \le \delta_{\max}; |\gamma| \le |\gamma_{\max}|$. Для станка ПГР-6А имеем $\delta_{\min} = 0{,}61\,\text{м}; \delta_{\max} = 1{,}21\,\text{м}; \gamma_{\max} = \pm 30°$. В зависимости от исходных данных возможно разрушение заготовки в опасном сечении. Поэтому необходима проверка следующих условий: $\varepsilon_{0i} + y_{\text{н}i} / \rho_i \le \varepsilon_{\text{доп}}, \tau_{\text{ср}} = Q_i^* / F_i \le \tau_{\text{доп}}$. Здесь F_i – площадь i-го поперечного сечения неотформованного участка заготовки; $\tau_{\text{доп}}$ – среднее допускаемое напряжение при сдвиге.

Приведенная математическая модель учитывает физические особенности исследуемого процесса деформирования тонкостенной заготовки. Например, решая краевую задачу (4.34), (4.35) для случая гибки прессованных профилей из сплава Д16-АТ на относительные радиусы $\overline{\rho}_i > 15$ при условии $\varepsilon_0 > \varepsilon_{\text{т}}$, получаем, что значения величин Q_T и θ_T стремятся к нулю. Подставив $Q_T = 0$ в систему уравнений равновесия, после ряда преобразований найдем упрощенные выражения для нахождения параметров A и B, входящих в уравнение (4.31): $A = 0,\ B = \dfrac{P_t \kappa_t S^2 \overline{x}_t^2}{M_t} \sqrt{1 + \left(\kappa_t S\, \overline{x}_t \overline{y}'_t\right)^2}$. Упрощенный вариант математической модели можно использовать и в случае гибки на относительные радиусы $\overline{\rho}_t > 15$, когда длина неотформованного участка заготовки $S \ge 10H$.

При гибке на относительные радиусы $\overline{\rho}_t > 20$, когда Q_T и θ_T стремятся к нулю, можно рекомендовать аналитические решения дифференциального уравнения (4.1) при $y'(x) = 0$ с использованием различных аппроксимаций зависимости $\kappa(M)$ [28–30, 56, 59].

Отметим, что предложенная математическая модель учета геометрической нелинейности при расчете перемещений исполнительных органов станка ПГР позволяет реализовать различные схемы деформирования заготовки. Например, при реализации схемы сложного нагружения «изгиб–растяжение» два первых исходных уравнения равновесия системы (4.29) примут вид $Q_t \sin\theta_t - P_T = 0; Q_T - Q_t \cos\theta_t = 0,$ так как $P_t = 0$. Из решения уравнений статики получим

$$Q_t = \frac{M_t \sqrt{1 + \left(y'_t\right)^2}}{x_t + y_t y'_t}; \quad Q_T = \frac{M_t}{x_t + y_t y'_t}; \quad P_T = \frac{M_t y'_t}{x_t + y_t y'_t},$$

а в уравнении (4.31) имеем $A = \dfrac{1}{1 + \left(\kappa_t S\ \overline{x}_t\right)^2 \overline{y}_t \overline{y}'_t}, \quad B = \dfrac{\left(\kappa_t S\ \overline{x}_t\right) \overline{y}'_t}{1 + \left(\kappa_t S\ \overline{x}_t\right)^2 \overline{y}_t \overline{y}'_t}.$

Как видно из табл. 4.3, на различных частях траектории функция $\delta = f(\alpha)$ принимает значения, соответствующие "втягиванию" или "травлению" штока растяжного цилиндра. Наряду с ограничениями на линейные и угловые перемещения рабочих органов станка ПГР существуют также ограничения на скорости перемещения штоков растяжных и гибочных гидроцилиндров и на угловую скорость поворота гибочных рычагов. Потребная скорость перемещения штоков растяжных цилиндров может достичь величин, превышающих пропускаемую способность гидросистемы станка. Поэтому в случае несоответствия скоростей и линейных перемещений зажимных патронов и угловых перемещений гибочных рычагов в процессе изгиба возможен обрыв профиля или его ослабление и отставание от точки касания с гибочным пуансоном. С целью устранения этого явления и обеспечения возможности устойчивого формообразования в работе [20] получены аналитические зависимости по определению скоростей перемещений рабочих органов станка ПГР и исследована возможность появления отклонений от нормального хода технологического процесса, вызванные указанной ошибкой рассогласования скоростей углового и линейного деформирования, а также рассчитаны оптимальные режимы работы.

Уточненный расчет технологических и настроечных параметров процесса свободной гибки тонкостенных деталей. Как уже отмечалось в § 3.7, свободная гибка характеризуется тем, что при этом способе форма инструмента не сопряжена с формой штампуемой детали. В процессе формообразования гибочная оснастка контактирует с заготовкой лишь в нескольких точках и не препятствует ей принять форму изгиба, соответствующую силовой схеме нагружения. Это позволяет сделать процесс универсальным, т.е. на одном комплекте инструмента получать детали различной формы путем изменения настроечных параметров гибочной оснастки. Изложенные далее материалы направлены на разработку уточненной математической модели исследуемого процесса [9, 10, 14, 15, 17, 18, 77]. Практически свободная гибка реализуется в двух вариантах: гибка в универсальных штампах (см. рис. 1.6) и гибка-прокатка (рис. 4.10).

Рис. 4.10. Общий вид листогибочной машины, реализующей схему гибка-прокатка

Анализ силовой схемы процесса формоизменения заготовки в универсальном штампе (рис. 4.11) показывает, что при большом ходе гибочного пуансона $H_П$, соизмеримого с шириной ручья матрицы $B_М$, гипотеза о сохранении начальных размеров неприменима и условие равновесия должно быть записано для конечной формы изогнутого элемента. Изогнутый элемент в ручье матрицы имеет переменную кривизну, являющуюся функцией дуги $\kappa = f(s)$, а его длина в ручье матрицы является функцией угла загиба θ, кривизны заготовки κ_0 в точке контакта ее с пуансоном и ширины ручья матрицы $B_М$.

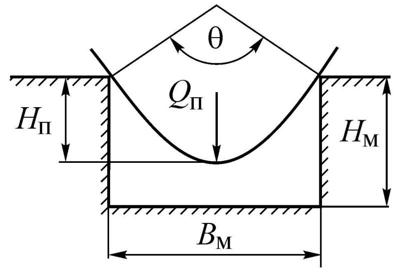


Рис. 4.11. Схема формоизменения заготовки по схеме свободной гибки в универсальном штампе

Для нахождения технологических и настроечных параметров исследуемого процесса воспользуемся методикой расчета больших перемещений при плоском упруго-пластическом изгибе тонких заготовок, которая была изложена в § 4.1.

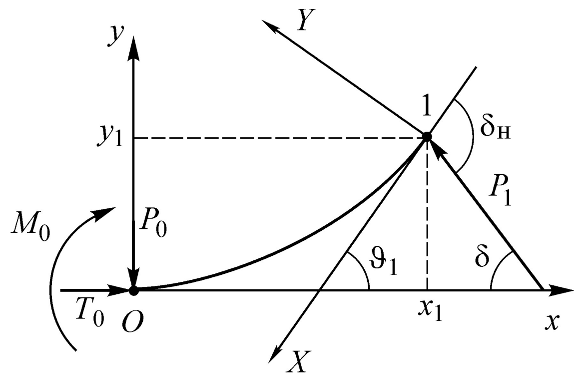


Рис. 4.12. Расчетная схема деформации заготовки

Деформированное состояние участка заготовки *O*–1 в системе координат *xOy* (в силу симметрии рассматривается одна половина длины заготовки) описывается математической моделью (рис. 4.12), в которую входят уравнения (4.1), (4.3), где $x \in [O, x_1]$, $\kappa = 1/\rho$; $M = T_0(y_1 - y) + P_0(x_1 - x)$; уравнения равновесия системы

$$\begin{aligned} &T_0 - P_1 \cos\delta = 0; \\ &P_0 - P_1 \sin\delta = 0; \\ &M_0 - T_0 y_1 - P_0 x_1 = 0 \end{aligned} \qquad (4.37)$$

и краевые условия

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ s(x_1) = L. \qquad (4.38)$$

Здесь $\delta = \delta_н - \upsilon_1$; $\delta_н = \pi/2 + \mu$; μ – угол трения, $\mu = \mathrm{arctg}\, f$; f – коэффициент трения скольжения; $\vartheta_1 = \mathrm{arctg}(y_1')$; L – заданная длина участка заготовки *O*–1. Величины $\kappa_0 = 1/\rho_0$ и M_0 в точке *O* определяются из решения основной технологической задачи в точке *O*. Физические особенности задачи обусловлены зависимостью $\kappa(M)$, которая, как отмечалось ранее, в случае необходимости учитывает сложность напряженного состояния (для рассматриваемого случая имеем схему простого нагружения «изгиб с растяжением»), переменную жесткость заготовки, а также вид диаграммы σ–ε.

Введем безразмерные переменные типа (4.5), где $y^* = \kappa_0 \bar{x}_1^2 L^2$; $\kappa^* = \kappa_0$, $M^* = M_0$. Подставив их в исходные выражения, получим преобразованную математическую модель:

$$\frac{\bar{y}''}{\left[1+(L\kappa_0\bar{x}_1\bar{y}')^2\right]^{3/2}} = \bar{\kappa}(A\bar{x}+B\bar{y}+C),\ \bar{x}\in[0,1]; \tag{4.39}$$

$$\bar{s}(\bar{x}) = \bar{x}_1\int_0^{\bar{x}}\sqrt{1+(\kappa_0 L\bar{x}_1\bar{y}')^2}\,d\bar{x}; \tag{4.40}$$

$$\bar{y}(0)=0,\ \bar{y}'(0)=0,\ \bar{s}(1)=1. \tag{4.41}$$

Здесь $\bar{y}_1 = \bar{y}(1)$; $\bar{y}_1' = \bar{y}_1'(1)$; $A = -\dfrac{\cos\mu + \kappa_0 L\bar{x}_1\bar{y}_1'\sin\mu}{D}$;

$$B = -\frac{\kappa_0 L\bar{x}_1(-\sin\mu + \kappa_0 L\bar{x}_1\bar{y}_1'\cos\mu)}{D};\ C=1;$$

$$D = \kappa_0 L\bar{x}_1\bar{y}_1(-\sin\mu + \kappa_0 L\bar{x}_1\bar{y}_1'\cos\mu) + \cos\mu + \kappa_0 L\bar{x}_1\bar{y}_1'\sin\mu;$$

зависимость $\bar{\kappa}(\bar{M})$ аппроксимируется эрмитовым сплайном третьего порядка вида (1.21).

Сведем систему уравнений (4.39), (4.40) к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}
&z_1' = z_2;\\
&z_2' = \bar{\kappa}(\bar{x}, z_1, z_3, z_4, z_6)\left[1+(\kappa_0 L z_2 z_4)^2\right]^{3/2};\\
&z_3' = 0;\\
&z_4' = 0;\\
&z_5' = \left[1+(\kappa_0 L z_2 z_4)^2\right]^{1/2};\\
&z_6' = 0.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Здесь $z_1 = \bar{y}(\bar{x})$; $z_2 = \bar{y}'(\bar{x})$; $z_3 = \bar{y}_1$; $z_4 = \bar{x}_1$; $z_5 = \int_0^{\bar{x}}\sqrt{1+(\kappa_0 L\bar{x}_1\bar{y}')^2}\,d\bar{x}$; $z_6 = \bar{y}_1'$.

Краевые условия (4.41) примут вид

$$\begin{aligned}
&z_1(0)=0;\ z_2(0)=0;\ z_5(0)=0;\\
&z_1(1)-z_3(1)=0;\ z_2(1)-z_6(1)=0;\\
&z_4(1)z_5(1)-1=0.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Краевая задача (4.42), (4.43) решается с помощью конечно-разностного метода. В результате находим следующие величины: $\bar{y}(\bar{x}), \bar{y}'(\bar{x}), \bar{\kappa}(\bar{x}), M(\bar{x})$, $\bar{y}(1), \bar{y}'(1), \bar{x}_1, P_1, P_0, T_0$, а следовательно, x_1, y_1 и угол $\vartheta_1 = \mathrm{arctg}\left[\kappa_0 L\bar{x}_1\bar{y}'(1)\right]$.

Далее для заданной кривизны заготовки κ_0 в точке O и длины участка заготовки L получим ход пуансона, ширину ручья матрицы и угол загиба заготовки:

$$H_\text{п} = y_1,\ B_\text{м} = 2x_1,\ \theta = 2\vartheta_1. \tag{4.44}$$

При этом радиус кривизны пуансона $r_\text{п}$ и ход пунсона $H_\text{п}$ должны удовлетворять следующим условиям: $r_\text{п} < \rho_0$, $H_\text{п} < H_\text{м}$.

Усилие формообразования определяется формулой

$$Q_\text{п} = 2P_1 \sin\delta, \tag{4.45}$$

где $P_1 = \dfrac{M_0}{x_1 \sin\delta + y_1 \cos\delta}$; $\delta = \dfrac{\pi}{2} + \mu - \vartheta_1$.

Задавая различную длину заготовки L и последовательно решая краевую задачу (4.42) и (4.43), получим при заданном радиусе ρ_0 детали с разными углами загиба θ.

Решение поставленной задачи можно получить в системе координат $X1Y$ (см. рис.4.12), ось абсцисс которой направлена по касательной в точке 1. В этом случае имеем $\overline{M} = A\overline{X} + B\overline{Y} + C$, где $X = \overline{X}_0 L\overline{X}$; $Y = \kappa_0 \overline{X}_0^2 L^2 \overline{Y}$; $X_0 = \overline{X}_0 L$;

$$Y' = \kappa_0 \overline{X}_0 L\overline{Y}';\ A = \frac{\cos\mu}{D};\ B = \frac{\kappa_0 L\overline{X}_0 \sin\mu}{D};\ C = 0;\ D = \kappa_0 L\overline{X}_0 \overline{Y}_0 \sin\mu + \cos\mu.$$

Вместо краевой задачи (4.42) и (4.43) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&z_1' = z_2;\\
&z_2' = \overline{\kappa}\left(\overline{X}, z_1, z_3, z_4\right)\left[1 + \left(\kappa_0 L z_2 z_4\right)^2\right]^{3/2};\\
&z_3' = 0;\\
&z_4' = 0;\\
&z_5' = \left[1 + \left(\kappa_0 L z_2 z_4\right)^2\right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

и краевые условия

$$\begin{aligned}
&z_1(0) = 0;\ z_2(0) = 0;\ z_5(0) = 0;\\
&z_1(1) - z_3(1) = 0;\ z_4(1) z_5(1) - 1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Здесь $z_1 = \bar{Y}(\bar{X})$; $z_2 = \bar{Y}'(\bar{X})$; $z_3 = \bar{Y}_0$; $z_4 = \bar{X}_0$; $z_5 = \int\limits_0^{\bar{X}} \sqrt{1 + \left(\kappa_0 L \bar{X}_0 \bar{Y}'\right)^2} d\bar{X}$.

После решения краевой задачи (4.46), (4.47) найдем

$$x_1 = Y_0 \sin\vartheta_1 + X_0 \cos\vartheta_1;$$
$$y_1 = X_0 \sin\vartheta_1 - Y_0 \cos\vartheta_1,$$

где $\vartheta_1 = \mathrm{arctg}\, Y_0'$.

Далее по формулам (4.44) и (4.45) находим ход пуансона, ширину ручья матрицы, угол загиба заготовки и усилие формообразования.

Остаточный радиус кривизны детали $\tilde{\rho}_0 = 1/\tilde{\kappa}_0$ и угол загиба детали после разгрузки $\tilde{\theta}$ определяются выражениями

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_0 &= \kappa_0 - \kappa_0'; \\ \tilde{\theta} &= \theta - \theta', \end{aligned} \qquad (4.48)$$

где $\kappa_0' = M_0 / H_0$; M_0, H_0 – соответственно изгибающий момент и жесткость заготовки в сечении 0; θ – угол загиба в истинном состоянии равновесия; θ' – угол загиба при фиктивном состоянии равновесия, численно равный углу пружинения. По аналогии с активной стадией деформирования имеем

$$\theta' = 2\vartheta_1',$$
$$\vartheta_1' = \mathrm{arctg}\left[y'(x_1)\right].$$

Фиктивное состояние равновесия соответствует задаче упругости при тех же факторах деформации. Известное решение этой задачи (см. гл. 2) не учитывает силы трения при проскальзывании заготовки по матрице. Поэтому угол ϑ_1', по аналогии с решением пластической задачи, найдем из решения соответствующей упругой задачи, которая описывается системой уравнений

$$\frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x, y)}{H};$$
$$x \in [0, x_1];$$
$$s(x) = \int\limits_0^x \sqrt{1 + (y')^2}\, dx,$$

с краевыми условиями (4.38).

Здесь H – жесткость заготовки при изгибе в произвольном сечении (постоянная или переменная). В точке 0 имеем радиус кривизны $\rho_0' = 1/\kappa_0'$.

Приведем также более простые формулы для определения остаточного угла загиба $\tilde{\theta}$. Из решения краевой задачи (4.42), (4.43) найдем Δs_i $\left(i=\overline{1,N}\right)$, где $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$. Разобьем участок заготовки 01 в активной стадии деформации на конечное число N участков Δs_i, в пределах которых $\rho_{i\text{cP}} = \text{const}$ $\left(M_{i\text{cP}} = \text{const}\right)$ и рассмотрим независимое пружинение этих элементарных участков. Воспользовавшись постоянством дуги Δs_i до и после пружинения ($\rho_{i\text{cP}}\varphi_i = \Delta s_i = \tilde{\rho}_{i\text{cP}}\tilde{\varphi}_i$, $\varphi_i = \Delta s_i / \rho_{i\text{cP}}$), остаточный угол загиба детали $\tilde{\theta}$ определим из выражения:

$$\tilde{\theta} = 2\sum_{i=1}^{N}\tilde{\varphi}_i ,$$

где $\tilde{\varphi}_i = \dfrac{\Delta s_i}{\tilde{\rho}_{i\text{cP}}}$; $\tilde{\rho}_{i\text{cP}} = \dfrac{1}{\tilde{\kappa}_{i\text{cP}}}$; $\tilde{\kappa}_{i\text{cP}} = \kappa_{i\text{cP}} - \kappa'_{i\text{cP}}$; $\kappa_{i\text{cP}} = \dfrac{1}{\rho_{i\text{cP}}}$; $\kappa'_{i\text{cP}} = \dfrac{M_{i\text{cP}}}{H_i}$.

Приведенные решения пластической и упругой задачи дают возможность вычислить все технологические и точностные параметры процесса свободной гибки. Повышение точности расчета искомых параметров можно добиться увеличением числа узлов конечно-разностной равномерной сетки при достаточно простой алгоритмической реализации.

