

Е. Н. БОГОМОЛОВ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ

Рекомендовано Методическим
Советом Рыбинской государственной
авиационной технологической академии
имени П. А. Соловьева в качестве учеб-
ного пособия

Рыбинск 2010

Богомолов Е. Н. Численные методы гидрогазодинамики: Учебное пособие. – Рыбинск: РГАТА имени П. А. Соловьёва, 2010. – 92 с.

Учебное пособие представляет собой конспект лекций одноименного курса, читаемого автором на факультете авиадвигателестроения РГАТА имени П. А. Соловьёва.

Учебное пособие предназначено для первоначального ознакомления студентов нематематических специальностей с основными понятиями численных подходов к решению задач о теплопередаче и движении жидкости на основе метода конечных разностей.

Рецензенты: кафедра «Авиационные двигатели» ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет»;
начальник расчетно-исследовательского управления
ОАО «НПО «Сатурн» П. В. Чупин

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. НАИБОЛЕЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ	6
1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ	6
1.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ	7
1.3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	9
1.4. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ЕГО ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО	15
2. ТИПЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	24
2.1. ТИПЫ УРАВНЕНИЙ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ	25
2.2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА	28
2.3. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА ДЛЯ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ	41
3. ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ – СТОКСА.....	43
3.1. УРАВНЕНИЕ НАВЬЕ – СТОКСА. ДИВЕРГЕНТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ	43
3.2. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕВЯЗКОГО ПЕРЕНОСА	46
3.3. СХЕМНАЯ ВЯЗКОСТЬ	49
3.4. ПРОБЛЕМА НЕЛИНЕЙНОСТИ	54
4. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ И ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ	56
4.1. СУЩЕСТВО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ	56
4.2. ПРОВЕРКА ДИСКРЕТИЗАЦИИ	60
4.3. ЯВНЫЕ И НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ. МЕТОД ПРОГОНКИ. МЕТОД УСТАНОВЛЕНИЯ	67
5. ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ.....	71
5.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ	73
5.2. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА. ТУРБУЛЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ	75
5.3. МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ	78
5.4. ДРУГИЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ	84
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	86
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	88

ВВЕДЕНИЕ

Практическая деятельность современного авиационного инженера неразрывно связана с использованием численных методов решения сложных аэродинамических задач течения газовых потоков. Однако чаще всего инженер здесь выступает в роли пользователя готовыми коммерческими пакетами соответствующих программ, непосредственно или через специально подготовленных посредников, обычно не имея ясного представления об особенностях построения и реализации численных алгоритмов, что обедняет деятельность инженера. Целью данного учебного пособия является оказание помощи студенту, будущему инженеру, в преодолении указанного пробела.

Содержание пособия соответствует программе курса «Вычислительные методы газовой динамики», читаемого автором в Рыбинской государственной авиационной технологической академии имени П. А. Соловьева для студентов специальности «Авиационные двигатели и энергетические установки», специализация «Конструирование». При отборе материала для пособия из необозримого моря сведений и предложений по методам численных решений автор ориентировался на уровень математической подготовки его студентов и на опыт общения с молодыми инженерами в конструкторском бюро ОАО «НПО «Сатурн», хотя, конечно, субъективизма не избежал. О трудностях в этом отношении можно судить хотя бы по перечню некоторых универсальных численных методов [1].

1. Метод конечных разностей. Этот численный метод наиболее развит в настоящее время и широко используется для решения уравнений в частных производных различного типа. Здесь область интегрирования разбивается на счетные ячейки с помощью некоторой фиксированной сетки. Производные функций заменяются конечными разностями с помощью тех или иных соотношений. Чаще всего используются так называемые неявные разностные схемы, требующие на каждом шаге решения системы линейных алгебраических уравнений, содержащих большое количество неизвестных (многие сотни) [2].

2. Метод интегральных соотношений. В этом методе область интегрирования разбивается на полосы кривыми линиями вдоль течения. Система уравнений интегрируется поперек этих полос, причем подынтегральные функции представляются интерполяционными выражениями. Полученная в результате система уравнений (обыкновенных дифференциальных или алгебраических) решается численно [3].

3. Метод частиц в ячейках (метод Ф. Хэрлоу) [4]. Область решения здесь разбивается неподвижной (эйлеровой) сеткой. Однако сплошная среда трактуется дискретной моделью – рассматривается совокупность частиц фиксированной массы (лагранжева сетка частиц), которые движутся через эйлерову сетку ячеек и определяют параметры самой жидкости (массу, энергию, скорость), а эйлерова сетка служит для определения параметров поля (давления, температуры). Возможно решение задач о процессах в многокомпонентных средах. Для газодинамических задач течения однородной среды целесообразно исходить из непрерывности среды, рассматривая вместо частиц поток массы через границы эйлеровых ячеек (метод крупных частиц О. М. Белоцерковского, Ю. М. Давыдова) [5].

4. Статистические методы. Эти методы являются методами статистического моделирования (методы Монте-Карло). Соответствующие задачи можно разделить на два вида. К первому относятся задачи со стохастической природой, когда метод Монте-Карло используется для прямого моделирования естественного вероятностного процесса. Ко второму виду относятся детерминированные задачи, описываемые вполне определенными уравнениями. Здесь искусственно строится вероятностный процесс, который численно моделируется методом Монте-Карло на ЭВМ [6].

Основное внимание в предлагаемом учебном пособии уделено методу конечных разностей как базовому, на котором строятся коммерческие пакеты программ для аэродинамических задач. Однако, прежде чем приступить к систематическому знакомству с этим методом, представилось целесообразным сформулировать наиболее общие свойства численных методов на простейших примерах вычислительной математики, а также продемонстрировать построение конечно-разностного алгоритма, опираясь на исходные понятия дифференциального исчисления, и проиллюстрировать возможности метода Монте-Карло как метода математического моделирования путем замены реального процесса искусственным с тем, чтобы раскрыть многоликость термина «математическое моделирование».

Последняя глава пособия посвящена обсуждению моделей турбулентности и методам компьютерного решения задач течения турбулентных потоков.

1. НАИБОЛЕЕ ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Некоторые характерные свойства численных методов, воспринимаемых умозрительно, можно выяснить с помощью простейших примеров из вычислительной математики [7].

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть дано уравнение $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – алгебраическая функция, не представимая в явном виде ни относительно x , ни относительно y , требуется построить зависимость $y = f(x)$.

Рассмотрим решение методом итераций. Задаем конкретное значение $x = x_1$ и переписываем заданное уравнение в виде

$$y = f(x_1, y),$$

т. е. оставляя в левой части некоторое простое выражение для y , и строим итерационную процедуру

$$y_{i+1} = f(x_1, y_i),$$

где y_i – некоторое выбранное значение y , меняющееся в процессе итераций на y_{i+1} до тех пор, пока не будет достигнута достаточно малая разность $|y_{i+1} - y_i| \leq \varepsilon$. Получаем искомое значение y при значении $x = x_1$. Далее задаем иное значение $x = x_2$ и повторяем итерационный процесс.

На основании этого примера можно сделать следующие выводы:

- 1) полученные решения носят частный характер (для значений $x_1, x_2, x_3, \dots$);
- 2) полученный результат является приближенным вследствие ненулевого значения ε . При этом реальная погрешность может быть значительной, если еще вдали от точного решения величина ε становится малой (рис. 1.1);
- 3) Для получения результата необходимо, чтобы выбранная функция $y = f(x_j, y)$ обеспечивала устойчивость итерационной процедуры. Нетрудно убедиться в том, что для соблюдения устойчивости необ-

ходимо, чтобы выполнялось условие $\left| \frac{\partial}{\partial y} [f(x_j, y)] \right| < 1$.

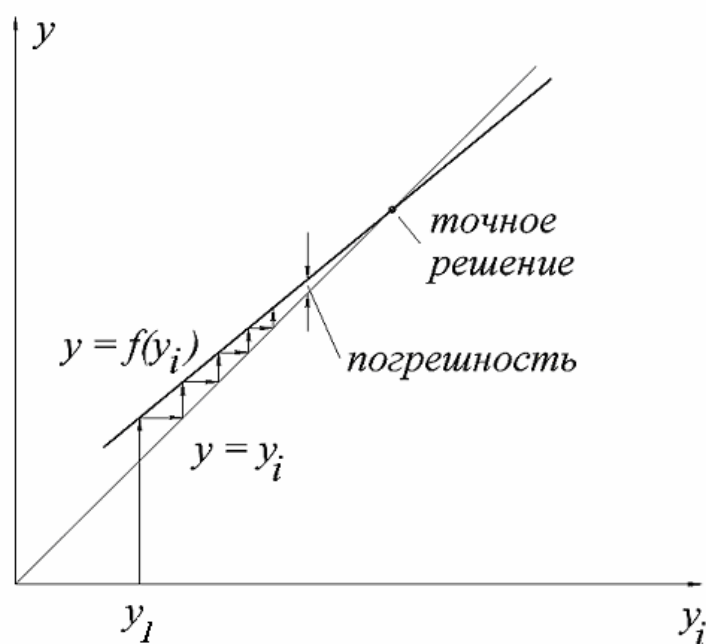


Рис. 1.1. Схема итерационного нахождения корня алгебраического уравнения

1.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть дана функция $f(x)$. Требуется найти ее первообразную $y = \int f(x)dx$ при условии, что функция $f(x)$ аналитически неинтегрируема, причем наименьшее возможное значение $x = a$.

Задачу будем решать численно, путем нахождения ряда определенных интегралов для произвольно заданных верхних пределов b . Для выбранного значения $b = b_j$ область интегрирования разобьем на полосы шириной Δx (рис. 1.2) и будем определять интеграл как площадь под кривой $f(x)$ в интервале от $x_0 = a$ до $x = b_j$.

Используем метод трапеций, когда участки $f(x)$ в пределах полосы аппроксимируются отрезком прямой между верхними границами полосы (рис. 1.2). Соответствующие ординаты пронумеруем от 0 (при $x = x_0 = a$) до n_j (при $x = b_j$). Тогда искомый интеграл (площадь под кривой) можем представить в виде (при одинаковом Δx)

$$\int_a^{b_j} f(x)dx = S_j = \sum_1^{n_j} \Delta S_i = \left[\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n_j-1} f(x_i) \right] \Delta x,$$

где ΔS_i – площадь трапеции с правой ординатой под номером i .

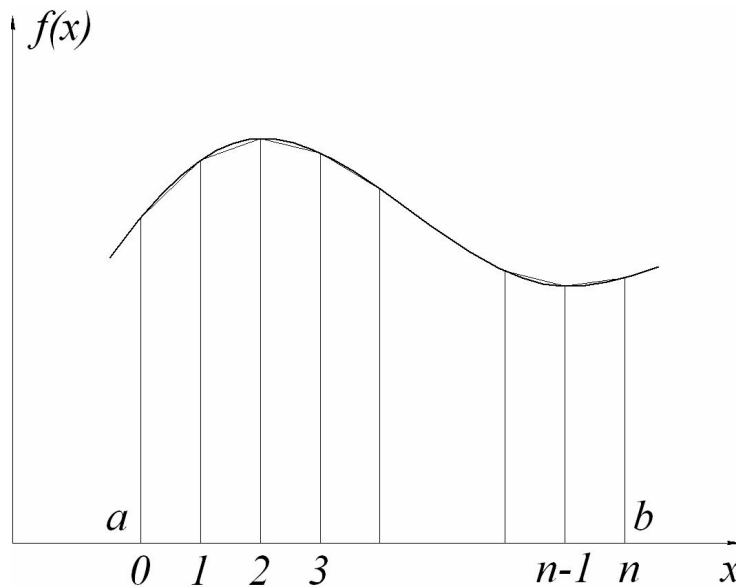


Рис. 1.2. Схема метода трапеций

На основании этого примера можно заключить:

- 1) полученные решения носят частный характер (для значений $x = b_1, b_2, b_3, \dots$);
- 2) область решения разбивается на ряд участков, т. е. производится дискретизация исходной непрерывной функции, а дифференциал dx заменяется конечным приращением (разностью) $\Delta x = x_{i+1} - x_i$;
- 3) полученный результат является приближенным, т. к. верхняя граница участков (трапеций) лишь приближенно совпадает с соответствующими отрезками подынтегральной кривой. Погрешность результата можно уменьшить за счет уменьшения Δx . Однако в этом случае растет количество вычислений, что сопровождается ростом ошибки вследствие округлений промежуточных результатов, а это при достаточно малых Δx может привести к росту суммарной погрешности.

Отметим, что точность нахождения интеграла, очевидно, можно повысить повышением порядка аппроксимации заданной функции $f(x)$. Это достигается в методе Симпсона, в котором граница $f(x)$ аппроксимируется параболоми и требуется четное количество полос и в случае, когда

$f(x)$ является многочленом не выше третьей степени, достигается точный результат.

Известен метод Гаусса, который строится на методе трапеций, но полосы выбираются таким образом, что сумма площадей между кривой $f(x)$ и прямой, образующих трапецию, оказывается нулевой. Вычисления усложняются из-за необходимости специального назначения границ полос. Метод Гаусса обеспечивает точный результат, если $f(x)$ является многочленом ниже четвертого порядка.

Приблизительно можно считать, что при n ординатах метод Симпсона дает примерно ту же точность, что и формула трапеций при $2n$ ординатах, а метод Гаусса при n ординатах дает примерно ту же точность, что и формула Симпсона при $2n$ ординатах.

На практике чаще используется метод Симпсона, который сводится к вычислениям по формуле [7]

$$\int_a^{b_j} f(x) dx = \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots \\ \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] .$$

1.3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Речь пойдет о решении уравнения первого порядка с одним начальным условием:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y); \quad y(x_0) = y_0 .$$

Методы решения такого уравнения легко обобщаются на системы уравнений первого порядка. Кроме того уравнения высших порядков можно свести к системе уравнений первого порядка. Например, уравнение второго порядка

$$y'' = f(y', y, x)$$

можно представить в виде системы:

$$z' = f(z, y, x);$$

$$y' = z,$$

где z – новая зависимая переменная, определяемая вторым уравнением первого порядка, т. е. получается система относительно y и z , решение которой дает функцию y и ее производную z . Таким образом, методы решения уравнения первого порядка получают возможность широкого применения.

Поиск численного решения дифференциального уравнения можно представить в виде следующей схемы.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ задает угол наклона кривой относительно оси абсцисс в любой точке $\alpha = \arctg y'$ как функцию от x и y . Сначала рассматриваем только одну точку, через которую проходит искомая кривая, а именно точку (x_0, y_0) , и вычисляем угол наклона кривой в этой точке. Далее продвигаемся на некоторое расстояние вдоль получившейся касательной к искомой кривой. Если шаг по x равен h , то в результате этого продвижения приходим в точку с абсциссой $x_1 = x_0 + h$ и ординатой $y_1 = y_0 + h y'(x_0, y_0)$. Продолжая эту процедуру для точки (x_1, y_1) и далее, получаем последовательность коротких отрезков прямых, которая является приближением к искомой функции. Этот метод известен как *метод Эйлера*.

Таким образом, в методе Эйлера делается попытка приближенно описать искомую кривую ломаной линией, что, очевидно, должно приводить к затруднениям. Может возникать ситуация, когда последовательность отрезков прямых будет существенно отклоняться от искомой кривой, причем это отклонение будет нарастать по мере увеличения x , т. е. первоначальная ошибка в последующем увеличивает текущую ошибку, что означает потерю устойчивости алгоритма приближения ломаной к искомой кривой. Отсюда следует, что необходимо более строго учесть реальную кривизну кривой, являющейся искомым решением.

Наиболее радикальным предложением в этом отношении представляется *использование рядов Тейлора* для целей аппроксимации кривой. Разложение функции одного переменного $y = f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (x_m, y_m) , под которой подразумевается точка, где функция y известна (задана или уже вычислена), можно записать в виде [8]:

$$y(x) = y(x_m) + y'_m (x - x_m) + \frac{y''_m}{2} (x - x_m)^2 + \frac{y'''_m}{3!} (x - x_m)^3 + \dots,$$

где y_m^j – j -я производная функции $f(x)$ в точке (x_m, y_m) .

Пусть $x - x_m = x_{m+1} - x_m = h$ – расстояние по оси абсцисс между соседними точками, тогда для ближайшей к точке (x_m, y_m) точки (x_{m+1}, y_{m+1}) ряд Тейлора можем записать в виде

$$y_{m+1} = y_m + hy'_m + \frac{h^2}{2} y''_m + \frac{h^3}{3!} y'''_m + \dots, \quad (1.1)$$

причем, чем большее число членов ряда будет взято, тем точнее будет приближение y_{m+1} к истинному значению $y(x_{m+1})$.

В рассматриваемом случае дифференциальное уравнение задано в виде $y' = f(x, y)$, т. е. выражение $y'_m = f(x_m, y_m)$ является неявной функцией, что существенно затрудняет вычисления. В частности, имеем [8]

$$\begin{aligned} y''_m &= \frac{\partial}{\partial x} [f(x_m, y_m)] + f(x_m, y_m) \frac{\partial}{\partial y} [f(x_m, y_m)] ; \\ y'''_m &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [f(x_m, y_m)] + 2f(x_m, y_m) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [f(x_m, y_m)] + \\ &+ [f(x_m, y_m)]^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} [f(x_m, y_m)] + \frac{\partial}{\partial x} [f(x_m, y_m)] \frac{\partial}{\partial y} [f(x_m, y_m)] + \\ &+ f(x_m, y_m) \left[\frac{\partial}{\partial y} f(x_m, y_m) \right]^2 . \end{aligned}$$

Ввиду очевидной сложности вычисления производных интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов Тейлора практически не применяется. Но, вместе с тем, ряды Тейлора используются как критерий оценки применяемых методов путем выяснения, на сколько тот или иной метод согласуется с разложением в ряд Тейлора.

Оценим порядок точности метода Эйлера. Запишем необходимые соотношения метода, полагая, что на искомой кривой известна точка (x_m, y_m) . Через эту точку проведем прямую L_1 с тангенсом угла наклона, равным $y'_m = f(x_m, y_m)$, где правая часть определяется по заданной функции $y' = f(x, y)$ в точке (x_m, y_m) . Уравнение прямой L_1 , очевидно, имеет вид

$$y = y_m + y'_m (x - x_m).$$

Следующей точкой решения можно считать точку, в которой прямая L_1 пересечет ординату, проведенную через точку с абсциссой

$x_{m+1} = x_m + h$ (рис. 1.3). Для этой точки согласно уравнению прямой L_1 можем записать

$$y_{m+1} = y_m + hy'_m.$$

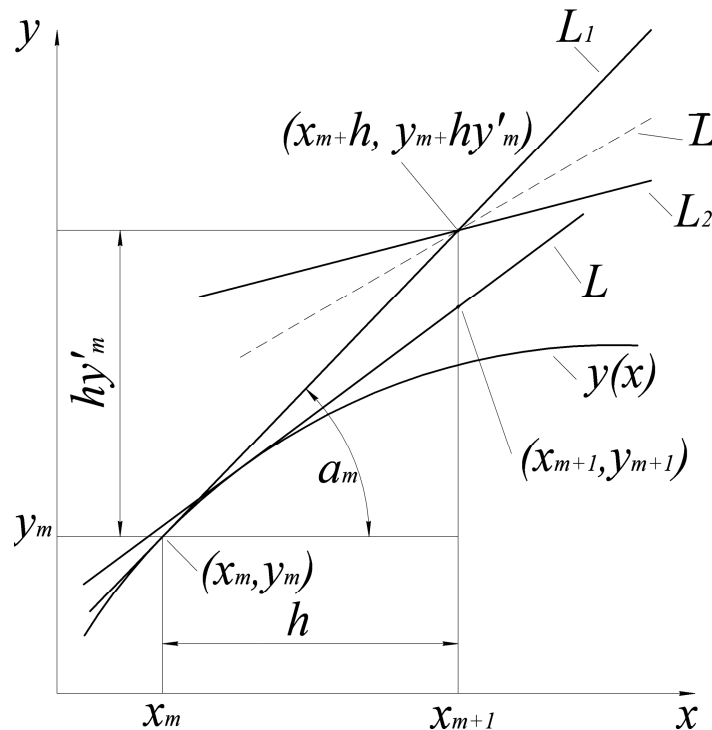


Рис. 1.3. Схема методов Эйлера

Сравнивая эту формулу, описывающую метод Эйлера, с разложением (1.1), замечаем, что она согласуется с рядом Тейлора вплоть до членов с множителем h в первой степени.

Принято считать, что метод имеет порядок p , если он дает результат, согласующийся с рядом Тейлора вплоть до членов, содержащих h^p .

Таким образом, метод Эйлера является методом первого порядка. Проведем подобный анализ для, так называемого, *исправленного метода Эйлера*.

В этом методе сперва с помощью метода Эйлера находится точка $(x_m + h, y_m + h y'_m)$, лежащая на линии L_1 , в которой вычисляется тангенс угла наклона, т. е. $\frac{dy}{dx} = f(x_m + h, y_m + h y'_m)$, касательной L_2 (рис. 1.3). Усреднение наклонов L_1 и L_2 дает прямую $\bar{L}$. Затем через точку (x_m, y_m) проводится прямая L , параллельная $\bar{L}$. Точка в которой прямая L пересечется с ординатой, восстановленной из точки x_{m+1} и будет искомой точ-

кой (x_{m+1}, y_{m+1}) . Из рис. 1.3. видно, что эта точка находится ближе к искомой кривой $y(x)$ по сравнению с точкой $(x_m + h, y_m + h y'_m)$, соответствующей исходному методу Эйлера.

Составим формулу исправленного метода Эйлера. Тангенс угла наклона прямых $\bar{L}$ и L равен среднему тангенсу углов наклона линий L_1 и L_2 , т. е.

$$\varphi(x_m, y_m, h) = \frac{1}{2} [f(x_m, y_m) + f(x_m + h, y_m + h y'_m)],$$

где $y'_m = f(x_m, y_m) = \operatorname{tg} \alpha_m$.

