

Б 7
С. БОГУСЛАВСКИЙ

ПУТИ ЭЛЕКТРОНОВ
В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
ПОЛЯХ

МОСКВА—1929



Сергей Анатольевич
БОГУСЛАВСКИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА.

Публикуемый труд Богуславского должен был быть напечатан семь лет тому назад, но тогда для этого не оказалось достаточно средств. Теперь этот труд потерял до некоторой степени свое прежнее значение; в заграничной литературе имеются уже аналогичные работы, но в русской литературе и до сих пор нет такого подробного систематического трактования задач, разрешенных Богуславским, и для начинающего специалиста-физика эта работа может значительно облегчить усвоение метода Гамильтона-Якоби, приобревшего теперь такое большое значение в теории квантов. Кроме того важно было сохранить этот последний труд Богуславского, как память о талантливом так рано угасшем нашем то варище.

Н. КАСТЕРИН.

Январь. 1929.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

По современным воззрениям, элементами, из которых построена материя, являются электрические заряды: электроны и положительные ядра. Относительным расположением и движением этих зарядов должны об'ясняться все свойства вещества.

Силы, действующие на эти элементарные частицы, суть исключительно электромагнитные силы. В виду такого зернистого строения материи и электромагнитные поля, действующие на каждую из них и создаваемые преимущественно действием окружающих частиц, будут, вообще говоря, очень сложными. Нельзя ставить себе задачей найти сразу движение совокупности зарядов, заключенных в какой-либо части материи, под влиянием совокупности действующих на них сил. Приходится упрощать себе эту задачу, пренебрегать частью действующих сил, принимая во внимание лишь наиболее существенные из них. Нужно изучать сначала более простые движения частиц, чтобы потом из этих простых движений, как элементов, стремиться построить ту сложную картину, которую представляет собой действительность. К счастью, во многих случаях уже этим первым шагом мы подходим к действительности настолько близко, что можем быть уверены, что находимся на правильном пути.

В настоящей книжке я поставил себе задачей изложить то, что можно сказать о характере движений зарядов в упрощенных, идеализированных электромагнитных полях. Некоторые из простейших относящихся сюда задач были уже давно детально изучены. Но к этим изученным задачам оказалось возможным прибавить некоторые другие, решения которых до сих пор не было дано. Таким путем книжка эта приобрела характер монографии.

В выпускаемой сейчас первой части движения изучаются, как таковые. Физические приложения полученных результатов приводятся в отдельных случаях скорее лишь как иллюстрации. Эта часть должна служить лишь как бы введением к теории материи вообще и теории атома в особенности. Здесь разыскиваются все движения, удовлетворяющие законам динамики электрических зарядов. На эти движения не налагаются ограничения, вытекающие из закона квантов. К последнему закону

мы обратимся лишь во второй части книжки, которая будет посвящена теории атома.

Что касается метода решения динамических задач, то во всех более сложных проблемах я пользуюсь уравнением с частными производными Гамильтона—Якоби и решаю его по способу разделения переменных. Этим задача второй части, применение теории квантов, облегчается до пределов возможного. Там вычислительную работу можно будет свести до минимума.

Надеюсь, что мое стремление дать в рамках небольшой книжки возможно больше материала не слишком повредило понятности изложения.

Для подготовки к печати настоящей книжки и изготовления чертежей к ней я мог воспользоваться средствами, предоставленными для этой цели Научной Комиссией Научно-Технического Отдела ВСНХ, которой приношу за это мою благодарность.

С. БОГУСЛАВСКИЙ.

Москва, 31 января 1922 г.

СОДЕРЖАНИЕ.

ГЛАВА I.

Простейшие формы движений электрона.

1. Уравнения движения электрона	9
2. Однородное электрическое поле	10
3. Однородное магнитное поле	13
4. Взаимно-перпендикулярные электрическое и магнитное поля	14
5. Произвольно-направленные однородные поля	18
6. Поле точечного электрического заряда	19
7. Рассеяние α -лучей	22
8. Точечный магнитный заряд	25
9. Электрический и магнитный заряды в одной точке	29

ГЛАВА II.

Метод уравнения Гамильтона—Якоби.

10. Приведение уравнений к каноническому виду	32
11. Вектор-потенциал простейших полей	36
12. Метод Гамильтона—Якоби	41
13. Преобразование к новым независимым переменным	45
14. Интегрирование уравнения Гамильтона—Якоби методом разделения переменных	48
15. Некоторые особенности движений, находимых методом разделения переменных	49
16. Движения условно-периодические и родственные им	50

ГЛАВА III.

Движения с постоянной массой.

17. Движение в поле точечного заряда	52
18. Движение под действием точечного заряда и однородного магнитного поля	56
19. Движение под действием точечного заряда и однородного электростатического поля	58
20. Движение в поле электрического диполя	62
21. Проекция траектории на сферу	64
22. Возможные типы движений	68
23. Точечный электрический заряд и диполь в одной точке	80
24. Притягивающий центр	82
25. Отталкивающий центр	85
26. Движение в поле магнитного диполя	86

27. Приближенное решение для траекторий, не лежащих в плоскости экватора	99
28. Движения под действием притягивающего заряда и магнитного диполя, находящихся в одной точке	104

ГЛАВА IV.

Движения с переменной массой.

29. Динамика электрона по теории относительности	107
30. Движение в магнитном поле	110
31. Сравнение с классической динамикой в общем случае	111
32. Движение в однородном электрическом поле	112
33. Движение в постоянном однородном электромагнитном поле	114
34. Параллельные поля	120
35. Скрещенные поля	121
36. Движение с переменной массой в поле точечного заряда	127
37. Случай отталкивания	128
38. Случай притяжения	131

ГЛАВА V.

Задача двух зарядов.

39. Общие замечания	137
40. Движение двух постоянных масс, притягивающихся или отталкивающихся по закону Кулона	138
41. Столкновение α -частиц с легкими атомами	140
42. Влияние магнитного поля движущихся зарядов	142
43. Задача двух зарядов по теории относительности	147

Г Л А В А I.

Простейшие формы движений электрона.

1. Уравнения движения электрона. Электрический заряд, движущийся в электромагнитном поле, испытывает силу, выражающуюся следующим образом:

$$F_x = e \left[E_x + \frac{1}{c} (\dot{y}H_z - \dot{z}H_y) \right],$$

$$F_y = e \left[E_y + \frac{1}{c} (\dot{z}H_x - \dot{x}H_z) \right],$$

$$F_z = e \left[E_z + \frac{1}{c} (\dot{x}H_y - \dot{y}H_x) \right],$$

где F_x, F_y, F_z означают компоненты силы по трем осям прямо угольной системы координат, E_x, E_y, E_z — компоненты электрического, H_x, H_y, H_z — компоненты магнитного поля, e — величину заряда электрона, $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — компоненты скорости электрона, c — скорость света.

Точками над буквами в дальнейшем всегда будут обозначаться производные по времени, так что

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ и т. д.}$$

и аналогично для двух других координат.

Кроме того, будут всегда применяться следующие обозначения:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

r^2 — квадрат радиуса-вектора мгновенного положения электрона

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2;$$

v^2 — квадрат его скорости,

$$T = \frac{mv^2}{2};$$

T — его кинетическая энергия. (Массу m электрона мы будем сначала рассматривать как постоянную, т. е. будем изучать движения со скоростями, не слишком приближающимися к скорости света).

Уравнения движения электрона будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= e \left[E_x + \frac{1}{c} (\dot{y}H_z - \dot{z}H_y) \right], \\ m\ddot{y} &= e \left[E_y + \frac{1}{c} (\dot{z}H_x - \dot{x}H_z) \right], \\ m\ddot{z} &= e \left[E_z + \frac{1}{c} (\dot{x}H_y - \dot{y}H_x) \right], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если ввести электростатический потенциал φ , то компоненты электрического поля выразятся так:

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (2)$$

Умножая уравнение (1) последовательно на $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и складывая, получаем:

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = e(E_x\dot{x} + E_y\dot{y} + E_z\dot{z}).$$

Принимая во внимание (2), можно вместо этого написать

$$\frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = -\frac{d}{dt} e\varphi$$

или, интегрируя:

$$\frac{mv^2}{2} + e\varphi = \text{Constans}. \quad (3)$$

Это уравнение энергии, по которому полная энергия электрона — составляющаяся из кинетической и электростатической, постоянна. Магнитное поле не входит в это уравнение. Действительно, магнитное поле, действуя на электрон в направлении, перпендикулярном его скорости, не совершает работы. В отсутствии электростатических сил уравнение принимает вид:

$$\frac{mv^2}{2} = \text{Constans},$$

то-есть электрон движется с постоянной скоростью.

2. Однородное электрическое поле. Если электрон находится в однородном электростатическом поле, направленном по оси x -ов, то уравнения (1) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= eE_x, \\ m\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где E_x — величина постоянная. Уравнения эти, как известно, определяют параболический путь электрона. Первые интегралы дают:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{eE_x}{m} t + \dot{x}_0, \\ \dot{y} &= \dot{y}_0, \\ \dot{z} &= \dot{z}_0,\end{aligned}\tag{5}$$

где $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ означают компоненты скорости в момент $t=0$. Вторые интегралы

$$\begin{aligned}x &= \frac{eE_x}{2m} t^2 + \dot{x}_0 t + x_0, \\ y &= \dot{y}_0 t + y_0, \\ z &= \dot{z}_0 t + z_0.\end{aligned}\tag{6}$$

При $t=0$ электрон находится в точке x_0, y_0, z_0 .

Ось параболы параллельна оси x -ов. Момент прохождения электрона через вершину параболы определяется из условия

$$\dot{x} = 0$$

что согласно первому из равенств (5) дает

$$t = -\frac{m\dot{x}_0}{eE_x}.$$

Координаты вершины получатся, если это значение для t подставить в равенства (6).

Исключая t из двух последних равенств (6), находят, что парабола лежит в плоскости

$$\frac{y - y_0}{y_0} = \frac{z - z_0}{z_0}$$

параллельной оси x -ов.

Если начальная скорость параллельна оси y -ов и движение начинается в начале координат, имеем $x_0 = y_0 = z_0 = \dot{x}_0 = \dot{z}_0 = 0$,

$$\begin{aligned}x &= \frac{eE_x}{2m} t^2, \\ y &= \dot{y}_0 t, \\ z &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Поставив экран перпендикулярно к оси y -ов на расстоянии $y=a$ от начала координат, можно измерить отклонение на экране точки удара электрона от той точки, где экран встречается с осью y -ов. Пусть это отклонение обозначено через b (Рис. 1). Тогда два первые равенства (7) дадут

$$\begin{aligned}b &= \frac{eE_x}{2m} t^2, \\ a &= \dot{y}_0 t,\end{aligned}$$

где t обозначает момент встречи электрона с экраном. Исключая t из этих равенств, находим

$$\frac{m}{e} \dot{y}_0^2 = \frac{E_x a^2}{2b}. \quad (8)$$

Здесь справа стоят величины, поддающиеся непосредственному измерению. Следовательно, измерение отклонения электрона в однородном электростатическом поле дает возможность определить величину частного от деления квадрата его начальной скорости $\dot{y}_0$ на отношение заряда электрона e к его массе m .

3. Однородное магнитное поле. Если мы предположим, что электрон движется под действием одних магнитных сил, то уравнения движения его будут

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c} (\dot{y} H_z - \dot{z} H_y), \\ m\ddot{y} &= \frac{e}{c} (\dot{z} H_x - \dot{x} H_z), \\ m\ddot{z} &= \frac{e}{c} (\dot{x} H_y - \dot{y} H_x). \end{aligned} \quad (9)$$

Умножая эти уравнения по очереди на $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и складывая результаты, найдем справа тождественно нуль, так что получим:

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{m}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{dT}{dt} = 0,$$

или

$$T = \text{Const}. \quad (10)$$

Электрон движется с постоянной кинетической энергией, или постоянной абсолютной скоростью v . Это объясняется тем, что магнитная сила, действуя постоянно перпендикулярно к направлению движения электрона, изменяет лишь направление его скорости, не влияя на ее абсолютную величину. Этот результат относится ко всякому магнитному полю и предполагает только, что кроме магнитных на электрон не действуют никакие иные силы.

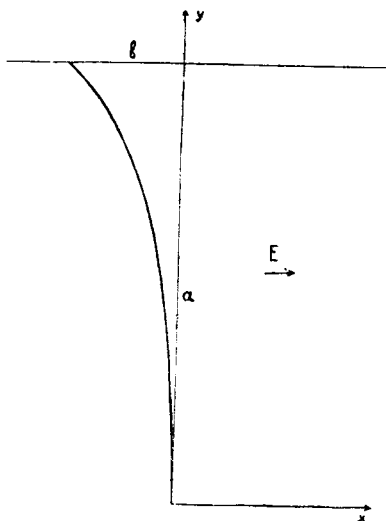


Рис. 1.

Если магнитное поле однородно и направлено по оси z -ов, то уравнения (9) примут вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c} \dot{y} H_z, \\ m\ddot{y} &= -\frac{e}{c} \dot{x} H_z, \\ m\ddot{z} &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя один раз эти уравнения, находим

$$\begin{aligned} m\dot{x} &= \frac{e}{c} y H_z + \alpha, \\ m\dot{y} &= -\frac{e}{c} x H_z + \beta, \\ m\dot{z} &= \gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Возводя обе стороны уравнения в квадрат, складывая и принимая во внимание постоянство скорости v , находим, что электрон движется по круговому цилиндру, уравнение которого

$$m^2 v^2 = \left(\frac{e H_z}{c} y + \alpha \right)^2 + \left(-\frac{e H_z}{c} x + \beta \right)^2 + \gamma^2. \quad (12)$$

Образующие этого цилиндра параллельны оси z -ов. Радиус его основания равен

$$R = c \sqrt{\frac{m^2 v^2 - \gamma^2}{e H_z}} \quad (13)$$

а координаты его оси (Рис. 2)

$$x = \frac{\beta c}{e H_z},$$

$$y = -\frac{\alpha c}{e H_z}.$$

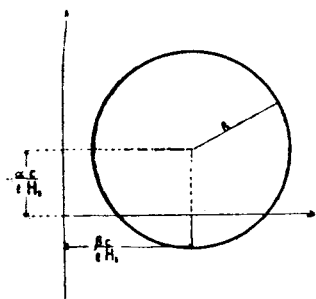


Рис. 2.

Постоянные α , β , γ определяются, как видно из равенства (11), по заданным начальным координатам и скоростям электрона. Последняя из этих величин равна постоянной компоненте импульса электрона параллельной оси z -ов. Постоянная компонента скорости в этом направлении равна $\frac{\gamma}{m}$.

Равенство (13), определяющее радиус цилиндра, может быть написано

$$R = \frac{cm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{e H_z}. \quad (14)$$

Корень, стоящий в числителе, равен проекции скорости на плоскость xu -ов. Эта проекция может быть представлена в виде

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = R\omega,$$

где ω угловая скорость обращения электрона около оси цилиндра. Из (14) следует

$$\omega = \frac{eH_z}{cm}.$$

Угловая скорость, таким образом, тоже постоянна.

Если в начальный момент задать электрону движение в плоскости xu -ов, то он не выйдет из этой плоскости и в дальнейшем движении. В уравнении (12) будет $\gamma = 0$. Электрон будет двигаться по кругу радиуса

$$R = \frac{mcv}{eH_z}.$$

Отсюда видно, что, измеряя радиус круга, по которому движется электрон в плоскости, перпендикулярной к направлению однородного магнитного поля, можно найти величину

$$\frac{mv}{e}.$$

Отклонение электрона однородным электрическим полем определяет, как мы видим в (8), значение величины

$$\frac{mv^2}{e}.$$

Делением этой величины на предыдущую можно найти скорость v , а затем и отношение заряда к массе $\frac{e}{m}$. Таким обра-

зом, эти две важные величины определяются комбинированием наблюдения в электрическом и магнитном полях. Чтобы быть уверенным, что наблюдается одна и та же частица, обладающая определенной скоростью, нужно подвергать ее действию обоих полей одновременно. Поэтому сейчас мы рассмотрим характер движения при одновременном действии обоих полей.

4. Взаимно-перпендикулярные электрическое и магнитное поля. Разберем сначала случай, когда электрическое и магнитное поля взаимно-перпендикулярны и задана начальная скорость, лежащая в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Тогда все движение будет протекать в этой плоскости. Если магнитная сила направлена по

оси z -ов, а электрическая — по оси x -ов, то дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= eE_x + \frac{eH_z}{c}\dot{y}, \\ m\ddot{y} &= -\frac{eH_z}{c}\dot{x}. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножая обе стороны соответственно на $\dot{x}$, $\dot{y}$, складывая и интегрируя по времени, получаем интеграл энергии

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - eE_x x = \varepsilon. \quad (16)$$

Здесь $(-eE_x x)$ есть потенциальная энергия электрона в электростатическом поле, а ε — его постоянная в течение всего движения полная энергия. Интегрируя уравнения (15) по времени, находим

$$\begin{aligned} m\dot{x} &= eE_x t + \frac{eH_z}{c}y + \alpha \\ m\dot{y} &= -\frac{eH_z}{c}x + \beta \end{aligned} \quad (17)$$

Возводя обе стороны в квадрат и принимая во внимание (16), найдем уравнение траектории в таком виде:

$$2m(\varepsilon + eE_x x) = \left(\frac{eH_z}{c}x - \beta\right)^2 + \left(\frac{eH_z}{c}y + eE_x t + \alpha\right)^2. \quad (18)$$

Оно приводится к виду

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

если положить для сокращения

$$\left. \begin{aligned} \frac{c}{eH_z} \left(\beta + \frac{mcE_x}{H_z} \right) &= a, \\ -\frac{c}{eH_z} (eE_x t + \alpha) &= b, \\ \frac{2mc^2}{e^2 H_z^2} \left(\varepsilon + \frac{\beta c E_x}{H_z} + \frac{mc^2 E_x^2}{2H_z^2} \right) &= R^2 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Эти равенства показывают, что электрон лежит на окружности круга радиуса R , центр которого движется равномерно поступательно со скоростью $\left(-\frac{cE_x}{H_z}\right)$ параллельно оси y -ов, находясь на расстоянии a от оси x -ов. Следовательно, хотя элек-

трическая сила и действует на электрон в направлении отрицательной оси x -ов (ввиду того, что заряд электрона отрицательный), он в среднем нисколько не переместится в этом направлении, а будет удаляться в направлении перпендикулярном как к магнитной, так и к электрической силе, а именно в направлении отрицательной оси y -ов. Скорость перемещения оказывается пропорциональной электрической силе E_x и обратно пропорциональной магнитной H_z .

Если положить для $t = 0$

$$x = y = 0,$$

то по (17) α и β имеют значения начальных импульсов электрона по обеим осям координат.

Последнее из равенств (19) показывает, что радиус R зависит от компоненты начальной скорости по оси y -ов.

Траектория заключена в полосе между прямыми

$$x = a \pm R,$$

которых она касается по очереди. Полагая, что такое касание происходит в момент $t = 0$, мы положим $x_0 = 0$. Тогда имеем

$$\alpha = 0, \quad \beta = m\dot{y}_0, \quad \varepsilon = \frac{m}{2} \dot{y}_0^2.$$

Равенства (19) принимают вид

$$\begin{aligned} a &= R = \frac{mc}{eH_z} \left(\dot{y}_0 + \frac{cE_x}{H_z} \right), \\ b &= -\frac{cE_x}{H_z} t. \end{aligned} \tag{20}$$

Чтобы найти угловую скорость обращения электрона по перемещающейся окружности, можно положить

$$\begin{aligned} x &= R (1 - \cos \Theta), \\ y &= -\frac{eE_x}{H_z} t + R \sin \Theta, \end{aligned} \tag{21}$$

где Θ есть неизвестная функция от времени, и подставить это выражение в уравнения (15). Найдем тогда

$$\Theta = \frac{eH_z}{mc} t. \tag{22}$$

Угловая скорость электрона постоянна и имеет то же самое значение, которое мы нашли в предыдущем параграфе для случая движения по неподвижной окружности под действием

одного магнитного поля. Равенства (21) и (22) показывают, что электрон движется по циклоиде. Форма ее при заданных значениях E_x и H_z зависит от величины $\dot{y}_0$. Так как заряд e отрицателен, первые из формул (20) показывают, что a и R отрицательны при $\dot{y}_0 > -\frac{cE_x}{H_z}$ и положительны при $\dot{y}_0 < -\frac{cE_x}{H_z}$.

В первом случае движение происходит на нашем чертеже (Рис. 3) слева от оси y -ов, в последнем—справа. При $\dot{y}_0 > 0$ имеем удлиненную циклоиду, при $\dot{y}_0 = 0$ — нормальную, при $0 > \dot{y}_0 > -\frac{cE_x}{H_z}$ — укороченную, лежащую слева. При $\dot{y}_0 = -\frac{cE_x}{H_z}$ имеем прямолинейное движение. В этом случае магнитная и электрическая сила оказывают на электрон действия взаимно-уничтожающиеся. Его постоянная скорость в этом случае как

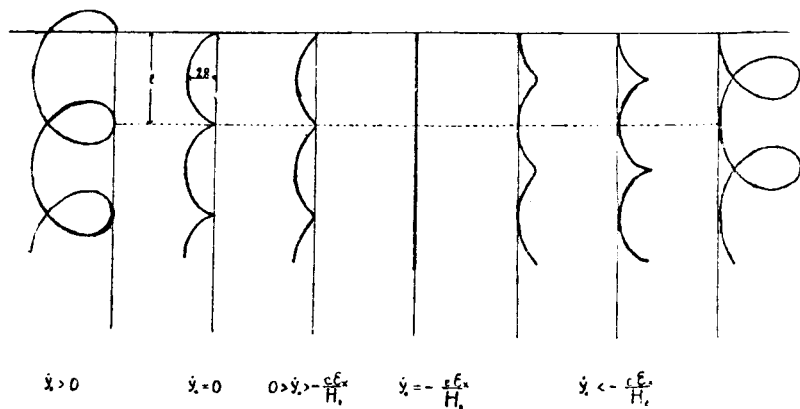


Рис. 3.

раз равна скорости перемещения центра окружности, по которой он двигался бы при произвольной начальной скорости. При дальнейшем убывании $\dot{y}_0$ траектория переходит на правую сторону от оси y -ов, причем повторяются в обратном порядке те же формы циклоид: сначала укороченная, затем нормальная и, наконец, удлиненная. Лежат они, как показано на рисунке, всегда обращая сторону большей кривизны вправо. Расстояние l между двумя последовательными вершинами циклоиды равняется отношению постоянной скорости перемещения центра круга к угловой скорости, умноженному на 2π . Это дает

$$l = \frac{2\pi mc^2 E_x}{e H_z}$$

Эта длина не зависит от начальной скорости $\dot{y}_0$. Измерив ее, можно бы непосредственно определить отношение $\frac{e}{m}$. Если име-

ется пучек электронов различных начальных скоростей, то все они будут двигаться по циклоидам одинаковой «длины волны».

5. Произвольно направленные однородные поля. Разобрав подробно движение в плоскости перпендикулярной к магнитному полю, когда электрическая сила лежит в этой же плоскости, мы можем, пользуясь найденными результатами, легко перейти и к самому общему случаю движения электрона под одновременным воздействием однородных электрических и магнитных полей.

Попрежнему полагаем ось z -ов параллельной магнитному полю. Направление других координатных осей выберем так, чтобы электрическая сила лежала в плоскости zx -ов, так что $E_y = 0$. Тогда координаты x и y электрона попрежнему будут определяться уравнениями (15) и вытекающими из них первыми интегралами (17). Для третьей же координаты будем, очевидно, иметь

$$m\ddot{z} = eE_z, \quad (23)$$

откуда

$$m\dot{z} = \frac{eE_z t}{2} + \gamma, \quad (24)$$

где γ — начальный импульс в направлении оси z -ов.

Полагая опять, что движение начинается в начале координат, имеем

$$mz = \frac{eE_z}{2} t^2 + \gamma t. \quad (25)$$

Движение в этом направлении происходит так, как если бы кроме компоненты E_z на электрон не действовали никакие другие силы. Из (15) и (23) обычным путем получается интеграл энергии

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e(E_x x + E_z z) = \varepsilon$$

В силу (24) и (25) можно написать

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - eE_x x = \varepsilon - \frac{\gamma^2}{2m}.$$

Поэтому проекция траектории электрона на плоскость xu -ов определится теми же равенствами (18) и (19), где только на место ε нужно подставить $\varepsilon - \frac{\gamma^2}{2m}$. Движение происходит на поверхности кругового цилиндра с образующими, параллельными магнитному полю, который перемещается с постоянной скоростью $\frac{cE_x}{H_z}$ в направлении отрицательных y -ов. Движение по оси цилиндра, характеризуется уравнением (25). Если начальная компонента скорости z_0 направлена обратно действию

компоненты силы E_z , скорость $\dot{z}$ через некоторое время переменит знак. Траектория будет вообще иметь вид спирали, вьющейся около параболы, ось которой параллельна оси z -ов.

Если предположить, что начальный импульс лежит в плоскости yz -ов, то уравнениями траектории будут кроме (25) по-прежнему (21) и (22) со значением R , определяемым первым из равенств (20).

6. Поле точечного электрического заряда. Если электрон испытывает действие электрического заряда e' , находящегося в начале координат, то он описывает одно из конических сечений, форма и положение которого зависит как от знака заряда так и от начальных условий, определяющих движение. Во всех случаях заряд e' находится в одном из фокусов конического сечения.

Если мы возьмем за плоскость xy -ов плоскость, содержащую заряд e' и направление начальной скорости электрона, то, очевидно, все движение будет протекать в этой плоскости. Уравнения движения будут

$$m\ddot{x} = \frac{ee'x}{r^3}$$

$$m\ddot{y} = \frac{ee'y}{r^3}.$$

Умножая на $\dot{x}$, $\dot{y}$, складывая и интегрируя, найдем интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{ee'}{r} = \varepsilon.$$

С другой стороны, умножая первое уравнение на $\dot{y}$, второе на $\dot{x}$ и вычитая, найдем

$$m(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) = m \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = 0.$$

Отсюда интеграл площадей:

$$m(x\dot{y} - y\dot{x}) = C.$$

Вводя полярные координаты равенствами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

получим интегралы энергии и площадей в виде:

$$\frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{ee'}{r} = \varepsilon, \quad (26)$$

$$mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = C. \quad (27)$$

Исключая dt из этих равенств, найдем

$$\frac{C^2}{2m} \left[\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{ee'}{r} = \varepsilon$$

или

$$\frac{C^2}{2m} \left[\left(d \left(\frac{1}{r} \right) \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right] + \frac{ee'}{r} = \varepsilon$$

откуда

$$d\varphi = \frac{d \left(\frac{1}{r} \right)}{\sqrt{\frac{2m\varepsilon}{C^2} - \frac{2mee'}{C^2} \frac{1}{r} - \left(\frac{1}{r} \right)^2}}$$

Вводя обозначения

$$p = -\frac{C^2}{mee'}, \quad \eta = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon C^2}{mee'^2}}, \quad (28)$$

можем переписать дифференциальное уравнение в виде

$$d\varphi = \frac{d \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)}{\sqrt{\frac{\eta^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2}}, \quad (29)$$

откуда интеграл для отрицательного значения корня

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos \frac{p}{\eta} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right),$$

так что

$$\frac{p}{r} = 1 + \eta \cos(\varphi - \varphi_0),$$

или

$$r = \frac{p}{1 + \eta \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad (30)$$

Положительный знак перед корнем (29) при соответственном выборе произвольной постоянной φ_0 приводит к тому же результату. Это, как известно, уравнение конического сечения, один из фокусов которого находится в начале координат.

Мы рассмотрим отдельно случаи притяжения и отталкивания электрона центральной силой. Первое будет иметь место, если e и e' разных знаков то есть для электрона при положительном знаке центрального заряда. Тогда согласно первому из равенств (28) p положительно. Согласно второму из равенств эксцентриситет η орбиты будет меньше единицы, равен ей или же больше ее, смотря по тому, будет ли постоянная энергия ε меньше нуля, равна нулю или же больше нуля. В первом случае орбита будет эллиптическая, во втором параболическая,

в последнем гиперболическая. Во всех случаях φ_0 соответствует перигелию электрона, т. е. точке, в которой радиус — вектор r имеет наименьшее значение; p — параметр конического сечения.

Большая полуось эллиптической орбиты равняется $\frac{ee'}{4\varepsilon}$ и таким образом, завися от этой энергии, не зависит от постоянной площадей C . Равным образом для гиперболической орбиты действительная полуось равна $\left(-\frac{ee'}{4\varepsilon}\right)$. Значение постоянных ε и C , а следовательно и форма траектории определяются начальными положением и скоростью электрона.

Пусть в начальный момент радиус-вектор имеет значение r_0 , скорость — v_0 , а b — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на направление начальной скорости, при чем мы условимся считать эту длину положительной, когда центр притяжения остается влево от направления начальной скорости, и отрицательной в обратном случае.

Подставляя эти величины в (26) и (27), найдем

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{ee^1}{r_0} \\ C = mv_0 b \end{cases} \quad (31)$$

Знак постоянной C определяет направление обращения электрона около центра, при чем за положительное мы принимаем направление, обратное часовой стрелке. Так как абсолютное значение этой постоянной определяет удвоенную площадь покрываемую радиусом вектором в единицу времени, мы найдем, в случае эллиптической орбиты период обращения электрона около центра делением площади эллипса на $\frac{C}{2}$. Период этот окажется равным

$$\tau = \frac{\pi ee'}{4\sqrt{2m\varepsilon^{3/2}}} \quad (32)$$

Таким образом, период, как и большая ось, зависит только от энергии и не зависит от постоянной C .

Если заряды одноименны, т. е. имеет место отталкивание, p , согласно первому из равенства (28), отрицательно. Тогда в уравнении траектории (30) знаменатель тоже должен быть отрицательным. Для этого должно быть

$$\cos(\varphi - \varphi_0) < -\frac{1}{\eta}.$$

Следовательно и в этом случае электрон движется по ветви гиперболы, но только лежит она иначе: в случае притяжения притягивающий центр находится в фокусе, прилежащем к ветви,

по которой движется электрон, в случае отталкивания, наоборот в более удаленном фокусе. Форма же гиперболы, то-есть значения действительной полуоси и эксцентриситета, не зависят от знака центрального заряда. (Рис. 4).

7. Рассеяние α -лучей. Изучение отклонений α -частиц от первоначального направления при прохождении через материю позволило Резерфорду разрешить коренной вопрос о распределении положительного заряда внутри атома. До работы Резерфорда, появившейся в 1911 году, считалась наиболее

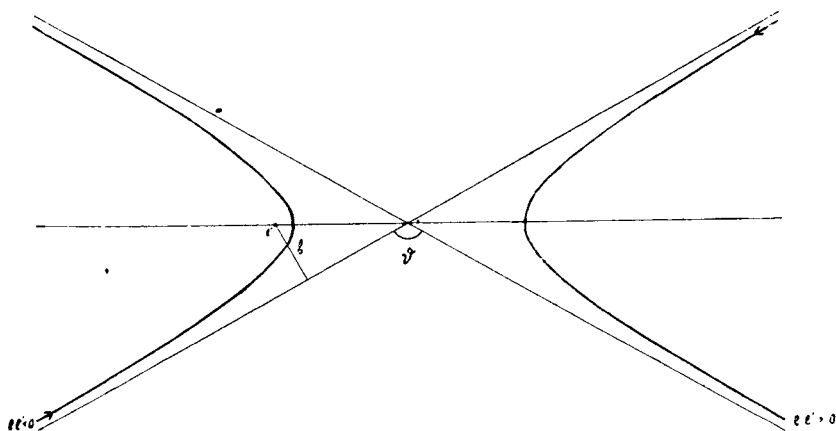


Рис. 4.

приближавшейся к действительности модель атома, предложенная Дж. Дж. Томсоном, который предполагал, что положительный заряд распределен по всему об'ему атома образуя положительную сферу, внутри которой находится известное число мелких отрицательных зарядов—электронов, нейтрализующих заряд положительной сферы. Когда α -частица, то-есть атом гелия, несущий два элементарных заряда положительного электричества, пронизывает такой атом, он должен испытывать известное отклонение от прямолинейного пути. Но отклонение это не может быть велико. Действительно, сильные электрические поля в этой модели имеются лишь по соседству с электронами, где между электроном и пролетающей α -частицей будет значительное притяжение. Но под действием этого притяжения α -частица отклонится лишь слабо, потому что масса ее примерно в 7400 раз больше массы электрона. Значительные отклонения могут получаться лишь путем накопления большого числа мелких отклонений, испытываемых при прохождении частиц через большое число атомов рассеивающего слоя. Однако и тут образование большого отклонения очень мало вероятно, потому что единичные мелкие отклонения будут иметь различные направления и будут

суммироваться по законам вероятности. Подсчет показывает, что по этой теории большие отклонения должны бы встречаться гораздо реже, чем это было найдено в действительности в опытах Гейгера и Марсдена¹⁾. Эти ученые изучали рассеяние α -частиц, излучаемых препаратом RaC или же эманации радия в равновесии с продуктами ее распада. В этих опытах диафрагмами D (Рис. 5) вырезывался пучок лучей радиоактивного препарата R , которые падали на рассеивающий слой изучаемого вещества F . Экран сернистого цинка Z , связанный с микроскопом M , мог вращаться по окружности около оси проходящей через рассеивающий слой. В микроскоп наблюдались сцинтилляции экрана, вызываемые падением на него отдельных α -частиц. Сосчитывались сцинтилляции, наблюдавшиеся в единицу времени, на единице поверхности экрана в зависимости

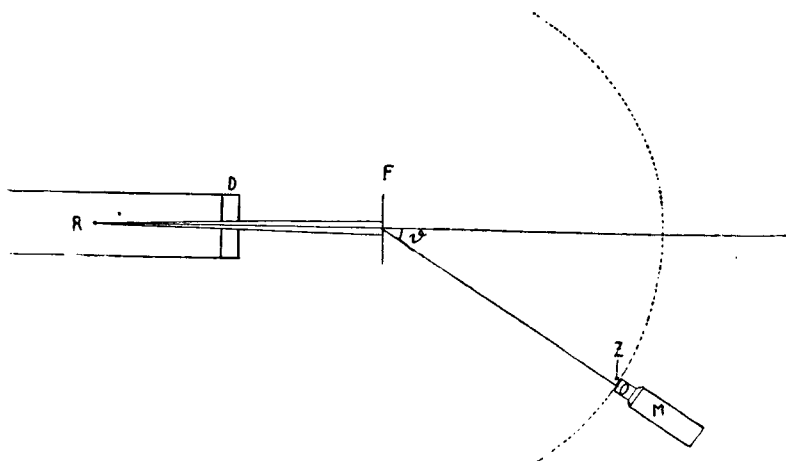


Рис. 5.

от угла θ , составляемого отклоненными лучами с их первоначальным направлением. При этом изучались также влияние толщины рассеивающего слоя, атомного веса, составляющего его вещества, а также — скорости α -частиц. Из пространства, в котором распространялись α -лучи, был, разумеется, выкачан воздух, чтобы он не задерживал и не рассеивал α -частиц. Изучение результатов этих опытов заставило Резерфорда²⁾ противопоставить вышеизложенной теории «многократного» рассеяния, по которой значительные отклонения являлись результатом наложения большого числа мелких отклонений, свою

¹⁾ *H. Geiger and E. Marsden, Proc. Roy. Soc. 82, p. 495, 1909. H. Geiger, Proc. R. y. Soc., 83, p. 492, 1910. H. Geiger and E. Marsden, Phil. Mag, 25, p. 604, 1913.*

²⁾ *E. Rutherford, Phil. Mag., 21, p. 669, 1913.*

теорию «однократного» рассеяния. Действительно, положение мелких отклонений могло давать в сумме отклонения большие лишь чрезвычайно редко, тогда как Гейер и Марсден наблюдали значительное число отклонений, превышающих 90° , т.-е. своего рода отражения частиц слоем вещества. Резерфорд логически заключил, что строение атома должно быть таково, чтобы при благоприятных условиях уже результатом единичного взаимодействия между атомом и пролетающей α -частицей могло быть отклонение на большой угол. Для этого внутри атома должно быть сильное поле, связанное с тяжелой массой. Отсюда возникло представление об атомном ядре в котором на очень малом пространстве сосредоточен весь положительный заряд атома, а также почти вся его масса. Такой характер ядра, действительно, подтвердился всеми дальнейшими опытами и положен в основу модели атома, предложенной Бором и разработанной далее Зоммерфельдом и другими.

Пользуясь формулами предыдущего параграфа, мы можем легко определить, насколько отклонится α -частица, попадая в соседство с атомным ядром, если только мы предположим, что масса ядра велика по сравнению с массой α -частицей, так, что можно считать ядро неподвижным. Это допущение будет тем ближе к истине, чем больше атомный вес рассеивающего вещества.

Так как заряды ядра и частицы оба положительны, траектория изобразится правой ветвью гиперболы на рис. 4. Угол отклонения ϑ —внешний угол между асимптотами. Из уравнения (30) видим, что он выразится так:

$$\vartheta = \pi - 2 \arccos \frac{1}{\eta} \quad (33)$$

Чтобы выразить η через начальную скорость v_0 и перпендикуляр b из ядра на направление ее, нужно в (31) положить $r_0 = \infty$ и подставить найденные значения ε и C в (28). Получится

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{m^2 v_0^4 b^2}{e^2 e'^2}}$$

Подставляя в (33) и преобразуя, находим

$$\vartheta = 2 \operatorname{arccctg} \frac{m v_0^2 b}{e e'} \quad (34)$$

Если через Δ обозначим толщину рассеивающего слоя, а через n —число атомов, содержащихся в единице его объема, то вероятность того чтобы первоначальное направление частицы прошло от одного из ядер на расстоянии, лежащем между b и $b + db$, будет

$$2\pi n \Delta b db.$$

Но из (34) имеем

$$b = \frac{ee'}{mv_0^2} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2},$$

$$db = \frac{ee'}{2mv_0^2} \cdot \frac{d\vartheta}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2}}$$

Следовательно, из Q частиц, падающих в единицу времени на слой, число

$$\pi Q n \Delta \left(\frac{ee'}{mv_0^2} \right)^2 \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sin^3 \frac{\vartheta}{2}} \quad (35)$$

отклонится на угол, лежащий между ϑ и $\vartheta + d\vartheta$. Удовлетворяющие этому условию направления заполняют пространственный угол

$$2\pi \sin \vartheta d\vartheta. \quad (36)$$

Если экран Z стоит на расстоянии a от рассеивающего слоя то число частиц, попадающих на единицу его площади получится делением (35) на (36) и на a^2 , то-есть будет

$$\frac{Q n \Delta}{a^2} \left(\frac{ee'}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

Выражение это показывает что число падающих на экран частиц:

- 1) обратно пропорционально четвертой степени синуса половины угла отклонения,
- 2) прямо пропорционально толщине рассеивающего поля,
- 3) обратно пропорционально четвертой степени начальной скорости,
- 4) прямо пропорционально квадрату заряда ядра.

Первые три вывода хорошо подтвердились опытом. Четвертый же позволил сделать заключение об относительной величине зарядов ядер различных элементов. Получилась приблизительная пропорциональность между зарядом и атомным весом. Теперь мы знаем, что ядро содержит число элементарных зарядов, равное порядковому номеру элемента в периодической системе Менделеева, которое в свою очередь близко к половине атомного веса.

