Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О.В. Бесов

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Часть 1

Москва, 2004

Составитель О.В.Бесов

УДК 517.

Методические указания по математическому анализу. Курс лекций по математическому анализу. Ч. 1 (для студентов 1-го курса).
МФТИ. М., 2004. 327 с.

Учебное пособие соответствует программе 1-го курса МФТИ и содержит теорию пределов, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, интегральное исчисление функций одной переменной, числовые и функциональные ряды и другие темы. Оно написано на основе лекций, читаемых в течение многих лет в МФТИ автором (профессором МФТИ, чл.-корреспондентом РАН, зав. отделом теории функций Математического института им. В.А. Стеклова РАН).

Предназначено для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей вузов с повышенной подготовкой по математике.

Оглавление

Предисловие

Настоящее учебное пособие написано на основе лекций автора, читаемых студентам первого курса Московского физико-технического института.

Порядок следования основных тем математического анализа и их содержание соответствуют программе кафедры высшей математики МФТИ. Исключением является глава 13 об экстремуме функций многих переменных, занимающая здесь свое логическое место, но отнесенная программой ко второму году обучения.

В ряде вопросов изложение несколько отличается от стандартного в пользу его упрощения, уточнения или доходчивости. В изложении доказательств теорем и лемм автор стремился к сравнительной краткости (не в ущерб завершенности), полагая, что необходимое внимательное обдумывание читаемого будет способствовать лучшему пониманию и усвоению материала. При изучении курса настоятельно рекомендуется самостоятельное выполнение предлагаемых упражнений и внимательный разбор примеров.

Автор благодарит профессоров Б.И. Голубова и С.А. Теляковского, прочитавших рукопись и сделавших ряд ценных замечаний, способствовавших ее улучшению, а также сотрудника кафедры А.В. Полозова, взявшего на себя нелегкий труд по подготовке рукописи к печати.

Обозначения

Для сокращения записи используются следующие обозначения.

$\forall$ — «для каждого»; «для любого»; «для всех» (от английского All),

$\exists$ — «существует»; «найдется» (от англ. Exists),

$:$ — «такой, что»; «такие, что»,

$:=$ — «по обозначению равно»,

$\to$ — «соответствует», «поставлено в соответствие»,

$\Rightarrow$ — «следует», $\Longleftrightarrow$ — «равносильно»,

Множество является одним из исходных понятий в математике, оно не определяется. Вместо слова «множество» говорят «набор», «совокупность», «собрание». Множество состоит из объектов, которые принято называть его «элементами». Вводится также пустое множество ($\varnothing$) как множество, не содержащее ни одного элемента. Множества часто обозначают большими буквами A, B, C, $\ldots$, а элементы множеств — малыми. Запись $a \in A$, $A \ni a$ означает, что элемент a содержится во множестве A, принадлежит A, множество A содержит элемент a. Запись $a \notin A$ означает, что множество A не содержит объект (элемент) a.

Запись $A \subset B$, $B \supset A$ означает, что множество A является подмножеством множества B, т. е. что $a \in B \ \ \forall a \in A$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то пишут $A = B$. Запись $a = b$ означает, что a и b — это один и тот же элемент.

Примеры множеств:

$$A = \{x \,:\, x^2 < 1\}, \quad A = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

$A \cup B$ (объединение множеств A и B) — множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A, B;

$A \cap B$ (пересечение множеств A и B) — множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит как множеству A, так и множеству B;

Глава 1
МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1.1. Аксиоматика

Определение. Непустое множество $\mathbb{R}$ называется *множеством действительных* (*вещественных*) *чисел*, а его элементы — *действительными* (*вещественными*) *числами*, если на $\mathbb{R}$ определены операции сложения и умножения и отношение порядка, удовлетворяющие следующим аксиомам.

(I) Аксиомы сложения $(a, b \to a + b)$

1. $a + b = b + a \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (коммутативность);
2. $a + (b + c) = (a + b) + c \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (ассоциативность);
3. $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$: $a + 0 = a \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;
4. $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \exists\, (-a)$: $a + (-a) = 0$, $(-a)$ называется *противоположным* числом для a.

(II) Аксиомы умножения $(a, b \to ab)$

1. $ab = ba \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ (коммутативность);
2. $a(bc) = (ab)c \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (ассоциативность);
3. $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$: $a1 = a \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}$;
4. $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\exists\ \frac{1}{a}$: $a\,\frac{1}{a} = 1$, ($\frac{1}{a}$ называется *обратным* числом для a).

(I–II) Связь сложения и умножения

1. $(a+b)c = ac+bc \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

(III) Аксиомы порядка (для любых $a, b \in \mathbb{R}$ установлено отношение $a \leqslant b$ или $b \leqslant a$)

1. $a \leqslant b$, $b \leqslant a \Rightarrow a = b \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$;
2. $a \leqslant b$, $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

   $a \leqslant b$ записывается также в виде $b \geqslant a$, $a \leqslant b$ при $a \neq b$ — в виде $a < b$ и $b > a$.

(I–III) Связь сложения и порядка

1. $a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c \ \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$.

(II–III) Связь умножения и порядка

1. $0 \leqslant a$, $0 \leqslant b \Rightarrow 0 \leqslant ab \ \ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

(IV) Аксиома непрерывностиIV_D (вариант принципа Дедекинда)

Пусть A, B — непустые подмножества $\mathbb{R}$ такие, что

$$a \leqslant b \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B.$$

Тогда $\exists\, c \in \mathbb{R}$ такое, что

$$a \leqslant c \leqslant b \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B.$$

З а м е ч а н и е 1. Множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел удовлетворяет аксиомам (I), (II), (III), (I–III), (II–III), но не удовлетворяет аксиоме (IV). Покажем последнее. Пусть $A = \{a \colon a \in \mathbb{Q},\ a > 0,\ a^2 < 2\}$, $B = \{b \colon b \in \mathbb{Q},\ b > 0,\ b^2 > 2\}$. Тогда во множестве $\mathbb{Q}$ не существует числа c $(\in \mathbb{Q})$ со свойством: $a \leqslant c \leqslant b \ \ \forall\, a \in A, \forall\, b \in B$.

Некоторые следствия аксиом множества действительных чисел

1. Число 0, противоположное к a число и решение уравнения $a + x = b$ единственны, $x = b - a \coloneqq b + (-a)$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$.
2. Число $\dfrac{1}{a}$, обратное к a (при $a \neq 0$) и решение уравнения $ax = b$ (при $a \neq 0$) единственны,
$$x \coloneqq \frac{b}{a} \coloneqq b\,\frac{1}{a} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$
3. $a\,0 = 0 \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}$.
4. $a, b \in \mathbb{R}$, $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ или $b = 0$.
5. $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ всегда имеет место одно и только одно из соотношений $a < b$, $a = b$, $a > b$.
6. $0 < 1$.

Примеры числовых множеств.

Множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ \ldots\ \}$, где $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $\ldots$

Множество целых чисел $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$.

Множество рациональных чисел

$$\mathbb{Q} = \left\{x\colon x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Отрезок, интервал, полуинтервалы

$$[a, b] \coloneqq \{x\ :\ a \leqslant x \leqslant b\}, \quad (a, b) \coloneqq \{x\ :\ a < x < b\},$$
$$(a, b] \coloneqq \{x\ :\ a < x \leqslant b\}, \quad [a, b) \coloneqq \{x\ :\ a \leqslant x < b\}.$$

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ часто называют *числовой прямой*, а числа — *точками числовой прямой.*

§ 1.2. Верхние и нижние грани

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху* (*снизу*), если существует число b (число a) такое, что $x \leqslant b\ \ \forall\, x \in X$ $(x \geqslant a\ \ \forall\, x \in X)$.

При этом говорят, что *число* b (*число* a) *ограничивает множество* X *сверху* (*снизу*).

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *неограниченным* (*сверху*, *снизу*), если оно не является ограниченным (сверху, снизу).

Определение. *Верхней гранью непустого множества* $X \subset \mathbb{R}$ называется число b, удовлетворяющее условиям:

1° $x \leqslant b\ \ \forall\, x \in X$;

2° $\forall\, b' < b\ \exists\, x_{b'} \in X\colon\ x_{b'} > b'$ или иначе: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in X\colon\ x_\varepsilon > b - \varepsilon$.

Определение. *Нижней гранью непустого множества* $X \subset \mathbb{R}$ называется число a, удовлетворяющее условиям:

1° $x \geqslant a\ \ \forall\, x \in X$;

2°. $\forall a' > a\ \exists x_{a'} \in X\colon\ x_{a'} < a'$ или иначе: $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in \in X\colon\ x_\varepsilon < a + \varepsilon$.

Верхняя и нижняя грани множества X обозначаются соответственно символами $\sup X$, $\inf X$.

Примеры.

$$\sup[a, b] = b, \quad \sup(a, b) = b.$$

Отметим, что верхняя грань множества может как принадлежать, так и не принадлежать этому множеству, ср. случаи $[a, b]$, (a, b).

Теорема 1 (единственности). *Числовое множество не может иметь больше одной верхней (нижней) грани.*

Доказательство проведем лишь для случая верхней грани. Допуская противное, предположим, что каждое из чисел b и b' ($b \neq b'$) является верхней гранью множества X. Пусть, для определенности, $b' < b$. Тогда, в силу того, что $b = \sup X$, из определения верхней грани следует, что для числа b' $\exists x_{b'}\colon x_{b'} \in X$, $x_{b'} > b'$. Но тогда b' не является верхней гранью X. Из полученного противоречия следует ошибочность предположения и утверждение теоремы.

Заметим, что в условиях теоремы не предполагается существование верхней (нижней) грани. Теорема утверждает, что если верхняя (нижняя) грань существует, то она единственна.

Значительно более глубокой (эквивалентной аксиоме непрерывности) является теорема о существовании верхней грани.

Теорема 2 (о существовании верхней грани). *Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань.*

Доказательство проведем лишь для верхней грани. Пусть A — непустое ограниченное сверху множество. Рассмотрим непустое множество B, элементами которого являются все числа b, ограничивающие множество A сверху.

Тогда

$$a \leqslant b \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B.$$

Из аксиомы непрерывности следует, что для некоторого $c \in \mathbb{R}$

$$a \leqslant c \leqslant b \quad \forall\, a \in A, \quad \forall\, b \in B. \tag{1}$$

Покажем, что $\sup A = c$. Первое условие из определения верхней грани выполнено в силу левого из неравенств (1).

Покажем, что выполняется и второе. Пусть $c' < c$. Тогда $c' \notin B$, так как для каждого элемента из B выполняется правое из неравенств (1). Следовательно, c' не ограничивает множество A сверху, т. е.

$$\exists\, x_{c'} \in A \,:\, x_{c'} > c',$$

так что второе условие также выполнено.

Следовательно, $c = \sup A$, и теорема доказана.

Определение. *Расширенным множеством действительных чисел* $\overline{\mathbb{R}}$ называется

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\},$$

т. е. элементами множества $\overline{\mathbb{R}}$ являются все действительные числа и еще два элемента: $-\infty$, $+\infty$.

Во множестве $\overline{\mathbb{R}}$ не введены сложение и умножение, но имеется отношение порядка. Для двух элементов $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ в случае $a, b \in \mathbb{R}$ отношение порядка то же, что в $\mathbb{R}$. В других же случаях оно определено так: $-\infty < a$, $a < +\infty$, $-\infty < +\infty \ \ \forall\, a \in \mathbb{R}$.

Рассматривая множество X действительных чисел как подмножество расширенного множества действительных чисел ($X \subset \overline{\mathbb{R}}$), можно обобщить понятие $\sup X$ $(\inf X)$.

Это обобщающее определение будет отличаться от приведенных выше лишь тем, что в качестве b (a) можно брать не только число, но и элемент $+\infty$ ($-\infty$).

Тогда получим, что для непустого неограниченного сверху (снизу) числового множества X

$$\sup X = +\infty \qquad (\inf X = -\infty).$$

Учитывая теорему 2, приходим к выводу, что всякое непустое числовое множество имеет в расширенном множестве действительных чисел $\overline{\mathbb{R}}$ как верхнюю, так и нижнюю грани.

§ 1.3. Система вложенных отрезков

Определение. Множество отрезков

$$\{[a_1, b_1],\ [a_2, b_2],\ \ldots\}, \quad -\infty < a_n < b_n < +\infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

называется *системой вложенных отрезков*, если $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, т. е. каждый отрезок содержит следующий за ним.

В следующей теореме формулируется свойство, эквивалентное аксиоме непрерывности и называемое непрерывностью множества действительных чисел по Кантору.

Теорема 1. *Для всякой системы вложенных отрезков существует точка, принадлежащая всем отрезкам данной системы.*

Доказательство. Для системы вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$ рассмотрим два непустых множества $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$.

Очевидно, что $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$

$$a_n \leqslant a_{n+m} \leqslant b_{n+m} \leqslant b_m.$$

В силу аксиомы непрерывности существует число c такое, что

$$a_n \leqslant c \leqslant b_m \quad \forall\, n, m \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $m = n$ получаем, что

$$c \in [a_n, b_n] \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

что и требовалось доказать.

Определение. Система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ называется *стягивающейся системой вложенных отрезков*, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n \in \mathbb{N}\colon\ b_n - a_n < \varepsilon$.

Теорема 2. *Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну точку, принадлежащую всем отрезкам.*

Доказательство. По крайней мере, одна общая точка для отрезков рассматриваемой системы имеется в силу теоремы 1. Покажем, что общих точек не больше одной. Допуская противное, предположим, что каждая из двух различных точек c и c' является общей для всех отрезков системы. Пусть, для определенности, $c' < c$, т. е. $\varepsilon := c - c' > 0$. По определению стягивающей системы, $\exists\, n \in \mathbb{N}\colon\ b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда $a_n \leqslant c' < c \leqslant b_n$. Отсюда, $c - c' \leqslant c - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$, что противоречит выбору ε. Теорема доказана.

§ 1.4. Связь между различными принципами непрерывности

Теорема 1 (принцип Архимеда). *Для* $\forall\, a \in \mathbb{R}$*:* $\exists\, n \in \mathbb{N}$*:* $n > a$ *.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Это значит, что $\exists\, a \in \mathbb{R}\colon\ n \leqslant a \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Следовательно, a ограничивает сверху множество $\mathbb{N}$ и по теореме 1.2.2 $\exists\, b \in \mathbb{R}\colon\ b = \sup \mathbb{N}$. Тогда по определению верхней грани для числа $b' := b - 1\ \exists\, n \in \mathbb{N}\colon\ n > b - 1$. Но тогда $n + 1 > b$, $n + 1 \in \mathbb{N}$, что противоречит тому, что $b = \sup \mathbb{N}$. Этим теорема доказана.

В следующей диаграмме

$$\mathrm{IV}_D \Rightarrow \mathrm{IV}_{\sup} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \left. \begin{matrix} \mathrm{IV}_K \\ (A) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mathrm{IV}_D$$

приняты обозначения:

IV_D — вариант принципа Дедекинда,

$\mathrm{IV}_{\sup}$ — принцип верхней грани, т. е. утверждение теоремы 1.2.2,

IV_K — принцип Кантора, т. е. утверждение теоремы 1.3.1,

(A) — принцип Архимеда.

Эта диаграмма показывает, что перечисленные принципы эквивалентны. Любой из них (IV_K в сочетании с (A)) можно было бы взять в качестве аксиомы непрерывности при определении множества действительных чисел, а другие доказать в качестве теорем.

Два из указанных в диаграмме логических следствий уже установлены, другие два предлагается доказать читателю в качестве упражнения. Было доказано также, что $\mathrm{IV}_D \Rightarrow \mathrm{IV}_K$.

Теорема 2 (принцип математической индукции). *Пусть множество* $A \subset \mathbb{N}$ *обладает свойствами:*

1°. $A \ni 1$;

2°. $A \ni n \Rightarrow A \ni n + 1$.

Тогда $A = \mathbb{N}$.

Доказательство. Последовательно убеждаемся, что $A \ni 2 := 1 + 1$, $A \ni 3 := 2 + 1$, ... Следовательно, $A \supset \mathbb{N}$. Отсюда и из $A \subset \mathbb{N}$ следует $A = \mathbb{N}$.

Замечание 1. Мы видим, что принцип математической индукции следует непосредственно из определения множества натуральных чисел. Существуют и другие построения теории действительных чисел, в которых этот принцип берется в качестве аксиомы.

§ 1.5. Счетные и несчетные множества

Определение. Будем говорить, что *между двумя множествами X и Y установлено взаимно однозначное соответствие* и писать $X \leftrightarrow Y$, если:

1°. $\forall\, x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$ $(x \to y)$;

2°. если $x_1 \neq x_2$, $x_1 \to y_1$, $x_2 \to y_2$, то $y_1 \neq y_2$;

3°. $\forall\, y \in Y\ \exists\, x \in X$: $x \to y$.

Определение. Два множества X и Y называются *эквивалентными* (пишут $X \sim Y$), если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Эквивалентные множества называют также *равномощными*, говорят, что они имеют одну и ту же мощность («одинаковое» количество элементов).

Пример. $\mathbb{N} \sim \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$.

Определение. Множество называется *счетным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел, иначе говоря, если его можно занумеровать всеми натуральными числами.

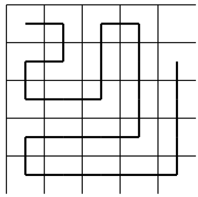
Упражнение 1. Доказать, что бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Теорема 1. *Множество рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Составим таблицу чисел (открытую снизу и справа), содержащую все рациональные числа.

$n \backslash m$	0	1	-1	2	-2	3	-3	$\ldots$
1	$0/1$	$1/1$	$-1/1$	$2/1$	$-2/1$	$3/1$	$-3/1$	$\ldots$
2	$0/2$	$1/2$	$-1/2$	$2/2$	$-2/2$	$3/2$	$-3/2$	$\ldots$
3	$0/3$	$1/3$	$-1/3$	$2/3$	$-2/3$	$3/3$	$-3/3$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Будем двигаться по клеткам этой таблицы из левого верхнего угла по пути вида



нумеруя встречающиеся в клетках рациональные числа, пропуская при этом те из них, которые ранее по пути уже встречались. Очевидно, таким способом мы занумеруем все рациональные числа всеми натуральными, что и требовалось показать.

Упражнение 2. Доказать, что объединение счетного множества счетных множеств счетно.

Теорема 2 (Кантор). *Множество всех точек отрезка* $[0,1]$ *несчетно.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда все точки отрезка $[0,1]$ можно занумеровать: x_1, x_2, x_3, ... Поделим отрезок $[0,1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_1, b_1]$ один из них, свободный от точки x_1. Поделим $[a_1, b_1]$ на три равных отрезка и обозначим через $[a_2, b_2]$ один из них, свободный от точки x_2. Продолжая процесс, получим систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. По теореме о вложенных отрезках существует точка c, принадлежащая всем отрезкам системы. Эта точка c не совпадает ни с одной из занумерованных точек x_1, x_2, x_3, ..., так как произвольная из них x_j не содержится в отрезке $[a_j, b_j]$, в то время как c содержится в этом отрезке.

Итак, допуская, что все точки отрезка $[0,1]$ занумерованы, мы пришли к противоречию, найдя точку $c \in [0,1]$, отличную от каждой из занумерованных. Это противоречие показывает, что наше допущение неверно. Теорема доказана.

Об изоморфизме различных множеств действительных чисел

Теорема 3. *Пусть имеются два множества $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}'$, удовлетворяющие всем аксиомам множества действительных чисел. Тогда между ними можно установить взаимно однозначное соответствие $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}'$, при котором из $(x, y \in \mathbb{R}$, $x', y' \in \mathbb{R}'$, $x \leftrightarrow x'$, $y \leftrightarrow y')$ следует, что*

1° $x + y \to x' + y'$;

2° $xy \to x'y'$;

3° $x \leqslant y \Rightarrow x' \leqslant y'$.

В этом случае говорят, что множества $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}'$ действительных чисел изоморфны друг другу и что множество действительных чисел единственно с точностью до изоморфизма.

Глава 2
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 2.1. Определение предела последовательности

Определение. Пусть A — произвольное множество и пусть каждому $n \in \mathbb{N}$ поставлен в соответствие некоторый элемент $a \in A$. Тогда говорят, что задана *последовательность*

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,$$

которая обозначается также символами $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Пара (n, a_n) называется n-м элементом последовательности, a_n — значением n-го элемента последовательности.

Всякая последовательность имеет счетное множество элементов, множество значений элементов последовательности может быть конечным или счетным. Например, множество значений элементов последовательности

$$0, 1, 0, 1, 0, 1,\ \ldots \tag{1}$$

состоит из двух элементов: 0 и 1.

Мы будем рассматривать пока лишь последовательности со значениями из $\mathbb{R}$ и называть их *числовыми последовательностями* или просто последовательностями.

З а м е ч а н и е 1. Часто вместо «значение элемента последовательности» говорят «элемент последовательности». Например, можно сказать: «Данный отрезок содержит бесконечно много элементов последовательности» и т.п.

Определение. Число $a \in \mathbb{R}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$:

$$|a - a_n| < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Например, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Обобщим понятие предела (числовой) последовательности, рассматривая в качестве предела не только число, но и какой-либо из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞. Для этого рассмотрим множества $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ и $\hat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$. *ε-окрестностью числа* a называется $U_\varepsilon = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ — интервал с центром в a; *ε-окрестностью элемента* $a = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ ($a = -\infty \in \overline{\mathbb{R}}$, $a = \infty \in \hat{\mathbb{R}}$) называется множество $U_\varepsilon = \left\{x : x \in \mathbb{R},\, x > \frac{1}{\varepsilon}\right\}$ $\left(U_\varepsilon = \left\{x : x \in \mathbb{R},\, x < -\frac{1}{\varepsilon}\right\},\, U_\varepsilon = \left\{x : x \in \mathbb{R},\, |x| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}\right)$.

Через $U(a)$ при $a \in \hat{\mathbb{R}}$ обозначается произвольная ε-окрестность элемента a.

Сформулируем общее определение предела последовательности в терминах окрестностей.

Определение. $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если для $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $a_n \in U_\varepsilon(a)$ $\forall\, n \geqslant n_\varepsilon$.

Это же определение можно перефразировать следующим образом.

Определение. $a \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если в $\forall\, U(a)$ содержатся значения почти всех (т. е. всех, за исключением, быть может, конечного числа) элементов последовательности.

Определение. Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет конечный (т. е. принадлежащий $\mathbb{R}$) предел. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Примерами расходящихся последовательностей являются $\{n\}$ и последовательность (1).

Определение. Последовательность называется *сходящейся в* $\overline{\mathbb{R}}$ (*в* $\hat{\mathbb{R}}$), если она имеет предел, принадлежащий $\overline{\mathbb{R}}$ ($\hat{\mathbb{R}}$).

Расходящаяся последовательность $\{n\}$ является сходящейся в $\overline{\mathbb{R}}$ и сходящейся в $\hat{\mathbb{R}}$.

Расходящаяся последовательность $\{(-1)^n n\}$ сходится в $\hat{\mathbb{R}}$, к ∞.

Бывает полезна формулировка в позитивных терминах утверждения того, что число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$. Приведем ее.

Число a не является пределом последовательности $\{a_n\}$, если $\exists\,\varepsilon_0 > 0$: $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}\ \exists\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$: $|a_n - a| \geqslant \varepsilon_0$.

Упражнение 1. Воспользовавшись этой формулировкой, показать, что последовательность (1) расходится.

Теорема 1 (единственности). *Числовая последовательность не может иметь в $\overline{\mathbb{R}}$ более одного предела.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предполагая противное, допустим, что для данной последовательности $\{a_n\}$ каждый из двух различных элементов $a, a' \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(a') = \varnothing$. Тогда по определению предела $\exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ($\exists\, n'_\varepsilon \in \mathbb{N}$), при котором $a_n \in U_\varepsilon(a)\ \ \forall\, n \geqslant n_\varepsilon$ ($a_n \in U_\varepsilon(a')\ \ \forall\, n \geqslant n'_\varepsilon$).

Положив $\bar{n}_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n'_\varepsilon\}$, получаем, что $a_n \in U_\varepsilon(a) \cap \cap U_\varepsilon(a')\ \ \forall\, n \geqslant \bar{n}$, а это невозможно, так как это пересечение пусто. Теорема доказана.

§ 2.2. Свойства пределов, связанные с неравенствами

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной* (*ограниченной сверху*, *ограниченной снизу*), если множество значений ее элементов ограничено (ограничено сверху, ограничено снизу).

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной* (*ограниченной сверху*, *ограниченной снизу*), если

$$\exists\, b \in \mathbb{R} \,:\, |a_n| \leqslant b \quad (a_n \leqslant b,\ a_n \geqslant b) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Приведенные два определения, очевидно, эквивалентны (равносильны).

Теорема 1. *Сходящаяся последовательность ограничена. Обратное неверно.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Тогда для $\varepsilon = 1\ \exists\, n_1 \in \mathbb{N}$: $|a - a_n| < 1\ \ \forall\, n \geqslant n_1$, так что

$$a - 1 < a_n < a + 1 \quad \forall\, n \geqslant n_1.$$

Пусть $b_1 \coloneqq \max\{a+1, a_1, a_2, \ \ldots,\ a_{n_1-1}\}$. Очевидно, что $\{a_n\}$ ограничена сверху числом b_1. Аналогично показывается, что $\{a_n\}$ ограничена снизу. Последовательность $\{a_n\}$ ограничена в силу ее ограниченности сверху и снизу.

Пример последовательности (2.1.1) показывает, что не всякая ограниченная последовательность сходится.

Следующие три свойства показывают связь между неравенствами и предельным переходом. В них пределы $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$.

1° $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a < b \Rightarrow \exists\, n_b \in \mathbb{N}$: $a_n < b\ \ \forall\, n \geqslant n_b$;

3° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \leqslant b \Rightarrow a \leqslant b$ $\big(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \geqslant b \Rightarrow a \geqslant b\big)$.

Следствие. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $|a_n| \leqslant b \Rightarrow |a| \leqslant b$.

Упражнение 1. Показать, что свойство 3° не сохраняется при замене знаков $\leqslant$ на $<$.

§ 2.3. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями

Теорема 1. *Пусть существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. *Тогда*

1° $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$;

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

3° *Если* $b_n \neq 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, $b \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем лишь для свойства 3°. Положим $\alpha_n = a - a_n$, $\beta_n = b - b_n$. Тогда в силу свойства 1° $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Оценим разность между $\frac{a_n}{b_n}$ и предполагаемым пределом $\frac{a}{b}$.

$$\Delta_n = \left|\frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{ab_n - ba_n}{bb_n}\right| =$$
$$= \frac{|a(b-\beta_n) - b(a-\alpha_n)|}{|bb_n|} \leqslant \frac{|a|}{|bb_n|}\,|\beta_n| + \frac{1}{|b_n|}\,|\alpha_n|.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\, n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n'''_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такие, что $|\alpha_n| < \varepsilon$ $\forall\, n \geqslant n'_\varepsilon$, $|\beta_n| < \varepsilon$ $\forall\, n \geqslant n''_\varepsilon$, $|b_n| = |b - \beta_n| > \frac{|b|}{2}$, $\forall\, n \geqslant n'''_\varepsilon$.

Положим $n^*_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon, n'''_\varepsilon\}$. Тогда

$$\Delta_n \leqslant \frac{2|a|}{b^2}\,\varepsilon + \frac{2}{|b|}\,\varepsilon = M\varepsilon \text{ при } \forall\, n \geqslant n^*_\varepsilon,$$

так что Δ_n не превосходит сколь угодно малого числа $M\varepsilon$ при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, а это означает, по определению предела последовательности, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Определение. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Следствием арифметических свойств пределов последовательностей является

Лемма 1. *Сумма, разность и произведение двух бесконечно малых последовательностей являются бесконечно малыми последовательностями.*

Упражнение 1. Построить примеры бесконечно малых последовательностей $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ $(\beta_n \neq 0 \ \ \forall\, n \in \mathbb{N})$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ не существует.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Арифметические свойства пределов последовательностей не переносятся на бесконечно большие последовательности. Например: $\{a_n\} = \{n + (-1)^n\}$, $\{b_n\} = \{n\}$ — бесконечно большие последовательности, но $\{a_n - b_n\} = \{(-1)^n\}$ не сходится даже в $\hat{\mathbb{R}}$.

§ 2.4. Предел монотонной последовательности

Определение. *Верхней* (*нижней*) *гранью последовательности* называется верхняя (нижняя) грань множества значений ее элементов. При этом используются обозначения соответственно $\sup\{a_n\}$, $\inf\{a_n\}$.

Каждая последовательность имеет в $\overline{\mathbb{R}}$ верхнюю и нижнюю грани.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если $a_n \leqslant a_{n+1}$ $(a_n \geqslant a_{n+1})$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *строго возрастающей* (*строго убывающей*), если $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются *строго монотонными*.

З а м е ч а н и е 1. Возрастающие последовательности называют также *неубывающими*, а убывающие — *невозрастающими*.

Теорема 1. *Всякая возрастающая последовательность $\{a_n\}$ имеет предел в $\overline{\mathbb{R}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$. Этот предел* *конечен (т. е. является числом), если последовательность* $\{a_n\}$ *ограничена сверху, и равен* $+\infty$, *если последовательность не ограничена сверху.*

Доказательство. Пусть $a \coloneqq \sup\{a_n\} \leqslant +\infty$. Тогда, по определению верхней грани, $a_n \leqslant a \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $a_{n_\varepsilon} \in U_\varepsilon(a)$. Поскольку $a_{n_\varepsilon} \leqslant a_n \leqslant a$ при $n \geqslant n_\varepsilon$, получаем, что

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, что и требовалось доказать.

Упражнение 1. Сформулировать и доказать аналогичную теорему для убывающей последовательности.

Пример. Пусть $\{[a_n, b_n]\}$ — стягивающаяся система вложенных отрезков, ξ — (единственная) общая (для всех отрезков) точка.

Тогда $\{a_n\}$ — возрастающая, $\{b_n\}$ — убывающая последовательности. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi$, с помощью доказанной теоремы заключаем, что $\sup\{a_n\} = \xi$.

Аналогично получаем, что $\inf\{b_n\} = \xi$.

§ 2.5. Число e

Определение. $e \coloneqq \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Покажем, что этот предел существует и конечен. Будем пользоваться неравенством Бернулли:

$$(1+h)^n > 1 + nh \quad \text{при} \quad h > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 2. \tag{1}$$

Упражнение 1. Доказать (1), используя метод математической индукции.

Рассмотрим вспомогательную последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > 1 + \frac{n+1}{n} > 2$. Как видим, последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу числом 2. Покажем, что она является убывающей последовательностью:

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n}{n+1}\left[\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right]^n = $$

$$= \frac{n}{n+1}\left[1+\frac{1}{n^2-1}\right]^n.$$

Используя неравенство Бернулли (1), получаем, что

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} \geqslant \frac{n}{n+1}\left[1+\frac{n}{n^2-1}\right] = \frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1} > 1.$$

На основании теоремы о сходимости монотонной последовательности заключаем, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n \in [2, x_1] = [2, 4].$$

Но тогда существует и

$$e \coloneqq \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

что и требовалось показать.

Можно показать, что e — иррациональное число, десятичная запись которого

$$e = 2{,}718\ldots$$

§ 2.6. Подпоследовательности

Определение 1. Пусть $\{n_k\}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\{a_{n_k}\} = \{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ называется *подпоследовательностью последовательности* $\{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пример. Последовательность 1, 3, 5, 7, ... является подпоследовательностью последовательности натуральных чисел, а последовательность 1, 5, 3, 9, 7, ... не является подпоследовательностью натуральных чисел.

Лемма 1. *Отбрасывание конечного числа первых членов последовательности не влияет ни на сходимость, ни на величину предела (в случае сходимости).*

Упражнение 1. Доказать лемму.

Определение 2. *Частичным пределом последовательности* называется предел какой-либо ее подпоследовательности, сходящейся в $\overline{\mathbb{R}}$.

Определение 3. *Частичным пределом последовательности* называется элемент $\mu \in \overline{\mathbb{R}}$, любая окрестность $U(\mu)$ которого содержит бесконечное число элементов последовательности.

Д о к а з а т е л ь с т в о эквивалентности определений 2 и 3.

Покажем сначала, что из определения 2 следует определение 3. Пусть μ является частичным пределом в смысле определения 2. Тогда, по определению предела, в любой $U(\mu)$ содержатся почти все элементы некоторой подпоследовательности. Следовательно, μ удовлетворяет определению 1.

Покажем теперь, что определение 2 следует из определения 3. Пусть μ является частичным пределом в смысле определения 3. Выберем какой-либо элемент последовательности $x_{n_1} \in U_1(\mu)$, затем выберем какой-либо элемент последовательности $x_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\mu)$, удовлетворяющий условию $n_2 > n_1$. Это возможно, так как $U_{\frac{1}{2}}(\mu)$ содержит бесконечное число элементов. Выберем затем $x_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\mu)$, $n_3 > n_2$. Продолжая процесс, получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся в $\overline{\mathbb{R}}$ к μ, так как при $\forall\, \varepsilon > 0$ $U_\varepsilon(\mu)$ содержит все ее члены, начиная с члена с номером k_ε, где $k_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$.

Пример. Последовательность (2.1.1) имеет в точности два частичных предела: 0 и 1.

Упражнение 2. Пусть $\{r_n\}$ — каким-либо образом занумерованная последовательность всех рациональных чисел отрезка $[0,1]$. Описать множество ее частичных пределов.

Лемма 2. *Последовательность имеет единственный в* $\overline{\mathbb{R}}$ *частичный предел тогда и только тогда, когда она сходится в* $\overline{\mathbb{R}}$.

Доказательство. Пусть сначала последовательность $\{a_n\}$ сходится в $\overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\{a_{n_k}\}$ — произвольная ее подпоследовательность. По определению предела последовательности, любая окрестность $U(a)$ содержит значения почти всех элементов последовательности $\{a_n\}$, а следовательно, и почти все элементы подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = a$.

Пусть теперь последовательность $\{a_n\}$ имеет единственный частичный предел. Обозначим его через a и покажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Допустим противное, т. е. что a не является пределом последовательности. Тогда $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ такое, что вне $U_{\varepsilon_0}(a)$ находятся значения бесконечного числа элементов последовательности. Построим подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, все элементы которой лежат вне $U_{\varepsilon_0}(a)$. Мы докажем вскоре теорему (обобщающую теорему Больцано–Вейерштрасса), в силу которой последовательность $\{a_{n_k}\}$ имеет частичный предел, который является также и частичным пределом последовательности $\{a_n\}$. Он не совпадает с a, так как $a_{n_k} \notin U_{\varepsilon_0}(a) \ \ \forall\, k$, что противоречит предположению о единственности частичного предела последовательности $\{a_n\}$. Следовательно, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Определение. *Верхним* (*нижним*) *пределом последовательности* $\{a_n\}$ называется наибольший (наименьший) в $\overline{\mathbb{R}}$ из ее частичных пределов.

Его обозначают символом $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ($\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$).

Всякая последовательность имеет верхний и нижний пределы, что будет установлено в § 2.7

Упражнение 3. Пусть $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, последовательность $\{x_n\}$ сходится (т. е. имеет конечный предел), последовательность $\{y_n\}$ имеет конечный верхний предел. Доказать, что тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

§ 2.7. Теорема Больцано–Вейерштрасса

Теорема 1 (Больцано–Вейерштрасса). *Всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный предел.*

Другая ее формулировка: *из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Теорема Больцано–Вейерштрасса является следствием более общей и более сильной теоремы.

Теорема 2. *Всякая последовательность имеет (в $\overline{\mathbb{R}}$) верхний и нижний пределы.*

Доказательство (для верхнего предела). Пусть $\{a_n\}$ — произвольная последовательность. $X = \{x\colon\ x \in \mathbb{R},$ правее x бесконечно много элементов последовательности$\}$.

1 случай. $X = \varnothing$. Это значит, что $\forall\, U(-\infty)$ содержит почти все элементы последовательности, т. е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Следовательно, $-\infty$ — единственный частичный предел $\{a_n\}$, так что $a = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

2 случай. $X \neq \varnothing$. Тогда $\exists \sup X = b$, $-\infty < b \leqslant +\infty$. Покажем, что $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, и пусть $b'_\varepsilon \in U_\varepsilon(b)$, $b'_\varepsilon < b$. Тогда из определения верхней грани следует, что найдется $x'_\varepsilon \in X$: $b'_\varepsilon < x'_\varepsilon \leqslant b$. Поэтому правее b'_ε лежит бесконечное число элементов последовательности $\{a_n\}$. Если $b'' > b$, то $b'' \notin X$, так что правее b'' — не более конечного числа элементов последовательности. Следовательно, $U_\varepsilon(b)$ содержит бесконечное число элементов последовательности $\{a_n\}$ и, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, b — частичный предел $\{a_n\}$.

Остается показать, что b — наибольший частичный предел $\{a_n\}$, т. е. $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Допуская противное, предположим, что существует частичный предел $b^* > b$. Тогда всякая окрестность $U(b^*)$ содержит бесконечно много элементов последовательности. Но это противоречит тому, что при $b < b'' < b^*$ правее b'' (как показано выше) — не более конечного числа элементов последовательности. Следовательно, $b = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Упражнение 1. Доказать теорему Больцано–Вейерштрасса с помощью стягивающейся системы вложенных отрезков.

У к а з а н и е. В качестве первого отрезка рассмотреть отрезок, содержащий все элементы последовательности. Каждый из следующих отрезков получить делением предыдущего отрезка пополам и выбора самой правой из половин, содержащей бесконечное число элементов последовательности.

§ 2.8. Критерий Коши

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если для нее выполнено условие Коши:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \ : \ |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon. \tag{1}$$

Теорема 1 (критерий Коши). *Для сходимости последовательности необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, n_\varepsilon \,:\, |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

Если теперь $n, m \geqslant n_\varepsilon$, то

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, т. е. удовлетворяет условию (1). Покажем, что она сходится.

Шаг 1. Покажем, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда из (1) следует, что

$$\exists\, n_1 \in \mathbb{N} \,:\, |a_n - a_{n_1}| < 1 \quad \forall\, n \geqslant n_1,$$

так что

$$|a_n| < 1 + |a_{n_1}| \quad \forall\, n \geqslant n_1.$$

Следовательно, $\{a_n\}$ — ограничена.

Шаг 2. По теореме Больцано–Вейерштрасса, из $\{a_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. Пусть $a \coloneqq \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$.

Шаг 3. Покажем, что a является пределом $\{a_n\}$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (1)

$$\exists\, n_\varepsilon, k_\varepsilon \,:\, |a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon, \quad \forall\, k \geqslant k_\varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$ получаем, что

$$|a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

§ 2.9. Изображение действительных чисел бесконечными десятичными дробями

Определение. Полуинтервал

$$I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n}) = \left[\underline{a_n}, \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}\right)$$

будем называть *десятичным полуинтервалом*, если $\underline{a_n} \geqslant 0$, $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2, \ \ldots, \alpha_n$ — n-значная десятичная дробь ($\alpha_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\alpha_i \in \{0, 1, \ \ldots, \ 9\}$ при $i \in \mathbb{N}$).

Символом $\{I_n\} = \{I_n\}_{n=0}^{\infty} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}$ будем обозначать систему вложенных десятичных полуинтервалов. Очевидно, что $\underline{a_n}\uparrow$, $\overline{a_n}\downarrow$, $\overline{a_n} - \underline{a_n} = \frac{1}{10^n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть задано $a \geqslant 0$. По аксиоме Архимеда, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $n_0 \geqslant a$. Найдем $\alpha_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: $\alpha_0 \leqslant a < \alpha_0 + 1$. Разобьем полуинтервал $I_0 \coloneqq [\alpha_0, \alpha_0 + 1)$ на десять равных полуинтервалов и обозначим через I_1 тот из них, который содержит a:

$$I_1 = \left[\alpha_0, \alpha_1;\ \alpha_0, \alpha_1 + \frac{1}{10}\right) \ni a.$$

Разобьем I_1 на 10 равных полуинтервалов и обозначим через I_2 тот из них, который содержит a:

$$I_2 = \left[\alpha_0, \alpha_1\alpha_2;\ \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{100}\right) \ni a.$$

Продолжая процесс, получим систему вложенных десятичных полуинтервалов $\{I_n\}$ с непустым пересечением, $I_n = [\underline{a_n}, \overline{a_n})$, $\underline{a_n} = \alpha_0, \ \alpha_1, \ \ \ldots, \alpha_n$, $\overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}$, $I_n \ni a$. При этом $\underline{a_n}$ ($\overline{a_n}$) называется *нижним* (*верхним*) *n-значным десятичным приближением* числа a.

Мы установили соответствие

$$a \to \{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}. \tag{1}$$

Множество всех систем вложенных десятичных полуинтервалов с непустым пересечением обозначим через Ω.

Легко проверить, что соответствие (1) является взаимно однозначным соответствием

$$\{a \in \mathbb{R} \,:\, a \geqslant 0\} \longleftrightarrow \Omega. \tag{2}$$

Определение. Символ $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$ с $\alpha_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ при $i \in \mathbb{N}$ называется *бесконечной десятичной дробью.*

Рассмотрим следующее соответствие.

$$\{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots, \qquad \{I_n\} \in \Omega, \tag{3}$$

если $I_n = \left[\underline{a_n}, \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}\right)$, $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$.

В силу (1), (3) каждому действительному числу $a \geqslant 0$ поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь

$$a \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots \quad (a \geqslant 0) \tag{4}$$

по правилу

$$a \to \{I_n\} \to \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\ldots$$

Заметим, что при этом каждой конечной десятичной дроби a поставлена в соответствие бесконечная десятичная дробь, получающаяся из данной конечной приписыванием справа нулей.

Изучим подробнее соответствие (3).

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ правых концов системы вложенных десятичных полуинтервалов назовем *застойной*, если

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,:\, \overline{a_n} = \overline{a_{n_0+1}} = \overline{a_{n_0+2}} = \ \ldots$$

Лемма 1. *Система вложенных десятичных полуинтервалов $\{I_n\}$ имеет общую точку (т. е. принадлежит Ω) тогда и только тогда, когда $\{\overline{a_n}\}$ — незастойная последовательность.*

Доказательство. Пусть $a \in I_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$a < \overline{a_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = a,$$

откуда видно, что последовательность $\{\overline{a_n}\}$ не может быть застойной.

Пусть теперь последовательность $\{\overline{a_n}\}$ — незастойная. Рассмотрим систему вложенных отрезков $\{\bar{I}_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n}]\}$. По теореме о вложенных отрезках, $\exists\, a \in \bar{I}_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. При этом $a \leqslant \overline{a_n} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Если $\overline{a_{n_0}} = a$ при некотором n_0, то $\{\overline{a_n}\}$ — застойная последовательность. Следовательно, $a < \overline{a_n} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, т. е. $a \in I_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.

Лемма доказана.

Определение. Назовем бесконечную десятичную дробь *допустимой*, если она не содержит (9) в периоде.

Лемма 2. *Соответствие* (3) *является взаимно однозначным соответствием между множеством* Ω *и множеством всех допустимых бесконечных десятичных дробей:*

$$\Omega \longleftrightarrow \{\textit{допустимые бесконечные десятичные дроби}\} \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $\{I_n\} \in \Omega$. По лемме 1, последовательность $\{\overline{a_n}\}$ — незастойная. Допустим, что бесконечная десятичная дробь, соответствующая $\{I_n\}$, в силу (3) содержит девятку в периоде. Это означает, что при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ для всех $n \geqslant n_0$ I_{n+1} является самым правым из 10 полуинтервалов, на которые разбивается I_n. Но тогда последовательность $\{\overline{a_n}\}$ — застойная, что противоречит предположению. Таким образом, при соответствии (3)

$$\Omega \to \{\text{допустимые бесконечные десятичные дроби}\}.$$

Покажем, что это соответствие взаимно однозначное. В самом деле, различным $\{I_n\}$ и $\{I'_n\}$ соответствуют, очевидно, различные допустимые бесконечные десятичные дроби.

Проверим теперь, что для всякой допустимой бесконечной десятичной дроби найдется последовательность $\{I_n\}$, которой именно эта допустимая бесконечная десятичная дробь оказалась поставленной в соответствие. Пусть $\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ — произвольная допустимая бесконечная десятичная дробь. Построим последовательность $\{I_n\} = \{[\underline{a_n}, \overline{a_n})\}$, для которой $\underline{a_n} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, $\overline{a_n} = \underline{a_n} + \frac{1}{10^n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Последовательность $\{\overline{a_n}\}$ при этом не является застойной, так как иначе все десятичные знаки $\underline{a_n}$, начиная с некоторого n_0, были бы равны 9, что противоречит допустимости нашей бесконечной десятичной дроби. Следовательно, $\{I_n\} \in \Omega$ по лемме 1. Очевидно, что построенной последовательности $\{I_n\}$ соответствует в силу (3) именно наша допустимая бесконечная десятичная дробь.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Отображение* (4) *является взаимно однозначным соответствием между множествами всех неотрицательных чисел и множеством всех допустимых бесконечных десятичных дробей.*

$$\{a \,:\, a \geqslant 0\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{допустимые бесконечные}\\ \text{десятичные дроби}\end{matrix}\right\}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (2) и (5).

Распространим отображение (4) на множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, доопределив его для отрицательных чисел $-a < 0$ $(a > 0)$ соответствием

$$-a \to -\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots,$$

если $a \leftrightarrow \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$ в (4).

При этом $\underline{(-a)_n} = -\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n - \frac{1}{10^n}$, $\overline{(-a)_n} = -\alpha_0,\alpha_1\ldots\alpha_n$ называются нижним и верхним n-значным приближением числа $-a$.

Отображение, доопределенное таким образом, является, очевидно, взаимно однозначным соответствием между множеством $\mathbb{R}$ всех действительных чисел и множеством всех (положительных и отрицательных) допустимых бесконечных десятичных дробей. Построенное взаимно однозначное соответствие дает возможность записывать (изображать) действительные числа в виде допустимых бесконечных десятичных дробей:

$$a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\ldots$$

Это соответствие дает возможность также перенести операции сложения и умножения и отношение порядка на множество всех (положительных и отрицательных) допустимых бесконечных десятичных дробей. Эквивалентным способом их можно определить и в терминах нижних и верхних n-значных приближений и предельного перехода.

Глава 3
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 3.1. Понятие функции

Определение. Пусть каждому $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$. Будем говорить, что *на множестве X задана функция со значениями в Y*. Обозначив эту функцию буквой f, можно записать $f : X \to Y$. Через $f(x)$ обозначают значение функции f на элементе x, т. е. тот элемент $y \in Y$, который поставлен в соответствие элементу $x \in X$, $y = f(x)$.

Элемент $x \in X$ называется *аргументом* или *независимой переменной*, элемент $y = f(x) \in Y$ — *значением функции* или *зависимой переменной*.

При этом X называют *областью определения функции* f, $Y_f = \{y : y = f(x),\ x \in X\} \subset Y$ — *областью значений функции* f.

Вместо термина «функция» употребляют равнозначные ему термины «соответствие», «отображение». Для обозначения функции наряду с f применяют также $f(x)$, $y = f(x)$. Таким образом, $f(x)$ может обозначать как значение функции f на элементе x, так и саму функцию f.

Говорят, что $f : X \to Y$ *определена на элементе* x, если $x \in X$, и что f *не определена на элементе* x, если $x \notin X$. При $E \subset X$ будем говорить, что f *определена на* E.

При $E \subset X$ $f(E) \coloneqq \{y\colon\ y = f(x),\ x \in E\}$ называется *образом* E, $f(X) = Y_f$.

При $D \subset Y$ $f^{-1}(D) \coloneqq \{x\colon\ x \in X,\ f(x) \in D\}$ называется *полным прообразом* D.

При $E \subset X$ функция $f_E\colon\ E \to Y$, $f_E(x) \coloneqq f(x)$ при $x \in E$ называется *сужением* (*ограничением*, *следом*) *функции* f на E.

Графиком функции $f : X \to Y$ называется множество пар $\{(x, f(x))\colon x \in X\}$.

Пусть функция f определена на X, а функция φ — на T, причем $\varphi(T) \subset X$. Тогда *сложная функция* (*суперпозиция*, *композиция*) $f \circ \varphi$ определяется на T формулой

$$(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in T.$$

Функция называется *числовой*, если ее значениями являются действительные числа.

Определение. Числовая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *ограниченной* (*сверху*, *снизу*), если множество ее значений $f(X)$ ограничено (сверху, снизу).

Определение. $\sup f := \sup f(X)$ $(\inf f := \inf f(X))$ называется *верхней* (*нижней*) *гранью* числовой функции.

В ближайших разделах будут изучаться лишь числовые функции, заданные на числовом множестве $X \subset \mathbb{R}$.

§ 3.2. Элементарные функции и их классификация

Основными элементарными функциями называются функции: постоянная $y = c$ (c — константа), степенная x^α, показательная a^x $(a > 0)$, логарифмическая $\log_a x$ $(a > 0$, $a \neq 1)$, тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Элементарной функцией называется всякая функция, представимая с помощью конечного числа арифметических действий и композиций основных элементарных функций.

Элементарные функции разбивают на следующие классы:

(I) Многочлены (полиномы).

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

(II) Рациональные функции (рациональные дроби).

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\,, \text{ где } P(x),\ Q(x) \text{ — многочлены}, \quad Q(x) \not\equiv 0.$$

(III) Иррациональные функции. *Иррациональной* называется функция, не являющаяся рациональной, которая может быть задана с помощью композиций конечного числа рациональных функций, степенных функций с рациональными показателями и четырех арифметических действий.

Пример. $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{x+\frac{1}{x}}}.$

(IV) Трансцендентные функции. Элементарные функции, не являющиеся ни рациональными, ни иррациональными функциями, называются *трансцендентными функциями.* Все тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции являются трансцендентными функциями.

§ 3.3. Понятие предела функции

Как и раньше, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, $\hat{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} \cup \{\infty\}$, $U_\varepsilon(a)$ — ε-окрестность a при $\varepsilon > 0$, $U(a)$ — окрестность a (т. е. $U_\varepsilon(a)$ при некотором $\varepsilon > 0$).

$$\mathring{U}_\varepsilon \coloneqq U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}, \quad \mathring{U}(a) \coloneqq U(a) \setminus \{a\} \tag{1}$$

называются *проколотыми окрестностями точки* a (точкой будем называть как число, так и любой из элементов $-\infty$, $+\infty$, ∞).

Определение 1′. Пусть функция f определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Число $A \in R$ называется *пределом функции f при $x \to x_0$*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ :\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\text{при } 0 < |x - x_0| < \delta. \tag{2}$$

Более общим является

Определение 1$''$. Пусть функция f определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом функции f при $x \to a$*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \, : \, f(x) \in U_\varepsilon(A) \text{ при } x \in \mathring{U}_\delta(a).$$

В иной форме определение 1$''$ можно записать так:

Определение 1. Пусть функция f определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом f при $x \to a$*, если

$$\forall\, U(A) \quad \exists\, U(a) \, : \, f(\mathring{U}(a)) \subset U(A).$$

Для обозначения предела пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Определения 1$'$, 1$''$, 1 сформулированы в терминах окрестностей. Приведем определение предела в терминах последовательностей.

Определение 2. Пусть функция f определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом f при $x \to a$*, если $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$ для любой последовательности $\{x_n\}$: $x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Определения* 1 *и* 2 *эквивалентны.*

Доказательство. Покажем сначала, что $1 \Rightarrow 2$ (т. е. что если A является пределом f при $x \to a$ по определению 1, то A является пределом f при $x \to a$ по определению 2).

Пусть $f \colon \mathring{U}_{\delta_0}(a) \to \mathbb{R}$, $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ в смысле определения 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$: $x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $x_n \to a$ при $n \to \infty$. Покажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу определения 1 (1$''$) $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $f(x) \in U_\varepsilon(A)$ $\forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a)$.

В силу сходимости $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ для нашего $\delta = \delta(\varepsilon)$ $\exists\, n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$: $x_n \in \overset{\circ}{U}_{\delta(\varepsilon)}$ $\forall\, n \geqslant n_{\delta(\varepsilon)}$. Но тогда $f(x_n) \in U_\varepsilon(A)$ $\forall\, n \geqslant n_{\delta(\varepsilon)}$, т. е. $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$, что и требовалось показать.

Покажем теперь, что $2 \Rightarrow 1$. Пусть $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ в смысле определения 1. Покажем, что $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ в смысле определения 2. Допустим противное, т. е. что

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \ : \ \forall\, \delta > 0 \quad \exists\, x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \ : \ f(x) \notin U_{\varepsilon_0}(A).$$

В качестве δ будем брать $\delta = \dfrac{1}{n}$ и соответствующее значение x обозначать через x_n, т. е. при $\forall\, n \in \mathbb{N}$ для $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$

$$\exists\, x_n \in \overset{\circ}{U}_{\frac{1}{n}}(a) : f(x_n) \notin U_{\varepsilon_0}(A).$$

Но это означает, что для последовательности $\{x_n\}$ имеем

$$x_n \neq a, \quad x_n \to a \quad (n \to \infty), \quad f(x_n) \not\to A \quad (n \to \infty),$$

т. е. A не является пределом $f(x)$ при $x \to a$ в смысле определения 2, что противоречит исходному условию. Утверждение доказано.

Пример 1. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ не существует.

Рассмотрим для этого две сходящиеся к нулю последовательности $\{x_n\} = \left\{\dfrac{1}{2\pi n}\right\}$, $\{x'_n\} = \left\{\dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right\}$. Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \dfrac{1}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin \dfrac{1}{x'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

С помощью определения 2 предела заключаем, что никакая точка A не может быть пределом $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$, т. е. что этот предел не существует.

§ 3.4. Свойства пределов функции

Теорема 1. *Пусть функции f, g, h определены на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f \leqslant g \leqslant h$ на $\overset{\circ}{U}_{\delta_0}(a)$, $f(x) \to A$, $h(x) \to A$ при $x \to a$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $g(x) \to A$ при $x \to a$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ с помощью определения 3.3.2. Рассмотрим для этого произвольную последовательность

$$\{x_n\} \, : \, x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(a) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Имеем

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \leqslant h(x_n).$$

Поскольку $f(x_n) \to A$, $h(x_n) \to A$ $(n \to \infty)$, в силу соответствующего свойства последовательностей получаем, что

$$g(x_n) \to A \quad (n \to \infty).$$

В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ заключаем с помощью определения 3.3.2, что $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$.

Теорема 2. *Пусть функции f, g определены на $\mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}$. Тогда*

1°. $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

2°. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$;

3°. *если дополнительно $g(x) \neq 0$ при $x \in \mathring{U}_{\delta_0}(a)$, $B \neq 0$, то*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о всех свойств проводится по одной и той же схеме, поэтому приведем доказательство лишь для свойства 2°.

Пусть $\{x_n\}$ такова, что

$$x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(a) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$ в силу определения 3.3.2. По свойству пределов последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = AB$. В силу произвольности последовательности $\{x_n\}$ и определения 3.3.2 получаем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = AB$.