Таким образом, уравнение прямой L имеет вид

$$y_{m+1} = y_m + h \varphi(x_m, y_m, h).$$

Эта формула описывает исправленный метод Эйлера. Полученный результат сопоставим с разложением в ряд Тейлора.

Известно [8], что разложение функции двух переменных $f(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (x_m, y_m) может быть записано в виде

$$f(x, y) = f(x_m, y_m) + (x - x_m) \frac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial x} + (y - y_m) \frac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial y} + \dots$$

Подставляя сюда значения $x = x_m + h$ и $y = y_m + h y'_m$, причем $y'_m = f(x_m, y_m)$, получим

$$\begin{aligned} f(x_m + h, y_m + h y'_m) &= f(x_m, y_m) + h \frac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial x} + \\ &+ (y_m + h y'_m - y_m) \frac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial y} + \dots, \end{aligned}$$

что по подстановке в последнее выражение для φ дает

$$\varphi(x_m, y_m, h) = f(x_m, y_m) + \frac{h}{2} \left[\frac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial x} + f(x_m, y_m) \frac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial y} \right] + \dots$$

Таким образом, формула исправленного метода Эйлера приобретает вид

$$y_{m+1} = y_m + h f(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial x} + f(x_m, y_m) \frac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial y} \right] + \dots$$

1-я производная

2-я производная

Сопоставляя этот результат с разложением функции y_{m+1} в ряд Тейлора (1.1), приходим к выводу, что исправленный метод Эйлера дает результат, совпадающий с рядом Тейлора вплоть до члена $-h^2$, т. е. он является методом второго порядка, или в обобщенной терминологии методом Рунге – Кутты второго порядка.

Широко распространенный в литературе и в системах математического обеспечения ЭВМ метод Рунге – Кутты является методом 4-го порядка. Этот классический метод обычно предлагается без указаний на тип или порядок. Метод предполагает дополнительные вычисления для некоторых промежуточных точек в пределах шага $\left(x_m + \frac{h}{2}\right)$ [9] и описывается формулами:

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

где

$$K_1 = f(x_m, y_m) = y'_m;$$

$$K_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_1\right);$$

$$K_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_2\right);$$

$$K_4 = f(x_m + h, y_m + hK_3).$$

Справедливость этих формул может быть доказана аналитически [10].

Рассмотренные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений показывают, что путем специальных мер, предполагающих дополнительные вычисления, можно добиться повышения точности и устойчивости метода численного решения.

1.4. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ЕГО ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

На заре внедрения в газотурбинные двигатели охлаждаемых перфорированных лопаток газовых турбин (начало 70-х годов XX столетия) остро встала проблема прогноза теплового состояния входных кромок лопаток с перфорациями. Задача имела сугубо пространственный характер [11], но возможности ЭВМ того периода не отвечали возникшим требованиям. Поэтому было принято решение (в Рыбинском конструкторском бюро) избежать полного решения задачи, ограничившись определением температуры только в отдельных точках перфорированных участков лопаток, что оказалось возможным благодаря уже разработанным методам Монте-Карло.

Численное решение строилось на основании стационарного трехмерного уравнения теплопроводности, аппроксимируемого конечными разностями, причем лопатка приближенно представлялась в виде комбинации цилиндра (входная кромка) и сопряженных с ним прямолинейных пластин (боковые стенки лопатки) (рис. 1.4).

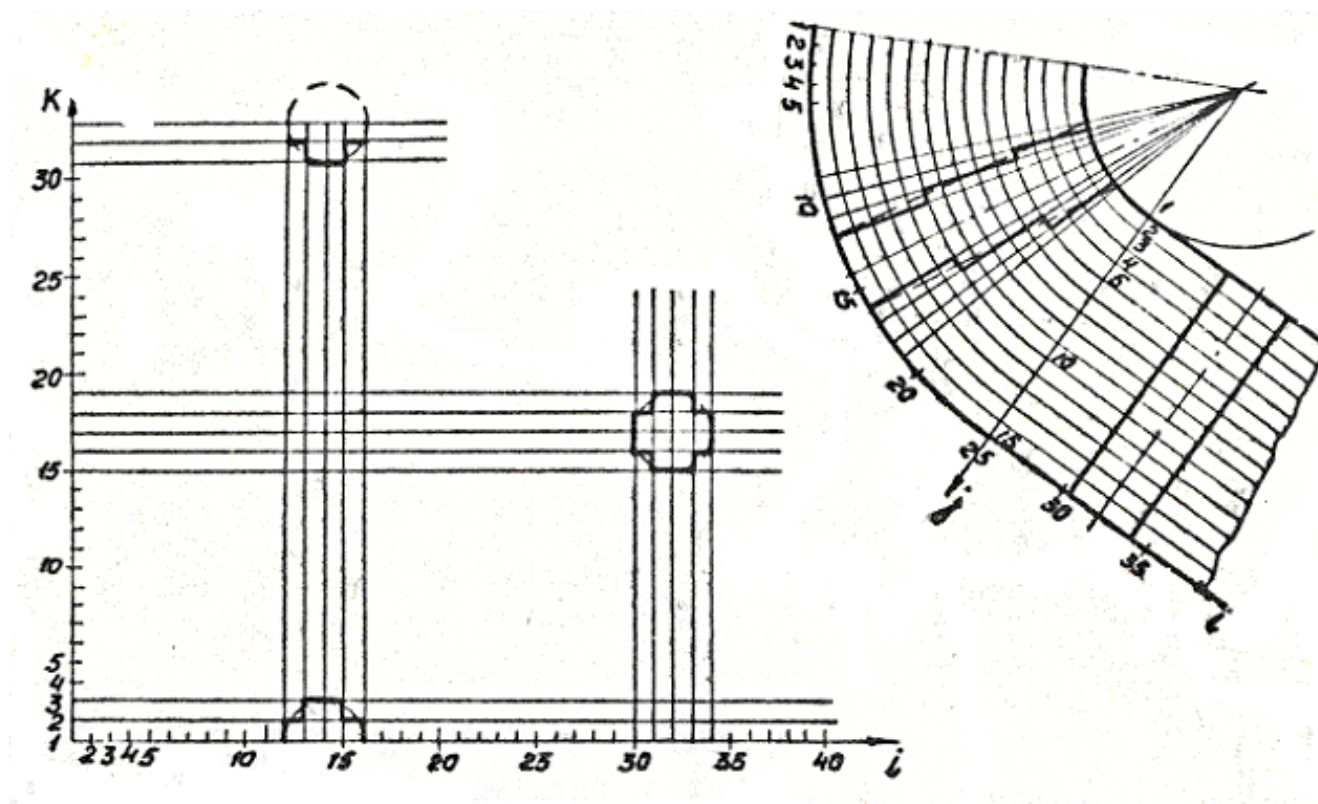


Рис. 1.4. Сеточная модель перфорированной входной кромки лопатки

Эта задача представляет определенный методический интерес, поэтому рассмотрим ее основное содержание [11].

Надлежит решить стационарное уравнение теплопроводности [12] в декартовых координатах:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

– для участков боковых пластин,
а также в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

– для входной кромки.

Процесс преобразования этих уравнений к конечно-разностной форме здесь проиллюстрируем на примере декартовой системы координат. Область решения разобьем на элементы протяженностью Δx вдоль оси x , шириной Δy вдоль оси y и высотой Δz вдоль оси z . Получившиеся узлы сетки пронумеруем символом i по оси x , символом j по оси y и символом k по оси z (рис. 1.5).

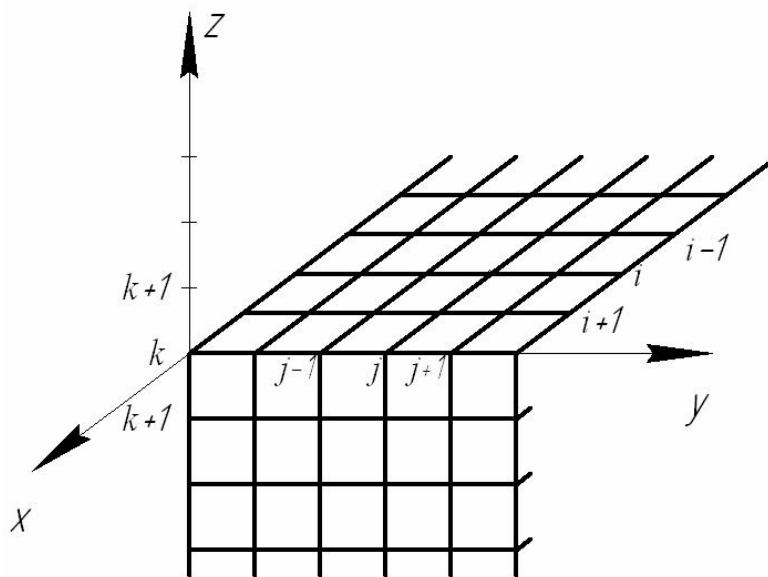


Рис. 1.5. Схема дискретизации расчетной области в декартовой системе координат

Конечно-разностная аппроксимация производной сводится к тому, что из определения производной

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

изымается предел, т. е. принимается

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

где ΔT – приращение функции (температуры), обусловленное приращением аргумента Δx . Однако т. к. в общем случае значения температуры в узлах $T_{i-1,j,k}$, $T_{i,j,k}$, $T_{i+1,j,k}$ различны, то при определении производной в узле i, j, k по оси x будут получаться различные конечные приращения функции при подходе к узлу i, j, k слева

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right)_- = \frac{T_{i,j,k} - T_{i-1,j,k}}{\Delta x}$$

и при уходе от узла i, j, k вправо

$$\left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right)_+ = \frac{T_{i+1,j,k} - T_{i,j,k}}{\Delta x}.$$

Другими словами, индекс «минус» указывает на значение производной, которое «было» перед узлом i, j, k при перемещении вдоль оси x , а индекс «плюс» указывает на значение производной, которое «стало» после прохождения узла i, j, k .

Представляется очевидным, что разность этих производных на интервале Δx даст вторую производную температуры T по координате x в узле i, j, k . Поэтому можем записать

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{i,j,k} \approx \left(\frac{\Delta^2 T}{\Delta x^2} \right)_{i,j,k} = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right)_{\text{стало}} - \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right)_{\text{было}} \right],$$

или

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{i,j,k} \approx \frac{1}{\Delta x^2} (T_{i+1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i-1,j,k}).$$

Выполнив подобные определения производных по остальным осям, конечно-разностное уравнение теплопроводности в декартовых координатах сможем представить в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x^2} [T_{i+1,j,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i-1,j,k}] + \frac{1}{\Delta y^2} [T_{i,j+1,k} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j-1,k}] + \\ & + \frac{1}{\Delta z^2} [T_{i,j,k+1} - 2T_{i,j,k} + T_{i,j,k-1}] = 0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned} T_{i,j,k} = & P_i^+ T_{i+1,j,k} + P_i^- T_{i-1,j,k} + P_j^+ T_{i,j+1,k} + \\ & + P_j^- T_{i,j-1,k} + P_k^+ T_{i,j,k+1} + P_k^- T_{i,j,k-1}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$P_i^+ = P_i^- = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} + \frac{\Delta x^2}{\Delta z^2} \right)};$$

$$P_j^+ = P_j^- = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta y^2}{\Delta z^2} \right)};$$

$$P_k^+ = P_k^- = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\Delta z^2}{\Delta x^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta y^2} \right)}.$$

Легко видеть, что при равномерной сетке (при $\Delta x = \Delta y = \Delta z$) имеет место $P_i^\pm = P_j^\pm = P_k^\pm = \frac{1}{6}$, т. е. в этом случае температура $T_{i,j,k}$ равна среднеарифметическому значению температур в ближайших узлах, окружающих узел i, j, k .

Заметим, что выражение (1.2) для $T_{i,j,k}$ пригодно для любой системы координат, но значения коэффициентов P будут зависеть от системы координат. В случае цилиндрической системы координат можно получить (путем замены координаты x координатой φ , а координаты y координатой R):

$$P_i^+ = P_i^- = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{R^2 \Delta \varphi^2}{\Delta R^2} + \frac{R^2 \Delta \varphi^2}{\Delta z^2} \right) + \frac{R \Delta \varphi^2}{\Delta R}};$$

$$P_j^+ = \frac{1 + \frac{\Delta R}{R}}{2 \left(1 + \frac{\Delta R^2}{R^2 \Delta \varphi^2} + \frac{\Delta R^2}{\Delta z^2} \right) + \frac{\Delta R}{R}} ;$$

$$P_j^- = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\Delta R^2}{R^2 \Delta \varphi^2} + \frac{\Delta R^2}{\Delta z^2} \right) + \frac{\Delta R}{R}} ;$$

$$P_k^+ = P_k^- = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\Delta z^2}{R^2 \Delta \varphi^2} + \frac{\Delta z^2}{\Delta R^2} \right) + \frac{\Delta z^2}{R \Delta R}} .$$

Для «сшивания» прямоугольной сетки с цилиндрической необходимо соблюсти условия $\Delta z = \text{idem}$, $\Delta R = \Delta y$. При этом в случае отсчета слоев по R изнутри, т. е. от внутреннего радиуса R_1 , имеет место $R = R_1 + (j-1)\Delta R$. В случае $\Delta R = \Delta z$ и, $R_2 \Delta \varphi = \Delta z$, где R_2 – наружный радиус входной кромки, получается

$$P_i^+ = P_i^- = \frac{1}{2 \left(1 + 2 \frac{R^2}{R_2^2} \right) + \frac{R \Delta z}{R_2^2}} ;$$

$$P_j^+ = \frac{1 + \frac{\Delta z}{R}}{2 \left(2 + \frac{R_2^2}{R^2} \right) + \frac{\Delta z}{R}} ;$$

$$P_j^- = P_k^+ = P_k^- = \frac{1}{2 \left(2 + \frac{R_2^2}{R^2} \right) + \frac{\Delta z}{R}} ,$$

а на линии сопряжения цилиндра с пластиной при $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ имеет место ($R_j \equiv R$):

$$P_i^+ = \frac{1}{6} ; \quad P_i^- = \frac{R_2^2 / R_j^2}{4 + 2 \frac{R_2^2}{R_j^2} + \frac{\Delta z}{R_j}} ;$$

$$P_j^+ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1 + \Delta z / R_j}{4 + 2 \frac{R_2^2}{R_j^2} + \frac{\Delta z}{R_j}} \right);$$

$$P_j^- = P_k^+ = P_k^- = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4 + 2 \frac{R_2^2}{R_j^2} + \frac{\Delta z}{R_j}} \right).$$

Нетрудно убедиться, что во всех случаях $P_i^\pm + P_j^\pm + P_k^\pm = 1$.

При обычном подходе к решению задачи для определения температур в узлах необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений (1.2), составленных для всех узлов области решения. Метод Монте-Карло позволяет избежать этого и определять температуру только в избранных узлах (точках).

В методе Монте-Карло коэффициенты P в уравнении для $T_{i,j,k}$ (1.2) трактуются как вероятности принятия левой частью уравнения значения, равного величине параметра T в правой части, перед которым стоит данный коэффициент. Сам же процесс теплового взаимодействия узлов заменяется условным процессом блуждания вдоль образующих сетки некой частицы, выпущенной из узла, состояние (температура) которого подлежит определению. На границе тела происходит «поглощение» блуждающей частицы, в связи с чем записывается «штраф», равный определяющей температуре в точке поглощения частицы. Среднее значение этих штрафов и определяет искомую температуру узла, от которого начинается блуждание

$$T_{i_0, j_0, k_0} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N S_n,$$

где N – число поглощенных блуждающих частиц; S_n – величина штрафа, записанного в результате n -го поглощения.

В случае задачи с граничными условиями первого рода (когда заданы значения температуры границы тела) блуждающая частица считается поглотившейся, если она достигла границы тела, и записывается штраф, равный температуре стенки T_w в точке поглощения частицы. В случае граничных условий третьего рода (заданы температура контактирующей с

телом среды T_f и коэффициент теплоотдачи α) при поглощении частицы записывается штраф, равный величине T_f на участке поглощения частицы. Однако факт поглощения частицы зависит от количественных характеристик среды и тела в области выхода блуждающей частицы на границу тела. Этот факт устанавливается вероятностным способом на основании выражений для теплового потока согласно закону Ньютона $q = \alpha(T_f - T_w)$ и закону Фурье $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$, где λ – теплопроводность материала тела; n – нормаль к поверхности тела в точке выхода блуждающей частицы на границу тела.

Перепишав уравнение Фурье в конечно-разностной форме и приравняв полученное выражение к выражению закона Ньютона, получим

$$-\lambda \frac{T_{\Delta n} - T_w}{\Delta n} = \alpha(T_f - T_w),$$

где Δn – размер сетки по нормали к границе; $T_{\Delta n}$ – температура тела на расстоянии Δn внутрь тела от точки выхода частицы на границу тела.

Выражая отсюда T_w , можно получить

$$T_w = P_{\Delta n} T_{\Delta n} + P_{\alpha} T_f,$$

где $P_{\Delta n} = 1 / \left(1 + \frac{\alpha \Delta n}{\lambda} \right)$; $P_{\alpha} = 1 / \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha \Delta n} \right)$, причем, очевидно, $P_{\Delta n} + P_{\alpha} = 1$.

Получается, что температура стенки (поверхности тела) с вероятностью $P_{\Delta n}$ приобретает значение $T_{\Delta n}$, а с вероятностью P_{α} – значение T_f . Первый случай означает, что блуждающая частица отразилась внутрь тела на глубину Δn и будет продолжать блуждание, а второй, что частица поглотилась окружающей средой и следует записать штраф, равный T_f .

Реализовать процесс случайного блуждания можно, поставив значения вероятности P в соответствие участкам с правыми границами r – числового отрезка $(0, 1)$ таким, что, например, $r_i^+ = P_i^+$; $r_i^- = r_i^+ + P_i^-$; $r_j^+ = r_i^- + P_j^+$; $r_j^- = r_j^+ + P_j^-$; $r_k^+ = r_j^- + P_k^+$; $r_k^- = r_k^+ + P_k^- = 1$ (рис. 1.6).

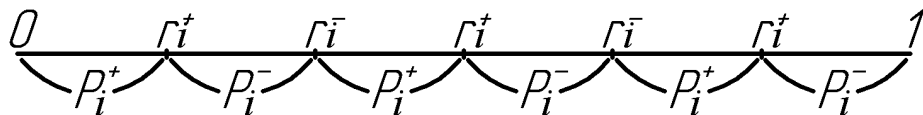


Рис. 1.6. Разбиение числового отрезка $(0, 1)$

Направление каждого шага блуждания частицы определяется попаданием в пределы того или иного участка некоторого числа ω из совокупности случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке $(0, 1)$. Например, выполнение условия $0 < \omega \leq r_i^+$ означает, что блуждающая частица переходит из узла i, j, k в узел $i + 1, j, k$, а при выполнении условия $r_j^+ < \omega \leq r_j^-$ частица переходит в узел $i, j - 1, k$.

Аналогично решается вопрос о поглощении или отражении частицы на границе тела. Можно, например, принять, что если случайное число ω , принадлежащее равномерному распределению в интервале $(0, 1)$, окажется меньше или равной $P_{\Delta n}$, то частица отражается в тело и продолжает блуждание, а в противном случае частица поглощается средой и следует записать штраф, равный T_f .

Интересно отметить, что уменьшение шага сетки Δn уменьшает вероятность поглощения частицы P_α , т. е. удлиняет процесс блуждания.

Результаты использования метода Монте-Карло свидетельствуют о его принципиальной пригодности. Однако для получения надежного результата требуется весьма большое число испытаний (в рассмотренном случае большое число блуждающих частиц) – десятки тысяч. При этом погрешность метода уменьшается обратно пропорционально корню квадратному из числа испытаний, т. е. для уменьшения ошибки в 10 раз (чтобы получить еще один верный десятичный знак), нужно увеличить N (объем работы) в 100 раз [13].

Очевидно, такого рода методы нуждаются в проверке и отработке. В рассматриваемой задаче проверка метода проводилась на примере теплопроводности полого цилиндра с граничными условиями третьего рода, точное решение которого известно. Полученные данные показывают (рис. 1.7), что сближение результатов расчета методом блуждания с точным решением идет довольно медленно, причем за коротковолновыми колебаниями результата следуют длинноволновые.

Многое зависит от качества способа получения случайных чисел [14]. Об этом свидетельствует ухудшение результата при внесении детерминированного условия отбрасывания каждого второго случайного числа (на рис. 1.7 этому условию соответствует линия, помеченная параметром $\Phi = 1$). Это значит, что в рандомизированные процедуры нельзя вносить детерминированные «поправки».