Действительная полуось описываемой частицей гиперболы—наименьшее расстояние, на которое она подходит к ядру. Величина эта легко определяется и дает некоторый верхний предел для величины ядра.

Точечный магнитный заряд. Предположим, что в начале координат находится изолированный магнитный полюс

силы μ . Правда, мы знаем, что изолированных магнитных полюсов в природе не существует, что всякий положительный магнитный заряд сопровождается равным ему отрицательным. Но последний может находиться от первого на столь значительном расстоянии, что в области непосредственно прилегающей к первому расположение магнитных силовых линий будет приблизительно таково, как если бы другой заряд совершенно отсутствовал. Так, если мы имеем длинный магнитный стержень, то около одного конца его влияние заряда, сосредоточенного на другом конце, не будет заметно.

Компоненты магнитного поля будут в этом случае псевдовекторами от магнитного потенциала φ , взятыми с обратным знаком, при чем φ имеет форму

$$\varphi = \frac{\mu}{r}$$

следовательно

$$H_x = \frac{\mu x}{r^3}, \quad H_y = \frac{\mu y}{r^3}, \quad H_z = \frac{\mu z}{r^3}$$

Уравнения движения электрона примут вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e\mu}{c} \left(\frac{\dot{y}z}{r^3} - \frac{\dot{z}y}{r^3} \right), \\ m\ddot{y} &= \frac{e\mu}{c} \left(\frac{\dot{z}x}{r^3} - \frac{\dot{x}z}{r^3} \right), \\ m\ddot{z} &= \frac{e\mu}{c} \left(\frac{\dot{x}y}{r^3} - \frac{\dot{y}x}{r^3} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Кроме имеющего место во всяком магнитном поле интеграла

$$\frac{mv^2}{2} = \text{Const},$$

найдем сейчас три других. Для этого умножаем последнее уравнение на y , второе на z и вычитаем результаты. Найдем

$$m \frac{d}{dt} (y\dot{z} - z\dot{y}) = \frac{e\mu}{c} \left[\frac{\dot{x}r^2 - x(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})}{r^3} \right] = \frac{e\mu}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{r} \right)$$

Интегрируя это равенство и два других, составленных для других пар уравнений (37) найдем интегралы

$$\left. \begin{aligned} m(y\dot{z} - z\dot{y}) - \frac{e\mu}{c} \frac{x}{r} &= C_x, \\ m(z\dot{x} - x\dot{z}) - \frac{e\mu}{c} \frac{y}{r} &= C_y, \\ m(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{e\mu}{c} \frac{z}{r} &= C_z. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Если введем компоненты секториальной скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, положив

$$2\omega_x = y\dot{z} - z\dot{y} \text{ и т. д.}$$

и обозначим через α, β, γ косинусы углов, составляемых радиусом вектором с осями координат, то интегралы (38) напишутся

$$\left. \begin{aligned} 2m\omega_x - \frac{e\mu\alpha}{c} &= C_x, \\ 2m\omega_y - \frac{e\mu\beta}{c} &= C_y, \\ 2m\omega_z - \frac{e\mu\gamma}{c} &= C_z. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Вектор с компонентами C_x, C_y, C_z назовем для краткости неизменяемым вектором. Мы видим, что неизменяемый вектор представляет собой геометрическую разность между вектором момента количества движения и вектором, направление которого совпадает с направлением радиуса вектора, а абсолютная величина равна $\frac{e\mu}{c}$. Его легко построить, зная начальное положение и скорость электрона.

Умножая равенства (38) соответственно на $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ и складывая, найдем

$$C_x \frac{x}{r} + C_y \frac{y}{r} + C_z \frac{z}{r} = -\frac{e\mu}{c}. \quad (40)$$

Убеждаемся, что электрон движется по поверхности круглого конуса, вершина которого находится в начале координат, а ось параллельна неизменяемому вектору. Если обозначим через C абсолютную величину последнего, положив

$$C^2 = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2,$$

то для косинуса угла ϑ при вершине конуса будем, очевидно, иметь

$$\cos \vartheta = -\frac{e\mu}{cC} \quad (41)$$

Если обозначим через ω_c проекцию мгновенной секториальной скорости на направление неизменяемого вектора, то, умножая равенства (38) последовательно на $\frac{C_x}{C}, \frac{C_y}{C}, \frac{C_z}{C}$, складывая и принимая во внимание (40), найдем

$$2m\omega_c = C - \frac{e^2\mu^2}{C\epsilon^2} = C\sin^2\vartheta \quad (42)$$

Электрон обращается около оси конуса с постоянной секториальной скоростью. Так как

$$2m\omega_c = m\rho^2\dot{\phi} = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\phi},$$

где буквой ρ обозначен радиус поперечного сечения конуса, а через $\dot{\phi}$ угловая скорость обращения около оси конуса, то (42) обращается, очевидно, в

$$mr^2\dot{\phi} = C. \quad (43)$$

Это закон площадей в своеобразном, однако, видоизменении. Постоянна площадь, описываемая в единицу времени образующей конуса, на которой лежит электрон.

Если примем систему сферических координат r, ϑ, φ , ось которой совпадает с осью конуса, то в выражении кинетической энергии

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\phi}^2) = \frac{m}{2} v^2 \quad (44)$$

второй член равен нулю. В третьем на место введем его значение из (43). После элементарных преобразований найдем

$$\frac{1}{2v} \frac{d(r^2)}{dt} = \sqrt{r^2 - \frac{C^2 \sin^2 \vartheta}{v^2 m^2}} \quad (45)$$

Если обозначим через b длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на направление скорости в момент $t = 0$, то по определению

$$C^2 = m^2 b^2 v^2 + \frac{e^2 \mu^2}{c^2}$$

С другой стороны, согласно (42)

$$C^2 \sin^2 \vartheta = C^2 - \frac{e^2 \mu^2}{c^2}$$

Следовательно, вычитаемое под корнем в (45) равно b^2 . Интегрируя, найдем

$$r^2 = v^2 (t - t_0)^2 + b^2 \quad (46)$$

В момент $t = t_0$ электрон приближается ближе всего к полюсу. Он подходит к нему на расстоянии b , в котором он прошел бы, если бы с самого начала на него не действовали никакие силы. Так как любой момент может быть принят за начальный, то следовательно, касательная траектории длительно касается сферы радиуса b описанной около начала координат. Согласно (46) электрон сначала приближается к полюсу, затем, начиная с $t = t_0$, удаляется и уходит в бесконечность. При $t = t_0$ траектория касается сферы. Из (46) видно, что r возрастает после касания по тому же закону, как если бы с этого момента электрон двигался по инерции. Мы знаем уже, что электрон при этом описывает спираль, вьющуюся по поверхности конуса. Найдем уравнение этой спирали в сферических координатах. Для этого исключим dt из (43) и (45).

Так как

$$\frac{mvb}{c} = \sin \vartheta,$$

получим дифференциальное уравнение

$$-\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{b}{r} \right) = \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}.$$

Интегрируя его и прибавляя уравнение конуса, найдем для траектории следующие два простых уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{b}{r} &= \cos[(\varphi - \varphi_0) \sin \vartheta], \\ \operatorname{tg} \vartheta &= -\frac{mbvc}{e\mu} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Кроме того, еще должны быть указаны косинусы углов, составляемых осью конуса с осями координат. Положим, что последние выбраны так, что в начальный момент электрон находится на положительной оси z -ов, а начальная скорость его лежит в плоскости yz -ов. Постоянную b будем считать положительной, если начало координат остается влево от направления начальной скорости. Тогда искомые косинусы выразятся так

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sin \vartheta, \\ \beta_0 &= 0, \\ \gamma_0 &= \cos \vartheta \end{aligned}$$

На чертеже (рис. 6) изображен тот случай движения, когда μ и b положительны, а e отрицательно. Если смотреть в направлении магнитных силовых линий, то вращение электрона происходит по часовой стрелке.

9. Электрический и магнитный заряды в одной точке. Предположим теперь, что на электрон действует одновременно и электрический заряд e' и магнитный заряд μ , сосредоточенные в начале координат. Уравнения движения имеют тогда вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{ee'x}{r^3} + \frac{e\mu}{c} \left(\frac{\dot{y}z - \dot{z}y}{r^3} \right), \\ m\ddot{y} &= \frac{ee'y}{r^3} + \frac{e\mu}{c} \left(\frac{\dot{z}x - \dot{x}z}{r^3} \right), \\ m\ddot{z} &= \frac{ee'z}{r^3} + \frac{e\mu}{c} \left(\frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{r^3} \right). \end{aligned}$$

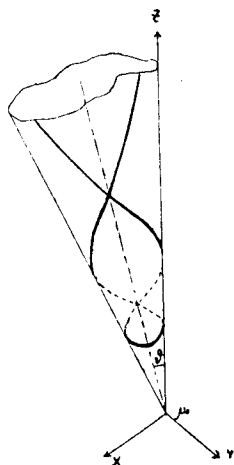


Рис. 6.

Поступая с этими уравнениями так же, как и в предыдущем параграфе, мы убеждаемся, что и здесь имеют место интегралы (38). Электрон опять движется по поверхности конуса, уравнение которого — (40). Тогда как эти интегралы не зависят от электрического заряда e' , интеграл энергии, наоборот, не зависит от магнитного заряда μ и имеет значение

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{ee'}{r} = \varepsilon$$

Вводя опять систему сферических координат, ось которых совпадает с осью конуса, напомним этот интеграл в виде

$$\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{ee'}{r} = \varepsilon$$

и принимая во внимание, что опять, как и в предыдущем параграфе, имеет место

$$mr^2 \dot{\varphi} = C, \quad (48)$$

исключим dt из этих обоих уравнений. Результат будет

$$\left(\frac{d \left(\frac{1}{r} \right)}{d\varphi} \right)^2 + \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} + \frac{2mee'}{C^2 r} = \frac{2\varepsilon m}{C^2} \quad (49)$$

Если введем аналогично (28) обозначения

$$p = - \frac{C^2 \sin^2 \vartheta}{mee'},$$

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon C^2 \sin^2 \vartheta}{me^2 e'^2}}, \quad (50)$$

то уравнение (49) приведет к виду

$$\sin \vartheta d\vartheta = \frac{d \left(\frac{\sin \vartheta}{r} - \frac{1}{p} \right)}{+ \sqrt{\frac{r_1^2}{p^2} - \left(\frac{\sin \vartheta}{r} - \frac{1}{p} \right)^2}}$$

Интегрируя это уравнение, найдем уравнения траектории:

$$\left. \begin{aligned} p \frac{\sin \vartheta}{r} &= 1 + \eta \cos [\sin \vartheta (\varphi - \varphi_0)] \\ \cos \vartheta &= - \frac{e\mu}{cC} \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Или, вводя опять как и в предыдущем параграфе, начальную скорость и длину перпендикуляра из начала координат на направление ее, можем второе из этих уравнений заменить через

$$\operatorname{tg} \vartheta = - \frac{mb_0 v_0 c}{e\mu} \quad (52)$$

Здесь, однако, во время движения v и b не постоянны, а постоянно, как показывает последнее равенство, их произведение. Как видно из (50), η , величина, аналогичная эксцентриситету, меньше единицы при $\epsilon < 0$, равна ей при $\epsilon = 0$ и больше единицы при $\epsilon > 0$. Уравнение (51) показывает, что в первом случае изменение r происходит в конечных пределах между значениями

$$\frac{p \sin \vartheta}{1 \pm \eta} \quad (53)$$

Во втором и третьем случаях r достигает минимального значения

$$\frac{p \sin \vartheta}{1 + \eta},$$

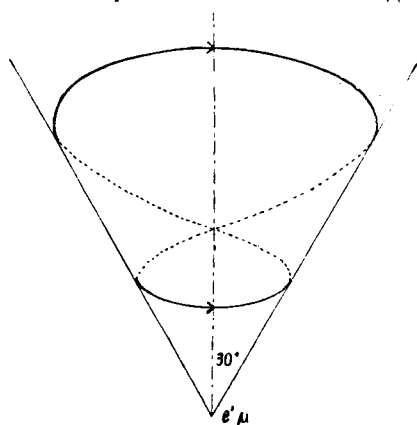


Рис. 7.

а затем траектория уходит в бесконечность. При этом как и в отсутствии электрического заряда, e' , она вьется по конусу, причем секториальная скорость (48) постоянна. При $\epsilon < 0$ траектория по очереди касается сфер радиусов (53). Из первого уравнения (51), видно, что траектория представляет замкну-

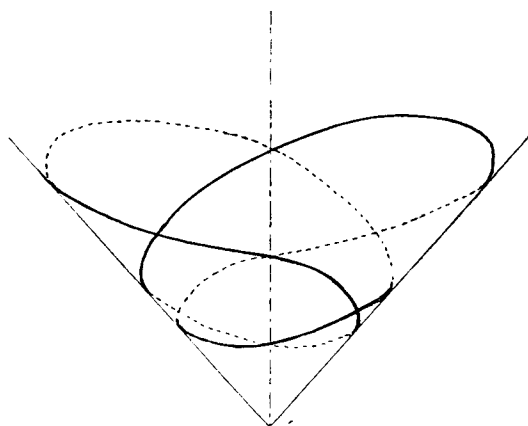


Рис. 8.

тую кривую, то есть движение периодически, когда $\sin \vartheta$ выражается рациональной дробью. Действительно, из этого уравнения видно, что r есть периодическая функция от φ с периодом $\frac{2\pi}{\sin \vartheta}$. Азимут же периодичен с периодом 2π . Если существуют такие два целых положительных числа k и l , что

$$2\pi k = \frac{2\pi l}{\sin \vartheta},$$

то после k оборотов около конуса электрон возвратится в первоначальное положение. При этом значит,

$$\sin \vartheta = \frac{l}{k} \quad (54)$$

— рациональная дробь. Форма траектории для случаев $\sin \vartheta = \frac{1}{2}$ и $\sin \vartheta = \frac{2}{3}$ изображена на рисунках 7 и 8. Отсюда уже видно, что замкнутые траектории могут быть очень сложными. Какому условию должна удовлетворять начальная скорость электрона, чтобы движение происходило периодически, следует из (52). Именно, должно быть

$$v_0 b_0 = \frac{e\mu}{mc} \sqrt{k^2 - l^2},$$

где k и l два целых числа. Так как произведение vb постоянно во время движения, то значки $_0$ в формуле можно и опустить.

В случае $\mu = 0$ мы возвращаемся к разобранным в § 6 движению по коническим сечениям, в случае $e' = 0$ — к движению по спирали (47).

Действительно, в первом случае по (52) имеем

$$\vartheta = \frac{\pi}{2},$$

поверхность конуса вырождается в плоскость. $\sin \vartheta$ делается равным единице и уравнения (51) превращаются в уравнения конического сечения.

Если, наоборот $e' = 0$, то по (50) p и η становятся бесконечно велики. Но отношение

$$\frac{p \sin \vartheta}{\eta},$$

как нетрудно убедиться, стремится к пределу b , которое при $e' = 0$ постоянно. Поэтому делением первого из уравнений (51), на η возвратимся к уравнению спирали (47).

Мы подробно остановимся на случае $\epsilon < 0$, когда под действием магнитного поля эллиптическая орбита свертывается в спираль вьющуюся по конусу в промежутке между сферами радиусов (51). Если наоборот $\epsilon \geq 0$, то, как следует из (51), периодические движения невозможны потому, что электрон уходит в бесконечность.

ГЛАВА II.

Метод уравнения Гамильтона—Якоби

10. Приведение уравнений к каноническому виду. Прежде чем приступить к разбору движений электронов в более сложных полях, изложим вкратце метод решения динамических задач, которым в дальнейшем нам придется по-

стоянно пользоваться. Это—классический метод Гамильтона—Якоби, который однако не принадлежит к числу элементарных, почему для удобства читателя и является целесообразным здесь сначала напомнить его.

Прежде всего мы покажем, что уравнения движения электрона приводятся к так называемому каноническому виду (уравнения Гамильтона).

Действительно, если магнитное поле отсутствует, и электрон движется под действием одного электростатического поля, то, вводя компоненты импульсов на место компонентов скорости, то есть полагая

$$m\dot{x} = p_x, \quad m\dot{y} = p_y, \quad m\dot{z} = p_z.$$

можно написать уравнения движения электрона в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x}, & \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y}, & \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial p_z}, & \dot{p}_z &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

где H —Гамильтонова функция, которая в данном случае есть не что иное, как сумма кинетической и потенциальной энергий, рассматриваемая как функция от координат и импульсов.

Вводя электростатический потенциал φ , так что

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

мы имеем для суммы кинетической и потенциальной энергий

$$\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\varphi.$$

Заменяя здесь скорости через импульсы, найдем выражение Гамильтоновой функции. Если мы подставим это значение H в (55) и затем заменим импульсы через скорости, то первая группа уравнений обратится в тождество, вторая же примет вид

$$m\dot{x} = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \text{ и т. д.,}$$

то есть даст наши прежние уравнения движения.

Мы покажем сейчас, что к той же канонической форме (55) приводятся уравнения движения электрона и в том случае, когда кроме электростатического на него действует и произвольное магнитное поле. Для этого нужно только обобщить

понятие импульса и предположить, что компоненты импульса зависят не только от скорости электрона, но также и от положения его в пространстве. А именно нужно положить

$$\left. \begin{aligned} p_x &= m\dot{x} + \frac{e}{c} F_x, \\ p_y &= m\dot{y} + \frac{e}{c} F_y, \\ p_z &= m\dot{z} + \frac{e}{c} F_z, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

обозначая через F_x, F_y, F_z три функции от координат, с физическим смыслом которых мы сейчас познакомимся. По нашему новому определению импульсы составляются таким образом из двух частей: одной, как и прежде пропорциональной скорости, и другой, зависящей только от положения электрона в пространстве. Первую можно назвать кинетическим импульсом, а вторую потенциальным, в полной аналогии с понятиями кинетической и потенциальной энергий.

Под Гамильтоновой функцией мы будем опять подразумевать сумму кинетической и потенциальной энергии, то есть положим

$$H = \frac{m}{2} v^2 + e\Phi. \quad (57)$$

Но когда мы введем сюда импульсы вместо скорости, получится

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x - \frac{e}{c} F_x \right)^2 + \left(p_y - \frac{e}{c} F_y \right)^2 + \left(p_z - \frac{e}{c} F_z \right)^2 \right] + e\Phi \quad (58)$$

Если подставим это значение H в систему уравнений (55), то первая группа обратится в

$$\dot{x} = \frac{1}{m} \left(p_x - \frac{e}{c} F_x \right) \text{ и т. д.,}$$

что совпадает с группой уравнений (56), определяющих импульсы через скорость и вектор F_x, F_y, F_z . Вторая же группа примет такой вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= \frac{e}{mc} \left[\left(p_x - \frac{e}{c} F_x \right) \frac{\partial F_x}{\partial x} + \left(p_y - \frac{e}{c} F_y \right) \frac{\partial F_y}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \left(p_z - \frac{e}{c} F_z \right) \frac{\partial F_z}{\partial x} \right] - e \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \dot{p}_y &= \frac{e}{mc} \left[\left(p_x - \frac{e}{c} F_x \right) \frac{\partial F_x}{\partial y} + \left(p_y - \frac{e}{c} F_y \right) \frac{\partial F_y}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \left(p_z - \frac{e}{c} F_z \right) \frac{\partial F_z}{\partial y} \right] - e \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \end{aligned}$$

$$\dot{p}_z = \frac{e}{mc} \left[\left(p_x - \frac{e}{c} F_x \right) \frac{\partial F_x}{\partial z} + \left(p_y - \frac{e}{c} F_y \right) \frac{\partial F_y}{\partial z} + \right. \\ \left. + \left(p_z - \frac{e}{c} F_z \right) \frac{\partial F_z}{\partial z} \right] - e \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Если, пользуясь уравнениями (56), мы заменим импульсы через скорости, то эти уравнения обратятся в

$$m\ddot{x} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial F_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \dot{z} \right) = \frac{e}{c} \left(\dot{x} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial F_y}{\partial x} + \right. \\ \left. + \dot{z} \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) - e \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

и два других аналогичных. Сокращая и группируя члены, найдем

$$m\ddot{x} = -e \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{e}{c} \left[\dot{y} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) - \dot{z} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \right], \\ m\ddot{y} = -e \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{e}{c} \left[\dot{z} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \dot{x} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \right], \\ m\ddot{z} = -e \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{e}{c} \left[\dot{x} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) - \dot{y} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \right].$$

Уравнения эти совпадут с уравнением движения (1), если под F_x , F_y , F_z подразумевать компоненты вектор-потенциала, через который компоненты магнитного поля выражаются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \\ H_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \\ H_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Таким образом доказано, что и при любом постоянном магнитном поле уравнения движения электрона приводятся к каноническому виду (55).

По введенному нами определению вектор импульса получается геометрическим сложением вектора скорости, умноженного на массу, и вектор-потенциала, умноженного на заряд, деленный на скорость света. Первый мы выше называли кинетическим, а второй—потенциальным импульсом. Импульс, следовательно, имеет направление, отличное от направления скорости.

Согласно (58) Гамильтонова функция зависит от p_x , p_y , p_z , x , y , z и не содержит явным образом времени. Отсюда вытекает, что она является интегралом движения, то есть во все время движения сохраняет постоянное значение. Действительно,

умножая уравнения первой группы канонической системы на $\dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z$, а уравнения второй—на $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ и вычитая сумму вторых из суммы первых, получим

$$0 = \frac{\partial H}{\partial p_x} \dot{p}_x + \frac{\partial H}{\partial p_y} \dot{p}_y + \frac{\partial H}{\partial p_z} \dot{p}_z + \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial H}{\partial z} \dot{z} = \frac{dH}{dt}$$

То есть, действительно, H постоянно. Но функция эта согласно (57) равна сумме кинетической и потенциальной электростатической энергий электрона. Таким образом, полная энергия постоянна и не зависит от магнитного поля, как нами уже было найдено в §).

11. Вектор—потенциал простейших полей. В дальнейшем нам нужно будет знать форму вектора-потенциала для простейших магнитных полей. Поэтому мы остановимся несколько на вычислении его.

В учебниках теории электричества ¹⁾ показывают, что элемент линейного электрического тока интенсивности J и длины ds , составляющий с координатными осями углы, косинусы которых суть λ, μ, ν , вызывает в окружающем его пустом пространстве магнитное поле, для которого компоненты вектор-потенциала суть:

$$F_x = \frac{J\lambda ds}{r_1}, \quad F_y = \frac{J\mu ds}{r_1}, \quad F_z = \frac{J\nu ds}{r_1},$$

где r_1 —расстояние от элемента до точки x, y, z , для которой вычисляется вектор-потенциал. Действительно, по (59) мы получим для компонент поля, обусловленного элементом:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= Jds \left[\nu \frac{\partial \left(\frac{1}{r_1} \right)}{\partial y} - \mu \frac{\partial \left(\frac{1}{r_1} \right)}{\partial z} \right] = \frac{Jds}{r_1} (\nu\beta - \mu\gamma), \\ H_y &= Jds \left[\lambda \frac{\partial \left(\frac{1}{r_1} \right)}{\partial z} - \nu \frac{\partial \left(\frac{1}{r_1} \right)}{\partial x} \right] = \frac{Jds}{r_1} (\lambda\gamma - \nu\alpha), \\ H_z &= Jds \left[\mu \frac{\partial \left(\frac{1}{r_1} \right)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \left(\frac{1}{r_1} \right)}{\partial y} \right] = \frac{Jds}{r_1} (\mu\alpha - \lambda\beta), \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

где для косинусов углов, составляемых радиусом-вектором r_1 с осями координат, введены обозначения

$$\frac{x}{r_1} = \alpha, \quad \frac{y}{r_1} = \beta, \quad \frac{z}{r_1} = \gamma$$

Формулы (60) выражают, как известно, закон Био-Савара, по которому магнитная сила, вызванная элементом тока, перпен-

¹⁾ См. напр. Abraham und Föppl, Theorie der Elektrizität I, p. 277, 1907.

дикулярна к этому элементу и радиусу вектору, соединяющему элемент с рассматриваемой точкой пространства, а по величине прямо пропорциональна силе тока и длине элемента и обратно пропорциональна квадрату расстояний между элементом и рассматриваемой точкой.

Если ток протекает по линейному проводнику конечной длины, то компоненты вектор-потенциала представляются интегралами

$$F_x = J \int \frac{dx}{r_1}, F_y = J \int \frac{dy}{r_1}, F_z = J \int \frac{dz}{r_1}.$$

Представим себе в частности, что ток циркулирует в кольце радиуса a , лежащем в плоскости xy . Вектор-потенциал будет иметь значение

$$F_x = J \int \frac{dx}{r_1}, F_y = J \int \frac{dy}{r_1}, F_z = 0 \quad (61)$$

где интегралы распространяются по кольцу, обтекаемому током. Если возьмем центр кольца за начало полярной системы координат, ось которой совпадает с осью z -ов, и обозначим через r, ϑ, φ координаты точки, для которой вычисляется вектор-потенциал, а через $a, \pi/2, \vartheta', \varphi'$ — координаты точки на кольцевом контуре, то мы должны положить в формулах (61)

$$dx = -a \sin \varphi' d\varphi', \quad dy = a \cos \varphi' d\varphi'$$

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \vartheta \cos(\varphi - \varphi').$$

Разлагая затем под знаком интеграла $\frac{1}{r_1}$, по возрастающим положительным степеням $\frac{a}{r}$ и выполняя квадратуры, мы найдем

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -J \frac{\pi a^2}{r^2} \sin \vartheta \sin \varphi + R_x, \\ F_y &= J \frac{\pi a^2}{r^2} \sin \vartheta \cos \varphi + R_y, \\ F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Через R_x и R_y обозначены ряды, расположенные по возрастающим степеням $\frac{a}{r}$, где низший член содержит $\left(\frac{a}{r}\right)^3$. Разложение (62) действительно для всех точек пространства, лежащих вне сферы радиуса a . Для точек, лежащих внутри сферы, можно написать аналогичные разложения по возрастающим положительным степеням $\frac{r}{a}$. Но в дальнейшем эти точки не будут нас интересовать.

Мы предположим теперь, что радиус контура очень мал по сравнению с r , что ряды R_x и R_y могут быть отбро-

шены, и компоненты вектор-потенциала будут выражаться лишь одним членом, обратно пропорциональным квадрату r . Если ввести прямоугольные координаты на место полярных, то можно написать

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{J\pi a^2 y}{r^3}, \\ F_y &= \frac{J\pi a^2 x}{r^3}, \\ F_z &= 0. \end{aligned}$$

Но известно, что магнитное поле, создаваемое током, обтекающим замкнутый контур—то же, которое может быть вызвано двойным магнитным слоем, ограниченным этим контуром. При бесконечно малом a этот двойной слой превращается в магнитный диполь, причем площадь кольца, умноженная на силу тока, то есть $J\pi a^2$ есть момент диполя. Так как ось диполя направлена в нашем случае параллельно оси z -ов, то мы обозначим момент его через M_z . Таким образом, вектор потенциал нашего диполя имеет форму

$$F_x = -\frac{M_z y}{r^3}, \quad F_y = \frac{M_z x}{r^3}, \quad F_z = 0. \quad (63)$$

Если ось диполя направлена как-нибудь иначе, то можно разложить момент диполя на три компоненты, параллельные трем координатным осям. Если компоненты эти обозначим через M_x , M_y , M_z , то результирующее поле можно рассматривать, как обусловленное тремя диполями, каждый из которых параллелен одной из координатных осей. Циклической заменой координат в (63) мы получим вектор-потенциалы, соответствующие диполям M_x и M_y . Наконец, складывая выражение вектор-потенциала для всех трех диполей, получим вектор-потенциал диполя, произвольно ориентированного ¹⁾.

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{1}{r^3} (M_y z - M_z y), \\ F_y &= \frac{1}{r^3} (M_z x - M_x z), \\ F_z &= \frac{1}{r^3} (M_x y - M_y x). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Зная вектор-потенциал магнитного диполя, мы можем без большого труда найти и вектор-потенциал одиночного магнитного полюса. Для этого мы представим себе бесконечно длинный линейный магнит, расположенный на оси z -ов, положительный полюс которого находится в $z = 0$, а отрицательный— в $z = -\infty$. Так как последний бесконечно далек, действие

¹⁾ Ср. напр. Abraham und Föppl, Theorie der Elektrizität I, p. 236, 1907.

магнита будет эквивалентно действию изолированного положительного магнитного полюса в начале координат. Если мы обозначим через μ момент нашего магнита, отнесенный к единице длины, то μ будет вместе с тем и свободный магнитный заряд на конце магнита. Момент элемента магнита, длины $d\zeta$ равен $\mu d\zeta$, а потому вектор-потенциал всего магнита будет согласно (63)

$$F_x = -\mu y \int_{-\infty}^0 \frac{d\zeta}{[x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}},$$

$$F_y = \mu x \int_{-\infty}^0 \frac{d\zeta}{[x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}},$$

$$F_z = 0.$$

Выполняя здесь квадратуры, найдем легко

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -\frac{\mu y}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{z}{r}\right), \\ F_y &= \frac{\mu x}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{z}{r}\right), \\ F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Эти формулы для вектор-потенциала магнитного полюса не обладают шаровой симметрией, присущей понятию полюса. Это происходит от того, что мы получили поле полюса, как предел поля магнита, расположенного на одной из координатных осей. при бесконечном возрастании длины этого магнита. Более симметричные формулы можно было бы получить, предполагая, что три одинаковых магнита расположены по трем координатным осям. При этом, чтобы получить в начале координат свободный заряд, равный μ , нужно взять момент единицы длины магнитов равным $\frac{\mu}{3}$. Но формулы, полученные таким путем, будут сложнее (65).

Вообще, требованием, чтобы данное магнитное поле получилось при помощи формулы (59) из вектор-потенциала, форма последнего еще не определяется однозначным образом. Действительно, можно всегда к компонентам вектор-потенциала прибавлять соответственно выражения вида $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}$, где ψ — совершенно произвольная функция x, y, z . От этого, как легко видеть, значения H_x, H_y, H_z , получаемые из (59), не изменятся. Этим обстоятельством можно иногда пользоваться, чтобы полу-

чить выражения вектор-потенциала, наиболее удобные для вычисления.

Наконец, опять-таки методом перехода к пределу нам не трудно будет получить и вектор-потенциал однородного магнитного поля. Действительно, магнитный полюс, расположенный в точке $x=0$, $y=0$, $z=\zeta$, дает согласно (65) вектор-потенциал

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\mu y}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{z - \zeta}{r} \right), \\ F_y &= \frac{\mu x}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{z - \zeta}{r} \right), \\ F_z &= 0. \end{aligned}$$

Представим себе, что полюс этот удаляется в бесконечность по отрицательной оси z -ов, а величина его при этом возрастает прямо пропорционально квадрату его удаления от начала координат, так что пусть будет

$$\mu = H_z \zeta^2$$

где H_z —некоторая постоянная. В пределе получим, очевидно, однородное магнитное поле напряжения H_z , направленное параллельно оси z -ов. Вектор-потенциал этого поля будет

$$\begin{aligned} F_x &= \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} -\frac{H_z \zeta^2 y}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{z - \zeta}{r} \right), \\ F_y &= \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} \frac{H_z \zeta^2 x}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{z - \zeta}{r} \right), \\ F_z &= 0. \end{aligned}$$

Так как для $r - \zeta > \sqrt{x^2 + y^2}$ имеем разложение

$$\frac{z - \zeta}{r} = 1 - \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{(r - \zeta)^2} + \dots,$$

то найдем

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -\frac{H_z y}{2}, \\ F_y &= \frac{H_z x}{2}, \\ F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Таков вектор-потенциал однородного магнитного поля, параллельного оси z -ов. Если же имеются также компоненты поля, параллельные другим осям, то рассуждением, аналогичным тому, которым мы получили формулы (64) для вектор-потенциала произвольно ориентированного диполя, найдем

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \frac{1}{2} (H_y z - H_z y), \\ F_y &= \frac{1}{2} (H_z x - H_x z), \\ F_z &= \frac{1}{2} (H_x y - H_y x). \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Таково выражение вектор-потенциала для произвольно направленного однородного магнитного поля.

12. Метод Гамильтона—Якоби. Гамильтон и Якоби доказали, что задача интегрирования канонической системы уравнений (55) эквивалентна задаче интегрирования одного уравнения с частными производными первого порядка.

Действительно, пусть дана какая-нибудь функция H от шести переменных p_x, p_y, p_z, x, y, z .

$$H(p_x, p_y, p_z, x, y, z).$$

Подставим в ней на место импульсов p_x, p_y, p_z частные производные некоторой функции W по координатам x, y, z и приравняем ее постоянной α_1 . Получим уравнение с частными производными

$$H\left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}, x, y, z\right) = \alpha_1 \quad (68)$$

Пусть мы нашли такое решение этого уравнения

$$W = \varphi(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \alpha_4, \quad (69)$$

которое кроме постоянной α_1 , содержит две произвольные постоянные α_2 и α_3 , не считая аддитивной постоянной α_4 , которая, очевидно, войдет потому, что уравнение (68) не содержит самой функции W , а лишь ее производные. Пусть интеграл (69) есть полный интеграл. Это значит, что образуя частные производные

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

исключая из этих равенств α_2 и α_3 и разрешая полученное соотношение относительно α_1 , мы получим обратно наше уравнение (68). Требуется таким образом, чтобы равенства (70) были разрешимы относительно всех трех постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы было

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_3} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha_3} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \alpha_1} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \alpha_2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \alpha_3} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (71)$$

Положим, что это условие выполнено. Возьмем частные производные от φ по x, y, z и положим их равными p_x, p_y, p_z . Затем возьмем частные производные по постоянным $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и положим их равными $\beta_1 + t, \beta_2, \beta_3$, где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ три новые произвольные постоянные. Совокупность шести равенств

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \beta_1 + t = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}, \\ p_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \beta_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_2}, \\ p_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \beta_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_3}, \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

составит полную систему интегралов канонических уравнений (55), где H та же функция, что и в (68). Чтобы доказать это, поступим следующим образом. Если в уравнение (68) на место производных $\frac{\partial W}{\partial x}$ и т. д. подставить их значения (70), то получится тождество

$$H \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, x, y, z \right) = \alpha_1. \quad (73)$$

Дифференцируя его по входящим в него аргументам, получим ряд новых тождеств. Дифференцируем сначала по $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Вместо $\frac{\partial H}{\partial x}$ и т. д. пишем $\frac{\partial H}{\partial p_x}$ и т. д. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha_1} + \frac{\partial H}{\partial p_z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \alpha_1} &= 1, \\ \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_2} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha_2} + \frac{\partial H}{\partial p_z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \alpha_2} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_3} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha_3} + \frac{\partial H}{\partial p_z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \alpha_3} &= 0. \end{aligned}$$

С другой стороны дифференцируем по времени последние три равенства (72)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_1} \dot{x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha_1} \dot{y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \alpha_1} \dot{z} &= 1, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_2} \dot{x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha_2} \dot{y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \alpha_2} \dot{z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_3} \dot{x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha_3} \dot{y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \alpha_3} \dot{z} &= 0.\end{aligned}$$

Вычитая из этих равенств почленно три предыдущие, найдем

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_1} \left(\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p_x} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha_1} \left(\dot{y} - \frac{\partial H}{\partial p_y} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \alpha_1} \left(\dot{z} - \frac{\partial H}{\partial p_z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_2} \left(\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p_x} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha_2} \left(\dot{y} - \frac{\partial H}{\partial p_y} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \alpha_2} \left(\dot{z} - \frac{\partial H}{\partial p_z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \alpha_3} \left(\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p_x} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial \alpha_3} \left(\dot{y} - \frac{\partial H}{\partial p_y} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial \alpha_3} \left(\dot{z} - \frac{\partial H}{\partial p_z} \right) &= 0.\end{aligned}$$

Это три однородных линейных уравнения, которым должны удовлетворять величины $\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p_x}$, $\dot{y} - \frac{\partial H}{\partial p_y}$, $\dot{z} - \frac{\partial H}{\partial p_z}$. Но согласно (71) детерминант этой системы уравнений не равен нулю. Следовательно, удовлетворяющие ему величины должны сами быть тождественно равными нулю. Таким образом, доказано, что удовлетворяются последние три уравнения (55). Чтобы доказать, что удовлетворяются и первые три, дифференцируем сначала тождество (73) по координатам x, y, z . Получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial H}{\partial p_z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial H}{\partial p_z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial p_x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial H}{\partial p_y} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial H}{\partial p_z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0.\end{aligned}$$

С другой стороны дифференцируем по времени первые три равенства (72):

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \dot{x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \dot{y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \dot{z}, \\ \dot{p}_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \dot{x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \dot{y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \dot{z}, \\ \dot{p}_z &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \dot{x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \dot{y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \dot{z}.\end{aligned}$$

Сравнивая эти три равенства с тремя предыдущими и принимая во внимание доказанные уже три равенства $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}$ и т. д., найдем, что и первые три уравнения (55) удовлетворены. Таким

образом эквивалентность уравнения (68) канонической системе (55) доказана.

Мы можем, следовательно, для нахождения путей, по которым электрон может двигаться в постоянном электромагнитном поле, поступать следующим образом. В выражении Гамильтоновой функции (58) для нашей проблемы подставляем на место p_x, p_y, p_z производные $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$ и приравниваем постоянной. Последняя имеет значение энергии и лишь для симметрии обозначена через α_1 . Значение ее определяется, очевидно, по начальным условиям

$$\alpha_1 = \frac{mv_0^2}{2} + U_0,$$

где U_0 —потенциальная энергия в начальный момент. Для полученного уравнения с частными производными

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{e}{c} F_x\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{e}{c} F_y\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{e}{c} F_z\right)^2 = 2m(\alpha_1 - e\varphi) \quad (74)$$

находим полный интеграл, а из него простым дифференцированием—интегралы (72) нашей проблемы.

Интегралы эти получаются сразу в очень удобной форме. Именно, последние два, содержа только координаты, представляют собой уравнения траектории электрона. Третий же с конца, единственный, содержащий явным образом время, определяет положение электрона на траектории в момент t . В дальнейшем для обозначения частной производной $\frac{\partial W}{\partial u}$ по какой-ни-

будь переменной u мы будем употреблять символ p_u , обозначающий равную этой производной компоненту импульса по координате u .

Нужно сказать несколько слов о физическом значении функции W . Она носит название «действия». Приращение ее за элемент времени выразится, очевидно, так:

$$dW = p_x dx + p_y dy + p_z dz = (p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z}) dt.$$

Подставляя сюда значения импульсов (56), получим

$$\frac{dW}{dt} = mv^2 + \frac{e}{c} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}).$$

Первый член справа—удвоенная кинетическая энергия. Если второй член мы обозначим через L_H , то будет

$$W = \int_{t_0}^t (2T + L_H) dt$$

В отсутствии магнитного поля $L_H = 0$ и тогда просто

$$W = \int_{t_0}^t 2T dt.$$

Может явиться сомнение, определяет ли уравнение с частными производными (74) однозначным образом движение электрона в электромагнитном поле. Дело в том, что вектор-потенциал не определяется однозначным образом тем магнитным полем, которое должно из него получаться посредством формул (59). Если вместо вектора с компонентами F_x, F_y, F_z мы возьмем вектор с компонентами

$$F_x + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad F_y + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad F_z + \frac{\partial f}{\partial z},$$

где f — совершенно произвольная функция от координат, то посредством формул (59) мы получим то же магнитное поле, что и раньше. Но уравнение с частными производными изменится и примет вид

$$\left[p_x - \frac{e}{c} \left(F_x + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right]^2 + \left[p_y - \frac{e}{c} \left(F_y + \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right]^2 + \left[p_z - \frac{e}{c} \left(F_z + \frac{\partial f}{\partial z} \right) \right]^2 = 2m (\alpha_1 - e\varphi)$$

Если прежде мы имели полный интеграл вида (69), то теперь очевидно будем иметь

$$W - \frac{e}{c} f(x, y, z) = \varphi(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \alpha_4$$

Таким образом, новая функция W отличается от старой на произвольную функцию $f(x, y, z)$, умноженную на $\frac{e}{c}$.

