

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.М. БЕЗМЕНОВ

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ФОТОГРАММЕТРИИ
НА ОСНОВЕ ВЕКТОРНОЙ
ИНТЕРПРЕТАЦИИ ИНВАРИАНТОВ
ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ**



**Казань
2014**

УДК 528.7

ББК 26.1

Б11

*Печатается по решению
Учебно-методической комиссии Института физики
Казанского федерального университета*

Научные редакторы:

доктор физ.-мат. наук, профессор **Ю.А. Нефедьев;**

доктор физ.-мат. наук, профессор **Р.А. Кашеев**

Рецензент

кандидат физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой геодезии
Казанского государственного архитектурно-строительного университета

В.С. Боровских

Безменов В.М.

Б11 Решение задач фотограмметрии на основе векторной интерпретации инвариантов проективной геометрии / В.М. Безменов,
науч. ред.: Ю.А. Нефедьев, Р.А. Кашеев. – Казань: Изд-во Казан.
ун-та, 2014. – 244 с.

ISBN 978-5-00019-251-1

Монография посвящена теоретическим и практическим аспектам решения некоторых задач фотограмметрии на основе векторной интерпретации инвариантов проективной геометрии (проективных координат, двойного отношения).

Монография ориентирована на углубление понимания теоретических основ фотограмметрии, решение задач по обработке снимков различного назначения. Предназначена для специалистов, работающих в области фотограмметрии и астрометрии.

ISBN 978-5-00019-251-1

УДК 528.7

ББК 26.1

© **Безменов В.М., 2014**

© **Издательство Казанского университета, 2014**

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
Глава 1. Теоретические основы использования группы проективных преобразований при решении задач астрометрии, космической фотограмметрии.....	9
§ 1.1. Группа проективных преобразований. Коллинеации в фотограмметрии.....	10
§ 1.2. Проективное пространство и проективная плоскость.....	15
§ 1.3. Однородные координаты.....	23
§ 1.4. Двойное отношение.....	29
§ 1.5. Проективные координаты.....	36
§ 1.6. Векторная форма коллинеарного соответствия двух плоских полей.....	44
§ 1.7. Дифференциальные изменения неоднородных координат точки.....	48
§ 1.8. Проективные преобразования двух плоских полей по методу наименьших квадратов.....	51
§ 1.9. Результаты численного эксперимента.....	56
Выводы.....	57
Глава 2. Применение методов математической статистики при использовании инвариантных соотношений проективной геометрии для решения задачи определения сферических координат объектов.....	59
§ 2.1. Краткий обзор методов обработки снимков звездного неба.....	59
§ 2.2. Математическая модель обработки изображений звездного неба с использованием инвариантных соотношений проективной геометрии....	77
§ 2.3. Дополнительные априорные данные о математической модели.....	80
§ 2.4. Связь между координатами изображения объекта и направлением на объект в пространстве.....	83

§ 2.5. Принципы уравнительных вычислений при проективных преобразованиях.....	89
§ 2.6. Уравнение поправок.....	99
§ 2.7. Установление предварительных значений сферических координат определяемых объектов.....	103
§ 2.8. Ньютоновский итерационный процесс.....	105
Выводы.....	109
Глава 3. Методика и алгоритмы проективных преобразований изображений звездного неба.....	110
§ 3.1. Формирование математической модели при обработке изображений звездного неба.....	111
§ 3.2. Структура матрицы нормальных уравнений при обработке изображения звездного неба.....	117
§ 3.3. Исходная информация для экспериментальной проверки алгоритмов определения сферических координат.....	123
§ 3.4. Результаты обработки изображения звездного неба.....	128
§ 3.5. Сравнение результатов обработки с результатами, полученными классической процедурой.....	133
§ 3.6. Определение собственных движений звезд из обработки проективно-преобразованных снимков.....	137
§ 3.7. Результаты численного эксперимента проверки алгоритма определения собственных движений звезд.....	150
§ 3.8. Исследование алгоритмов обработки изображений.....	154
Выводы.....	166
Глава 4. Построение и уравнивание звездной фототриангуляции.....	169
§ 4.1. Формирование математической модели звездной фототриангуляции.....	169
§ 4.2. Структура матрицы нормальных уравнений звездной фототриангуляции.....	174

§ 4.3. Оптимальный алгоритм решения систем нормальных уравнений при уравнивании звездной фототриангуляции.....	178
§ 4.4. Оценка точности уравненных параметров.....	182
§ 4.5. Исходная информация для экспериментальной проверки алгоритма построения и уравнивания звездной фототриангуляции.....	186
§ 4.6. Результаты построения и уравнивания звездной фототриангуляции.....	188
§ 4.7. Сравнение результатов обработки звездной фототриангуляции с каталогом, полученным методом перекрывающихся пластин в упрощенной форме (метод ГАИШ).....	192
§ 4.8. Сравнение результатов обработки звездной фототриангуляции с каталогом, полученным методом, основанным на зависимостях аналитической фотограмметрии.....	195
Выводы.....	198
Глава 5. Решение некоторых задач фотограмметрии с применение инвариантных соотношений проективной геометрии.....	199
§ 5.1. Обработка снимка с известным центром проектирования. Прямая проективная засечка.....	119
§ 5.2. Исследование алгоритма прямой проективной засечки.....	203
§ 5.3. Обработка снимков с неизвестным центром проектирования. Обратная проективная засечка.....	206
§ 5.4. Исследование алгоритма обратной проективной засечки.....	210
§ 5.5. Аналитическая фототриангуляция с проективно-преобразованными снимками. Математическая модель фототриангуляции.....	212
§ 5.6. Уравнения поправок.....	221
§ 5.7. Структура системы нормальных уравнений аналитической фототриангуляции.....	225
Заключение.....	231
Список литературы.....	234

Введение

В настоящее время изображения (снимки) находят применение для решения различных научных и практических задач.

Изображения, выполненные в различных участках спектра, несут большую информацию о тонких глобальных и локальных явлениях, происходящих в атмосферах, на поверхности и недрах планет; об эффектах, связанных с физическими закономерностями во Вселенной. Исследование Земли, Луны и планет, в частности, их картографирование с космических аппаратов, предусматривает решение ряда комплексных научно-технических задач, одной из которых является координатно-временная привязка выполненных съемок. Эта задача также решается методами фотограмметрии (космической фотограмметрии). Изображения находят применение не только в исследовании Земли и окружающего ее пространства, но и в более близких (прикладных) для нас областях: в архитектуре, строительстве, криминалистике, медицине, военно-инженерном деле и т. д. Широта и многогранность применения изображений придает фотограмметрии важное значение.

Изображения, полученные съемочными системами, у которых изменяются или вовсе не известны элементы внутреннего ориентирования, накладывают определенные требования на процедуры математической обработки.

Проективная геометрия – одно из направлений математической науки занимает особое положение в фотограмметрии, поскольку является теоретической базой последней. Известно, что применение основных соотношений проективной геометрии позволяет решать зада-

чу обработки снимков (изображений) без знания элементов внутреннего ориентирования и угловых элементов внешнего ориентирования. Имеется ряд таких методов. Среди них есть методы, основанные на использовании проективных координат и двойного отношения. Но эти методы решают задачу обработки геометрически, без применения статистических методов. Поэтому в монографии главное внимание уделяется решению проблемы обработки снимков с использованием уравнительных вычислений по методу наименьших квадратов (МНК). В основе решения поставленной задачи лежит векторная интерпретация двойного отношения проективных координат.

В монографии приводится решение задач обработки изображений звездного неба:

- определение сферических координат небесных объектов из анализа одиночного снимка и перекрывающихся изображений;
- определение собственных движений звезд.

Рассматриваются прямая и обратная фотограмметрические задачи, метод построения и уравнивания аналитической аэрофототриангуляции.

Первая глава посвящена изложению основных положений проективной геометрии, представлению в векторной форме ее инвариантов – проективных координат и сложного отношения. Используя векторные представления основных инвариантов проективной геометрии, получена формула связи между координатами изображения объекта на снимке и направлением на этот объект в пространстве. На основе дифференциальных изменений неоднородных координат точки

предложена методика проективного преобразования двух плоских полей по методу наименьших квадратов.

Во второй главе рассматривается комплексное решение проблемы определения сферических координат объектов на основе векторной интерпретации проективных координат, приводятся общие принципы уравнительных вычислений при проективных преобразованиях: уравнительные вычисления по МНК, установление предварительных значений определяемых параметров и т. д.

Третья глава посвящена рассмотрению и исследованию алгоритмов обработки изображения звездного неба: алгоритмов определения сферических координат объектов из обработки отдельного снимка; алгоритма определения собственных движений звезд.

Четвертая глава содержит решение задачи звездной аналитической фототриангуляции на основе векторной интерпретации проективных координат. Приводится оптимальный алгоритм решения задачи. Данная глава также содержит результаты экспериментальных работ, подтверждающих работоспособность разработанных алгоритмов.

Пятая глава содержит решение и результаты исследований прямой и обратной задач фотограмметрии, а также аналитической аэрофототриангуляции. Основная задача данной главы – построение и уравнивание аналитической фототриангуляции, позволяющей спутниковые геодезические определения координат центров проекций.

В заключении сделаны выводы по результатам всей работы.

При выполнении экспериментальных проверок разработанных методик и алгоритмов использовались, как реальный наблюдательный материал, так и специально созданные макетные снимки (изоб-

ражения). В частности, исследования, направленные на выявление влияния геометрии опоры на точность решения задач, выполнялось на основе макетных снимков.

Следует особо подчеркнуть, что материал каждой части монографии излагается в виде законченных алгоритмов и содержит все необходимые формулы и сведения для их практической реализации.

Автор надеется, что данная монография будет полезна всем, кто интересуется фотограмметрией, проективной геометрией, тем, кто стремится расширить свой кругозор в части обработки снимков (изображений) различного назначения и прежде всего снимков, у которых отсутствует информация об элементах внутреннего и угловых элементах внешнего ориентирования.

Глава 1. Теоретические основы использования группы проективных преобразований при решении задач фотограмметрии и фотографической астрометрии

Каждая область геометрии занимается изучением геометрических свойств, инвариантных по отношению к той или иной совокупности преобразований. Проективная геометрия изучает проективные свойства фигур, которые не разрушаются при проективных преобразованиях – операциях проектирования и сечения. Эти свойства являются более общими и более прочными свойствами фигур, чем свойства аффинные и метрические.

К основным инвариантам проективной геометрии относят двойное (сложное) отношение четырех коллинеарных точек, сопутствующее

щее ему двойное отношение четырех прямых пучка прямых и четырех плоскостей пучка плоскостей, а также проективные координаты.

§ 1.1. Группа проективных преобразований.

Коллинеации в фотограмметрии

В начале XIX в. Понселе установил точечное преобразование пространства, осуществляемое кратным проектированием и получившее поэтому название проективного преобразования. Группа проективных преобразований лежит в основе проективной геометрии, включающей корреляции и коллинеации. Корреляции ставят в соответствии с точкой первого пространства единственную плоскость второго пространства, а коллинеации – точки – точку, прямой – прямую, плоскости – плоскость [18].

Коллинеарное соответствие в пространстве описывается дробно-линейными функциями с общим знаменателем [25, 42, 48]

$$\begin{cases} X'_1 = \frac{b_{11}X_1 + b_{12}X_2 + b_{13}X_3 + b_{14}}{b_{41}X_1 + b_{42}X_2 + b_{43}X_3 + b_{44}}, \\ X'_2 = \frac{b_{21}X_1 + b_{22}X_2 + b_{23}X_3 + b_{24}}{b_{41}X_1 + b_{42}X_2 + b_{43}X_3 + b_{44}}, \\ X'_3 = \frac{b_{31}X_1 + b_{32}X_2 + b_{33}X_3 + b_{34}}{b_{41}X_1 + b_{42}X_2 + b_{43}X_3 + b_{44}}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где X'_i – координаты точки после преобразования; X_i – координаты точки до преобразования; b_{ij} – параметры преобразования ($i, j=1, 2, 3$).

Если определитель четвертого порядка, составленный из коэффициентов b_{ij} , отличен от нуля, то уравнения (1.1) однозначно разрешаются относительно X_1, X_2, X_3 именно таким образом:

$$\begin{cases} X_1 = \frac{b'_{11}X'_1 + b'_{12}X'_2 + b'_{13}X'_3 + b'_{14}}{b'_{41}X'_1 + b'_{42}X'_2 + b'_{43}X'_3 + b'_{44}}, \\ X_2 = \frac{b'_{21}X'_1 + b'_{22}X'_2 + b'_{23}X'_3 + b'_{24}}{b'_{41}X'_1 + b'_{42}X'_2 + b'_{43}X'_3 + b'_{44}}, \\ X_3 = \frac{b'_{31}X'_1 + b'_{32}X'_2 + b'_{33}X'_3 + b'_{34}}{b'_{41}X'_1 + b'_{42}X'_2 + b'_{43}X'_3 + b'_{44}}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Каждой точке (X_1, X_2, X_3) , в которой знаменатель дробей (1.1) не обращается в нуль, отвечает определенная точка (X'_1, X'_2, X'_3) , и наоборот, каждой точке (X'_1, X'_2, X'_3) , в которой знаменатель дробей (1.2) не обращается в нуль, соответствует определенная точка (X_1, X_2, X_3) [48].

Коллинеации в пространстве представляют собой 15-ти членную группу проективных преобразований, так как дело идет только об отношениях 16-ти коэффициентов в уравнениях (1.1).

Таким образом, коллинеарное соответствие в пространстве вполне определится, если пяти произвольным точкам первого пространства, из которых никакие четыре не лежат на одной плоскости, задать пять соответствующих точек второго пространства, также не лежащих на одной плоскости [25, 42, 48].

Добавленные условия находят свое аналитическое обоснование в том, что при вычислении коэффициентов никакие определители четвертого порядка из координат четырех точек не должны обращаться в нуль [25, 42].

Проективные преобразования всего трехмерного пространства, не сводящиеся к аффинным, могут рассматриваться как взаимно-однозначные только в том случае (как это отмечается в следующем разделе), если евклидово пространство обогащено несобственными элементами, то есть расширено до проективного. Чтобы охватить этот случай, переходят к однородным координатам (четырем в пространстве – x_1, x_2, x_3, x_4), которые при любых их значениях определяют точку. В однородных координатах проективное преобразование в пространстве выражается уравнениями

$$\begin{cases} \rho x'_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 \\ \rho x'_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4 \\ \rho x'_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4 \\ \rho x'_4 = b_{41}x_1 + b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4 \end{cases}, \quad (1.3)$$

где ρ есть функция от однородных координат x_1, x_2, x_3, x_4 [25, 42, 48].

Для плоскости, если ограничиться собственными точками, формулы коллинеарного соответствия имеют вид [9, 42, 48, 73]:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ y' &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \end{aligned} \right\}, \quad (1.4)$$

где x', y' – координаты точки после преобразования; x, y – координаты точки до преобразования; a_{ij} – параметры преобразования.

Формулы (1.4) проективного преобразования координат точек плоскости получены методами дифференциальной геометрии в нача-

ле XX в. Шефферсом [48]. Задача ставится с целью найти структуру функций

$$\left. \begin{aligned} x' &= \varphi(x, y) \\ y &= \psi(x, y) \end{aligned} \right\}, \quad (1.5)$$

которые прямую

$$ax + by + c = 0 \quad (1.6)$$

преобразуют в прямую

$$a'x' + b'y' + c' = 0. \quad (1.7)$$

Решая задачу, Шефферс получает систему дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять функции (1.5) при условии (1.6) и (1.7). Интегрирование этих уравнений приводит их к дробно-линейным выражениям (1.4).

Поделив числитель и знаменатель выражений (1.4) на один из параметров, отличный от нуля, получим функции восьми параметрические. Поэтому группу проективных преобразований плоскости называют восьми параметрической (восьмичленной). Взамен операции деления В.Ф. Каган [41] предлагает девять параметров a_{ij} связать одним условием, например, потребовать, чтобы определитель, составленный из параметров a_{ij} , был равен единице.

Дальнейшее исследование выражений (1.4) приводит к неопределенной зависимости точек с координатами x , y и x' , y' , когда знаменатель дробей в (1.4) равен нулю. Этот недостаток абстрактным образом устраняется путем замены неоднородных декартовых координат точек однородными координатами (см. § 1.3). Жирар Дезарг (1591–1661 гг.) не владея координатным методом, тоже устранил этот

недостаток. Он ввел понятие о бесконечно удаленной (несобственной) прямой и придал ей свойства обычной прямой, создав, тем самым, понятие проективной плоскости, в которой отсутствуют несобственные элементы.

Параметры в функциях (1.4) могут быть определены по координатам соответствующих четырех точек до и после преобразования [33, 76]. При этом четверки точек по три не должны быть коллинеарными, то есть не лежать на одной прямой. Вместо четырех точек для определения параметров можно включить соответствующее число пар прямых или комбинаций прямых и точек.

В ряде работ, например, в [25, 26, 42], показано, что общая группа (1.4) для всех коллинеаций (подгрупп) инвариантна к двойному отношению четырех коллинеарных точек при условии, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.8)$$

Исследование выражений (1.4) приводит к неопределенной зависимости точек с координатами x', y' и x, y , когда знаменатель дробей в выражениях (1.4) равен нулю. Помимо этого, даже, если знаменатель не равен нулю, точки прямой $a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$ не имеют себе соответствующих образов и поэтому взаимно однозначное соответствие для точек этой прямой нарушается [49]. Этот недостаток абстрактным образом устраняется путем введения несобственных элементов и замены неоднородных декартовых координат точек плоскости однородными координатами.

Геометрические представления о преобразованиях предлагают два поля точек в одной системе координат и при этом одно поле точек преобразуется в другое. Однако бывает целесообразным представлять одно поле точек в двух разных системах координат и говорить о преобразовании точек из одной системы координат в другую [8]. В связи с этим вводят понятие проективной системы координат, состоящей из фиксированных четырех по три неколлинеарных точек.

§ 1.2. Проективное пространство и проективная плоскость

Проективное пространство может быть получено как непосредственное расширение обычного евклидова пространства. Дополнение евклидова пространства его несобственными элементами является тем шагом, который устраняет неопределенности в проективных преобразованиях геометрических образов и делает этот процесс взаимнооднозначным.

В подтверждение этому рассмотрим простейший пример. Пусть на некоторой евклидовой плоскости Π имеется произвольная прямая ℓ и точка S , не принадлежащая этой прямой (рис. 1.1). Прямые, проходящие через точку S , составят плоский пучок лучей. Устанавливая соответствие между лучами этого пучка и точками прямой ℓ , видно, что луч d_n пучка, параллельный прямой ℓ не пересекает ее, то есть не имеет соответствующей себе точки. Таким образом, соответствие между прямыми пучка с центром в точке S и точками прямой ℓ не является взаимно однозначным.

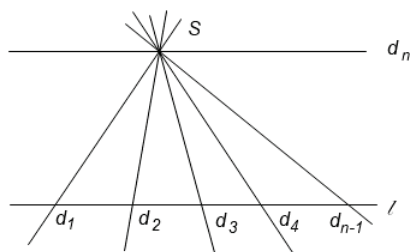


Рис. 1.1. Неоднозначность в проектировании

Для того чтобы проектирование было взаимно однозначным, необходимо, чтобы параллельные прямые ℓ и d_n имели общую точку. Иначе говоря, множество точек обыкновенной прямой евклидова пространства необходимо дополнить бесконечно удаленной (несобственной) точкой. В результате такого дополнения определится проективная прямая, имеющая единственную несобственную точку, независимо от того, в какой плоскости будет строиться пучок, ее определяющий [2, 25]. Таким образом, расширение евклидовой прямой до проективной приводит к тому, что процесс проектирования становится взаимно однозначным.

В [25], в частности, отмечается, что под несобственной точкой прямой, лежащей в данной плоскости Π , подразумевают то общее, что имеют все прямые, лежащие в этой плоскости и параллельные данной прямой. При проектировании этих прямых на другую плоскость Π' мы получим в ней не совокупность параллельных прямых, а совокупность прямых, проходящих через одну и ту же точку (рис. 1.2).

Совершенно очевидно, что и плоскость в евклидовом пространстве как носитель проективной прямой, превращается в проективную плоскость путем присоединения к плоскости евклидова пространства

одной несобственной прямой, являющейся геометрическим местом несобственных точек этой плоскости. Строго говоря, под несобственной прямой данной плоскости подразумевают то общее, что имеют все плоскости, параллельные данной [25].

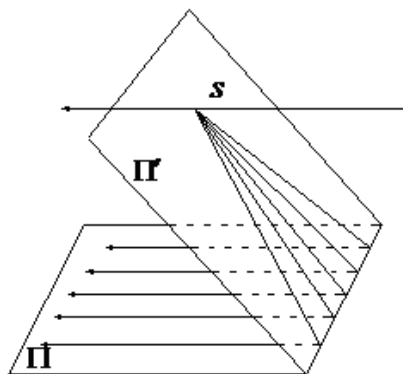


Рис. 1.2. Геометрическая интерпретация несобственной точки

Можно показать, что геометрическим местом всех несобственных прямых всех плоскостей пространства является плоскость, которую называют несобственной плоскостью всего пространства. Данное пространство имеет одну несобственную плоскость [25].

Существенным является то, что проективная геометрия признает полное равноправие между собственными и несобственными элементами. Поскольку при проектировании несобственные элементы могут переходить в собственные и наоборот, то проективного различия между ними не существует. Для каждой отдельно взятой прямой все ее точки в проективном смысле равноправны между собой, и поэтому

любую точку этой прямой можно назвать несобственной точкой. Точно так же, рассматривая отдельно какую-нибудь плоскость, каждую прямую, лежащую на ней, можно принять за несобственную прямую, а точки пересечения этой прямой со всеми другими прямыми той же плоскости считать несобственными точками этих прямых. Поскольку на проективной плоскости все элементы равноправны и не выделено несобственной прямой, то вопрос о метрических свойствах фигур, принадлежащих этой плоскости, не имеет проективного содержания. Последние, как известно, связаны с несобственными элементами плоскости [25].

Задача построения проективного пространства может быть также решена на собственной аксиоматической базе. Из пяти групп гильбертовых аксиом – аксиом соединения, аксиом порядка, аксиом конгруэнтности, аксиомы параллельности, аксиомы непрерывности – базой для построения проективного пространства являются лишь аксиомы соединения, порядка и непрерывности [25, 33, 73].

Система аксиом соединения устанавливает главнейшие взаимоотношения соединения между различными элементами проективной геометрии. Данная группа аксиом включает следующие аксиомы:

- 1) две различные точки определяют единственную принадлежащую им прямую;
- 2) две различные плоскости определяют единственную принадлежащую им прямую;
- 3) точка и не принадлежащая ей прямая определяют принадлежащую им плоскость;

4) существует по крайней мере одна точка, принадлежащая прямой и плоскости;

5) существуют по крайней мере четыре точки, не принадлежащие одной плоскости и одной прямой одновременно. Как отмечается в [25], эта группа аксиом не требует бесконечного числа точек, прямых и плоскостей в пространстве. Основной конфигурацией, для которой имеет место вся система аксиом соединения, является тетраэдр или так называемый симплекс трехмерного пространства.

Группа аксиом порядка имеет цель установить понятие порядка расположения точек на прямой и включает следующие пять аксиом:

1) две точки A и B прямой разделяют остальные точки этой прямой на два класса;

2) существует по крайней мере одна пара точек C и D , принадлежащих разным классам;

3) если $AB \div CD$, то и $CD \div AB$ (знак $\div$ обозначает деление);

4) четыре точки прямой единственным способом разбиваются на разделяющие друг друга пары;

5) при любом проективном преобразовании разделяющие друг друга пары переходят также в разделяющие пары.

Следствием из этой группы аксиом является заключение о существовании неограниченно большого числа точек на прямой линии, на плоскости и в пространстве, а также существование бесконечно большого числа прямых и плоскостей в пространстве. Совокупность всех точек, прямых и плоскостей, полученных как результат добавления к аксиомам соединения аксиом порядка образует проективное пространство без непрерывного расположения его элементов.

Аксиома непрерывности, известная под названием аксиомы Дедекинда, постулирует тот факт, что бесконечное множество точек в пространстве не имеет пустот [25, 33, 73]. На числовой модели это значит, что координаты точек выражаются действительными числами [33].

Таким образом, данная система аксиом позволяет построить непрерывное проективное пространство, в котором все его элементы равноправны.

Аксиомы проективного пространства имеют симметричное выражение по отношению к точкам и плоскости. Для каждой аксиомы соединения имеется ей взаимная, полученная из нее перестановкой слов «точка» и «плоскость» с соответствующим видоизменением терминологии. Говорят, что аксиомам проективного пространства свойственен принцип двойственности [25, 73]. Этот принцип является основным во всей проективной геометрии и позволяет утверждать, что такая же симметрия будет во всех предложениях (теоремах, определениях) проективной геометрии, построенных на данной аксиоматической базе [25, 73].

Принцип двойственности устанавливает связь не только между предложениями проективной геометрии, но и между геометрическими формами разных видов. Каждой геометрической форме он ставит в соответствие форму, ей взаимную, связанную с данной принципом двойственности [25]. Так, например, треугольнику с вершинами e_1 , e_2 , e_3 , лежащим в плоскости Π по принципу двойственности соответствует трехгранник: его грани соответствуют вершинам треугольника, ребра его сторонам треугольника, а вершина S той плоскости, в которой лежит треугольник (рис. 1.3).

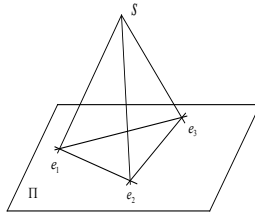


Рис. 1.3. Принцип двойственности

Рассмотрим вопрос о проективной плоскости, – ее возможных моделях.

В обычном трехмерном евклидовом пространстве можно построить ряд геометрических форм, аксиоматически эквивалентных геометрическому образу проективной плоскости [25]. Наиболее простой моделью проективной плоскости является евклидова плоскость, дополненная несобственными точками. Другая модель проективной плоскости была указана Ф. Клейном – полусфера с идентифицированными концами диаметров экваториального круга. В этой модели несобственная точка прямой изображается на сфере не одной, а двумя точками – противоположными точками экватора.

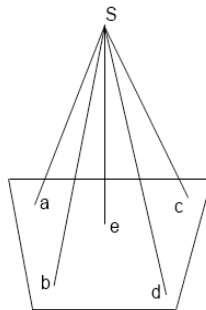


Рис. 1.4. Модель проективной плоскости. Связка прямых

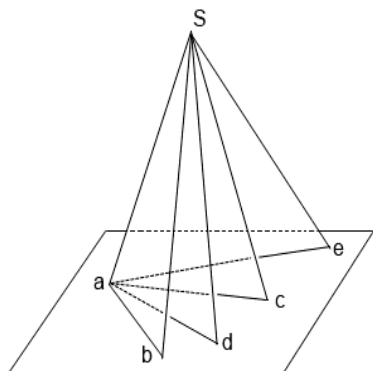


Рис. 1.5. Модель проективной плоскости. Связка плоскостей

Поверхность, – полностью топологически эквивалентная проективной плоскости, является замкнутой, односторонней поверхностью – конус, опирающийся на лист Мебиуса. Такая проективная плоскость может быть построена только в четырехмерном пространстве.

Для нас в дальнейшем будет иметь важную роль модель проективной плоскости, представляющая связку прямых в пространстве (рис. 1.4) [25, 73].

Связка прямых – это совокупность прямых пространства, проходящих через одну точку S пространства. Если связку пересечь плоскостью, не проходящей через центр связки, то в сечении получится проективная плоскость в обычном смысле. Каждая прямая связки при пересечении с плоскостью даст точку (рис. 1.4), а каждая плоскость связки даст прямую (рис. 1.5). Прямые линии связки, параллельные секущей плоскости, дадут несобственные точки, а плоскость, параллельная секущей плоскости, даст несобственную прямую.

Здесь можно использовать принцип двойственности, согласно которому плоскому полю будет соответствовать совокупность всех прямых и плоскостей, проходящих через одну точку, то есть связка прямых и плоскостей.

Эту модель проективной плоскости мы будем в дальнейшем использовать при векторной интерпретации инвариантных соотношений проективной геометрии.

§ 1.3. Однородные координаты

Под однородными координатами точек проективной плоскости понимается класс ненулевых пропорциональных между собой троек вещественных чисел (x_1, x_2, x_3) [25, 33, 42]. У Ф. Клейна [35] отмечается, что впервые однородные координаты были введены Мебиусом в 1827 г. Он назвал их барицентрическими координатами. Мебиус фиксировал в плоскости три неколлинеарные точки, в которых предполагал подвешенные грузы. Положение четвертой точки он характеризовал как центр тяжести трех фиксированных точек с конкретными значениями грузов – барицентрическими координатами.

Более простую интерпретацию однородных координат можно найти, например, в [7, 9, 25, 26].

Рассмотрим проективную плоскость как связку прямых (рис. 1.6) совместно с пространственной системой координат. Направлению каждой прямой связки можно поставить в соответствие тройку чисел x_1, x_2, x_3 или тройку чисел, пропорциональных x_1, x_2, x_3 . Рассекая связку прямых плоскостью, которая не проходит через вершину связки, по-

лучим поле точек. Каждой точке соответствуют пары чисел x, y в плоской системе координат, их называют неоднородными координатами. Тройки чисел определяющие соответствующие направления прямых, называют однородными координатами точек плоскости [7, 9, 25, 26]. Говорят, что однородные координаты не изменяются, если их умножить на отличный от нуля множитель ρ ($\neq 0$). Для координат различных точек значения ρ могут быть разными.

Однородные координаты однозначно определяют положение точки на плоскости и это положение определяется отношением однородных координат $x_1:x_2:x_3$. Геометрическая интерпретация однородных координат приведена на рис. 1.6. На нем изображена прямая Se связки с вершиной S и плоскость Π , которая не содержит S . Пересечение прямой с плоскостью определит точку e . Проекции отрезка Se на оси координат будут однородными координатами точки e . Им ставится в соответствие вектор $\vec{r}$ или $\rho\vec{r}$. Этот вектор называют вектором-направлением или **однородным вектором** точки плоскости.

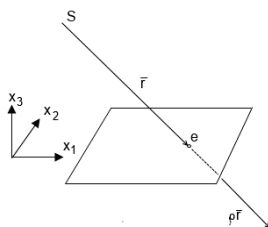


Рис. 1.6. Геометрическая интерпретация однородных координат точки

Будем считать, что однородному вектору $\bar{r}$ соответствует тройка чисел (x_1, x_2, x_3) – однородных координат: $\bar{r}_i = [x_1, x_2, x_3]^T$, где третья координата $x_3 = \text{const}$.

Пусть Π – проективная плоскость, за модель которой принята соответствующая евклидова плоскость и пусть на плоскости Π задана декартова система координат. Если точка e является собственной точкой плоскости Π и имеет декартовы координаты (x, y) , то однородными координатами точки e будет тройка чисел (x_1, x_2, x_3) , не равных одновременно нулю и таких, что

$$\frac{x_1}{x_3} = x; \quad \frac{x_2}{x_3} = y, \quad (1.9)$$

при $x_3 \neq 0$.

Если точка расположена на бесконечно удаленной прямой, точка e является несобственной точкой плоскости, то у нее отсутствуют неоднородные координаты, поэтому сделанное определение однородных координат непригодно для точек, лежащих на несобственной прямой.

Однородными координатами несобственной точки называют тройку чисел (x_1, x_2, x_3) , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $x_3 \neq 0$;
- 2) из двух чисел x_1 и x_2 хотя бы одно отлично от нуля;

3) отношение координат $x_1 : x_2 = b/a$, где b и a коэффициенты уравнения (1.6) любой прямой, проходящей через эту несобственную точку [33].

Однородным вектором можно описывать положение бесконечно удаленных (несобственных) точек плоскости Π . Это объясняется возможностью изменять для каждой точки множитель ρ . Например, все однородные векторы точек плоскости могут быть единичными, то есть концами задавать точки сферы с центром в точке S . В этом одно из преимуществ однородных координат. Используя однородные координаты и заменяя (x, y) , (x', y') отношениями

$$\frac{\rho x_1}{\rho x_3}, \quad \frac{\rho x_2}{\rho x_3}, \quad \frac{\rho x'_1}{\rho x'_3}, \quad \frac{\rho x'_2}{\rho x'_3}, \quad (1.10)$$

формулы проективных преобразований (1.4) записывают в следующем виде [18, 26, 35, 63]

$$\begin{aligned} \rho x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3; \\ \rho x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3; \\ \rho x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Произвольный множитель пропорциональности ρ ($\rho \neq 0$), стоящий в левой части этих уравнений показывает, что дело идет только об отношениях $x'_1 : x'_2 : x'_3$.

Выражения (1.11) проективных преобразований точек плоскости могут быть записаны в матрично-векторной форме

$$\rho \cdot \bar{r}' = A \cdot \bar{r}, \quad (1.12)$$

где A – матрица коэффициентов a_{ij} ; $\rho \bar{r}'$ и $\bar{r}$ – однородные векторы.

В литературе, в частности в [9, 52, 73], отмечается, что выражения (1.7) и (1.8) равносильны центроаффинному преобразованию связок прямых. Поэтому, как отмечает Ф. Клейн [42], центроаффинные преобразования связки прямых индуцируют в проективной плоскости проективные преобразования точек. Этой фразой собственно и расшифровывается абстрактность проективной плоскости, которая как геометрический элемент может быть реализована лишь в четырехмерном пространстве. Этим объясняется возможность задать положение бесконечно удаленных точек плоскости.

Однородные координаты удобны не только для описания положения несобственных элементов. Они, что не менее важно, позволяют решать задачи проективной в векторной форме.

Целесообразность введения однородных координат точек плоскости можно показать, доказав аналитически теорему Дезарга, являющейся одной из центральных теорем проективной геометрии, главным следствием которой является возможность построения гармонической группы точек чисто проективным путем [25]. Напомним, что для доказательства теоремы Дезарга предполагается наличие некоторой точки, не принадлежащей рассматриваемой плоскости, то есть плоская теорема доказывается только с «выходом» в пространство [25, 42, 73].

Теорема Дезарга. Если прямые, соединяющие соответственные вершины двух трехвершинников, пересекаются в одной точке – центре перспективы, то соответственные стороны этих трехвершинников пересекаются в точках A , B , C , лежащих на одной прямой (рис. 1.7).

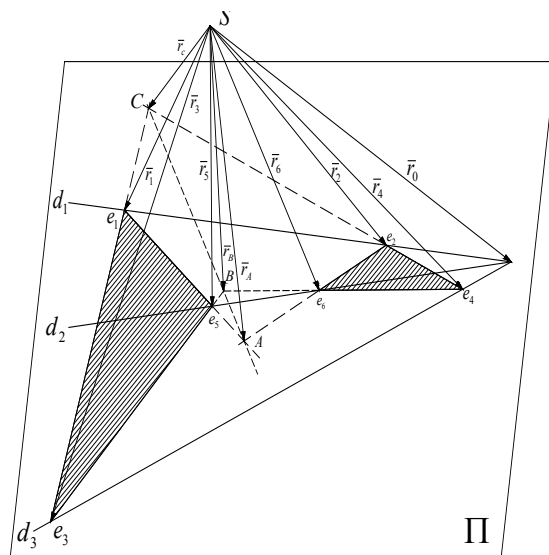


Рис. 1.7. Теорема Дезарга

Аналитическое доказательство теоремы Дезарга с использованием однородных векторов можно найти в [9].

Подобно теореме Дезарга в аналитической форме доказываются и другие теоремы проективной геометрии. В изящности аналитической формы доказательств, второе преимущество однородных координат точек плоскости.

Наиболее важным с практической точки зрения является то, что использование однородных координат, как это будет показано далее, позволяет получить векторные выражения, удобные для фактического нахождения числовых значений, основных инвариантов проективной геометрии – двойного отношения и проективных координат.

§ 1.4. Двойное отношение

Недостатком однородных координат является зависимость их от выбора начала S и системы координат, в которой заданы вектор-направления (точки проективной плоскости) (рис. 1.6). Лишено этого недостатка двойное отношение четырех коллинеарных точек, а также сопутствующее ему двойное отношение четырех прямых пучка и двойное отношение четырех плоскостей пучка плоскостей [9, 25, 33, 42].

Пусть заданы четыре точки e_1, e_2, e_3, e_4 некоторой прямой (рис. 1.8); тогда двойным отношением называют отношение отрезков

$$\gamma = (e_1 e_2 e_3 e_4) = \frac{e_1 e_3}{e_2 e_3} : \frac{e_1 e_4}{e_2 e_4}, \quad (1.13)$$

где γ и $(e_1 e_2 e_3 e_4)$ – обозначение двойного отношения [25, 32, 33, 35, 42].



Рис. 1.8. Двойное отношение отрезков

Двойное отношение не изменяется при любых проективных преобразованиях; оно является основным метрическим инвариантом проективной геометрии [25, 32, 33, 35, 42, 60, 84].

Рассмотрим простейший пример. На рис. 1.9 изображены четыре прямые d_1, d_2, d_3, d_4 одной плоскости, проходящие через одну точку S (центр проекции) и пересекающиеся двумя секущими прямыми ℓ_1

и ℓ_2 в точках e_1, e_2, e_3, e_4 и соответственно в точках e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 .
 Вследствие свойства инвариантности двойного отношения будет иметь место равенство

$$(e_1 e_2 e_3 e_4) = (e'_1 e'_2 e'_3 e'_4). \quad (1.14)$$

В общем случае отношение (1.13) называют ангармоническим.

Говорят, что четыре точки проективной прямой образуют гармоническую группу, если их двойное отношение равняется -1 [25, 33, 35, 42, 58]. Это значит, что базисная пара точек e_1 и e_2 разделена делящей парой точек e_3 и e_4 так, что простые отношения трех точек из гармонической четверки, равны по величине, но противоположны по знаку, то есть $(e_1 e_2 e_3) = (e_1 e_2 e_4)$.