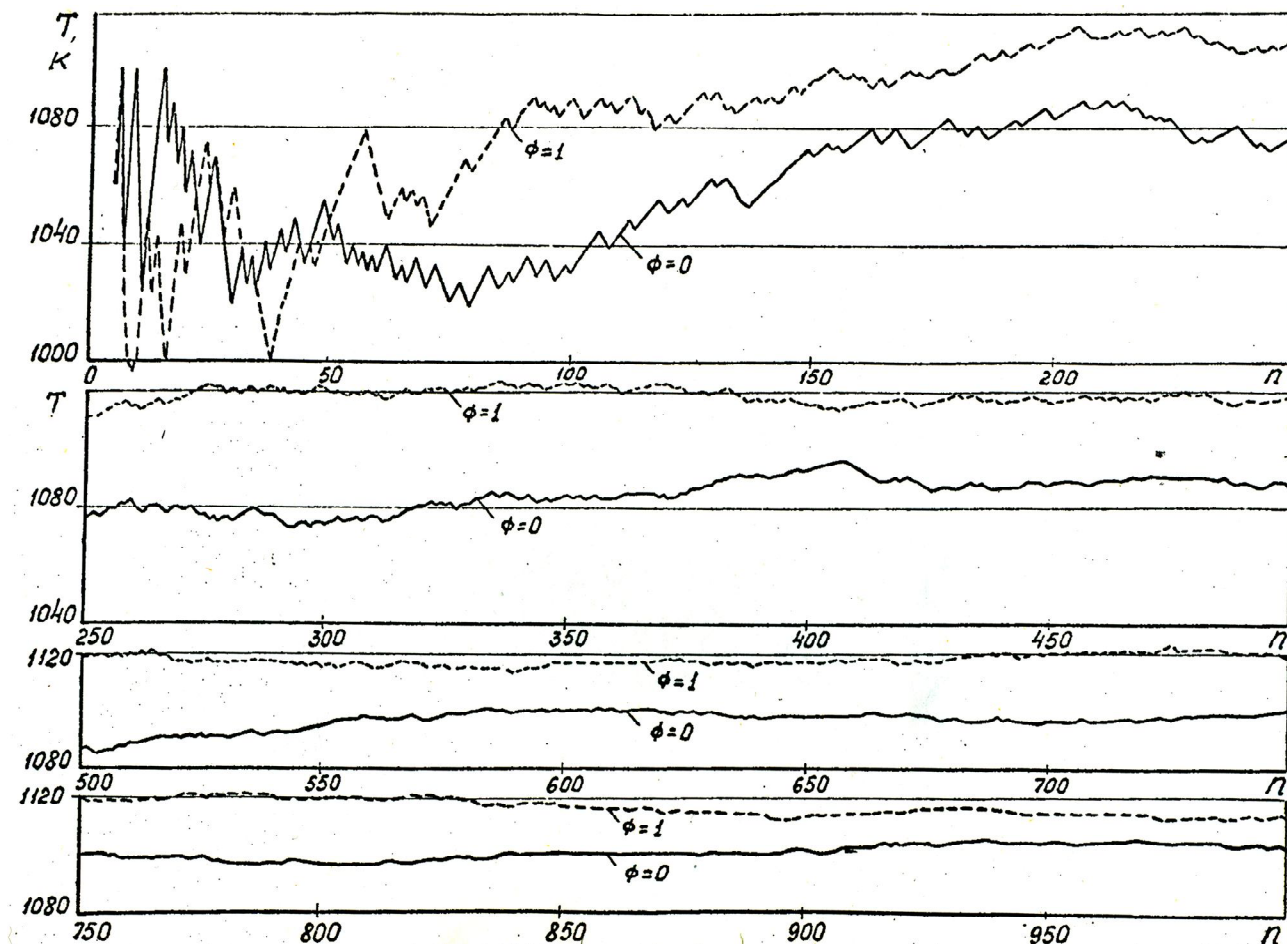


Рис. 1.7. Зависимость наружной температуры полого цилиндра, найденной методом Монте - Карло, от числа испытаний (точное значение $T = 1095,7 \text{ K}$)

Что касается расчетов для перфорированной лопатки, то они, несмотря на некоторое искажение геометрии исследуемого объекта, убедительно показали, что за счет теплообмена в перфорациях температура входной кромки лопатки существенно снижается [11].

В качестве общего вывода по материалам данной главы приведем поучительное высказывание известного специалиста [15]: «Для расчетов следует применять только хорошо отработанные методы, прошедшие серьезную теоретическую и особенно расчетную проверку на разнообразных тестовых задачах».

2. ТИПЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Речь пойдет об уравнениях с двумя независимыми переменными. Такие уравнения удобны для целей обучения [16].

В общем случае указанные уравнения записываются в виде [7]:

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D \frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial U}{\partial y} + FU = G,$$

где A, B, C, D, E, F, G – функции только от независимых переменных x и y ; U – зависимая переменная.

Конкретный тип уравнения определяется дискриминантом $\delta = 4AC - B^2$:

если $\delta > 0$, то уравнение эллиптическое;

если $\delta = 0$, то уравнение параболическое;

при $\delta < 0$ уравнение становится гиперболическим.

Используемая в отношении типов уравнений терминология связана с внешней аналогией алгебраических уравнений, описывающих плоские кривые второго порядка, общее выражение которых имеет вид

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

причем при $\delta = 4AC - B^2 > 0$ оно описывает эллипс, при $\delta = 0$ – параболу, а при $\delta < 0$ гиперболу.

Способ преобразования общего уравнения кривых к частным осуществляется путем преобразования координат можно найти в соответствующей литературе, в частности в справочнике [17], где изложен переход к каноническим формам:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 - \text{эллипс}; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{гипербола}; \quad y^2 = 2px - \text{парабола}.$$

2.1. ТИПЫ УРАВНЕНИЙ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Естественное появление различного типа уравнений второго порядка в частных производных для двух независимых переменных можно проиллюстрировать на основании так называемого основного дифференциального уравнения газовой динамики для плоского потенциального установившегося потока при отсутствии массовых сил [18].

Это уравнение выводится на основании уравнения неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho \vec{W}) = 0,$$

и уравнения движения невязкого потока Эйлера

$$\rho \frac{d\vec{W}}{dt} = -\vec{\operatorname{grad}} p,$$

где ρ – плотность; $\vec{W} = \vec{i}u + \vec{j}v$ – вектор полной скорости (u , v – ее проекции на оси абсцисс x и ординат y соответственно); t – время; p – давление.

Полная производная скорости $\frac{d\vec{W}}{dt}$ раскрывается в соответствии с выражением для полного дифференциала в проекциях на оси координат

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt};$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt},$$

так что с учетом $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ исходную систему можем переписать в виде

$$u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Газ будем считать баротропным, т. е. $\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{d\rho}{dp}$ – плотность зависит

только от давления (это соответствует условию идеального адиабатного

процесса $\frac{p}{\rho^k} = \text{const}$, где k – число Пуассона). По этой же причине будем иметь $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ – скорость звука. По условию адиабатности имеем

$$dp = k\rho^{k-1}\text{const}d\rho = k\rho^{k-1}\frac{p}{\rho^k}d\rho = k\frac{p}{\rho}d\rho,$$

что дает $a^2 = \frac{dp}{d\rho} = k\frac{R}{\rho} = kRT$ (учтено, что по уравнению состояния $p = \rho RT$, где R – газовая постоянная). Баротропность означает, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \int d\rho}{\partial x} = \frac{\partial \int \frac{\partial \rho}{\partial p} dp}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \rho}{\partial p} dp}{\partial x} = \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Таким образом, $\frac{\partial p}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$ и аналогично $\frac{\partial p}{\partial y} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}$.

Подставляя последнее в уравнение Эйлера (2.2), находим:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0.$$

Откуда

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho}{a^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

что по подстановке в уравнение неразрывности (2.1) приводит к выражению:

$$-u \frac{\rho}{a^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - v \frac{\rho}{a^2} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

или после группирования однородных членов

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{uv}{a^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{vu}{a^2} \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

В силу потенциальности течения имеет место

$$\vec{W} = \vec{i}u + \vec{j}v = \text{grad } \varphi = \vec{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где φ – потенциал векторного поля скоростей.

Очевидно $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$.

Используя эти соотношения и обозначая $M_u = u/a$, $M_v = v/a$, а также учитывая преобразование

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

приходим к выражению

$$(1 - M_u^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 2M_u M_v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + (1 - M_v^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Это и есть искомое основное уравнение газовой динамики.

Сопоставляя с общей записью дифференциальных уравнений второго порядка, замечаем, что

$$A = 1 - M_u^2; \quad B = -2M_u M_v; \quad C = 1 - M_v^2;$$

поэтому $\delta = 4AC - B^2 = 4[1 - (M_v^2 + M_u^2)] = 4(1 - M^2)$ где M – число Маха по полной скорости. Легко видеть, что при $M < 1$ имеет место $\delta > 0$ и уравнение становится эллиптическим; при $M = 1$, получаем $\delta = 0$, т. е. уравнение параболическое, а при $M > 1$ имеем $\delta < 0$, т. е. уравнение приобретает гиперболическую форму.

Существенно, что аналитические и численные методы решения таких уравнений значительно разнятся в зависимости от их принадлежности к тому или иному типу.

При этом важную роль играет тот факт, что параболические и гиперболические дифференциальные уравнения имеют так называемые характеристики, под которыми подразумеваются интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения

$$A dy^2 - B dx dy + C dx^2 = 0,$$

из которого с учетом выражения для δ следует

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{-\delta}}{2A}.$$

Очевидно, параболические уравнения ($\delta = 0$) имеют одно семейство характеристик, гиперболические ($\delta < 0$) – два семейства, а эллиптические ($\delta > 0$) ни одного.

Оказалось, что в случае сверхзвукового потока, движение которого описывается гиперболическим уравнением, направление касательной в каждой точке характеристик совпадает с одной из линий возмущения (линий Маха) [18], что радикально упрощает исследование таких потоков и одновременно облегчает получение устойчивого конечно-разностного решения [19]. Речь идет о решении задачи Коши (отыскание интеграла, удовлетворяющего начальным условиям). С этой точки зрения все дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка являются уравнениями гиперболического типа.

2.2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Уравнение Лапласа является простейшим эллиптическим уравнением и в двумерной форме вытекает из основного уравнения газодинамики в предположении течения несжимаемой жидкости, т. е. при $M_u = M_v = 0$, когда что уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Для трехмерной задачи (задачи теплопроводности) уравнение Лапласа было рассмотрено в разделе 1.4. Здесь рассмотрим численное решение двумерного уравнения Лапласа в рамках конечно-разностного метода и дадим оценку погрешности соответствующих аппроксимаций производных.

Как уже отмечалось в разделе 1.4, аппроксимация первой производной конечными разностями сводится к отбрасыванию предела, т. е. вместо $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$ записывают $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$. Связанную с таким упрощением погрешность можно оценить с помощью ряда Тейлора.

Запишем разложение функции $\varphi(x, y_0)$ в ряд Тейлора в окрестности точки (x_0, y_0) при изменении только переменной x . Будем иметь

$$\varphi(x, y_0) = \varphi(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \dots$$

или приближенно

$$\varphi(x, y_0) = \varphi(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\xi, y_0),$$

где ξ лежит между x и x_0 .

Отсюда с учетом $x - x_0 = \Delta x$, следует

$$\Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = \varphi(x_0 + \Delta x, y_0) - \varphi(x_0, y_0) - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\xi, y_0)$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\varphi(x_0 + \Delta x, y_0) - \varphi(x_0, y_0)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\xi, y_0).$$

Таким образом, представление первой производной в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\varphi(x_0 + \Delta x, y_0) - \varphi(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

приводит к ошибке (ограничения ряда), равной

$$E_T = -\frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\xi, y_0),$$

т. е. получили первый порядок (Δx в ошибке имеет первую степень) аппроксимации.

При выводе этого выражения была использована подстановка $\Delta x = x - x_0$, являющаяся «разностью вперед» или «правой разностью». Если использовать «разность назад» $\Delta x = x_0 - x$ («левая разность»), то получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\varphi(x_0, y_0) - \varphi(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x}.$$

Действительно, в этом случае разложение в ряд Тейлора примет вид:

$$\varphi(x, y_0) = \varphi(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + \dots = \varphi(x_0, y_0) - \Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + \dots,$$

откуда следует (с учетом $x = x_0 - \Delta x$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\varphi(x_0, y_0) - \varphi(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x}.$$

Вторую производную определим как конечную разность первых производных – правой («стало») и левой («было») на интервале Δx , т. е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\varphi(x_0 + \Delta x, y_0) - \varphi(x_0, y_0)}{\Delta x} - \frac{\varphi(x_0, y_0) - \varphi(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x} \right],$$

что дает

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\varphi(x_0 + \Delta x, y_0) - 2\varphi(x_0, y_0) + \varphi(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x^2}.$$

Чтобы определить ошибку ограничения для второй производной в разложение функции $\varphi(x, y_0)$ в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \varphi(x, y_0) = & \varphi(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \\ & + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}(\xi, y_0) \end{aligned}$$

последовательно подставим $x = x_0 + \Delta x$ и $x = x_0 - \Delta x$. В результате сложения полученных выражений будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi(x_0 + \Delta x, y_0) + \varphi(x_0 - \Delta x, y_0) = & 2\varphi(x_0, y_0) + \Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) - \\ & - \Delta x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \\ & + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(x_0, y_0) - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}(x_0, y_0) + \frac{\Delta x^4}{24} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}(\xi, y_0), \end{aligned}$$

откуда после приведения подобных членов, можем получить

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\varphi(x_0 + \Delta x, y_0) - 2\varphi(x_0, y_0) + \varphi(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x^2} - \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}(\xi, y_0).$$

Таким образом, принятое определение второй производной в конечных разностях соответствует второму порядку аппроксимации.

Отметим, что определение первой производной с использованием левой и правой разностей (в этом случае их называют «центральными») на интервале $2\Delta x$ дает также второй порядок аппроксимации.

Аналогичным образом можно получить выражение для второй производной функции $\varphi(x_0, y_0)$ по координате y . В результате уравнение Лапласа в конечно – разностной форме будет иметь вид

$$\frac{\varphi(x_0 + \Delta x, y_0) - 2\varphi(x_0, y_0) + \varphi(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x^2} + \frac{\varphi(x_0, y_0 + \Delta y) - 2\varphi(x_0, y_0) + \varphi(x_0, y_0 - \Delta y)}{\Delta y^2} = 0. \quad (2.3)$$

Решение этого уравнения будем искать в рамках задачи Дирихле, т. е. для точек в некоторой области R , ограниченной контуром C , на котором заданы граничные условия (значения функции φ).

Для простоты положим, что контур C представляет собой отрезки прямых, параллельных осям x и y и будем рассматривать прямоугольник шириной A (вдоль оси x) и высотой B (вдоль оси y).

Разделим ширину A на n интервалов, каждый размером $\Delta x = A/n$, а высоту B на m интервалов размером $\Delta y = B/m$. При этом внутри области получится $(n-1)(m-1)$ пересечений (узлов) сетки. Нумерацию узлов выполним слева направо, начиная от нуля, в направлении оси x и снизу вверх, начиная от нуля, в направлении оси y . Крайний справа узел будет иметь номер n (по оси x), а крайний верхний узел будет иметь номер m (по оси y) (рис. 2.1). Узел с индексами (номером) i, j будет i -м слева и j -м снизу. Например, узел P будет иметь индексы 3, 2, а узел Q – индексы 2, 6.

Пусть начало координат совпадает с точкой $(0, 0)$. Тогда $\varphi(x_i, y_i) = \varphi(i\Delta x, j\Delta y) = \varphi_{i,j}$. Для граничных условий можем записать:

$$\varphi_{i,0} = f_{i,0} \text{ при } i = 0, 1, 2, \dots, n - \text{вдоль нижней горизонтали};$$

$$\varphi_{i,m} = f_{i,m} \text{ при } i = 0, 1, 2, \dots, n - \text{вдоль верхней горизонтали};$$

$$\varphi_{0,j} = f_{0,j} \text{ при } j = 0, 1, 2, \dots, m - \text{вдоль левой вертикали};$$

$$\varphi_{n,j} = f_{n,j} \text{ при } j = 0, 1, 2, \dots, m - \text{вдоль правой вертикали}.$$

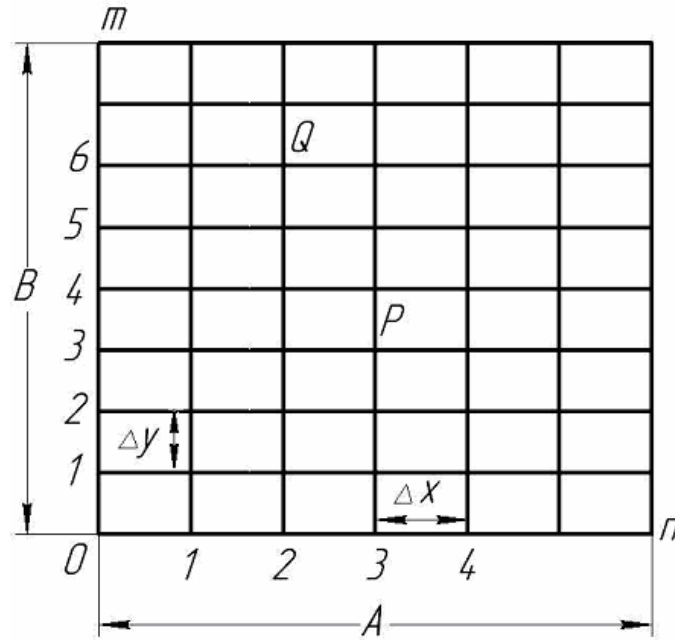


Рис. 2.1. Область решения уравнения Лапласа

Положим теперь, что точка (i, j) является точкой (x_0, y_0) – ведь точка (x_0, y_0) есть любая точка, относительно которой строилось разложение и обозначим $\lambda = \Delta y / \Delta x$, тогда с учетом $x_0 \Rightarrow i$; $x_0 + \Delta x \Rightarrow i + 1$; $x_0 - \Delta x \Rightarrow i - 1$; $y_0 \Rightarrow j$; $y_0 + \Delta y \Rightarrow j + 1$; $y_0 - \Delta y \Rightarrow j - 1$ конечно-разностное уравнение Лапласа можем переписать в индексной форме так:

$$\lambda^2 \varphi_{i+1,j} + \lambda^2 \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 2(1 + \lambda^2) \varphi_{i,j} = 0.$$

Это уравнение имеет смысл для всех внутренних точек (узлов) области, т. е. при $i = 1; 2; 3; \dots; n - 1$; и $j = 1; 2; 3; \dots; m - 1$.

Таким образом, получена система линейных алгебраических уравнений в количестве $(m - 1)(n - 1)$ уравнений относительно $(m + 1)(n + 1)$ узлов сетки (неизвестных). Однако $2n + 2m$ неизвестных будет исключено с помощью граничных условий (на двух горизонтальных и двух вертикальных границах), поэтому останется только

$$(m + 1)(n + 1) - 2m - 2n = (m - 1)(n - 1)$$

неизвестных, для определения которых имеется $(m - 1)(n - 1)$ уравнений, т. е. имеем замкнутую систему.

Проанализируем некоторые особенности полученной системы. Для упрощения записи (без потери общности выводов) примем $\lambda = 1$, т. е. $\Delta x = \Delta y$. В этом случае система уравнений примет вид

$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = 0, \quad (2.4)$$

откуда следует, что при равномерной сетке ($\lambda = 1$) значение функции в узле (i, j) равно среднеарифметическому значению функции в соседних с ним узлах.

Запишем подробно некоторые уравнения системы, начиная с $i = 1$, $j = 1$ и при неизменном j пройдем значения $i = 1; 2; \dots; n - 1$.

Для $j = 1$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi_{2,1} + \varphi_{0,1} + \varphi_{1,2} + \varphi_{1,0} - 4\varphi_{1,1} &= 0; \\ \varphi_{3,1} + \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2} + \varphi_{2,0} - 4\varphi_{2,1} &= 0; \\ \varphi_{4,1} + \varphi_{2,1} + \varphi_{3,2} + \varphi_{3,0} - 4\varphi_{3,1} &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_{n,1} + \varphi_{n-2,1} + \varphi_{n-1,2} + \varphi_{n-1,0} - 4\varphi_{n-1,1} &= 0.\end{aligned}$$

Здесь функции, содержащие индекс 0 или n , имеют значения, равные заданным граничным.

Для $j = 2$ имеем

$$\begin{aligned}\varphi_{2,2} + \varphi_{0,2} + \varphi_{1,3} + \varphi_{1,1} - 4\varphi_{1,2} &= 0; \\ \varphi_{3,2} + \varphi_{1,2} + \varphi_{2,3} + \varphi_{2,1} - 4\varphi_{2,2} &= 0; \\ \varphi_{4,2} + \varphi_{2,2} + \varphi_{3,3} + \varphi_{3,0} - 4\varphi_{3,2} &= 0; \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_{n,2} + \varphi_{n-2,2} + \varphi_{n-1,3} + \varphi_{n-1,1} - 4\varphi_{n-1,2} &= 0.\end{aligned}$$

Конечное значение j будет равно $m - 1$.

На основании этих записей можно заключить, что система обладает следующими свойствами.

1. Подавляющая часть коэффициентов равна нулю (уравнения являются неполными – многие функции в них отсутствуют).
2. В каждом уравнении один из коэффициентов равен 4.

Итак, решение конечно-разностного уравнения сводится к решению системы алгебраических уравнений первого порядка. Имеется значительное количество методов решения таких систем [20].

Здесь рассмотрим *метод Гаусса (или метод исключения)*, который наиболее известен и широко применяется [7]. Суть метода продемонстрируем на простом примере. Пусть решению подлежит система

$$\left. \begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3\end{aligned} \right\}.$$

Разделим все уравнения на их первые коэффициенты (ведущие элементы). Получим

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 &= \frac{b_1}{a_{11}} \\ x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2 + \frac{a_{23}}{a_{21}}x_3 &= \frac{b_2}{a_{21}} \\ x_1 + \frac{a_{32}}{a_{31}}x_2 + \frac{a_{33}}{a_{31}}x_3 &= \frac{b_3}{a_{31}} \end{aligned} \right\}.$$

Последовательным вычитанием из первого уравнения всех последующих исключим неизвестную величину x_1 :

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{22}}{a_{21}} \right) x_2 + \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} - \frac{a_{23}}{a_{21}} \right) x_3 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{b_2}{a_{21}} \\ \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{32}}{a_{31}} \right) x_2 + \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} - \frac{a_{33}}{a_{31}} \right) x_3 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{b_3}{a_{31}} \end{aligned} \right\}.$$

Разделив оба уравнения на их первые коэффициенты, получим

$$\begin{aligned} x_2 + \left[\left(\frac{a_{13}}{a_{11}} - \frac{a_{23}}{a_{21}} \right) / \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{22}}{a_{21}} \right) \right] x_3 &= \left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{b_2}{a_{21}} \right) / \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{22}}{a_{21}} \right); \\ x_2 + \left[\left(\frac{a_{13}}{a_{11}} - \frac{a_{33}}{a_{31}} \right) / \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{32}}{a_{31}} \right) \right] x_3 &= \left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{b_3}{a_{31}} \right) / \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{32}}{a_{31}} \right). \end{aligned}$$

Вычитая из первого уравнения второе, исключим неизвестную x_2 и получим уравнение с одним неизвестным x_3 :

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{a_{13}}{a_{11}} - \frac{a_{23}}{a_{21}} \right) / \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{22}}{a_{21}} \right) - \left(\frac{a_{13}}{a_{11}} - \frac{a_{33}}{a_{31}} \right) / \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{32}}{a_{31}} \right) \right] x_3 &= \\ = \left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{b_2}{a_{21}} \right) / \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{22}}{a_{21}} \right) - \left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{b_3}{a_{31}} \right) / \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{32}}{a_{31}} \right). \end{aligned}$$

Найдя отсюда значение x_3 и подставив его в одно из предыдущих уравнений, определим значение x_2 . Далее из первого уравнения можем найти x_1 – схема обратной подстановки.