§ 3.5. Критерий Коши

Теорема 1 (критерий Коши существования конечного предела функции). *Пусть функция f определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Для существования конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\ \forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0).$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Тогда для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x') - A| < \varepsilon$, $|f(x'') - A| < \varepsilon\ \ \forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)$. Отсюда $|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon\ \ \forall x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, что и требовалось показать.

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши. Покажем, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Воспользуемся для этого определением 3.3.2 предела функции (т. е. определением в терминах последовательностей). Пусть $x_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ взято из условия Коши. В силу определения предела последовательности найдется $n_{\delta(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ такое, что $x_n \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$ $\forall n \geqslant n_{\delta(\varepsilon)} = \overline{n_\varepsilon}$. Отсюда и из условия Коши имеем

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geqslant \overline{n_\varepsilon}.$$

В силу критерия Коши для последовательностей последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$.

Для завершения доказательства остается показать, что для любой последовательности $\{x'_n\}$, $x'_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x'_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$ (существующий по уже доказанному) также равен A. Предположим противное: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n) = B$ для некоторой последовательности $\{x'_n\}$, $x'_n \in \mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$, $x'_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Рассмотрим последовательность $f(x_1)$,

$f(x_2')$, $f(x_3)$, $f(x_4')$, $\ldots$ Она, очевидно, расходится (имеет два различных частичных предела A и B). Это противоречит доказанной сходимости всякой последовательности значений функции для сходящейся к x_0 значений аргументов.

Теорема доказана.

§ 3.6. Односторонние пределы

Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Множество $U_\delta(x_0 - 0) = (x_0 - \delta, x_0]$ называют *левой полуокрестностью точки x_0 радиуса δ.* Через $U(x_0 - 0)$ обозначают левую полуокрестность точки x_0 произвольного радиуса.

Множество $U_\delta(x_0 + 0) = [x_0, x_0 + \delta)$ называется *правой полуокрестностью точки x_0 радиуса δ.* Через $U(x_0 + 0)$ обозначают правую полуокрестность точки x_0 произвольного радиуса.

Проколотыми полуокрестностями называют соответственно

$$\begin{aligned}
\mathring{U}_\delta(x_0 - 0) &= U_\delta(x_0 - 0) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0),\\
\mathring{U}_\delta(x - 0) &= U_\delta(x - 0) \setminus \{x_0\},\\
\mathring{U}_\delta(x_0 + 0) &= U_\delta(x_0 + 0) \setminus \{x_0\} = (x_0, x_0 + \delta),\\
\mathring{U}(x_0 + 0) &= U(x_0 + 0) \setminus \{x_0\}.
\end{aligned}$$

Определение. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, функция f определена на $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0 - 0)$. Точка $A \in \hat{\mathbb{R}}$ называется *пределом слева функции f в точке x_0* (пишут $f(x_0 - 0) \coloneqq \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,:\, \forall x \in \mathring{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0 - 0), \quad f(x) \in U_\varepsilon(A).$$

Аналогично определяется предел справа функции в точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Он обозначается через $f(x_0 + 0)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Будем пользоваться также следующими обозначениями для пределов:

$$f(-\infty) \coloneqq \lim_{x \to -\infty} f(x), \quad f(+\infty) \coloneqq \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Упражнение 1. Сформулировать определения пределов слева и справа в терминах последовательностей.

З а м е ч а н и е 1. Можно расширить общее определение предела функции $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $A \in \hat{\mathbb{R}}$, считая в нем a либо числом, либо одним из символов $-\infty$, $+\infty$, ∞, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Тогда это расширенное общее определение предела функции будет содержать и только что введенные понятия предела слева и предела справа.

Лемма 1. *Пусть* $x_0 \in \mathbb{R}$, *функция* f *определена на* $\mathring{U}_{\delta_0}(x_0)$. *Тогда для существования* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *необходимо и достаточно существования каждого из пределов* $f(x_0 - 0)$ *и* $f(x_0 + 0)$ *и их равенства* $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Упражнение 2. Доказать лемму.

§ 3.7. Пределы монотонных функций

Определение. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется *возрастающей* (*убывающей*) *на* $E \subset X$, если из $x_1, x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ($f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

Если вместо нестрогого неравенства можно написать строгое, функцию называют *строго возрастающей* (*строго убывающей*).

Теорема 1. *Пусть* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, *функция* f *возрастает на* (a, b). *Тогда*

$$\exists \lim_{x \to b-0} = \sup_{(a,b)} f(x).$$

З а м е ч а н и е 1. В случае $b = +\infty$ под $+\infty - 0$ понимается $+\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sup\limits_{(a,b)} f = B \leqslant +\infty$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения верхней грани функции следует $\exists\, x_\varepsilon \in (a,b)$: $f(x_\varepsilon) \in U_\varepsilon(B)$. Выберем $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ таким, что $x_\varepsilon \notin U_\delta(b)$ (т. е. $U_\delta(b)$ лежит правее x_ε). Тогда, в силу возрастания функции f, $f(\mathring{U}_\delta(b-0)) \subset U_\varepsilon(B)$. Следовательно, $\exists\, f(b-0) = B$.

Упражнение 1. Доказать соответствующую теорему для убывающей функции, а также для предела $f(a+0)$.

Следствие. *Пусть функция f монотонна на $(a,b) \ni x_0$. Тогда существуют конечные пределы $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$.*

§ 3.8. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение функций

Определение. Пусть $a \in \mathbb{R}$ или является одним из символов $-\infty$, $+\infty$, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$). Функция f: $U(a) \to \mathbb{R}$ называется *бесконечно малой* (*бесконечно большой*) *при $x \to a$*, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$).

Упражнение 1. Показать, что произведение конечного числа бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

Упражнение 2. Показать, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную является бесконечно малой функцией.

Далее будем считать, что функции f, g определены в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(a)$, где $a \in \mathbb{R}$ либо является одним из символов: $a = -\infty$, $+\infty$, $x_0 - 0$, $x_0 + 0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$).

Определение. Пусть существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$|f(x)| \leqslant C|g(x)| \quad \forall\, x \in \mathring{U}(a).$$

Тогда пишут: $f = O(g)$ при $x \to a$.

Определение. Функции f и g называются *функциями одного порядка при* $x \to a$, если

$$f = O(g), \quad g = O(f) \quad \text{при} \quad x \to a.$$

При этом пишут $f(x) \asymp g(x)$, $x \to a$.

Лемма 1. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = K \neq 0$. *Тогда f и g являются функциями одного порядка при $x \to a$.*

Доказательство. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = K > 0$. Следовательно, при некотором $\delta > 0$

$$\frac{1}{2}|K| = \frac{|g(x)|}{|f(x)|} \leqslant \frac{3}{2}|K|$$

для $\forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a)$. Отсюда

$$|g(x)| \leqslant \frac{3}{2}|K|\,|f(x)|, \quad |f(x)| \leqslant \frac{2}{|K|}|g(x)| \quad \forall\, x \in \mathring{U}_\delta(a),$$

т. е. f и g — функции одного порядка.

Определение. Функции f и g называются *эквивалентными* (*асимптотически равными*) *при* $x \to a$ (записывается $f \sim g$ при $x \to a$), если $f(x) = \lambda(x)g(x)$, $x \in \mathring{U}(a)$, причем $\lim\limits_{x\to a} \lambda(x) = 1$.

Отношение эквивалентности обладает свойствами:

1° $f \sim g$ при $x \to a \Rightarrow g \sim f$ при $x \to a$ (симметрия);

2° $f \sim g$, $g \sim h$ при $x \to a \Rightarrow f \sim f$ при $x \to a$ (транзитивность);

Упражнение 3. Доказать свойства 1°, 2°.

Лемма 2. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 1$. *Тогда $f \sim g$ при $x \to a$.*

Примеры.

a) $x^2 = O(x)$ при $x \to 0$;

b) $x = O(x^2)$ при $x \to +\infty$;

c) $\dfrac{2x^4+1}{x^2-1} \asymp x^2$ при $x \to +\infty$;

d) $\dfrac{x}{x^2-1} \sim x$ при $x \to 0$;

e) позднее будет показано, что при $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

Определение. Функция g называется *бесконечно малой по сравнению с функцией f при $x \to a$* (записывается $g = o(f)$ при $x \to a$), если $g(x) = \varepsilon(x) f(x)$, $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, причем $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Если при этом функции f, g являются бесконечно малыми при $x \to a$, то говорят, что функция g является *бесконечно малой более высокого порядка*, чем функция f.

Запись $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to a$ означает согласно определению, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Примеры.

a) $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$;

b) $x = o(x^2)$ при $x \to +\infty$.

З а м е ч а н и е 1. Последние три определения наиболее содержательны, когда f и g — бесконечно малые или бесконечно большие функции.

Теорема. *Пусть $f \sim f_1$, $g \sim g_1$, при $x \to a$. Если существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно заметить, что

$$\frac{f}{g} = \frac{\lambda_1 f_1}{\lambda_2 g_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

и что

$$\lim_{x \to a} \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} = 1.$$

Пример.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Глава 4
НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 4.1. Непрерывность функции в точке

Будем считать, что функция f определена на $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$.

Определения. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняется какое-либо из следующих условий:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

(2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$ $\left(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \equiv \lim\limits_{x \to x_0}\right)$;

(3) для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \ \forall\, x$: $|x - x_0| < \delta$;

(4) для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$;

(5) для $\forall\, U(f(x_0))\ \exists\, U(x_0)$: $f(U(x_0)) \subset U(f(x_0))$;

(6) для $\forall\, \{x_n\}$: $x_n \in U(x_0)$, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ имеет место $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

Эквивалентность определений (1)–(6) следует из эквивалентности соответствующих определений предела функции.

Обратим внимание на то, что в определении (6) не запрещается x_n совпадать с x_0. При добавлении в определение (6) условия $x_n \neq x_0$ оно меняется на эквивалентное. В определении (3) не запрещается x совпадать с x_0.

Теорема 1 (о сохранении знака). *Пусть f непрерывна в x_0, $f(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists\, U(x_0)$: $\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x_0)$ $\forall\, x \in U(x_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непрерывность в точке x_0 означает, в частности, что f определена на некоторой окрестности точки x_0. Пусть, для определенности, $f(x_0) = d > 0$.

Возьмем $\varepsilon = \frac{d}{2} > 0$. Тогда, по определению (3) непрерывности, существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \frac{d}{2}$ при $|x - x_0| < \delta$, откуда следует, что

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} > 0 \text{ при } x \in U_\delta(x_0).$$

Теорема 2 (свойства непрерывных функций). *Пусть функции f, g непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f + g$, $f - g$, fg, а при $g(x_0) \neq 0$ — и $\frac{f}{g}$ непрерывны в точке x_0.*

Доказательство. Напомним, что $(f \pm g)(x) \coloneqq$ $\coloneqq f(x) \pm g(x)$. Аналогично определяются произведение и частное двух функций. Докажем лишь, что $\frac{f}{g}$ непрерывна в x_0 (для $f \pm g$ и fg доказательства аналогичны).

По предыдущей теореме, $\exists\, U(x_0)$: $\operatorname{sign} g(x) = \operatorname{sign} g(x_0)$, так что $g(x) \neq 0$ при $x \in U(x_0)$ и частное $\frac{f}{g}$ определено на $U(x_0)$. Имеем теперь, используя свойства пределов и непрерывность f, g:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0),$$

что и требовалось показать.

§ 4.2. Предел и непрерывность сложной функции

Пусть функция f определена на X, а функция φ — на T, причем $\varphi(T) \subset X$. Тогда сложная функция (суперпозиция, композиция) $f \circ \varphi$ определяется на T формулой

$$(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t)), \quad t \in T.$$

Теорема 1. *Пусть f непрерывна в точке x_0, φ непрерывна в точке t_0, $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда $f \circ \varphi$ непрерывна в точке t_0.*

Доказательство. Пусть $y_0 = f(x_0)$, $U(y)$ — произвольная окрестность y_0. В силу непрерывности f в x_0

$$\exists\, U(x_0)\ :\ f(U(x_0)) \subset U(y_0)$$

(это означает, в частности, что f определена на $U(x_0)$). В силу непрерывности φ в точке t_0 $\exists\, U(t_0)$: $\varphi(U(t_0)) \subset \subset U(x_0)$.

Последнее означает, в частности, что φ определена на $U(t_0)$ и значения ее в точках $U(t_0)$ лежат в $U(x_0)$. Следовательно, на $U(t_0)$ определена сложная функция $f \circ g$, причем

$$(f \circ g)(U(t_0)) \subset U(y_0), \quad \text{где} \quad y_0 = (f \circ g)(t_0).$$

В силу произвольности $U(y_0)$ это означает непрерывность $f \circ g$ в точке t_0 (см. определение (5) непрерывности).

Установим теперь две теоремы о пределе сложной функции.

Теорема 2. *Пусть f непрерывна в точке x_0, φ определена на $\mathring{U}(t_0)$ и $\exists \lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0$.*

Тогда

$$\exists \lim_{t \to t_0} (f \circ g)(t) = f(\lim_{t \to t_0} \varphi(t)) = f(x_0).$$

Доказательство. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, приходим к тому, что для $\forall\, U(y_0)$ $\exists\, U(t_0)$: $(f \circ g)(\mathring{U}(t_0)) \subset U(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$.

В силу произвольности $U(y_0)$ это означает, что утверждение теоремы доказано.

Другое доказательство теоремы состоит в следующем. Доопределим функцию φ в точке t_0 (или переопределим ее, если она изначально была определена в t_0), положив $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда φ становится непрерывной в точке t_0, и остается воспользоваться теоремой 1.

Теорема 3. *Пусть* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. *Пусть* φ *определена на* $\mathring{U}(t_0)$, $\varphi(\mathring{U}(t_0)) \not\ni x_0$ *и* $\exists \lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = x_0$.

Тогда

$$\exists \lim_{t\to t_0} (f \circ g)(t) = y_0.$$

Доказательство. Доопределим (переопределим) функцию f в точке x_0, положив $f(x_0) = y_0$. Остается воспользоваться теоремой 2.

§ 4.3. Односторонняя непрерывность и точки разрыва

Напомним, что $U(x_0{+}0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, означает полуинтервал $[x_0, x_0 + \delta)$ при некотором $\delta > 0$.

Определение. Функция f, определенная на $U(x_0 + 0)$ $(U(x_0 - 0))$, называется *непрерывной справа* (*слева*) *в точке* x_0, если

$$\exists\, f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (\exists\, f(x_0 - 0) = f(x_0)).$$

Упражнение 1. Доказать, что функция f непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в x_0 справа и слева.

Определение. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$, $X \supset \mathring{U}(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, называется *разрывной в точке* x_0, если она не определена в x_0 или если определена в x_0, но не является непрерывной в x_0.

Определение. Точка x_0 разрыва функции f называется *точкой разрыва I-го рода*, если существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$. При этом разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции f в точке x_0*. Если при этом $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, т. е. скачок равен нулю, то x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.

Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва I-го рода, называется *точкой разрыва II-го рода*.

§ 4.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение 1. Функция, определенная на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется *непрерывной на* этом *отрезке.* При этом под непрерывностью в точках a, b понимается соответственно непрерывность справа и слева.

Аналогично определяется непрерывность на интервале, на полуинтервале.

Определение 2. Будем говорить, что функция f, определенная на E, *достигает своей верхней* (*нижней*) *грани*, если

$$\exists\, x_0 \in E \,:\, f(x_0) = \sup_E f \quad (f(x_0) = \inf_E f).$$

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Функция, непрерывная на отрезке, ограничена и достигает своих верхней и нижней граней.*

Доказательство. Пусть $B \coloneqq \sup\limits_{[a,b]} f \leqslant +\infty$. По определению верхней грани

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n \in [a, b] \,:\, f(x_n) \in U_{\frac{1}{n}}(B).$$

Следовательно, $f(x_n) \to B$ при $n \to \infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как $a \leqslant x_n \leqslant b \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$. По теореме Больцано–Вейерштрасса выделим из нее сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $x_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$.

Переходя к пределу в неравенстве $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, получаем, что $x_0 \in [a, b]$. В силу непрерывности функции f в точке x_0 имеем

$$f(x_{n_k}) \to f(x_0) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

С другой стороны, $\{f(x_{n_k})\}$ — подпоследовательность сходящейся к B последовательности. Поэтому $f(x_{n_k}) \to B$ при $k \to \infty$.

Из последних двух соотношений получаем, что

$$\sup_{[a,b]} f = B = f(x_0).$$

Отсюда следует, во-первых, что $\sup\limits_{[a,b]} f < +\infty$, т. е. что функция f ограничена сверху, и, во-вторых, что функция f достигает своей верхней грани в точке x_0.

Аналогично можно доказать, что функция f ограничена снизу и достигает своей нижней грани.

Теорема доказана.

Упражнение 1. Сохранится ли доказательство теоремы Вейерштрасса, если в ее условиях отрезок $[a,b]$ заменить на интервал (a,b)? Останется ли верным утверждение?

Следствие 1. *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(x) > 0$ $\forall\, x \in [a,b]$. Тогда $\exists\, d > 0$: $f(x) \geqslant d$ $\forall\, x \in \in [a,b]$.*

Теорема 2 (Больцано–Коши о промежуточном значении функции). *Пусть функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть C находится между A и B.*

Тогда $\exists\, \xi \in [a,b]$: $f(\xi) = C$.

Доказательство. Пусть, для определенности, $A = f(a) \leqslant C \leqslant f(b) = B$. Поделим отрезок $[a,b]$ пополам и через $[a_1,b_1]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_1) \leqslant C \leqslant f(b_1)$. Поделим отрезок пополам и через $[a_2,b_2]$ обозначим такую его половину, для которой $f(a_2) \leqslant C \leqslant f(b_2)$. Продолжая процесс, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков $\{[a_n,b_n]\}$, для которых

$$f(a_n) \leqslant C \leqslant f(b_n).$$

Пусть $\xi \in [a_n, b_n]$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда при $n \to \infty$ $a_n \to \xi$, $b_n \to \xi$ и (в силу непрерывности функции f в точке ξ)

$$f(a_n) \to f(\xi), \quad f(b_n) \to f(\xi) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Переходя к пределу в последнем неравенстве, получаем

$$f(\xi) \leqslant C \leqslant f(\xi) \Rightarrow f(\xi) = C,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки. Тогда*

$$\exists\, \xi \in (a, b) \ : \ f(\xi) = 0.$$

Следствие 3. *Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$, $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$. Тогда функция f принимает все значения из $[m, M]$ и только эти значения.*

§ 4.5. Обратные функции

Рассмотрим (числовую) функцию $f : X \to Y_f$, заданную на (числовом) множестве X. Здесь Y_f означает множество ее значений. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда функция (отображение) f задает взаимно однозначное соответствие $X \leftrightarrow Y_f$. Поставив в соответствие каждому $y \in Y_f$ именно то (единственное) значение $x \in X$, для которого $f(x) = y$, обозначим полученную функцию символом

$$f^{-1} \ : \ Y_f \to X.$$

Функция f^{-1} называется обратной по отношению к f. В силу ее определения

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y),$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall\, x \in X,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall\, y \in Y_f.$$

Лемма. *Пусть функция* $f\colon X \to Y_f$ *строго монотонна на* X. *Тогда обратная функция* $f^{-1}\colon Y_f \to X$ *также строго монотонна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Упражнение 1. Показать, что графики f и f^{-1} симметричны относительно прямой $y = x$.

Теорема 1. *Пусть функция* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *задана на отрезке* $[a, b]$, *строго возрастает и непрерывна.*

Тогда обратная функция задана на отрезке $[A, B] = \left[\min\limits_{[a,b]} f, \max\limits_{[a,b]} f\right]$, *строго возрастает и непрерывна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем область значений Y_f функции f. Поскольку $A \leqslant f(x) \leqslant B \ \ \forall\, x \in [a, b]$, то $Y_f \subset [A, B]$. С другой стороны, по теореме Больцано–Коши для $\forall\, C \in [A, B]$ $\exists\, c \in [a, b]$: $f(c) = C$, так что $[A, B] \subset Y_f$. Следовательно, $Y_f = [A, B]$.

Строгое возрастание f^{-1} следует из леммы.

Установим непрерывность f^{-1}. Пусть сначала $y_0 \in (A, B)$, так что $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a, b)$. Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b].$$

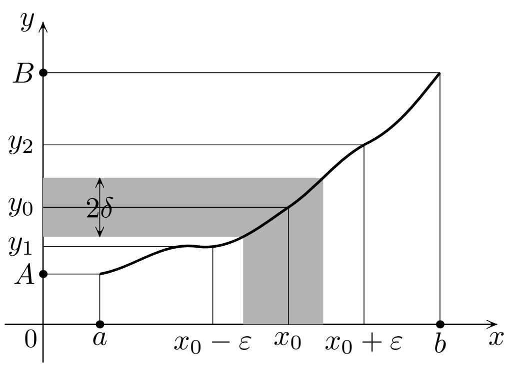


Рис. 4.1

Функция f устанавливает взаимно однозначное соответствие отрезка $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$ и отрезка $[y_1, y_2] \subset [A, B]$. При этом $y_1 < y_0 < y_2$. Возьмем $\delta > 0$ столь малым, что $(y_0-\delta, y_0+\delta) \subset (y_1, y_2)$. Тогда

$$f^{-1}(U_\delta(y_0)) \subset f^{-1}((y_1, y_2)) = U_\varepsilon(x_0).$$

Следовательно, f^{-1} непрерывна в точке y_0.

Пусть теперь $y_0 = A$ или $y_0 = B$. Тогда (односторонняя) непрерывность f^{-1} в точке y_0 доказывается аналогично (с использованием односторонних окрестностей).

Теорема доказана.

Аналогично формулируется и доказывается теорема для строго убывающей функции.

Теорема 2. *Пусть функция* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *задана на интервале* (a,b), *строго возрастает и непрерывна.*

Тогда обратная функция задана на интервале $(A,B) = \left(\inf\limits_{(a,b)} f, \sup\limits_{(a,b)} f\right)$, *строго возрастает и непрерывна.*

Доказательство. Найдем область значений Y_f функции f. Покажем, что

$$A < f(x) < B \quad \forall\, x \in (a,b). \tag{1}$$

В самом деле, допущение противного, например, что $f(x_0) \geqslant B$ при некотором $x_0 \in (a,b)$ означало бы в силу строгого возрастания f, что $f(x) > B$ при $\forall\, x \in (x_0, b)$, что противоречит тому, что $B = \sup\limits_{(a,b)} f$.

Покажем теперь, что

$$\forall\, y_0 \in (A,B) \quad \exists\, x_0 \in (a,b) \;:\; f(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Из определения верхней и нижней граней следует, что

$$\exists\, x_1, x_2 \in (a,b) \;:\; f(x_1) < y_0, \quad f(x_2) > y_0.$$

Применяя к сужению $f_{[x_1,x_2]}$ функции f на отрезок $[x_1,x_2]$ теорему Больцано–Коши о промежуточном значении непрерывной функции, получаем, что

$$\exists\, x_0 \in [x_1,x_2] \,:\, f(x_0) = y_0.$$

Таким образом, (2) установлено.

Из (1), (2) следует, что $f(a,b) = (A,B)$.

Остается показать, что обратная функция f^{-1} непрерывна в каждой точке $y_0 \in (A,B)$. Это делается так же, как в теореме 1. Теорема доказана.

Аналогично формулируется вариант теоремы 2 для строго убывающей функции, а также варианты теоремы об обратной функции для полуинтервалов.

§ 4.6. Показательная функция

Буквами r, ρ с индексами будем обозначать рациональные числа. Число $a > 0$.

Будем считать известными следующие свойства показательной функции a^r рационального аргумента r.

1° $r_1 < r_2 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$, $a^{r_1} < a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;

2° $a^{r_1}a^{r_2} = a^{r_1+r_2}$;

3° $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1r_2}$;

4° $a^0 = 1$;

5° $(ab)^r = a^rb^r$.

Из этих свойств следует, что

$$a^{-r}a^r = a^0 = 1 \quad\Rightarrow\quad a^{-r} = \frac{1}{a^r} \quad\Rightarrow\quad a^r > 0 \quad \forall\, r. \qquad (1)$$

Лемма (Бернулли). *Пусть $a > 1$, r — рациональное число, $|r| \leqslant 1$. Тогда*

$$|a^r - 1| \leqslant 2|r|(a-1). \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\lambda \coloneqq a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$. Тогда $a^{\frac{1}{n}} = 1 + \lambda$, $a \geqslant 1 + n\lambda$, откуда $\lambda \leqslant \frac{a-1}{n}$, т. е.

$$a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{1}{n}(a-1). \tag{3}$$

Пусть теперь $0 < r \leqslant 1$. Тогда при некотором $n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{n+1} < < r \leqslant \frac{1}{n}$. С помощью (3) и монотонности a^r имеем

$$a^r - 1 < a^{\frac{1}{n}} - 1 \leqslant \frac{1}{n}(a-1) \leqslant \frac{2}{n+1}(a-1) < 2r(a-1)$$

и неравенство (2) в этом случае установлено.

Пусть теперь $-1 \leqslant r < 0$. Тогда

$$|a^r - 1| = a^r|a^{-r} - 1| \leqslant a^r 2(-r)(a-1).$$

Учитывая, что $a^r < 1$, получаем отсюда (2).

Лемма доказана.

Определение. Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.

Тогда

$$a^x \coloneqq \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Это определение корректно в следующем смысле:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора последовательности $\{r_n\}$ $(r_n \to x)$;
3) в случае $x = r$ значение a^r по этому определению совпадает с прежним.

Установим 1). Пусть $a > 1$, $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. Тогда $|r_n - r_m| \leqslant 1$ $\forall\, n, m \geqslant n_1$ в силу сходимости последовательности $\{r_n\}$. С помощью неравенства Бернулли имеем для $n, m \geqslant n_1$:

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| \leqslant a^{r_m} 2|r_n - r_m|(a-1). \tag{4}$$

Заметим, что последовательность $\{r_n\}$ ограничена (как всякая сходящаяся), поэтому при некотором $M > 0$

$$a^{r_m} \leqslant M \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

В силу сходимости последовательности $\{r_n\}$ для нее выполнено условие Коши:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \ : \ |r_n - r_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Отсюда и из (4) при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ имеем

$$|a^{r_n} - a^{r_m}| \leqslant M2(a-1)\varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Это означает, что для последовательности $\{a^{r_n}\}$ выполнено условие Коши. В силу критерия Коши она сходится, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен. Из (1) и 1° следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} > 0$.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Тогда $a^{r_n} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$ и существование $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ следует из уже установленного существования $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{a}\right)^{r_n}$.

Случай $a = 1$ тривиален.

Установим 2). Пусть $a > 1$, $r_n \to x$, $r'_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда $r_n - r'_n \to 0$ при $n \to \infty$, и с помощью неравенства Бернулли имеем

$$|a^{r_n} - a^{r'_n}| = a^{r'_n}|a^{r_n - r'_n} - 1| \leqslant M2|r_n - r'_n|(a-1) \to 0 \ (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} - \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} - a^{r'_n}) = 0,$$

что и требовалось показать.

Случай $0 < a < 1$ сводится к рассмотренному с помощью равенства $a^{r_n} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$.

Установим 3). Для этого достаточно рассмотреть последовательность $\{r_n\}$, где $r_n = r \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Определение. При $a > 0$ функция $x \to a^x$, $x \in \in (-\infty, +\infty)$ называется *показательной с основанием* a.

Теорема 1. *Показательная функция имеет следующие свойства:*

1°. $a^x > 0 \ \ \forall\, x \in (-\infty, +\infty)$;

2°. *при* $a > 1$ *строго возрастает, при* $0 < a < 1$ *строго убывает;*

3°. $a^x a^y = a^{x+y}$;

4°. $(bc)^x = b^x c^x$;

5°. $(a^x)^y = a^{xy}$;

6°. *непрерывна на* $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. 1°. Следует из 2° и (1).

2°. Пусть $a > 1$, $x < y$. Пусть r, ρ — рациональные числа, причем $x < r < \rho < y$.

Пусть $r_n \to x$, $\rho_n \to y$ $(n \to \infty)$, причем $r_n \leqslant r$, $\rho_n \geqslant \rho$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Тогда, используя монотонность показательной функции с рациональными показателями и предельный переход в неравенстве, получаем

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \leqslant a^r < a^\rho \leqslant \lim_{n\to\infty} a^{\rho_n} = a^y,$$

откуда следует, что $a^x < a^y$.

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

3°. Пусть $r_n \to x$, $\rho_n \to y$ $(n \to \infty)$. Тогда

$$a^x a^y = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} a^{\rho_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} a^{\rho_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+\rho_n} = a^{x+y}.$$

В качестве следствия получаем отсюда, что $a^x a^{-x} = = a^0 = 1$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

4°. Доказать в качестве упражнения.

В качестве следствия получаем, что

$$a^x > b^x \quad \text{при} \quad a > b, \quad x > 0,$$

для чего достаточно в 4° взять $c > 1$, $bc = a$.

5°. Пусть $a > 1$, $x > 0$, $y > 0$, $r'_n \uparrow x$, $r''_n \downarrow x$, $\rho'_n \uparrow y$, $\rho''_n \downarrow y$.

Тогда

$$a^{xy} \leftarrow a^{r'_n\rho'_n} = (a^{r'_n})^{\rho'_n} \leqslant (a^x)^{\rho'_n} \leqslant (a^x)^y \leqslant (a^x)^{\rho''_n} \leqslant (a^{r''_n})^{\rho''_n} = \\ = a^{r''_n\rho''_n} \to a^{xy},$$

откуда следует, что $(a^x)^y = a^{xy}$.

Случаи других знаков x, y рассматриваются аналогично.

Случай $0 < a < 1$ сводится к случаю $a > 1$ с помощью соотношения $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$.

6°. Заметим сначала, что неравенство Бернулли допускает следующее обобщение:

$$|a^x - 1| \leqslant 2|x|(a-1) \quad \text{при} \quad a > 1, \quad |x| \leqslant 1.$$

Его можно получить, записав неравенство (2) для r_n (вместо r), где $r_n \to x$ $(n \to \infty)$, и перейдя в этом неравенстве к пределу.

Установим непрерывность функции a^x в произвольной точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$. Пусть сначала $a > 1$. Тогда

$$|a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0}| = a^{x_0}|a^{\Delta x} - 1| \leqslant a^{x_0}2|\Delta x|(a-1) \to 0$$

при $\Delta x \to 0$, что и требовалось показать.

Случай $0 < a < 1$ сводится к случаю $a > 1$ с помощью соотношения $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$.

§ 4.7. Логарифмическая и степенная функции

Определение. Функция, обратная к функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, называется *логарифмической функцией* и обозначается $y = \log_a x$. В случае $a = e$ она обозначается $\ln x \coloneqq \log_e x$.

Теорема 1. *Логарифмическая функция* $\log_a x$*:* $(0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$ *строго монотонна и непрерывна на* $(0, +\infty)$*, область ее значений есть* $(-\infty, +\infty)$*.*

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда $A = \inf\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0$, $B = \sup\limits_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty$.

В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$, $a^{-n} < \dfrac{1}{1+n\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Остается воспользоваться теоремой об обратной функции.

Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Из того, что показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, вытекают тождества

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a a^x = x.$$

Установим некоторые свойства логарифмической функции.

1°. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $x, y > 0$. Сравним $a^{\log_a xy} = xy$ и $a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = xy$. Из их совпадения следует 1° (объяснить, почему).

2°. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Сравним $a^{\log_a x^\alpha} = x^\alpha$ и $a^{\alpha \cdot \log_\alpha x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha$. Из их совпадения следует 2°.

3°. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Сравним $a^{\log_a b \cdot \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a$ и $a^1 = a$. Из их совпадения следует 3°.

Определение. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция $x \to x^\alpha$: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ называется *степенной функцией* с показателем степени α.

Степенную функцию можно представить в виде

$$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций степенная функция непрерывна на области определения $(0, +\infty)$.

При $\alpha > 0$ степенную функцию доопределяют в точке 0 значением 0. Тогда она становится непрерывной на $[0, +\infty)$.

§ 4.8. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции

Определение тригонометрических функций известно из школьного курса. Здесь будет установлена их непрерывность.

Лемма.

$$|\sin x| \leqslant |x| \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

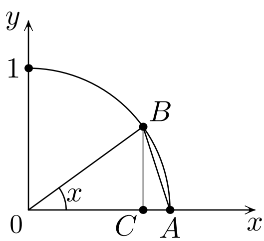


Рис. 4.2

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим часть тригонометрического круга, лежащую в первом квадранте.

Пусть радианная мера угла $\angle AOB$ равна x. Тогда длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ равна x, а $\sin x = |[BC]|$ — длине отрезка $[BC]$. Но из геометрии известно, что

$$\sin x = |[B,C]| < |[B,A]| < x.$$

Этим оценка (1) установлена при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. В силу четности обеих частей (1) она верна и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Остается заметить, что (1) очевидно при $x = 0$ и при $|x| \geqslant 1$.

Теорема 1. *Функции* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ *непрерывны на областях их определения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{x_0}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}\,.$$

В силу (1)

$$|\Delta y| \leqslant 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant |\Delta x|,$$

так что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, что и доказывает непрерывность $\sin x$ в точке x_0.

Непрерывность функции $\cos x$ можно доказать аналогично или воспользоваться равенством $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ и теоремой о непрерывности суперпозиции непрерывных функций.

Функции $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывны в точках, где знаменатели отличны от нуля, как частные непрерывных функций.

Определение. Символами

$$\arcsin x \ : \ [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
$$\arccos x \ : \ [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$
$$\operatorname{arctg} x \ : \ (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$
$$\operatorname{arcctg} x \ : \ (-\infty, \infty) \to (0, \pi)$$

обозначаются соответственно функции, обратные к сужению $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, сужению $\cos x$ на $[0, \pi]$, сужению $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, сужению $\operatorname{ctg} x$ на $(0, \pi)$.

Теорема 2. *Функции* $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ *непрерывны на областях их определений. При этом непрерывность* $\arcsin x$, $\arccos x$ *в концах отрезков — областей их определений, понимается как односторонняя.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы об обратных функциях.

§ 4.9. Некоторые замечательные пределы

1°.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

Рассматривая в тригонометрическом круге сектор с углом радианной меры x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, и два треугольника с тем же углом (см. рис. 4.3) и сравнивая их площади, получаем

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

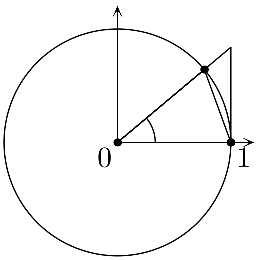


Рис. 4.3

откуда

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

В силу четности функций $\frac{\sin x}{x}$ и $\cos x$ те же неравенства верны и при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$. Переходя в них к пределу при $x \to 0$ и учитывая, что $\cos x \to \cos 0 = 1$ в силу его непрерывности, получаем (1).

2°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. В силу непрерывности функции $\cos x$ имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1.$$

3°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$.

Заметим, что $\frac{\arcsin x}{x} = \left.\frac{y}{\sin y}\right|_{y=\arcsin x}$, где вертикальная черта означает, что в дробь $\frac{y}{\sin y}$ вместо y следует подставить $\arcsin x$. Таким образом, $\frac{\arcsin x}{x}$ представлена в виде суперпозиции двух функций. Используя непрерывность $\arcsin x$ в точке $x = 0$, (1) и теорему о пределе суперпозиции двух функций, завершаем доказательство.

Видоизмененный вариант доказательства состоит в доопределении единицей функции $\frac{y}{\sin y}$ в точке $y = 0$ и использовании теоремы о непрерывности суперпозиции двух непрерывных функций.

4°. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$. Представив $\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ в виде $\left.\frac{y}{\operatorname{tg} y}\right|_{y=\operatorname{arctg} x}$, повторяем рассуждения из доказательства 3°.

5°. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. Покажем сначала, что

$$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{2}$$

Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$ и что при доказательстве этого было установлено, что последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ убывающая.

Пусть $0 < x < 1$, $n_x \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n_x+1} < x \leqslant \frac{1}{n_x}$. Тогда

$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{-2}\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x+2} = \left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} \leqslant \\ \leqslant (1+x)^{\frac{1}{x}} \leqslant \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}. \tag{3}$$

Правая часть неравенства является, как легко проверить, монотонной функцией x. Поэтому

$$\exists \lim_{x\to 0+0}\left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Обоснование первого из этих равенств состоит в том, что если функция f имеет предел $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$, то он совпадает с пределом $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ для произвольной последовательности $\{x_n\}$: $x_n \to 0+0$. В нашем случае $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

Итак, показано, что правая часть (3) стремится к e при $x \to 0+0$.

Аналогично показывается, что левая часть (3) также стремится к e.

Переходя к пределу в неравенствах (3), получаем (2).

Покажем, что

$$\lim_{x\to 0-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{4}$$

Пусть $-1 < x < 0$. Положив $y \coloneqq -x$, $z \coloneqq \frac{y}{1-y} = \frac{-x}{1+x} > 0$, имеем

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1}.$$

Таким образом,

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+z)^{\frac{1}{z}+1}\Big|_{z=\frac{-x}{1+x}}, \quad 0 < x < 1,$$

т. е. функция $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ представлена в виде суперпозиции двух функций $(f \circ \varphi)(x)$, где

$$f\,:\,(0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad \varphi(-1,0) \to (0,+\infty),$$

причем $\lim\limits_{x\to 0-0} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{z\to 0+0} f(z) = e$.

Применяя теорему о пределе суперпозиции, получаем, что

$$\lim_{x\to 0-0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \tag{5}$$

Из (4), (5) следует 5°.

З а м е ч а н и е 1. Теорема о пределе суперпозиции $f \circ \varphi$ была установлена ранее для случая, когда функции f, φ определены в проколотых окрестностях предельных точек.

Упражнение 1. Перенести эту теорему на нужный нам случай односторонних пределов.

З а м е ч а н и е 2. Вместо теоремы о пределе суперпозиции можно воспользоваться доказанной теоремой о непрерывности суперпозиции непрерывных функций для $\tilde{f} \circ \tilde{\varphi}$, где

$$\tilde{f} = \begin{cases} (1+z)^{\frac{1}{z}+1} & \text{при } z > 0, \\ e & \text{при } z \leqslant 0, \end{cases} \quad \tilde{\varphi} = \begin{cases} 0 & \text{при } x \geqslant 0, \\ \dfrac{-x}{1+x} & \text{при } -1 < x < 0. \end{cases}$$

6°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Представив $\frac{1}{x}\log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$ в виде суперпозиции логарифмической функции и функции $\varphi(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, применяем теорему о пределе суперпозиции с учетом примера 5°.

7°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (частный случай 6°).

8°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Пусть $y = a^x - 1$. Тогда $x = \dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}$, $\dfrac{a^{x-1}}{x} = \left.\dfrac{y\ln a}{\ln(1+y)}\right|_{y=a^x-1}$.

Остается воспользоваться теоремой о пределе суперпозиции и примером 7°.

9°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (частный случай 8°).

Из рассмотренных примеров следует, что при $x \to 0$

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1.$$

10°. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ (доказать самостоятельно).

Глава 5
ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

§ 5.1. Производная

Определение. Пусть функция f определена в $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, если он существует и конечен, называется *производной функции* f *в точке* x_0 и обозначается символом $f'(x_0)$.

Вычисление производной от функции называется *дифференцированием.*

Упражнение 1. Доказать, что функция, имеющая производную в данной точке, непрерывна в ней.

Примеры. $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $(a^x)' = a^x \ln a$.

Теорема 1 (свойства производных, связанные с арифметическими операциями). *Пусть существуют* $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. *Тогда:*

1°. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

2°. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$, *в частности,* $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$;

3°. *если* $g(x_0) \neq 0$, *то*

$$\exists \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}\,.$$

Доказательство приведем лишь для формулы дифференцирования дроби, т. к. другие устанавливаются аналогично. Положим $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) -$

$-f(x_0)$, $\Delta g = g(x_0+\Delta x) - g(x_0)$. Тогда

$$\frac{\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} = \frac{(f(x_0)+\Delta f)g(x_0) - f(x_0)(g(x_0)+\Delta g)}{\Delta x\, g(x_0+\Delta x)g(x_0)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\, g(x_0) - f(x_0)\,\dfrac{\Delta g}{\Delta x}}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)} \to \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

при $x \to x_0$.

§ 5.2. Дифференциал

Определение. Пусть функция f определена в $U(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Пусть ее приращение в точке x_0 может быть представлено в виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (1)$$

при $A \in \mathbb{R}$.

Тогда функцию f называют *дифференцируемой в точке* x_0, а линейную функцию

$$df(x_0) = A\Delta x, \quad -\infty < \Delta x < \infty, \qquad (2)$$

— *дифференциалом функции* f *в точке* x_0.

Теорема 1. *Функция* f *дифференцируема в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда существует* $f'(x_0)$. *При этом* $A = f'(x_0)$.

Доказательство. 1°. Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда справедливо равенство (1).

Поделив его почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + o(1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим, что $\exists\, f'(x_0) = A$.

2°. Пусть теперь существует

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\,.$$

Тогда $f'(x_0) - \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = o(1)$ при $\Delta x \to 0$.

Умножая последнее равенство почленно на Δx, получаем

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0. \tag{3}$$

Это означает, что приращение функции f представлено в виде (1) с $A = f'(x_0)$, так что f дифференцируема в точке x_0.

Теорема 2. *Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда она непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. По условию теоремы приращение $\Delta f(x_0)$ представимо в виде (1). Из (1) следует, что $\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а это и означает непрерывность функции в точке x_0.

Пример $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$, показывает, что непрерывность функции в точке не влечет ее дифференцируемости в этой точке.

Последние две теоремы показывают, что дифференцируемость функции в точке x_0 и существование производной $f'(x_0)$ — эквивалентные условия и что каждое из них сильнее условия непрерывности функции в точке x_0.

Представление (1), как показано, можно записать в виде (3). Выражение дифференциала функции f в точке x_0 (2) соответственно принимает вид

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x, \quad -\infty < \Delta x < \infty.$$

В последней записи переменную Δx часто (ради симметрии записи) обозначают через $dx = \Delta x$. Тогда дифференциал $df(x_0)$ принимает вид

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx, \quad -\infty < dx < +\infty.$$

При этом dx называют *дифференциалом независимой переменной*, а $df(x_0)$ — *дифференциалом функции.* Символом $\dfrac{df}{dx}$ часто обозначают производную f', но теперь видно, что на него можно смотреть как на частное двух дифференциалов.

Теорема 3 (арифметические свойства дифференциалов). *Пусть функции f, g дифференцируемы в точке x_0. Тогда функции $f \pm g$, fg, и в случае $g(x_0) \neq 0$ $\frac{f}{g}$ также дифференцируемы в точке x_0, причем в этой точке*

1°. $d(f \pm g) = df \pm dg;$

2°. $d(fg) = g\,df + f\,dg;$

3°. $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}.$

Доказательство сразу следует из соответствующих формул для производных. Установим для примера лишь 2°. Формулу производной произведения $(fg)' = f'g + fg'$ домножим почленно на dx. Получим

$$d(fg) = (fg)'dx = g\,f'dx + f\,g'dx = g\,df + f\,dg.$$

§ 5.3. Геометрический смысл производной и дифференциала

Проведем секущую M_0M_h через точки графика функции $y = f(x)$ $M_0 = (x_0, f(x_0))$ и $M_h = (x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \neq 0$ (см. рис. 5.1).

Уравнение секущей M_0M_h имеет вид

$$y = k(h)(x - x_0) + y_0,$$

$$\text{где} \quad y = f(x_0), \quad k(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Устремим h к нулю. Тогда точка M_h будет стремиться к M_0, секущая — поворачиваться, меняя свой угловой коэффициент $k(h)$, который стремится к конечному пределу тогда и только тогда, когда существует $f'(x_0)$: $k(h) \to k_0 = f'(x_0)$.

Прямую, проходящую через точку графика $(x_0, f(x_0))$ и являющуюся «предельным положением секущей», называют *касательной прямой*. Дадим точное определение.

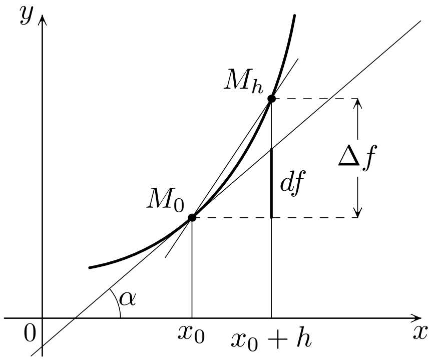


Рис. 5.1

Определение. Пусть существует $f'(x_0)$. *Касательной* к графику функции f в точке $(x_0, f(x_0))$ называется прямая

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \text{ где } y_0 = f(x_0).$$

Теорема 1. *Пусть функция f определена в $U(x_0)$ и существует $f'(x_0)$. Тогда среди всех прямых, проходящих через точку $(x_0, f(x_0))$ $(y_{\text{пр}} = \lambda(x - x_0) + y_0,\ y_0 = f(x_0))$, касательная к графику функции f и только она обладает свойством*

$$f(x) - y_{\text{пр}} = o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Доказательство. Поскольку f дифференцируема в точке x_0, имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ при } x \to x_0.$$

Отсюда

$$f(x) - y_{\text{пр}} = [f'(x_0) - \lambda](x - x_0) + o(x - x_0).$$

Правая часть равенства является $o(x-x_0)$ при $x \to x_0$ тогда и только тогда, когда $\lambda = f'(x_0)$, т. е. когда прямая $y_{\text{пр}} = \lambda(x - x_0) + y_0$ является касательной.

Доказанная теорема показывает, что касательная в окрестности точки касания расположена «ближе» к графику функции, чем другие прямые.

Производная $f'(x_0)$, являясь угловым коэффициентом касательной, равна $\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между осью абсцисс и касательной. Дифференциал функции $df(x_0) = f'(x)\Delta x$ при заданном Δx равен приращению ординаты касательной.

Определение. Пусть f непрерывна в точке x_0 и $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to \to +\infty$ $(-\infty,\ \infty)$ при $\Delta x \to 0$. Тогда говорят, что f имеет *бесконечную производную* в точке x_0, $f'(x_0) = +\infty$ $(-\infty, \infty)$ и что график функции f имеет в точке $(x_0, f(x_0))$ вертикальную касательную $x = x_0$.

Ранее рассмотренную касательную с конечным угловым коэффициентом $f'(x_0)$ называют часто *наклонной касательной*.

Определение 1. *Правой (левой) односторонней производной функции f в точке x_0* называется

$$f'_+(x_0) \coloneqq \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

$$\left[f'_-(x_0) \coloneqq \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right],$$

если этот предел существует и конечен.

Слово «односторонняя» часто опускают и называют $f'_+(x_0)$ *правой*, а $f'_-(x_0)$ — *левой* производной.

Теорема 2. *Производная $f'(x_0)$ существует тогда и только тогда, когда существуют $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0) = = f'_-(x_0)$.*

Докажите в качестве упражнения.

Теорема 3. *Пусть $\exists\, f'_+(x_0)$. Тогда функция f непрерывна справа в точке x_0.*

Докажите в качестве упражнения. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему о непрерывности слева.

Замечание 1. На основе односторонней производной можно ввести понятие односторонней касательной.

Упражнение 1. Рассмотрите с этой точки зрения пример $f(x) = |\sin x|$.

§ 5.4. Производная обратной функции

Теорема 1. *Пусть функция* $y = f(x)$ *непрерывна и строго монотонна в* $U(x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$. *Тогда обратная функция* $x = f^{-1}(y)$ *имеет производную в точке* $y_0 = f(x_0)$, *причем* $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. По теореме об обратной функции f^{-1} определена, строго монотонна и непрерывна на некоторой окрестности $U(y_0)$ точки y_0.

В силу дифференцируемости f в точке x_0 приращения $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ связаны соотношением
$$\Delta y = (f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x))\Delta x,$$
где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

В силу строгой монотонности f каждое из Δx, Δy однозначно определяется другим. Будем считать теперь Δy независимым, тогда $\Delta x = \varphi(\Delta y)$. При этом $\varphi(0) = 0$, φ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности $U(0)$ точки 0. Тогда
$$\Delta y = (f'(x_0) + \varepsilon(\varphi(\Delta y)))\Delta x.$$

По теореме о пределе суперпозиции $\varepsilon(\varphi(\Delta y)) \to 0$ при $\Delta y \to \to 0$. Тогда
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0) + \varepsilon(\varphi(\Delta y))} \to \frac{1}{f'(x_0)} \ \text{ при } \Delta y \to 0,$$
что и требовалось доказать.

Другое доказательство той же теоремы можно провести так:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}\bigg|_{\Delta x=\varphi(\Delta y)} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\varphi(\Delta y)\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\Delta x\right)}\bigg|_{\Delta x=\varphi(\Delta y)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\Delta x\right)} = \frac{1}{f'(x_0)}\,.$$

Здесь запись $\frac{\Delta y}{\Delta x}\left(\Delta x\right)$ означает, что отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ рассматривается как функция Δx. Принципиально важным является предпоследнее равенство, которое написано на основании теоремы о пределе суперпозиции.

§ 5.5. Производная сложной функции

Теорема 1. *Пусть* $\exists\, f'(y_0), \varphi'(x_0)$, $y_0 = \varphi(x_0)$. *Тогда* $\exists\, (f(\varphi))'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0)$.

Доказательство. Из существования $f'(x_0)$, $\varphi'(x_0)$ следует, что f, φ непрерывны соответственно в точках y_0, x_0. По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций суперпозиция

$$z = F(x) = f(\varphi(x))$$

определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Из условий теоремы следует, что приращения функции f и φ представимы в виде

$$\Delta z = f'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y, \quad \varepsilon(\Delta y) \to 0 \text{ при } \Delta y \to 0,$$
$$\Delta y = \varphi'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x, \quad \varepsilon_1(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Доопределим функцию ε в точке 0, положив $\varepsilon(0) = 0$, тогда первое из этих равенств окажется верным и при $\Delta y = 0$.

Считая, что в первом из этих равенств приращение Δy вызвано приращением Δx, выразим Δz через Δx, подставляя Δy из второго равенства в первое.

$$\Delta z = \Delta F(x_0) = f'(y_0)[\varphi'(x_0)\Delta x + \varepsilon_1(\Delta x)\Delta x] + \varepsilon(\Delta y)\Delta y =$$

$$= f'(y_0)\varphi'(x_0)\Delta x + f'(y_0)\varepsilon_1(\Delta x)\Delta x + \varepsilon(\Delta y)\Delta y.$$

Поделив это равенство почленно на Δx, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y_0)\varphi'(x_0) + \varepsilon_1(\Delta x) + \varepsilon(\Delta y)\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\,.$$

Учитывая, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to \varphi'(x_0)$, и переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим дифференциал сложной функции $y = f(\varphi(x))$, где функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ имеют производные $f'(x_0)$, $\varphi'(u_0)$, $u_0 = \varphi(x_0)$. В силу теоремы о производной сложной функции

$$dy = f'(u_0)\varphi'(x_0)\,dx.$$

С другой стороны, $du = \varphi'(x_0)\,dx$, поэтому можно записать

$$dy = f'(u_0)\,du,$$

где du — дифференциал функции. Мы видим, что дифференциал dy имеет ту же форму, как если бы u было независимым переменным. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала.*

Пример. Найдем производную функции $y = x^\alpha\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Эту функцию можно представить в виде $y = e^{\alpha \ln x} = e^u$, $u = \alpha \ln x$.

Применяя теорему о производной сложной функции, имеем $(x^\alpha)' = (e^{\alpha\ln x})' = e^{\alpha \ln x}\alpha\,\dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

З а м е ч а н и е. В теореме 1 функции f, φ определены в некоторых окрестностях $U(y_0)$, $U(x_0)$ соответственно. Это условие можно заменить более общим, потребовав, чтобы f или φ или обе функции были определены лишь в полуокрестностях соответственно точек y_0, x_0, но чтобы при этом сложная функция имела смысл. Тогда равенство $(f(\varphi))'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0)$ по-прежнему будет иметь место, если под производными понимать при необходимости односторонние производные.

Покажем это. Пусть, например, функция $f\colon U(y_0-0)\to\to\mathbb{R}$ имеет одностороннюю производную $f'_-(y_0)$. Доопределим f на $\mathring{U}(y_0+0)$, положив

$$f(y)=f(y_0)+f'_-(y_0)(y-y_0)\quad\text{при}\quad y>y_0.$$

Тогда $f\colon\ U(y_0)\to\mathbb{R}$ будет иметь обычную производную $f'(y_0)=f'_-(y_0)$.

Аналогично можно продолжить и функцию φ, если она задана лишь в полуокрестности. После возможных доопределений функций f, φ указанным способом, остается лишь применить к ним теорему 1.

Покажем, как находить производную параметрически заданной функции, т. е. функции $y(x)$, заданной в виде

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{cases}$$

Будем считать, что φ непрерывна и строго монотонна на $U(t_0)$ и что существуют производные $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$. Тогда $t=\varphi^{-1}(x_0)$, где $x_0=\varphi(t_0)$, $y=\psi(t)=\psi(\varphi^{-1}(x))$. Применяя формулу дифференцирования сложной функции, получаем

$$\frac{dy}{dx}\,(x_0)=\psi'(t_0)\,\frac{1}{\varphi'(t_0)}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}\,.$$

Рассмотрим теперь неявно заданную функцию. Пусть задано уравнение $F(x,y)=0$, имеющее для каждого $x\in\in U(x_0)$ решение $y=f(x)$, так что

$$F(x,f(x))=0\quad\forall\,x\in U(x_0).$$

При этом говорят, что функция f *неявно задана* уравнением $F(x,y)=0$.

Предполагая, что f дифференцируема на $U(x_0)$ и что левая часть тождества $F(x,f(x))\equiv 0$ представляет дифференцируемую функцию, продифференцируем это тождество почленно. Иногда оказывается (это зависит от вида

F), что продифференцированное тождество может быть разрешено относительно f'. Выразив f', мы найдем тем самым производную неявно заданной функции.

Пример. Пусть $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Пусть $y = f(x)$ — одно из решений уравнения $x^2+y^2-1 = 0$ при $x \in (-1,1)$. Тогда $x^2 + (f(x))^2 - 1 \equiv 0$ является тождеством на $(-1,1)$. Предполагая, что f дифференцируема на $(-1,1)$, продифференцируем это тождество. Получим $2x + 2f(x)f'(x) = 0$, т. е. $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$.

§ 5.6. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция f определена на $U(x_0)$ и имеет там производную $f'(x)$, $x \in U(x_0)$. Производная $f'(x)$ сама является функцией переменного x. Если она в точке x_0 имеет производную $(f')'(x_0)$, то эту производную называют *второй производной* в точке x_0 и обозначают $f''(x_0)$.

Вообще, *производная порядка n функции f* определяется равенством

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'\Big|_{x=x_0} \qquad (n \geqslant 1).$$

Из него видно, в частности, что, если существует производная $f^{(n)}(x_0)$, то производная $f^{(n-1)}$ должна быть определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки (x_0).

Производные порядка n обозначают символами $f^{(n)}(x_0)$ или $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.