Но определяемое ею движение то же, что и раньше. Действительно, интегралы, определяющие движение электрона, а именно вторая группа интегралов (72), получаются дифференцированием по постоянным $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. А так как произвольная функция этих постоянных не содержит, то, очевидно, присутствие ее не влияет на форму этих интегралов. Изменяются только интегралы первой группы (72), то есть мы будем приписывать иные значения импульсам, величинам, играющим лишь вспомогательную роль при разыскании движений.

13. Преобразование к новым независимым переменным. При решении механических задач оказывается часто нужным вводить вместо прямоугольных Декартовых координат x, y, z новые переменные, лучше соответствующие симметрии данной проблемы.

Если даны три семейства поверхностей

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

где поверхности одного семейства различаются разными значениями u , v или w , то можно характеризовать точку пространства теми значениями, которые величины u , v , w принимают для тех трех поверхностей, которые пересекаются в этой точке.

Мы будем пользоваться исключительно ортогональными переменными, то-есть такими, для которых поверхности трех семейств (75) пересекаются под прямыми углами. Если введем обозначение

$$\nabla u = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \quad (76)$$

и т. д.,

то косинус угла между нормалью к поверхности $u = \text{Constans}$ и осью x -ов выразится через

$$\cos(n_u, x) = \frac{\partial u / \partial x}{\nabla u}$$

Аналогичны выражения для остальных косинусов углов между нормальями к поверхностям (75) и осями x , y , z -ов. Условиями ортогональности семейств (75) являются таким образом равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Введение новых переменных мы будем применять по большей части к уравнению с частными производными (74). По свойству производных имеем:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p_u \frac{\partial u}{\partial x} + p_v \frac{\partial v}{\partial x} + p_w \frac{\partial w}{\partial x}, \\ p_y &= p_u \frac{\partial u}{\partial y} + p_v \frac{\partial v}{\partial y} + p_w \frac{\partial w}{\partial y}, \\ p_z &= p_u \frac{\partial u}{\partial z} + p_v \frac{\partial v}{\partial z} + p_w \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

В отсутствии магнитного поля в уравнения (74) войдет лишь сумма квадратов частных производных

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = (\nabla W)^2$$

Вводя на их место новые производные при помощи формул (78), принимая во внимание ортогональность новых переменных и пользуясь сокращениями (76),

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = (\nabla u p_u)^2 + (\nabla v p_v)^2 + (\nabla w p_w)^2 \quad (79)$$

Здесь в ∇u , ∇v , ∇w должны быть подставлены новые переменные на место x , y , z .

Когда даны не новые переменные в функциях от x , y , z , а наоборот последние в функциях от первых, можно воспользоваться другими выражениями для ∇u и т. д. Чтобы найти их, разрешим равенства (78) относительно p_u , p_v , p_w . Получим в силу ортогональности

$$(\nabla u)^2 p_u = p_x \frac{\partial u}{\partial x} + p_y \frac{\partial u}{\partial y} + p_z \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$(\nabla v)^2 p_v = p_x \frac{\partial v}{\partial x} + p_y \frac{\partial v}{\partial y} + p_z \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$(\nabla w)^2 p_w = p_x \frac{\partial w}{\partial x} + p_y \frac{\partial w}{\partial y} + p_z \frac{\partial w}{\partial z},$$

Сравнивая эти равенства с равенствами

$$p_u = p_x \frac{\partial x}{\partial u} + p_y \frac{\partial y}{\partial u} + p_z \frac{\partial z}{\partial u}$$

и т. д.,

найдем такие выражения для производных $\frac{dx}{du}$ и т. д.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{(\nabla u)^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{dy}{du} = \frac{1}{(\nabla u)^2} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{dz}{du} = \frac{1}{(\nabla u)^2} \frac{\partial u}{\partial z},$$

и аналогично для переменных v и w . Возводя последние равенства в квадрат, складывая и извлекая корень, найдем

$$\nabla u = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}} \quad (80)$$

и т. д.

Здесь мы находим ∇u , ∇v , ∇w непосредственно в функциях от u , v , w . Для производных от новых переменных по старым найдем

$$\frac{du}{dx} = \frac{dx/du}{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} \quad (81)$$

и т. д.

14. Интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби методом разделения переменных. Если дано уравнение

$$H(p_x, p_y, p_z, x, y, z) = \alpha_1, \quad (82),$$

то целесообразным выбором новых переменных u, v, w и алгебраическими преобразованиями часто удается привести его к виду

$$\varphi(p_u, u, \alpha_1) = \Phi(p_v, p_w, v, w, \alpha_1) \quad (83)$$

где φ и Φ какие-либо две функции. Так как из независимых переменных слева присутствует лишь u , а справа, наоборот, u отсутствует, то этому уравнению можно удовлетворить, полагая, что производная p_u зависит только от u , а производные p_v и p_w каждая только от обоих переменных v и w . Так как при этом левая сторона равенства окажется функцией только от u , а правая — только от v и w , то очевидно, каждая сторона равна одной и той же постоянной, которую мы обозначим через α_2 . Имеем таким образом

$$\left. \begin{aligned} \varphi(p_u, u, \alpha) &= \alpha_2, \\ \Phi(p_v, p_w, v, w, \alpha_1) &= \alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

При этом может оказаться, что второе из этих уравнений путем алгебраических преобразований приведет к виду

$$\psi(p_v; v, \alpha_1, \alpha_2) = \chi(p_w, w, \alpha_1, \alpha_2) \quad (85)$$

где ψ и χ новые две функции. На практике может оказаться, что для достижения этого результата нужно заменить переменные v и w через новые. Но это будет значить лишь, что первоначальный выбор переменных был неудачен. Мы предполагаем, что эти переменные были выбраны так, что разделение (85) возможно. Тогда мы можем положить, что p_v зависит только от v , а p_w только от w , и приравнять левую и правую сторону новой постоянной α_3 , так что будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \psi(p_v, v, \alpha_1, \alpha_2) &= \alpha_3, \\ \chi(p_w, w, \alpha_1, \alpha_2) &= \alpha_3. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Разрешая первое из уравнений (84) относительно p_u , а уравнения (86) относительно p_v и p_w , найдем значения этих производных в функциях от соответствующего каждой из них переменного и от постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\left. \begin{aligned} p_u &= p_u(u, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ p_v &= p_v(v, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ p_w &= p_w(w, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Если теперь мы положим

$$\begin{aligned} W &= \int p_u(u, \alpha_1, \alpha_2) du + \int p_v(v, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) dv + \\ &+ \int p_w(w, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) dw + \alpha_1. \end{aligned} \quad (88),$$

то это будет искомый полный интергал уравнения (82). В этом легко убедиться, заметив, что он содержит нужное число произвольных постоянных, и что, проделывая в обратном порядке операции, которыми он был получен, мы можем, исключая постоянные, вернуться к дифференциальному уравнению (82).

В частности, отделение переменной u бывает всегда возможно, когда сама она не встречается в уравнении, а лишь производная по ней. Тогда отделение ее происходит, если разрешить дифференциальное уравнение относительно p_u . Первое из равенств (84) показывает тогда, что p_u может быть положено тогда равным постоянной. Следовательно, если u отсутствует в уравнении, можно на место p_u подставить произвольную постоянную и пытаться разделить остальные две переменные v и w .

15. Некоторые особенности движений, находящихся методом разделения переменных. Движение, описываемое уравнениями, получаемыми только что описанным способом, отличается некоторыми интересными особенностями.

Из трех интегралов, получаемых дифференцированием (88) по $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, последние два дают уравнение траектории. Мы видим из (87), что из этих двух уравнений по крайней мере одно не содержит одной из переменных u, v, w . Именно интеграл, получаемый дифференцированием по α_3 , не содержит переменной u . Во многих случаях оказывается также, что p_v или p_w не содержит α_2 и тогда и второй интеграл зависит только от двух переменных.

Представим себе в частности, что уравнение с частными производными имеет форму

$$f(p_u, u) + \frac{g(p_v, p_w, v, w)}{\varphi(u)} = \alpha_1 \quad (89)$$

Отделение переменной u дает

$$\left. \begin{aligned} [f(p_u, u) - \alpha_1] \varphi(u) &= \alpha_2, \\ g(p_v, p_w, v, w) &= -\alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Когда мы разделим переменные v и w , мы введем новую постоянную α_3 . Но p_u , определяемое из первого из равенств (90), не содержит α_3 . Поэтому интеграл, получаемый дифференцированием (88) по α_3 не зависит от u . Форма этого интеграла не изменится, если к выражению потенциальной энергии мы прибавим произвольную функцию ψ от u , то-есть введем произвольную дополнительную силу, действующую в направлении координаты u . Действительно, если уравнение с частными производными будет

$$f(p_u, u) + \psi(u) + \frac{g(p_v, p_w, v, w)}{\varphi(u)} = \alpha_1,$$

то изменится лишь первое из уравнений (90), второе же останется неизменным. В (88) изменится лишь форма первого из

интегралов, а так как он не содержит постоянной α_3 , то интеграл движения, связывающий v и w , не изменится.

Сказанное лучше всего поясняется примером, с которым мы встретимся в следующей главе, изучая движение электрона в поле электрического диполя. Если определять положение электрона полярными координатами r, ϑ, φ , то в поле диполя уравнение с частными производными имеет форму (89), если под u подразумевать координату r , а под v и w — ϑ и φ . Поэтому один из интегралов будет содержать лишь ϑ и φ , то-есть определять проекцию траектории на сферу радиуса единицы, и эта проекция нисколько не изменится, если кроме силы, обусловленной диполем, мы предположим еще существование произвольной центральной силы, зависящей лишь от расстояния r . Так например, мы можем предположить, что в начале координат кроме диполя находится электрический заряд.

Мы увидим, что проекция эта есть траектория сферического маятника. Действительно, мы можем подобрать такую центральную силу, прибавив которую к силе диполя, мы сделаем траекторию электрона сколь угодно близко лежащей к траектории сферического маятника. Например, мы можем добавить к выражению потенциальной энергии член

$$a(r - r_0)^2,$$

где a положительно. Если в начальный момент электрон лежит на сфере радиуса r_0 и его скорость параллельна поверхности этой сферы, то при достаточно большом a траектория будет сколь угодно мало отличаться от траектории сферического маятника.

16. Движения условно-периодические и родственные им. Уравнение Гамильтона-Якоби — квадратное в частных производных. В дальнейшем мы будем постоянно встречаться с тем случаем, когда члены, содержащие производные, приводятся к сумме квадратов, так что уравнение принимает форму

$$\sum \psi_i p_{ui}^2 + \Psi = \alpha_1, \quad (91)$$

где ψ_i и Ψ суть функции от переменных u_i . По разделении переменных для p_{ui} получаются выражения вида

$$p_{ui} = \sqrt{f_i(u_i)}. \quad (92)$$

Очевидно, переменные u_i будут изменяться в таких пределах, где $f(u_i)$ положительно, так как в противном случае для p_{ui} получалось бы мнимое значение. Область изменения u_i ограничивается таким образом корнями уравнения

$$f_i(u_i) = 0. \quad (93)$$

Пусть два таких корня, между которыми f_i положительно, суть u_{i1} и u_{i2} , при чем второй больше первого. В тех случаях, с которыми мы будем иметь дело, переменная u_i , имея значение,

лежащее между этими корнями, будет изменяться периодически, достигая поочередно того и другого корня (предполагая, что эти корни простые). Действительно, пусть в некоторый момент времени u_i возрастает, приближаясь к u_{i2} . Оно перестанет возрастать лишь когда будет $u_i = 0$. Но так как левая сторона (91) есть функция Гамильтона, то из канонических уравнений имеем

$$u_i = 2\psi_i p_{ii}.$$

Чтобы было $u_i = 0$ должно быть либо $\psi_i = 0$, что у нас не будет встречаться, либо $p_{ii} = 0$. Но согласно (92) последнее имеет место лишь для корней уравнения (93). Таким образом u_i , возрастая достигнет значения u_{i2} . Если корень этот простой, то достигнув его u_i должно будет убывать. Убывание это по только что изложенной причине не прекратится, пока u_i не достигнет значения u_{i1} , после чего оно опять начнет возрастать. Можно показать, что асимптотическое приближение u_i к какому-либо значению возможно лишь в случае кратных корней уравнения (93).

Движение называется условно-периодическим, когда все координаты, характеризующие положение электрона в пространстве, либо изменяются периодически между двумя постоянными пределами, как в только что разобранном случае, либо суть угловые координаты, которые хоть и могут изменяться непрерывно в одном направлении, но возрастанию которых на 2π соответствует возвращение электрона к тому же положению в пространстве. Такое движение вообще говоря не является периодическим, потому что хотя каждая из переменных и изменяется периодически, но описывает свой период в различные промежутки времени. Если эти промежутки несоизмеримы между собой, то электрон никогда не вернется в точности в первоначальное положение, так что траектория его может с течением времени заполнить везде плотно всю часть пространства, ограниченную поверхностями $u_i = u_{i1}$ и $u_i = u_{i2}$. Соизмеримость может наступать лишь при определенных зависимостях между значениями произвольных постоянных. При соблюдении этих зависимостей движение периодически. Отсюда проистекает название условно-периодических движений.

С условно-периодическими движениями мы встречались уже в первой главе, разбирая движение электрона под действием точечного заряда и магнитного полюса, находящихся в одной и той же точке пространства. Согласно формуле (54) движение это периодически, когда синус угла при вершине конуса, по которому вьется траектория, выражается рациональной дробью. А это согласно второй формуле (51) налагает условие на постоянную площадей.

Но не всегда область положительных значений функции f_i бывает ограничена двумя корнями уравнения (93). Мы будем встречать еще следующие случаи.

Может быть f_i положительно для всех значений u_i больших u_{i1} , при чем последняя величина—наибольший корень уравнения (93), если только мы предположим опять, что кратные корни не встречаются. Тогда u_i будет изменяться в пределах между u_{i1} и бесконечностью. Так как в наших примерах бесконечным значениям координат u_i будут соответствовать бесконечно удаленные точки пространства, то мы будем иметь в этом случае траектории, касающиеся один раз поверхности $u_i = u_{i1}$, а обоими концами уходящие в бесконечность.

Другой возможный случай, когда область положительных значений f_i ограничена с одной стороны какой либо особой точкой, например, полюсом функции f_i . Пусть, например, такой полюс находится в точке $u_i = 0$ и пусть f_i положительно между этой точкой и точкой u_{i1} , представляющий наименьший по абсолютному значению корень уравнения (93). Траектория, касаясь один раз поверхности $u_i = u_{i1}$, обоими концами будет упираться в особую поверхность $u_i = 0$, которая впрочем в рассматриваемых нами случаях будет сводиться к одной особой точке пространства. Попытки продолжить траекторию за пределы особой точки едва ли имели бы фактический смысл.

Наконец, третий возможный случай—когда f_i положительно для всех положительных значений u_i между особой точкой $u_i = 0$ и бесконечностью. Здесь траектория будет состоять из одной ветви, один конец которой будет в точке $u_i = 0$, другой—в бесконечности. При этом траектория эта может описываться электроном в обоих направлениях.

ГЛАВА III.

Движения с постоянной массой.

17. Движения в поле точечного заряда. Чтобы иллюстрировать изложенный в предыдущей главе метод решения динамических задач, и имея в виду применение к теории строения атома, рассмотрим еще раз уже решенную в первой главе задачу движения электрона под действием Кулоновой силы. Так как потенциальная энергия в этом случае равна $\frac{ee'}{r}$, то уравнение Гамильтона-Якоби будет

$$\frac{1}{2m} [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2] + \frac{ee'}{r} = \alpha_1, \quad (94)$$

где α_1 —полная энергия, которую мы раньше обозначали через ε . Введем пространственные полярные координаты соотношением

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta. \quad (95)$$

Систему координат мы берем теперь произвольно ориентированную относительно плоскости движения и сообразно этому для характеристики траектории мы должны будем найти два уравнения между тремя переменными r , ϑ , φ .

По формуле (80) имеем

$$\nabla r = 1, \quad \nabla \vartheta = \frac{1}{r}, \quad \nabla \varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta},$$

так что, принимая во внимание (79), мы напомним наше уравнение (94) в виде

$$\frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right] + \frac{ee'}{r} = \alpha_1. \quad (96)$$

Так как φ не входит сюда, положим p_φ постоянным

$$p_\varphi = \alpha_3. \quad (97)$$

Если затем умножим наше уравнение на r^2 , то переменные r и ϑ можно разделить, введя новую произвольную постоянную α_2^2 . Получим

$$\left. \begin{aligned} p_r^2 r^2 - 2m(\alpha_1 r^2 - ee' r) &= -\alpha_2^2, \\ p_\vartheta^2 + \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta} &= \alpha_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Определив отсюда p_r и p_ϑ , найдем функцию W :

$$\begin{aligned} W &= \int \sqrt{2m \left(\alpha_1 - \frac{ee'}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr + \\ &+ \int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta + \alpha_3 \varphi + \alpha_4. \end{aligned} \quad (99)$$

Дифференцируя по постоянным, находим интегралы

$$\left. \begin{aligned} t + \beta_1 &= \int \sqrt{\frac{m dr}{2m \left(\alpha_1 - \frac{ee'}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}}, \\ \beta_2 &= \int r^2 \sqrt{\frac{-\alpha_2 dr}{2m \left(\alpha_1 - \frac{ee'}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} + \int \sqrt{\frac{\alpha_2 d\vartheta}{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}}}, \\ \beta_2 &= - \int \frac{\alpha_3 d\vartheta}{\sin^2 \vartheta \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}}}, \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

В этих уравнениях квадратуры выполняются без труда. Первое из них, которого мы не будем подробно разбирать, определяет момент времени, в который достигается данная точка траектории. Форма же и положение в пространстве последней определяется вторым и третьим уравнениями. Аналогично (28) мы введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} p &= -\frac{\alpha_2^2}{mee'}, \\ \eta &= \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{me^2e'^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

при чем, как будет видно, p и η будут опять обозначать параметр и эксцентриситет конического сечения. Затем положим

$$\cos i = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}. \quad (102)$$

Это можно сделать, потому что по второму из равенств (98) всегда $\alpha_2^2 > \alpha_3^2$. Во втором уравнении (100) квадратура по r выполняется так же, как и в § 6. Квадратура же по ϑ выполняется, если в интеграле второго уравнения принять за переменную $\cos \vartheta$, а в интеграле третьего уравнения — $\operatorname{ctg} \vartheta$. Оба эти уравнения примут вид:

$$\beta_2 = -\arccos \left[\frac{p}{\eta} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right] + \arcsin \left[\frac{\cos \vartheta}{\sin i} \right],$$

$$\beta_3 = -\arcsin [\operatorname{ctg} i \operatorname{ctg} \vartheta] + \varphi.$$

Чтобы разобраться в геометрическом смысле этих уравнений, перепишем их так:

$$\left. \begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) &= \sin i \sin \left\{ \beta_2 + \arccos \left[\frac{p}{\eta} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right) \right] \right\}, \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) &= \operatorname{tg} i \sin (\varphi - \beta_3). \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

Пусть на рис. 9 в точке O находится неподвижный заряд e' , а кривая AB представляет отрезок траектории. Пусть P —точка на траектории с координатами r , ϑ , φ . Тогда $OP = r$. Пусть CE отрезок большого круга, по которому плоскость экватора ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$) пересекает сферу радиуса единицы, а F —точка, в которой эта сфера встречается с продолжением OP . Тогда угол FOE равен $\frac{\pi}{2} - \vartheta$. Прямую OC мы примем за ось x -ов, то-есть от нее вправо будем считать углы φ . Тогда для

18. Движение под действием точечного заряда и однородного магнитного поля. Пусть теперь, кроме поля заряда e' у нас имеется однородное магнитное поле H , направленное по положительной оси z -ов. По формулам (66) компоненты вектора потенциала суть

$$F_x = -\frac{Hy}{2}, \quad F_y = \frac{Hx}{2}, \quad F_z = 0.$$

Уравнение Гамильтона—Якоби имеет, следовательно, форму

$$\frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{eHy}{2c} \right)^2 + \left(p_y - \frac{eHx}{2c} \right)^2 + p_z^2 \right] + \frac{ee'}{r} = \alpha_1,$$

или

$$\frac{1}{2m} \left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + \frac{eH}{c} (p_x^2 - p_y^2) + \left(\frac{eH}{2c} \right)^2 (x^2 + y^2) \right] + \frac{ee'}{r} = \alpha_1. \quad (105)$$

Здесь мы введем опять полярные координаты. Воспользовавшись формулой (81) для вычисления производных $\frac{\partial r}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ в функциях от r, ϑ, φ , найдем для преобразования производных p_x, p_y, p_z формулы

$$\left. \begin{aligned} p_x &= p_r \sin \vartheta \cos \varphi + p_\vartheta \frac{\cos \vartheta \cos \varphi}{r} - p_\varphi \frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta}, \\ p_y &= p_r \sin \vartheta \sin \varphi + p_\vartheta \frac{\cos \vartheta \sin \varphi}{r} + p_\varphi \frac{\cos \varphi}{r \sin \vartheta}, \\ p_z &= p_r \cos \vartheta - p_\vartheta \frac{\sin \vartheta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} p_x y - p_y x &= -p_\varphi, \\ x^2 + y^2 &= r^2 \sin^2 \vartheta, \end{aligned}$$

так что уравнение (105) превратится в

$$\frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{eH p_\varphi}{c} + \left(\frac{eH}{2c} \right)^2 r^2 \sin^2 \vartheta \right] + \frac{ee'}{r} = \alpha_1. \quad (107)$$

Здесь переменные не разделяются, и потому строгого решения этого уравнения мы не можем найти. Но мы можем легко разобрать тот случай, который важен для теории явления Зеемана. Именно, когда электрон движется в атоме, сила притяжения ядра бывает велика по сравнению с силой, испытываемой в сравнительно слабом внешнем магнитном поле H . Поэтому, полагая H малой величиной, мы можем отбросить в уравнении (107) член, содержащий ее квадрат. Упрощенное таким путем уравнение легко решается.

Полагаем опять $p_z = \alpha_3$ и разделяем r и ϑ , вводя постоянную α_2^2 .

$$p_r^2 r^2 - 2m \left[\left(\alpha_1 + \frac{eH\alpha_3}{2mc} \right) r^2 - ee'r \right] = -\alpha_2^2$$

$$p_\vartheta^2 + \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta} = \alpha_2^2.$$

Функция W примет вид

$$W = \int \sqrt{2m \left(\alpha_1 + \frac{eH\alpha_3}{2mc} - \frac{ee'}{r} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr + \quad (108)$$

$$+ \int \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta + \alpha_3 \varphi + \alpha_4.$$

Если обозначим для сокращения через $f\left(\frac{1}{r}\right)$ подкоренное выражение в интеграле по r , то, дифференцируя по постоянным, найдем

$$t + \beta_1 = \int \frac{m dr}{\sqrt{f\left(\frac{1}{r}\right)}}, \quad (109)$$

$$\beta_2 = - \int \frac{\alpha_2 dr}{r^2 \sqrt{f\left(\frac{1}{r}\right)}} + \int \frac{\alpha_2 d\vartheta}{\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}}},$$

$$\beta_3 = \frac{eH}{2c} \int \frac{dr}{\sqrt{f\left(\frac{1}{r}\right)}} - \int \frac{\alpha_3 d\vartheta}{\sin^2 \vartheta \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}}} + \varphi.$$

Но в силу первого из этих равенств последнему из них можно придать форму

$$\beta_3 - \frac{eH}{2mc} (t + \beta_1) = - \int \frac{\alpha_3 d\vartheta}{\sin^2 \vartheta \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}}} + \varphi.$$

Сравнивая это и два первые равенства (109) с равенством (100), видим, что они получаются из последних заменой β_3 через

$\beta_3 - \frac{eH}{2mc} (t + \beta_1)$ и α_1 через $\alpha_1 + \frac{eH\alpha_3}{2mc}$. Отсюда ясен характер

движения электрона. Мы видим, что наклон траектории к экватору, характеризуемый равенством (102), не изменяется от присутствия поля. Но долгота узла уже не постоянна, а равна

$\beta_3 - \frac{eH}{2mc} (t + \beta_1)$. Так как для электрона e отрицательно, дол-

гота узла возрастает линейно со временем. Таким образом, плоскость траектории вращается около направления магнитного поля в положительном направлении с постоянной угловой скоростью — $\frac{eH}{2mc}$. Обращаясь к рассмотрению формы вращающейся траектории, мы видим из (101), что параметр ее не зависит от присутствия магнитного поля, но зато зависит эксцентриситет

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_2^2}{me^2e'^2} \left(\alpha_1 + \frac{eH\alpha_3}{2mc} \right)}.$$

Так как по (32) период обращения электрона около притягивающего ядра в случае эллиптического движения зависит от полной энергии, которую мы теперь обозначаем через α_1 , то видим, что и на период обращения влияет присутствие магнитного поля. Именно, он уменьшается при положительном α_3 , то есть при обращении электрона в положительном направлении около направления поля, и увеличивается при обращении в отрицательном направлении. Этого можно было ожидать а priori, так как в первом случае электрон испытывает в магнитном поле силу, направленную внутрь траектории, и как бы увеличивающую силу притяжения центрального заряда, а во втором случае сила направлена наружу.

19. Движение под действием точечного заряда и однородного электростатического поля. Следующий случай, который мы должны рассмотреть, тот, когда кроме силы, действующей по закону Кулона, имеется еще электрическая сила, постоянная по величине и направлению. Пусть это добавочное электрическое поле имеет напряжение E и направлено по положительной оси z -ов. Тогда электрон, находясь в этом поле, будет обладать добавочной потенциальной энергией ($-eEz$), так что уравнение Гамильтона—Якоби будет

$$\frac{1}{2m} [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2] + \frac{ee'}{r} - eEz = \alpha_1. \quad (110)$$

Чтобы разделить переменные в этом уравнении, мы введем новые координаты ξ , η , φ соотношениями

$$x = \sqrt{\xi\eta} \cos\varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi - \eta). \quad (111)$$

Разрешая эти равенства относительно новых переменных, найдем

$$\xi = r + z, \quad \eta = r - z, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \quad (112)$$

Отсюда видно, что ξ и η изменяются от нуля до бесконечности, а φ от нуля до 2π . Из последнего равенства явствует, что поверхности $\varphi = \text{const.}$ суть плоскости, содержащие ось z -ов, азимут которых определяется углом φ . А чтобы уяснить себе значение координат ξ и η , достаточно ввести на минуту полярные координаты, положив $z = r \cos \vartheta$. Тогда первые два равенства (112) примут вид

$$\frac{\xi}{r} = 1 + \cos \vartheta, \quad \frac{\eta}{r} = 1 - \cos \vartheta,$$

откуда видно, что поверхность $\xi = \text{const.}$ и $\eta = \text{const.}$ представляют две системы конфокальных параболоидов вращения, имеющих общий фокус в начале координат, а общей осью ось z -ов. При этом обе системы повернуты на 180° друг относительно друга, так что вершины параболоидов первой системы лежат на положительной оси z -ов, второй — на отрицательной. Сечение параболоидов какой-нибудь плоскостью $\varphi = \text{const.}$ дает две системы конфокальных парабол. Для какой-нибудь точки P (см. рис. 10) координаты ξ и η суть параметры обеих парабол, пересекающихся в этой точке. Для точек верхней половины пространства будет $\xi > \eta$, для точек нижней — наоборот.

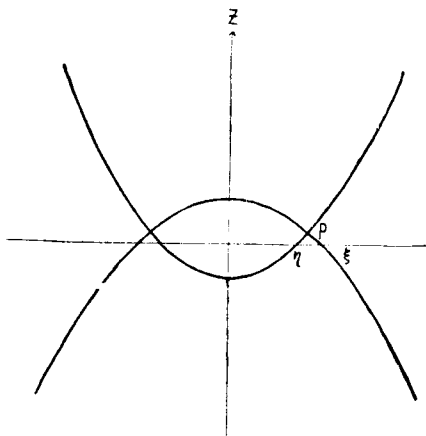


Рис. 10.

Пользуясь формулами (111) и (80), найдем

$$\nabla \xi = 2 \sqrt{\frac{\xi}{\xi + \eta}}, \quad \nabla \eta = 2 \sqrt{\frac{\eta}{\xi + \eta}}, \quad \nabla \varphi = \sqrt{\frac{1}{\xi \eta}}.$$

Так как кроме того из первых двух равенств (112) следует

$$r = \frac{\xi + \eta}{2},$$

то мы видим, что уравнение (110) примет вид

$$m \left[\frac{\xi}{\xi + \eta} p_\xi^2 + \frac{\eta}{\xi + \eta} p_\eta^2 + \frac{1}{4\xi\eta} p_\varphi^2 \right] + \frac{2ee'}{\xi + \eta} - \frac{eE}{2} (\xi - \eta) = \alpha,$$

Так как φ не входит сюда, полагаем, как и раньше $p_\varphi = \alpha_3$. Умножая уравнение на $\xi + \eta$, видим, что переменные ξ и η

разделяются. А именно, введя новую постоянную α_2 , мы получим для определения p_ξ и p_η оба уравнения

$$\xi p_\xi^2 + \frac{\alpha_3^2}{4\xi} = \frac{m}{2} \left(\alpha_1 \xi + \frac{eE}{2} \xi^2 - ee' \right) + \alpha_2,$$

$$\eta p_\eta^2 + \frac{\alpha_3^2}{4\eta} = \frac{m}{2} \left(\alpha_1 \eta - \frac{eE}{2} \eta^2 - ee' \right) - \alpha_2.$$

Определяя отсюда p_ξ и p_η мы найдем для функции действия выражение

$$W = \int \sqrt{\frac{m\alpha_1}{2} - \left(\frac{mee'}{2} - \alpha_2 \right) \frac{1}{\xi} - \frac{\alpha_3^2}{4\xi^2} + \frac{emE\xi}{4}} d\xi \quad (113)$$

$$+ \int \sqrt{\frac{m\alpha_1}{2} - \left(\frac{mee'}{2} + \alpha_2 \right) \frac{1}{\eta} - \frac{\alpha_3^2}{4\eta^2} - \frac{emE\eta}{4}} d\eta + \alpha_3 \varphi.$$

Дифференцируя это выражение по постоянным, мы можем написать интегралы уравнений движения. Но мы не будем этого делать, потому что количественный разбор траекторий представляет в данном случае большие трудности: нужно для этого оперировать с суммами довольно сложных эллиптических интегралов. Поэтому мы рассмотрим траектории лишь качественно. А для этого нам достаточно иметь перед собой

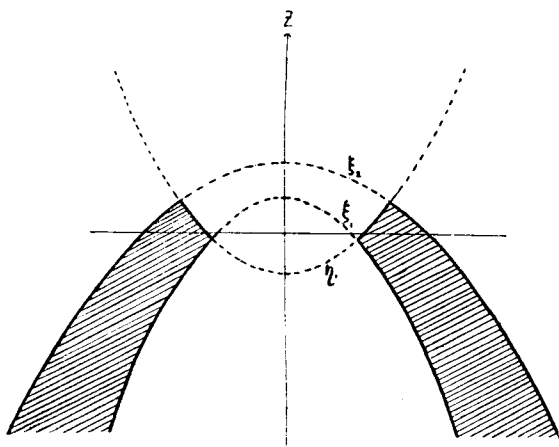


Рис. 11.

выражение (113) для функции действия.

Мы знаем, что движение должно протекать в таких областях пространства, где подкоренные выражения имеют положительные значения. При очень малых ξ и η доминирующее значение в этих выражениях получают члены, содержащие $1/\xi^2$ и $1/\eta^2$. Но эти члены отрицательны. Пусть ξ_1 и η_1 суть наимень-

шие положительные корни подкоренных функций. Траектория не может проникать в часть пространства, ограниченную фигурой, которая образуется вращением парабол ξ_1 и η_1 (рис. 11). Она может лишь касаться этой фигуры с внешней стороны.

Но наши полиномы третьей степени и имеют по три корня. Для очень больших ξ и η перевешивают последние члены полиномов. Так как e для электрона отрицательно, то последний член отрицателен в полиноме ξ и положителен в полиноме η . Отсюда мы заключаем, что первый полином кроме корня ξ_1 имеет еще один и только один положительный корень ξ_2 ($> \xi_1$). Таким образом, убеждаемся, что все движение протекает в той части пространства, разрез которой на нашем рисунке заштрихован.

Так как для $\eta = +\infty$ второй полином положителен, то возможны два случая. Либо полином этот не имеет другого корня кроме η_1 . Тогда

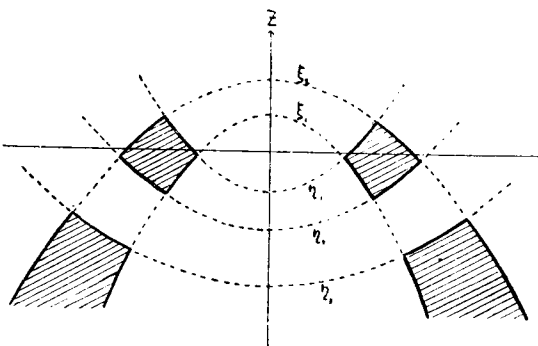


Рис. 12.

траектория обоими своими концами уходит в бесконечность, в средней своей части касаясь один раз параболоида η . Либо же имеются еще два положительных корня η_2 и η_3 . Для теории атома этот второй случай более интересен. В этом случае доступная электрону часть пространства распадается на две части. Первая из них—кольцеобразная, ограниченная поверхностями $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ (рис. 12). В этой части электрон движется условно периодически, касаясь по очереди бесконечное число раз каждой из ограничивающих пространство поверхностей. Если между периодами изменения переменных ξ и η и периодом обращения электрона около оси z -ов нет рациональных зависимостей, то с течением времени траектория заполнит везде плотно кольцеобразную часть пространства. Если внешнее поле E в области движения электрона слабо по сравнению с полем центрального заряда, форма траектории будет в каждый данный момент мало отличаться от эллиптической. Сила E будет играть роль возмущающей силы, которая будет лишь постепенно изменять форму и положение в пространстве этой эллиптической орбиты. С этим случаем мы встретимся, когда будем разбирать движение электрона в водородном атоме в пространстве внешнего электростатического поля (теория явления *Штарка*).

Но при тех же значениях произвольных постоянных движение может протекать и в другой части пространства, именно там, где η изменяется в пределах между η_3 и $+\infty$. Здесь, очевидно, форма траектории будет подобна той, которую мы имеем в первом случае, когда имелся налицо лишь один корень η_1 . Здесь траектория будет приходить из бесконечности,

касаться один раз поверхности $\eta = \eta_1$ и опять уходить в бесконечность.

20. Движение в поле электрического диполя. Если два заряда e' и $-e'$ одинаковы по величине, но разных знаков находятся на расстоянии a друг от друга, то произведение $P = ae'$ измеряет момент этих зарядов. Момент этот — вектор, направленный от отрицательного к положительному заряду. Если a бесконечно убывает, а e' бесконечно возрастает так, что $e'a = P$ сохраняет конечное значение, то распределение электрических силовых линий около зарядов при бесконечно малом a называется полем диполя.

Положим, что в начале координат находится диполь момента P , ось которого параллельна положительной оси z -ов. Электростатический потенциал в окружающем диполь пространстве, как доказывается в учебниках теории электричества, имеет значение

$$\frac{Pz}{r^3}$$

так, что потенциальная энергия электрона в этом поле равна

$$\frac{ePz}{r_3}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид

$$\frac{1}{2m} \left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \right] + \frac{ePz}{r^3} = \alpha_1. \quad (114)$$

Введя здесь пространственные полярные координаты как и в § 17, мы напишем наше уравнение в виде

$$\frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\eta^2}{r^2} + \frac{p_z^2}{r^2 \sin^2 \eta} \right] + \frac{eP \cos \eta}{r^2} = \alpha_1. \quad (115)$$

Переменные r , η и φ можно разделить, введя произвольные постоянные α_2 и α_3 . Получим

$$p_r^2 r^2 - 2m\alpha_1 r^2 = -\alpha_2 \quad (116)$$

$$p_\eta^2 + \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \eta} + 2meP \cos \eta = \alpha_2$$

$$p_\varphi = \alpha_3$$

Определяя отсюда p_r и p_η , получим для действия W выражение

$$W = \int \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}} dr + \int \sqrt{\alpha_2 - 2meP \cos \eta - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \eta}} d\eta + \alpha_3 \varphi + \alpha_1. \quad (117)$$

Дифференцируя по постоянным, найдем интегралы

$$t + \beta_1 = \int \sqrt{\frac{m dr}{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}}},$$

$$\beta_2 = - \int \frac{d\gamma}{2r^2 \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha_2 - 2meP \cos \vartheta - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}}},$$

$$\beta_3 = - \int \sin^2 \vartheta \sqrt{\frac{\alpha_3 d\vartheta}{\alpha_2 - 2meP \cos \vartheta - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}}} + \varphi.$$

Последние два определяют траекторию электрона, тогда как первый дает положение на траекторию в момент t . Они дают полное решение задачи.

Разберем физический смысл наших формул и определим возможные типы движений.

Прежде всего, самое дифференциальное уравнение (115) (уравнение энергии) показывает, что движение протекает в той части пространства, где

$$\frac{eP \cos \vartheta}{r^2} \leq \alpha_1.$$

Так как произведение eP по предположению отрицательно, движение при отрицательных значениях полной энергии α_1 , протекает внутри поверхности

$$\frac{eP \cos \vartheta}{r^2} = \alpha_1.$$

изображенной в разрезе на рисунке 13. При $\alpha_1 = 0$ движение протекает в верхней половине пространства. При положительных

α_1 , — вне поверхности лежащей в нижней половине пространства и симметричной той, которая получается при перемене знака α_1 , на отрицательный. Рассматриваемые поверхности суть эквипотенциальные поверхности нашей задачи. Достигать их электрон может только тогда, когда его кинетическая энергия делается равной нулю, то-есть, когда он останавливается на месте. Отсюда следует, что подойти к поверхности он может лишь по пути, нормальному к ней. По тому же пути он

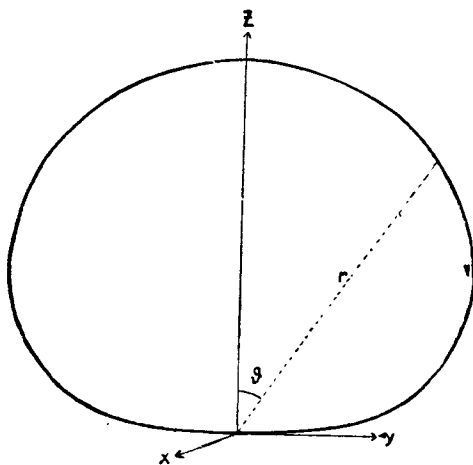


Рис. 13.