Сложное отношение обладает свойством [26]

$$(e_1 e_2 e_3 e_4) = (e_3 e_4 e_1 e_2) = (e_2 e_1 e_4 e_3), \quad (1.15)$$

то есть
$$(e_3 e_4 e_1 e_2) = \frac{e_3 e_1}{e_4 e_1} : \frac{e_3 e_2}{e_4 e_2} = \frac{e_3 e_1}{e_3 e_2} : \frac{e_4 e_1}{e_4 e_2} = \frac{e_1 e_3}{e_2 e_3} : \frac{e_1 e_4}{e_2 e_4} = (e_1 e_2 e_3 e_4).$$

При перестановке точек внутри какой-нибудь отдельной пары имеет место зависимость

$$(e_1 e_2 e_3 e_4) = \frac{1}{(e_1 e_2 e_4 e_3)}, \quad (e_1 e_2 e_3 e_4) = \frac{1}{(e_2 e_1 e_3 e_4)}. \quad (1.16)$$

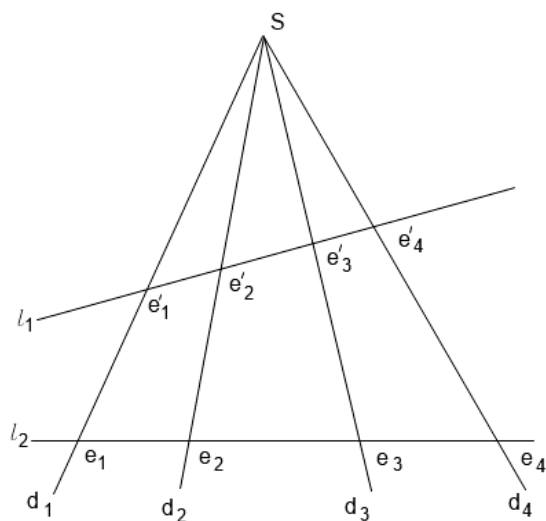


Рис. 1.9. Инвариантность двойного отношения

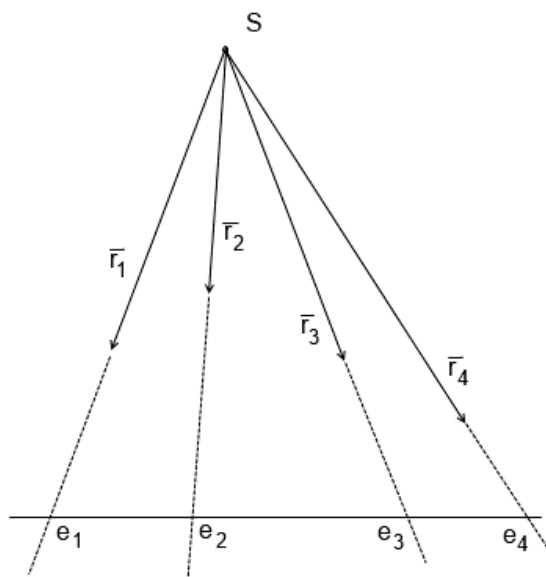


Рис. 1.10. Двойное отношение компланарных векторов

Двойное отношение может быть представлено скалярной функцией компланарных векторов [9]. Пусть имеется четыре компланарных вектора $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ перспективного ряда и сопутствующие им четыре коллинеарные точки e_1, e_2, e_3, e_4 прямолинейного ряда (рис. 1.10). Тогда двойное отношение может быть выражено через скалярную функцию векторов $\vec{r}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) по формуле [9]

$$\gamma = \frac{[\vec{r}_1 \times \vec{r}_3][\vec{r}_2 \times \vec{r}_4]}{[\vec{r}_1 \times \vec{r}_4][\vec{r}_2 \times \vec{r}_3]}, \quad (1.17)$$

где $[\vec{r}_1 \times \vec{r}_3]$ $[\vec{r}_2 \times \vec{r}_4]$ – скалярное произведение векторов $[\vec{r}_1 \times \vec{r}_3]$ и $[\vec{r}_2 \times \vec{r}_4]$; $[\vec{r}_1 \times \vec{r}_4]$ $[\vec{r}_2 \times \vec{r}_3]$ – скалярное произведение векторов $[\vec{r}_1 \times \vec{r}_4]$ и $[\vec{r}_2 \times \vec{r}_3]$.

Как видно из (1.13) и (1.14) двойное отношение четырех коллинеарных точек и сопутствующее ему двойное отношение четырех компланарных прямых пучка не зависит от выбора центра проектирования S и от системы координат, в которой заданы векторы-направления $\vec{r}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) или точки e_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Действительно, правая часть выражения (1.17) не зависит от значения модулей векторов $\vec{r}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), так как они содержатся как в числителе, так и в знаменателе дроби.

Представляя, что векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ концами опираются на точки e_1, e_2, e_3, e_4 можно увидеть, что векторные произведения из $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ будут пропорциональны площадям треугольников с вершиной в точке S . В связи с этим двойное отношение, выраженное через скалярную функцию векторов (1.17) можно рассматривать как

число, образованное из отношений площадей треугольников, что равносильно отношениям их оснований.

Рассматривая рис. 1.11, в плоскости Π , представим пять точек e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 . В соответствии им поставим пять однородных векторов $\bar{r}_0, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4$. Нормали к плоскостям пучка плоскостей с ребром определяются векторными произведениями $[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_3], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_4], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_0]$. Каждый из этих векторов определяет ориентацию плоскости, которая рассекает проективную плоскость по соответственным прямым $e_1e_2, e_1e_3, e_1e_4, e_1e_0$ (рис. 1.12).

Легко усмотреть компланарность четырех векторов $[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_3], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_4], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_0]$: векторное произведение между двумя любыми парами из этих векторов определяет направление ребра Se_1 пучка плоскостей $Se_1e_2, Se_1e_3, Se_1e_4, Se_1e_0$ (рис. 1.12).

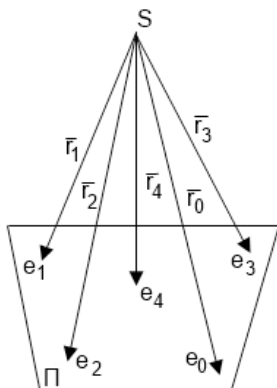


Рис. 1.11. Двойное отношение. Однородные векторы
и соответствующие им точки плоскости

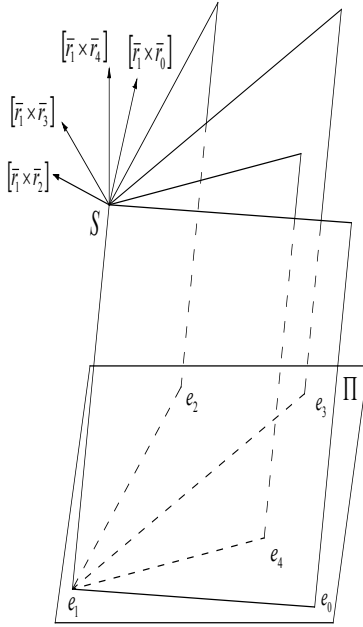


Рис. 1.12. Двойное отношение. Компланарность четырех векторов

$$[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_3], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_4], [\bar{r}_1 \times \bar{r}_0]$$

Руководствуясь структурой формулы (1.17), составим двойное отношение четырех компланарных векторов $[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2]$, $[\bar{r}_1 \times \bar{r}_3]$, $[\bar{r}_1 \times \bar{r}_4]$, $[\bar{r}_1 \times \bar{r}_0]$ (рис. 1.13):

$$\gamma_1 = \frac{[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2] \times [\bar{r}_1 \times \bar{r}_4] \cdot [\bar{r}_1 \times \bar{r}_3] \times [\bar{r}_1 \times \bar{r}_0]}{[\bar{r}_1 \times \bar{r}_2] \times [\bar{r}_1 \times \bar{r}_0] \cdot [\bar{r}_1 \times \bar{r}_3] \times [\bar{r}_1 \times \bar{r}_4]}, \quad (1.18)$$

также равное двойному отношению соответственных прямых.

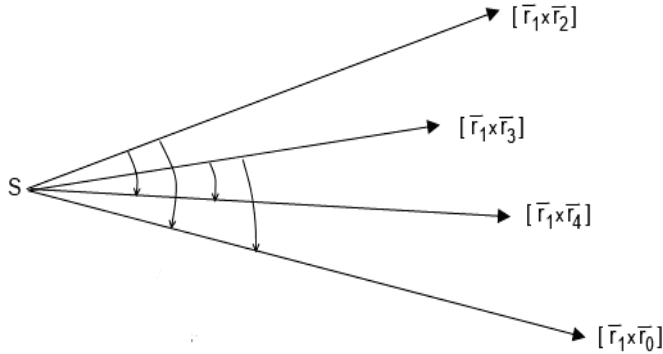


Рис. 1.13. Компланарные векторы

Выполнив векторные преобразования в правой части выражения (1.18), получим

$$\gamma_1 = \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0} \cdot \frac{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_0}{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4}, \quad (1.19)$$

где $\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4$, $\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0$, $\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4$, $\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_0$ – смешанные произведения, составленные из однородных векторов $\bar{r}_0$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$, $\bar{r}_4$. Если построить пучки плоскостей с ребрами Se_2 и Se_3 , которым в плоскости будут соответствовать пучки прямых с вершинами в точках e_2 и e_3 , то соответствующие им двойные отношения γ_2 и γ_3 будут определены формулами

$$\gamma_2 = \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0} \cdot \frac{\bar{r}_3 \bar{r}_2 \bar{r}_0}{\bar{r}_3 \bar{r}_2 \bar{r}_4}, \quad (1.20)$$

$$\gamma_3 = \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_3 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_3 \bar{r}_0} \cdot \frac{\bar{r}_3 \bar{r}_2 \bar{r}_0}{\bar{r}_3 \bar{r}_2 \bar{r}_4}. \quad (1.21)$$

Сравнивая выражения для γ_1 , γ_2 и γ_3 , приходим к выводу, что

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_3 \bar{r}_0}{\bar{r}_1 \bar{r}_3 \bar{r}_4} \cdot \frac{\bar{r}_3 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_3 \bar{r}_2 \bar{r}_0} = \frac{1}{\gamma_3},$$

или
$$\gamma_3 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \quad (1.22)$$

В работе [9] отмечается, что при коллинеарности точек e_0 , e_2 , e_3 , e_4 двойное отношение γ_1 не зависит от выбора точки e_1 вне прямой e_0e_2 , а при коллинеарности точек e_0 , e_1 , e_3 , e_4 двойное отношение не зависит от выбора точки e_2 вне прямой e_0e_1 . Подобное имеет место и для γ_3 , которое не зависит от выбора точки e_3 вне прямой e_0e_1 при коллинеарности точек e_0 , e_1 , e_2 , e_4 .

Таковы векторные представления двойного отношения – основного метрического инварианта проективной геометрии.

§ 1.5. Проективные координаты

Метод декартовых координат, применяемый в аналитической геометрии, не может непосредственно применяться к решению задач проективной геометрии, поскольку несобственные элементы проективной плоскости и проективного пространства в евклидовом пространстве не определяются [35, 33, 42, 84].

Проективная система координат на проективной плоскости определяется заданием четырех фиксированных неколлинеарных то-

чек e_1, e_2, e_3, e_4 (рис. 1.14), [25, 33, 73, 84]. Точка e_1 называется началом двух проходящих через нее прямых e_1e_2 и e_1e_3 . Одна из этих прямых, допустим прямая e_1e_2 , пусть будет осью X , а другая, то есть e_1e_3 – осью Y . Если представить, что проективная плоскость «разрезана» вдоль несобственной прямой e_2e_3 , то точки e_2 и e_3 в таком случае принимают за собственные точки ∞_x, ∞_y , соответственно оси X и оси Y . Точка e_4 , не принадлежащая ни оси X , ни оси Y , называется единичной. Заметим, что шкала проективных координат зависит от выбора точки e_4 .

Рассмотрим точку e_0 , которая произвольно расположена на проективной плоскости. Положение точки e_0 на проективной плоскости определится проекциями данной точки на соответствующие оси проективной (неоднородной) системы координат. Пусть e_{0X} – проекция точки e_0 из $e_3 (\infty_y)$ на ось X , а e_{0Y} из $e_2 (\infty_x)$ на ось Y . Точка e_{0X} в проективной системе координат на оси X имеет некоторую координату X , а точка e_{0Y} на оси Y имеет координату Y . Значения координат, соответствующие точкам e_{0X} и e_{0Y} , являются неоднородными координатами точки e_0 на проективной плоскости. Каждая точка, принадлежащая оси X будет иметь координаты $(x, 0)$, а каждая точка оси Y – координаты $(0, y)$. Точки e_{4X} и e_{4Y} , являющиеся проекциями единичной точки e_4 на ось X и ось Y , соответственно будут иметь координаты $(1, 0)$ и $(0, 1)$.

Если точка расположена на несобственной прямой, то у нее, как известно, отсутствуют неоднородные проективные координаты. Чтобы исправить это положение, на проективной плоскости вводят систему однородных проективных координат.

Введем на проективной плоскости однородные проективные координаты и заодно установим их связь с двойным отношением. За неоднородные проективные координаты произвольной точки на прямой ℓ , с тремя заданными на ней базисными точками, принимают число, равное двойному отношению [25, 33]. Принимая точки e_1, e_2, e_{4X} за базисные на оси X , а точки e_1, e_3, e_{4Y} за базисные на оси Y , выразим проективные координаты X и Y точки e_0 двойными отношениями. Согласно правилу составления двойного отношения (1.13), будем иметь (рис. 1.14) [25]:

$$X = (e_1 e_2 e_{0X} e_{4X}) = \frac{e_1 e_{0X}}{e_2 e_{0X}} : \frac{e_1 e_{4X}}{e_2 e_{4X}}; \quad (1.23)$$

$$Y = (e_1 e_3 e_{0Y} e_{4Y}) = \frac{e_1 e_{0Y}}{e_1 e_{0Y}} : \frac{e_1 e_{4Y}}{e_3 e_{4Y}}. \quad (1.24)$$

Свойство инвариантности двойного отношения (1.14) позволяет записать (рис. 1.14)

$$X = (e_1 e_2 e_{0X} e_{4X}) = (q d e_0 e_4) = (e_0 e_4 q d); \quad (1.25)$$

$$Y = (e_1 e_3 e_{0Y} e_{4Y}) = (t d e_0 e_4) = (e_0 e_4 t d), \quad (1.26)$$

или
$$X = (e_0 e_4 q d) = \frac{e_0 q}{e_4 q} : \frac{e_0 d}{e_4 d} = \frac{\xi_2}{\xi_1}; \quad (1.27)$$

$$Y = (e_0 e_4 t d) = \frac{e_0 t}{e_4 t} : \frac{e_0 d}{e_4 d} = \frac{\xi_3}{\xi_1}. \quad (1.28)$$

В выражениях (1.27) и (1.28) через ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 обозначены простые отношения, которые и являются однородными проективными координатами [25, 33]:

$$\xi_1 = \frac{e_0 d}{e_4 d}, \quad \xi_2 = \frac{e_0 q}{e_4 q}, \quad \xi_3 = \frac{e_0 t}{e_4 t}. \quad (1.29)$$

В [18, 35, 63] отмечается, что проективные координаты пропорциональны расстояниям от трех неподвижных прямых, умноженным на постоянные множители (рис. 1.15). Чтобы показать это, рассмотрим рис. 1.15. Из подобных треугольников следует, что

$$\frac{e_0 d}{e_4 d} = \frac{e_0 a}{e_4 f}, \quad \frac{e_0 q}{e_4 q} = \frac{e_0 b}{e_4 g}, \quad \frac{e_0 t}{e_4 t} = \frac{e_0 c}{e_4 h}. \quad (1.30)$$

Сравнив формулы (1.29) и (1.30), получим однородные координаты точки e_0 в виде отношений:

$$\xi_1 = \frac{e_0 a}{e_4 f}; \quad \xi_2 = \frac{e_0 b}{e_4 g}; \quad \xi_3 = \frac{e_0 c}{e_4 h}. \quad (1.31)$$

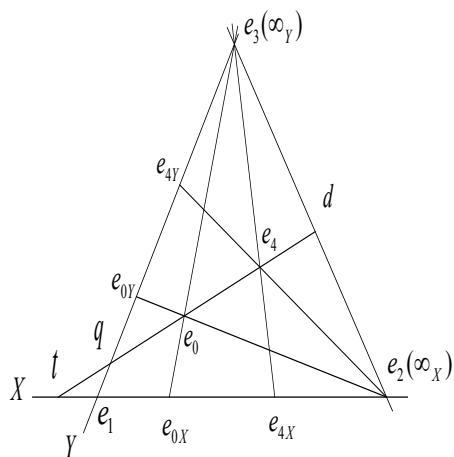


Рис. 1.14. Система проективных координат

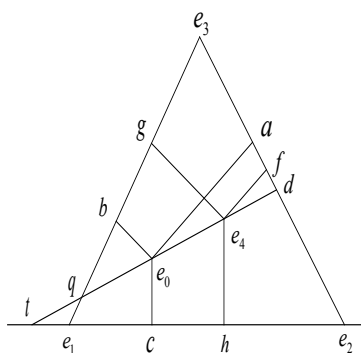


Рис. 1.15. Проективные координаты. Пропорциональность проективных координат расстояниям от трех координатных прямых

Из этих выражений видно, что однородны проективные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 точки e_0 действительно пропорциональны расстояниям точки от трех координатных прямых и являются отношениями расстояний от точек e_0 и e_4 до сторон координатного треугольника с вершинами e_1, e_2, e_3 .

Обозначим аффинные координаты точек e_0, e_1, e_2, e_3, e_4 соответственно через $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Тогда, как известно из аналитической геометрии [50], отношение расстояний точек e_0 и e_4 до прямых e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3 можно определить как отношения определителей третьего порядка

$$\xi_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_0 \\ y_2 & y_3 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}; \quad \xi_2 = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x_0 \\ y_3 & y_1 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x_4 \\ y_3 & y_1 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}; \quad \xi_3 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_0 \\ y_1 & y_2 & y_0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}. \quad (1.32)$$

Формулам (1.32) может быть дана пространственная интерпретация [7, 8, 72, 73, 74].

Рассмотрим связку векторов $\bar{r}_0, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4$ совместно с пространственной системой координат (X, Y, Z) , (рис. 1.16). Векторы берут начало в некоторой точке $S(x_S, y_S, z_S)$, не лежащей в плоскости Π , концы векторов определяются точками плоскости Π . Пусть векторы $\bar{r}_i$ ($i = 1, 2,$

3, 4) будут базисными векторами. Тогда для проективных координат ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 точки e_0 плоскости Π будут иметь место следующие выражения [7, 8, 72, 73, 74]:

$$\xi_1 = \frac{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_0}{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4}; \quad \xi_2 = \frac{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_0}{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4}; \quad \xi_3 = \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}. \quad (1.33)$$

В выражениях (1.33) в числителе и знаменателе суть смешанные произведения, составленные из векторов $\bar{r}_0$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$, $\bar{r}_4$. Чтобы знаменатели в выражениях (1.33) были отличны от нуля, три вектора, составляющие его, не должны быть компланарными.

Формулы (1.33) интересны тем, что модули первых трех векторов, то есть $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ сокращаются, поскольку они содержатся как в числителе, так и в знаменателе. Поэтому координаты ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 можно назвать инвариантными относительно модулей этих векторов [72].

Смешанные произведения векторов в выражениях (1.33) можно записать при помощи определителей третьего порядка. Путем элементарных преобразований определителей исключаются координаты центра проекции и выражения (1.33) приводятся к виду (1.32) [72, 73, 74].

Анализ векторных равенств (1.33) позволяет сделать вывод о том, что проективные координаты не зависят от выбора начала S векторов $\bar{r}_0$, $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$, $\bar{r}_4$ вне плоскости Π и выбора системы координат [72, 73, 74].

Естественным образом будем считать векторы $\bar{r}_0, \bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4$ за однородные векторы, которым соответствуют тройки чисел (x, y, z) , где $z = \text{const}$, например, 1:

$$\bar{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4. \quad (1.34)$$

В практике обработки снимков измеренные координаты изображений x_i, y_i точек дополняют третьей координатой $z = 1$ и тройку чисел считают за векторы (1.34), из которых строятся проективные координаты [7, 8, 9, 23, 75]. Заменяя в проективных координатах (1.33) вектор $\bar{r}_0$ последовательно векторами $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4$, получим соответственно четыре тройки координат $(\xi_1, 0, 0), (0, \xi_2, 0), (0, 0, \xi_3)$ и $(1, 1, 1)$. Этим координатам соответствуют четыре точки (рис. 1.16), из которых три первые – базисные, а четвертая – единичная.

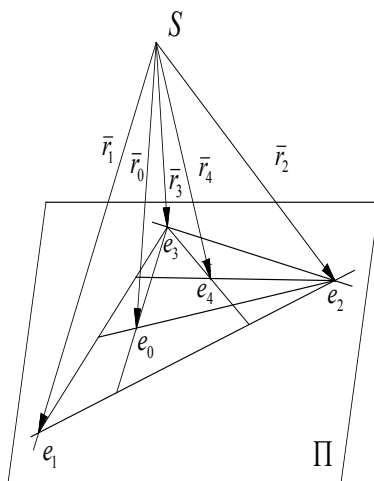


Рис. 1.16. Векторная интерпретация проективных координат

Сравнение формул (1.33) для проективных координат с формулами (1.19), (1.20), (1.21) двойного отношения четырех плоскостей пучка позволяет установить следующие зависимости:

$$\gamma_1 = \frac{\xi_2}{\xi_3}; \quad \gamma_2 = \frac{\xi_1}{\xi_3}; \quad \gamma_3 = \frac{\xi_1}{\xi_2}. \quad (1.35)$$

Такова связь между однородными проективными координатами точки плоскости и двойным (ангармоническим) отношением.

§ 1.6. Векторная форма коллинеарного соответствия двух плоских полей

Известно, что коллинеарное преобразование сохраняет двойное отношение четырех коллинеарных точек и сопутствующее ему двойное отношение четырех прямых пучка и четырех плоскостей пучка плоскостей [25, 33, 42, 73, 84].

В связи с этим представляется целесообразным использование двойного (ангармонического) отношения, а также проективных координат для аналитического описания коллинеарных преобразований. Аналитическое описание коллинеаций можно представить в изящной векторной форме, если при этом использовать векторную интерпретацию основных инвариантов проективной геометрии – двойного отношения (1.19), (1.20), (1.21) и проективных координат (1.33).

Одна из основных теорем проективной геометрии утверждает, что коллинеарное соответствие двух плоских полей Π и Π' будет вполне определено, если четырем независимым точкам e_1, e_2, e_3, e_4 , из кото-

рых никакие три не лежат на одной прямой поля Π , задать соответствующие четыре независимые точки e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 поля Π' [25, 60].

В работах, например, в [25, 60, 84] доказывается, что при любом коллинеарном соответствии двум произвольным проективным пучкам первого поля Π соответствуют проективные пучки второго поля Π' , причем общему лучу пучков первого поля соответствует общий луч соответствующих пучков второго поля (рис. 1.17).

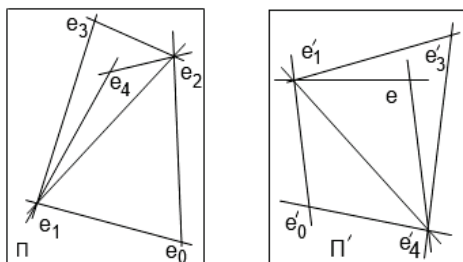


Рис. 1.17. Коллинеарное соответствие двух плоских полей

С помощью двух пар проективных пучков можно для некоторой произвольной точки e_0 первого поля Π находить вполне определенную точку e'_0 второго поля Π' . По равенству сложных отношений пучка e'_1 плоскости Π' и пучка e_1 плоскости Π можно найти луч $e'_1e'_0$, а по равенству сложных отношений пучка e'_2 плоскости Π' и пучка e_2 плоскости Π можно построить луч $e'_2e'_0$. Очевидно, что в пересечении лучей $e'_1e'_0$ и $e'_2e'_0$ в плоскости Π' определится искомая точка e'_0 .

Рассмотрим в качестве примера рис. 1.18, на котором изображены две плоскости Π и Π' с минимально необходимым количеством соответствующих элементов для коллинеарного соответствия. Обозначим через $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4$ — однородные векторы четырех базисных точек e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 поля Π , подлежащего преобразованию, а через $\bar{r}'_1, \bar{r}'_2, \bar{r}'_3, \bar{r}'_4$ — однородные векторы четырех соответственных точек e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 коллинеарно-преобразованного поля Π' . Тогда коллинеарное преобразование произвольной точки e_0 , которой соответствует однородный вектор $\bar{r}_0$, можно осуществить по формуле [9]:

$$\rho \bar{r}'_0 = \bar{r}'_2 \bar{r}'_3 \bar{r}'_4 \frac{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_0}{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4} \cdot \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0} \cdot \bar{r}'_1 + \bar{r}'_3 \bar{r}'_1 \bar{r}'_4 \frac{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_0}{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4} \cdot \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0} \cdot \bar{r}'_2 + \bar{r}'_1 \bar{r}'_2 \bar{r}'_4 \cdot \bar{r}'_3, \quad (1.36)$$

где $\bar{r}'_2 \bar{r}'_3 \bar{r}'_4, \bar{r}'_3 \bar{r}'_1 \bar{r}'_4, \bar{r}'_1 \bar{r}'_2 \bar{r}'_4$ — смешанные произведения, составленные из однородных векторов коллинеарно-преобразованного поля Π' ; $\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4, \bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4, \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4, \bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_0, \bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_0, \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0$ — смешанные произведения, составленные из однородных векторов поля Π ; $\rho' = \frac{\bar{r}'_1 \bar{r}'_2 \bar{r}'_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0}$ — коэффициент пропорциональности, который в дальнейшем можно опускать, подразумевая, что он отличен от нуля, а значит, направление $\rho' \bar{r}'_0$ совпадает с $\bar{r}'_0$.

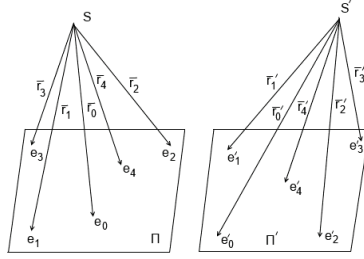


Рис. 1.18. Векторное соответствие плоских полей

Согласно равенствам (1.19) и (1.20), выражение (1.36) перепишем в виде:

$$\rho' \bar{r}'_0 = \bar{r}'_2 \bar{r}'_3 \bar{r}'_4 \cdot \gamma_2 \cdot \bar{r}'_1 + \bar{r}'_3 \bar{r}'_1 \bar{r}'_4 \cdot \gamma_1 \cdot \bar{r}'_2 + \bar{r}'_1 \bar{r}'_2 \bar{r}'_4 \cdot \bar{r}'_3, \quad (1.37)$$

где γ_1, γ_2 – двойные отношения (1.19), (1.20) четырех плоскостей пучков в поле, подлежащих преобразованию.

Принимая во внимание зависимости (1.35) между двойными отношениями γ_1, γ_2 и проективными координатами ξ_1, ξ_2, ξ_3 точки плоскости, получим:

$$\rho' \bar{r}'_0 = \bar{r}'_2 \bar{r}'_3 \bar{r}'_4 \cdot \xi_1 \cdot \bar{r}'_1 + \bar{r}'_3 \bar{r}'_1 \bar{r}'_4 \cdot \xi_2 \cdot \bar{r}'_2 + \bar{r}'_1 \bar{r}'_2 \bar{r}'_4 \cdot \xi_3 \cdot \bar{r}'_3, \quad (1.38)$$

$$\text{где } \rho' = \bar{r}'_1 \bar{r}'_2 \bar{r}'_3. \quad (1.39)$$

Выражение (1.38) отражает коллинеарное соответствие 2-х плоских полей через векторную интерпретацию однородных проек-

тивных координат, упоминается и исследуется в работах [7, 8, 9], в которых одним из соавторов является Ю.М. Трунин.

§ 1.7. Дифференциальные изменения неоднородных координат точки

Несмотря на эффективность использования однородных координат, это совсем не означает отказ от применения неоднородных координат. Неоднородные координаты имеют свое первостепенное, практическое значение: измерения изображений снимков производятся в неоднородных координатах. Дифференциальные изменения неоднородных координат при проективных преобразованиях из одного плоского поля в другое могут иметь, как это будет показано далее, вполне конкретный практический смысл.

Дифференциальные изменения неоднородных координат x_{0i}, y_{0i} некоторой точки i поля Π по неоднородным координатам той же точки поля Π' можно получить на основе соотношения (1.38) – формулы Ю.М. Трунина. Выражение (1.38), устанавливающее однозначное соответствие между полем Π' и полем Π , представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \vec{r}_{0i} &= A_1 \xi'_{1i} \vec{r}_1 + A_2 \xi'_{2i} \vec{r}_2 + A_3 \xi'_{3i} \vec{r}_3, \\ i &= 1, 2, \dots, k, \end{aligned} \tag{1.40}$$

где $\vec{r}_{0i}$ – однородный вектор точки в поле Π ; ρ – коэффициент пропорциональности; $A_1 = \vec{r}_2 \vec{r}_3 \vec{r}_4$, $A_2 = \vec{r}_3 \vec{r}_1 \vec{r}_4$, $A_3 = \vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_4$ – смешанные произведения, составленные из однородных векторов четырех

независимых (опорных) точек поля Π ; ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 – проективные координаты точки в поле Π' , определяемые как отношения смешанных произведений, составленных из однородных векторов опорных точек – $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \vec{r}'_3, \vec{r}'_4$ и исследуемой точки – $\vec{r}'_{0i}$:

$$\xi'_{1i} = \frac{\vec{r}'_2 \vec{r}'_3 \vec{r}'_{0i}}{\vec{r}'_2 \vec{r}'_3 \vec{r}'_4}; \quad \xi'_{2i} = \frac{\vec{r}'_3 \vec{r}'_1 \vec{r}'_{0i}}{\vec{r}'_3 \vec{r}'_1 \vec{r}'_4}; \quad \xi'_{3i} = \frac{\vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \vec{r}'_{0i}}{\vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \vec{r}'_4}. \quad (1.41)$$

От векторной формы записи коллинеарного соответствия двух плоских полей перейдем к координатной форме:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}_i = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \xi'_{1i} \\ A_2 \xi'_{2i} \\ A_3 \xi'_{3i} \end{bmatrix}, \quad (1.42)$$

где x_{0i}, y_{0i} – неоднородные координаты (координаты изображений) преобразуемой точки в поле Π ; x_l, y_l ($l=1, 2, 3$) – неоднородные координаты трех опорных точек из опорной группы. Для коэффициента пропорциональности ρ , как это следует из (1.42), справедливо еще одно соотношение, то есть ему свойственна двойственность:

$$\rho = A_1 \xi'_1 + A_2 \xi'_2 + A_3 \xi'_3; \quad (1.43)$$

$$\rho = \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \vec{r}'_3. \quad (1.44)$$

Дальнейшие шаги следует связать с разложением в ряды Тэйлора в окрестности точки, задаваемой однородным вектором $\vec{r}'_{0i}$:

$$\begin{bmatrix} dx_{0i} \\ dy_{0i} \end{bmatrix} = \frac{\partial(x_{0i}, y_{0i})}{\partial(x'_{0i}, y'_{0i})} \begin{bmatrix} dx'_{0i} \\ dy'_{0i} \end{bmatrix}, \quad (1.45)$$

$i = 1, 2, \dots, k.$

Введя соответствующие обозначения, выражение (1.45) запишем в виде:

$$\bar{\varepsilon}_i = B_i \bar{\delta}_i, \quad (1.46)$$

$(2,1) \quad (2,2) \quad (2,1)$

где

$$\vec{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} dx_{0i} \\ dy_{0i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0i} - x_{0i}^0 \\ y_{0i} - y_{0i}^0 \end{bmatrix} \quad (1.47)$$

$i = 1, 2, \dots, k,$

– вектор дифференциальных изменений неоднородных координат точки в поле Π (x_{0i}^0, y_{0i}^0) – значения функции неоднородных координат в окрестностях точки, задаваемой однородным вектором $\vec{r}_{0i}'$.);

$$B_i = \frac{\partial(x_{0i}, y_{0i})}{\partial(x'_{0i}, y'_{0i})} \quad (1.48)$$

– матрица частных производных от неоднородных координат точки в поле Π по неоднородным координатам этой же точки в поле Π' :

$$\bar{\delta}_i = [dx'_{0i}, dy'_{0i}]^T \quad (1.49)$$

– вектор изменения неоднородных координат точки в поле Π' .

Полученные соотношения будут иметь важное значение при формировании процедуры проективных преобразований из одного поля в другое с применением метода математической статистики, например, метода наименьших квадратов.

§ 1.8. Проективные преобразования двух плоских полей по методу наименьших квадратов

Решение задачи проективного соответствия двух плоских полей, основанное на векторной интерпретации инвариантов проективной геометрии – проективных координат и сложного отношения – является чисто геометрическим и построено с привлечением минимально необходимого количества независимых точек – 4-х опорных точек. Существенным недостатком такого прямого решения является то, что не представляется возможным получать результаты проективных преобразований из уравнительных вычислений.

А. Подход к решению задачи. Уравнение поправок

Предположим, что в поле Π и поле Π' имеется n изображений одних и тех же точек – опорных точек. Сформируем из этих n опорных точек m опорных групп при следующем условии: опорные группы не содержат общих точек. Тогда для i -й преобразуемой точки, координаты которой измерены в поле Π и j -й опорной группы, используя выражение (1.46), можно записать уравнение поправок:

$$\begin{matrix} B_{ij} & \bar{\delta}_i & = & \bar{\varepsilon}_{ij} & + & \bar{V}_{ij}, \\ (2,2) & (2,1) & & (2,1) & & (2,1) \end{matrix}, \quad (1.50)$$

$$i = 1, 2, \dots, k \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь

$$B_{ij} = \frac{\partial(x_{0i}, y_{0i})_j}{\partial(x'_{0i}, y'_{0i})} \quad (1.51)$$

– матрица частных производных от неоднородных координат точки в поле Π по неоднородным координатам этой же точки в поле Π' :

$$\bar{\delta}_i = [dx'_{0i}, dy'_{0i}]^T \quad (1.52)$$

– вектор поправок в предварительные значения неоднородных координат точки в поле Π' ;

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} x_{0i} - x_{0i}^0 \\ y_{0i} - y_{0i}^0 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

– вектор свободных членов; $\bar{V}_{ij}$ вектор поправок в измерения. Совокупность всех возможных уравнений поправок (1.50) будет представлять математическую модель, описывающую сумму проективных преобразований.

Б. Коэффициенты матрицы частных производных

В силу двойственности коэффициента пропорциональности будем иметь два варианта формул:

$$\begin{aligned}
 1. \rho &= A_1 \xi'_1 + A_2 \xi'_2 + A_3 \xi'_3 \\
 b_{11} &= \frac{1}{\rho} (\Theta_1 \Delta x_1^0 \Delta y'_{23} + \Theta_2 \Delta x_2^0 \Delta y'_{31} + \Theta_3 \Delta x_3^0 \Delta y'_{12}) \\
 b_{12} &= \frac{1}{\rho} (\Theta_1 \Delta x_1^0 \Delta x'_{23} + \Theta_2 \Delta x_2^0 \Delta x'_{31} + \Theta_3 \Delta x_3^0 \Delta x'_{12}) \\
 b_{21} &= \frac{1}{\rho} (\Theta_1 \Delta y_1^0 \Delta y'_{23} + \Theta_2 \Delta y_2^0 \Delta y'_{31} + \Theta_3 \Delta y_3^0 \Delta y'_{12}) \\
 b_{22} &= \frac{1}{\rho} (\Theta_1 \Delta y_1^0 \Delta x'_{23} + \Theta_2 \Delta y_2^0 \Delta x'_{31} + \Theta_3 \Delta y_3^0 \Delta x'_{12})
 \end{aligned} \bigg|_{ij}; \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned}
 2. \rho &= \bar{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_3 \\
 b_{11} &= \frac{1}{\rho} (\Theta_1 x_1 \Delta y'_{23} + \Theta_2 x_2 \Delta y'_{31} + \Theta_3 x_3 \Delta y'_{12}) \\
 b_{12} &= \frac{1}{\rho} (\Theta_1 x_1 \Delta x'_{23} + \Theta_2 x_2 \Delta x'_{31} + \Theta_3 x_3 \Delta x'_{12}) \\
 b_{21} &= \frac{1}{\rho} (\Theta_1 y_1 \Delta y'_{23} + \Theta_2 y_2 \Delta y'_{31} + \Theta_3 y_3 \Delta y'_{12}) \\
 b_{22} &= \frac{1}{\rho} (\Theta_1 y_1 \Delta x'_{23} + \Theta_2 y_2 \Delta x'_{31} + \Theta_3 y_3 \Delta x'_{12})
 \end{aligned} \bigg|_{ij}; \tag{1.55}$$

В формулах (1.54) и (1.55) приняты следующие обозначения:

$\Delta x'_{st}, \Delta y'_{st}$ – разности между неоднородными координатами опорных точек, составивших j -ю опорную группу, в поле Π' :

$$\Delta x'_{st} = x'_s - x'_t, \Delta y'_{st} = y'_s - y'_t, \quad s, t = 1, 2, 3, 4; \quad (1.56)$$

$\Delta x_l^0, \Delta y_l^0$ – разности между неоднородными координатами трех опорных точек j -ой опорной группы в поле Π и приближенными значениями неоднородных координат x_0^0, y_0^0 i -й преобразуемой точки:

$$\Delta x_l^0 = x'_l - x_0^0, \Delta y_l^0 = y'_l - y_0^0, \quad l = 1, 2, 3; \quad (1.57)$$

Θ_l -скаляры, определяемые как отношения смешанных произведений однородных векторов j -ой опорной группы в поле Π и Π' :

$$\Theta_l = \frac{A_l}{A'_l}, \quad l = 1, 2, 3; \quad (1.58)$$

где $A'_1 = \vec{r}'_2 \vec{r}'_3 \vec{r}'_4$, $A'_2 = \vec{r}'_3 \vec{r}'_1 \vec{r}'_4$, $A'_3 = \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \vec{r}'_4$.