Удобно считать, что $f^{(0)}(x) \coloneqq f(x)$.

Теорема 1 (свойства производных высших порядков). *Пусть существуют $f^{(n)}(x_0)$, $g^{(n)}(x_0)$. Тогда в точке x_0*

1°. $\exists\, (f \pm g)^{(n)} = f^{(n)} \pm g^{(n)}$.

2°. **(Формула Лейбница)**
$\exists\,(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + C_n^1 f^{(n-1)}g^{(1)} + \ldots + fg^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$, где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Следствие *из формулы Лейбница:*

$$(cf)^{(n)}(x_0) = xf^{(n)}(x_0), \text{ если } \exists\, f^{(n)}(x_0).$$

Доказательство формулы Лейбница проведем по индукции. В случае $n = 1$ она была установлена раньше. В предположении, что она верна для производной порядка n, установим ее для производной порядка $n+1$.

Имеем

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})' = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(f^{(n-k+1)} g^{(k)} + f^{(n-k)} g^{(k+1)}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n+1-k)} g^{(k)} + \sum_{j=1}^{n+1} C_n^{j-1} f^{(n+1-j)} g^{(j)} =$$

$$= C_n^0 f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) f^{(n+1-k)} g^{(k)} + C_n^n f^{(0)} g^{(n+1)}.$$

Осталось показать, что $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Имеем

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.$$

Введем теперь понятие дифференциалов высших порядков.

Если функция f такова, что ее производная f' существует на некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, то ее дифференциал

$$df(x) = f'(x)\,dx, \quad x \in U(x_0),$$

является функцией аргумента x (помимо этого дифференциал является линейной функцией аргумента dx, но в данном случае будем считать dx фиксированным). Если f' дифференцируема в точке x_0 (т. е. $\exists\, f''(x_0)$), то можно рассмотреть дифференциал от $df(x)$, т. е. $\delta(df(x))$. Этот дифференциал обозначается новым символом δ, чтобы отличить его от ранее построенного дифференциала df. Соответственно дифференциал независимого переменного в выражении дифференциала δ будем обозначать через δx.

Определение. *Вторым дифференциалом* функции f в точке x_0 называется

$$d^2 f(x_0) \coloneqq \delta(df)(x_0)\Big|_{\delta x = dx} = \delta(f'(x)\,dx)(x_0)\Big|_{\delta x = dx} = \\ = (f'(x)\,dx)'(x_0)\delta x\Big|_{\delta x = dx} = f''(x_0)(dx)^2.$$

В этой цепочке равенств содержится не только определение второго дифференциала (первое равенство), но и его выражение через $f''(x_0)$.

Определение. *n-м дифференциалом функции* f в точке x_0 называется

$$d^n f(x_0) \coloneqq \delta(d^{n-1} f)(x_0)\Big|_{\delta x = dx}.$$

Легко убеждаемся, применяя метод математической индукции, что если $\exists\, f^{(n)}(x_0)$, то

$$\exists\, d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n. \qquad (1)$$

Последняя формула при $n \geqslant 2$ (в отличие от $n = 1$) верна лишь в случае, когда x — независимая переменная. Покажем это в случае $n = 2$. Найдем выражение второго дифференциала, считая, что функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0, а ее аргумент x является дважды дифференцируемой функцией $x = x(t)$ некоторой независимой переменной t. Имеем

$$d^2 f(x) = (f(x))''_{tt}(dt)^2 = (f'(x)x')'_t(dt)^2 =$$
$$= (f''(x)x'^2 + f'(x)x'')(dt)^2 = f''(x)(dx)^2 + f'(x)\,d^2x.$$

Итак, $d^2 f(x) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$.

Сравнивая полученное выражение с (1) при $n = 2$, убеждаемся, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности формы.

Упражнение 1. Используя формулы для производных $(f \pm g)^{(n)}$, $(fg)^{(n)}$, получить с помощью (1) формулы для дифференциалов $d^n(f \pm g)$, $d^n(fg)$.

Глава 6
СВОЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

§ 6.1. Теоремы о среднем

Теорема 1 (Ферма). *Пусть функция f определена на $U(x_0)$ и в точке x_0 принимает наибольшее или наименьшее значение среди ее значений на $U(x_0)$. Пусть $\exists\, f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть для определенности $f(x_0) = \min\limits_{U(x_0)} f$. Тогда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$ при $\Delta x > 0$ и $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$ при $\Delta x < 0$. Переходя в этих неравенствах к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем соответственно $f'(x_0) \geqslant 0$, $f'(x_0) \leqslant 0$. Отсюда следует, что $f'(x_0) = 0$.

Теорема 2 (Ролля). *Пусть функция f:*

1° *непрерывна на $[a, b]$;*

2° *дифференцируема на (a, b);*

3° *$f(a) = f(b)$.*

Тогда $\exists\, \xi \in (a, b)$: $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Случай $f \equiv \text{const}$ тривиален. Будем считать далее, что $f \not\equiv \text{const}$. По теореме Вейерштрасса в некоторых точках отрезка $[a, b]$ функция f принимает максимальное и минимальное значения. По крайней мере, одна из этих точек лежит на интервале (a, b), так как $\min\limits_{[a,b]} f < \max\limits_{[a,b]} f$. Но тогда по теореме Ферма производная f' в этой точке равна нулю, что и требовалось доказать.

Теорема 3 (Лагранжа). *Пусть функция f:*

1° *непрерывна на $[a, b]$,*

2° *дифференцируема на (a, b).*

Тогда $\exists\, \xi \in (a, b)$: $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

Доказательство. Для доказательства построим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \lambda x$, в которой число λ выберем так, чтобы F удовлетворяла условию 3° теоремы Ролля: $F(a) = F(b)$.

Отсюда

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b, \text{ т. е. } \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Очевидно, для F выполнены и условия 1°, 2° теоремы Ролля. По теореме Ролля для функции F получаем, что

$$\exists\, \xi \in (a, b)\ :\ F'(\xi) = 0, \quad \text{ т. е. } \quad f'(\xi) - \lambda = 0,$$

где $\lambda = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Отсюда и следует утверждение теоремы Лагранжа.

Формулу

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \quad \xi \in (a, b),$$

называют *формулой конечных приращений Лагранжа.* Перепишем ее в виде

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,, \quad \xi \in (a, b),$$

с помощью которого легко усмотреть геометрический смысл утверждения теоремы Лагранжа: найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что касательная к графику функции f в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна хорде, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Упражнение 1. Доказать, что если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, то $\exists\, f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$. Каков аналог для односторонних пределов? Может ли производная f' иметь скачок?

Теорема 4 (Коши). *Пусть функции f, g:*

1° *непрерывны на $[a, b]$;*

2° *дифференцируемы на (a, b);*

3° *$g' \neq 0$ на (a, b).*

Тогда справедлива формула конечных приращений Коши:

$$\exists\, \xi \in (a,b)\ :\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Доказательство. Заметим сначала, что $g(b) \neq g(a)$, так как иначе в силу теоремы Ролля g' должна была бы обращаться в нуль в некоторой точке (a,b), что противоречит условию 3°.

Пусть $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$, $x \in [a,b]$. Выберем λ так, чтобы $F(a) = F(b)$, т. е. $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(a)$. Отсюда

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,.$$

При выбранном таким образом λ, функция F удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, $\exists\, \xi \in (a,b)$: $F'(\xi) = 0$. Последнее равенство переписывается в виде

$$f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda,$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши, когда $g(x) = x$.

Упражнение 2. Можно ли доказать теорему Коши, написав формулы конечных приращений Лагранжа для функции f и для функции g и поделив почленно первую на вторую?

§ 6.2. Формула Тейлора

Будем считать, в этом параграфе, что $n \in \mathbb{N}$, хотя некоторые утверждения сохраняются и для $n = 0$.

Пусть $\exists\, f^{(n)}(x_0)$. Тогда в некоторой окрестности $U(x_0)$ можно написать равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + r_n(f,x) = P_n(f,x) + r_n(f,x), \tag{1}$$

которое называется *формулой Тейлора* функции f в точке x_0. При этом $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ называется k-*м членом* формулы Тейлора, $P_n(f,x)$ — *многочленом Тейлора*, $r_n(f,x)$ — *остаточным членом* формулы Тейлора (после n-го члена).

Часто вместо $P_n(f,x)$, $r_n(f,x)$ пишут соответственно $P_n(x)$, $r_n(x)$.

Лемма. *Пусть* $\exists\, f^{(n)}(x_0)$, $\exists\, f'$ *в* $\mathring{U}(x_0)$. *Тогда в* $\mathring{U}(x_0)$

$$(r_n(f,x))' = r_{n-1}(f',x).$$

Доказательство.

$$(r_n(f,x))' = \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)' =$$

$$= f'(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1} = r_{n-1}(f',x).$$

Теорема 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\exists\, f^{(n)}(x_0)$. *Тогда справедлива формула* (1), *в которой* $r_n(f,x) = o((x-x_0)^n)$ *при* $x \to x_0$.

Доказательство будем проводить по индукции. При $n=1$ утверждение теоремы верно. В самом деле, в этом случае функция f дифференцируема в точке x_0. Следовательно,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0), \quad x \to x_0,$$

что совпадает с утверждением теоремы.

Предположим, что утверждение теоремы верно при $n-1$ $(\geqslant 1)$ вместо n и покажем, что оно верно тогда в приведенной форме. Используя теорему Лагранжа о конечных приращениях и лемму, имеем (считая, для определенности, $x > x_0$)

$$r_n(f,x) = r_n(f,x) - r_n(f,x_0) = r_{n-1}(f',\xi)(x-x_0),$$

где $x_0 < \xi < x$.

По предположению индукции $r_{n-1}(f', \xi) = o((\xi - x_0)^{n-1}) = o((x - x_0)^{n-1})$ при $x \to x_0$. Следовательно,

$$r_n(f, x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

что и требовалось показать.

Теорема 2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть* $x > x_0$ $(x < x_0)$, $n \in \mathbb{N}_0$, $f^{(n)}$ *непрерывна на отрезке* $[x_0, x]$ $([x, x_0])$, $\exists\, f^{(n+1)}$ *на интервале* (x_0, x) $((x, x_0))$. *Тогда справедлива формула* (1), *в которой*

$$r_n(f, x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$.

Доказательство будем проводить по индукции, считая $x > x_0$. При $n = 0$ теорема утверждает, что при некотором $\theta \in (0, 1)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0).$$

Это утверждение верно, так как оно совпадает с доказанной ранее формулой конечных приращений Лагранжа.

Предположим, что утверждение верно при $n - 1$ $(\geqslant 0)$ вместо n и установим, что оно верно тогда в приведенном виде. Используя теорему Коши о среднем и лемму, имеем (считая для определенности $x > x_0$)

$$\frac{r_n(f, x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r_n(f, x) - r_n(f, x_0)}{(x - x_0)^{n+1} - (x_0 - x_0)^{n+1}} = \frac{r_{n-1}(f', \xi)}{(n+1)(\xi - x_0)^n} = \frac{(f')^{(n)}(\eta)}{(n+1)n!} = \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!},$$

где $x_0 < \eta < \xi < x$, а предпоследнее равенство написано в силу предположения индукции.

Теорема доказана.

Теорема 3 (единственности). *Пусть в* $\mathring{U}(x_0)$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$
$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$
$$\text{при } x \to x_0.$$

Тогда $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $\ldots$, $a_n = b_n$.

Доказательство. Вычитая почленно одно представление функции f из другого, видим, что достаточно доказать, что из

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n) \text{ при } x \to x_0 \tag{2}$$

следует, что $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Переходя в равенстве (2) к пределу при $x \to x_0$, получаем, что $c_0 = 0$. Учитывая это, поделим (2) почленно на $(x - x_0)$. Получим для $x \in \mathring{U}(x_0)$

$$c_1 + c_2(x - x_0) + \ldots + c_n(x - x_0)^{n-1} = o((x - x_0)^{n-1}) \text{ при } x \to x_0.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получаем, что $c_1 = 0$.

Учитывая это и деля последнее равенство на $x - x_0$, после перехода к пределу получаем, что $c_2 = 0$. Поступая так же и дальше, приходим к равенству $c_0 = c_1 = \ldots = c_n = 0$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть* $\exists\, f^{(n)}(x_0)$ *и*

$$\begin{gathered} f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n = \\ o((x - x_0)^n), \quad \text{при} \quad x \to x_0. \end{gathered} \tag{3}$$

Тогда (3) является разложением f по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме о разложении функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеет место равенство (1). В силу теоремы единственности (3) совпадает с (1).

Упражнение 1. Пусть для функции f выполняется (3) при $n = 3$. Выяснить, влечет ли это существование $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$.

Пример. При $|x| < 1$ $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, т. е. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + r_n(x)$, где $r_n(x) = \dfrac{-x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$ при $x \to 0$. По следствию из теоремы единственности, полученное разложение функции $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ является формулой Тейлора.

З а м е ч а н и е 1. Доказанные в этом параграфе три теоремы и следствие справедливы и в случае, когда функция f задана в полуокрестности $U(x_0 + 0)$ или $U(x_0 - 0)$. При этом производные $f^{(k)}(x_0)$ понимаются как односторонние.

Примеры разложений по формуле Тейлора.

1° $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Имеем $f^{(k)}(x) = e^x$,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x),$$

где при $0 < \theta < 1$ $r_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\, x^{n+1} = O(x^{n+1}) = o(x^n)$ при $x \to 0$.

2° $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$. Имеем

$$\{f^{(k)}(0)\}_{k=0}^{\infty} = 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1,\ 0,\ -1,\ \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\, \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

при $x \to 0$. Здесь выписан остаточный член после равного нулю $2n+2$-го члена формулы Тейлора.

3°. $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$. Аналогично разложению для $\sin x$ получаем

$$\cos x = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

при $x \to 0$.

4°. $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x),$$

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} = o(x^n) \text{ при } x \to 0.$$

5°. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $x_0 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Имеем

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \text{ при } x \to 0,$$

где $0 < \theta < 1$.

Упражнение 2. Получить формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}x^k,$$

используя разложение $(1+x)^n$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (или в форме Пеано и теорему единственности).

Упражнение 3. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right),$$

используя разложения по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

З а м е ч а н и е. Формулу Тейлора в случае $x_0 = 0$ называют еще *формулой Маклорена.*

§ 6.3. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

Пусть в задаче о нахождении предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ и числитель и знаменатель стремятся к нулю или оба стремятся к бесконечности. В этих случаях говорят, что мы имеем дело с неопределенностью соответственно вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Нахождение этого предела (если он существует) называют *раскрытием неопределенности.* Одним из приемов раскрытия неопределенности является выделение главных частей числителя и знаменателя. Здесь будет обоснован другой способ, называемый *правилом Лопиталя* и состоящий в том, что вычисление предела отношения функций заменяется вычислением предела отношения их производных.

Теорема 1. *Пусть функции f, g*

1° *дифференцируемы на интервале (a, b), $b - a < \infty$;*
2° $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$;
3° $g' \neq 0$ *на* (a, b);
4° *существует* $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда

$$\exists \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доопределим f, g, положив $f(a) = g(a) = 0$. Тогда f, g непрерывны на $[a, b)$. По теореме Коши о среднем

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,, \quad a < \xi < x < b.$$

Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\varepsilon > 0$ — произвольное. Тогда

$$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \delta < b - a \, : \, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in U_\varepsilon(A)$$

при $a < x < a + \delta < b$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема 2. *Пусть функции f, g*

1°. *дифференцируемы при $x > c > 0$;*

2°. *$g' \neq 0$ на $(c, +\infty)$;*

3°. *существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Тогда

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = A \in \overline{\mathbb{R}}$. Рассмотрим сложные функции $f\left(\frac{1}{t}\right)$, $g\left(\frac{1}{t}\right)$ при $t \in \left(0, \frac{1}{c}\right)$. Тогда

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{\frac{d}{dt} f\left(\frac{1}{t}\right)}{\frac{d}{dt} g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0+0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = A.$$

По теореме 1 $\exists \lim\limits_{t\to 0+0} \dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = A$.

Отсюда следует, что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. Заметим, что в приведенном доказательстве было два раза использовано свойство предельного перехода в суперпозиции, причем в ситуации, не рассмотренной в § 4.2. Читателю предлагается обосновать соответствующие предельные переходы в качестве упражнения.

Теорема 3. *Пусть функции f, g*

1°. *дифференцируемы на интервале (a, b), $b - a < \infty$;*

2° $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \pm\infty$;

3° $g' \neq 0$ *на* (a, b);

4° *существует* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Тогда

$$\exists \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \overline{\mathbb{R}}$, $\varepsilon \in \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Выберем точку x_ε, $a < x_\varepsilon < b$ так, что

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \in U_\varepsilon(A) \text{ при } \forall\, x \in (a, x_\varepsilon),$$

$f' \neq 0$ на (a, x_ε).

При $a < x < x_\varepsilon$ по теореме Коши о среднем

$$\frac{f(x) - f(x_\varepsilon)}{g(x) - g(x_\varepsilon)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,. \tag{1}$$

Выберем теперь $\delta > 0$ столь малым, что при $a < x < < a + \delta < x_\varepsilon < b$,

$$f(x) \neq 0, \quad g(x) \neq 0, \quad \left|\frac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}\right| < \varepsilon, \quad \left|\frac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Тогда (1), вынеся из левой части множитель $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, можно переписать в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - \dfrac{g(x_\varepsilon)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_\varepsilon)}{f(x)}}\;\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,, \quad a < x < a + \delta. \tag{2}$$

Первый множитель правой части мало отличается от 1: его значение принадлежит интервалу $(1-4\varepsilon, 1+2\varepsilon)$. Второй множитель правой части $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in U_\varepsilon(A)$. Следовательно, вся правая часть (2) и равная ей левая

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in U_\eta(A),$$

где $\eta = \eta(\varepsilon) = \eta(A, \varepsilon) > 0$ при $x \in U_\delta(a+0)$.

При этом при фиксированном A можно $\eta(\varepsilon)$ взять сколь угодно малым, если предварительно взять достаточно малым $\varepsilon > 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Теорема доказана.

В качестве некоторого пояснения к ее доказательству покажем, как выбрать $\eta(A, \varepsilon)$ в зависимости от ε. Остановимся лишь на случае $0 < A < +\infty$. Тогда второй множитель правой части лежит в $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$, а первый (как мы видели) в $(1-4\varepsilon, 1+2\varepsilon)$. Следовательно, их произведение лежит в интервале

$$(A - 4A\varepsilon - \varepsilon + 4\varepsilon^2,\ A + 2A\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon^2) \subset U_\eta(A),$$

где $\eta = \eta(A, \varepsilon) = \max\{4A\varepsilon - \varepsilon + 4\varepsilon^2, 2A\varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon^2\}$.

З а м е ч а н и е. Теоремы 1–3 остаются в силе в случаях предельных переходов $x \to a+0$, $x \to a-0$, $x \to a$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ с соответствующими изменениями их формулировок.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0.$$

Здесь первое равенство написано при условии, что предел правой части существует и становится оправданным после доказательства существования этого предела.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{a^x}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{a^x \ln a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^x \ln^2 a} = \ \ldots$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{a^x \ln^n a} = 0.$$

Теоремы 1–3 дают достаточные условия раскрытия неопределенностей. Эти условия не являются необходимыми.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\sin x}{x}$. Этот предел существует, но его нельзя найти с помощью правила Лопиталя.

Правило Лопиталя помогает раскрыть неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Встречаются и другие виды неопределенностей:

$$0\cdot\infty, \quad +\infty-(+\infty), \quad (+0)^0, \quad (+\infty)^0, \quad 1^\infty.$$

Первую и вторую их них преобразованием выражений сводят к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Выражения, представляющие каждую из трех последних неопределенностей, полезно прологарифмировать.

Упражнение 1. Найти $\lim\limits_{x\to0+0} x^x$.

Глава 7
ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

§ 7.1. Монотонность и экстремумы функции

Теорема 1. *Пусть f дифференцируема на (a, b). Тогда*

1° *условие $f' \geqslant 0$ ($f' \leqslant 0$) на (a, b) необходимо и достаточно для того, чтобы функция f возрастала (убывала) на (a, b);*

2° *условие $f' > 0$ ($f' < 0$) на (a, b) достаточно, чтобы функция f строго возрастала (строго убывала) на (a, b).*

Доказательство. *Достаточность* следует из формулы конечных приращений Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad a < x_1 < \xi < x_2 < b.$$

Необходимость. Пусть f возрастает на (a, b), $x_0, x \in \in (a, b)$. Тогда $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$. Следовательно, $f'(x_0) \geqslant 0$.

Заметим, что условие $f' > 0$ на (a, b) не является необходимым для строгого возрастания функции f на (a, b), как это видно на примере $f(x) = x^3$, $x \in (-1, 1)$.

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума* (*минимума*) функции f, если на некоторой окрестности $U(x_0)$ функция f определена и

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0)) \quad \forall\, x \in \mathring{U}(x_0).$$

Если при этом нестрогие неравенства можно заменить на строгие, точка x_0 называется *точкой строгого максимума* (*строгого минимума*) функции f.

Точки максимума (строгого максимума) и точки минимума (строгого минимума) называются точками *экстремума* (*строгого экстремума*).

Поскольку определение точки максимума связано с поведением функции в сколь угодно малой окрестности этой точки, часто вместо термина «максимум» употребляют термин «локальный максимум». Аналогично объясняются термины «локальный минимум», «строгий локальный максимум (минимум)», «локальный экстремум», «строгий локальный экстремум».

Теорема 2 (Ферма) (необходимые условия экстремума). *Пусть x_0 — точка экстремума функции f. Тогда производная $f'(x_0)$ либо не существует, либо $f'(x_0) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о было приведено в § 6.1

Условие $f'(x_0)$ не является достаточным для точки экстремума, как видно на примере функции $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$.

Теорема 3 (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть f непрерывна в точке x_0 и дифференцируема на $\mathring{U}(x_0)$. Пусть f' меняет знак при переходе через точку x_0. Тогда x_0 — точка строгого экстремума.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $f' > 0$ в $U(x_0 - 0)$, $f' < 0$ в $U(x_0 + 0)$. Тогда из формулы конечных приращений Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$ видно, что приращение функции f меняет знак с «$-$» на «$+$» при переходе через точку x_0. Следовательно, x_0 является точкой строгого максимума.

Условия теоремы не являются необходимыми условиями экстремума, как это видно на примере функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Определение. Точка x_0 называется *точкой возрастания* (*убывания*) функции f, если в некоторых полуокрестностях точки x_0

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) < 0 & \text{в } \mathring{U}(x_0 - 0), \\ f(x) - f(x_0) > 0 & \text{в } \mathring{U}(x_0 + 0) \end{cases} \qquad \left(\begin{cases} > 0 & \text{в } \mathring{U}(x_0 - 0), \\ < 0 & \text{в } \mathring{U}(x_0 + 0) \end{cases} \right).$$

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Точка $x_0 = 0$ не является ни точкой экстремума, ни точкой возрастания, ни точкой убывания.

Упражнение 1. Показать с помощью формулы конечных приращений Лагранжа, что если $f'(x_0) > 0$, то x_0 является точкой возрастания.

Теорема 4 (достаточные условия точек строгого экстремума, точек возрастания и точек убывания в терминах старших производных). *Пусть* $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тогда*

1° *при четном* $n = 2k$ x_0 *— точка строгого экстремума (строгого минимума при* $f^{(2k)}(x_0) > 0$, *строгого максимума при* $f^{(2k)}(x_0) < 0$*);*

2° *при нечетном* $n = 2k + 1$ x_0 *— точка возрастания (точка убывания) при* $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ *(при* $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$*).*

Доказательство. По формуле Тейлора при $x \in \mathring{U}(x_0)$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \varepsilon(x - x_0)(x - x_0)^n =$$

$$= \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x - x_0) \right] (x - x_0)^n,$$

где $\varepsilon(x - x_0) \to 0$ при $x \to x_0$.

Будем считать $\mathring{U}(x_0)$ столь малой, что $|\varepsilon(x - x_0)| \leqslant \leqslant \frac{1}{2}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right|$. Тогда знак квадратной скобки $[\ldots]$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$, так что $\operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0)) = = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0) \operatorname{sgn}(x - x_0)^n$. Сохранение или изменение знака $(x - x_0)^n$ при переходе через x_0 зависит от четности n. Отсюда можно сделать вывод о знаке $f(x) - f(x_0)$ в $\mathring{U}(x_0)$, что и приводит к утверждению теоремы.

Следствие 1. *При $f'(x_0) > 0$ x_0 — точка возрастания, при $f'(x_0) < 0$ x_0 — точка убывания функции f.*

Следствие 2. *Пусть $f'(x_0) = 0$. Тогда при $f''(x_0) > 0$ x_0 — точка строгого минимума, при $f''(x_0) < 0$ x_0 — точка строгого максимума функции f.*

З а м е ч а н и е. В задаче о нахождении наибольшего (или наименьшего) значения функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ с помощью доказанных теорем можно найти точки экстремума, лежащие лишь на интервале (a, b). После этого следует сравнить значения функции f в них со значениями $f(a)$, $f(b)$.

§ 7.2. Выпуклость и точки перегиба

Пусть функция f определена на (a, b). Для каждого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ построим хорду графика f, соединяющую точки $(\alpha, f(\alpha))$ и $(\beta, f(\beta))$. Пусть ее уравнение

$$y = l_{\alpha,\beta}(x),\ x \in [\alpha, \beta],\ \text{где}\ l_{\alpha,\beta} = \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}\, f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}\, f(\beta).$$

Определение. Функция f называется *выпуклой вверх* (*выпуклой вниз*) *на* (a, b), если для любых α, β, x: $a < \alpha < < x < \beta < b$ $f(x) \geqslant l_{\alpha,\beta}(x)$ (соответственно $f(x) \leqslant l_{\alpha,\beta}(x)$) при $x \in (\alpha, \beta)$.

Если же вместо нестрогих неравенств в последней строчке можно написать строгие, то функция f называется *строго выпуклой вверх* (*строго выпуклой вниз*) на интервале (a, b).

Интервал (a, b) называется при этом соответственно *интервалом выпуклости вверх*, *выпуклости вниз*, *строгой выпуклости вверх*, *строгой выпуклости вниз* функции f.

Условие выпуклости вверх можно записать в виде

$$f(x)-l(\alpha,\beta)(x)=\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\,(f(x)-f(\alpha))+\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\,(f(x)-f(\beta))\geqslant 0 \tag{1}$$

и в виде

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\geqslant\frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}\,.$$

Последнее неравенство является соотношением между угловыми коэффициентами двух различных хорд с концами в точке $(x, f(x))$.

Упражнение 1. Сравнивая угловые коэффициенты различных хорд с концами в точке $(x_0, f(x_0))$, показать, что на интервале выпуклости вверх функция f непрерывна и в каждой точке имеет обе односторонние производные, а множество точек, в которых она не имеет производную, не более чем счетно.

Пример функции $f(x) = 1 - |x|$, $x \in (-1, 1)$, показывает, что производная не обязана существовать во всех точках интервала выпуклости вверх.

З а м е ч а н и е. Нередко функцию, выпуклую вниз, называют выпуклой, а выпуклую вверх — вогнутой.

Теорема 1 (условия выпуклости функций). *Пусть функция f имеет вторую производную f'' на (a, b). Тогда*

1° *условие $f'' \leqslant 0$ на (a, b) необходимо и достаточно для выпуклости вверх функции f на (a, b);*

2° *если $f'' < 0$ на (a, b), то функция f строго выпукла вверх на (a, b).*

Доказательство. *Достаточность.* При $a < \alpha < x < \beta < b$ имеем, используя (1) и формулу конечных приращений Лагранжа

$$f(x) - l_{\alpha,\beta} = \frac{(\beta - x)f'(\xi)(x - \alpha) + (x - \alpha)f'(\eta)(x - \beta)}{\beta - \alpha} =$$

$$= \frac{(x - \alpha)(\beta - x)f''(\zeta)(\xi - \eta)}{\beta - \alpha} \geqslant 0 \quad (> 0 \text{ при } f''(\xi) > 0),$$

где $a < \alpha < \xi < \zeta < \eta < \beta < b$.

Отсюда следует достаточность в утверждении теоремы 1° и утверждение 2°.

Упражнение 2. Доказать необходимость условия 1°. Можно использовать при этом анализ расположения кривой относительно касательной, который будет приведен ниже.

Определение. Точка x_0 называется *точкой перегиба* функции f, а точка $(x_0, f(x_0))$ — *точкой перегиба графика* функции f, если

1°. $\exists\, f'(x_0)$ (конечная или бесконечная);
2°. точка x_0 является концом интервала строгой выпуклости вверх и концом интервала строгой выпуклости вниз.

Напомним, что при выполнении условия 1° функция f непрерывна в точке x_0.

Теорема 2 (необходимые условия точки перегиба). *Пусть x_0 — точка перегиба функции и f'' непрерывна в точке x_0. Тогда $f''(x_0) = 0$.*

Доказательство проведем от противного. Допустим, что $f''(x_0) = 0$ и для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда $f''(x_0) > 0$ в некоторой окрестности $U(x_0)$. По предыдущей теореме, точка x_0 находится внутри интервала $U(x)$ строгой выпуклости вниз и не может быть точкой перегиба.

Теорема 3 (достаточные условия точки перегиба). *Пусть $\exists\, f'(x_0)$, а f'' меняет знак при переходе через точку x_0.*

Тогда x_0 — точка перегиба.

Доказательство сводится к проверке определения точки перегиба с помощью теоремы о достаточных условиях строгой выпуклости функции.

Следствие. *Пусть $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$.*

Тогда x_0 — точка перегиба функции f.

Теорема 4 (о расположении кривой относительно касательной).

1°. *Если $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то $\exists\, U(x_0)$: кривая $y = f(x)$ лежит строго выше (строго ниже) касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ при $x \in \mathring{U}(x_0)$.*

2°. *Если $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то $\exists\, U(x_0)$: кривая $y = f(x)$ переходит через касательную, т. е. при $x < x_0$ и $x > x_0$ ($x \in \mathring{U}(x_0)$), лежит строго по разные стороны от касательной.*

Доказательство. Пусть $F(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$. Тогда вопрос сводится к изучению расположения графика функции F при $x \in \mathring{U}(x_0)$ относительно прямой (касательной) $y = 0$ и решается применением теоремы 7.1.4.

§ 7.3. Асимптоты

Определение. Пусть функция f определена на $(a, +\infty)$. Прямая $y = kx + l$ называется *асимптотой* (или *наклонной асимптотой*) графика функции f при $x \to +\infty$, если

$$f(x) = kx + l + o(1) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Аналогично определяется (наклонная) асимптота при $x \to -\infty$.

Теорема 1. *Для того чтобы график функции f имел при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = kx + l$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = l.$$

Доказательство предлагается провести в качестве упражнения.

Аналогично формулируется теорема о существовании (наклонной) асимптоты при $x \to -\infty$.

Определение. Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой графика функции* f, если хотя бы один из пределов $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$ существует и равен $+\infty$ или $-\infty$.

Упражнение 1. Выяснить наличие наклонных и вертикальных асимптот у графиков функций $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$, $f(x) = \ln(1 + x)$.

§ 7.4. Построение графика функции

Построение графика функции рекомендуется проводить по следующей схеме.

1°. Найти область определения функции, точки разрыва.

2°. Выяснить вопрос о существовании асимптот.

3°. Приблизительно нарисовать график функции.

4°. Вычислить первую и вторую производные.

5°. Найти точки, в которых эти производные не существуют или равны нулю.

6°. Составить таблицу изменения знаков первой и второй производной.

7°. Найти области возрастания и убывания функции и точки экстремума.

8°. Найти интервалы выпуклости вверх (вниз) функции, точки перегиба.

9°. Найти точки пересечения функции с осью Ox, вычислить значения функции в точках экстремума и точках перегиба.

10°. Уточнить и нарисовать график функции.

Упражнение 1. Построить график функции $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. $\left(f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}\right)$.

Глава 8
КРИВЫЕ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 8.1. Векторнозначные функции

Определение. Пусть каждой точке $t \in [a, b]$ поставлен в соответствие вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ трехмерного пространства. Тогда будем говорить, что *на отрезке* $[a, b]$ *задана вектор-функция* (или *векторная функция*).

Пусть в трехмерном пространстве зафиксирована декартова система координат. Тогда $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — компоненты вектора $\vec{r}(t)$. Таким образом, задание на $[a, b]$ вектор-функции равносильно заданию на $[a, b]$ трех числовых функций.

Символом $|\vec{r}|$ обозначают длину вектора $\vec{r}$.

Определение. Вектор $\vec{r}_0$ называется *пределом вектор-функции* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при $t \to t_0$ (пишут $\vec{r}_0 = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)$), если $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0$.

Как видим, в этом определении предполагается, что $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена в некоторой $\mathring{U}(t_0)$.

Определение предела вектор-функции сведено к известному определению предела числовой функции $f(t) = |\vec{r}(t) - \vec{r}_0|$. Можно дать и другое (эквивалентное) определение предела вектор-функции, не опирающееся на понятие предела числовой функции. Для этого достаточно расписать последнее в ε-δ-терминах. Имеем

Определение. Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена на $\mathring{U}(t_0)$. Вектор $\vec{r}_0$ называется пределом $\vec{r} = \vec{r}(t)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| < \varepsilon \quad \forall t : \ 0 < |t - t_0| < \delta.$$

Если $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, то

$$|\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 + (z(t) - z_0)^2}.$$

Из этого равенства видно, что существование предела $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0$ равносильно существованию трех пределов числовых функций

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t\to t_0} z(t) = z_0.$$

Теорема 1. *Пусть существуют пределы*

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) = x_0, \quad \lim_{t\to t_0} \vec{r}_2(t) = y_0, \quad \lim_{t\to t_0} f(t) = z_0,$$

где f — числовая функция. Тогда

1°. $\exists \lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t) \pm r_2(t)) = \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) \pm \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)$;

2°. $\exists \lim\limits_{t\to t_0} f(t)\vec{r}_1(t) = \lim\limits_{t\to t_0} f(t) \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t)$;

3°. $\exists \lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t), r_2(t)) = \left(\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t), \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)\right)$;

4°. $\exists \lim\limits_{t\to t_0} [\vec{r}_1(t), r_2(t)] = \left[\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t), \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t)\right]$.

Доказательство. Эти свойства можно вывести из свойств числовых функций, перейдя к соответствующим равенствам для компонент векторов.

Их можно доказать и непосредственно, опираясь на определение предела вектор-функции. Установим для примера свойство 4°. Пусть $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_1(t) = \vec{r}_{10}$, $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_2(t) = \vec{r}_{20}$. Тогда $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_{10} + \vec{\alpha}(t)$, $\vec{r}_2(t) = \vec{r}_{20} + \vec{\beta}(t)$, где $\vec{\alpha}(t), \vec{\beta}(t) \to \vec{0}$ при $t \to t_0$.

Имеем $\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t) - \vec{r}_{10} \times \vec{r}_{20} = (\vec{r}_{10} + \vec{\alpha}(t)) \times (\vec{r}_{20} + \vec{\beta}(t)) - \vec{r}_{10} \times \vec{r}_{20} = \vec{r}_{10} \times \vec{\beta}(t) + \vec{\alpha}(t) \times \vec{r}_{20} + \vec{\alpha}(t) \times \beta(t) \to \vec{0}$ при $t \to t_0$, так как

$$|\vec{r}_{10} \times \vec{\beta}(t)| \leqslant |\vec{r}_{10}|\,|\vec{\beta}(t)| \to 0, \quad |\vec{\alpha}(t) \times \vec{r}_{20}| \leqslant |\vec{\alpha}(t)|\,|\vec{r}_{20}| \to 0,$$

$$|\vec{\alpha}(t) \times \vec{\beta}(t)| \leqslant |\vec{\alpha}(t)|\,|\vec{\beta}(t)| \to 0,$$

Определение. Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ определена на $[a, b]$. Вектор $\vec{r}_0$ называют ее *пределом справа* в точке a и пишут

$$\vec{r}_0 = \lim_{t \to a+0} \vec{r}(t) = \vec{r}(a+0),$$

если $\lim\limits_{t \to a+0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0$.

Аналогично определяется $\lim\limits_{t \to b-0} \vec{r}(t) = \vec{r}(b-0)$.

Свойства 1°–4° верны и для односторонних пределов.

Определение. Пусть вектор-функция определена в $U(t_0)$. Она называется *непрерывной в точке* t_0, если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Из свойств пределов вектор-функций следует, что непрерывность вектор-функции равносильна непрерывности трех числовых функций — ее компонент.

Теорема 2. *Пусть вектор-функции $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$ и числовая функция $f = f(t)$ непрерывны в точке t_0. Тогда $\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2$, $f\vec{r}_1$, $(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$, $[\vec{r}_1, \vec{r}_2]$ непрерывны в точке t_0.*

Доказательство следует из свойств пределов вектор-функций.

Аналогично определению непрерывности дается определение односторонней непрерывности. На этот случай переносятся свойства, указанные в последней теореме.

Производная вектор-функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$, определенной в $U(t_0)$, определяется как предел

$$\vec{r}\,'(t_0) \coloneqq \lim_{\Delta t \to t_0} \frac{\vec{r}_0(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t},$$

если этот предел существует.

Если $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, то, как легко усмотреть,

$$\vec{r}\,'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Односторонние производные вектор-функции определяются как соответствующие односторонние пределы отношения приращения вектор-функции к приращению аргумента.

Определение. Вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$, определенная в $U(t_0)$, называется *дифференцируемой в точке* t_0, если при $t = t_0 + \Delta t \in \overset{\circ}{U}(t_0)$

$$\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \vec{A}\Delta t + \vec{\varepsilon}(\Delta t)\Delta t,$$

где $\vec{\varepsilon}(\Delta t) \to \vec{0} = (0, 0, 0)$ при $\Delta t \to 0$.

Как и в случае числовых функций показывается, что существование производной $\vec{r}\,'(t_0)$ и дифференцируемость $\vec{r}$ в точке t_0 — эквивалентные свойства и что $\vec{A} = \vec{r}\,'(t_0)$.

Дифференцируемость $\vec{r}$ в точке t_0 (существование $\vec{r}\,'(t_0)$) влечет, очевидно, непрерывность $\vec{r}$ в точке t_0.

Дифференциалом функции $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в точке t_0 называется линейная функция

$$d\vec{r}(t_0) = \vec{r}\,'(t_0)\,dt, \quad -\infty < dt < +\infty.$$

Теорема 3. *Пусть в точке* t_0 *существуют производные функций* $\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}_2(t)$ *и числовой функции* $f = f(t)$. *Тогда в точке* t_0

1°. $\exists\, (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)' = \vec{r}_1\,' + \vec{r}_2\,'$;
2°. $\exists\, (f\vec{r}_1)' = f'\vec{r}_1 + f\vec{r}_1\,'$;
3°. $\exists\, (\vec{r}_1, \vec{r}_2)' = (\vec{r}_1\,', \vec{r}_2) + (\vec{r}_1, \vec{r}_2\,')$;
4°. $\exists\, [\vec{r}_1, \vec{r}_2]' = [\vec{r}_1\,', \vec{r}_2] + [\vec{r}_1, \vec{r}_2\,']$.

Д о к а з а т е л ь с т в о приведем лишь для свойства 4°.

$$\begin{aligned}\vec{r}_1(t_0 + \Delta t) \times \vec{r}_2(t_0 + \Delta t) - \vec{r}_1(t_0) \times \vec{r}_2(t_0) &= \\ = (\vec{r}_1(t_0 + \Delta t) - \vec{r}_1(t_0)) \times r_2(t_0 + \Delta t) &+ \\ +\vec{r}_1(t_0) \times (\vec{r}_2(t_0 + \Delta t) - \vec{r}_2(t_0)).\end{aligned}$$

Поделив на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем 4°.

Выведем правило дифференцирования сложной вектор-функции $\vec{r}(t(\tau))$, $\tau \in U(\tau_0)$.

Из $\vec{r}(t(\tau)) = \big(x(t(\tau), y(t(\tau)), z(t(\tau)))\big)$ дифференцированием получаем

$$\frac{d}{dt}\,\vec{r}(t(\delta)) = \big(x'(t(\tau)t'(\tau), y'(t(\tau))t'(\tau), z'(t(\tau))t'(\tau))\big) = \\ = \vec{r}\,'(t(\tau))t'(\tau).$$

Из этой формулы получаем выражение для дифференциала сложной вектор-функции:

$$d\vec{r} = \vec{r}\,'t'\,d\tau = \vec{r}\,'\,dt.$$

Как видим, дифференциал $d\vec{r}$ записывается в том же виде $d\vec{r} = \vec{r}\,'\,dt$, как и в случае, когда t — независимая переменная. В этом состоит свойство инвариантности формы дифференциала первого порядка.

Производные высших порядков и дифференциалы высших порядков вектор-функций определяются аналогично тому, как это сделано для числовых функций. Именно: $\vec{r}\,''(t) = (\vec{r}\,'(t))'$ и вообще $\vec{r}^{\,(n)}(t) = (\vec{r}^{\,(n-1)}(t))'$,

$$d^2\vec{r}(t) = \delta(d\vec{r}(t))\big|_{\delta t = dt} = \delta(\vec{r}\,'(t)\,dt)\big|_{\delta t = dt} = \vec{r}\,''(t)(dt)^2,$$

и вообще

$$d^n\vec{r}(t) = \delta(d^{n-1}\vec{r}(t))\big|_{\delta t = dt} = \\ = \delta(\vec{r}^{\,(n-1)}(t)(dt)^{n-1})\big|_{\delta t = dt} = \vec{r}^{\,n}(t)(dt)^n.$$

Теорема 4 (формула Тейлора). *Пусть* $\exists\,\vec{r}^{\,(n)}(t_0)$. *Тогда* $\exists\,U(t_0)$ *такая, что при* $t \in \mathring{U}(t_0)$

$$\vec{r}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\vec{r}^{\,(k)}(t_0)}{k!}\,(t-t_0)^k + \vec{\varepsilon}(t-t_0)(t-t_0)^n,$$

где $\vec{\varepsilon}(t-t_0) \to \vec{0}$ *при* $t \to t_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждую компоненту вектор-функции $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ заменим ее разложением по формуле Тейлора. Полученное представление $\vec{r}(t)$ представим в виде суммы векторов, стоящих в правой части доказываемой формулы Тейлора.

З а м е ч а н и е. Остаточный член доказанной формулы Тейлора есть, конечно, $\vec{o}((t-t_0)^n)$ при $t \to t_0$.

Мы видим, что многие свойства числовых функций переносятся на вектор-функции. Не так обстоит дело с формулой конечных приращений Лагранжа. В самом деле, пусть $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Тогда $\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$, $|\vec{r}\,'(t)| = 1$ и

$$\vec{0} = \vec{r}(2\pi) - \vec{r}(0) \neq \vec{r}\,'(\xi)(2\pi - 0)$$

ни при каком ξ.

Справедлив, однако, векторный аналог оценки, вытекающей из теоремы Лагранжа.

Теорема 5. *Пусть $\vec{r} = \vec{r}(t)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b). Тогда $\exists\,\xi \in (a,b)$:*

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant |\vec{r}\,'(\xi)|(b-a). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Считая, что $\vec{r}(b) \neq \vec{r}(a)$, положим $\vec{e} = \dfrac{\vec{r}(b) - \vec{r}(a)}{|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)|}$. Тогда $|\vec{e}| = 1$ и

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = (\vec{r}(b) - \vec{r}(b), \vec{e}) = (\vec{r}(b), \vec{e}) - (\vec{r}(a), \vec{e}).$$

Введем функцию $f(t) = (\vec{r}(t), \vec{e})$. Для нее выполнены условия теоремы Лагранжа. Поэтому

$$\exists\,\xi \in (a,b) \ : \ |\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| = f(b) - f(a) = \\ = f'(\xi)(b-a) = (\vec{r}\,'(\xi), \vec{e})(b-a).$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

§ 8.2. Кривая

Будем считать, что в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ фиксирована прямоугольная система координат.

Определение. Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ с конкретным его описанием:

$$\Gamma = \{(x(t), y(t), z(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\},$$

где x, y, z — непрерывные функции на $[a, b]$, называется (*непрерывной*) *кривой.*

Говорят еще, что кривой называется «непрерывное отображение отрезка в пространство $\mathbb{R}^3$». На разъяснении этого понятия останавливаться здесь не будем.

Подчеркнем, что кривая определяется не только положением множества точек в $\mathbb{R}^3$, но и способом его описания.

Ту же кривую Γ можно задать в виде

$$\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}, \quad \Gamma = \{\hat{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\},$$

где $\vec{r}(t) \coloneqq (x(t), y(t), z(t))$ — радиус-вектор точки $\hat{r}(t) \coloneqq$ $\coloneqq (x(t), y(t), z(t))$. *Точкой кривой* Γ называют пару $\{t, \hat{r}(t)\}$.

Точка $M \in \mathbb{R}^3$ называется *кратной точкой* (*точкой самопересечения*) кривой Γ, если $\exists\, t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 \neq t_2$: $\hat{r}(t_1) = \hat{r}(t_2) = M$.

Кривая без кратных точек называется *простой кривой* (или *простой дугой*).

Кривая Γ называется *замкнутой кривой* или *контуром*, если $\hat{r}(a) = \hat{r}(b)$. Контур называется *простым контуром*, если из $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$, $\hat{r}(t_1) = \hat{r}(t_2)$ следует $t_1 = a$, $t_2 = b$.

Возрастание параметра t определяет некоторое направление движения точки $\hat{r}(t)$ по кривой (некоторый порядок прохождения точек кривой).

Поэтому говорят, что *на кривой* Γ *задана ориентация*, рассматриваемую кривую называют *ориентированной кри-*

вой, точку $\hat{r}(a)$ — *началом кривой*, а точку $\hat{r}(b)$ — *концом кривой*.

Введем понятие касательной к кривой Г. Пусть t_0, $t_0 + \Delta t \in [a, b]$. Проведем секущую через точки $\hat{r}(t_0)$, $\hat{r}(t_0 + \Delta t)$, и пусть $\vec{l}(\Delta t)$ — единичный вектор секущей, так что $\vec{l}(\Delta t) = \pm \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}$, где $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ (предполагаем, что $|\Delta\vec{r}| > 0$) при всех достаточно малых $|\Delta t|$.

Определение. Пусть при всех достаточно малых $|\Delta t|$ можно выбрать $\vec{l}(\Delta t)$ так, что $\exists \lim\limits_{\Delta t \to 0} \vec{l}(\Delta t) =: \vec{t}$. Тогда прямая

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{t}\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty$$

называется *касательной к кривой* Г в точке $(t_0, \hat{r}(t_0))$.

Как мы видим, касательная проходит через точку $\hat{r}(t_0)$ и $\vec{t}$ — ее направляющий вектор.

Лемма 1. *Пусть* $\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$, $t_0 \in (a, b)$ *и* $\exists\, \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$. *Тогда* Г *имеет касательную в точке* $(t_0, \hat{r}(t_0))$ *и* $\hat{r}\,'(t_0)$ *коллинеарен касательной.*

Доказательство. Из $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \to \vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$ следует, что $\Delta\vec{r} \neq \vec{0}$ при всех достаточно малых $|\Delta t|$ и что $\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| \to |\vec{r}\,'(t_0)|$. Тогда при $\Delta t \to 0$

$$\vec{l}(\Delta t) := \frac{\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}{\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|} \to \frac{\vec{r}\,'(t_0)}{|\vec{r}\,'(t_0)|} =: \vec{t}.$$

Следовательно, касательная в точке $(t_0, \hat{r}(t_0))$ существует, а уравнение ее можно записать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\tau, \quad -\infty < \tau < +\infty.$$

Замечание. Вектор $\Delta\vec{r}$ при $\Delta t > 0$ направлен от точки $\hat{r}(t_0)$ к точке $\hat{r}(t_0 + \Delta t)$ с бо́льшим значением параметра. Поэтому можно сказать, что векторы $\vec{r}\,'$, $\vec{t}$ *направлены в сторону возрастания параметра кривой.*

Если $t_0 = a$ или $t_0 = b$ и в t_0 существует отличная от $\vec{0}$ односторонняя производная вектора $\vec{r}$, то существует и односторонняя касательная (которая определяется по аналогии с касательной).

Определение. Кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *дифференцируемой* (*непрерывно дифференцируемой*), если $\vec{r}(t)$ — *дифференцируема* (*непрерывно дифференцируема*) на $[a, b]$.

Определение. Точка $(t_0, \hat{r}(t_0))$ дифференцируемой кривой Γ называется *неособой* точкой, если $\vec{r}\,'(t_0) \neq 0$, и называется *особой* точкой в противном случае.

В последней лемме показано, что дифференцируемая кривая в каждой неособой точке имеет касательную.

Определение. Непрерывно дифференцируемая кривая без особых точек называется *гладкой кривой*.

Определение. Пусть $\Gamma = \{\hat{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$, $c \in (a, b)$. Тогда каждая из кривых

$$\Gamma' = \{\hat{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant c\}, \quad \Gamma'' = \{\hat{r}(t),\ c \leqslant t \leqslant b\}$$

называется *дугой кривой* Γ.

При этом кривая Γ называется *кусочно непрерывно дифференцируемой* (*кусочно гладкой*), если каждая из ее дуг является непрерывно дифференцируемой (гладкой).

Аналогичное определение можно дать и в случае, когда кривая Γ разбита на любое конечное число дуг.

Рассмотрим вопрос о преобразовании (замене) параметра на кривой.

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$, $t = g(\tau)$, $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(g(\tau))$,

$$\tilde{\Gamma} = \{\vec{\rho}(\tau),\ \alpha \leqslant \tau \leqslant \beta\}.$$

Будем считать кривую $\tilde{\Gamma}$ той же, что и Γ, но иначе параметризованной, если замена параметра $t = g(\tau)$ является *допустимой*.

При этом под допустимой заменой параметра понимается такая, при которой

1°. $g(\tau)$: $[\alpha, \beta] \leftrightarrow [a, b]$, g непрерывна и строго монотонна на $[\alpha, \beta]$.

Обратим внимание, что при этом от $\tilde{\Gamma}$ можно перейти к Γ также с помощью непрерывной и строго монотонной замены параметра g^{-1} (обратной к g).

Понятие «допустимой» замены параметра определяется нашим желанием сохранить те или иные свойства кривой при такой замене. Так, например, если мы хотим сохранить ориентацию кривой, то к требованию 1° присоединяется требование

$1^{\circ\circ}$. g строго возрастает на $[\alpha, \beta]$.

Последнее равносильно, очевидно, условию $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$.

Если Γ — дифференцируемая (непрерывно дифференцируемая) кривая, то *допустимой* заменой параметра на Γ будем называть замену $t = g(\tau)$, удовлетворяющую, помимо условия 1°, еще и условиям

2°. g дифференцируема (непрерывно дифференцируемая) на $[\alpha, \beta]$;

3°. $g'(\tau) \neq 0$ при $\alpha \leqslant \tau \leqslant \beta$.

При этом, очевидно, дифференцируемая (непрерывно дифференцируемая) кривая Γ переходит в дифференцируемую (непрерывно дифференцируемую) кривую $\tilde{\Gamma}$.

При выполнении условий 1°, 2°, 3° обратная к g функция g^{-1} будет, очевидно, удовлетворять тем же условиям. Кривые Γ и $\tilde{\Gamma}$ при этом отождествляют (иначе говоря, их называют одной и той же кривой, различным образом параметризованной).

Упражнение 1. Показать, что при замене параметра, удовлетворяющей условиям 1°, 2°, 3° (т. е. при допустимой замене параметра),

а) неособая точка переходит в неособую;

b) касательная в неособой точке сохраняется;

c) гладкая кривая переходит в гладкую кривую.

§ 8.3. Длина дуги кривой

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$. Систему точек $\tau = \{t_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ называют *разбиением отрезка* $[a, b]$, если $a = t_0 < t_1 < < t_2 < \ldots < t_{i_\tau} = b$.

Соединив точки $\hat{r}(t_{i-1})$ и $\hat{r}(t_i)$ отрезками прямых ($i = 1, 2, \ \ldots, i_\tau$), получим так называемую *вписанную ломаную* (обозначим ее символом Λ_τ), длина которой

$$S_{\Lambda_\tau} = \sum_{i=1}^{i_\tau} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|.$$

Определение. *Длиной кривой* Γ называется

$$S_\Gamma := \sup_\tau S_{\Lambda_\tau}.$$

Определение. Кривая Γ называется *спрямляемой*, если ее длина конечна (т. е. $S_\Gamma < +\infty$).

Ясно, что длина кривой и ее спрямляемость не меняются при допустимой замене параметра на кривой.

Упражнение 1. Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$. — спрямляемая кривая, $c \in (a, b)$. Показать, что обе кривые

$$\Gamma' = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant c\}, \quad \Gamma'' = \{\vec{r}(t),\ c \leqslant t \leqslant b\}.$$

спрямляемы и сумма их длин равна длине кривой Γ.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *непрерывно дифференцируема. Тогда она спрямляема и длина ее удовлетворяет условию*

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant S_\Gamma \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |\vec{r}\,'(t)|(b - a).$$

Доказательство. Функция $|\vec{r}'(t)|$ как непрерывная на отрезке $[a,b]$ достигает на нем своего максимума. Пусть $\tau = \{t_i\}_{i=1}^{i_\tau}$ — некоторое разбиение отрезка $[a,b]$. Тогда с помощью (8.1.1) имеем

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \leqslant S_{\Lambda_\tau} = \sum_{i=1}^{i_\tau} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{a\leqslant t\leqslant b} |\vec{r}'(t)| \sum_{i=1}^{i} (t_i - t_{i-1}) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |\vec{r}'(t)|(b-a).$$

Переходя в этом неравенстве к верхней грани по τ, получаем утверждение теоремы.

Теорема 2. *Пусть кривая* $\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ *непрерывно дифференцируема. Тогда переменная длина дуги* $s = s(t)$, *отсчитываемая от ее начала* $(a, \hat{r}(a))$, *является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра* t, *причем*

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$
$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Доказательство. Пусть $s = s(t)$ — длина дуги кривой

$$\Gamma_t = \{\vec{r}(t)\ :\ a \leqslant u \leqslant t\}, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

которая является дугой (т. е. частью) кривой Γ. Пусть $a \leqslant t_0 < t_0 + \Delta t \leqslant b$. Применяя предыдущую теорему к дуге $\{\vec{r}(t)\colon t_0 \leqslant t \leqslant t + \Delta t\}$ длины $\Delta s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ (см. последнее упражнение), получаем

$$|\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)| \leqslant \Delta s \leqslant \max_{t_0\leqslant t\leqslant t_0+\Delta t} |\vec{r}'(t)|\Delta t.$$

Деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0 + 0$, получаем, что $s'_+(t_0) = |\vec{r}'(t_0)|$.

Аналогично устанавливается, что $s'_-(t_0) = |\vec{r}'(t_0)|$.

Отсюда следует, что $\exists\, s'(t_0) = |\vec{r}\,'(t_0)|$. Из неотрицательности $s'(t)$ следует, что $s(t)$ возрастает на $[a,b]$.