затем и покидает ее, пробегая ту же траекторию в обратном порядке. Ясно, что такие точки остановки будут лишь на траекториях некоторого особого класса.

Из уравнения энергии следует также закон, по которому возрастает скорость в тех случаях, когда r может делаться бесконечно малым. Действительно, мы имеем

$$v^2 = \frac{2}{m} \left(\alpha_1 - \frac{eP \cos \vartheta}{r^2} \right).$$

Отсюда следует, что при бесконечно малых r скорость делается бесконечно большой, возрастаая как

$$\sqrt{-\frac{2eP \cos \vartheta}{m}} \cdot \frac{1}{r}.$$

21. Проекция траектории на сферу. Третье равенство (118) дает зависимость между ϑ и φ . Оно тождественно с уравнением, связывающим эти величины для сферического маятника, центр которого находится в начале координат, длина равна единице, напряжение силы тяжести $g = -meP$ и направлено по оси диполя, а сумма кинетической и потенциальной энергий (когда последняя измеряется от уровня центра) равна α_2 . Это уравнение хорошо изучено¹. Таким образом, центральная проекция траектории электрона в поле диполя на сферу радиуса единицы совпадает с траекторией указанного сферического маятника.

Если положим $\cos \vartheta = \xi$, то уравнение наше напишется:

$$\varphi - \beta_3 = \alpha_3 \int \frac{d\xi}{(1-\xi^2) \sqrt{(1-\xi^2)(\alpha_2 - 2meP\xi) - \alpha_3^2}}$$

Так как подкоренное выражение равно $s.n^2 \vartheta P_y^2$, то оно должно быть положительным. Оно имеет три действительных корня. Действительно, давая ξ последовательно значения $-\infty, -1, \xi_0, +1, +\infty$ видим, что оно принимает значения: $+\infty, -\alpha_3^2, M^2 - \alpha_3^2, -\infty$. Через ξ_0 мы обозначили значение ξ для начального момента времени. Для него по смыслу задачи подкоренное выражение имеет положительное значение, которое мы и обозначим через M^2 . Если обозначим через ξ_1, ξ_2, ξ_3 корни в убывающем порядке, то имеем

$$-\infty < \xi_3 < -1 < \xi_2 \leq \xi_0 \leq \xi_1 < +1.$$

¹) Puiseux. Journal de Liouville, 1842. Hexlphen, Traité des fonctions elliptiques, t. II, p. 128, de Saint-Germain, Bulletin des Sciences mathématiques, 1896, 1898, 1901. Цитируется по P. Appel, Traité de mécanique rationnelle t. I, p. 496, 2 édition 1901.

(Мы предположим $\alpha_3 \neq 0$. В противном случае корни $+1, \frac{\alpha_2}{2meP}$ видны непосредственно). Так как подкоренное выражение должно быть всегда положительным, ξ будет изменяться в пределах между ξ_2 и ξ_1 .

Знак перед корнем должен браться положительным при возрастании ξ и отрицательным при убывании. Действительно, так как

$$\alpha_3 = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}_1,$$

φ должно всегда возрастать при положительном α_3 и всегда убывать при отрицательном.

Проекция траектории на сферу будет заключена между параллелями $\vartheta_1 = \arccos \xi_1$, и $\vartheta_2 = \arccos \xi_2$, которых она попеременно касается, тогда как угол φ все время изменяется в одном направлении, возрастая или убывая.

Так как отношение коэффициента при ξ к коэффициенту при ξ^3 равно -1 , имеем

$$\xi_3 (\xi_1 + \xi_2) = -(1 + \xi_1 \xi_2) \quad (119)$$

Произведение $\xi_1 \xi_2$ по абсолютной величине меньше единицы, а ξ_3 отрицательно. Следовательно,

$$\xi_1 + \xi_2 > 0 \quad 120$$

Возможны два случая. Или ξ_2 , как и ξ_1 , положительно. Обе параллели, между которыми заключена проекция траектории, лежат в верхнем полушарии. Проектируя еще раз с шара на плоскость экватора, получим кривую типа, указанного на рис. 14. Или же ξ_2 отрицательно. Тогда параллель $\vartheta_2 = \arccos \xi_2$ лежит в нижнем полушарии. В силу (120) в проекции на плоскость экватора параллель ξ_1 , будет лежать внутри параллели ξ_2 . Движение изобразится кривой (рис. 15).

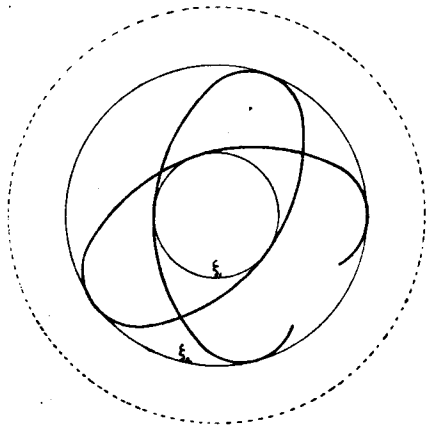


Рис. 14.

Согласно замечанию о знаке перед корнем проекция траектории на сферу симметрична относительно меридианов в точках касания ее с параллелями ξ_1 и ξ_2 . Действительно, благодаря перемене знака перед корнем при прохождении через точку касания

интеграл возрастает при убывании ξ от ξ_1 до некоторого значения ξ^1 настолько же, насколько он перед этим возрос при возрастании ξ от ξ^1 до ξ_1 . Следовательно, проекция траектории симметрична относительно меридианов в точках касания с параллелью ξ_1 . Такое же рассуждение показывает, что она симметрична и относительно меридианов в точках касания с параллелью ξ_2 .

Чтобы иметь ясное представление о форме траектории, важно знать, на какую величину изменяется ϑ_1 , когда ξ изменяется от ξ_2 до ξ_1 (или же, наоборот, от ξ_1 до ξ_2). Обозначим эту величину через Θ .

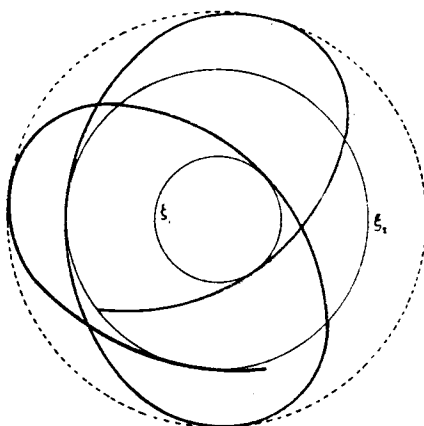


Рис. 15.

Тогда имеем

$$\Theta = \alpha_3 \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{d\xi}{(1 - \xi^2) \sqrt{\psi(\xi)}} \quad (121)$$

где положено для сокращения

$$\psi(\xi) = (1 - \xi^2)(\alpha_2 - 2meP\xi) - \alpha_3^2.$$

Согласно (119)

$$\xi_3 = -\frac{(1 + \xi_1 \xi_2)}{\xi_1 + \xi_2},$$

так что имеем тождественно

$$\psi(\xi) = 2meP(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)\left(\xi + \frac{1 + \xi_1 \xi_2}{\xi_1 + \xi_2}\right) \quad (122)$$

Полагая в этом тождестве $\xi = 1$ и введя сокращенные обозначения

$$A = \sqrt{(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)}, \quad B = \sqrt{(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)},$$

найдем

$$\alpha_3 = AB \sqrt{\frac{-2meP}{\xi_1 + \xi_2}}.$$

Формула (121) обратится таким образом в

$$\Theta = AB \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{d\xi}{(1 - \xi^2) \sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \xi_2)[\xi(\xi_1 + \xi_2) + 1 - \xi_1 \xi_2]}}$$

При изменении ξ от ξ_2 до ξ_1 выражение в квадратных скобках всегда положительно и возрастает с ξ . Если оно при этом всегда не больше Q и не меньше R , где R и Q две положительных постоянных, то мы имеем, очевидно,

$$\begin{aligned} & \frac{AB}{\sqrt{Q}} \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{d\xi}{(1-\xi^2) \sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\xi_2)}} \leq \\ & \leq \Theta \leq \frac{AB}{\sqrt{R}} \int_{\xi_2}^{\xi_1} \frac{b\xi}{(1-\xi^2) \sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\xi_2)}} \end{aligned}$$

Вычислив входящий сюда интеграл, найдем

$$\frac{\pi}{2\sqrt{Q}} (A+B) \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2\sqrt{R}} (A+B).$$

Так как во всяком случае ξ не выходит за пределы ± 1 , то

$$A^2 \leq \xi(\xi_1 + \xi_2) + 1 + \xi_1 \xi_2 \leq B^2$$

так что можно положить

$$R = A^2, \quad Q = B^2.$$

Неравенства наши дают тогда

$$\frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{A}{B} \right) \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{B}{A} \right)$$

Из первого из этих неравенств следует, что Θ не может быть меньше $\pi/2$. Оно может быть равно $\pi/2$. Это может случиться, когда $A=0$, для чего должно быть $\xi_1=1$. Действительно, это имеет место для $\alpha_3=0$, то-есть для $\phi=0$ или движения в плоскости меридиана. В этом случае $\psi(\xi)$ имеет корни

$$-1, -\frac{\alpha_2}{2meP}, +1.$$

Чтобы Θ было равно $\pi/2$, должно быть $\frac{\alpha_2}{2meP} > -1$. Косинус

угла ϑ изменяется тогда от $\frac{\alpha_2}{2meP}$ до 1 и обратно. Когда $\cos \vartheta$ проходит через значение $+1$, то-есть ϑ принимает значение 0, угол φ испытывает скачек на $\pm \pi$. В остальные же моменты он остается постоянным. Это следует из непосредственного геометрического рассмотрения движения. То же можно бы выве-

сти из выражения (121) для Θ . Для этого нужно показать, что фигурирующий в этом выражении интеграл при бесконечном уменьшении α_3 стремится к бесконечности, как $\frac{\pi}{2\alpha_3}$.

При изменении $\cos \vartheta$ от $\frac{\alpha_2}{2meP}$ до 1 и обратно угол φ возрастает на 2π , и за это время происходит один скачек на $\pm\pi$. Следовательно, $\Theta = \pm \frac{\pi}{2}$.

С другой стороны, показывают, что Θ не может быть и больше π . Последнее значение принимается им, как следует из неравенств (123), при $A = B$. Но из $A^2 = B^2$ следует $\xi_1 + \xi_2 = 0$.

В частности Θ может быть равным π и при движении в меридиане, то-есть при $\alpha_3 = 0$. Действительно, в этом случае, если только $\frac{\alpha_2}{2meP} < -1$, $\cos \vartheta$ изменяется между предельными

значениями ± 1 , так что имеем $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1$. Всякий раз, когда ϑ проходит через одно из предельных значений 0 или π , угол φ испытывает скачек на $\pm\pi$ (как это ясно геометрически). Так как здесь приходится по одному скачку на каждый пробег угла от 0 до π или обратно, то, следовательно, $\Theta = \pm\pi$.

Если же $\alpha_3 \neq 0$, то из выражения (122) для $\psi(\xi)$ видно, что при бесконечном убывании $\xi_1 + \xi_2$ кубичный член в $\psi(\xi)$ перестает играть роль, так как в последней скобке ξ может быть опущено рядом с бесконечно возрастающим членом $\frac{1 + \xi_1 \xi_2}{\xi_1 + \xi_2}$.

Но при квадратичном $\psi(\xi)$ Θ вычисляется элементарно и, как нетрудно убедиться, действительно делается равным π .

22. Возможные типы траекторий. Выполняя квадратуру в первом из уравнений (118) найдем

$$r^2 = \frac{2\alpha_1}{m}(t + \beta_1)^2 + \frac{\alpha_2}{2m\alpha_1} \quad (124)$$

Смотря по знаку произвольных постоянных, мы будем различать несколько случаев.

Заметим, что α_1 и α_3 могут принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$, тогда как α_2 по второму из равенств (116) всегда больше отрицательного числа $2meP$.

1) $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$, $\alpha_3 = 0$. Первое из равенств (116) показывает, что при α_1 отрицательном α_2 тоже всегда отрицательно. По (124) имеем в этом случае

$$\text{при } t + \beta_1 = \pm \sqrt{\frac{-\alpha_2}{4\alpha_1^2}} \quad r = 0,$$

$$\text{при } t + \beta_1 = 0 \quad r = \sqrt{\frac{\alpha_2}{2m\alpha_1}}$$

Оба конца траектории находятся в начале координат. Наибольшего значения r достигает при $t + \beta_1 = 0$. Вся траектория

описывается в промежуток времени $\sqrt{\frac{-\alpha_2}{\alpha_1^2}}$.

Так как

$$\alpha_3 = mr^2 \sin^2 \vartheta,$$

то равенство нулю этой постоянной показывает, что движение протекает в одной плоскости. Если $\sin^2 \vartheta = 0$ — движение прямолинейное и по оси диполя и положение электрона вполне характеризуется значением радиуса вектора r . В противном случае имеем $\dot{\vartheta} = 0$.

Выполняя в рассматриваемом случае квадратуру по r во втором из интегралов (118), найдем

$$\beta_2 = \mp \frac{1}{4\sqrt{-\alpha_2}} \lg \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2} r^2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2} r^2}} \right) - \frac{J}{\sqrt{-2meP_1}}, \quad (125)$$

где

$$J = \int_0^{\cos \vartheta} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2) \left(4\xi - \frac{2\alpha_2}{meP} \right)}} \quad (126)$$

Здесь под интегралом положено

$$\cos \vartheta = \xi$$

По смыслу второго из равенств (116) подкоренное выражение должно всегда сохранять положительное значение. Следовательно, ξ будет изменяться в пределах между $\frac{\alpha_2}{2meP}$ и $+1$. По смыслу того же равенства положительная величина $\frac{\alpha_2}{2meP}$ при $\alpha_3 = 0$ меньше единицы. Следовательно, угол ϑ изменяется от нуля до $\arccos \frac{\alpha_2}{2meP}$ и обратно. Все движение протекает в углу между обеими прямыми, образующими с осью диполя угол $\arccos \frac{\alpha_2}{2meP}$. Когда угол ϑ убывает от наибольшего значения до нуля, интеграл J возрастает на конечную величину

$$i\omega' = \int_{\frac{\alpha_2}{2meP}}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2) \left(4\xi - \frac{2\alpha_2}{meP} \right)}} \quad (127)$$

где ω' чисто мнимый полупериод соответствующей эллиптической функции p . Перед первым членом справа в (125) нужно брать верхний знак при возрастании r и нижний — при убывании. При этом член этот возрастает от $-\infty$ до 0 и до $+\infty$. Так как за каждое колебание угла ϑ интеграл J возрастает на

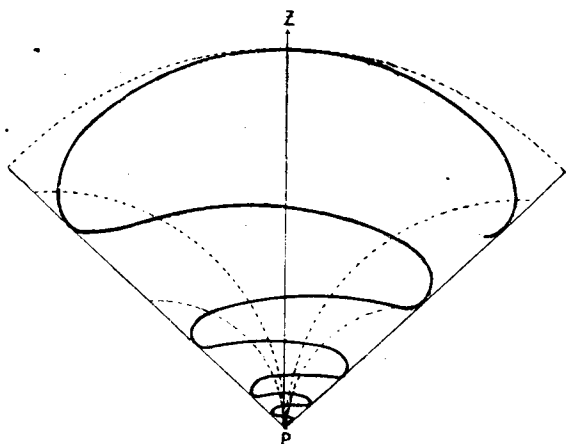


Рис. 16.

конечную величину, всего должно происходить бесконечное множество колебаний.

Если r_1 есть радиус—вектор одной из точек касания траектории с одной из предельных прямых, то радиус-вектор $r_1 + \Delta r_1$ следующей точки касания определяется из формулы

$$= \frac{1}{4\sqrt{-\alpha_2}} \lg \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2} r^2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2} r^2}} \right) \Bigg|_{r_1}^{r_1 + \Delta r_1} - \frac{4\omega'}{\sqrt{2meP}} = 0.$$

Полагая $\frac{\Delta r_1}{r_1}$ малым, найдем приближенно

$$\Delta r_1 = \frac{8\omega'}{\sqrt{2meP}} r_1 \sqrt{2m\alpha_1 r_1^2 - \alpha_2} \quad (128)$$

Расстояния эти наименьшие вблизи $r = 0$ и $r = \sqrt{\frac{\alpha_2}{2m\alpha_1}}$, наибольшие при средних значениях радиуса—вектора. Таким образом, траектория имеет вид, изображенный на рис. 16, где пунктиром нанесены силовые линии диполя.

2) $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 < 0$, $\alpha_3 \neq 0$. Нетрудно сообразить, как изменится рассмотренный тип траектории, если α_3 , то-есть момент количества движения около оси диполя, неравен нулю. Постоянная эта входит под знаком корня в эллиптическом интеграле, который теперь имеет вид

$$J = \int_0^{\cos \vartheta} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2) \left(4\xi^2 - \frac{2\alpha_2}{meP} \right) + \frac{2\alpha_3^2}{meP}}}. \quad (129)$$

Если прежде ϑ изменялось в таких пределах, чтобы $(1 - \cos^2 \vartheta) \left(4 \cos^2 \vartheta - \frac{2m\alpha_2}{meP} \right)$ было больше нуля, то теперь, чтобы подкоренное выражение было положительно, нужно, чтобы написанный член был больше положительной величины $\frac{2\alpha_3^2}{meP}$. Следовательно, интервал, в котором изменяется угол ϑ , сужается, причем нижний предел повышается и делается больше нуля, а верхний—понижается и делается меньше $\arccos \frac{\alpha_2}{2meP}$. Таким образом, если обозначим через ϑ_1 и ϑ_2 наименьшее и наибольшее значение, принимаемое углом ϑ , то будет

$$0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \arccos \frac{\alpha_2}{2meP} < \frac{\pi}{2}.$$

Будем изображать траекторию электрона на подвижной плоскости меридиана, вращающейся около оси диполя с угловой скоростью φ . Так как закон изменения r не зависит от значения постоянной α_3 , то траектория будет иметь вид, изображенный на рис. 17.

Число касаний траектории с ограничивающими прямыми возрастет по сравнению с предыдущим случаем по двум причинам. Во-первых, там между двумя касаниями ϑ принимало каждое возможное значение по 4 раза, совершая два полных колебания. Здесь же оно принимает каждое возможное значение лишь два раза, совершая одно полное колебание.

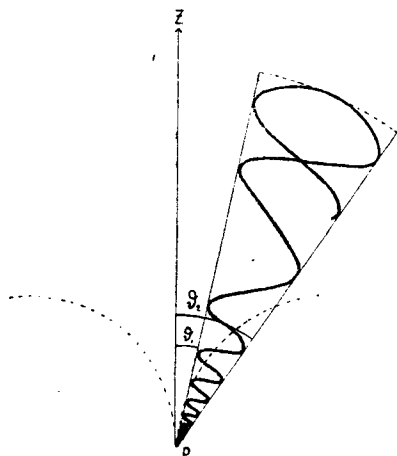


Рис. 17.

Поэтому вместо (128) здесь имеем

$$\Delta r_1 = \frac{4\omega'}{\sqrt{2meP}} r \cdot \sqrt{2m\alpha_1 r_1^2 - \alpha_2}$$

Во-вторых, в виду служения интервала, в котором изменяется угол ϑ , уменьшается полупериод ω' .

Если спроектировать траекторию на сферу, а затем эту проекцию на плоскость экватора, то получится кривая рис. 14. Так как здесь мы имеем

$$\xi_2 = \frac{\alpha_2}{2meP} > 0.$$

При достаточно больших α_2 наступает момент, когда подкоренное выражение в (129) получает двойной корень. Нетрудно убедиться, что корень этот будет равен

$$\xi_0 = \cos \vartheta_0 = \frac{\alpha_2}{6meP} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{6meP}\right)^2 + \frac{1}{3}}. \quad (130)$$

Это наступит, когда между α_2 , α_3 и meP будет существовать зависимость

$$\alpha_3^2 = (1 - \xi_0^2)(\alpha_2 - 2meP \xi_0),$$

где под ξ_0 подразумевается его значение (130).

В этом случае во все время движения ϑ постоянно и равно ϑ_0 , так что траектория вьется по конусу, уравнением которого является равенство (130).

3) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 < 0$, $\alpha_3 = 0$. При $\alpha_1 = 0$ постоянная α_2 не может быть больше нуля. В рассматриваемом случае вместо (124) получится

$$r^2 = \pm \frac{2\sqrt{-\alpha_2}}{m} (t + \beta_1).$$

Траектория исходит из начала координат в момент $t = -\beta_1$ и уходит в бесконечность или же, наоборот, начинается в бесконечности при $t = -\infty$ и кончается в $r = 0$ при $t = -\beta_1$.

Второй интеграл имеет вид

$$\beta_2 = \pm \frac{1}{2\sqrt{-\alpha_2}} \lg r + \frac{J}{\sqrt{-2meP}},$$

с верхним знаком при возрастании r и нижним при убывании. Пределы, между которыми изменяется ϑ , те же что и в первом рассмотренном нами случае. Приближенное значение расстояния между двумя последовательными точками касания с прямыми

$\vartheta = \arccos \frac{\alpha_2}{2meP}$ выразится через

$$\Delta r_1 = \frac{8\omega' \sqrt{-\alpha_2}}{\sqrt{2meP}} r_1$$

и, следовательно, возрастает пропорционально r_1 . Вид траектории изображен на рис. 18.

4) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 < 0$, $\alpha_3 \neq 0$. Этот случай отличается от предыдущего совершенно так же, как случай второй от первого. Поэтому нам нет надобности подробно разбирать его. Изображение траектории на вращающемся меридиане дано на рис. 19.

5) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. В этом случае мы найдем интересный особенный вид движения электрона. Первые два интеграла (118)

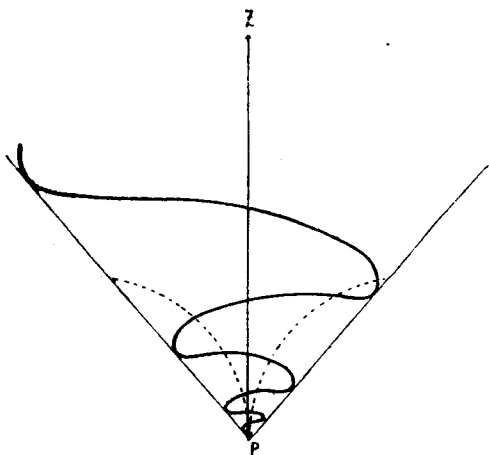


Рис. 18.

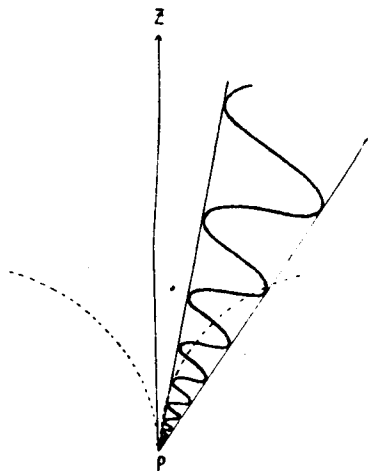


Рис. 19.

содержат в этом случае неопределенность и мы вынуждены вернуться к равенствам (116), которые принимают вид

$$p_r^2 = 0, \quad p_\vartheta^2 + \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta} + 2meP \cos \vartheta = 0. \quad (131)$$

Так как $p_r = m\dot{r}$, то первое из этих равенств значит, что r постоянно, то-есть движение происходит по поверхности сферы, центр которой лежит в начале координат. В этом случае, следовательно, не только проекция траектории на сферу, но сама траектория электрона совпадает с траекторией сферического маятника. Второе из равенств (131) показывает, однако, что не все траектории сферического маятника могут описываться электроном, а лишь те, для которых полная энергия (кинетическая плюс потенциальная, измеряемая от уровня неподвижной точки), равна нулю. Действительно, постоянная α_2 нашей проблемы формально соответствует постоянной энергии в проблеме сферического маятника.

Если в частности $\alpha_3 = 0$, колебания происходят в плоскости меридиана. Так как $p_\vartheta = mr^2\dot{\vartheta}$, второе равенство (131) дает в этом случае

$$\dot{\vartheta}^2 = -\frac{mP}{2er^4} \operatorname{ccs} \vartheta,$$

откуда следует, что ϑ изменяется в пределах между 0 и $\pi^{1/2}$ в обе стороны, так что электрон описывает полукруг. Период его колебания

$$\tau = 4r^2 \sqrt{\frac{m}{-2eP}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\operatorname{ccs} \vartheta}},$$

или, так как

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\operatorname{ccs} \vartheta}} = 2 \sqrt{\frac{8}{\pi}} \Gamma^2(5/4) = 2 \sqrt{\frac{8}{\pi}} (0,9064)^2 = 2,6217,$$

$$\tau = 10,487 r^2 \sqrt{\frac{m}{-2eP}}.$$

6) Если же $\alpha_3 \neq 0$, то проекция траектории на плоскость экватора принадлежит к типу рис. 14. Наконец, если α_3 достигает такого значения, что

$$\alpha_3^2 = -\frac{4meP}{3\sqrt{3}}, \quad (132)$$

то в выражении для P_ϑ ,

$$P_\vartheta = \sqrt{-2meP \operatorname{ccs} \vartheta - \frac{c_3^2}{\sin^2 \vartheta}}$$

имеется двукратный корень

$$\cos \vartheta_1 = \operatorname{ccs} \vartheta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

В этом случае ϑ постоянно во время движения и имеет значение $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. Электрон движется равномерно по кругу. Все круговые траектории лежат на одном и том же конусе, не зависящем ни от силы диполя, ни от заряда или массы электрона. Уравнение этого конуса $\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Замечательно, что момент количества движения электрона около оси диполя, измеряемый постоянной α_3 , согласно (132) не зависит от r . Из

$\alpha_3 = mr^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}$ и из (132) находим угловую скорость электрона на круговой орбите:

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{\sqrt[4]{3}}{r^2} \sqrt{\frac{-eP}{m}}. \quad (133)$$

Эти круговые орбиты можно найти и путем самых элементарных соображений. Действительно, компонента электрического поля нашего диполя по направлению его оси равна

$$\frac{P(1 - 3 \cos^2 \vartheta)}{r^3}.$$

Она должна быть равна нулю, чтобы электрон мог двигаться по кругу в плоскости, перпендикулярной к оси диполя. Отсюда следует

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Далее, компонента поля, перпендикулярная к оси диполя, равна

$$\frac{3 \cos \vartheta \sin \vartheta P}{r^3}. \quad (134)$$

Для найденного значения $\cos \vartheta$ сила, действующая на электрон в направлении, перпендикулярном к оси, равна

$$\frac{\sqrt{2} eP}{r^3}.$$

Эта сила должна уравниваться центробежной силой движущегося по кругу электрона, которая равна

$$mr \sin \vartheta \dot{\varphi}^2 = mr \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varphi}^2. \quad (135)$$

Сравнивая (135) с (134), находим для угловой скорости выражение (133).

7) Если $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 \leq 0$, то согласно (124), траектория исходит из бесконечности при $t = -\infty$ и кончается в начале координат при $t + \beta_1 = -\frac{\sqrt{-\alpha_2}}{2\alpha_1}$, либо, наоборот, исходит из начала при $t + \beta_1 = +\frac{\sqrt{-\alpha_2}}{2\alpha_1}$ и уходит в бесконечность. (Само собою разумеется, что для удаления электрона в бесконечность всегда нужен бесконечно большой промежуток времени, так как скорость его везде конечна за исключением точки $r = 0$).

Если $\alpha_2 < 0$, то зависимость между r и ϑ выражается равенством

$$\beta = + \frac{1}{4\sqrt{-\alpha_2}} \lg \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2} r^2 + 1}}{\sqrt{1 - \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2} r^2 - 1}} \right) - \frac{J}{\sqrt{-2meP}}, \quad (136)$$

которое отличается лишь тем от (125), что здесь обратный знак у функции стоящей под знаком логарифма. Когда r изменяется от нуля до ∞ , первый член справа изменяется от $-\infty$ до нуля. Вид траектории в случаях $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_3 \neq 0$ мало отличается от видов, полученных в случаях 3) и 4) для $\alpha_1 = 0$.

8) Если $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 = 0$, то вместо (136) получается

$$\beta_2 = \frac{1}{2\sqrt{2m\alpha_1}} \cdot \frac{1}{r} - \frac{J}{\sqrt{-2meP}}.$$

Наиболее характерной чертой настоящего движения является то, что при $\alpha_3 = 0$ вследствие $\alpha_2 = 0$ имеем $\xi_2 = \cos \vartheta_2 = 0$. Электрон касается с обеих сторон попеременно экваториальной

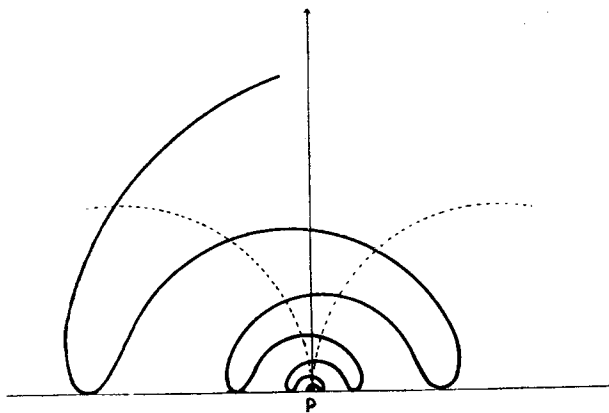


Рис. 20.

плоскости. Число касаний бесконечно велико. Траектория имеет вид, изображенный на рис. 20. При $\alpha_3 \neq 0$ опять $\xi_2 > 0$. Траектория схожа с разобранными прежде.

9) При $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 = 0$, как видно из (124), r изменяется от ∞ до наименьшего значения $\sqrt{\frac{\alpha_2}{2m\alpha_1}}$, которое принимается для $t = -\beta_1$, и затем опять возрастает до бесконечности.

Второй из интегралов (118) принимает в этом случае вид

$$\beta_2 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}} \arcsin \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{\alpha_2}{2m\alpha_1}} \right) - \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}} \int_{\cos \vartheta}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2) \left(1 - \frac{2meP\xi}{\alpha_2} \right)}} \quad (137)$$

Первый член справа при изменении r от ∞ до минимума и опять до бесконечности возрастает от нуля до $\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha_2}}$.

Положим $\alpha_2 < -2meP$. Тогда ξ может изменяться между $\frac{\alpha_2}{2meP}$ и -1 . При полном пробеге этого интервала эллиптический интеграл в (137) возрастает на конечную величину. Следовательно, в этом случае не может быть бесконечного числа колебаний электрона между предельными значениями угла ϑ . Нетрудно оценить, насколько возрастет интеграл за один полу-период изменения ϑ . Действительно, так как ξ изменяется от $\frac{\alpha_2}{2meP}$ до -1 , то, если обозначим интеграл через J , будет

$$\frac{J'}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_2}{2meP}}} > J > \frac{J'}{\sqrt{2}},$$

где положено

$$J' = \int_{\frac{\alpha_2}{2meP}}^{-1} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi) \left(1 - \frac{2meP\xi}{\alpha_2} \right)}}.$$

Но последний интеграл легко вычисляется и получается

$$J' = \pi \sqrt{\frac{\alpha_2}{-2meP}}$$

Таким образом, значение J ограничивается неравенствами

$$\pi \sqrt{\frac{-\alpha_2}{\alpha_2 + 2meP}} > J > \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{-\alpha_2}{meP}}. \quad (138)$$

Если $\frac{-\alpha_2}{meP}$ — малая величина, то и J мало по сравнению с π ; следовательно, электрон совершает на своем пути большое, хотя и конечное число колебаний. Траектория имеет вид, по-

казанный на рис. 21. При возрастании α_2 и приближении к $-2meP$ верхний предел в (138) возрастает бесконечно, нижний же приближается к $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Но в этом случае ξ_2 приближается к -1 . Следовательно -1 делается двойным корнем

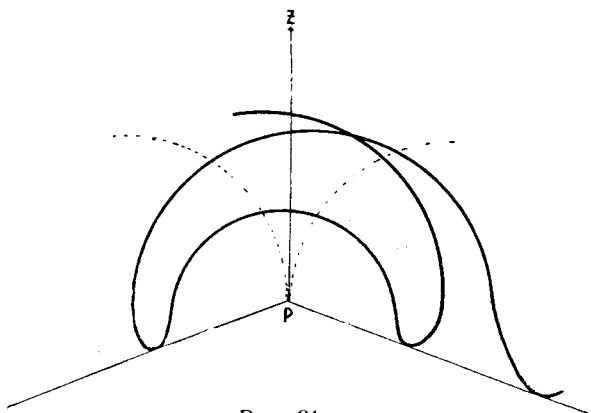


Рис. 21.

подкоренного выражения и потому интеграл при приближении к $\xi = -1$ делается бесконечным. Поэтому при α_2 близком к $-2meP$ траектория не будет достигать конуса $\cos \vartheta = \frac{\alpha_2}{2meP}$

и может иметь вид, изображенный на рисунке 22.

10) Если $\alpha_2 > 0, -2meP > \alpha_2 > 0, \alpha_3 = 0$, то теперь опять пределы изменения угла ϑ сужаются по сравнению с предыдущим случаем. Зависимость между ϑ и r может изображаться рисунками 23 и 24, смотря по тому, положительно или отрицательно ξ_2 .

11) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > -2meP, \alpha_3 = 0$. Связь между r и ϑ опять характеризуется уравнением (137). Но теперь пределами для ξ являются ± 1 . Тем же методом, которым мы)

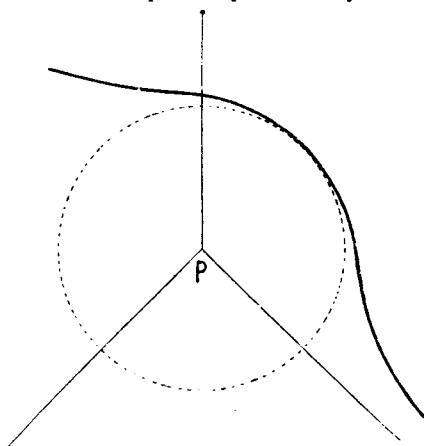


Рис. 22.

только что пользовались, найдем

$$\sqrt{1 + \frac{2meP}{\alpha_2}} > J > \sqrt{1 - \frac{2meP}{\alpha_2}}, \quad (139)$$

где положено

$$J = \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2) \left(1 - \frac{2meP\xi}{\alpha_2}\right)}}$$

J , равное, как мы видели, бесконечности при $\alpha_2 = -2meP$, при дальнейшем возрастании α_2 стремится к π , так как к тому же

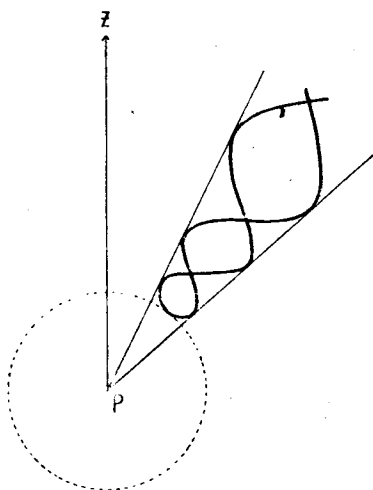


Рис. 23.

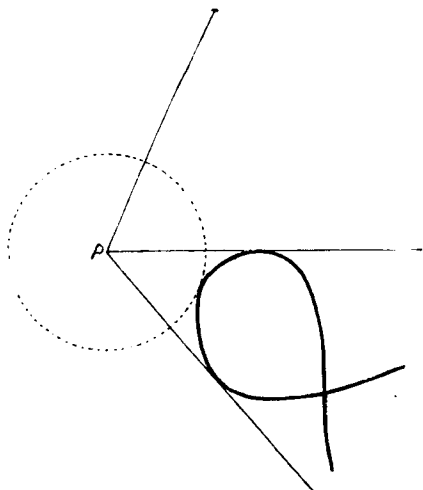


Рис. 24.

пределу стремятся и верхний и нижний пределы неравенства (139). Так как для очень больших α_2 и $\alpha_3 = 0$ имеем

$$\alpha_2 = (mr\dot{\vartheta})^2,$$

то последний найденный нами результат подтверждает только ту очевидную истину, что когда велика компонента скорости электрона, перпендикулярная к радиусу вектору, он будет лишь мало отклоняться от прямолинейного пути. Действительно, из формулы (137) следует, что при изменении r от бесконечности до минимума и опять до бесконечности эллиптический интеграл должен возрасть на π . Но при больших α_2 интеграл этот обращается в

$$\int_{\cos \vartheta}^{\cos \vartheta} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{\pi}{2} - \vartheta.$$

Так как знак перед корнем меняется всякий раз, когда ξ проходит через значения ± 1 , то приращение интеграла всегда

измеряет полный угол, на который повернулся за рассматриваемый промежуток времени радиус вектор r . Если же угол этот, изменяясь монотонно за весь пробег электрона, изменяется на π , то это значит, что конечное направление движения электрона совпадает с начальным.

12) Наконец, если $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > -2meP$, $\alpha_3 \neq 0$, ϑ будет изменяться между ϑ_1 и ϑ_2 , где $\vartheta_1 > 0$, $\vartheta_2 < \pi$.

Если α_3 делается очень большим, то одновременно возрастает и α_2 так как

$$\alpha_2 \geq \alpha_3^2 + 2meP.$$

Но в этом случае под знаком интеграла можно опустить член $-2meP\xi$, малый по сравнению с α_2 , так что второй интеграл нашей задачи примет вид

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}} \left[\arcsin \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{\alpha_2}{2m\alpha_1}} \right) - \int \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2} - \xi^2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}} \left[\arcsin \left(\frac{1}{r} \sqrt{\frac{\alpha_2}{2m\alpha_1}} \right) - \arcsin \left(\frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2}}} \right) \right]. \end{aligned}$$

В этом случае $\cos \vartheta$ может изменяться в пределах между $\pm \sqrt{1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2}}$. Нетрудно сообразить, что при фактическом пробеге электрона $\cos \vartheta$ принимает лишь один раз одно из предельных значений. В этот момент предельная (для $\alpha_3 = \pm \infty$) прямая траектории электрона касается конуса

$$\cos \vartheta = \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2}}.$$

23. Точечный электрический заряд и диполь в одной точке. Общие уравнения. Лишь немногим более сложен тот случай, когда в начале координат кроме диполя имеется еще избыточный заряд e' . Тогда Гамильтонова функция в полярных координатах будет, очевидно, иметь вид

$$\frac{1}{2m} \left(p_v^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta} \right) + \frac{ee'}{r} + \frac{eP \cos \vartheta}{r^2}.$$

Рассматривая это равенство, как уравнение с частными производными, найдем для действия W :

$$\begin{aligned} W &= \int \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{2mee'}{r} - \frac{\alpha_2}{v^2}} dv + \\ &+ \int \sqrt{\alpha_2 - 2meP \cos \vartheta - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta + \alpha_3 \varphi + \alpha_4. \end{aligned} \quad (140)$$

Это отличается от выражения, полученного в случае одного диполя лишь дополнительным членом $\frac{2mee'}{r^2}$ под корнем в первом интеграле.