Очевидно, необходимым условием применения этого метода является неравенство нулю ведущих элементов системы уравнений. В то же время, как было отмечено, в случае уравнения Лапласа соответствующая

система имеет в большинстве случаев нулевые коэффициенты, что делает применение метода Гаусса проблематичным или, по крайней мере, неудобным и нецелесообразным. Дело еще и в том, что при процедуре исключения могут появляться коэффициенты, сильно различающиеся по величине, что будет приводить к большим ошибкам округления.

В этом отношении гораздо более пригодным является *итерационный метод Гаусса – Зейделя* [7]. Этот метод рассмотрим применительно к той же системе трех уравнений. Предположим, что диагональные коэффициенты $a_{11} \neq 0$; $a_{22} \neq 0$; $a_{33} \neq 0$ и перепишем систему в виде

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3);$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3);$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2).$$

В качестве начального приближения к решению системы примем некоторое произвольное нулевое приближение: $x_1^{(0)}$; $x_2^{(0)}$; $x_3^{(0)}$ и подставим его в первое уравнение, что позволит вычислить x_1 в последующем (первом) приближении

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)}).$$

Используя $x_1^{(1)}$, с помощью второго уравнения вычислим значение $x_2^{(1)}$:

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)}),$$

и затем с помощью третьего уравнения найдем новое значение x_3 :

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)}).$$

Этим заканчивается первая итерация. Теперь можем заменить исходные значения $x_1^{(0)}$; $x_2^{(0)}$; $x_3^{(0)}$ на $x_1^{(1)}$; $x_2^{(1)}$; $x_3^{(1)}$ и выполнить следующее приближение.

В общем случае k -е приближение определится формулами:

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)});$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)});$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)}).$$

Это и есть итерационный метод Гаусса – Зейделя. Он удобен для реализации на ЭВМ. Важно, что текущее значение неизвестной сразу же используется для последующих вычислений. Например, нельзя вычислить $x_2^{(k)}$, пока не получено $x_1^{(k)}$. Для вычисления $x_3^{(k)}$ необходимо сначала определить $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$.

Достаточность выполненных итераций можно определить с помощью заданного критерия близости результатов приближений в виде

$$\max \left| \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| < \varepsilon.$$

Кратко обсудим вопрос о сходимости метода Гаусса – Зейделя. Рассмотрим систему из двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \right\},$$

откуда

$$x = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}y);$$

$$y = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x);$$

так что для k -го приближения имеем

$$x^{(k)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}y^{(k-1)});$$

$$y^{(k)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x^{(k)}).$$

Обозначим $\Delta x^{(k)} = x - x^{(k)}$ и $\Delta y^{(k)} = y - y^{(k)}$.

Тогда согласно исходным уравнениям и уравнениям k -го приближения можем записать:

$$1) \Delta x^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}y) - \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}y^{(k-1)}) = \frac{a_{12}}{a_{11}}(y^{(k-1)} - y),$$

но согласно обозначению $y - y^{(k-1)} = \Delta y^{(k-1)}$, поэтому $\Delta x^{(k)} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}\Delta y^{(k-1)}$;

$$2) \Delta y^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x) - \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x^{(k)}) = \frac{a_{21}}{a_{22}}(x^{(k)} - x),$$

или с учетом обозначения $\Delta y^{(k)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}\Delta x^{(k)}$.

После подстановки сюда предыдущего выражения для $\Delta x^{(k)}$ получаем

$$\Delta y^{(k)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\Delta y^{(k-1)}\right) = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\Delta y^{(k-1)},$$

на основании чего можем записать

$$\Delta y^{(k-1)} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\Delta y^{(k-2)},$$

что по подстановке в предыдущее выражение для $\Delta y^{(k)}$ дает

$$\Delta y^{(k)} = \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right)^2 \Delta y^{(k-2)},$$

откуда следует (уменьшаем номер приближения)

$$\Delta y^{(k-1)} = \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right)^2 \Delta y^{(k-3)},$$

что по подстановке в выражение для $\Delta y^{(k)} = f(\Delta y^{(k-1)})$ дает

$$\Delta y^{(k)} = \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right)^3 \Delta y^{(k-3)}.$$

В итоге этой процедуры получим

$$\Delta y^{(k)} = \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right)^k \Delta y^{(0)} \quad \text{и} \quad \Delta x^{(k)} = \left(\frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}\right)^k \Delta x^{(0)}.$$

Поэтому, если $\left| \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right| < 1$, то метод Гаусса – Зейделя сходится к решению исходной системы уравнений, поскольку в этом случае $\Delta y^{(k)} \ll \Delta y^{(0)}$ и $\Delta x^{(k)} \ll \Delta x^{(0)}$.

Условие $\left| \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right| < 1$ будет удовлетворено, если $|a_{11}| > |a_{12}|$ и $|a_{22}| \geq |a_{21}|$, или если $|a_{11}| \geq |a_{12}|$ и $|a_{22}| > |a_{21}|$. Это значит, что диагональные коэффициенты должны преобладать в уравнении – они должны быть по абсолютной величине не меньше, и, по крайней мере, в одном случае больше недиагональных коэффициентов.

Рассмотрим числовой пример. Пусть дана система

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 2 \\ x - 2y = -2 \end{array} \right\} \text{ I,}$$

в которой, очевидно, $a_{11} = 2$; $a_{12} = 1$; $a_{21} = 1$; $a_{22} = -2$,

так что $\left| \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right| = \left| \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot (-2)} \right| < 1$.

Легко видеть, что точному решению системы I соответствуют $x = \frac{2}{5}$ и $y = \frac{6}{5}$. Применим метод Гаусса – Зейделя и для итераций запишем

$$x = \frac{1}{2}(2 - y); \quad y = \frac{1}{2}(2 + x).$$

Пусть $x^{(0)} = 0$, тогда $y^{(1)} = 1$.

Далее $y^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$, $x^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{5}{4}\right) = \frac{3}{8}$;

$y^{(3)} = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{8}\right) = \frac{19}{16} \approx \frac{6}{5}$; $x^{(3)} = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{19}{16}\right) = \frac{13}{32} \approx \frac{2}{5}$ – процесс сходится (рис. 2.2).

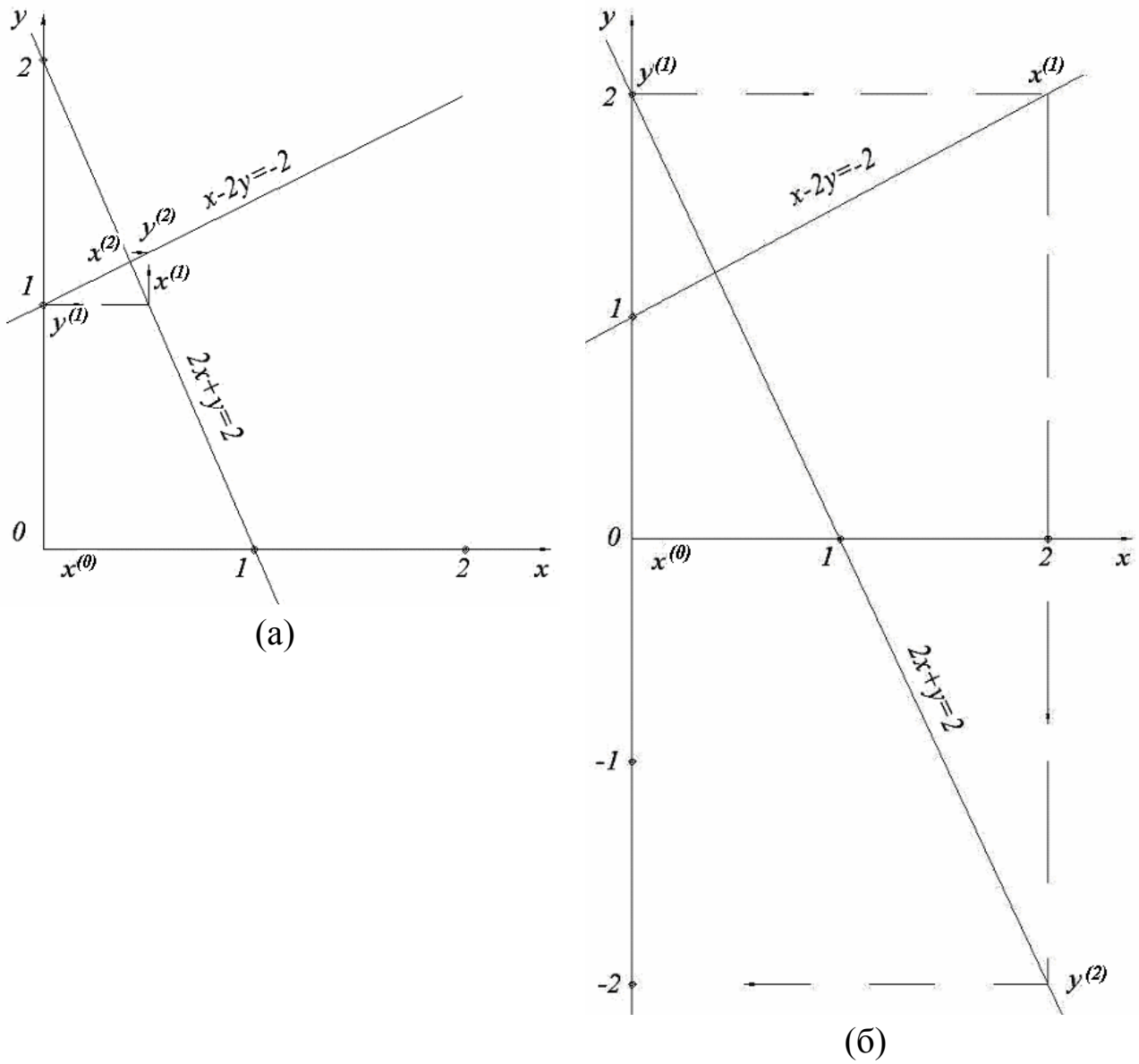


Рис. 2.2 Схема сходимости (а) и несходимости (б) решения системы двух уравнений

Поменяем уравнения местами, т. е. рассмотрим систему

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -2 \\ 2x + y = 2 \end{array} \right\} \text{ II,}$$

в которой, очевидно, $a_{11} = 1$; $a_{12} = -2$; $a_{21} = 2$; $a_{22} = 1$, так что

$$\left| \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}} \right| = \left| \frac{-2 \cdot 2}{1 \cdot 1} \right| > 1.$$

Для итерации запишем $x = 2y - 2$; $y = 2 - 2x$.

Пусть $x^{(0)} = 0$, тогда $y^{(1)} = 2$, $x^{(1)} = 2$, $y^{(2)} = 2 - 4 = -2$, $x^{(2)} = -4 - 2 = -6$; $y^{(3)} = 2 - 2 \cdot (-6) = 10$; $x^{(3)} = 2 \cdot 10 - 2 = 18$ – процесс расходится (рис. 2.2).

Применим итерационный метод к решению рассмотренного выше конечно – разностного уравнения Лапласа (в этом случае этот метод называют *методом Либмана*).

Перепишем полученное выше выражение связи между значениями функции в соседних узлах при $\lambda = 1$ (2.4) в виде

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{4}(\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i-1,j} + \varphi_{i,j+1} + \varphi_{i+1,j}),$$

где функции в скобках расположены в порядке, соответствующему обходу узла (i, j) по соседним узлам по часовой стрелке, начиная снизу.

В качестве примера запишем соответствующие выражения для первого приближения (первой итерации) для заданных значений j .

Пусть $j = 1$. Тогда

$$\text{для } i = 1: \varphi_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{4}(\varphi_{1,0} + \varphi_{0,1} + \varphi_{1,2}^{(0)} + \varphi_{2,1}^{(0)});$$

$$\text{для } i = 2: \varphi_{2,1}^{(1)} = \frac{1}{4}(\varphi_{2,0} + \varphi_{1,1}^{(1)} + \varphi_{2,2}^{(0)} + \varphi_{3,1}^{(0)});$$

$$\text{для } i = 3: \varphi_{3,1}^{(1)} = \frac{1}{4}(\varphi_{3,0} + \varphi_{2,1}^{(1)} + \varphi_{3,2}^{(0)} + \varphi_{4,1}^{(0)});$$

.....

$$\text{для } i = n - 1: \varphi_{n-1,1}^{(1)} = \frac{1}{4}(\varphi_{n-1,0} + \varphi_{n-2,1}^{(1)} + \varphi_{n-1,2}^{(0)} + \varphi_{n,1}^{(0)}).$$

При $j = 2$ имеем

$$\text{для } i = 1: \varphi_{1,2}^{(1)} = \frac{1}{4}(\varphi_{1,1}^{(1)} + \varphi_{0,2} + \varphi_{1,3}^{(0)} + \varphi_{2,2}^{(0)});$$

$$\text{для } i = 2: \varphi_{2,2}^{(1)} = \frac{1}{4}(\varphi_{2,1}^{(1)} + \varphi_{1,2}^{(1)} + \varphi_{2,3}^{(0)} + \varphi_{3,2}^{(0)});$$

$$\text{для } i = 3: \varphi_{3,2}^{(1)} = \frac{1}{4}(\varphi_{3,1}^{(1)} + \varphi_{2,2}^{(1)} + \varphi_{3,3}^{(0)} + \varphi_{4,2}^{(0)});$$

.....

$$\text{для } i = n - 1: \varphi_{n-1,2}^{(1)} = \frac{1}{4}(\varphi_{n-1,1}^{(1)} + \varphi_{n-2,2}^{(1)} + \varphi_{n-1,3}^{(0)} + \varphi_{n,2}^{(0)}).$$

И так далее до $j = m - 1$.

Отметим, что функции, содержащие в индексе 0 или n , или m , являются заданными граничными условиями.

Таким образом, схема решения состоит в следующем.

Вводится двумерный массив, состоящий из $m + 1$ строк и $n + 1$ столбцов. Строки 0 и m , а также столбцы 0 и n представляют собой граничные условия. Расчет состоит из двух циклов: один из этих циклов имеет в качестве индексного параметра j , меняющийся от 1 до $m - 1$, другой цикл идет по индексу i , который меняется от 1 до $n - 1$. В качестве нулевого приближения обычно принимают $\varphi_{i,j}^{(0)} = 0$. Только что вычисленное значение функции сравнивается с тем, которое было получено в результате предыдущей итерации. Наибольшая разность значений, сравнивается с допуском ε , чтобы определить сошелся процесс или нет. Если процесс не сошелся, то производится очередная итерация.

2.3. УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА ДЛЯ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Уравнение Пуассона относится к уравнениям эллиптического типа и отличается от уравнения Лапласа только тем, что правая часть не равна нулю, а является функцией координат. К такому уравнению сводится задача о вторичных течениях в решетках турбомашин, если эти течения рассматривать независимо от основного течения [21], т. е. при использовании правой системы координат (рис. 2.3) вторичная завихренность реализуется в плоскости yz , а основное течение происходит вдоль оси x .

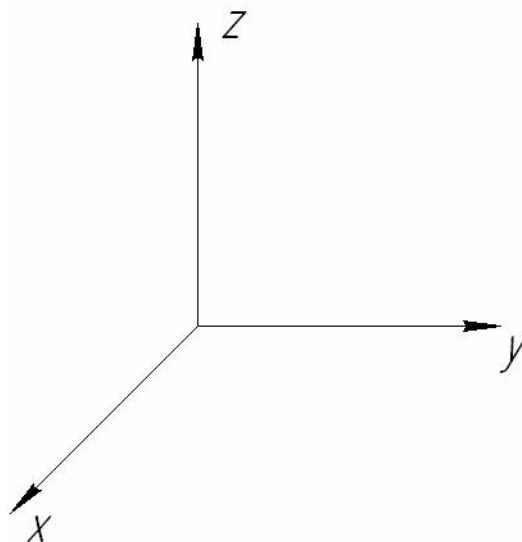


Рис. 2.3. Правая система координат

В этих условиях для завихренности (вторичной) имеем [18]

$$\text{rot}_x \vec{W} = \frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} = \xi_{\text{sec}}.$$

Введем функцию тока ψ такую, что проекции скорости

$$W_y = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad W_z = -\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

что отвечает уравнению неразрывности $\frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = 0$. С учетом этих соотношений выражению для вторичной завихренности можно придать вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\xi_{\text{sec}}.$$

Это и есть уравнение Пуассона для вторичных течений.

В конечно-разностной форме это уравнение (по аналогии с уравнением (2.3)) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\psi(y_0 + \Delta y, z_0) - 2\psi(y_0, z_0) + \psi(y_0 - \Delta y, z_0)}{\Delta y^2} + \\ & + \frac{\psi(y_0, z_0 + \Delta z) - 2\psi(y_0, z_0) + \psi(y_0, z_0 - \Delta z)}{\Delta z^2} = -\xi_{\text{sec}}(y_0, z_0). \end{aligned}$$

В индексной форме при $\Delta y = \Delta z = h$ и $\psi(y_0, z_0) = \psi_{j,k}$ будем иметь

$$\psi_{j+1,k} - 2\psi_{j,k} + \psi_{j-1,k} + \psi_{j,k+1} - 2\psi_{j,k} + \psi_{j,k-1} = -h^2 \xi_{\text{sec}_{j,k}},$$

откуда

$$\psi_{j,k} = \frac{1}{4}(\psi_{j,k-1} + \psi_{j-1,k} + \psi_{j,k+1} + \psi_{j+1,k} + h^2 \xi_{\text{sec}_{j,k}}).$$

Для расчета можно использовать метод Либмана, как и для уравнения Лапласа. Величина ξ_{sec} определяется известной формулой Хауторна, модифицированной для условий течения в турбомашинах в работе [22], в которой приведены также соответствующие результаты расчета.

3. ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ – СТОКСА

При рассмотрении особенностей численного решения уравнений того или иного типа будем иметь в виду, что применяется только конечно-разностный метод как метод, обеспечивший наибольшие успехи в решении задач динамики вязкой жидкости [23].

3.1. УРАВНЕНИЕ НАВЬЕ – СТОКСА. ДИВЕРГЕНТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ

Основными уравнениями в задаче о динамике жидкости являются: уравнение неразрывности, уравнение движения (уравнение импульсов) и уравнение энергии. Влияние вязкости жидкости отражается в двух последних уравнениях, но наиболее существенно в уравнении движения, которое записывается в виде уравнения Навье – Стокса:

$$\frac{D\vec{W}}{dt} = \vec{J} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \vec{W} + \frac{1}{3} \nu \text{grad}(\text{div} \vec{W}),$$

где левая часть является субстанциальной производной скорости $\vec{W}$ по времени t ; $\vec{J}$ – ускорение массовой силы; ρ – плотность жидкости; p – давление; ν – кинематическая вязкость.

Для анализа это уравнение обычно записывают в проекциях на оси координат (рис. 2.3). Например, в проекции на ось x уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = j_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

где u , v , w – соответствующие скорости вдоль осей x , y , z (расшифровка субстанциальной (полной) производной рассмотрена в разделе 2.1).

Применительно к газовым потокам, близким к прямолинейным, обычно полагают $\vec{J} = 0$. В этом случае для несжимаемой жидкости, т. е. при $\text{div} \vec{W} = 0$, можем записать

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (3.1)$$

В этом выражении первое слагаемое называют локальной производной, а последующие три – конвективными составляющими.

Однако уравнения в подобного рода обычной форме оказались практически мало пригодными для реализации численных методов на ЭВМ. Для многих типов задач такая форма уравнений приводит к нарушению закона сохранения по полным параметрам вдоль течения. Чтобы этого избежать, исходные уравнения записывают в так называемой дивергентной форме (иначе – в консервативной форме).

Переход от одной формы к другой проводится с помощью уравнения неразрывности. С этими процедурами можно познакомиться, воспользовавшись книгой [23]. Здесь проиллюстрируем подобную процедуру применительно к уравнению Эйлера (в проекции на ось x), вытекающему из (3.1) при допущении отсутствия вязкости

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

В дивергентной форме это уравнение записывают в виде [5]

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \vec{W}) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Произведем переход от этой формы к обычной. Имеем

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

а также, учитывая, что дивергенция представляет собой скаляр, запишем

$$\text{div}(\rho u \vec{W}) = u \vec{W} \cdot \text{div} \rho + \rho \text{div}(u \vec{W}),$$

где $u \vec{W} \cdot \text{div} \rho = u \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right);$

$$\rho \text{div}(u \vec{W}) = \rho \left(\frac{\partial(uW)_x}{\partial x} + \frac{\partial(uW)_y}{\partial y} + \frac{\partial(uW)_z}{\partial z} \right) =$$

$$= \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} W_x + \frac{\partial u}{\partial y} W_y + \frac{\partial u}{\partial z} W_z + u \left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \right) \right],$$

но $W_x = u$; $W_y = v$; $W_z = w$ и $\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = \text{div} \vec{W}$, поэтому подставляя эти выражения в дивергентное уравнение Эйлера, получим

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) + \\ & + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \rho u \text{div} \vec{W} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Здесь сумма второго и третьего слагаемых образует полную производную плотности по времени $\frac{d\rho}{dt}$, умноженную на u и, кроме того,

$$u \frac{d\rho}{dt} + \rho u \text{div} \vec{W} = u \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{W} \right) = 0$$

в силу того, что $\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{W} = 0$ согласно уравнению неразрывности.