Пример 4.4. На рис. 4.13 приведены результаты расчета зависимости остаточного угла загиба $\tilde{\theta}$ от хода пуансона $H_\text{п}$ при заданном значении ширины матрицы $B_\text{м} = 0{,}06$ м для листа из материала Д16АМ толщиной 0,004 м по изложенной методике и методикам, изложенным в работах [50] и [55]. При разбивке $\overline{x} \in [O,\ 1]$ на 50 участков краевая задача (4.42) и (4.43) сводится к системе 306 нелинейных алгебраических уравнений. Наибольшее совпадение расчетных данных по изложенной методике наблюдается в сравнении с работой [55], которая, в свою очередь, по сравнению с методикой [50] обеспечивает более точный расчет параметров свободной гибки.

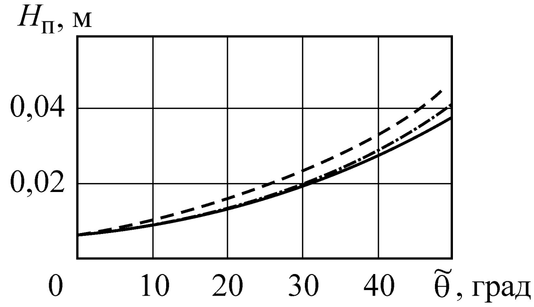


Рис. 4.13. График зависимости угла $\tilde{\theta}$ от хода пуансона $H_\text{п}$ при заданном значении $B_\text{м}$:
—— – расчеты по работе [50];
-·-·-· – расчеты по работе [55];
------ – расчеты по работе [14]

Влияние геометрической нелинейности неотформованного участка профильной заготовки на значения параметров процесса гибки-намотки. Криволинейные профильные детали ЛА одинарной кривизны малой жесткости и с большими углами загиба целесообразно изготовлять на специальных профилегибочных станках с поворотным столом намоткой по формообразующей оправке (рис. 4.14). Возможные схемы ведения процесса гибки-намотки в зависимости от требуемого результата, геометрии заготовки, ее механических и физических свойств показаны на рис. 4.14.

Возможные схемы ведения процесса гибки-намотки в зависимости от требуемого результата, геометрии заготовки, ее механических и физических свойств показаны на рис. 4.14.

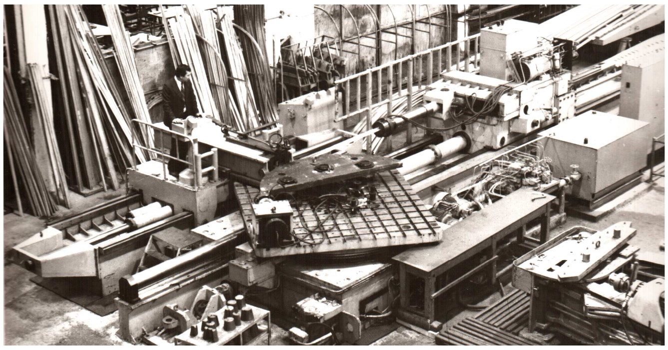


Рис. 4.14. Общий вид профилегибочного станка типа СПО

В работах [50, 53, 54] дана методика определения технологических параметров процесса гибки с растяжением, позволяющая рассчитать по известному радиусу кривизны детали $\tilde{\rho}_к$ радиус гибочного пуансона $\rho_к = 1/\kappa_к$ с учетом пружинения и силовые параметры процесса (усилие растяжения $P_к$ и изгибающий момент $M_к$). Однако при неблагоприятных геометрических параметрах профильной заготовки процесс гибки-намотки характеризуется большими линейными и угловыми перемещениями сечений неотформованного участка (рис. 4.15, *б*). Следовательно, в точке контакта профиля с гибочным пуансоном силовые параметры будут отличаться от требуемых значений, что скажется и на действительном пружинении (рис. 4.16, *а*).

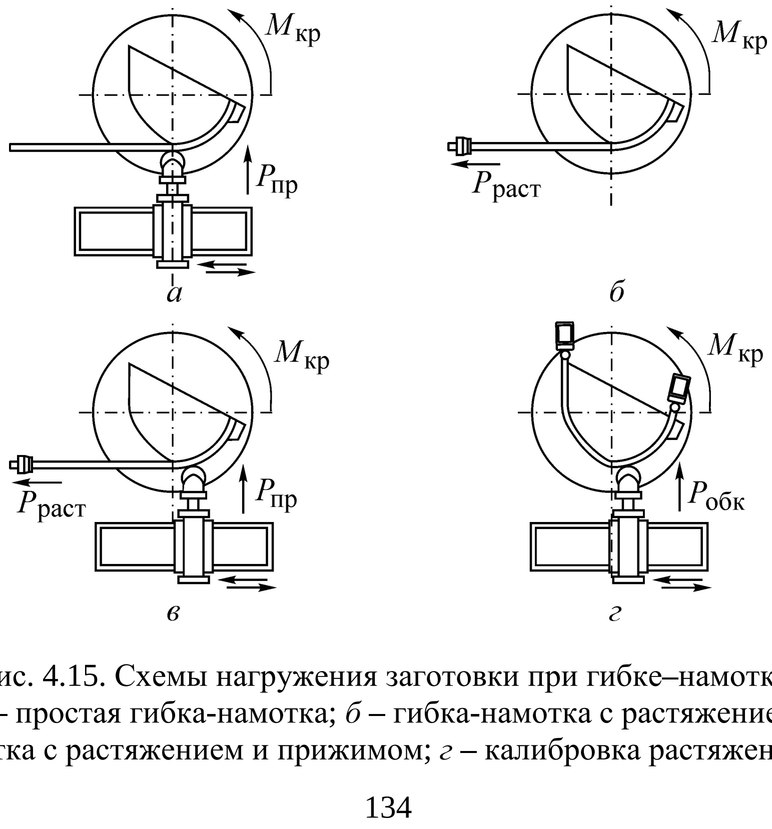


Рис. 4.15. Схемы нагружения заготовки при гибке–намотке:
а – простая гибка-намотка; *б* – гибка-намотка с растяжением;
в – гибка-намотка с растяжением и прижимом; *г* – калибровка растяжением и обкаткой

Для устранения угла технологической недоформовки γ требуется дополнительная технологическая операция по догибу профильной детали. С целью повышения точности изготавливаемых деталей необходимо процесс гибки-намотки вести по строго заданному режиму изменения усилия растяжения P_0 при огибании заготовки вокруг гибочного пуансона. Это обеспечивает в точке касания заготовки (точка *К*) с контуром гибочного пуансона требуемые силовые параметры формообразования P_K и M_K (рис. 4.16, *б*).

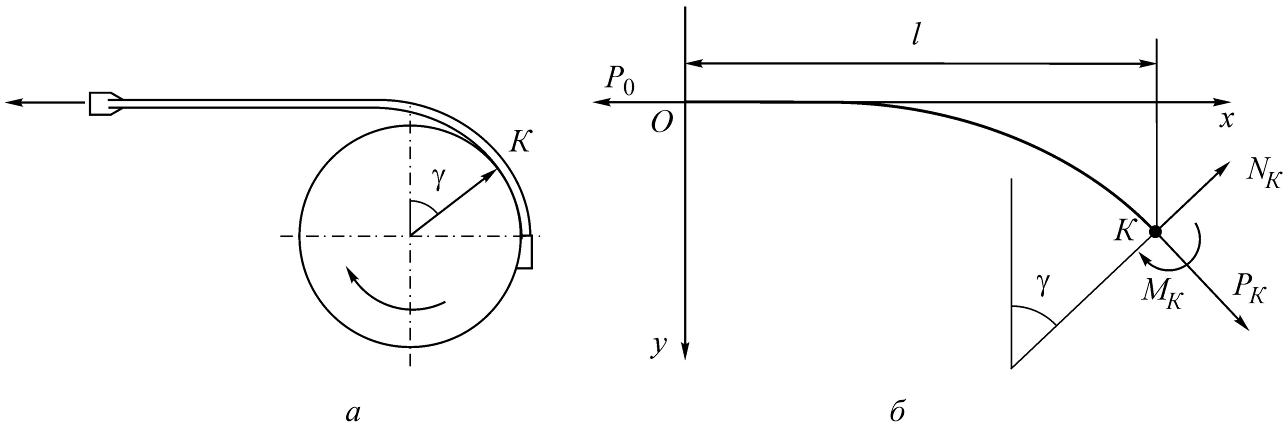


Рис. 4.16. Схема формообразования профильных деталей на станке СПО:
а – расчетная схема; *б* – равновесие неотформованного участка профильной заготовки

Наличие прижимного ролика (рис. 4.15, *в*) позволяет устранить негативное влияние геометрической нелинейности. Если усилие прижима меньше оптимального, то надежный прижим заготовки к контуру гибочного пуансона не обеспечивается и не устраняется угол γ, что вынуждает вести процесс гибки по строго заданному режиму изменения усилия растяжения, обеспечивающему в точке касания профиля с контуром гибочного пуансона требуемые силовые параметры формообразования. И наоборот, большое усилие прижима приводит к утонению профиля в зоне растянутой полки и в верхних волокнах стенки, к перераспределению внутренних напряжений по высоте сечения профиля, что влияет на значение остаточного радиуса кривизны детали. В работах [20, 33] приведена методика расчета усилия прижима, устраняющего угол γ. Она основана на использовании метода баланса внутренних и внешних сил и требует знания геометрии неотформованного участка профильной заготовки.

Для оценки влияния геометрической нелинейности на технологические параметры процесса гибки – намотки применим приведенный ранее конечно-разностный метод.

Деформированное состояние неотформованного участка профильной заготовки при упругопластическом изгибе с растяжением описывается математической моделью, в которую входят [31]: уравнение (4.1), где $x \in [0, l]$, $M = P_0 y$; уравнения равновесия системы:

$$
\begin{aligned}
&P_K \cos\gamma + N_K \sin\gamma - P_0 = 0;\\
&P_K \sin\gamma - N_K \cos\gamma = 0;\\
&M_K - P_0 y(l) = 0
\end{aligned}
\qquad (4.49)
$$

и краевые условия

$$y(0) = 0;\ \kappa(M)\big|_{x=l}. \qquad (4.50)$$

Здесь $\gamma = \operatorname{arctg}(y'(l))$; зависимость $\kappa(M)$ определяется согласно работам [50, 53, 54] и аппроксимируется эрмитовым сплайном третьего порядка (1.21).

Из уравнений (4.49) получим

$$P_0 = P_\kappa \sqrt{1 + [y'(l)]^2};\ N_\kappa = P_\kappa y'(l). \qquad (4.51)$$

Для удобства численного счета введем безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{l};\ \bar{y} = \frac{y}{l^2 \kappa_\kappa};\ \bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa_\kappa};\ \overline{M} = \frac{M}{M_\kappa}$$

и подставим их в (4.1), (4.50) и (4.51). В результате получим преобразованную математическую модель

$$\frac{\bar{y}''}{\left[1 + (l\kappa_\kappa \bar{y}')^2\right]^{3/2}} = \bar{\kappa}(B\bar{y}),\ \bar{x} \in [0,1]; \qquad (4.52)$$

$$\bar{y}(0) = 0,\ \bar{\kappa}(B\bar{y})\big|_{\bar{x}=1} = 1. \qquad (4.53)$$

Здесь $B = \dfrac{P_\kappa l^2 \kappa_\kappa}{M_\kappa} \sqrt{1 + (l\kappa_\kappa \bar{y}'(1))^2}$.

Краевая задача (4.52), (4.53) сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$z_2' = z_2,\ z_2' = f(z_1, z_3)\left[1 + (l\kappa_\kappa z_2)^2\right]^{-3/2},\ z_3' = 0 \qquad (4.54)$$

с краевыми условиями

$$z_1(0) = 0;\ f(z_1, z_3)\big|_{\bar{x}=1} - 1 = 0;\ z_2(1) - z_3(1) = 0 \qquad (4.55)$$

где $z_1(\bar{x}) = \bar{y}(\bar{x}),\ z_2(\bar{x}) = \bar{y}'(\bar{x}),\ z_3(\bar{x}) = \bar{y}'(1),\ f(z_1, z_3) = \kappa(Bz_1)$.

Система уравнений (4.54) с краевыми условиями (4.55) решается с помощью конечно-разностного метода. Отметим, что длина неотформованного участка вычисляется по формуле (4.3). Предложенная точная методика позволяет найти закон распределения нормального и поперечного усилий, изгибающего момента и кривизны по длине неотформованного участка.

При гибке на относительные радиусы $\bar{\rho}_к > 7$ возможно использование упрощенных методик учета геометрической нелинейности на технологические параметры гибки-намотки с растяжением, которые основаны на решении уравнения (1.17) при различных видах аппроксимации зависимости $\kappa(M)$.

При линейной аппроксимации зависимости кривизны от изгибающего момента $\kappa = aM$ $(a = \kappa_к / M_к)$ решение уравнения (1.17) с использованием краевых условий (4.50) имеет следующий вид:

$$y(x) = \frac{\kappa_к \left(e^{x\sqrt{P_0 a}} - e^{-x\sqrt{P_0 a}}\right)}{P_0 a \left(e^{l\sqrt{P_0 a}} - e^{-l\sqrt{P_0 a}}\right)} - \frac{N_0 x}{P_0}, \tag{4.56}$$

где $M = P_0 y + N_0 x$, N_0 и $N_к$ – неизвестные поперечные реакции в точках 0 и K.

Учитывая, что $y'\big|_{x=l} \approx \gamma$, получим

$$\gamma = \frac{\kappa_к \left(1 + e^{-2l\sqrt{P_0 a}}\right)}{\sqrt{P_0 a}\left(1 - e^{-2l\sqrt{P_0 a}}\right)} - \frac{N_0}{P_0}. \tag{4.57}$$

Если принять $e^{-2l\sqrt{P_0 a}} << 1$, то выражение (4.57) преобразуется к виду

$$\gamma = \frac{\kappa_к}{\sqrt{P_0 a}} - \frac{N_0}{P_0}, \gamma > 0. \tag{4.58}$$

В формуле (4.58) искомыми величинами являются P_0 и N_0. Учитываем, что в силу малости угла γ: $\cos\gamma \approx 1$ и $\sin\gamma \approx \gamma$. Кроме того, считаем, что в начале координат имеет место шарнирное закрепление, т.е. $N_0 = 0$. Тогда из уравнений равновесия системы $P_к + N_к\gamma - P_0 = 0$; $P_к\gamma - N_к = 0$ найдем

$$\begin{gathered} P_0 = P_к/2 + \sqrt{P_к^2/4 + P_к \kappa_к^2/a}; \\ N_к = \frac{P_к \kappa_к}{\sqrt{a\left(P_к/2 + \sqrt{P_к^2/4 + P_к \kappa_к^2/a}\right)}}. \end{gathered} \tag{4.59}$$

Если использовать аппроксимацию зависимости $\kappa(M)$ кубическим полиномом вида (1.18), то согласно работе [59], решение уравнения (1.17) имеет следующий вид:

$$y(x)=\sqrt{\frac{2C_1}{b_1}}\operatorname{tg}\left(x\sqrt{\frac{b_1}{2}}\right)\text{ при }0\le x\sqrt{\frac{b_1}{2}}\le\frac{\pi}{2},\tag{4.60}$$

где

$$C_1=\frac{\kappa_t^2}{2b_1\operatorname{tg}^2\left(l\sqrt{\frac{b_1}{2}}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\left(l\sqrt{\frac{b_1}{2}}\right)\right]^2}.$$

Усилие P_0 и параметр b_1 определяются из системы уравнений

$$\left(\frac{b_1 M_к}{\kappa_к P_0}\right)^3\operatorname{tg}^2\left(l\sqrt{\frac{b_1}{2}}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\left(l\sqrt{\frac{b_1}{2}}\right)\right]^2+\left(\frac{b_1 M_к}{\kappa_к P_0}\right)-1=0;$$

$$P_0\cos\left\{\operatorname{arctg}\left[\sqrt{C_1}\left(1+\operatorname{tg}^2\left(l\sqrt{\frac{b_1}{2}}\right)\right)\right]\right\}-P_к=0.$$

Пример 4.5. На рис. 4.17 приведены результаты расчета параметров формообразования по изложенной точной методике с результатами вычислений по приближенным методикам для таврового профиля из материала Д16А-Т с размерами $b_1=0{,}03$ м; $h_1=0{,}004$ м; $b_2=0{,}004$ м; $h_2=0{,}05$ м при длине $l=0{,}5$ м.

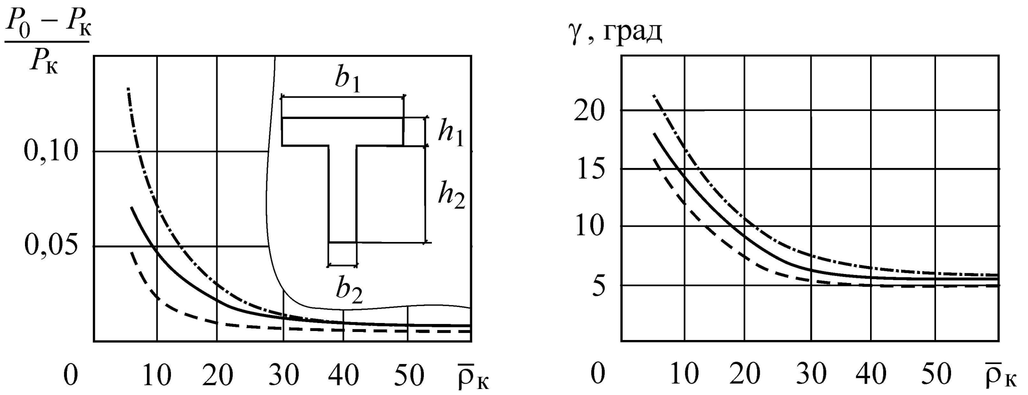


Рис. 4.17. Изменение относительной разницы между P_0 и $P_К$ (*а*), угла технологической недоформовки γ (*б*) при $P_К$ = 43536 Н от относительного радиуса изгиба $\bar\rho_К$: ——— – точное решение; ----- – приближенное решение с кубической аппроксимацией; -·-·- – приближенное решение с линейной аппроксимацией

Анализ результатов расчета показывает, что при гибке на относительные радиусы $7<\bar\rho_К<15$ методика, базирующаяся на аппроксимации зависимости $\kappa(M)$ кубическим полиномом, дает результаты, близкие к точному решению. Для радиусов $\bar\rho_К\ge15$ рекомендуется методика, базирующаяся на линейной аппроксимации зависимости к(M). С увеличением радиуса изгиба влияние геометрической нелинейности на технологические параметры процесса гибки уменьшается. На больших радиусах гибки различие между методиками минимально, поэтому проще для практических расчетов использовать линейную аппроксимацию кривизны от изгибающего момента.