Правильность аналитических формул (1.54) и (1.55) подтверждена результатами численного дифференцирования.

В. Система нормальных уравнений

Матрица нормальных уравнений, соответствующая сумме проективных преобразований для k точек и m опорных групп, будет иметь блочно-диагональную структуру, если предположить, что опорные группы не содержат общих точек и измерения неоднородных координат независимы.

Диагональные блоки Q_i матрицы нормальных уравнений и блоки $\tilde{\varepsilon}_i$ составляющие вектор свободных членов, определяются следующим образом:

$$Q_i = \sum_{j=1}^m Q_{ij}, \quad \tilde{\varepsilon}_i = \sum_{j=1}^m \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad (1.59)$$

где

$$Q_{ij} = B_{ij}^T P_i B_{ij}, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = B_{ij}^T P_i \bar{\varepsilon}_{ij}; \quad (1.60)$$

$\begin{matrix} (2,2) & (2,2) & (2,2) & (2,2) & (2,1) & (2,2) & (2,2) & (2,1) \end{matrix}$

где P_i – весовая матрица.

Суммирование в выражениях (1.59) выполняется по номерам опорных групп.

Тогда проективное преобразование i -ой точки из поля Π в поле Π' выполнится по формулам:

$$\vec{\delta}_i = Q_i^{-1} \cdot \tilde{\varepsilon}_i \quad (1.61)$$

$\begin{matrix} (2,1) & (2,2) & (2,1) \end{matrix}$

$$x'_{0i} = x'^0_{0i} + dx'_i; \quad y'_{0i} = y'^0_{0i} + dy'_i. \quad (1.62)$$

В выражении (1.61) $\bar{\delta}_i$ – вектор поправок $(dx', dy')_i$ в предварительные значения неоднородных координат x'_{0i}, y'_{0i} точек в поле Π' .

§ 1.9. Результаты численного эксперимента

Для проверки алгоритма были смоделированы две плоскости Π и Π' . При этом исследуемым точкам в поле Π' были заданы смещения $\Delta x'_i, \Delta y'_i$ относительно своих идеальных положений. Эти смещения и находились в процессе проективных преобразований.

По сути своей величины $\Delta x'_i, \Delta y'_i$ представляют разности между предварительными значениями неоднородных координат i -ой точки в поле Π' и неоднородными координатами той же точки после преобразования, то есть $\Delta x'_i = \sum dx'_{i(l)}$, $\Delta y'_i = \sum dy'_{i(l)}$, где суммирование выполняется по номерам итераций – l . Подобная задача, в частности, возникает в фотографической астрометрии при определении собственных движений звезд, которые и являются причиной разностей $\Delta x'_i, \Delta y'_i$.

Пример проективных преобразований представлен в таблице 1.1. Заданное значение дисперсии в этом примере составляет 1 мкм.

Результаты численных экспериментов позволяют сделать вывод о правильности изложенного алгоритма, позволяющего решать задачу проективного преобразования одного плоского поля в другое с использованием по методу наименьших квадратов.

Очевидно преимущество предлагаемого решения перед прямым методом, приведенным в разделе 1.6 (методом Ю.М. Трунина), поскольку появляется возможность включать в одновременную обра-

ботку n опорных точек и возможность анализа ковариационных матриц соответствующих неизвестных после уравнивания.

Таблица 1.1

Значений разностей координат

«№	Теоретическое		$\rho = A_1\varepsilon'_1 + A_2\varepsilon'_2 + A_3\varepsilon'_3$				$\rho = \vec{r}_1\vec{r}_2\vec{r}_3$			
	$\Delta x'$	$\Delta y'$	$\Delta x'$	$\Delta y'$	m_x	m_y	$\Delta x'$	$\Delta y'$	m_x	m_y
1	5,0	5,0	5,6	5,5	0,5	0,5	5,3	5,0	0,7	0,7
2	10,0	10,0	7,6	7,5	0,5	0,5	7,6	7,5	0,7	0,7
Ошибка единицы веса			0,8 мм				0,9 мм			

Выводы

Использование однородных координат позволяет выразить в векторной форме основные инварианты проективной геометрии – двойное отношение и проективные координаты, которые не зависят от координат центра проектирования. Векторные выражения (1.19), (1.20), (1.21) двойного отношения и проективных координат (1.33) будут в дальнейшем использованы в решении задач фотограмметрии и в том числе при обработке снимков звездного неба.

Формула (1.38) описывает известную в фотограмметрии прямую проективную засечку некоторой произвольной точки из четырех точек в задаче графического трансформирования снимка. Как известно, в этой задаче имеется проективно-преобразованный снимок с изображением четырех опорных точек и точки, которую требуется определить в плоскости четырех опорных точек. Как видно, поставленная задача и формула (1.38) тождественны.

В данной главе предлагается алгоритм преобразования двух плоских полей по методу наименьших квадратов, который позволяет в одновременную обработку вовлекать k определяемых точек и n опорных (n больше 4-х). Свое практическое применение алгоритм может найти, в частности, при обработке изображений с целью определения собственных движений звезд. При этом сравнение двух снимков будет выполняться строго без элементов внутреннего ориентирования.

Глава 2. Применение методов математической статистики при использовании инвариантных соотношений проективной геометрии для решения задачи определения сферических координат объектов

§ 2.1. Краткий обзор методов обработки снимков звездного неба

Началом развития фотографического (дифференциального) метода определения положений и собственных движений звезд можно считать 1850 г., после того как сотрудники Гарвардской обсерватории Бонд и Уиппл на 38-сантиметровом рефракторе получили первые фотографии звездного неба.

В настоящее время существует большое количество методов аналитической обработки снимков звездного неба. Разнообразие методов объясняется разнообразием решаемых практических задач и требованием различных точностей их решения. При сложившемся делении методов обработки снимков звездного неба на классические интерполяционные процедуры типа Тернера и методы, основанные на использовании аналитических зависимостей фотограмметрии, справедливым будет выделить еще одну группу методов – методы, основанные на использовании инвариантов проективной геометрии.

Началом теоретических исследований в области обработки (редукций) астрофотографий считается конец 80-х гг. XIX в. Было предложено несколько способов определения сферических координат α, δ звезд на небесной сфере по прямолинейным координатам x, y их изоб-

ражений на фотографической пластине. Наиболее приемлемым оказался интерполяционный метод Оксфордского профессора Тернера [5, 6].

В классической интерпретации связь между экваториальными координатами (α, δ) звезд и измеренными координатами (x, y) их изображений осуществляется через посредство некоторых промежуточных координат (ξ, η) так называемых идеальных, или тангенциальных [3, 5, 6, 64, 65, 77]. Схематически эту связь можно представить следующим образом:

$$(\alpha, \delta) \rightarrow (\text{геометрическая проекция}) \rightarrow (\xi, \eta) \rightarrow (\text{полином}) \rightarrow (x, y).$$

Ввиду того, что экваториальные координаты звезд α и δ отнесены к эпохе T_0 звездного каталога, выбранного в качестве опорного, а x и y к моменту наблюдения t_i необходимо привести их в однозначное соответствие, выполнив следующие предварительные вычисления [5, 6, 64, 65, 77]:

1. Учесть собственное движение звезд за промежуток времени $(t_i - T_0)$, отделяющий эпоху каталога от момента наблюдения.
2. Учесть влияние прецессии и нутации за этот промежуток времени.
3. Учесть влияние атмосферной рефракции и абберации.

Для сокращения вычислительных работ иногда используют не видимые или истинные координаты опорных звезд, а их средние координаты на эпоху каталога. В этом случае, чтобы исключить появление остаточных ошибок, необходимо учитывать влияние за дей-

ствие дифференциальной рефракции и дифференциальной аберрации [4, 5, 14]. Переход $(\alpha, \delta) \rightarrow$ (геометрическая проекция) $\rightarrow (\xi, \eta)$ представляется в виде строгих формул, основанных на зависимостях сферической тригонометрии, а редукция $(\xi, \eta) \rightarrow$ (полином) $\rightarrow (x, y)$ допускает различный подход в получении редукционных постоянных. Точность в определении экваториальных координат зависит от того, насколько принятая модель редукции правильно отражает природу связи между измеренными координатами изображений звезд и соответствующими идеальными координатами [4, 6, 40, 64].

Наиболее простой моделью обработки (редукции) является линейная модель или метод постоянных Тернера. Связь между идеальными и измеренными координатами в этом случае выражается в форме преобразований [5, 40, 41, 64, 77]:

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= a_1 x_i + b_1 y_i + c_1 \\ \eta_i &= a_2 x_i + b_2 y_i + c_2 \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

В процессе обработки эта модель позволяет учесть такие различия двух систем координат, как несовпадение начал систем координат, их разворот, неортогональность измеренной системы координат, а также линейные эффекты дифференциальной рефракции и дифференциальной аберрации. При этом отдельно учитываются члены второго и высшего порядков рефракции и аберрации, поправки за дисторсию объектива, за атмосферную дисперсию и хроматизм увеличения, если он заметен [40, 41].

Линейная модель (2.1) имеет несколько реализаций, использующих различных аналитический аппарат, но полностью эквивалентных с точки зрения геометрии. Главная цель, которую ставили себе авторы модификаций, неизменно состояла в сокращении объема вычислений, связанных с применением способа наименьших квадратов для определения постоянных пластинки. Такой подход характерен для астрономии вообще и в фотографической астрометрии, в частности, в «докомпьютерную эпоху». Соответствующие алгоритмы для определения координат одиночного объекта были разработаны и применены в фотографической астрометрии независимо от метода шести постоянных. Задача определения сферических координат объекта этими алгоритмами решается чисто геометрически – путем интерполирования, без применения аппарата метода наименьших квадратов и, следовательно, без оценки точности конечного результата. Таков, например, метод депенденсов Шлезингера [40, 41, 64, 77], основанный на ряде преобразований формул Тернера. Депенденсы, являющиеся инвариантами линейного преобразования, связаны с определением положения «центра тяжести» плоской конфигурации опорных звезд, который совмещают с определяемым объектом. Отметим, что в простейшем случае – случае трех опорных точек – депенденсы имеют смысл барицентрических координат [42]. Редукционные соотношения метода Шлезингера имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= D_1\xi_1 + D_2\xi_2 + \dots + D_n\xi_n \\ \eta_0 &= D_1\eta_1 + D_2\eta_2 + \dots + D_n\eta_n \end{aligned} \right\}, \quad (2.2)$$

где депенденсы D_j , вычисляемые по измеренным координатам опорных звезд и определяемого объекта, связывают идеальные координаты ξ_0, η_0 объекта с идеальными координатами опорных звезд ξ_i, η_i [40, 41, 64, 77].

Другой подобный метод, так называемый интерполяционный метод был предложен А.А. Киселевым в 1959 г. [43] для астрометрической обработки фотографических наблюдений ИСЗ. Этот метод, используя инварианты линейного преобразования в форме отношения отрезков, естественным образом дополняет метод Шлезингера. Более того, А.А. Киселев отмечает, что метод депенденсов Шлезингера является частным случаем предложенного им метода [40, 44]. Оба эти метода, имеющие одинаковый геометрический смысл, с точки зрения связи измеренных и идеальных координат являются линейными интерполяционными процедурами, так же как и метод шести постоянных.

Следует отметить векторную интерпретацию метода Шлезингера и интерполяционного метода А.А. Киселева, где не применяется аппарат тангенциальных координат, но полностью используются основные геометрические свойства аффинного преобразования [40, 44].

Применение метода Шлезингера и интерполяционного метода А.А. Киселева весьма ограничено и выгодно лишь при небольшом количестве опорных звезд.

Линейная редукционная модель (2.1) справедлива, если отсутствуют эффекты второго и более высокого порядков, искажающие центральную проекцию и тем самым нарушающие линейную форму связи координат ξ, η и x, y [3, 5, 40, 41, 64, 65, 77]. Эта модель доста-

точно правильно отражает природу связи между ξ , η , и x , y , если только сознательно допустить на краях поля зрения $2^\circ \times 2^\circ$ ошибки, не превосходящие $0''{,}3$ [5]. После того, как были построены широкоугольные астрографы с полем зрения от $5^\circ \times 5^\circ$ до $15^\circ \times 15^\circ$, позволяющие получать снимки (астронегативы) с качественным изображением звезд по всему полю, методы редукций по существу остались теми же, основанными на методе Тернера, но с некоторыми усовершенствованиями, позволяющими учесть ряд нелинейных эффектов [5, 40, 64]. Для учета членов второго порядка, от каких бы причин они не происходили, связь между тангенциальными и измеренными координатами можно представить в более общей форме [3, 40, 41]:

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= a_1 x_i + b_1 y_i + c_1 + d_1 x_i^2 + e_1 x_i y_i + f_1 y_i^2 \\ \eta_i &= a_2 x_i + b_2 y_i + c_2 + d_2 x_i^2 + e_2 x_i y_i + f_2 y_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Эту модель редукции в литературе иногда называют моделью с полной квадратичной формой [40]. Модель (2.3) по смыслу должна учитывать все дифференциальные эффекты перехода от измеренных координат к топоцентрическим, имеющие характер линейного и квадратичного преобразований, и в первую очередь, влияние дифференциальной рефракции и дифференциальной аберрации, а также, влияние погрешностей принятого положения оптического центра снимка в ограниченных пределах [3, 5, 40, 41, 65]. Тем не менее эта модель, как и другие модели этого рода, носит сугубо формальный статистический характер, вследствие чего могут

нарушаться некоторые условия проектирования, например, условие коллинеарности. При решении системы уравнений для n опорных звезд по методу наименьших квадратов возникают тесные корреляции между коэффициентами c , d и f [40]. И как отмечается в [40], эта модель может служить источником досадных ошибок в центре снимка (астронегатива), то есть в области, где находятся объекты исследования.

Учет дисторсии и изгиба пластинки приводит к полиномам третьего порядка [41].

В наиболее общем виде редукционные соотношения, связывающие идеальные координаты с измеренными координатами в виде полиномов, представляют следующим образом [64, 87]:

$$\begin{aligned}\xi_i &= \sum a_{jkr s} x_i^j y_i^k m_i^r c_i^s, \\ \eta_i &= \sum b_{jkr s} x_i^j y_i^k m_i^r c_i^s,\end{aligned}\tag{2.4}$$

где $a_{jkr s}$, $b_{jkr s}$ – постоянные пластинки, не имеющие геометрического смысла; ξ_i , η_i – идеальные координаты звезд; x , y – измеренные координаты изображений звезд на снимке (астронегативе); m – звездная величина или диаметр изображения звезды; c – показатель цвета или другая характеристика спектрального класса.

На практике обычно полиномы выше третьей степени по координатам не используют, а по m и c ограничиваются членами первой степени [64, 77].

При использовании классических интерполяционных процедур типа Тернера можно выделить ряд недостатков.

1. В интерполяционных методах влияние ошибок любого характера скрыто формальной схемой условных уравнений. В то же время редуционная модель с достаточной точностью должна описывать процесс построения звездных изображений на снимке (астронегативе). Если модель не в полной мере описывает этот процесс, то это приведет к возникновению систематических ошибок в определяемых координатах. С другой стороны, чрезмерное усложнение модели ведет к возникновению нежелательных корреляций между постоянными пластинки и может привести к плохой обусловленности системы нормальных уравнений, а в некоторых случаях она может стать вырожденной [40, 88, 89]. Особенности редуционной модели определяют такие характеристики, как угловые размеры поля, качество изображений, дисторсия, стабильность положения оптического центра.

Поэтому для каждого конкретного случая необходимо осуществить выбор оптимальной редуционной модели. В то же время полиномы позволяют получить достаточно надежные результаты лишь в области поля изображения, близкой к центральной части.

2. Отсутствует строгая с позиций метода наименьших квадратов оценка точности окончательного результата – экваториальных координат объектов. Использование редуционных моделей вида (2.4) позволяет получить из решения системы нормальных уравнений и оценить точность в соответствии с правилами метода наименьших квадратов (МНК) только постоянные пластинки a_{jkrs} , b_{jkrs} . Значения этих постоянных в дальнейшем используют для определения идеальных координат, а по ним вычисляются окончательные значения экваториальных координат α и δ . Если для определения положений звезд ис-

пользуются перекрывающиеся снимки звездного неба, в области перекрытий которых изобразились одни и те же звезды, то окончательные значения их сферических координат вычисляются простым осреднением. Следовательно, экваториальные координаты звезд определяются не из уравнительных вычислений по МНК, что ведет к нарушению математической строгости, как в определении положений звезд, так и в определении их средних квадратических ошибок.

Применению и развитию методов обработки (редукции) снимков звездного неба, отличных от классических интерполяционных процедур и, в частности, методов обработки астронегативов, основанных на использовании аналитических зависимостей фотограмметрии, способствовало несколько причин:

- применение в фотографической астрометрии широкоугольных астрографов, позволяющих получать на одном снимке звездного неба сферические трапеции от $5^\circ \times 5^\circ$ до $15^\circ \times 15^\circ$ с высоким качеством изображений звезд по всему полю [64];
- запуск ИСЗ и появление в связи с этим задачи определения ряда точных положений спутника по фотоснимку с большим полем ($40^\circ \times 40^\circ$ и более) при произвольном склонении оптического центра [3, 64];
- появление высокопроизводительных компьютеров, позволяющих обрабатывать большой массив информации;
- создание автоматических и полуавтоматических измерительных машин, позволяющих с высокой точностью (до 0,5 мкм) измерять координаты изображений большого количества звезд (до 1000 звезд в час) [5].

Методы обработки снимков звездного неба (астронегативов), основанные на использовании аналитических зависимостей фотограмметрии, являются более строгими в смысле характера искажений и лишены недостатков, присущих интерполяционным методам [55, 56, 66, 60, 83, 86, 90].

В основе данных методов лежит принцип совместного определения элементов внутреннего и внешнего углового ориентирования снимков, параметров, учитывающих деформацию связки проектирующих лучей и экваториальных координат звезд с определением их средних квадратических ошибок из обработки результатов измерений по методу наименьших квадратов.

В этом случае связь между измеренными и идеальными координатами выражается уже не рядами по степеням x и y , а аналитическими зависимостями, параметры которых имеют вполне определенный геометрический смысл:

$$\begin{aligned} x - x_r &= -f \frac{\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3}{\gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3}, \\ y - y_r &= -f \frac{\beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3}{\gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь x_r, y_r координаты оптического центра астронегатива, f – фокусное расстояние; $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ ($j = 1, 2, 3$) – девять направляющих косинусов углов между осями измеренных координат $oxyz$ и осями тангенциальных координат $T_{\xi\eta\zeta}$ [40, 45]. Рабочие формулы обработки снимков могут быть получены путем линеаризации выражений (2.5). В итоге получают систему уравнений поправок, содержащих до 18-ти неизвестных [91]. Решение по методу наименьших квадратов позво-

ляет согласовать исходные данные – массивы координат x , y и ξ , η для опорных звезд по всему полю снимка, достигающего размеров $30^\circ \times 30^\circ$ со средней ошибкой порядка 2,5–3,0 мкм и попутно оценить некоторые постоянные съёмочной камеры [45]. Метод обработки астронегативов, основанный на использовании зависимостей (2.5) и названный А.А. Киселевым геометрическим, широко применялся в Пулковской обсерватории при астрометрической обработке фотографических наблюдений больших планет и комет, полученных на двойном широкоугольном астрографе, а также при калибровке широкоугольных съёмочных камер советских обсерваторий [40, 45, 46]. Использование уравнений коллинеарности, устанавливающих однозначное соответствие между координатами x и y изображения звезды и направлением на нее в пространстве

$$\begin{aligned} x - x_r &= -f \frac{\alpha_{11}L + \alpha_{12}M + \alpha_{13}N}{\alpha_{31}L + \alpha_{32}M + \alpha_{33}N}, \\ y - y_r &= -f \frac{\alpha_{21}L + \alpha_{22}M + \alpha_{23}N}{\alpha_{31}L + \alpha_{32}M + \alpha_{33}N}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где L , M , N – составляющие единичного вектора-направления на звезду; $(a_{ij}, i, j = 1, 2, 3)$ – направляющие косинусы, определяющие ориентацию измеренной системы координат относительно инерциальной системы координат, позволило разработать соответствующие алгоритмы калибровки широкоугольных астрографов, а также построение и уравнивание звездной фототриангуляции для составления фотографических каталогов [69, 70].

Применение методов обработки астронегативов, основанных на использовании аналитических зависимостей фотограмметрии (2.5), (2.6) предусматривает предварительно производить калибровку астрографа, в процессе которой уточняются фокусное расстояние, координаты главной точки, определяются коэффициенты радиальной дисторсии и дисторсии децентрации, а также эйлеровы углы, определяющие ориентацию снимков звездного неба (астронегативов). Это требует наблюдений большого количества опорных звезд (около 100), равномерно расположенных по всему полю астронегатива, следствием чего является хорошая обусловленность матрицы нормальных уравнений.

Непременным условием применения данных методов обработки (редукции) является условие ортогональности систем координат. При измерении снимков звездного неба обычными измерительными машинами, как это было ранее, координаты x , y изображений не могут быть отнесены к ортогональной системе координат по ряду причин [5, 40, 45, 55, 65, 77]: вследствие наличия различного рода инструментальных ошибок измерительного прибора, в частности, вследствие неперпендикулярности шкал; вследствие неперпендикулярности линий, задаваемых координатными метками снимка, а также наклона снимка и т. п. Применение цифровых изображений и цифровых технологий позволяет преодолеть данную проблему.

Многие задачи фотографической астрометрии представляют собой по существу проблемы проективной геометрии и могут быть с успехом решены методами проективной геометрии. Примером общей задачи этого типа является задача о преобразовании измеренных координат одного снимка в систему координат другого снимка, наклонен-

ного относительно первого произвольным образом. В [47] отмечается, что с точки зрения проективной геометрии, к этому решению сводятся такие проблемы фотографической астрометрии, как определение собственных движений и параллаксов звезд, а также проблема определения сферических координат небесных объектов средствами астрофотографии при использовании тангенциальных координат.

Вопрос обработки снимков звездного неба (астронегативов) с целью определения сферических координат небесных объектов с использованием проективных преобразований ранее рассматривался рядом исследователей. Так, например, в основе способа Дейча (метод восьми постоянных) исходят из того, что идеальные координаты ξ , η связаны с измеренными x и y соотношениями общего гомографического преобразования [31, 40, 41, 77]. Этот метод широко использовался для астрометрической редукции фотографических наблюдений, полученных на широкоугольных астрографах с хорошо исправленным полем [67, 80].

Использование инвариантов проективной геометрии – двойного (сложного) отношения, проективных координат, открывает возможность решать задачу редукции астронегативов на принципиально новой основе – без знания элементов внутреннего ориентирования камеры [75]. Кроме того, условие ортогональности базисов не является обязательным, то есть измерения могут выполняться с неперпендикулярными шкалами [7, 23].

Известен ряд способов обработки снимков звездного неба, основанных на использовании инвариантных соотношений проективной геометрии [40, 41, 47, 75]. Для частного случая четырех опорных звезд и одного определяемого объекта были предложены способы, основан-

ные на использовании инвариантности двойного отношения четырех отрезков. Так, в 1931 г. Ван Гент опубликовал метод, основанный на использовании двойного отношения синусов углов, образуемых прямыми, исходящими из одной точки. Ван Гент предлагает вычислить тангенциальные координаты на плоскости, касающейся небесной сферы в полюсе мира [41].

Принцип двойного отношения находится и в основе метода, предложенного А.А. Киселевым [40, 47]. Следует отметить решение задачи редукции в векторной форме, что позволяет избежать использования аппарата тангенциальных координат. Положения четырех опорных звезд считают заданными единичными векторами. Единичный вектор – направление $\bar{R}_0^0$ на определяемый объект в этом случае находится как линейная комбинация единичных векторов 4-х опорных звезд [40]:

$$\bar{R}_0^0 = \frac{1}{k} \left[\bar{R}_1^0 + h_1 \frac{\bar{R}_3^0 \bar{R}_4^0 \bar{R}_1^0}{\bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0 \bar{R}_4^0} \bar{R}_2^0 + h_1 h_2 \frac{\bar{R}_4^0 \bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0}{\bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0 \bar{R}_4^0} \bar{R}_3^0 + h_2 \frac{\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0}{\bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0 \bar{R}_4^0} \bar{R}_4^0 \right], \quad (2.7)$$

где $\bar{R}_1^0$, $\bar{R}_2^0$, $\bar{R}_3^0$, $\bar{R}_4^0$ – единичные векторы опорных звезд; h_1 , h_2 – гомографические координаты – сложные отношения, построенные для пучков прямых, исходящих из точек пересечения противоположных сторон четырехугольника; k – величина, определяемая через гомографические координаты; h_1 , h_2 – отношения смешанных произведений, составленных из единичных векторов.

При выводе формулы (2.7) использовалась интерполяционная схема Шлезингера.

А.А. Киселев отмечает, что метод гомографических координат оправдывает свои теоретические надежды, то есть обеспечивает строгую редукцию измерений астрофотографий, когда оптический центр неизвестен или неустойчив [40, 47]. В этих случаях, как показывают исследования, метод гомографических координат обеспечивает лучшую точность, чем линейный метод Тернера (метод шести постоянных) (2.1) или метод с десятью постоянными [47]. Кроме того, во всех задачах редукции – определение положений небесных объектов, определение относительных собственных движений и параллаксов звезд; метод гомографических координат обеспечивает решение, свободное от систематической ошибки, зависящей от наклона пластинки и компенсирует линейные эффекты дифференциальной рефракции и аберрации [40, 47].

Методом гомографических координат обрабатывались фотографические наблюдения ИСЗ, полученные на широкоугольных камерах НАФАЗС, а также для определения положения Марса по наблюдениям на широкоугольном астрографе АКД. В целом метод гомографических координат оказался эффективнее метода Тернера для АКД, поскольку на этом телескопе примитивная конструкция камеры и нет стабильности оптического центра [40, 49].

Решив задачу определения направления на объект в векторной форме (2.7) без использования аппарата тангенциальных координат, тем не менее А.А. Киселеву не удалось отойти от интерполяционной схемы решения задачи.

Более изящное и простое решение задачи определения направления на объект было дано Ю.М. Труниным [9, 75]. Такое решение стало возможным благодаря векторной интерпретации основных соотношений проективной геометрии [7, 8, 9, 25, 26]. Отказываясь от интерполяционных методов, в качестве обобщенной системы координат вводятся проективные координаты. Искомое направление $\bar{R}_0^0$ на объект (ИСЗ, звезды и т. д.) в способе Ю.М. Трунина однозначно определяется выражением [75]:

$$\rho^0 \bar{R}_0^0 = \bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0 \bar{R}_4^0 \frac{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_0}{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4} \bar{R}_1^0 + \bar{R}_3^0 \bar{R}_1^0 \bar{R}_4^0 \frac{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_0}{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4} \bar{R}_2^0 + \bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_4^0 \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4} \bar{R}_3^0, \quad (2.8)$$

где $\bar{R}_j^0$ ($j = 1, 2, 3, 4$) – единичные векторы опорных звезд; $\bar{r}_j$ ($j = 1, 2, 3, 4$) и $\bar{r}_0$ – однородные векторы изображений соответственно опорных звезд и определяемого объекта; ρ^0 – коэффициент пропорциональности.

Для определения $\bar{R}_0^0$ достаточно вычислить смешанные произведения единичных векторов $\bar{R}_j^0$ ($j = 1, 2, 3, 4$) опорных звезд и проективные координаты. Проективными координатами здесь будут величины

$$\xi_1 = \frac{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_0}{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4}; \quad \xi_2 = \frac{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_0}{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4}; \quad \xi_3 = \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}, \quad (2.9)$$

вычисляемые как отношения смешанных произведений однородных векторов – векторов, опирающихся на изображения опорных звезд и объекта на астронегативе.

Таким образом, алгоритм определения направления на объект достаточно прост и сводится к вычислению смешанных произведений векторов.

Из анализа выражений проективных для координат (2.9), как это будет показано далее, можно видеть, что фокусное расстояние и координаты главной точки снимка (оптического центра снимка) в проективных координатах не фигурируют.

Отметим положительные качества проективного метода Ю.М. Трунина [7, 23, 25, 26]:

- обработка снимка с использованием проективных координат выполняется строго без элементов внутреннего ориентирования съёмочной камеры, что исключает появление систематической ошибки, возникающей от погрешности принятого оптического центра и фокусного расстояния;

- метод обеспечивает инвариантность результатов определения координат объекта к коллинеарным преобразованиям, тем самым освобождая конечный результат от систематической ошибки, возникающей от наклона проективной плоскости (плоскости снимка);

- измерения изображения (снимка) могут производиться компараторе с неперпендикулярными шкалами, места нулей шкал роли не играют, то есть на снимке могут отсутствовать координатные метки;

- кроме того, метод исключает использование тангенциальных координат;

- искажения линейного характера компенсируются автоматически.

Результаты исследований показывают равносильность метода Ю.М. Трунина, основанного на использовании проективных координат и гомографического метода А.А. Киселева [23].

Эти методы наиболее удобно применять при определении положений одиночных объектов на широкоугольных фотографиях, если отсутствуют близкие опорные звезды и если по условиям задачи необходимо привязаться к далеким опорным звездам. Такие условия могут встретиться при обработке фотографических наблюдений искусственных спутников Земли, Луны и больших планет. При этом необходимо предварительно учитывать влияние искажающих факторов второго и третьего порядков: дифференциальную рефракцию, дифференциальную аберрацию и дисторсию.

Существенным недостатком известных методов обработки (редукции) снимков звездного неба (астронегативов), основанных на использовании инвариантных соотношений проективной геометрии является то, что в данных методах не представляется возможным получать результаты и производить оценку точности из уравнительных вычислений по методу наименьших квадратов. Схемы решения задачи редукции, предложенные авторами методов (Ван Гентом, А.А. Киселевым, Ю.М. Труниным) не позволяют получить невязки. Эффективный контроль обеспечивается только повторением обработки с другими опорными звездами.

Таким образом, подводя итоги, можно отметить актуальность проблемы обработки снимков звездного неба на основе проективных преобразований: с использованием инвариантных соотношений проективной геометрии и одной из статистических процедур, например,

метода наименьших квадратов. Так использование инвариантных соотношений проективной геометрии в сочетании с методом наименьших квадратов позволит:

- производить снимков строго без элементов внутреннего ориентирования съёмочной камеры, получать результаты, инвариантные по отношению к коллинеарным преобразованиям;
- преодолеть основной недостаток классических интерполяционных процедур – необходимость выбора редукционной модели и отсутствие оценки точности по МНК;
- преодолеть основной недостаток методов обработки снимков звездного неба, основанных на использовании аналитических зависимостей фотограмметрии – требование условия ортогональности базисов.

§ 2.2. Математическая модель обработки изображений звездного неба с использованием инвариантных соотношений проективной геометрии

Известные алгоритмы обработки снимков звездного неба, основанные на использовании инвариантных соотношений проективной геометрии – метод Ю.М. Трунина, А.А. Киселева, Ван Гента [41, 47, 75], не содержат возможности обработки массива измеренных координат звезд с применением методов математической статистики, например, метода наименьших квадратов и, следовательно, не позволяют выполнить строгую оценку точности полученных результатов, а также строить и уравнивать сети сгущения

звездной фототриангуляции по серии перекрывающихся между собой снимков.

Решение проблемы применения методов математической статистики при обработке изображений звездного неба (астроизображений, астронегативов) с использованием инвариантных соотношений проективной геометрии связано с решением проблемы создания математической модели экспериментального материала.

Под математической моделью экспериментального материала подразумевают совокупность априорных сведений о связи наблюдаемого (экспериментального) поля с исследуемым объектом [27, 28].

При построении математической модели обработки астроизображений с использованием инвариантных соотношений проективной геометрии наблюдаемым полем объекта будет являться множество однородных векторов $\bar{r}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), компоненты которых есть измеренные координаты (x_i, y_i) изображений небесных объектов (звезд, планет, ИСЗ и т. д.)

$$\bar{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Объектом в задаче обработки изображения звездного неба является множество векторов $\bar{R}_i^0$, фиксирующих направления на

звезды (ИСЗ) в средней экваториальной системе координат, закрепленной на начальную эпоху T_0 :

$$\bar{R}_i^0 = \begin{bmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i \cdot \cos \delta_i \\ \sin \alpha_i \cdot \cos \delta_i \\ \sin \delta_i \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Между экспериментальным полем $\bar{U}$ и его теоретической моделью $\Phi(\bar{X})$ существует соотношение [27]

$$\bar{U} = \Phi(\bar{X}) + \bar{V}, \quad (2.12)$$

где $\bar{X}$ – вектор неизвестных параметров, $\bar{V}$ – вектор расхождений полей в точках наблюдений. Полное расхождение $\bar{V}$ представляют обычно в виде трех составляющих

$$\bar{V} = \bar{V}' + \bar{V}'' + \bar{V}''', \quad (2.13)$$

где под $\bar{V}'$ понимается вектор ошибок измерений, $\bar{V}''$ – вектор ошибок, возникающих от не учитываемых источников, $\bar{V}'''$ – вектор ошибок моделирования.

Постановка вопроса такова, что теоретическая модель $\Phi(\bar{X})$ строится в проективном пространстве, в форме некоторых уравнений связи на основании инвариантных соотношений проективной геометрии, используя в качестве модели проективной плоскости

связку векторов. В связи с этим возникает задача приведения реального пространства наблюдений к проективному путем устранения в точках наблюдений (x_i, y_i) экспериментального поля $\bar{U}$ искажающих факторов, имеющих нелинейный характер. В дальнейшем в работе рассматривается вопрос формализации некоторых дополнительных априорных данных о расхождениях и учет этих данных в процессе математической обработки астроизображений.

§ 2.3. Дополнительные априорные сведения о математической модели

К числу таких данных относятся известные закономерности действия дифференциальной рефракции, дифференциальной абберации, а также радиальной дисторсии.

А. Учет дифференциальной рефракции и абберации

Известно [5, 6, 11, 21, 41], что дифференциальная рефракция и дифференциальная абберация вызывает изменение взаимного расположения звезд в поле изображения. При этом величина смещения зависит от зенитного расстояния и от расположения светил относительно апекса.

Поправки за действие дифференциальной рефракции и абберации в непосредственно измеренные координаты изображений звезд можно получить, используя формулы, полученные на

основании соотношений сферической тригонометрии [5, 6, 11, 21, 41]. В частности, при учете членов второго порядка дифференциальной рефракции можно использовать формулы [11]

$$\Delta x_i^{(1)} = \frac{k}{F} Z_1 \left[(1 + Z_1^2) \bar{x}_i^2 + 2Z_1 Z_2 \bar{x}_i \bar{y}_i + (1 + Z_2^2) \bar{y}_i^2 \right] \quad (2.14)$$

$$\Delta y_i^{(1)} = \frac{k}{F} Z_2 \left[(1 + Z_2^2) \bar{y}_i^2 + 2Z_1 Z_2 \bar{x}_i \bar{y}_i + (1 + Z_1^2) \bar{x}_i^2 \right] \quad (2.15)$$

В выражениях (2.5) и (2.6) приняты следующие обозначения:

$\bar{x}_i = x_i - x_T$, $\bar{y}_i = y_i - y_T$ – координаты изображения звезды, отнесенные к главной точке снимка; F – фокусное расстояние съемочной камеры; k – коэффициент рефракции; $Z_1 = \operatorname{tg} z_0 \sin q$, $Z_2 = \operatorname{tg} z_0 \cos q$, где z_0 – зенитное расстояние оптического центра; q – параллактический угол.

В литературе отмечается, что при площади фотографирования (съемки) $2^\circ \times 2^\circ$ и зенитном расстоянии менее 60° величина дифференциальной рефракции второго порядка не достигает $0,2''$ [5, 41].

Влияние вторых членов абберации гораздо меньше, чем рефракции, так как постоянная абберации в три раза меньше, чем коэффициент рефракции и в основную зависимость входит синус углового расстояния звезды от апекса вместо тангенса [5, 11, 41].

Б. Учет дисторсии

Поправки за совместное влияние радиальной дисторсии и дисторсии децентрации можно определить по формулам Д. Брауна [77]

$$\Delta x_i^{(2)} = \bar{x}_i(K_1 r_i^2 + K_2 r_i^4 + \dots) + [P_1(r_i^2 + 2\bar{x}_i^2) + 2P_2\bar{x}_i\bar{y}_i^2] \cdot [1 + P_3 r_i^2 + \dots] \quad (2.16)$$

$$\Delta y_i^{(2)} = \bar{y}_i(K_1 r_i^2 + K_2 r_i^4 + \dots) + [2P_1\bar{x}_i\bar{y}_i + P_2(r_i^2 + 2\bar{y}_i^2)] \cdot [1 + P_3 r_i^2 + \dots] \quad (2.17)$$

где $K_1, K_2, \dots$ – коэффициенты радиальной дисторсии; $J_1, J_2, \dots$ – коэффициенты дисторсии децентрации; $\bar{x}_i, \bar{y}_i$ – координаты изображения звезды, отнесенные к главной точке снимка; $r_i = (\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)^{1/2}$ – расстояние до изображения звезды. Величины P_1, P_2, P_3 , входящие в выражения (2.16), (2.17) являются функциями от параметров дисторсии децентрации:

$$P_1 = J_1 \frac{\bar{x}_i}{r_i}; \quad P_2 = J_2 \frac{\bar{y}_i}{r_i}; \quad P_3 = J_2/J_1. \quad (2.18)$$

При вычислении поправок за дифференциальную рефракцию, дифференциальную аберрацию и дисторсию в качестве номинальных значений координат главной точки снимка, фокусного расстояния и коэффициентов дисторсии могут быть взяты их паспортные значения или значения, полученные в процессе калибровки.