Таким образом, последнее уравнение приобретает вид

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

что соответствует обычной форме уравнения Эйлера.

Дивергентная форма обеспечивает следующее свойство: после суммирования соответствующих соотношений по смежным объемам остаются лишь потоки через внешнюю поверхность суммарного объема, а потоки через соприкасающиеся поверхности объемов взаимно уничтожаются. Подобное свойство придается и разностной системе, полученной на основе дивергентной формы исходных дифференциальных уравнений.

Если при суммировании разностных уравнений по всем узлам сетки получаются выражения, которые содержат только сеточные величины на границах области, то такую схему называют консервативной. Ценность данного свойства состоит в том, что разностные аналоги интегральных законов сохранения выполняются независимо от шагов сетки. Так, разностный аналог расхода среды через канал с непроницаемыми стенками будет одинаковым в любом поперечном сечении канала. Неконсервативная разностная схема, вообще говоря, не обеспечивает этого свойства [23].

3.2. МОДЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ НЕВЯЗКОГО ПЕРЕНОСА

В дальнейшем для упрощения рассмотрения вычислительного метода ограничимся одномерным случаем течения несжимаемой жидкости (т. е. положим $\operatorname{div} \vec{W} = 0$) и запишем модельные уравнения

$$(A) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = F(x, t)$$

– невязкая жидкость (уравнение гиперболического типа);

$$(B) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t)$$

– вязкая жидкость (уравнение параболического типа), где $a(x, t)$ и $F(x, t)$ – известные функции пространственной координаты x и времени t ; ν – положительный коэффициент (кинематическая вязкость).

Функция $F(x, t)$ имеет смысл заданного источника изменения скорости u (например, массовые силы, градиент давления).

Приведенные модельные уравнения по виду схожи с уравнениями нестационарного одномерного течения идеальной (уравнение (А)) и вязкой (уравнение (В)) жидкостей, соответствующими уравнению Навье – Стокса, но с тем существенным упрощением, что множитель a в конвективном члене принят заранее известным (иногда даже постоянным). Это упрощение снимает принципиальные трудности, связанные с нелинейностью уравнений гидродинамики (в которых $a \equiv u$), но оставляет возможности оценивать на модельных уравнениях разностные схемы с точки зрения передачи свойств, присущих конвекции и диффузии.

Исследуем уравнение (А) в предположении $F(x, t) = 0$, т. е. уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.2)$$

Это уравнение можно трактовать как уравнение переноса скорости (импульса) вдоль оси x с течением времени, причем a есть скорость переноса. Под переносимой величиной u можно понимать не только скорость, но любую субстанцию, подчиняющуюся закону сохранения. Обозначим эту субстанцию через μ и перепишем уравнение переноса в виде

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + a \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0.$$

Рассмотрим решение этого уравнения методом конечных разностей и аппроксимируем его в виде

$$\frac{\mu_i^{n+1} - \mu_i^n}{\Delta t} + a_i^n \frac{\mu_i^n - \mu_{i-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

где нижний индекс указывает номер узла пространственной сетки, а верхний – номер момента времени; Δt , Δx – шаги сетки по времени и по пространству соответственно. Очевидно, здесь временная производная аппроксимирована разностью вперед по временным слоям, а пространственная производная разностью назад по узлам пространственной сетки.

Из последнего уравнения следует

$$\mu_i^{n+1} = \mu_i^n - a_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mu_i^n - \mu_{i-1}^n).$$

Положим, что скорость переноса одинакова для всех ячеек сетки и не меняется во времени. Тогда обозначив $Co = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ (число Куранта – по имени Richard Courant), перепишем

$$\mu_i^{n+1} = (1 - Co)\mu_i^n + Co\mu_{i-1}^n.$$

Вычисления с помощью последнего выражения показывают, что адекватный результат получается только при $Co = 1$.

Рассмотрим соответствующие случаи переноса, принимая в качестве начальных условия: в момент времени n в узле $i = 1$ имеет место $\mu_{i=1}^n = 1$, а во всех других узлах, т. е. при $i \neq 1$, имеет место $\mu_{i \neq 1}^n = 0$.

1) Пусть $Co = 1$. В этом случае расчетная формула приобретает вид

$$\mu_i^{n+1} = \mu_{i-1}^n.$$

Произведем вычисления для момента времени $n + 1$. Имеем

$$\text{при } i = 1: \mu_1^{n+1} = \mu_{i-1}^n = \mu_0^n = 0;$$

$$\text{при } i = 2: \mu_2^{n+1} = \mu_{2-1}^n = \mu_1^n = 1;$$

$$\text{при } i = 3: \mu_3^{n+1} = \mu_{3-1}^n = \mu_2^n = 0.$$

Для момента времени $n + 2$ имеем $\mu_i^{n+2} = \mu_{i-1}^{n+1}$, т. е. с учетом предыдущего

$$\text{при } i = 1: \mu_1^{n+2} = \mu_{1-1}^{n+1} = \mu_0^{n+1} = 0;$$

$$\text{при } i = 2: \mu_2^{n+2} = \mu_{2-1}^{n+1} = \mu_1^{n+1} = 0;$$

$$\text{при } i = 3: \mu_3^{n+2} = \mu_{3-1}^{n+1} = \mu_2^{n+1} = 1;$$

$$\text{при } i = 4: \mu_4^{n+2} = \mu_{4-1}^{n+1} = \mu_3^{n+1} = 0.$$

Таким образом, при $Co = 1$ в каждый последующий момент времени переносимая величина оказывается полностью перенесенной в ячейку (узел) с номером, на 1 большим по сравнению с номером узла в предыдущий момент времени. Такой процесс представляется вполне адекватным при отсутствии вязкости переносимой субстанции.

2) Пусть $Co = 0,8$. В этом случае расчетная формула приобретает вид

$$\mu_i^{n+1} = 0,2\mu_i^n + 0,8\mu_{i-1}^n.$$

Выполним вычисления для момента времени $n + 1$. Имеем

$$\text{при } i = 1: \mu_1^{n+1} = 0,2\mu_1^n + 0,8\mu_{1-1}^n = 0,2 \cdot 1 + 0,8 \cdot 0 = 0,2;$$

$$\text{при } i = 2: \mu_2^{n+1} = 0,2\mu_2^n + 0,8\mu_1^n = 0,8;$$

$$\text{при } i = 3: \mu_3^{n+1} = 0,2\mu_3^n + 0,8\mu_2^n = 0.$$

Для момента времени $n + 2$ имеем: $\mu_i^{n+2} = 0,2\mu_i^{n+1} + 0,8\mu_{i-1}^{n+1}$ и, следовательно,

$$\text{при } i = 1: \mu_1^{n+2} = 0,2\mu_1^{n+1} + 0,8\mu_0^{n+1} = 0,2 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0 = 0,04;$$

$$\text{при } i = 2: \mu_2^{n+2} = 0,2\mu_2^{n+1} + 0,8\mu_1^{n+1} = 0,32;$$

$$\text{при } i = 3: \mu_3^{n+2} = 0,2\mu_3^{n+1} + 0,8\mu_2^{n+1} = 0,64;$$

$$\text{при } i = 4: \mu_4^{n+2} = 0,2\mu_4^{n+1} + 0,8\mu_3^{n+1} = 0.$$

Таким образом, при $Co < 1$ наблюдается рассеивание величины μ по ячейкам: в момент времени $n + 1$ в узле $i = 1$ содержится $0,2\mu_1^n$, а в момент времени $n + 2$ в ней остается $0,04\mu_1^n$, т. е. осуществляется неполный перенос. При этом, как легко видеть, суммарное значение μ по всем ячейкам в каждый момент времени остается равным единице, т. е. закон сохранения выполняется.

Рассеивание величины μ физически было бы оправдано наличием вязкости. Но в исходном дифференциальном уравнении переноса вязкость отсутствует. Следовательно, рассеивание μ обусловлено использованием конечно-разностной формы уравнения переноса, т. е. связано с приме-

нием разностной схемы. Это явление называют возникновением сеточной или схемной вязкости, порождающей диссипативные эффекты.

3) Пусть $Co = 1,2$. В этом случае расчетная формула приобретает вид

$$\mu_i^{n+1} = -0,2\mu_i^n + 1,2\mu_{i-1}^n.$$

Выполним вычисления для момента времени $n + 1$. Имеем

$$i = 1: \mu_1^{n+1} = -0,2\mu_1^n + 1,2\mu_0^n = -0,2;$$

$$i = 2: \mu_2^{n+1} = -0,2\mu_2^n + 1,2\mu_1^n = 1,2;$$

$$i = 3: \mu_3^{n+1} = -0,2\mu_3^n + 1,2\mu_2^n = 0.$$

Для момента времени $n + 2$ имеем

$$i = 1: \mu_1^{n+2} = -0,2\mu_1^{n+1} + 1,2\mu_0^{n+1} = 0,04;$$

$$i = 2: \mu_2^{n+2} = -0,2\mu_2^{n+1} + 1,2\mu_1^n = -0,48;$$

$$i = 3: \mu_3^{n+2} = -0,2\mu_3^{n+1} + 1,2\mu_2^{n+1} = 1,44.$$

Получили практически нереальную картину переноса. Например, в момент времени $n + 1$ в ячейке $i = 1$ имеем $\mu_1 = 0,04$; появляются узлы, в которых $\mu > 1$. Это значит, что при $Co > 1$ схема расчета оказывается неустойчивой. Следовательно, рассмотренная схема является условно устойчивой, а именно при $Co \leq 1$. Неустойчивые схемы, очевидно, не могут быть практически использованы. Но при малых Co проявляется схемная вязкость, что искажает полученные результаты. В рассмотренном примере $Co = 0$ означает отсутствие переноса вообще ($\mu_i^{n+1} = \mu_i^n$). Поэтому исследование и оценка схемной вязкости имеет существенное практическое значение.

3.3. СХЕМНАЯ ВЯЗКОСТЬ

Как было показано в предыдущем разделе, использование конечно-разностных методов для решения задач гидромеханики приводит к специфической погрешности, которая может быть истолкована как дополнительная вязкость жидкости, вызванная дискретным характером схемы решения. Проанализировать эти явления можно на основании так называе-

мых дифференциальных приближений, суть которых состоит в следующем [23].

Если в разностную схему подставить разложение функции непрерывного аргумента в ряд Тейлора, приняв, что эта функция в узлах сетки совпадает с сеточным решением, и затем устремить шаг сетки h к нулю, то для аппроксимирующей системы все «лишние» члены обратятся в ноль, а оставшиеся образуют исходную дифференциальную задачу. Если при этом после подстановки удержаны главные члены погрешности аппроксимации (т. е. при наименьшей степени h), то получится первое дифференциальное приближение.

Рассмотрим первое дифференциальное приближение для схемы

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x} = 0,$$

аппроксимирующей с разностью назад по x уравнение переноса (3.2), т. е. уравнение движения невязкой жидкости (уравнение А) с опущенной правой частью (при $a = \text{const}$).

Разложим в ряд Тейлора функции, входящие в рассматриваемую разностную схему.

Для первого слагаемого конечно-разностного уравнения можно записать (разложение в окрестности точки t):

$$\begin{aligned} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} &= \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \left[u(t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots - u(t) \right] = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для второго слагаемого разностного уравнения, разложение (в окрестности точки x) дает

$$\begin{aligned} a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x} &= a \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{a}{\Delta x} \left[u(x) - \left(u(x) + \frac{(-\Delta x)}{1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(-\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] = \\ &= a \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом, дифференциальное приближение рассматриваемого разностного уравнения имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Очевидно, при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$ это выражение обращается в исходное дифференциальное уравнение (3.2). Преобразуем дифференциальное приближение, воспользовавшись тем, что согласно исходному уравнению (3.2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Преобразуем производную $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ с учетом последнего равенства.

Имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right),$$

откуда $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, что при подстановке в дифференциальное прибли-

жение дает $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, или, обозначая $Co = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} [-a\Delta x(1 - Co)/2] = 0.$$

Таким образом, дифференциальное приближение приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - v_{cx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.5)$$

где $v_{cx} = a\Delta x(1 - Co)/2$ – схемная вязкость.

Термин «схемная вязкость» основывается на сопоставлении полученного уравнения с уравнением вязкого течения (В) при опущенной правой части

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

где v – кинематическая вязкость жидкости.

При $Co = 1$ схемная вязкость $v_{cx} = 0$ и уравнение переноса дает адекватный результат. При $Co < 1$ имеет место $v_{cx} > 0$, что оказывает «сглаживающее» влияние на решение и приводит к рассеиванию переносимой субстанции. При $Co > 1$ схемная вязкость становится отрицательной, что противоречит природе вязкого течения. Это дестабилизирует вычисли-

тельный процесс, приводя его к потере устойчивости, что и было обнаружено в рассмотренном выше решении для переноса субстанции μ .

Однако потеря устойчивости может произойти не только по условию относительно числа Куранта Co . К неустойчивости может привести и неудачная схема аппроксимации дифференциальных выражений. В связи с этим рассмотрим схему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{\Delta x} = 0, \quad (3.6)$$

аппроксимирующую то же уравнение (3.2), но с разностью вперед по x (при $a = \text{const}$).

Разложим в ряд Тейлора функции, входящие в рассматриваемую разностную схему. Для первого слагаемого это соотношение (3.3).

Для второго слагаемого можем записать (разложение в окрестности точки x):

$$\begin{aligned} a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{\Delta x} &= a \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \\ &= \frac{a}{\Delta x} \left[u(x) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x) + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x) + \dots - u(x) \right] = a \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемое конечно-разностное уравнение получает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Но согласно исходному уравнению (3.2), как уже было показано, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, что по подстановке в предыдущее дает

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \left(a^2 \frac{\Delta t}{2} + a \frac{\Delta x}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

или с учетом обозначения $Co = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - v_{cx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

где $v_{cx} = -a\Delta x(1 + Co)/2$ – схемная вязкость. Она отрицательна при любых значениях числа Куранта Co и любых значениях Δx и Δt . Это свидетельствует о безусловной неустойчивости конечно-разностной схемы (3.6).

Нетрудно убедиться в том, что и конечно-разностная аппроксимация вязкого уравнения (В) приводит к появлению схемной вязкости.

Конечно-разностным аналогом уравнения (В) с отброшенной правой частью является выражение

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x} - \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2} = 0,$$

где первая производная аппроксимирована разностью назад.

Для первого и второго слагаемых получено соответственно (3.3) и (3.4).

Разложим в ряд Тейлора третье слагаемое (в окрестности точки x). Имеем

$$\begin{aligned} \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2} &= \nu \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{\Delta x^2} = \\ &= \frac{\nu}{\Delta x^2} \left[u(x) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u(x) + u(x) + \frac{(-\Delta x)}{1} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(-\Delta x^2)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, разностное уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

откуда с учетом полученного ранее соотношения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ следует

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_{cx}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

где $\nu_{cx} = a\Delta x(1 + Co)/2$ – схемная вязкость, соответствующая таковой для конечно-разностной схемы уравнения (А) с разностью назад (3.5).

Полученный результат указывает на то, что в случае схемной вязкости ν_{cx} , соизмеримой с физической вязкостью ν , использование рассмотренной конечно-разностной схемы равносильно расчету течения существенно более вязкой жидкости, что особенно важно при больших числах Рейнольдса, когда физическая вязкость проявляется слабо.

В случае линейных уравнений рассмотренный анализ позволяет оценить влияние схемной вязкости на этапе создания схем расчета. Однако при решении уравнений с нелинейными конвективными членами в выражение для ν_{cx} войдет вместо заданной скорости a искомая скорость u . В связи с этим количественная оценка роли схемной вязкости становится

возможной лишь после решения разностной задачи с соответствующим анализом полученных результатов в рамках физических условий рассматриваемого процесса.

3.4. ПРОБЛЕМА НЕЛИНЕЙНОСТИ

При рассмотрении модельных уравнений, в частности уравнений (А) с отброшенной правой частью

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

в предыдущих разделах подразумевалось, что параметр a является заданной величиной. Но ведь эти уравнения являются уравнениями движения, в которых a есть проекция скорости на ось x , что делает уравнения нелинейными.

Преодоление возникающей в связи с этим трудности осуществляется применением метода итераций, причем таким образом, что на данной итерации уравнение оказывается линейным.

Принцип такого подхода проиллюстрируем на примере построения метода расчета сложных гидравлических сетей, каковыми являются, например, системы воздушного охлаждения турбин газотурбинных двигателей.

Пусть имеется гидравлическая ветвь, состоящая из N гидравлических элементов (сопротивлений). Рассмотрим течение через некоторое i -е препятствие, характерное определяющим сечением площади F_i (рис. 3.1), пропускная способность которого зависит от коэффициента расхода μ_i .

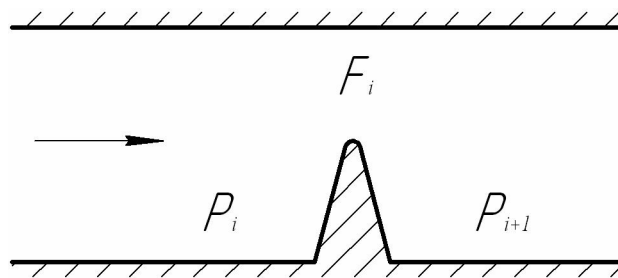


Рис. 3.1. Схема канала с гидравлическим препятствием

Расход воздуха через i -е сечение определяется выражением

$$G = \rho'_i w'_i \mu_i F_i,$$

где ρ'_i, w'_i – плотность и скорость жидкости в определяющем сечении i -го элемента.

Величину ρ'_i обычно полагают равной средней величине плотности перед i -м препятствием ρ_i и за ним ρ_{i+1} , т. е. с учетом уравнения состояния при постоянной температуре T в виде

$$\rho'_i = \frac{p_i + p_{i+1}}{2RT},$$

где p – давление, R – газовая постоянная.

Ввиду малых скоростей потока в канале перед и за препятствием полные и статические давления можно считать близкими между собой и положить $p_i^* = p_i$ и $p_{i+1}^* = p_{i+1}$. Поэтому для определения располагаемой скорости в сечении F_i можно воспользоваться уравнением Бернулли в виде

$$p_i = p_{i+1} + \frac{\rho'_i (w'_i)^2}{2},$$

откуда $w'_i = \sqrt{2(p_i - p_{i+1})/\rho'_i}$, и, следовательно,

$$G = \rho'_i \sqrt{2(p_i - p_{i+1})/\rho'_i} \mu_i F_i = \mu_i F_i \sqrt{\frac{(p_i + p_{i+1})}{RT} (p_i - p_{i+1})}$$

$$\text{или } G = \frac{\mu_i F}{\sqrt{RT}} \sqrt{p_i^2 - p_{i+1}^2}.$$

Получилась нелинейная зависимость, но если обозначить

$$a_i = \frac{\mu_i F}{\sqrt{RT(p_i^2 - p_{i+1}^2)}},$$

то придем к выражению

$$G = a_i (p_i^2 - p_{i+1}^2),$$

являющемуся линейным относительно квадратов давлений, если на данной итерации считать $a_i = \text{const}$.

Для первой итерации a_i задают (например $a_i^{(0)} = 1$), а для второй (последующей) итерации величину a_i подсчитывают по результатам рас-

чета давлений на первой (предыдущей) итерации и т. д. до достижения необходимой близости значений a_i , полученных по результатам двух последних итераций.

В целом для гидравлической ветви решение задачи при $G = idem$ сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно p_i^2 ($i = 1, 2, 3 \dots N$).

4. ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ И ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Подытожим разрозненно приведенные в предыдущих главах сведения о методе конечных разностей и рассмотрим особенности его реального применения.

4.1. СУЩЕСТВО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Метод состоит в следующем.

1. Область непрерывного изменения аргумента заменяется дискретной, т. е. состоящей из отдельных точек (узлов). Расстояние между узлами называется шагами. Совокупность узлов составляет сетку, которая может быть равномерной (с постоянными в каждом направлении шагами) или неравномерной.

2. Производится приближенная замена (аппроксимация) дифференциальных уравнений, граничных, начальных и других условий их разностными аналогами. Совокупность узлов, которым принадлежат величины, входящие в отдельные аппроксимирующие соотношения образуют разностный шаблон (трафарет). Множество таких алгебраических соотношений дает разностную схему. Содержание этих двух этапов составляет дискретизацию задачи.

3. Производится решение алгебраических уравнений, входящих в схему. При этом в качестве приближенного решения дифференциальной

задачи принимается решение соответствующей разностной задачи – сеточная функция в виде одно- или многомерной таблицы.

Прокомментируем этапы дискретизации дифференциальной задачи.

Выбор сетки. Вопрос выбора сетки является весьма непростым, особенно для расчета течения в лопаточных машинах [24]. Суть в том, что топология сетки должна удовлетворять противоречивым условиям: адаптивность к искривленной поверхности лопаток, высокая степень ортогональности, равномерность. Плохое удовлетворением этим условиям неизбежно приводит к ошибкам (нарушение консервативности схемы по полным параметрам) и плохой сходимости задачи или даже к невозможности проведения расчета.