Расчет силовых и настроечных параметров оборудования при гибке-прокатке листовых деталей [6]. Сущность процесса формообразования при гибке-прокатке состоит в пластической деформации листового металла при непрерывном перемещении заготовки между деформирующими валками под воздействием сил трения. Создаваемая при этом кривизна получаемой детали зависит от параметров настройки станка: расстояния между крайними (опорными) валками и положения относительно последних верхнего (нажимного) валка (см. рис. 4.10). Реализуется процесс гибки-прокатки на трех- и четырехвалковые станках, работающих по симметричной и асимметричной схеме (станки серии КГЛ, ГЛС, ГЛП и др.). В станках с программным управлением параметры настройки в процессе прокатки (непрерывное позиционирование нажимного валка в зависимости от подачи листа) могут автоматически изменяться, в результате чего получаются детали с переменной кривизной по контуру. В работах [50, 53, 54] изложена наиболее общая и строгая методика расчета силовых и настроечных параметров процесса гибки-прокатки листовых деталей, основанная на степенной связи внутреннего изгибающего момента и кривизной заготовки в зоне нагружения и использующая теорию эллиптических интегралов. Существуют и другие методики расчета, но они имеют упрощенный характер [21, 49, 66, 67].

Остаточная кривизна детали, изготавливаемой методом гибки-прокатки, зависит от механических свойств и геометрических размеров исходной заготовки, а также от диаметров валков и их взаимного расположения (рис. 4.18), характеризуемого межосевыми расстояниями H_0 (расстояние от центра нажимного валка до линии центров опорных валков) и $2L_0$ (расстояние между последними). Эти параметры взаимозависимы. Сочетание их величин может быть различным для образования одной и той же кривизны при изгибе. Принимая диаметр опорных валков D_0 и расстояние между ними $2L_0$ в качестве независимых переменных, будем искать выражение для перемещения H_0 верхнего нажимного валка как функцию указанных аргументов и создаваемой кривизны деформируемой заготовки κ_0.

Особенности исследуемого процесса находят выражение в том, что форма изгиба не симметрична относительно линии контакта заготовки с верхним нажимным валком даже при симметричном расположении последнего относительно нижних опорных валков. В зоне разгрузки изгиб заготовки характеризуется меньшим градиентом кривизны по дуге контура, чем в зоне нагружения. Вследствие этого касательная к нейтральному слою изогнутой заготовки в точке контакта с верхним нажимным валком не параллельна линии центров опорных валков и составляет с ней угол γ, а сама точка касания несколько смещена по окружности валка от вертикальной диаметральной оси в сторону зоны нагружения.

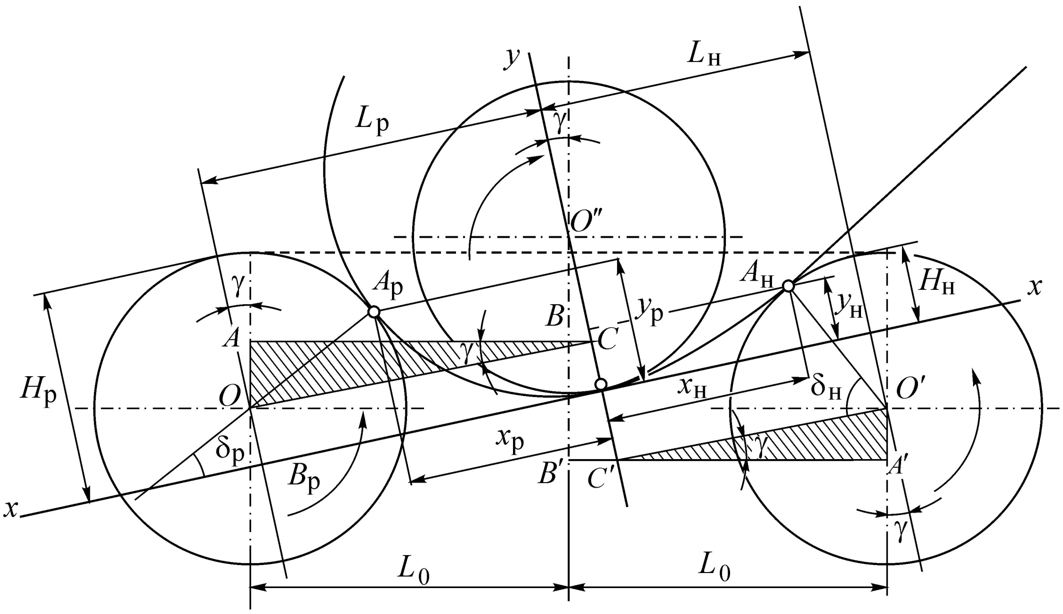


Рис. 4.18. Расчетная схема процесса гибки-прокатки

За прямоугольную систему координат примем касательную и нормаль к нейтральному слою изогнутой заготовки в точке контакта ее с верхним нажимным валком (рис. 4.18). Очевидно, что зоны нагружения и разгрузки будут характеризоваться различным расстоянием $L_н$ и $L_р$ между соответствующими валками, измеряемым по направлению касательной, а также различным относительным перемещением валков $H_н$ и $H_р$, измеряемым по направлению нормали к касательной. Выражения для координат точек касания с опорными валками изогнутой заготовки (по нейтральному слою) следующие:

для зоны нагружения

$$x_н = L_н - \frac{(D_0 + h)\cos\delta_н}{2},$$
$$y_н = H_н - \frac{(D_0 + h)(1 - \sin\delta_н)}{2}; \quad (4.61)$$

для зоны разгрузки

$$x_р = L_р - \frac{(D_0 + h)\cos\delta_р}{2},$$
$$y_р = H_р - \frac{(D_0 + h)(1 - \sin\delta_р)}{2}. \qquad (4.62)$$

Здесь h – толщина листовой заготовки.

Угловое смещение по окружности нажимного валка точки контакта изогнутой заготовки с учетом выражений (4.61) и (4.62) вычисляется по формуле

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{H_р - H_н}{2L_0}\right) = \arcsin\left\{\frac{1}{2L_0}\left[y_р - y_н - \frac{(D_0 + h)(\sin\delta_р - \sin\delta_н)}{2}\right]\right\}. \qquad (4.63)$$

Из геометрических соотношений (рис. 4.18) найдем расстояние между валками в зонах нагружения и разгрузки $L_н$ и $L_р$:

$$L_н = \frac{L_0 - (D_н - H_н)\sin\gamma}{\cos\gamma};$$
$$L_р = \frac{L_0 + (D_н - H_p)\sin\gamma}{\cos\gamma}, \qquad (4.64)$$

где $D_н = \dfrac{D_0 + D_c}{2} + h$, $D_с$ – диаметр среднего валка; $D_н$ – исходная величина параметра H_0.

Параметры настройки гибочных валков в зонах нагружения и разгрузки

Расчет параметров настройки гибочных валков произведем отдельно в зонах нагружения и разгрузки. Требуемая остаточная кривизна детали $\tilde{\kappa}_0$ будет получена в том случае, если активная кривизна κ_0 в сечении с максимальным изгибающим моментом (точка O) будет связана с остаточной кривизной по формуле (1.11). Так как при подаче заготовки, осуществляемой вращающимися валками происходит перемещение последней справа налево, то любое ее сечение, проходя от точки $A_н$ до точки O, испытывает монотонно увеличивающуюся внешнюю изгибающую нагрузку. Поэтому на участке O – $A_н$ (зоны нагружения) связь изгибающего момента с активной кривизной описывается по формуле (1.6). Эту зависимость аппроксимируем эрмитовым сплайном третьего порядка (1.21). При дальнейшем перемещении сечения от точки O до точки $A_р$ происходит уменьшение действующего в нем изгибающего момента, линейное относительно кривизны (упругая разгрузка), а связь $M(\kappa_0)$ для участка $O - A_р$ (зоны разгрузки) выражается известной формулой $M = EJ(\kappa_0 - \tilde{\kappa}_0)$.

Выделенные в силовой схеме процесса гибки-прокатки (рис. 4.18) зона нагружения и зона разгрузки, с соответствующими им законами связи $M(\kappa_0)$, совпадают с расчетной схемой формоизменения заготовки, изображенной на рис. 4.1, и полностью описываются уравнениями, приведенными в § 4.1. Эти уравнения не позволяют получить аналитическую формулу, которая связывала бы величины H_0 и $\tilde{\kappa}_0$. Найти зависимость между последними можно лишь численными методами решения.

Рассмотрим равновесие формы изгиба участка заготовки в зоне нагружения. Действие отбрасываемой части заготовки на рассматриваемую часть компенсируем в точке 0 силой P_0 и моментом M_0. Действие входного опорного валка на заготовку представим силой реакции $P_н$, направленной по нормали к нейтральному слою в точке $A_н$ контакта тонкостенной заготовки с указанным валком (рис. 4.19, *а*). Схема нагружения деформируемого элемента соответствует упруго-пластическому изгибу тонких заготовок при следящем перемещении деформирующей силы $P_н$, нормальной к изогнутой оси в точке своего приложения (см. § 4.1).

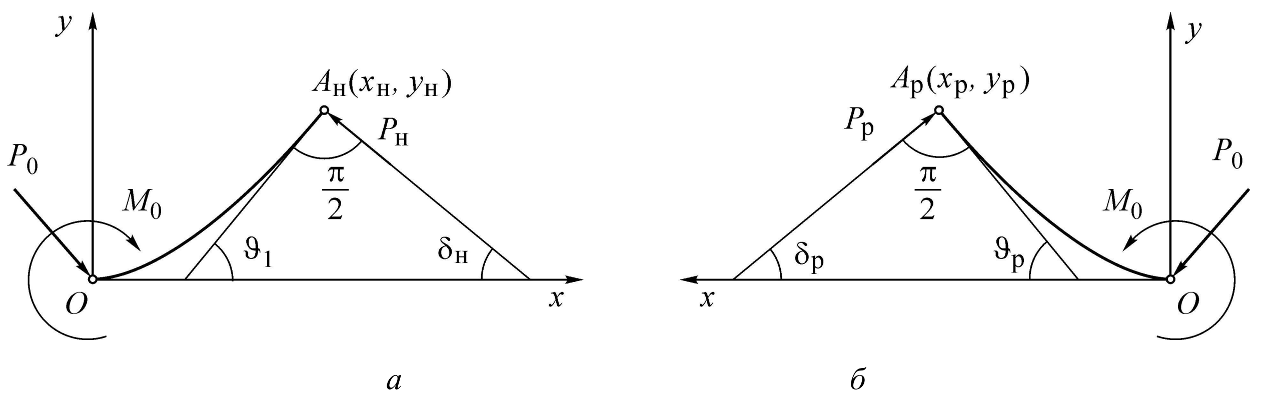


Рис. 4.19. Расчетная схема деформации листовой заготовки в зоне:
а – нагружения; *б* – разгрузки

Деформированное состояние участка заготовки $O - A_н$ описывается уравнением (4.1) с краевыми условиями (4.4), где $x \in [O,\ x_н]$; $\delta_н = \frac{\pi}{2} - \vartheta_1$; $\vartheta_1 = \mathrm{arctg}\left(y'(x)\right)\Big|_{x=x_н}$; $M = M_0 - yP_н \sin\ \vartheta_1 - xP_н \cos\ \vartheta_1$. Из условия равенства нулю изгибающего момента в точке $A_н$ получим $P_н = \dfrac{M_0}{y_н \sin\vartheta_1 + x_н \cos\vartheta_1}$. Величины $\kappa_0 = 1/\rho_0$ и M_0 в точке O являются известными и определяются из решения основной технологической задачи. Подставив безразмерные переменные $\bar{x} = x / x_н$; $\bar{y} = y / \kappa_0 x_н^2$; $\bar{\kappa} = \kappa / \kappa_0$; $\bar{M} = M / M_0$ в исходные выражения, получим

$$\frac{\bar{y}''}{\left[1 + (\kappa_0 x_н \bar{y}')^2\right]^{3/2}} = \bar{\kappa}(\bar{M}), \ \bar{x} \in [0,1]; \tag{4.65}$$

$$\bar{y}(0) = 0, \ \bar{y}'(0) = 0. \tag{4.66}$$

Здесь $\bar{M} = 1 - \dfrac{\kappa_0^2 x_н^2 \bar{y}_н' \bar{y} + \bar{x}}{\kappa_0^2 x_н^2 \bar{y}_н' \bar{y}_н + 1}$, $\bar{y}_н' = \kappa_0 x_н \left(y'(x)\right)\Big|_{x = x_н}$.

Сведем уравнение (4.65) к системе нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} &z_1' = z_2; \\ &z_2' = \bar{\kappa}\left(\bar{x}, z_1, z_3, z_4\right)\left[1 + \left(\kappa_0 x_н z_2\right)^2\right]^{3/2}; \\ &z_3' = 0; \\ &z_4' = 0. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Здесь $z_1 = \bar{y}\left(\bar{x}\right)$; $z_2 = \bar{y}'\left(\bar{x}\right)$; $z_3 = \bar{y}_н$; $z_4 = \bar{y}_н'$.

Краевые условия (4.66) примут вид

$$z_1(0) = 0; \ z_2(0) = 0; \ z_1(1) - z_3(1) = 0; \ z_2(1) - z_4(1) = 0. \tag{4.68}$$

Краевая задача (4.67), (4.68) решается с помощью конечно-разностного метода. В результате при известном значении $x_н$ находим величины $y_н$ и $\vartheta_1 = \operatorname{arctg}\left[\kappa_0 x_н \bar{y}_н')\right]$. При этом краевое условие $\kappa_0\left(M\right)\big|_{x=0} = \kappa_0$ выполняется автоматически.

В зоне разгрузки участок заготовки подвергается деформации изгиба в момент прохождения под верхним нажимным валком. Разгрузка изогнутого элемента происходит по мере перемещения заготовки от нажимного валка к опорному выходному, поэтому в некотором фиксированном положении различные сечения элемента находятся в разной стадии разгружения. При известной кривизне изогнутого участка, созданной в активной стадии деформации, в зоне разгрузки известна кривизна в двух сечениях: под средним валком, где разгрузка еще не началась и кривизна остается равной созданной в активной стадии кривизне κ_0, и на линии контакта с выходным опорным валком, где разгрузка произошла полностью и оставшаяся кривизна детали равна заданной величине $\tilde{\kappa}_0$. Во всех промежуточных сечениях кривизна заготовки изменяется в следующих пределах: $\kappa_0 > \kappa > \tilde{\kappa}_0$. Первоначально деформированное состояние заготовки в зоне разгрузки можно получить путем упругого изгиба деформированного элемента (кривизна во всех сечениях равна величине $\tilde{\kappa}_0$) из стадии полного разгружения до состояния, при котором удовлетворяется граничное условие: кривизна в сечении элемента под верхним нажимным валком станет равной известной кривизне κ_0 в действительном состоянии равновесия (до разгрузки).

Таким образом, решение вопроса о равновесии пластически изогнутой заготовки в зоне разгрузки сводится к задаче об упругом изгибе криволинейного элемента системой сил, изображенной на рис. 4.19, *б*, которая при данной схеме нагружения относится к основному классу нелинейных задач статики тонких стержней.

Для определения кривизны и перемещений точек нейтрального слоя деформированного элемента необходимо решить уравнение

$$\frac{y''}{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}=\kappa(x,y),\ x\in\left[0,x_\text{р}\right] \tag{4.69}$$

с краевыми условиями

$$\kappa(x)\big|_{x=0}=\kappa_0,\ \kappa(x)\big|_{x=x_\text{р}}=\tilde{\kappa}_0. \tag{4.70}$$

Здесь $\kappa(x,y)=\dfrac{M(x,y)}{EJ}+\tilde{\kappa}_0$; $M=M_0-yP_\text{р}\sin\vartheta_\text{р}-xP_\text{р}\cos\vartheta_\text{р}$; $\delta_\text{р}=\dfrac{\pi}{2}-\vartheta_\text{р}$; $\vartheta_p=\operatorname{arctg}\left(y'(x)\right)\big|_{x=x_\text{р}}$.

Из условия равенства нулю изгибающего момента в точке $A_\text{р}$ получим $P_\text{р}=\dfrac{M_0}{y_\text{р}\sin\vartheta_\text{р}+x_\text{р}\cos\vartheta_\text{р}}$.

Подставив безразмерные переменные $\bar{x}=x/x_\text{р}$, $\bar{y}=y/\kappa_0x_\text{р}^2$, $\bar{\kappa}=\kappa/\kappa_0$ в уравнение (4.69), преобразуем его к виду

$$\frac{\bar{y}''}{\left[1+(\kappa_0x_\text{р}\bar{y}')^2\right]^{3/2}}=\bar{\kappa},\ \bar{x}\in[0,1]. \tag{4.71}$$

Здесь $\bar{\kappa}=\left(1-\dfrac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_0}\right)\left(1-\dfrac{\kappa_0^2x_\text{р}^2\bar{y}'_\text{р}\bar{y}+\bar{x}}{\kappa_0^2x_\text{р}^2\bar{y}'_\text{р}\bar{y}_\text{р}+1}\right)+\dfrac{\tilde{\kappa}_0}{\kappa_0}$, $\bar{y}'_\text{р}=\kappa_0x_\text{р}\left(y'(x)\right)\big|_{x=x_\text{р}}$.

Отметим, что из первого краевого условия следует $M_0=EJ(\kappa_0-\tilde{\kappa}_0)$, а второе условие выполняется автоматически. Уравнения (4.71) дополним краевыми условиями (4.66). Решение краевой задачи (4.66), (4.71) сводится к решению системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} & z_1' = z_2; \\ & z_2' = \overline{\kappa}\left(\overline{x}, z_1, z_3, z_4\right)\left[1+\left(\kappa_0 x_p z_2\right)^2\right]^{3/2}; \\ & z_3' = 0; \\ & z_4' = 0. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Здесь $z_1 = \overline{y}\left(\overline{x}\right)$; $z_2 = \overline{y}'\left(\overline{x}\right)$; $z_4 = \overline{y}_{\text{р}}'$.

Краевые условия (4.66) преобразуются к выражениям (4.68).

Краевую задачу (4.68), (4.72) решим с помощью конечно-разностного метода. В результате при известном значении $x_{\text{р}}$ находим величины $y_{\text{р}}$ и $\vartheta_{\text{р}} = \operatorname{arctg}\left[\kappa_0 x_{\text{р}} \overline{y}_{\text{р}}')\right]$.