Следствие 1. *Если параметром непрерывно дифференцируемой кривой $\Gamma = \{\vec{r}(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S_\Gamma\}$ является длина ее дуги s, то $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$.*

Геометрический смысл равенства $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ состоит в том, что предел отношения $\left|\dfrac{\Delta s}{\Delta\vec{r}}\right|$ длины дуги к длине стягивающей ее хорды, когда один из концов дуги фиксирован, а длина дуги стремится к нулю, равен единице.

Следствие 2. *Для гладкой ориентированной кривой можно с помощью допустимой замены параметра перейти к параметру s, являющемуся переменной длиной дуги, отсчитываемой от начала кривой.*

Запишем равенство $\left|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right| = 1$ в виде

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

где α, β, γ — углы, образованные вектором $\frac{d\vec{r}}{ds}$ (а значит, и касательной) соответственно с осями Ox, Oy, Oz. Отсюда

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma,$$

в чем и состоит геометрический смысл координат вектора $\frac{d\vec{r}}{ds}$.

§ 8.4. Кривизна, главная нормаль, соприкасающаяся плоскость

Лемма 1. *Пусть вектор-функция $\vec{r} = \vec{r}(t)$ постоянна по модулю:*

$$|\vec{r}(t)| = C \quad \text{\textit{при}} \quad t \in U(t_0).$$

Пусть $\exists\,\vec{r}'(t_0)$. *Тогда* $\vec{r}'(t_0) \perp \vec{r}(t_0)$.

Доказательство. Дифференцируя скалярное произведение $(\vec{r}(t), \vec{r}(t)) = |\vec{r}|^2 = C^2$, получаем, что

$$(\vec{r}'(t_0), \vec{r}(t_0)) + (\vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0)) = 2(\vec{r}'(t_0), \vec{r}(t_0)) = 0.$$

Определение. Пусть Γ — спрямляемая кривая,

$$\Gamma = \{\vec{r}(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant S\},$$

где s — переменная длина ее дуги.

Пусть $\exists\,\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$ в $U(s_0)$ и

$$\exists\ \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \text{ в точке } s_0 \quad (s_0 \in [0, S]).$$

Тогда $k = k(s_0) = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}(s_0)\right|$ называется *кривизной* кривой Γ в точке кривой $(s_0, \hat{r}(s_0))$.

Геометрический смысл кривизны $k(s_0)$ состоит в том, что $k(s_0)$ является мгновенной угловой скоростью поворота касательной (если параметр s считать временем). В самом деле, поскольку $\vec{t}$ — единичный вектор, $|\Delta\vec{t}| = |\vec{t}(s_0 + \Delta s) - \vec{t}(s_0)|$ характеризует величину его поворота при изменении параметра на Δs. Если величину угла между $\vec{t}(s_0 + \Delta s)$ и $\vec{t}(s_0)$, выраженную в радианах, обозначить через $\varphi = \varphi(\Delta s)$, то

$$|\Delta\vec{t}| = 2\sin\frac{\varphi}{2} \sim \varphi \quad \text{при} \quad \Delta s \to 0+0$$

(в последнем равенстве легко убедиться, построив равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, совпадающими с векторами $\vec{t}(s_0+\Delta s)$ и $\vec{t}(s_0)$, отложенными от одной точки). Тогда

$$k = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{t}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0+0}\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0+0}\frac{\varphi(\Delta s)}{\Delta s}\,.$$

Определение. Величина, обратная кривизне
$$R = \frac{1}{k} \leqslant +\infty,$$
называется *радиусом кривизны.*

Упражнение 1. Проверить, что в каждой точке окружности ее радиус кривизны совпадает с радиусом этой окружности.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ — *гладкая дважды непрерывно дифференцируемая кривая. Тогда в каждой ее точке существует кривизна.*

Доказательство.
$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}\,'\frac{dt}{ds} = \frac{\vec{r}\,'}{s'}\,,$$
$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}\,'}{s'}\right)\frac{dt}{ds} = \frac{s'\vec{r}\,'' - s''\vec{r}\,'}{s'^3}\,. \tag{1}$$
Следовательно, $\exists\, k = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| = \frac{|s'\vec{r}\,'' - s''\vec{r}\,'|}{s'^3}$.

Выведем другое выражение для кривизны k. Поскольку в силу леммы $\frac{d\vec{t}}{ds} \perp \vec{t}$, имеем
$$k = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{t}\right| = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \times \frac{d\vec{r}}{ds}\right| =$$
$$= \left|\frac{s'\vec{r}\,'' - s''\vec{r}\,'}{s'^3} \times \frac{\vec{r}\,'}{s'}\right| = \frac{|\vec{r}\,'' \times \vec{r}\,'|}{s'^3}\,,$$
т. е.
$$k = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3} = \frac{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}\right\|}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\right)^3}\,.$$

Если $k = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \neq 0$, то можно написать формулу Френе:
$$\frac{d\vec{t}}{ds} = k\vec{n}, \quad \text{где} \quad |\vec{n}| = 1, \quad (\vec{t}, \vec{n}) = 0.$$

Вектор $\vec{n}$ называется *единичным вектором главной нормали.*

Определение. *Нормалью к кривой в данной точке* называется всякая прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной в этой точке.

Нормаль к кривой, параллельная $\vec{n}$, называется *главной нормалью.*

Пусть $\Gamma = \{\vec{r}(s),\ 0 \leqslant s \leqslant S\}$ и в точке $(s_0, \hat{r}(s_0))$ существует $k = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right| \neq 0$. Тогда в силу формулы Тейлора

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(s_0 + \Delta s) - \vec{r}(s_0) = \frac{d\vec{r}(s_0)}{ds}\,\Delta s + \\ + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\vec{r}(s_0)}{ds^2}\,(\Delta s)^2 + \vec{o}((\Delta s)^2) \quad \text{при} \quad \Delta s \to 0.$$

В иной записи эта формула имеет вид

$$\Delta\vec{r} = \Delta s\vec{t} + \frac{1}{2}\,k(\Delta s)^2\vec{n} + \vec{o}((\Delta s)^2), \quad \Delta s \to 0.$$

Эта формула показывает, что в окрестности данной точки кривая отклоняется от своей касательной в сторону вектора $\vec{n}$ с точностью до $\vec{o}((\Delta s)^2)$.

Определение. Плоскость, проходящая через касательную и главную нормаль в данной точке кривой, называется *соприкасающейся плоскостью.*

Последнюю формулу для $\Delta\vec{r}$ можно интерпретировать и так: в окрестности данной точки кривая лежит в соприкасающейся плоскости с точностью до $\vec{o}((\Delta s)^2)$.

Выведем уравнение соприкасающейся плоскости в данной точке гладкой кривой $\Gamma = \{\vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$, в которой кривизна $k \neq 0$. Эта плоскость проходит через точку $\hat{r}(t_0)$ и коллинеарна векторам $\vec{t} = \frac{\vec{r}\,'}{s'}$ и $\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{s'\vec{r}\,'' - s''\vec{r}\,'}{s'^3}$ (см. (1)), а значит, и вектору $\vec{r}\,''$ $(s' = |\vec{r}\,'| \neq 0)$. Поэтому уравнение соприкасающейся плоскости имеет вид

$$(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{r}\,'(t_0), \vec{r}\,''(t_0)) = 0, \qquad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

где $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$.

Если в данной точке кривой $k = 0$, то всякая плоскость, содержащая касательную в данной точке, называется соприкасающейся плоскостью.

Определение. Точка пространства, лежащая на главной нормали к кривой в данной ее точке и находящаяся на расстоянии $R = \dfrac{1}{k}$ от этой точки в направлении вектора $\vec{n}$, называется *центром кривизны кривой* в данной ее точке.

Центр кривизны лежит в соприкасающейся плоскости.

Если $\vec{r}$ — радиус-вектор точки кривой, то радиус-вектор центра кривизны

$$\vec{\rho} = \vec{r} + R\vec{n} = \vec{r} + \frac{1}{k^2}\,\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\,.$$

Отсюда и из (1) имеем

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{1}{k^2}\,\frac{s'\vec{r}\,'' - s''\vec{r}\,'}{s'^3}\,, \quad \text{где} \quad s' = |\vec{r}\,'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$s'' = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}\,.$$

Определение. Кривая $\vec{\rho} = \vec{\rho}(t)$, описывающая множество центров кривизны данной кривой Γ, называется ее *эволютой*.

Сама кривая Γ по отношению к своей эволюте является *эвольвентой*.

Кривая Γ вида $\Gamma = \{(x(t), y(t), 0),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ называется *плоской кривой*. Ее уравнение записывают в виде

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)),\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Будем считать плоскую кривую Γ гладкой. Радиус-вектор $\vec{r}$ кривой Γ лежит в плоскости xOy, как и векторы $\vec{r}'$, $\vec{r}''$, $\vec{n}$.

Пусть α — угол между касательной к кривой и осью Ox. Тогда $\Delta\alpha = \alpha(s_0 + \Delta s) - \alpha(s_0)$ имеет знак.

$$\vec{t} = i\cos\alpha + j\sin\alpha, \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = (-i\sin\alpha + j\cos\alpha)\,\frac{d\alpha}{ds}\,,$$

$$k = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right| = |-i\sin\alpha + j\cos\alpha|\left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \pm\frac{d\alpha}{ds} \geqslant 0,$$

$$k = \frac{1}{R} = \frac{|x'y' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}\,.$$

Радиус-вектор центра кривизны

$$\vec{\rho} = (\xi, \eta), \qquad \begin{cases} \xi = x + R^2\,\dfrac{d^2x}{ds^2}\,, \\ \eta = y + R^2\,\dfrac{d^2y}{ds^2}\,, \end{cases}$$

$$\xi = x - y'\,\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\,, \quad \eta = y + x'\,\frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\,.$$

В случае, когда кривая Γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, имеем

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + f'^2(x)\,dx^2,$$

$$ds = \sqrt{1 + f'^2}\,dx,$$

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}\,, \qquad \begin{cases} \xi = x - \dfrac{1 + y'^2}{y''}\,y', \\ \eta = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''}\,. \end{cases}$$

Глава 9
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 9.1. Первообразная и неопределенный интеграл

Символом $\langle a, b\rangle$ будем обозначать промежуток, т. е. либо отрезок $[a, b]$, либо полуинтервал $[a, b)$, либо полуинтервал $(a, b]$, либо интервал (a, b). При этом полуинтервал и интервал могут быть как конечными, так и бесконечными.

Определение. Пусть функции f и F определены на $\langle a, b\rangle$. Функция F называется *первообразной для* f *на* $\langle a, b\rangle$, если $F' = f$ на $\langle a, b\rangle$. При этом в случае $a \in \langle a, b\rangle$ или $b \in \in \langle a, b\rangle$ производные $F'(a)$, $F'(b)$ понимаются как односторонние.

Пусть F — первообразная для f на $\langle a, b\rangle$. Тогда $F + C$, где C — постоянная, также является первообразной для f на $\langle a, b\rangle$. В самом деле, $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Верно и обратное утверждение: если F и Φ — две первообразные функции f на $\langle a, b\rangle$, то $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — постоянная. В самом деле,

$$(F(x) - \Phi(x))' = f'(x) - f'(x) = 0.$$

Тогда с помощью формулы конечных приращений Лагранжа получаем, что

$$F(x) - \Phi(x) = C.$$

Определение. Операция перехода от данной функции к ее первообразной называется (*неопределенным*) интегрированием. При этом функции f ставится в соответствие некоторая конкретная произвольно выбранная первообразная. Эта первообразная называется *неопределенным интегралом функции* f и обозначается символом $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

Таким образом, каждый неопределенный интеграл функции f является ее первообразной, и наоборот, каждую первообразную можно выбрать в качестве неопределенного интеграла функции f.

Рассмотренные свойства первообразных дают возможность описать общий вид неопределенного интеграла для f на $\langle a, b\rangle$:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где F — некоторая конкретная первообразная, а C — произвольная постоянная.

Будем пользоваться еще и следующими обозначениями:

$$\int dg(x) := \int g'(x)\,dx, \qquad \int f(x)\,dg(x) := \int f(x)f(x)\,dx.$$

Основные свойства неопределенного интеграла на промежутке:

1°. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2°. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, где F — некоторая фиксированная первообразная для f. Это равенство можно переписать в виде

$$2^{\circ\circ}.\ \int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

3°. (Линейность неопределенного интеграла)

Пусть $\exists \int f_1(x)\,dx, \int f_2(x)\,dx$. Тогда

$$\exists \int (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x))\,dx = \alpha \int f_1(x)\,dx + \beta \int f_2(x)\,dx + C.$$

Свойство 1° содержится в определении неопределенного интеграла, свойство 2° уже было установлено.

Для доказательства свойства 3° проверим, что $F(x) = \alpha \int f_1(x)\,dx + \beta \int f_2(x)\,dx$ является первообразной для $\alpha f_1 + \beta f_2$. Это в самом деле так, поскольку

$$F'(x) = \left(\alpha \int f_1(x)\,dx\right)' + \left(\beta \int f_2(x)\,dx\right)' = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x),$$

теперь остается сослаться на свойство 2°.

Свойства 1°, 2°° показывают, что операции дифференцирования и (неопределенного) интегрирования обратны друг другу.

В дальнейшем будет показано, что для любой непрерывной на промежутке функции f существует неопределенный интеграл $\int f(x)\,dx$.

Каждую формулу для производной вида $F'(x) = f(x)$ можно истолковать как утверждение, что на соответствующем промежутке F является первообразной для f и, значит, в силу 2° $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Поэтому, переписывая таблицу производных основных элементарных функций, получим таблицу неопределенных интегралов, которая приводится в Приложении.

Каждая из формул таблицы рассматривается на тех промежутках, на которых определена соответствующая подынтегральная функция. Например, формулу

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C$$

следует рассматривать отдельно на каждом из двух промежутков: $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

§ 9.2. Методы интегрирования

Теорема 1 (интегрирование по частям). *Пусть на некотором промежутке функции u, v дифференцируемы и существует $\int u'(x)v(x)\,dx$. Тогда на этом промежутке*

$$\exists \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx + C.$$

Доказательство.

$$\left(uv - \int u'v\,dx\right)' = u'v + uv' - u'v = uv',$$

и остается сослаться на свойство 2°.

Теорема 2 (интегрирование заменой переменной). *Пусть функция f имеет на $\langle a, b\rangle$ первообразную, функция φ: $\langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$ дифференцируема на $\langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда на $\langle \alpha, \beta\rangle$*

$$\exists \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C. \qquad (1)$$

Доказательство. Дифференцируя стоящую в правой части сложную функцию $F \circ f$, где $F(x) = \int f(x)\,dx$, получаем

$$(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

см. теорему 5.5.1 и замечание к ней. Остается сослаться на свойство 2°.

Формулу (1) удобно запомнить и в виде

$$\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} + C.$$

Ее называют формулой *интегрирования подстановкой* (в интеграл $\int f(\varphi(t))\,d\varphi(t)$ вместо $\varphi(t)$ подставляют x, вычисляют $\int f(x)\,dx$ и затем возвращаются к переменной t).

Если в условиях доказанной теоремы дополнительно предположить, что функция φ строго монотонна, то на промежутке $\langle \xi, \eta\rangle = \varphi(\langle \alpha, \beta\rangle)$ существует обратная функция φ^{-1}. Тогда из (1) следует, что на промежутке $\langle \xi, \eta\rangle$

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} + C.$$

Эту формулу называют формулой *замены переменной в неопределенном интеграле.*

Пример интегрирования подстановкой:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+a^2} = \int \frac{1}{2}\,\frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} = \int \frac{1}{2}\,\frac{dx}{x}\Big|_{x=t^2+a^2} + C_1 =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_{x=t^2+a^2} + C_2 = \frac{1}{2}\ln(t^2+a^2) + C_2.$$

§ 9.3. Комплексные числа

Комплексными числами называются выражения вида

$$z = x + iy,$$

где $x, y \in \mathbb{R}$, i — некоторый элемент, называемый *мнимой единицей.* Число x называется *действительной частью числа* z ($x = \operatorname{Re} z$), а число y — *мнимой частью числа* z ($y = \operatorname{Im} z$). Множество всех комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Число $z = x + i0$ отождествляется с действительным числом x. Пишут $z = x$. Во множестве $\mathbb{C}$ нет отношения порядка.

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется неотрицательное действительное число

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для каждого $z = x + iy \in \mathbb{C}$ определено *сопряженное* ему комплексное число

$$\bar{z} = x - iy.$$

Суммой $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Произведением $z_1 z_2$ двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

В частности, $i \cdot i = -1$.

Легко проверить, что сумма и произведение комплексных чисел обладают теми же свойствами, что и сумма и произведение вещественных чисел. В частности, существует $0 = 0 + i0$ и $1 = 1 + i0$, для каждого $z \in \mathbb{C}$ существует противоположное комплексное число, для каждого

$z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, существует обратное комплексное число, определены разность двух комплексных чисел и частное двух комплексных чисел (если делитель не равен нулю).

Разность $z_2 - z_1$ двух комплексных чисел $z_2 = x_2 + iy_2$ и $z_1 = x_1 + iy_1$ вычисляется по правилу

$$z_2 - z_1 = x_2 - x_1 + i(y_2 - y_1).$$

Частное $z := \frac{z_1}{z_2}$ двух комплексных чисел z_1 и z_2 $(z_2 \neq 0)$ определяется как решение уравнения $zz_2 = z_1$ относительно $z = x + iy$. Практический прием нахождения частного состоит в почленном умножении последнего равенства на число $\bar{z}_2$, сопряженное числу z_2 и нахождения $z = x + iy$ из уравнения $z|z_2||^2 = z_1\bar{z}_2$, где $|z_2|$ — модуль z_2, $|z_2| > 0$:

$$z = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2 + y_2^2}\,.$$

Для вычисления частного двух комплексных чисел удобно представить каждое из этих чисел в тригонометрической форме, с которой мы познакомимся позднее.

Для геометрического изображения комплексных чисел пользуются прямоугольной системой координат. При этом комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой с координатами (x, y) или радиусом-вектором этой точки. Сложение и вычитание комплексных чисел сводится к сложению и вычитанию соответствующих векторов. Сопряженные комплексные числа z и $\bar{z}$ изображаются точками, симметричными относительно оси Ox (вещественной оси).

Нам понадобятся следующие свойства сопряженных чисел:

$$\bar{\bar{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_1, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$
$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2, \quad z\bar{z} = |z|^2.$$

Эти свойства устанавливаются непосредственной проверкой.

§ 9.4. Разложение многочлена на множители

Многочленом степени $n \in \mathbb{N}_0$ называется функция

$$P_n(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ \ldots + A_1 z + A_0, \quad A_n \neq 0,$$

где $z \in \mathbb{C}$, $A_k \in \mathbb{C}$ при $k = 0, 1, \ \ldots, n$.

Корнем многочлена $P_n(z)$ называется комплексное число z_0 такое, что $P_n(z_0) = 0$.

Многочлен $P_n(z)$ можно разделить на одночлен $(z - z_0)$, т. е. представить $P_n(z)$ в виде

$$P_n(z) = (z - z_0) Q_{n-1}(z) + r,$$

где частное Q_{n-1} — многочлен степени $n - 1$, а остаток $r \in \in \mathbb{C}$.

Теорема 1 (Безу). *Число z_0 является корнем многочлена тогда и только тогда, когда $P_n(z)$ делится без остатка на $z - z_0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Если многочлен P_n при некотором $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$ представи́м в виде

$$P_n(z) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z)$$

и не представи́м в виде

$$P_n(z) = (z - z_0)^{k+1} Q_{n-k-1}(z),$$

где Q_{n-k}, Q_{n-k-1} — многочлены, то z_0 называют *корнем* многочлена P_n *кратности* k. При $k = 1$ z_0 называют *простым корнем.*

В курсе теории функций комплексного переменного будет доказано, что всякий многочлен имеет хотя бы один корень в $\mathbb{C}$. Отсюда сразу следует разложение на множители многочлена P_n

$$P_n(z) = A_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_2)^{k_r}, \quad \sum_{i=1}^{r} k_i = n,$$

где $z_1, z_2, \ \ldots, z_r$ — корни многочлена P_n, кратности которых соответственно равны $k_1, k_2, \ \ldots, k_r$.

В дальнейшем будем рассматривать многочлены P_n лишь с действительными коэффициентами.

Лемма 1. *Пусть P_n — многочлен с действительными коэффициентами и $z_0 = a + ib$, $b \neq 0$, его корень кратности k. Тогда $\bar{z}_0 = a - ib$ также является его корнем кратности k.*

Доказательство. Имеем

$$P_n(x) = (z - z_0)^k Q_{n-k}(z).$$

Переходя в этом равенстве к сопряженным значениям в его левой и правой частях, имеем

$$\overline{P_n(z)} = \overline{(z - z_0)^k Q_{n-k}(z)}.$$

Отсюда на основании свойств сопряженных чисел имеем

$$P_n(\bar{z}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)^k \overline{Q}_{n-k}(\bar{z}),$$

где коэффициенты многочлены $\overline{Q}_{n-k}$ являются сопряженными к соответствующим коэффициентам многочлена Q_{n-k}.

Заменив в последнем равенстве $\bar{z}$ на z, получаем, что

$$P_n(z) = (z - \bar{z}_0)^k \overline{Q}_{n-k}(z).$$

Отсюда следует, что $\bar{z}_0$ — корень многочлена P_n, причем кратность $\bar{z}_0$ не меньше кратности z_0.

Аналогично показывается, что если $\bar{z}_0$ — корень многочлена P_n кратности k, то $\bar{\bar{z}}_0 = z_0$ является корнем P_n кратности не меньше k. Отсюда следует, что кратности z_0 и $\bar{z}_0$ совпадают.

Замечание. При $z_0 = a + ib$

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 + pz + q,$$

где p, q — действительные, $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

В самом деле,

$$(z-a-bi)(z-a+bi) = (z-a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2,$$

$$\frac{p^2}{4} - q = a^2 - (a^2+b^2) = -b^2 < 0.$$

Учитывая лемму и последнее замечание, приходим к выводу, что для многочлена P_n с действительными коэффициентами справедливо следующее разложение на множители

$$P_n(x) = A_n(x-a_1)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s},$$

где $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i + 2\sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j = n$, $\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0 \quad (j = 1, 2, \ \ldots, s)$.

Здесь $A_n \in \mathbb{R}$, a_i — действительные корни многочлена P_n, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ — их кратности,

$$x^2 + p_jx + q_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j), \quad \operatorname{Im} z_j \neq 0,$$

z_j, $\bar{z}_j$ — комплексные корни P_n ($\operatorname{Im} z_j \neq 0$), $\beta_j \in \mathbb{N}$ — их кратности.

§ 9.5. Разложение правильных рациональных дробей на простейшие

Рациональная дробь (т. е. частное двух многочленов) $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется *правильной*, если степень многочлена P меньше степени многочлена Q. Неправильную рациональную дробь (деля числитель на знаменатель по правилу деления многочленов) можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (второе слагаемое отсутствует, если деление произошло без остатка).

Все многочлены в этом параграфе имеют лишь действительные коэффициенты.

Лемма 1. *Пусть* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь и* a *— действительный корень кратности* $\alpha \geqslant 1$ *многочлена* Q*, т. е.*

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}\tilde{Q}(x), \quad \tilde{Q}(a) \neq 0.$$

Тогда справедливо разложение

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\tilde{Q}(x)}\,,$$

где $A \in \mathbb{R}$, *а рациональная дробь* $\dfrac{\tilde{P}(x)}{(x-a)^{\alpha-1}\tilde{Q}(x)}$ *также является правильной.*

Доказательство. При произвольном $A \in \mathbb{R}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{P(x) - A\tilde{Q}(x)}{(x-a)^\alpha \tilde{Q}(x)}\,, \tag{1}$$

где правая часть — правильная рациональная дробь.

Выберем A из условия, чтобы a было корнем числителя правой части, т. е. $A = \dfrac{P(a)}{\tilde{Q}(a)}$. Тогда по теореме Безу

$$P(x) - A\tilde{Q}(x) = (x-a)\tilde{P}(x).$$

Сократив правую часть (1) на $x-a$, приходим к утверждению леммы.

Лемма 2. *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь,* $z_0 = a+ib$, $b \neq 0$ *— корень кратности* $\beta \geqslant 1$ *многочлена* Q, *т. е. при* $x^2+px+q = (x-z_0)(x-\bar{z}_0)$

$$Q(x) = (x^2+px+q)^\beta \tilde{Q}(x), \quad \tilde{Q}(a+ib) \neq 0.$$

Тогда справедливо разложение

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta} + \frac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}\tilde{Q}(x)}\,,$$

где $M, N \in \mathbb{R}$, *а рациональная дробь* $\dfrac{\tilde{P}(x)}{(x^2+px+q)^{\beta-1}\tilde{Q}(x)}$ *также является правильной.*

Доказательство. При произвольных $M, N \in \mathbb{R}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta} = \frac{P(x) - (Mx+N)\tilde{Q}(x)}{(x^2+px+q)^\beta \tilde{Q}(x)}\,, \tag{2}$$

где правая часть — правильная рациональная дробь. Достаточно, очевидно, выбрать M, N так, чтобы числитель правой части (2) делился на $x^2 + px + q$, т. е. чтобы $a + ib$ являлся его корнем. Имеем

$$P(a + ib) - (M(a + ib) + N)\tilde{Q}(a + ib) = 0,$$

т. е.

$$M(a + ib) + N = \frac{P(a + ib)}{\tilde{Q}(a + ib)}.$$

Отсюда однозначно находятся M и N:

$$M = \operatorname{Im}\left(\frac{P(a + ib)}{b\tilde{Q}(a + ib)}\right)$$

$$N = \operatorname{Re}\left(\frac{P(a + ib)}{\tilde{Q}(a + ib)} - Ma\right).$$

Из лемм 1, 2 следует

Теорема 1. *Пусть P, Q — многочлены с действительными коэффициентами, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная рациональная дробь,*

$$Q(x) = (x - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x - a_r)^{\alpha_r}(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s},$$

где $a_1, \ldots, a_r$ — попарно различные действительные корни Q, $x^2 + p_j x + q_j = (x - z_j)(x - \bar{z}_j)$, $\operatorname{Im} z_j > 0$, $z_1, \ldots, z_s$ — попарно различные комплексные корни Q.

Тогда

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{\alpha_i - 1} \frac{A_{ik}}{(x - a_i)^{\alpha_i - k}} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{m=0}^{\beta_j - 1} \frac{M_{jm}x + N_{jm}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j - m}}, \tag{3}$$

где A_{ik}, M_{jm}, N_{jm} — некоторые действительные числа.

Доказательство состоит в последовательном многократном применении лемм 1, 2. Именно, применяем сначала лемму 1 по отношению к корню a_1 α_1 раз, затем лемму 1 по отношению к корню a_2 α_2 раз и т.д.

Рациональные дроби вида

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad (A \neq 0) \quad \text{и} \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \quad (M^2+N^2>0), \tag{4}$$

где $n \in \mathbb{N}$, a, p, q, A, M, N — действительные числа и $\frac{p^2}{4} - q < 0$, называются *простейшими* рациональными дробями.

При нахождении коэффициентов A_{ik}, M_{jm}, N_{jm} в разложении (3) правильной рациональной дроби на простейшие в случае конкретной дроби $\frac{P}{Q}$ обычно применяют метод неопределенных коэффициентов. Он состоит в том, что записывают разложение (3) с неопределенными коэффициентами A_{ik}, M_{jm}, N_{jm}, приводят все дроби к общему знаменателю и отбрасывают его. Из полученного равенства многочленов находят все нужные коэффициенты, сравнивая, например, коэффициенты при одинаковых степенях x или значения многочленов в некоторых точках.

§ 9.6. Интегрирование рациональных дробей

Всякую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, которую в свою очередь можно разложить на сумму простейших.

Поэтому вопрос интегрирования рациональных дробей сводится к вопросу интегрирования простейших дробей, т. е. дробей вида (9.5.4).

Интеграл $\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx$ с помощью подстановки $t = x - a$ сводится к табличному интегралу.

Для вычисления интеграла $I_1 = \displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$ представим квадратный трехчлен x^2+px+q в виде $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$. Положив $a^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$ и совершив в I_1 подстановку $t = x + \frac{p}{2}$, получаем

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{M + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2+a^2}\,dt + C_1 = \\
&= \frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} + C_2 = \\
&= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} + C_3 = \\
&= \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C_3 = \\
&= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C_3.
\end{aligned}
$$

З а м е ч а н и е. Во всех интегралах этой цепочки, зависящих от t, после их вычисления вместо t следует подставить $t = x + \frac{p}{2}$. Ради краткости записи мы не отмечаем этого здесь и в последующем.

Вычислим при $n \geqslant 2$ интеграл

$$
\begin{aligned}
I_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)dt}{(t^2+a^2)^n} + C_1 = \\
&= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} + C_2.
\end{aligned}
$$

Первый из интегралов правой части сводится подстановкой к табличному. Остается вычислить интеграл

$$J_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dt}{(t^2+a^2)^n} + C_1 =$$
$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{((t^2+a^2)-t^2)\,dt}{(t^2+a^2)^n} + C_1 =$$
$$= \frac{1}{a^2}\,J_{n-1} - \frac{1}{a^2}\int t\,\frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + C_2.$$

Для вычисления последнего интеграла применим формулу интегрирования по частям, считая $u = t$, $v' = \frac{2t}{(t^2+a^2)^n}$, $v = -\,\frac{1}{(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}}$.

Получим

$$J_n = \frac{1}{a^2}\,J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2a^2(n-1)}\,J_{n-1} + C_3.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу

$$J_n = \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\,J_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C_3.$$

Зная

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} + C' = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C,$$

мы уже можем по этой формуле найти последовательно J_2, $J_3, \ \ldots$

§ 9.7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Функции вида

$$\sum_{k_1+\,\ldots\,+k_n \leqslant k} a_{k_1,\,\ldots,\,k_n} u_1^{k_1}\,\ldots\,u_n^{k_n},$$

называются *многочленами от переменных* $u_1, \ \ldots, u_n$.

Функции вида

$$R(u_1,\ \ldots,\ u_n) = \frac{P(u_1,\ \ldots,\ u_n)}{Q(u_1,\ \ldots,\ u_n)},$$

где P, Q — многочлены от переменных $u_1,\ \ldots,\ u_n$, называются *рациональными функциями от* $u_1,\ \ldots,\ u_n$.

1°. Рассмотрим

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},\ \ldots,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx,$$

где $r_1,\ \ldots,\ r_s$ — рациональные числа.

Запишем r_i в виде $r_i = \frac{p_i}{m}$, где $m \in \mathbb{N}$, p_i — целые числа ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$).

Введем новую переменную t равенством $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$. Тогда $x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m} = \rho(t)$ — рациональная функция, $dx = \rho'(t)\,dt$. Производя замену переменной в I, получаем

$$I = \int R\left(\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}\right)^{r_1},\ t^{p_1},\ \ldots,\ t^{p_s}\right) \rho'(t)\,dx + C,$$

где под знаком интеграла стоит рациональная функция от t, интеграл от которой мы умеем находить.

2°. Интеграл вида $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ может быть сведен к интегралу от рациональной функции с помощью одной из *подстановок Эйлера.*

Случай 1: $a > 0$. Можно применить замену x на t, определяемую формулой

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} \pm t,$$

откуда $x = \dfrac{t^2 - c}{b \mp 2t\sqrt{a}}$.

Случай 2: Корни x_1, x_2 трехчлена ax^2+bx+c действительны.

Если $x_1 = x_2$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = |x - x_1|\sqrt{a}$.

Если $x_1 \neq x_2$, то можно применить замену x на t, определяемую формулой

$$\pm(x - x_1)t = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)}.$$

Случай 3: $c > 0$. Применяется замена x на t, определяемая формулой

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt.$$

3°. *Интегралом от биномиального дифференциала* называется

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p dx$$

($a \neq 0$, $b \neq 0$, m, n, p — рациональные). Применив замену $x = t^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n}\, t^{\frac{1}{n}-1}$, получим

$$I = \frac{1}{n} \int (a + bt)^p t^{\frac{m+n}{n}-1} dt + C,$$

так что вопрос сводится к нахождению интеграла вида ($q = \frac{m+1}{n} - 1$)

$$J = \int (a + bt)^p t^q dt \quad (p,\ q \text{ — рациональные}).$$

Этот интеграл в трех случаях (и ни в каких других) сводится к интегралу от рациональной дроби:

Случай 1: p — целое число.

Случай 2: q — целое число.

Случай 3: $p + q$ — целое число.

В самом деле, в указанных случаях интеграл J имеет вид интеграла, рассмотренного в начале параграфа. В случае 3 это становится ясным после записи J в виде

$$J = \int \left(\frac{a + bt}{t}\right)^p t^{p+q} dt.$$

Итак, интеграл I сводится к интегралу от рациональных функций в случаях целых p, $\frac{m+1}{n}$ или $\frac{m+1}{n} + p$.

В других случаях интеграл I не является элементарной функцией, что было доказано П.Л. Чебышевым.

4°. Интеграл вида

$$I = \int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

сводится к интегралу от рациональной дроби подстановкой

$$u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}\,, \quad -\pi < x < \pi.$$

В самом деле, тогда

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}\,,$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-u^2}{1+u^2}\,,$$

$$x = 2\operatorname{arctg} u, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}\,,$$

так что

$$I = 2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2}\,,\ \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2} + C.$$

Другие подстановки

$$u = \sin x, \quad u = \cos x, \quad u = \operatorname{tg} x$$

иногда приводят к нужной цели при менее громоздких вычислениях. Например, интеграл $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ (m, n — рациональны) подстановкой $u = \sin x$ или $u = \cos x$ сводится к интегралу от биномиального дифференциала.

5°. Некоторые интегралы от трансцендентных функций вычисляются интегрированием по частям:

$$\int a^{\alpha x} \begin{Bmatrix} \cos\beta x \\ \sin\beta x \end{Bmatrix}, \quad \int x^n \varphi(x)\, dx,$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(x) = \cos\alpha x$, $\sin\alpha x$, $e^{\alpha x}$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, $\ln x$.

Например,

$$I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx = \frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx + C_1 =$$

$$= \frac{e^{\alpha x} \sin \beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx + C_2 =$$

$$\frac{e^{\alpha x}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I + C_2.$$

Из сравнения первой и последней частей равенства получаем

$$I = \frac{e^{\alpha x}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) + \beta^2 C_2}{\alpha^2 + \beta^2} =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x)}{\alpha^2 + \beta^2} + C.$$

6°. Как уже упоминалось при интегрировании биномиальных дифференциалов, не все интегралы от элементарных функций являются элементарными функциями. К их числу относятся и

$$\int \frac{e^x}{x} \, dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} \, dx, \quad \int e^{-x^2} dx,$$

эллиптические интегралы 1-го, 2-го и 3-го рода:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + h \sin^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Глава 10
ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 10.1. Многомерные евклидовы пространства

Определение 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$. *n-мерным действительным числовым пространством* называется множество всевозможных упорядоченных наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ из n действительных чисел:

$$\mathbb{R}^n \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \,:\, x_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Элемент пространства $\mathbb{R}^n$ будем называть *точкой* и сокращенно обозначать через $x = (x_1, \ldots, x_n)$. При этом числа $x_1, \ \ldots, x_n$ называются *координатами точки* x.

В $\mathbb{R}^n$ можно ввести *расстояние* между двумя точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ \ldots + (x_n - y_n)^2}. \tag{1}$$

Определение 2. n-мерное действительное числовое пространство $\mathbb{R}^n$ с введенным по формуле (1) расстоянием называется *n-мерным евклидовым пространством.*

В дальнейшем символом $\mathbb{R}^n$ всегда будет обозначаться n-мерное евклидово пространство.

Свойства расстояния (1):

1° $\rho(x, y) \geqslant 0 \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$; $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$;

2° $\rho(x, y) = \rho(y, x) \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$;

3° $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \ \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

Свойства 1°, 2° очевидны. Свойство 3°, называемое *неравенством треугольника*, будет вскоре установлено.

В $\mathbb{R}^n$ можно ввести операции сложения $x + y$ и умножения λx, $\lambda \in \mathbb{R}$, аналогично тому, как это сделано при $n = 1, 2, 3$. Тогда $\mathbb{R}^n$ превращается в линейное (векторное) пространство, а точку $x \in \mathbb{R}^n$ называют также *вектором.*

Не будем об этом говорить подробно, так как в дальнейшем не будет играть роли структура векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Однако ради некоторого упрощения обозначений введем понятие суммы и разности:

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1, \dots, x_n \pm y_n) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

и понятие модуля x:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Тогда $\rho(x, y) = |x - y|$.

Лемма 1 (неравенство Коши–Буняковского).

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant |x|\,|y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Доказательство. Это неравенство при $n = 2, 3$ является хорошо известным свойством скалярного произведения. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим лишь нетривиальный случай (2), когда $|x| > 0$, $|y| > 0$.

При $a, b \geqslant 0$ имеем

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0, \quad ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Заменив a на $a\sqrt{t}$, b — на $\frac{b}{\sqrt{t}}$, при произвольном $t > 0$, имеем

$$ab \leqslant \frac{a^2 t}{2} + \frac{b^2}{2t} \quad (a, b \geqslant 0,\ t > 0).$$

Применив это неравенство при $a = x_i$, $b = y_i$ и суммируя по i, получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \frac{|x|^2 t}{2} + \frac{|y|^2}{2t} \quad \forall\, t > 0.$$

Взяв $t = \frac{|y|}{|x|}$, получаем (2).

Лемма 2 (неравенство Минковского).

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Доказательство.

$$|x+y|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2 = |x|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + |y|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем отсюда, что

$$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Неравенство (3) также называют *неравенством треугольника.*

Доказательство свойства 3° расстояния.

Пусть $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $x' = x - y$, $y' = y - z$. Тогда $x' + y' = x - z$. В силу (3)

$$|x' + y'| \leqslant |x'| + |y'|, \text{ т. е. } |x - z| \leqslant |x - y| + |y - z|,$$

что лишь обозначением отличается от неравенства

$$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Понятие расстояния в $\mathbb{R}^n$ дает возможность ввести ε-окрестность точки и понятие предельного перехода в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. При $\varepsilon > 0$ *ε-окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}^n$ называется множество

$$U_\varepsilon(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n, \quad |x - a| < \varepsilon\}.$$

$U_\varepsilon(a)$ называют еще *шаром*, или *открытым шаром* в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке a.

Определение 4. Точку $a \in \mathbb{R}^n$ называют *пределом последовательности* $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ *точек* $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, если

$$\lim_{m\to\infty} |x^{(m)} - a| = 0,$$

или, иначе, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x^{(m)} - a| < \varepsilon \quad \forall\, m \geqslant m_\varepsilon.$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$x^{(m)} \in U_\varepsilon(a) \quad \forall\, m \geqslant m_\varepsilon.$$

Теорема 1. *Последовательность $\{x^{(m)}\}_1^\infty$ точек из $\mathbb{R}^n$ сходится к точке $a = \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда при каждом $k = 1, 2, \ldots, n$*

$$\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = a_k,$$

где $x_k^{(m)}$, a_k — координаты точек соответственно $x^{(m)}$, a.

Доказательство очевидно, если воспользоваться неравенством

$$|x_k^{(m)} - a_k| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(m)} - a_i)^2} = |x^{(m)} - a|.$$

Определение 5. *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$* называется *ограниченным*, если $\exists\, R > 0$: $E \subset U_R(0)$.

Определение 6. *Последовательность $\{x^{(m)}\}$* называется *ограниченной*, если множество ее значений ограничено, т. е. $\exists\, R > 0$: $|x^{(m)}| < R\ \forall\, m \in \mathbb{N}$.

Теорема 2 (Больцано–Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x^{(m)}\}$ — ограниченная последовательность. Тогда при любом k, $1 \leqslant k \leqslant n$, числовая последовательность $\{x_k^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ ограничена. Рассмотрим числовую последовательность $\{x_1^{(m)}\}_{m=1}^\infty$. По теореме Больцано–Вейерштрасса, существует такая подпоследовательность $\{m_j^{(1)}\}_{j=1}^\infty$ последовательности натуральных чисел, что последовательность $\{x_1^{(m_j^{(1)})}\}_{j=1}^\infty$ сходится.

Рассмотрим последовательность $\{x_2^{(m_j^{(1)})}\}_{j=1}^\infty$. По теореме Больцано–Вейерштрасса, существует подпоследовательность $\{m_j^{(2)}\}_{j=1}^\infty$ последовательности $\{m_j^{(1)}\}_{j=1}^\infty$ такая, что последовательность $\{x_2^{(m_j^{(2)})}\}_{j=1}^\infty$ сходится.

Продолжая это рассуждение, получим n последовательностей натуральных чисел $\{m_j^{(1)}\}$, $\{m_j^{(2)}\}$, $\ldots$, $\{m_j^{(n)}\}$, причем каждая следующая является подпоследовательностью предшествующей, и последовательности $\{x_k^{(m_j^{(k)})}\}_{j=1}^\infty$ сходятся при $k = 1, 2, \ldots, n$.

Но тогда сходятся и последовательности $\{x_k^{(m_j^{(n)})}\}_{j=1}^\infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$, как подпоследовательности сходящихся последовательностей. Следовательно, по теореме 1 последовательность $\{x^{(m_j^{(n)})}\}_{j=1}^\infty$ сходится, что и требовалось показать.

§ 10.2. Открытые и замкнутые множества

Определение 1. Точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 \,:\, U_\varepsilon(x) \subset E.$$

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней.

Примерами открытых множеств являются $E = \mathbb{R}^n$, $E = \varnothing$.

Лемма 1. *$U_\varepsilon(a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Требуется доказать, что всякая точка $U_\varepsilon(a)$ является внутренней. Пусть $x \in U_\varepsilon(a)$. Тогда $r := |x - a| < \varepsilon$ и $\delta := \varepsilon - r > 0$. Достаточно показать, что

$U_\delta(x) \subset U_\varepsilon(a)$, т. е. что всякая точка y из $U_\delta(x)$ принадлежит $U_\varepsilon(a)$. Пусть $y \in U_\delta(x)$, т. е. $|y - x| < \delta$. Тогда в силу неравенства треугольника

$$|y - a| \leqslant |y - x| + |x - a| < \delta + r = \varepsilon,$$

т. е. $y \in U_\varepsilon(a)$, что и требовалось показать.

Упражнение 1. Доказать, что

1° пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством;

2° объединение любого набора открытых множеств является открытым множеством.

Определение 2. Всякое открытое множество, содержащее точку x, называется *окрестностью точки* x и обозначается $U(x)$.

В силу леммы об открытости $U_\varepsilon(x)$ ε-окрестность точки x является ее окрестностью. С другой стороны, для всякой окрестности $U(x)$ точки x найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x) \subset \subset U(x)$.

Упражнение 2. Сформулировать определение предела последовательности $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$, используя окрестности $U(a)$ вместо ε-окрестностей $U_\varepsilon(a)$.

В дальнейшем будут использоваться и обозначения проколотых окрестностей:

$$\mathring{U}_\varepsilon(x) = U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}, \quad \mathring{U}_\varepsilon(x) = U(x) \setminus \{x\}.$$

Определение 3. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\exists \{x^{(m)}\}_1^\infty \ : \ a \neq x^{(m)} \in E \quad (\forall\, m \in \mathbb{N}), \lim_{m\to\infty} x^{(m)} = a.$$

Определение 3′. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *предельной точкой* множества $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$E \cap \mathring{U}_\varepsilon(a) \neq \varnothing \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Упражнение 3. Доказать эквивалентность определений 3 и 3$'$.

Определение 4. *Множество* $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Примерами замкнутых множеств являются $\mathbb{R}^n$, одноточечное множество, $\varnothing$, замкнутый шар: $\{x\colon |x-a| \leqslant r\}$ при $r > 0$, в т.ч. отрезок при $n = 1$.

Упражнение 4. Доказать, что:

1° объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто;

2° пересечение любого набора замкнутых множеств замкнуто.

Определение 5. Множество

$$\overline{E} \coloneqq E \cup \{x \,:\, x \text{ — предельная точка множества } E\}$$

называется *замыканием множества* E.

Используя символ $\overline{E}$, определение замкнутого множества можно сформулировать в виде $E = \overline{E}$.

Лемма 2. *Замыкание $\overline{E}$ множества $E \subset \mathbb{R}^n$ является замкнутым множеством.*

Доказательство. Пусть $E \neq \varnothing$ и a — предельная точка множества $\overline{E}$. Требуется доказать, что $a \in \overline{E}$. По определению предельной точки

$$\exists \{y^{(m)}\} \,:\, a \neq y^{(m)} \in \overline{E},$$

$\varepsilon_m \coloneqq |y^{(m)} - a| \to 0$ при $m \to 0$.

Покажем, что a — предельная точка множества E (и, следовательно, $a \in \overline{E}$). Построим для этого последовательность

$$\{x^{(m)}\} \,:\, a \neq x^{(m)} \in E, \quad |x^{(m)} - a| \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

Если $y^{(m)} \in E$, то положим $x^{(m)} = y^{(m)}$. Если $y^{(m)} \notin E$, то $y^{(m)}$ — предельная точка множества E (поскольку $y^{(m)} \in \overline{E}$). В этом случае через $x^{(m)}$ обозначим такую точку множества E, что $|x^{(m)} - y^{(m)}| < \frac{1}{2}\,\varepsilon_m$. Итак, для построенной последовательности $\{x^{(m)}\}$ имеем $x^{(m)} \in E$,

$$0 < \frac{1}{2}\,\varepsilon_m \leqslant |y^{(m)} - a| - |x^{(m)} - y^{(m)}| \leqslant |x^{(m)} - a| \leqslant \\ \leqslant |x^{(m)} - y^{(m)}| + |y^{(m)} - a| < \frac{3}{2}\,\varepsilon_m.$$

Отсюда видно, что a — предельная точка множества E, что и требовалось показать.

Доказанную лемму можно сформулировать в виде:

$$\overline{\overline{E}} = \overline{E}.$$

Часто открытое множество обозначается буквой G, а замкнутое — буквой F.

Упражнение 5. Доказать, что если F — замкнутое, а G — открытое множества $\mathbb{R}^n$, то $F \setminus G$ — замкнуто.

Определение 6. Точка $a \in \mathbb{R}^n$ называется *граничной точкой множества* $E \subset \mathbb{R}^n$, если каждая ε-окрестность точки a $U_\varepsilon(a)$ содержит как точки из E, так и точки не из E.

Границей ∂E *множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множество граничных точек E.

Граничная точка множества E может как принадлежать, так и не принадлежать множеству E. Так,

$$\partial U_\varepsilon(a) = \{x \,:\, |x-a| = \varepsilon\}, \quad U_\varepsilon(a) \cap \partial U_\varepsilon(a) = \varnothing,$$
$$\partial\{x \,:\, |x-a| \leqslant \varepsilon\} = \{x \,:\, |x-a| = \varepsilon\} \subset \{x \,:\, |x-a| \leqslant \varepsilon\}.$$

Упражнение 6. Доказать, что

1° множество E открыто тогда и только тогда, когда $E \cap \partial E = \varnothing$;

2° множество E замкнуто тогда и только тогда, когда $\partial E \subset E$.

3° множество $E \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus E$ открыто.

При доказательстве 3° можно использовать равенство $\partial E = \partial(\mathbb{R}^n \setminus E)$.

Упражнение 7. Доказать, что для $E \subset \mathbb{R}^n$

1° ∂E — замкнутое множество ($\overline{\partial E} = \partial E$);

2° $\operatorname{int} E \coloneqq E \setminus \partial E$ — открытое множество;

3° $E \cup \partial E = \overline{E}$.

Определение 7. *Диаметром непустого множества* $E \subset \mathbb{R}^n$ называется

$$\operatorname{diam} E \coloneqq \sup_{x,y \in E} |x - y|.$$

Определение 8. *Расстоянием между двумя непустыми множествами* $E, F \subset \mathbb{R}^n$ называется число

$$\operatorname{dist}(E, F) = \inf_{x \in E, y \in F} |x - y|.$$

Определение 9. Непустое ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ называется *компактом.*

Лемма 3. *Пусть* E, F — *компакты в* $\mathbb{R}^n$, $E \cap F = \varnothing$. *Тогда* $\operatorname{dist}(E, F) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\operatorname{dist}(E, F) = d$. Из определения расстояния между множествами следует, что существуют две последовательности

$$\{x^{(m)}\},\ \{y^{(m)}\}, \quad x^{(m)} \in E,\ y^{(m)} \in F \quad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

такие, что $|x^{(m)} - y^{(m)}| \to d$ $(m \to \infty)$.

С помощью теоремы Больцано–Вейерштрасса выделим из $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$, а затем из $\{y^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходящуюся подпоследовательность $\{y^{(m_{k_j})}\}_{j=1}^{\infty}$ так, что

$$x^{(m_{k_j})} \to a, \quad y^{(m_{k_j})} \to b \text{ при } j \to \infty.$$

В силу замкнутости множеств E, F имеем $a \in E$, $b \in F$. Тогда при $j \to \infty$

$$d \leqslant |a-b| \leqslant$$
$$\leqslant |a-x^{(m_{k_j})}| + |b-y^{m_{k_j}}| + |x^{(m_{k_j})} - y^{(m_{k_j})}| \to 0+0+d = d.$$

Следовательно, $d = |a-b|$. Но $a \neq b$, так как $E \cap F = \varnothing$. Поэтому $d > 0$.

Упражнение 8. Обобщить лемму 3 на случай, когда E — замкнутое множество, F — компакт.

Определение 10. Множество точек $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ с конкретным его описанием

$$\Gamma = \{x(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} = \{(x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}, \tag{1}$$

где x_i — непрерывные на $[\alpha, \beta]$ функции ($i = 1, \ldots, n$), называется (*непрерывной*) *кривой*.

При этом точка $x(\alpha)$ называется *началом кривой*, а точка $x(\beta)$ — *концом кривой*.

Определение 11. *Областью в* $\mathbb{R}^n$ называется открытое связное множество, т. е. такое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, для любых двух точек a, b которого существует кривая Γ (1), лежащая в G ($\Gamma \subset G$) и соединяющая точки a и b ($x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$).

Определение 12. Замыкание $\overline{G}$ области $G \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутой областью*.

§ 10.3. Предел функции многих переменных

Будем рассматривать функции

$$f\ :\ X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

т. е. числовые функции, определенные на множестве X точек евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Множество X называется *областью определения функции* f. Через $f(x) =$

$= f(x_1, \ldots, x_n)$ обозначается значение функции f в точке $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$.

Графиком функции f (1) называется множество точек $\{(x, x_{n+1}) \coloneqq (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon (x) \in X,\ x_{n+1} = f(x)\}$.

Определение 1. Будем говорить, что функция f (1):

1° определена в точке x, если $x \in X$;

2° не определена в точке x, если $x \notin X$;

3° определена на множестве E, если $E \subset X$.

Определение 2. Пусть функция f (1) определена на множестве E и $x^{(0)}$ — предельная точка множества E. Число A называется *пределом функции f при $x \to x^{(0)}$ по множеству E* (пишется $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x) = A$), если

1) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\colon |f(x) - A| < \varepsilon\ \forall\, x \in E,\ 0 < |x - x^{(0)}| < \delta$, или
2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U(x^{(0)})\colon |f(x) - A| < \varepsilon\ \forall\, x \in E \cap \mathring{U}(x^{(0)})$, или
3) $\lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = A\ \forall\, \{x^{(m)}\}\colon x^{(m)} \in E \setminus \{x^{(0)}\},\ x^{(m)} \to x^{(0)}$ при $m \to \infty$.

Здесь дано три определения предела, их эквивалентность устанавливается так же, как в случае $n = 1$.

Упражнение 1. Сформулировать обобщение определения предела на случай $A = \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \hat{\mathbb{R}}$, ориентируясь на соответствующее обобщение для $n = 1$.

З а м е ч а н и е. Если $E \supset \mathring{U}_\delta(x^{(0)})$ при некотором $\delta > 0$, то вместо $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ пишут просто $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$.

Теорема 1 (критерий Коши существования предела функции). *Пусть функция f (1) определена на множестве E и $x^{(0)}$ — предельная точка множества E. Для существования конечного предела $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \forall\, x', x'' \in E \cap \mathring{U}_\delta(x^{(0)}).$$

Доказательство не отличается по существу от приведенного раньше для функций одной переменной.

Для пределов функций многих переменных по множеству выполняются арифметические свойства, аналогичные арифметическим свойствам пределов функций одной переменной. Их доказательства аналогичны доказательствам для функций одной переменной.

Определение 3. Функция f, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется *ограниченной на множестве* E, если множество $f(E)$ ограничено, т. е. если существует число $B > 0$ такое, что

$$|f(x)| \leqslant B \quad \forall\, x \in E.$$

Аналогично вводятся (ср. случай $n = 1$) понятия ограниченности сверху (снизу) функции f на E.

Теорема 2. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)}$ — предельная точка множества E и существует конечный $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$. Тогда при некотором $\delta > 0$ функция f ограничена на $E \cap \mathring{U}_\delta$.*

Доказательство такое же, как в случае $n = 1$.

Определение 4. Если в определении предела функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ по множеству $E \subset X$ в качестве множества E взято пересечение X с некоторой кривой Γ (проходящей через $x^{(0)}$), либо с прямой L (проходящей через $x^{(0)}$), либо с лучом l (с вершиной в $x^{(0)}$), то $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ называется *пределом* f в точке $x^{(0)}$ соответственно *по кривой* Γ, *по прямой* L, *по направлению* e (если луч $l = \{x = x^{(0)} + te,$ $t \geqslant 0\}$, где $te = t(e_1, \ldots, e_n) \coloneqq (te_1, \ldots, te_n)$).

Если $X \supset \mathring{U}_{\delta_0}(x^{(0)})$ при некотором $\delta_0 > 0$, то $\lim\limits_{l \ni x \to x^{(0)}} f(x)$ совпадает с $\lim\limits_{t \to 0+0} f(x_1 + te_1, \ldots, x_n + te_n)$.

Если функция f имеет предел в точке $x^{(0)}$, то она имеет в этой точке и пределы по всем направлениям, значения которых совпадают с этим пределом, обратное неверно, что видно на примере функции двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y = x^2, \\ 0 & \text{при } y \neq x^2, \end{cases}$$

которая в точке $(0,0)$ не имеет предела, но имеет равные нулю пределы по каждому направлению.

Упражнение 2. Показать, что функция двух переменных

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2>0)$$

имеет в точке $(0,0)$ предел по каждому направлению, значение которого зависит от направления.

Рассмотрим теперь на примере функций двух переменных иное понятие предельного перехода, состоящее в последовательном предельном переходе по различным переменным.

Определение 5. Пусть функция f определена в проколотой окрестности точки (x_0, y_0). *Повторными пределами* функции f в точке (x_0, y_0) называют пределы

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right), \quad \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right).$$

Покажем на примерах, что существование повторных пределов не связано с существованием обычного предела.

Пример 1.

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2>0).$$

Оба повторных предела существуют и равны нулю, а $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не существует.