Существует два общепринятых подхода создания структурированных сеток, т. е. таких, которые позволяют записать в регулярный массив данных типа (i, j, k) так, что соседние ячейки имеют номера, отличающиеся не более чем на единицу. Это сетка типа «Н» и «О» (рис. 4.1).

Сетка «Н» типа, обладая такими достоинствами, как простота и отсутствие необходимости задания граничных условий периодичности на криволинейных поверхностях внутри межлопаточного канала, имеет непреодолимые недостатки при описании геометрии лопатки вблизи входной и, особенно, выходной кромок. Здесь сетка существенно неортогональна и попытки более точно описать кромки приводит к излишнему загущению ячеек поперек всего межлопаточного канала и при малых углах выхода делает проведение расчета невозможным из-за искажения сеточных линий.

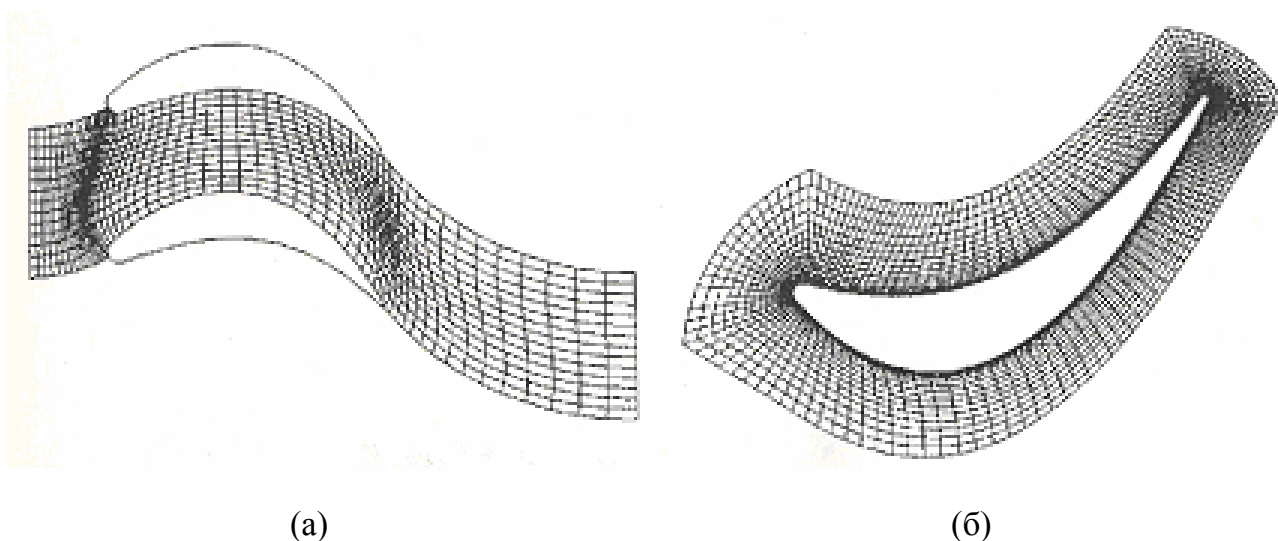


Рис. 4.1. Типы сеток: а – сетка «Н» типа; б – сетка «О» типа

Использование сеток «О» типа отражает иной подход к созданию сетки. При этом для описания геометрии всего канала невозможно обойтись одной сеточной подобластью «О» типа – необходимо дополнительно использовать сетки «Н» типа для входной и выходной подобластей течения. Таким образом, вся расчетная область описывается тремя массивами структурированных сеток, называемых «Н–О–Н» сеткой.

Сетка «Н–О–Н» типа имеет более высокую степень ортогональности и равномерности ячеек вдоль профиля и более высокую точность описания профиля по сравнению с единой сеткой «Н» типа. Но сетки «Н–О–Н» более сложны в построении, возникает необходимость задания граничных условий периодичности и реализации механизма склейки сеточных подобластей. На границе сшивки решение терпит разрыв и конечно – разностная схема теряет консервативность. Однако имеющийся опыт показывает, что если тангенциальная составляющая скорости в осевом зазоре меньше скорости звука, то ошибка сшивки незначительно влияет на точность расчета.

Применяется подход с перекрывающимися сетками «О» и «Н» типа. Это упрощает процесс построения сетки, поскольку не требуется выполнять стыковку «О» и «Н» сеток узел в узел.

Кроме выбора типа сетки, существует проблема определения количества узлов, необходимого для достоверного анализа течения в конкретной геометрии. При этом разнообразие геометрии объекта затрудняет использование опыта других исследователей.

Отметим, что методика построения адаптивных структурированных сеток для геометрии различного уровня сложности хорошо описана в монографии [25].

Аппроксимация дифференциальных уравнений. Характерной особенностью аппроксимации дифференциальных выражений является ее многовариантность. Так, для аппроксимации производной $\frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ в некотором узле $x_m = m \Delta x$ равномерной разностной сетки могут быть выбраны в соответствии с выбранным шаблоном (рис. 4.2), например, следующие выражения

$$\frac{u_m - u_{m-1}}{\Delta x},$$

разность
назад

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta x},$$

разность
вперед

$$\frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2\Delta x},$$

центральная
разность

где u_m – значение сеточной функции в узле x_m .

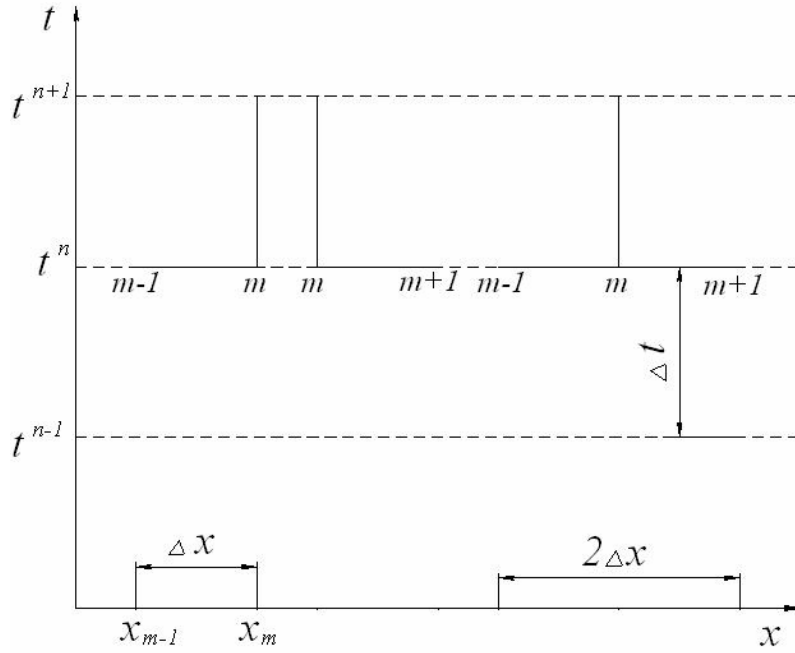


Рис. 4.2. Различные шаблоны аппроксимации

Обратим внимание, что, как можно заметить, на рис. 4.2 линии, соответствующие различным моментам времени, располагаются послойно над осью пространственной координаты. Поэтому часто моменты времени называют временными слоями.

В соответствии с этими шаблонами будут разнообразные по виду и конечно – разностные аналоги дифференциальных уравнений. Например, для дифференциальных уравнений (А) и (В) (раздел 3.2). Будем иметь

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x} = f_m^n; \quad (4.1)$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{\Delta x} = f_m^n; \quad (4.2)$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2\Delta x} = f_m^n; \quad (4.3)$$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + a_m^n \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x} - \nu \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{\Delta x^2} = f_m^n \quad (4.4)$$

и т. д.

Очевидно, количество разновидностей аппроксимирующих соотношений легко увеличить, используя хотя бы иные варианты аппроксимации

производной $\frac{du}{dx}$, например $s \frac{u_m - u_{m-1}}{\Delta x} + (1-s) \frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta x}$, где s – весовой коэффициент ($0 \leq s \leq 1$).

Кроме того, пространственные производные можно было бы отнести не к нижнему временному слою t^n , а к верхнему t^{n+1} или к некоторому промежуточному, вводя весовые коэффициенты, например,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx s \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x} + (1-s) \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{\Delta x}.$$

4.2. ПРОВЕРКА ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Основным элементом проверки является анализ разностной схемы. Необходимость такой проверки вытекает хотя бы из отмеченного многообразия видов аппроксимирующих соотношений для дифференциальных выражений.

В рамках этого анализа производится проверка аппроксимации, т. е. оценка ее погрешности, и, в конечном счете, оценка сходимости приближенного результата решения конечно-разностного аналога к точному решению. Проверяется также устойчивость вычислений на основании конечно – разностной схемы к различным возмущениям (неточностям задания граничных условий, погрешностям счета и т. д.).

Однако здесь следует пояснить понятие точного решения, используемого для сравнения с результатом решения конечно – разностной задачи. Дело в том, что конечно – разностное решение определяется на дискретном множестве точек и дает дискретный результат в виде сеточной функции $u^{(h)}$ (h – шаг сетки – совокупность пространственно – временных шагов), в то время как точное решение $U(x, t)$ определяется на непрерывном множестве точек. Поэтому приходится вводить сеточный аналог точного решения в виде функции $U^{(h)} = U(x_m, t^n) = U_m^n$, которая и используется для сравнения с приближенным решением. При этом правила введения $U^{(h)}$ зависят от особенностей функции U . Для непрерывной функции U функцию $U^{(h)}$ определяют как таблицу значений U в узлах сетки («проекция» U на сетку), а для разрывной U как таблицу среднеинтегральных U в окрестностях каждого узла. Именно $U^{(h)}$ и рассматрива-

ется как искомое точное решение – «эталонная таблица», – с которым сравнивается решение $u^{(h)}$ конечно-разностной задачи.

Исследование аппроксимации. В разностную схему подставляют точное решение $U^{(h)}$ и в результате получают невязку между приближенным и точным решением. Если невязка стремится к нулю при стремлении к нулю шага сетки ($h \rightarrow 0$), будучи при этом величиной порядка h^k , то схему называют аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу с порядком k относительно шага h .

О порядке аппроксимации уравнения представляется возможным судить по погрешностям ограничения для производных, которые были рассмотрены в разделе 2.2. Но можно провести исследование и в более общем виде [26].

Обратимся к уравнению (A)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = F(x, t) \quad (4.5)$$

и воспользуемся его аппроксимацией с разностью вперед по пространственной координате (4.2).

Для сравнения конечно-разностного решения u_m^n с точным $U(x_m, t^n) = U_m^n$ положим

$$u_m^n = U_m^n + \delta u_m^n,$$

где δu_m^n характеризует невязку сравниваемых решений в узле (m, n) .

Подставим это выражение в формулу (4.2). Тогда получим

$$\frac{U_{m+1}^{n+1} + \delta u_{m+1}^{n+1} - U_m^n - \delta u_m^n}{\Delta t} + a \frac{U_{m+1}^n + \delta u_{m+1}^n - U_m^n - \delta u_m^n}{\Delta x} = f_m^n$$

или

$$\frac{\delta u_m^{n+1} - \delta u_m^n}{\Delta t} + a \frac{\delta u_{m+1}^n - \delta u_m^n}{\Delta x} = f_m^n - \left(\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + a \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{\Delta x} \right). \quad (4.6)$$

Оценим правую часть этого выражения, воспользовавшись рядом Тейлора, в который разложим функции U_m^n и U_{m+1}^n в окрестности узла (m, n) независимо для переменных t и x соответственно:

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \Delta t \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_m^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_m^n + \dots,$$

$$U_{m+1}^n = U_m^n + \Delta x \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_m^n + \dots$$

Отсюда, ограничиваясь первыми двумя слагаемыми разложения и деля на соответствующие шаг сетки, получаем

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_m^n + O(\Delta t); \quad \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{\Delta x} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + O(\Delta x),$$

где $O(\Delta t)$, $O(\Delta x)$ – остаточные члены – погрешности ограничения (первого порядка относительно Δt и Δx соответственно).

Таким образом, для правой части уравнения (4.6) справедливо

$$\begin{aligned} f_m^n - \left(\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + a \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{\Delta x} \right) &= \\ &= f_m^n - \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_m^n + O(\Delta t) + a \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + a O(\Delta x) \right] = \\ &= f_m^n - \left(\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + O(\Delta t, \Delta x). \end{aligned}$$

Но согласно исходному уравнению (A) $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = F(x, t)$ и соответственно $F(x_m, t) = f_m^n$, поэтому $\left(\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n = f_m^n$ и, следовательно,

$$f_m^n - \left(\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} \right)_m^n + O(\Delta t, \Delta x) = O(\Delta t, \Delta x), \text{ так что}$$

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\Delta t} + a \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{\Delta x} = f_m^n + O(\Delta t, \Delta x). \quad (4.7)$$

Сравнивая это выражение с уравнением (4.2), заключаем, что решение исходной дифференциальной задачи $U(x, t)$ удовлетворяет конечно-разностному уравнению (4.2) с погрешностью $O(\Delta t, \Delta x)$, причем эта погрешность стремится к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta x \rightarrow 0$.

Сходимость. Чтобы утверждать о существовании сходимости конечно-разностного решения к решению исходной дифференциальной задачи, необходимо убедиться в том, что невязка остается приемлемой во всей области решения.

Проиллюстрируем этот вопрос на примере решения уравнения (4.5) с аппроксимацией пространственной производной разностью вперед [26]. Выражение (4.7) подставим в уравнение (4.6), в результате получим уравнение для определения δu :

$$\frac{\delta u_m^{n+1} - \delta u_m^n}{\Delta t} + a \frac{\delta u_{m+1}^n - \delta u_m^n}{\Delta x} = f_m^n - f_m^n + O(\Delta t, \Delta x),$$

откуда

$$\delta u_m^{n+1} = \left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \delta u_m^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \delta u_{m+1}^n + \Delta t O(\Delta t, \Delta x). \quad (4.8)$$

Рассмотрим условие

$$0 \leq -a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (4.9)$$

В этом случае коэффициенты при δu_m^n и δu_{m+1}^n в правой части уравнения (4.8) положительны и можно записать

$$|\delta u_m^{n+1}| \leq \left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) |\delta u_m^n| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} |\delta u_{m+1}^n| + \Delta t O(\Delta t, \Delta x).$$

Здесь знак $<$ обусловлен тем, что при переходе к модулю слагаемых в правой части ее величина (сумма) в случае различия в знаках δu_m^n и δu_{m+1}^n или их отрицательных значений увеличится.

Иначе,

$$|\delta u_m^{n+1}| \leq \max(|\delta u_m^n|, |\delta u_{m+1}^n|) + \Delta t O(\Delta t, \Delta x).$$

Здесь при $a \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0$ имеем $|\delta u_m^{n+1}| \leq |\delta u_m^n|$; при $-a \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$ получаем $|\delta u_m^{n+1}| \leq |\delta u_{m+1}^n|$.

Введем обозначение $\|\delta u^n\| = \max |\delta u_m^n|$, тогда в соответствии с предыдущим неравенством можно записать

$$\|\delta u^{n+1}\| \leq \|\delta u^n\| + \Delta t O(\Delta t, \Delta x).$$

Последнее означает, что максимальное отклонение δu за один шаг Δt увеличивается не более чем на $\Delta t O(\Delta t, \Delta x)$. Соответственно за N шагов это будет

$$\|\delta u^N\| \leq \|\delta u^O\| + N\Delta t O(\Delta t, \Delta x).$$

Отсюда следует, что поскольку $\delta u_m^O = F_m - f_m = 0$, то $\|\delta u(t)\| = tO(\Delta t, \Delta x)$, где $t = \Delta t N$ фиксировано.

Этот результат показывает, что при устремлении $\Delta t, \Delta x$ к нулю в случае выполнения условия (4.9) решение разностной задачи (4.2) сходится к решению исходной дифференциальной задачи (А), (4.5).

Подобные рассмотренным рассуждения для случая, когда хотя бы одно из условий (4.9) нарушено, показывают, что тогда сходимости, вообще говоря, нет [26]. На этом основании приходим к выводу, что хотя разностная задача (4.2) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу (А), (4.5) вне зависимости от того выполнены или нет условия (4.9), но оказывается, что одной лишь аппроксимации недостаточно для сходимости u_m^n к точному решению $U(x, t)_m^n$. Дополнительными условиями, обеспечивающими сходимость, являются в данной задаче условия (4.9). Невыполнение их может привести к любому отклонению u_m^n от $U(x, t)_m^n$, т. е. к потере устойчивости вычислений.

Однако нельзя не обратить внимание на то, что условие (4.9) требует $a < 0$, что противоречит физическим предпосылкам вывода уравнения Навье – Стокса, моделью которого является уравнение (А), (4.5). Это обусловлено тем, что рассмотренное конечно-разностное уравнение (4.2) аппроксимирует пространственную производную разностью вперед. Как было выяснено в разделе 3.3, использование такой аппроксимации ведет к возникновению отрицательной схемной вязкости, что противоречит физическому явлению вязкости и, следовательно, равносильно потере устойчивости вычислений.

Таким образом, сходимость, т. е. стремление отклонения $\delta u_m^n = u_m^n - U_m^n$ к нулю, будет иметь место, если, во-первых, выбором шагов $\Delta t, \Delta x$ величина погрешности $O(\Delta t, \Delta x)$ может быть сделана сколь угодно малой, во-вторых, эта малость сохранится для решения уравнения (4.2).

Первое условие может быть обеспечено аппроксимацией. Подчеркнем, что проверка аппроксимации даже для сложных задач не вызывает затруднений. Более того, как следует из рассмотренных примеров, для оценки аппроксимации не обязательно располагать знанием точного решения – проблема решается разложением в ряд Тейлора непрерывной функции в окрестности какой – либо точки в области решения. При этом

порядком аппроксимации можно управлять. Так, использование разности назад или разности вперед дает первый порядок, а использование центральных разностей $(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)/2\Delta x$ дает, как нетрудно показать, невязку второго порядка по пространственной координате.

Второе условие по существу означает наличие сходимости. Однако, проверка сходимости, как правило, оказывается невозможной, хотя бы потому, что неизвестна функция U . Поэтому установление сходимости проводят через проверку аппроксимации и анализ устойчивости схемы.

Устойчивость. При исследовании устойчивости большую роль играет специфика задачи. Прямая оценка решения в этом смысле удастся редко. Для широкого класса задач более перспективным оказывается способ проверки устойчивости с помощью частных решений. Применим его для уравнения (4.2) [26].

Обратимся к формуле (4.8), которая описывает процесс эволюции ошибки при переходе от слоя к слою по времени.

Наличие в правой части этой формулы члена $\Delta t O(\Delta t, \Delta x)$ указывает на то, что порядок ошибки не меньше этой величины. Сама ошибка δu_m^n есть некоторая сложная функция от индекса m . Допустим, что ее можно представить в виде суммы, одно из слагаемых которой имеет вид $\varepsilon(-1)^m$, где множитель ε имеет порядок $\Delta t O(\Delta t, \Delta x)$, а множитель $(-1)^m$ «уравновешивает» влияние четных и нечетных узлов.

Проследим за развитием только этой компоненты ошибки, т. е. положим $\delta u_m^n = \varepsilon(-1)^m$ и найдем δu_m^{n+1} , δu_m^{n+2} , При этом, несколько идеализируя задачу, не будем учитывать вклад, даваемый членом $\Delta t O(\Delta t, \Delta x)$ на следующих шагах. Тогда согласно (4.8)

$$\begin{aligned}\delta u_m^{n+1} &= \left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \varepsilon(-1)^m - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \varepsilon(-1)^{m+1} = \\ &= \left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \varepsilon(-1)^m - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \varepsilon(-1)^m \cdot (-1) = \left(1 + 2a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \varepsilon(-1)^m,\end{aligned}$$

откуда следует, что функция вида $\delta_m^n = \varepsilon(-1)^m$ переходит на следующем временном слое в себя, приобретая множитель $\left(1 + 2a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$. Очевидно,

через N слоев она приобретет множитель $\left(1 + 2a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^N$, т. е.

$$\delta u_m^{n+N} = \left(1 + 2a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^N \varepsilon (-1)^m \quad (4.10)$$

и, следовательно, развитие рассматриваемой компоненты ошибки определяется величиной $1 + 2a \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Если $\left|1 + 2a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right| < 1$, то ошибка затухает, в противном случае нарастает экспоненциально.

Последнее приводит к тому, что решение u_m^n , содержащее ошибку, довольно быстро теряет какой-либо смысл, становясь хаотической последовательностью очень больших чисел. Малость ε не спасает положения и может лишь несколько оттянуть наступление катастрофы. Этот эффект и называется неустойчивостью.

Легко убедиться, что условие $\left|1 + 2a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right| < 1$ есть рассмотренное выше условие (4.9): $0 \leq -a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Действительно, если $1 + 2a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$, то вычтя 1 из левой и правой части этого неравенства, получим $2a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 0$ или $a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 0$, т. е. $-a \frac{\Delta t}{\Delta x} > 0$. Если $-1 - 2a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$ (внутренность модуля может иметь любой знак), то прибавляя 1, получим $-2a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 2$ или $a \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$.

Этот результат означает, что отсутствие сходимости и неустойчивость имеют одну и ту же причину.

Используя выражение (4.10) для конечного отрезка времени $t = N\Delta t$, получим, что в случае нарушения условия (4.9), т. е. условия $\left|1 + 2a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right| < 1$, будет иметь место

$$|\delta u_m^{n+1}| = \left|1 + 2a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right|^{t/\Delta t} \Delta t O(\Delta t, \Delta x) \rightarrow \infty$$

при $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$.

Расчет по неустойчивой схеме не только не дает решения, близкого к точному, но вообще невозможен. При этом уменьшение $\Delta t, \Delta x$ лишь ухудшает положение.