§ 2.4. Связь между координатами изображения объекта и направлением на объект в пространстве

Пусть заданы четыре опорных единичных вектора-направления на звезды в инерциальной системе координат (рис. 2.1):

$$\bar{R}_m^0 = \begin{bmatrix} L_m \\ M_m \\ N_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_m \cdot \cos \delta_m \\ \sin \alpha_m \cdot \cos \delta_m \\ \sin \delta_m \end{bmatrix}, m = 1, 2, 3, 4. \quad (2.19)$$

Потребуем, чтобы заданные направления были по три неколлинеарными.

Единичный вектор-направление на определяемый объект (звезда, ИСЗ и т. д.) обозначим через $\bar{R}_0^0$:

$$\bar{R}_0^0 = \begin{bmatrix} L_0 \\ M_0 \\ N_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 \cdot \cos \delta_0 \\ \sin \alpha_0 \cdot \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Координаты изображений этих же четырех опорных звезд в поле изображения обозначим через x_m, y_m ($m = 1, 2, 3, 4$), а координаты определяемого объекта через x_0, y_0 .

Зафиксируем положение изображений опорных звезд и определяемого объекта однородными векторами $\bar{r}_m$ и $\bar{r}_0$, имеющими начало в точке (центр проекции), не лежащей в плоскости

изображения совпадающей с началом инерциальной системы координат (рис. 2.1):

$$\bar{r}_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ 1 \end{bmatrix}; m = 1, 2, 3, 4; \quad \bar{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

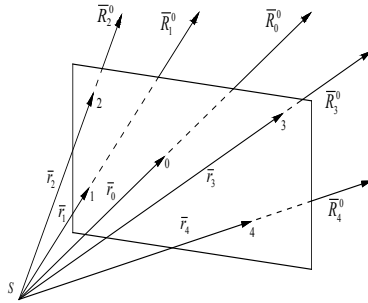


Рис. 2.1. Снимок звездного неба

Разложим вектор $\bar{r}_0$ по трем некомпланарным векторам $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ [32]:

$$(\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3) \cdot \bar{r}_0 = (\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_0) \cdot \bar{r}_1 + (\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_0) \cdot \bar{r}_2 + (\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0) \cdot \bar{r}_3, \quad (2.22)$$

где $\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3, \bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_0, \bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_0, \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0$ – смешанные произведения, составленные из векторов $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3$ и $\bar{r}_0$.

Первое слагаемое правой части выражения (2.22) умножим на $\frac{\bar{r}_2\bar{r}_3\bar{r}_4}{\bar{r}_2\bar{r}_3\bar{r}_4}$, второе – на $\frac{\bar{r}_3\bar{r}_1\bar{r}_4}{\bar{r}_3\bar{r}_1\bar{r}_4}$, третье – на $\frac{\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_4}{\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_4}$.

Получим

$$(\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_3) \cdot \bar{r}_0 = \bar{r}_2\bar{r}_3\bar{r}_4 \frac{\bar{r}_2\bar{r}_3\bar{r}_0}{\bar{r}_2\bar{r}_3\bar{r}_4} \cdot \bar{r}_1 + \bar{r}_3\bar{r}_1\bar{r}_4 \frac{\bar{r}_3\bar{r}_1\bar{r}_0}{\bar{r}_3\bar{r}_1\bar{r}_4} \cdot \bar{r}_2 + \bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_4 \frac{\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_0}{\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_4} \cdot \bar{r}_3. \quad (2.23)$$

Отношения смешанных произведений $\frac{\bar{r}_2\bar{r}_3\bar{r}_0}{\bar{r}_2\bar{r}_3\bar{r}_4}$, $\frac{\bar{r}_3\bar{r}_1\bar{r}_0}{\bar{r}_3\bar{r}_1\bar{r}_4}$, $\frac{\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_0}{\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_4}$ представляют собой проективные координаты ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , определяемой точки (1.33). Используя свойство инвариантности проективных координат относительно проективных преобразований:

$$\frac{\bar{r}_2\bar{r}_3\bar{r}_0}{\bar{r}_2\bar{r}_3\bar{r}_4} = \frac{\bar{R}_2^0\bar{R}_3^0\bar{R}_0^0}{\bar{R}_2^0\bar{R}_3^0\bar{R}_4^0}, \quad \frac{\bar{r}_3\bar{r}_1\bar{r}_0}{\bar{r}_3\bar{r}_1\bar{r}_4} = \frac{\bar{R}_3^0\bar{R}_1^0\bar{R}_0^0}{\bar{R}_3^0\bar{R}_1^0\bar{R}_4^0}, \quad \frac{\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_0}{\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_4} = \frac{\bar{R}_1^0\bar{R}_2^0\bar{R}_0^0}{\bar{R}_1^0\bar{R}_2^0\bar{R}_4^0}, \quad (2.24)$$

выражение (2.23) приведем к виду:

$$\rho\bar{r}_0 = A_1\xi_1r_1 + A_2\xi_2r_2 + A_3\xi_3r_3, \quad (2.25)$$

где

$$\rho = \bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_3; \quad (2.26)$$

$$A_1 = \bar{r}_2\bar{r}_3\bar{r}_4; \quad A_2 = \bar{r}_3\bar{r}_1\bar{r}_4; \quad A_3 = \bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_4; \quad (2.27)$$

$$\xi_1 = \frac{\bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0 \bar{R}_0^0}{\bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0 \bar{R}_4^0}; \quad \xi_2 = \frac{\bar{R}_3^0 \bar{R}_1^0 \bar{R}_0^0}{\bar{R}_3^0 \bar{R}_1^0 \bar{R}_4^0}; \quad \xi_3 = \frac{\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_0^0}{\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_4^0}. \quad (2.28)$$

Величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 есть проективные координаты точки. При фиксированном направлении $\bar{R}_0^0$ на точку ее проективные координаты будут определяться выбранной опорой.

Формула (2.25) выражает связь между координатами изображения объекта и направлением $\bar{R}_0^0$ на этот объект в пространстве.

Формула (2.25) может быть получена несколько иначе. Умножив выражение (2.23) на смешанное произведение $A_3 = \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4$ разделим на $\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0$, получим

$$\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0} \cdot \bar{r}_0 = \bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4 \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0} \frac{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_0}{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4} \cdot \bar{r}_1 + \bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4 \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0} \frac{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_0}{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4} \cdot \bar{r}_2 + \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4 \cdot \bar{r}_3. \quad (2.29)$$

Дроби $\frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0} \frac{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_0}{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4}$, $\frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0} \frac{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_0}{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4}$ в выражении (2.29) есть сложные отношения γ_2 (1.20) и γ_1 (1.19) соответственно. Используя свойства инвариантности сложного отношения относительно проективных преобразований:

$$\frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0} \frac{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_0}{\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4} = \frac{\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_4^0}{\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_0^0} \frac{\bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0 \bar{R}_0^0}{\bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0 \bar{R}_4^0}, \quad (2.30)$$

$$\frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0} \frac{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_0}{\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4} = \frac{\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_4^0}{\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_0^0} \frac{\bar{R}_3^0 \bar{R}_1^0 \bar{R}_0^0}{\bar{R}_3^0 \bar{R}_1^0 \bar{R}_4^0}, \quad (2.31)$$

выражение (2.29) перепишем в виде

$$\rho \bar{r}_0 = A_1 \gamma_2 \bar{r}_1 + A_2 \gamma_2 \bar{r}_2 + A_3 \bar{r}_3, \quad (2.32)$$

где

$$\rho' = \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 \cdot \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4}{\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_0} = \rho / \xi_3; \quad (2.33)$$

$$\gamma_1 = \frac{\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_4^0}{\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_0^0} \frac{\bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0 \bar{R}_0^0}{\bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0 \bar{R}_4^0}, \quad (2.34)$$

$$\gamma_2 = \frac{\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_4^0}{\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_0^0} \frac{\bar{R}_3^0 \bar{R}_1^0 \bar{R}_0^0}{\bar{R}_3^0 \bar{R}_1^0 \bar{R}_4^0}. \quad (2.35)$$

Использование аналитических зависимостей (1.35) между сложными отношениями γ_2 , γ_1 и проективными координатами ξ_1 , ξ_2 позволяет путем несложных преобразований выражения (2.32) также получить формулу связи (2.25).

Формула (2.32), как и формула (2.25), отражает связь между координатами изображения объекта (звезда, ИСЗ) на снимке и направлением $\bar{R}_0^0$ на этот объект в пространстве, но записанную с использованием сложных отношений. Очевидна эквивалентность (в смысле постановки задачи) этих выражений, правые части которых нелинейны относительно сферических координат α_0, δ_0 объекта.

Формулы связи (2.25) и (2.32) представим в координатной форме. Для выражения (2.25) будем иметь:

$$\rho \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & \xi_1 \\ A_2 & \xi_2 \\ A_3 & \xi_3 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Отсюда следует

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 & \xi_1 \\ A_2 & \xi_2 \\ A_3 & \xi_3 \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\rho = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3. \quad (2.38)$$

Таким же образом получим для выражения (2.33):

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho'} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \gamma_2 \\ A_2 \gamma_1 \\ A_3 \end{bmatrix}; \quad (2.39)$$

$$\rho' = A_1 \gamma_2 + A_2 \gamma_1 + A_3. \quad (2.40)$$

Коэффициенты пропорциональности ρ и ρ' аналитически зависимы между собой. И как следует из (1.35) и (2.33), коэффициент ρ' отличается от ρ на величину, обратно пропорциональную третьей проективной координате.

Выражения (2.37), (2.38) и (2.39), (2.40) представляют собой связь между координатами изображения объекта на снимке и направлением на этот объект в пространстве, записанную в координатной форме с использованием инвариантных соотношений проективной геометрии.

§ 2.5. Принципы уравнительных вычислений при проективных преобразованиях

А. Определяемые параметры

Предположим, что в поле изображений имеется n опорных звезд и k изображений определяемых объектов. Сформируем из n опорных звезд m опорных групп (четырёхугольников) при условии, что опорные группы не содержат общих звезд. Тогда для каждого i -го ($i = 1, 2, \dots, k$) определяемого объекта и j -ой ($j = 1, 2, \dots, m$) опорной группы звезд можно записать уравнение связи типа (2.25), которое представим в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_{0ij} &= \frac{1}{\rho_{ij}} (x_{1j} A_{1j} \xi_{1ij} + x_{2j} A_{2j} \xi_{2ij} + x_{3j} A_{3j} \xi_{3ij}) \\ y_{0ij} &= \frac{1}{\rho_{ij}} (y_{1j} A_{1j} \xi_{1ij} + y_{2j} A_{2j} \xi_{2ij} + y_{3j} A_{3j} \xi_{3ij}) \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

Анализ уравнений (2.25), (2.33) позволяет заключить, что в общем случае в качестве неизвестных параметров при уравнительных вычислениях могут быть приняты две группы величин:

- сферические координаты α_{0i}, δ_{0i} определяемых объектов;

– координаты x_{sj}, y_{sj} ($s = 1, 2, 3, 4$) изображений опорных звезд, составивших опорные группы.

Таким образом, использование инвариантных соотношений проективной геометрии позволяет построить принципиально новые алгоритмы обработки изображений звездного неба, в которых из уравнительных вычислений, наряду с экваториальными координатами объектов, будут находиться поправки $\Delta x_{sj}, \Delta y_{sj}$ к измеренным координатам изображений опорных звезд, задающих на снимке множество различных систем проективных координат.

Можно констатировать, что поправки $\Delta x_{sj}, \Delta y_{sj}$ будут определяться не только ошибками измерений координат изображений опоры и объекта, но и ошибками опорного каталога. Поэтому решение задачи определения сферических координат небесных тел (задача редукции астронегатива в фотографической астрометрии) будет более жестким (в геометрическом смысле) при двух группах неизвестных параметров, чем в случае, когда в качестве неизвестных будет принята только одна группа величин – сферические координаты. В дальнейшем проективное преобразование с двумя группами неизвестных параметров будем именовать как решение полной задачи обработки изображения (ПЗО).

Б. Линеаризация уравнения связи

Получим линейную форму модели (2.41) путем разложения в ряды Тейлора в окрестности некоторой точки $\bar{X}_{ij}^0$:

$$\bar{X}_{ij}^0 = \left[\alpha_{0i}^0, \delta_{0i}^0 | x_{1j}^0, y_{1j}^0, x_{2j}^0, y_{2j}^0, x_{3j}^0, y_{3j}^0, x_{4j}^0, y_{4j}^0 \right] \quad (2.42)$$

Линеаризованную модель уравнений (2.41) будем строить в виде:

$$dx_{0ij} = \frac{\partial x_{0ij}}{\partial (\alpha_0 \delta_0)_i} \left[d\alpha_0 \right] + \frac{\partial x_{0ij}}{\partial (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)_j} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ dx_3 \\ dy_3 \\ dx_4 \\ dy_4 \end{bmatrix}_j ; \quad (2.43)$$

$$dy_{0ij} = \frac{\partial y_{0ij}}{\partial (\alpha_0 \delta_0)_i} \left[d\alpha_0 \right] + \frac{\partial y_{0ij}}{\partial (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)_j} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ dx_3 \\ dy_3 \\ dx_4 \\ dy_4 \end{bmatrix}_j . \quad (2.44)$$

Объединив теперь оба уравнения в одно матричное уравнение, представим его в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \end{bmatrix}_{ij} = \frac{\partial(x_0 y_0)_{ij}}{\partial(\alpha_0 \delta_0)_i} \begin{bmatrix} d\alpha_0 \\ d\delta_0 \end{bmatrix}_i + \frac{\partial(x_0 y_0)_{ij}}{\partial(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)_j} \cdot \begin{bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \\ dx_3 \\ dy_3 \\ dx_4 \\ dy_4 \end{bmatrix}_j. \quad (2.45)$$

Для матриц и векторов правой части уравнения (2.45) введем следующие обозначения:

$$\dot{B}_{ij(2,2)} = \frac{\partial(x_0 y_0)_{ij}}{\partial(\alpha_0 \delta_0)_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{0ij}}{\partial \alpha_{0i}} & \frac{\partial x_{0ij}}{\partial \delta_{0i}} \\ \frac{\partial y_{0ij}}{\partial \alpha_{0i}} & \frac{\partial y_{0ij}}{\partial \delta_{0i}} \end{bmatrix}; \quad \dot{\tilde{\delta}}_{i(2,1)} = \begin{bmatrix} d\alpha_0 \\ d\delta_0 \end{bmatrix}_i \quad (2.46)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\delta}_j^T &= [dx_1, dy_1, dx_2, dy_2, dx_3, dy_3, dx_4, dy_4]_{(8,1)} \\ \ddot{B}_{ij(2,8)} &= \frac{\partial(x_0 y_0)_{ij}}{\partial(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4)_j} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{0ij}}{\partial x_{1j}} & \frac{\partial x_{0ij}}{\partial y_{1j}} & \frac{\partial x_{0ij}}{\partial x_{2j}} & \frac{\partial x_{0ij}}{\partial y_{2j}} & \frac{\partial x_{0ij}}{\partial x_{3j}} & \frac{\partial x_{0ij}}{\partial y_{3j}} & \frac{\partial x_{0ij}}{\partial x_{4j}} & \frac{\partial x_{0ij}}{\partial y_{4j}} \\ \frac{\partial y_{0ij}}{\partial x_{1j}} & \frac{\partial y_{0ij}}{\partial y_{1j}} & \frac{\partial y_{0ij}}{\partial x_{2j}} & \frac{\partial y_{0ij}}{\partial y_{2j}} & \frac{\partial y_{0ij}}{\partial x_{3j}} & \frac{\partial y_{0ij}}{\partial y_{3j}} & \frac{\partial y_{0ij}}{\partial x_{4j}} & \frac{\partial y_{0ij}}{\partial y_{4j}} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\}. \quad (2.47)$$

Тогда линеаризованное уравнение (2.45) примет следующий компактный вид:

$$\begin{bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \end{bmatrix}_{ij} = \dot{B}_{ij} \underset{(2,2)(2,1)}{\delta_i} + \ddot{B}_{ij} \underset{(2,8)(8,1)}{\delta_i}. \quad (2.48)$$

Задача линеаризации будет решена, если получить формулы для 20-ти производных, входящих в матрицы $\dot{B}_{ij}$ и $\ddot{B}_{ij}$.

Аналитический вид коэффициентов, входящих в матрицу $\dot{B}_{ij}$ и матрицу $\ddot{B}_{ij}$ будет зависеть от принятого выражения для коэффициента ρ – выражение (2.26) или (2.38). Поэтому будем иметь два варианта формул.

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный вид формул для вычисления производных. С этой целью запишем выражения величин A_{1j} , A_{2j} , A_{3j} и проективных координат $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_{ij}$, входящих в формулы (2.25), (2.41), а также введем некоторые дополнительные обозначения.

Для величин A_{1j} , A_{2j} , A_{3j} будем иметь:

$$\begin{aligned} A_{1j} &= (\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4)_j = [x_4 \Delta y_{23} - y_4 \Delta x_{23} + x_2 y_3 - y_2 x_3]_j; \\ A_{2j} &= (\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4)_j = [x_4 \Delta y_{31} - y_4 \Delta x_{31} + x_3 y_1 - y_3 x_1]_j; \\ A_{3j} &= (\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4)_j = [x_4 \Delta y_{12} - y_4 \Delta x_{12} + x_1 y_2 - y_2 x_1]_j, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где $\Delta x_{stj}, \Delta y_{stj}$ – разности между координатами изображений s -ой и t -ой опорных звезд, составляющих j -ю опорную группу.

$$\Delta x_{stj} = (x_s - x_t)_j; \quad \Delta y_{stj} = (y_s - y_t)_j; \quad (s, t = 1, 2, 3, 4). \quad (2.50)$$

Проективные координаты $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_{ij}$ (2.28) i -го определяемого объекта в j -ой проективной системе координат представим в следующем виде:

$$\xi_{1ij} = \frac{C_{1ij}^0}{C_{1j}}; \quad \xi_{2ij} = \frac{C_{2ij}^0}{C_{2j}}; \quad \xi_{3ij} = \frac{C_{3ij}^0}{C_{3j}}, \quad (2.51)$$

где

$$C_{1ij}^0 = (\bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0 \bar{R}_{0i}^0)_j; \quad C_{2ij}^0 = (\bar{R}_3^0 \bar{R}_1^0 \bar{R}_{0i}^0)_j; \quad C_{3ij}^0 = (\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_{0i}^0)_j; \quad (2.52)$$

$$C_{1j} = (\bar{R}_2^0 \bar{R}_3^0 \bar{R}_4^0)_j; \quad C_{2j} = (\bar{R}_3^0 \bar{R}_1^0 \bar{R}_4^0)_j; \quad C_{3j} = (\bar{R}_1^0 \bar{R}_2^0 \bar{R}_4^0)_j. \quad (2.53)$$

Выражения для вычисления величин $C_{\ell ij}^0$ и $C_{\ell j}$ ($\ell = 1, 2, 3$) запишем, как результат разложения определителя третьего порядка по третьему столбцу, в следующем виде:

$$C_{\ell ij}^0 = L_{0i} U_{\ell j} + M_{0i} V_{\ell j} + N_{0i} W_{\ell j} \quad (2.54)$$

$$C_{\ell j} = L_{4j} U_{\ell j} + M_{4j} V_{\ell j} + N_{4j} W_{\ell j}, \quad (\ell = 1, 2, 3), \quad (2.55)$$

где

$$\begin{aligned} U_{1j} &= (M_2 N_3 - M_3 N_2)_j; \quad U_{2j} = (M_3 N_1 - M_1 N_3)_j; \quad U_{3j} = (M_1 N_2 - M_2 N_1)_j; \\ V_{1j} &= (L_3 N_2 - L_2 N_3)_j; \quad V_{2j} = (L_1 N_3 - L_3 N_1)_j; \quad V_{3j} = (L_2 N_1 - L_1 N_2)_j; \\ W_{1j} &= (L_2 M_3 - L_3 M_2)_j; \quad W_{2j} = (L_3 M_1 - L_1 M_3)_j; \quad W_{3j} = (L_1 M_2 - L_2 M_1)_j. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Введем обозначения:

$$D_{\ell ij} = L_{0i} V_{\ell j} - M_{0i} U_{\ell j}, \quad (\ell = 1, 2, 3), \quad (2.57)$$

$$E_{\ell ij} = -(L_{0i}U_{\ell j} + M_{0i}V_{\ell j} - W_{\ell j} \sin \delta_{0i}) \cdot \operatorname{tg} \delta_{0i}, \quad (\ell = 1, 2, 3), \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{1ij} &= A_{2j}\xi_{2ij}\Delta x_{12j} - A_{3j}\xi_{3ij}\Delta x_{31j}; \\ \tilde{D}_{2ij} &= A_{3j}\xi_{3ij}\Delta x_{23j} - A_{1j}\xi_{1ij}\Delta x_{12j}; \\ \tilde{D}_{3ij} &= A_{1j}\xi_{1ij}\Delta x_{31j} - A_{2j}\xi_{2ij}\Delta x_{23j}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{1ij} &= A_{2j}\xi_{2ij}\Delta y_{12j} - A_{3j}\xi_{3ij}\Delta y_{31j}; \\ \tilde{E}_{2ij} &= A_{3j}\xi_{3ij}\Delta y_{23j} - A_{1j}\xi_{1ij}\Delta y_{12j}; \\ \tilde{E}_{3ij} &= A_{1j}\xi_{1ij}\Delta y_{31j} - A_{2j}\xi_{2ij}\Delta y_{23j}; \end{aligned} \quad (2.60)$$

С учетом принятых обозначений (2.50), (2.55)–(2.60), коэффициенты, входящие в матрицы $\dot{B}_{ij}$ и $\ddot{B}_{ij}$, будут вычисляться по формулам:

$$1. \quad \rho_{ij} = A_{1j}\xi_{1ij} + A_{2j}\xi_{2ij} + A_{3j}\xi_{3ij}$$

коэффициенты матрицы $\dot{B}_{ij}$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_{0ij}}{\partial \alpha_{0i}} &= \frac{1}{\rho_{ij}^2} \sum_{\ell=1}^3 \frac{D_{\ell ij}}{C_{\ell j}} A_{\ell j} \tilde{D}_{\ell ij}; \\ \frac{\partial x_{0ij}}{\partial \delta_{0i}} &= \frac{1}{\rho_{ij}^2} \sum_{\ell=1}^3 \frac{E_{\ell ij}}{C_{\ell j}} A_{\ell j} \tilde{D}_{\ell ij}; \\ \frac{\partial y_{0ij}}{\partial \alpha_{0i}} &= \frac{1}{\rho_{ij}^2} \sum_{\ell=1}^3 \frac{D_{\ell ij}}{C_{\ell j}} A_{\ell j} \tilde{E}_{\ell ij}; \\ \frac{\partial y_{0ij}}{\partial \delta_{0i}} &= \frac{1}{\rho_{ij}^2} \sum_{\ell=1}^3 \frac{E_{\ell ij}}{C_{\ell j}} A_{\ell j} \tilde{E}_{\ell ij}; \end{aligned} \right\} \quad (2.61)$$

коэффициенты матрицы

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial x_{1j}} &= \frac{1}{\rho_{ij}} [A_1 \xi_{1i} - (x_2 - x_{0i}) \xi_{2i} \Delta y_{34} + (x_3 - x_{0i}) \xi_{3i} \Delta y_{24}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial y_{1j}} &= \frac{1}{\rho_{ij}} [(x_2 - x_{0i}) \xi_{2i} \Delta x_{34} - (x_3 - x_{0i}) \xi_{3i} \Delta x_{24}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial x_{2j}} &= \frac{1}{\rho_{ij}} [A_2 \xi_{2i} + (x_1 - x_{0i}) \xi_{1i} \Delta y_{34} - (x_3 - x_{0i}) \xi_{3i} \Delta y_{14}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial y_{2j}} &= -\frac{1}{\rho_{ij}} [(x_1 - x_{0i}) \xi_{1i} \Delta x_{34} - (x_3 - x_{0i}) \xi_{3i} \Delta x_{14}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial x_{3j}} &= \frac{1}{\rho_{ij}} [A_3 \xi_{3i} - (x_1 - x_{0i}) \xi_{1i} \Delta y_{24} + (x_2 - x_{0i}) \xi_{2i} \Delta y_{14}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial y_{3j}} &= \frac{1}{\rho_{ij}} [(x_1 - x_{0i}) \xi_{1i} \Delta x_{24} - (x_2 - x_{0i}) \xi_{2i} \Delta x_{14}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial x_{4j}} &= \frac{1}{\rho_{ij}} [(x_1 - x_{0i}) \xi_{1i} \Delta y_{23} - (x_2 - x_{0i}) \xi_{2i} \Delta y_{13} + (x_3 - x_{0i}) \xi_{3i} \Delta y_{12}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial y_{4j}} &= -\frac{1}{\rho_{ij}} [(x_1 - x_{0i}) \xi_{1i} \Delta y_{23} - (x_2 - x_{0i}) \xi_{2i} \Delta x_{13} + (x_3 - x_{0i}) \xi_{3i} \Delta y_{12}]_j; \\
 \frac{\partial y_{0ij}}{\partial x_{1j}} &= -\frac{1}{\rho_{ij}} [(y_2 - y_{0i}) \xi_{2i} \Delta y_{34} - (y_3 - y_{0i}) \xi_{3i} \Delta y_{24}]_j; \\
 \frac{\partial y_{0ij}}{\partial y_{1j}} &= \frac{1}{\rho_{ij}} [A_1 \xi_{1i} + (y_2 - y_{0i}) \xi_{2i} \Delta x_{34} - (y_3 - y_{0i}) \xi_{3i} \Delta x_{24}]_j; \\
 \frac{\partial y_{0ij}}{\partial x_{2j}} &= \frac{1}{\rho_{ij}} [(y_1 - y_{0i}) \xi_{1i} \Delta y_{34} - (y_3 - y_{0i}) \xi_{3i} \Delta y_{14}]_j
 \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial y_{0ij}}{\partial y_{2j}} &= \frac{1}{\rho_{ij}} [A_2 \xi_{2i} - (y_1 - y_{0i}) \xi_{1i} \Delta x_{34} + (y_3 - y_{0i}) \xi_{3i} \Delta x_{14}]_j; \\
\frac{\partial y_{0ij}}{\partial x_{3j}} &= -\frac{1}{\rho_{ij}} [(y_1 - y_{0i}) \xi_{1i} \Delta y_{24} - (y_2 - y_{0i}) \xi_{2i} \Delta y_{14}]_j; \\
\frac{\partial y_{0ij}}{\partial y_{3j}} &= \frac{1}{\rho_{ij}} [A_3 \xi_{3i} + (y_1 - y_{0i}) \xi_{1i} \Delta x_{24} - (y_2 - y_{0i}) \xi_{2i} \Delta x_{14}]_j; \\
\frac{\partial y_{0ij}}{\partial x_{4j}} &= \frac{1}{\rho_{ij}} [(y_1 - y_{0i}) \xi_{1i} \Delta y_{23} - (y_2 - y_{0i}) \xi_{2i} \Delta y_{13} + (y_3 - y_{0i}) \xi_{3i} \Delta y_{12}]_j; \\
\frac{\partial y_{0ij}}{\partial y_{4j}} &= -\frac{1}{\rho_{ij}} [(y_1 - y_{0i}) \xi_{1i} \Delta x_{23} - (y_2 - y_{0i}) \xi_{2i} \Delta x_{13} + (y_3 - y_{0i}) \xi_{3i} \Delta x_{12}]_j
\end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

$$2. \quad \rho_j = (r_1 r_2 r_3)_j$$

коэффициенты матрицы $\dot{B}_{ij}$:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial x_{0ij}}{\partial \alpha_{0i}} &= \frac{1}{\rho_j} \sum_{\ell=1}^3 \frac{D_{\ell ij}}{C_{\ell j}} A_{\ell j} x_{\ell j}; \\
\frac{\partial x_{0ij}}{\partial \delta_{0i}} &= \frac{1}{\rho_j} \sum_{\ell=1}^3 \frac{E_{\ell ij}}{C_{\ell j}} A_{\ell j} x_{\ell j}; \\
\frac{\partial y_{0ij}}{\partial \alpha_{0i}} &= \frac{1}{\rho_j} \sum_{\ell=1}^3 \frac{D_{\ell ij}}{C_{\ell j}} A_{\ell j} y_{\ell j}; \\
\frac{\partial y_{0ij}}{\partial \delta_{0i}} &= \frac{1}{\rho_j} \sum_{\ell=1}^3 \frac{E_{\ell ij}}{C_{\ell j}} A_{\ell j} y_{\ell j};
\end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

коэффициенты матрицы $\ddot{B}_{ij}$:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial x_{1j}} &= \frac{1}{\rho_j} [A_1 \xi_{1i} - x_2 \xi_{2i} \Delta y_{34} + x_3 \xi_{3i} \Delta y_{24} - x_{0i} \Delta y_{23}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial y_{1j}} &= \frac{1}{\rho_j} [x_2 \xi_{2i} \Delta x_{34} - x_3 \xi_{3i} \Delta x_{24} + x_{0i} \Delta x_{23}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial x_{2j}} &= \frac{1}{\rho_j} [A_2 \xi_{2i} + x_1 \xi_{1i} \Delta y_{34} - x_3 \xi_{3i} \Delta y_{14} + x_{0i} \Delta y_{13}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial y_{2j}} &= -\frac{1}{\rho_j} [x_1 \xi_{1i} \Delta x_{34} - x_3 \xi_{3i} \Delta x_{14} + x_{0i} \Delta x_{13}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial x_{3j}} &= \frac{1}{\rho_j} [A_3 \xi_{3i} - x_1 \xi_{1i} \Delta y_{24} + x_2 \xi_{2i} \Delta y_{14} - x_{0i} \Delta y_{12}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial y_{3j}} &= \frac{1}{\rho_j} [x_1 \xi_{1i} \Delta x_{24} - x_2 \xi_{2i} \Delta x_{14} + x_{0i} \Delta x_{12}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial x_{4j}} &= \frac{1}{\rho_j} [x_1 \xi_{1i} \Delta y_{23} - x_2 \xi_{2i} \Delta y_{13} + x_3 \xi_{3i} \Delta y_{12}]_j; \\
 \frac{\partial x_{0ij}}{\partial y_{4j}} &= -\frac{1}{\rho_j} [x_1 \xi_{1i} \Delta x_{23} - x_2 \xi_{2i} \Delta x_{13} + x_3 \xi_{3i} \Delta x_{12}]_j; \\
 \frac{\partial y_{0ij}}{\partial x_{1j}} &= -\frac{1}{\rho_j} [y_2 \xi_{2i} \Delta y_{34} - y_3 \xi_{3i} \Delta y_{24} + y_{0i} \Delta y_{23}]_j; \\
 \frac{\partial y_{0ij}}{\partial y_{1j}} &= \frac{1}{\rho_j} [A_1 \xi_{1i} + y_2 \xi_{2i} \Delta x_{34} - y_3 \xi_{3i} \Delta x_{24} + y_{0i} \Delta x_{23}]_j; \\
 \frac{\partial y_{0ij}}{\partial x_{2j}} &= \frac{1}{\rho_j} [y_1 \xi_{1i} \Delta y_{34} - y_3 \xi_{3i} \Delta y_{14} + y_{0i} \Delta y_{13}]_j;
 \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial y_{0ij}}{\partial y_{2j}} &= \frac{1}{\rho_j} [A_2 \xi_{2i} - y_1 \xi_{1i} \Delta x_{34} + y_3 \xi_{3i} \Delta x_{14} - y_{0i} \Delta x_{13}]_j; \\
\frac{\partial y_{0ij}}{\partial x_{3j}} &= -\frac{1}{\rho_j} [y_1 \xi_{1i} \Delta y_{24} - y_2 \xi_{2i} \Delta y_{14} + y_{0i} \Delta y_{12}]_j; \\
\frac{\partial y_{0ij}}{\partial y_{3j}} &= \frac{1}{\rho_j} [A_3 \xi_{3i} + y_1 \xi_{1i} \Delta x_{24} - y_2 \xi_{2i} \Delta x_{14} + y_{0i} \Delta x_{12}]_j; \\
\frac{\partial y_{0ij}}{\partial x_{4j}} &= \frac{1}{\rho_j} [y_1 \xi_{1i} \Delta y_{23} - y_2 \xi_{2i} \Delta y_{13} + y_3 \xi_{3i} \Delta y_{12}]_j; \\
\frac{\partial y_{0ij}}{\partial y_{4j}} &= -\frac{1}{\rho_j} [y_1 \xi_{1i} \Delta x_{23} - y_2 \xi_{2i} \Delta x_{13} + y_3 \xi_{3i} \Delta x_{12}]_j;
\end{aligned} \right\}. \quad (2.64)$$

Правильность аналитических формул (2.61)–(2.64) вычисления коэффициентов матрицы $\dot{B}_{ij}$ и матрицы $\ddot{B}_{ij}$ подтверждается результатами численного дифференцирования.

§ 2.6. Уравнение поправок

Предположим, что измерены координаты n изображений опорных звезд и k изображений определяемых объектов, которые исправлены за действие дифференциальной рефракции, дифференциальной аберрации и дисторсии. В дальнейшем изложении под измеренными координатами будем понимать координаты, исправленные за влияние отмеченных факторов, и обозначать через $\tilde{x}$, $\tilde{y}$.

Далее предположим, что известен вектор предварительных значений $\bar{X}_{ij}^0$ (2.42) определяемых параметров. Вторая группа составляющих данного вектора – $x_{\ell j}^0, y_{\ell j}^0$ ($\ell = 1, 2, 3, 4$) есть измеренные координаты ℓ -ой опорной звезды j -ой опорной группы, то есть $x_{\ell j}^0 = \tilde{x}_{\ell j}^0, y_{\ell j}^0 = \tilde{y}_{\ell j}^0$.

При этом $x_{\ell j}^0, y_{\ell j}^0$ – измеренные координаты i -ой определяемой точки, а $\tilde{x}_{\ell j}^0, \tilde{y}_{\ell j}^0$ – их приближенные значения, вычисленные с j -ой опорной группой звезд по формулам (2.41) с использованием предварительных значений сферических координат $\alpha_{0i}^0, \delta_{0i}^0$.

Тогда уравнение поправок, соответствующее линеаризованному уравнению связи, будет иметь вид:

$$\underset{(2,2)}{\dot{B}_{ij}} \underset{(2,1)}{\dot{\bar{\delta}}_i} + \underset{(2,2)}{\ddot{B}_{ij}} \underset{(2,1)}{\ddot{\bar{\delta}}_j} = \underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ij}} + \underset{(2,1)}{\bar{V}_{ij}}, \quad (2.65)$$

$$\text{где } \bar{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{0i}^0 - \tilde{x}_{0ij}^0 \\ \tilde{y}_{0i}^0 - \tilde{y}_{0ij}^0 \end{bmatrix} - \text{вектор свободных членов}; \quad (2.66)$$

$$\bar{V}_{ij} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}_{ij} - \text{вектор поправок в результаты измерений}; \quad (2.67)$$

$$\dot{\bar{\delta}}_i = \begin{bmatrix} d\alpha_{0i} \cos \delta_{0i} \\ d\delta_{0i} \end{bmatrix} - \text{вектор поправок к предварительным} \quad (2.68)$$

значениям сферических координат; $\ddot{\bar{\delta}}_i$ – вектор поправок (2.47) к измеренным значениям координат четырех опорных звезд, составивших j -ю опорную группу.

Матрицы $\dot{B}_{ij}$ и $\ddot{B}_{ij}$ вычисляют по предварительным значениям уточняемых неизвестных.

Размерность уравнения поправок будет определяться размерностью свободного члена $\bar{\varepsilon}_{ij}$ (например, в мм). Поэтому размерность коэффициентов матрицы $\dot{B}_{ij}$ будет в мм/рад и поправки в сферические координаты определятся в радианах. Коэффициенты матрицы $\ddot{B}_{ij}$ есть величины безразмерные, и поправки в координаты $\tilde{x}_{li}$, $\tilde{y}_{li}$ определятся в мм.

Уравнению поправок (2.65) будет соответствовать ковариационная матрица непосредственных измерений K_i :

$$K_i = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_X^2 & \mathcal{G}_{XY} \\ \mathcal{G}_{XY} & \mathcal{G}_Y^2 \end{bmatrix}_i, \quad (2.69)$$

где $\mathcal{G}_X^2$, $\mathcal{G}_Y^2$ – дисперсии измеренных координат изображений; $\mathcal{G}_{XY}$ – их ковариация.

Координаты изображений измеряются равноточно и независимо по шкале x и шкале y , поэтому есть все основания считать, что ковариационная матрица будет иметь вид:

$$K_i = \mathcal{G}_0^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

где $\mathcal{G}_0^2$ – средняя квадратическая ошибка измерения изображения.

Уравнение поправок (2.56) может быть записано и для опорной звезды, не входящей в данную j -ю опорную группу звезд. В этом случае поправки $d\alpha_{0i}$, $d\delta_{0i}$ в уравнении (2.65) будут равны нулю.