Пример 2.

$$g(x,y) = \begin{cases} y \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} g(x,y)) = 0$, а повторный предел $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} g(x,y))$ не существует.

Пример 3.

$$h(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2>0).$$

$\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} h(x,y)) = 0$, $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} h(x,y)) = 1$.

Упражнение 3. Доказать, что если существует $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A \in \mathbb{R}$ и при некотором $\delta > 0$ для $\forall\, y \in \in \mathring{U}_\delta(0)$ существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$, то

$$\exists \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = A.$$

§ 10.4. Функции, непрерывные в точке

Определение 1. Пусть функция

$$f \,:\, X \to \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}^n,$$

определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ (т. е. $E \subset X$) и $x^{(0)} \in E$.

Говорят, что f *непрерывна в точке* $x^{(0)}$ *по множеству* E, если

1) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$ при $x \in E$, $|x - x^{(0)}| < \delta$, или
2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, U(x^{(0)})$: $|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon\ \forall\, x \in E \cap U(x^{(0)})$, или
3) $\lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = f(x^{(0)})\ \forall\, \{x^{(m)}\}$: $x^{(m)} \in E$, $x^{(m)} \to x^{(0)}$ при $m \to \infty$.

Здесь дано три определения непрерывности функции в точке по множеству. Их эквивалентность сводится к эквивалентности соответствующих определений предела функции в точке. Следует лишь учесть

З а м е ч а н и е.

1° Если $x^{(0)}$ — предельная точка множества E, то непрерывность функции f в точке $x^{(0)}$ по множеству E равносильна тому, что $\lim\limits_{E \ni x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$.

2° Если $x^{(0)}$ — изолированная точка множества E (т. е. $E \cap \mathring{U}_\delta(x^{(0)}) = \varnothing$ при некотором $\delta > 0$), то f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E, а понятие предела в точке $x^{(0)}$ по множеству E не определено.

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке $x^{(0)}$ по множеству E, и ограниченность f на $E \cap \cap U_\delta(x^{(0)})$ при достаточно малом $\delta > 0$ очевидны, если $x^{(0)}$ — изолированная точка множества E, и вытекают непосредственно из соответствующих свойств пределов, если $x^{(0)}$ — предельная точка множества E.

Лемма 1 (о сохранении знака). *Пусть функция f непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E, $f(x^{(0)}) \neq 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что*

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x^{(0)}) \quad \forall\, x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}).$$

Доказательство такое же, как в случае $n = 1$.

Рассмотрим вопрос о непрерывности композиции (суперпозиции, сложной функции).

Теорема 1. *Пусть $x^{(0)} \in E \subset \mathbb{R}^n$, и каждая из m функций $f_1, \ldots, f_m$ непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E. Пусть $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)})) \in F \subset \mathbb{R}^m$, и функция g непрерывна в точке $y^{(0)}$ по множеству F.*

Пусть еще

$$(f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in F \quad \forall\, x \in E.$$

Тогда определенная на E сложная функция

$$h(x) := g(f_1(x), \ldots, f_m(x)), \quad h : E \to \mathbb{R}$$

непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \eta = \eta(\varepsilon) > 0$:

$$|g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon \text{ при } y \in F \cap U_\eta(y^{(0)}).$$

Выберем теперь $\delta = \delta(\eta) = \delta(\eta(\varepsilon)) = \delta_\varepsilon > 0$ столь малым, что

$$|f_1(x) - f_1(x^{(0)})| < \frac{\eta}{\sqrt{n}}, \ \ldots, \ |f_m(x) - f_m(x^{(0)})| < \frac{\eta}{\sqrt{n}}$$
$$\text{при} \quad x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}).$$

Мы использовали непрерывность функций g, $f_1, \ldots, f_m$ в соответствующих точках. Из написанных соотношений, считая, что

$$y = (y_1, \ldots, y_m) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)),$$

получаем, что при $x \in E \cap U_\delta(x^{(0)})$

$$|y - y^{(0)}| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} [f_i(x) - f_i(x^{(0)})^2] \right\}^{\frac{1}{2}} < \eta,$$

$$|h(x) - h(x^{(0)})| = |g(f_1(x), \ldots, f_m(x)) -$$
$$- g(f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))| = |g(y) - g(y^{(0)})| < \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это и означает, что h непрерывна в $x^{(0)}$ по множеству E.

Упражнение 1. Сформулировать и доказать теорему о пределе сложной функции, аналогичную доказанной теореме о непрерывности. Сравнить с соответствующими теоремами для $n = m = 1$.

§ 10.5. Функции, непрерывные на множестве

Определение 1. Верхней (нижней) гранью на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ функции f, определенной на E, называется

$$\sup_E f \coloneqq \sup_{x \in E} f(x) \quad (\inf_E f = \inf_{x \in E} f(x)).$$

Определение 2. Функция f, непрерывная в каждой точке $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ по множеству E, называется *непрерывной на множестве* E.

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Пусть функция f непрерывна на компакте $E \subset \mathbb{R}^n$. Тогда она ограничена на E и достигает на E своих верхней и нижней граней.*

Доказательство проведем лишь для случая верхней грани. Как увидим, оно повторяет доказательство теоремы Вейерштрасса для случая $n = 1$, $E = [a, b]$. Пусть $B \coloneqq \sup\limits_E f \leqslant +\infty$. Из определения верхней грани следует, что существует последовательность точек $\{x^{(m)}\}$, $x^{(m)} \in E$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$, такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} f(x^{(m)}) = B$. Последовательность $\{x^{(m)}\}$ ограничена в силу ограниченности E. На основании теоремы Больцано–Вейерштрасса выделим из $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m)}\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $x^{(0)} = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)}$. Точка $x^{(0)} \in E$ в силу замкнутости E. Следовательно, f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E.

Теперь из соотношений

$$f(x^{(m_k)}) \to B, \quad f(x^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}) \text{ при } k \to \infty$$

вытекает, что $f(x^{(0)}) = B$, т. е. что верхняя грань f достигается в точке $x^{(0)} \in E$. Следовательно, верхняя грань f конечна, а функция f ограничена сверху на E.

Аналогично доказывается, что функция f достигает своей нижней грани на E и ограничена снизу на E. Теорема доказана.

Определение 3. Функция f называется *равномерно непрерывной на множестве* $E \subset \mathbb{R}^n$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \,:\, |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \text{при } \forall\, x', x'' \in E \,:\, |x' - x''| < \delta. \quad (1)$$

Если функция f равномерно непрерывна на E, то она и непрерывна на E (т. е. непрерывна в каждой точке $x^{(0)} \in \in E$). В этом сразу убеждаемся, положив в (1) $x'' = x^{(0)}$, $x' = x$.

Обратное неверно. Например, при $n = 1$ функции $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin\frac{1}{x}$, непрерывные на $E = (0,1)$, не являются равномерно непрерывными на E.

Однако, если E — компакт, то непрерывность функции на E эквивалентна равномерной непрерывности этой функции на E в силу следующей теоремы.

Теорема 2 (Кантор). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — компакт, и функция f непрерывна на E. Тогда f равномерно непрерывна на E.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. что существует функция f, непрерывная, но не равномерно непрерывная на E. Тогда

$$\exists\,\varepsilon_0 \geqslant 0\;\forall\,\delta > 0\;\exists\,x, y \in E\;:\;|x - y| < \delta,\;|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Будем брать в качестве δ $\delta_m = \dfrac{1}{m}$ и соответствующую пару точек x, y обозначать через $x^{(m)}$, $y^{(m)}$.

Тогда имеем

$$x^{(m)}, y^{(m)} \in E,\;\;|x^{(m)} - y^{(m)}| < \frac{1}{m}\,,$$
$$|f(x^{(m)}) - f(y^{(m)})| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

Выделим из последовательности $\{x^{(m)}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)}$, что возможно в силу ограниченности $\{x^{(m)}\}$ по теореме Больцано–Вейерштрасса. Тогда из $|x^{(m)} - y^{(m)}| < \frac{1}{m}$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} y^{(m_k)} = x^{(0)}$. Точка $x^{(0)} \in E$, так как E замкнуто. В силу непрерывности f в точке $x^{(0)}$ по множеству E имеем

$$f(x^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}),\quad f(y^{(m_k)}) \to f(x^{(0)}),\;\text{при } k \to \infty,$$

а это противоречит тому, что

$$|f(x^{(m_k)}) - f(y^{(m_k)})| \geqslant \varepsilon_0 > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

Упражнение 1. Пусть функция $f\colon\ (a,b) \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную производную на (a,b). Показать, что f равномерно непрерывна на (a,b).

Определение 4. Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Ее *модулем непрерывности* (на E) называется функция $w\colon\ (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, где

$$w(\delta) = w(\delta; f) = w(\delta; f; E) = \sup\{|f(x) - f(y)|\ :\ x, y \in E,\ |x-y| \leqslant \delta\}.$$

Очевидно, что w — возрастающая функция и что

$$w(\delta_1 + \delta_2) \leqslant w(\delta_1) + w(\delta_2) \text{ при } \delta_1\delta_2 > 0.$$

Теорема 3. *Пусть функция f определена на $E \subset \mathbb{R}$. Для ее равномерной непрерывности на E необходимо и достаточно, чтобы*

$$w(0+0; f; E) = 0.$$

Доказательство.

1° Пусть f равномерно непрерывна на E. Тогда из (1) следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ :\ w(\delta; f) \leqslant w\,(\delta(\varepsilon); f) \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon \quad \text{при } 0 < \delta \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Следовательно, $w(0+0; f) = 0$.

2° Пусть $w(0+0; f) = 0$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0\ :\ w(\delta(\varepsilon); f) < \varepsilon.$$

Тогда выполняется (1), т. е. f равномерно непрерывна на E.

Теорема 4 (теорема Коши о промежуточных значениях). *Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$, функция f непрерывна на G. Тогда если $a, b \in G$, $f(a) < f(b)$, то для*

$$\forall\, C \in (f(a), f(b)) \quad \exists\, c \in G \,:\, f(c) = C.$$

Доказательство. Напомним, что область — это открытое связное множество, так что для точек $a, b \in G$ существует кривая

$$\Gamma = \{x = \varphi(t) \,:\, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}, \quad \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b, \quad \Gamma \subset G.$$

Рассмотрим сложную функцию $g(t) = f(\varphi(t))$. Она непрерывна на $[\alpha, \beta]$ по теореме о непрерывности сложной функции. Кроме того, $g(\alpha) = f(a)$, $g(\beta) = f(b)$. По теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции,

$$\exists\, \xi \in [\alpha, \beta] \,:\, g(\xi) = f(\varphi(\xi)) = C.$$

Взяв $c = \varphi(\xi)$, приходим к утверждению теоремы.

Следствие 1. *Теорема Коши о промежуточных значениях сохранится, если область G заменить в ее формулировке на замкнутую область $\overline{G}$.*

Доказательство. Напомним, что замкнутой областью называется замыкание области. Пусть $a, b \in \overline{G}$, $f(a) < C < f(b)$. Возьмем $\varepsilon_0 > 0$ столь малым, что $f(a) + \varepsilon_0 < C < f(b) - \varepsilon_0$. В силу непрерывности f в точках a, b найдутся точки $a^{(0)}$, $b^{(0)} \in G$ такие, что

$$|f(a) - f(a^{(0)})| < \varepsilon_0, \quad |f(b) - f(b^{(0)})| < \varepsilon_0.$$

Тогда $f(a^{(0)}) < C < f(b^{(0)})$ и остается применить доказанную теорему.

Глава 11
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе изучаются дифференциальные свойства функций во внутренних точках их областей определения.

§ 11.1. Частные производные и дифференцируемость функций многих переменных

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Зафиксировав $x_2 = x_2^{(0)}$, $x_3 = x_3^{(0)}, \ \ldots, x_n = x_n^{(0)}$, получим функцию одной переменной $f(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Если она имеет производную в точке $x_1^{(0)}$, то эта производная называется *частной производной по x_1 функции f в точке $x^{(0)}$* и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}), \quad f'_{x_1}(x^{(0)}) \quad \text{или} \quad f_{x_1}(x^{(0)}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) = \frac{df}{dx_1}(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\Big|_{x_1 = x_1^{(0)}}.$$

Частные производные функции f в точке $x^{(0)}$ по другим переменным $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^{(0)}), \ \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)})$ определяются аналогичным образом.

Сравнивая значения функции в точке x и в точке $x^{(0)}$ символом Δx часто обозначают приращение аргумента:

$\Delta x = x - x^{(0)}$. Таким образом,

$$\Delta x =: (\Delta x, \dots, \Delta x_n) = (x_1 - x_1^{(0)}, \dots, x_n - x_n^{(0)}),$$

$$|\Delta x| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Приращением функции f в точке $x^{(0)}$, соответствующим приращению аргумента Δx, называют

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \\ = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

Определение 1. Функция f называется *дифференцируемой* в точке $x^{(0)}$, если приращение функции f в точке $x^{(0)}$ можно представить в виде

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(|\Delta x|) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}, \quad (1)$$

где $A_1, \dots, A_n$ — некоторые числа.

В правой части (1) символ «o малое» имеет тот же смысл, что и в случае функций одной переменной, так что вместо $o(|\Delta x|)$ можно написать $\varepsilon(\Delta x)|\Delta x|$, где функция ε определена в $\mathring{U}(0)$, $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to \vec{0}$.

Теорема 1. *Пусть функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$. Тогда в этой точке существуют частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ и $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.*

Доказательство. Будем считать в (1) $\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = 0$, т. е. $\Delta x = (\Delta x_1, 0, \dots, 0)$. Тогда $f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = = A_1 \Delta x_1 + \varepsilon(\Delta x)|\Delta x_1|$.

Поделив обе части равенства на Δx_1 и переходя к пределу при $\Delta x_1 \to 0$, получим, что $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = A_1$. Аналогично доказывается, что $\exists\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = A_i$ при $i = 2, \ \ldots, n$.

Доказанная теорема дает возможность переписать формулу (1) в виде

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Delta x_i + o(|\Delta x|) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}. \quad (2)$$

Определение 2. Линейная функция

$$df(x^{(0)}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})\Delta x_i, \quad \Delta x_i \in \mathbb{R} \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

называется *дифференциалом* функции f в точке $x^{(0)}$.

Формулу (1) можно переписать, очевидно, в виде

$$\Delta f(x^{(0)}) = df(x^{(0)}) + o(|\Delta x|) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}.$$

Теорема 2. *Пусть функция дифференцируема в точке $x^{(0)}$. Тогда она непрерывна в точке $x^{(0)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (1) видно, что $\Delta f(x^{(0)}) \to 0$ при $\Delta x \to \vec{0}$.

Сравним три свойства функции многих переменных в точке: непрерывность, существование всех частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, дифференцируемость. Соотношение между ними не такое, как в случае функции одной переменной. Именно, для функций $n \geqslant 2$ переменных

1° дифференцируемость в точке влечет существование частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ \ldots, n)$ и непрерывность в этой точке (см. теоремы 1, 2);

2° из существования всех частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ и непрерывности функции f в точке не следует дифференцируемость этой функции в этой точке;

3° из существования всех частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ в точке не следует непрерывность функции f в этой точке.

Для обоснования 3° приведем пример функции двух переменных ($n = 2$)

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = y \neq 0, \\ 0 & \text{при } x \neq y \text{ и при } x = y = 0, \end{cases}$$

имеющей частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, но не являющейся непрерывной в точке $(0, 0)$.

В силу теоремы 2 эта функция не является дифференцируемой в точке $(0, 0)$. Тем самым данный пример показывает, что существование всех частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ в точке $x^{(0)}$ не влечет дифференцируемость f в этой точке.

Для обоснования 2° приведем пример функции двух переменных

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{при } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

непрерывной в точке $(0, 0)$ и имеющей частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, но не дифференцируемой в точке $(0, 0)$. В самом деле, непрерывность в точке $(0, 0)$ этой функции следует из оценки

$$|f(x, y)| \leqslant \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0 \text{ при } (x, y) \to (0, 0).$$

Если же допустить, что f дифференцируема в точке $(0,0)$, то согласно (2) было бы верно равенство

$$f(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = o(\sqrt{x^2+y^2}) \text{ при } (x,y) \to (0,0),$$

противоречащее тому, что при $x = y$

$$f(x,x) = \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2}} = \sqrt{2}|x| \neq o(|x|) \text{ при } x \to 0.$$

В следующей теореме устанавливаются *достаточные* условия дифференцируемости функции в точке в терминах ее частных производных.

Теорема 3. *Пусть в точке $x^{(0)}$ непрерывны все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ функции f. Тогда f дифференцируема в точке $x^{(0)}$.*

Доказательство ради простоты записи проведем для случая функции двух переменных ($n = 2$). Непрерывность частных производных функции в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ включает предположение об их существовании в некоторой окрестности $U_\delta((x_0, y_0))$.

Считая $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 < \delta^2$, рассмотрим приращение функции

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) =$$
$$= [f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)] +$$
$$+ [f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)].$$

Правая часть равенства представляет собой сумму приращений функции по одной переменной при фиксированной другой. Применяя по соответствующей переменной теорему Лагранжа о конечных переменных, имеем

$$\Delta f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y).$$

Но производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в точке (x_0, y_0). Поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y),$$

где ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Подставляя полученные выражения в $\Delta f(x_0, y_0)$, имеем

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Последнее равенство имеет вид (2), поскольку

$$\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y = \left(\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\right) \times \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

при $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$.

Следовательно, функция f дифференцируема в точке (x_0, y_0).

Теорема доказана.

Упражнение 1. Показать, что непрерывность частных производных функции в данной точке не является необходимым условием дифференцируемости функции в данной точке, рассмотрев пример функции двух переменных

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2 + y^2} & \text{при } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{при } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Определение 3. Функцию f, имеющую в точке или на множестве непрерывные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ при всех $i = 1, \ldots, n$, называют *непрерывно дифференцируемой* соответственно *в этой точке* или *на этом множестве.*

Заметим, что эта точка или все точки этого множества должны быть внутренними точками области определения функции f в соответствии с определением частной производной.

Используя этот термин, последнюю теорему можно сформулировать так: *непрерывно дифференцируемая в точке функция дифференцируема в этой точке.*

§ 11.2. Геометрический смысл дифференциала функции и частных производных

Рассмотрим функцию двух переменных (x, y), заданную на некоторой окрестности точки (x_0, y_0) $f\colon U_\delta(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$.

Тогда $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon (x, y) \in U_\delta(x_0, y_0),, z = f(x, y)\}$ — ее график.

Определение 1. Пусть f дифференцируема в точке (x_0, y_0). *Касательной плоскостью* к графику функции f в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ называется плоскость, уравнение которой

$$\begin{gathered} z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0)(y - y_0), \\ z_0 = f(x_0, y_0). \end{gathered} \tag{1}$$

Эта плоскость проходит через точку $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, а разность между значением $z = f(x, y)$ функции в точке (x, y) и аппликатой $z_{\text{кас}}$ точки $(x, y, z_{\text{кас}})$ касательной плоскости, как следует из (11.1.2) с $n = 2$ и (1),

$$\begin{gathered} f(x, y) - z_{\text{кас}} = o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) \\ \text{при } (x, y) \to (x_0, y_0). \end{gathered} \tag{2}$$

Упражнение 1. Показать, что свойство (2) является определяющим свойством касательной плоскости в том смысле, что никакая другая плоскость таким свойством не обладает. Рассуждать можно аналогично тому, как это делалось при изучении касательной к графику функции одной переменной.

Из (1) видно, что дифференциал функции f в точке (x_0, y_0) совпадает с приращением аппликаты касательной плоскости к графику f в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ (ср. (1) и определение 11.1.2). В этом состоит геометрический смысл дифференциала функции.

Рассмотрим сечение $\Gamma \coloneqq S\Big|_{y=y_0}$ графика функции S плоскостью $y = y_0$. Можно считать для простоты, что функция f непрерывна в $\overline{U}_\delta(x_0, y_0)$. Тогда

$$\Gamma = \{(x, y_0, f(x, y_0)) \,:\, |x - x_0| \leqslant \delta\}$$

является кривой, лежащей в плоскости $y = y_0$, а

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \coloneqq \frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0} = \operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол между (лежащей в плоскости $y = y_0$) касательной к Γ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ и осью Ox. В этом состоит геометрический смысл частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Аналогично выявляется геометрический смысл частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

§ 11.3. Дифференцируемость сложной функции

Теорема 1. *Пусть каждая из m функций $f_1, \ \ldots, f_m$ от n переменных дифференцируема в точке $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.*

Пусть функция g m переменных дифференцируема в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \ldots, f_m(x^{(0)}))$. Тогда сложная функ-

ция

$$h(x) \coloneqq g(f_1(x),\ \ldots,\ f_m(x))$$

дифференцируема в точке $x^{(0)}$ *и для ее частных производных справедливы равенства*

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}\,(x^{(0)}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}\,(y^{(0)})\,\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\,(x^{(0)}), \quad i = 1,\ \ldots,\ n. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из дифференцируемости функций f_k в точке $x^{(0)}$ и функции g в точке $y^{(0)}$ следует их непрерывность в этих точках. Поэтому в силу теоремы о непрерывности суперпозиции непрерывных функций функция h определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ и непрерывна в точке $x^{(0)}$. В силу дифференцируемости функций g и f_k запишем

$$\Delta g(y^{(0)}) = g(y^{(0)} - \Delta y) - g(y^{(0)}) = \\ = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}\,(y^{(0)})\Delta y_k + \varepsilon_0(\Delta y)|\Delta y|,$$

$$\Delta f_k(x^{(0)}) = f_k(x^{(0)} - \Delta x) - f_k(x^{(0)}) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\,(x^{(0)})\Delta x_i + \varepsilon_k(\Delta x)|\Delta x|,$$

где функции $\varepsilon_0(\Delta y)$, $\varepsilon_k(\Delta x)$ можно считать непрерывными и равными нулю в точках $\Delta y = \vec{0}$ и $\Delta x = \vec{0}$ соответственно.

Мы получим приращение функции h, вызванное приращением аргумента Δx, если в приращение $\Delta g(y^{(0)})$ вместо Δy_k при $k = 1,\ \ldots,\ m$ подставим приращение $\Delta f_k(x^{(0)})$ функций f_k, вызванные приращением Δx их аргумента. Получим тогда, что при достаточно малых $|\Delta x|$

$$\Delta h(x^0) = h(x^{(0)} + \Delta x) - h(x^{(0)}) = \\ = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}\,(y^{(0)}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\,(x^{(0)})\Delta x_i + \sigma(\Delta x), \tag{2}$$

где $\sigma(\Delta x) = o(|\Delta x|)$ при $\Delta x \to \vec{0}$.

В самом деле, здесь

$$\sigma(\Delta x) = \varepsilon_0(\Delta y)|\Delta y|\Bigg|_{\substack{\Delta y_1=\Delta f_1 \\ \dots \\ \Delta y_m=\Delta f_m}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}\,(y^{(0)})\varepsilon_k(\Delta x)|\Delta x|,$$

причем при некотором $M > 0$

$$|\Delta y| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |\Delta y_k| = \sum_{k=1}^{m} |\Delta f_k| \leqslant \sum_{k=1}^{m} M|\Delta x| = mM|\Delta x|,$$

а

$$\varepsilon_0(\Delta y)\Bigg|_{\substack{\Delta y_1=\Delta f_1 \\ \dots \\ \Delta y_m=\Delta f_m}} \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0$$

по теореме о непрерывности сложной функции.

Равенство (2) показывает, что функция h дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и что ее производная $\frac{\partial h}{\partial x_i}\,(x^{(0)})$ совпадает с коэффициентом при Δx_i в правой части (2), т. е. что справедливы формулы (1).

Следствие 1. *Пусть каждая из m функций $f_1, \ \dots, f_m$ n переменных имеет непрерывные в точке $x^{(0)}$ частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$ $(i = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, m)$. Пусть функция g m переменных имеет непрерывные в точке $y^{(0)} = (f_1(x^{(0)}), \dots, f_m(x^{(0)}))$ частные производные $\frac{\partial g}{\partial x_k}\,(y^{(0)})$ $(k = 1, \dots, m)$.*

Тогда сложная функция $h(x) = g(f_1(x), \dots, f_m(x))$ имеет непрерывные в точке $x^{(0)}$ производные $\frac{\partial h}{\partial x_i}\,(x^{(0)})$, для которых справедливы равенства (1).

В качестве другого следствия доказанной теоремы можно получить свойство *инвариантности формы первого дифференциала.*

В условиях теоремы на основании (1) можно записать

$$dg(f_1(x^{(0)}),\, \ldots,\, f_m(x^{(0)})) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\, g(f_1(x^{(0)}),\, \ldots,\, f_m(x^{(0)}))\, dx_i = \\ = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}\, \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\, dx_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\, dx_i.$$

Но $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\, dx_i$ является дифференциалом функции $y_k = f_k(x)$. Поэтому дифференциал функции $g(y_1,\, \ldots,\, y_m)$, где $y_k = f_k(x)$ $(k = 1,\, \ldots,\, m)$, можно записать в виде

$$dg = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}\, dy_k, \tag{3}$$

где dy_k — *дифференциалы функций.* Мы видим, что он имеет ту же форму, как и в случае, когда $y_1,\, \ldots,\, y_m$ — независимые переменные и, следовательно, $dy_1,\, \ldots,\, dy_m$ — *дифференциалы независимых переменных.* В этом и состоит свойство инвариантности формы первого дифференциала.

Приведем пример его применения. Формулы

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$
$$d(uv) = v\, du + u\, dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2}$$

для независимых переменных u, v следуют из выражения дифференциала функции через частные производные и дифференциалы независимых переменных. Эти формулы верны и в случае, когда u, v являются функциями $u = u(x)$, $v = v(x)$ переменных $x = (x_1,\, \ldots,\, x_n)$ в силу инвариантности формы первого дифференциала.

Свойство инвариантности формы первого дифференциала можно использовать при нахождении дифференциалов и производных сложных функций, записывая сначала дифференциал в виде (3), а затем выражая dy_k через дифференциалы независимых переменных.

§ 11.4. Производная по направлению и градиент

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $e = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ — «единичный вектор», т. е. $|e| = 1$. Его координаты называют *направляющими косинусами вектора* e, $\sum\limits_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$.

Из точки $x^{(0)}$ проведем луч с направлением e:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1^{(0)} + t\cos\alpha_1, \ldots, x_n^{(0)} + t\cos\alpha_n),\ t \geqslant 0,$$
$$x = x^{(0)} + te, \quad t \geqslant 0.$$

Определение 1. *Производной функции f в точке $x^{(0)}$ по направлению e* называется

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x^{(0)}) \coloneqq \lim_{t\to 0+0} \frac{f(x^{(0)} + te) - f(x^{(0)})}{t},$$

если этот предел существует и конечен.

Если функция f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то по правилу дифференцирования сложных функций

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) \cos\alpha_i.$$

В случае $n = 3$ $e = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где α, β, γ — углы между направлением вектора e и положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz соответственно.

Для дифференцируемой в точке (x_0, y_0, z_0) функции f трех переменных x, y, z

$$\frac{\partial f}{\partial e}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + \\ + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma.$$

Введем вектор

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) \coloneqq \\ \coloneqq \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right),$$

который называется *градиентом* функции f в точке (x_0, y_0, z_0).

Тогда, используя скалярное произведение, можно написать $\frac{\partial f}{\partial e} = (\operatorname{grad} f, e)$, т. е. что *производная функции f по направлению вектора e совпадает с проекцией* $\operatorname{grad} f$ *на это направление.*

Из свойств скалярного произведения следует, что в точке (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{\partial f}{\partial e} \leqslant |\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

Если вектор $\operatorname{grad} f$ ненулевой, то существует единственное направление e, производная по которому $\frac{\partial f}{\partial e} = |\operatorname{grad} f|$. Это направление $e = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}$.

Отсюда вытекает геометрическая характеристика градиента — это вектор, по направлению которого производная имеет максимальное значение.

На этом основании условно можно сказать, что *направление градиента — это направление быстрейшего роста функции.*

§ 11.5. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Если в некоторой окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ функция f имеет частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, то в точке $x^{(0)}$ у этой производной может существовать частная производная $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$.

Если $k \neq i$, то эту производную называют *смешанной частной производной второго порядка* функции f по переменным x_i и x_k и обозначают символом $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x^{(0)})$ или $f''_{x_i x_k}(x^{(0)})$, а если $k = i$, то эту производную называют (*чистой*) *частной производной второго порядка* функции f по переменной x_i и обозначают символом $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x^{(0)})$ или $f''_{x_i x_i}(x^{(0)})$.

Аналогично вводятся частные производные третьего, четвертого и вообще любого порядка, смешанные и чистые.

Если в данной точке $x^{(0)}$ существуют смешанные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1},$$

то они не обязательно равны, в чем можно убедиться на примере функции двух переменных x, y

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{при } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{при } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

который мы не будем разбирать.

Однако часто бывает, что смешанные производные, отличающиеся лишь порядком взятия частных производных, совпадают. В следующей теореме приводятся достаточные условия независимости смешанной производной от порядка дифференцирования.

Теорема 1. *Пусть для функции f двух переменных x, y частные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ непрерывны в точке (x_0, y_0).*

Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 y_0).$$

Доказательство. Обозначим символами $\Delta_x f$, $\Delta_y f$ приращения функции f в точке (x_0, y_0), вызванные приращением соответственно Δx аргумента x и Δy аргумента y при достаточно малых $|\Delta x|$, $|\Delta y|$. Легко убедиться, что

$$\Delta_x(\Delta_y f(x_0, y_0)) = \Delta_y(\Delta_x f(x_0, y_0))$$

(каждая из частей равенства совпадает с $f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$). Из условий теоремы следует существование частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Применяя к левой части равенства теорему Лагранжа о конечных приращениях по аргументу x, а к правой — эту же теорему Лагранжа по y, имеем

$$\Delta_y \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)\Delta x = \Delta_x \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства ту же теорему Лагранжа соответственно по аргументу y и x, имеем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta y \Delta x = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y,$$

где $0 < \theta_i < 1$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Сокращая последнее равенство на $\Delta x \Delta y$ и переходя в нем к пределу при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, получаем утверждение теоремы.

С помощью теоремы 1 можно доказать ее обобщение, относящееся к функциям n переменных и смешанным производным любого порядка $m \geqslant 2$.

Теорема 2. *Пусть для функции n переменных в точке $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ непрерывны все смешанные частные производные порядка $m \geqslant 2$. Тогда смешанные производные в этой точке, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, совпадают.*

Доказательство. В условиях доказываемой теоремы с помощью теорем 11.1.3 и 11.1.2 сразу получаем, что все смешанные производные порядка $m-1$ непрерывны в точке $x^{(0)}$, а значит, и все смешанные производные всех порядков до m включительно непрерывны в точке $x^{(0)}$.

Рассмотрим две смешанные производные функции f в точке $x^{(0)}$, отличающиеся лишь порядком дифференцирования. Покажем, что они равны. Построим (конечную) последовательность смешанных производных, первый и последний члены которых суть наши смешанные производные, а другие члены — смешанные производные порядка m, отличающиеся от наших лишь порядком дифференцирования. Пусть еще каждые две смешанные производные, стоящие на соседних местах, отличаются друг от друга лишь порядком дифференцирования на $(k-1)$-м и k-м шаге при некотором и единственном k $(2 \leqslant k \leqslant m)$. Тогда каждые две смешанные производные, стоящие на соседних местах в последовательности, равны между собой в силу теоремы 1, откуда следует равенство смешанных производных, стоящих на первом и последнем местах, что и требовалось показать.

В качестве пояснения напишем такую цепочку для случая $n = 3$, $m = 3$. Пусть мы хотим сравнить значения

$f'''_{zyx} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ и $f'''_{xyz} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$. Тогда

$$f'''_{zyx} = (f'_z)''_{yx} = (f'_z)''_{xy} = (f''_{zx})'_y = \\ = (f''_{xz})'_y = (f'_x)''_{zy} = (f'_x)''_{yz} = f'''_{xyz}.$$

Заметим, что в дальнейшем мы почти всегда будем сталкиваться с ситуациями, когда смешанные производные непрерывны и, следовательно, не зависят от порядка дифференцирования.

Определение 1. Функция f называется *m раз непрерывно дифференцируемой* в точке (на множестве), если все ее частные производные порядка m непрерывны в точке (на множестве). Заметим, что эта точка (каждая точка этого множества) должна быть внутренней точкой области определения функции f.

С помощью теорем 11.1.3 и 11.1.2 получаем, что m раз непрерывно дифференцируемая в точке (на открытом множестве) функция имеет непрерывные в точке (на открытом множестве) все частные производные порядков не выше m.

Введем теперь понятие *дифференциалов высших порядков*. Пусть функция f дифференцируема на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Ее дифференциал, называемый также *первым дифференциалом* и *дифференциалом первого порядка*, имеет вид

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i, \quad x \in G.$$

Будем изучать его как функцию точки x. Если, например, все частные производные первого порядка функции f дифференцируемы на G, то существует дифференциал δ от первого дифференциала $\delta(df(x))$, при вычислении которого

dx_i считаются постоянными. Имеем тогда

$$\delta(df(x)) = \sum_{i=1}^{n} \delta\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right) dx_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\delta x_j\right) dx_i = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\, dx_i\, \delta x_j.$$

Значение дифференциала в точке x от первого дифференциала функции f при $\delta x_j = dx_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ называется *вторым дифференциалом* функции f в точке x и обозначается $d^2 f(x)$. Итак,

$$d^2 f \coloneqq \delta(df)\Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ (i=1,\,\ldots,\,n)}} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j\,.$$

Если все частные производные порядка $m-1$ функции f дифференцируемы в точке x, то дифференциал порядка m функции f в точке x определяется как $d^m f(x) \coloneqq$ $\coloneqq \delta(d^{m-1} f(x))\Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ (i=1,\,\ldots,\,n)}}$.

Следовательно,

$$d^m f(x) = \sum_{i_1,\,\ldots,\,i_m=1} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_m}.$$

Если функция f m раз непрерывно дифференцируема в точке x, то в последней формуле слагаемые, частные производные в которых отличаются лишь порядком дифференцирования, совпадают, и саму формулу можно записать в более компактном виде.

Упорядоченный набор n целых неотрицательных чисел

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \mathbb{N}_0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

называется *мультииндексом*, а $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$ — его длиной. Пусть еще $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $dx^\alpha = dx_1^{\alpha_1} \ldots dx_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha f = \\ = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f$.

В этих обозначениях для m раз непрерывно дифференцируемой функции f n переменных

$$d^m f(x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha f(x)\, dx^\alpha.$$

В частности, для функции f двух переменных x, y

$$d^m f = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-k} \partial y^k}\, dx^{m-k} dy^k.$$

Если же при этом $m = 2$, то

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

§ 11.6. Формула Тейлора

Пусть $x^{(0)}$, $x \in \mathbb{R}^n$ и на отрезке, соединяющем точки $x^{(0)}$ и x, все частные производные порядка m функции f непрерывны.

При этом предположении (согласно сделанным ранее замечаниям) функция f определена на некотором открытом множестве, содержащем этот отрезок, и все ее частные производные до порядка m включительно непрерывны на этом отрезке.

Введем функцию φ: $[0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = f(x^{(0)} + t\Delta x), \quad \text{где} \quad \Delta x = x - x^{(0)}.$$

Функция φ имеет на отрезке $[0, 1]$ непрерывные производные порядка m, что вытекает из теоремы о дифференцируемости сложной функции. Поэтому для φ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}\,\varphi^{(k)}(0) + \frac{1}{m!}\,\varphi^{(m)}(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

Выражая производные функции φ через частные производные функции f, получаем, что

$$f(x) = f(x^{(0)}) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\,\dots,\,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x^{(0)})}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}\,\Delta x_{i_1}\times\dots\Delta x_{i_k} + \\ + r_{m-1}(\Delta x), \quad (1)$$

где $r_m(\Delta x) = \frac{1}{m!} \sum\limits_{i_1,\,\dots,\,i_m=1}^{n} \frac{\partial^m f(x^{(0)}+\theta\Delta x)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_m}}\,\Delta x_{i_1}\dots\Delta x_{i_m}$.

Полученная формула называется формулой Тейлора с остаточным членом *в форме Лагранжа.*

В этой формуле при наших предположениях о функции f частные производные, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, совпадают. Поэтому формулу Тейлора с остаточным членом *в форме Лагранжа* можно переписать в следующем виде:

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m-1} \frac{1}{\alpha!}\,D^\alpha f(x^{(0)})(\Delta x)^\alpha + \\ + \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}\,D^\alpha f(x^{(0)}+\theta\Delta x)(\Delta x)^\alpha. \quad (2)$$

Из этой формулы при предположениях, что функция f m раз непрерывно дифференцируема на $U_\delta(x^{(0)})$ и $|\Delta x| < \delta$, следует формула Тейлора с остаточным членом *в форме Пеано*:

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \frac{1}{\alpha!}\,D^\alpha f(x^{(0)})\Delta x^\alpha + r_m(\Delta x),$$

где

$$r_m(\Delta x) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \left[D^\alpha f(x^{(0)} + \theta \Delta x) - D^\alpha f(x^{(0)}) \right] (\Delta x)^\alpha =$$
$$= \varepsilon(\Delta x)|\Delta x|^m, \quad (3)$$
$$\varepsilon(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to \vec{0}.$$

Из приведенных рассмотрений следует

Теорема 1. *Пусть $\delta > 0$ и функция f m раз непрерывно дифференцируема на δ-окрестности точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Тогда для функции f при $|\Delta x| < \delta$ справедлива формула Тейлора в каждой из форм* (2), (3).

З а м е ч а н и е. Формулы (2), (3) можно получить при более общих (чем в теореме 1) предположениях.

Для справедливости (2) достаточно непрерывности в точке $x^{(0)}$ всех частных производных порядка $m-1$ функции f и их дифференцируемости в δ-окрестности точки $x^{(0)}$.

Для справедливости (3) достаточно потребовать, чтобы функция f была m раз дифференцируема в точке $x^{(0)}$ (доказательство можно провести по плану доказательства теоремы 6.2.1).

Для получения разложения по формуле Тейлора конкретных функций без вычисления коэффициентов формулы с помощью дифференцирования используется

Теорема 2 (единственности). *Пусть* $m \in \mathbb{N}_0$,

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha \Delta x^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0},$$

$$f(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} b_\alpha \Delta x^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0},$$

Тогда $a_\alpha = b_\alpha$ $\forall\, \alpha$: $|\alpha| \leqslant m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. После почленного вычитания приходим к требованию доказать, что из равенства

$$0 = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \Delta x^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to 0$$

следует, что $c_\alpha = 0\ \forall\, \alpha$: $|\alpha| \leqslant m$.

Покажем это. Зафиксируем $y = (y_1, \ldots, y_n) \neq \vec{0}$ и при $\Delta x = ty$ получаем

$$0 = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha \right) t^k + o(|t|^m) \text{ при } t \to 0.$$

Отсюда следует в силу ранее установленной теоремы единственности для $n = 1$, что

$$\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha = 0 \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots, m, \quad \forall\, y \neq \vec{0}.$$

Но тогда, обозначив через $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ произвольный мультииндекс с $|\beta| = k$, имеем

$$0 = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial y_1^{\beta_1} \ldots \partial y_n^{\beta_n}} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha y^\alpha = \beta! c_\beta.$$

Отсюда следует, что

$$c_\beta = 0 \quad \forall\, \beta\ :\ |\beta| = k, \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots, m,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Пусть функция f m раз непрерывно дифференцируема на некоторой окрестности точки $x^{(0)}$ и*

$$f(x^{(0)} + \Delta x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha \Delta x^\alpha + o(|\Delta x|^m) \text{ при } \Delta x \to \vec{0}.$$

Тогда это равенство является формулой Тейлора (3) *функции f с остаточным членом в форму Пеано.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы является непосредственным следствием теорем 1, 2.

Пример 1. Разложить функцию двух переменных $e^{x^2+y^2}$ в окрестности точки $(0,0)$ с точностью до $o(x^2+y^2)^2$ при $(x,y)\to(0,0)$.

Воспользуемся известным разложением

$$e^x = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(|u|^2) \text{ при } u \to 0.$$

Подставив $u = x^2+y^2$, получаем, что $e^{x^2+y^2} = 1 + x^2 + y^2 + {} + \frac{1}{2}\,x^4 + x^2y^2 + \frac{1}{2}\,y^4 + o((x^2+y^2)^2)$. В силу теоремы 3 это разложение и является искомым разложением по формуле Тейлора.

Глава 12
НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 12.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. Под *прямым* (или *декартовым*) *произведением* множеств X и Y понимают множество пар точек (x, y):

$$X \times Y \coloneqq \{(x, y) \,:\, x \in X,\ y \in Y\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Кубической ε-окрестностью точки $x^{(0)}$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, называют множество

$$Q_\varepsilon(x^{(0)}) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x_i - x_i^{(0)}| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\}.$$

При $n = 1$ $Q_\varepsilon(x_0) = U_\varepsilon(x_0)$.

Прямоугольной (δ, ε)-окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)}) \subset \subset \mathbb{R}^{n+m}$, где $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $y^{(0)} \in \mathbb{R}^m$, назовем множество

$$Q_{\delta,\varepsilon}(x^{(0)}, y^{(0)}) = Q_\delta(x^{(0)}) \times Q_\varepsilon(y^{(0)}).$$

В основной части этого параграфа мы будем иметь дело с точками (x, y) плоскости, на которой зафиксирована прямоугольная система координат.

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

где F — функция двух переменных x, y, которые можно считать координатами точки плоскости.

Определение 1. Функция f: $X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, называется *неявной* (или *неявно заданной*) *функцией*, определяемой уравнением (1), если

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall\, x \in X.$$

Если же на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}^2$ уравнения (1) и $y = f(x)$ эквивалентны

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$$

(т. е. их множества решений, принадлежащих E, совпадают), то говорят, что уравнение (1) разрешимо на E относительно переменной y.

Пусть для примера задано уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \tag{2}$$

которое определяет на отрезке $[-1, 1]$ две непрерывные функции:

$$f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Будем рассматривать это же уравнение (2) не на всей плоскости, а только на некоторой прямоугольной окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (2): $x_0^2 + y_0^2 - 1 = 0$.

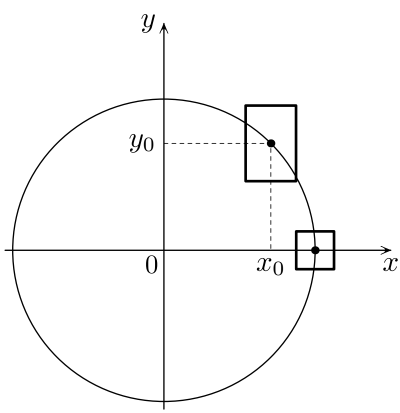


Рис. 12.1

Пусть сначала $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. Тогда существуют столь малые $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, что

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = f_1(x) \text{ на } Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0).$$

Множество решений уравнения (2), принадлежащих $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$, представляет собой часть графика функции f_1, лежащую в $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$. Эта часть графика f_1 совпадает с графиком сужения f_1 на $Q_\delta(x_0)$ (если $\delta > 0$ достаточно мало сравнительно с ε) или с графиком сужения f_1 на некоторый интервал $(a, b) \subset Q_\delta(x_0)$ (если $\varepsilon > 0$ достаточно мало сравнительно с δ).

Если же в качестве (x_0, y_0) взяв точку $(x_0, y_0) = (1, 0)$, то ни на какой ее окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}(1, 0)$ уравнение (2) не является разрешимым относительно переменной y (множество решений уравнения (2) из $Q_{\delta,\varepsilon}(1, 0)$ не является графиком никакой функции $y = f(x)$).

В следующей теореме приводятся достаточные условия, налагаемые на функцию F, при которых уравнение (1) разрешимо относительно переменной y на некотором прямоугольнике $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$.

Теорема 1. *Пусть функция F двух переменных удовлетворяет следующим условиям:*

1° *F непрерывна на некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0);*

2° *$F(x_0, y_0) = 0$;*

3° *$F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, F'_y непрерывна в точке (x_0, y_0).*

Тогда существует прямоугольная окрестность точки (x_0, y_0) $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0) = Q_\delta(x_0) \times Q_\varepsilon(y_0)$ такая, что на ней

$$F(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x),$$

где функция

$$f : Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0)$$

непрерывна на $Q_\delta(x_0)$, $f(x_0) = y_0$.

Если дополнительно считать, что

4°. *F дифференцируема в точке (x_0, y_0), то f дифференцируема в точке x_0 и*

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Если же при этом частные производные F'_x, F'_y непрерывны на $U(x_0, y_0)$, то производная $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$ непрерывна на $Q_\delta(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На самом деле утверждения теоремы верны, если ее условие 3° заменить более общим:

3*. F'_y существует на $U(x_0, y_0)$ и сохраняет там знак.

Мы будем проводить доказательство при условии 3* вместо 3°.

Пусть $\sigma, \varepsilon > 0$ настолько малы, что в замыкании прямоугольной окрестности $Q_{\sigma,\varepsilon}(x_0, y_0)$ функция F непрерывна, а F'_y сохраняет знак. Ради определенности будем считать, что $F'_y > 0$ в $Q_{\sigma,\varepsilon}(x_0, y_0)$. Поэтому $F(x, y)$ при каждом фиксированном $x \in Q_\sigma(x_0)$ как функция переменной y строго возрастает на отрезке $[y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$.

Отсюда следует (поскольку $f(x_0, y_0) = 0$), что

$$F(x_0, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_0, y + \varepsilon) > 0.$$

Функции $F(x, y_0 - \varepsilon)$, $F(x, y + \varepsilon)$ как функции переменной x непрерывны на $Q_\delta(x_0)$ (и, следовательно, обладают свойством сохранения знака), так что найдется $\delta \in (0, \sigma]$ такое, что

$$F(x, y_0 - \varepsilon) < 0, \quad F(x, y_0 + \varepsilon) > 0, \quad \forall\, x \in Q_\delta(x_0).$$

Зафиксируем произвольное значение $x^* \in U_\delta(x_0)$. Поскольку $F(x^*, y_0 + \varepsilon) > 0$, по теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции $F(x^*, y)$ найдется $y^* \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, при котором $F(x^*, y^*) = 0$. Такое значение

y^* единственно в силу строгой монотонности $F(x^*, y)$. Обозначим $y^* = f(x^*)$. Таким образом, построена функция f: $Q_\delta(x_0) \to Q_\varepsilon(y_0)$ такая, что $f(x_0) = y_0$,

$$F(x, y) = 0 \iff y = f(x) \quad \text{на} \quad Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0).$$

Из последнего соотношения получаем, что

$$F(x, f(x)) = 0 \text{ при } x \in Q_\delta(x_0).$$

Установим непрерывность функции f на $Q_\delta(x_0)$. Ее непрерывность в точке x_0 следует из того, что в приведенных построениях число $\varepsilon > 0$ можно было взять сколь угодно малым, причем для каждого малого $\varepsilon > 0$ было указано $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $f(Q_\delta(x_0)) \subset Q_\varepsilon(y_0) = Q_\varepsilon(f(x_0))$.

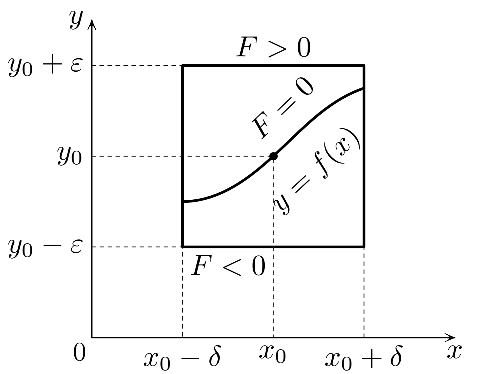


Рис. 12.2

Пусть теперь x^* — произвольная точка из $Q_\delta(x_0)$, $y^* = f(x^*)$. Очевидно, что если условия теоремы 1 с заменой 3° на 3^* выполнены, то они выполняются и после замены в них (x_0, y_0) на (x^*, y^*). Следовательно, по уже доказанному, f непрерывна в точке x^*.

Предположим теперь, что выполнено условие 4°. В силу дифференцируемости F

$$F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0) =$$
$$= F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

где $\varepsilon(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$. Будем считать здесь $|\Delta x|$ достаточно малым, а $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$.

Тогда из последнего равенства получаем

$$0 = F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

$$\Delta y = -\frac{F'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)}{F'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)}\,\Delta x = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}\,\Delta x + o(\Delta x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

представив

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\,\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{|\Delta x| + |\Delta y|}\,(|\Delta x| + |\Delta y|) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y.$$

Ясно, что $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Считая $|\Delta x|$, а значит, и $|\Delta y| = |\Delta f|$ достаточно малыми, имеем

$$\Delta y = -\frac{F'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)}{F'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)}\,\Delta x = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}\,\Delta x + o(\Delta x)$$

при $\Delta x \to 0$. Следовательно, f дифференцируема в точке x_0 и

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = -\frac{F'_x(x_0, f(x_0))}{F'_y(x_0, f(x_0))}\,.$$

Если функция F дифференцируема не только в точке (x_0, y_0), а на окрестности $Q_{\delta,\varepsilon}(x_0, y_0)$, последняя формула верна для $\forall\, x \in Q_\delta(x_0)$:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}\,, \quad x \in Q_\delta(x_0).$$

Обобщим теорему 1 на случай неявной функции, заданной уравнением $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$. Это понятие вводится так же, как в случае $n = 1$.

Далее будем пользоваться обозначениями:

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),$$
$$(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y), \quad (x^{(0)}, y_0) = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, y_0),$$
$$F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y).$$

Теорема 2. *Пусть функция F переменных $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1°. *F непрерывна на некоторой окрестности $U(x^{(0)}, y_0)$ точки $(x^{(0)}, y_0)$;*
2°. *$F(x^{(0)}, y_0) = 0$;*
3°. *$F'_y(x^{(0)}, y_0) \neq 0$, F'_y непрерывна в точке $(x^{(0)}, y_0)$.*

Тогда существует прямоугольная окрестность точки $(x^{(0)}, y_0)$ $Q_{\delta,\varepsilon}(x^{(0)}, y_0) = Q_\delta(x^{(0)}) \times Q_\varepsilon(y_0)$ такая, что на ней

$$F(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = f(x),$$

где функция

$$f\ :\ Q_\delta(x^{(0)}) \to Q_\varepsilon(y_0)$$

непрерывна на $Q_\delta(x^{(0)})$, $f(x^{(0)}) = y_0$.

Если же дополнительно считать, что

4°. *F дифференцируема в точке $(x^{(0)}, y_0)$, то f дифференцируема в точке $x^{(0)}$, и при $i = 1, 2, \ldots, n$*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x^{(0)}) = -\frac{F'_{x_i}(x^{(0)}, y_0)}{F'_y(x^{(0)}, y_0)}\,.$$

Если же при этом все частные производные первого порядка функции F непрерывны на $U(x^{(0)}, y_0)$, то при $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

непрерывны на $Q_\delta(x^{(0)})$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 1. В формулировке теоремы 12.2.1 можно отказаться от требования

$$f\ :\ Q_\delta(x^{(0)}) \to Q_\varepsilon(y_0).$$

Тогда, уменьшив при необходимости ε (или δ), можно взять $\varepsilon = \delta$. При этом сохранится свойство эквивалентности

$$F(x, y) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad y = f(x)$$
$$\text{в } Q_\delta(x^{(0)}, y_0) = Q_\delta(x^{(0)}) \times Q_\delta(y_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

и выражение частных производных $f'_{x_i}(x)$ для тех $x \in Q_\delta(x^{(0)})$, для которых $f(x) \in Q_\delta(y_0)$.

§ 12.2. Система неявных функций

Теоремы предыдущего параграфа дают достаточные условия разрешимости уравнения $F(x, y) = 0$ относительно переменной y. Рассмотрим более общую задачу — о возможности разрешить систему m уравнений относительно m переменных.

Для системы m функций $\{u_j(t)\}_{j=1}^m$ переменных $t = (t_1, \ldots, t_m)$ определитель

$$\frac{\partial(u_1, \ldots, u_m)}{\partial(t_1, \ldots, t_m)}(t) := \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t_1}(t) & \ldots & \dfrac{\partial u_1}{\partial t_m}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial t_1}(t) & \ldots & \dfrac{\partial u_m}{\partial t_m}(t) \end{vmatrix}$$

называется *якобианом*.

Будем использовать обозначения: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_m) = (\tilde{y}, y_m)$, $\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_{m-1})$, $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$, $(x, y_m) = (x_1, \ldots, x_n, y_m)$, $F(x, y) = F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$.

Теорема 1. *Пусть*

1°. *Функции $F_j(x, y) = F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ $(i = 1, \ldots, m)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $U(x^{(0)}, y^{(0)})$ точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$;*

2°. *$F_j(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$;*

3°. $J = \left.\dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0.$

Тогда существует прямоугольная окрестность $Q_\delta(x^{(0)}) \times Q_\varepsilon(y^{(0)})$, в которой

$$\{F_j(x, y) = 0\}_{j=1}^m \quad \Longleftrightarrow \quad \{y_j = f_j(x)\}_{j=1}^m,$$

где $(f_1, \ldots, f_m)$: $Q_\delta(x^{(0)}) \to Q_\varepsilon(y^{(0)})$, функции f_j непрерывно дифференцируемы на $Q_\delta(x^{(0)})$, $f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Доказательство проведем индукцией по m — числу уравнений системы.

$$\text{(a)} \quad \{F_i(x, y) = 0\}_{j=1}^m.$$

При $m = 1$ теорема верна, как совпадающая с теоремой 11.1.2. Предположим, что теорема справедлива для $m - 1$ уравнений, и покажем, что она верна тогда и для случая m уравнений.

Разложив определитель J по элементам последнего столбца, видим, что, по крайней мере, для одного элемента этого столбца алгебраическое дополнение отлично от нуля. Ради определенности будем считать, что

$$J_{m-1} = \left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_{m-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{m-1})}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} \neq 0.$$

В силу предположения индукции систему первых $m-1$ уравнений системы (a) можно разрешить относительно y_1, …, y_{m-1}. Говоря точнее (см. теорему 12.1.2 и замечание 12.1.1), существуют число $\eta > 0$ и непрерывно дифференцируемые функции

$$\varphi_j \,:\, Q_\eta(x^{(0)}, y^{(0)}) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_j(x^{(0)}, y_m^{(0)}) = y_j^{(0)}$$
$$(j = 1,\, \ldots,\, m-1)$$

такие, что на $Q_\eta(x^{(0)}, y^{(0)}) \subset U(x^{(0)}, y^{(0)})$ (a) $\Longleftrightarrow$ (b) (т. е. системы уравнений (a) и (b) эквивалентны), где

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \{y_j = \varphi_j(x, y_m)\}_{j=1}^{m-1}, \\ F_m(x, y) = 0. \end{cases}$$

При этом

$$F_j(x, \varphi_1(x, y_m),\, \ldots,\, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m) = 0 \quad (j = 1,\, \ldots,\, m-1) \tag{1}$$

при $(x, y_m) \in U(x^{(0)}, y_m^{(0)})$, где $U(x^{(0)}, y_m^{(0)})$ — достаточно малая окрестность точки $(x^{(0)}, y_m^{(0)})$.