Общая методика расчета параметров настройки гибочных валков

При определении составляющих перемещения верхнего нажимного валка соответственно в зонах нагружения и разгрузки расчет произведем с учетом изменения расстояния между валками вследствие несимметричности формы изгиба заготовки в указанных зонах. Так как количественную оценку влияния несимметричности формы на изменение расстояния между валками в зонах нагружения и разгрузки можно определить только при известной величине составляющих перемещений $H_{\text{н}}$ и $H_{\text{р}}$, то практически решение рассматриваемых технологических задач достигается методом последовательных приближений. Первоначально расчет ведется без учета изменения расстояния между опорными валками $(L_{\text{н}} = L_{\text{р}} = L_0)$. Первый цикл расчетов связан с вычислением координат $y_{\text{н}}$, $y_{\text{р}}$ и углов $\delta_{\text{н}}$, $\delta_{\text{р}}$. Варьируемыми параметрами являются координаты $x_{\text{н}}$ и $x_{\text{р}}$. После решения краевых задач (4.67), (4.68) и (4.68), (4.72) соответственно в зонах нагружения и разгрузки при заданных величинах $x_{\text{н}}^{\text{зад}}$ и $x_{\text{р}}^{\text{зад}}$ находим значения углов $\delta_{\text{н}}$, $\delta_{\text{р}}$ и координат $y_{\text{н}}$ и $y_{\text{р}}$. Разность координат задаваемых и рассчитанных $x_{\text{н}}^{\text{рас}}$ и $x_{\text{р}}^{\text{рас}}$ из геометрических соотношений по формулам (4.61) и (4.62) служит критерием для корректировки численного значения величин $x_{\text{н}}^{\text{зад}}$ и $x_{\text{р}}^{\text{зад}}$. Расчеты цикла заканчиваются при условии

$$\begin{aligned} & \left|x_{\text{н}}^{\text{зад}} - x_{\text{н}}^{\text{рас}}\right| < \Delta_{\text{н}}; \\ & \left|x_{\text{р}}^{\text{зад}} - x_{\text{р}}^{\text{рас}}\right| < \Delta_p, \end{aligned} \tag{4.73}$$

где $\Delta_{\text{н}}, \Delta_{\text{р}}$ – допустимая погрешность вычисления.

Далее по формулам (4.61) и (4.62) вычисляются составляющие перемещения $H_н$ и $H_р$ соответственно в зонах нагружения и разгрузки.

При известных $H_н$ и $H_р$ по уравнениям (4.63) и (4.64) вычисляются угловое смещение точки касания заготовкой верхнего нажимного валка γ и измененные расстояния между валками в зонах нагружения $L_н$ и разгрузки $L_р$. Затем по скорректированному расстоянию между валками определяется уточненная величина составляющих искомого перемещения H_0. Составляющие относительных перемещений даны в системе координат, ориентированной по касательной и нормали к нейтральному слою в точке контакта заготовки с верхним нажимным валком. В процессе гибки-прокатки перемещение верхнего валка осуществляется в направлении, перпендикулярном линии центров нижних опорных валков. При известном значении составляющих $H_н$ и $H_р$ действительное перемещение верхнего валка в указанном направлении определяется следующим выражением [50]:

$$H_0 = \left(H_н + L_н \mathrm{tg}\gamma\right)\cos\gamma + \left(D_0 + h\right)(1 - \cos\gamma). \tag{4.74}$$

В формуле (4.74) составляющая параметра настройки $H_р$ отражена в величине угла γ, составляемого с линией центров опорных валков нормалью к изогнутой оси заготовки в точке контакта ее с верхним нажимным валком.

Цикл расчетов, связанных с вычислением параметра H_0, является внешним по отношению к первому циклу (внутреннему). Его расчеты заканчиваются при условии:

$$\left|H_0^{(i+1)} - H_0^{(i)}\right| < \Delta_Н, \tag{4.75}$$

где $\Delta_Н$ – допустимая погрешность.

В результате вычислений по описанному здесь циклическому алгоритму можно найти углы γ, $\delta_н$, $\delta_р$ и силы $P_н$ и $P_р$, а по ним и остаточную кривизну $\tilde{\kappa}_0$, которую будет иметь заготовка после изгиба за один переход при данных параметрах настройки оборудования (H_0, $L_н$ и $L_р$).

Расчет силовых параметров формообразования

Знание усилий формообразования при гибке-прокатке необходимо как при проектировании нового оборудования для расчета конструктивных элементов на прочность и жесткость, так и при решении технологических вопросов о возможности изготовления тех или иных деталей на существующем оборудовании. Кроме того, известная зависимость силовых факторов от параметров настройки станка позволяет правильно и обоснованно устанавливать значение последних для различных форм изготовляемых деталей.

Процесс формообразования при гибке-прокатке на валковых станках состоит из двух стадий, характеризующихся различной кинематикой деформирующих валков и различными силовыми схемами нагружения [50, 53]. В первоначальной стадии происходит поперечный изгиб заготовки, осуществляемый путем прогиба, создаваемого перемещением верхнего нажимного валка. При этом деформирующие валки не вращаются и перемещение заготовки в целом отсутствует. Схема нагружения характеризуется силами давления валков на заготовку, направленными нормально к нейтральному слою последней в точках своего приложения. После того, как в результате поперечного изгиба создана необходимая кривизна в сечении под верхним валком, начинается последующая стадия формообразования – перемещение заготовки в целом между деформирующими валками (прокатка). Вследствие наличия сил трения между вращающимися валками и заготовкой, происходит перемещение последней в зоне деформации. Из всего сказанного следует, что к числу силовых факторов рассматриваемого процесса относятся нормальные и касательные составляющие сил давления валков на заготовку. Соответствующая величина этих составляющих сил давления обеспечивает необходимый изгиб и прокатку листовой заготовки на заданный радиус кривизны.

В работах [50, 53, 54] проведен полный анализ силовых факторов процесса гибки-прокатки. Отметим только, что для определения нормальных сил давления валков на заготовку используются зависимости, найденные при рассмотрении теоретических основ процесса свободной гибки. Поскольку подача изгибаемой заготовки осуществляется вращающимися валками, то необходимо проверить достаточность сил трения, возникающих между подающими валками и заготовкой. При малых по величине силах трения валки могут пробуксовывать относительно заготовки, царапая ее поверхность и вынуждая производить гибку за большее количество переходов. То и другое нежелательно, поэтому, как показывает практика, при гибке-прокатке нижние валки стремятся расположить как можно ближе друг к другу, так как при этом увеличиваются силы нормального давления со стороны валков на заготовку, а следовательно, больше будут и силы трения. Проверка на отсутствие проскальзывания заключается в расчете и последующем сравнении потребного усилия подачи и обеспечиваемых сил трения [50, 53]. Усилие подачи для произвольной формы сечения деформируемого элемента определяется по формуле

$$F_{\text{П}} = \kappa\left[\frac{M_{\text{упр}}}{2} + \frac{M_{\text{пл}}}{1+n} - (1-n)E_{\text{П}}\varepsilon_{\text{р}}^2 \frac{F_{\text{пл}}}{2(1+n)\kappa_0}\right]. \tag{4.76}$$

Усилие подачи зависит от сопротивления металла пластическому деформированию, поперечного сечения изгибаемой заготовки и кривизны, на который производится деформация. Весьма важным обстоятельством, которое необходимо отметить, является то, что усилие подачи не зависит от параметров настройки станка. Если изгиб на заданную кривизну производится при разном сочетании параметров настройки валков станка, то усилие подачи для всех сочетаний будет одним и тем же, определяемым кривизной изогнутой заготовки. Условием гибки без скольжения валков относительно заготовки будет превышение располагаемой суммарной силы трения над потребным усилием подачи:

$$\sum T_i = f \sum P_i \geq F_{\Pi}, \qquad (4.77)$$

где f – коэффициент трения скольжения между вращающимися валками и изгибаемой заготовкой. Если условие (4.77) не выполняется, то гибку-прокатку нужно осуществлять за большее количество переходов.

Пример 4.6. Определим настроечные параметры для изготовления цилиндрической детали с радиусом кривизны $\tilde{\rho}_0 = 0{,}3\,\text{м}$ из листового металла Д16А-Т толщиной h = 0,0028 м и шириной b = 2 м (диаметры валков $D_0 = 0{,}07\,\text{м}$, установочный параметр $L_0 = D_0$). Из решения основной технологической задачи находим значения $\rho_0 = 0{,}138\,\text{м}$ и $M_0 = 1003{,}52\,\text{Н м}$. Краевые задачи в зонах нагружения и разгрузки решаем при их разбивке на 50 участков. Результаты вычислений следующие: $\delta_{\text{н}}$ = 85,4°; $x_{\text{н}}$ = 0,06378 м; $y_{\text{н}}$ = 0,0047 м; $L_{\text{н}}$ = 0,0667 м; $H_{\text{н}}$ = 0,0048 м; $\delta_{\text{р}}$ = 55,85°; $x_{\text{р}}$ = 0,05287 м; $y_{\text{р}}$ = 0,0084 м; $L_{\text{р}}$ = 0,0733 м; $H_{\text{р}}$ = 0,0147 м; γ = 3,25°; H_0 = 0,00966 м. Сравнение результатов вычислений с результатами, полученными по методике [54], показывает практически полное их совпадение (расхождение менее 1 %). Отметим, что применение компьютеров позволяет в случае необходимости повысить точность вычислений. С этой целью можно увеличить число квазиравномерной сетки на расчетной схеме деформируемого элемента.

Таким образом, конечным результатом расчетов при данной методике выполнения являются численные значения параметров настройки H_0, $L_{\text{н}}$ и $L_{\text{р}}$, позволяющие получить деталь за один переход, а если однопереходная гибка невозможна из-за проскальзывания валков, то обеспечить изготовление детали за минимальное количество переходов с требуемой точностью.

Глава 5. КОНТРОЛЬ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ФОРМООБРАЗУЮЩИХ ОПЕРАЦИЙ ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКИ

Точность изготавливаемых пластическим деформированием тонкостенных деталей авиатехники зависит от точности исходных заготовок (размеры и механические свойства) и точности их нагружения деформационными и силовыми параметрами на технологическом оборудовании с соответствующей технологической оснасткой. Специфическая особенность достижения требуемой точности при формообразовании заключается в том, что повлиять на точность исходных заготовок во многих случаях невозможно, например, прокат, поставляемый металлургической промышленностью, имеет значительный разброс по механическим свойствам и геометрии поперечного сечения. Построение рациональной технологии должно предусматривать возможность корректировок режимов нагружения заготовок с целью исключения ожидаемых погрешностей деталей. Принятие решений о каких-либо корректировках режимов обработки должно основываться на информации о состоянии системы станок-оснастка-деталь. В результате встает вопрос об измерении текущих значений параметров формообразования и генерировании управляющих воздействий для названной технологической системы. При таком понимании проблемы можно говорить о контроле процесса формообразования. Кратко покажем его место при выполнении формообразующих операций [54].

§ 5.1. Контролируемые параметры

Как известно, формообразование – это процесс создания в исходной заготовке определенного поля деформаций, переводящего последнюю в деталь требуемой конфигурации. Критериями годности детали являются показатели точности ее геометрических размеров (длина дуги и радиус кривизны контура, габариты поперечного сечения, наличие крутки и др.) и механических свойств (остаточный ресурс пластичности, размер зерна, наличие линий скольжения и др.). В конечном счете, и геометрия, и механические свойства тонкостенной детали зависят от созданных в ней деформаций, поэтому контролировать в процессе пластического формообразования следует именно их. Контроль в смысле инспектирования предполагает измерение величин деформаций на наиболее опасных участках с целью выдерживания этих величин в пределах допускаемых для данного материала заготовки значений. Контроль в смысле управления подразумевает действия, связанные с целенаправленным измерением режимов формообразования за счет наложения на заготовку кинематических ограничений или дополнительных силовых воздействий.

При назначении предельно допустимой величины деформации [ε] необходимо руководствоваться несколькими критериями, к которым относятся: отсутствие разрушений, устойчивость при нагружении, сохранение мелкозернистой структуры, качество поверхности и др. Каждому критерию соответствует своя величина [ε]. Наименьшая из них и есть предельно допустимая величина деформации для данного материала.

Пластическое формообразование детали осуществляется кинематическим и силовым воздействием на исходную заготовку со стороны технологической оснастки и инструмента. Так как заготовка обладает вполне определенной жесткостью (изгибной, крутильной, сдвиговой), следует ожидать, что кинематические и силовые параметры взаимосвязаны. Однако эта взаимосвязь является достаточно сложной и неоднозначной. Физическая нелинейность связи напряжений и деформаций усугубляется геометрической нелинейностью (см. гл. 3). Величины разнонаправленных нагрузок зависят от очередности их создания. Отработка силовых параметров на технологическом оборудовании происходит скачкообразно из-за трения между подвижными частями, а исходные заготовки имеют значительный разброс по геометрическим и механическим характеристикам. При таких обстоятельствах, очевидно, что косвенные управляющие воздействия на систему станок-инструмент-деталь делают весьма проблематичным вопрос достижения требуемой точности формообразования. Поэтому предпочтение должно быть отдано вариантам прямого управления – требуемые перемещения обрабатываемой заготовки должны создаваться кинематическим воздействием, а требуемые силы – силовым воздействием со стороны технологического оборудования и оснастки.

К числу кинематических параметров относятся: длина дуги детали, кривизна контура, крутка, овальность, малка. К силовым параметрам относятся, прежде всего, усилие растяжения, изгибающий момент, усилие прижима, поперечная сила, крутящий момент. Главное ограничение – это предельно допустимая величина деформации.

При выборе между основными путями (управления по деформациям или силам) следует отдавать предпочтение первому, по крайней мере, по двум причинам: во-первых, именно по деформациям, как уже отмечалось, налагаются ограничения, вытекающие из условия неразрушения; во-вторых, при наличии ярко выраженной площадки текучести стабилизировать пластические деформации только по силам невозможно. Однако при монотонном нарастании сил при пластическом деформировании пластический изгиб при стабилизации силы растяжения (или давления в полости растяжного гидроцилиндра) вполне допустим, например, при реализации гибки с растяжением на станках типа ПГР.

Одна из возможностей комбинированного управления может быть реализована при переходе от одной программы к другой, что в теории управления квалифицируется как переменная структура. Идея сводится к тому, чтобы на первом этапе увеличением силы растяжения довести заготовку до начала пластических деформаций, а затем, контролируя дополнительные деформации и ограничивая их, осуществлять изгиб. Такой способ дает значительные преимущества, когда момент начала пластических деформаций заранее не может быть оценен с удовлетворительной точностью вследствие разброса характеристик материала, наличия остаточных напряжений, возникавших на предыдущих этапах технологического процесса, отличий размеров сечений от номинальных значений.

§ 5.2. Методы управления формообразованием

Делая выбор между прямым и косвенным управлением процессом пластического формообразования, следует учитывать такие обстоятельства, как техническая достижимость, экономическая целесообразность, стабильность процесса при наличии возмущающих факторов, охват широкой номенклатуры деталей, простота технологической оснастки и т.д. В ряде случаев применение косвенного управления оказывается оправданным (требуемая деформация растяжения при гибке профилей поддерживается за счет постоянства давления в гидроцилиндре; уменьшение деформации овальности поперечного контура трубы производится за счет гидронаддува или принудительного разгибания и т.д.). Однако, как показывает практика, при прочих равных условиях предпочтение следует отдавать прямому методу управления.

Рассмотрим кинематическое управление формообразованием при свободных и сопряженных схемах нагружения. Форма детали под нагрузкой при реализации свободной схемы определяется взаимным расположением контактирующих с ней инструментов и собственной жесткостью детали. Главным достоинством свободной схемы является возможность поднастройки технологической системы, что позволяет учитывать реальные характеристики каждой изготавливаемой детали.

В качестве примера рассмотрим корректировку настроечных параметров валковой листогибочной машины для учета действительной жесткости исходной заготовки. Согласно работе [54] кривая зависимости настроечного параметра от остаточного радиуса кривизны детали при разбросе механических свойств заготовки и ее толщины смещается как жесткая линия вправо или влево от номинального положения на определенную величину с точностью до $1\ldots2\,\%$. Отсюда следует возможность корректировки настроечного параметра во всем диапазоне изменения остаточной кривизны детали по одной из найденной при эксперименте (пробном изгибе образца) точке по следующей формуле:

$$H_0^{\text{д}}(\tilde{\rho}) = H_0^{\text{н}}(\tilde{\rho}) + \Delta H, \tag{5.1}$$

где $H_0^{д}(\tilde{\rho})$ – управляемая координата, учитывающая действительную жесткость заготовки; $H_0^{н}(\tilde{\rho})$ – номинальная функция управления; ΔH – корректирующая поправка, определяемая на этапе пробной гибки.

При выполнении гибки-прокатки позиционирование среднего (нажимного) валка по координате H_0 должно быть согласовано с углом его поворота. Чертеж детали определяет ее внутреннюю геометрию (функцию зависимости радиуса кривизны от длины дуги, характеризующую форму контура с точностью до положения в пространстве) $\tilde{\rho}(s)$. Длина дуги детали однозначно связана с углом поворота гибочного валка: $s=(D_c/2)\varphi$, где D_c – диаметр валка; φ – угол поворота валка. Тогда следующая система уравнений

$$\begin{aligned} &\varphi=\varphi(t); \\ &s=(D_c/2)\varphi; \\ &\tilde{\rho}=\tilde{\rho}(t); \\ &H_0^{д}(\tilde{\rho})=H_0^{н}(\tilde{\rho})+\Delta H,\ (t \text{ – время}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

полностью определяет кинематику управления валковой листогибочной машиной при реализации процесса гибки-прокатки.

При сопряженной схеме формообразования заготовка в конце активной стадии нагружения полностью прилегает к развитой рабочей поверхности технологической оснастки. Задача управления состоит в отыскании таких траекторий перемещения исполнительных органов станка, которые обеспечивали бы соблюдение ограничений $\varepsilon<[\varepsilon]$ в каждый момент времени нагружения. Характерный пример формообразования по сопряженной схеме с кинематическим управлением показан на рис. 5.1.

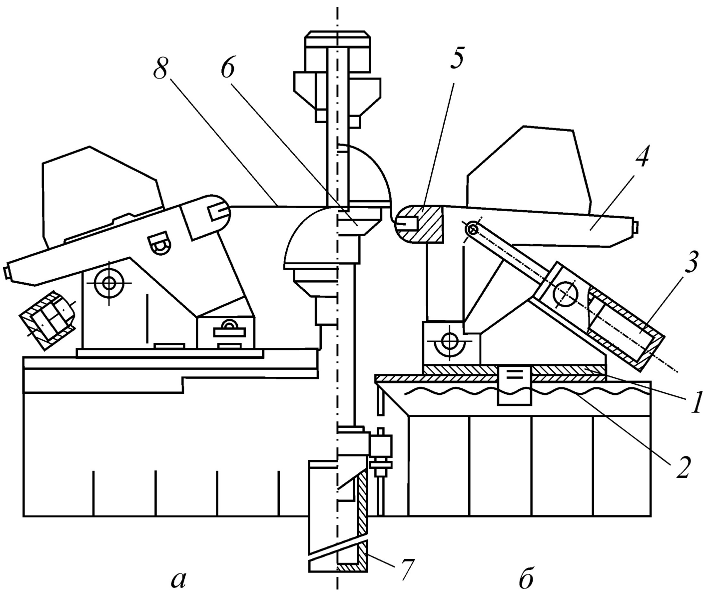


Рис. 5.1. Кинематическая схема пресса FEKD:
а – исходное положение; *б* – конечное положение
1 – каретка пресса; *2* – винтовая пара;
3 – гидроцилиндр балансира; *4* – балансир;
5 – зажимное устройство; *6* – стол пресса;
7 – гидроцилиндр стола; *8* – листовая заготовка

Программируемые параметры: *1*– подъем стола пресса; *2, 3* – выдвижение штоков силовых гидроцилиндров левого и правого балансиров (с программируемым шагом 10^{-6} м); *4* – наклон стола пресса в вертикальной плоскости (с программируемым шагом 10^{-3} град). Кинематика пресса FEKD позволяет в процессе обтяжки реализовать поэтапное огибание заготовкой рабочей поверхности обтяжного пуансона одновременно с растяжением заготовки. Благодаря этому минимизируется вредное влияние трения, а поле распределения деформаций по площади заготовки имеет более равномерный характер.