Уравнение поправок для некоторой s -ой опорной звезды, не входящей в j -ю опорную группу, представим в виде:

$$\begin{matrix} \tilde{B}_{sj} & \ddot{\delta}_j & = & \tilde{\varepsilon}_{sj} & + & \tilde{V}_{sj} \\ (2,8)(8,1) & (2,1) & & (2,1) & & (2,1) \end{matrix} \quad (2.71)$$

Коэффициенты матрицы $\tilde{B}_{sj}$, как и матрицы $\ddot{B}_{ij}$, будут вычисляться по формулам (2.62) или (2.64), а вектор свободных членов $\tilde{\varepsilon}_{sj}$ по формуле (2.66). При этом в качестве предварительных значений экваториальных координат s -ой опорной звезды используются их каталожные значения.

Ковариационную матрицу непосредственных измерений, соответствующую уравнению поправок (2.71), определим подобно (2.69) и обозначим через $\tilde{K}_s$.

Число уравнений поправок вида (2.71) для отдельно взятой j -ой опорной группы звезд будет равно $(n-4)$, где n – общее число опорных звезд.

Отметим, что использование уравнений типа (2.71) является одним из путей в устранении такого недостатка, как привлечение в обработку опорных звезд числом, кратным четырем. В этом случае число опорных звезд, включаемых в процесс обработки, может быть любым.

§ 2.7. Установление предварительных значений сферических координат определяемых объектов

Очевидно, что для определения предварительных значений сферических координат α_{0i}^0 , δ_{0i}^0 целесообразно применить способ Ю.М. Трунина [9, 75], основанный на использовании проективных координат и рассмотренный во введении диссертационной работы.

С использованием ранее введенных обозначений – (18), (1.42), (2.53), формулу (17), однозначно определяющую направление $\bar{R}_{0ij}^{00}$ на i -й объект (звезду, ИСЗ) по j -ой опорной группе звезд, представим в следующем виде:

$$\rho_{ij}^0 \bar{R}_{0ij}^{00} = [C_1 \tilde{\xi}_{1i} \bar{R}_1^0 + C_2 \tilde{\xi}_{2i} \bar{R}_2^0 + C_3 \tilde{\xi}_{3i} \bar{R}_3^0]_j. \quad (2.72)$$

Формулы (18), (1.42) для вычисления проективных координат $(\tilde{\xi}_{1i}, \tilde{\xi}_{2i}, \tilde{\xi}_{3i})$ представим в виде:

$$\tilde{\xi}_{1i} = \frac{A_{1ij}^0}{A_{1j}}, \quad \tilde{\xi}_{2i} = \frac{A_{2ij}^0}{A_{2j}}, \quad \tilde{\xi}_{3i} = \frac{A_{3ij}^0}{A_{3j}}, \quad (2.73)$$

где A_{1j} , A_{2j} , A_{3j} – смешанные произведения (2.27), составленные из однородных векторов $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4)_j$, и вычисляемые по формулам (2.49):

$$A_{1ij}^0 = (\bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_{0i})_j; \quad A_{2ij}^0 = (\bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_{0i})_j; \quad A_{3ij}^0 = (\bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_{0i})_j. \quad (2.74)$$

Для вычисления величин $(A_{1i}^0, A_{2i}^0, A_{3i}^0)_j$ будем иметь формулы, подобные выражениям (2.49):

$$\begin{aligned} A_{1ij}^0 &= [x_{0i}\Delta y_{23} - x_{0i}\Delta y_{23} + x_2y_3 - x_2y_3]_j; \\ A_{2ij}^0 &= [x_{0i}\Delta y_{31} - x_{0i}\Delta y_{31} + x_3y_1 - x_3y_1]_j; \\ A_{3ij}^0 &= [x_{0i}\Delta y_{12} - x_{0i}\Delta y_{12} + x_1y_2 - x_1y_2]_j. \end{aligned} \quad (2.75)$$

В формулах (2.73), (2.74) компонентами однородных векторов $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \bar{r}_4)_j$ будут измеренные координаты изображений опорных звезд, составивших j -ю опорную группу, а компонентами однородного вектора r_{0i} измеренные координаты i -го определяемого объекта, то есть $x_{ti} = \tilde{x}_{ti}$, $y_{ti} = \tilde{y}_{ti}$, $x_{0i} = \tilde{x}_{0i}$, $y_{0i} = \tilde{y}_{0i}$ ($t = 1, 2, 3, 4$).

Тогда направляющие косинусы L_{0ij} , M_{0ij} , N_{0ij} направления на объект получим из выражений:

$$\begin{aligned} \rho_{ij}^0 L_{0ij} &= [C_1 \tilde{\xi}_{1i} \cos \alpha_1 \cos \delta_1 + C_2 \tilde{\xi}_{2i} \cos \alpha_2 \cos \delta_2 + C_3 \tilde{\xi}_{3i} \cos \alpha_3 \cos \delta_3]_j; \\ \rho_{ij}^0 M_{0ij} &= [C_1 \tilde{\xi}_{1i} \sin \alpha_1 \cos \delta_1 + C_2 \tilde{\xi}_{2i} \cos \delta_2 \sin \alpha_2 + C_3 \tilde{\xi}_{3i} \sin \alpha_3 \cos \delta_3]_j; \\ \rho_{ij}^0 N_{0ij} &= [C_1 \tilde{\xi}_{1i} \sin \delta_1 + C_2 \tilde{\xi}_{2i} \sin \delta_2 + C_3 \tilde{\xi}_{3i} \sin \delta_3]_j, \end{aligned} \quad (2.76)$$

а сферические координаты – по формулам:

$$tg \alpha_{0ij}^0 = \frac{M_{0ij}}{N_{0ij}}; \quad tg \delta_{0ij}^0 = \frac{N_{0ij}}{\sqrt{M_{0ij}^2 + N_{0ij}^2}}. \quad (2.77)$$

В качестве предварительных значений сферических координат $\alpha_{0i}^0, \delta_{0i}^0$ i -го определяемого объекта, вычисленных по формулам (2.76), (2.77) могут быть приняты:

1. Любые из m значений $\alpha_{0ij}^0, \delta_{0ij}^0$ ($j = 1, 2, \dots, m$), вычисленных по всем опорным группам.

2. Координаты, равные усредненным значениям между координатами, вычисленными по всем опорным группам.

С точки зрения программирования, задачи за предварительные координаты $\alpha_{0i}^0, \delta_{0i}^0$ объекта удобно принять координаты, полученные по первой группе опорных звезд, то есть $j = 1$. При этом, данная опорная группа звезд может быть подобрана наиболее удачно в смысле геометрической фигуры, которая желательно должна быть близка по форме к квадрату [29].

В табл. 2.3 в качестве примера приведены предварительные значения экваториальных координат объекта, вычисленных по способу Ю.М. Трунина при обработке реального снимка – планеты Плутон, полученного в 1990 г. широкоугольным астрографом ГАИШ. На состоявшемся в 2006 г. Международном астрономическом союзе (МАС) принято решение Плутон не считать планетой.

§ 2.8. Ньютоновский итерационный процесс

Пусть поле измеренных величин связано с искомыми параметрами переопределенной и несовместной системой (2.12) β нелинейных уравнений связи вида (2.41). Система (2.12), вообще

говоря, не удовлетворяется никакими значениями неизвестных. Однако всегда можно найти такой вектор $\bar{X}$, при котором вектор поправок

$$\bar{V} = \bar{U} - \Phi(\bar{X}) \quad (2.78)$$

обладает свойствами минимальности в смысле метода наименьших квадратов, то есть:

$$\bar{V}^T P \bar{V} = \min, \quad (2.79)$$

где $\bar{V}$ – вектор поправок из уравнивания, P – весовая матрица измерений.

В методе Ньютона решение нелинейной переопределенной системы уравнений (2.78) получается с использованием линеаризованных итераций.

Пусть построена линеаризованная модель переопределенной системы уравнений (2.78) как совокупность уравнений поправок типа (2.65) и (2.71), которую представим в следующем виде:

$$B_{\bar{X}=\bar{X}^0} \bar{\delta}^{(1)} = \bar{\varepsilon}^{(1)} + \bar{V}^{(1)}, \quad (2.80)$$

где $B_{\bar{X}=\bar{X}^0}$ – матрица коэффициентов уравнений, определенных по предварительным значениям неизвестных $\bar{X}^0$; $\bar{\delta}^{(1)}$ – вектор поправок к предварительным значениям определяемых параметров; $\bar{\varepsilon}^{(1)}$ –

вектор свободных членов; $\bar{V}^{(1)}$ – вектор поправок в измеренные величины $\bar{U}$.

Переопределенную систему (2.80) решим по методу наименьших квадратов, то есть под условием (2.79), при этом получим вектор первого приближения

$$\bar{\delta}^{(1)} = \left(B_{\bar{X}=\bar{X}^0}^T P B_{\bar{X}=\bar{X}^0} \right)^{-1} B_{\bar{X}=\bar{X}^0}^T P \varepsilon^{(1)}, \quad (2.81)$$

а также вектор неизвестных в первом приближении

$$\bar{X}^{(1)} = \bar{X}^0 + \bar{\delta}^{(1)}. \quad (2.82)$$

Дальнейшие приближения получаются так:

$$\bar{\delta}^{(1)} = \left(B_{\bar{X}=\bar{X}^1}^T P B_{\bar{X}=\bar{X}^1} \right)^{-1} B_{\bar{X}=\bar{X}^1}^T P \varepsilon^{(1)}, \quad (2.83)$$

$$\bar{X}^{(\ell+1)} = \bar{X}^0 + \bar{\delta}^{(1)} + \dots + \bar{\delta}^{(\ell)} + \bar{\delta}^{(\ell+1)}. \quad (2.84)$$

Вычисления заканчиваются, если для приближения с номером $\ell + 1$ оказалось, что

$$\left| \bar{\delta}^{(\ell+1)} \right| \leq \left| \bar{\Delta} \right|, \quad (2.85)$$

где $\bar{\Delta}$ – критерии сходимости, устанавливаемые a priori.

В заключение выполняется оценка точности в соответствии с правилами метода наименьших квадратов:

$$m_{X_s} = \mu \sqrt{q_{ss}^{\ell}}, \quad s = 1, 2, \dots, \nu, \quad (2.86)$$

где q_{ss}^{ℓ} – диагональные элементы обратной матрицы нормальных уравнений Q^{-1}

$$Q^{-1} = \left(B_{\bar{X}=\bar{X}'}^T P B_{\bar{X}=\bar{X}'} \right)^{-1}; \quad (2.87)$$

μ – ошибка единицы веса

$$\mu^2 = \bar{V}^{\gamma(\ell)} P \bar{V}^{\ell} / (\beta - \nu). \quad (2.88)$$

Рассмотренная итерационная процедура является немодифицированным методом Ньютона-Рафсона.

Если известны очень хорошие начальные приближения $\bar{X}^0$, то при большой размерности матрицы нормальных уравнений Q становится более выгодным применять модифицированный итерационный процесс Ньютона-Рафсона, в котором процесс вычислений ведется так, что элементы матрицы B не исправляются от приближения к приближению, а фиксированы начальными значениями

$$B^{(\ell+1)} = B_{\bar{X}^0} = const. \quad (2.89)$$

При этом достигается значительная экономия машинного времени, так как матрица нормальных уравнений в процессе итераций обращается только один раз.

Сходимость Ньютоновского итерационного процесса исследована в работах Л.В. Канторовича [53]. Им доказана теорема об условиях сходимости метода Ньютона. Из этой теоремы следует,

что немодифицированный метод Ньютона-Рафсона обладает квадратической сходимостью.

Модифицированный метод Ньютона-Рафсона сходится медленнее – со скоростью геометрической прогрессии.

Из теоремы Л.В. Канторовича следует также, что метод Ньютона не обладает абсолютной сходимостью, причем сходимость зависит, в частности, от близости начального приближения $\bar{X}^0$ к решению $\bar{X}$ системы.

Выводы

Основные результаты данной главы можно сформулировать в следующих выводах.

1. На основе векторной интерпретации основных инвариантов проективной геометрии построена математическая модель исследуемого явления, отражающая связь между координатами изображения объекта в плоскости снимка и направлением на этот объект в пространстве.

2. Разработаны теория и методика проективных преобразований снимков звездного неба с целью определения сферических координат небесных объектов по методу наименьших квадратов (МНК), которые позволяют:

- определять искомые параметры из уравнительных вычислений по МНК без знания элементов внутреннего ориентирования съемочной камеры;

- решать задачу обработки снимков звездного неба в неортогональном базисе;
- получать результаты, инвариантные по отношению к коллинеарным преобразованиям;
- автоматически учитывать искажения линейного характера.

Рассмотренная в данной главе методика позволяет включать в одновременную обработку n опорных звезд и k определяемых объектов, оставаясь при этом в пределах проективного пространства.

Глава 3. Методика и алгоритмы проективных преобразований изображений звездного неба

Обработка отдельного изображения (снимка) звездного неба с целью определения экваториальных координат одного или нескольких небесных объектов является одной из наиболее часто решаемых задач в фотографической астрометрии, космической геодезии и космической фотограмметрии, например, при определении положений планет, комет, ИСЗ, звезд и т. д. Поэтому, рассмотрим методику формирования математической модели при решении полной задачи обработки (ПЗО) снимка (астронегатива) с целью определения сферических координат k объектов.

§ 3.1. Формирование математической модели при обработке изображений звездного неба

Предположим, что на снимке звездного неба имеется k изображений определяемых объектов и n изображений опорных звезд. Сформируем из n опорных звезд m опорных групп по четыре звезды в каждой при условии, что группы не содержат общих звезд.

Тогда для некоторой j -ой опорной группы звезд ($j = 1, 2, \dots, m$) можно записать систему k уравнений поправок типа (2.65), которую представим в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{B}_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ (2,2) & & & \\ 0 & \dot{B}_{2j} & \dots & 0 \\ (2,2) & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dot{B}_{kj} \\ & & & (2,2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ (2,1) \\ \dot{\delta}_2 \\ (2,1) \\ \dots \\ \dot{\delta}_k \\ (2,1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{B}_{1j} \\ (2,8) \\ \ddot{B}_{2j} \\ (2,8) \\ \dots \\ \ddot{B}_{kj} \\ (2,8) \end{bmatrix} \ddot{\delta}_j = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{1j} \\ (2,1) \\ \bar{\varepsilon}_{2j} \\ (2,1) \\ \dots \\ \bar{\varepsilon}_{kj} \\ (2,1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_{1j} \\ (2,1) \\ \bar{V}_{2j} \\ (2,1) \\ \dots \\ \bar{V}_{kj} \\ (2,1) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

С этой же j -ой опорной группой можно записать также систему $(n-4)$ -х уравнений поправок типа (2.71), которую представим в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\ddot{B}}_{1j} \\ (2,8) \\ \widetilde{\ddot{B}}_{2j} \\ (2,8) \\ \dots \\ \widetilde{\ddot{B}}_{(n-4)j} \\ (2,8) \end{bmatrix} \ddot{\delta}_j = \begin{bmatrix} \widetilde{\varepsilon}_{1j} \\ (2,1) \\ \widetilde{\varepsilon}_{2j} \\ (2,1) \\ \dots \\ \widetilde{\varepsilon}_{(n-4)j} \\ (2,1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{\bar{V}}_{1j} \\ (2,1) \\ \widetilde{\bar{V}}_{2j} \\ (2,1) \\ \dots \\ \widetilde{\bar{V}}_{(n-4)j} \\ (2,1) \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Введем обозначения:

$$\dot{B}_j = \begin{matrix} \begin{matrix} \dot{B}_{1j} & 0 & \dots & 0 \\ (2,2) & & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \dot{B}_{2j} & \dots & 0 \\ & (2,2) & & \end{matrix} \\ \begin{matrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dot{B}_{kj} \\ & & & (2,2) \end{matrix} \end{matrix} ; \quad (3.4)$$

Тогда объединенная система уравнений поправок (3.1) и (3.2) примет компактный вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{B}_j \\ (2k, 2k) \\ 0 \\ (2(n-4), 2k) \end{bmatrix} \dot{\delta}_{(2k,1)} - \begin{bmatrix} \ddot{B}_j \\ (2k, 8) \\ \ddot{\tilde{B}}_j \\ (2(n-4), 8) \end{bmatrix} \ddot{\delta}_{(8,1)} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_j \\ (2k, 1) \\ \bar{\varepsilon}_j \\ (2(n-4), 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_j \\ (2k, 1) \\ \bar{V}_j \\ (2(n-4), 1) \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Для m опорных групп будем иметь следующую систему уравнений поправок:

$$\begin{bmatrix} \dot{B}_1 \\ (2k, 2k) \\ 0 \\ \dot{B}_2 \\ (2k, 2k) \\ 0 \\ \dots \\ \dot{B}_m \\ (2k, 2k) \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\delta}_{(2k,1)} + \begin{bmatrix} \ddot{B}_1 & 0 & \dots & 0 \\ (2k, 8) & & & \\ \ddot{\tilde{B}}_1 & 0 & \dots & 0 \\ (2(n-4), 8) & & & \\ 0 & \ddot{B}_2 & \dots & 0 \\ & (2k, 8) & & \\ 0 & \ddot{\tilde{B}}_2 & \dots & 0 \\ & (2(n-4), 8) & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dot{B}_m \\ & & & (2k, 8) \\ 0 & 0 & \dots & \ddot{\tilde{B}}_m \\ & & & (2(n-4), 8) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ (8, 1) \\ \ddot{\delta}_2 \\ (8, 1) \\ \dots \\ \ddot{\delta}_m \\ (8, 1) \end{bmatrix} = \quad (3.6)$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ (2k,1) \\ \approx \\ \bar{\varepsilon}_1 \\ (2(n-4),1) \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ (2k,1) \\ \approx \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ (2(n-4),1) \\ \dots\dots \\ \bar{\varepsilon}_m \\ (2k,1) \\ \approx \\ \bar{\varepsilon}_m \\ (2(n-4),1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ (2k,1) \\ \approx \\ \bar{V}_1 \\ (2(n-4),1) \\ \bar{V}_2 \\ (2k,1) \\ \approx \\ \bar{V}_2 \\ (2(n-4),1) \\ \dots\dots \\ \bar{V}_m \\ (2k,1) \\ \approx \\ \bar{V}_m \\ (2(n-4),1) \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Система уравнений поправок (3.6) является математической моделью, описывающей сумму проективных преобразований при решении полной задачи обработки (ПЗО) снимка звездного неба.

При решении ПЗО, как было определено ранее, имеем две группы неизвестных параметров – сферические координаты и координаты изображений опорных звезд, составивших опорные четырехугольники.

Первой группе неизвестных параметров соответствует уравнение поправок:

$$\begin{matrix} \dot{\bar{V}}_i \\ (2,1) \end{matrix} - \begin{matrix} \dot{\bar{\delta}}_i \\ (2,1) \end{matrix} = \begin{matrix} \dot{\bar{C}}_i \\ (2,1) \end{matrix}, \quad i=1, 2, \dots, k, \quad (3.7)$$

где $\begin{matrix} \dot{\bar{\delta}}_i \\ (2,1) \end{matrix}$ – вектор поправок (2.59) к предварительным значениям

сферических координат $\alpha_{0i}^0, \delta_{0i}^0$;

$$\begin{matrix} \dot{\vec{V}}_i \\ (2,1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\delta \end{bmatrix}_i - \text{вектор поправок в измеренные значения сферических} \\ \text{координат } \tilde{\alpha}_{0i}, \tilde{\delta}_{0i}; \quad (3.8)$$

$$\begin{matrix} \dot{\vec{C}}_i \\ (2,1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0i}^0 - \tilde{\alpha}_{0i} \\ \delta_{0i}^0 - \tilde{\delta}_{0i} \end{bmatrix} - \text{вектор свободных членов.} \quad (3.9)$$

Ковариационная матрица, соответствующая уравнению поправок (2.87), будет иметь вид:

$$\begin{matrix} \dot{K}_i \\ (2,2) \end{matrix} = \begin{bmatrix} g_\alpha^2 & g_{\alpha\delta} \\ g_{\alpha\delta} & g_\delta^2 \end{bmatrix}_i, \quad (3.10)$$

$$\text{а весовая матрица } \begin{matrix} \dot{P}_i \\ (2,2) \end{matrix} = \begin{matrix} \dot{K}_i^{-1} \\ (2,2) \end{matrix}. \quad (3.11)$$

Второй группе неизвестных будет соответствовать уравнение поправок

$$\begin{matrix} \ddot{\vec{V}}_j \\ (8,1) \end{matrix} - \begin{matrix} \ddot{\vec{\delta}}_j \\ (8,1) \end{matrix} = \begin{matrix} \ddot{\vec{C}}_j \\ (8,1) \end{matrix}, \quad j=1,2,\dots,m, \quad (3.12)$$

где $\begin{matrix} \ddot{\vec{V}}_j \\ (8,1) \end{matrix}$ – вектор поправок в измеренные на снимке координаты

$\tilde{x}_{lj}, \tilde{y}_{lj}$ ($l = 1, 2, 3, 4$) опорных звезд i -ой группы; $\begin{matrix} \ddot{\vec{\delta}}_j \\ (8,1) \end{matrix}$ – вектор

поправок (2.38) в предварительные значения координат $\tilde{x}_{lj}^0, \tilde{y}_{lj}^0$

опорных звезд j -ой опорной группы; $\begin{matrix} \ddot{\vec{C}}_j \\ (8,1) \end{matrix}$ – вектор свободных членов:

$$\ddot{\vec{V}}_{(8,1)}^j = \begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ v_{x_3} \\ v_{y_3} \\ v_{x_4} \\ v_{y_4} \end{bmatrix}_j ; \quad \ddot{\vec{C}}_{(8,1)}^j = \begin{bmatrix} (x^0 - \tilde{x})_1 \\ (y^0 - \tilde{y})_1 \\ (x^0 - \tilde{x})_2 \\ (y^0 - \tilde{y})_2 \\ (x^0 - \tilde{x})_3 \\ (y^0 - \tilde{y})_3 \\ (x^0 - \tilde{x})_4 \\ (y^0 - \tilde{y})_4 \end{bmatrix}_j . \quad (3.13)$$

Ковариационная матрица, соответствующая уравнению поправок (3.12), будет иметь вид:

$$\ddot{\mathbf{K}}_{(8,8)}^j = \text{diag} \left(\tilde{\mathbf{K}}_{(2,2)}^1, \tilde{\mathbf{K}}_{(2,2)}^2, \tilde{\mathbf{K}}_{(2,2)}^3, \tilde{\mathbf{K}}_{(2,2)}^4 \right), \quad (3.14)$$

а весовая матрица

$$\ddot{\mathbf{P}}_{(8,8)}^j = \ddot{\mathbf{K}}_{(8,8)}^{j-1} = \text{diag} \left(\tilde{\mathbf{K}}_{(2,2)}^{-1}, \tilde{\mathbf{K}}_{(2,2)}^{-1}, \tilde{\mathbf{K}}_{(2,2)}^{-1}, \tilde{\mathbf{K}}_{(2,2)}^{-1} \right), \quad (3.15)$$

где $\mathbf{K}_{\ell j}$ ($\ell = 1, 2, 3, 4$) есть ковариационная матрица результатов измерений координат ℓ -ой опорной звезды j -ой опорной группы и определяемая, подобно ковариационной матрице $\mathbf{K}_i$ (2.69).
(2,2)

Рассмотрим вопрос о минимально необходимом количестве опорных звезд, при которых система уравнений поправок (3.6) является определенной и переопределенной.

Количество β уравнений поправок, принятых в обработку, определится выражением

$$\beta = 2m(k + n - 4), \quad (3.16)$$

где n – общее количество опорных звезд, изобразившихся на снимке; k – количество объектов, сферические координаты которых определяются; m – количество образованных опорных групп звезд.

Общее количество ν неизвестных параметров в системе уравнений поправок (3.6) будет равно

$$\nu = 2k + 8m. \quad (3.17)$$

Составим разницу $\beta - \nu$:

$$\beta - \nu = 2k(m - 1) + 2m(n - 8). \quad (3.18)$$

Анализ выражения (3.9) позволяет записать следующие условия:

$$\begin{aligned} \beta - \nu &\text{ при } m = 1, n = 8; \\ \beta &> \nu \text{ при } m = 2, n = 8; \\ \beta &> \nu \text{ при } m = 1, n = 8. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Условия (3.19) выполняются при любом k .

На основании условий (3.19) можно сформулировать следующие положения.

Положение 1. Для решения полной задачи обработки (ПЗО) снимка звездного неба с целью определения сферических координат k объектов на снимке достаточно иметь восемь опорных звезд.

Положение 2. При числе опорных звезд, равном восьми и только одной опорной группе, образованной из этих звезд, система уравнений поправок будет определенной при любом количестве определяемых объектов.

Положение 3. Для того чтобы система уравнений поправок была переопределенной при любом количестве определяемых объектов, достаточно иметь восемь опорных звезд и образовать из них две опорные группы.

Положение 4. При числе опорных звезд более восьми достаточно образовать одну опорную группу, чтобы система уравнений поправок была переопределенной при любом количестве определяемых объектов.

§ 3.2. Структура матрицы нормальных уравнений при обработке изображения звездного неба

Большое значение для алгоритмизации процесса уравнивания имеет установление структуры матрицы нормальных уравнений. С этой целью воспользуемся подходом, применяемым в [90].

Составим пока формально систему нормальных уравнений, соответствующую системе уравнений поправок (2.56).

Представим систему (2.65) в компактном виде:

$$\begin{matrix} B_{ij} & \bar{\delta}_{ij} \\ (2,10) & (10,1) \end{matrix} = \begin{matrix} \bar{\varepsilon}_{ij} & \bar{V}_{ij} \\ (2,1) & (2,1) \end{matrix} \quad (3.20)$$

где

$$\begin{matrix} B_{ij} \\ (2,10) \end{matrix} = \begin{bmatrix} \dot{B}_{ij} : \ddot{B}_{ij} \\ (2,10) \quad (2,10) \end{bmatrix}; \quad (3.21)$$

$$\begin{matrix} \bar{\delta}_{ij} \\ (10,1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} \bar{\delta}_{ij}^T : \bar{\delta}_{ij}^T \\ (10,1) \quad (10,1) \end{bmatrix}^T. \quad (3.22)$$

Системе уравнений поправок (3.20) соответствует ковариационная матрица $\begin{matrix} K_i \\ (2,2) \end{matrix}$ (2.69) и весовая матрица $\begin{matrix} P_i \\ (2,2) \end{matrix}$

$$\begin{matrix} P_i \\ (2,2) \end{matrix} = \mathcal{G}_0^2 \cdot \begin{matrix} K_i^{-1} \\ (2,2) \end{matrix}. \quad (3.23)$$

Тогда, если измерены координаты $\tilde{x}_{0j}, \tilde{y}_{0j}$ только одного i -го определяемого объекта и координаты $\tilde{x}_{lj}, \tilde{y}_{lj}$ ($l = 1, 2, 3, 4$) четырех опорных звезд j -ой опорной группы, для системы уравнений поправок (2.56) получается система нормальных уравнений:

$$\left(\begin{matrix} B_{ij}^T & P_i & B_{ij} \\ (2,2) & (2,2) & (2,2) \end{matrix} \right) \begin{matrix} \bar{\delta}_{ij} \\ (2,1) \end{matrix} = \begin{matrix} B_{ij}^T & P_i \\ (2,2) & (2,2) \end{matrix} \begin{matrix} \bar{\varepsilon}_{ij} \\ (2,1) \end{matrix}, \quad (3.24)$$

которую с учетом выражений (3.12) и (3.13) можно записать в развернутом виде, то есть

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{Q}}_{ij} & \overline{\underline{Q}}_{ij} \\ (2,2) & (2,8) \\ \underline{Q}_{ij}^T & \ddot{\underline{Q}}_{ij} \\ (8,2) & (8,8) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\delta}_i \\ (2,1) \\ \ddot{\delta}_j \\ (8,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} \\ (2,1) \\ \ddot{\bar{\varepsilon}}_{ij} \\ (8,1) \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\underline{Q}}_{ij} &= \dot{B}_{ij}^T P_i \dot{B}_{ij}; & \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} &= \dot{B}_{ij}^T P_i \bar{\varepsilon}_{ij}; \\ (2,2) & (2,2) (2,2) (2,2) & (2,1) & (2,2) (2,2) (2,1) \\ \ddot{\underline{Q}}_{ij} &= \ddot{B}_{ij}^T P_i \ddot{B}_{ij}; & \ddot{\bar{\varepsilon}}_{ij} &= \ddot{B}_{ij}^T P_i \bar{\varepsilon}_{ij}; \\ (8,8) & (8,2) (2,2) (2,8) & (8,1) & (8,2) (2,2) (2,1) \\ \underline{Q}_{ij} &= \dot{B}_{ij}^T P_i \dot{B}_{ij}. \\ (2,8) & (2,2) (2,2) (2,8) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Система (3.25) является неопределенной, так как, включая десять неизвестных, она соответствует двум уравнениям поправок для измеренных на снимке координат $\tilde{x}_{0j}, \tilde{y}_{0j}$ одного определяемого объекта.

Составим также формально систему нормальных уравнений, соответствующую уравнению поправок (2.71) с ковариационной матрицей $\tilde{K}_{(2,2)s}$, которая, как отмечалось ранее, определяется подобно

$K_{(2,2)i}$ (2.69) и весовой матрицей $\tilde{P}_{(2,2)s}$

$$\tilde{P}_{(2,2)s} = g_0^2 K_{(2,2)s}^{-1}, \quad s=1, 2, \dots, (n-4). \quad (3.27)$$

Данную систему нормальных уравнений представим в виде

$$\tilde{\underline{Q}}_{sj} \ddot{\delta}_j = \tilde{\bar{\varepsilon}}_{sj}, \quad (3.28)$$

(8,8) (8,1) (8,1)

где

$$\tilde{\underline{Q}}_{sj} = \tilde{B}_{sj}^T \tilde{P}_s \tilde{B}_{sj}; \quad \tilde{\bar{\varepsilon}}_{sj} = \tilde{B}_{sj}^T \tilde{P}_s \bar{\varepsilon}_{sj}. \quad (3.29)$$

(8,8) (8,2) (2,2) (2,8) (8,1) (8,2) (2,2) (2,1)

Система нормальных уравнений (3.28) так же, как и система (3.25) является неопределенной. Включая восемь неизвестных, она соответствует двум уравнениям поправок для измеренных координат одной опорной звезды.

Смысл введения неопределенных систем (3.25) и (3.28) заключается в том, что пять матриц, входящих в уравнение (3.25), а также две матрицы, входящие в уравнение (3.28), являются основными, конструктивными блоками для формирования всей системы нормальных уравнений, возникающей при решении полной задачи обработки снимка звездного неба.

Общая система уравнений, составленная для обработки всех точек, измеренных на снимке, будет иметь следующую структуру:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \dot{Q}_1 + \dot{P}_1 & 0 & \dots & 0 & \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \dots & \bar{Q}_{1m} \\ (2,2) & (2,2) & & & (2,8) & (2,8) & & (2,8) \\ 0 & \dot{Q}_2 + \dot{P}_2 & \dots & 0 & \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \dots & \bar{Q}_{2m} \\ & (2,2) & (2,2) & & (2,8) & (2,8) & & (2,8) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dot{Q}_k + \dot{P}_k & \bar{Q}_{k1} & \bar{Q}_{k2} & \dots & \bar{Q}_{km} \\ & & & (2,2) & (2,2) & (2,8) & & (2,8) \\ \hline \bar{Q}_{11}^T & \bar{Q}_{21}^T & \dots & \bar{Q}_{k1}^T & \dot{Q}_1 + \dot{P}_1 & 0 & \dots & 0 \\ (8,2) & (8,2) & & (8,2) & (8,8) & (8,8) & & \\ \bar{Q}_{12}^T & \bar{Q}_{22}^T & \dots & \bar{Q}_{k2}^T & 0 & \ddot{Q}_2 + \ddot{P}_2 & \dots & 0 \\ (8,2) & (8,2) & & (8,2) & & (8,8) & (8,8) & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{Q}_{1m}^T & \bar{Q}_{2m}^T & \dots & \bar{Q}_{km}^T & 0 & 0 & \dots & \ddot{Q}_m + \ddot{P}_m \\ (8,2) & (8,2) & & (8,2) & & & & (8,8) & (8,8) \end{array} \right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \dot{\bar{\delta}}_1 \\ (2,1) \\ \dot{\bar{\delta}}_2 \\ (2,1) \\ \dots \\ \dot{\bar{\delta}}_k \\ (2,1) \\ \ddot{\bar{\delta}}_1 \\ (8,1) \\ \ddot{\bar{\delta}}_2 \\ (8,1) \\ \dots \\ \ddot{\bar{\delta}}_m \\ (8,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\bar{\varepsilon}}_1 - \dot{P}_1 \dot{\bar{C}}_1 \\ (2,1) \quad (2,2) \quad (2,1) \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_2 - \dot{P}_2 \dot{\bar{C}}_2 \\ (2,1) \quad (2,2) \quad (2,1) \\ \dots \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_k - \dot{P}_k \dot{\bar{C}}_k \\ (2,1) \quad (2,2) \quad (2,1) \\ \ddot{\bar{\varepsilon}}_1 - \ddot{P}_1 \ddot{\bar{C}}_1 \\ (8,1) \quad (8,8) \quad (8,1) \\ \ddot{\bar{\varepsilon}}_2 - \ddot{P}_2 \ddot{\bar{C}}_2 \\ (8,1) \quad (8,8) \quad (8,1) \\ \dots \\ \ddot{\bar{\varepsilon}}_m - \ddot{P}_m \ddot{\bar{C}}_m \\ (8,1) \quad (8,8) \quad (8,1) \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Все элементы, входящие в эту систему, определяют с помощью основных соотношений (3.25), (3.29). При этом матрицы $\bar{Q}_i$ вычисляют непосредственно по формулам (3.26), а остальные суммированием

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \sum_{j=1}^m \dot{Q}_{ij} ; \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \sum_{j=1}^m \bar{\varepsilon}_{ij} ; \\ \ddot{Q}_j &= \sum_{i=1}^k \ddot{Q}_{ij} + \sum_{s=1}^{(n-4)} \ddot{\tilde{Q}}_{sj} ; \\ \ddot{\varepsilon}_j &= \sum_{i=1}^k \ddot{\varepsilon}_{ij} + \sum_{s=1}^{(n-4)} \ddot{\tilde{\varepsilon}}_{sj} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Для подматриц $\dot{Q}_{ij}$ и подвекторов $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij}$ суммирование выполняется по номерам опорных групп. Подматрицы $\ddot{Q}_{ij}$, $\ddot{\tilde{Q}}_{sj}$ и подвекторы $\ddot{\varepsilon}_{ij}$, $\ddot{\tilde{\varepsilon}}_{sj}$ суммируются:

$\ddot{Q}_{ij}$, $\ddot{\varepsilon}_{ij}$ – по номерам определяемых объектов;

$\ddot{\tilde{Q}}_{sj}, \ddot{\tilde{\varepsilon}}_{sj}$ – по номерам оставшихся $(n-4)$ -х опорных звезд, не вошедших в j -ю опорную группу.

Система нормальных уравнений (3.30) имеет структуру, соответствующую наиболее общим предположениям и, в частности, о том, что существуют некоторые предварительные значения координат $x_{\ell j}^0, y_{\ell j}^0$ ($\ell = 1, 2, 3, 4$) опорных звезд j -ой опорной группы отличные от их измеренных значений $\tilde{x}_{\ell j}, \tilde{y}_{\ell j}$. Практически же мы будем иметь: $x_{\ell j}^0 = \tilde{x}_{\ell j}, y_{\ell j}^0 = \tilde{y}_{\ell j}$. Поэтому составляющие вектора свободных членов $\ddot{\tilde{C}}_j$ (3.4) в уравнении поправок (3.22) будут равны нулю, а следовательно, вклад весов $\underset{(8,8)}{\dot{P}_j}$ в матрицы $\underset{(8,8)}{\ddot{Q}_j}$ и вклад $\underset{(8,8)}{\dot{P}_j} \underset{(8,1)}{\ddot{\tilde{C}}_j}$ в векторы $\underset{(8,1)}{\ddot{\tilde{\varepsilon}}_j}$ будут отсутствовать.

Как модификацию ПЗО можно рассмотреть алгоритм, при котором определяемыми параметрами является только первая группа неизвестных – сферические координаты. В этом случае структура системы нормальных уравнений существенно упрощается. Как следует из (3.30), матрица нормальных уравнений будет блочно-диагональной с блоками $\underset{(2,2)}{\dot{Q}_i} + \underset{(2,2)}{\dot{P}_i}$ ($i = 1, 2, \dots$) размером 2×2 .

Решение такой системы не представляет затруднений и будет сводиться к обращению блоков, составляющих матрицу нормальных уравнений. При этом минимально необходимое количество опорных звезд на снимке будет соответствовать четырем, то есть одна опорная группа.

§ 3.3. Исходная информация для экспериментальной проверки алгоритмов определения сферических координат

Основой экспериментальной разработки рассматриваемой методики послужили результаты весьма тщательных измерений изображения звездного неба (астронегатива). Исследуемым объектом является Плутон, изображение которого находится вблизи главной точки снимка.

Наблюдательный материал получен на широкоугольном астрографе АФР-1, имеющем следующие основные характеристики: фокусное расстояние $f = 2300$ мм, диаметр объектива $D = 230$ мм, поле зрения $2\omega = 6^\circ \times 6^\circ$, масштаб $M = 90''/\text{мм}$, коэффициент радиальной (Гауссовой) дисторсии $K_1 = +0,44 \times 10^{-8} \text{ мм}^{-2}$. [38, 86].

Снимок (астронегатив) был измерен на измерительном приборе «Ascorecord E2» (ГАИШ). Негатив измерялся дважды: после первого измерения снимок (негатив) разворачивался на 180. Результаты измерений представлены в табл. 3.1.

Экваториальные координаты опорных звезд и их собственные движения выбирались соответственно из каталога AGK3R и AGK3RN. Значения экваториальных координат опорных звезд и их собственные движения приведены в табл. 3.2.

Расположение опорных звезд и исследуемого объекта (Плутона) показано на рис. 3.1.