Очевидно, что на $Q_\eta(x^{(0)}, y^{(0)})$ (b) $\Longleftrightarrow$ (c), где

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} \{y_j = \varphi_j(x, y_m)\}_{j=1}^{m-1}, \\ \Phi(x, y_m) = 0. \end{cases}$$

$$\Phi(x, y_m) = F_m(x, \varphi_1(x, y_m),\, \ldots,\, \varphi_{m-1}(x, y_m), y_m),$$
$$\Phi(x^{(0)}, y_m^{(0)}) = F_m(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0.$$

Убедимся, что последнее уравнение системы (c) можно разрешить относительно y_m. В самом деле, Φ непрерывно дифференцируема на $U(x^{(0)}, y^{(0)})$ как суперпозиция непрерывно дифференцируемых функций, $\Phi(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$.

Остается проверить, что $\dfrac{\partial \Phi(x^{(0)}, y_m^{(0)})}{\partial y_m} \neq 0$, и сослаться на теорему 12.1.2. Осуществим эту проверку.

Заметим, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}}\,\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\,. \tag{2}$$

В то же время результатом дифференцирования по y_m тождеств (1) являются тождества

$$\begin{gathered}\frac{\partial F_j}{\partial y_1}\,\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_m} + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial y_{m-1}}\,\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} = 0,\\ j = 1, \ldots, m-1.\end{gathered} \tag{3}$$

Но тогда

$$J = \left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & 0 \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этом последнее равенство получено прибавлением к последнему столбцу определителя суммы всех предшествующих столбцов, помноженных соответственно на $\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_m}$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$, и использованием равенств (2), (3).

Из последнего неравенства следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_m}\,(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0.$$

Разрешив последнее уравнение системы (c) относительно y_m в соответствии с теоремой 10.1.2 и замечанием 12.1.1, получаем, что на некоторой кубической окрестности $Q_\varepsilon(x^{(0)}, y^{(0)}) \subset Q_\eta(x^{(0)}, y^{(0)})$

$$\Phi(x, y_m) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad y_m = f_m(x),$$

где функция $f_m\colon Q_\varepsilon(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема, $f_m(x^{(0)}) = y_m^{(0)}$.

Тогда на $Q_\varepsilon(x^{(0)}, y^{(0)})$ (c) $\Longleftrightarrow$ (d) $\Longleftrightarrow$ (e), где

$$\text{(d)}\quad \begin{cases} \{y_j = \varphi_j(x, y_m)\}_{j=1}^{m-1}, \\ y_m = f_m(x); \end{cases}, \qquad \text{(e)}\quad \{y_j = f_j(x)\}_{j=1}^{m},$$

и $f_j(x) = \varphi_j(x, f_m(x))$ $(i = 1, \ldots, m-1)$.

При этом функции f_j: $Q_\varepsilon(x^{(0)}) \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы и $f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)}$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Возьмем теперь $\delta \in (0, \varepsilon]$ столь малым, что

$$f_j \,:\, Q_\delta(x^{(0)}) \subset Q_\varepsilon(y_j^{(0)}),$$

что возможно в силу непрерывности f_j в точке $x^{(0)}$ (мы перешли от f_j к сужению f_j на $Q_\delta(x^{(0)})$, но не отмечаем этого в обозначениях).

Тогда

$$(f_1, \ldots, f_m) \,:\, Q_\delta(x^{(0)}) \subset Q_\varepsilon(y^{(0)})$$

и (a) $\Longleftrightarrow$ (e) на $Q_\delta(x^{(0)}) \times Q_\varepsilon(y^{(0)})$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В качестве следствия теоремы получаем тождества

$$F_j(x, f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 0 \quad \forall\, x \in Q_\delta(x^{(0)}), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Дифференцируя эти тождества по x_k, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_i}\, \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

с отличным от нуля определителем, из которой можно найти $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_k}, \ \ldots, \dfrac{\partial f_m}{\partial x_k}$.

§ 12.3. Дифференцируемые отображения

Определение 1. Функция

$$f \,:\, G \to \mathbb{R}^m, \quad G \subset \mathbb{R}^n \tag{1}$$

называется *отображением множества* G *в* $\mathbb{R}^m$. Представляя при $x \in G$ $f(x) \in \mathbb{R}^m$ через координаты

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)), \quad x \in G, \tag{2}$$

видим, что задание отображения f равносильно заданию на G m числовых функций

$$f_1(x), \ldots, f_m(x) \,:\, G \to \mathbb{R}, \tag{3}$$

называемых *координатными функциями*.

Множество

$$f(E) = \{y \in \mathbb{R}^m \,:\, y = f(x),\, x \in E\}, \quad E \subset G,$$

называется *образом множества* E, множество $f(G)$ — *областью значений* f, а множество

$$f^{-1}(D) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f(x) \in D\}, \quad D \subset \mathbb{R}^m,$$

— *прообразом множества* D.

Определение 2. Отображение (1) называется *непрерывным в точке* $x^{(0)} \in G$, если для

$$\forall\, U(f(x^{(0)})) \quad \exists\, U(x^{(0)}) \subset G \,:\, f(U(x^{(0)}) \subset U(f(x^{(0)}))).$$

Лемма 1.*Отображение* (1) *непрерывно в точке* $x^{(0)} \in G$ *тогда и только тогда, когда в точке* $x^{(0)}$ *непрерывны все координатные функции* (3).

Доказательство аналогично случаю $n = 1$, $m = 3$, с которым мы сталкивались при изучении вектор-функций.

Определение 3. Отображение (1) называется *непрерывным на открытом множестве* G, если оно непрерывно в каждой точке множества G.

Теорема 1. *Пусть отображение* (1) *непрерывно на открытом множестве* G. *Тогда (и только тогда) прообраз всякого открытого множества является открытым множеством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f непрерывно на G и открытое множество $D \subset \mathbb{R}^m$. Покажем, что множество $f^{-1}(D)$ открыто. Пусть $x^{(0)} \in f^{-1}(D)$, т. е. $f(x^{(0)}) \in D$. Множество D является окрестностью точки $f(x^{(0)})$. Следовательно, по определению 2 $\exists\, U(x^{(0)}) \subset G$: $f(U(x^{(0)})) \subset D$. Последнее означает, что $U(x^{(0)}) \subset f^{-1}(D)$.

Мы получили, что каждая точка $x^{(0)} \in f^{-1}(D)$ принадлежит $f^{-1}(D)$ вместе с некоторой своей окрестностью, т. е. что множество $f^{-1}(D)$ открыто.

Пусть теперь[1] дано, что прообраз каждого открытого множества открыт. Покажем, что f непрерывно на G. Пусть $x^{(0)} \in G$, $D = U(f^{(0)})$ — произвольная окрестность точки $f(x^{(0)})$. Тогда $f^{-1}(D)$ — открытое множество, содержащее точку $x^{(0)}$, т. е. окрестность точки $x^{(0)}$. Обозначив ее через $U(x^{(0)})$, имеем

$$f(U(x^{(0)})) = f(f^{-1}(D)) \subset D = U(f(x^{(0)})).$$

По определению 2 f непрерывно в точке $x^{(0)}$. В силу произвольности точки $x^{(0)} \in G$ f непрерывно на G.

Определение 4. Отображение (1) будем называть *непрерывно дифференцируемым в точке* $x^{(0)} \in G$ (на G), если все его координатные функции (3) непрерывно дифференцируемы в точке $x^{(0)}$ (на G).

Будем считать далее $m = n$.

Якобианом отображения (1) при $m = n$ назовем

$$J(x) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x) =: \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}.$$

Важным свойством непрерывно дифференцируемого отображения является отличие от нуля его якобиана. Так,

[1] Вторая часть теоремы не будет использоваться в дальнейшем и может быть опущена при первом чтении.

в одномерном случае, ($n = 1$) оно является достаточным условием взаимной однозначности отображения (см. теорему об обратной функции на интервале). В одномерном случае отображение $y = x^2$ интервала $G = (-1, 1)$ с производной $y'(0) = 0$ не является взаимно однозначным.

В многомерном случае ($n \geqslant 2$) отличие от нуля якобиана отображения не гарантирует взаимной однозначности, как показывает пример отображения $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ области

$$G = \{(r, \varphi) \ : \ 1 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 4\pi\}$$

на область

$$\{(x, y) \ : \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

В последнем примере, однако, для всякой точки $(r_0, \varphi_0) \in G$ можно указать, очевидно, достаточно маленькую (шаровую) окрестность $U_\delta(r_0, \varphi_0)$, сужение отображения на которую является взаимно однозначным.

Ниже будет установлена теорема 3, показывающая, что это свойство является общим.

Теорема 2. *Пусть открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, отображение $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо на G и якобиан его $J \neq 0$ на G.*

Тогда $f(G)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3 (о локальной обратимости отображения). *Пусть в условиях теоремы 2 $x^{(0)} \in G$, $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Тогда существуют окрестности $U(x^{(0)})$, $U(y^{(0)})$, для которых:*

1° *f осуществляет взаимно однозначное отображение $U(x^{(0)}) \leftrightarrow U(y^{(0)})$;*

2° *якобиан отображения, обратного к $f\colon U(x^{(0)}) \to U(y^{(0)})$, отличен от нуля на $U(y^{(0)})$.*

Поясним, что если отображение $f\colon G \to D$ является взаимно однозначным, $G \leftrightarrow D$, то обратное отображение

$f^{-1}\colon D \leftrightarrow G$ определяется следующим образом: $f^{-1}(y) = x$, если $f(x) = y$ $(y \in D,\ x \in G)$.

Доказательство теорем 2 и 3 будем проводить одновременно. Пусть $y^{(0)} \in f(G)$, $x^{(0)} \in G$, $y^{(0)} = f(x^{(0)})$. Рассмотрим систему уравнений

$$F_i(x, y) \coloneqq f_i(x_1, \ldots, x_n) - y_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Имеем

$$\left.\frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{(x^{(0)}, y^{(0)})} = \left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{(x^{(0)})} \neq 0.$$

По теореме о системе неявных функций на произведении некоторых окрестностей $U(y^{(0)}) \times V(x^{(0)})$

$$\begin{gathered} \{y_i = f_i(x)\}_1^n \iff \{x_i = g_i(y)\}_1^n, \\ \text{т. е.} \quad y = f(x) \iff x = g(y), \end{gathered} \tag{4}$$

где $g(y) = (g_1(y), \ldots, g_n(y))$, а отображение

$$g\ :\ U(y^{(0)}) \to V(x^{(0)}) \subset G$$

непрерывно дифференцируемо на $U(y^{(0)})$.

Следовательно,

$$U(y^{(0)}) \subset f(G),$$

так что $y^{(0)}$ — внутренняя точка $f(G)$. Поскольку в качестве $y^{(0)}$ можно взять любую точку $f(G)$, множество $f(G)$ является открытым. Теорема 2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы 3. Обозначим через f_V сужение f на $V(x^{(0)})$, Очевидно, что (4) сохраняется при замене f на f_V, так что

$$f_V(x^{(0)}) = y^{(0)}, \quad f_V(V(x^{(0)})) \supset U(y^{(0)}).$$

Рассмотрим множество

$$U(x^{(0)}) \coloneqq f_V^{-1}(U(y^{(0)})),$$

содержащее, очевидно, точку $x^{(0)}$ и открытое в силу теоремы 1, т. е. являющееся окрестностью точки $x^{(0)}$. Ясно, что f осуществляет взаимно однозначное отображение $U(x^{(0)}) \iff U(y^{(0)})$.

Покажем, наконец, что якобиан отображения g, обратного к сужению f на $U(x^{(0)})$, отличен от нуля на $U(y^{(0)})$.

Из (4) имеем, что при $y \in U(y^{(0)})$ $y = f(g(y))$ или в координатной записи

$$y_i = f_i(g_1(y), \ldots, g_n(y)), \quad i = 1, \ldots, n, \quad y \in U(y^{(0)}).$$

Дифференцируя эти тождества по переменной y_i, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \frac{\partial g_k}{\partial y_j} = \frac{\partial y_i}{\partial y_j} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = i, \\ 0 & \text{при } j \neq i. \end{cases}$$

Отсюда и из теоремы об определителе произведения двух матриц следует, что

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{x_1, \ldots, x_n} \frac{\partial(g_1, \ldots, g_n)}{y_1, \ldots, y_n} = 1$$

$$\text{при } x =\in U(x^{(0)}),\ y = f(x) \in U(y^{(0)}).$$

Пример при $n = 1$ отображения $y = x^2$: $(-1, 1) \to \to [0, 1)$ показывает, что условие отличия от нуля якобиана в теореме 2 нельзя отбросить.

Теорема 4 (принцип сохранения области). *Образ области в $\mathbb{R}^n$ при непрерывно дифференцируемом отображении с отличным от нуля якобианом является областью.*

Доказательство. Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ и f: $G \to \mathbb{R}^n$ — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы. По теореме 3 $f(G)$ — открытое множество. Покажем, что G связно и, следовательно, является областью.

Пусть $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ — две произвольные точки $f(G)$. Пусть $x^{(1)}$, $x^{(2)} \in G$ — такие точки, что $f(x^{(1)}) = y^{(1)}$, $f(x^{(2)}) = = y^{(2)}$. Пусть Γ — такая кривая в $\mathbb{R}^n$, что $\Gamma \subset G$, $x^{(1)}$ — начало Γ, $x^{(2)}$ — конец Γ. Тогда кривая $f(\Gamma) \subset f(G)$, $y^{(1)} = = f(x^{(1)})$ — начало $f(\Gamma)$, $y^{(2)} = f(x^{(2)})$ — конец $f(\Gamma)$, что и требовалось показать.

Глава 13
ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В этой главе изучаются числовые функции многих переменных, определенных на некоторой окрестности $U(x^{(0)}) \subset \subset \mathbb{R}^n$.

§ 13.1. Локальный экстремум

Определение 1. Пусть функция f определена на некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Точка $x^{(0)}$ называется *точкой* (*локального*) *минимума функции* f, если

$$\exists\, U(x^{(0)}) \,:\, f(x^{(0)}) \leqslant f(x) \quad \forall\, x \in \mathring{U}(x^{(0)}).$$

Если же вместо нестрогого неравенства можно написать строгое, то $x^{(0)}$ называется точкой *строгого* (*локального*) *минимума* функции f.

Аналогично определяются и точки (локального) максимума и строгого (локального) максимума функции f.

Точки минимума и точки максимума функции называются ее *точками экстремума*.

Аналогично определяются точки строгого экстремума функции.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума). *Пусть функция f имеет в точке экстремума $x^{(0)}$ частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})$. Тогда $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, для определенности, $i = = 1$. Рассмотрим функцию φ одного переменного x_1 $\varphi(x_1) \coloneqq f(x_1, x_2^{(0)}, \ \ldots, x_n^{(0)})$. Она имеет, очевидно, экстремум в точке $x_1^{(0)}$. Тогда по теореме Ферма

$$0 = \varphi'(x_1^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}).$$

Определение 2. Точка $x^{(0)}$ называется *стационарной точкой функции* f, если f дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и $df(x^{(0)}) = 0$.

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2 (необходимые условия экстремума). *Пусть функция f имеет экстремум в точке $x^{(0)}$. Если она дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то $x^{(0)}$ — стационарная точка функции f.*

Стационарная точка функции не обязательно является ее точкой экстремума, что можно увидеть даже на примере функции одной переменной.

Достаточные условия наличия и отсутствия экстремума в стационарной точке можно сформулировать в терминах вторых производных.

Напомним в связи с этим некоторые сведения из алгебры.

Квадратичная форма

$$A(\xi) = A(\xi_1, \ldots, \xi_n) \coloneqq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \tag{1}$$

($a_{ij} = a_{ji}$ при $i, j = 1, \ldots, n$) называется
а) *положительно определенной*, если $A(\xi) > 0 \ \forall\, \xi \neq \vec{0}$,
б) *отрицательно определенной*, если $A(\xi) < 0 \ \forall\, \xi \neq \vec{0}$,
в) *определенной*, если она положительно определённа, или отрицательно определённа,
г) *неопределенной*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Лемма 1. *Пусть квадратичная форма $A(\xi)$ (1) положительно определённа. Тогда при некотором $\mu > 0$*

$$A(\xi) \geqslant \mu|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $|\xi| = 0$ (2) очевидно. При $|\xi| > 0$, деля обе части (2) на $|\xi|^2$ и полагая $\eta = \dfrac{\xi}{|\xi|}$, сводим доказательство (2) к доказательству неравенства

$$\mu \coloneqq \min_{\substack{\eta \in \mathbb{R}^n, \\ |\eta|=1}} A(\eta) > 0.$$

Последнее вытекает из теоремы Вейерштрасса, утверждающей, что непрерывная функция $(A(\eta))$ на компакте (на единичной сфере $S \coloneqq \{\eta \in \mathbb{R}^n\colon\ |\eta| = 1\}$) достигает (в некоторой точке $\eta^* \in S$) своего наименьшего значения ($\mu = A(\eta^*) > 0$).

В дальнейшем неравенство (2) будет использовано лишь при $|\xi| = 1$.

Для нас будут важны свойства второго дифференциала функции f

$$d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\,(x^{(0)})\, dx_i\, dx_j, \tag{3}$$

представляющего собой квадратичную форму

$$d^2 f(x^{(0)}) = A(dx) = A(dx_1,\ \ldots,\ dx_n)$$

переменных $dx_1,\ \ldots,\ dx_n$.

Теорема 3 (достаточные условия строгого экстремума). *Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.*

Пусть второй дифференциал $d^2 f(x^{(0)})$ функции f в точке $x^{(0)}$ (3) является положительно определенной (отрицательно определенной) квадратичной формой. Тогда $x^{(0)}$ — точка строгого минимума (строгого максимума) функции f.

Если же квадратичная форма $d^2 f(x^{(0)})$ является неопределенной, то в точке $x^{(0)}$ нет экстремума.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напишем разложение функции f по формуле Тейлора в окрестности стационарной точки $x^{(0)}$ с остаточным членом в форме Пеано (11.6.3):

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \\ = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j}\,\Delta x_i \Delta x_j + \varepsilon(\Delta x)|\Delta x|,$$

где $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to \vec{0}$.

В этой формуле отсутствуют члены с первыми производными, т. к. $x^{(0)}$ — стационарная точка.

Запишем последнюю формулу в виде

$$\Delta f(x^{(0)}) = \left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_j}\,\frac{\Delta x_i}{|\Delta x|}\,\frac{\Delta x_j}{|\Delta x|} + \varepsilon(\Delta x)\right]|\Delta x|^2. \tag{4}$$

Пусть сначала $d^2 f(x^{(0)})$ (3) является положительно определенной формой. Тогда из последнего равенства в силу леммы 1 следует, что

$$\Delta f(x^{(0)}) \geqslant \left[\frac{1}{2}\,\mu + \varepsilon(\Delta x)\right]|\Delta x|^2, \quad \mu > 0.$$

Поскольку $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to \vec{0}$, существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\varepsilon(\Delta x)| < \frac{\mu}{4} \quad \text{при} \quad \forall\, x \,:\, 0 < |\Delta x| < \delta.$$

Следовательно,

$$\Delta f(x^{(0)}) \geqslant \frac{\mu}{4}\,|\Delta x|^2 > 0 \quad \forall\, \Delta x \,:\, 0 < |\Delta x| < \delta.$$

Последнее означает, что $x^{(0)}$ является точкой строгого минимума функции f.

Аналогичным образом доказывается, что если в формуле (3) $d^2 f(x^{(0)})$ является отрицательно определенной квадратичной формой, то $x^{(0)}$ — точка строгого максимума функции f.

Пусть теперь квадратичная форма $d^2f(x^{(0)})$ (3) является неопределенной квадратичной формой. Это значит, что существуют две точки ξ', $\xi'' \in \mathbb{R}^n$ такие, что $A(\xi') < 0$, $A(\xi'') > 0$. Полагая $\eta' = \dfrac{\xi'}{|\xi'|}$, $\eta'' = \dfrac{\xi''}{|\xi''|}$, получаем, что

$$\alpha = A(\eta') < 0, \quad \beta = A(\eta'') > 0, \quad |\eta'| = 1, \quad |\eta''| = 1.$$

Пусть $\Delta x = t\eta'$, $|\Delta x| = t$ $(t > 0)$. Тогда из (4) имеем

$$f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \left[\frac{1}{2}\,\alpha + \varepsilon(t\eta')\right] t^2 \leqslant \frac{\alpha}{4}\,t^2 < 0$$

при всех достаточно малых $t = |\Delta x|$.

Если же взять $\Delta x = t\eta''$ $(t > 0)$, то аналогично получаем, что

$$f(x^{(0)} + \Delta x) - f(x^{(0)}) = \left[\frac{1}{2}\,\beta + \varepsilon(t\eta'')\right] t^2 \geqslant \frac{\beta}{4}\,t^2 > 0$$

при всех достаточно малых $t = |\Delta x|$.

Мы видим, что в любой сколь угодно малой окрестности $U(x^{(0)})$ разность $f(x) - f(x^{(0)})$, $x \in U(x^{(0)})$, принимает как отрицательные, так и положительные значения. Следовательно, точка $x^{(0)}$ не является точкой экстремума функции f.

Следствие (необходимые условия экстремума). *Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Если функция f имеет экстремум в точке $x^{(0)}$, то либо $d^2f(x^{(0)}) \geqslant 0\ \forall\, dx \in \mathbb{R}^n$, либо $d^2f(x^{(0)}) \leqslant 0\ \forall\, dx \in \mathbb{R}^n$.*

З а м е ч а н и е. Если квадратичная форма $d^2f(x^{(0)})$ (3) в стационарной точке $x^{(0)}$ функции f является *полуопределенной* (т. е. $d^2f(x^{(0)}) \geqslant 0$ либо $d^2f(x^{(0)}) \leqslant 0$), но не является определенной, то для изучения вопроса об экстремуме функции в точке $x^{(0)}$ можно использовать ее разложение по формуле Тейлора более высокой точности, как это делалось в случае функции одной переменной.

Для выяснения, является или нет данная квадратичная форма положительно (отрицательно) определенной, часто используют

Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.

Квадратичная форма (1) *положительно определённа тогда и только тогда, когда*

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Очевидно, что квадратичная форма $A(\xi)$ (1) отрицательно определённа тогда и только тогда, когда квадратичная форма $-A(\xi)$ положительно определённа. Следовательно, критерием отрицательной определенности формы (1) является условие

$$(-1)^k \Delta_k > 0 \quad \forall\, k = 1, 2, \dots, n.$$

Сформулируем отдельно случай теоремы 3, относящийся к функции двух переменных.

Теорема 4. *Пусть функция f двух переменных дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки (x_0, y_0), так что*

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

а) *Если в* (x_0, y_0)

$$f''_{xx} f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 > 0,$$

то точка (x_0, y_0) является точкой строгого экстремума (строгого минимума при $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, строгого макси-

мума при $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$*).*
б) Если в (x_0, y_0)

$$f''_{xx} f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 < 0,$$

то экстремума в точке (x_0, y_0) *нет.*
в) Если в (x_0, y_0)

$$f''_{xx} f''_{yy} - {f''_{xy}}^2 = 0,$$

то экстремум в точке (x_0, y_0) *может быть, а может и не быть.*

Доказательство. а) Следует из критерия Сильвестра, т. к. $\Delta_1 > 0$ ($\Delta_1 < 0$), $\Delta_2 > 0$.

б) Подставляя во второй дифференциал

$$d^2 f(x_0, y_0) = \\ = f''_{xx}(x_0, y_0)\, dx^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0)\, dx\, dy + f''_{yy}(x_0, y_0)\, dy^2 \quad (5)$$

$dy = t\,dx$ (если $f''_{xx}(x_0, y_0) \neq 0$) или $dx = t\,dy$ (если $f''_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$) и вынося $(dx)^2$ (или $(dy)^2$) за скобки, получаем в скобках квадратный трехчлен относительно t с отрицательным дискриминантом. Поэтому его значение может быть при различных t как положительным, так и отрицательным. Следовательно, квадратичная форма (5) является неопределенной.

Если же $f''_{xx} = f''_{yy} = 0$, то $f''_{xy} \neq 0$ и

$$d^2 f(x_0, y_0) \Big|_{dy = t\,dx} = 2 f''_{xy}(x_0, y_0) t\, dx^2$$

принимает различные по знаку значения при различных по знаку значениях $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Так что и в этом случае квадратичная форма (5) является неопределенной.

В силу теоремы 3 получаем, что в точке (x_0, y_0) нет экстремума.

в) Достаточно рассмотреть два примера функций, определенных в окрестности точки $(x_0, y_0) = (0, 0)$ формулами

$$f(x, y) = x^4 y^4, \quad g(x, y) = x^4 - y^4.$$

Все производные первого и второго порядка этих функций в точке $(0, 0)$ равны нулю, однако в этой точке функция f имеет строгий минимум, а функция g не имеет экстремума.

§ 13.2. Условный локальный экстремум

Пусть на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ заданы функции $f, \varphi_1, \ \ldots, \varphi_m$ $(1 \leqslant m < n)$. Уравнения

$$\{\varphi_j(x) = 0\}_{j=1}^m \tag{1}$$

будем называть *уравнениями связи*. Пусть $E \coloneqq \{x\colon\ x \in G, \varphi_j(x) = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant m\}$.

Определение 1. Точка $x^{(0)} \in E$ называется *точкой условного минимума* [*строго условного минимума*] функции f при связях (1), если $\exists \delta > 0$, при котором

$$f(x^{(0)}) \leqslant f(x) \quad [f(x^{(0)}) < f(x)]$$

для $\forall x \in\ E \cap \mathring{U}_\delta(x^{(0)})$.

Аналогично определяется точка условного максимума (строго условного максимума), условного экстремума (строго условного экстремума).

З а м е ч а н и е о терминологии. Вместо термина «условный» употребляется также термин «относительный». Ради краткости вместо «при связях (1)» будем писать «при (1)».

Пример 1. $G = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $m = 1$, $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1$. Найти условный экстремум функции f при $x_1 + x_2 - 1 = 0$.

На прямой $\varphi = 0$ $f(x_1, x_2) = f(x_1, 1 - x_1) = 2x_1^2 - 2x_1 + 1 = 2\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$. Следовательно, точка $\left(\frac{1}{2}\,; \frac{1}{2}\right)$ является точкой строго условного минимума.

В дальнейшем будем считать, что $f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — непрерывно дифференцируемы на G, $\operatorname{rang}\left\|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right\| = m$

на $G, x^{(0)} \in E$, $\left.\dfrac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}\right|_{x^{(0)}} \neq 0$. Тогда по теореме о системе неявных функций в некоторой окрестности $U(x^{(0)})$ (1) $\Longleftrightarrow$ (1′), где

$$\{x_j = \mu_j(x_{m+1}, \ldots, x_n)\}_{j=1}^m, \tag{1′}$$

причем μ_j — непрерывно дифференцируемы,

$$\{\varphi_j(\mu_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \mu_2(), \ldots, \\ \mu_m(), x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0\}_{j=1}^m. \tag{2}$$

Введем функцию

$$\Phi(x_{m+1}, \ldots, x_n) \coloneqq \\ \coloneqq f(\mu_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \mu_2(), \ldots, \mu_m(), x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Очевидно, что $x^{(0)}$ тогда и только тогда является точкой условного экстремума f при (1), когда $(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ является точкой локального экстремума функции Φ. Таким образом, вопрос нахождения условного экстремума сведен к вопросу нахождения локального экстремума (который называют иногда *абсолютным экстремумом*, подчеркивая его отличие от условного экстремума). Однако такой подход малоэффективен в связи с трудностями получения в явном виде функций $\mu_1, \ldots, \mu_m$ и построения суперпозиции.

Отметим эквивалентность систем линейных уравнений относительно дифференциалов: (3) $\Longleftrightarrow$ (3′), где

$$\left\{\sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx_i = 0\right\}_{j=1}^m, \tag{3}$$

$$\left\{dx_j = \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial \mu_j}{\partial x_i} dx_i\right\}_{j=1}^m, \tag{3′}$$

с коэффициентами, взятыми в точке $x^{(0)}$. В самом деле, при любых фиксированных $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ решение (3) единственно, так как ее определитель отличен от нуля; решение (3′) также, очевидно, единственно. В то же время решение (3′) удовлетворяет (3), так как результат подстановки решения (3′) в (3) совпадает с системой продифференцированных тождеств (2).

Определение 2. Через $\widetilde{dx_1}, \ldots, \widetilde{dx_n}$ будем обозначать дифференциалы, удовлетворяющие системам (3), (3′).

Определение 3. Точка $x^{(0)} \in E$ называется *условно стационарной точкой* функции f при (1), если

$$\widetilde{df} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \widetilde{dx_i} = 0.$$

Теорема 1 (необходимое условие условного экстремума). *Точка $x^{(0)}$ условного экстремума f при* (1) *является условно стационарной точкой f при* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $[x^{(0)}$ — точка условного экстремума f при (1)$]$ $\Longleftrightarrow$ $\Rightarrow$ $[(x^{(0)}_{m+1}, \ldots, x^{(0)}_n)$ — точка (абсолютного) экстремума функции $\Phi]$ $\Rightarrow$ $[d\Phi = 0]$ $\Longleftrightarrow$ $\left[0 = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\Big|_{(1')} = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i\Big|_{(3')} = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \widetilde{dx_i} =: \widetilde{df}\right]$, что и требовалось доказать. Отметим, что при доказательстве была использована инвариантность формы первого дифференциала.

Теорема 2 (метод множителей Лагранжа). *Точка $x^{(0)} \in E$ является условно стационарной точкой функции f при* (1) *тогда и только тогда, когда существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что $x^{(0)}$ является стационарной точкой функции Лагранжа:*

$$L(x) := f(x) - \sum_1^m \lambda_j \varphi_j(x).$$

При этом числа λ_j определяются однозначно.

Доказательство. Рассмотрим систему из $(m+1)$-го уравнения

$$\left.\begin{array}{c} \left\{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx_i = 0\right\}_{j=1}^{m} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i = 0 \end{array}\right\} . \qquad (3^*)$$

Имеем

$$[x^{(0)} \text{ — условно стационарная точка } f \text{ при } (1)] \iff$$

$$\iff [\widetilde{df} = 0] \iff [(3) \Rightarrow (df = 0)] \iff$$

$$\iff [\operatorname{rang}(3) = \operatorname{rang}(3') = m] \iff$$

$$\iff \left[\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m : \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \right.$$

$$\left. = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n}\right)\right] \Leftrightarrow \left[\operatorname{grad} f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \operatorname{grad} \varphi\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\operatorname{grad} L = 0] \Leftrightarrow [dL = 0].$$

Следствие 1 (необходимое условие условного экстремума). *Точка $x^{(0)}$ условного экстремума f при* (1) *является стационарной точкой функции Лагранжа L.*

Достаточные условия условного экстремума. Дополнительно будем считать, что f, φ_1, $\ldots$, φ_m дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$, где $x^{(0)}$ — условно стационарная точка f при (1), т. е. стационарная точка функции Лагранжа из E. Пусть $\delta > 0$ достаточно мало,

$$x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}) \Rightarrow \Phi(x_{m+1}, \ldots, x_n) = f(x)\big|_{(1')} =$$

$$= \left(f(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j(x)\right)\Bigg|_{(1')} =: L(x)\Bigg|_{(1')}.$$

Вычислим $d\Phi$, $d^2\Phi$ в точке $(x^{(0)}_{m+1}, \ldots, x^{(0)}_n)$, считая x_{m+1}, $\ldots$, x_n независимыми переменными:

$$d\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i}\, dx_i\Big|_{(1')}, d\Phi(x^{(0)}_{m+1}, \ldots, x^{(0)}_n) = dL(x^{(0)}) = 0,$$

$$d^2\Phi(x^{(0)}_{m+1}, \ldots, x^{(0)}_n) = \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_k}\, dx_i\, dx_k\Big|_{(1')} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L(x^{(0)})}{\partial x_i}\, d^2 x_i\Big|_{(1')} = \sum_{i,k}^{n} \frac{\partial^2 L(x^{(0)})}{\partial x_i \partial x_k}\, \widehat{dx_i}\widehat{dx_k} =: \widehat{d^2 L}(x^{(0)}).$$

Итак, достаточные условия условного экстремума, которые, являясь достаточными условиями локального экстремума функции Φ, формулируются в терминах свойств квадратичной формы $d^2\Phi$, можно переформулировать в терминах квадратичной формы:

$$\widehat{d^2 L} := \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_k}\, \widehat{dx_i}\widehat{dx_k}.$$

Теорема 3 (достаточные условия строгого условного экстремума). *Пусть f, φ_1, $\ldots$, φ_m дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности стационарной точки $x^{(0)}$ функции Лагранжа L.*

Тогда:

1°. *$d^2 L > 0 [< 0]$ при $|dx| > 0 \Rightarrow x^{(0)}$ — точка строгого условного минимума (максимума) f при (1);*

2°. *$\widehat{d^2 L} > 0$ (< 0) при $|\widehat{dx}| > 0 \Rightarrow x^{(0)}$ — точка строгого условного минимума (максимума) f при (1);*

3°. *$d^2 L$ — неопределенная квадратичная форма $\Rightarrow$ ничего сказать нельзя;*

4°. *$\widehat{d^2 L}$ — неопределенная квадратичная форма $\Rightarrow$ в точке $x^{(0)}$ нет условного экстремума.*

План исследования функции на условный экстремум методом множителей Лагранжа. Пусть функции f, φ_1, $\ldots$, φ_m $(1 \leqslant m < n)$ непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{rang} \left\| \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\| = m$ на G. Для нахождения точек условного экстремума функции f при связях (1) поступают так:

1) Составляют функцию Лагранжа:

$$L(x) \coloneqq f(x) - \sum_1^m \lambda_j \varphi_j(x).$$

2) Находят стационарные точки функции Лагранжа, лежащие на E (только они могут являться точками условного экстремума), т. е. решают систему $n + m$ уравнений

$$\left.\begin{matrix} \left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_i} L(x) = 0 \right\}_1^n \\ \{\varphi_j(x) = 0\}_1^m \end{matrix}\right\}$$

относительно $n + m$ неизвестных x_1, x_2, $\ldots$, x_n, λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m. В каждой из этих точек множители Лагранжа находятся однозначно.

Отметим, что система $\{\varphi_j(x) = 0\}_1^m$ формально может быть записана в виде $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial \lambda_j} L(x) = 0 \right\}_1^m$.

3) Для каждой стационарной точки $x^{(0)}$ функции Лагранжа, в окрестности которой f, φ_1, $\ldots$, φ_m дважды непрерывно дифференцируемы, составляют d^2L и, если потребуется, $\widetilde{d^2L}$. Применяют теорему 2 для выяснения типа условного экстремума.

4) Находят значения функции f в точках условного экстремума.

Пример 2. Найдем точки условного экстремума функции $f(x, y, z) = xyz$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

Здесь $\varphi_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $\varphi_2(x, y, z) = x + y + z$. В качестве G можно взять, например,

$$G = \left\{ (x, y, z) \ : \ |\varphi_j(x, y, z)| < \frac{1}{2}\,, \quad j = 1, 2 \right\}.$$

Для функции Лагранжа

$$L(x, y, z) = xyz - \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \lambda_2(x + y + z)$$

найдем стационарные точки, удовлетворяющие уравнениям связи, решив систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} L'_x \equiv yz - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ L'_y \equiv xz - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \\ L'_z \equiv xy - 2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Сложив первые три уравнения, в силу последнего получим

$$yz + xz + xy - 3\lambda_2 = 0. \tag{5}$$

Но $2(yz + xz + xy) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 - 1$, и из (5) получаем $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$.

Разность первых двух уравнений (4) представляется в виде $(y - x)(z + 2\lambda_1) = 0$. Аналогично получаем еще два уравнения:

$$(z - y)(x + 2\lambda_1) = 0, \quad (x - z)(y + 2\lambda_1) = 0.$$

Из этих трех уравнений следует (в силу последних двух уравнений из (4)), что

$$(y - x)(z - y)(x - z) = 0.$$

Рассмотрим для определенности лишь случай $y - x = 0$. Остальные два рассматриваются аналогично.

В рассматриваемом случае имеются две стационарные точки, удовлетворяющие уравнениям связи:

$$x = y = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}, z = \mp\frac{\sqrt{6}}{3}; \quad \text{при этом} \quad \lambda_1 = \mp\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Будем исследовать их одновременно.

$$d^2L = -2\lambda_1(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2z\,dx\,dy + 2y\,dx\,dz+$$

$$+2x\,dy\,dz = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}[dx^2 + dy^2 + dz^2 - 4\,dx\,dy + 2\,dx\,dz + 2\,dy\,dz]$$

является неопределенной квадратичной формой, т. е. принимает положительные и отрицательные значения (ср. $dx = 1, dy = dz = 0$ и $dx = dy = 1, dz = 0$).

Построим $\widetilde{d^2L}$, связав в d^2L дифференциалы dx, dy, dz требованием (3):

$$\left.\begin{aligned} x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \\ dx + dy + dz = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

В каждой из рассматриваемых двух точек $x = y$, так что решение системы (6) $(\widetilde{dx}, \widetilde{dy}, \widetilde{dz})$ имеет вид $(\widetilde{dx}, -\widetilde{dx}, 0)$. Поэтому $\widetilde{d^2L} = \pm\,\frac{\sqrt{6}}{6}\,4\left(\widetilde{dx}\right)^2$ является положительно [отрицательно] определенной квадратичной формой одного переменного.

С помощью теоремы 3 заключаем, что $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ является точкой строгого условного минимума, а $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ — точкой строгого условного максимума. Значение функции f в этих точках равны соответственно $\mp\frac{\sqrt{6}}{18}$.

Глава 14
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 14.1. Определенный интеграл

Определение 1. *Разбиением* τ *отрезка* $[a, b]$ называется произвольная конечная система его точек $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i_\tau}$ такая, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i_\tau - 1} < x_{i_\tau} = b$.

Каждый из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ называется *отрезком разбиения* τ, $\Delta x_i \coloneqq x_i - x_{i-1}$. Величина $|\tau| \coloneqq \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant i_\tau} \Delta x_i$ называется *мелкостью разбиения* τ.

Будем говорить, что разбиение τ' *следует за разбиением* τ или *является измельчением* разбиения τ, и писать $\tau' \succ \tau$, если каждая точка разбиения τ является и точкой разбиения τ'.

Разбиения данного отрезка обладают следующими свойствами:

1°. Если $\tau_1 \succ \tau_2$, $\tau_2 \succ \tau_3$, то $\tau_1 \succ \tau_3$.

2°. Для любых τ_1, τ_2 $\exists\, \tau$: $\tau \succ \tau_1$, $\tau \succ \tau_2$.

Первое свойство очевидно. Для доказательства второго достаточно в качестве τ взять разбиение, содержащее все точки разбиения τ_1 и все точки разбиения τ_2.

Пусть теперь на отрезке $[a, b]$ определена (числовая) функция f и $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение этого отрезка. Отметим в каждом отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ какую-либо точку ξ_i и составим сумму

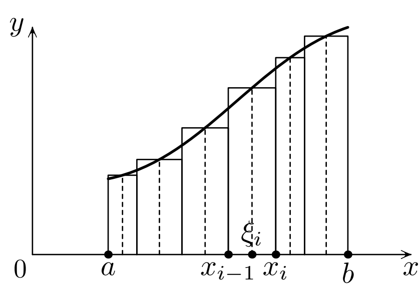


Рис. 14.1

$$S_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

называемую *интегральной суммой Римана* функции f.

Если функция f неотрицательна, слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ суммы Римана равно площади прямоугольника с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ и высотой $f(\xi_i)$, а вся сумма — площади ступенчатой фигуры, образованной объединением всех таких прямоугольников.

Определение 2. Число I называется *определенным интегралом Римана функции f на отрезке* $[a, b]$ и обозначается $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\left|\sum_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$$

для любых τ с мелкостью $|\tau| < \delta$ и любого набора отмеченных точек $\xi_1, \ \ldots, \xi_{i_\tau}$.

Функцию f при этом называют *интегрируемой по Риману* на отрезке $[a, b]$.

Кратко можно записать

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau(f; \xi_1, \ \ldots, \ \xi_{i_\tau}),$$

вкладывая в понятие предела тот смысл, который выражен в ε, δ-терминах в определении 1 (это понятие отличается от изученных понятий предела последовательности и предела функции).

Поскольку дальше мы будем иметь дело лишь с определенным интегралом Римана, то будем называть его просто *определенным интегралом*, а функцию, интегрируемую по Риману, — просто *интегрируемой функцией.*

В следующей теореме показывается, что интеграл может существовать только для ограниченных функций.

Теорема 1. *Если функция интегрируема на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция f неограничена на отрезке $[a,b]$. Для произвольного разбиения τ отрезка представим сумму Римана интегрируемой функции f в виде

$$S_\tau(f;\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{i_\tau}) = f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant i_\tau\\ i\neq k}} f(\xi_i)\Delta x_i, \qquad (1)$$

где $[x_{k-1},x_k]$ — такой отрезок разбиения τ, на котором f неограничена. Выберем каким-либо образом все отмеченные точки ξ_i, кроме одной из них с номером k. Тогда правую часть (1) можно сделать сколь угодно большой по модулю за счет выбора ξ_k. Следовательно, при любом разбиении τ сумма Римана $S_\tau(f)$ может быть по модулю сколь угодно большой (например, $|S_\tau(f)| > \frac{1}{|\tau|}$) при соответствующем выборе отмеченных точек. Это противоречит существованию (конечного) предела $\lim\limits_{|\tau|\to 0} S_\tau(f)$. Следовательно, функция f не интегрируема на $[a,b]$.

Условие ограниченности функции, являясь необходимым для интегрируемости функции, не является достаточным, в чем можно убедиться на примере функции Дирихле:

$$f\ :\ [0,1]\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}.\end{cases}$$

Для этой функции и произвольного разбиения τ $S_\tau(f)=1$, если все отмеченные точки рациональны, $S_\tau(f)=0$, если все отмеченные точки иррациональны.

Следовательно, функция f не является интегрируемой на $[0,1]$.

§ 14.2. Критерий интегрируемости

Определение 1. Пусть функция f определена на отрезке $[a,b]$. Ее *колебанием* на этом отрезке называется число

$$w(f;[a,b]) \coloneqq \sup_{x',x''\in[a,b]} |f(x') - f(x'')| = \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f.$$

Для f, определенной на отрезке $[a,b]$, и разбиения $\tau = \{x_i\}_1^{i_\tau}$ этого отрезка положим $w_i(f) = w(f;[x_{i-1},x_i])$.

Теорема 1 (критерий интегрируемости). *Для интегрируемости функции f на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы для*

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0\ :\ \sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i < \varepsilon\ \ \forall\,\tau\ :\ |\tau| < \delta. \quad (1)$$

Критерий интегрируемости кратко можно записать так:

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i = 0, \quad (2)$$

вкладывая в понятие предела тот смысл, который выражен в (ε,δ)-терминах в (1).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b f(x)\,dx = I$. Тогда для

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ |S_\tau(f) - I| < \varepsilon$$
$$\forall\,\tau\ :\ |\tau| < \delta, \quad \forall\,\xi_1,\,\ldots,\,\xi_{i_\tau}.$$

Зафиксируем ε, δ и τ. Пусть ξ_i', ξ_i'' — две такие точки интервала $[x_{i-1},x_i]$, что $w_i(f) \leqslant 2(f(\xi_i') - f(\xi_i''))$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i \leqslant 2\sum_{i=1}^{i_\tau}(f(\xi_i') - f(\xi_i''))\Delta x_i \leqslant$$
$$\leqslant 2|I - S_\tau(f;\xi_1',\,\ldots,\,\xi_{i_\tau}')| + 2|I - S_\tau(f;\xi_1'',\,\ldots,\,\xi_{i_\tau}'')| < 4\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{|\tau|\to 0} \sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i = 0.$$

Достаточность. Покажем, что при $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{k}$, $\tau^* = \{x_j^*\}_{j=0}^{k^*} \succ \tau$.

$$|S_\tau(f;\xi_1,\,\ldots,\,\xi_k) - S_{\tau^*}(f;\xi_1^*,\,\ldots,\,\xi_{k^*}^*)| \leqslant \leqslant \sum_{i=1}^{k} w(f;[x_{i-1},x_i])\Delta x_i. \quad (3)$$

Пусть $x_i = x_{j_i}^*$ $\forall\, i = 0,\, 1,\, \ldots,\, i_\tau$, т. е. $x_{i-1} = x_{j_{i-1}}^* < \ldots < x_{j_i}^* = x_i$. Тогда

$$\left| f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} f(\xi_j^*)\Delta x_j^* \right| \leqslant \sum_{j=j_{i-1}+1}^{j_i} w_i(f)\Delta x_j^* = w_i(f)\Delta x_i.$$

Отсюда следует (3).

Пусть теперь разбиения τ', τ'' отрезка $[a,b]$ произвольны. Возьмем разбиение τ^*: $\tau^* \succ \tau'$, $\tau^* \succ \tau''$ (это означает, что все точки разбиений τ' и τ'' являются точками разбиения τ^*). Тогда в силу (3) получаем

$$|S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| \leqslant |S_{\tau'}(f) - S_{\tau^*}(f)| + |S_{\tau''}(f) - S_{\tau^*}(f)| \leqslant \leqslant \sum_{i=1}^{k'} w(f;[x'_{i-1},x'_i])\Delta x'_i + \sum_{i=1}^{k''} w(f;[x''_{i-1},x''_i])\Delta x''_i. \quad (4)$$

Из (1) и (4) следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ :\ |S_{\tau'}(f) - S_{\tau''}(f)| < \varepsilon, \quad \text{если } |\tau'|,\ |\tau''| < \delta. \quad (5)$$

Исходя из свойства (5), проведем оставшуюся часть доказательства достаточности подобно тому, как при доказательстве критерия Коши для последовательности из фундаментальности последовательности была получена ее сходимость.

Возьмем произвольную последовательность разбиений $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $|\tau_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Для каждого разбиения $\tau_n = \{x_i^{(n)}\}_{i=1}^{k_n}$, отметив произвольно точки $\xi_1^{(n)}$, $\ldots$,

$\xi_{k_n}^{(n)}$, составим сумму Римана $S_{\tau_n}(f)$. Рассмотрим числовую последовательность $\{S_{\tau_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$. Она является фундаментальной (т. е. удовлетворяет условию Коши), так как в силу (5) для $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$: $|S_{\tau_n}(f) - S_{\tau_m}(f)| < \varepsilon$ для $\forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon$. Следовательно, по критерию Коши она сходится. Пусть

$$I = \lim_{n\to\infty} S_{\tau_n}(f; \xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_{k_n}^{(n)}).$$

Имеем в силу (4)

$$|S_{\tau_n}(f) - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{k_n} w(f; [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}])\Delta x_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$|I - S_\tau(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i. \tag{6}$$

На основании (2) получаем отсюда, что

$$\lim_{|\tau|\to 0} S_\tau(f) = I.$$

З а м е ч а н и е. Оценка (6) показывает, с какой точностью интеграл может быть приближен суммой Римана. Она может использоваться при приближенном вычислении интеграла.

Определение 2. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a, b]$ и $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение $[a, b]$. Пусть

$$M_i \coloneqq \sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x), \quad m_i \coloneqq \inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x).$$

Тогда суммы

$$\underline{S_\tau}(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i\Delta x_i, \quad \overline{S_\tau}(f) \coloneqq \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i\Delta x_i$$

называют соответственно *нижней* и *верхней интегральными суммами Дарбу* функции f, соответствующими разбиению τ.

Ясно, что для любой интегральной суммы Римана $S_\tau(f)$

$$\underline{S_\tau}(f) \leqslant S_\tau(f) \leqslant \overline{S_\tau}(f).$$

Нетрудно показать (предоставим это читателю), что

$$\overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) = \sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i.$$

С помощью последнего равенства можно перефразировать критерий интегрируемости функции в терминах суммы Дарбу:

для интегрируемости функции f на $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon)\ :\ \overline{S_\tau}(f) - \underline{S_\tau}(f) < \varepsilon \quad \forall\,\tau\ :\ |\tau| < \delta.$$

Упражнение 1. Выяснить геометрический смысл интегральных сумм Дарбу для неотрицательных функций.

Установим интегрируемость монотонных и непрерывных функций.

Теорема 2. *Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на этом отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать для определенности, что функция f возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{i_\tau}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant |\tau| \sum_{i=1}^{i_\tau}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = |\tau|(f(b) - f(a)).$$

Условие (1) для $\forall\,\varepsilon > 0$ выполнено при $\delta = \dfrac{\varepsilon}{(f(b) - f(a))}$, если $f(b) > f(a)$, и при любом $\delta > 0$, если $f(b) = f(a)$.

Следовательно, f интегрируема в силу критерия интегрируемости (теоремы 1).

Теорема 3. *Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем.*

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда в силу теоремы Кантора она равномерно непрерывна на нем, так что при $a \leqslant c < d \leqslant b$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ w(f;[c,d]) \leqslant \varepsilon, \text{ если } d - c < \delta.$$

Следовательно, при произвольном $\varepsilon > 0$ для разбиения τ отрезка $[a,b]$ с мелкостью $|\tau| < \delta$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{i_\tau} \Delta x_i = \varepsilon(b-a).$$

В силу критерия интегрируемости функция f интегрируема на $[a,b]$.

Теорема 4. *Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$ и непрерывна на интервале (a,b).*

Тогда она интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in [a,b]$. Возьмем произвольное $\varepsilon \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$. Тогда при произвольном разбиении τ отрезка $[a,b]$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i = \sum_{[x_{i-1},x_i]\not\subset[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} w_i(f)\Delta x_i + \\ + \sum_{[x_{i-1},x_i]\subset[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} w_i(f)\Delta x_i = \Sigma' + \Sigma''.$$

Очевидно, что

$$\Sigma' \leqslant 2M(\varepsilon + |\tau|).$$

Поскольку функция f непрерывна и, следовательно, по теореме 3 интегрируема на $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, существует в силу критерия интегрируемости $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\Sigma'' < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\tau| < \delta.$$

Будем считать, что $\delta \leqslant \varepsilon$. Тогда при $|\tau| < \delta \leqslant \varepsilon$

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i = \Sigma' + \Sigma'' < 4M\varepsilon + \varepsilon = (4M+1)\varepsilon.$$

Это означает, что выполнено условие (1) и в силу критерия интегрируемости функция f интегрируема на $[a, b]$.

Определение 3. Функция $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ называется *кусочно непрерывной* на $[a, b]$, если существует разбиение $\tau = \{a_i\}_1^{i_\tau}$ такое, что при любом $i = 1, \ldots, i_\tau$ функция является непрерывной на отрезке $[a_{i-1}, a_i]$ либо становится таковой после надлежащего переопределения ее в одном или обоих концах этого отрезка. Это равносильно тому, что при любом $i = 1, \ldots, i_\tau$:

1° функция f непрерывна на (a_{i-1}, a_i);

2° существуют конечные пределы $f(a_{i-1}+0)$, $f(a_i-0)$.

Так же, как и теорема 4, доказывается и

Теорема 5. *Кусочно непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.*

§ 14.3. Свойства интегрируемых функций

1° Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и $[a^*, b^*] \subset \subset [a, b]$. Тогда f интегрируема на $[a^*, b^*]$.

Доказательство. Пусть $\tau^* = \{x_i^*\}$ — произвольное разбиение $[a^*, b^*]$. Дополним его до разбиения $\tau = \{x_i\}$ отрезка $[a, b]$ с мелкостью $|\tau| = |\tau^*|$. Тогда

$$\sum_{i\in\tau^*} w_i^*(f)\Delta x_i^* \leqslant \sum_{i\in\tau} w_i(f)\Delta x_i,$$

где $w_i^*(f) = w(f; [x_{i-1}^*, x_i^*])$.

Для правой части неравенства выполнено (т. к. f интегрируема на $[a, b]$) условие (14.2.2). Следовательно, оно выполнено и для левой части. В силу критерия интегрируемости f интегрируема на $[a^*, b^*]$.

2° (Аддитивность интеграла относительно отрезков интегрирования). Пусть $a < c < b$, функция f интегрируема на $[a, c]$ и интегрируема на $[c, b]$. Тогда f интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция f как интегрируемая на $[a, c]$ и $[c, b]$ ограничена: $|f(x)| \leqslant M$ при $x \in [a, b]$.

Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, τ_c — разбиение $[a, b]$, полученное дополнением разбиения τ точкой c (или совпадающее с τ, если $c \in \tau$). Пусть еще τ_c', τ_c'' — разбиения соответственно отрезков $[a, c]$, $[c, b]$, порожденные разбиением τ_c.

Сравним суммы Римана $S_\tau(f)$, $S_{\tau_c'}(f)$, $S_{\tau_c''}(f)$, считая отмеченные точки в первой из них произвольно выбранными, а во второй и третьей — выбранными по возможности совпадающими с отмеченными точками в $S_\tau(f)$.

Тогда

$$S_\tau(f) - S_{\tau_c'}(f) - S_{\tau_c''}(f) = 0, \text{ если } c \in \tau.$$

Если же $c \notin \tau$, $c \in (x_{i_0-1}, x_{i_0})$, то при ξ_{i_0}, ξ', $\xi'' \in$ $\in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$

$$S_\tau(f) - S_{\tau_c'}(f) - S_{\tau_c''}(f) = \\ = f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0} - f(\xi')(c - x_{i_0-1}) - f(\xi'')(x_{i_0} - c).$$

Отсюда получаем, что

$$\left|S_\tau(f) - S_{\tau_c'}(f) - S_{\tau_c''}(f)\right| \leqslant 2M\Delta x_{i_0} \leqslant 2M|\tau|.$$

Устремляя $|\tau| \to 0$ и учитывая, что при этом

$$S_{\tau'_c}(f) \to \int_a^c f(x)\,dx, \quad S_{\tau''_c}(f) \to \int_c^b f(x)\,dx,$$

заключаем, что

$$\exists \lim_{|\tau|\to 0} S_\tau(f) =: \int_a^b f(x)\,dx$$

и что выполняется равенство (1).

Замечание. Положив $\int_a^a f(x)\,dx := 0$ и $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$ при $a < b$, без труда убеждаемся, что равенство (1) справедливо при любом расположении точек a, b, c для функции f, интегрируемой на отрезке, содержащем эти точки.

3° (Линейность интеграла). Если f, g интегрируемы на $[a, b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то функция $\lambda f + \mu g$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b \mu g(x)\,dx.$$

Доказательство получается предельным переходом при $|\tau| \to 0$ из соответствующего равенства для интегральных сумм Римана.

4° Если функции f, g интегрируемы на $[a, b]$, то их произведение fg также интегрируемо на $[a, b]$.

Доказательство. Запишем $\Delta(fg)(x_0) = (fg)(x_0 + \Delta x) - (fg)(x_0) = f(x_0 + \Delta x)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)g(x_0) = \Delta f(x_0)g(x_0 + \Delta x) + f(x_0)\Delta g(x_0)$.

Эта формула аналогична формуле Лейбница дифференцирования произведения двух функций.