Интегралы нашей проблемы суть:

$$\left. \begin{aligned} t + \beta_1 &= \int \frac{dr}{\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{2mee'}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}}} \\ \beta_2 &= - \int 2v \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{2mee'}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}} + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{dr}{\sqrt{\alpha_2 - 2meP \cos \vartheta - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}}} \\ \beta_3 &= - \int \frac{\alpha_3 d\vartheta}{\sin^2 \vartheta \sqrt{\alpha_2 - 2meP \cos \vartheta - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}}} + \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Мы видим прежде всего, что третий из этих интегралов, дающий зависимость между ϑ и φ , не содержит e' . Он тот же самый, что и при движении в поле одного диполя. Проекция траектории на сферу, таким образом и в этом случае совпадает с траекторией сферического маятника, у которого сила тяжести направлена по оси нашего диполя.

Этот результат представляет собою частный случай более общего положения, высказанного в § 15. Если к силе диполя, действующей на электрон, прибавить произвольную силу, зависящую только от r , то-есть к выражению потенциала прибавить произвольную функцию $f(r)$, то проекция траектории на описанную около начала координат сферу от этого не изменится.

Первый из интегралов (141) не содержит P . Это значит, что аналитический закон, по которому r изменяется с t в нашем случае тот же самый, как если бы диполя не было, а мы имели бы дело с движением под действием одного точечного заряда e' . Этот случай разбирался нами раньше. Но это, конечно, лишь в том случае, если постоянные интегрирования α_1 и α_2 имеют в обоих случаях одно и то же значение. Но мы увидим сейчас, что при одновременном действии точечного заряда и диполя возможны такие комбинации значений произвольных постоянных α_1 , α_2 , α_3 , которые невозможны, когда действует лишь первый из них. Поэтому сейчас мы встретим такие типы изменения со временем, которые в отсутствии диполя невозможны.

24. Притягивающий центр. Рассмотрим сначала случай, когда e' положительно, то-есть электрон притягивается центральным зарядом.

Пусть $\alpha_1 < 0$. Рассмотрение подкоренных выражений в (140) покажет нам, какие значения может принимать α_2 . При $e' = 0$, то-есть при одном диполе при α_1 отрицательном, мы убедились, α_2 тоже отрицательно, как это следует из рассмотрения первого из подкоренных выражений. Наоборот, при $P = 0$, то-есть, при действии одного точечного заряда, наоборот $\alpha_2 > 0$, так как из второго из подкоренных выражений следует в этом случае $\alpha_2 > \alpha_3^2$. При одновременном же действии той и другой силы α_2 может принимать как положительные так и отрицательные значения. Последние однако ограничены условием $\alpha_2 > 2meP$, так как в противном случае второе подкоренное выражение было бы отрицательно.

1) Итак, положим сначала $\alpha_1 < 0$, $2meP \leq \alpha_2 \leq 0$. Первый из интегралов (141) показывает, что r в этом случае может изменяться в пределах от нуля до некоторого максимума

$$r_{\max.} = \frac{ee'}{2\alpha_1} + \sqrt{\left(\frac{ee'}{2\alpha_1}\right)^2 + \frac{\alpha_2}{2m\alpha_1}}, \quad (142)$$

и обратно до нуля. Так как $\alpha_2 < 0$, угол ϑ будет всегда меньше $\pi/2$. Тип траектории тот же самый, что и без точечного заряда и соответствует случаям 1) и 2) § 22. Закон изменения r со временем несколько иной, но как здесь так и там оба конца траектории находятся в начале координат и электрон совершает бесконечное множество колебаний между положительными предельными значениями угла ϑ . Зависимость между ϑ и ϕ , как уже сказано, при всяких значениях произвольных постоянных в точности та же, что и раньше.

2) Особенно интересен случай $\alpha_1 < 0$, $0 < \alpha_2 < -\frac{me^2e'^2}{2\alpha_1}$.

Это те значения постоянных, при которых в отсутствии диполя получается движение по Кеплерову эллипсу. Мы уже говорили, что и в нашем более общем случае радиус вектор изменяется во времени по тому же закону, что и без диполя. Именно, он изменяется в пределах:

$$r_{\max.} = \frac{ee'}{2\alpha_1} + \sqrt{\left(\frac{ee'}{2\alpha_1}\right)^2 + \frac{\alpha_2}{2m\alpha_1}},$$

Вид проекции нашей траектории на рисунках (14) и (15) показывает, что мы имеем движение, напоминающее движение по Кеплерову эллипсу, связанное с процессией около оси диполя. Но из рассмотрения второго из интегралов (141) видно, что сходство это лишь поверхностное. Если пределы изменения r независимы от P , то зато пределы изменения ϑ существенно

зависят от этой величины. Если $P=0$ мы имеем $\cos \vartheta_2 = -\cos \vartheta_1$, то теперь, как мы убедились в § 21, $\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 > 0$, так что, грубо говоря, можно сказать, что под действием диполя вся траектория смещена кверху.

3) Если $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 = -\frac{me^2 e'^2}{2\alpha_1}$, то подкоренное выражение интегралов по r имеет двукратный корень

$$r_0 = \frac{ee'}{2\alpha_1} \quad (143)$$

Во все время движения r сохраняет это значение. Электрон описывает траекторию сферического маятника. Вместо второго из равенств (141), получим

$$t + \beta_2 = \frac{me^2 e'^2}{4\alpha_1^2} \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha_2 - 2meP \cos \vartheta - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}}}$$

Здесь может описываться любая из траекторий сферического маятника, так как α_2 , формально соответствующее полной энергии маятника, может принимать любое положительное значение, в зависимости от значения α_1 . Напомним, что при $e^1 = 0$ мы тоже имели траектории, лежащие на сфере, но там для этого должно было быть $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и мы получали вследствие этого лишь те траектории сферического маятника, для которых полная энергия равна нулю. Дальнейшее развитие заключается в том, что при $e^1 = 0$ движение по сфере было неустойчиво: малейшее изменение постоянных α_1 или α_2 приводило к траектории, уходящей либо в $r = 0$, либо в $r = \infty$. Теперь же, наоборот, мы имеем перед собой устойчивую форму движения: малое изменение произвольных постоянных дает траектории, лежащие по соседству с сферической поверхностью, на которой лежит данная траектория.

Мы встречаем в частности опять и круговые траектории. Движение по кругу имеет место, когда между α_3 и α_2 существует зависимость

$$\alpha_3^2 = (1 - \xi_0^2)(\alpha_2 - 2meP\xi_0), \quad (144)$$

где

$$\xi_0 = \cos \vartheta_0 = \frac{\alpha_2}{6meP} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_2}{6meP}\right)^2 + \frac{1}{3}} \quad (145)$$

Последнее равенство есть уравнение конуса, на котором лежит круговая орбита. Равенство (144), как и при $e' = 0$ является условием для того, чтобы при любом возможном значении α_1 и α_2 траектория вилась по конусу.

Плоскость круговой орбиты приподнята, очевидно, над плоскостью экватора на высоту $r_0 \cos \vartheta_0$, где r_0 и $\cos \vartheta_0$ определяются равенствами (143) и (145). При отрицательных α_1 не может быть $\alpha_2 > -\frac{me^2e'^2}{2\alpha_1}$, так как в противном случае трином

$2m\alpha_1 - \frac{2mee'}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}$ имел бы отрицательные значения при всяких r .

4) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 < 0$. Радиус вектор изменяется между нулем и бесконечностью.

Тип траектории аналогичен типу, получаемому для тех же значений постоянных при $e' = 0$.

5) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. В этом случае первые два интеграла (141) принимают вид:

$$t + \beta_1 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2m}{-ee'}} \cdot r^{3/2},$$

$$\beta_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2mee'r}} + \frac{J}{2},$$

где через J опять обозначен эллиптический интеграл по ϑ . Радиус вектор изменяется между нулем и бесконечностью. Во втором равенстве первый член справа при этом изменяется по абсолютному значению между бесконечностью и нулем. Отсюда следует, как и ранее, что угол ϑ будет изменяться бесконечное число раз между своими предельными значениями. Форма траектории аналогична той, которая при $e' = 0$ получается для значений постоянных $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 < 0$. Здесь, как и в том случае, бесконечное число колебаний совершается при приближении к точке $r = 0$ («точка сгущения» колебаний). Но есть разница в том, что теперь при приближении к этой точке число колебаний возрастает, как $\frac{1}{\sqrt{r}}$, тогда как там оно возрастало, как $\log 1/r$.

6) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 > 0$. В этом случае r изменяется во времени так же, как в случае Ньютонова притяжения при параболической форме траектории. От бесконечности оно убывает до минимума

$$r_{min} = -\frac{\alpha_2}{2mee'},$$

и обратно возрастает до бесконечности. За это время первый член справа во втором равенстве (141) изменяется лишь на конечную величину. Число колебаний электрона конечно. Оно тем больше, чем меньше α_2 , то-есть чем меньше r_{min} . Когда α_2 делается равным нулю, оно, согласно сказанному раньше, делается бесконечным.

7) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 \leq 0$. При таких значениях постоянных все три члена под знаком корня в интеграле по r положительны. Следовательно, r принимает все значения от нуля до бесконечности. Траектория либо исходит из начала координат и простирается в бесконечность, либо наоборот. Число колебаний бесконечно. Тип траектории аналогичен тем, которые мы получали при $e' = 0$ в случаях 3), 4), 7).

8) $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$. Закон изменения r здесь тот же, что в случае гиперболической траектории при действии Ньютоновой силы. Наименьшее значение, принимаемое радиусом-вектором —

$$r_{\min} = \frac{ee'}{2\alpha_1} + \sqrt{\left(\frac{ee'}{2\alpha_1}\right)^2 + \frac{\alpha_2}{2m\alpha_1}}. \quad (146)$$

Второй интеграл имеет такой вид:

$$\beta_2 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}} \arcsin \left\{ \frac{1/r + \frac{mee'}{\alpha_2}}{\sqrt{\left(\frac{mee'}{\alpha_2}\right)^2 + \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2}}} \right\} + \frac{J}{2}.$$

Первый член справа за весь пробег электрона возрастает на

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \left(\pi - 2 \arcsin \frac{\frac{mee'}{\alpha_2}}{\sqrt{\left(\frac{mee'}{\alpha_2}\right)^2 + \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2}}} \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \left(\pi - 2 \arctg \sqrt{\frac{2m\alpha_1 \alpha_2}{ee'}} \right).$$

Вычитаемое в скобках отрицательно и меньше π , так что написанная величина лежит между $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha_2}}$ и $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_2}}$. Величина эта конечна.

Траектория имеет форму деформированной действием диполя ветви гиперболы.

25. Отталкивающий центр. Значительно меньшее богатство типов траектории получается в том случае, когда $e' < 0$, то-есть электрон отталкивается центральным зарядом.

1) При $\alpha_1 < 0, 2meP < \alpha_2 \leq 0$, мы имеем тип движения, мало отличающийся от соответственного случая 1) для $e' > 0$. Наибольшее значение, достигаемое радиусом вектором, опять выражается формулой (142).

Случаи, соответствующие следующим двум типам рассмотренным ранее, и теперь невозможны, так как теперь при отрицательном α_1 должно быть и α_2 всегда отрицательно, ибо иначе подкоренное выражение интеграла по r не могло бы принимать положительных значений.

2) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 < 0$. Радиус вектор изменяется между нулем и максимумом

$$r_{\max} = -\frac{\alpha_2}{2mee'}.$$

Общий характер движения сходен с предыдущим.

Случай $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \geq 0$ теперь тоже невозможен.

3) $\alpha_1 > 0$, $2meP < \alpha_2 < -\frac{e^2 e'^2 m}{2\alpha_1}$. Для этого прежде всего должно быть $\alpha_1 < -\frac{e^2 e'^2}{4P}$. Если это условие выполнено и α_2

удовлетворяет написанным неравенствам, трином $2m\alpha_1 - \frac{2mee'}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2}$ не имеет действительных корней, а имеет положительные

значения при всяких r . Следовательно, в этом случае траектория простирается либо от $r=0$ до $r=\infty$, либо наоборот. Тип траектории аналогичен типу 7) случая притяжения.

4) $\alpha_1 > 0$, $-\frac{ee'm}{2\alpha_1} < \alpha_2 < 0$. Этот случай более интересен. Теперь трином имеет два действительных положительных корня

$$r_{1,2} = \frac{ee'}{2\alpha_1} \pm \sqrt{\left(\frac{ee'}{2\alpha_1}\right)^2 + \frac{\alpha_2}{2m\alpha_1}}.$$

в промежутке между которыми он принимает отрицательные значения. Следовательно теперь при одном и том же значении постоянных возможны две траектории различных типов. Либо траектория исходит из бесконечности, приближается к началу координат на расстоянии r_1 , и затем опять удаляется в бесконечность. Либо наоборот исходит из $r=0$, удаляется до максимального расстояния r_2 и опять возвращается к началу. При этом, как всегда, в окрестностях начала электрон совершает бесконечное большое число колебаний между предельными значениями угла ϑ и соответственно делает бесконечное число оборотов около оси диполя.

5) $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Этот случай представляет полную аналогию случаю (8) предыдущего параграфа. Закон изменения r здесь тот же, что при гиперболическом движении под действием лишь центра, отталкивающего с силой обратно пропорциональной квадрату расстояния. Действием диполя ветвь гиперболы теперь деформируется. Минимум опять выражается формулой (146), а связь между r и ϑ — формулой (147), где однако теперь e' отрицательно.

26. Движение в поле магнитного диполя. Одной из наиболее важных и интересных задач, подлежащих нашему рассмотрению, является изучение движений электрона под дей-

ствием магнитных сил, исходящих от элементарного постоянно-го магнита или от магнитного диполя. Задача эта встречается в двух одинаково важных областях точного естествознания. Во-первых по современной теории северных сияний, развитой и всесторонне обоснованной Биркеландом и Штермером, причиной сияний являются испускаемые солнцем электроны. Движение этих электронов при приближении к земле определяется существенным образом магнитным полем последней. В тех местах земного шара, куда проникают электроны солнца, они вызывают ионизацию воздуха, сопровождающуюся свечением. В этом и заключается явление северного сияния. Чтобы найти теоретически траектории, которые электроны описывают в поле земного магнетизма, предполагают, что силовые линии земли над поверхностью ее расположены так, как будто в центре земли находился магнитный диполь, момент которого равен общему магнитному моменту земного шара. Такое представление достаточно точно соответствует действительности.

Другая область, в которой мы встречаем ту же задачу, это—теория строения атома. Правда, в современной модели атома, предложенной Бором и усовершенствованной Зоммерфельдом, до сих пор учитываются лишь электрические силы притяжения между положительным ядром атома и обращающимися вокруг ядра электронами. Но это лишь первые шаги теории, при которых приходится сильно упрощать картину, даваемую природой, чтобы тем легче уловить ее существенные черты. Не подлежит никакому сомнению, что атомы являются также и носителями магнитных сил. Это вытекает уже из магнитных свойств материи. Так, сильный парамагнетизм кислорода и его убывание с температурой объясняется по теории Ланжевена тем, что каждая молекула кислорода обладает определенным довольно значительным магнитным моментом. Величина этого момента определяется из величины магнитной проницаемости кислорода.

Если эти моменты столь значительны, что дают ощутимое микроскопическое действие, обуславливая заметное намагничивание газа в магнитном поле, то тем более следует думать, что моменты эти играют существенную роль во внутренней жизни атома, влияя существенным образом на движение электронов, из которых атом построен.

Мы не знаем в точности механизма, обуславливающего атомный или молекулярный магнетизм. Многие данные говорят за то, что он вызван вращением электрических зарядов. Такое вращение эквивалентно молекулярным электрическим токам, которыми еще Ампер объяснял магнитные свойства материи. Но неизвестно, движется ли электричество, сосредоточенное в ядре атома, так что уже ядро само является элементарным магнитом, или же момент обуславливается вращением электронов около ядра. Как бы то ни было, в обоих случаях мы имеем дело с

подобием кольцевого электрического тока. Но магнитные свойства последнего, как мы видели в § 11, в первом приближении совпадают с свойствами магнитного диполя. Поэтому изучение последнего и представляет такой интерес.

К сожалению, задача эта не решается строго методом разделения переменных. Приближенное же решение, о котором будет речь в § 27, действительно лишь в ограниченных пределах. Штермер, посвятивший много сил ей и изучивший множество типов траекторий электрона в поле магнитного диполя, должен был отказаться от аналитического решения вопроса и прибегнуть к громоздкому и требующему огромной затраты времени численному определению точек траектории одной за другой. Мы не можем излагать здесь ценные результаты, полученные Штермером, так как это отняло бы у нас слишком много места и не требуется целями, преследуемыми настоящей книжкой. Мы ограничимся изучением тех траекторий, которые могут быть найдены нашим аналитическим методом. К счастью, эти движения являются и физически одними из наиболее важных.

Пусть в начале координат находится магнитный диполь момента M , ось которого совпадает с осью z -ов. Согласно формулам (63) вектор-потенциал нашего диполя будет

$$F_x = -\frac{My}{r^3}, \quad F_y = \frac{Mx}{r^3}, \quad F_z = 0.$$

Следовательно уравнение с частными производными Гамильтона-Якоби для движения электрона в поле магнитного диполя, имеющее в общей форме вид (74), напишется в данном случае так:

$$\frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{eM}{c} \frac{y}{r^3} \right)^2 + \left(p_y - \frac{eM}{c} \frac{x}{r^3} \right)^2 + p_z^2 \right] = \alpha_1.$$

В это уравнение мы введем цилиндрические координаты, заменив x и y через ρ и φ , положив

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$

Пользуясь формулами § 13 для преобразования координат, мы выразим производные по x и y через производные по ρ и φ таким образом:

$$p_x = p_\rho \cos \varphi - p_\varphi \frac{\sin \varphi}{\rho},$$

$$p_y = p_\rho \sin \varphi + p_\varphi \frac{\cos \varphi}{\rho}.$$

Выражая и компоненты вектор-потенциала в цилиндрических координатах и сохраняя лишь для сокращения обозначение

$$r^2 = \rho^2 + z^2,$$

мы приведем после простых преобразований наше уравнение с частными производными к виду:

$$\frac{1}{2m} \left[p_{\varphi}^2 + \left(\frac{p_{\varphi}}{\rho} - \frac{eM}{c} \frac{\rho}{r^3} \right)^2 + p_z^2 \right] = \alpha_1. \quad (148)$$

В этом уравнение опять не входит явным образом угол φ и потому p_{φ} может быть положено равным постоянной, которую мы опять обозначим через α_3 . Но переменные ρ и z не удастся разделить, потому что обе они входят в r . В цилиндрических координатах переменные не разделяются. По всей вероятности они не разделяются и при пользовании какими-бы то ни было координатами.

Но если разделение не удастся в общем случае, то оно возможно для случая частного, когда движение электрона протекает в плоскости $x - y$ -ов, то-есть в экваториальной плоскости нашего диполя.

Нетрудно убедиться, что существуют движения, протекающие в этой плоскости. Действительно, в этой плоскости магнитное поле диполя перпендикулярно к ней. Поэтому сила, с которой диполь действует на движущийся электрон, лежит в экваториальной плоскости. Поэтому, если электрон в начальный момент времени движется в этой плоскости, то он не покинет ее и во время дальнейшего движения.

В плоскости экватора имеем $\rho = r$ и вследствие $\dot{z} = 0$ также $p_z = 0$. Следовательно уравнение (148) примет вид

$$\frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{1}{r^2} \left(p_{\varphi} - \frac{eM}{cr} \right)^2 \right] = \alpha_1. \quad (149)$$

Подставляя здесь постоянную α_3 на место p_{φ} , имеем для импульса p_r :

$$p_r^2 = 2m\alpha_1 - \frac{1}{r^2} \left(\alpha_3 - \frac{eM}{cr} \right)^2.$$

Следовательно функция действия для этой проблемы имеет вид

$$W = \int \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{1}{r^2} \left(\alpha_3 - \frac{eM}{cr} \right)^2} dr + \alpha_3 \varphi + \alpha_4.$$

Отсюда, дифференцируя по α_1 и α_3 , находим интегралы

$$\left. \begin{aligned} t + \beta_1 &= \int \frac{\sqrt{m} dr}{\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{1}{r^2} \left(\alpha_3 - \frac{eM}{cr} \right)^2}}, \\ \beta_2 &= - \int \frac{1/r^2 \left(\alpha_3 - \frac{eM}{cr} \right) dr}{\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{1}{r^2} \left(\alpha_3 - \frac{eM}{cr} \right)^2}} + \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (150)$$

Второе из этих уравнений определяет траекторию электрона, первое же — положение электрона на траектории в момент t . Изучим возможные формы траекторий.

Так как α_1 есть не что иное, как кинетическая энергия электрона, который движется с постоянной скоростью v , то имеем $2m\alpha_1 = m^2v^2$. С другой стороны для краткости введем обозначение $-\frac{eM}{c} = b$, где b положительно. Подкоренное выражение принимает вид

$$m^2v^2 - \frac{1}{r^2} \left(\alpha_3 + \frac{b}{r} \right)^2 =$$

$$\left(mv + \frac{\alpha_3}{r} + \frac{b}{r^2} \right) \left(mv - \frac{\alpha_3}{r} - \frac{b}{r^2} \right) = \psi(r). \quad (151)$$

Четыре корня этого выражения суть

$$\frac{1}{r} = -\frac{\alpha_3}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_3}{2b} \right)^2 \pm \frac{mv}{b}} \quad (152)$$

Четыре значения r , соответствующие этим корням, мы будем обозначать символами $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$, соответственно четырем комбинациям знаков в (151).

Мы видим, что выражение (151) отрицательно для очень малых r и положительно для очень больших r . Отсюда следует, что положительных корней имеется либо один, либо три, что видно также и из формул (152). Для того, чтобы было три положительных корня, должно быть α_3 отрицательно и кроме того $\left(\frac{\alpha_3}{2b} \right)^2 - \frac{mv}{b} > 0$. Оба эти условия могут быть соединены в одно.

$$\alpha_3 < -2\sqrt{mvb}. \quad (153)$$

Предположим, что это условие выполнено. Тогда мы имеем для $\psi(r)$ три положительных корня, которые мы обозначим через r_1, r_2, r_3 , расположив их в возрастающем порядке. Корни это суть

$$r_1 = (+, +), r_2 = (+, -), r_3 = (-, -). \quad (154)$$

Функция $\psi(r)$ принимает положительные значения для r лежащего или между r_1 и r_2 или между r_3 и ∞ . Таким образом, когда выполнено условие (153), при одних и тех же значениях постоянных v и α_3 , возможны две траектории двух различных типов. Одна из них заключена между окружностями радиусов r_1 и r_2 , касаясь их поочередно, вторая же, начинаясь в бесконечности, касается окружности радиуса r_3 , и уходит опять в бесконечность. Рассмотрим подробнее форму траекторий.

Когда траектория заключена между двумя концентрическими окружностями, касаясь их поочередно, мыслимы *a priori* два случая: угловая скорость электрона в точках касания с обеими окружностями может быть либо одного знака, либо различных знаков. В первом случае траектория пересекает самое себя лишь после того, как она обойдет круг (т.-е. φ возрастет на 2π). Во втором же случае она образует петли, подобные петлям трохоиды, так что в точках пересечения угол φ принимает два раза одно и то же значение. Языком теории функций мнимого переменного можно сказать, что в первом случае траектория не имеет двойных точек на логарифмической Римановой поверхности с точкой разветвления $r=0$. Во втором же случае она имеет бесконечное множество двойных точек и на этой поверхности. Нетрудно видеть, что в изучаемой нами задаче мы имеем перед нами второй случай.

Действительно, в уравнении траектории

$$\varphi - \beta_2 = \int \frac{1/r^2 (\alpha_3 + b/r) dr}{\sqrt{\psi(r)}} \quad (155)$$

dr и $\sqrt{\psi(r)}$ имеют один знак (так как первое уравнение второй группы канонической системы гласит $\frac{dr}{dt} = \frac{p_r}{m} = \frac{\sqrt{\psi(r)}}{m}$). Поэтому φ будет изменяться монотонно или нет, в зависимости от того, сохраняет ли свой знак во все время движения величина $\alpha_3 + b/r$ или нет. В рассматриваемом нами случае знак этого бинорма меняется, так как для r_1 он принимает согласно (152) и (154) положительное значение

$$\alpha_3 + \frac{b}{r_1} = +\frac{\alpha_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)^2 + m v b},$$

тогда как для r_2 значение это отрицательное и равно

$$\frac{\alpha_3}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)^2 - m v b}.$$

Мы убеждаемся, что при касании с окружностью r_1 , угловая скорость электрона положительна, при касании же с окружностью r_2 — отрицательна.

Далее мы можем сообразить без вычислений, что кривизна траектории убывает с увеличением r . Действительно, при постоянной скорости она пропорциональна напряжению магнитного поля, а последнее для диполя обратно пропорционально кубу расстояния. Отсюда мы можем заключить, что в то время, как электрон описывает целую петлю, он в среднем перемещается в сторону убывающих φ , то-есть, если смотреть на плоскость $x-y$ -ов со стороны положительных z -ов, сред-

нее движение происходит по стрелке часов, как это показано на рис. 25.

Нетрудно дать формулу для количественного вычисления

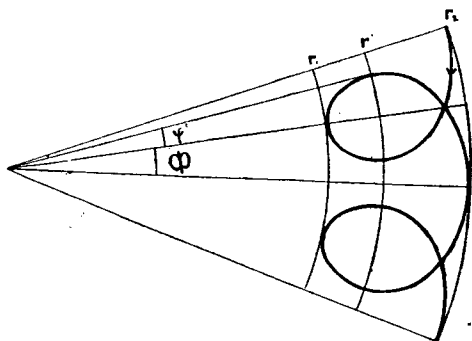


Рис. 25.

точек траектории. Для этого мы разобьем под‘интегральную функцию в (155) на две части и напомним

$$\begin{aligned} \varphi - \beta_2 = & -\frac{1}{2} \int \frac{d[1/r(\alpha_3 + b/r)]}{\sqrt{m^2 v^2 - \frac{1}{r^2} \left(\alpha_3 + \frac{b}{r} \right)^2}} - \\ & - \frac{\alpha_3}{r} \int \frac{d(1/r)}{\sqrt{m^2 v^2 - \frac{1}{r^2} \left(\alpha + \frac{b}{r} \right)^2}}. \end{aligned} \quad (156)$$

Во втором из этих интегралов мы введем новую переменную z соотношением

$$mv - \alpha_3/r - b/r^2 = 2mvz. \quad (157)$$

Отсюда следует

$$mv + \alpha_3/r + b/r^2 = 2mv(1 - z^2). \quad (158)$$

Разрешая (157) относительно $1/r$ и дифференцируя, найдем

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = \mp \frac{2mv}{\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)^2 + mvb} \cdot \frac{zdz}{\sqrt{1 - k^2 z^2}}, \quad (159)$$

где положено

$$k^2 = \frac{2mvb}{\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)^2 + mvb}. \quad (160)$$

Формула (156) превратится вследствие (157) и (159)

$$\varphi - \beta_2 = -\frac{1}{2} \arcsin \left[-\frac{1}{mvr} \left(\alpha_3 + \frac{b}{r} \right) \right] \mp \sqrt{1 + \frac{4m\varphi b}{\alpha_3^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Преобразованием (157) еще не определяется знак z и в связи с этим получается неопределенный знак перед последним интегралом. Мы будем давать z положительные значения. Тогда, сличая (156) с (161), видим, что нужно взять отрицательный знак, когда r изменяется между r_1 и r_2 .

Посмотрим, в каких пределах изменяются аргументы наших функций во время движения электрона. Положив для сокращения

$$y = \frac{1}{mvr} \left(\alpha_3 + \frac{b}{r} \right),$$

мы находим

$$\text{для } r = r_1 \quad y = 1 \quad z = 0,$$

$$\text{» } r = -b/\alpha_3 \quad y = 0 \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{» } r = r_2 \quad y = 1 \quad z = 1.$$

Первая и последняя точки суть точки касания траектории с окружностями r_1 и r_2 , вторая же—точка, для которой $\frac{d\varphi}{dr} = 0$, т.-е. траектория касается радиус-вектора и угловая скорость меняет знак с положительного на отрицательный. Предполагая, что мы начинаем счет угла φ от точки касания траектории с окружностью r_1 , мы найдем $\beta_2 = \frac{\pi}{4}$, если примем нуль за нижний предел эллиптического интеграла.

Пользуясь таблицами, имеющимися для эллиптического интеграла

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^\omega \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\sin^2\alpha \sin^2\omega)}} = F(\alpha, \omega),$$

где положено

$$k = \sin \alpha, \quad z = \sin \omega,$$

можно вычислять точки траектории. В частности для трех вышеупомянутых точек φ принимает такие значения

$$\begin{aligned} r = r_1 \quad \varphi &= 0, \\ r = -b/\alpha_3 \quad \varphi &= \frac{\pi}{4} - \frac{F\left(\alpha, \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{1 + \frac{4m\upsilon b}{\alpha_3^2}}}, \\ r = r_2 \quad \varphi &= \frac{\pi}{2} - \frac{K}{\sqrt{1 + \frac{4m\upsilon b}{\alpha_3^2}}}. \end{aligned} \quad (162)$$

Через K , как принято, обозначен полный эллиптический интеграл

$$K = F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right]$$

Последнее значение угла φ дает нам тот угол Φ , на который электрон смещается, когда r пробегает весь интервал, в котором оно изменяется. Мы уже говорили, что угол этот отрицателен. Действительно, принимая во внимание, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4m\upsilon b}{\alpha_3^2}}} = \sqrt{1 - \frac{k^2}{2}} = 1 - \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{32}k^4 - \frac{1}{128}k^6 + \dots$$

найдем, выполняя умножение рядов

$$\Phi = -\frac{7}{64}k^4 - \frac{29}{64}k^6 - \dots \quad (163)$$

При изменении k в пределах от 0 до 1 полный интеграл K изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до ∞ , а угол Φ от 0 до $-\infty$. При малых k угол Φ изменяется сначала очень медленно, так как по (163) разложение его начинается с четвертой степени k . Но по мере возрастания k , или, что то же, — по мере приближения α_3 к верхнему пределу неравенства (153), делается очень велик по абсолютному значению, а при $k=1$ электрон лишь асимптотически приближается к окружности r_2 , двигаясь по спирали, и никогда не достигает ее. На рис. (25) вычерчена траектория для случая, когда

$$\frac{\alpha_3}{2b} = -0,1, \quad \frac{2m\upsilon}{\alpha_3} = -0,06, \quad (164)$$

откуда следует

$$k^2 = 3/4, \quad \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Имеем из таблиц $F\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) = 0,675$, $K\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2,1565$. Найдем следующие точки траектории:

$$\begin{aligned} r_1 &= 4,415 & \varphi_1 &= 0, \\ r' &= 5,000 & \varphi' &= 0,1094, \\ r_2 &= 6,128 & \Phi &= -0,1740. \end{aligned}$$

Но мы видели уже ранее, что при тех же значениях постоянных кроме рассмотренной нами траектории возможна еще вторая, для которой r , изменяется в пределах между $r = (-, -)$ и ∞ . Уравнение (161) действительно и для этой второй траектории, причем только в этом случае надо брать положительный знак, в чем можно убедиться опять сличая эту форму с (156).

Из (155) видно, что, этом случае φ монотонно убывает, так как теперь $\alpha_3 + b/r$ всегда отрицательно.

Если мы положим, что касание с окружностью r_3 происходит в точке $\varphi = 0$, то мы найдем

$$\beta_2 = -\frac{\pi}{4} + \sqrt{1 - \frac{k^2}{2}} K$$

и получим следующие взаимно соответствующие значения переменных r , y , z и φ :

$$\text{для } r = r_3 \quad y = -1 \quad z = 1 \quad \varphi = 0$$

$$\text{» } r = \infty \quad y = 0 \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \varphi = -\frac{\pi}{4} - \sqrt{1 - \frac{k^2}{2}} \left[K - F\left(\alpha, \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

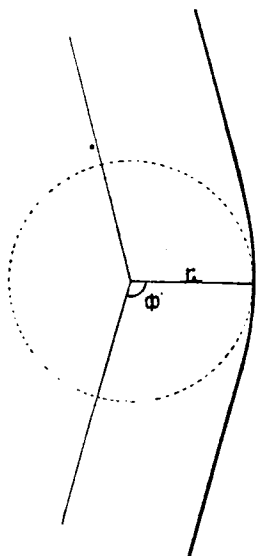
Последнее значение φ дает половину угла $2\Phi'$, в котором заключена вся траектория и определяет одну из асимптот траектории. Что для $r = \infty$ следует $\frac{d\varphi}{dr} = 0$, легко видеть и непосредственно из (155).

Для внешней траектории при значениях постоянных (164) получается

$$\begin{aligned} r = r_3 &= 27,2 & \varphi &= 0 \\ r = \infty & & \Phi' &= -1,82. \end{aligned}$$

Асимптоты составляют между собой угол несколько больший 180° . Траектория имеет форму, изображенную на рис. 26. Таким образом, электрон отклоняется от своего первоначального направления всего на небольшой угол $3,64 - \pi$.

При больших отрицательных значениях α_3 модуль k мал. Тогда Φ' близко к $-\frac{\pi}{2}$, так как K близко к $\frac{\pi}{2}$ и $F\left(\alpha, \frac{\pi}{4}\right)$ близко к $\frac{\pi}{4}$. Траектория мало отличается от прямой. Когда же α_3 приближается к пределу (153) и модуль k приближается к единице, Φ' возрастает до бесконечности. При этом бесконечное возрастание происходит в окрестностях $r=r_3$. При $k=1$ окружность r_3 никогда не достигается электроном, который стремится к ней асимптотически. Но при $k=1$ мы имеем $r_2=r_3$. Следовательно, к одной и той же окружности электрон может приближаться асимптотически и с наружной и с внутренней стороны.



Р и с. 26.

Когда α_3 переходит предел (153), так что становится

$$\alpha_3 > -2\sqrt{m\upsilon b}, \quad (165)$$

подкоренная функция $\psi(r)$ имеет уже всего один положительный корень

$$r_1 = (+, +).$$

Действительно, мы только что видели, что, когда α_3 достигает предельного значения, становится $r_2=r_3$, так что интервал, разделявший две траектории различных типов

исчезает и обе траектории как бы сливаются в одну. При значениях α_3 , удовлетворяющих неравенству (165), имеется одна траектория, простирающаяся от $r=\infty$ до $r=r_1$, и обратно до $r=\infty$.

Предположим сначала, что α_3 лежит в пределах

$$-2\sqrt{m\upsilon b} < \alpha_3 < 2\sqrt{m\upsilon b} \quad (166)$$

В этом случае согласно (160) становится $k > 1$. Тогда мы преобразуем эллиптический интеграл, положив в нем $z' = kz$ и вводя новый модуль $k_1 = \frac{1}{k}$, который меньше единицы, но

больше $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Формула (161) обратится тогда в

$$\begin{aligned} \varphi - \beta^2 &= -\frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{1}{m\upsilon r} \left(\alpha_3 + \frac{b}{r} \right) \right] = \\ &= \sqrt{k_1^2 - \frac{1}{2}} \int \frac{dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-k_1^2 z'^2)}} \end{aligned} \quad (167)$$

Чтобы сообразить, какой нужно брать знак в этой формуле и как определить значение постоянной β_2 , нужно посмотреть, как изменяются аргументы наших функций при возрастании r от r_1 до ∞ . Принимаемые ими значения сопоставлены в следующей таблице. При этом мы положим сначала, что $\alpha_3 < 0$.

$$\begin{array}{lll} \text{для } r_1 & y = 1 & z' = 0, \\ \text{» } r' = -\frac{b}{\alpha_3} & y = 0 & z' = \frac{1}{k_1 \sqrt{2}}, \\ \text{» } r'' = -\frac{2b}{\alpha_3} & y = \frac{\alpha_3^2}{2m\nu b} & z' = 1 \\ \text{» } r = \infty & y = 0 & z' = \frac{1}{k_1 \sqrt{2}}. \end{array}$$

Отсюда видно, что y убывает до $r = r''$ и затем возрастает, а z' наоборот, возрастает до этого момента, а затем убывает. При $r = r''$ первый множитель под знаком корня в эллиптическом интеграле обращается в нуль и перед самым интегралом меняется знак. В точке $r = r''$ как бы скреплены две наши прежние траектории, различавшиеся знаком перед интегралом. Произвольная постоянная β_2 получает тоже различные значения для r меньших r'' и больших его.

Если мы потребуем опять, чтобы траектория касалась окружности $r = r_1$, в точке $\varphi = 0$, то найдем

$$\beta_2 = \frac{\pi}{4} \quad \text{для } r < r'',$$

$$\beta_2 = \frac{\pi}{4} + 2k_1 \sqrt{k_1^2 - \frac{1}{2}} \quad \text{для } r > r''.$$

Здесь через K_1 обозначен полный эллиптический интеграл модуля. Найдем таким образом следующие существенные точки траектории:

$$\begin{aligned} r = r_1 \quad \varphi &= 0 \\ r = -\frac{2b}{\alpha_3} \quad \varphi &= \frac{\pi}{4} - \sqrt{k_1^2 - \frac{1}{2}} F\left(\alpha_1, \arcsin \frac{1}{k_1 \sqrt{2}}\right), \\ r = -\frac{2b}{\alpha_3} \quad \varphi &= \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{\alpha_3^2}{2m\nu} - \sqrt{k_1^2 - \frac{1}{2}} \cdot K_1, \\ r = \infty \quad \varphi &= \frac{\pi}{4} - \sqrt{k_1^2 - \frac{1}{2}} \left[2k_1 - F\left(\alpha_1, \arcsin \frac{1}{k_1 \sqrt{2}}\right) \right], \end{aligned} \tag{168}$$

где положено $k_1 = \sin \alpha_1$.

Траектория в этом случае делает одну петлю. Как и раньше, угловая скорость положительна для $r < r'$ и отрицательна для $r > r'$. На рисунке (27) вычерчена эта траектория для слу-

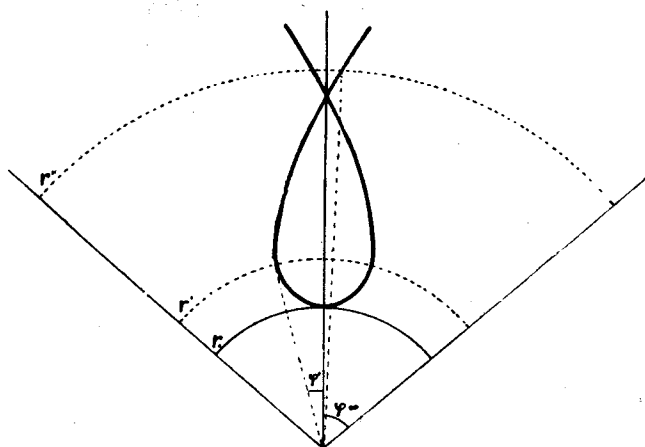


Рис. 27.