Оснащение технологического оборудования системами программного управления может обеспечить полное кинематическое управление процесса формообразования деталей. Развитое программно-математическое обеспечение допускает возможность гибкого программирования функций обработки информации и управления, возможность сопряжения с внешними управляющими и вычислительными устройствами, выполнения функции диагностики. Управляющие программы могут составляться как на основе аналитических расчетов, так и в режиме записи «ручного» управления при изготовлении пробной детали. Результатом расчетов при аналитическом программировании является формирование программ перемещения рабочих органов в рабочем пространстве оборудования для обеспечения точности формообразования.

Если по каким-то причинам затруднено создание в теле заготовки требуемого поля деформаций только за счет кинематического воздействия со стороны средств формообразующего оснащения (инструмента и оснастки), то прибегают к использованию комбинированных воздействий, заменяя труднореализуемые компоненты кинематики соответствующими силовыми компонентами. Такие замены, как правило, являются вынужденными. Они снижают точность управления, поскольку касательный модуль упрочнения $E_v = d\sigma / d\varepsilon$ в пластической зоне меньше единицы. Выдерживать требуемую деформацию $\varepsilon = \varepsilon_{\text{треб}}$ через косвенный параметр σ (при $E_v < 1$) значительно хуже, чем непосредственно управлять самой деформацией. Наличие силовых компонент нагружения в каком-либо процессе формообразования вынуждает заняться поиском более совершенных схем технологического оборудования и оснастки, реализующих этот процесс.

Рассмотрим процесс гибки профилей с растяжением на станках типа ПГР с ручным управлением. Требуемая кривизна контура детали обеспечивается кинематически, а именно, путем огибания заготовкой рабочего контура гибочного пуансона. Деформация растяжения, которая необходима для предотвращения потери устойчивости и уменьшения пружинения, создается растяжными гидроцилиндрами. В процессе формообразования постоянство деформации растяжения поддерживается за счет постоянства давления в гидроцилиндрах. Замена кинематического управления величиной деформации растяжения приводит к ощутимому снижению точности. Сохранность постоянства силы на штоке гидроцилиндра, при наличии перемещений поршня относительно гильзы, практически невозможна из-за гидравлического сопротивления в перепускных клапанах и различия коэффициентов трения в состояниях движения и покоя. Рост силы натяжения особенно опасен на заключительном этапе огибания заготовкой гибочного пуансона. Почти весь прирост силы идет на увеличение длины свободного (неотформованного) участка заготовки и лишь малая часть – на блокированный трением изогнутый по оправке участок заготовки. Поэтому деформации растяжения на концевых участках детали могут в несколько раз превосходить среднюю величину деформации растяжения по всей длине. Применение станков ПГР с ЧПУ при изготовлении криволинейных профильных деталей полностью устраняет указанные негативные факторы (см. разд.4.3).

Рассмотрим другой пример процесса формообразования с комбинированным управлением по кинематическим и силовым параметрам [54]. Обтяжка листов с поперечным натяжением используется для формообразования особо тонких обшивочных деталей (толщина 0,5 ... 0,6 мм), которые склонны к появлению практически неустранимых гофров. Поперечное натяжение листа (рис. 5.2) препятствует развитию деформаций в этом направлении и удерживает его в плотном контакте с обтяжным пуансоном, мешая, тем самым, возникновению и развитию гофров.

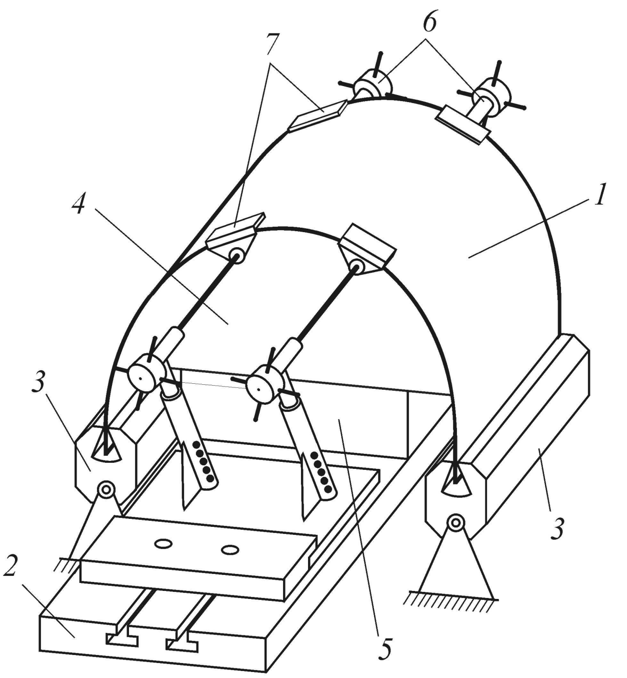


Рис. 5.2. Обтяжка с поперечным натяжением: *1* – листовая заготовка; *2* – стол пресса; *3* – зажимные губки пресса; *4* – обтяжной пуансон; *5* – подставка; *6* – механизмы натяжения; *7* – зажимы для поперечного натяжения

Наиболее неблагоприятны с точки зрения гофрообразования детали блюдцеобразной формы, имеющие малую кривизну в области вершины. В этом случае при простой обтяжке продольные деформации ε_x локализуются в удаленных от вершины детали зонах. Также здесь появляются и поперечные деформации $\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x$, увлекающие за собой свободные края листовой заготовки. Напряжения сжатия тонкого листа, лежащего на пологом в области вершины обтяжном пуансоне, реализуются в виде гофра (длина до 500 мм, высота до 10 мм), устранить который традиционными для толстых листов способами не удается. Попытки «посадить» гофр ударами резиновой киянки приводят лишь к его раздроблению на несколько мелких гофров. Поперечное натяжение листа позволяет решить данную проблему.

Система управления обтяжного пресса функционирует автоматически, причем оператор участвует в процессе работы только в случае установки и снятия готовой детали, а также при управлении формообразованием в режиме «Обучение». Управление новым обтяжным оборудованием может осуществляться как по жесткой, заранее заданной программе, так и адаптивно, с формированием управления в реальном времени в зависимости от результатов контроля текущего состояния формообразуемой детали и значений параметров упругих деформаций узлов машины, измеряемых, например, с помощью дефометра.

§ 5.3. Компьютеризация контроля при выполнении формообразующих операций листовой штамповки

В настоящее время формообразующее технологическое оборудование, применяемое на предприятиях авиационной промышленности, не полностью оснащено системами программного управления, поскольку они весьма дороги и представляют повышенные требования к кинематическим механизмам и силовым приводам технологического оснащения. Субъективный характер управления отрицательно сказывается на качестве изготовляемых деталей и затрудняет процедуру сертификации. Приемлемым выходом из такой ситуации являются системы компьютерного контроля за процессами формообразования. Они являются промежуточным этапом на пути к программному управлению, легко встраиваются в действующее производство, повышая его общий уровень и культуру.

В качестве примера рассмотрим систему контроля деформаций при изготовлении листовых деталей на обтяжных прессах [54]. Система компьютерного контроля за технологическим процессом обтяжки листовых деталей предназначена для получения объективной информации о деформированном состоянии заготовки в процессе ее формообразования на обтяжном прессе (рис. 5.3). Пятиканальное измерение деформаций в режиме реального времени позволяет оператору следить за опасными зонами заготовки и наиболее рационально вести процесс обтяжки.

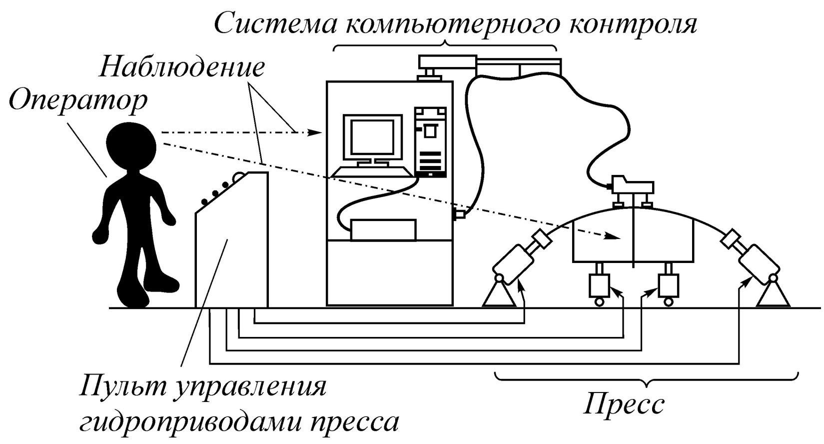


Рис. 5.3. Структурная схема компьютерного контроля за технологическим процессом обтяжки листовых деталей

Применительно к обтяжному прессу система работает в информационно-справочном режиме. Принятие решения по управлению прессом остается за оператором, который распоряжается представляемой ему информацией по собственному усмотрению. Оператор управляет гидроприводами исполнительных органов обтяжного пресса с пульта управления. При этом он визуально следит за ходом процесса обтяжки (состояние гидросистемы пресса, надежность захвата заготовки в губках, отсутствие складкообразования на заготовке и др.) и наблюдает на дисплее системы компьютерного контроля за достигнутой в процессе обтяжки величиной деформации заготовки. Система компьютерного контроля архивирует измеренные величины деформаций для всех изготовляемых деталей. На основании этих данных наиболее ответственные детали можно паспортизировать.

Аналогичным образом построена структурная схема системы контроля и прогнозирования деформаций при гибке профильных деталей на станках типа ПГР [54]. Система предназначена для получения объективной информации о деформированном состоянии заготовки в процессе ее формообразования. Двухканальное измерение деформаций в режиме реального времени с запоминанием максимально достигнутых деформаций от растяжения и изгиба позволяет оператору наиболее рационально вести процесс гибки. Отличительной особенностью данной системы от рассматриваемой ранее является наличие функции прогнозирования величины деформации. Необходимость прогнозирования продиктована большой величиной изгибных деформаций, возникающих при формообразовании деталей из профилей (изгибными деформациями при обтяжке листов пренебрегаем ввиду их малости), а также тем, что непосредственный замер суммарной деформации затруднен из-за сложности крепления датчика деформации на криволинейной поверхности изогнутого профиля. Функция прогнозирования содержит вычислительную процедуру, которая по замеренной деформации растяжения и известным для данной детали механическим свойствам материала, размерам поперечного сечения и радиусу изгиба рассчитывает положение нейтрального слоя, максимальную суммарную деформацию от действия растяжения и изгиба, а также учитывает деформацию калибровки. Поскольку прогнозирование выполняется в режиме реального времени, расчеты следует вести по упрощенной методике, исключающей циклические алгоритмы последовательных приближений. Оптимальной моделью материала является жесткопластическая связь напряжений и деформаций с линейным деформационным упрочнением. Данная модель обеспечивает устойчивую работу системы в режиме реального времени при формообразовании профильных деталей по различным схемам сложного нагружении. Графическое представление информации в виде блочной диаграммы делает систему компьютерного контроля весьма удобной в эксплуатации.

Заметим, что альтернативой приобретения новых дорогостоящих прессов зарубежных фирм является модернизация отечественного обтяжного оборудования (прессы типа РО и ОП, станки ПГР-6, ПГР-7 и др.) и оснащение их системами автоуправления (рис. 5.4), позволяющими автоматизировать сам процесс формоизменения (реализовать автоматический режим) и поддержать заданные технологические параметры[*].

Рис. 5.4. Обобщенный алгоритм системы автоуправления для обтяжного оборудования

Техническая реализация каждого из этапов представленного алгоритма в настоящее время не вызывает больших трудностей.

В настоящее время на практике для решения подобных задач используются относительно недорогие и компактные программируемые логические контроллеры (ПЛК), например, ПЛК SMART2, обладающие, несмотря на свои малые габариты, мощными вычислительными и коммуникационными возможностями. ПЛК SMART2имеет модульную структуру, позволяющую легко изменять конфигурацию. Для объединения ПЛК SMART2 и компьютера (ПК) в сеть используется стандартная высокоскоростная локальная шина PROFIBUS, базирующаяся на принципе шинного маркера реального времени. Сеть PROFIBUS позволяет интегрировать в единую систему обтяжное оборудование, контроллер и вычислительные средства с элементами связи процессов, а также обеспечивает возможность дистанционной загрузки и отладки программ (рис. 5.5).

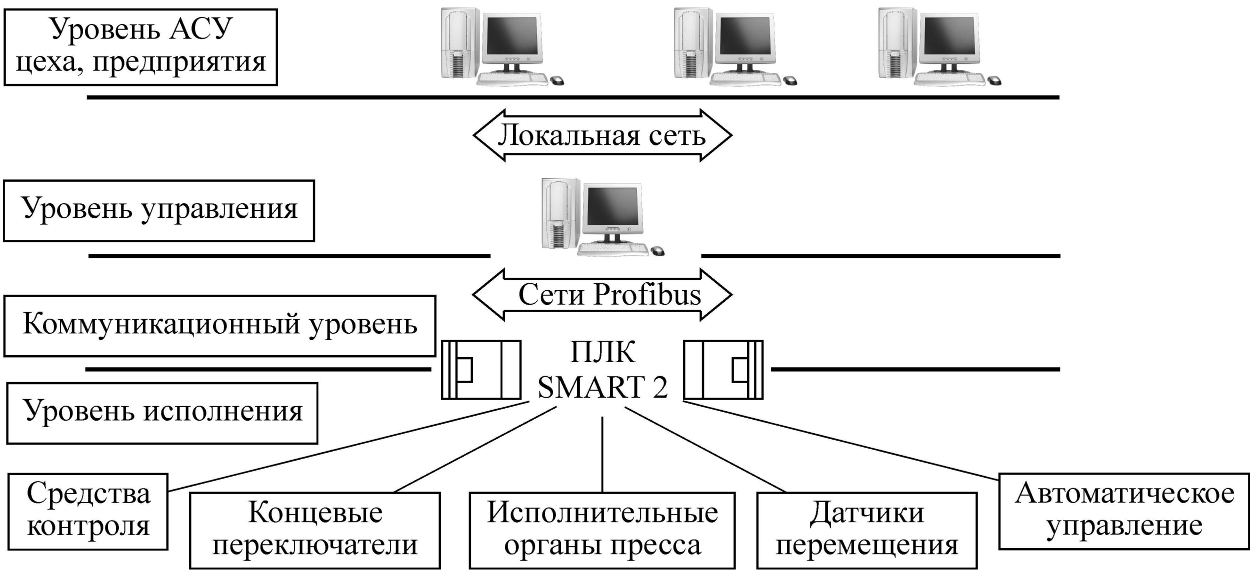


Рис. 5.5. Структура системы автоуправления

[*] *Михеев, В.А.* Разработка системы автоуправления для обтяжного оборудования на базе ПК, ПЛК SMART2 и сети PROFIBUS/В.А. Михеев, Б.С. Малышев, И.П Попов и др. // Изв. Самарского научного центра РАН. – 1999. – №2. – С. 302-306.

Кинематика данного обтяжного оборудования отечественного производства является подходящей для оснащения их системами автоуправления на основе ПК и ПЛК SMART2. При этом конфигурация систем автоуправления зависит не только от конструктивно-кинематических особенностей пресса, но и от технологических особенностей процесса обтяжки. Настройка системы автоуправления на конкретный тип пресса и процесс обтяжки производится загрузкой соответствующей программы управления в ПЛК.

Разработанная система автоуправления на базе ПК, ПЛК SMART2 и сети PROFIBUS легко связывается с системой автоматизированной подготовки производства ЛА, что позволяет сформировать математические модели аэродинамической поверхности детали и использовать их для разработки оптимальной программы нагружения заготовки при обтяжке и изготовлении обтяжных пуансонов. На уровне автоматизированной системы управления (АСУ) цеха и предприятия эта связь реализуется с помощью сети ETHERNET.

В заключение отметим, что развитие современных САПР идет по пути создания многоуровневых, интегрированных САПР, охватывающих в едином цикле все этапы внешнего и внутреннего проектирования. Несмотря на возрастающую сложность САПР, они базируются на типичной схеме проектирования. Постановка математических задач, возникающих при реализации проектных процедур, так или иначе связаны с оптимизацией. Типичной схеме процесса проектирования соответствуют три уровня оптимизации. Первый уровень состоит в выборе наилучшей технической идеи или принципа действия объекта проектирования. Второй – есть поиск оптимальной структуры или схемы с учетом выбранного принципа действия, а третий – определение наилучших значений параметров объекта проектирования для выбранной структуры. Оптимальное математическое обеспечение решения задач анализа и оптимизации объекта проектирования – автоматизированные на базе компьютеров системы и ориентированные на работу с ними инженеры-технологи. В таких системах обязательны блоки как типовых инженерных решений технических задач, так и синтеза оптимальных решений.

Повышение требований к качеству изготавливаемых деталей в авиастроении обусловливает потребность в точных расчетных методах определения технологических параметров процессов пластического формообразования. Современные САПР ЗШП базируются на алгоритмизированных решениях задач об упруго-пластическом деформировании заготовки до требуемой формы. Изготовление деталей с заданной точностью геометрических параметров их формы обеспечивается соответствующей оснасткой технологического процесса и кинематической настройкой оборудования. При этом должны быть учтены все сопровождающие процесс явления, прямо или косвенно влияющие на его точность. Численный метод, изложенный в гл. 4, позволяет единообразно решать на компьютере любые задачи по расчету параметров процессов гибки тонкостенных деталей с учетом геометрической нелинейности.