Измеренные значения координат изображений опорных звезд и определяемого объекта были исправлены за влияние факторов, имеющих нелинейный характер: за радиальную дисторсию и за

дифференциальную рефракцию по формулам (2.16), (2.17) и (2.14), (2.15) соответственно.

Влияние членов второго порядка дифференциальной аберрации не учитывалось, поскольку их значения малы и не превосходят в рассматриваемом нами случае $0,07''$.

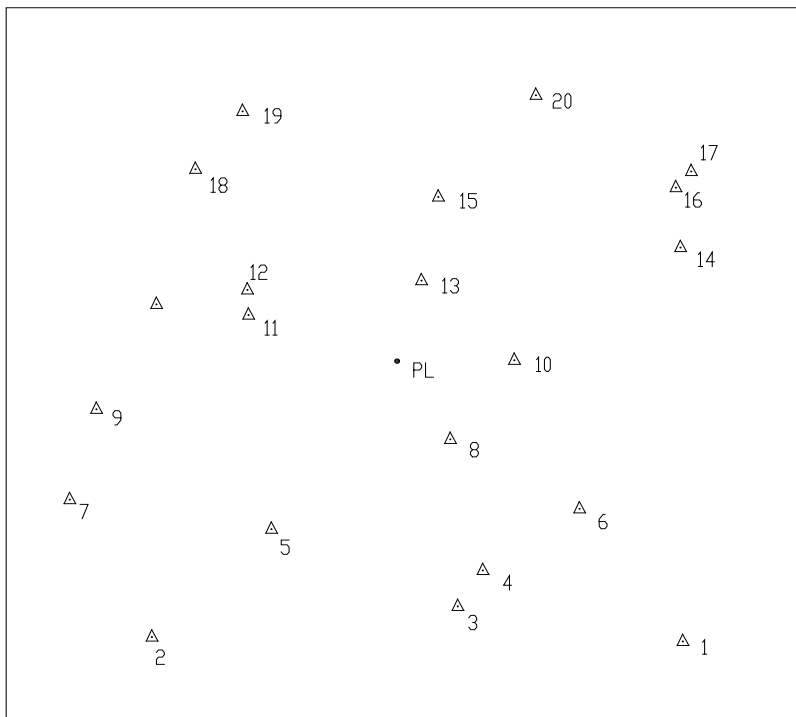


Рис. 3.1. Снимок звездного неба. Плутон, опорные звезды

Таблица 3.1

Измеренные координаты изображений опоры и Плутона

№	В Д	Измерение 1		Измерение 2	
		Х мм	У мм	Х мм	У мм
1	+01 3018	588.6650	109.9109	408.9007	287.7287
2	-02 3937	588.0554	272.8459	410.1135	124.8026
3	-00 2921	578.4545	182.0308	419.3831	215.6427
4	-00 2923	566.2952	175.7015	431.5079	222.0131
5	-01 3020	552.5332	237.9512	445.5040	159.8190
6	+00 3304	548.1926	144.6182	449.4979	253.1687
7	-03 3730	541.7933	296.5492	456.4603	101.2578
8	-00 2936	522.6258	181.1656	475.2014	216.7056
9	-03 3740	511.8495	289.0167	486.3749	108.9044
10	+00 3318	495.9718	161.2769	501.7846	236.7038
11	-01 3035	482.5553	242.8920	515.4927	155.0827
12	-01 3041	479.8403	242.8920	525.2115	155.1695
13	-00 2946	471.0242	193.1380	526.8435	204.9228
14	+01 3052	462.0989	114.1900	535.4748	284.0073
15	-00 2948	445.4292	185.6414	552.4131	212.5107
16	+01 3057	440.9345	113.6798	556.6465	284.4941
17	+01 3059	438.0628	108.4260	559.4964	289.7527
18	+01 3972	435.9561	258.5274	562.1528	139.6679
19	-01 3047	414.4459	243.0668	583.9804	155.2073
20	+00 3348	410.7497	155.5384	586.9804	242.7496
PL		498.4684	198.5860	499.4225	199.3807

Примечание: Дата наблюдений: 16.05. 1990 г.; UTC = $18^h 43^m - 19^h 13^m$.

Координаты места наблюдений: $\varphi = + 38^{\circ}41',3$; $\lambda = 4^h 27^m 36^s$; $h = 2800$ м.

Координаты центра фотографирования: $\alpha_u = 15^h 10^m$; $\delta_u = -1^{\circ}10'$.

Коэффициент дисторсии: $K_1 = +0,44 \times 10^{-8} \text{ мм}^{-2}$.

Координаты главной точки: измерение 1- $x_0 = 498,4684$; $y_0 = 198,5860$;

измерение 2 - $x_0 = 499,4225$; $y_0 = 199,3806$ мм.

Таблица 3.2

Значения экваториальных координат опорных звезд на снимке с изображением Плутона

№№	В Д	m_{pq}	S_p	α 1950.0 AGK3R	δ 1950.0 AGK3R	$\mu_\alpha/100$ AGK3RN	$\mu_\delta/100$ AGK3RN	Эпоха наблюдения	
								α	δ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+01 3018	7.0	KO	15 ^h 00 ^m 49 ^s .496	+1 ^h 05 05 05.72	-0 ^s .059	-0 ^{''} .64	1958.83	1958.17
2	-02 3937	8.6	A2	15 00 52.282	-2 58 23.94	-0.326	-3.59	58.65	58.63
3	-00 2921	8.0	AO	15 01 50.015	-0 42 40.85	+0.090	-0.23	58.14	57.99
4	-00 2923	8.9	KO	15 03 02.776	-0 33 13.53	-0.138	+0.99	59.35	59.36
5	-01 3020	8.4	K2	15 04 24.830	-2 06 20.96	-0.096	+0.33	58.32	58.28
6	+00 3304	7.9	KO	15 04 51.127	0 13 14.48	-0.008	+0.53	58.97	58.87
7	-03 3730	7.6	K2	15 05 28.986	-3 33 57.50	-0.228	+0.53	58.39	58.46
8	-00 2936	7.6	FO	15 07 24.015	-0 41 25.93	-0.385	-0.68	57.89	57.89
9	-03 3740	8.6	F5	15 08 28.188	-3 22 43.88	+0.254	-0.59	57.70	57.81
10	+00 3318	7.5	K5	15 10 03.461	-0 11 40.86	+0.022	-1.39	58.06	57.93
11	-01 3035	9.1	K5	15 11 23.809	-2 13 52.07	-0.277	-0.85	58.62	58.86

Продолжение таблицы 3.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
12	-01 3041	7.9	M3	15 12 21.897	-2 13 46.61	-0.038	-3.15	58.36	58.48
13	-00 2946	8.3	AO	15 12 32.756	-0 59 21.08	-0.191	-2.34	59.14	59.48
14	+01 3052	7.2	KO	15 13 25.880	+0 58 54.22	+1.199	-14.83	59.03	59.82
15	-00 2948	7.2	G5	15 15 05.948	-0 48 10.05	-0.206	-0.19	58.43	58.42
16	+01 3057	9.0	K	15 15 32.692	+0 59 26.12	+0.218	-1.27	59.05	59.18
17	+01 3059	7.0	KO	15 16 02.626	+1 07 16.31	-0.245	-2.50	58.36	58.53
18	-02 3972	8.0	F8	15 15 49.676	-2 37 07.25	+0.267	-5.86	58.43	58.12
19	-01 3047	6.4	K2	15 18 11.892	-2 13 55.11	-1.766	-18.08	58.32	58.01
20	+003348	8.4	G5	15 18 33.066	-0 03 07.71	+0.134	-1.93	58.41	58.63

§ 3.4. Результаты обработки изображения звездного неба

Результаты обработки (проективных преобразований) снимка представлены в табл. 3.3 и 3.4. Задача была решена при различных комбинациях опорных звезд по группам.

В табл. 3.3 представлены средние экваториальные координаты планеты Плутон, отнесенные на эпоху равноденствия каталога, полученные в результате решения полной задачи обработки снимка.

В табл. 3.4 приведены результаты для случая, когда определяемыми параметрами являются только экваториальные координаты Плутона.

Предварительные значения экваториальных координат Плутона находились по методу Ю.М. Трунина, изложенному в разделе 2.3.2. В табл. 3.5 в качестве примера приведены значения прямого восхождения и склонения Плутона, полученные по первому измерению снимка методом Ю.М. Трунина с каждой опорной группой трех рассматриваемых вариантов сформированной на снимке опоры – совокупности опорных групп.

Как следует из анализа табл. 3.5, за предварительные значения экваториальных координат, в принципе, можно принять любые из приводимых значений прямого восхождения и склонения. С целью упрощения алгоритмизации вычислительного процесса при проективных преобразованиях снимка по методу наименьших квадратов, за предварительные значения экваториальных координат

α_0^0 , δ_0^0 принимались величины, полученные методом Ю.М. Трунина на по первой опорной группе звезд, то есть $j = 1$.

Таблица 3.3

**Экваториальные координаты Плутона,
полученные из решения полной задачи обработки снимка (ПЗО)**

№ групп	№ опорных звезд	Изме- рение	α	m_α	δ	m_δ	μ (мм.)
j = 1	1, 2, 18, 14		15^h 09^m		-1° 07		
2	3, 7, 20, 17	1	48, ^s 489	0, ^s 001	30,62	0,01	0,0003
3	6, 5, 11, 13	2	48, 492	0, 002	30,49	0,03	0,0007
4	9, 7, 15, 10						
j = 1	9, 11, 13, 10						
2	1, 2, 18, 17	1	48, 488	0,004	30,65	0,06	0,0012
3	3, 7, 15, 14	2	48, 493	0,000	30,49	0,01	0,0001
4	6, 5, 12, 20						
j = 1	1, 7, 18, 17	1	48, 496	0,004	30,4	0,06	0,0010
2	6, 4, 11, 14	2	48, 499	0,005	30,31	0,08	0,0013
3	3, 5, 20, 16						

Таблица 3.4

**Экваториальные координаты Плутона,
полученные при одной группе неизвестных параметров**

№ групп	№ опорных звезд	Изме- рение	α	m_α	δ	m_δ	μ (мм.)
j = 1	1, 2, 18, 14		15^h 09^m		-1° 07		
2	3, 7, 20, 17	1	48, ^s 502	0, ^s 014	30,64	0,21	0,0047
3	6, 5, 11, 13	2	48, 488	0,013	30,36	0,20	0,0045
4	9, 7, 15, 10						

j = 1	9, 11, 13, 10						
2	1, 2, 18, 17	1	48, 497	0,010	30,88	0,14	0,0032
3	3, 7, 15, 14	2	48, 500	0,008	30,49	0,12	0,0027
4	6, 5, 12, 20						
j = 1	1, 7, 18, 17	1	48, 492	0,012	30,41	0,18	0,0035
2	6, 4, 11, 14	2	48, 487	0,014	30,23	0,21	0,0041
3	3, 5, 20, 16						

Таблица 3.5

**Предварительные значения экваториальных координат Плутона,
полученные по способу Ю.М. Трунина**

Измерение 1

№ групп	№ опорных звезд	α_0^0	δ_0^0
j = 1	9, 11, 13, 10	15 ^h 09 ^m 48, ^s 510	-1°07'30,76
2	1, 2, 18, 17	48, 534	30,21
3	3, 7, 20, 17	48, 480	30,31
4	6, 5, 11, 13	48, 501	31,29
	9, 17, 15, 10		
Среднее значение		15 ^h 09 ^m 48, ^s 506	-1°07'30,64
j = 1	9, 11, 13, 10	15 ^h 09 ^m 48, ^s 501	-1°07'30,03
2	1, 2, 18, 17	48, 517	30,86
3	3, 7, 15, 14	48, 489	30,25
4	6, 5, 12, 20	48, 499	31,38
Среднее значение		15 ^h 09 ^m 48, ^s 502	-1°07'30,88
j = 1	1, 7, 18, 17	15 ^h 09 ^m 48, ^s 513	-1°07'30,80
2	6, 4, 11, 14	48, 484	30,01
3	3, 5, 20, 16	48, 497	30,41
Среднее значение		15 ^h 09 ^m 48, ^s 497	-1°07'30,41

Анализ значений экваториальных координат Плутона (табл. 3.3, табл. 3.4), полученных из уравнильных вычислений, позволяет отметить хорошую сходимость как результатов, вычисленных по одному из алгоритмов – внутренняя сходимость, так и между результатами, полученными двумя алгоритмами – внешняя сходимость.

Тем не менее, расхождения по прямому восхождению и склонению меньше в случае, когда решается полная задача обработки снимка (астронегатива), и составляют соответственно $0^s,011$ и $0'',34$ в отличие от $0^s,014$ и $0'',65$, когда определяемыми параметрами являются только восхождение и склонение. Наблюдается также уменьшение средней квадратической ошибки (СКО) при определении прямого восхождения – m_α и склонения – m_δ при включении в процесс уравнильных вычислений координат изображений опорных звезд, составивших опорные группы. В этом случае СКО m_α и m_δ не превышает $0'',10$, а ошибка единицы веса $1,5$ мкм, что хорошо согласуется с масштабом астрографа. Тогда как, при определении только сферических координат СКО m_α и m_δ находятся в интервале $0'',10$ – $0'',22$ при ошибке единицы веса $2,7$ – $4,7$ мкм.

Уменьшение средних квадратических ошибок m_α и m_δ экваториальных координат Плутона при решении ПЗО можно объяснить следующими причинами. Во-первых, при решении ПЗО мы получаем наряду с экваториальными координатами также уравненные значения координат изображений опорных звезд, составивших опорные группы, то есть ПЗО наиболее адекватно

соответствует математической модели (2.41) в смысле ее параметризации при построении линейной формы, так как координаты изображений и экваториальные координаты опорных звезд заданы с конечной точностью. В табл. 3.6 в качестве примера приведены уравненные значения координат изображений опорных звезд, составивших опорные группы.

Таблица 3.6

**Уравненные значения координат изображений опорных
звезд, составивших опорные группы**

Измерение 1

№	x	$-dx$	m_x	y	$-dy$	m_y
1	588,6611	- 0,0030	0,0016	109,9176	+ 0,0017	0,0015
7	541,7863	+ 52	13	296,5511	- 48	20
18	438,0672	+ 07	15	258,5292	- 28	15
17	435,9572	- 08	07	108,4374	- 49	08
6	548,1908	+ 04	06	144,6192	+ 10	05
4	566,2963	- 28	05	175,6990	+ 34	06
11	482,5589	+ 36	06	242,9397	+ 26	06
14	462,1029	- 23	06	114,0973	- 27	06
3	578,4495	+ 25	06	182,0343	- 25	07
5	552,5325	- 02	06	155,5363	+ 05	07
20	440,9331	+ 30	09	237,9505	+ 48	07
16	410,7505	+ 44	07	113,6797	+ 57	08

Во-вторых, при одном и том же количестве опорных групп количество уравнений поправок будет больше при решении ПЗО, чем

в случае, когда определяются только сферические координаты объекта.

Из анализа табл. 3.3 и 3.4 также следует, что окончательный результат зависит от сформированной на снимке опоры: формы опорных четырехугольников и от взаимного расположения объекта и опоры. При одних и тех же опорных звездах, но различным образом сформированным из них опорных четырехугольников получены хоть и очень близкие по значению, но различные результаты. В рассматриваемом примере эти различия получились меньшими при решении ПЗО и составили – $0^s,001$ по прямому восхождению и $0'',03$ по склонению, в отличие от $0^s,012$ и $0'',24$, в случае, когда определялись только прямое восхождение и склонение.

В заключение можно сделать следующий вывод:

- экваториальные координаты определяются с большей точностью при решении полной задачи обработки снимка (редукции астронегатива), чем в случае когда определяемыми параметрами является только одна группа – сферические координаты.

§ 3.5. Сравнение результатов обработки с результатами, полученными классической процедурой

В табл. 3.7 приводятся значения экваториальных координат планеты Плутон, полученные классической процедурой – способом Дейча.

Способ Дейча в разных модификациях на протяжении длительного времени широко применяется для обработки

фотографических наблюдений, полученных на широкоугольных астрографах, с хорошо исправленным полем [67, 80]. Поэтому коротко отметим наиболее существенные стороны данного метода редукции.

Таблица 3.7

Средние экваториальные координаты Плутона, способ Дейча

Измерение	α	δ
1	$15^h 09^m 48^s,490$	$-1^\circ 07' 30'',35$
2	$15\ 09\ 48,489$	$-1\ 07\ 30,40$

Способ Дейча исходит из того, что идеальные координаты ξ , η связаны с измеренными координатами x и y соотношениями общего гомографического (коллинеарного) преобразования [31, 40, 41, 77]. Неизвестными в задаче являются восемь коэффициентов общего гомографического преобразования. Наименьшее число опорных звезд, при котором решается данная задача, равно четырем. Для n опорных звезд можно получить одну систему уравнений размером (8×8) или две системы нормальных уравнений размером (5×5) по координатам x и y , решая которые в соответствии с правилами метода наименьших квадратов, находят искомые коэффициенты. Зная параметры преобразования, находят идеальные координаты ε_0 , η_0 исследуемого объекта по измеренным координатам x_0 , y_0 и лишь затем вычисляют экваториальные координаты объекта.

Очевидная простота способа Дейча в вычислительном отношении имела важное значение во времена разработки данного способа редукции, когда решение систем уравнений большого порядка вызывало существенные затруднения. В настоящее время при наличии высокопроизводительных компьютеров, способных обрабатывать большие массивы информации, простота способа Дейча теряет свою первоначальную актуальность.

Позволяя решать задачу обработки без знания оптического центра при произвольном наклоне снимка [31], тем не менее в способе Дейча требуется иметь точное значение фокусного расстояния съёмочной камеры. Точность определения экваториальных координат по способу Дейча в существенной мере определяется точностью, с которой известно фокусное расстояние.

Следует отметить, что в данном способе отсутствует строгая оценка точности окончательного результата – экваториальных координат. Из решения системы нормальных уравнений получают и оценивают в соответствии с правилами метода наименьших квадратов только восемь коэффициентов общего гомографического преобразования, а не сами экваториальные координаты.

Теория и алгоритмы обработки астронегативов с целью определения экваториальных координат объектов, изложенные в монографии, лишены отмеченных выше недостатков, характерных для способа Дейча. Более того, несмотря на то, что разработанная теория и методика ориентирована на применение современных компьютеров, она позволяет построить алгоритм обработки снимка более выгодный с вычислительной точки зрения, чем способ Дейча.

В разделе 2.3.1 отмечено, что, если определяемыми параметрами является только одна группа неизвестных – сферические координаты, то размеры матрицы нормальных уравнений будут (2×2) при этом минимально необходимое количество опорных звезд будет равно четырем, то есть как в способе Дейча. Минимальные размеры матрицы нормальных уравнений в способе Дейча равны 5×5 при раздельном решении систем по двум координатам – x и y .

В табл. 3.4 предыдущего раздела приведены средние экваториальные координаты планеты Плутон, отнесенные на эпоху равноденствия каталога и полученные алгоритмом, когда определяемыми параметрами являлись только экваториальные координаты. В табл. 3.3 того же раздела представлены средние экваториальные координаты Плутона, полученные в результате решения ПЗО.

Из анализа сравнения экваториальных координат Плутона, полученных разработанными алгоритмами, с результатами, полученными классической процедурой (см. табл. 3.3–3.6), можно утверждать о правильности подхода уравнительных вычислений при проективных преобразованиях астронегативов с использованием инвариантных соотношений проективной геометрии.

Средние квадратические ошибки (m_α и m_δ) в определении положения планеты Плутон находятся в пределах точности измерений, как в случае, когда решается ПЗО, так и в случае, когда определяемыми параметрами является только одна группа неизвестных – сферические координаты. Экваториальные координаты Плутона, полученные двумя алгоритмами, близки по

значениям. Тем не менее, в качестве окончательных значений экваториальных координат, как это следует из предыдущего анализа, следует принять величины, полученные при решении ПЗО, причем при количестве опорных групп, равном четырем ($m = 4$). Нетрудно видеть (см. табл. 3.3), что средние значения прямого восхождения и склонения, полученные для 2-х измерений снимка (астронегатива), соответствующие двум вариантам опоры при $m = 4$, практически равны. Поэтому за окончательные значения средних экваториальных координат Плутона из двух измерений астронегатива следует принять величины: $\alpha = 15^h 09^m 48^s,491 \pm 0^s,003$; $\delta = -1^\circ 07' 30'',56 \pm 0'',04$.

§ 3.6. Определение собственных движений звезд из обработки проективно-преобразованных снимков

А. Подход к решению задачи

Определение собственных движений звезд имеет важное значение, поскольку система координат в астрономии опирается на звезды и поэтому необходимо знать смещение этих реперов во времени. Весьма удобен для массового определения относительных собственных движений звезд фотографический метод, позволяющий определять их с точностью $0,01''$ – $0,03''$ [64].

Для определения собственных движений звезд этим методом достаточно иметь два снимка звездного неба (астронегатива) одной и той же области неба, полученных в разные эпохи. Точными измерениями получают разности прямоугольных координат Δx и Δy одних

и тех же звезд. Измерения координат изображений звезд на обоих снимках осуществляются в одной и той же системе координат.

В классическом подходе к задаче определения собственных движений звезд разности Δx и Δy представляются в виде полиномов. Из решения по методу наименьших квадратов (МНК) систем уравнений, составленных для опорных звезд с известными собственными движениями или с собственными движениями, которыми можно пренебречь, находят, так называемые коэффициенты связи пластинок. Зная коэффициенты преобразования и масштабы снимка по двум координатным осям x, y находят собственные движения исследуемых звезд.

При таком подходе в результате решения системы нормальных уравнений можно выполнить в соответствии с правилами МНК оценку точности не самих собственных движений, а лишь коэффициентов преобразования. Отметим также следующее. Считается, что система измеренных координат x, y с достаточной степенью точности соориентирована параллельно системе идеальных координат ε, η .

Поэтому полагают, что полученные собственные движения звезд μ_α, μ_δ соответствуют проекциям собственных движений звезд по экваториальным координатам. Строго говоря, это не так.

Использование проективных преобразований, и в частности инвариантных соотношений, как это будет показано ниже, позволяет построить подход (алгоритм), в котором собственные движения звезд получаются непосредственно из уравнительных вычислений по методу наименьших квадратов (МНК).

Задача определения собственных движений звезд решается в виде двухэтапного уравнивания.

На первом этапе уравнивания, в результате проективных преобразований изображений исследуемых звезд из поля изображений эпохи T_1 в поле изображений эпохи T_0 ($T_0 < T_1$), находятся линейные смещения $(\Delta x, \Delta y)_i, (i = 1, 2 \dots k)$, обусловленные собственными движениями звезд.

На втором этапе уравнивания смещения $(\Delta x, \Delta y)_i$ принимаются в качестве «искусственных измеренных величин», которые связаны с собственными движениями звезд.

Применение аппарата проективной геометрии предполагает, что поля измеренных координат изображений звезд предварительно должны быть очищены (с точностью до гомотетики) от нелинейных искажающих факторов. Такими факторами наряду с дисторсией будут дифференциальная рефракция и абберация второго порядка. Поэтому соответствующие поправки необходимо внести в измеренные координаты изображений до начала уравнивательных вычислений.

Б. Уравнивание на первом этапе

Первый этап уравнивания заключается в проективном преобразовании по МНК изображений звезд из плоскости одного снимка в плоскость другого снимка, например, из плоскости снимка Π_1 , полученного в эпоху T_1 , в плоскость снимка Π_0 , сфотографированного в более раннюю эпоху T_0 . Такое преобразование наиболее адекватно выявлению собственных движений в виде линейных смещений их изображений.

Делаются следующие предположения:

1. В плоскости первого и второго снимка (изображения, астронегатива) имеется n изображений одних и тех же точек (звезд). Из этих опорных точек формируется m опорных групп по четыре независимые опорные точки в каждой группе и задающих m систем проективных координат ($m \geq 1$).

2. Опорные группы не содержат общих точек.

3. Измерения координат изображений независимы.

Для проективных преобразований по МНК из поля Π_1 в поле Π_0 исходным является следующее выражение [16]:

$$\begin{bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{bmatrix}_i = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_1 \xi_{1i} \\ A'_2 \xi_{2i} \\ A'_3 \xi_{3i} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Эта формула устанавливает однозначное соответствие между полями изображений Π_1 и Π_0 посредством проективных координат.

В формуле связи (3.32) приняты следующие обозначения: x'_{0i}, y'_{0i} – неоднородные координаты изображения i -ой ($i = 1, 2, \dots, k$) преобразуемой точки (изображение звезды) в поле Π_1 ; x'_l, y'_l ($l = 1, 2, 3$) – неоднородные координаты трех опорных точек из опорной группы; $A'_1 = \vec{r}'_2 \vec{r}'_3 \vec{r}'_4$, $A'_2 = \vec{r}'_3 \vec{r}'_1 \vec{r}'_4$, $A'_3 = \vec{r}'_1 \vec{r}'_2 \vec{r}'_4$ – смешанные произведения, составленные из однородных векторов $\vec{r}'_l = [x'_l, y'_l, 1]^T$, ($l = 1, 2, 3, 4$) точек опорной группы в поле Π_1 , ξ_1, ξ_2, ξ_3 – проективные координаты точки в поле Π_0 , определяемые как отношения смешанных произведений, составленных из однородных векторов опорных точек $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$ и исследуемой точки $\vec{r}_{0i}$:

$$\xi_{1i} = \frac{\vec{r}_2 \vec{r}_3 \vec{r}_{0i}}{\vec{r}_2 \vec{r}_3 \vec{r}_4}; \quad \xi_{2i} = \frac{\vec{r}_3 \vec{r}_1 \vec{r}_{0i}}{\vec{r}_3 \vec{r}_1 \vec{r}_4}; \quad \xi_{3i} = \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_{0i}}{\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_4}; \quad (3.33)$$

ρ – коэффициент пропорциональности, которому свойственна двойственность:

$$\rho = A'_1 \xi_1 + A'_2 \xi_2 + A'_3 \xi_3; \quad \rho = \vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_3'. \quad (3.34)$$

Отметим, что неоднородными координатами изображений звезд в плоскости снимка (астронегатива) Π_0 и Π_1 фактически будут являться измеренные координаты, а для формирования однородного вектора точки необходимо ее измеренные координаты дополнить третьей компонентой $z = const$, например, $z = 1$. На основе уравнения связи (2.32) составляется уравнение поправок для i -й точки и j -й опорной группы:

$$B_{ij} \begin{matrix} \bar{\delta}_i \\ (2,2) \end{matrix} = \begin{matrix} \bar{\varepsilon}_{ij} \\ (2,1) \end{matrix} + \begin{matrix} \bar{V}_{ij} \\ (2,1) \end{matrix}; \quad (3.35)$$

$$i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь B_{ij} – матрица частных производных:

$$B_{ij} = \frac{\partial(x'_{0i}, y'_{0i})_j}{\partial(x_{0i}, y_{0i})}; \quad (3.36)$$

$\bar{\delta}_i$ – вектор поправок в предварительные значения неоднородных координат изображения i -й звезды в поле Π_0 ;

$$\bar{\delta}_i = [dx_{0i}, dy_{0i}]^T; \quad (3.37)$$

$\bar{\varepsilon}_{ij}$ – вектор свободных членов; $\bar{V}_{ij}$ – вектор поправок.

Из решения системы нормальных уравнений, соответствующей совокупности всех возможных уравнений поправок вида (3.35), находятся векторы $\bar{\delta}_i$, являющиеся компонентами общего вектора решений

$$\bar{\delta} = [\bar{\delta}_1^T \mid \bar{\delta}_2^T \mid \dots \mid \bar{\delta}_l^T]^T.$$

Если в качестве предварительных координат изображения звезды в поле Π_0 принимаются значения ее измеренных координат, то из решения системы нормальных уравнений будет получено линейное смещение изображения звезды, обусловленное собственным движением. В результате уравнивания будем также иметь ковариационную матрицу уравненных параметров, равную обратной матрице нормальных уравнений $K = Q^{-1}$, а также ошибку единицы веса μ_0 . Очевидно, что при выполнении преобразований в качестве опорных точек мы вынуждены взять изображения звезд, у которых будут собственные движения.

Желательно выбирать звезды, имеющие незначительные движения, неспособные сколь либо существенно исказить результаты решения всей задачи. Таких звезд *a priori* указать нельзя.

Наличие у опоры собственного движения, пусть и незначительного, приведет к изменению взаимного расположения опорных точек в плоскости Π_1 . Предположим, что в плоскостях Π_0 и Π_1 имеется не-

подвижная точка, относительно которой рассматривается смещение опоры. Тогда проективные координаты этой точки в плоскости Π_0 не будут равны ее проективным координатам в плоскости Π_1 . Чисто теоретически, с точки зрения проективной геометрии, это недопустимо. Учесть собственные движения у опорных звезд непосредственно в координатах изображений не представляется возможным. Очевидно, этот эффект будет являться причиной некоторой составляющей $\bar{\Delta}_i$ в определяемых смещениях изображений. Эта составляющая не будет одинаковой для всех преобразуемых точек, поскольку, как показывают результаты численных экспериментов, точность преобразований зависит от взаимного расположения опоры и преобразуемой точки. Необходимо оценить величину вектора $\bar{\Delta}_i$ для каждой определяемой звезды и учесть его на втором этапе уравнительных вычислений. Исходя чисто из практических соображений, положим, что $\bar{\Delta}_1 = \bar{\Delta}_2 = \dots = \bar{\Delta}_k = \bar{\Delta}$. В таком случае эту проблему можно решить следующим образом.

На первом этапе уравнивания в число преобразуемых звезд включаются l контрольных звезд с известными собственными движениями и вычисляются смещения их изображений. В этом случае вектор δ – результат первого этапа уравнивания – представим в виде двух векторов $\hat{\delta}$ и $\tilde{\delta}$ размерностей $2t$ и $2l$ соответственно, так что $t + l = k$:

$$\bar{\delta}_{(2k,1)} = \left[\hat{\delta}_{[2t,1]}^T \mid \tilde{\delta}_{(2l,1)}^T \right]^T, \quad (3.38)$$

где $\hat{\delta}$ – вектор смещений изображений t звезд, у которых собственные движения определяются, $\widetilde{\delta}$ – вектор смещений изображений l контрольных звезд.

С другой стороны, принимая выражение (3.32) в качестве модели, связывающей изменения сферических координат звезд и координат их изображений, можно для каждой контрольной звезды получить m реализаций (соответственно числу опорных групп) вектора смещения изображения в плоскости Π_0 :

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_{js} &= \dot{B}_{js} \ddot{\delta}_s, \\ (2,1) \quad (2,2) \quad (2,1) \\ s &= 1, 2, \dots, l, \\ j &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Здесь $\dot{B}_{js}$ – матрица коэффициентов (3.36) для s -й контрольной звезды, компонентами вектора $\ddot{\delta}_s$ являются изменения сферических координат вследствие собственного движения за интервал времени $\Delta T = T_1 - T_0$:

$$\ddot{\delta}_s = \begin{bmatrix} \Delta T \mu_\alpha \\ \Delta T \mu_\delta \end{bmatrix}_s. \quad (3.40)$$

Ковариационную матрицу, соответствующую вектору $\ddot{\delta}_s$, обозначим через $\ddot{K}_{\mu s}$. Таким образом, можно определить вектор $\ddot{\Delta}_{js}$:

$$\ddot{\Delta}_{js} = \ddot{\delta}_s - \ddot{\varepsilon}_{js}, \quad (2,1) \quad (2,1) \quad (2,1) \quad (3.41)$$

который и характеризует влияние собственных движений опорных звезд j -й опорной группы на определяемое смещение изображения s -й контрольной звезды.

В общем случае для нахождения наилучшей оценки вектора $\overline{\Delta}$ совокупность векторов $\ddot{\Delta}_{js}$ необходимо обработать как ряд взаимозависимых векторов.

В частном случае можно предположить, что собственные движения контрольных звезд не коррелируют между собой. Такое предположение, является недостаточно строгим с теоретических позиций, но весьма может быть оправдано с точки зрения практики, поскольку ковариационные матрицы собственных движений звезд отсутствуют.

Ковариационная матрица совокупности значений $\ddot{\varepsilon}_{js}$ в этом случае будет иметь блочно-диагональный вид. На диагонали будут располагаться блоки $\ddot{K}_s$ размером, $(2m, 2m)$ являющиеся ковариационными матрицами m реализаций смещения изображения s -й контрольной звезды:

$$\ddot{K}_s = \begin{matrix} \dot{B}_s & \dot{K}_{\mu s} & \dot{B}_s^T \\ (2m, 2m) & (2m, 2) & (2, 2) \end{matrix} \begin{matrix} (2, 2m) \\ (2, 2) \\ (2, 2m) \end{matrix}, \quad (3.42)$$

где

$$\dot{B}_s = \begin{bmatrix} \dot{B}_{1s}^T & \dot{B}_{2s}^T & \dots & \dot{B}_{ls}^T \\ (2, 2) & (2, 2) & & (2, 2) \end{bmatrix}^T. \quad (3.43)$$

Тогда процедуру получения оценки вектора $\overline{\Delta}$ можно построить следующим образом:

1. Отдельно для каждой s -й контрольной звезды находится оценка вектора смещения изображения $\ddot{\vec{C}}_s$. С этой целью выполняется обработка совокупности векторов $\ddot{\vec{\varepsilon}}_{js} (j = 1, 2, \dots, m)$, зависимость между которыми характеризуется ковариационной матрицей $\ddot{\vec{K}}_s$ (3.42).

2. Для каждой контрольной звезды определяется вектор $\ddot{\vec{\Delta}}_s$, характеризующий влияние собственных движений опорных звезд m опорных групп на определяемые смещения изображений:

$$\underset{(2l,1)}{\overset{\sim}{\vec{\Delta}}} = \underset{(2l,1)}{\overset{\sim}{\vec{\delta}}} - \underset{(2l,1)}{\overset{\sim}{\vec{C}}} . \quad (3.44)$$

В выражении (3.44) приняты следующие обозначения:

$$\underset{(2l,1)}{\overset{\sim}{\vec{\Delta}}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \ddot{\vec{\Delta}}_1^T & \ddot{\vec{\Delta}}_2^T & \dots & \ddot{\vec{\Delta}}_l^T \\ \hline (2,1) & (2,1) & & (2,1) \end{array} \right]^T ; \quad (3.45)$$

$\underset{(2l,1)}{\overset{\sim}{\vec{\Delta}}}$ – вектор смещений изображений s контрольных звезд, вычисленных по известным собственным движениям:

$$\underset{(2l,1)}{\overset{\sim}{\vec{C}}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \ddot{\vec{C}}_1^T & \ddot{\vec{C}}_2^T & \dots & \ddot{\vec{C}}_l^T \\ \hline (2,1) & (2,1) & & (2,1) \end{array} \right]^T ; \quad (3.46)$$

$\underset{(2l,1)}{\overset{\sim}{\vec{\delta}}}$ – вектор смещений изображений s контрольных звезд, полученный в результате уравнительных вычислений (3.37).

Составляющие вектора $\underset{(2l,1)}{\overset{\sim}{\vec{C}}}$, как и вектора $\underset{(2l,1)}{\overset{\sim}{\vec{\delta}}}$, будут взаимозависимыми, поскольку вычисления выполняются с использованием одних и тех же опорных групп. Ковариационная матрица $\ddot{\vec{K}}_c$, соответ-

ствующая вектору $\tilde{\vec{C}}$, может быть получена из анализа векторов $\ddot{\vec{\varepsilon}}_{js}$ и $\ddot{\vec{C}}_s$.

3. Находится значение вектора $\bar{\Delta}$ как обобщенная арифметическая середина из всех векторов $\ddot{\vec{\Delta}}_s$ ($s=1, 1, \dots, l$) (3.41).

В дальнейших вычислениях составляющие вектора $\bar{\Delta}$ учитываются в смещениях изображений звезд, собственные движения у которых определяются.

Предположим, что в поле изображений (снимков) P_0 и P_1 имеются изображения специальных меток, задающих 2–3 опорные группы. Тогда, наряду с проективными преобразованиями изображений звезд с неизвестными собственными движениями, можно выполнить преобразования n опорных звезд. Результаты преобразований в этом случае можно использовать для подбора (формирования) оптимальных опорных групп на основе анализа величин dx_j, dy_j ($j=1, 2, \dots, n$) и формы опорного четырехугольника.

В. Уравнивание на втором этапе

В качестве измеренных величин на втором этапе уравнивания принимают компоненты вектора $\hat{\vec{\delta}}$ (3.38) с ковариационной матрицей $\hat{Q}^{-1}$, освобожденные от влияния собственных движений опорных звезд, составивших опорные группы.