Для нелинейных задач пока отсутствуют общие способы исследования устойчивости. Априорную оценку устойчивости реальных нелинейных задач вынужденно заменяют подобной оценкой для линейных аналогов линейных задач. Достоверное определение границ устойчивости возможно в этих случаях только в результате численных экспериментов. При этом косвенным показателем устойчивости может служить характер изменения энтропии системы, которая должна расти под влиянием положительной схемной вязкости.

Для линейных разностных задач наиболее распространен спектральный метод оценки устойчивости [23]. Об устойчивости схемы судят по поведению решений специального вида – периодических по пространственным переменным сеточных функций, так называемых гармоник. Существуют и другие методы. Их краткий обзор содержится в монографии [27].

4.3. ЯВНЫЕ И НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ.

МЕТОД ПРОГОНКИ. МЕТОД УСТАНОВЛЕНИЯ

Обратимся к уравнению (4.4), аппроксимирующему модельное уравнение вязкого течения (В) (раздел 3.2) с использованием разности назад для первой пространственной производной. Уравнение (4.4) является явным, поскольку позволяет выразить функцию u_m^{n+1} для временного слоя $n + 1$ через значения функций на предыдущем временном слое n , для которого значения всех функций известны,

$$u_m^{n+1} = u_m^n - a_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_m^n - u_{m-1}^n) + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) + \Delta t f_m^n.$$

Здесь явность обусловлена тем, что пространственные производные отнесены к n -му временному слою. Но ведь их можно отнести к $(n + 1)$ -му временному слою и записать (вместо (4.4)) неявное уравнение

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} + a_m^n \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{\Delta x} - \nu \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = f_m^n.$$

Неявность здесь обусловлена наличием трех неизвестных u_m^{n+1} , u_{m-1}^{n+1} , u_{m+1}^{n+1} . Соответствующие шаблоны изображены на рис. 4.3. Из последнего выражения находим

$$u_m^{n+1} + a_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x} u_m^{n+1} - a_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{m-1}^{n+1} - v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_{m-1}^{n+1} + \\ + 2v \frac{\Delta t}{\Delta x^2} u_m^{n+1} - \frac{v \Delta t}{\Delta x^2} u_{m+1}^{n+1} = u_m^n + \Delta t f_m^n,$$

или

$$a_m = b_m u_{m-1}^{n+1} + c_m u_m^{n+1} + d_m u_{m+1}^{n+1}, \quad (4.11)$$

где

$$a_m = u_m^n + \Delta t f_m^n; \quad b_m = -a_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x} - v \frac{\Delta t}{\Delta x^2}; \\ c_m = 1 + a_m^n \frac{\Delta t}{\Delta x} + 2v \frac{\Delta t}{\Delta x^2}; \quad d_m = -v \frac{\Delta t}{\Delta x^2}.$$

Специфика системы (4.11) заключается в том, что каждое m -е уравнение содержит только три неизвестных: u_{m-1}^{n+1} , u_m^{n+1} , u_{m+1}^{n+1} (параметры с верхним индексом n известны из решения предыдущего уравнения или в самом начале процедуры – из начальных условий). Это дает возможность провести последовательное исключение u_0 , u_1 , u_2 , ... следующим простым способом – *методом прогонки*.

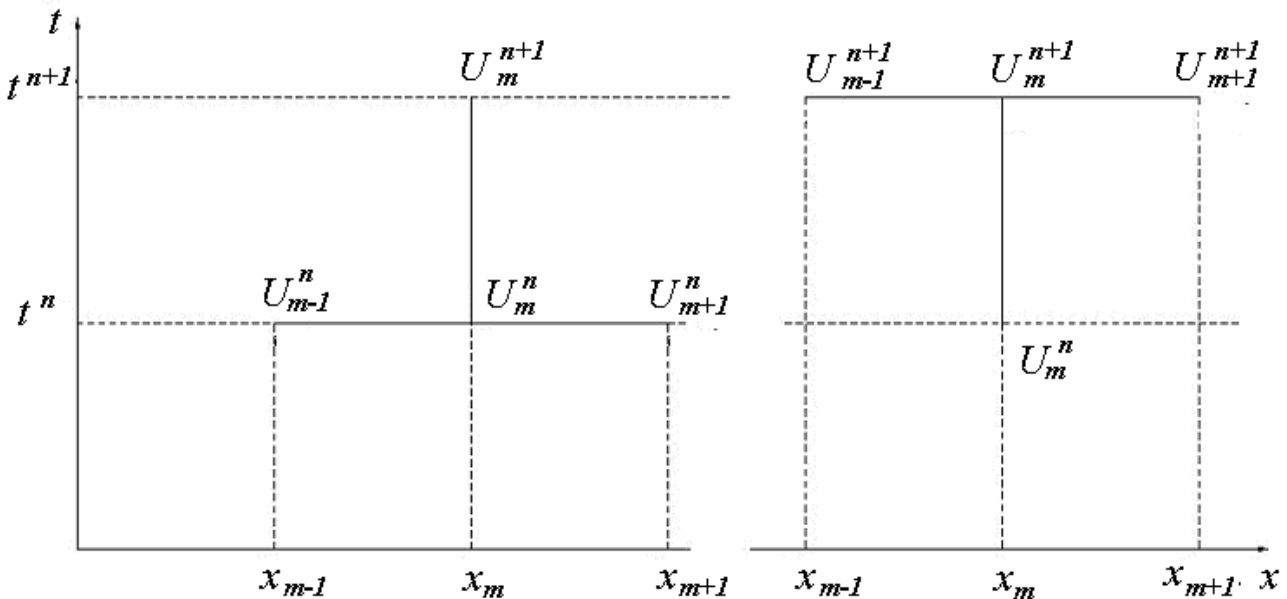


Рис. 4.3. Шаблоны явной (а) и неявной (б) схем

Значение u_0^{n+1} задано (начальное условие), поэтому уравнение, соответствующее $m = 1$ содержит фактически лишь два неизвестных: u_1^{n+1} и u_2^{n+1} , т. е. дает соотношение между ними. С помощью этого соотношения, используя следующее уравнение ($m = 2$), исключаем u_1^{n+1} и получаем соотношение между u_2^{n+1} и u_3^{n+1} и т. д.

Пусть соотношение между u_{m+1}^{n+1} и u_m^{n+1} известно и имеет вид (теперь верхний индекс $n + 1$ опускается)

$$u_m = \delta_m u_{m+1} + \lambda_m. \quad (4.12)$$

Это означает, что трехточечное уравнение (2-го порядка) (4.11) преобразуется в двухточечное (1-го порядка) (4.12).

Здесь полезно привести некоторые определения [20].

Уравнения вида (4.11) называются трехточечными разностными уравнениями второго порядка. Система (4.11) имеет трехдиагональную структуру, что хорошо видно из следующего, эквивалентного (4.11) векторно-матричного представления

$$\begin{vmatrix} c_1 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & c_2 & d_2 & 0 & & & & \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m-1} & c_{m-1} & d_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_m & c_m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{m-1} \\ u_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{vmatrix}$$

В (4.12) уменьшим индекс на 1. Получим

$$u_{m-1} = \delta_{m-1} u_m + \lambda_{m-1}.$$

Последнее подставим в (4.11). Тогда

$$a_m = b_m \delta_{m-1} u_m + b_m \lambda_{m-1} + c_m u_m + d_m u_{m+1},$$

откуда

$$u_m = -\frac{d_m}{c_m + b_m \delta_{m-1}} u_{m+1} + \frac{a_m - b_m \lambda_{m-1}}{c_m + b_m \delta_{m-1}}.$$

Последнее имеет вид выражения (4.12) и будет с ним совпадать, если для всех m выполняются рекуррентные соотношения

$$\delta_m = -\frac{d_m}{c_m + b_m \delta_{m-1}}; \quad \lambda_m = \frac{a_m - b_m \lambda_{m-1}}{c_m + b_m \delta_{m-1}}. \quad (4.13)$$

Формулы (4.13) позволяют перейти от δ_{m-1} и λ_{m-1} к δ_m и λ_m при любых m .

Согласно (4.13) при $m = 1$ имеем $u = u_0 = \delta_0 u_1 + \lambda_0$, поэтому следует принять $\delta_0 = 0$ и $\lambda_0 = u_0$, тогда $\delta_1 = -\frac{d_1}{c_1}$; $\lambda_1 = \frac{a_1}{c_1}$. Учтено, что

$b_1 = 0$ поскольку отвечает уравнению с граничным условием $u = u_0$, которое должно быть исключено в полном соответствии с матричным представлением системы.

После вычисления δ_1 и λ_1 расчет должен быть продолжен по формулам (4.13) последовательно при $m = 1, 2, 3, \dots, M$, причем при $m = M$ в силу $d_M = 0$ (граничное условие u_{M+1} – см. матричное представление системы). Поэтому $\delta_M = 0$ и согласно (4.12), (4.13)

$$u_M = \lambda_M = \frac{a_M - b_M \lambda_{M-1}}{c_M - b_M \delta_{M-1}},$$

где λ_{M-1} , δ_{M-1} известны из предыдущего шага вычислений. Это прямая прогонка.

Далее по формулам (4.12) последовательно вычисляются u_{M-1} , u_{M-2} , ..., u_1 при $m = M-1, M-2, \dots, 1$ соответственно. Это обратная прогонка.

Заметим, что если в каждом узле x_m определяется одно значение u_m , то прогонку называют скалярной. Если величины u_m , a_m , b_m , c_m , d_m обозначают матрицы той или иной размерности, то аналогичные по смыслу операции называют матричной прогонкой (применяется при решении многомерных задач).

Важнейшим свойством неявных схем является их безусловная устойчивость. В этом смысл их применения. На безусловность устойчивости неявных схем указывает спектральный признак [23]. Но для некоторых задач это может быть доказано непосредственно [26]. При этом одновременно выясняется, что неявные схемы обеспечивают выполнение условия Куранта – Фридрикса – Леви (условие устойчивости КФЛ), требующего, чтобы область зависимости решения разностной задачи (т. е. совокупность узлов, содержащих величины, определяющие решение в данной точке) включала в себя область зависимости решения дифференциальной задачи.

Высокая устойчивость неявных схем достигается, благодаря связыванию между собой нескольких неизвестных, т. е. ценой алгебраического усложнения задачи, особенно существенного для многомерных и нелинейных задач. В последнем случае решение разностных уравнений, как правило, проводится методом итераций. Однако, даже решение линейных задач (или ставших таковыми на данной итерации) многомерных сеточных уравнений требует большого числа арифметических действий. Здесь применяют различные варианты метода прогонки или используют приемы, приближенно сводящие многомерную задачу к набору одномерных задач.

Вместе с тем, неявные абсолютно устойчивые разностные схемы строятся для задач, связанных с интегрированием эволюционных уравнений, т. е. уравнений, описывающих эволюцию во времени некоторого начального состояния. Однако и для решения задач в стационарной постановке обычно предпочитают пользоваться аппаратом, развитым для нестационарных задач с применением неявных схем. Для этого к стационарным уравнениям добавляют производные по времени от искомых величин, переводя задачу в класс гиперболических или параболических задач. Стационарное поле величин получается как предел, к которому стремятся при больших t решение нестационарной задачи.

Такой подход, являющийся по существу итерационным, называется *методом установления*.

Конструирование схем установления предполагает большую свободу действия в обращении с производными по времени, чем при решении собственно нестационарных задач, поскольку при установлении временные члены обратятся в нуль. Величина шага Δt (и соответственно числа Куранта) определяется уже не точностью расчета временных зависимостей, а только быстротой сходимости к стационарному решению.

5. ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Большинство связанных с течением жидкости задач, с которыми приходится встречаться при проектировании или анализе рабочего процесса технических устройств типа газотурбинных двигателей и энергети-

ческих установок, являются задачами турбулентного движения потока жидкости или газа. Соответственно и большинство разработанных численных методов решения задач аэродинамики и газодинамики предполагают турбулентный характер течения [28].

Всем хорошо известно различие между ламинарным режимом течения и турбулентным режимом. Но природа турбулентности остается загадкой. Однако это не означает безнадежности на пути решения задач турбулентного течения. Ведь решаются же задачи движения тел в полях гравитационных сил, хотя природа гравитации остается нераскрытой. В связи с этим приведем формулировку Хинце [28]: «Турбулентное течение жидкости есть форма нерегулярного ее движения, в котором параметры потока изменяются случайным образом во времени и пространстве вокруг некоторых своих средних значений».

Согласно этой формулировке истинные параметры течения в турбулентном потоке определяются суммами:

– для проекций скоростей в виде

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = \bar{v} + v'; \quad w = \bar{w} + w';$$

– для давления, температуры и плотности в виде

$$p = \bar{p} + p'; \quad T = \bar{T} + T'; \quad \rho = \bar{\rho} + \rho',$$

где надчерком отмечены осредненные параметры, а штрихом – пульсационные составляющие этих параметров.

Под осредненными параметрами понимаются параметры, найденные осреднением во времени в данной точке пространства.

Например,

$$\bar{u} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u \, dt; \quad \bar{p} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p \, dt.$$

Минимальная величина интервала осреднения $t_2 - t_1$ должна быть такой, чтобы при увеличении этого интервала значение осредненной величины не изменялось.

При описании турбулентности осредняются и сами пульсации в виде так называемых среднеквадратичных значений. Например,

$$\bar{u}' = \sqrt{\overline{(u')^2}} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (u')^2 \, dt}.$$

Для характеристики турбулентности потока в целом используют понятие степени турбулентности, под которой понимают

$$T_u = \varepsilon = \frac{1}{\bar{w}} \sqrt{\frac{1}{3} [(\bar{u}')^2 + (\bar{v}')^2 + (\bar{w}')^2]}.$$

При $(\bar{u}')^2 = (\bar{v}')^2 = (\bar{w}')^2$ турбулентность называется изотропной.

Уравнения движения жидкости по истинным параметрам известны. На их основании и осуществляется переход к уравнениям для турбулентного течения.

5.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Эти уравнения базируются на втором законе механики Ньютона (вытекающем из закона сохранения импульса), который в проекции на ось x (система координат изображена на рис. 2.3) имеет вид

$$dR_x = dm \frac{du}{dt},$$

где R_x — сила, действующая вдоль оси x ; $dm = \rho dV$ — масса в элементарном объеме $dV = dxdydz$.

Сила складывается из проекций массовой силы $j_x \rho dV$, силы нормального напряжения вдоль оси x $d\sigma_x dydz = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dxdydz$, где $dydz$ — площадка к которой приложены нормальные напряжения, и силы касательных напряжений, действующих на боковых гранях выделенного объема в направлении оси x $d\tau_{yx} dx dz = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dxdydz$ — со стороны левой и правой граней; $d\tau_{zx} dxdy = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dxdydz$ — со стороны верхней и нижней граней, где первый индекс при касательных напряжениях τ указывает на ось, перпендикулярную рассматриваемой грани, а второй — на ось, совпадающую с направлением напряжения, причем в силу равновесия выделенного элементарного объема жидкости имеет место $\tau_{yx} = \tau_{xy}$; $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, а также $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

Суммируя эти силы, приходим к уравнению

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho j_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z},$$

где $\frac{du}{dt}$ – полная производная проекции скорости на ось x (ее расшифровка дана в разделе 2.1).

Выразив аналогичным образом проекции скоростей и сил на другие оси координат, получим систему уравнений в виде (в пренебрежении массовыми силами)

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}; \\ \rho \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}; \\ \rho \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

которая носит название уравнений движения вязкой жидкости в напряжениях.

Напряжения могут быть выражены через параметры потока жидкости. Для касательных напряжений используется гипотеза Ньютона $\tau = \mu \frac{dW}{dy}$, где $\mu = \rho \nu$ – динамическая вязкость, которая для пространственного течения обобщается в виде [23]

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \\ \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Нормальные напряжения возникают вследствие давления жидкости на выделенную частицу и за счет линейной деформации элемента жидкости под действием касательных напряжений, т. е. $\sigma_x = -p + \sigma'_x$; $\sigma_y = -p + \sigma'_y$; $\sigma_z = -p + \sigma'_z$, где напряжения, отмеченные штрихом, обусловлены силами вязкости.

Математические выражения для дополнительных нормальных напряжений σ' устанавливаются рассмотрением связи напряженного состояния элемента с общей картиной скоростей деформации этого элемента.

В результате приходят к уравнению Навье – Стокса [23], общий вид которого приведен в разделе 3.1. Здесь запишем это уравнение в проекци-

ях на оси координат в допущении отсутствия массовых сил и несжимаемости жидкости ($\text{div} \vec{W} = 0$).

Имеем

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u; \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v; \\ \rho \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Если истинные скорости выразить через средние и пульсационные составляющие, то получатся уравнения для турбулентного течения по осредненным параметрам.

5.2. УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА. ТУРБУЛЕНТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Если при преобразовании уравнения Навье – Стокса используются параметры, осредненные по времени, то говорят, что осреднение выполняется «по Рейнольдсу», а получаемые в итоге уравнения называют уравнениями Рейнольдса.

Алгебра такого осреднения такова [28], что осредненные произведения пульсационных составляющих не равны нулю. Это значит, что при записи квадратичных величин будут появляться наряду с их осредненными значениями еще и неравные нулю осредненные комбинации пульсационных составляющих. Поэтому в силу наличия в уравнениях Навье – Стокса квадратичных членов, для осредненных параметров они получают вид (для несжимаемой жидкости при отсутствии массовых сил):

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{d\bar{u}}{dt} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla^2 \bar{u} - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right); \\ \rho \frac{d\bar{v}}{dt} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla^2 \bar{v} - \rho \left(\frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right); \\ \rho \frac{d\bar{w}}{dt} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla^2 \bar{w} - \rho \left(\frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Эти уравнения называются уравнениями Рейнольдса и в случае $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ описывают квазиустановившееся движение турбулентного потока.

Сопоставляя уравнения Рейнольдса (5.3) с уравнениями Навье – Стокса (5.2) убеждаемся в появлении дополнительных слагаемых, а сопоставляя их с уравнениями движения в напряжениях (5.1), приходим к выводу, что эти дополнительные слагаемые есть производные дополнительных напряжений, так что можно составить матричное равенство

$$-\begin{vmatrix} \overline{\rho u'^2} & \overline{\rho u'v'} & \overline{\rho u'w'} \\ \overline{\rho v'u'} & \overline{\rho v'^2} & \overline{\rho v'w'} \\ \overline{\rho w'u'} & \overline{\rho w'v'} & \overline{\rho w'^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{x_T} & \tau_{yx_T} & \tau_{zx_T} \\ \tau_{xy_T} & \sigma_{y_T} & \tau_{zy_T} \\ \tau_{xz_T} & \tau_{yz_T} & \sigma_{z_T} \end{vmatrix},$$

где $\sigma_{x_T} = -\overline{\rho u'^2}$, $\sigma_{y_T} = -\overline{\rho v'^2}$, $\sigma_{z_T} = -\overline{\rho w'^2}$ – нормальные дополнительные напряжения, обусловленные пульсационным движением; $\tau_{yx_T} = -\overline{\rho u'v'}$, $\tau_{zx_T} = -\overline{\rho u'w'}$, $\tau_{zy_T} = -\overline{\rho v'w'}$ – касательные дополнительные напряжения, причем, как и в случае обычных касательных напряжений $\tau_{yx_T} = \tau_{xy_T}$, $\tau_{zx_T} = \tau_{xz_T}$, $\tau_{zy_T} = \tau_{yz_T}$.

Следует отметить, что произведения пульсационных составляющих обычно отрицательны, поэтому дополнительные напряжения положительны и складываются с обычными (молекулярными) напряжениями. Это обусловлено свойством механизма взаимодействия пульсаций скорости.

Пусть профиль скорости таков, что $\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} > 0$ (рис. 5.1). Тогда частицы,

попадающие в данный слой снизу (от стенки), т. е. имеющие $v' > 0$, будут тормозить этот слой, что отвечает неравенству $u' < 0$. Напротив, частицы, попадающие в слой сверху ($v' < 0$), ускоряют его ($u' > 0$). Поэтому произведение $\overline{u'v'} < 0$.

Из этого примера также следует, что именно корреляция между разноименными пульсациями скорости вызывает появление дополнительных касательных напряжений.

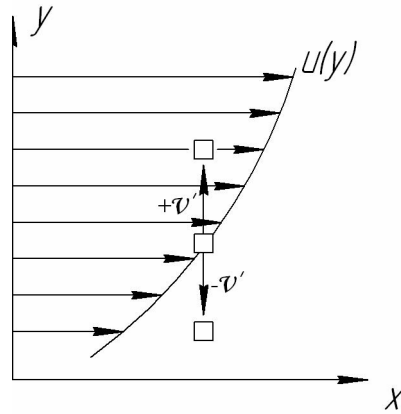


Рис. 5.1. Схема переноса импульса турбулентными пульсациями скорости

Указанные дополнительные напряжения (их также называют кажущимися турбулентными напряжениями, напряжениями смешения или рейнольдсовыми напряжениями) образуют шесть новых неизвестных, так что система уравнений, описывающая движение турбулентного потока и состоящая из уравнений Рейнольдса и уравнения неразрывности, оказывается незамкнутой. Для замыкания системы уравнений нужны дополнительные соотношения.

Еще в 1877 году Ж. Буссинеск выдвинул гипотезу, что турбулентное касательное напряжение определится соотношением

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'} = A_\tau \frac{d\bar{u}}{dy},$$

в котором вместо истинной скорости u надо использовать осредненную $\bar{u}$, а вместо коэффициента вязкости μ – коэффициент турбулентного обмена A_τ , который можно понимать как турбулентную (кажущуюся) вязкость μ_T . Если ввести понятие коэффициента кинематической турбулентной вязкости $\nu_T = \mu_T / \rho$, то можем записать $\tau_T = \rho \nu_T \frac{d\bar{u}}{dy}$. В этом случае

первое уравнение Рейнольдса (5.3) для двумерного течения несжимаемой жидкости в рамках приближения пограничного слоя

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \sigma_{x_T} = -\rho \overline{u'^2} = 0 \right)$$

в стационарных условиях примет вид

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right],$$

которое совместно с уравнением неразрывности $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$ образует замкнутую систему для определения $\bar{u}$ и $\bar{v}$.