чая $k_2^1 = 3/4$, при чем принято опять $\frac{2b}{\alpha_3} = 10$. Формулы (168) дают следующие точки:

$$\begin{aligned} r_1 &= 3,66 & \varphi &= 0, \\ r' &= 5,00 & \varphi &= 0,2463, \\ r'' &= 10,00 & \varphi &= -0,0397, \\ r &= \infty & \varphi &= -0,8320. \end{aligned}$$

Когда α_3 делается равным нулю, r' становится бесконечно большим. Двойная точка на траектории исчезает. Уравнение траектории в этом случае имеет особенно простой вид. Действительно, теперь $k_1^2 = \frac{1}{2}$ и, следовательно, эллиптический интеграл в (167) отпадает. Уравнение траектории принимает вид

$$\frac{1}{r^2} = \frac{mv}{b} \cos 2\varphi.$$

Это уравнение равносторонней гиперболы, имеющей асимптотами радиусы $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$. Действительная полуось ее равна

$$\sqrt{\frac{b}{mv}}.$$

Когда $\alpha_3 > 0$ траектория опять изображается уравнением (167) с верхним знаком. Теперь z' изменяется лишь в пределах от нуля до $\frac{1}{k_1 \sqrt{2}}$. Угловая скорость все время положительна. По мере возрастания α_3 кривая все более распрямляется, обращая все время выпуклость к центру.

Характер движения нисколько не меняется, когда становится $\alpha_3 > 2\sqrt{m v b}$. Только теперь k_1 становится больше единицы и потому для вычисления траектории нужно вернуться к уравнению (161), где берется верхний знак и z изменяется между 0 и $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

27. Приближенное решение для траекторий, не лежащих в плоскости экватора. Если в уравнении (148) ввести полярные координаты на место цилиндрических, положив

$$z = r \cos \vartheta, \quad \rho = r \sin \vartheta,$$

то оно принимает вид

$$\frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{p_\varphi}{\sin \vartheta} - \frac{eM \sin \vartheta}{c r} \right)^2 \right] = \alpha_1. \quad (169)$$

В этом уравнении переменные разделяются в том случае, если отбросить член, содержащий M^2 . Тогда можно положить

$$p_\varphi = \alpha_3,$$

$$p_\vartheta^2 + \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta} = \alpha_2,$$

$$p_r^2 + \frac{\alpha_2}{r^2} - \frac{2eM}{c} \frac{1}{r^3} = 2m\alpha_1,$$

где α_2 — положительная постоянная. Определяя отсюда частные производные p_r , p_ϑ , p_φ , найдем для функции действия

$$W = \int \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2} + \frac{2eM\alpha_3}{c} \frac{1}{r^3}} dr + \int \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}} d\vartheta + \alpha_3 \varphi + \alpha_4.$$

Отсюда следуют интегралы движения

$$t + \beta_1 = \int \frac{m dr}{\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2} + \frac{2eM\alpha_3}{c} \frac{1}{r^3}}}, \quad \left| \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &= \frac{1}{2} \int \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2} + \frac{2eM\alpha_3}{cr^3}}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}}}, \\ \beta_3 &= \frac{eM}{c} \int \frac{dr}{r^3 \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2} + \frac{2eM\alpha_3}{cr^3}}} - \\ &\quad - \alpha_3 \int \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}}} + \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

Подкоренная функция от r имеет три действительных корня. Если мы рассматриваем M , как малую величину, то мы можем написать приближенные значения корней так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \sqrt{\frac{2m\alpha_1}{\alpha_2}} + \Delta, \quad \frac{1}{r_2} = -\sqrt{\frac{2m\alpha_1}{\alpha_2}} + \Delta, \\ \frac{1}{r_3} &= \frac{\alpha_2 c}{2eM\alpha_3} - 2\Delta, \end{aligned} \quad (171)$$

при чем положено для сокращения

$$\frac{4emM\alpha_1\alpha_2}{c\alpha_2^2} = \Delta.$$

Во время движения электрона r изменяется от бесконечности до r_1 и обратно до бесконечности.

Чтобы изучить форму траекторий, мы должны обратиться ко второму и третьему равенствам (170). Первый из эллиптических интегралов, фигурирующих в них, мы приведем к нормальной форме Лежандра. Для этого при положительном α_3 мы положим

$$\frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_3 - 1/r_2} = y^2, \quad \frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_1 - 1/r_3} = k^2. \quad (172)$$

Согласно этому преобразованию, когда $1/r$ равно $1/r_1$, $1/r_3$, $1/r_2$, ∞ для y^2 получаются соответственно значения 0, 1, $1/k^2$, ∞ . Будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2} + \frac{2eM\alpha_3}{cr^3}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2eM\alpha_3}{r} (1/r_3 - 1/r_2)}} \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \end{aligned} \quad (173)$$

Если примем во внимание приближенные значения корней (171), то увидим, что когда r изменяется между r_1 и ∞ , y^2 изменяется между 0 и $1/2$.

Если же α_3 отрицательно, положим

$$\frac{1/r_3 - 1/r_2}{1/r_1 - 1/r_2} \cdot \frac{1/r_1 - 1/r}{1/r_3 - 1/r} = y^2, \quad \frac{1/r_1 - 1/r_2}{1/r_3 - 1/r_2} = k^2 \text{ см.} \quad (174)$$

Теперь для значений $1/r$, равных $1/r_1$, $1/r_2$, $1/r_3$, ∞ получаются для y^2 значения 0, 1, ∞ , $1/k^2$. Это преобразование опять приводит к (173) и y^2 изменяется во время движения в тех же самых пределах.

Если в точной формуле (173) ввести для $1/r_2$, $1/r_3$ их приближенные значения и ограничиться первым приближением, то будет

$$\sqrt{\frac{2eM\alpha_3}{c} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right)} = \sqrt{\alpha_2}, \quad (175)$$

а для модуля эллиптического интеграла получится значение

$$k^2 = \mp \frac{4eM\alpha_3}{c\alpha_2} \sqrt{\frac{2m\alpha_1}{\alpha_2}}. \quad (176)$$

Далее мы положим опять $k = \sin \alpha$, $y = \sin \omega$ и обозначим эллиптический интеграл через $F(\alpha, \omega)$. Угол ω изменяется во время движения от $\frac{\pi}{4}$ до 0 и обратно до $\frac{\pi}{4}$.

В третьем равенстве (170) эллиптический интеграл умножен на малую величину M . Поэтому мы можем поступить с ним проще. Если под знаком корня отбросить член, содержащий M , то результат изменится на величину малую второго порядка. Следовательно мы можем заменить эллиптический интеграл элементарным, который берется непосредственно.

Если введем новую постоянную, положив

$$2\beta'_2 \sqrt{\alpha_2} = \beta_2,$$

то второй и третий интегралы (170), определяющие траекторию по выполнению в них квадратур по r и $\mathfrak{F}$, примут вид

$$\left. \begin{aligned} \beta_2 &= \mp 2F(\alpha_1, \omega) + \arcsin \left(\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_3^2}} \cos \mathfrak{F} \right), \\ \beta_3 &= \mp \frac{eM}{c\alpha_2} \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r^2}} - \arcsin \left(\sqrt{\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2 - \alpha_3^2}} \operatorname{ctg} \mathfrak{F} \right) + \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (177)$$

В этих формулах берется верхний знак при убывании r от бесконечности до r_1 , а ω от $\frac{\pi}{4}$ до 0 и нижний при возрастании r и ω .

Чтобы разобрав геометрический смысл наших уравнений, вспомним, что при $M = 0$ наш электрон движется прямолинейно и, следовательно, уравнения обращаются в уравнения прямой линии.

Действительно, если мы положим $\frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_2}} = \cos i$, то для $M = 0$ уравнения (177) обратятся в

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) &= \sin i \sin\left(\beta_2 \mp 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{r_1}{2r}}\right), \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) &= \operatorname{tg} i \sin(\varphi - \beta_3). \end{aligned} \right\} \quad (178)$$

Второе из этих равенств показывает, что проекция траектории на сферу — большой круг, наклоненный к экватору под углом

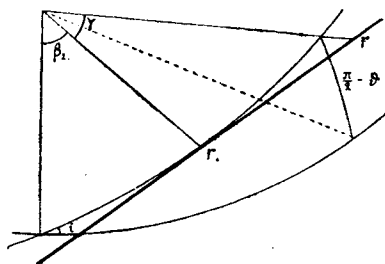


Рис. 28.

i и пересекающий его в точках $\varphi = \beta_3$ и $\varphi = \pi + \beta_3$. Первое же уравнение определяет прямую, лежащую в плоскости большого круга, так как по формуле сферической тригонометрии (см. рис. 28) имеем

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)}{\sin i} = \sin(\beta_2 + \gamma).$$

а с другой стороны из того же чертежа видим, что для точек прямой

$$2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{r_1}{2r}} = \arccos \frac{r_1}{r} = \gamma.$$

Таким образом, r_1 — кратчайшее расстояние прямой от начала координат, а β_2 — угол между r_1 и прямой пересечения плоско-

сти траектории с экватором. Широта начала и конца проекции траектории на сферу определяется равенством

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sin i \sin\left(\beta_2 \mp \frac{\pi}{2}\right). \quad (179)$$

В траектории магнитного поля вместо равенств (178) имеем

$$\left. \begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) &= \sin i \sin\left\{\beta_2 \mp 2F(\alpha, \omega)\right\}, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) &= \operatorname{tg} i \sin\left\{\varphi \mp \frac{eM}{c\alpha_2} \sqrt{2m\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{r}} - \beta_3\right\}. \end{aligned} \right\} \quad (180)$$

Прежде всего мы видим, что теперь, как и без магнитного поля, траектория заключена между поверхностями конуса

$\vartheta = \frac{\pi}{2} \mp i$. Широта проекций концов траектории теперь определяется из

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \sin i \sin\left\{\beta_2 \mp 2F\left(\alpha, \frac{\pi}{4}\right)\right\}. \quad (181)$$

Так как при $\alpha > 0$ $F\left(\alpha, \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\pi}{4}$ и отличается от $\frac{\pi}{4}$ на величину порядка k^2 или порядка M , то сравнивая (181), с (179), видим, что в присутствии поля угол ϑ во время движения пробегает несколько больший интервал значений, чем без него.

Второе уравнение (180) указывает, что влияние поля на угол φ подобно тому, которое имело бы медленное вращение системы координат около оси, параллельной оси магнитного диполя. Этим интервал изменения угла φ сужается или расширяется на величину $\left(\frac{2eM}{c\alpha_2} \sqrt{2m\alpha_1}\right)$ смотря по тому, положительно или отрицательно α_3 . Но к этому нужно еще прибавить расширение этого интервала, являющееся следствием расширения интервала изменения угла ϑ .

Резюмируя все вышесказанное, можно сказать, что прямолинейная траектория под действием слабого магнитного диполя искажается следующим образом. (При этом предполагается, что сравниваются траектории, характеризуемые одними и теми же значениями постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.) Увеличивается или уменьшается (смотря по знаку α_3) кратчайшее расстояние r_1 траектории от диполя согласно формуле (171). Пределы возможных значений угла ϑ не изменяются, но увеличивается фактически пробегаемый во время движения интервал согласно формуле (181). Наконец, изменяется и интервал, пробегаемый углом φ .

Таким образом, мы убеждаемся, что если в уравнении (169) откинуть член квадратный по M , траектории принимают

сравнительно простую форму. Сложные формы траекторий, получаемые, как показал Штермер, при интеграции точных уравнений движения, обуславливаются, следовательно, существенным образом влиянием члена, квадратного по M .

28. Движение под действием притягивающего заряда и магнитного диполя, находящихся в одной точке. Задача, рассмотренная нами в предыдущем параграфе, поясняет нам, как движутся электроны, посылаемые в пространство с солнечной поверхности, когда они попадают в поле земного магнетизма, проходя однако так далеко от земли, что воздействие поля на их траектории лишь слабое. Задача, которую мы ставим себе теперь, имеет применение в явлениях внутриатомных. Мы должны уменьшить наш масштаб не менее, как в 10^{21} раз.

Пусть на электрон действует кроме магнитного диполя положительный заряд e' , находящийся тоже в начале координат, и пусть движение протекает настолько далеко от него, что магнитное действие слабо по сравнению с электрическим. Тогда мы опять можем пренебречь квадратом M .

Формула предыдущего параграфа позволяет нам без труда решить эту задачу.

Уравнение Гамильтона—Якоби имеет теперь форму:

$$\frac{1}{2m} \left[p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{p_\varphi}{\sin \vartheta} - \frac{cM \sin \vartheta}{c} \frac{1}{r} \right)^2 \right] + \frac{ee'}{r} = \alpha_1,$$

и отличается от (169) лишь членом $\frac{ee'}{r}$, выражающим электростатическую энергию. Если положим для сокращения

$$2m \left(\alpha_1 - \frac{ee'}{r} \right) - \frac{\alpha_2}{r^2} = P \left(\frac{1}{r} \right),$$

то по аналогии с (170) можем прямо написать уравнения траектории в форме

$$\left. \begin{aligned} \beta'_2 &= \frac{1}{2} \int \sqrt{P \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{2eM\alpha_3}{cr^3}} + \frac{1}{2} \int \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}} \, d\vartheta, \\ \beta'_3 &= - \frac{cM}{c} \int \sqrt{P \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{2eM\alpha_3}{cr^3}} \, \frac{1}{r} d \left(\frac{1}{r} \right) - \\ &\quad - \alpha_3 \int \frac{d\vartheta}{\sin^2 \vartheta} \sqrt{\alpha_2 - \frac{\alpha_3^2}{\sin^2 \vartheta}} + \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (181)$$

Если обозначим через $\frac{1}{r_{10}}, \frac{1}{r_{20}}$ корни уравнения

$$P\left(\frac{1}{r}\right) = 0,$$

при чем под r_{10} мы подразумеваем наименьшее, под r_{20} — наибольшее расстояние электрона от начала при его движении по Кеплерову эллипсу в отсутствии магнитного поля, то приближенные значения корней уравнения

$$P\left(\frac{1}{r_i}\right) + \frac{2eM\alpha_3}{cr^3} = 0,$$

будут

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{r_{10}} - \frac{1}{r_{10}^3} \delta, \\ \frac{1}{r_2} &= \frac{1}{r_{20}} + \frac{1}{r_{20}^3} \delta, \\ \frac{1}{r_3} &= \frac{c\alpha_2}{2eM\alpha_3} + \frac{2mee'}{\alpha_2}, \end{aligned} \right\} \quad (182)$$

причем положено для сокращения

$$\frac{eM\alpha_3}{c\alpha_2} \sqrt{\left(\frac{mee'}{\alpha_2}\right)^2 + \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2}} = \delta.$$

Преобразованием (172) или (174), смотря по знаку α_3 , эллиптический интеграл в первом из уравнений (181) приводится опять к нормальному виду (173). Когда r изменяется от r_1 до r_2 , y изменяется от нуля до единицы. Для постоянного знаменателя перед интегралом получается в первом приближении тоже значение (175). Для модуля же в том же приближении будет

$$k^2 = \mp \frac{4eM\alpha_3}{c\alpha_2} \sqrt{\left(\frac{mee'}{\alpha_2}\right)^2 + \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2}}.$$

Что касается второго эллиптического интеграла в (181), то здесь мы опять можем отбросить член, содержащий M под знаком корня, и таким образом превратить интеграл в элементарный. Последний дает

$$\int_{r_3} \frac{dr}{P\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_2}} \left\{ \sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)} + \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}}} \right\}$$

Так как левая сторона всегда возрастает, а первый член справа обращается в нуль для $r=r_1$, и $r=r_2$, то в последнем члене знак перед корнем должен браться таким, чтобы $\arctg$ всегда возрастал. Аналогично (180) предыдущего параграфа наши уравнения (181) принимают теперь вид

$$\left. \begin{aligned} \sin \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) &= \sin i \sin \{ \beta_2 \mp 2F(\alpha_1 \omega) + 4nK \}, \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) &= \operatorname{tg} i \sin \left\{ \varphi + \right. \\ &+ \frac{eM}{2e\sqrt{\alpha_2}} \left[\sqrt{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2} \right)} + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \arctg \sqrt{\frac{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}}} \right] - \beta_3 \left. \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (183)$$

В первом из этих равенств берется верхний знак, когда r убывает от r_2 до r_1 и нижний, когда оно возрастает обратно до r_2 .

Из этих уравнений легко видеть форму траектории. В отсутствии магнитного поля электрон движется по эллиптической орбите, наклоненной к экваториальной плоскости под углом i . Наименьшее и наибольшее значения радиуса-вектора суть r_{10} и r_{20} . Постоянные β_2 и β_3 обозначают долготу перигелия и долготу восходящего узла (азимут точки пересечения траектории с экватором). Присутствие магнитного поля вносит в движение следующие изменения. Во-первых изменяются наименьшее и наибольшее значения радиуса вектора согласно первым двум равенствам (182). При положительном α_3 r_1 уменьшается, r_2 увеличивается, при отрицательном — наоборот. Траектория заключена между поверхностями конуса $\vartheta = \frac{\pi}{2} \pm i$, которых она по очереди касается, как и без магнитного поля.

В первом из уравнений (183) через $K = F\left(\alpha_1 \frac{\pi}{2}\right)$ обозначен полный эллиптический интеграл, через n — число оборотов, совершенных электроном после прохождения через перигелий в точке долготы β_2 . Мы видим, что при изменении r от r_1 до r_2 и обратно до r_1 долгота по орбите изменяется на величину $4k$, которая при $\alpha > 0$ превосходит 2π . В первом приближении имеем

$$\lambda = 4k - 2\pi = \frac{\pi}{2} k^2 = \mp \frac{2\pi e M \alpha_3}{c \alpha_2} \sqrt{\left(\frac{mee'}{\alpha_2} \right)^2 + \frac{2m\alpha_1}{\alpha_2}}.$$

Таково перемещение перигелия за один оборот. Совершается оно в направлении движения электрона.

Кроме того, как показывает второе равенство (183), имеет место прецессия. Из двух функций от r , стоящих под знаком синуса справа, первая периодическая, вторая же изменяется монотонно. За время между двумя прохождениями электрона через перигелий $\arctg$ возрастает на π . Вследствие этого точка пересечения орбиты с экватором перемещается на угол

$$\mu = \frac{\pi e M}{2c \sqrt{\alpha_2}} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\pi e^2 e' m M}{c \alpha_2^{3/2}}.$$

Линия узлов перемещается в положительном направлении, так что общий вид траектории в проекции на вертикальную

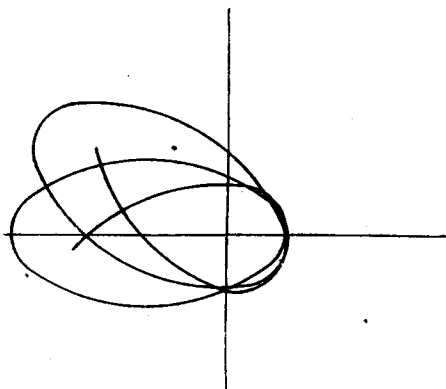


Рис. 29.

плоскость таков, как показано на рисунке 29. Если обозначим через η эксцентриситет эллипса ¹⁾, то между движениями перигелия и линии узлов имеем соотношение

$$\frac{\lambda}{\mu} = 2\eta \cos i$$

Когда это отношение рационально и соизмеримо с 2π движение периодически.

ГЛАВА IV.

Движение с переменной массой.

29. Динамика электрона по теории относительности. Во всех задачах, рассмотренных нами до сих пор, мы считали массу электрона постоянной. Однако, это справедливо лишь до тех пор, пока скорость электрона очень мала

¹⁾ Ср. формулу (28) § 6, в которой нужно изменить обозначения поставив α_1 и α_2 на место ε и c^2 .

по сравнению со скоростью света. В природе же встречаются скорости электронов, лишь немногим уступающие скорости света и в этом случае, как известно, масса их возрастает со скоростью. Закон возрастания массы выражают формулам теории относительности.

По этой теории Лагранжева функция для движения электрона в электромагнитном поле имеет форму

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{e}{c} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) - e\varphi, \quad (184)$$

где через β обозначено отношение $\frac{v}{c}$, а через m_0 — масса для бесконечно медленных движений, которую до сих пор мы обозначали через m . Уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \beta^2}} &= eE_x + \frac{e}{c} (H_z \dot{y} - H_y \dot{z}), \\ \frac{d}{dt} \frac{m_0 \dot{y}}{\sqrt{1 - \beta^2}} &= eE_y + \frac{e}{c} (H_x \dot{z} - H_z \dot{x}), \\ \frac{d}{dt} \frac{m_0 \dot{z}}{\sqrt{1 - \beta^2}} &= eE_z + \frac{e}{c} (H_y \dot{x} - H_x \dot{y}). \end{aligned} \right\} \quad (185)$$

Так как компоненты импульса суть частные производные от функции Лагранжа по компонентам скоростей, то будет

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e}{c} F_x, \\ p_y &= \frac{m_0 \dot{y}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e}{c} F_y, \\ p_z &= \frac{m_0 \dot{z}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{e}{c} F_z. \end{aligned} \right\} \quad (186)$$

И здесь, как и раньше, импульс составляется из двух частей: кинетического импульса, параллельного скорости, но теперь возрастающего не пропорционально ей, а быстрее, и потенциального импульса, пропорционального как и прежде, вектор-потенциалу.

Гамильтонова функция получается из функции Лагранжа преобразованием Лежандра, а именно

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - L.$$

Подставляя сюда значения импульсов и Лагранжевой функции, находим

$$H = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} + e\varphi. \quad (187)$$

Это не что иное, как полная энергия электрона. Если первый член справа разложить по возрастающим степеням v^2 , то он дает

$$m_0 c^2 + m_0 \frac{v^2}{2} + \dots$$

Здесь первый член постоянный и измеряет неизменный внутренний запас энергии, которой по теории относительности обладает электрон. Дальнейшие члены выражают кинетическую энергию его. Что выражение (187), положенное равным постоянной, действительно выражает закон энергии, легко видеть из уравнений движения (185). Если умножить их поочередно на $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и сложить, то получится

$$\dot{x} \frac{d}{dt} \frac{m_0 \dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dot{y} \frac{d}{dt} \frac{m_0 \dot{y}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \dot{z} \frac{d}{dt} \frac{m_0 \dot{z}}{\sqrt{1-\beta^2}} = -e \frac{d\varphi}{dt}$$

Но левая сторона здесь равна

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{d}{dt} m_0 c^2 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Интегрируя, находим для энергии выражение (187). В него не входит магнитное поле, которое работы не совершает.

Но формула (187), определяя величину Гамильтоновой функции, содержит еще неправильные переменные, так как в ней фигурирует скорость, а должны стоять компоненты импульсов. Последние мы введем, пользуясь формулами (186). Разрешая их относительно $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, затем возводя в квадрат, складывая и деля на c^2 , получим

$$\beta^2 = \frac{1-\beta^2}{m_0^2 c^2} \left[\left(p_x - \frac{e}{c} F_x \right)^2 + \left(p_y - \frac{e}{c} F_y \right)^2 + \left(p_z - \frac{e}{c} F_z \right)^2 \right]$$

и отсюда

$$\beta^2 = \frac{[\quad]}{m_0^2 c^2 + [\quad]},$$

где символом $[\quad]$ обозначена квадратная скобка предыдущей формулы. Подставляя это значение β^2 в (187), найдем

$$H = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \left(p_x - \frac{e}{c} F_x \right)^2 + \left(p_y - \frac{e}{c} F_y \right)^2 + \left(p_z - \frac{e}{c} F_z \right)^2} + e\varphi. \quad (188)$$

Если в системе канонических уравнений мы дадим H это значение, мы получим уравнения, эквивалентные (185).

Приравнивая H постоянной α'_1 и подразумевая под p_x , p_y , p_z частные производные от функции W , мы получим урав-

нение с частными производными Гамильтона-Якоби, которое по уничтожении иррациональности принимает вид

$$\left(p_x - \frac{e}{c} F_x\right)^2 + \left(p_y - \frac{e}{c} F_y\right)^2 + \left(p_z - \frac{e}{c} F_z\right)^2 - \frac{1}{c^2} (\alpha'_1 - e\varphi)^2 = -m_0^2 c^2. \quad (189)$$

Последний член слева представляет собой квадрат разности между полной и потенциальной энергией точно так же, как в первых трех стоят разности между полными и потенциальными импульсами. Формула (189) отличается характерной для теории относительности симметрией, так как в этой теории импульсы и энергия рассматриваются как четыре компоненты вектора импульса—энергии, а F_x , F_y , F_z и φ как четыре компоненты вектора-потенциала.

Если положим $\alpha'_1 = \alpha_1 + m_0 c^2$, подразумевая под α_1 , как всегда переменную часть энергии, то можем (189) написать в форме

$$\left(p_x - \frac{e}{c} F_x\right)^2 + \left(p_y - \frac{e}{c} F_y\right)^2 + \left(p_z - \frac{e}{c} F_z\right)^2 = 2m_0(\alpha_1 - e\varphi) + \left(\frac{\alpha_1 - e\varphi}{c}\right)^2. \quad (190)$$

Сравнивая это уравнение с (74), видим, что вся разница между старой теорией и теорией относительности в последнем члене справа в формуле (190), который в уравнении (74) отсутствует¹⁾.

30. Движение в магнитном поле. При решении задач о движении электрона под действием одних магнитных сил безразлично, пользоваться ли уравнением старой теории или теории относительности. Так как в магнитном поле электрон движется с постоянной скоростью, то и по теории относительности его масса постоянна во время движения. Только величина ее зависит от величины скорости. Таким образом в обеих теориях электрон описывает одни и те же траектории, но с различными скоростями.

Это легко видеть непосредственно из уравнений с частными производными. Так как в этом случае $\varphi = 0$, то правая сторона (190) равна $2m_0\alpha_1 + \frac{\alpha_1^2}{c^2}$. По старой теории второй из этих

¹⁾ Уравнение Гамильтона-Якоби для движения электрона по теории относительности впервые опубликовано, повидимому, G. A. Schott'ом в его книге *Electromagnetic Radiation*, Appendix F, § 285, Cambridge Press 1912. Но на него не было обращено внимания в журнальной литературе и им не пользовались при решении конкретных задач. Это объясняется тем, что важность метода Гамильтона-Якоби для современной физики особенно проявилась лишь позднее.

членов отсутствует и правая сторона уравнения равна $m_0^2 v^2$, где v — постоянная скорость. По теории же относительности кинетическая энергия равна

$$m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right),$$

а потому

$$2m_0 \alpha_1 + \frac{\alpha_1^2}{c^2} = \frac{m_0^2 c^2 \beta^2}{1-\beta^2}.$$

Если скорость движения в этом случае мы обозначим через v' , то очевидно электрон будет описывать ту же траекторию, что и по старой теории, если правые стороны уравнения будут в обоих случаях равны. Т.-е. если будет

$$m_0^2 v'^2 = \frac{m_0^2 c^2 \beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

или

$$v = \frac{v'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}.$$

Двигаясь со скоростью v' по законам теории относительности в произвольном магнитном поле, электрон описывает те же траектории, которые он по законам старой теории описал бы, двигаясь со скоростью v . Когда v изменяется от нуля до бесконечности, v' изменяется от нуля до c .

31. Сравнение с классической динамикой в общем случае. Решение уравнения (190) может быть сведено к решению уравнения (74) и в случае совершенно произвольного электромагнитного поля. Действительно, если мы представим себе электростатическое поле, потенциал которого ϕ' связан с заданным потенциалом ϕ равенством

$$2m_0(\alpha_1 - e\phi) + \left(\frac{\alpha_1 - e\phi}{c} \right)^2 = 2m_0(\alpha_1 - e\phi')$$

то убедимся, что электрон, двигаясь по законам теории относительности в электромагнитном поле, характеризуемом потенциалами F_x , F_y , F_z и ϕ , описывает те же самые траектории, что двигаясь по законам старой теории (с постоянной массой) под действием поля с потенциалами F_x , F_y , F_z , ϕ' .

Нужно однако иметь в виду, что форма поля ϕ' будет зависеть от α_1 , т.-е. поле, которым нужно заменить заданное, зависит от энергии электрона. Но достаточно замечательно то, что оно зависит только от энергии и не зависит от остальных произвольных постоянных, характеризующих траекторию.

Скорость же движения по траектории будет в обоих случаях различна. Положение на траектории в момент t определяется из равенства, получаемого дифференцированием полного интеграла уравнения с частными производными по постоянной α_1 , измеряющей энергию. Результат получается в обоих случаях различный, потому что в преобразованной проблеме мы должны дифференцировать по α_1 , лишь поскольку оно войдет явным образом, а не через посредство функции φ' , которая, как сказано, тоже зависит от него.

32. Движение в однородном электрическом поле. Пусть дано однородное электрическое поле, параллельное оси x -ов, напряжение которого равно E . Тогда уравнение (190) имеет вид

$$p_x^2 + p_y^2 - \frac{1}{c^2} (\alpha'_1 + eEx)^2 = -m_0^2 c^2 \quad (191)$$

если мы предположим, что движение протекает в плоскости $x-y$ -ов. Для электростатического потенциала мы имеем $\varphi = -eEx$. Так как в уравнении (191) y не входит, мы положим $p_y = \alpha_2$ и найдем полный интеграл в виде

$$W = \int \sqrt{\frac{1}{c^2} (\alpha'_1 + eEx)^2 - \alpha_2^2 - m_0^2 c^2} dx + \alpha_2 y + \alpha_3.$$

Отсюда дифференцированием по α'_1 и α_2 находим интегралы движения

$$\beta_1 + t = \frac{1}{c^2} \int \frac{(\alpha'_1 + eEx) dx}{\sqrt{\frac{1}{c^2} (\alpha'_1 + eEx)^2 - \alpha_2^2 - m_0^2 c^2}},$$

$$\beta_2 = -\alpha_2 \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{c^2} (\alpha'_1 + eEx)^2 - \alpha_2^2 - m_0^2 c^2}} + y.$$

В обоих этих равенствах квадратуры выполняются и после простых преобразований получаются интегралы в виде

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 + eEx &= c \sqrt{m_0^2 c^2 + \alpha_2^2 + e^2 E^2 (\beta_1 + t)^2}, \\ \alpha'_1 + eEx &= m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\alpha_2^2}{m_0^2 c^2} \cos h \left\{ \frac{eE (y - \beta_2)}{\alpha_2 c} \right\}}. \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

Второй из этих интегралов определяет форму траектории, первый—положение на ней в момент t . Вместо параболы, описываемой при постоянной массе, теперь мы имеем кривую гиперболического косинуса. Так как e отрицательно, имеем $x = -\infty$ для $y = -\infty$. В точке $y = \beta_2$ x достигает максимума

$$x = \frac{1}{eE} \left(m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{\alpha_2^2}{m_0^2 c^2} - \alpha'_1} \right).$$

Как и в случае параболического движения, касательная траектории делается параллельной оси x -ов при бесконечно большом y .

Но происходит это в обоих случаях от различных причин. При параболическом движении компонента скорости, параллельная оси y -ов остается постоянной, а компонента по оси x -ов делается бесконечно большой по абсолютному значению. По теории относительности скорость не может превосходить скорость света, а может лишь приближаться к ней. Таким образом компонент скорости по оси x -ов будет приближаться к $-c$, т.е. будет конечна. Но в то же время компонента по оси y -ов будет стремиться к нулю. Действительно, имеем

$$p_y = \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \alpha_2. \quad (193)$$

Когда β^2 приближается к единице, $\dot{y}$ стремимся к нулю. Поэтому и в этом случае $\frac{dy}{dx}$ стремится к нулю.

Уравнение, связывающее x с t —уравнение гиперболы, почему и самое движение под действием постоянной силы было названо гиперболическим¹⁾. Через вершину траектории электрон проходит в момент $t = -\beta_1$.

Не трудно выразить постоянные α'_1 , α_2 , β_1 , β_2 через заданные начальные значения координат и скоростей в какой-либо момент времени t_0 . Для этого достаточно подставить эти значения в (192), (193) и в уравнение энергии:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - eEx = \alpha'_1. \quad (194)$$

Так, если мы предположим, что в момент $t = -\beta_0 = 0$ электрон находится в вершине кривой и что вершина эта находится в начале координат, а скорости в этот момент имеют значения $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{y}_0 = c\beta_0$ то из (193) и (194) имеем

$$\alpha_2 = \frac{m_0 c \beta_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \quad \alpha'_1 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta_0^2}},$$

а самые уравнения (192) примут вид

$$-x = \sqrt{a^2 + c^2 t^2} - a,$$

$$-x = a \left\{ \cosh \frac{y}{a\beta_0} - 1 \right\},$$

¹⁾ М. Борн, Ann. d. Phys. 28, p. 571, 1909.

причем положено для сокращения

$$\frac{m_0 c^2}{eE \sqrt{1 - \beta_0^2}} = -a.$$

Так как постоянная эта имеет размерность длины, то ее можно сделать равной единице, выбрав соответственно единицу длины.

На рисунке 30 изображена траектория для случая $\beta_0^2 = 3/4$, т. е. кривая

$$-x = \cos h \sqrt{\frac{3}{2}} y - 1.$$

Пунктиром же представлена парабола

$$-x = \frac{4}{3} y^2,$$

которую электрон описал бы при тех же начальных условиях в том же поле, если бы его масса была постоянна и равна m_0 . Мы видим, что двигаясь с переменной массой, электрон сначала испытывает вдвое меньше ускорение по оси x -ов, потому что масса его вдвое больше, но в дальнейшем движении обе кривые пересекаются, потому что при даль-

нейшем увеличении скорости, а с нею и массы компонента скорости по оси y -ов уменьшается и стремится к нулю.

Масштаб чертежа обратно пропорционален напряжению поля E . При поле около 1 миллиона вольт/сант. единица равна одному сантиметру. Наконец, тонким пунктиром соединены между собой точки кривых, достигаемые в одинаковые промежутки времени.

33. Движение в постоянном однородном электромагнитном поле¹⁾. Чтобы определить это движение, нужно проинтегрировать уравнения (185), полагая в них все

¹⁾ Задача эта иным методом решена Шоттом. G. A. Schott, *Electromagnetic Radiation*, Appendix G. pp. 295—313, 1912.

Рис. 30.

компоненты электрического и магнитного поля постоянными. Уравнения эти нелинейные второго порядка. Но сейчас мы приведем их к системе линейных однородных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Для этого мы введем в качестве независимой переменной так называемое собственное время τ движущегося электрона соотношением

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (195)$$

Координаты x, y, z , а также величину $l = ct$, пропорциональную времени, мы будем рассматривать, как функции от τ . Производные по τ будем обозначать акцентами. Соотношение (195) можно написать

$$l'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 \quad (196)$$

откуда (дифференцируя еще раз по τ) следует

$$l'l'' - x'x'' - y'y'' - z'z'' = 0. \quad (197)$$

Мы введем для удобства следующее сокращения:

$$\frac{eE_x}{m_0 c} = e_x, \quad \frac{eE_y}{m_0 c} = e_y, \quad \text{и т. д.} \quad \dots \quad \frac{eH_z}{m_0 c} = h_z.$$

Систему трех уравнений (185) мы можем заменить системой четырех уравнений

$$\left. \begin{aligned} x'' - h_z y' + h_y z' - e_x l' &= 0, \\ h_z x' + y'' - h_x z' - e_y l' &= 0, \\ -h_y x' + h_x y' + z'' - e_z l' &= 0, \\ e_x x' + e_y y' + e_z z' - l'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (198)$$

Первые три из этих уравнений получаются из уравнений (185) делением их на $m_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ и заменой в членах, содержащих электрическую силу $\frac{c}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ через l' из уравнения (195). По-

следнее же уравнение мы получим умножая первые три последовательно на x', y', z' складывая их между собой и принимая во внимание (197). Отсюда видно, что четвертое уравнение (198) есть уравнение энергии: первые три члена его выражают работу электрических сил, исчисленную за единицу собственного времени, последний же — приращение кинетической энергии, которая отличается от l' лишь постоянным множителем $m_0 e$.

Полученная нами система уравнений — первого порядка относительно x', y', z', l' . Если мы положим

$$x' = X e^{a\tau}, \quad y' = Y e^{a\tau}, \quad z' = Z e^{a\tau}, \quad l' = L e^{a\tau}, \quad (199)$$

то для определения α будем иметь уравнение

$$\begin{vmatrix} \alpha & -h_z & h_y & -e_x \\ h_z & \alpha & -h_x & -e_y \\ -h_y & h_x & \alpha & -e_z \\ e_x & e_y & e_z & -\alpha \end{vmatrix} = 0. \quad (200)$$

Очевидно мы не сузим задачу, если положим, что магнитное поле параллельно оси z -ов, а электрическое лежит в плоскости x — z -ов и потому положим $h_x = h_y = e_y = 0$. В этом случае уравнение (200) обращается в

$$(\alpha^2 + h_z^2)(\alpha^2 - e_z^2) - \alpha^2 e_x^2 = 0. \quad (201)$$

Если введем обозначения

$$\begin{aligned} f^2 &= \frac{e_x^2 + e_z^2 - h_z^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{e_x^2 + e_z^2 - h_z^2}{2}\right)^2 + h_z^2 e_x^2}, \\ g^2 &= \frac{e_x^2 + e_z^2 - h_z^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{e_x^2 + e_z^2 - h_z^2}{2}\right)^2 + h_z^2 e_x^2}, \end{aligned} \quad (202)$$

где f и g две действительных положительных величины, то корни уравнения будут $\pm f$, $\pm ig$.

Для X , Y , Z и L мы получим из первых трех уравнений системы

$$\frac{H}{e_x \alpha^2} = \frac{Y}{-e_x h_z \alpha} = \frac{Z}{e_z (\alpha^2 + h_z^2)} = \frac{L}{\alpha (\alpha^2 + h_z^2)}. \quad (203)$$

Таким образом общее решение системы (198) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x' &= e_x \{ C_1 f^2 e^{f\tau} + C_2 f^2 e^{-f\tau} - C_3 g^2 e^{ig\tau} - C_4 g^2 e^{-ig\tau} \}, \\ y' &= e_x h_z \{ -C_1 f e^{f\tau} + C_2 f e^{-f\tau} + C_3 i g e^{ig\tau} + C_4 i g e^{-ig\tau} \}, \\ z' &= e_z \{ C_1 (f^2 + h_z^2) e^{f\tau} + C_2 (f^2 + h_z^2) e^{-f\tau} + C_3 (h_z^2 - g^2) e^{ig\tau} + \\ &\quad + C_4 (h_z^2 - g^2) e^{-ig\tau} \}, \\ l' &= \{ l_1 (f^2 + h_z^2) f e^{f\tau} - C_2 (f^2 + h_z^2) f e^{-f\tau} + C_3 (h_z^2 - g^2) e^{ig\tau} - \\ &\quad - C_4 (h_z^2 - g^2) e^{-ig\tau} \}. \end{aligned} \right\} \quad (204)$$

Или можно уничтожить мнимость, заменив показательные функции через гиперболические и круговые. Если ввести новые обозначения для постоянных, положив,

$$C_1 + C_2 = A, \quad C_1 - C_2 = B, \quad C_3 + C_4 = C, \quad C_3 - C_4 = D,$$

то получится

$$\left. \begin{aligned} x' &= e_x \{ f^2 (A \cosh f\tau + B \sinh f\tau) - g^2 (C \cos g\tau + D \sin g\tau) \}, \\ y' &= e_x h_z \{ -f (B \cosh f\tau + A \sinh f\tau) - g (D \cos g\tau - C \sin g\tau) \}, \\ z' &= e_z \{ (f^2 + h_z^2) (A \cosh f\tau + B \sinh f\tau) - (h_z^2 - g^2) (C \cos g\tau + \\ &\quad + D \sin g\tau) \}, \\ l' &= \{ f (f^2 + h_z^2) (B \cosh f\tau + A \sinh f\tau) + g (h_z^2 - g^2) (D \cos g\tau - \\ &\quad - C \sin g\tau) \}, \end{aligned} \right\} \quad (205)$$

Постоянные A, B, C, D определяются по начальным скоростям электрона. Если заданы для $\tau = 0$

$$x'_0 = \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \quad y'_0 = \frac{\dot{y}_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \quad z'_0 = \frac{\dot{z}_0}{\sqrt{1-\beta_0^2}}, \quad l'_0 = \frac{c}{\sqrt{1-\beta_0^2}},$$

то для постоянных найдем выражения

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{x'_0 (h_z^2 - g^2) + \frac{z'_0}{e_z} g^2}{y_z^2 (f^2 + g^2)}, & B &= \frac{l'_0 + \frac{y'_0}{e_x h_z} (h_z^2 - g^2)}{f (f^2 + g^2)}, \\ C &= \frac{\frac{z'_0}{e_z} f^2 - \frac{x'_0}{e_x} (f^2 + h_z^2)}{h_z^2 (f^2 + g^2)}, & D &= \frac{l'_0 = l'_0 + \frac{y'_0}{e_x h_z} (f^2 + h_z^2)}{g (f^2 + g^2)} \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

Следует заметить, что постоянные A, B, C, D не независимы между собой, а связаны квадратным уравнением, потому что таким уравнением (196) связаны собой x'_0, y'_0, z'_0, l'_0 .