Дифференциальные изменения сферических координат звезд будут вызывать соответствующие изменения координат изображений:

$$\begin{bmatrix} dx_0 \\ dy_0 \end{bmatrix}_y = \frac{\partial(x_{0i}, y_{0i})_j}{\partial(\alpha_{0i}, \delta_{0i})} \begin{bmatrix} d\alpha \\ d\delta \end{bmatrix}_i. \quad (3.47)$$

Зависимость между координатами изображений (x_0, y_0) звезд и их сферическими координатами $(\alpha, \delta)_i$ устанавливается с использованием проективных координат [79]. Уравнение связи будет иметь вид, аналогичный выражению (3.32), а проективные координаты $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_i$ определятся как отношения смешанных произведений, составленных из единичных векторов на опорные звезды $\vec{R}_1^0, \vec{R}_2^0, \vec{R}_3^0, \vec{R}_4^0$ и единичного вектора $\vec{R}_{0i}^0$ на звезду, собственные движения которой определяются:

$$\xi_{1i} = \frac{\vec{R}_3^0 \vec{R}_2^0 \vec{R}_{0i}^0}{\vec{R}_3^0 \vec{R}_2^0 \vec{R}_4^0}, \quad \xi_{2i} = \frac{\vec{R}_3^0 \vec{R}_1^0 \vec{R}_{0i}^0}{\vec{R}_3^0 \vec{R}_1^0 \vec{R}_4^0}, \quad \xi_{3i} = \frac{\vec{R}_1^0 \vec{R}_2^0 \vec{R}_{0i}^0}{\vec{R}_1^0 \vec{R}_2^0 \vec{R}_4^0}. \quad (3.48)$$

Полагая, что собственные движения звезд малы, можно принять $d\alpha_i = \mu_{\alpha_i}, d\delta_i = \mu_{\delta_i}$. На основании выражения (3.47) можно записать уравнение поправок:

$$\dot{B}_{ij} \dot{\delta}_i = \begin{matrix} \dot{\varepsilon} \\ (2,2) \end{matrix} \begin{matrix} \dot{\delta}_i \\ (2,1) \end{matrix} + \begin{matrix} \dot{V}_{ij} \\ (2,1) \end{matrix} \quad (3.49)$$

$i = 1, 2, \dots, t, \quad j = 1, 2, \dots, m,$

где $\dot{B}_{ij}$ – матрица частных производных:

$$\dot{B}_{ij} = \frac{\partial(x_{0i}, y_{0i})_j}{\partial(\alpha_{0i}, \delta_{0i})}; \quad (3.50)$$

$\dot{\delta}_i$ – вектор неизвестных параметров

$$\dot{\delta}_i = [\mu_{\alpha}, \mu_{\delta}]_i^T; \quad (3.51)$$

$\dot{\hat{\varepsilon}}_{ij}$ – вектор свободных членов; $\dot{\hat{V}}_{ij}$ – вектор поправок.

Формулы вычисления коэффициентов матрицы $\dot{B}_{ij}$ приведены в разделе 2.2.1. Коэффициенты матрицы $\dot{B}_{ij}$ вычисляются по измеренным координатам изображений 4 звезд опорной группы, их сферическим координатам, а также координатам изображений и сферическим координатам исследуемых звезд и будут безразмерными величинами. При отсутствии значений сферических координат для исследуемых звезд их легко можно получить из обработки снимка эпохи T_0 либо прямым методом (методом Ю.М. Трунина, [75]), либо алгоритмами, приведенными в разделе 2.2 [11].

Систему уравнений поправок (3.49) для t определяемых звезд с j -й опорной группой представим в следующем виде:

$$\dot{B}_{j(2t,2t)} \dot{\hat{\delta}}_{(2t,1)} = \dot{\hat{\varepsilon}}_{j(2t,1)} + \dot{\hat{V}}_{j(2t,1)}. \quad (3.52)$$

Здесь

$$\dot{B}_j = \text{diag}(\dot{B}_{1j}, \dot{B}_{2j}, \dots, \dot{B}_{ij}), \quad \dot{\hat{\delta}} = \left[\dot{\hat{\delta}}_1^T \left| \dot{\hat{\delta}}_2^T \right|, \dots, \left| \dot{\hat{\delta}}_t^T \right| \right]^T, \quad (3.53)$$

вектор свободных членов $\dot{\hat{\varepsilon}}_j$ принимается равным вектору $\hat{\hat{\delta}} : \dot{\hat{\varepsilon}}_j = \hat{\hat{\delta}}$.

Уравнению поправок (3.52) будут соответствовать ковариационная матрица $\dot{K}_j = \hat{\hat{Q}}_j^{-1}$ и весовая матрица $\dot{P}_j = \mu_0^2 K_j^{-1} = \mu_0^2 \hat{\hat{Q}}_j$. Систему нормальных уравнений представим в следующем виде:

где

$$\dot{Q}_{j(2t,2t)} \dot{\hat{\delta}}_{(2t,1)} = \dot{\hat{L}}_{(2t,1)},$$

$$\dot{Q}_j = \dot{B}_j^T \hat{\hat{Q}} \dot{B}_j, \quad \dot{\hat{L}}_j = \dot{B}_j^T \hat{\hat{Q}} \hat{\hat{\delta}}. \quad (3.54)$$

Собственные движения исследуемых звезд определяются из решения системы нормальных уравнений, составленной для m опорных групп:

$$\dot{\delta}_{(2t,1)} = \dot{Q}^{-1}_{(2t,2t)} \dot{\bar{L}}_{(2t,1)} \quad (3.55)$$

Матрица нормальных уравнений $\dot{Q}$ и вектор свободных членов в (3.55) $\dot{\bar{L}}$ определяются следующим образом:

$$\dot{Q} = \sum_{j=1}^m \dot{Q}_j, \quad \dot{\bar{L}} = \sum_{j=1}^m \dot{\bar{L}}_j. \quad (3.56)$$

Суммирование блоков $\dot{Q}_j, \dot{\bar{L}}_j$ выполняется по номерам опорных групп. Оценка точности результатов уравнивания производится в соответствии с принципами МНК применительно к зависимым измерениям.

§ 3.7. Результаты численного эксперимента проверки алгоритма определения собственных движений звезд

Проверка изложенного алгоритма выполнялась по макетным снимкам с «изображениями» одних и тех же опорных и исследуемых «звезд», для которых были смоделированы собственные движения. Для опорных «звезд» моделирование выполнялось на интервале времени в 50 лет при следующем предположении: собственные движения у опорных «звезд» не превосходят 0,050" в год. Заданное значение дисперсии в координатах изображений для каждого

модельного снимка составляет 2 мкм, дисперсии сферических координат «звезд» 0,15 сек. дуги. Масштаб макетных снимков соответствует 90"/мм. Разворот системы измеренных координат (x, y) относительно системы идеальных координат (ξ, η) составил около 20 градусов.

В табл. 3.8 представлены значения собственных движений, полученные в результате уравнительных вычислений, выполненных в предположении, что собственные движения у опорных «звезд» ничтожны и равны нулю. Для первого этапа уравнивания такое предположение равносильно наличию специальных меток, изобразившихся на обоих снимках. Средние квадратические ошибки определения собственных движений даны в тысячных долях секунд дуги (столбцы 6, 7). Уравнивание выполнено при четырех опорных группах.

В табл. 3.9. представлены результаты уравнительных вычислений для случая, наиболее соответствующего реальной действительности – опорные звезды имеют собственные движения. Для учета систематической составляющей $\bar{\Delta}$, возникающей из-за смещения опоры, использовались контрольные «звезды». В данном эксперименте у контрольных «звезд» также определялись «собственные движения» из уравнивания. Контрольные «звезды» в табл. 3.9. отмечены символом *. Среднее квадратическое отклонение вычисленных собственных движений $\mu_{\alpha}, \mu_{\delta}$ от их истинных значений составляет 0,0065 секунд дуги в первом эксперименте и 0,0072 секунд дуги во втором «собственные движения» из уравнивания. Контрольные «звезды» в табл. 3.9. отмечены символом *. Среднее квадратическое

отклонение вычисленных собственных движений μ_α, μ_δ от их истинных значений составляет 0,0065 секунд дуги в первом эксперименте и 0,0072 секунд дуги во втором.

Таблица 3.8

Результаты уравнивания при отсутствии движения опоры

№	Контрольные значения		Результаты уравнивания			
	$\mu_\alpha(s)$	$\mu_\delta(^{\circ})$	μ_α	μ_δ	m_α	m_δ
1	2	3	4	5	6	7
71	0,0000	0,0000	0,0002	0,012	1,3	1,3
82	-0,0008	0,100	-0,0005	0,092	1,3	1,2
84	-0,0036	0,117	-0,0039	0,126	1,3	1,2
109	0,0067	0,012	0,0066	0,015	1,3	1,3
120	0,0029	0,039	-0,0027	0,039	1,3	1,3
126	-0,0027	0,005	-0,0020	-0,011	1,3	1,3
Ошибка единицы веса $\mu_0 = 0,0028$ мм						

Таблица 3.9

Результаты уравнивания при наличии движения опоры

№	Контрольные значения		Результаты уравнивания			
	$\mu_\alpha (s)$	$\mu_\delta (")$	μ_α	μ_δ	m_α	m_δ
1	2	3	4	5	6	7
71	0,0000	0,0000	0,0001	0,007	1,4	1,4
82	-0,0008	0,100	-0,0006	0,084	1,4	1,4
84	-0,0036	0,117	-0,0038	0,119	1,4	1,4
109	0,0067	0,012	0,0065	0,011	1,4	1,4
120	-0,0029	0,039	-0,0028	0,033	1,4	1,4
126	-0,0027	-0,005	-0,0021	-0,016	1,4	1,4
Ошибка единицы веса $\mu_0 = 0,0030$ мм						

В табл. 3.10. приведены изменения координат изображений для случая, когда у опоры отсутствует движение (столбцы 4, 5) и случая когда опора подвержена смещению (столбцы 6, 7). В таблице символом * отмечены контрольные «звезды».

Таблица 3.10

Изменения координат изображений (мкм)

№	Контрольные значения		Опора неподвижна		Опора подвижна		С учетом систематической составляющей	
	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy
1	2	3	4	5	6	7	8	9
71*	00,0	00,0	1,0	6,9	2,5	7,9	0,7	3,9
82	25,0	50,0	21,7	46,9	22,1	46,3	20,3	42,3
84	50,0	50,0	55,3	54,0	54,4	54,6	52,6	50,6
109*	-50,0	25,0	-46,9	27,0	-45,5	28,0	-47,3	24,0
120*	30,0	12,0	28,2	12,5	29,6	13,1	27,7	9,1
126	20,0	-10,0	-13,0	-11,4	14,7	-10,4	12,9	14,4

В табл. 3.11. приведены значения составляющих векторов $\overline{\Delta}_i$ для контрольных звезд и составляющих вектора $\overline{\Delta}$, который учитывался в смещениях изображений на втором этапе уравнивания.

Таблица 3.11

Систематические составляющие в смещениях (мм)

	71*	109*	120*	$\overline{\Delta}$
dx	0,0025	0,0027	0,0000	0,0018
dy	0,0079	0,0029	0,0011	0,0040

Анализ результатов численных экспериментов позволяет сделать вывод о возможности определения собственных движений звезд с использованием изложенного метода.

Точность определения собственных движений звезд будет зависеть от ряда факторов, одним из которых, как это будет показано далее (глава 3.5.1), является фактор геометрии опоры, поскольку, при уравнивании на первом этапе преобразования выполняются по опорным точкам (звездам).

§ 3.8. Исследования алгоритмов обработки изображений

Основной целью экспериментальных исследований данного раздела определены следующие задачи:

1. Исследование точности определения направления на объект в зависимости от геометрии опоры, а также от взаимного расположения определяемого объекта и опоры.

2. Исследование корреляционной зависимости между определяемыми параметрами.

А. Исследование влияния геометрии опоры на точность определения сферических координат

Исследование точности определения сферических координат объектов в зависимости от геометрии опоры выполнялась на макетном снимке, поскольку именно макетный снимок позволяет задать любую геометрию для опоры.

При исследовании на макетном снимке были выбраны несколько определяемых объектов (8-мь), располагающихся по мере удаления от центра снимка. Количество опорных «звезд» соответствовало условиям (2.108): $n \geq 8$. Количество опорных групп «звезд» (четырёхугольников) было принято равным двум. Выбор такого количества опорных групп объясняется следующими причинами.

Во-первых, как было показано в разделе (2.3.1), для решения полной задачи обработки снимка (ПЗО) иметь восемь опорных звезд и образовать из них две опорные группы.

Во-вторых, при увеличении числа опорных групп размеры ковариационной матрицы будут резко возрастать и тем самым затруднять ее анализ. Например, при числе определяемых объектов, равном восьми, и двух опорных группах, размеры ковариационной матрицы будут 32×32 .

Для способа Ю.М. Трунина было установлено [29], что наилучшей геометрической фигурой для опорного четырехугольника является

квадрат, при этом желательно, чтобы определяемый объект находился в точке пересечения диагоналей опорного четырехугольника.

Рассмотрим случаи, когда опорные четырехугольники есть квадраты (рис. 3.2), и когда один из опорных четырехугольников по форме отличен от квадрата (рис. 3.3). В обоих случаях все определяемые объекты находятся внутри внешнего опорного четырехугольника, причем внешние опорные четырехугольники составлены из одних и тех же опорных «звезд», а внутренние четырехугольники содержат одни и те же определяемые объекты.

Анализ результатов обработки показал, что отклонение формы одного из опорных четырехугольников от квадрата приводит к увеличению следа ковариационной матрицы Q_{δ}^2 сферических координат, а также, к увеличению следа ковариационной матрицы Q_{δ}^2 координат изображений точек, составивших опорные группы. При этом дисперсии $\mathcal{G}_{\alpha_i}^2$, $\mathcal{G}_{\delta_i}^2$ возрастают для всех определяемых объектов.

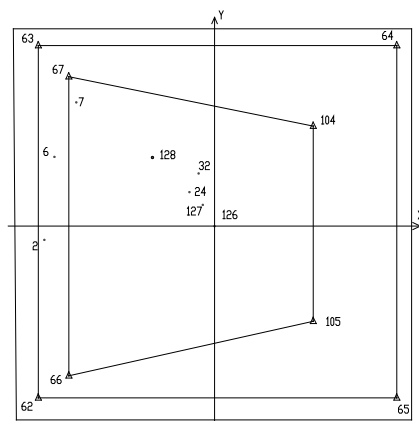


Рис. 3.2. Расположение опоры и определяемых точек

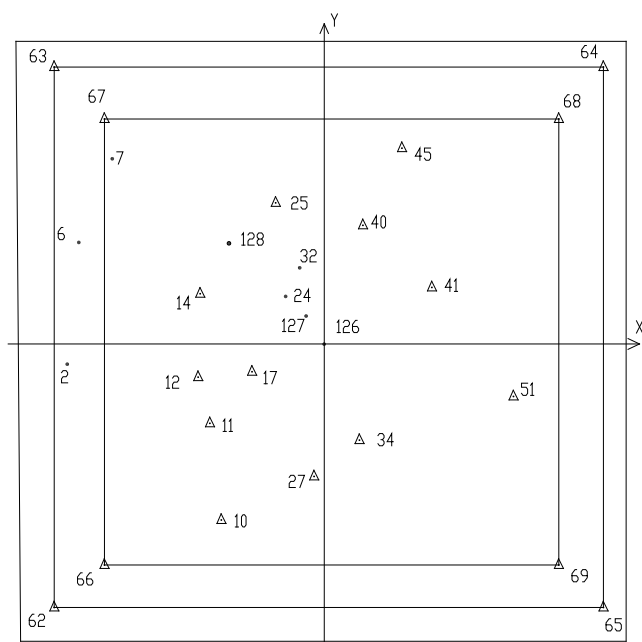


Рис. 3.3. Расположение опоры и определяемых точек

Свойства противоположного характера наблюдаются в случае, когда внешний четырехугольник – квадрат (рис. 3.4), составленный из тех же опорных звезд, что и в случаях, рассмотренных ранее, охватывает все определяемые объекты, а внутренний опорный четырехугольник, форма которого изменяется, имеет значительно меньшие размеры и содержит лишь часть определяемых объектов (объекты 126, 127, 24, 32). Изменение формы внутреннего опорного четырехугольника осуществлялось посредством изменения положения единичной точки.

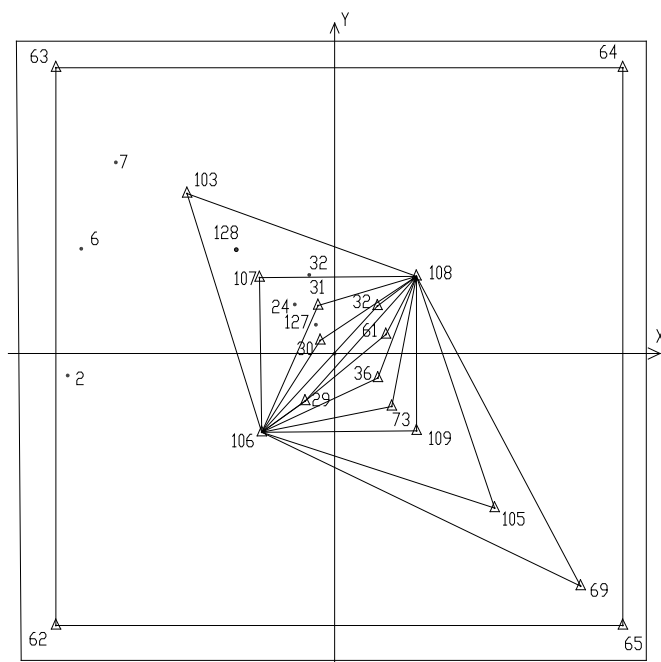


Рис. 3.4. Расположение опоры и определяемых точек

При этом соблюдалось условие – трансформированный четырехугольник охватывает одни и те же определяемые объекты. Отметим, что при приближении единичной точки к точке пересечения диагоналей опорного четырехугольника, абсолютные значения проективных координат будут возрастать. Анализ полученных результатов позволяет отметить сложную картину изменения дисперсий $\mathcal{D}_{\alpha_i}^2$, $\mathcal{D}_{\delta_i}^2$ для всех определяемых объектов – как увеличение, так и уменьшение – дисперсий. В результате были сделаны следующие выводы:

- отклонение формы опорного четырехугольника от квадрата не всегда ведет к увеличению дисперсий $\mathcal{G}_{\alpha_i}^2, \mathcal{G}_{\delta_i}^2$ уравненных значений сферических координат;

- след ковариационной матрицы $Q_{\delta}^{\frac{\cdot}{\cdot}}$ сферических координат имеет наименьшее значение, когда опорные четырехугольники – квадраты с близкими размерами, а объекты располагаются внутри опоры.

Анализ ситуации, когда опорные четырехугольники есть квадраты, расположенные один внутри другого, позволил установить тенденцию увеличения следа ковариационных матриц $Q_{\delta}^{\frac{\cdot}{\cdot}}, Q_{\delta}^{\frac{\cdot}{\cdot}}$ при уменьшении размеров внутреннего опорного четырехугольника. При этом увеличение дисперсий $\mathcal{G}_{\alpha_i}^2, \mathcal{G}_{\delta_i}^2$ сферических координат наблюдается не для всех точек. В частности, для точки, находящейся на пересечении диагоналей опорного четырехугольника, наблюдается незначительное уменьшение величин $\mathcal{G}_{\alpha_i}^2, \mathcal{G}_{\delta_i}^2$. Можно также отметить следующее:

- различия между дисперсиями $\mathcal{G}_{\alpha_i}^2 - \mathcal{G}_{\alpha_j}^2, \mathcal{G}_{\delta_i}^2 - \mathcal{G}_{\delta_j}^2$ двух любых объектов наименьшее в случае, когда опорные четырехугольники наиболее близки по размерам, то есть охватывают большее количество объектов.

Из анализа дисперсий $\mathcal{G}_x^2, \mathcal{G}_y^2$ координат изображений опорных звезд, составивших опорные группы, удалось установить, что след ковариационной матрицы $Q_{\delta}^{\frac{\cdot}{\cdot}}$ в большей степени зависит от соотношения размеров опорных четырехугольников, чем от их формы.

При этом для опорного четырехугольника, имеющего большие размеры, наблюдаются большие значения дисперсий $\mathcal{G}_x^2$, $\mathcal{G}_y^2$ для точек, его образующих.

Из анализа дисперсий сферических координат объектов для случаев, когда опорные четырехугольники есть квадраты был сделан следующий вывод:

- дисперсии $\mathcal{G}_{\alpha_i}^2$, $\mathcal{G}_{\delta_i}^2$ сферических координат объекта, располагающегося в точке пересечения диагоналей, не обязательно будут минимальными.

Точность определения сферических координат ухудшится, если определяемый объект находится за пределами опорных четырехугольников либо на границе опоры. Фактически установлено, что ошибки определения сферических координат для точек, находящихся за пределами опорных четырехугольников, резко возрастают. Также установлено: если опорные четырехугольники вытянуты вдоль оси прямого восхождения, то склонение объектов будет определяться с большей точностью, чем их прямое восхождение. И наоборот, если опора вытянута вдоль оси склонения, с большей точностью будет определяться прямое восхождение. Можно также констатировать, что данные утверждения не носят абсолютного характера и справедливы для объектов, расположенных внутри опорных четырехугольников или вблизи их. При удалении от опоры эти утверждения не выполняются и наблюдается тенденция противоположного характера.

Подводя итоги, можно сделать следующие выводы:

- точность определения направления на объект, то есть сферических координат, в конечном итоге зависит как от формы опорных четырехугольников, так и от расположения объекта относительно опоры;

- желательно чтобы опорные четырехугольники были близки по форме к квадрату, имели примерно равные размеры, а определяемые объекты располагались внутри опоры и по возможности ближе к геометрическим центрам опорных четырехугольников.

Б. Корреляции между определяемыми параметрами

Для исследования корреляционной зависимости вычислялись коэффициенты корреляции между определяемыми параметрами.

Значения коэффициентов корреляции определялись по формуле:

$$r_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sqrt{q_{ii}q_{jj}}} \quad , \quad (3.57)$$

где q_{ij} – элементы матрицы обратной матрицы Q^{-1} уравнений (3.30).

Нормированную корреляционную матрицу обозначим через R и представим ее соответственно структуре матрицы Q^{-1} в блочном виде:

$$R = \left[\begin{array}{c|c} R_{\delta\delta}^{--} & R_{\delta\delta}^{--} \\ \hline R_{\delta\delta}^{--} & R_{\delta\delta}^{--} \end{array} \right] \quad , \quad (3.58)$$

$(2k, 2k)$ $(2k, 8m)$
 $(8m, 2k)$ $(8m, 8m)$

где $R_{\delta\delta}^{--}$ – блок (симметричная матрица) коэффициентов корреляции между уравненными значениями сферических координат α_i, δ_i

определяемых объектов; R_{δ}^{α} – блок (симметричная матрица) коэффициентов корреляций между уравненными значениями координат x_{ij}, y_{ij} изображений точек, составивших опорные группы; $R_{\delta\delta}^{\alpha\alpha}$ – блок коэффициентов корреляций между уравненными значениями сферических координат и координатами изображений точек опорных групп.

Исследование корреляционной матрицы R осуществлялось для случаев, когда опорные четырехугольники – квадраты:

- имеющие близкие размеры (рис. 3.2);
- значительно различающиеся по размерам (рис. 3.4).

В последнем случае были также получены корреляционные матрицы, когда в обработку привлекались дополнительные опорные «звезды», то есть $n \geq 8$, и когда опорные точки, образующие опорные группы, не использовались для составления уравнений поправок.

Корреляции между сферическими координатами. Анализ корреляционных матриц R_{δ}^{α} сферических координат позволил сделать следующие выводы :

1. Коэффициенты корреляции между уравненными значениями сферических координат α_i и δ_i i -го определяемого объекта величина незначительная ($|r_{\alpha\delta}| < 0,10$) и можно говорить об отсутствии корреляционной зависимости между ними.

2. Коэффициент корреляции между разноименными координатами i -го и j -го определяемого объекта величина малая ($|r_{\alpha\delta}| \leq 0,10$) и фактически корреляция между ними отсутствует.

3. Наблюдается общая тенденция уменьшения коэффициента корреляции между одноименными сферическими координатами двух объектов с увеличением расстояния между ними. Данная тенденция не носит абсолютного характера, так как имеет место ее нарушение в отдельных случаях, обусловленных, по всей видимости, расположением объектов относительно опоры.

4. Увеличение различия в размерах опорных четырехугольников не приводит к каким-либо четко выраженным тенденциям в изменении коэффициентов корреляции между сферическими координатами: наблюдается как незначительное уменьшение, так и увеличение коэффициентов корреляции.

5. Привлечение в обработку дополнительного числа опорных звезд приводит к уменьшению коэффициентов корреляции между одноименными координатами определяемых объектов, при этом

$$|r_{\alpha\alpha}| < 0,50, |r_{\delta\delta}| < 0,30.$$

Корреляции между координатами изображений точек опорных групп. Анализ корреляционных матриц $R_{\frac{\alpha}{\delta}}$ координат изображений точек опорных групп представляется наиболее интересным с точки зрения изменения коэффициентов корреляции при увеличении различия в размерах опорных четырехугольников.

Сравнение корреляционных матриц $R_{\frac{\alpha}{\delta}}$ позволило отметить следующие тенденции, имеющие место при увеличении разницы в размерах опорных четырехугольников:

- увеличение коэффициента корреляции между разноименными координатами x_s, y_s s -ой ($s = 1, 2, 3, 4$) точки опорного четырехугольника, имеющего большие размеры;

- увеличение коэффициента корреляции между разноименными координатами (x_s, y_s) двух любых точек (s -ой и ℓ -ой) опорного четырехугольника, имеющего большие размеры;

- увеличение коэффициента корреляции между одноименными координатами $(x_s \text{ и } x_\ell, y_s \text{ и } y_\ell)$ s -ой и ℓ -ой точки при уменьшении размеров опорного четырехугольника.

Изменение корреляционной зависимости между опорными четырехугольниками имеет сложный характер. Тем не менее можно отметить следующее:

- коэффициент корреляции между ними не превышает 0,50;
- в случае, когда опорные четырехугольники близки размерами, значение коэффициента корреляции между ними достигает величины 0,40;
- в случае, когда опорные четырехугольники существенно различаются размерами, значение коэффициента корреляции не более 0,26.

Интересным представляется тот факт, что увеличение различия в размерах опорных четырехугольников вызывает более существенные изменения коэффициентов корреляции внутри опорных четырехугольников, нежели между ними.

При решении полной задачи обработки снимка составляются уравнения типа (2.71) для каждой j -ой опорной группы с опорными

звездами, не вошедшими в j -ю группу. В общем случае количество опорных групп на снимке равно m и $m > 1$ при $n \geq 8$, где n – количество опорных звезд, изобразившихся на снимке.

Таким образом, для некоторой j -ой опорной группы звезд, будут составляться уравнения типа (2.71) с опорными звездами, образующими некоторую другую ℓ -ю опорную группу. В частном случае, при $n > 8$, можно построить алгоритм решения ПЗО снимка когда опорные звезды некоторой ℓ -ой опорной группы не будут использоваться для составления уравнений типа (2.71) с j -ой опорной группой звезд.

Фактически при одном и том же числе опорных звезд такое «разъединение» опорных групп ведет к уменьшению количества уравнений поправок в математической модели (3.6). Тем не менее, это представляет интерес с точки зрения изменения корреляционной зависимости между опорными группами (четыреугольниками). Как показали исследования, подобное «разъединение» опорных четырехугольников вызывает схожие тенденции, что и при простом изменении количества опорных звезд, когда количество опорных групп не меняется.

Корреляции между сферическими координатами определяемых объектов и координатами изображений опорных групп. Анализ корреляционных матриц $R_{\delta\delta}^{\dots}$ представляется наиболее интересным с точки зрения исследования зависимости величины коэффициента корреляции между сферическими координатами и координатами изображений опоры от расстояния между определяемым объектом и опорой.

Тщательный анализ корреляционной матрицы $R_{\frac{\alpha}{\delta\delta}}$ для случая, когда опорные четырехугольники имеют близкие размеры позволил отметить тенденцию увеличения коэффициента между α и x , δ и y при уменьшении расстояния между изображениями определяемого объекта и опорной точкой. Так, например, наибольшее по абсолютной величине значение коэффициента корреляции (0,52) имеет место между наиболее близко расположенными определяемым объектом и опорной точкой. Однако данная тенденция не является устойчивой и нарушается, когда опорные четырехугольники сильно различаются размерами.

Выводы

Основные результаты данной главы можно сформулировать в следующих выводах.

1. На основе векторной интерпретации основных инвариантов проективной геометрии построена математическая модель исследуемого явления, отражающая связь между координатами изображения объекта в плоскости снимка и направлением на этот объект в пространстве.

2. Разработана методика проективных преобразований снимков звездного неба с целью определения сферических координат небесных объектов по методу наименьших квадратов (МНК).

3. Экспериментальными исследованиями на реальном наблюдательном материале и специально разработанных макетных снимках, доказана практическая применимость, а также

эффективность разработанной методики по сравнению с другими методами обработки снимков звездного неба (Гернера, Дейча, Ю.М. Трунина, А.А. Киселева, Ван Гента, аналитической фотограмметрии [41, 47, 75, 90]).

Разработанный метод обработки снимков имеет ряд преимуществ перед методами, считающимися в фотографической астрометрии традиционными:

А. Уравнительные вычисления выполняются строго без элементов внутреннего ориентирования съемочной камеры, что исключает появление систематической ошибки, возникающей от погрешности принятого положения оптического центра, наклона снимка и фокусного расстояния. Автоматически учитываются искажения линейного характера, в частности, члены первого порядка дифференциальной рефракции и аберрации.

Б. Данный метод исключает использование тангенциальных координат. Отпадает необходимость в предварительном выборе редуccionной модели, так как математическая модель, основанная на использовании основных инвариантов проективной геометрии, с учетом факторов, учитывающих искажения связки проектирующих лучей, адекватна реальному процессу формирования изображений в плоскости снимка.

В. Значения сферических координат небесных объектов и их средние квадратические ошибки получаются непосредственно из уравнительных вычислений по методу наименьших квадратов проекциях на оси той системы координат, в которой заданы сферические координаты опорных звезд.

Г. Рассмотренная в данной главе методика позволяет включать в одновременную обработку n опорных звезд и k определяемых объектов, оставаясь при этом в пределах проективного пространства.

4. Разработан метод определения собственных движений звезд, который обладает следующими положительными качествами:

А. Собственные движения звезд получаются непосредственно из решения системы уравнений по МНК. Оценка точности полученных собственных движений звезд выполняется в соответствии с правилами МНК. Появляется возможность анализа ковариационных матриц уравненных параметров μ_α, μ_δ .

Б. Использование проективных координат позволяет решать задачу определения собственных движений звезд строго без знания элементов внутреннего ориентирования снимков. Таким образом, для определения собственных движений звезд можно использовать разномасштабные фотографические системы.

В. Свойство инвариантности проективных координат позволяет не заботиться об ориентировании изображения относительно координатных осей измерительной системы. Это же свойство позволяет получать собственные движения звезд в проекциях на оси той системы координат, в которой заданы сферические координаты опорных звезд.

Г. Автоматически учитываются искажения линейного характера.

5. Выполнены исследования корреляционной зависимости между определяемыми параметрами и даны рекомендации по выбору опорных точек (звезд) на снимке с целью определения сферических

координат небесных объектов и собственных движений звезд с оптимальной точностью.

Разработанные алгоритмы обладают общностью, так как, они построены на единой теоретической основе и удобны для реализации в виде вычислительных программ. Применение оптимального алгоритма решения системы нормальных уравнений позволяет использовать разработанные алгоритмы для определения сферических координат большого количества небесных объектов и собственных движений большого количества звезд.

Глава 4. Построение и уравнивание звездной фототриангуляции

§ 4.1. Формирование математической модели звездной фототриангуляции

В фотограмметрии фототриангуляция рассматривается как метод сгущения исходной опорной сети, например, геодезической сети по снимкам (аэроснимкам, космическим снимкам).

Рассмотрим методику формирования математической модели звездной фототриангуляции.

Пусть имеется N перекрывающихся снимков (изображений) звездного неба. Далее, пусть на каждом p -ом ($p = 1, 2, \dots, N$) снимке изобразилось k_p определяемых звезд и опознано n_p опорных звезд, из которых составлено m_p опорных групп. Всего опорных групп на всех

снимках будет $m = \sum_1^N m_p$. Все m опорных групп составляются при условии, что опорные группы не содержат общих звезд.

Для формирования наиболее общей модели временно допустим, что каждая определяемая звезда изобразилась на каждом снимке, то есть перекрытие между снимками равно 100 %.

Запишем уравнения поправок вида (2.65) и (2.71):

– для i -ой определяемой звезды, изобразившейся на p -ом снимке

$$\underset{(2,2)}{\dot{B}_{ijp}} \underset{(2,1)}{\ddot{\delta}_i} + \underset{(2,8)}{\ddot{B}_{ijp}} \underset{(8,1)}{\ddot{\delta}_{jp}} = \underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ijp}} + \underset{(2,1)}{\bar{V}_{ijp}}, \quad j = 1, 2, \dots, m_p; \quad (4.1)$$

– для некоторой s -ой опорной звезды p -го снимка, не вошедшей в j -ую опорную группу снимка

$$\underset{(2,8)}{\ddot{B}_{sjp}} \underset{(8,1)}{\ddot{\delta}_{jp}} = \underset{(2,1)}{\widetilde{\varepsilon}_{sjp}} + \underset{(2,1)}{\widetilde{V}_{sjp}}, \quad s = 1, 2, \dots, (n_p - 4); \quad (4.2)$$

Весовые матрицы, соответствующие уравнениям (4.1) и (4.2), обозначим соответственно через $\underset{(2,2)}{P_{ip}}$, $\underset{(2,2)}{\widetilde{P}_{ip}}$ и определим подобно (3.23) и (3.27).

Тогда для некоторого p -го снимка можно записать систему уравнений поправок вида (3.6), описывающих сумму проективных координат преобразований на данном p -ом снимке (изображении).

Введем обозначения:

$$\dot{B}_p = \begin{bmatrix} \dot{B}_1 \\ (2k, 2k) \\ 0 \\ (2u_p, 2k) \\ \dot{B}_2 \\ (2k, 2k) \\ 0 \\ (2u_p, 2k) \\ \dots\dots\dots \\ \dot{B}_{m_p} \\ (2k, 2k) \\ 0 \\ (2u_p, 2k) \end{bmatrix}_p ; \quad \ddot{\delta}_p = \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ (8, 1) \\ \ddot{\delta}_2 \\ (8, 1) \\ \ddot{\delta}_3 \\ (8, 1) \\ \dots\dots\dots \\ \ddot{\delta}_{m_p} \\ (8, 1) \end{bmatrix}_p ; \quad \bar{\mathcal{E}}_p = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{E}}_1 \\ (2k, 1) \\ \widetilde{\bar{\mathcal{E}}}_1 \\ (2u_p, 1) \\ \bar{\mathcal{E}}_2 \\ (2k, 1) \\ \widetilde{\bar{\mathcal{E}}}_2 \\ (2u_p, 1) \\ \dots\dots\dots \\ \bar{\mathcal{E}}_{m_p} \\ (2k, 1) \\ \widetilde{\bar{\mathcal{E}}}_{m_p} \\ (2u_p, 1) \end{bmatrix}_p ; \quad (4.3)$$

$$\ddot{B}_p = \begin{bmatrix} \ddot{B}_1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ (2k, 8) & & & \\ \widetilde{\ddot{B}}_1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ (2u_p, 8) & & & \\ 0 & \ddot{B}_2 & \dots\dots & 0 \\ & (2k, 8) & & \\ 0 & \widetilde{\ddot{B}}_2 & \dots\dots & 0 \\ & (2u_p, 8) & & \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots\dots & \ddot{B}_{m_p} \\ & & & (2k, 8) \\ 0 & 0 & \dots\dots & \widetilde{\ddot{B}}_{m_p} \\ & & & (2u_p, 8) \end{bmatrix}_p ; \quad \bar{V}_p = \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ (2k, 1) \\ \widetilde{\bar{V}}_1 \\ (2u_p, 1) \\ \bar{V}_2 \\ (2k, 1) \\ \widetilde{\bar{V}}_2 \\ (2u_p, 1) \\ \dots\dots\dots \\ \bar{V}_{m_p} \\ (2k, 1) \\ \widetilde{\bar{V}}_{m_p} \\ (2u_p, 1) \end{bmatrix}_p , \quad (4.4)$$

где величинам z_p и u_p , определяющим размеры матриц и векторов, соответствуют формулы

$$u_p = n_p - 4 \quad ; \quad z_p = m_p(k + u_p) \quad . \quad (4.5)$$

Блоки $\dot{B}_{jp}^{(2k,2k)}$, $\ddot{B}_{jp}^{(2k,8)}$, $\ddot{\tilde{B}}_{jp}^{(2u_p,8)}$ ($j= 1, 2, \dots, m_p$) в (4.3) и (4.4)

определяются выражениями (3.3), (3.4) и конструируются из матриц

$$\dot{B}_{ijp}^{(2,2)}, \ddot{B}_{ijp}^{(2k,8)}, \ddot{\tilde{B}}_{sjp}^{(2,8)}.$$

С учетом принятых обозначений уравнение поправок (3.6) для p -го снимка примет следующий компактный вид:

$$\dot{B}_p^{(2z_p,2k)} \dot{\delta}^{(2k,1)} + \ddot{B}_p^{(2z_p,8m_p)} \ddot{\delta}^{(8m_p,1)} = \bar{\varepsilon}_p^{(2z_p,1)} + \bar{V}_p^{(2z_p,1)}. \quad (4.6)$$

Для N снимков звездного неба система уравнений поправок будет иметь следующую структуру:

$$\begin{bmatrix} \dot{B}_1^{(2z_1,2k)} \\ \dot{B}_2^{(2z_2,2k)} \\ \dots\dots\dots \\ \dot{B}_N^{(2z_N,2k)} \end{bmatrix} \dot{\delta}^{(2k,1)} + \begin{bmatrix} \ddot{B}_1^{(2z_1,8m_1)} & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & \ddot{B}_2^{(2z_2,8m_2)} & \dots\dots & 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ 0 & 0 & \dots\dots & \ddot{B}_N^{(2z_N,8m_N)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1^{(8m_1,1)} \\ \ddot{\delta}_2^{(8m_2,1)} \\ \dots\dots\dots \\ \ddot{\delta}_N^{(8m_N,1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1^{(2z_1,2k)} \\ \bar{\varepsilon}_2^{(2z_2,2k)} \\ \dots\dots\dots \\ \bar{\varepsilon}_N^{(2z_N,2k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{V}_1^{(2z_1,2k)} \\ \bar{V}_2^{(2z_2,2k)} \\ \dots\dots\dots \\ \bar{V}_N^{(2z_N,2k)} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Уравнение поправок (4.7) является математической моделью, описывающей сумму всех проективных преобразований, возникающих

при построении звездной фототриангуляции. Общее количество уравнений поправок β и количество неизвестных параметров ν в математической модели определится формулами:

$$\beta = 2 \sum_{p=1}^N m_p (k_p + n_p - 4) \quad ; \quad (4.8)$$

$$\nu = 2k + 8 \sum_{p=1}^N m_p \quad ,$$

где n_p – количество опорных звезд на p -ом снимке; m_p – количество опорных групп на p -ом снимке; k_p – количество определяемых звезд на p -ом снимке; k – общее количество определяемых звезд в звездной фототриангуляции.