Результаты, представленные в учебном пособии, направлены на разработку научных основ САПР ТП в части их имитационного моделирования на персональных компьютерах с определением технологических параметров исследуемых процессов и параметров настройки технологического оборудования. Разработанный математический аппарат позволяет на базе теоретических исследований создавать точные математические модели процессов пластического формообразования тонкостенных деталей из листового и профильного материала с учетом всех факторов, влияющих на точность изготовления деталей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Модифицированный метод Ньютона решения системы нелинейных алгебраических уравнений

В общих чертах рассмотрим решение нелинейной краевой задачи (4.9) и (4.10), которая с помощью конечно-разностной формулы второго порядка сводится к следующей системе нелинейных алгебраических уравнений относительно величин $z_1^i, z_2^i, \ldots, z_6^i$:

$$
\begin{aligned}
&z_1^1 = 0;\\
&z_2^1 = 0;\\
&z_5^1 = 0;\\
&z_1^{i+1} - z_1^i = \frac{\Delta\overline{x}}{2}\left(z_2^{i+1} + z_2^i\right);\\
&z_2^{i+1} - z_2^i = \frac{\Delta\overline{x}}{2}\left\{\left[1+\left(\kappa^* L z_2^{i+1} z_4^{i+1}\right)^2\right]^{3/2} \overline{\kappa}\left(\overline{x}^{i+1}, z_1^{i+1}, z_3^{i+1}, z_4^{i+1}, z_6^{i+1}\right) + \right.\\
&\left. + \left[1+\left(\kappa^* L z_2^i z_4^i\right)^2\right]^{3/2} \overline{\kappa}\left(\overline{x}^i, z_1^i, z_3^i, z_4^i, z_6^i\right)\right\}; \qquad (\text{П1})\\
&z_5^{i+1} - z_5^i = \frac{\Delta\overline{x}}{2}\left\{\left[1+\left(\kappa^* L z_2^{i+1} z_4^{i+1}\right)^2\right]^{1/2} + \left[1+\left(\kappa^* L z_2^i z_4^i\right)^2\right]^{1/2}\right\};\\
&z_6^{i+1} - z_6^i = 0;\\
&z_1^{N+1} - z_3^{N+1} = 0;\\
&z_2^{N+1} - z_6^{N+1} = 0;\\
&z_4^{N+1} z_5^{N+1} - 1 = 0,
\end{aligned}
$$

где $i = 1, 2, \ldots, N$.

Запишем систему уравнения (П1) в векторном виде:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{L}(\mathbf{z}^1) = 0;\\
&\mathbf{z}^{i+1} - \mathbf{z}^i = \frac{\Delta\overline{x}}{2}\left[\mathbf{F}(\mathbf{z}^{i+1}) + \mathbf{F}(\mathbf{z}^i)\right],\ i = \overline{1, N}; \qquad (\text{П2})\\
&\mathbf{P}(\mathbf{z}^{N+1}) = 0,
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{L}(\mathbf{z}^1), \mathbf{F}(\mathbf{z}^i), \mathbf{P}(\mathbf{z}^{N+1})$ – вектор-функции соответствующей размерности от указанных аргументов;

$$\mathbf{z}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} z_1(\bar{x}) \\ z_2(\bar{x}) \\ z_3(\bar{x}) \\ z_4(\bar{x}) \\ z_5(\bar{x}) \\ z_6(\bar{x}) \end{pmatrix}; \ \mathbf{F}(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} z_2 \\ \left[1 + \left(\kappa^* L z_2 z_4\right)^2\right]^{3/2} \overline{\kappa}(\bar{x}, z_1, z_3, z_4, z_6) \\ 0 \\ 0 \\ \left[1 + \left(\kappa^* L z_2 z_4\right)^2\right]^{1/2} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{z}^1) = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_5(0) \end{pmatrix}; \ \mathbf{P}(\mathbf{z}^{N+1}) = \begin{pmatrix} z_1(1) - z_3(1) \\ z_2(1) - z_6(1) \\ z_4(1) z_5(1) - 1 \end{pmatrix}.$$

Итерационный процесс Ньютона наиболее часто употребляется для решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Его вычислительная схема основана на довольно простых соображениях. Однако важную роль играет выбор начального приближения, от которого зависит сходимость итерационного процесса. При выборе начального приближения пользуются соображениями, основанными на физическом смысле решаемой задачи, либо подбирают это значение путем нескольких опытных подсчетов. Для решения системы нелинейных уравнений (П2) применим метод Ньютона в модификации [74], которая обеспечивает заданную точность решения и быструю сходимость итерационного процесса при более грубых начальных приближениях. На каждой итерации решается система линейных матричных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}^1 \delta \mathbf{z}^1 = \mathbf{B}_0; \\ &\mathbf{C}^i \delta \mathbf{z}^i + \mathbf{D}^{i-1} \delta \mathbf{z}^{i-1} = \mathrm{B}_{i-1}, \ i = \overline{2, N+1}; \\ &\mathbf{D}^{N+1} \delta \mathbf{z}^{N+1} = \mathrm{B}_{N+1}, \end{aligned} \qquad \text{(П3)}$$

где $\mathbf{C}^1 = \dfrac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}^1)$; $\mathbf{D}^{N+1} = \dfrac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}^{N+1})$; $\mathbf{B}_0 = -\mathbf{L}(\mathbf{z}^1)$; $\mathbf{B}_{N+1} = -\mathbf{P}(\mathbf{z}^{N+1})$;

$\mathbf{C}^i = \mathbf{J} - \dfrac{\Delta \bar{x}}{2} \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}^i)$; $\mathbf{D}^{i-1} = -\mathbf{J} - \dfrac{\Delta \bar{x}}{2} \dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}^{i-1})$;

$\mathbf{B}_{i-1} = -(\mathbf{z}^i - \mathbf{z}^{i-1}) + \dfrac{\Delta \bar{x}}{2}\left[\mathbf{F}(\mathbf{z}^i) + \mathbf{F}(\mathbf{z}^{i-1})\right]$;

$\dfrac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}}(\mathbf{z}^i) = \left(\dfrac{\partial F_k(z^i)}{\partial z_j}\right)_{\substack{k=\overline{1,N} \\ j=\overline{1,N}}}$ – матрица, составленная из частных производных;

$\mathbf{J}$ – единичная матрица.

Частные производные от функций выражаются конечно-разностными соотношениями:

$$\frac{\partial F_k(z^i)}{\partial z_j} = \frac{F_k(z_1^i,\ldots,z_j^i + h_{z_j},\ldots,z_N^i) - F_k(z_1^i,\ldots,z_j^i - h_{z_j},\ldots,z_N^i)}{2h_{z_j}},$$

где h_{z_j} – шаг по координате z_j для вычисления частной производной. Частные производные от вектор-функций **P** и **L** вычисляются аналогично.

После вычисления приращений $\delta\mathbf{z}^i$ из системы (П3) задаемся величинами $\alpha = 1,\ 1/2,\ 1/4,\ldots$ до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$\mathrm{SEP}(\mathbf{z} + \alpha\delta\mathbf{z}) < \mathrm{SEP}(\mathbf{z}), \qquad (П4)$$

где $\mathrm{SEP}(\mathbf{z}) = \sqrt{\Phi(\mathbf{z})}$; $\Phi(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{3} L_i^2(\mathbf{z}^1) \big/ G_{1,i} + \sum_{i=1}^{3} P_i^2\left(\mathbf{z}^{N+1}\right) \big/ G_{N+1,i} +$

$$+ \sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{N}\left\{z_k^{i+1} - z_k^i - \frac{\Delta\bar{x}}{2}\left[F_k\left(\mathbf{z}^{i+1}\right) + F_k\left(\mathbf{z}^i\right)\right]\right\}^2 \Big/ G_{i,k};$$

$$G_{1,i} = \sqrt{\sum_{j=1}^{6}\left(C_{ij}^1\right)^2};$$

$$G_{N+1,i} = \sqrt{\sum_{j=1}^{6}\left(D_{ij}^{N+1}\right)^2}; \qquad .$$

$$G_{i,k} = \sqrt{\sum_{j=1}^{6}\left(C_{kj}^i\right)^2 + \sum_{j=1}^{6}\left(D_{kj}^{i-1}\right)^2}.$$

Здесь C_{kj}^i и D_{kj}^{i-1} – элемент с номерами k, j матриц $\mathbf{C}^i$ и $\mathbf{D}^{i-1}$ соответственно.

После выполнения неравенства (П4) вычисляется приращение

$$\mathbf{z}^i = \mathbf{z}^i + \alpha\delta\mathbf{z}^i,\ i = \overline{1, N+1}. \qquad (П5)$$

Вычисления заканчиваются после выполнения неравенства $\mathrm{SEP}(\mathbf{z}) < \Delta$, где Δ – задаваемая точность решения. Система линейных матричных уравнений (П3) решается методом матричной прогонки с ортогонализацией [70]. Отметим, что отличие описанной модификации метода Ньютона от классического варианта заключается в том, что в выражении (П5) параметр α может быть меньше единицы и выбирается он из условия (П4).

Рассмотренные в данной работе и разработанные на их основе алгоритмы и компьютерные программы позволяют решать многочисленные задачи пластического формообразования тонкостенных криволинейных деталей в геометрически и физически нелинейной постановке.

2. Реализация математических моделей на компьютерах

Решение современных задач технологической подготовки производства связано с привлечением знаний из различных областей. Такой методологией является системный подход. Важнейший инструмент системного подхода – математическое моделирование, позволяющее существенно повысить уровень решаемых задач технологической подготовки производства и использовать современные математические методы.

Технология моделирования – это совокупность приемов перехода от представлений исследователя об изучаемом процессе к математической модели. Технологическая схема имитационного моделирования достаточно проста и предусматривает последовательное решение задач математической модели, перевода ее в алгоритмическую и построение машинной модели (рис. П1, блоки 1− 3). Решение каждой из перечисленных задач является важным этапом моделирования и имеет свои особенности.

Рис. П1. Технологическая схема имитационного моделирования

Все математические модели, реализуемые с помощью средств вычислительной техники, приводятся к алгоритмическому виду, т.е. должны содержать в себе определенный вычислительный алгоритм. Вычислительный алгоритм – это точное предписание действий, которое приводит к решению поставленной задачи. Алгоритм является корректным, если выполнены следующие условия:

1) после конечного числа элементарных для компьютера операций любые допустимые входные данные преобразуются в конечный результат;

2) результат расчета устойчив по отношению к малым возмущениям входных данных;

3) алгоритм вычислительно устойчив.

Если хотя бы одно из перечисленных условий не выполнено, то вычислительный алгоритм будет некорректным. Помимо корректности к алгоритмам предъявляются и другие требования: экономичность, требуемая точность, экономия памяти, простота и др.

Создание моделей связано с реализацией вычислительного алгоритма в виде программы для компьютеров. К программам предъявляются требования, важнейшие из которых надежность, робасность (работоспособность), портабельность (переносимость), поддерживаемость, простота в использовании.

Решение практических задач с применением численных методов включает в себя три основных укрупненных этапа (рис. П2):

1) постановка исходной задачи;

2) дискретизация расчетной области;

3) численная реализация решения.

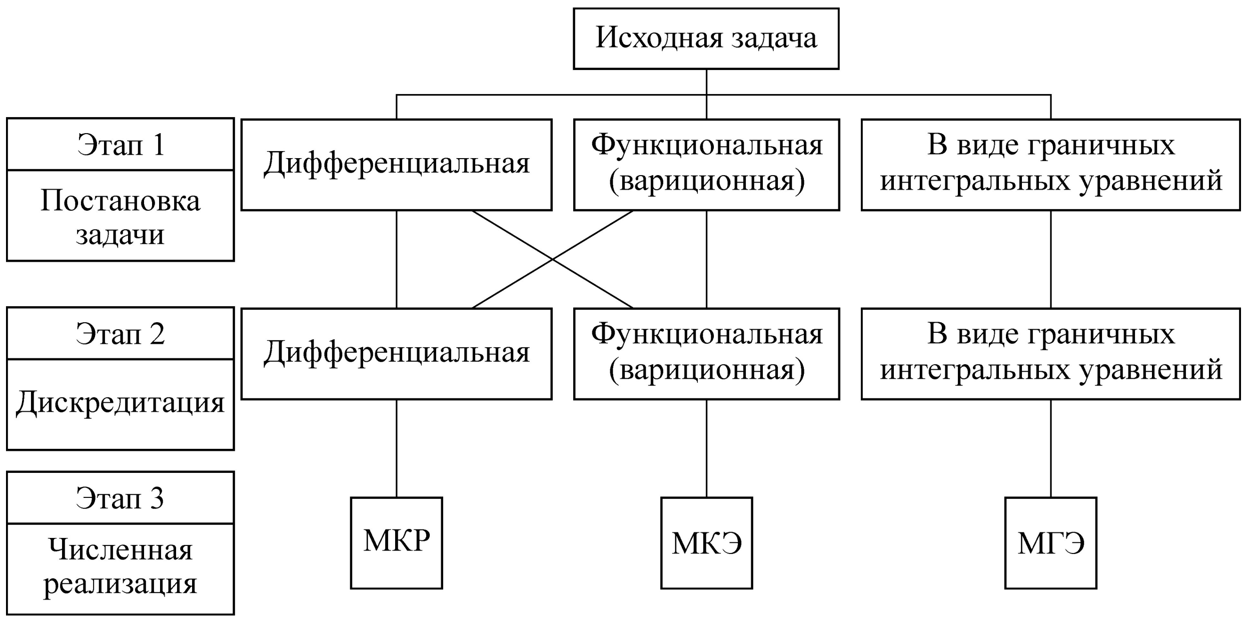
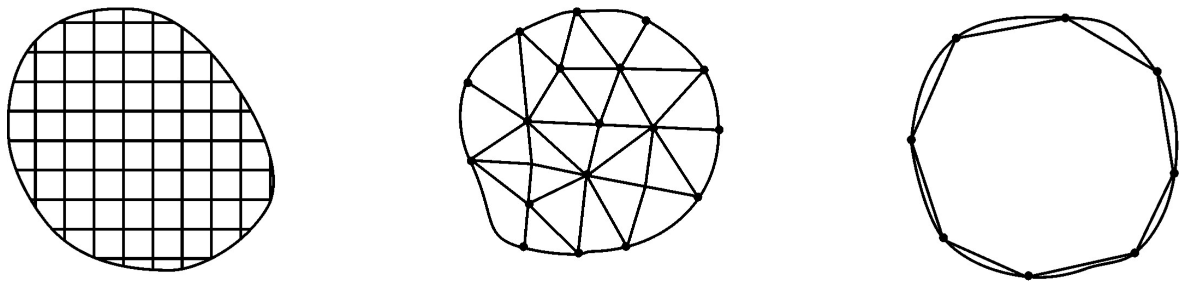


Рис. П2. Классификация численных методов

Этап 1 связан с формированием исходной системы уравнений и заданием соответствующих начальных и граничных условий.

Этап 2 численного решения связан с дискретизацией расчетной области, под которой следует понимать замену непрерывной расчетной области дискретным аналогом (рис. П3).

Различаются три вида дискретизации: сеточная, конечно-элементная и гранично-элементная. При сеточной дискретизации расчетная область заменяется сеткой, задаваемой множеством узлов (рис. П3, *а*). Достоинством сеточной дискретизации является простота ее задания, а недостатком− сложность точного описания областей со сложной криволинейной границей. При конечно-элементной дискретизации расчетная область заменяется множеством непересекающихся подобластей относительно простой формы, называемых конечными элементами (рис. П3, *б*). Эта дискретизация позволяет достаточно точно описывать расчетные области сложной формы. Объем информации, требуемой для задания конечно-элементной модели, больше, чем для сеточной модели. Гранично-элементная дискретизация имеет некоторую аналогию с конечно-элементной, но все преобразования в этом случае производятся только с границей расчетной области. Размерность граничных элементов всегда на единицу меньше размерности расчетной области (например, для дискретизации границы трехмерной расчетной области используются двумерные элементы, а двумерной области – одномерные).



а *б* *в*

Рис. П.3. Схема дискретизации расчетной области:
а – сеточная; *б* – конечно-элементная; *в* – гранично-элементная

Вид дискретизации расчетной области определяет метод реализации численного решения (см. рис. П2). Различают три основных метода решения задач: МКР, МКЭ и МГЭ (метод граничных элементов), соответствующих сеточной, конечно-элементной и гранично-элементной дискретизации.

Этап 3 связан с выбором соответствующего программного комплекса. Программные комплексы на основе МКР по назначению делятся на две группы. К первой группе относятся программы, направленные на решение уравнений определенного класса, например дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, безотносительно к конкретной области их использования. Вторая группа программных комплексов ориентирована на решение задач с конкретным физическим смыслом, например задач теплопроводности, упругости, пластичности и др. Эти программные комплексы широко используются при проведении имитационных экспериментов. Несмотря на разнообразие применяемых для реализации МКР программных продуктов, имеются ряд общих принципов построения их структуры (рис. П4).

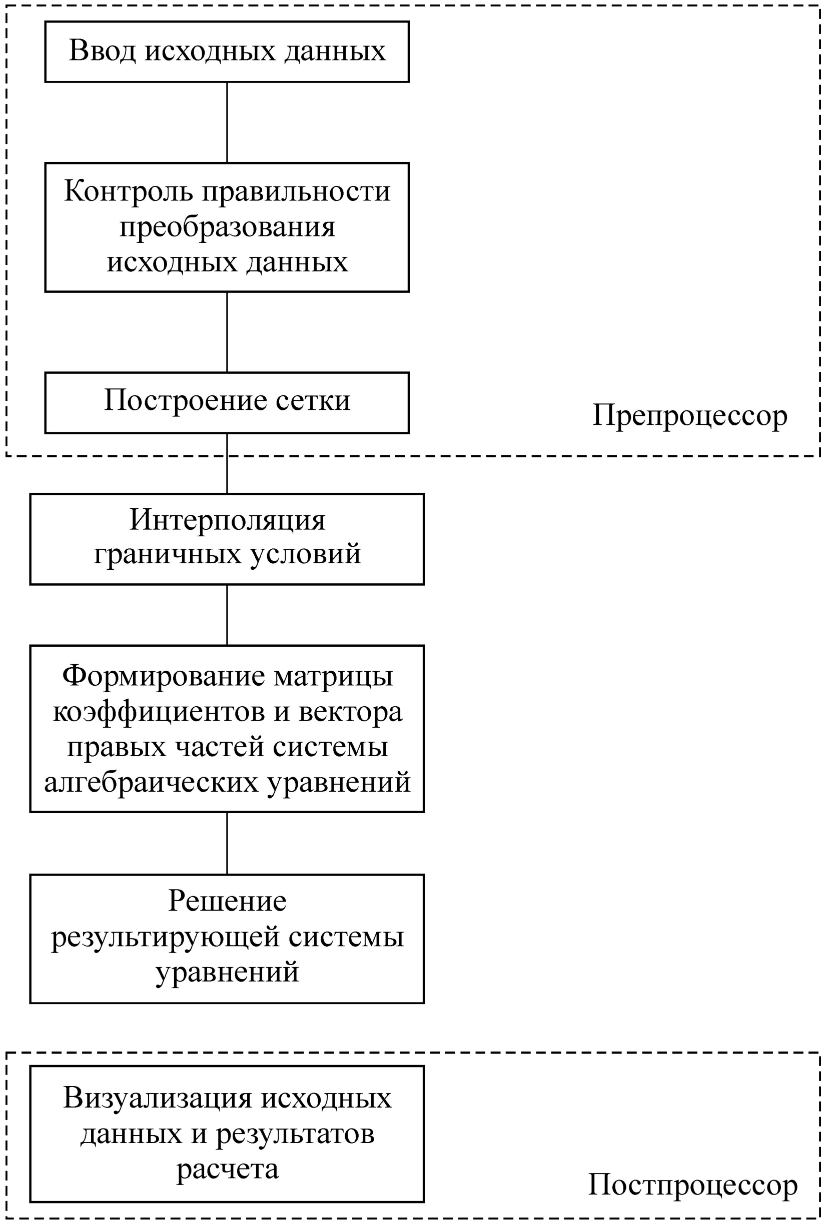


Рис. П4. Принципиальная блок-схема программного обеспечения для реализации МКР

Метод конечных элементов имеет в настоящее время обширное программное обеспечение. Многочисленные программные комплексы на основе МКЭ можно разделить на специализированные и универсальные. Специализированные программные комплексы предназначены для решения конкретных задач и для них характерны: относительно низкие трудоемкость и стоимость, простая логическая структура, высокая эффективность решения задач определенного класса. Универсальные программные комплексы общего назначения позволяют решать широкий круг задач. Их отличает: высокие трудоемкость и стоимость, сложная логическая структура, наличие базы данных и системы ее управления, обширная библиотека конечных элементов, ориентация на определенный класс вычислительной техники. Принципиальная блок-схема программного комплекса, реализующего МКЭ, приведена на рис. П5.