Наконец, интегрируя (205) еще раз по τ , найдем, обозначив начальные координаты электрона через x_0, y_0, z_0 , а начальный момент времени через t_0 :

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= e_x \{ f [B (\cos hf\tau - 1) + A \sin hf\tau] + g [D (\cos g\tau - 1) - C \sin g\tau] \}, \\ y - y_0 &= e_x h_z \{ -A (\cos hf\tau - 1) - B \sin hf\tau - C (\cos g\tau - 1) - D \sin g\tau \}, \\ z - z_0 &= e_z \left\{ \frac{f^2 + h_z^2}{f} [B (\cos hf\tau - 1) + A \sin hf\tau] - \frac{h_z^2 - g_z^2}{g} [D (\cos g\tau - 1) - C \sin g\tau] \right\}, \\ c(t - t_0) &= (f^2 + h_z^2) [A (\cos hf\tau - 1) + B \sin hf\tau] + (h_z^2 - g^2) [C (\cos g\tau - 1) + D \sin g\tau]. \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

Из этих формул мы видим, что движение складывается из двух частей: первой, выражаемой гиперболическими функциями, и второй, выражаемой круговыми.

Первое протекает в плоскости

$$\frac{x - x_0}{e_x f^2} = \frac{z - z_0}{e_z (f^2 + h_z^2)}, \quad (208)$$

параллельной оси u -ов, а именно вдоль ветви гиперболы, по которой плоскость эта пересекает поверхность гиперболического цилиндра

$$\left(\frac{x - x_0}{e_x f} + B \right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{e_x h_z} - A \right)^2 = B^2 - A^2. \quad (209)$$

Можно показать, что $B^2 - A^2$ положительно, а потому действительная ось гиперболы параллельна плоскости $x - z$ -ов, а мнимая—оси y -ов.

Второе же движение происходит в плоскости:

$$\frac{x - x_0}{e_x g^2} = \frac{z - z_0}{e_z (g^2 - h_z^2)}, \quad (210)$$

по эллипсу, являющемуся пересечением этой плоскости с поверхностью эллиптического цилиндра

$$\left(\frac{x - x_0}{e_x g} + D \right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{e_y h_z} - C \right)^2 = C^2 + D^2. \quad (211)$$

Из главных осей этого эллипса одна параллельна оси y -ов, другая—плоскости $x - z$ -ов.

Ранее мы видели (в § 5), что если считать массу постоянной, то движение складывается из параболического и кругового. При этом ось параболы параллельна магнитному полю, а плоскость круга—перпендикулярна к нему. Теперь мы убеждаемся, что если учесть зависимость массы от скорости согласно теории относительности, то гиперболическое движение заменяет параболическое, а эллиптическое заменяет круговое. Принимая во внимание (202) легко убедиться, что плоскость гиперболы (209) и плоскость эллипса (211) взаимно перпендикулярны. Но действительная ось гиперболы не параллельна магнитному полю, а составляет с ним угол α , определяемый из

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e_x f^2}{e_z (f^2 + h_z^2)}. \quad (212)$$

Угол этот, как видно, зависит только от электромагнитного поля, а не от начальных скоростей электрона. То же замечание справедливо и относительно отношения главных осей или эксцентриситетов гиперболы и эллипса. Действительно, согласно (209) отношение действительной и мнимой полуосей гиперболического цилиндра равно f/h_z .

Отношение же осей гиперболы, по которой движется электрон, будет по (212)

$$\frac{f}{h_z \sin \alpha} = \frac{\sqrt{e_x^2 f^4 + e_z^2 (f^2 + h_z^2)}}{e_x h_z f}.$$

Этому выражению можно придать более симметрическую форму. Знаменатель мы преобразуем, приняв во внимание, что согласно (202)

$$e_x h = \sqrt{(e_x^2 + e_z^2 + g^2)(e_x^2 + e_z^2 - f^2)}. \quad (213)$$

Для преобразования же числителя заметим, что по тем же равенствам

$$e_z^2 h_z^2 = f^2 g^2 \quad \text{и} \quad f^2 + h_z^2 = e_x^2 + e_z^2 + g^2. \quad (214)$$

Тогда отношение осей примет вид

$$\sqrt{\frac{f^2 + g^2}{e_x^2 + e_z^2 - f^2}}, \quad (215)$$

а отсюда эксцентриситет

$$\sqrt{\frac{e_x^2 + e_z^2 + g^2}{f^2 + g^2}}. \quad (216)$$

Если же мы обратимся к эллипсу, то для него, наоборот, получим для отношения полуосей выражение (216), а для эксцентриситета—величина обратная (215). Видим, что эти величины, действительно, зависят только от поля, а не от начальных скоростей электрона. Частный случай той же зависимости между отношениями осей и эксцентриситетом обеих кривых второго порядка мы имеем и при движении по законам классической механики. Действительно, там мы имеем для параболы отношение осей, равное нулю, и эксцентриситет, равный единице, а для круга—наоборот.

Следует помнить, что разложение движения на эллиптическое и гиперболическое есть только мысленное. Не всякое из этих движений, взятое в отдельности, будет возможным движением электрона, потому что, как сказано выше, постоянные A, B, C, D не независимы между собой. Но среди рассмотренных гипербол есть такие, по которым электрон действительно может двигаться. Очевидно, мы получим гиперболическую форму траектории, если будет $C = D = 0$, для чего согласно (206) должно быть

$$\frac{\dot{x}_0}{e_x f^2} = -\frac{\dot{z}_0}{e_z (f^2 + h_z^2)}, \quad \dot{y}_0 = -\frac{ce_x h_z}{f^2 + h_z^2}. \quad (217)$$

Мы видим, что компонента начальной скорости по оси y -ов должна иметь вполне определенное значение. Но так как начальный момент времени произволен, то, следовательно, скорость движения по оси y -ов постоянна.

Но чисто эллиптическое невозможно. Действительно, чтобы электрон двигался по эллипсу, должно быть $A = B = 0$. Но из равенства нулю постоянной B следует согласно (206)

$$\dot{y}_0 = -\frac{ce_x h_z}{h_z^2 - g^2},$$

что, пользуясь (213) и (214), можно написать в форме

$$\dot{y}_0 = c \sqrt{\frac{e_x^2 + e_z^2 + g^2}{e_x^2 + e_z^2 - f^2}}.$$

Но по определению f и g подкоренное выражение всегда больше единицы, так что компонента скорости по оси y -ов должна бы быть по абсолютной величине больше скорости света, что по теории относительности невозможно. Если бы мы преобразовали выражение (217) для $\dot{y}_0$ так, как мы сделали сейчас, то нашли бы его отношение к скорости света обратным тому, которое мы нашли сейчас, и, следовательно, меньше единицы. Движение по гиперболе, действительно, физически возможно.

34. Параллельные поля. Отдельного рассмотрения требуют некоторые практически важные частные случаи однородных электрических и магнитных полей. В этих случаях рассуждения предыдущего параграфа очень упрощаются. Первым мы рассмотрим случай, когда $e_x = 0$, т.-е. когда электрическое и магнитное поля параллельны друг другу. В этом случае система (198) обращается в

$$\begin{aligned} x'' - h_z y' &= 0, & z'' - e_z l' &= 0, \\ h_z x' - y'' &= 0, & e_z z' - l'' &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения распадаются на две независимые между собой пары, из которых первая связывает x' с y' , вторая — z' с l' . Решение этой системы, соответствующее нашему прежнему решению (205) будет

$$\left. \begin{aligned} x' &= C \cos h_z \tau + D \sin h_z \tau, \\ y' &= D \cos h_z \tau - C \sin h_z \tau, \\ z' &= A \cos h_e \tau = B \sin h_e \tau, \\ l' &= B \cos h_e \tau + A \sin h_e \tau. \end{aligned} \right\} \quad (218)$$

Постоянные определяются из значения скоростей для $\tau = 0$, а именно

$$\left. \begin{aligned} C = x'_0 &= \frac{\dot{x}_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, & D = y'_0 &= \frac{\dot{y}_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, \\ A = z'_0 &= \frac{\dot{z}_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}, & B = l'_0 &= \frac{c}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

Эти постоянные связаны между собой соотношением

$$B^2 - A^2 - C^2 - D^2 = c^2.$$

Интегрируя равенства (218) по τ , получим уравнения траектории и времени в параметрической форме.

$$\begin{aligned} h_z(x - x_0) &= -D(\cos h_z \tau - 1) + C \sin h_z \tau, \\ h_z(y - y_0) &= C(\cos h_z \tau - 1) + D \sin h_z \tau, \\ e_z(z - z_0) &= A(\cos h_e \tau - 1) + B \sin h_e \tau, \\ e_z c(t - t_0) &= B(\cos h_e \tau - 1) + A \sin h_e \tau. \end{aligned} \quad (220)$$

Первые два из этих равенств дадут, если заменить C и D их значениями

$$\left(x - x_0 - \frac{\dot{y}_0}{h_z \sqrt{1 - \beta_0^2}} \right)^2 + \left(y - y_0 + \frac{\dot{x}_0}{h_z \sqrt{1 - \beta_0^2}} \right)^2 = \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}{h_z^2 (1 - \beta_0^2)} \quad (221)$$

Электрон движется по поверхности круглого цилиндра, ось которого параллельна направлению полей, радиус равен

$$\frac{1}{h_z} \sqrt{\frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}{1 - \beta_0^2}},$$

а координаты оси равны соответственно

$$x_0 + \frac{\dot{y}_0}{h_z \sqrt{1 - \beta_0^2}} \quad \text{и} \quad y_0 - \frac{\dot{x}_0}{h_z \sqrt{1 - \beta_0^2}}.$$

Уравнение этого цилиндра вовсе не зависит от электрического поля. При постоянной массе мы имеем тоже движение по поверхности круглого цилиндра, при чем там согласно (12) радиус был

$\frac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}{h_z}$. При одинаковых значениях компоненты начальной скорости, перпендикулярной к полю, радиус цилиндра по теории относительности получается в $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}}$ раз больший.

Из обоих последних уравнений (220) по замене A и B их значениями (219) получим

$$\left[z - z_0 + \frac{c}{e_z \sqrt{1 - \beta_0^2}} \right]^2 - \left[c(t - t_0) + \frac{\dot{z}_0}{e_z \sqrt{1 - \beta_0^2}} \right]^2 = \frac{c^2 - \dot{z}_0^2}{e_z^2 (1 - \beta_0^2)}. \quad (222)$$

Это уравнение не зависит от магнитного поля. Изменение координаты z происходит так, как если бы магнитное поле отсутствовало. Действительно полученный нами гиперболический закон, связывающий z и t , тот же, который мы нашли иным методом в § 33 для зависимости между x и t , когда мы изучали движение электрона под действием однородного электрического поля, параллельного оси x -ов. Первое из равенств (192) эквивалентно (222). Общий вид траектории показан на рисунке 31.

35. Скрещенные поля. Если электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, т.-е. если $e_z = 0$, нужно раз-

личать три случая в зависимости от того, будет ли $e_x^2 - h_z^2$ меньше нуля, больше нуля или равно нулю. Решение можно найти или возвращаясь к дифференциальным уравнениям, как мы сделали это в предыдущем параграфе для случая параллельных полей, или же делая при соблюдении должных предосторожностей переход к пределу $e_z = 0$ в общих формулах § 33. Мы выберем второй путь.

Случай $e_x - h_z^2 < 0$. Согласно формулам (202) имеем в этом случае

$$f^2 = 0, \quad g^2 = h_z^2 - e_x^2.$$

Если в (203) подставить на место α его значения $\pm f$, то формулы эти становятся неопределенны, когда e_z и f стремятся к нулю. Но мы можем устранить эту неопределенность, вычислив предел, к которому стремится отношение f^2/e_z^2 , когда e_z стремится к нулю. Из первой из формул (202) найдем легко

$$\lim_{e_z=0} f^2/e_z^2 = \frac{h_x^2}{h_z^2 - e_x^2}.$$

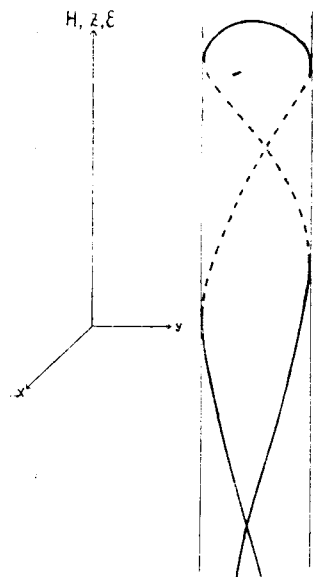


Рис. 31.

Таким образом, если в (203) мы положим $\alpha = \pm f$, и затем e_z и f будут стремиться к нулю, то по сокращении на f отношения эти примут вид

$$\frac{X}{0} = \frac{Y}{\pm e_x h_z} = \frac{Z}{h_z \sqrt{h_z^2 - e_x^2}} = \frac{L}{\pm h_z^2}.$$

Таким образом вместо (204) будем иметь

$$x' = -e_x g^2 (C_3 e^{igz} + C_4 e^{-igz}),$$

$$y' = e_x h_z \{ -C_1 + C_2 - ig(C_3 e^{igz} - C_4 e^{-igz}) \}$$

$$z = h_z^2 \sqrt{h_z^2 - e_x^2} (C_1 + C_2),$$

$$l' = h_z^2 (C_1 - C_2) + e_x^2 ig (C_3 e^{igz} - C_4 e^{-igz}).$$

Или, вводя обозначения

$$h_z^3 \sqrt{h_z^2 - e_x^2} (C_1 + C_2) = A, \quad h_z (C_1 - C_2) = B, \quad g(C_2 + C_4) = C, \\ g(C_3 - C_4) = D,$$

найдем аналогично (205)

$$\left. \begin{aligned} x' &= -e_x g (C \cos g\tau + D \sin g\tau), \\ y' &= -e_x B - e_x h_z (D \cos g\tau - C \sin g\tau), \\ z' &= A \\ l' &= h_z B + e_x^2 (D \cos g\tau - C \sin g\tau). \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

Значения постоянных определяются по начальным значениям x'_0 и т. д. и получаются

$$A = z'_0, \quad B = \frac{h_z l'_0 + e_x y'_0}{g^2},$$

$$C = -\frac{x'_0}{e_x g}, \quad D = \frac{e_x l'_0 + h_z y'_0}{e_x g^2}.$$

Первое из равенств (223) показывает, что x' — чисто периодическая функция от τ . Мы можем начать счет τ с такой точки, где x' равно нулю. Тогда $C = 0$ и наши формулы еще упростятся и, будучи интегрированы, дадут

$$\begin{aligned} x - x_0 &= e_x D (\cos g\tau - 1) \\ y - y_0 &= -e_x B \tau - \frac{e_x h_z}{g} D \sin g\tau, \\ z - z_0 &= A \tau \\ c(t - t_0) &= h_z B \tau + \frac{e_x^2}{g} D \sin g\tau. \end{aligned} \quad (224)$$

Последнее уравнение, выражающее время через τ , имеет форму Кэплера уравнения небесной механики. Время — монотонно возрастающая функция от τ , но скорость возрастания изменяется периодически. По определению τ через равенство (195) скорость эта зависит от скорости электрона. Но мы видели, что координата x , от которой одной зависит потенциальная энергия электрона, изменяется периодически.

Первые три уравнения (224) определяют траекторию. Ее опять можно представить, как получаемую наложением двух движений. Первое из этих движений — прямолинейное, вдоль прямой, определяемой пересечением плоскостей

$$x - x_0 + e_x D = 0 \quad \text{и} \quad \frac{y - y_0}{-e_x B} = \frac{z - z_0}{A}.$$

Прямая эта перпендикулярна к направлению электрического поля, а с направлением магнитного поля составляет угол α , для которого

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{z_0 g^2}{e_x (h_z c + e_x \dot{y}_0)}.$$

Второе же движение происходит по эллипсу, плоскость которого перпендикулярна к оси z -ов, а уравнение проекции на плоскость $x—y$ -ов

$$\left(\frac{x-x_0}{e_x}\right)^2 + g^2 \left(\frac{y-y_0}{e_x h_z}\right)^2 = D^2.$$

Отношение полуосей этого эллипса равно g/h_z . Так как $g < h_z$, то большая ось параллельно оси y -ов.

Если коэффициент D также равен нулю, т.-е. если кроме $\dot{x}_0 = 0$ имеет место

$$\dot{y}_0 = -\frac{e_x c}{h_z}, \quad (225)$$

то электрон движется прямолинейно. Так как в этом случае $B = \frac{l'_0}{h_z}$, то уравнения этой прямой будут

$$x = x_0, \quad \frac{y-y_0}{-ce_x} = \frac{z-z_0}{\dot{z}_0 h_z}.$$

С этим случаем мы встречаемся в опытах Бухерера¹⁾ по определению зависимости массы электрона от скорости. В этих опытах β —лучи проходят между очень сближенными пластинками плоского конденсатора, помещенного в магнитном поле, параллельном пластинкам. Для того, чтобы β —частица могла пройти между пластинками и выйти наружу, должно быть выполнено условие (225).

Можно разлагать движение и иначе. Из дифференциальных уравнений (198) при $e_y = e_z = h_y = h_z = 0$ равно как и из решений их (223) и (224) видно, что движение параллельно оси z -ов, т.-е. магнитному полю и перпендикулярно к нему независимы между собой, Координата z —линейная функция от τ . С возрастанием времени она возрастает или убывает монотонно, но скорость изменения периодически изменяется. Так как мы имеем

$$z' = \frac{\dot{z}_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = A,$$

то $|\dot{z}|$ тем меньше, чем больше β .

Если $\dot{z}_0$ равно нулю, то движение—плоское и протекает в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю. Движение это, как показывают первые два равенства (224), складывается из поступательного движения в направлении, перпендикулярном к электрическому полю, и из эллиптического движения, которого малая ось параллельна электрическому полю. Вспомним, что когда мы рассматривали массу электрона, как постоянную,

¹⁾ А. Н. Bucherer, Ann. d. Phys. 28, p. 513, 1909.

мы имели вместо эллиптического движения движение круговое, так что траектория имела форму циклоиды. Если эту циклоиду сжать в отношении g/h_z по направлению электрического поля, то получится траектория теории относительности.

Случай $e_x^2 - h_z^2 > 0$. Когда электрическое поле больше магнитного по абсолютному значению, будет $f^2 = e_x^2 - h_z^2$, $g^2 = 0$. Вычисления совершенно аналогичны предыдущим. Вся разница в том, что если прежде x' , y' , z' , l' выражались согласно (223) через постоянные и круговые функции, то теперь они выражаются через гиперболические функции и постоянные. Не будем повторять вычисление, а напомним прямо по аналогии с (222)

$$\begin{aligned} x' &= e_x f (A \cosh h_f \tau + B \sinh h_f \tau), \\ y' &= -e_x h_z (B \cosh h_f \tau + A \sinh h_f \tau) - e_x D, \\ z' &= C \\ l' &= e_x^2 (B \cosh h_f \tau + A \sinh h_f \tau) + h_z D. \end{aligned}$$

На определении постоянных по начальным значениям функций мы не станем задерживаться. Интегрируя по τ , найдем

$$\begin{aligned} x - x_0 &= e_x [B (\cosh h_f \tau - 1) + A \sinh h_f \tau], \\ y - y_0 &= -\frac{e_x h_z}{f} [A (\cosh h_f \tau - 1) + B \sinh h_f \tau] - e_x D \tau, \\ z - z_0 &= C \tau, \\ c(t - t_0) &= \frac{e_x^2}{f} [A \cosh h_f \tau - 1] + B \sinh h_f \tau + h_z D \tau. \end{aligned}$$

Движение складывается из прямолинейного по прямой, перпендикулярной к направлению электрического поля, и движения по ветви гиперболы. Если $z'_0 = 0$, то движение протекает опять в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, и составляется из движения по прямой перпендикулярной к электрическому полю и по гиперболе, действительная ось которой параллельна этому полю.

Подобно тому, как в предыдущем случае циклоидоподобная кривая может образовать петли или не образовать их, смотря по начальным условиям, так и теперь возможны два типа траектории—без петли, как на рис. 32, или же с одной петлей, как на рис. 33.

Случай $e_x^2 - h_z^2 = 0$. Когда электрическое и магнитное поля одинаковы по абсолютному значению и взаимно перпендикулярны, уравнение (201) превращаются в $\alpha^4 = 0$, так что $f^2 = g^2 = 0$.

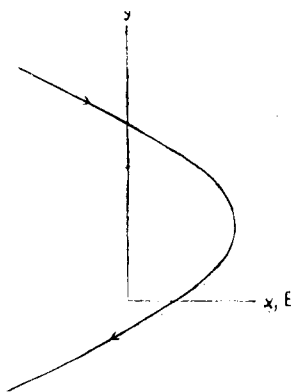


Рис. 32.

В этом случае решение получается в форме полиномов от τ . А именно

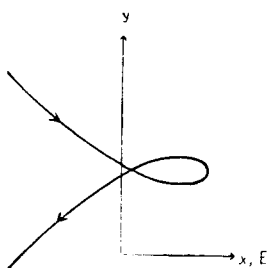


Рис. 33.

$$\begin{aligned}x' &= x'_0 + e_x(l'_0 + y'_0)\tau, \\y' &= y'_0 - e_x x'_0 \tau - e_x^2(l'_0 + y'_0) \frac{\tau^2}{2}, \\z' &= z'_0, \\l' &= l'_0 + e_x x'_0 \tau + e_x^2(l'_0 + y'_0) \frac{\tau^2}{2}.\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты сразу выбраны так, чтобы удовлетворялись начальные условия. Интегрируя эти равенства еще раз по τ и заменяя для большей наглядности x'_0 и

т. д., через x_0 и т. д. найдем

$$\begin{aligned}x - x_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left\{ \dot{x}_0 \tau + e_x(c + \dot{y}_0) \frac{\tau^2}{2} \right\}, \\y - y_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left\{ \dot{y}_0 \tau - e_x \dot{x}_0 \frac{\tau^2}{2} - e_x(c + \dot{y}_0) \frac{\tau^3}{6} \right\}, \\z - z_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \dot{z}_0 \tau, \\c(t - t_0) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \left\{ c\tau + e_x \dot{x}_0 \frac{\tau^2}{2} + e_x^2(c + \dot{y}_0) \frac{\tau^3}{6} \right\}.\end{aligned}$$

Здесь опять удобно рассматривать движение, как составленное из двух независимых частей: одного параллельно магнитному полю и другого — перпендикулярного к нему. Но предварительно заметим, что для очень больших положительных и отрицательных τ будет

$$dx : dy : dz : dt = 0 : -1 : 0 : 1/c.$$

Таким образом, на обоих концах траектории движение направлено по отрицательной оси y -ов, то есть перпендикулярно к тому и другому полям и происходит со скоростью света.

Если обратимся к проекции движения на плоскость x — y -ов, то убедимся, что здесь тоже возможны два типа, соответствующие обоим типам предыдущего параграфа. Из первого из наших равенств видим, что x достигает максимума для

$$\tau = \frac{\dot{x}_0}{e_x(c + \dot{y}_0)}.$$

Здесь лежит вершина кривой. Из второго же равенства видно, что заданному значению y соответствует либо одно, либо три

действительных значения τ . Однако не при всяких значениях начальных скоростей будут встречаться параллельные оси x -ов прямые, пересекающие траекторию в трех точках. Сообразно с этим, будет опять один тип траекторий, которого проекция на плоскости x — y -ов образует петлю и другой, который такой петли не дает. Разница с предыдущим параграфом та, что там ассимптоты кривых составляли с осью y -ов конечные углы, теперь же эти углы равны нулю.

Рассмотрение движения в скрещенных полях мы закончим сравнением типов движений, соответствующих трем случаям, которые мы различали по значению $h_z^2 - e_x^2$. Мы будем сравнивать между собой проекции траектории на плоскость перпендикулярную к магнитному полю.

В случае $h_z^2 - e_x^2 > 0$, то есть когда магнитное поле сильнее электрического, проекция получалась деформацией циклоиды. Кривая получалась наложением на прямолинейное движение движения по эллипсу, большая ось которого в $\frac{h_z}{\sqrt{h_z^2 - e_x^2}}$ раз больше малой и направлена параллельно оси y -ов. По мере убывания $h_z^2 - e_x^2$ ось эта становится все больше и, следовательно, длина волны циклоиды возрастает. Наконец, при $h_z^2 - e_x^2 = 0$ циклоида как бы сводится к одной только волне. При отрицательных $h_z^2 - e_x^2$ уже и эта одна волна описывается не полностью, потому что ассимптоты не параллельны оси y -ов. Таким образом нетрудно связать между собой типы траекторий, описываемых в различных случаях.

36. Движение с переменной массой в поле точечного заряда. Вопрос о том, как переменная масса влияет на движение электрона в поле точечного заряда очень важен для теории атома, и потому частные случаи этой задачи уже неоднократно разбирались¹⁾. Мы увидим сейчас, что траектории могут существенно отличаться от эллиптических и гиперболических путей, полученных нами в предположении постоянства массы.

Решение получается проще всего по методу Гамильтона-Якоби. В уравнении (189) мы должны положить $F_x = F_y = F_z = 0$, $\varphi = \frac{e'}{r}$. Если введем полярные координаты в плоскости движения, то уравнение это примет вид

$$p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} = 2m_0 \left(\alpha_1 - \frac{ee'}{r} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\alpha_1 - \frac{ee'}{r} \right)^2.$$

¹⁾ С. G. Darwin, Philosophical Magazine, VI, 25, p. 201, 1913, A. Sommerfeld, Annalen der Physik, 1916, также Atombau und Spektrallinien, 2 Aufl., p. 324, 1921.

Отсюда обычным методом находим функцию действия

$$W = \int \sqrt{2m_0 \left(\alpha_1 - \frac{ee'}{r} \right) + \frac{1}{c^2} \left(\alpha_1 - \frac{ee'}{r} \right)^2 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr + \alpha_2 \varphi. \quad (226)$$

Уравнение траектории получится отсюда дифференцированием по α_2 . Если обозначим через $P(1/r)$ подкоренную функцию от $1/r$, то уравнение это будет

$$\beta_2 = -\alpha_2 \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{P(1/r)}} + \varphi. \quad (227)$$

Функцию $P(1/r)$ можно представить в виде суммы или разности квадратов в такой форме

$$P(1/r) = 2m_0\alpha_1 \left(1 + \frac{\alpha_1}{2m_0c^2} \right) + \frac{\left[m_0ee'r \left(1 + \frac{\alpha_1}{m_0c^2} \right) \right]^2}{\alpha_2^2 - \left(\frac{ee'}{c} \right)^2} - \left[\alpha_2^2 - \left(\frac{ee'}{c} \right)^2 \right] \left[\frac{1}{r} + \frac{mee' \left(1 + \frac{\alpha_1}{m_0c^2} \right)}{\alpha_2^2 - \left(\frac{ee'}{c} \right)^2} \right]^2. \quad (228)$$

Форма траектории будет существенным образом зависеть от значения постоянной α_2 .

37. Случай отталкивания. Остановимся сначала вкратце на задаче одноименных зарядов, то-есть положим e' отрицательным, как и e . Так как

$$\alpha_1 = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) + \frac{ee'}{r}, \quad (229)$$

то в этом случае α_1 всегда положительно. Введем для сокращения обозначения

$$\eta = \sqrt{1 + \frac{2m_0\alpha_1 \left(1 + \frac{\alpha_1}{2m_0c^2} \right) \left[\alpha_2^2 - \left(\frac{ee'}{c} \right)^2 \right]}{\left[m_0ee' \left(1 + \frac{\alpha_1}{m_0c^2} \right) \right]^2}} \quad (230)$$

$$p = -\frac{\alpha_2^2 - \left(\frac{ee'}{c} \right)^2}{mee' \left(1 + \frac{\alpha_1}{m_0c^2} \right)}, \quad \gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{ee'}{\alpha_2 c} \right)^2}.$$

Положим сначала $\alpha_2^2 > \left(\frac{ee'}{c}\right)^2$. В рассматриваемом случае η больше единицы, p — отрицательно, γ — действительно и меньше единицы. Тогда (227) приводится к виду

$$\beta_2 = \frac{1}{\gamma} \int \frac{d(1/r - 1/p)}{\sqrt{\frac{\eta^2}{p^2} - (1/r - 1/p)^2}} + \varphi.$$

Отсюда интегрируя

$$\varphi - \beta_0 = \frac{1}{\gamma} \arccos \left[\frac{p}{\eta} (1/r - 1/p) \right],$$

или

$$p/r = 1 + \eta \cos \gamma (\varphi - \beta_2). \quad (231)$$

Так как p отрицательно, траектория заключена в угле, для которого $\cos \gamma (\varphi - \beta_2) < -\frac{1}{\eta}$. При $\gamma = 1$ это была бы ветвь гиперболы, для которой начало координат является внешним фокусом, как это изображено на (рис. 4). При γ мало отличающемся от единицы, то-есть при больших значениях α_2 кривая лишь мало отличается от ветви гиперболы. Можем положить $\gamma \beta_2 = \pi$, тогда вершина кривой имеет координаты $\varphi = 0$, $r = \frac{p}{1 - \eta}$. Абсолютное значение p характеризует масштаб траектории, форма же ее зависит от η и γ . Угол между асимптотам кривой равен $\frac{2}{\gamma} \arccos \frac{1}{\eta}$. По мере убывания α_2 , а с ним и γ , знаменатель в выражении угла между асимптотами стремится к нулю, когда (α_2) стремится к $\left(\frac{ee'}{c}\right)$. Но угол этот тем не менее не становится бесконечным, потому что в то же время η стремится к единице и, следовательно, $\arccos \frac{1}{\eta} \rightarrow$ к нулю. Неопределенность в выражении угла между асимптотами для $\gamma = 0$ можно раскрыть обычным методом, дифференцируя числителя и знаменателя по γ , прежде чем положить $\gamma = 0$. Можно написать

$$\eta = \sqrt{1 + b^2 \gamma^2},$$

где положено, для сокращения

$$b^2 = \frac{2\alpha_1 \left(1 + \frac{\alpha_1}{2m_0 c^2}\right) \alpha_2^2}{m_0 \left[ee' \left(1 + \frac{\alpha_1}{m_0 c^2}\right)\right]^2}.$$

Тогда будет

$$\lim_{\gamma=0} \frac{2}{\gamma} \arccos \frac{1}{\eta} = 2 \lim_{\gamma=0} \frac{\frac{1}{\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial \gamma}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\eta^2}}} =$$

$$= 2 \lim_{\gamma=0} \frac{2 \sqrt{2m_0 \alpha_1 \left(1 + \frac{\alpha_1}{2m_0 c^2}\right)}}{m_0 c \left(1 + \frac{\alpha_1}{m_0 c^2}\right)}. \quad (232)$$

Угол этот есть, таким образом, функция от α_1 . Функция эта, как нетрудно убедиться—монотонно возрастающая и равна 2 для $\alpha_1 = \infty$. Таким образом, предел (232), к которому стремится угол между асимптотами траектории, когда γ бесконечно убывает, в случае отталкивания, всегда конечен и не превышает значения 2 (около $114^\circ 36'$).

Случай $\alpha_2^2 - \left(\frac{ee'}{c}\right)^2$. Когда γ обращается в нуль, уравнение траектории принимает другую аналитическую форму. В этом случае вместо (228) будет

$$P(1/r) = 2m_0 \alpha_1 \left(1 + \frac{\alpha_1}{2m_0 c^2}\right) - 2m_0 ee' \left(1 + \frac{\alpha_1}{m_0 c^2}\right)^{1/r}.$$

Интегрируя (227) и полагая $\beta_2 = 0$, получим

$$\varphi = \pm \frac{1}{m_0 c \left(1 + \frac{\alpha_1}{m_0 c^2}\right)} \sqrt{2m_0 \alpha_1 \left(1 + \frac{\alpha_1}{2m_0 c^2}\right) - 2m_0 ee' \left(1 + \frac{\alpha_1}{m_0 c^2}\right)^{1/r}}, \quad (233)$$

при чем при положительном α_2 берется отрицательный знак при убывании r и положительный при возрастании, а при отрицательном α_2 — наоборот.

Это кривая типа ветви гиперболы. Угол между ее асимптотами выражается через (232), и из уравнения (233) получается непосредственно.

Случай $\alpha_2^2 < \left(\frac{ee'}{c}\right)^2$. Теперь согласно формулам (230) η меньше единицы, p положительно, а γ мнимо. Если положим $\gamma = i\delta$ и примем во внимание, что

$$\cos ix = \cosh x$$

то вместо (231) получим теперь

$$p/r = 1 + \eta \cos i\delta (\varphi - \beta_2). \quad (234)$$

Так как здесь левая сторона положительна, то траектория заключена в угле для которого

$$\cos h\delta(\varphi - \beta_2) < -\frac{1}{\eta}.$$

Кривая (234) опять типа ветви гиперболы. Угол между асимптотами ее равен

$$\frac{2}{\delta} \arccos h\left(-\frac{1}{\eta}\right).$$

Таким образом, мы нашли, что когда электрон отталкивается неподвижным отрицательным зарядом, траектория его выражаясь в зависимости от величины α_2 , одним из уравнений (231), (233) или (234) лишь количественно отличается от ветви гиперболы, которую электрон описал бы, если бы его масса была постоянна. Сейчас мы убедимся, что в случае притяжения электрона неподвижным положительным зарядом, теория переменной массы дает траектории и качественно отличные от траекторий получаемых для постоянной массы.

38. С л у ч а й п р и т я ж е н и я. Обратимся теперь к изучению движения электрона в поле положительного заряда. Это основная задача теории атома, в которой нужно находить траектории электрона, описываемые им около положительного центрального атомного ядра. Поскольку масса этого ядра в тысячи раз превышает массу электрона, пока скорость последнего не слишком приближается к скорости света, постольку дозволено, по крайней мере в первом приближении, считать это ядро неподвижным. В одной из дальнейших глав мы разберем некоторые случаи задачи двух тел, т.-е. постараемся учесть и движения притягивающего ядра.

При положительном e' мы имеем большее богатство типов траекторий уже потому, что полная энергия α_1 , которая в случае отталкивания была всегда положительна, теперь может принимать все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Как и в предыдущем параграфе, аналитическое выражение траектории будет также различным в зависимости от знака величины $\alpha_2^2 - \left(\frac{ee'}{c}\right)^2$. Таким образом мы будем различать всего шесть различных случаев.

Положим сначала $\alpha_1 \geq 0$. Уравнение энергии (229) показывает, что при α_1 положительном или равном нулю радиус-векторе r может принимать бесконечно большие значения. Мы убедимся сейчас, что либо один, либо оба конца траектории уходят в бесконечность. Для постоянной массы положительному α_1 соответствуют гиперболические траектории, случаю $\alpha_1 = 0$ — параболические и, следовательно, всегда в бесконечность уходят оба конца траектории.

Пусть кроме $\alpha_1 \geq 0$ имеет место $\alpha_2^2 > \left(\frac{ee'}{c}\right)^2$. Согласно (230) при таких значениях постоянных η — больше или равно единице, p — положительно, γ — действительно.

Уравнение траектории опять имеет форму (231), но с положительным p . Для того, чтобы вершина траектории имела координатой $\varphi = 0$, нужно положить $\beta_2 = 0$, так что уравнение напишется

$$p/r = 1 + \eta \cos \gamma \varphi. \quad (235)$$

При больших α_2^2 , т.-е. при γ близком к единице, траектория при $\alpha_1 > 0$ мало отличается от ветви гиперболы, для которой начало координат является внутренним фокусом, а при $\alpha_1 = 0$ близка к параболе. Интервал изменения угла φ больше π . Этот интервал или угол между обеими имеющимися в данном случае асимптотами кривой равен, очевидно, $\frac{2}{\gamma} \arccos \left(-\frac{1}{\eta}\right)$.

По мере убывания γ и стремления его к нулю η опять стремится к единице, $\arccos \left(-\frac{1}{\eta}\right)$ стремится к π и, следовательно, угол между асимптотами стремится к бесконечности. При малых значениях γ электрон может сделать много оборотов около притягивающего центра, прежде чем опять удалиться в бесконечность.

Сообразим физический смысл постоянной α_2 . По определению

$$\alpha_2 = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}.$$

Принимая во внимание выражение (184) для L , где мы должны положить

$$F_x = F_y = F_z = 0, \quad \beta^2 = \frac{1}{c^2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2),$$

мы найдем

$$\alpha_2 = \frac{m_0 r^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Если мы будем характеризовать траекторию через начальную скорость v электрона в бесконечности и длину b перпендикуляра, опущенного из начала координат на направление начальной скорости, при чем будем считать b положительным, когда начало координат остается влево от этого направления, и отрицательным, когда оно остается вправо, то можем написать также

$$\alpha_2 = \frac{m_0 b v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (236)$$

Вместе с тем будет

$$\alpha_1 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (237)$$

Отсюда легко определить форму траектории по заданным значениям b и v . Одна такая траектория изображена на рис. 34.

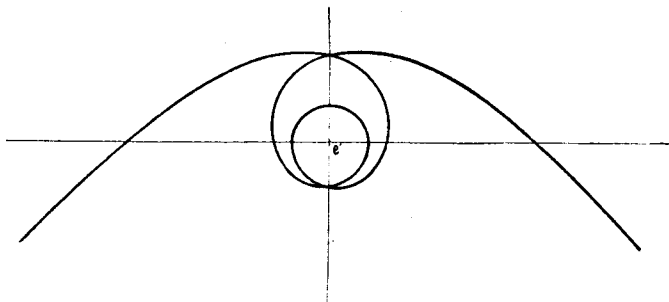


Рис. 34.

Если $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 = \left(\frac{ee'}{c}\right)^2$, то уравнение траектории опять иметь форму (233). Но теперь в отличие от прежнего оба члена под корнем положительные, так что корень ни для какого r не обращается в нуль. Радиус - вектор изменяется от бесконечности до нуля или наоборот. При этом φ монотонно возрастает или убывает в зависимости от того, положительно или отрицательно α_2 . Траектория имеет форму спирали с бесконечным числом витков.