Отсюда при условии ограниченности функций f, g имеем

$$w(fg; [c, d]) \leqslant M\, w(f; [c, d]) + M\, w(g; [c, d]),$$

если $|f|$, $|g| \leqslant M$ на $[a, b]$, $[c, d] \subset [a, b]$.

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(fg)\Delta x_i \leqslant M\sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i + M\sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(g)\Delta x_i.$$

Устремляя $|\tau| \to 0$ и пользуясь критерием интегрируемости, получаем, что fg интегрируемо на $[a,b]$.

5° Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$ и $\inf\limits_{[a,b]} f > 0$. Тогда $\frac{1}{f}$ интегрируема на $[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о основывается на оценке $w_i\left(\frac{1}{f}\right)$ через $w_i(f)$.

6° Пусть функции f, g интегрируемы на $[a,b]$ и $f \leqslant g$ на $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно воспользоваться предельным переходом при $|\tau| \to 0$ в соответствующем неравенстве для интегральных сумм Римана:

$$S_\tau(f;\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{i_\tau}) \leqslant S_\tau(g;\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{i_\tau}).$$

7° Если f интегрируема на $[a,b]$, то $|f|$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируемость $|f|$ с помощью критерия интегрируемости следует из оценки

$$|f(\xi')| - |f(\xi'')| \leqslant |f(\xi') - f(\xi'')|,$$

откуда $w_i(|f|) \leqslant w_i(f)$ и

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(|f|)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i.$$

Оценка (2) получается предельным переходом из соответствующей оценки для интегральных сумм Римана:

$$S_\tau(f;\xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}) \leqslant S_\tau(|f|;\xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau}).$$

Заметим, что интегрируемость $|f|$ на $[a,b]$ не влечет интегрируемость f на $[a,b]$, что можно увидеть на примере функции $\psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \text{ рациональном,} \\ -1 & \text{при } x \text{ иррациональном.} \end{cases}$$

8° (интеграл «не замечает» изменения функции в конечном числе точек).

Пусть f интегрируема на $[a,b]$, f^* отличается от f лишь в конечном числе точек. Тогда f^* интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int_a^b f^*(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\varphi = f^* - f$ интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b \varphi(x)\,dx = 0$. Пусть φ отлична от нуля в N точках и $\max\limits_{[a,b]} |\varphi| = M$. Тогда

$$S_\tau(\varphi) \leqslant M2N|\tau|$$

и остается перейти в этом неравенстве к пределу при $|\tau| \to 0$.

Упражнение 1. Доказать теорему 14.2.5, пользуясь последовательно теоремой 14.2.3, свойствами 8° и 2°.

Теорема 1. *Пусть f непрерывна и $f \geqslant 0$ на $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$, $f(x_0) > 0$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x_0) = d > 0$. Тогда найдется отрезок $[a^*, b^*] \subset [a, b]$, $b^* - a^* > 0$, на котором $f \geqslant \frac{d}{2}$. Имеем в силу 5°

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a^*} f(x)\,dx + \int_{a^*}^{b^*} f(x)\,dx + \int_{b^*}^b f(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant 0 + \int_{a^*}^{b^*} \frac{d}{2}\,dx + 0 = \frac{d}{2}\int_{a^*}^{b^*} 1\,dx = \frac{d}{2}\,(b^* - a^*) > 0.$$

Теорема 2 (теорема о среднем для интеграла). *Пусть функции f, g интегрируемы на отрезке $[a, b]$,*

$$m \leqslant f \leqslant M \quad \text{на} \quad [a, b],$$

функция g не меняет знака на отрезке $[a, b]$.

Тогда

$$\exists\, \mu \in [m, M] \ : \ \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{3}$$

При дополнительном предположении непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$

$$\exists\, \xi \in (a, b) \ : \ \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, для определенности, $g \geqslant 0$ на $[a, b]$. Тогда

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x), \quad x \in [a, b].$$

Отсюда в силу свойства 6°

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{5}$$

Пусть сначала $\int_a^b g(x)\,dx = 0$. Тогда из (5) следует, что $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$ и в качестве μ в (3) можно взять произвольное число.

Пусть теперь $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Тогда из (5) получаем, что

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leqslant M.$$

Взяв $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$, получаем (3).

Установим (4). Будем рассматривать лишь нетривиальный случай, когда $\int_a^b g(x)\,dx > 0$. Считая $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$, рассмотрим три возможных случая: $m < \mu < M$, $\mu = m$, $\mu = M$. В первом из них, по теореме о промежуточном значении непрерывной функции, $\exists\,\xi \in (a,b)$: $f(\xi) = M$ и из (3) следует (4).

Случаи $\mu = m$ и $\mu = M$ рассматриваются одинаково. Поэтому рассмотрим лишь случай $\mu = M$.

Если максимум M функции f достигается в некоторой точке $\xi \in (a,b)$, то из (3) следует (4) с этим значением ξ.

Остается нерассмотренным лишь случай, когда $\mu = M$, $f(x) < M$ при $x \in (a,b)$. Покажем, что этот случай неосуществим, что и завершит доказательство теоремы.

В условиях этого случая из (3) следовало бы, что

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)\,dx = 0.$$

Тогда при $\forall\,\varepsilon \in \left(0, \dfrac{b-a}{2}\right)$

$$0 = \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} [M - f(x)]g(x)\,dx \geqslant \alpha_\varepsilon \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx,$$

где $\alpha_\varepsilon = \min\limits_{[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} [M - f(x)] > 0$.

Отсюда

$$G(\varepsilon) \coloneqq \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} g(x)\,dx = 0 \quad \forall\,\varepsilon \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right).$$

Но функция G непрерывна на $\left[0, \frac{b-a}{2}\right]$ (что будет показано в следующем параграфе). Поэтому, переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0+0$, получаем, что

$$\int_a^b g(x)\,dx = 0,$$

что противоречит предположению.

§ 14.4. Связь между определенным и неопределенным интегралами

Пусть f интегрируема на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ определена функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

называемая *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 1. *Пусть f интегрируема на $[a, b]$. Тогда функция F непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть x_0, $x_0+\Delta x \in [a, b]$. Тогда

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Функция f ограничена на $[a, b]$ (поскольку она интегрируема), так что при некотором M

$$|f(t)| \leqslant M \quad \forall\, t \in [a, b].$$

Следовательно,

$$|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| \leqslant M|\Delta x| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0,$$

что и требовалось показать.

Теорема 2. *Пусть функция f интегрируема на $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$. Тогда функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ имеет производную в точке x_0 и*

$$F'(x_0) = f(x_0) \tag{2}$$

(под $F'(x_0)$ в случае $x_0 = a$ или $x_0 = b$ подразумевается односторонняя производная).

Доказательство. Вычитая из $\dfrac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}$ предполагаемый предел $f(x_0)$, имеем при $x_0 + \Delta x \in [a, b]$

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\, dt.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности f в точке x_0

$$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon)\ :\ |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ если } t \in [a, b],\ |t - x_0| < \delta.$$

Следовательно, при $|\Delta x| < \delta$ (и $x_0 + \Delta x \in [a, b]$)

$$\left|\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} [f(t) - f(x_0)]\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} 1\, dt = \varepsilon.$$

Но это и означает, что

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} \to f(x_0) \quad \text{при} \quad x_0 + \Delta x \in [a, b],\ \Delta x \to 0,$$

что и требовалось показать.

Пусть f интегрируема на $[a, b]$. Тогда на $[a, b]$ определена функция

$$G(x) = \int_x^b f(t)\, dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

называемая *интегралом с переменным нижним пределом.* Функция

$$G(x) = \int_a^b f(t)\, dt - F(x).$$

Следовательно, G непрерывна на $[a, b]$. Если же f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то

$$\exists\, G'(x_0) = -F'(x_0) = -f(x_0). \tag{3}$$

Как и раньше, через $\langle a, b\rangle$ будем обозначать промежуток (т. е. отрезок, интервал или какой-либо из полуинтервалов) с концами a, b.

Теорема 3. *Пусть функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle$. Тогда она имеет на $\langle a, b\rangle$ первообразную*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad \text{где} \quad x_0 \in \langle a, b\rangle.$$

Доказательство следует из формулы (2) при $x \in \langle a, b\rangle$, $x \geqslant x_0$, и формулы (3) при $x \in \langle a, b\rangle$, $x \leqslant x_0$, если учесть, что в последнем случае F можно представить в виде $F(x) = -\int_x^{x_0} f(t)\,dt$.

Теорема 4 (основная теорема интегрального исчисления). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и Φ — ее первообразная на этом отрезке. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{4}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона–Лейбница*.

Доказательство. Функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ является первообразной для функции f на отрезке $[a, b]$. Поэтому

$$F(x) = \Phi(x) + C, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

т. е.

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + c, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Отсюда при $x = a$ получаем $0 = \Phi(a) + C$. Выражая из последнего равенства C и подставляя его в предшествующее равенство, получаем, что

$$\int_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a) \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Последнее равенство при $x = b$ совпадает с (4).

Значение формулы Ньютона–Лейбница в том, что она связывает два понятия: неопределенного и определенного интеграла, которые были введены и изучались независимо. Она дает возможность вычислить определенный интеграл, если найден неопределенный.

§ 14.5. Замена переменной и интегрирование по частям

Теорема 1 (замена переменной). *Пусть функции* φ, φ' *непрерывны на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *а функция* f *непрерывна на отрезке* $\varphi([\alpha, \beta])$, $a \coloneqq \varphi(\alpha)$, $b \coloneqq \varphi(\beta)$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть Φ — первообразная для f на отрезке $\varphi([\alpha, \beta])$. Тогда $\Phi(\varphi)$ — первообразная для $f(\varphi)\varphi'$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, поскольку $(\Phi(\varphi))'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, где производные при $t = \alpha, \beta$ понимаются как односторонние (см. теорему 5.5.1 и замечание к ней).

Дважды воспользовавшись формулой Ньютона–Лейбница, получаем (при любом расположении точек a и b)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Из этих двух равенств вытекает утверждение теоремы.

Теорема 2 (интегрирование по частям). *Пусть функции* u, v, u', v' *непрерывны на отрезке* $[a, b]$. *Тогда*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx, \tag{2}$$

где $u(x)v(x)\Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Доказательство. Из равенства

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

следует, что

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b (u(x)v(x))'\,dx - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Остается заметить, что по формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Определение 1. Функция $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной* и *кусочно непрерывно дифференцируемой* (или непрерывной и кусочно гладкой) на $[a,b]$, если она непрерывна на $[a,b]$ и существует разбиение $\tau = \{a_i\}_0^{i_\tau}$ отрезка $[a,b]$, при котором производная f' непрерывна на каждом отрезке $[a_{i-1}, a_i]$, если в концах его производную понимать как одностороннюю.

Обобщим понятие определенного интеграла.

Определение 2. *Интегралом по отрезку* $[a,b]$ *функции* f, определенной на отрезке $[a,b]$, за исключением конечного числа точек, называется

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx,$$

если стоящий справа интеграл существует, где $\tilde{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ — каким-либо образом доопределенная в этих точках функция f.

Интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ определен здесь корректно, т. к. $\int_a^b \tilde{f}(x)\,dx$ не зависит от способа доопределения функции f, что следует из свойства 8° интеграла.

Теорема 3 (интегрирование по частям). *Пусть функции u, v непрерывны и кусочно непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда справедлива формула (2).*

Доказательство. В силу определения 1 существует разбиение $\tau = \{a_i\}_0^{i_\tau}$, при котором u, v — непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке $[a_{i-1}, a_i]$ $(i = 1, \ldots, i_\tau)$. Производные же u', v' в точках a_i $(i = 0, 1, \ldots, i_\tau)$ могут не существовать. В силу определения 2 и свойства 8° интеграла

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \sum_{i=1}^{i_\tau} \int_{a_{i-1}}^{a_i} u(x)v'(x)\,dx.$$

Применяя к каждому слагаемому правой части теорему 2, получаем, что

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \sum_{i=1}^{i_\tau} \left(u(x)v(x)\Big|_{a_{i-1}}^{a_i} - \int_{a_{i-1}}^{a_i} u(x)v'(x)\,dx \right) = \\ = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

§ 14.6. Приложения определенного интеграла

В этом параграфе будет показано, как с помощью определенного интеграла вычислить площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения и другие геометрические величины. Фигуру в $\mathbb{R}^2$, имеющую площадь, называют *квадрируемой*, а тело в $\mathbb{R}^3$, имеющее объем, — *кубируемым*. Обобщением этих понятий являются измеримость и мера множеств в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$. Здесь же ограничимся лишь констатацией некоторых свойств измеримости (по Жордану) и меры (жордановой меры), позволяющих вычислить меры плоских фигур и трехмерных тел простых геометрических форм[1]. Меру множества $E \subset \mathbb{R}^n$ будем обозначать символом μE.

[1]Впоследствии будет показано, что такие множества измеримы (т. е. имеют меру).

Перечислим свойства меры, которые будут использованы в этом параграфе:

a) если P — прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subset P \subset [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, то $\mu P = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$;

b) (аддитивность меры), если множества E_1, E_2 измеримы, и $E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$, то $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu E_1 + \mu E_2$;

c) (монотонность меры), если множества E_1, E_2 измеримы, и $E_1 \subset E_2$, то $\mu E_1 \leqslant \mu E_2$.

(1) Площадь криволинейной трапеции. *Криволинейной трапецией* называется множество $G \subset \mathbb{R}^2$ вида

$$G = \{(x, y) \,:\, a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}, \tag{1}$$

где функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f \geqslant 0$ на $[a, b]$.

Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < i_\tau = b$, $m_i = \min\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$, $M_i = \max\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$.

Построим две замкнутые ступенчатые фигуры $G_*(\tau)$, $G^*(\tau)$ следующим образом:

$$G_*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} [x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i],$$

$$G^*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} [x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i].$$

Из $G_*(\tau) \subset G \subset G^*(\tau)$ следует, что

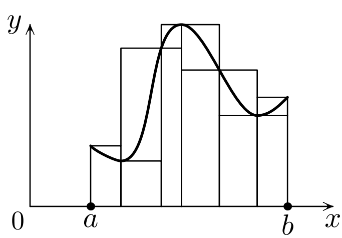


Рис. 14.2

$$\mu G_*(\tau) \leqslant \mu G \leqslant G^*(\tau).$$

Но

$$\mu G_*(\tau) = \sum_{i=1}^{i_\tau} m_i \Delta x_i = \underline{S}_\tau,$$

$$\mu G^*(\tau) = \sum_{i=1}^{i_\tau} M_i \Delta x_i = \overline{S}_\tau,$$

где $\underline{S}_\tau$, $\overline{S}_\tau$ — соответственно наименьшая и наибольшая интегральные суммы Римана функции f для разбиения τ. Следовательно,

$$\underline{S}_\tau \leqslant \mu G \leqslant \overline{S}_\tau.$$

Отсюда, устремляя мелкость $|\tau|$ разбиения τ к нулю, получаем, что

$$\mu G = \int_a^b f(x)\, fx.$$

Упражнение 1. Выяснить геометрический смысл интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, где непрерывная функция f отрицательна или меняет знак.

Упражнение 2. Вычислить площадь круга радиусом R и площадь его сектора.

(2) Площадь криволинейного сектора.

Пусть кривая Γ задана в полярной системе координат уравнением

$$\Gamma = \{(r,\theta) : \ r = r(\theta),\ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\},$$

где $r = r(\theta)$ непрерывна и неотрицательна на $[\alpha,\beta] \subset [0,2\pi]$, $G = \{(r,\theta)\colon \ \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, 0 \leqslant r \leqslant r(\theta)\}$.

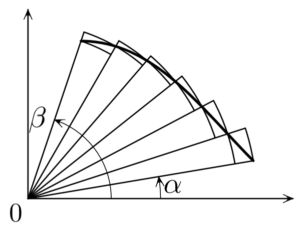


Рис. 14.3

Пусть $\tau = \{\alpha_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$, $m_i = \min\limits_{[\alpha_{i-1},\alpha_i]} r$, $M_i = \max\limits_{[\alpha_{i-1},\alpha_i]} r$.

Построим две фигуры $G_*(\tau)$, $G^*(\tau)$:

$$G_*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} \{(r,\theta) \ : \ \alpha_i \leqslant \theta \leqslant \beta_i,\ 0 \leqslant r \leqslant m_i\},$$

$$G^*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau} \{(r,\theta) \ : \ \alpha_i \leqslant \theta \leqslant \beta_i,\ 0 \leqslant r \leqslant M_i\}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i_\tau} m_i^2 \Delta\alpha_i = \mu G_*(\tau) \leqslant \mu G \leqslant \mu G^*(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i_\tau} M_i^2 \Delta\alpha_i.$$

Устремляя $|\tau| \to 0$, получаем отсюда, что

$$\mu G = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta.$$

(3) Объем тела вращения. Пусть функция f непрерывна и неотрицательна на $[a,b]$, тело $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ образовано вращением криволинейной трапеции (1) вокруг оси Ox.

Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ — разбиение отрезка $[a,b]$, $m_i = \min\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$, $M_i = \max\limits_{[x_{i-1},x_i]} f$,

$$\Omega_*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau}\{(x,y,z)\,:\, x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y^2+z^2 \leqslant m_i^2\},$$

$$\Omega^*(\tau) = \bigcup_{i=1}^{i_\tau}\{(x,y,z)\,:\, x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y^2+z^2 \leqslant M_i^2\}.$$

Тогда

$$\pi\sum_{i=1}^{i_\tau} m_i^2 \Delta x_i = \mu\Omega_*(\tau) \leqslant \mu\Omega \leqslant \mu\Omega^*(\tau) = \pi\sum_{i=1}^{i_\tau} M_i^2 \Delta x_i.$$

Устремляя $|\tau| \to 0$, получаем отсюда, что

$$\mu\Omega = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

(4) Вычисление длины кривой. Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t),\ a \leqslant t \leqslant b\}$ непрерывно дифференцируема.

Ранее было установлено, что непрерывно дифференцируемая кривая спрямляема (имеет длину) и что производная переменной длины дуги $s(t)$ этой кривой

$$s'(t) = |\vec{r}\,'(t)|.$$

Пусть S — длина кривой Γ. Тогда

$$S = s(b) - s(a) = \int_a^b s'(t)\,dt = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|\,dt = \\ = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

Если Γ — плоская кривая, заданная уравнением $\Gamma = \{(x, f(x)),\ a \leqslant x \leqslant b\}$, то ее длина

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

(5) Площадь поверхности вращения. Пусть f непрерывно дифференцируема и неотрицательна на $[a, b]$. Пусть S — поверхность, образованная вращением кривой $\Gamma = \{(x, f(x)),\ a \leqslant x \leqslant b\}$, т. е. графика функции f, вокруг оси Ox. Площадь ее (определение которой будет дано ниже) обозначим символом $\operatorname{mes} S$.

Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i_\tau} = b$ — разбиение отрезка $[a, b]$. Построим вписанную в Γ ломаную $\Gamma(\tau)$, соединив отрезками последовательно точки кривой Γ: $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, i_\tau$. Поверхность, образованную вращением ломаной $\Gamma(\tau)$ вокруг оси Ox, обозначим через $S(\tau)$. Она представляет собой объединение боковых поверхностей усеченных конусов или цилиндров, площади которых известны из курса элементарной геометрии. Поэтому площадь $S(\tau)$ равна

$$\operatorname{mes} S(\tau) = \pi \sum_{i=1}^{i_\tau} (f(x_{i-1}) + f(x_i)) l_i,$$

где

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \\ = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i, \qquad (2)$$

а точки $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ возникли в результате применения формулы конечных приращений Лагранжа.

Определение 1. *Площадью поверхности* S называется

$$\operatorname{mes} S = \lim_{|\tau|\to 0} \operatorname{mes} S(\tau), \tag{3}$$

если этот предел существует.

Покажем, что в рассматриваемом случае площадь поверхности S существует, причем

$$\operatorname{mes} S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{4}$$

Обозначим через $\sigma_\tau(f; \xi_1, \ldots, \xi_{i_\tau})$ интегральную сумму Римана последнего интеграла, построенную по разбиению τ и тем же самым, что и в (2), отмеченным точкам $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{i\tau}$. Тогда, полагая $M_1 = \max\limits_{[a,b]} |f'|$, имеем

$$|\operatorname{mes} S(\tau) - 2\pi\sigma_\tau| \leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{i_\tau} \left[\frac{|f(x_{i-1}) - f(\xi_i)|}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{|f(x_i) - f(\xi_i)|}{2}\right] \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \sum_{i=1}^{i_\tau} M_1 |\tau| \sqrt{1 + M_1^2}\Delta x_i =$$

$$= 2\pi M_1 \sqrt{1 + M_1^2}(b - a)|\tau| \to 0 \text{ при } |\tau| \to 0.$$

Следовательно, левая часть этой цепочки неравенств стремится к нулю при $|\tau| \to 0$.

Но

$$\sigma_\tau \to \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx \quad (|\tau| \to 0),$$

поскольку подынтегральная функция непрерывна на $[a, b]$. Следовательно, существует предел (3) и справедливо равенство (4).

§ 14.7. Несобственные интегралы

Определение 1. Пусть функция $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$, $b \leqslant +\infty$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a,b'] \subset [a,b)$.

Символ

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

называется *несобственным интегралом* (*Римана*) по полуинтервалу $[a,b)$. Говорят, что несобственный интеграл (1) сходится, и пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \lim_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx, \tag{2}$$

если указанный предел существует, и что несобственный интеграл (1) расходится — в противном случае (здесь и далее символ $+\infty - 0$ равнозначен символу $+\infty$).

Таким образом, в случае сходимости несобственным интегралом называют не только символ, но и число.

Сравним понятия интеграла Римана и несобственного интеграла Римана. Если $b = +\infty$, то функция f задана на бесконечном промежутке, для которого интеграл Римана не определен, в то время, как несобственный интеграл (2) может существовать. Если же $b < +\infty$, а функция f неограничена на $[a,b)$, то интеграл Римана по $[a,b]$ не существует, в то время как несобственный интеграл (2) может существовать.

Если функция f интегрируема по Риману по отрезку $[a,b]$, то сходится и несобственный интеграл (2) по $[a,b)$ и оба этих интеграла равны. Это следует из непрерывности $\int_a^{b'} f(x)\,dx$ как функции b' в силу теоремы 14.4.1.

Упражнение 1. Доказать, что если функция ограничена на отрезке $[a,b]$ и интегрируема по Риману на $\forall\,[a,b'] \subset$ $\subset [a,b)$, то она интегрируема по Риману по $[a,b]$, и, следовательно, ее интеграл Римана по $[a,b]$ и несобственный интеграл по $[a,b)$ совпадают.

У к а з а н и е. Воспользоваться критерием интегрируемости.

Таким образом, понятие несобственного интеграла шире понятия интеграла Римана.

Пример 1. Несобственный интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

Теорема 1 (критерий Коши сходимости несобственного интеграла). *Пусть функция f интегрируема на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$. Тогда для сходимости несобственного интеграла* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, b_\varepsilon \in [a, b)\ :\ \left| \int_{b'}^{b''} f(x)\, dx \right| < \varepsilon\; \forall\, b',\ b'' \in [b_\varepsilon, b). \quad (3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сходимость несобственного интеграла (1) по определению равносильна существованию предела функции $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ при $x \to b - 0$, что равносильно выполнению условия Коши для F. Последнее же совпадает с (3).

Сходимость несобственного интеграла (1) равносильна сходимости несобственного интеграла $\int_{a^*}^b f(x)\, dx$ при каком-либо $a^* \in [a, b)$. Это сразу следует из критерия Коши, поскольку условия Коши для этих двух несобственных интегралов очевидным образом равносильны.

С помощью предельного перехода при $b' \to b-0$ на несобственные интегралы переносится ряд свойств определенного интеграла.

1° Пусть несобственный интеграл (1) сходится. Тогда

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{a^*} f(x)\, dx + \int_{a^*}^b f(x)\, dx \quad \forall\, a^* \in [a, b).$$

2° Пусть несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\, dx$, $\int_a^b g(x)\, dx$ сходятся. Тогда при λ, $\mu \in \mathbb{R}$ сходится и несобственный интеграл

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

3° (Интегрирование неравенств). Пусть интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ сходятся и $f \leqslant g$ на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

4° (Формула Ньютона–Лейбница). Пусть функция f непрерывна на $[a, b)$, Φ — первообразная для f на $[a, b)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b-0) - \Phi(a), \tag{4}$$

если хотя бы один из пределов, стоящих в левой и правой частях, существует и конечен.

5° (Интегрирование по частям). Пусть функции u, v: $[a, b) \to \mathbb{R}$ кусочно непрерывно дифференцируемы на каждом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$, то

$$\int_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v\,dx, \tag{5}$$

если оба стоящие справа предела существуют и конечны.

6° (Замена переменного). Пусть функция f непрерывна на $[a, b)$, функция φ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta)$, $\beta \leqslant +\infty$, причем $a = \varphi(a) \leqslant \varphi(t) < b = \lim\limits_{t\to\beta-0} \varphi(t)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi'(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

При этом интегралы в обеих частях этой формулы сходятся или расходятся одновременно.

Покажем лишь, как из сходимости интеграла, стоящего в правой части, вытекает сходимость интеграла, стоящего в левой части. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует

$$b_\varepsilon \in [\alpha, \beta) \ : \ \left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \right| < \varepsilon \quad \forall\, \beta', \beta'' \in (\beta_\varepsilon, b).$$

Положим $b_\varepsilon \coloneqq \varphi(\beta_\varepsilon)$. Тогда по теореме Коши о промежуточном значении

$$\forall\, b', b'' \in (b_\varepsilon, b) \quad \exists\, \beta', \beta'' \in (\beta_\varepsilon, b) \ : \ \varphi(\beta') = b',\ \varphi(\beta'') = b''.$$

Следовательно,

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x)\, dx \right| = \left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \right| < \varepsilon \quad \forall\, b', b'' \in (\beta_\varepsilon, b).$$

По критерию Коши $\int_a^b f(x)\, dx$ сходится.

Изучим теперь несобственные интегралы от неотрицательных функций.

Теорема 2. *Пусть $f \geqslant 0$ на $[a, b)$. Для сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\exists\, M \ : \ \int_a^{b'} f(x)\, dx \leqslant M \quad \forall\, b' \in [a, b).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интеграл $\int_a^{b'} f(x)\, dx$ как функция b' возрастает. Поэтому сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$ (т. е. существование конечного предела этой функции при $b' \to b - 0$) равносильна ограниченности интеграла $\int_a^{b'} f(x)\, dx$ как функции b'.

Теорема 3 (сравнения). *Пусть функции f, g интегрируемы на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$ и $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a, b)$. Тогда*

1° *сходимость $\int_a^b g(x)\, dx$ влечет сходимость $\int_a^b f(x)\, dx$;*

2°. *расходимость* $\int_a^b f(x)\,dx$ *влечет расходимость* $\int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. 1°. Пусть сходится $\int_a^b g(x)\,dx$. Тогда по теореме 2

$$\exists\, M\ :\ \int_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant \int_a^{b'} g(x)\,dx \leqslant M \quad \forall\, b' \in [a, b).$$

По теореме 2 $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится.

2°. Расходимость $\int_a^b g(x)\,dx$ легко доказывается от противного.

Следствие 1. *Пусть функции* f, g *интегрируемы на* $\forall\,[a, b'] \subset [a, b)$ *и* $f > 0$, $g > 0$ *на* $[a, b)$. *Пусть еще*

$$\exists \lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0, +\infty).$$

Тогда интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int_a^b g(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. В условиях теоремы $\exists\, a^* \in \in [a, b)$: $\frac{k}{2}\, g(x) \leqslant f(x) \leqslant 2kg(x)$ при $x \in [a^*, b)$. В силу свойства 2° несобственных интегралов и теоремы 3 сходимость интегралов

$$\int_{a^*}^b g(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{a^*}^b f(x)\,dx$$

одновременная. Теперь остается лишь учесть, что сходимость последних двух интегралов не зависит от выбора $a^* \in \in [a, b)$.

Упражнение 2. Обобщить теорему 3, заменив в ее условии $0 \leqslant f \leqslant g$ на $[a, b)$ на

$$f \geqslant 0, \quad g \geqslant 0, \quad f(x) = O(g(x)) \quad \text{при} \quad x \to b - 0.$$

Определение 2. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|\,dx$.

Теорема 4. *Абсолютно сходящийся интеграл сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что из сходимости интеграла $\int_a^b |f(x)|\,dx$ следует, что для него выполняется условие Коши (3). Но тогда условие (3) выполняется и для интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ в силу оценки

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \quad \text{при} \quad a \leqslant b' < b'' < b.$$

Применяя критерий Коши к интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$, убеждаемся, что он сходится.

Из последнего неравенства следует, что в условиях теоремы 4 $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

З а м е ч а н и е. Сходимость несобственного интеграла $\int_a^b |f(x)|\,dx$ не дает права написать символ $\int_a^b f(x)\,dx$, поскольку функция может не быть интегрируемой на некотором отрезке $[a, b']$, в то время как модуль ее интегрируем на этом отрезке. Пример такой функции был приведен в § 13.3 при доказательстве свойства 7° интегрируемых функций.

З а м е ч а н и е. Сходящийся интеграл может не являться абсолютно сходящимся, как, например, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, который будет исследован ниже.

Определение 3. Пусть $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a', b] \subset (a, b]$. Символ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *несобственным интегралом* (*Римана*) *с особенностью в* a (или с *особенностью на нижнем пределе*). При этом говорят, что несобственный интеграл

$\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, и пишут

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \lim_{a'\to a+0} \int_{a'}^b f(x)\,dx,$$

если этот предел существует, и что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится — в противном случае.

Пример 2. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geqslant 1$.

Определение 4. Пусть $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, интегрируема по Риману на любом отрезке $[a',b'] \subset (a,b)$. Символ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *несобственным интегралом* (*Римана*) *с особенностью в точках* a *и* b (или *с особенностями на верхнем и нижнем пределе*).

Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, если сходится каждый из интегралов

$$\int_a^c f(x)\,dx, \quad \int_c^b f(x)\,dx, \tag{6}$$

где c — какое-нибудь число интервала (a,b) $(a < c < b)$.

При этом полагают по определению, что

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{7}$$

Если же хотя бы один из интегралов (6) расходится, говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится.

Сходимость интегралов (6) не зависит от выбора $c \in (a,b)$ (это установлено для второго из них и аналогично может быть показано для первого). Правая часть (7) также не зависит от выбора c, что следует при $a < c < c^* < b$ из равенства для определенных интегралов:

$$\int_{a'}^c f(x)\,dx + \int_c^{b'} f(x)\,dx =$$
$$= \int_{a'}^c f(x)\,dx + \int_c^{c^*} f(x)\,dx + \int_{c^*}^{b'} f(x)\,dx = \int_{a'}^{c^*} f(x)\,dx + \int_{c^*}^{b'} f(x)\,dx.$$

З а м е ч а н и е. Равенство (7) можно записать в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \lim_{\substack{a'\to a+0\\ b'\to b-0}} \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx,$$

где стоящий справа предел является пределом функции двух переменных.

Дадим теперь определение несобственного интеграла с несколькими особенностями.

Определение 5. Пусть функция f определена на интервале (a,b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ с выколотыми точками $c_1, \ \ldots, c_{k-1}$, $a = c_0 < c_1 < \ \ldots < c_{k-1} < c_k = b$. Пусть f интегрируема по Риману на каждом отрезке из (a,b), не содержащем ни одной из точек c_i $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$. Символ $\int_a^b f(x)\,dx$ называется *несобственным интегралом с особенностями в точках* $c_0, c_1, \ \ldots, c_k$.

Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится и при этом

$$\int_a^b f(x)\,dx \coloneqq \sum_{i=1}^{k} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx,$$

если каждый из стоящих справа несобственных интегралов с особенностями в концах интервала (c_{i-1}, c_i) сходится. В противном случае говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится.

Мы изучали до сих пор свойства лишь несобственного интеграла (1). Эти свойства, как видно из определений 3, 4, 5, легко переносятся на несобственные интегралы с особенностью на нижнем пределе и на несобственные интегралы с несколькими особенностями.

Упражнение. Пусть $(a,b) \subset (-\infty,+\infty)$ и сходится несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ с несколькими особенностями.

Доказать, что при $x_0 \in (a,b)$ функция $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ равномерно непрерывна на (a,b).

Установим два признака сходимости несобственного интеграла от произведения двух функций:

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx. \tag{8}$$

Теорема 5 (признак Дирихле). *Пусть*

1°. *функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a,+\infty)$;*

2°. *функция g непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a,+\infty)$;*

3°. $g(x) \to 0$ *при* $x \to +\infty$.

Тогда интеграл (8) *сходится.*

Доказательство. Пусть F — первообразная для f. Интегрируя по частям произведение fg на отрезке $[a,b]$, имеем

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \\ = \int_a^b F'(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx. \tag{9}$$

Уменьшаемое в правой части стремится, очевидно, к пределу при $b \to +\infty$. Вычитаемое стремится к абсолютно сходящемуся интегралу. В самом деле, положив $M = \sup\limits_{[a,\infty)} |F| < +\infty$, имеем

$$\int_a^\infty |F(f)g'(x)|\,dx \leqslant M\int_a^\infty |g'(x)|\,dx = -M\left|\int_a^\infty g'(x)\,dx\right| = \\ = -M\left|g(x)\Big|_a^{+\infty}\right| = M|g(a)|.$$

Поэтому правая часть (9), а вместе с ней и левая стремятся к пределу при $b \to +\infty$. Это и означает, что интеграл (8) сходится.

Теорема 6 (признак Абеля). *Пусть*

1°. *функция f непрерывна на $[a,+\infty)$ и сходится интеграл $\int_a^\infty f(x)\,dx$;*

2° *функция g непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна на $[a, +\infty)$;*

Тогда интеграл (8) *сходится.*

Доказательство. Покажем, что признак Абеля вытекает из признака Дирихле.

Заметим сначала, что функция f имеет на $[a, b)$ первообразную $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, ограниченность которой следует из ее непрерывности и существования конечного предела $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \int_a^\infty f(t)\,dt$.

В силу монотонности и ограниченности функции g существует $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =: c$. Тогда функция $\tilde{g} := g - c$ непрерывно дифференцируема и монотонна на $[a, \infty)$ и $\tilde{g}(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Поэтому интеграл

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\tilde{g}(x)\,dx + \int_a^{+\infty} cf(x)\,dx$$

сходится как сумма двух сходящихся интегралов (первый из них — по признаку Дирихле, а второй — по условию теоремы).

Пример 3. Покажем, что интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится, но не абсолютно. Для доказательства его сходимости применим признак Дирихле, положив $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Тогда f имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а g непрерывно дифференцируема, монотонна и $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Следовательно, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится.

Установим, что он не сходится абсолютно. Для этого покажем, что функция

$$F(b') = \int_\pi^{b'} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

не является ограниченной. Имеем

$$F(k\pi) = \int_{\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{(j+1)\pi} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin x|\, dx = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{2}{(j+1)\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{k-1} \int_{j+1}^{j+2} \frac{1}{j+1}\, dx > \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{k-1} \int_{j+1}^{j+2} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{2}^{k+1} \frac{dx}{x} \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно, по теореме 2 интеграл $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\, dx$ расходится.

З а м е ч а н и е. При доказательстве признака Дирихле было применено интегрирование по частям. Этот прием в данном случае, как говорят, «улучшает сходимость интеграла». С его помощью в случае только что рассмотренного примера вместо интеграла $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ мы получили интеграл $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx$, у которого знаменатель быстро стремится к нулю. В общем же случае доказательства признака Дирихле вместо сходящегося интеграла получили абсолютно сходящийся.

§ 14.8. Приближение интегрируемых функций ступенчатыми и непрерывными

Определение 1. Функция $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ называется *ступенчатой* (*кусочно постоянной*) на $[a,b]$, если существует разбиение $\{a_i\}_0^k$, $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b$ такое, что f постоянна на каждом интервале (a_{i-1}, a_i).

Ступенчатые функции кусочно непрерывны и, следовательно, интегрируемы на $[a,b]$.

Теорема 1. *Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая ступенчатая на $[a,b]$ функция $h = h_\varepsilon$, что*

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\tau = \{x_i\}_0^{i_\tau}$ и $\sum\limits_{i=1}^{i_\tau} f(\xi_i)\Delta x_i$ — интегральная сумма Римана. Рассмотрим ступенчатую функцию

$$h(x) = \begin{cases} f(\xi_i) & \text{при } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \text{произвольна} & \text{при } x = x_i (i = 0, 1, \ldots, i_\tau). \end{cases}$$

Тогда

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx = \sum_{i=1}^{i_\tau} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(\xi_i)|\,dx_i \leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} w_i(f)\Delta x_i,$$

где $w_i(f)$ — колебание функции f на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

В силу критерия интегрируемости правая часть последнего неравенства меньше наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, если мелкость $|\tau|$ разбиения τ достаточно мала. Теорема доказана.

Левую часть неравенства (1) называют *приближением в среднем* функции f ступенчатой функцией h. Саму теорему 1 можно переформулировать так:

Интегрируемую на $[a,b]$ функцию можно с любой точностью приблизить в среднем на $[a,b]$ ступенчатой функцией.

Теорема 2. *Пусть функция f интегрируема на $[a,b]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная на $[a,b]$ функция φ, что*

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Пусть h — ступенчатая на $[a,b]$ функция, для которой выполняется (1). Построим непрерывную на $[a,b]$ кусочно линейную функцию φ, для которой

$$\int_a^b |h(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{2}$$

Это построение можно осуществить так. Ступенчатая функция h принимает постоянное значение на каждом из интервалов (x_{i-1}, x_i) разбиения τ: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i_\tau} = b$. Построим функции φ_i, непрерывные и кусочно линейные на $[a,b]$ следующим образом. Взяв $\eta \in \left(0, \frac{1}{2}|\tau|\right)$, положим

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} h(x) & \text{при } x_{i-1} + \eta < x < x_i - \eta, \\ 0 & \text{при } x \notin (x_{i-1}, x_i), \\ \text{линейна} & \text{на } [x_{i-1}, x_{i-1} + \eta] \text{ и на } [x_i - \eta, x_i]. \end{cases}$$

Пусть $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{i_\tau} \varphi_i$. Тогда, если $|\varphi| \leqslant M$, то

$$\int_a^b |h(x) - \varphi(x)|\,dx = \sum_{i-1}^{i_\tau} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |h(x) - \varphi_i(x)|\,dx =$$
$$= \sum_{i=1}^{i_\tau} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+\eta} |h(x) - \varphi_i(x)|\,dx + \int_{x_i-\eta}^{x_i} |h(x) - \varphi_i(x)|\,dx \right) \leqslant$$
$$\leqslant M 2\eta i_\tau < \varepsilon,$$

если $\eta > 0$ достаточно мало.

Теперь из (1) и (2) следует, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx + \int_a^b |h(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

и теорема доказана.

Теоремы 1, 2 обобщаются на случай функций f, интегрируемых в несобственном смысле.

Определение 2. Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Функция f называется *абсолютно интегрируемой* на интервале (a, b), если существует конечное число точек $\{c_i\}$, $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_k = b$ таких, что

1° функция f интегрируема по Риману на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, не содержащем точек c_i;

2° сходится несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|\, dx$, понимаемый как несобственный интеграл с особенностями в точках c_0, c_1, $\ldots$, c_k.

Заметим, что в силу теоремы 14.7.4 определение 2 останется эквивалентным, если условие 1° заменить условием сходимости интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$.

Определение 3. Функция $f\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ называется *финитной*, если она равна нулю вне некоторого отрезка.

Определение 4. Функция $h\colon (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ называется *финитной ступенчатой* функцией, если существует такой отрезок $[a, b]$, что h — ступенчатая функция на $[a, b]$ и $h = 0$ вне $[a, b]$.

Теорема 3. *Пусть f абсолютно интегрируема на (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная ступенчатая функция h такая, что*

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|\, dx < \varepsilon.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $(a, b) = (-\infty, +\infty)$. В самом деле, если это не так, то функцию f можно доопределить нулем вне интервала (a, b), после чего она станет абсолютно интегрируемой на $(-\infty, +\infty)$.

Пусть несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ имеет особенности в точках c_i, $-\infty = c_0 < c_1 < \ldots < c_{k-1} < c_k = +\infty$, и функция f интегрируема по Риману на каждом отрезке, не содержащем точек c_i. Из сходимости интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа A, B, η, $-\infty < A < c_1$, $c_{k-1} < B < +\infty$, $\eta > 0$, что

$$\int_{-\infty}^{A} |f|\,dx + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{c_i+\eta}^{c_i-\eta} |f|\,dx + \int_{B}^{+\infty} |f|\,dx < \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \in (-\infty, A) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} (c_i+\eta, c_i-\eta)\right) \cup \\ & \cup (B, +\infty), \\ f(x) & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Тогда f_ε интегрируема на $[A, B]$, равна 0 вне $[A, B]$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{3}$$

В силу теоремы 1 существует ступенчатая на $[A, B]$ функция h_ε такая, что

$$\int_{A}^{B} |f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon. \tag{4}$$

Будем считать h_ε продолженной нулем на $(-\infty, A)$ и $(B, +\infty)$. Тогда из (3), (4) получаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - h_\varepsilon(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} |f_\varepsilon(x) - h_\varepsilon(x)|\,dx < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть f абсолютно интегрируема на (a, b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ суще-*

ствует финитная непрерывная функция φ такая, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon. \tag{5}$$

Доказательство предоставляется читателю.

Теорема 4. *Каждая абсолютно интегрируемая на $(-\infty, +\infty)$ функция является непрерывной в среднем относительно сдвига, т. е. обладает свойством*

$$\lim_{\eta\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\eta) - f(x)|\, dx = 0.$$

Доказательство. Пусть f абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда существует финитная непрерывная функция φ, для которой при $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ выполняется (5). Пусть $\varphi = 0$ вне отрезка $[A, B]$. По теореме Кантора, она равномерно непрерывна на отрезке $[A - 1, B + 1]$, а значит, и на $(-\infty, +\infty)$. Следовательно, существует $\eta_\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что

$$|\varphi(x+\eta) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{B - A + 2} \quad \forall\, \eta \,:\, |\eta| \leqslant \eta_\varepsilon.$$

Отсюда и из (5) следует, что при $|\eta| \leqslant \eta_\varepsilon$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\eta) - f(x)|\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+\eta) - \varphi(x+\eta)|\, dx +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x+\eta) - \varphi(x)|\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Это означает, что f непрерывна в среднем относительно сдвига.

Упражнение 1. Доказать теорему 4, опираясь на возможность приближения функции f финитной ступенчатой функцией h и легко проверяемую непрерывность в среднем относительно сдвига функции h.

Глава 15
ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

§ 15.1. Сходимость числового ряда

Определение 1. Символ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{1}$$

где $a_k \in \mathbb{R}$, называется *числовым рядом*, a_k — его *членом*, а $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — n-й *частичной* (или *частной*) *суммой* этого *ряда*.

Ряд (1) называется *сходящимся* (к S), если последовательность $\{S_n\}_1^\infty$ его частичных сумм сходится (к S).

В этом случае число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называют *суммой ряда* и пишут

$$a_1 + a_2 + \ \dots = S \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

Таким образом, в этом случае под $a_1 + a_2 + \ \dots$ $(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k)$ понимают также число.

Если последовательность $\{S_n\}_1^\infty$ расходится, то ряд (1) называют *расходящимся*. Пишут также $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, если $S_n \to +\infty$, и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$, если $S_n \to -\infty$ при $n \to \infty$.

Из определения видно, что изучение сходимости и других свойств рядов сводится к изучению или переформулировке соответствующих свойств последовательностей.

Пример 1. Ряд

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ \dots$$

сходится.

Пример 2. Ряд

$$1-1+1-1+1-1+\ \ldots$$

расходится.

Теорема 1. *Необходимым условием сходимости ряда является стремление к нулю его общего члена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ряд (1) сходится и сумма его равна S. Тогда

$$S_n \to S, \quad S_{n-1} \to S \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Стремление к нулю общего члена ряда, являясь необходимым, не является достаточным условием сходимости ряда, что можно увидеть на следующем примере.

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (называемый *гармоническим рядом*) расходится. В самом деле,

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}\, n = 2 \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что противоречит сходимости ряда, в случае которой последовательности $\{S_n\}$ и $\{S_{2n}\}$ сходились бы к одному и тому же числу (сумме ряда), а их разность — к нулю.

Теорема 2 (критерий Коши). *Для сходимости ряда* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon, \quad \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = S_{n+p} - S_n,$$

то теорема 2 сразу следует из критерия Коши сходимости последовательностей.

Упражнение 1. Доказать теорему 1 с помощью критерия Коши.

Упражнение 2. Доказать с помощью критерия Коши расходимость гармонического ряда.

Определение 2. Числовой ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ \dots \quad \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right)$$

называется *остатком ряда* (1) *после n-го члена.*

Сходимость ряда (1) равносильна сходимости какого-либо из его остатков, что сразу следует из критерия Коши.

Теорема 3. *Пусть сходятся ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. *Тогда при* $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ *и сумма его равна*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о сразу следует из равенства для частичных сумм

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k$$

и предельного перехода в нем при $n \to \infty$.

§ 15.2. Числовые ряды с неотрицательными членами

Будем изучать числовые ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad a_k \geqslant 0. \tag{1}$$

Теорема 1. *Для сходимости ряда* (1) *необходима и достаточна ограниченность последовательности его частичных сумм.*

Доказательство. Заметим, что последовательность частичных сумм ряда (1) возрастает, так что ее ограниченность эквивалентна ее сходимости.

Теорема 2. *Пусть при некотором* k_0 $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ $\forall\, k \geqslant k_0$. *Тогда*

1° *сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *влечет сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$;

2° *расходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *влечет расходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство.

1° Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда последовательность его частичных сумм (как сходящаяся или по теореме 1) ограничена. Следовательно, последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена. По теореме 1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2°. Если бы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходился, то по доказанному в первой части теоремы сходился бы и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Следствие 1. *Пусть* $a_k > 0$, $b_k > 0$, $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L \in \in (0, \infty)$. *Тогда ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\exists\, k \in \mathbb{N} \,:\, \frac{1}{2}\, Lb_k \leqslant a_k \leqslant 2Lb_k \quad \forall\, k \geqslant k_0.$$

Тогда из теоремы 15.1.3 при $\lambda = 0$ и теоремы 2 следует, что ряды $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно. Остается учесть, что сходимость ряда равносильна сходимости какого-либо из его остатков.

Упражнение 1. Доказать, что если $a_k \geqslant 0$, $b_k \geqslant 0$, $a_k = O(b_k)$ при $k \to \infty$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема 3 (интегральный признак сходимости ряда). *Пусть* f *непрерывна и убывает к нулю на* $[1, + +\infty)$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ *и интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства

$$f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)\, dx \geqslant f(k+1)$$

получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_1^{n+1} f(x)\, dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k). \tag{2}$$

Поэтому (эквивалентная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$) ограниченность последовательности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ эквивалентна ограниченности последовательности интегралов $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$, которая эквивалентна (в силу неотрицательности f) ограниченности $\int_1^{b'} f(x)\,dx$ как функции b'. Последняя по теореме 14.7.2 эквивалентна сходимости интеграла $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Неравенства (2) имеют простой геометрический смысл. Интеграл в (2) равен площади криволинейной трапеции с основанием $[1, n+1]$, ограниченной сверху графиком функции f.

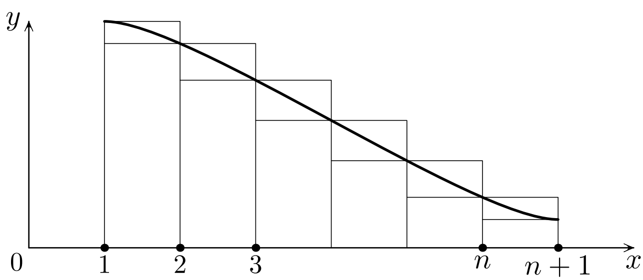


Рис. 15.1

Сумма в левой части (2) равна сумме площадей прямоугольников, покрывающих криволинейную трапецию, а сумма в правой части (2) — сумме площадей прямоугольников, содержащихся в этой криволинейной трапеции.

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ расходится при $\alpha \leqslant 0$, т. к. его общий член не стремится к нулю. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$, что в силу интегрального признака следует из сходимости интеграла $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ при $\alpha > 1$ и его расходимости при $0 < \alpha \leqslant 1$.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right)$ расходится при $\alpha \leqslant 0$, т. к. его общий член не стремится к нулю. Этот ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $0 < \alpha \leqslant 1$. В самом деле, его сходимость при $\alpha > 0$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ в силу следствия из теоремы 2, т. к. $\ln\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right) \sim \sim \frac{1}{k^\alpha}$ при $\alpha > 0$ и $k \to \infty$. Остается сослаться на пример 1.

Упражнение 2. Пусть числа $a_k > 0$ убывают ($a_k \geqslant a_{k+1}$) и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Доказать, что

$$a_k = o\left(\frac{1}{k}\right) \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{3}$$

У к а з а н и е. Воспользоваться оценкой снизу разности частичных сумм ряда:

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geqslant n a_{2n}.$$

Является ли условие (3) достаточным для сходимости ряда?

Пример 3. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \tag{4}$$

сходится при $0 < q < 1$ и расходится при $q \geqslant 1$.

В самом деле, при $0 < q < 1$ $q^k \leqslant \frac{1}{k^2}$ $\forall\, k \geqslant k_0$. Тогда в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ и теоремы 2 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится.

Если же $q \geqslant 1$, то ряд (4) расходится, т. к. его общий член не стремится к нулю.

Заметим, что сходимость ряда (4) можно изучить, записав его частичную сумму по формуле суммы геометрической прогрессии:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Теорема 4 (признак Даламбера). *Пусть* $a_k > 0$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1° *если существует число* $q < 1$ *такое, что при некотором* k_0

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q < 1 \quad \forall\, k \geqslant k_0,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2° *если при некотором* k_0

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1 \quad \forall\, k \geqslant k_0,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство. 1°. При $k \geqslant k_0$ из $a_{k+1} \leqslant q a_k$ следует, что

$$a_k \leqslant q^{k-k_0} a_{k_0} = c_0 q^k =: b_k.$$

Тогда сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует в силу признака сравнения (теорема 2) из сходимости ряда (4).

2°. Из $a_{k+1} \geqslant a_k > 0$ следует, что общий член ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не стремится к нулю. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Теорема 5 (признак Даламбера). *Пусть* $a_k > 0$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ *и существует*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q.$$

Тогда

1° *если* $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2° *если* $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*

3° *если* $q = 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *может быть как сходящимся, так и расходящимся.*

Доказательство. 1°. Пусть $\varepsilon > 0$, $q' \coloneqq q + \varepsilon < 1$. Тогда $a_{k+1} \leqslant q' a_k \ \forall\, k \geqslant k_\varepsilon$. По теореме 4 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2°. Пусть $q > 1$. Тогда $a_k \geqslant 1 \ \forall\, k \geqslant k_0$. По теореме 4 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

3°. Для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$, выполнено условие

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha} \to 1 \quad (k \to \infty).$$

Однако при $0 < \alpha \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ расходится, а при $\alpha > 1$ — сходится.

Пример 4. Для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k = \frac{k!}{k^k}$ имеем $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k}{(k+1)}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} \to e^{-1} < 1$ при $k \to \infty$. Следовательно ряд сходится.

Теорема 6 (признак Коши). *Пусть* $a_k \geqslant 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1° *если существует число* $q < 1$ *такое, что при некотором* $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1 \quad \forall\, k \geqslant k_0,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2° *если*

$$\forall\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, k \geqslant k_0 \,:\, \sqrt[k]{a_k} \geqslant 1,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, и даже его общий член не стремится к нулю.*

Доказательство. 1°. В силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ и оценки $a_k \leqslant q^k$ $(\forall\, k \geqslant k_0)$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку сравнения (теорема 2).

2°. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, т. к. его общий член не стремится к нулю.

Предельная форма признака Коши имеет вид

Теорема 7 (признак Коши). *Пусть* $a_k \geqslant 0\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ *и*

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Тогда

1° *если* $q < 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2° *если* $q > 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, и даже его общий член не стремится к нулю;*

3° *если* $q = 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *может быть как сходящимся, так и расходящимся.*

Следствие 2. *Утверждение теоремы 7 сохранится, если в ней условие* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$ *заменить на условие*

$$\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q.$$

Доказательство теоремы 7. 1°. Пусть $q < q_0 < 1$. Тогда $\exists\, k_0$: $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q_0 < 1\ \forall\, k \geqslant k_0$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по теореме 6.

2°. Из определения верхнего предела следует, что

$$\forall\, k_0 \ :\ \exists\, k \geqslant k_0 \ :\ \sqrt[k]{a_k} \geqslant 1.$$

По теореме 6 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

3°. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, хотя для каждого из них $\exists \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = 1$.

Пример 5. Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$, $a_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k^2}$, сходится по признаку Коши, т. к. $\sqrt[k]{a_k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \to e^{-1} < 1$ при $k \to \to \infty$.

Упражнение 3. Показать, что признак Коши сильнее признака Даламбера в том смысле, что если сходимость ряда можно установить с помощью признака Даламбера, то это можно сделать и с помощью признака Коши.

З а м е ч а н и е 1. Признаки Даламбера и Коши, как видно из их доказательств, основаны на сравнении сходимости рассматриваемого ряда со сходимостью геометрической прогрессии $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$. Этим, в частности, можно объяснить, что они непригодны для выяснения сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ при $\alpha > 0$.

Существует много других более тонких признаков, дающих достаточные условия сходимости числового ряда.

§ 15.3. Абсолютно сходящиеся ряды

Определение 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Теорема 1. *Абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. В силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ для него выполнено условие Коши. Поскольку

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n} |a_k| \quad \text{при} \quad m \leqslant n,$$

условие Коши выполняется также и для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. В силу критерия Коши (теорема 15.1.2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Заметим, что из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ не следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Это видно из примера ряда

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \ \ldots \tag{1}$$

Следующие две теоремы показывают, что абсолютно сходящиеся ряды обладают некоторыми свойствами сумм конечного числа слагаемых.

Определение 2. Пусть задан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и отображение $k \to n_k$, являющееся взаимно однозначным соответствием $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ называют *рядом с переставленными членами* (по отношению к ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$).

Теорема 2. *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^*$, полученный перестановкой членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, сходится абсолютно. При этом их суммы равны:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^*$, т. е. сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^*|$, следует из ограниченности последовательности частичных сумм последнего:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k^*| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Установим равенство (2).

Пусть $S \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $S_n^* \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^*$.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется, очевидно, такое $N = N(n) > n$, что все слагаемые суммы S_n^* содержатся в сумме S_N. Тогда при $m \geqslant N$

$$|S_m - S_n^*| \leqslant |a_{n+1}^*| + |a_{n+2}^*| + \ \ldots \eqqcolon \rho_n^*,$$

где ρ_n^* — остаток после n-го члена ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^*$.