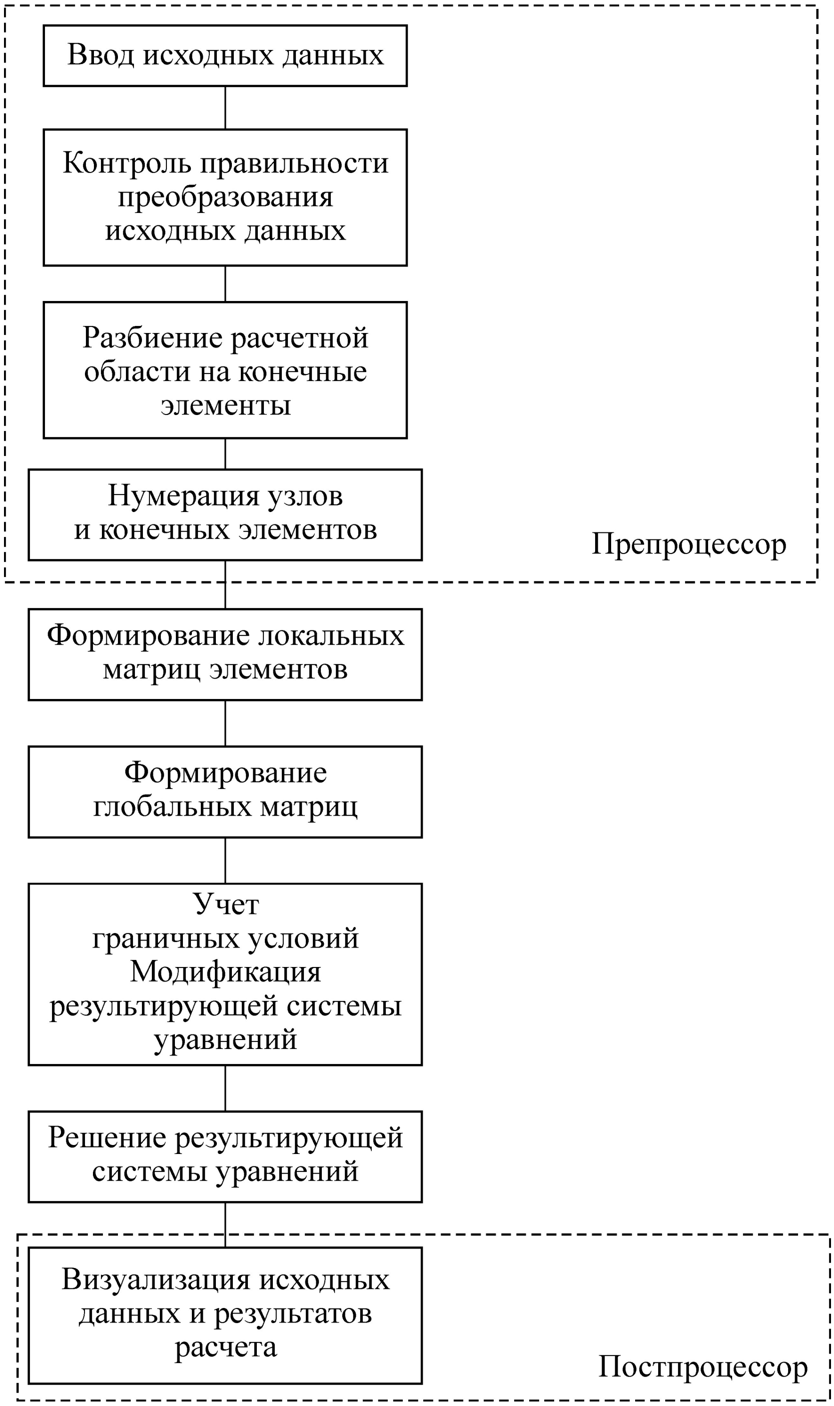


Рис. П5. Принципиальная блок-схема программного обеспечения для реализации МКЭ

Важной проблемой для решения практических задач на компьютере с использованием МКЭ является большой объем вычислительных операций, требующих немало времени даже при нынешнем высоком уровне развития вычислительной техники.

Программное обеспечение метода граничных элементов (МГЭ) носит, как правило, специализированный характер, т.е. предназначено для решения конкретных задач. Объем исходной информации для МГЭ существенно меньше по сравнению с МКР и МКЭ. Это определяет относительную простоту программ подготовки исходных данных (препроцессора). Особенностью программной реализации МГЭ по сравнению с МКР и МКЭ является плотность (отсутствие нулевых элементов) матрицы коэффициентов системы алгебраических уравнений. Это снижает эффективность МГЭ при программной реализации. Принципиальная блок схема программного комплекса, реализующего МГЭ, приведена на рис. П6.

Рис. П6. Принципиальная блок-схема программного обеспечения для реализации МГЭ

3. Алгоритм расчета параметров процесса гибки-намотки с учетом геометрической нелинейности неотформованного участка профильной заготовки

Постановка задачи приведена в § 4.3. Воспользуемся решением (4.60). В безразмерном виде решение краевой задачи имеет следующий вид:

$$\bar{y}=\sqrt{\frac{2\tilde{C}_1}{\tilde{b}_1}}\operatorname{tg}\left(\bar{x}\sqrt{\frac{\tilde{b}_1}{2}}\right);\;\; \bar{y}'=\sqrt{\tilde{C}_1}\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\bar{x}\sqrt{\frac{\tilde{b}_1}{2}}\right)\right];$$

$$\bar{y}''=\sqrt{\tilde{C}_1\tilde{b}_1}\operatorname{tg}\left(\bar{x}\sqrt{\frac{\tilde{b}_1}{2}}\right)\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\bar{x}\sqrt{\frac{\tilde{b}_1}{2}}\right)\right], \qquad (\text{П6})$$

где $0 \le \bar{x}\sqrt{\frac{\tilde{b}_1}{2}} \le \frac{\pi}{2}$, откуда параметр $\tilde{b}_1$ выбирается из условия $\tilde{b}_1 < \frac{\pi^2}{2}$; $\tilde{b}_1 = b_1 l^2$; $\tilde{C}_1 = C_1/(l\kappa_к)^2$. Для определения $\tilde{C}_1$ имеем следующее уравнение:

$$\tilde{C}_1 = \frac{1}{2\tilde{b}_1\operatorname{tg}^2\sqrt{\frac{\tilde{b}_1}{2}}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{\frac{\tilde{b}_1}{2}}\right)^2}. \qquad (\text{П7})$$

Параметр $\tilde{b}_1$ определим таким образом, чтобы аппроксимирующая кривая (1.18) проходила через начальную и конечную точки заданной функции кривизны от изгибающего момента. В результате получим выражение

$$\bar{\kappa} = \frac{\tilde{b}_1^3 M_к^3 \operatorname{tg}^2\sqrt{\frac{\tilde{b}_1}{2}}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{\frac{\tilde{b}_1}{2}}\right)^2 \bar{M}^3}{\left(P_к\kappa_к l^2\right)^3 \bar{P}_0^3} + \frac{\tilde{b}_1 M_к \bar{M}}{P_к\kappa_к l^2 \bar{P}_0}, \qquad (\text{П8})$$

где надо положить $\bar{\kappa} = \bar{M} = 1$. Обозначив $A = (M_к\rho_к)/(P_к l^2)$, получим трансцендентное уравнение $f(\tilde{b}_1) = 0$ относительно неизвестного параметра $\tilde{b}_1$:

$$\left(\frac{A\tilde{b}_1}{\bar{P}_0}\right)\left[\left(\frac{A\tilde{b}_1}{\bar{P}_0}\right)^2\left(\operatorname{tg}^2\sqrt{\frac{\tilde{b}_1}{2}}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{\frac{\tilde{b}_1}{2}}\right)^2+1\right]-1=0. \qquad (\text{П9})$$

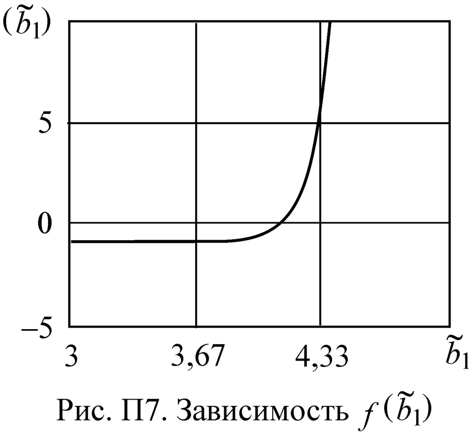


Рис. П7. Зависимость $f(\tilde{b}_1)$

Здесь $\bar{x}=\frac{x}{l}$; $\bar{y}=\frac{y}{l^2\kappa_к}$; $\bar{\kappa}=\frac{\kappa}{\kappa_к}$; $\bar{M}=\frac{M}{M_к}$; $\bar{P}_0=\frac{P_0}{P_к}$; $\bar{Q}_t=\frac{Q_t}{P_к}$; $\bar{B}=\frac{B}{(\kappa_к/M_к^3)}$; $\bar{C}=\frac{C}{(\kappa_к/M)}$.

Уравнение (П.9) решается любым итерационным методом, например методом половинного деления [24]. Типовой график функции $f(\tilde{b}_1)$ представлен на рис. П7.

В уравнение (П9) входит пока неизвестное усилие P_0, для определения которого из уравнений равновесия системы (4.49) найдем

$$\begin{aligned} \overline{Q}_t &= \mathrm{tg}\gamma; \\ \overline{P}_0 &= 1/\cos\gamma. \end{aligned} \qquad \text{(П10)}$$

Прогиб $y(l)$ и угол технологической недоформовки γ найдем из выражений

$$y(l) = \kappa_t l^2 \sqrt{\frac{2\widetilde{C}_1}{\widetilde{b}_1}} \mathrm{tg}\left(\sqrt{\frac{\widetilde{b}_1}{2}}\right); \qquad \text{(П1)}$$

$$\gamma = \mathrm{arctg}\left[\kappa_t l \sqrt{\widetilde{C}_1}\left(1 + \mathrm{tg}^2 \sqrt{\frac{\widetilde{b}_1}{2}}\right)\right]. \qquad \text{(П12)}$$

Для нахождения искомых параметров необходимо руководствоваться следующим алгоритмом:

1. Задаемся $\overline{P}_0^{(1)}$, например $\overline{P}_0^{(1)} = 1$.

2. Из уравнения (П9) определяем $\widetilde{b}_1$, далее из выражений (П.7) и (П.12) соответственно вычисляем $\widetilde{C}_1$ и γ.

3. Из уравнений равновесия (П.10) определяем $\overline{P}_0^{(i+1)}$.

4. Если условие $\left|\overline{P}_0^{i+1} - \overline{P}_0^{i}\right| \le \Delta$ (Δ – заданная точность итераций, например Δ = 0,001) не удовлетворяется, принимаем $\overline{P}_0^{i} = \overline{P}_0^{i+1}$ и переходим к шагу 2. Если же условие выполняется, то переходим к п. 5.

5. Находим $P_0 = \overline{P}_0 P_t$, $Q_t = \overline{Q}_t P_t$ и по формулам (П11) и (П12) соответственно прогиб $y(l)$ и угол γ.

На практике установлено, что обычно итерационный процесс сходится за 2 – 3 приближения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие современных САПР идет по пути создания многоуровневых, интегрированных САПР, охватывающих в едином цикле все этапы внешнего и внутреннего проектирования. Несмотря на возрастающую сложность САПР, они базируются на типичной схеме проектирования. Постановка математических задач, возникающих при реализации проектных процедур, так или иначе связана с оптимизацией. Типичной схеме процесса проектирования соответствуют три уровня оптимизации: первый – наилучшая техническая идея или принцип действия объекта проектирования; второй – поиск оптимальной структуры или схемы с учетом выбранного принципа действия; третий – определение наилучших значений параметров объекта проектирования для выбранной структуры. Оптимальное математическое обеспечение решения задач анализа и оптимизации объекта проектирования – автоматизированные на базе компьютеров системы и ориентированные на работу с ними инженеры-технологи. В таких системах обязательны блоки как типовых инженерных решений технических задач, так и синтеза оптимальных решений.

Повышение требований к качеству изготавливаемых деталей в авиастроении обусловливает потребность в точных расчетных методах определения технологических параметров процессов пластического формообразования. Современные САПР ЗШП базируются на алгоритмизированных решениях задач об упругопластическом деформировании заготовки до требуемой формы. Изготовление деталей с заданной точностью геометрических параметров их формы обеспечивается соответствующей оснасткой технологического процесса и кинематической настройкой оборудования. При этом должны быть учтены все сопровождающие процесс явления, прямо или косвенно влияющие на его точность. Численный метод, изложенный в гл. 4, позволяет единообразно решать на компьютере любые задачи по расчету параметров процессов гибки тонкостенных деталей с учетом геометрической нелинейности.

Результаты, представленные в учебном пособии, направлены на разработку научных основ САПР ТП в части их имитационного моделирования на персональных компьютерах с определением технологических параметров исследуемых процессов и параметров настройки технологического оборудования. Разработанный математический аппарат позволяет на базе теоретических исследований создавать точные математические модели процессов пластического формообразования тонкостенных деталей из листового и профильного материала с учетом всех факторов, влияющих на точность изготовления деталей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авиационные материалы. Избранные труды «ВИАМ» / Юбилейный науч.-техн. сборник под ред. Е.Н. Каблова. М.: Изд-во «ВИАМ». – 2007. – 438 с.

2. *Меркулов, В.И.* Автоматизация технологической подготовки заготовительно-штамповочного производства авиационной промышленности / В.И. Меркулов, В.П. Соколов, С.И. Феоктистов и др.– М.: Изд-во ЭКОМ, 2001. – 320 с.

3. *Алфутов, Н.А.* Основы расчета на устойчивость упругих систем/ Н.А. Алфутов.– М.: Машиностроение, 1991. – 334 с.

4. *Алямовский, А.А.* SolidWorks/CosmosWorks 2006–2007. Инженерный анализ методом конечных элементов/А.А. Алямовский. – М.: ДМК, 2007. – 784 с.

5. *Астапов, И.С.*, Квадратичная аппроксимация больших перемещений гибкого сжатого стержня/И.С. Астапов, Н.С. Астапов, Е.Л. Васильева // Механика твердого тела. – 2003. – №1. – С.164–171.

6. *Бодунов, Н.М.* Расчет настроечных параметров процесса гибки-прокатки тонкостенных деталей авиационной техники с помощью конечно-разностного метода/Н.М. Бодунов // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2011. – № 1. – С. 64–67.

7. *Бодунов, Н.М.* Статическая устойчивость тонкостенных стержней из полимерных материалов/Н.М. Бодунов // Сб. материалов 18-й всерос. межвуз. науч.-техн. конф. «Электромеханические и внутрикамерные процессы в энергетических установках, струйная акустика и диагностика, приборы и методы контроля природной среды, веществ, материалов и изделий». – Казань: Изд-во «Отечество», 2006. – Ч.2. – С.155–157.

8. *Бодунов, Н.М.* Исследование механики контактного взаимодействия упругопластических тел в процессах формообразования и упрочнения тонкостенных деталей авиатехники/Н.М. Бодунов // Сб. материалов 13-й российской науч.-техн. конф. с междунар. участием «Материалы и упрочняющие технологии–2006». – Курск: Изд-во Курск. гос. техн. ун-та, 2006. – Ч.2. – С.81–85.

9. *Бодунов, Н.М.* Компьютерные расчеты в технологических задачах/ Н.М. Бодунов // Материалы всерос. науч.-практ. конф. «Наука и профессиональная деятельность». – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2008. – С.37–41.

10. *Бодунов, Н.М.* Проектирование процессов гибки-прокатки тонкостенных деталей на ротационных машинах с ЧПУ/Н.М. Бодунов, П.В. Бреховских //

Материалы междунар. науч.-практ. конф. «Образование, наука и производство. Новые технологии как инструмент реализации стратегии развития и модернизации – 2020». –Казань: Изд-во ООО «МБГПРЕСС», 2012. – С.128–132.

11. *Бодунов, Н.М.* О контактном взаимодействии пластических тел в процессах гибки тонкостенных деталей / Н.М. Бодунов, Г.В. Дружинин // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – 2006. – Вып. 1 (25). – Т.12. – С. 100–108.

12. *Бодунов, Н.М.* Повышение точности изготовления деталей из профилей на станках ПГР с программным управлением/Н.М. Бодунов, И.М. Закиров // Кузнечно-штамповочное производство. – 1992. – № 9-10. – С. 17–20.

13. *Бодунов, Н.М.* Математическая модель пластического изгиба тонких заготовок с учетом геометрической нелинейности/Н.М. Бодунов, И.М. Закиров // Тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. «Актуальные проблемы математического моделирования и автоматизированного проектирования в машиностроении». – Казань: КГТУ. – 1995. – Секция 2. – С. 66–68.

14. *Бодунов, Н.М.* Расчет технологических параметров процесса свободной гибки с учетом геометрической нелинейности/Н.М. Бодунов, И.М. Закиров // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2001. – № 1. – С. 16–19.

15. *Бодунов, Н.М.* Компьютерное моделирование процессов гибки тонкостенных деталей авиатехники/Н.М. Бодунов // Сб. докладов междунар. науч.-практ. конф. «Поиск эффективных решений в процессе создания и реализации научных разработок в российской авиационной и ракетно-космической промышленности». – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2014. – Т.1. – С. 17–20.

16. *Бодунов, Н.М.* Формообразование профильных деталей на оборудовании с ЧПУ: учебное пособие/Н.М. Бодунов, Г.В. Дружинин, А.А. Раздайбедин. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2008. – 92 с.