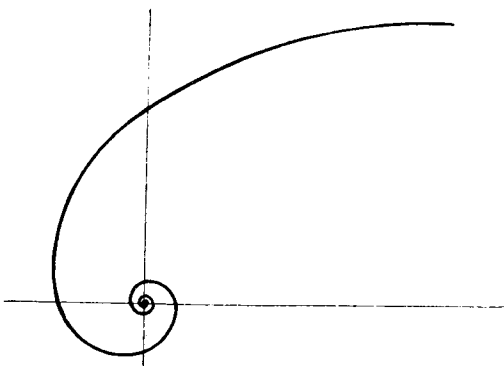


Рис. 35.

Такая спираль изображена на рис. 35.

Если $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 < \left(\frac{ee'}{c}\right)^2$, то согласно (230) η меньше или равно единице, p — отрицательно, γ — мнимо. Полагая опять $\gamma = i\delta$, найдем для траектории уравнение (234), при чем все различие между случаями положительного и отрицательного центрального заряда опять только в знаке p . Траектория, как и в слу-

чае $\gamma = 0$, имеет форму спирали. У нее одна асимптота, для которой $\varphi - \beta_2 = \frac{1}{\delta} \operatorname{arccosh} \left(-\frac{1}{\eta} \right)$. Когда φ возрастает (по абсолютному значению), r убывает и стремится к нулю, по мере того как $|\varphi|$ стремится к бесконечности. Число витков спирали опять бесконечно в окрестностях $r = 0$, тогда как для $r = \infty$, как мы только что видели, кривая имеет определенную асимптоту.

Случаи $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_1 = 0$, которым при постоянной массе соответствуют орбиты гиперболические и параболические, теперь дают кривые качественно мало отличающиеся друг от друга и потому нам не было нужды рассматривать эти случаи отдельно.

Итак мы пришли к заключению, что по теории относительности электрон при достаточно малом значении постоянной α_2 , т.-е. согласно (236), когда направление его начальной скорости достаточно близко проходит от притягивающего ядра, может завиться по спирали около ядра и уже более не отделиться от него. Дарвин¹⁾ подсчитывает для данного значения начальной скорости v критическое значение расстояния b (в сантиметрах), при котором начинается такое улавливание электрона ядром. Заряд последнего он предполагает равным стократному заряду электрона, как это приблизительно имеет место для свинца и близких ему по атомному весу элементов. Получаются следующие цифры

v/c	0,01	0,1	0,9	0,99
$b^{crit.}$	$2,8 \cdot 10^{-9}$	$2,8 \cdot 10^{-10}$	$1,35 \cdot 10^{-11}$	$4,0 \cdot 10^{-12}$

Таким образом медленные электроны должны были бы улавливаться ядром чрезвычайно часто. Этот результат возбуждает серьезные сомнения. Присовокупление электрона к ядру влечет за собой понижение заряда последнего, а это по современным воззрениям связано с изменением химической природы элемента. Понижение заряда ядра на один элементарный квант влечет переход в соседнюю низшую группу периодической системы Менделеева. Под действием катодных лучей должно бы происходить такое химическое перерождение элементов. Нечего и говорить, что ничего подобного в действительности не наблюдается.

Можно искать, какие упрощающие допущения нашей теории могут быть ответственны за этот неправильный результат. Прежде всего ясно, что действие излучения, которым мы пренебрегли, не может помешать присоединению электрона к ядру. Наоборот, по мере излучения энергии электроном во время его движения, будет постепенно уменьшаться значение α_1 и абсо-

¹⁾ С. G. Darwin, l. c.

лютное значение α_2 , а это будет как-раз способствовать образованию спиральной траектории.

Более существенное сомнение возбуждает принятая нами неподвижность ядра. По мере приближения электрона к ядру скорость его приближается к скорости света, как это видно из уравнения энергии (229).

Но в этом случае масса электрона возрастает безгранично, благодаря чему ядро должно принимать существенное участие в движении. Учет движения ядра в теории относительности представляет существенные трудности. Но при некоторых ограничительных допущениях, как увидим, он возможен.

Случай $\alpha_1 < 0$. В рассмотренных до сих пор случаях как отталкивания, так и притяжения по крайней мере один конец траектории электрона уходил в бесконечность. Теперь мы рассмотрим случаи, когда r не выходит за некоторый конечный предел. Как видно из уравнения энергии, r не может сделаться бесконечно большим, когда полная энергия α_1 меньше нуля. Уравнение траектории опять принимает различную аналитическую форму в зависимости от значения постоянной α_2 .

При $\alpha_2^2 > \left(\frac{ee'}{c}\right)^2$ уравнение опять имеет вид

$$p/r = 1 + \eta \cos \gamma\varphi, \quad (238)$$

при чем согласно (230) p — положительно, η — меньше единицы, γ — действительно (и, как всегда, меньше единицы). Радиус-вектор изменяется с углом φ периодически от максимума $\frac{p}{1-\eta}$

до минимума $\frac{p}{1+\eta}$ и обратно. При $\gamma = 1$ траектория была бы эллиптической и период изменения r равен 2π . При γ меньшем единицы период равен $\frac{2\pi}{\gamma}$, то-есть он больше 2π . Траектория имеет форму, изображенную на рис. 36. Она образуется из эллиптической вращением эллипса в своей плоскости около оси, проходящей через фокус. Вращение происходит в том же направлении, в котором обращается электрон.

Очевидно, что при рациональном γ траектория будет замкнутая и движение — периодическое. Если $\gamma = \frac{m}{n}$, где m и n взаимно простые целые числа, то траектория замкнется после

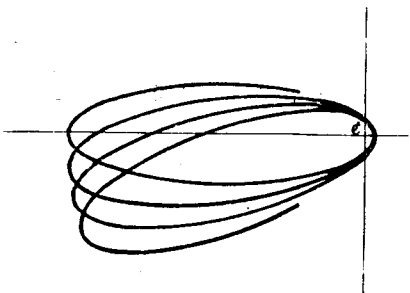


Рис. 36.

n обращений электрона около центра. Для $\gamma = \frac{1}{2}$ траектория изображена на рис. 37. Если же γ иррационально, то траектория, согласно теореме, доказанной для общего случая Штеккелем, заполняет везде плотно площадь круглого кольца, ограниченного окружностями $r = \frac{p}{1-\eta}$ и $r = \frac{p}{1+\eta}$.

Мы видим, таким образом, что при не слишком малом α_2 , влияние переменной массы сказывается в том, что эллиптическое движение сопровождается движением перигелия, при чем за одно обращение электрона около центра перигелий смещается на угол

$$2\pi \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right).$$

Для тех траекторий, которые играют роль в современной теории атома, в частности для траекторий электрона в водородном атоме, этот угол очень невелик.

Так как по теории относительности масса всякой материальной точки изменяется по тому же закону, как и масса электрона, Эйнштейн пробовал применить только-что изложенную теорию к объяснению той части движения перигелия Меркурия, которая не объяснялась известными до тех пор возмущающими силами. Однако вычисленное по формуле (238) движение оказалось в 6 раз меньше наблюдаемого. Правильное объяснение этого движения удалось Эйнштейну¹⁾ уже на основании его обобщенного принципа относительности, содержащего в себе новую теорию всемирного тяготения.

При $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2^2 = \left(\frac{ee'}{c} \right)^2$ уравнение траектории выражается формулой (233). Но теперь первый член под знаком корня отрицателен. Поэтому r изменяется от максимума

$$r_{max.} = - \frac{ee' \left(1 + \frac{\alpha_1}{m_0 c^2} \right)}{\alpha_1 \left(1 + \frac{\alpha_1}{2 m_0 c^2} \right)},$$

¹⁾ A. Einstein, Berichte der Preussischen Akademie, 47, p. 831, 1915.

через который оно проходит при $\varphi = 0$ до нуля. Радиус-вектор стремится к нулю, когда φ принимает бесконечно большие положительные или отрицательные значения. Обоими своими концами траектория завивается спирально около центра. Качественно не отличается от этого и случай

$$\alpha_1 < 0, \alpha_2^2 < \left(\frac{ee'}{c}\right)^2,$$

для которого уравнение траектории

$$p/r = 1 + \eta \cos h\delta\varphi.$$

Здесь η больше единицы, p — отрицательно, δ , как всегда, меньше единицы. Для $\varphi = 0$ радиус-вектор принимает наибольшее значение

$$r_{max.1} = \frac{p}{1 + \eta}.$$

Оба конца траектории, как и в предыдущем случае завиваются спирально около начала.

Однако относительно физического истолкования этих спиральных траекторий возникают те же сомнения, как и в предыдущем параграфе. Именно, для бесконечно малых r становится бесконечно велика кинетическая энергия и масса электрона. Бесконечно возрастает и сила притяжения между электроном и ядром, а при этих условиях неподвижность последнего становится недопустимой фикцией.

ГЛАВА V.

Задача двух зарядов.

39. Общие замечания. До сих пор при изучении движения электрона под действием другого заряда, притягивающего или отталкивающего по закону Кулона, мы предполагали этот второй заряд неподвижным. При этом электрон движется по коническому сечению, если скорость его столь мала, что его масса может считаться постоянной, и описывает более сложные, иногда спиралеобразные траектории, когда масса его зависит от скорости по закону, даваемому теорией относительности. Но мы убедились, что в случае спиралеобразных траекторий масса электрона возрастает до бесконечности, а при этих условиях допустимость нашего предположения о неподвижности центрального ядра становится сомнительной.

Другая причина, по которой важно уметь учитывать движение ядра, та, что иногда движущимся зарядом является не электрон, а заряженный атом, или, точнее, атомное ядро, масса которого того же порядка, что и масса действующего на него

второго заряда. При исследовании структуры атома сыграло важную роль изучение отклонения α -частиц под действием атомных ядер, мимо которых они пролетают. В этом случае атомные ядра могут приобретать значительные скорости. Это особенно резко сказывается, когда действию α -лучей подвергаются легкие атомы. Так, когда α -частица налетает на водородное ядро, последнее иногда приобретает скорость большую скорости частицы и таким путем образуются так называемые H -лучи. Присутствие таких H -частиц может быть установлено экспериментально благодаря тому, что они, обладая большей скоростью, чем породившие их α -частицы, отличаются также большей дальностью полета в газе, в котором они движутся.

Наконец, есть еще одна причина стремиться учесть движение ядра под действием обращающегося около него электрона. Именно, движущееся ядро образует вокруг себя, кроме электростатического, также магнитное поле, которое может влиять на траекторию электрона. Даже если влияние это очень слабо, оно может оказаться важным, так как, учитывая его, современная квантовая теория спектров может вывести некоторые заключения относительно структуры спектральных линий.

40. Движение двух постоянных масс, притягивающихся или отталкивающихся по закону Кулона. Если нам даны два заряда e_1 и e_2 , связанные с постоянными массами m_1 и m_2 , и мы предположим, что они движутся под действием одного их взаимного электростатического притяжения или отталкивания, то полная энергия системы этих двух зарядов будет, очевидно,

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{e_1 e_2}{r},$$

где

$$v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2, \quad v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2, \quad r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2,$$

при чем x_1, y_1, z_1 суть координаты первого заряда, x_2, y_2, z_2 — второго. Если мы введем на место скоростей $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dots, \dot{z}_2$, импульсы $p_{x_1} = m_1 \dot{x}_1, p_{y_1} = m_1 \dot{y}_1, \dots, p_{z_1} = m_1 \dot{z}_1, p_{x_2} = m_2 \dot{x}_2, p_{y_2} = m_2 \dot{y}_2, \dots, p_{z_2} = m_2 \dot{z}_2$, то можем написать уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{1}{2m_1}(p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2) + \frac{1}{2m_2}(p_{x_2}^2 + p_{y_2}^2 + p_{z_2}^2) + \frac{e_1 e_2}{r} = \alpha_1. \quad (239)$$

Это уравнение мы преобразуем к новым переменным, а именно, положим

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, & \eta &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}, & \zeta &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}, \\ x &= x_1 - x_2, & y &= y_1 - y_2, & z &= z_1 - z_2. \end{aligned} \right\} \quad (240)$$

Таким образом, ξ , η , ζ суть координаты центра тяжести обеих масс, x , y , z — относительные координаты первой массы относительно второй. Если обозначим через p_ξ , p_η , p_ζ , p_x , p_y , p_z частные производные от W по новым координатам или соответствующие этим координатам импульсы, то будем иметь формулы преобразования

$$\left. \begin{aligned} p_{x_1} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} p_\xi + p_x, & p_{x_2} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_\xi - p_x, \\ p_{y_1} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} p_\eta + p_y, & p_{y_2} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_\eta - p_y, \\ p_{z_1} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} p_\zeta + p_z, & p_{z_2} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_\zeta - p_z. \end{aligned} \right\} \quad (241)$$

Подставляя эти значения в уравнение (239), приведем его к виду

$$\frac{1}{2(m_1 + m_2)} (p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{e_1 e_2}{r} = \alpha_1.$$

Так как здесь r зависит только от x , y , z , — импульсы p_ξ , p_η , p_ζ будут постоянны во время движения. Первый член нашего уравнения изменяет кинетическую энергию поступательного движения центра тяжести нашей системы. Если обозначим его через b^2 , уравнение для определения относительного движения примет форму

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{e_1 e_2}{r} = \alpha_1 - b^2. \quad (242)$$

Это уравнение получается из уравнения движения около неподвижного притягивающего или отталкивающего центра заменой $\frac{1}{m}$ через $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, расстояния от центра — взаимным расстоянием обеих масс, а энергии α_1 — через $\alpha_1 - b^2$. Таким образом, в относительном движении масса m_1 описывает коническое сечение, в фокусе которого находится масса m_2 , при чем роль массы в этом движении играет величина $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, а роль энергии — разность между полной энергией α_1 и кинетической энергией поступательного движения центра тяжести b^2 . Так как обе наши массы равноправны между собой, то их роль можно поменять и считать уравнение (242) за уравнение, характеризующее движение второй массы около первой. Действительно оно вполне симметрично.

Вместо относительного движения одного заряда около другого, можно также рассматривать движение каждого из за-

рядов в отдельности около их центра тяжести. Координаты их по отношению к центру тяжести пропорциональны относительным координатам, так как, например, для x —координаты первого заряда имеем

$$x_1 - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 (x_1 - x_2)}{m_1 + m_2}$$

и аналогично для других координат. Уравнение с частными производными, определяющее движение относительно центра тяжести примет ту же форму (242), отличаясь от этого уравнения лишь коэффициентами, на вычислении которых нам нет нужды останавливаться.

41. Столкновение α —частиц с легкими атомами. В § 7 мы рассмотрели данную Резерфордом теорию рассеяния α -лучей при прохождении их через слой материи, атомы которой настолько тяжелы по сравнению с атомом гелия, что можно считать их неподвижными во время встречи. Для легких элементов нужно учитывать скорости, приобретаемые их ядрами во время столкновения. Это впервые сделано Дарвиным.

Опираясь на полученные нами раньше результаты, мы найдем решение этой задачи путем элементарных геометрических соображений.

В § 7 мы нашли, что при неподвижном заряде e' заряд e отклонится от первоначального направления на угол

$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \frac{m v_0^2 b}{e e'} . \quad (34)$$

Учитывая движение обоих зарядов, согласно соображениям предыдущего параграфа видим, что в относительном движении первого заряда относительно второго направление его движения изменится в результате столкновения на угол

$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \frac{m_1 m_2 v_0^2 b}{(m_1 + m_2) e_1 e_2} . \quad (243)$$

Здесь b —перпендикулярное расстояние первоначального направления скорости движения первого заряда от второго, который до столкновения полагается неподвижным; v_0 —начальная скорость первого заряда.

Пусть на рис. 38 OA направление начальной скорости и пусть в A первоначально находится второй заряд. Масштаб чертежа при этом полагается столь большим, что можно считать b равным нулю. Пусть в некоторый момент после столкновения первый заряд находится в точке B , а второй — в точке C . Центр тяжести системы движется по прямой OE . В рассматриваемый момент он находится в точке D , при чем $CD : DB = m_1 : m_2$. Угол ϑ , на который изменится направле-

ние относительного движения, есть, очевидно, угол EDB . Так как первый заряд описывает относительно второго ветвь гиперболы, то последний, по соображениям симметрии, должен получить после столкновения скорость, параллельную действительной оси гиперболы. В самом деле, общий импульс, получаемый вторым зарядом параллельно мнимой оси гиперболы,

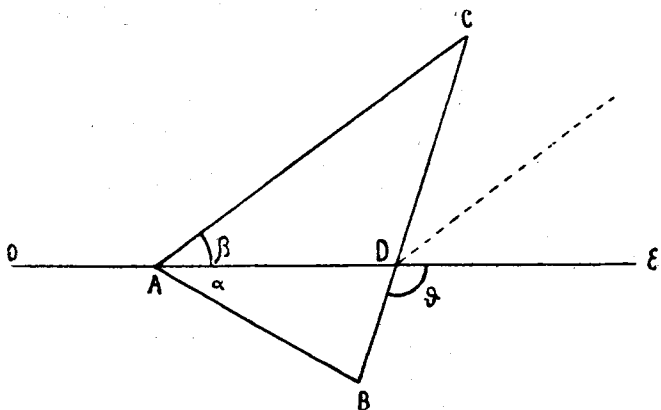


Рис. 38.

равен нулю, потому что импульс в этом направлении, получаемый до прохождения e_1 через вершину гиперболы, равен по величине и противоположен по знаку импульсу, получаемому после этого момента. Поэтому AC параллельно биссектрисе угла CDE . Если обозначим угол CDE через β , то

$$\beta = \frac{\pi - \varphi}{2}. \quad (244)$$

Отсюда вытекает $AD = DC$, что выражает следующую общую теорему, относящуюся ко всякому упругому удару двух масс.

Если до столкновения одна из двух сталкивающихся масс неподвижна, то после удара она движется относительно центра тяжести со скоростью, равной скорости этого последнего.

Если обозначим через v_1 и v_2 скорости после удара, то принимая во внимание, что центр тяжести движется со скоростью $\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}$, найдем из равнобедренного треугольника ADC

$$v_2 = \frac{2m_1 v_0}{m_1 + m_2} \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (245)$$

Из треугольника ABD легко найти также направление и величину скорости первого заряда. Обозначим угол DAB че-

рез α . Так как, согласно вышесказанному, $AB : DB = m_1 : m_2$, то имеем

$$\frac{\sin(\vartheta - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{m_1}{m_2},$$

откуда

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\cos \vartheta + \frac{m_1}{m_2} \right) = \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{m_1}{m_2 \sin \vartheta} \quad (246)$$

и из того же треугольника

$$v_1 = \frac{v_0}{m_1 + m_2} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \vartheta}. \quad (247)$$

Совокупностью формул (243) и (247) решается вполне задача соударения двух зарядов.

42. Влияние магнитного поля движущихся зарядов. До сих пор, изучая движение двух зарядов, мы принимали во внимание лишь электростатическую силу, которая действует между ними. Между тем, около движущегося заряда образуется магнитное поле, которое должно влиять на движение другого заряда. Можно попробовать учесть это влияние. Для некоторого частного случая задача эта разрешается сравнительно просто

Мы положим, что движение зарядов настолько медленно, что может считаться квазистационарным, т.-е. что сила, испытываемая одним зарядом, определяется положением и скоростью другого заряда в тот же самый момент времени. Тогда вектор-потенциал магнитного поля, образуемого движением первого заряда в точке, занимаемой вторым будет иметь компоненты

$$\frac{e_1 \dot{x}_1}{cr}, \frac{e_1 \dot{y}_1}{cr}, \frac{e_1 \dot{z}_1}{cr},$$

где

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Лагранжеву функцию, характеризующую движение, можно написать в форме

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \gamma(\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \dot{z}_1 \dot{z}_2) - c^2 \gamma, \quad (248)$$

где положено для сокращения

$$\frac{e_1 e_2}{c^2 r} = \gamma.$$

Из (248) следуют выражения импульсов

$$\left. \begin{aligned} p_{x_1} &= m_1 \dot{x}_1 + \gamma \dot{x}_2, \\ p_{x_2} &= \gamma \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2. \end{aligned} \right\} \quad (249)$$

Для двух других осей формул можно не писать, так как они вполне аналогичны написанным.

Вычисляя Гамильтонову функцию по формуле

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_2} \dot{z}_2 - L,$$

видим, что она отличается от L лишь знаком перед последним членом, т. е.

$$H = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \gamma(\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \dot{y}_1 \dot{y}_2 + \dot{z}_1 \dot{z}_2) + c^2 \gamma. \quad (250)$$

Выражаем из уравнений (249) скорости через импульсы:

$$\dot{x}_1 = \frac{m_2 p_{x_1} - \gamma p_{x_2}}{m_1 m_2 - \gamma^2},$$

$$\dot{x}_2 = \frac{m_1 p_{x_2} - \gamma p_{x_1}}{m_1 m_2 - \gamma^2}.$$

Подставляя в (250) находим выражение H через импульсы:

$$H = \frac{1}{m_1 m_2 - \gamma^2} \left\{ \frac{m^2}{2} (p_{x_1}^2 + p_{y_2}^2 + p_{z_1}^2) + \right. \\ \left. + \frac{m^2}{2} (p_{x_2}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_2}^2) - \gamma (p_{x_1} p_{x_2} + p_{y_1} p_{y_2} + p_{z_1} p_{z_2}) \right\} + \\ + c^2 \gamma = \alpha_1. \quad (251)$$

Так как γ зависит только от разностей координат, вводим новые координаты $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ соотношениями

$$x = x_1 - x_2, \quad y = y_1 - y_2, \quad z = z_1 - z_2,$$

$$\xi = \xi(x_1, x_2), \quad \eta = \eta(y_1, y_2), \quad \zeta = \zeta(z_1, z_2),$$

при чем функции ξ, η, ζ оставляем пока неопределенными. Если рассматривать (251), как уравнение с частными производными, то для преобразования его к новым координатам нужно положить

$$\left. \begin{aligned} p_{x_1} &= p_{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + p_x, \\ p_{x_2} &= p_{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x_2} - p_x. \end{aligned} \right\} \quad (252)$$

Скобка в (251) превращается в квадратную однородную функцию от новых производных. Для того чтобы эта функция содержала только квадраты производных, а произведения исчезли, функции ξ, η, ζ должны удовлетворять одному и тому же диф-

ференциальному уравнению в зависимости от своих аргументов, а именно должно быть:

$$\left. \begin{aligned} (m_2 + \gamma) \frac{\partial \xi}{\partial x_1} - (m_1 + \gamma) \frac{\partial \xi}{\partial x_2} &= 0, \\ (m_2 + \gamma) \frac{\partial \eta}{\partial y_1} - (m_1 + \gamma) \frac{\partial \eta}{\partial y_2} &= 0, \\ (m_2 + \gamma) \frac{\partial \zeta}{\partial z_1} - (m_1 + \gamma) \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (253)$$

В случае $\gamma = 0$ уравнения эти показывают, что ξ , η , ζ должны быть каким-либо функциями от соответственных координат центра тяжести, как мы уже знаем. Очевидно решение уравнений также для случая равных масс, которые мы в этом случае обозначим через m . Тогда уравнения принимают вид:

$$(m + \gamma) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} - \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right) = 0$$

и т. д.

откуда следует, что ξ , η , ζ зависят только от сумм координат. Можно положить в частности

$$\xi = x_1 + x_2, \quad \eta = y_1 + y_2, \quad \zeta = z_1 + z_2.$$

Тогда в формулах преобразования (253) все производные $\frac{\partial \xi}{\partial x_1}$ и т. д. равны единице, и уравнение (251) принимает простой вид

$$\frac{1}{m + \gamma} (p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2) + \frac{1}{m - \gamma} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + c^2 \gamma = \alpha_1. \quad (254)$$

Так как координаты ξ , η , ζ не входят сюда, полагаем $p_\xi^2 + p_\eta^2 + p_\zeta^2 = b^2$ где b — постоянная. В виду того, что относительное движение и в этом случае плоское, можно взять ось z -ов перпендикулярной к плоскости относительного движения. Вводя затем полярные координаты в этой плоскости и обозначая, как всегда постоянную площадей через α_2 , найдем, заменив γ через его значение,

$$p_r^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} = \left(m - \frac{e_1 e_2}{c^2 r} \right) \left(\alpha_1 - \frac{e_1 e_2}{r} - \frac{b^2}{m + \frac{e_1 e_2}{c^2 r^2}} \right)$$

отсюда

$$W = \int V \left(m - \frac{e_1 e_2}{c^2 r} \right) \left(\alpha_1 - \frac{e_1 e_2}{r} - \frac{b^2}{m + \frac{e_1 e_2}{c^2 r}} \right) - \frac{\alpha_2^2}{r^2} dr + \alpha_2 \varphi. \quad (255)$$

Предположим, что $b = 0$. Если пренебречь слабым влиянием магнитного поля на значение этой постоянной, то смысл этого допущения опять тот, что мы полагаем центр тяжести обеих масс неподвижным. Если обозначим подкоренную функцию через $S\left(\frac{1}{r}\right)$, то уравнение траектории в относительном движении будет

$$\beta_2 = \int \frac{\alpha_2 d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{S\left(\frac{1}{r}\right)}} = \varphi.$$

Функция же $S\left(\frac{1}{r}\right)$ может быть написана в виде:

$$S\left(\frac{1}{r}\right) = m\alpha_1 + \frac{\left(m + \frac{\alpha_1}{c^2}\right)e_1^2 e_2^2}{4 \left[\alpha_2^2 - \left(\frac{e_1 e_2}{c}\right)^2 \right]} - \left[\alpha_2^2 - \left(\frac{e_1 e_2}{e}\right)^2 \right] \left\{ \frac{1}{r} + \frac{\left(m + \frac{\alpha_1}{e^2}\right)e_1 e_2}{2 \left[\alpha_2^2 - \left(\frac{e_1 e_2}{c}\right)^2 \right]} \right\}^2. \quad (256)$$

Если сравним это выражение с (228), полученным нами при изучении движения заряда с переменной массой около неподвижного ядра, и принимая во внимание только электростатическую силу, то увидим большое сходство между тем и другим. Мы можем непосредственно заключить, что формы траекторий в нашей задаче те же, которые были нами подробно изучены там. В частности теперь опять форма траекторий существенным образом зависит от значения выражения $1 - \left(\frac{e_1 e_2}{\alpha_2 c}\right)^2$, которым измеряется движение перигелия, описываемого зарядом конического сечения.

Оказывается таким образом, что между обеими рассмотренными нами задачами имеется большое формальное сходство. Но сходство есть и по физической сущности дела. В одном случае мы учитывали переменность массы, но пренебрегали образуемым при движении магнитным полем, другой раз, наоборот, считали массу постоянной, но учитывали магнитное взаимодействие масс. Однако, если мы вспомним, что масса электрона—электромагнитного характера и обусловлена наличием поля около электрона, а с другой стороны, что принимая зависимость кинетической части Лагранжевой функции от взаимного расстояния зарядов, мы уже тем самым как бы

прибавляем к выражению массы переменный член, что особенно ясно видно в уравнениях (254) и (255), то сходство между обеими задачами будет очевидно. Существенное различие между ними то, что переменность массы электрона обусловлена действием на него его же собственного поля, тогда как сейчас мы рассматривали действие на заряды магнитного поля другого заряда.

Полагая в формуле (255) b^2 отличным от нуля, мы можем учесть и влияние поступательного движения центра тяжести на форму относительной траектории. При этом, конечно, достаточно вычислять приближенно, заменив

$$\frac{b^2}{m + \frac{e_1 e_2}{c^2 r}} \text{ через } \frac{b^2}{m} \left(1 - \frac{e_1 e_2}{m c^2 r} \right).$$

Но полученные нами результаты не могут еще удовлетворять нас, потому что случай одинаковых масс физически мало интересен. Гораздо важнее было бы знать, каково магнитное взаимодействие между ядром атома и движущимся около него электроном. Важнее это потому, что здесь спектроскопическими методами можно улавливать экспериментально такие тонкие детали движения, которые в других случаях совершенно ускользают от наблюдения.

Положим, что мы нашли переменные ξ , η , ζ , удовлетворяющие уравнениям (253). Так как γ мало по сравнению с m_1 и m_2 , переменные эти будут мало отличаться от координат центра тяжести. Полагаем, что соответствующие им импульсы p_ξ , p_η , p_ζ равны нулю, что означает опять-таки в первом приближении, что центр тяжести находится в покое. Тогда согласно (252) мы должны положить

$$p_{x_1} = p_x, \quad p_{x_2} = -p_x.$$

Подставляя эти значения в (251), найдем уравнение Гамильтона

$$\frac{m_1 + m_2}{2} + \gamma \frac{m_1 m_2 - \gamma^2}{m_1 m_2 - \gamma^2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + c^2 \gamma = \alpha_1.$$

Здесь членом γ^2 в знаменателе можно пренебречь. Перейдя к полярным координатам, мы найдем легко

$$W = \int \sqrt{S' \left(\frac{1}{r} \right)} dr + \alpha_2 \varphi_1, \quad (257)$$

где положено

$$S' \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left\{ \alpha_1 - \left[1 + \frac{2\alpha_1}{c^2 (m_1 + m_2)} \right] \frac{e_1 e_2}{r} \right\} - \left[\alpha_2^2 - \frac{4m_1 m_2 (e_1 e_2)^2}{c^2 (m_1 + m_2)^2} \right] \frac{1}{r^2}. \quad (258)$$

Формы возможных траекторий опять те же, что и раньше. Мы знаем, что они зависят существенным образом от множителя при $\frac{1}{r^2}$. Величина, вычитаемая здесь из α^2 , которая появляется здесь вследствие магнитного взаимодействия зарядов, достигает наибольшей величины, когда $m_1 = m_2$, т.-е. как раз в случае, разобранном выше. Если положим, что m_1 есть масса электрона, а m_2 — масса водородного ядра, то член этот будет приблизительно в $\frac{4m_1}{m_2}$ раз меньше, чем в случае равенства масс. Оно и понятно, что магнитное действие ядра на электрон тем меньше, чем тяжелее ядро. Действительно, действие это пропорционально скорости движения ядра, которая при условии неподвижности центра тяжести, очевидно, тем меньше, чем ядро тяжелее. При бесконечно большой массе ядра оно неподвижно и не дает никакого магнитного поля.

43. Задача двух зарядов по теории относительности. Рассматривая движение заряда, масса которого изменяется со скоростью по закону, даваемому теорией относительности около неподвижного притягивающего ядра, мы нашли, что возможны такие движения, при которых траектория завивается спирально около ядра. Уже тогда мы говорили, что полученный таким образом результат нуждается в проверке, потому что при приближении заряда к ядру возрастает его скорость, а с нею и масса, а потому может быть сомнение, насколько в этом случае уместно допускать неподвижность ядра, которую мотивировать можно только большой массой ядра по сравнению с массой движущегося заряда. Посмотрим, насколько изменится результат, если отказаться от неподвижности ядра и учитывать и его движение.

Гамильтонова функция для двух зарядов e_1 и e_2 , обладающих для бесконечно медленных движений массами m_1 и m_2 и притягивающихся по закону Кулона, будет по аналогии с (188)

$$H = c\sqrt{m_1^2c^2 + p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2} + c\sqrt{m_2^2c^2 + p_{x_2}^2 + p_{y_2}^2 + p_{z_2}^2} + \frac{e_1e_2}{r}.$$

Приравнявая H постоянной, мы напишем уравнение Гамильтона-Якоби.

$$\begin{aligned} \sqrt{m_1^2c^2 + p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2} + \sqrt{m_2^2c^2 + p_{x_2}^2 + p_{y_2}^2 + p_{z_2}^2} = \\ = \frac{1}{c} \left(\alpha_1 - \frac{e_1e_2}{r} \right), \end{aligned} \quad (259)$$

где $p_{x_1}, \dots, p_{z_2}$ суть производные от функции действия по шести координатам зарядов. Уничтожая в этом уравнении иррацио-

нальности и группируя соответственным образом члены, можно написать его в виде

$$c^4(m_1^2 - m_2^2)^2 + (\Sigma p_{x_1}^2 - \Sigma p_{x_2}^2)^2 + 2c^2(m_1^2 - m_2^2)(\Sigma p_{x_1}^2 - \Sigma p_{x_2}^2) + \frac{1}{c^2} \left(\alpha_1 \frac{e_1 e_2}{r} \right)^2 \left\{ \frac{1}{c^2} \left(\alpha_1 \frac{e_1 e_2}{r} \right)^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)c^2 - 2(\Sigma p_{x_1}^2 + \Sigma p_{x_2}^2) \right\} = 0. \quad (260)$$

При этом введены сокращенные обозначения

$$\Sigma p_{x_1}^2 = p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2$$

и аналогично для второго заряда.

Введем новые координаты, положив, как и в предыдущем параграфе

$$x = x_1 - x_2, \quad \xi = x_1 + x_2 \text{ и т. д.}$$

Тогда будет опять

$$p_{x_1} = p_\xi + p_x, \quad p_{x_2} = p_\xi - p_x \text{ и т. д.} \quad (261)$$

или

$$p_\xi = \frac{1}{2} (p_{x_1} + p_{x_2}), \quad p_x = \frac{1}{2} (p_{x_1} - p_{x_2}).$$

Так как в уравнении (260)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

а ξ , η , ζ не входят явным образом, то p_ξ , p_η , p_ζ^2 постоянны во время движения. Это закон сохранения количества движения, так как $2p_\xi$ и т. д., суть компоненты суммы количеств движений обоих зарядов.

Согласно (261) имеем

$$\Sigma p_{x_1}^2 + \Sigma p_{x_2}^2 = 2(\Sigma p_\xi^2 + \Sigma p_x^2),$$

$$\Sigma p_{x_1}^2 - \Sigma p_{x_2}^2 = 2(p_\xi p_x + p_\eta p_y + p_\zeta p_z).$$

Подставляя эти выражения в (260) и считая p_ξ , p_η , p_ζ постоянными, находим уравнение Гамильтона-Якоби для трех переменных x , y , z , определяющее относительное движение первого заряда относительно второго. Получается уравнение второй степени в производных p_x , p_y , p_z как и во всех рассмотренных нами до сих пор случаях.

Уравнение значительно упрощается, когда сумма количества движения зарядов равна нулю, т. е.

$$p_\xi = p_\eta = p_\zeta = 0.$$

Тогда

$$\Sigma p_{x_1}^2 - \Sigma p_{x_2}^2 = 0,$$

Этот случай как раз особенно интересен для теории атома. В уравнении (260) второй и третий члены исчезают, и оно может быть переписано в виде

$$\Sigma p_x^2 = \frac{1}{4c^2} \left(\alpha_1 - \frac{e_1 e_2}{r} \right)^2 - \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2) c^2 + \frac{c^6 (m_1^2 - m_2^2)^2}{4 \left(\alpha_1 - \frac{e_1 e_2}{r} \right)^2}. \quad (262)$$

Постоянная α'_1 , как и в § 29, обозначает полную энергию зарядов, состоящую из потенциальной, кинетической и внутренней энергии. Последняя равна $(m_1 + m_2) c^2$. Теперь мы выделим эту последнюю, а сумму первых двух обозначим опять через α_1 , т.-е. положим

$$\alpha'_1 = \alpha_1 + (m_1 + m_2) c^2. \quad (263)$$

Вместо того, чтобы разбирать точные уравнения (262), ограничимся приближением. Именно, будем считать, что кинетическая энергия зарядов мала по сравнению с их внутренней энергией. Иными словами, положим, что величина

$$\frac{\alpha_1 - \frac{e_1 e_2}{r}}{(m_1 + m_2) c^2}$$

мала по сравнению с единицей. Тогда можно последний член уравнения (262) разложить в ряд по возрастающим степеням этой величины и оборвать ряд на квадратном члене. Сделав это и сгруппировав в уравнении (262) подобные члены, мы найдем, что оно примет такой вид:

$$\Sigma p_x^2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\alpha_1 - \frac{e_1 e_2}{r} \right) + \frac{1}{c^2} \left[1 - \frac{3m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] \left(\alpha_1 - \frac{e_1 e_2}{r} \right)^2. \quad (264)$$

Так как относительное движение зарядов плоское, можем ввести полярные координаты в плоскости этого движения, приняв второй заряд за полюс координатной системы и положив таким образом

$$\Sigma p_x^2 = p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}.$$

Полагая опять $p_\varphi = \alpha_2$ и определяя p_r из уравнения (264), найдем функцию действия для относительного движения с переменной массой

$$W = \int \sqrt{\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\alpha_1 - \frac{e_1 e_2}{r} \right) + \frac{1}{c^2} \left[1 - \frac{3m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] \left(\alpha_1 - \frac{e_1 e_2}{r} \right)^2 - \frac{\alpha_2^2}{r^2}} dr + \alpha_2 \varphi. \quad (265)$$

Сравнивая это выражение с выражением (226) § 36, полученным в предположении неподвижного силового центра, мы видим, что оно получается из последнего заменой

$$m_0 \text{ через } \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (266)$$

$$\text{и } \frac{1}{c^2} \quad \gg \quad \frac{1}{c^2} \left[1 - \frac{3m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right].$$

Поэтому формы траекторий получаются те же самые, как и при неподвижном центре. Этот результат конечно относится лишь к той степени приближения, которой мы ограничились, разложив в ряд последний член выражения (262). Делая замены (266) в выражениях (230) для η , p , γ мы найдем опять траектории в относительном движении в форме

$$\frac{p}{r} = 1 + \eta \cos \gamma \varphi$$

или

$$\frac{p}{r} = 1 + \eta \cosh \delta \varphi, \quad (267)$$

причем первая действительна, когда

$$\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{e_1 e_2}{\alpha_2 l} \right)^2 \left[1 - \frac{3m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right]} \quad (268)$$

действительно, а вторая когда, оно мнимо, причем положено $\gamma = i\delta$. Таким образом и теперь в относительном движении возможны спиральные траектории, выражаемые уравнением (267). Они получаются согласно (268) когда

$$\alpha_2^2 < \left(\frac{ee_1}{c} \right) \left[1 - \frac{3m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right].$$

Если в выражении (265) положить $m_2 = \infty$, то мы вернемся к случаю движения с переменной массой около неподвижного центра. Если же принять $c = \infty$, то получится выражение функции действия для классической задачи двух тел, которые мы имели в § 40.

Можно убедиться, что и строгое уравнение (262) допускает решения, в которых расстояние r между зарядами убывает до бесконечности. Действительно, из этого уравнения следует

$$p_r^2 = \frac{1}{4c^2} \left(\alpha'_1 - \frac{e_1 e_2}{r} \right)^2 - \frac{1}{2} (m_1^2 + m_2^2) c^2 +$$

$$+ \frac{c^6 (m_1^2 - m_2^2)}{4 \left(\alpha'_1 - \frac{e_1 e_2}{r} \right)} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}. \quad (269)$$

Для того, чтобы r могло сделаться бесконечно мало, нужно, чтобы для сколь угодно малых r правая сторона (269) была положительна. Это очевидно имеет место, если

$$\alpha_2^2 < \left(\frac{e_1 e_2}{2c} \right)^2.$$

По сравнению со случаем неподвижного центра верхний предел для абсолютного значения α_2 понижается вдвое. Но все же спиральные траектории возможны и здесь. Следует впрочем оговориться, что когда r делается очень мало, применимость обычных законов динамики электрона, да и вообще всяких масс, делается сомнительной.