Эта гипотеза может быть применена и для более сложных течений, описываемых уравнениями Рейнольдса. Такой подход является наиболее развитым аппаратом численных решений. В иностранной литературе он обозначается RANS (Reynolds Averaged Navier – Stokes).

Однако, очевидно, что выражения типа $\tau_T = \mu_T \frac{\partial u}{\partial y}$ могут реально сработать, если будет известна зависимость μ_T от определяющих факторов. Такого рода зависимости называют моделями турбулентной вязкости (или просто моделями турбулентности).

5.3. МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

Соотношение для турбулентной вязкости строится по аналогии с выражением для молекулярной вязкости, вытекающим из молекулярно – кинетической теории газов

$$\mu = c \rho V_M l_M,$$

где V_M – скорость хаотического движения молекул; l_M – длина свободного пробега молекул.

Для турбулентной вязкости записывают

$$\mu_T = \rho V_T l, \quad (5.4)$$

где V_T, l – характерные масштабы скорости и длины турбулентности соответственно, оценка которых и составляет проблему построения модели. Рассмотрим некоторые из известных предложений.

Модель Прандтля. Одна из наиболее успешных моделей была предложена Л. Прандтлем в 1925 году. Она имеет вид

$$\mu_T = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|,$$

где l – длина пути смешения, которую можно трактовать как расстояние в поперечном направлении, на котором турбулентные частицы еще сохраняют свой собственный импульс (по порядку величины равное длине свободного пробега жидких частиц до столкновения или смешения). Произведение $l \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|$ можно интерпретировать как характерную скорость турбулентности V_T , причем эта компонента скорости в направлении основного течения, y – поперечная координата. Величина l в этом произведении выполняет роль дифференциала по y (см. рис. 5.1), что вполне приемлемо ввиду малости l .

Эта модель предполагает, что для определения l используется та или иная формула. Предложено значительное количество формул для l [29]. Одной из первых была эмпирическая формула Прандтля

$$\frac{l}{\delta} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{\delta} \right)^4,$$

где δ – толщина пограничного слоя. Согласно этой формуле вблизи стенки $l = 0,4y$, а вблизи границы пограничного слоя $l = 0,14\delta$.

Такого рода модели называют алгебраическими. Очевидным недостатком алгебраической модели является то, что $\mu_T = 0$ всюду, где $\frac{du}{dy} = 0$.

Это означает, что μ_T будет нулем на центральной линии трубы, в областях перемешивания пристенной струи с основным потоком и т. п. То же относится и к турбулентному переносу тепла в этих условиях. Однако, измерения, да и здравый смысл, говорят, что μ_T , т. е. трение и теплоперенос не равны нулю, когда $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Этот недостаток представляется принципиальным и понуждает к поискам других выражений для μ_T .

$k - l$ модель Прандтля – Колмогорова. В сороковых годах XX века Л. Прандтль и А. Н. Колмогоров предложили считать, что в формуле для μ_T (5.4) скорость V_T пропорциональна корню квадратному из кинетической энергии турбулентности

$$\bar{k} = \frac{\overline{W'^2}}{2} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})$$

так что для турбулентной вязкости получается выражение (надчерк опускаем)

$$\mu_T = C_\mu \rho l \sqrt{k},$$

согласно которому μ_T уже не обращается в нуль, когда $\frac{du}{dy} = 0$. Здесь c_μ – «связка» Прандтля – Колмогорова.

Уравнение для k получают на основании уравнений Навье – Стокса. Однако результат обычно заменяют моделирующим уравнением. Для двумерного течения такое уравнение записывают в виде [28]

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{Pr_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \nu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{c_D k^{3/2}}{l},$$

где в левой части указано приращение k в жидком объеме; первое слагаемое правой части определяет скорость диффузии k ; второе слагаемое – скорость генерации k ; третье – скорость диссипации k ; $Pr_k = 1$; $c_D = 0,164$ (если l есть обычная длина пути смешения).

Это уравнение справедливо только для полностью развитых турбулентных течений, т. е. вдали демпфирующего влияния стенки. Оно решается совместно с системой уравнений в частных производных, описывающих рассматриваемое течение жидкости. Параметр l необходимо задавать алгебраической формулой. Такую модель называют моделью с одним уравнением.

Если для l используется обыкновенное дифференциальное уравнение, то модель называют моделью с одним уравнением и одним обыкновенным дифференциальным уравнением. Когда для масштаба длины l получают уравнение в частных производных, то говорят, что это модель с двумя уравнениями.

В принципе уравнение в частных производных непосредственно для l может быть получено. Но его трудно моделировать. Легче добиться успеха, решая уравнение переноса не для самого масштаба длины, а для параметра, связанного с l . В качестве такого параметра наиболее широко применяется скорость диссипации турбулентной энергии ε .

k – ε модель. Соотношение для ε легко получается из обычного определения скорости процесса в виде

$$\varepsilon = c \frac{k}{t},$$

где t – время диссипации, которое можно определить как время, необходимое для прохождения длины l , т. е.

$$t = \frac{l}{\sqrt{k}}.$$

Тогда для скорости диссипации получаем

$$\varepsilon = ck^{3/2}/l.$$

К этому выражению можно также прийти на основании анализа размерностей [30]. При этом механизм диссипации трактуется следующим образом: от пульсаций с большими масштабами (вдали от стенки) энергия турбулентности переходит в пульсации с малыми масштабами, практически не диссипируясь при этом, но, попав в область мелкомасштабных пульсаций (вблизи стенки), этот поток энергии диссипируется (кинетическая энергия переходит в тепло).

Для турбулентной вязкости имеем

$$\mu_T = C_\mu \rho l \sqrt{k}, \text{ но } l = k^{3/2}/\varepsilon \text{ поэтому}$$

$$\mu_T = C_\mu \rho k^2/\varepsilon, \quad C_\mu = 0,09.$$

Для замыкания системы уравнений необходимо добавить уравнение переноса для ε . Оно может быть записано в виде [28]

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{Pr_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \frac{c_2 \nu_T \varepsilon}{k} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{c_3 \varepsilon^2}{k},$$

где $Pr_\varepsilon = 1,3$; $c_2 = 1,44$; $c_3 = 1,92$.

Получилась модель с двумя уравнениями (для k и для ε). Это так называемая $(k - \varepsilon)$ модель. Она была впервые предложена Ф. Хэрлоу и П. Накоямой (1968) [28].

Таким образом, в рамках модели решению подлежит система (для двумерного течения несжимаемой жидкости):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0,$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right),$$

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_T}{Pr_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon,$$

$$\bar{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_T}{Pr_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + c_2 \frac{\varepsilon}{k} \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)^2 - c_3 \frac{\varepsilon^2}{k}.$$

Здесь надчерки указывают на осредненные параметры. Кроме того, опущена молекулярная вязкость ν , поскольку она намного (в тысячу и более раз) меньше турбулентной вязкости.

Записанная система уравнений является упрощенной в связи с использованием допущений, соответствующих теории пограничного слоя. Поэтому в систему не включены члены, определяющие дополнительные (турбулентные) нормальные напряжения. Вместе с тем, отметим, что турбулентные нормальные напряжения по существу означают пульсации давления, которые могут оказаться существенными в отношении аэродинамического шума. Однако исследования показывают, что в случае изотропной и однородной турбулентности корреляции давления с составляющими скорости отсутствуют.

В то же время следует отметить, что применение моделей высокого уровня требует осторожности, т. к. необходим правильный подбор констант. Сами по себе эти модели не обладают никакими чудесными свойствами, а являются лишь отражением большего проникновения в суть дела и интуиции специалистов, их предложивших. В связи с этим рассмотрим еще модель (модификацию $k - \varepsilon$ модели), предложенную Д. Уилкоксом и П. Сэффмэном (1974), так называемую $k - \omega$ модель.

$k - \omega$ модель. Величина ω названа Уилкоксом [32] удельной скоростью диссипации и физически интерпретируется как отношение скорости диссипации ε к энергии турбулентности. Формально используется соотношение

$$\omega = \frac{\varepsilon}{C_\mu k},$$

так что согласно (5.5) для турбулентной вязкости получаем

$$\mu_T = \rho \frac{k}{\omega} \quad \text{и} \quad \nu_T = \frac{k}{\omega}.$$

Дополнительные уравнения для k и ω записывают в виде (здесь в приближении пограничного слоя)

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma^* \nu_T \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \nu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon;$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma v_T \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) + \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \beta \omega^2,$$

где $\frac{d}{dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ – полная (субстанциальная) производная; $\sigma^* = 0,5$; $\sigma = 0,5$; $\gamma = 5/9$; $\beta = 3/40$, причем $\varepsilon = C_\mu k \omega$ при $C_\mu = 0,09$.

Очевидно, уравнение для k с точностью до коэффициентов совпадают с уравнением для k в модели Прандтля – Колмогорова.

Заметим, что, как нетрудно видеть из определения ω , эта величина имеет размерность частоты $[1/c]$. Поэтому ее часто называют псевдочастотой турбулентности.

Считается, что $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ модели обеспечивают надежное предсказание поведения потока во многих случаях, представляющих практический интерес, но в ряде важных случаев (искривленные поверхности, вращение, отрыв и др.) дают значительную погрешность. Причина состоит в том, что обе эти модели не учитывают перенос турбулентных сдвиговых напряжений, что приводит к завышению турбулентной вязкости. Соответствующие ограничения на турбулентную вязкость вводятся в модели $k - \omega$ SST (Shear Stress Transport), что значительно улучшило прогнозирование отрывных течений (Ф. Менгер. 1994).

Все эти модели обычно включаются в коммерческие вычислительные пакеты (STAR – CD, CFX, FLUENT). Однако их непосредственное использование требует дополнительных предложений, позволяющих рассчитывать пристеночные области, поскольку уравнение для k построено в предположении изотропной турбулентности, что не выполняется вблизи стенки. С этой целью применяется метод пристеночных функций, когда используют универсальный логарифмический профиль скорости для описания потока вблизи стенки, или метод низкого числа Рейнольдса, когда в формулу для турбулентной вязкости вводят демпфирующую функцию, а в уравнении для кинетической энергии используются модифицированные диссипативные члены, а также демпфирующие функции, зависящие от локальных чисел Рейнольдса. Оба эти метода реализованы в пакете CFX – TASCflow. Применяются также двухслойные модели турбулентности, когда пристеночную область разбивают на две подобласти: в одной из них (вдали от стенки) применяется высокорейнольдсовая версия модели, а в другой (вблизи стенки) – однопараметрическая модель [33]. Разумеется, этот параграф нельзя считать обзором предложенных моделей турбулентности. Более подробно с ними можно познакомиться по книге

Wilcox D. C. Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries. Inc. La Canada. California. 2004. 540 p. (аббревиатура CFD означает computational fluid dynamics).

5.4. ДРУГИЕ ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Здесь кратко охарактеризуем некоторые методы решения уравнений турбулентного течения жидкости, которые строятся без использования гипотезы Буссинеска.

Если оставаться в рамках осредненных уравнений Навье – Стокса, т. е. уравнений Рейнольдса, то для того, чтобы избежать использования гипотезы Буссинеска (строго не доказанной), очевидно, надо моделировать не турбулентную вязкость, а непосредственно рейнольдсовы напряжения. Эту группу моделей называют моделями с уравнениями для напряжений (Дж. Ротта. 1951).

В настоящее время модели рейнольдсовых напряжений используются скорее как инструмент или предмет в исследованиях турбулентности, нежели как средство решения инженерных задач. Для рейнольдсовых напряжений могут быть получены точные уравнения (обычно приходится рассматривать три – пять дополнительных уравнений), но в этих уравнениях имеются члены, которые необходимо моделировать, т. е. уравнения нельзя решить точно, так как моделирование требует многочисленных предположений, которые невозможно подтвердить измерениями.

В моделях рейнольдсовых напряжений отсутствует ограничение, накладываемое гипотезой Буссинеска о связи турбулентных напряжений со средней скоростью, но зато они содержат наибольшее количество уравнений и констант. Модели рейнольдсовых напряжений находятся еще в стадии разработки, и должно пройти время, прежде чем они будут усовершенствованы настолько, что станут употребляться в инженерных расчетах. До сих пор модели рейнольдсовых напряжений не проверены экспериментально для многих типов сложных течений [28].

Принципиальной альтернативой моделям рейнольдсовых напряжений является *прямое численное моделирование* (Direct Numerical Simulation, DNS) турбулентности на основе нестационарных уравнений Навье – Стокса. Ведь, как считается, эти уравнения полностью описывают турбулентные течения, однако временной и пространственный масштабы тур-

булентного движения столь малы, что требуемое количество узлов расчетной сетки и малый размер шагов по времени делают эти вычисления практически нереализуемыми на современных ЭВМ ввиду ограниченности ресурсов последних. Считается, что требуется, по крайней мере, 10 узлов сетки для разрешения турбулентного вихря. Для типичных течений может потребоваться 10^5 точек для разрешения области течения объемом в 1 см^3 [28].

Специалисты расходятся во мнениях, когда компьютерная технология достигнет в своем развитии этапа, на котором расчеты турбулентных течений станет возможным проводить напрямую. Некоторые считают, что никогда не удастся рассчитать мелкомасштабную структуру турбулентности на основе нестационарных уравнений Навье – Стокса в задачах, представляющих практический интерес [28].

Тем не менее, в последнее время появляются работы, в которых реализуется DNS для простых течений, причем размер сетки примерно в три раза меньше наиболее мелких турбулентных вихрей [34]. В связи с этим, DNS рассматривается как дополнительный источник экспериментальных данных. Однако считается более перспективно использовать нестационарные уравнения Навье – Стокса для расчета только больших вихрей, ответственных за большую часть переноса импульса, а малые вихри моделировать на субсеточном уровне (Дж. Деардорф. 1970). Этот метод обычно называют *моделированием крупных вихрей* (Large Eddy Simulation, LES).

В этом методе разрешается крупномасштабное турбулентное движение, путем численного решения «отфильтрованной» (по размерам вихрей) системы уравнений, описывающих это крупномасштабное трехмерное нестационарное движение. Моделирование турбулентности используется для аппроксимации эффектов турбулентности, масштаб которых меньше размеров сетки. Поскольку LES исключает прямой расчет мелких вихрей, шаги сетки оказываются примерно на порядок больше размеров мелких вихрей, что позволяет достигать более высоких чисел Рейнольдса ($> 10^3$), чем в DNS.

В многочисленных расчетах опробовано большое количество подсеточных моделей, фильтров, граничных условий и конечно – разностных схем. Но, несмотря на это, нет ясности ни в оптимальном выборе подсеточной модели, ни в обосновании варианта такой модели. Нет также универсальных пристеночных функций, обеспечивающих уменьшение количества узлов сетки вблизи стенки. В связи с этим LES затруднительно использовать для расчета течений с малыми отрывными зонами и точками перехода режима, например, для расчета обтекания профиля под углом

атаки. Тем не менее, LES является перспективным направлением в развитии методов расчета турбулентных течений и представляется серьезной альтернативой DNS и RANS.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Порассуждаем о месте вычислительной гидрогазодинамики в механике жидкости и газа.

За последние четыре-пять десятков лет в науке, известной как механика жидкости и газа, сформировалась новая ветвь, которую называют вычислительной гидрогазодинамикой. Своим рождением эта дисциплина обязана бурному развитию электронно-вычислительных машин, произошедшему к началу XXI века.

Традиционно механика жидкости и газа, как физическая наука, делилась на две части: теоретическую и экспериментальную. Теперь появилась третья часть – вычислительная. Можно сказать, что эта третья часть занимает некое среднее положение.

С одной стороны, в вычислительной гидрогазодинамике математически моделируются законы движения деформируемой сплошной среды, точнее законы сохранения, т. е. те физические законы, которые лежат в основе построения теоретической механики жидкости и газа. С другой стороны, в вычислительной гидрогазодинамике уравнения, описывающие деформируемую среду, решаются численно, поэтому получаемое решение не является общим, а лишь частным, ограниченным заданными начальными и краевыми условиями. Таким образом, вычислительная гидрогазодинамика реализует численный эксперимент, что, в сущности, похоже на проведение физического опыта в экспериментальной гидрогазодинамике.

В то же время численный эксперимент не может быть заменен ни теоретическим анализом, ни физическим экспериментом. Это объясняется следующими причинами.

Большое количество новых задач, которое ставит современная техника, не могут быть решены теоретически ввиду их сложности. Более того, для многих задач не существует строгой математической постановки (например, связанных с турбулентностью). Часто и физический эксперимент не может решить проблемы либо из-за невозможности удовлетворительного физического моделирования (например, трудно реализовать независимое изменение чисел Маха и Рейнольдса), либо из-за колоссальной

стоимости эксперимента и очень большого времени, необходимого для его подготовки.

Кроме того, в численном эксперименте можно изучить модельные задачи, вообще недоступные для физического эксперимента. Так численно можно изучить чисто плоское течение, независимо изменять (в любых пределах различные физические свойства газов, вводить любые упрощения и т. д.).

Вместе с тем, существующие методы численного моделирования не могут быть названы строго адекватными исследуемому явлению. Они нуждаются в тестировании на предмет совпадения результатов численного эксперимента с фактическими и теоретическими данными. Следовательно, развитие возможностей численных методов научного и инженерного исследования не отменяет традиционных методов.

Иногда можно слышать, что численный эксперимент заменяет физический. Возможно, так случится в будущем, когда надлежащим образом усовершенствуются прямые методы решения нестационарных уравнений Навье – Стокса (если последние считать адекватно описывающими реальные течения). Но сейчас численные результаты получаются в основном с использованием гипотезы Буссинеска, справедливость которой не доказана. Так что пока численные эксперименты остаются экспериментом (пробой) внутри себя и не могут претендовать на победу над физическим экспериментом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1984. – 520 с.
2. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. – М.: Наука, 1975. – 352 с.
3. Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А., Крашенинников С. Ю., Секундов А. Н., Смирнова И. Л. Теория турбулентных струй. – М.: Наука, 1984. – 718 с.
4. Хэрлоу Ф. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики / Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 316 – 342.
5. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Метод крупных частиц в газовой динамике. – М.: Наука, 1982. – 392 с.
6. Браун Дж. В. Методы Монте-Карло / Современная математика для инженеров. – М.: Иностранная литература, 1959. – С. 275 – 301.
7. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ. – М.: Мир, 1977. – 584 с.
8. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 608 с.
9. Данилина Н. И., Дубровская Н. С., Кваша О. П. Численные методы. – М.: Высшая школа, 1976. – 368 с.
10. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 368 с.
11. Богомоллов Е. Н. Рабочие процессы в охлаждаемых турбинах газотурбинных двигателей с перфорированными лопатками. – М.: Машиностроение, 1987. – 158 с.
12. Шнайдер П. Инженерные проблемы теплопроводности. – М.: ИИЛ, 1960. – 478 с.
13. Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний – М.: ГИФМЛ, 1961. – 226 с.
14. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
15. Самойлович Г. С. Газодинамика. – М.: Машиностроение, 1990. – 384 с.
16. Самарский А. А. Введение в численные методы. – С.-Пб.: Лань, 2005. – 288 с.
17. Выготский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 784 с.
18. Аржаников Н. С., Мальцев В. Н. Аэродинамика. – М.: Оборонгиз, 1956. – 484 с.
19. Пирумов У. Г., Росляков Г. С. Численные методы газовой динамики. – М.: Высшая школа, 1987. – 232 с.

20. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
21. Богомоллов Е. Н. Гидродинамика вторичных течений в турбомашинах. Часть II. – Рыбинск: РГАТА, 1998. – 75 с.
22. Богомоллов Е. Н., Вятков В. В., Ремизов А. Е. Влияние вторичных течений на направление потока за турбинной решеткой // Известия вузов. Авиационная техника. – 2003. – № 1. – С. 23 – 26.
23. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
24. Августинovich В. Г., Иноземцев А. А., Шмотин Ю. Н., Сипатов А. М., Румянцев Д. Б. Нестационарные явления в турбомашинах. – Екатеринбург, 1999. – 280 с.
25. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
26. Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 128 с.
27. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
28. Андерсон У., Тоннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, 1990. – 726 с.
29. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. – Л.: Судостроение, 1973. – 256 с.
30. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 734 с.
31. Турбулентность. Принципы и применения / У. Фрост, Т. Моулден. – М.: Мир, 1980. – 536 с.
32. Уилкоккс Д. К. Уточнение уравнения для масштаба турбулентности в перспективных моделях турбулентности // Аэрокосмическая техника. – 1989, № 11. – С. 30 – 46.
33. Волков К. Н. Применение двухслойной модели турбулентности для расчета пограничного слоя с градиентом давления // Инженерно-физический журнал. – 2007. – № 1. – С. 90 – 99.
34. Волков К. Н. Сравнение низкорейнольдсовых моделей турбулентности с данными прямого численного моделирования в канале // Теплофизика и аэромеханика. – 2005. – № 3. С. 365 – 375.

Учебное издание

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ГИДРОГАЗОДИНАМИКИ

Богомолов Евгений Николаевич

Зав. РИО М. А. Салкова
Редактор Л. В. Калинина
Компьютерная верстка Л. В. Калинина

Подписано в печать 20.10.2010.
Формат 60×84 1/16. Уч.-изд.л. 5,75. Тираж 150. Заказ 128.

Рыбинская государственная авиационная технологическая академия
имени П. А. Соловьева (РГАТА имени П. А. Соловьева)
Адрес редакции: 152934, г. Рыбинск, ул. Пушкина, 53

Отпечатано в множительной лаборатории РГАТА имени П. А. Соловьева
152934, г. Рыбинск, ул. Пушкина, 53