17. *Бодунов, Н.М.* Задачи автоматизированного проектирования процессов гибки-прокатки деталей на роликовых профилегибочных машинах с ЧПУ/ Н.М. Бодунов, И.М. Закиров, К. Ружичка // Материалы междунар. научно-практ. конф. «Инновационные технологии в проектировании, производстве и испытаниях изделий машиностроения» – Казань: Изд-во КГУ, 2004. – С. 57–63.

18. *Бодунов, Н.М.* Методика расчета параметров гибки тонкостенных деталей с учетом геометрической нелинейности/Н.М. Бодунов, Г.А. Зарипова, А.Р. Сунгатуллина // Сб. статей 8-й всерос. науч.-практич. конф. «Современные технологии в машиностроении». Пенза: Изд-во ПДЗ, 2004. – С. 74-77.

19. *Бодунов, Н.М.* Автоматизированное проектирование процессов гибки деталей из профилей на станках ПГР и СПО с ЧПУ/Н.М. Бодунов, Л.Р. Каримова, Н.Н. Пустынникова // Сб. статей 2-ой междунар. науч.-техн. конф. «Про-

блемы исследования и проектирования машин». – Пенза: Изд-во ПДЗ, 2006. – С. 202–205.

20. *Бодунов. Н.М.* Методика проектирования процессов гибки профилей на оборудовании с ЧПУ: учебное пособие/Н.М. Бодунов, Г.В. Дружинин, И.М. Закиров, А.А. Раздайбедин. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2001. – 92 с.

21. *Борисов, В.Г.* Процессы изготовления тонкостенных деталей самолетов методами пластического формообразования: учебное пособие/В.Г. Борисов. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2004. – 236 с.

22. *Братухин, А.Г.* Современные технологии авиастроения/А.Г. Братухин, Ю.Л. Иванов, Б.Н. Марьин и др. – М.: Машиностроение, 1999. – 832 с.

23. *Вдовин, С.И.* Методы расчета и проектирования на ЭВМ процессов штамповки листовых и профильных заготовок/С.И. Вдовин. – М.: Машиностроение, 1988. –160 с.

24. *Вержбицкий, В.М.* Основы численных методов/В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2005. – 840 с.

25. *Вольмир, А.С.* Статика и динамика сложных структур/А.С. Вольмир, Б.А. Куранов, А.Т. Турбаивский. – М.: Машиностроение, 1989. – 248 с.

26. *Геккелер, И.В.* Статика упругого тела/И.В. Геккелер. – М.: Изд-во «КомКнига», 2005. – 288 с.

27. *Горбунов, М.Н.* Технология заготовительно-штамповочных работ в производстве самолетов/М.Н. Горбунов. – М.: Машиностроение, 1981. – 224 с.

28. *Горбунов, В.А.* Определение силовых параметров процесса гибки с растяжением с учетом геометрической нелинейности /В.А. Горбунов, Н.М. Бодунов // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1986. – № 1. – С. 90–93.

29. *Горбунов, В.А.* Аналитическое решение задачи упруго-пластического изгиба бруса в нелинейной постановке /В.А. Горбунов, Н.М. Бодунов, Г.В. Дружинин. – Казань: Казан. авиац. институт, 1987. 8 с. Деп. в ВИНИТИ 31.03.87. № 2333-В87.

30. Горбунов, В.А. Использование эллиптического интеграла 1-го рода в форме Лежандра при определении параметров гибки с растяжением/ В.А. Горбунов, Н.М. Бодунов, Г.В. Дружинин, В.А. Овчинников. – Казань: Казан. авиац. институт, 1987. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 31.03.87. № 2332-В87.

31. *Горбунов, В.А.* Решение задачи упругопластического изгиба с растяжением профильных деталей в геометрически нелинейной постановке/В. А. Горбунов, Н.М. Бодунов, Г.В. Дружинин, В.Д. Осоргин // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1988. – № 3. –С. 47–51.

32. *Демин, В.А.* Проектирование процессов толстолистовой штамповки на основе прогнозирования технологических отказов/ В.А. Демин. – М.: МГИУ, 2006. – 186с.

33. *Дружинин, Г.В.* Базисные функции в приближенных решениях краевых задач/Г.В. Дружинин, И.М. Закиров, Н.М. Бодунов. – Казань: ФЭН, 2000. – 376 с.

34. *Ершов, В.И.* Совершенствование формоизменяющих операций листовой штамповки/В.И. Ершов, В.И. Глазков, М.Ф. Каширин. – М.: Машиностроение, 1990. –312 с.

35. Закиров И.М., Бодунов Н.М. Имитационное моделирование процессов гибки тонкостенных деталей из анизотропных материалов / И.М. Закиров, Н.М. Бодунов // Сб. материалов 16-й всерос. межвуз. науч.-техн. конф. «Электромеханические и внутрикамерные процессы в энергетических установках, струйная акустика, диагностика технических систем, приборы и методы контроля природной среды, веществ, материалов и изделий». – Казань: Изд-во «Отечество», 2004. – Ч.2. – С. 52-53.

36. *Закиров, И.М.* Гибка на валках с эластичным покрытием/И.М. Закиров, М.И. Лысов. – М.: Машиностроение, 1985. – 144 с.

37. *Закиров, И.М.* Формообразование тонкостенных деталей эластичной средой на ротационных машинах/И.М. Закиров, А.Г. Мартьянов. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 1996. –123 с.

38. *Закиров, И.М.* Применение численного метода к решению задачи о плоском упругопластическом изгибе тонких заготовок с учетом геометрической нелинейности/И.М. Закиров, М.И. Лысов, Н.М. Бодунов// Изв. вузов. Авиационная техника. – 1991.– № 4. – С. 56–61.

39. *Закиров, И.М.* Технология моделирования процессов ротационной гибки эластичной средой листовых композитов типа ВКА и АЛОР/Н.М. Закиров, А.Г. Мартьянов, Н.М. Бодунов// Статьи и тез. докл. Всерос. науч.-техн. конф. «Композиционные материалы в авиастроении и народном хозяйстве». – Казань: Изд-во «Экоцентр», 1999. – Ч.2. –С. 34.

40. *Закиров, И.М.* О применении численного метода к расчету параметров гибки тонкостенных деталей эластичной средой/ И.М. Закиров, Н.М. Бодунов, Г.В. Дружинин, К. Ружичка // Изв. вузов. Авиационная техника. –2001. – № 2. – С. 58–61.

41. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней/А.А. Илюхин. –Киев: Наукова думка, 1979. – 216 с.

42. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ/Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 741 с.

43. *Каплун, А.Б.* ANSYS в руках инженера: Практическое руководство./А.Б. Каплун, Е.М. Морозов, М.А. Олферьева. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.

44. *Карчан, В.Г.* Моделирование гибки стержней произвольного сечения методом конечных элементов / В.Г. Карчан, А.С. Федоров // Изв. вузов. Машиностроение. – 1987. – № 12. – С.7–11.

45. *Киквидзе, О.Г.* Большие перемещения термоупругих стержней при изгибе/О.Г. Киквидзе // Проблемы машиностроения и надежности. – 2003. – №1. –С. 49–53.

46. *Кузьмин, В.Ф.* Обеспечение требований к аэродинамическим обводам самолета в авиационном производстве/В.Ф. Кузьмин. – М.: Машиностроение, 2002. – 272 с.

47. *Лампер, Р.Е.* Применение различных аппроксимаций в методах конечных и граничных элементов для решения прикладных задач статики и динамики упругих тел/Р.Е. Лампер, В.Е. Левин // Научный вестник НГТУ. – 2000. – № 2 (9). – С. 76–90.

48. *Левин, В.Е.* Конечный элемент пространственного криволинейного стержня/В.Е. Левин // Математические проблемы механики сплошных сред: Сб. науч. трудов / Новосибирск: Изд-во института гидродинамики СО РАН. – 2001. – Вып. 118. – С.173–177.

49. *Ершов, В.И.* Листовая штамповка: Расчет технологических параметров: Справочник / В.И.Ершов, О.В.Попов и др. – М.: Изд-во МАИ, 1999. – 516 с.

50. *Лысов, М.И.* Теория и расчет процессов изготовления деталей методами гибки/М.И. Лысов. – М.: Машиностроение, 1966. – 236 с.

51. *Лысов, М.И.* Прикладная теория пластического растяжения с изгибом при сложном нагружении с учетом геометрической нелинейности / М.И. Лысов. – Казань: Казан. авиац. институт, 1991. 79 с. Деп. в ВНИИТЭМР 17.01.92. № 1 – мш 92.

52. *Лысов, М.И.* Расчет параметров процесса формообразования тонкостенных деталей пластическим растяжением и изгибом заготовки с учетом геометрической нелинейности/М.И. Лысов // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1992. – № 1. – С. 71–77.

53. *Лысов, М.И.* Пластическое формообразование тонкостенных деталей авиатехники/М.И. Лысов, И.М. Закиров. – М.: Машиностроение, 1983. – 176 с.

54. *Лысов, М.И.* Формообразование деталей гибкой/М.И. Лысов, Н.В. Сосов. – М.: Машиностроение, 2001.– 388 с.

55. *Лысов, М.И.* Уточненный расчет технологических параметров свободной гибки с учетом геометрической нелинейности/М.И. Лысов, Н.В. Сосов // Изв. вузов. Авиационная техника. –1980. – № 2. – С. 72–76.

56. *Лысов, М.И.* К вопросу определения силовых параметров формообразования при гибке профилей методом намотки с растяжением/М.И. Лысов, В.А. Горбунов, Н.М. Бодунов // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1985. – № 4. – С. 87–89.

57. *Лысов, М.И.* Изготовление тонкостенных деталей летательных аппаратов: учебное пособие/М.И. Лысов, И.М. Закиров, С.Г. Гумиров. – Казань: КАИ, 1992. – 84 с.

58. *Лысов, М.И.* Расчет параметров свободной гибки с учетом геометрической нелинейности и трения/М.И. Лысов, Н.М. Бодунов, В.А. Горбунов, Г.В. Дружинин // Прогрессивные процессы пластического формообразования деталей авиационной техники: Межвуз. сб./Казан. авиац. ин-т. Казань. – 1989. – С. 4–8.

59. *Лысов, М.И.* Аналитический метод расчета параметров формообразования при упруго-пластическом изгибе с растяжением деталей из профилей/М.И. Лысов, В.А. Горбунов, Н.М. Бодунов, Г.В. Дружинин // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1987. – № 3. – С. 42–47.

60. *Макаров, В.Л.* Сплайн–аппроксимация функций/В.Л. Макаров, В.В. Хлобыстов. – М.: Высшая школа, 1983. – 80 с.

61. *Мартьянов, А.Г.* Системное моделирование технологических процессов РФЭС/А.Г. Мартьянов, Н.М. Бодунов // Тез. докл. российской науч.-техн. конф. «Технологические проблемы производства элементов и узлов изделий авиакосмической техники». – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та. – 1998. – С. 45.

62. *Мартынов, В.К.* Задачи эластики в инженерных расчетах/В.К. Мартынов // Изв. вузов. Машиностроение. – 1986. – №8. – С. 13–18.

63. *Одинг, С.С.* Компьютерное моделирование технологии обтяжки листовых материалов/С.С. Одинг, И.И. Тищенко // Вестник машиностроения. – 2007. – № 6. – С. 65–69.

64. *Покровский, А.А.* Геометрические соотношения конечного элемента и их применение к расчету гибких стержней и стержневых систем/А.А. Покровский // Прикладная механика. – 1978. – Т. 14. – Вып. 7. – С.104–107.

65. *Попов, Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней/Е.П. Попов. – М.: Наука, 1986. – 296 с.

66. *Попов, Е.А.* Основы теории листовой штамповки / Е.А. Попов – М.: Машиностроение, 1977. – 278 с.

67. *Попов, Е.А.* Технология и автоматизация листовой штамповки/ Е.А. Попов, В.Г. Ковалев, И.Н. Шубин. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003. – 480 с.

68. Приоритеты авиационных технологий: В 2 кн. / Коллектив авторов. научн. ред. А.Г.Братухин. Кн.1. М.: Изд-во МАИ, 2004. – 696 с.

69. *Ращиков, В.И.* Численные методы решения физических задач: учебное пособие/В.И. Ращиков, А.С. Рошаль. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005. – 208 с.

70. *Самарский, А.А.* Теория разностных схем/А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

71. *Самарский, А.А.* Методы решения сеточных уравнений/А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978. – 592 с.

72. *Субич, В.Н.* Расчет и проектирование процессов объемной и листовой штамповки/В.Н. Субич, Н.А. Шестаков, В.А Демин, А.В. Власова. – М.: МГИУ, 2004. – 400 с.

73. *Улитин, В.В.* Итерационные алгоритмы решения краевых задач механики на ЭВМ: учебное пособие/В.В. Улитин. –СПб.: Изд-во Санкт–Петербургского университета, 1991. – 232 с.

74. *Федоренко, Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления/Р.П. Федоренко. – М.: Наука, 1978. – 488 с.

75. *Шварцман, Б.С.* Численный метод решения гибкого стержня/Б.С. Шварцман // Исследования по строительной механике и строительным конструкциям: межвуз. сб. – Томск: Том. гос. ун-т.. – 1984. – С. 102–105.

76. *Чумадин, А.С.* Основы технологии производства летательных аппаратов: учебное пособие/А.С. Чумадин, В.И. Ершов, В.А. Барвинок и др. – М.: Наука и технологии, 2005. – 912 с.

77. *Bodunov, N.M.* Calculation of free bending technological parameters with account for geometrical nonlinearity/N.M. Bodunov, I.M. Zakirov // Proc. 9-th Intern. conf. on Technologia’2005. – Vol.1. – Bratislava: Slovak University of Technology, 2005. – Pp. 570–573.

78. *Bodunov, N.M.* Increasing the accuracy for parts of profiles production on PGR machines with program control and LGME machines/N.M. Bodunov, I.M. Zakirov, K. Ruzicka. // Proc. 7-th Intern. conf. on Technologia’2001. – Vol.1. – Bratislava: Slovak University of Technology, 2001. – Pp. 248–252.

79. *Fried, I.* Stability and equilibrium of the straight and curved elastica-finite element computation /I. Fried // Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng. – 1981. – Vol.28. – № 1. – Pp. 9–61.

80. *Venkateswara, G.R.* Veriational formulation for the finite deflection analysis of slender cantilever beam and columns/G.R. Venkateswara, B.R. Nageswara // J. aeronautics soc. of India. – 1977. – Vol. 29. – Pp. 133-135.

81. *Nageswara, B.R.* Large deflections of a cantilever beam subjected to a rotational distributed loading/B.R. Nageswara, G.R. Venkateswara // Forschung im ingenieurwesem. – 1979. – Vol.55. – № 4. – Pp. 116-120.

82. *Oden, J.T.* Finite deflection of nonlinearly elastic bar/J.T. Oden, S.B. Childs // Trans. ASME. Applied Mechanics. – 1970. – Vol. 37. – № 1. – Pp. 48-52.

83. *Bodunov, N.M.* Refined calculations of technological parameters of bending-rolling process of thin-walled parts with account for geometrical nonlinearity/N.M. Bodunov // Proc. 12-th Intern. conf. on Technologia, 2011. – Vol.1. – Bratislava: Slovak University of Technology, 2011. – Pp. 443–447.

84. *Zakirov, I.M.* Rotary shaping with the use of elastic mtdiums/I.M. Zakirov, A.G. Mart'yanov, K. Ruzicka. –Publisher STU v Bratislava, Vydavatel'stvo. – 1997. – 184 p.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
Глава 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ГИБКИ ТОНКОСТЕННЫХ ДЕТАЛЕЙ 6
§ 1.1. Анализ номенклатуры тонкостенных деталей авиатехники 6
§ 1.2. Основные способы и специальные средства формообразования криволинейных тонкостенных деталей 7
§ 1.3. Напряженно-деформированное состояние при упруго-пластическом изгибе тонкостенных заготовок 12
§ 1.4. Расчет технологических параметров процесса гибки деталей из листового и профильного материала 14
§ 1.5. Компьютерное проектирование технологии пластического формообразования криволинейных тонкостенных деталей 18
§ 1.6. Геометрическая нелинейность при поперечном пластическом изгибе 20
§ 1.7. Аппроксимация зависимости между кривизной и изгибающим моментом при пластическом изгибе 22
Глава 2. МЕТОДИКА РАСЧЕТА БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ 25
§ 2.1. Особенности действия сил при сильном изгибе тонких стержней 25
§ 2.2. Уравнение упругой линии 27
§ 2.3. Решение уравнения упругой линии с помощью метода эллиптических параметров 33
§ 2.4. Метод эллиптических параметров в задачах, сводящихся к основному классу 45
§ 2.5. Численный метод расчета перемещений при изгибе стержней 48
Глава 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ ТОНКИХ ЗАГОТОВОК С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ 67
§ 3.1. Уравнение изогнутой оси 67
§ 3.2. Определение эллиптических параметров уравнения изогнутой оси для поступательного и следящего перемещения силы 71

§ 3.3. Определение перемещений точек изогнутой оси 73
§ 3.4. Определение геометрических параметров изогнутой оси для случая, когда деформирующая сила нормальна к последней в процессе изгиба 74
§ 3.5. Учет геометрической нелинейности при произвольной связи изгибающего момента и кривизны 77
§ 3.6. Расчет пружинения тонкостенной заготовки, подвергнутой упруго-пластическому изгибу 81
§ 3.7. Расчет технологических параметров свободной гибки с учетом геометрической нелинейности 83
§ 3.8. Методика решения в эллиптических параметрах задачи упруго-пластического изгиба консольно защемленного элемента под действием распределенной нагрузки 89
Глава 4. ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О ПЛОСКОМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ ТОНКИХ ЗАГОТОВОК С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ 103
§ 4.1. Изгиб стержня при следящем и поступательном перемещении силы 103
§ 4.2. Численный метод решения задачи упруго-пластического изгиба консольно защемленного элемента под действием произвольно распределенной нагрузки 111
§ 4.3. Уточненный расчет параметров процессов гибки тонкостенных деталей с учетом геометрической нелинейности 117
Глава 5. КОНТРОЛЬ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ФОРМООБРАЗУЮЩИХ ОПЕРАЦИЙ ЛИСТОВОЙ ШТАМПОВКИ 149
§ 5.1. Контролируемые параметры 149
§ 5.2. Методы управления формообразованием 151
§ 5.3. Компьютеризация контроля при выполнении формообразующих операций листовой штамповки 155
Приложение 160
Заключение 171
Список литературы 172

БОДУНОВ Николай Михайлович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ГИБКИ ТОНКОСТЕННЫХ ДЕТАЛЕЙ АВИАТЕХНИКИ С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Учебное пособие

Редактор Н.И. Данич
Компьютерная верстка – А.А. Золина

Подписано в печать 19.07.19.
Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 10,46. Тираж 100 экз. Заказ Г22.

Издательство КНИТУ-КАИ
420111, Казань, К.Маркса, 10

ISBN 987-5-7579-2376-5

9 785757 923765