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$|S - S_n^*| \leqslant \rho_n^* \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Но $\rho_n^* \to 0$ при $n \to 0$, как остаток сходящегося ряда. Следовательно, $S_n^* \to S$ при $n \to \infty$, что равносильно (2).

Теорема 3. *Пусть ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся абсолютно. Тогда ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{m_j}, \tag{3}$$

составленный из всевозможных (без повторений) попарных произведений членов исходных рядов, сходится абсолютно и сумма его

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} b_{k_j} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right). \tag{4}$$

Доказательство. Ряд (3) сходится абсолютно, поскольку последовательность частичных сумм ряда из абсолютных величин его членов ограничена:

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{k_j}||b_{k_j}| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|\right).$$

Установим равенство (4). Поскольку сумма ряда (3) не зависит от перестановки его членов, будем считать, что члены ряда (3) расположены в таком порядке, что

$$S_{n^2} \coloneqq \sum_{j=1}^{n^2} a_{k_j} b_{k_j} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что подпоследовательность $\{S_{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ частичных сумм ряда (3) сходится к $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\right)$. Но ряд (3) — сходящийся, поэтому последовательность его частичных сумм сходится к тому же числу, и (4) установлено.

§ 15.4. Сходящиеся знакопеременные ряды

Как было показано на примере ряда (15.3.1), сходящийся ряд не обязательно абсолютно сходится.

Установим некоторые признаки сходимости таких рядов.

Теорема 1 (признак Лейбница). *Пусть* $a_k \geqslant a_{k+1}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $a_k \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Тогда знакочередующийся ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots \tag{1}$$

сходится.

При этом остаток ряда $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_n$ *по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого* *из его членов:*

$$|r_n| \leqslant a_{n+1}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим подпоследовательность частичных сумм четного порядка $\{S_n\}_1^\infty$ частичных сумм ряда (1):

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n}) =$$
$$= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}.$$

Ясно, что S_{2n} возрастает и что $0 \leqslant S_{2n} \leqslant a_1$. Следовательно, последовательность $\{S_{2n}\}_1^\infty$ сходится:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} =: S \in [0, a_1]. \tag{3}$$

Подпоследовательность $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ последовательности $\{S_n\}_1^\infty$ также сходится и притом к тому же пределу S, поскольку $S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} \to S - 0 = S$ при $n \to \infty$. Из сходимости $\{S_{2n}\}_1^\infty$ и $\{S_{2n-1}\}_1^\infty$ к одному и тому же числу S следует, как нетрудно заметить, сходимость $S_n \to S$ при $n \to \infty$, т. е. сходимость ряда (1) к S.

Пусть теперь r_n — остаток ряда (1) после n-го члена:

$$(-1)^{n+1} r_n = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \ldots$$

Этот ряд также удовлетворяет условиям доказываемой теоремы. Оценивая его сумму в соответствии с (3), получаем (2).

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k^\alpha}$, $\alpha > 0$, сходится по признаку Лейбница.

Переходим к признакам сходимости рядов вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. Рассмотрим преобразование конечной суммы

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Пусть произвольное

$$B_0 \in \mathbb{R}, \quad B_k \coloneqq B_0 + \sum_{j=1}^{k} b_j \quad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{4}$$

Тогда $b_k = B_k - B_{k-1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1}.$$

Заменив в последней сумме k на $k+1$, получаем формулу

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n B_n - a_1 B_0 - \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k, \tag{5}$$

называемую *преобразованием Абеля* суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$. Она является аналогом формулы интегрирования по частям и чаще всего используется при $B_0 = 0$.

Теорема 2 (признак Дирихле). *Пусть числа a_k монотонно стремятся к нулю, а последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ ограничена.*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство. В обозначениях (4) при $B_0 = 0$ применим преобразование Абеля (5) к частичной сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. Изучим поведение правой части (5) при $n \to \infty$.

$a_n B_n \to 0$ при $n \to \infty$ в силу ограниченности последовательности $\{B_n\}$ и условия $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Сумма в правой части (5) стремится к конечному пределу, поскольку она является частичной суммой сходящегося (и притом абсолютно) ряда.

В самом деле, если $|B_k| \leqslant M \ \forall\, k \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(a_{k+1} - a_k)B_k| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} |a_{k+1} - a_k| =$$
$$= \pm M \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} - a_k) = \mp M a_1.$$

Следовательно, и левая часть (5) стремится к конечному пределу при $n \to \infty$, что и означает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.

Теорема 3 (признак Абеля). *Пусть последовательность чисел $\{a_k\}$ монотонна и ограничена, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$.*

Доказательство. Пусть $a_k \to a_0$ при $k \to \infty$. Тогда $\alpha_k \coloneqq a_k - a_0 \to 0$ при $k \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k + a_0 \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Первый из двух рядов справа сходится по признаку Дирихле, а второй — по условию. Следовательно, сходится и ряд, стоящий в левой части равенства.

Замечание 1. Признак Абеля можно сформулировать так: ряд, получаемый почленным умножением сходящегося ряда на члены монотонной ограниченной последовательности, сходится.

Пример 2. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Последовательность чисел $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ монотонно стремится к нулю. Покажем, что последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ ограничена.

Имеем при $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{n} 2\sin 2\sin\frac{x}{2} \sin kx =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right],$$

так что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\ .$$

Следовательно, сходимость ряда (6) следует из признака Дирихле при $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Если же $x = 2m\pi$, то ряд (6) сходится, т. к. все члены его равны нулю.

Аналогично ряду (6) исследуется сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

При $x \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, имеем $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$, и ряд (7) сходится по признаку Дирихле.

При $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, ряд (7) превращается в ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, сходимость которого зависит от α и исследована в примере 15.2.1.

Пример 3. Пусть $\{a_k\}$ — монотонная ограниченная последовательность.

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

сходится по признаку Абеля, в котором $b_k = \frac{\sin kx}{k^\alpha}$.

Мы видели (теорема 15.3.2), что если ряд сходится абсолютно, то после любой перестановки его членов, он останется абсолютно сходящимся и сумма его не изменится. Если же ряд сходится, но не абсолютно, то после перестановки членов он может превратиться в расходящийся ряд или в сходящийся ряд, но имеющий другую сумму. Это утверждение (теорема Римана) будет установлено после некоторой подготовки.

Пусть задан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Положим

$$a_k^+ := \begin{cases} a_k, & \text{если } a_k \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } a_k < 0, \end{cases} \qquad a_k^- := \begin{cases} 0, & \text{если } a_k \geqslant 0, \\ a_k, & \text{если } a_k < 0. \end{cases}$$

Таким образом, $a_k^+ \geqslant 0$, $a_k^- \leqslant 0$, $a_k = a_k^+ + a_k^-$.

Лемма 1. *Пусть ряд $\sum a_k$ сходится, но не абсолютно. Тогда каждый из рядов $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$ расходится.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть, например, ряд $\sum a_k^+$ сходится. Тогда сходится и ряд $\sum a_k^-$ (так как $a_k^- = a_k - a_k^+$). Но тогда каждый из них сходится абсолютно, откуда следует абсолютная сходимость ряда $\sum a_k$, что противоречит условию.

Теорема 4 (Римана). *Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, но не абсолютно. Тогда для любого $A \in \mathbb{R}$ можно так переставить его члены, что полученный ряд будет сходиться к A.*

Доказательство. Построим по ряду $\sum a_k$ ряды $\sum a_k^+$, $\sum a_k^-$. Исключим из ряда $\sum a_k^-$ равные нулю члены и полученный ряд обозначим через $\sum(-\beta_i)$. Исключим из ряда $\sum a_k^+$ те равные нулю члены, для которых $a_k < 0$, и полученный ряд обозначим через $\sum \alpha_i$. Таким образом, все числа $\alpha_i \geqslant 0$, все числа $\beta_i > 0$. Ряды $\sum \alpha_i$, $\sum(-\beta_i)$ расходятся.

Теперь каждый член ряда $\sum a_k$ является членом одного из рядов $\sum \alpha_i$, $\sum(-\beta_i)$, а каждый член любого из этих рядов является членом ряда $\sum a_k$. Поэтому любой ряд, составленный из всех членов рядов $\sum \alpha_i$, $\sum(-\beta_i)$, является некоторой перестановкой ряда $\sum a_k$.

Зафиксируем $A \in \mathbb{R}$ и построим ряд

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{m_1} - \beta_1 - \ldots - \beta_{n_1} + \alpha_{m_1+1} + \ldots \\ + \alpha_{m_2} - \beta_{n_1+1} - \ldots - \beta_{n_2} + \ldots, \qquad (8)$$

где m_i, $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots$, $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$ Ряд (8) строим по следующему правилу. На первом шаге переносим в него один за другим несколько первых членов ряда $\sum \alpha_i$, следя за возрастанием частичных сумм S_n ряда (8) и заканчивая тем членом α_{m_1}, при переносе которого в (8) частичная сумма S_{m_1} впервые станет большей, чем A $(S_{m_1} > A)$. Это осуществимо, поскольку ряд $\sum \alpha_i$ расходится, так что его частичные суммы не ограничены.

На втором шаге переносим в ряд (8) несколько первых членов ряда $\sum(-\beta_i)$, следя за убыванием частичных сумм S_n ряда (8) и заканчивая тем членом $-\beta_{n_1}$, при переносе которого частичная сумма $S_{m_1+n_1}$ впервые станет меньшей, чем A $(S_{m_1+n_1} < A)$.

На третьем шаге переносим в ряд (8) несколько первых из оставшихся в ряде $\sum \alpha_i$ членов, следя за возрастанием частичной суммы ряда (8) и заканчивая тем членом $-\alpha_{m_2}$, при переносе которого частичная сумма $S_{m_1+n_1+m_2}$ впервые станет большей, чем A $(S_{m_1+n_1+m_2} > A)$.

На четвертом шаге переносим в ряд (8) несколько первых из оставшихся членов ряда $\sum(-\beta_i)$, заканчивая тем членом $-\beta_{n_1}$, при переносе которого частичная сумма $S_{m_1+n_1+m_2+n_2}$ впервые станет меньшей, чем A $(S_{m_1+n_1+m_2+n_2} < A)$.

Продолжая так и далее, построим ряд (8), отличающийся от $\sum a_k$ лишь перестановкой членов.

По построению, уклонение частичной суммы ряда (8) от A, т. е. $|A - S_n|$, оценивается для номеров n второго шага построения через $\max\{\alpha_{m_1}, \beta_{n_1}\}$, номеров n третьего шага — через $\max\{\beta_{n_1}, \alpha_{m_2}\}$, четвертого шага — через $\max\{\alpha_{m_2}, \beta_{n_2}\}$ и т.д.

Поскольку $\alpha_i \to 0$, $\beta_i \to 0$ при $i \to \infty$, отсюда следует, что $S_n \to A$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Упражнение 1. Доказать, что в условиях теоремы Римана можно построить ряд (8), для которого частичные суммы:

a) $S_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$;

b) $S_n \to -\infty$ при $n \to -\infty$;

c) образуют ограниченную расходящуюся последовательность $\{S_n\}$.

§ 15.5. Последовательности и ряды с комплексными членами

Определение 1. Последовательность комплексных чисел $\{z_k\} = \{x_k + iy_k\}$ называется *сходящейся*, если существует комплексное число $z_0 = x_0 + y_0$ такое, что

$$\lim_{k\to\infty} |z_k - z_0| = 0.$$

Число $z_0 = x_0 + iy_0$ называют при этом *пределом последовательности* $\{z_k\}$ и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_k = z_0$ или $z_k \to z_0$ при $n \to \infty$.

Поскольку

$$|z_k - z_0| = \sqrt{(x_k - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

сходимость $z_k \to z_0$ равносильна сходимости каждой из двух последовательностей действительных чисел $x_k \to x_0$ и $y_k \to y_0$ при $k \to \infty$. Это свойство (или повторение выводов) дает возможность перенести на последовательности комплексных чисел все теоремы о последовательностях действительных чисел, которые не связаны с отношением порядка (этого понятия нет во множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел).

Определение 2. Символ

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} z_k, \quad z_k \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

называется *числовым рядом.*

На ряд (1) переносятся все понятия ряда действительных чисел (член ряда, частичная или частная сумма ряда, остаток ряда, сходимость и сумма ряда, абсолютная сходимость ряда).

Очевидно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$, $z_k = x_k + iy_k$, сходится (абсолютно сходится) тогда и только тогда, когда сходится (абсолютно сходится) каждый из рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$.

На ряды с комплексными членами переносятся все теоремы § 14.1 и § 14.3. Переносятся также и признаки сходимости Дирихле и Абеля для рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$, если числа a_k считать действительными.

Глава 16
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

§ 16.1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов

В этой главе будем изучать последовательности и ряды комплекснозначных функций, определенных на множестве точек евклидова d-мерного пространства точек $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим последовательность функций

$$\{f_n\}_1^\infty, \quad f_n : E \to \mathbb{C}, \quad E \subset \mathbb{R}^d. \tag{1}$$

Определение 1. Говорят, что последовательность (1) *сходится на множестве* E, если числовая последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ сходится при каждом фиксированном $x \in$ $\in E$.

При этом говорят также, что последовательность (1) сходится на E *поточечно.*

Определение 2. Говорят, что последовательность (1) *сходится на* E *равномерно к функции* $f\colon E \to \mathbb{C}$, если

$$\sup |f_n(x) - f(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad x \in E.$$

При этом пишут

$$f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f.$$

Говорят, что последовательность (1) *сходится на множестве* E *равномерно*, если

$$\exists\, f : E \to \mathbb{C} : f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Если последовательность (1) сходится на множестве E равномерно, то, очевидно, она сходится на E и поточечно, и притом к той же самой функции. Обратное неверно.

Пример 1. Пусть $f_n(x) = x^n$, $0 \leqslant x < 1$. Последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ сходится поточечно к нулю для $\forall\, x \in \in [0, 1)$. Однако она не сходится на $[0, 1)$ равномерно. В самом деле, предельной функцией может быть только $f(x) = = 0\ \forall\, x \in [0, 1)$. Но

$$\sup_{x\in[0,1)} |x^n - 0| = 1 \not\to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Та же последовательность сходится на отрезке $[0, q]$, $0 < < q < 1$, равномерно, т. к. $\sup\limits_{x\in[0,q]} |x^n - 0| = q^n \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 2. Пусть непрерывная функция $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0 \text{ и при } x \geqslant \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{при } x = \frac{1}{2n}, \\ \text{линейна} & \text{на } \left[0, \frac{1}{2n}\right] \text{ и на } \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

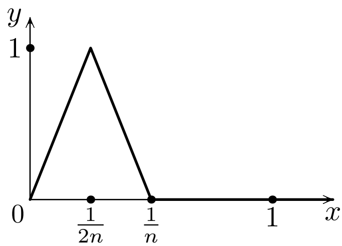


Рис. 16.1

Ясно, что $f_n(x) \to 0$ при $n \to \to \infty\ \forall\, x \in [0, 1]$, но

$$\sup_{x\in[0,1)} |f_n - 0| = 1 \not\to 0$$

при $n \to \infty$, так что последовательность $\{f_n\}$ не сходится на $[0, 1]$ равномерно.

Следующее определение эквивалентно определению 2.

Определение 2′. Говорят, что последовательность (1) сходится на E *равномерно* к функции $f\colon E \to \mathbb{C}$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, n = n(\varepsilon)\ :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \ \forall\, x \in E,\ \ \forall\, n \geqslant n(\varepsilon).$$

Подчеркнем, что в определении $2'$ $n = n(\varepsilon)$ не зависит от $x \in E$. Если же в этом определении заменить $n(\varepsilon)$ на $n(x, \varepsilon)$, т. е. считать $n(\varepsilon)$ зависящим еще и от x, то оно превращается в определение (поточечной) сходимости на множестве E.

З а м е ч а н и е 1. Понятие «равномерная сходимость» может быть пояснено как «в равной степени быстрая сходимость» для разных точек множества E. В случае равномерной сходимости существует миноранта «скоростей сходимости» во всех точках E — это $\varepsilon_n \coloneqq \sup\limits_E |f_n - f| \to 0$ $(n \to \infty)$.

Заметим еще, что равномерная сходимость $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ равносильна, очевидно, равномерной сходимости $f_n - f \rightrightarrows 0$.

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости последовательности). *Последовательность* $\{f_n\}$, $f_n\colon E \to \mathbb{C}$, *сходится на* E *равномерно тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon)\ :\ \sup_E |f_n - f_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$. Тогда

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon)\ :\ \sup_E |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad n \geqslant n_\varepsilon.$$

Отсюда следует, что n, $m \geqslant n_\varepsilon$,

$$\sup_E |f_n - f_m| \leqslant \sup_E |f_n - f| + \sup_E |f_m - f| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть выполнено условие Коши. Тогда при каждом фиксированном $x \in E$ выполнено условие

$$\forall\,\varepsilon > 0\, \exists\, n(\varepsilon)\ :\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\, \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon,\ \forall\, x \in E. \quad (2)$$

В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности $\{f_n(x)\}$ сходится для $\forall\, x \in E$. Обозначим предел числовой последовательности$\{f_n(x)\}$ через $f(x)$. Покажем, что $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$. Перейдем для этого в оценке (2) к пределу при $m \to \infty$. Получим, что

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon)\ :\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \quad \forall\, x \in E.$$

Переходя в последнем неравенстве к верхней грани по $x \in \in E$, видим, что $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$ по определению 2.

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k \,:\, E \to \mathbb{C}, \quad E \subset \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

Определение 3. Говорят, что ряд (3) *сходится на множестве* E, если числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in E, \tag{4}$$

сходится при каждом фиксированном $x \in E$.

При этом говорят также, что ряд (3) сходится на E *поточечно*.

Таким образом, поточечная сходимость ряда (3) на E совпадает с поточечной сходимостью на E последовательности $S_n \coloneqq \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ его частичных сумм.

Определение 4. Говорят, что ряд (3) сходится на E *равномерно*, если последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм сходится на E равномерно.

Следующее определение эквивалентно, очевидно, определению 4

Определение 4′. Говорят, что ряд (3) сходится на E *равномерно*, если он сходится на E и

$$\sup_E \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Пример 3. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k + x^2}$ равномерно сходится на множестве $E = (-\infty, +\infty)$.

Ряд сходится для $\forall\, x \in E$ по признаку Лейбница. По тому же признаку остаток ряда не превосходит

$$\left|\sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{n+1+x^2} \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Следовательно, по определению $4'$ ряд равномерно сходится на $(-\infty, +\infty)$.

Обратим внимание читателя на то, что этот ряд не сходится абсолютно ни при каком значении $x \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема 2 (необходимое условие равномерной сходимости ряда). *Пусть ряд* (3) *равномерно сходится на* E. *Тогда*

$$u_n \underset{E}{\rightrightarrows} 0.$$

Доказательство следует из того, что $u_n = S_n - S_{n-1}$, $S_n \underset{E}{\rightrightarrows} S$, $S_{n-1} \underset{E}{\rightrightarrows} S$.

Понятия сходимости ряда, сходимости ряда на множестве, равномерной сходимости ряда на множестве определяются в терминах соответствующих понятий для последовательностей частичных сумм ряда. Поэтому многие свойства функциональных рядов являются перефразировкой соответствующих свойств функциональных последовательностей и наоборот. Так, например, простым следствием теоремы 1 является

Теорема 3 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). *Ряд* (3) *сходится на* E *равномерно тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши:*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon)\ :\ \sup_E \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \quad \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Упражнение 1. Доказать, что если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ равномерно сходятся на E, то при λ, $\mu \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda u_k(x) + \mu v_k(x))$ равномерно сходится на E. Обобщить утверждение на случай, когда λ, μ — ограниченные на E функции.

Упражнение 2. Вывести теорему 2 из теоремы 3.

Упражнение 3. Определение $2'$ эквивалентно определению 2, но формулируется без привлечения понятия верхней грани. Сформулировать того же характера эквиваленты для условия Коши в теореме 1, 3 и для определения $4'$.

§ 16.2. Признаки равномерной сходимости рядов

Теорема 1 (признак сравнения). *Пусть функции u_k: $E \to \mathbb{C}$, v_k: $E \to [0, +\infty)$, $E \subset \mathbb{R}^d$, причем*

$$|u_k(x)| \leqslant v_k(x) \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится на E равномерно. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится на E абсолютно и равномерно.

Доказательство. Заметим, что при $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x).$$

Из равномерной сходимости ряда $\sum v_k$ следует в силу критерия Коши (теорема 16.1.3), что для

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon) \ : \ \sup_{x \in E} \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k(x) < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \quad \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Значит, для этих же $\varepsilon > 0$ и $n(\varepsilon)$

$$\sup_{x\in E}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sup_{x\in E}\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)| < \varepsilon \;\forall\, n \geqslant n(\varepsilon),\;\forall\, p \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, в силу того же критерия Коши ряды $\sum u_k$ и $\sum |u_k|$ равномерно сходятся на E.

Частным случаем доказанной теоремы является

Теорема 2 (признак Вейерштрасса). *Пусть* $u_k\colon E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}^d$, *причем*

$$|u_k(x)| \leqslant a_k \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится на* E *абсолютно и равномерно.*

Определение 1. Последовательность функций $\{f_n\}$, $f_n\colon E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}^d$, называется *равномерно ограниченной на* E, если

$$\exists\, M \;:\; |f_n(x)| \leqslant M \quad \forall\, x \in E, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Следующие два признака относятся к ряду вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) u_k(x), \tag{1}$$

где $a_k\colon E \to \mathbb{R}$, $u_k\colon E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}^d$.

Теорема 3 (признак Дирихле). *Пусть последовательность действительнозначных функций* $a_k(x)$ *при каждом* $x \in E$ *монотонна и* $a_k \rightrightarrows 0$. *Пусть частичные суммы ряда* $\sum u_k(x)$ *комплекснозначных функций* u_k *равномерно ограничены на* E.

Тогда ряд (1) *равномерно сходится на* E.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя преобразование Абеля (15.4.5), получаем

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x) = \\ = a_{n+p}(x)\sum_{k=1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x))\sum_{j=1}^{k} u_j(x). \quad (2)$$

В силу равномерной ограниченности частичных сумм ряда $\sum u_k(x)$ при некотором M

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leqslant M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Тогда, используя монотонность $a_k(x)$ (по k), имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x)\right| \leqslant M|a_{n+p}(x)| + M\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |a_{k+1}(x) - a_k(x)| = \\ = M|a_{n+p}(x)| + M\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1}(x) - a_k(x)) = \\ = 2M|a_{n+p}(x)| + M|a_{n+1}(x)|.$$

Из этого неравенства в силу $a_k \underset{E}{\rightrightarrows} 0$ получаем, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n(\varepsilon) \;:\; \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x)\right| < \varepsilon \\ \forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \quad \forall\, p \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Применяя критерий Коши (теорема 16.1.3), получаем, что ряд (1) сходится на E равномерно.

Теорема 4 (признак Абеля). *Пусть последовательность действительнозначных функций $a_k(x)$ равномерно ограничена на множестве $E \subset \mathbb{R}^d$ и при каждом $x \in E$ последовательность $a_k(x)$ монотонна. Пусть ряд $\sum u_k(x)$ равномерно сходится на E.*

Тогда ряд (1) *равномерно сходится на* E.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся равенством (2):

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x) = \\ = a_{n+p}(x)\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}(x)-a_k(x))\sum_{j=n+1}^{k} u_j(x).$$

По определению равномерной ограниченности функций $a_k(x)$ при некотором M

$$|a_k(x)| \leqslant M \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in E.$$

Из равномерной сходимости ряда $\sum u_k$ и критерия Коши (теорема 16.1.3) имеем

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) : \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon\ \forall\, n \geqslant n(\varepsilon), \forall\, p \in \mathbb{N}, \forall\, x \in E.$$

Отсюда и из (2), используя монотонность $a_k(x)$, получаем, что для любого $\varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon)$ такое, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)u_k(x)\right| \leqslant M\varepsilon + \varepsilon\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|a_{k+1}(x)-a_k(x)| = \\ = M\varepsilon + \varepsilon\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_{k+1}(x)-a_k(x))\right| = \\ = M\varepsilon + \varepsilon|a_{n+p}(x) - a_{n+1}(x)| \leqslant M\varepsilon + 2M\varepsilon = 3M\varepsilon.$$

В силу критерия Коши (теорема 16.1.3) отсюда следует равномерная сходимость ряда (1) на множестве E.

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^\alpha}$

1°. при $\alpha > 1$ равномерно сходится на отрезке $[0, 2\pi]$;
2°. при $0 < \alpha \leqslant 1$ на любом отрезке $[a, b] \subset (0, 2\pi)$ сходится равномерно;

3°. при $0 < \alpha \leqslant 1$ на любом отрезке $[0, \delta]$, $\delta > 0$ сходится, но не равномерно.

Покажем это. 1° При $\alpha > 1$ $\left|\frac{\sin kx}{k^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ сходится. По признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ равномерно сходится на $(-\infty, +\infty)$. 2° При $0 < \alpha \leqslant 1$ воспользуемся оценкой из примера 15.4.2:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|},$$

показывающей, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx$ равномерно ограничены на каждом отрезке $[a, b] \subset (0, 2\pi)$. Числа же $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ монотонно стремятся к нулю. По признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ на каждом отрезке $[a, b] \subset (0, 2\pi)$ сходится равномерно. 3° При $0 < \alpha \leqslant 1$ и любом $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx}{k^\alpha}\Big|_{x=\frac{1}{n}}\right| \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin 1}{k^\alpha} \geqslant \sin 1 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{\sin 1}{2} > 0.$$

Следовательно, на отрезке $[0, \delta]$, $\delta > 0$ не выполняется условие Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$. По критерию Коши (теорема 16.1.3) этот ряд не сходится равномерно.

§ 16.3. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Определение 1. Комплекснозначная функция $f\colon E \to \mathbb{C}$, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^d$, называется *не-*

прерывной в точке $x^{(0)} \in E$ *по множеству* E, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0\, :\, |f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon \\ \forall\, x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}), \tag{1}$$

и называется *непрерывной на* E, если она непрерывна в каждой точке множества E по множеству E.

Комплекснозначную функцию f можно представить в виде $f = g + ih$, где g, h — действительнозначные функции. Очевидно, что непрерывность функции f в точке $x^{(0)} \in E$ по множеству E (на E) равносильна непрерывности каждой из функций g, h в точке $x^{(0)}$ по множеству E (на E).

Теорема 1. *Пусть последовательность комплекснозначных функций* $\{f_n\}$, $f_n\colon\ E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}^d$ *равномерно сходится на* E *к функции* f, *т. е.* $f_n \underset{E}{\rightrightarrows} f$. *Если все функции* f_n *непрерывны в точке* $x^{(0)} \in E$ *по множеству* E, *то и предельная функция* f *непрерывна в точке* $x^{(0)}$ *по множеству* E.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, n(\varepsilon)\, :\, |f(x) - f_{n(\varepsilon)}(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in E. \tag{2}$$

Тогда при $x \in E$

$$|f(x) - f(x^{(0)})| \leqslant |f(x) - f_{n(\varepsilon)}(x)| + |f_{n(\varepsilon)}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x^{(0)})| + \\ + |f(x^{(0)}) - f_{n(\varepsilon)}(x^{(0)})| < 2\varepsilon + |f_{n(\varepsilon)}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x^{(0)})|.$$

В силу непрерывности функции $f_{n(\varepsilon)}$ в точке $x^{(0)}$ по множеству E

$$\exists\, \delta = \delta_\varepsilon > 0\, :\, |f_{n(\varepsilon)}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x^{(0)})| < \varepsilon \quad \forall\, x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}).$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что

$$|f(x) - f(x^{(0)})| < 3\varepsilon \quad \forall\, x \in E \cap U_\delta(x^{(0)}).$$

Следовательно, функция f непрерывна в точке $x^{(0)}$ по множеству E.

Теорема 1′. *Пусть функциональный ряд* $\sum u_k$, $u_k\colon E \to \mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{R}^d$, *равномерно сходится на* E. *Если все члены ряда* u_k *непрерывны в точке* $x^{(0)} \in E$ *по множеству* E, *то сумма ряда* $S = \sum u_k$ *непрерывна в точке* $x^{(0)}$ *по множеству* E.

Доказательство. Достаточно применить теорему 1 к функциям $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $f = S$.

В следующих теоремах функции будем считать действительнозначными, а множество $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Пусть функции* f_n *непрерывны на отрезке* $[a, b]$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ *при* $n \to \infty$.

Тогда

$$\int_a^x f_n(t)\,dt \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int_a^x f(t)\,dt \text{ при } n \to \infty. \tag{3}$$

Доказательство. Функция f по теореме 1 непрерывна на $[a, b]$ и, следовательно, интегрируема на $[a, b]$. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной сходимости $\{f_n\}$ к функции f

$$\exists\, n(\varepsilon) \;:\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in [a, b], \quad \forall\, n \geqslant n(\varepsilon).$$

Следовательно, для всех $n \geqslant n(\varepsilon)$

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} \left| \int_a^x f_n(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| \leqslant \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt < \varepsilon(b - a)),$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие 1. *В условиях теоремы*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a, b]. \tag{4}$$

В связи с этим равенством теорему 2 называют *теоремой о переходе к пределу под знаком интеграла.*

Упражнение 1. Доказать следующее обобщение теоремы 2:

Пусть функции f_n интегрируемы на отрезке $[a,b]$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$. Тогда функция f интегрируема на $[a,b]$ и выполняются соотношения (3), (4).

Теорема 2′. (о почленном интегрировании ряда). *Пусть функции u_k непрерывны на отрезке $[a,b]$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ равномерно сходится на $[a,b]$. Тогда и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\,dt$$

равномерно сходится на $[a,b]$ и

$$\int_a^x \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x u_k(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a,b].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и применим теорему 2 и следствие 1 из нее.

Теорема 3. *Пусть последовательность $\{f_n\}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций сходится в точке $c \in [a,b]$, а последовательность производных $\{f_n'\}$ равномерно сходится на $[a,b]$ к некоторой функции φ.*

Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a,b]$ к некоторой непрерывно дифференцируемой на $[a,b]$ функции f и $f' = \varphi$, так что $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$ на $[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 1 функция φ непрерывна на $[a,b]$. В силу теоремы 2 и формулы Ньютона–Лейбница получаем, что

$$f_n(x) - f_n(c) = \int_c^x f_n'(t)\,dt \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \int_a^x \varphi(t)\,dt.$$

Числовую сходящуюся последовательность $\{f_n(c)\}$ можно считать, очевидно, функциональной последовательностью, равномерно сходящейся на $[a, b]$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a, b]$ (см. упражнение 16.1.1) к некоторой функции f.

Переходя в левой части последней формулы к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$f(x) - f(c) = \int_a^x \varphi(t)\,dt \quad \forall\, x \in [a, b].$$

Правая часть этого равенства (как интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции) является дифференцируемой функцией. Следовательно, таковой является и левая часть, а значит, и функция f. Дифференцируя равенство почленно, получаем, что $f'(x) = \varphi(x)$ $\forall\, x \in [a, b]$.

Теорема доказана.

Теорема 3$'$. (о почленном дифференцировании ряда). *Пусть ряд $\sum u_k$ непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций сходится в точке $c \in [a, b]$, а ряд $\sum u_k'$ равномерно сходится на $[a, b]$.*

Тогда ряд $\sum u_k$ равномерно сходится на $[a, b]$, сумма его непрерывно дифференцируема на $[a, b]$ и

$$\Big(\sum u_k\Big)' = \sum u_k' \quad \text{на} \quad [a, b].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $f_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ и применим теорему 3.

Глава 17
СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

В этой главе будем рассматривать функции $f(z) = f(x+iy)$ комплексного переменного $z = x+iy$. На этот случай переносятся понятия непрерывности функции в точке и на множестве, сходимости в точке и равномерной сходимости на множестве функциональной последовательности и функционального ряда.

Следует лишь в определениях 16.3.1, 16.1.1, 16.1.2 заменить $E \subset \mathbb{R}^d$ на $E \subset \mathbb{C}$, x, $x^{(0)} \in E$ — на z, $z_0 \in E$. При этом сохраняются, очевидно, все теоремы § 15.1 и § 15.2 и теоремы 16.3.1, 16.3.1$'$.

§ 17.1. Свойства степенных рядов

Определение 1. Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{1}$$

где a_n и z_0 — комплексные числа, а z — комплексное переменное, называется *степенным рядом.*

Определение 2. *Радиусом сходимости степенного ряда* (1) называется число или $+\infty$:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}, \quad 0 \leqslant R \leqslant +\infty, \tag{2}$$

кругом сходимости ряда (1) называется круг

$$\{z \,:\, |z-z_0| < R\}. \tag{3}$$

Круг сходимости является открытым множеством. При $R = +\infty$ он совпадает со всей комплексной плоскостью.

Формула (2) называется *формулой Коши–Адамара.*

Вопросы сходимости рядов (1) достаточно изучить в случае $z_0 = 0$, т. е. для рядов вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{4}$$

Напомним признак Коши сходимости числового ряда с неотрицательными членами.

Признак Коши. Пусть $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ — ряд с неотрицательными членами, $l = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$. Тогда

1° при $l < 1$ ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ сходится;

2° при $l > 1$ ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} b_n$ расходится и даже его общий член не стремится к нулю.

Применим признак Коши к изучению абсолютной сходимости ряда (4). Имеем

$$l = \varlimsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \varlimsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R},$$

где R — радиус сходимости ряда (4). Сравнивая $l = \dfrac{|z|}{R}$ с единицей, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть R — радиус сходимости ряда* (4). *Тогда*

1. *при $|z| < R$ ряд* (4) *сходится и даже абсолютно;*
2. *при $|z| > R$ ряд* (4) *расходится и даже его общий член $a_n z^n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.*

З а м е ч а н и е 1. При $|z| = R$, т. е. на границе круга сходимости, ряд (4) может как сходиться, так и расходиться.

З а м е ч а н и е 2. Теорема 1 дает возможность находить радиус сходимости степенного ряда, не прибегая к формуле (2).

Примеры:

1. Ряд $\sum\limits_1^\infty \frac{z^n}{n}$ с радиусом сходимости $R = 1$ расходится в точке $z = 1$ и сходится во всех остальных точках окружности $|z| = 1$. Его сходимость вытекает из сходимости рядов (15.4.6), (15.4.7), а в точке $z = -1$ устанавливается с помощью признака Лейбница (15.4.1).
2. Ряд $\sum\limits_1^\infty \frac{z^n}{n^2}$, $R = 1$, сходится в каждой точке границы круга сходимости.
3. Ряд $\sum\limits_1^\infty z^n$, $R = 1$, расходится в каждой точке границы круга сходимости.

Теорема 2 (о равномерной сходимости степенного ряда). *Пусть R — радиус сходимости степенного ряда* (4), $0 < r < R$. *Тогда в замкнутом круге* $\{z\colon |z| \leqslant r\}$ *ряд* (4) *сходится равномерно.*

Доказательство. При $|z| \leqslant r$ $|a_n z^n| \leqslant |a_n| r^n$. Но числовой ряд $\sum\limits_0^\infty |a_n| r^n$ сходится в силу теоремы 1. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряд (4) сходится равномерно на $\{z\colon |z| \leqslant r\}$.

Замечание 3. Степенной ряд на круге сходимости может сходиться равномерно (пример 2) или не сходиться равномерно (пример 1).

Теорема 3. *Сумма степенного ряда непрерывна в круге сходимости.*

Доказательство следует из теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда с непрерывными членами, примененной к ряду (4) на множестве $\{z\colon |z| \leqslant r\}$, где $0 < r < R$, причем r может быть взято сколь угодно близким к R.

Теорема 4 (Абеля). *Пусть* z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1| < |z_2|$. *Тогда*

1° *если ряд* (4) *сходится в точке* z_2 (*или если общий член его в точке* z_2 *стремится к нулю*), *то он сходится абсолютно в точке* z_1;

2° *если ряд* (4) *расходится в точке* z_1, *то он расходится в точке* z_2 *и общий член его в точке* z_2 *не стремится к нулю*;

3° *если ряд* (4) *сходится в точке* z_2 (*или общий член его в точке* z_2 *стремится к нулю*), *то он равномерно сходится на замкнутом круге* $\{z\colon |z| \leqslant r\}$ *при любом* r, $0 < r < |z_2|$.

Доказательство. Пусть R — радиус сходимости ряда (4).

1° В силу теоремы 1 $|z_2| \leqslant R$. Тогда $|z_1| < R$, и утверждение следует из теоремы 1.

2° В силу теоремы 1 $|z_1| \geqslant R$. Тогда $|z_2| > R$, и утверждение следует из теоремы 1.

3° В силу теоремы 1 $0 < r < |z_2| \leqslant R$, и утверждение следует из теоремы 2.

§ 17.2. Аналитические функции

Определение 1. Говорят, что на данном множестве функция представима рядом, если на этом множестве она равна сумме этого ряда.

Определение 2.

1° *Аналитической в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$ *функцией* называется функция f, которая при некотором $\rho > 0$ представима рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \rho. \tag{1}$$

Множество всех таких функций обозначим через $A(z_0)$.

2°. *Аналитической в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ функцией вещественного аргумента* называется функция f, которая при некотором $\rho > 0$ представима рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |x - x_0| < \rho. \quad (2)$$

Множество всех таких функций обозначим через $A(x_0)$.

3°. *Вещественной аналитической в точке x_0 функцией* называется функция f, которая при некотором $\rho > 0$ представима рядом (2) с вещественными коэффициентами a_k, $\forall\, k \in \mathbb{N}_0$. Множество всех таких функций обозначим через $RA(x_0)$. (R — от англ. слова «Real»).

Определение 3. *Радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ из (2) определяется формулой (17.1.2). *Интервалом сходимости* этого ряда называется интервал $(x_0 - R, x_0 + R)$.

В качестве следствия из теорем 17.1.1, 17.1.2 получаем, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ сходится абсолютно на интервале сходимости и расходится (и даже общий член его не стремится к нулю) вне замыкания интервала сходимости. Этот ряд сходится равномерно на любом отрезке из интервала сходимости.

Лемма 1 (о сохранении радиуса сходимости при почленном дифференцировании). *Радиусы сходимости рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(x - x_0)^{k-1}$ совпадают.*

Доказательство. Пусть радиусы сходимости указанных рядов соответственно R и R'. Очевидно, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(x - x_0)^k$ сходится там же, где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k(x - x_0)^{k-1}$, и, следовательно, имеет тот же радиус сходимости R'. В силу (17.1.2)

$$R' = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|ka_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = R.$$

Теорема 1 (единственности для $A(x_0)$). *Пусть* $f \in$ $\in A(x_0)$*. Тогда ее представление* (2) *единственно. Более того,*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Доказательство. В силу леммы 1 и теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда производную $f^{(k)}(x_0)$ можно найти с помощью почленного дифференцирования ряда (2), что дает равенство

$$f^{(k)}(x_0) = k!a_k.$$

Ряд (2) с коэффициентами из (3) называется *рядом Тейлора* функции f. Теорема 1 устанавливает, что если функция $f \in A(x_0)$ представима степенным рядом (2) (разложена в степенной ряд), то этот ряд с необходимостью является ее рядом Тейлора.

Замечание 1. Возможность почленного дифференцирования функционального ряда была установлена для рядов, члены которых являются вещественными функциями. При доказательстве теоремы 1 перед почленным дифференцированием ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ с комплексными коэффициентами $a_k = b_k + ic_k$ (где b_k, c_k — вещественны) следует представить в виде суммы рядов:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_0)^k + i\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-x_0)^k. \tag{4}$$

Из определения 17.1.2 следует, очевидно, что радиус сходимости каждого из рядов в правой части (4) не меньше радиуса сходимости ряда в левой части (4).

Теорема 2 (единственности для $A(z_0)$). *Пусть* $f \in A(z_0)$. *Тогда ее представление* (1) *единственно.*

Доказательство. Теорема 2 является следствием теоремы 1. Покажем, что коэффициенты разложения (1) однозначно определяются функцией f.

Пусть для f имеется представление (1), в котором $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$. Рассмотрим (1) при $y = y_0$. Тогда

$$\varphi(x) \coloneqq f(x + iy_0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad |x - x_0| < \rho. \tag{5}$$

В силу теоремы 1 коэффициенты a_k однозначно определяются функцией φ: $a_k = \frac{\varphi^{(k)}(x_0)}{k!}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует утверждение теоремы 2.

Теорема 3 (о почленном дифференцировании и интегрировании). *Пусть* $R > 0$ *— радиус сходимости ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \eqqcolon f(x), \tag{6}$$

a_k *— вещественные числа.*

Тогда при $|x - x_0| < R$

1°. f *имеет производные всех порядков, которые находятся почленным дифференцированием;*

2°. $\forall\, x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k + 1},$$

т. е. внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать;

3°. *степенные ряды, полученные почленным дифференцированием или почленным интегрированием, имеют тот же радиус сходимости* R.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение 3° содержится в лемме 1. Утверждения 1° и 2° в силу утверждения 3° и равномерной сходимости ряда (6) на любом отрезке из интервала сходимости (следствие из теоремы 17.1.2) следуют из соответствующих свойств общих функциональных рядов.

§ 17.3. Разложение функций в ряд Тейлора

Если функция $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и имеет в точке x_0 производные всех порядков (т. е. является бесконечно дифференцируемой в точке x_0), то степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \tag{1}$$

называется *рядом Тейлора функции f в точке x_0.*

Будем изучать вопрос о представимости функции $f\colon U(x_0) \to \mathbb{R}$ в некоторой окрестности точки x_0 степенным рядом $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$. Из теоремы 17.2.1 следует, что этот вопрос равносилен вопросу о представимости функции f в некоторой окрестности точки x_0 ее рядом Тейлора (1).

Бесконечная дифференцируемость функции f в точке x_0 необходима для того, чтобы выписать ряд Тейлора (1), но не является достаточным условием ее представимости этим рядом ни в какой окрестности точки x_0. Это можно подтвердить примером функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

При $x \neq 0$ функция φ имеет производные всех порядков. Нетрудно убедиться, что каждая из них имеет вид

$P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, где P — соответствующий многочлен, так что при любом $n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$f^{(n)}(x_0) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Покажем это сначала для $n = 1$. С помощью формулы конечных приращений Лагранжа получаем, что

$$\frac{f(x) - x(0)}{x} = f(\theta x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

так что $f'(0) = 0$. Применяя математическую индукцию и формулу конечных приращений Лагранжа, получаем (2).

Итак, функция φ бесконечно дифференцируема в точке $x_0 = 0$. Все коэффициенты ее ряда Тейлора в точке 0, а значит, и сумма, равны нулю. Следовательно, $\varphi(x)$ совпадает с суммой своего ряда Тейлора только при $x = 0$.

Пусть $\exists\, f^{(n)}(x_0)$ при $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Запишем разложение f по формуле Тейлора:

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x), \tag{3}$$

где $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ — многочлен Тейлора, $r_n(x)$ — остаточный член формулы Тейлора. Заметим, что $S_n(x)$ является также частичной суммой ряда Тейлора функции f. Поэтому для фиксированного x эквивалентны соотношения

$$\left[f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n\right] \iff$$

$$\Leftrightarrow [S_n(x) \to f(x) \text{ при } n \to \infty] \Leftrightarrow [r_n(x) \to 0 \text{ при } n \to \infty].$$

Таким образом, для доказательства возможности разложения функции f в степенной ряд (т. е. в ряд Тейлора) в данной точке x достаточно показать, что $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Нам понадобятся для этого различные формы остаточного члена формулы Тейлора.

Теорема 1. *Пусть производная $f^{(n+1)}$ функции f непрерывна на отрезке с концами в x_0 и x. Тогда остаточный член формулы Тейлора* (3) *можно представить в интегральной форме:*

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{4}$$

в форме Лагранжа:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1, \tag{5}$$

и в форме Коши:

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}\,(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть, для определенности, $x > x_0$. Установим сначала (4), т. е. равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{7}$$

Применим метод математической индукции. При $n = 0$ формула (7) верна, т. к. совпадает с формулой Ньютона–Лейбница:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

Предположим, что формула (7) верна при $n-1$ вместо n, т. е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt. \tag{8}$$

Преобразуем интеграл в ее правой части с помощью интегрирования по частям:

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt =$$
$$= \left(-\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(t)(x-t)^n\right)\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x^{(0)})(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Подставляя это выражение в (8), приходим к (7).

Для доказательства (5) применим к интегралу (4) интегральную теорему о среднем (теорема 14.3.2), заметив, что множитель $(x-t)^n$ подынтегрального выражения не меняет знака. Тогда

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n dt =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}.$$

Для доказательства (6) иначе применим к интегралу (4) ту же интегральную теорему о среднем, вынося из-под знака интеграла «среднее значение» всей подынтегральной функции. Тогда

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}\,[x-(x_0+\theta(x-x_0))]^n(x-x_0),$$

что совпадает с (6).

З а м е ч а н и е 1. Формула (5) уже была доказана раньше другим способом (теорема 6.2.3), причем при более общих предположениях относительно функции f. Достаточно было считать, что $f^{(n)}$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$), а $f^{(n+1)}$ существует на интервале (x_0, x) (или (x, x_0)).

Перейдем к выводу разложений основных элементарных функций в ряд Тейлора (1), считая $x_0 = 0$. Иначе говоря, для каждой рассматриваемой ниже функции f выясним, на каком множестве $E \subset \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k.$$

Пример 1. $f(x) = e^x$. Покажем, что

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ \ldots \quad \forall\, x \in (-\infty, +\infty). \tag{9}$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\, x^{n+1},$$

так что для каждого фиксированного $x \in (-\infty, +\infty)$

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\, e^{|x|}|x|^{n+1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует (9). Из (9) вытекает в силу теоремы 17.1.1, что радиус сходимости степенного ряда (9) $R = +\infty$.

Пример 2. $f(x) = \sin x$. Покажем, что

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ \ldots \qquad \forall\, x \in (-\infty, +\infty). \tag{10}$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n(x) = \pm \frac{1}{2(n+1)!} \left\{ \begin{matrix} \sin\theta x \\ \cos\theta x \end{matrix} \right\},$$

так что для каждого фиксированного $x \in (-\infty, +\infty)$

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует (10). Из (10) вытекает, в силу теоремы 17.1.1, что радиус сходимости степенного ряда (10) $R = +\infty$.

Пример 3. $f(x) = \cos x$. Справедливость разложения

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ \ldots \qquad (11)$$
$$\forall\, x \in (-\infty, +\infty)$$

показывается так же, как это сделано для (10). Из (11) вытекает, что радиус сходимости степенного ряда (11) $R = +\infty$.

Пример 4. $f(x) = \ln(1+x)$. Тогда

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}, \qquad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Покажем, что

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \forall\, x \in (-1, +1]. \qquad (12)$$

Пусть сначала $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда остаточный член в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \ |r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, $r_n \underset{[0,1]}{\rightrightarrows} 0$.

Пусть теперь $-1 < x < 0$. Остаточный член в форме Коши имеет вид

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Заметив, что

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1+\theta|x|} < 1,$$

имеем

$$|r_n(x)| \leqslant \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \frac{1}{1+\theta x} |x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Этим установлено (12). В точке $x = -1$ функция $\ln(1 + x)$ не определена, а ряд (12) расходится. Из сходимости ряда (12) при $\forall\, x \in (-1, +1]$ и расходимости в точке $x = -1$ следует, что его радиус сходимости $R = 1$.

Из равномерной сходимости ряда (12) на $[0, 1]$ и его равномерной сходимости на любом отрезке $[-1+\delta, 1-\delta]$, $\delta > 0$, по теореме 17.1.2 получаем, что ряд (12) сходится равномерно на любом отрезке $[a, 1] \subset (-1, 1]$.

Пример 5. $f(x) = (1 + x)^\alpha$ при $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ (так что f не является многочленом).

Производная $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \text{при} \quad |x| < 1. \tag{13}$$

Заметим, что радиус сходимости ряда (13) $R = 1$, что легко установить, применяя признак Даламбера для выяснения абсолютной сходимости этого ряда. Так что равенство (13) окажется справедливым на всем интервале сходимости ряда. При $x = 0$ (13) очевидно. Пусть $0 < |x| < 1$.

Остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме имеет вид

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt =$$
$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}dt.$$

Отсюда

$$\frac{|r_{n+1}(x)|}{|r_n(x)|} = \frac{|\alpha-n-1|}{n+1}\,\frac{\left|\int_0^x |x-t|^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,\frac{|x-t|}{1+t}\,dt\right|}{\left|\int_0^x |x-t|^n(1+t)^{\alpha-n-1}dt\right|}.$$

Заметим, что

$$\frac{|x-t|}{1+t} \leqslant \frac{|x|-|t|}{1-|t|} = |x|\,\frac{1-\frac{|t|}{|x|}}{1-|t|} \leqslant |x|.$$

Следовательно, при фиксированном x и достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\frac{|r_{n+1}(x)|}{|r_n(x)|} \leqslant \frac{|n+1-\alpha|}{n+1}\,|x| \leqslant (1+\varepsilon)|x| = q < 1$$

при $\forall\, n \geqslant n_\varepsilon$.

Это означает, что $|r_n(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$ не медленнее, чем член убывающей геометрической прогрессии. Таким образом, (13) установлено.

Отметим важные частные случаи ($\alpha = -1$) формулы (13):

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k \quad (|x|<1).$$

Пример 6.

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x &= \frac{e^x + r^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\,,\\
\operatorname{sh} x &= \frac{e^x - r^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \quad x \in (-\infty, +\infty).
\end{aligned} \tag{14}$$

Эти два разложения получены не вычислением коэффициентов ряда Тейлора, а сложением двух сходящихся степенных рядов. Ряды в правых частях равенств являются рядами Тейлора соответственно для $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ в силу теоремы 17.2.1 (единственности).

Подобные приемы получения разложения функций в степенные ряды, основанные на использовании известных разложений (9)–17.3.14, широко распространены. Среди этих приемов отметим, в частности, почленное интегрирование и дифференцирование ряда. Так, например, из формулы суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ \ldots, \qquad q|x| < 1,$$

с помощью почленного интегрирования получаем при $|x| < < 1$ формулу (12):

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ \ldots$$

Разложение в степенной ряд функции $\arcsin x$ можно получить почленным интегрированием разложения $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, даваемого формулой (13) с заменой x на $-x^2$.

§ 17.4. Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ комплексного переменного

Определение 1. Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ \ldots \tag{1}$$

$$\sin z \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ \ldots \tag{2}$$

$$\cos z \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, z^{2k} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ \ldots \tag{3}$$

Равенствами (1), (2), (3) функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ определены на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, поскольку ряды сходятся, причем абсолютно для $\forall\, z \in \mathbb{C}$. В этом проще всего можно убедиться с помощью признака Даламбера. Следовательно, радиус сходимости $R = +\infty$ для каждого из рядов (1), (2), (3) (это вытекает также из сходимости на $(-\infty, +\infty)$ рядов (1), (2), (3) при $z = x + i0$, см. формулы (17.3.9), (17.3.10), (17.3.11)).

Функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ при $z = x$ совпадают соответственно с e^x, $\sin x$, $\cos x$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Установим некоторые свойства введенных функций. Покажем, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \quad \forall\, z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}. \tag{4}$$

Поскольку абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно (теорема 15.3.3), а сумма полученного в результате перемножения абсолютно сходящегося ряда не зависит от перестановки его членов (теорема 15.3.2), получаем, что

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^{n-k}}{(n-k)!}\ \frac{z_2^k}{k!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}\ z_1^{n-k} z_2^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1 + z_2}.$$

Из сравнения сумм рядов очевидно, что

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Формулы (5), (6) называются *формулами Эйлера.*

Из (4), (5) при $z = 0 + iy$ видно, что функции $\sin z$, $\cos z$ не являются ограниченными функциями в комплексной плоскости.

Из (6) и (4) легко получаются следующие обобщения известных тригонометрических формул:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C},$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}.$$

Из (4), (5) следует, что при $z = x + iy$

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{7}$$

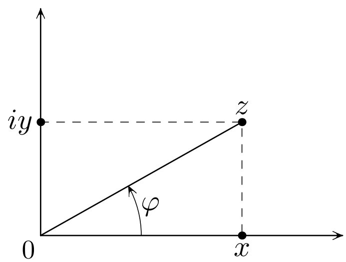


Рис. 17.1

В частности, при $x = 0$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \tag{8}$$

Отсюда, в частности, видно, что функция e^z — периодическая с периодом $2\pi i$.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \tag{9}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

— модуль z, а под φ при $z \neq 0$ можно понимать отсчитываемый против часовой стрелки угол между положительным направлением оси Ox и радиусом-вектором точки z комплексной плоскости. При этом для $\varphi \in [0, 2\pi)$ вводится обозначение $\varphi \coloneqq \arg z$. В силу 2π-периодичности функций $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ в равенстве (9) в качестве φ можно взять $\varphi = \operatorname{Arg} z$, где

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$$

при произвольном фиксированном $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots$

Формула (9) верна и при $z = 0$ при произвольном значении φ.

Формулу (9) называют *тригонометрической формой* комплексного числа z. С помощью (8) из нее можно получить показательную форму комплексного числа z:

$$z = re^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z. \tag{10}$$

Показательная и тригонометрическая формы комплексного числа удобны для нахождения произведения и частного двух комплексных чисел, возведения в степень комплексного числа и извлечения корня.

Пусть $z_j = r_j e^{i\varphi_j} = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j)$, $j = 1, 2$. Тогда из (4), (8) следует, что

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)), \quad z_2 \neq 0.$$

При $z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{11}$$

Получим, наконец, формулу для извлечения корня степени $n \geqslant 2$ из комплексного числа z. Под $\sqrt[n]{z}$ понимают такое комплексное число w, что $w^n = z$. Если

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$w = \rho e^{i\psi} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi),$$

то, согласно (11), $r = \rho^n$, $\varphi = n\psi$. Поэтому

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right).$$

Однако, если $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi = \varphi_0 + 2k\pi$, то

$$\cos\frac{\varphi}{n} = \cos\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \quad \sin\frac{\varphi}{n} = \sin\left(\frac{\varphi_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$

имеют при различных $k = 0, 1, \ldots, n-1$ различные значения. Поэтому для $z \neq 0$ существует n различных значений $\sqrt[n]{z}$. В комплексной плоскости $\mathbb{C}$ все эти значения располагаются на окружности с центром в точке 0 радиуса $\sqrt[n]{|z|}$, деля эту окружность на равные дуги.

Приложение

Таблица производных

$(C)' = 0$ (C — постоянная);

$(x^n)' = nx^{n-1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$;

$(a^x)' = \ln a \cdot a^x, \quad a > 0;$

$(x^a)' = ax^{a-1}, \quad x > 0;$

$(\log_a x)' = \dfrac{\log_a e}{x}$, $x > 0$, $a > 0$;

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0;$

$(\ln |x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0;$

$$(|x|)' = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x;$

$(\operatorname{ctg} x)' = \operatorname{cosec}^2 x;$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2};$

$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$

$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$

$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$

$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

Таблица интегралов

$$\int 0\,dx = C;$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}\,a^x + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Формулы Тейлора для основных элементарных функций

При $x \to 0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n);$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2});$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

Предметный указатель