При формировании математической модели звездной фототриангуляции мы имеем две группы определяемых параметров, как и при решении ПЗО. Поэтому, также, как и в случае ПЗО, для каждой группы неизвестных можно записать уравнения поправок вида (3.7) – для экваториальных координат каждой i -ой определяемой звезды ($i = 1, 2, \dots, k$), и уравнения поправок вида (3.22) для каждой j -ой опорной группы звезд p -го снимка.

§ 4.2. Структура матрицы нормальных уравнений звездной фототриангуляции

При установлении структуры матрицы нормальных уравнений, возникающей в звездной фототриангуляции, так же, как и в случае отдельного снимка, запишем формальную систему нормальных уравнений, соответствующую уравнениям поправкам (4.1) и (4.2).

Для уравнения поправок (4.1) по аналогии с (3.25) и (3.26) будем иметь:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{Q}}_{ij} & \overline{\underline{Q}}_{ij} \\ (2,2) & (2,8) \\ \overline{\underline{Q}}_{ij}^T & \ddot{\underline{Q}}_{ij} \\ (8,2) & (8,8) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\delta}}_i \\ (2,1) \\ \ddot{\tilde{\delta}}_{jp} \\ (8,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \\ (2,1) \\ \ddot{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \\ (8,1) \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\underline{Q}}_{ijp} &= \dot{B}_{ijp}^T P_{ip} \dot{B}_{ijp}; & \dot{\tilde{\varepsilon}}_{ijp} &= \dot{B}_{ijp}^T P_{ip} \tilde{\varepsilon}_{ijp}; \\ (2,2) & (2,2) (2,2) (2,2) & (2,1) & (2,2) (2,2) (2,1) \\ \ddot{\underline{Q}}_{ijp} &= \ddot{B}_{ijp}^T P_{ip} \ddot{B}_{ijp}; & \ddot{\tilde{\varepsilon}}_{ijp} &= \ddot{B}_{ijp}^T P_{ip} \tilde{\varepsilon}_{ijp}; \\ (8,8) & (8,2) (2,2) (2,8) & (8,1) & (8,2) (2,2) (2,1) \\ \overline{\underline{Q}}_{ijp} &= \dot{B}_{ijp}^T P_{ip} \ddot{B}_{ijp}, & j &= 1, 2, \dots, m_p. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для уравнения поправок (4.2) формальная система нормальных уравнений запишется подобно (3.28) и (3.29):

$$\begin{bmatrix} \tilde{\underline{Q}}_{sjp} & \ddot{\tilde{\delta}}_{sjp} \\ (8,8) & (8,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{sjp} \\ (8,1) \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\text{где} \quad \begin{bmatrix} \tilde{\underline{Q}}_{sjp} \\ (8,8) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{sjp}^T & \tilde{P}_{sp} & \tilde{B}_{sjp} \\ (8,2) & (2,2) & (2,8) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{sjp} \\ (8,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{sjp}^T & \tilde{P}_{sp} & \tilde{\varepsilon}_{sjp} \\ (8,2) & (2,2) & (2,1) \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Общая система нормальных уравнений, возникающая в звездной фототриангуляции, будет иметь следующую структуру:

$$\begin{bmatrix}
 \begin{array}{c} \dot{Q} + \dot{P} \\ (2k, 2k) \quad (2k, 2k) \end{array} & \begin{array}{c} \bar{Q}_1 \\ (2k, 8m_1) \end{array} & \begin{array}{c} \bar{Q}_2 \\ (2k, 8m_2) \end{array} & \dots & \begin{array}{c} \bar{Q}_N \\ (2k, 8m_N) \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} \bar{Q}_1^T \\ (8m_1, 2k) \end{array} & \begin{array}{c} \bar{Q}_1 + \bar{P}_1 \\ (8m_1, 8m_1) \quad (8m_1, 8m_1) \end{array} & 0 & \dots & 0 \\
 \begin{array}{c} \bar{Q}_2^T \\ (8m_2, 2k) \end{array} & 0 & \begin{array}{c} \ddot{Q}_2 + \ddot{P}_2 \\ (8m_2, 8m_2) \quad (8m_2, 8m_2) \end{array} & \dots & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \begin{array}{c} \bar{Q}_N^T \\ (8m_N, 2k) \end{array} & 0 & 0 & \dots & \begin{array}{c} \ddot{Q}_N + \ddot{P}_N \\ (8m_N, 8m_N) \quad (8m_N, 8m_N) \end{array}
 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix}
 \begin{array}{c} \ddot{\delta} \\ (2k, 1) \end{array} \\
 \begin{array}{c} \ddot{\delta}_1 \\ (2m_1, 1) \end{array} \\
 \begin{array}{c} \ddot{\delta}_2 \\ (2m_2, 1) \end{array} \\
 \dots \\
 \begin{array}{c} \ddot{\delta}_N \\ (2m_N, 1) \end{array}
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 \begin{array}{c} \ddot{\varepsilon} - \dot{P} \quad \dot{C} \\ (2k, 1) \quad (2k, 2k) \quad (2k, 1) \end{array} \\
 \begin{array}{c} \ddot{\varepsilon}_1 - \ddot{P}_1 \quad \ddot{C}_1 \\ (8m_1, 1) \quad (8m_1, 8m_1) \quad (8m_1, 1) \end{array} \\
 \begin{array}{c} \ddot{\varepsilon}_2 - \ddot{P}_2 \quad \ddot{C}_2 \\ (8m_2, 1) \quad (8m_2, 8m_2) \quad (8m_2, 1) \end{array} \\
 \dots \\
 \begin{array}{c} \ddot{\varepsilon}_N - \ddot{P}_N \quad \ddot{C}_N \\ (8m_N, 1) \quad (8m_N, 8m_N) \quad (8m_N, 1) \end{array}
 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

где

$$\dot{Q}_{(2k, 2k)} = \text{diag} \left(\dot{Q}_1, \dot{Q}_2, \dots, \dot{Q}_k \right)_{(2, 2)} ; \quad (4.14)$$

$$\ddot{Q}_p = \text{diag} \left(\ddot{Q}_{1p}, \ddot{Q}_{2p}, \dots, \ddot{Q}_{m_p p} \right)_{(8, 8)} ; \quad (4.15)$$

$$\overline{\mathcal{Q}}_{(2k,8m_p)} = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{Q}}_{11p}^{(2,8)} & \overline{\mathcal{Q}}_{12p}^{(2,8)} & \dots & \overline{\mathcal{Q}}_{1m_p p}^{(2,8)} \\ \overline{\mathcal{Q}}_{21p}^{(2,8)} & \overline{\mathcal{Q}}_{22p}^{(2,8)} & \dots & \overline{\mathcal{Q}}_{2m_p p}^{(2,8)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\mathcal{Q}}_{k1p}^{(2,8)} & \overline{\mathcal{Q}}_{k2p}^{(2,8)} & \dots & \overline{\mathcal{Q}}_{km_p p}^{(2,8)} \end{bmatrix} ; \quad (4.16)$$

$$\dot{\overline{\mathcal{E}}}_{(2k,1)} = \begin{bmatrix} \dot{\overline{\mathcal{E}}}_1^{(2,1)} \\ \dot{\overline{\mathcal{E}}}_2^{(2,1)} \\ \dots \\ \dot{\overline{\mathcal{E}}}_k^{(2,1)} \end{bmatrix} ; \quad \ddot{\overline{\mathcal{E}}}_{(8m_p,1)} = \begin{bmatrix} \ddot{\overline{\mathcal{E}}}_{1p}^{(8,1)} \\ \ddot{\overline{\mathcal{E}}}_{2p}^{(8,1)} \\ \dots \\ \ddot{\overline{\mathcal{E}}}_{m_p p}^{(8,1)} \end{bmatrix} ; \quad (4.17)$$

$$\dot{\overline{\mathcal{C}}}_{(2k,1)} = \begin{bmatrix} \dot{\overline{\mathcal{C}}}_1^{(2,1)} \\ \dot{\overline{\mathcal{C}}}_2^{(2,1)} \\ \dots \\ \dot{\overline{\mathcal{C}}}_k^{(2,1)} \end{bmatrix} ; \quad \ddot{\overline{\mathcal{C}}}_{(8m_p,1)} = \begin{bmatrix} \ddot{\overline{\mathcal{C}}}_{1p}^{(8,1)} \\ \ddot{\overline{\mathcal{C}}}_{2p}^{(8,1)} \\ \dots \\ \ddot{\overline{\mathcal{C}}}_{m_p p}^{(8,1)} \end{bmatrix} ; \quad (4.18)$$

$$\dot{\overline{P}}_{(2k,2k)} = \text{diag} \left(\dot{\overline{P}}_1^{(2,2)}, \dot{\overline{P}}_2^{(2,2)}, \dots, \dot{\overline{P}}_k^{(2,2)} \right) ; \quad (4.19)$$

$$\ddot{\overline{P}}_{(8m_p,8m_p)} = \text{diag} \left(\ddot{\overline{P}}_{1p}^{(8,8)}, \ddot{\overline{P}}_{2p}^{(8,8)}, \dots, \ddot{\overline{P}}_{m_p p}^{(8,8)} \right) . \quad (4.20)$$

Все подматрицы, входящие в эту систему нормальных уравнений, определяются при помощи основных конструктивных блоков (4.10) и

(4.12). Блоки $\overline{Q}_{ijp}$, составляющие подматрицу $\overline{Q}_p$ (4.16), вычисляются непосредственно по формулам (4.10). Матрица $\overline{Q}_p$ обладает следующим свойством:

– i -я блочная строка матрицы $\overline{Q}_p$ будет нулевой, если i -я определяемая звезда не изобразилась на p -ом снимке.

Блоки $\dot{Q}_i$ и $\ddot{Q}_{jp}$, определяющие соответственно подматрицу $\dot{Q}$ (4.14) и $\ddot{Q}_p$ (4.15), а также блоки $\dot{\varepsilon}_i$, $\ddot{\varepsilon}_{jp}$, определяющие соответственно подвектор $\dot{\varepsilon}$ и $\ddot{\varepsilon}_p$ (4.17), вычисляются простым или двойным суммированием:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{(2,2)} &= \sum_{p=1}^N \sum_{j=1}^{m_p} \dot{Q}_{ijp(2,2)} ; & \dot{\varepsilon}_{(2,1)} &= \sum_{p=1}^N \sum_{j=1}^{m_p} \dot{\varepsilon}_{ijp(2,1)} ; \\ \ddot{Q}_{(8,8)} &= \sum_{i=1}^{k_p} \ddot{Q}_{ijp(8,8)} + \sum_{s=1}^{(n_p-4)} \widetilde{\ddot{Q}}_{sjp(8,8)} ; \\ \ddot{\varepsilon}_{(8,1)} &= \sum_{i=1}^{k_p} \ddot{\varepsilon}_{ijp(8,1)} + \sum_{s=1}^{(n_p-4)} \widetilde{\ddot{\varepsilon}}_{sjp(8,1)} . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Для подматрицы $\dot{Q}_i$ и подвектора $\dot{\varepsilon}_i$ первое суммирование блоков $\dot{Q}_{ijp}$, $\dot{\varepsilon}_{ijp}$ выполняется по номерам опорных групп, образованных на p -ом снимке, второе суммирование выполняется по номерам снимков, на которых изобразилась данная i -я определяемая звезда.

При вычислении подматрицы $\ddot{Q}_{jp}$ и подвектора $\ddot{\varepsilon}_{jp}$ суммирование выполняется:

– блоков $\ddot{Q}_{ijp}, \ddot{\varepsilon}_{ijp}$ по номерам тех определяемых звезд, которые изобразились на данном p -ом снимке;

– блоков $\ddot{Q}_{sjp}, \ddot{\varepsilon}_{sjp}$ по номерам опорных звезд, не вошедших в j -ую опорную группу p -го снимка.

В отношении блоков $\dot{P}_i$, составляющих весовую матрицу $\dot{P}$ (4.19) можно утверждать, что они будут определяться выражением (3.11), а блоки $\ddot{P}_{jp}$, составляющие весовую матрицу $\ddot{P}_p$ (4.20) будут иметь вид (3.15).

Блоки $\dot{C}_{jp}$ и $\ddot{C}_{jp}$, составляющие соответственно подвектор $\dot{C}$ и подвектор $\ddot{C}_p$ (4.18) будут определяться формулами (3.7) и (3.12).

Структура системы нормальных уравнений (4.13), возникающей в звездной фототриангуляции, соответствует наиболее общим предположениям. Фактически, как отмечалось в разделе 2.3.2, вклад весов $\ddot{P}_{jp}$ в подматрицы $\ddot{Q}_{jp}$ и вклад $\ddot{P}_{jp} \ddot{C}_{jp}$ в подвекторы $\ddot{\varepsilon}$ будет отсутствовать.

§ 4.3. Оптимальный алгоритм решения систем нормальных уравнений при уравнивании звездной фототриангуляции

Анализ структуры матрицы нормальных уравнений (3.30) и матрицы системы нормальных уравнений (4.13) позволяет установить общность в их структуре и разбить на четыре блока. Системы нормальных уравнений (3.30) и (4.13) перепишем в следующем компактном виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{Q}}_{ij} & \bar{Q}_{ij} \\ (2k,2k) & (2k,8m) \\ \bar{Q}_{ij}^T & \ddot{\bar{Q}}_{ij} \\ (8m,2k) & (8m,8m) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\delta}_i \\ (2k,1) \\ \ddot{\delta}_{jp} \\ (8m,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{ij} \\ (2k,1) \\ \ddot{\varepsilon}_{ij} \\ (8m,1) \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Проанализировав структуру подматриц, входящих в систему (2.142), сделаем ряд важных для дальнейших исследований выводов:

1. Подматрица $\dot{\bar{Q}}_i$ состоит из симметричных блоков размером (2×2) , расположенных вдоль главной диагонали, количество блоков – k , равно количеству определяемых объектов (звезд).

2. Подматрица $\ddot{\bar{Q}}$ состоит из симметричных блоков размером (8×8) , расположенных вдоль главной диагонали. Количество блоков – m , равно количеству образованных опорных групп:

- на отдельном снимке при решении ПЗО;
- на всех снимках при построении и уравнивании звездной

фототриангуляции $m = \sum_{p=1}^N m_p$.

3. Подматрица $\bar{Q}$ состоит из блоков размером (2×8) , причем:

- данная подматрица не будет иметь нулевых блоков при решении ПЗО, так как уравнения поправок составляются со всеми опорными группами, образованными на снимке;

- данная подматрица будет иметь нулевые блоки $\bar{Q}_{ijp}$ (4.10)

для i -ой звезды, не изобразившейся на p -ом снимке звездной фототриангуляции.

Прямое решение системы нормальных уравнений (4.22), которая содержит $2k + 8m$ неизвестных, представляется нецелесообразным,

поскольку подматрицы $\ddot{Q}$ и $\dot{Q}$ являются квазидиагональными. Более того, такое решение будет затруднительным, особенно при построении и уравнивании звездной фототриангуляции, даже для небольшого числа определяемых звезд, которые изобразились в зонах перекрытий N снимков звездного неба.

Допустим, что имеется десять снимков звездного неба с 50 %-м перекрытием и в каждое перекрытие попадает по двадцать звезд, экваториальные координаты которых необходимо определить.

Предположим, что на каждом изображении образовано по две опорные группы. Тогда порядок ν (4.8) матрицы нормальных уравнений (4.22) будет (520x520). Причем, с увеличением числа определяемых звезд, основной объем памяти компьютера будет занимать подматрица $\dot{Q}$.

Для построения оптимального алгоритма решения системы нормальных уравнений (4.22) воспользуемся формулой Фробениуса [50], которая сводит обращение матрицы порядка $2k + 8m$ к обращению двух матриц порядка $2k$ и $8m$:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} \dot{Q}^{-1}_{(2k,2k)} + \dot{Q}^{-1}_{(2k,2k)} \bar{Q}_{(2k,8m)} H^{-1}_{(8m,8m)} \bar{Q}^T_{(8m,2k)} \dot{Q}^{-1}_{(2k,2k)} & -\dot{Q}^{-1}_{(2k,2k)} \bar{Q}_{(2k,8m)} H^{-1}_{(8m,8m)} \\ -H^{-1}_{(8m,8m)} \bar{Q}^T_{(8m,2k)} \dot{Q}^{-1}_{(2k,2k)} & H^{-1}_{(8m,8m)} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

где
$$H_{(8m,8m)} = \ddot{Q}_{(8m,8m)} - \bar{Q}^T_{(8m,2k)} \dot{Q}^{-1}_{(2k,2k)} \bar{Q}_{(2k,8m)}. \quad (4.24)$$

Матрица $\dot{Q}$ в формуле (4.23) и (4.24), как отмечалось, имеет блочно-диагональную структуру, состоит из блоков размером (2×2) и легко обращается.

Для вектора поправок $\dot{\delta}$ и вектора поправок $\ddot{\delta}$ будут иметь место равенства:

$$\dot{\delta}_{(2k,1)} = \dot{Q}_{(2k,2k)}^{-1} \dot{\varepsilon}_{(2k,2)} + \dot{Q}_{(2k,2k)}^{-1} \overline{Q}_{(2k,8m)} H_{(8m,8m)}^{-1} \left(\overline{Q}_{(8m,2k)}^T \dot{Q}_{(2k,2k)}^{-1} \dot{\varepsilon}_{(2k,1)} - \ddot{\varepsilon}_{(8m,1)} \right); \quad (4.25)$$

$$\ddot{\delta}_{(8m,1)} = -H_{(8m,8m)}^{-1} \left(\ddot{\varepsilon}_{(8m,1)} - \overline{Q}_{(8m,2k)}^T \dot{Q}_{(2k,2k)}^{-1} \dot{\varepsilon}_{(8m,1)} \right). \quad (4.26)$$

Сравнив выражения (4.25) и (4.26), получим вектор поправок $\dot{\delta}$ в следующем виде:

$$\dot{\delta}_{(2k,1)} = -\dot{Q}_{(2k,2k)}^{-1} \left(\dot{\varepsilon}_{(2k,1)} - \overline{Q}_{(2k,8m)} \ddot{\delta}_{(8m,1)} \right). \quad (4.27)$$

Таким образом, эта методика позволяет последовательно и независимо от общего решения получать уравненные координаты определяемых объектов (звезд) по мере получения вектора поправок $\ddot{\delta}$ в координаты изображений опорных звезд, составивших опорные группы.

Как следует из (4.22) и (4.24), ковариационные матрицы $Q_{\dot{\delta}}$ и $Q_{\ddot{\delta}}$, соответствующие векторам поправок $\dot{\delta}$ и $\ddot{\delta}$, определяются формулами:

$$Q_{\dot{\delta}} = H_{(8m,8m)}^{-1}; \quad (4.28)$$

$$Q_{\ddot{\delta}} = \dot{Q}_{(2k,2k)}^{-1} + \dot{Q}_{(2k,2k)}^{-1} \overline{Q}_{(2k,8m)} H_{(8m,8m)}^{-1} \overline{Q}_{(8m,2k)}^T \dot{Q}_{(2k,2k)}^{-1}. \quad (4.29)$$

§ 4.4. Оценка точности уравненных параметров

Вычисление средних квадратических ошибок уравненных значений сферических координат – $m_{\alpha_i}, m_{\delta_i}$ и уравненных значений координат изображений опорных звезд – m_{x_i}, m_{y_i} составивших опорные группы, будет осуществляться по формулам:

$$\begin{aligned} m_{\alpha_i} &= \mu \cdot \sqrt{q_{\dot{\delta}}^{-1, 2i-1, 2i-1}} \sec \delta_i ; \\ m_{\delta_i} &= \mu \cdot \sqrt{q_{\dot{\delta}}^{-2i, 2i}} , \quad i = 1, 2, \dots, k ; \\ m_{x_i} &= \mu \cdot \sqrt{q_{\ddot{\delta}}^{-1, 2\ell-1, 2\ell-1}} ; \\ m_{y_i} &= \mu \cdot \sqrt{q_{\ddot{\delta}}^{-2\ell, 2\ell}} , \quad \ell = 1, 2, \dots, 4m ; \end{aligned} \quad (4.30)$$

где $q_{\dot{\delta}}$ – диагональные элементы ковариационной матрицы $Q_{\dot{\delta}}$ (4.29);

$q_{\ddot{\delta}}$ – диагональные элементы ковариационной матрицы $Q_{\ddot{\delta}}$ (4.28);

m – количество опорных групп на отдельном снимке, если решается ПЗО, и $m = \sum_{p=1}^N m_p$, если решается задача построения и уравнивания звездной фототриангуляции.

Для вычисления средних квадратических ошибок необходимо располагать ошибкой единицы веса μ . Рассмотрим методику вычисления ошибки единицы веса при построении и уравнивании звездной фототриангуляции.

Предположим, что из решения системы нормальных уравнений (4.22) получен вектор поправок $\dot{\bar{\delta}}$ к экваториальным координатам звезд и вектор поправок $\ddot{\bar{\delta}}$ к координатам изображений опорных звезд, составивших опорные группы на снимках. Вектор $\dot{\bar{\delta}}$ состоит из блоков $\dot{\bar{\delta}}_i$, имеющих вид (2.68), а вектор $\ddot{\bar{\delta}}$ состоит из блоков $\ddot{\bar{\delta}}_{jp}$, имеющих вид (2.47). Тогда можно определить квадратичную форму $\bar{V}_{ijp}^T P_{ip} \bar{V}_{ijp}$ и квадратичную форму $\tilde{V}_{sjp}^T \tilde{P}_{sp} \tilde{V}_{sjp}$ для каждого уравнения поправок вида (4.1) и (4.2), составляющих систему уравнений поправок (4.7).

Для вычисления квадратичной формы $\bar{V}_{ijp}^T P_{ip} \bar{V}_{ijp}$ будем иметь [60]:

$$\bar{V}_{ijp}^T P_{ip} \bar{V}_{ijp} = \bar{\varepsilon}_{ijp}^T \underset{(2,1)}{P_{ip}} \underset{(2,2)}{\bar{\varepsilon}_{ijp}} - \left(\left[\begin{array}{c} \dot{\bar{B}}_{ijp} \\ \ddot{\bar{B}}_{ijp} \end{array} \right]_{\substack{(2,2) \\ (2,8)}}^T \underset{(2,2)}{P_{ip}} \underset{(2,1)}{\bar{\varepsilon}_{ijp}} \right)^T \times \begin{bmatrix} \dot{\bar{\delta}}_i \\ \ddot{\bar{\delta}}_{jp} \end{bmatrix}_{\substack{(2,1) \\ (8,2)}}. \quad (4.31)$$

Путем несложных преобразований, используя обозначения (4.10), получим:

$$\bar{V}_{ijp}^T P_{ip} \bar{V}_{ijp} = \bar{\varepsilon}_{ijp}^T \underset{(2,1)}{P_{ip}} \underset{(2,2)}{\bar{\varepsilon}_{ijp}} - \underset{(2,1)}{\dot{\bar{\varepsilon}}_{ijp}}^T \underset{(2,1)}{\dot{\bar{\delta}}_i} - \underset{(8,1)}{\ddot{\bar{\varepsilon}}_{ijp}}^T \underset{(8,1)}{\ddot{\bar{\delta}}_{jp}}. \quad (4.32)$$

Подобным образом получим квадратичную форму для уравнения поправок типа (4.2):

$$\tilde{V}_{sjp}^T \tilde{P}_{sp} \tilde{V}_{sjp} = \tilde{\varepsilon}_{sjp}^T \underset{(2,1)}{P_{sp}} \underset{(2,2)}{\tilde{\varepsilon}_{sjp}} - \underset{(8,1)}{\tilde{\varepsilon}_{sjp}}^T \underset{(8,1)}{\ddot{\bar{\delta}}_{jp}}. \quad (4.33)$$

Квадратичные формы $\dot{\bar{V}}_i^T \dot{P}_i \dot{\bar{V}}_i$ и $\ddot{\bar{V}}_j^T \ddot{P}_j \ddot{\bar{V}}_j$, соответствующие уравненным поправкам типа (3.7) и (3.12), определяются выражениями:

$$\dot{\bar{V}}_i^T \dot{P}_i \dot{\bar{V}}_i = \underset{(2,1)}{\dot{\delta}_i^T} \underset{(2,2)}{\dot{P}_i} \underset{(2,1)}{\dot{\delta}_i} + \underset{(2,1)}{\dot{\bar{C}}_i^T} \underset{(2,2)}{\dot{P}_i} \underset{(2,1)}{\dot{\bar{C}}_i} + 2 \underset{(2,1)}{\dot{\delta}_i^T} \underset{(2,2)}{\dot{P}_i} \underset{(2,1)}{\dot{\bar{C}}_i} ; \quad (4.34)$$

$$\ddot{\bar{V}}_j^T \ddot{P}_j \ddot{\bar{V}}_j = \underset{(8,1)}{\ddot{\delta}_{jp}^T} \underset{(8,8)}{\ddot{P}_{jp}} \underset{(8,1)}{\ddot{\delta}_{jp}} + \underset{(8,1)}{\ddot{\bar{C}}_{jp}^T} \underset{(8,8)}{\ddot{P}_{jp}} \underset{(8,1)}{\ddot{\bar{C}}_{jp}} + 2 \underset{(8,1)}{\ddot{\delta}_{jp}^T} \underset{(8,8)}{\ddot{P}_{jp}} \underset{(8,1)}{\ddot{\bar{C}}_{jp}} . \quad (4.35)$$

Полную квадратичную форму $V^T P V$ представим как сумму всех возможных квадратичных форм (4.23) - (4.26):

$$\begin{aligned} \bar{V}^T P \bar{V} = & \sum \sum \bar{V}_{ij}^T P_{ij} \bar{V}_{ij} + \sum \sum \sum \widetilde{\bar{V}}_{sjp}^T \widetilde{P}_{sp} \widetilde{\bar{V}}_{sjp} + \sum \dot{\bar{V}}_i^T \dot{P}_i \dot{\bar{V}}_i + \\ & + \sum \sum \ddot{\bar{V}}_{jp}^T \ddot{P}_{jp} \ddot{\bar{V}}_{jp} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Первое суммирование для первого, второго и четвертого слагаемого выполняется по номерам опорных групп p -го снимка.

Второе суммирование производится:

- для первого слагаемого по номерам определяемых звезд, изобразившихся на снимке;
- для второго слагаемого по номерам опорных звезд, не вошедших в данную j -ю опорную группу p -го снимка;
- для четвертого слагаемого по номерам снимков.

Третье суммирование первого и второго слагаемого выполняется по номерам снимков. Суммирование третьего слагаемого

производится по номерам всех определяемых звезд, принятых в обработку.

Таким образом, вычисление квадратичной формы осуществляется последовательно с использованием основных конструктивных блоков (4.10).

Если задача построения и уравнивания звездной фототриангуляции решается без составления уравнений поправок типа (3.7) и (3.12), то при вычислении ошибки единицы веса μ по формуле (2.88) общее количество β уравнений поправок и количество ν неизвестных, возникающих в звездной фототриангуляции, определится по формулам (4.8).

Оценка точности уравненных параметров в результате решения полной задачи обработки снимка выполняется аналогично и является частным случаем рассмотренной методики:

- при вычислении квадратичной формы по формуле (4.36) суммирование по номерам снимков не выполняется, так как $p = 1$;

- при вычислении ошибки единицы веса μ по формуле (2.88). Количество β уравнений поправок определится по формуле (3.16), если уравнения поправок типа (3.7), (3.12) не составляются, а количество ν неизвестных параметров определится по формуле (3.17).

При использовании уравнений поправок типа (3.7) как при решении полной задачи обработки снимка, так и при построении и уравнивании звездной фототриангуляции, общее число уравнений поправок увеличится на $2k$, где k – количество определяемых объектов.

§ 4.5. Исходная информация для экспериментальной проверки алгоритма построения и уравнивания звездной фототриангуляции

При математической обработке звездной фототриангуляции методом, основанным на использовании инвариантных соотношений проективной геометрии, использовались те же исходные данные, что и при обработке (редукции) измерений методом перекрывающихся пластин (снимков) в упрощенной форме для создания специального фотографического каталога четырехсот звезд – «Широкоугольный стандарт в московской зенитной зоне» [85], а также при построении каталога 80-ти звезд строгим геометрическим методом, основанным на зависимостях аналитической фотограмметрии [71]. Поэтому имеется возможность сравнивать результаты математической обработки, полученные тремя различными методами.

Наблюдательный материал получен на широкоугольном астрографе АФР-1 (ГАИШ) и состоит из двух комплектов по 25 снимков (астронегативов на эмульсии ZU2 и ZU21), которые экспонировались непосредственно вблизи зенита [85]. Снимки (астронегативы) были измерены одним наблюдателем (Ю.А. Шокин) на измерительном приборе «Ascorecord E2» по методике, изложенной в [85].

Для исследования метода построения и уравнивания звездной фототриангуляции были использованы три перекрывающиеся снимка (астронегатива) (перекрытие 50 %), которые входили в комплект,

состоящий из 25-ти снимков на эмульсии ZU2. Координаты центров снимков (астронегативов) приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Координаты центров фотографирования

№ астронегатива	$\alpha(1950,0)$	$\delta(1950,0)$
1	$22^h 46^m$	$57^\circ 40'$
2	22 30	57 42
3	22 14	57 40

Измеренные значения координат изображений звезд были исправлены за действие радиальной дисторсии ($K_1 = +0.44 \times 10^{-8} \text{ мм}^{-2}$).

Влияние членов второго порядка дифференциальной рефракции и аберрации не учитывалось в виду их малости, поскольку снимки (астронегативы) экспонировались непосредственно вблизи зенита.

§ 4.6. Результаты построения и уравнивания звездной фототриангуляции

Для построения и уравнивания звездной фототриангуляции методом, рассмотренным в разделе 2.5, последний был реализован в виде вычислительной программы.

На отдельном снимке (астронегативе) выбирались от 10-ти до 20-ти опорных звезд из каталога «Широкоугольный стандарт в московской зенитной зоне», равномерно расположенных по всему полю снимка. Общее количество опорных звезд при построении и уравнивании звездной фототриангуляции по трем перекрывающимся снимкам составило 26, количество опорных групп 6 – по две на каждом снимке.

Предварительные значения экваториальных координат определяемых звезд находились по способу Ю.М. Трунина, то есть так же как при обработке снимка Плутона.

Экваториальные координаты 37-ми звезд и их средние квадратические ошибки, полученные в результате построения и уравнивания звездной фототриангуляции, приведены в табл. 4.2. Уравненные значения координат изображений опорных звезд, составивших опорные группы, приведены в табл. 4.3.

Экваториальные координаты звезд получены со средними квадратическими ошибками $0^s,008 \sec \delta$ и $0'',07$ по прямому восхождению и склонению соответственно, а уравненные значения координат изображений опорных звезд, составивших опорные группы,

получены со средней квадратической ошибкой не хуже 0,0017 мм. Ошибка единицы веса μ составила 0,0013 мм.

Таким образом, результаты обработки звездной фототриангуляции показывают, что метод, основанный на использовании инвариантных соотношений проективной геометрии, позволяет получать результаты с достаточно высокой точностью.

Таблица 4.2

**Экваториальные координаты звезд,
полученные в результате построения и уравнивания
звездной фототриангуляции проективным методом**

№ п.п.	№ по станд.	№ по AGK3	$\alpha(1950,0)$	$\delta(1950,0)$	$m_\alpha \cos \delta$	m_δ
1	2	3	4	5	6	7
1	93	0000	22 ^h 14 ^m 35 ^s ,578	+58° 22' 39",02	0 ^s ,009	0",06
2	105	1551	22 16 26,185	57 56 55,76	0,006	0,05
3	111	0000	22 17 6,962	57 26 31,63	0,006	0,05
4	121	0000	22 18 52,038	57 49 48,56	0,010	0,05
5	137	1556	22 31 49,088	57 44 44,21	0,006	0,05
6	160	1447	22 24 0,379	58 11 43,52	0,008	0,06
7	163	1563	22 24 18,981	57 44 26,77	0,007	0,05
8	164	1565	22 25 14,173	57 14 12,32	0,006	0,05
9	166	1566	22 25 22,558	56 16 28,75	0,007	0,05
10	167	1449	22 25 27,260	59 34 47,44	0,008	0,09
11	173	0000	22 26 13,822	58 41 11,38	0,009	0,07
12	176	1454	22 26 28,314	58 10 59,78	0,008	0,06
13	183	1572	22 27 9,717	57 46 40,26	0,008	0,06

№ п.п.	№ по станд.	№ по AGK3	$\alpha(1950,0)$	$\delta(1950,0)$	$m_{\alpha} \cos \delta$	m_{δ}
1	2	3	4	5	6	7
14	192	1575	22 28 29, 405	57 45 48, 68	0,008	0,06
15	196	1576	22 28 52, 488	57 9 45, 92	0,006	0,05
16	207	0000	22 30 38, 596	57 36 35, 83	0,008	0,06
17	209	1577	22 31 7, 858	57 49 56, 36	0,008	0,06
18	210	1463	22 31 11, 889	58 13 13, 18	0,008	0,06
19	216	1464	22 31 29, 647	58 33 53, 14	0,006	0,05
20	214	0000	22 20 40, 223	57 34 20, 83	0,006	0,06
21	219	1592	22 32 52, 256	56 59 27, 72	0,008	0,06
22	222	0000	22 33 4, 725	57 20 42, 02	0,008	0,06
23	231	1582	22 33 47, 578	57 50 49, 55	0,008	0,06
24	227	0000	22 33 38, 072	56 7 20, 64	0,008	0,07
25	234	1471	22 34 35, 891	58 20 42, 20	0,007	0,05
26	245	1477	22 36 49, 808	58 1 49, 29	0,008	0,06
27	249	1488	22 37 27, 341	58 44 46, 81	0,006	0,05
28	254	1478	22 37 53, 392	58 17 15, 01	0,007	0,05
29	255	1586	22 37 58, 759	57 4 8, 02	0,008	0,06
30	257	0000	22 38 29, 452	57 47 28, 05	0,008	0,06
31	259	0000	22 39 14, 221	57 30 28, 07	0,008	0,06
32	279	0000	22 41 41, 695	57 42 38, 20	0,011	0,09
33	280	0000	22 41 54, 188	55 52 37, 40	0,009	0,05
34	284	1482	22 42 42, 984	58 54 15, 04	0,006	0,07
35	287	1484	22 42 27, 417	58 28 48, 13	0,006	0,05
36	290	1600	22 43 18, 918	57 35 18, 85	0,008	0,06
37	300	1474	22 44 40, 724	58 1 54, 44	0,008	0,06

Таблица 4.3

**Уравненные значения координат x , y опорных звезд,
составивших опорные группы**

Снимок	№ по стандарту	x (мм)	m_x	y (мм)	m_y
1	400	86,5441	0,0017	73,6877	0,0013
	226	-58,1969	9	85,6728	12
	205	-83,8381	8	-44,7356	7
	397	82,3018	16	-51,6613	12
	363	45,5167	8	81,9358	8
	232	-59,2540	5	40,5884	5
	215	-74,5340	5	-20,5159	5
	367	51,6141	9	-64,2057	9
2	298	75,3769	9	70,2923	8
	110	-65,6469	8	72,5292	9
	118	-66,2949	8	-58,3294	8
	274	59,3851	7	51,2530	6
	270	53,7525	4	23,7551	4
	139	-48,9173	4	16,4815	4
	154	-37,2118	4	-29,7246	4
	235	26,3349	4	-41,9653	4
3	162	50,3314	5	55,1704	5
	32	-49,6113	7	61,3871	7
	36	-50,7486	8	-52,6681	8
	156	49,7855	6	-54,7234	6
	190	70,6516	8	72,5688	9
	6	-70,4436	13	75,3569	11
	11	-74,0037	13	-60,8094	12
	175	64,9225	8	-67,2972	10

§ 4.7. Сравнение результатов обработки звездной фототриангуляции с каталогом, полученным методом перекрывающихся пластин в упрощенной форме (метод ГАИШ)

Сущность метода перекрывающихся пластин в упрощенной форме, использовавшегося при создании фотографического каталога «Широкоугольный стандарт в московской зенитной зоне», подробно изложена в [85]. Тем не менее коротко отметим основные моменты.

В основе метода перекрывающихся пластинок лежит интерполяционный метод (типа обобщенного метода Тернера) с редуccionной моделью с полной квадратичной формой (3). Итерационная вычислительная процедура данного метода строится в два этапа.

На первом этапе, используя опорные звезды и решая систему уравнений типа (3) по методу наименьших квадратов, получают 12 постоянных для каждого снимка (астронегатива).

На втором этапе по формулам (3), используя постоянные пластинок, полученные на первом этапе, определяются идеальные координаты $\xi_i^{(1)}, \eta_i^{(1)}$ первого приближения, а по ним $\alpha_i^{(1)}, \delta_i^{(1)}$ определяемых звезд. Поскольку звезда изображается на нескольких снимках (астронегативах) (в данном случае на четырех), то окончательные значения экваториальных координат вычисляются простыми осреднениями.

Далее процесс повторяется, но опорные звезды в вычислительной процедуре уже не участвуют, система уравнений типа (3) составляется только для определяемых звезд.

Таким образом, опорные звезды и определяемые звезды в вычислительном процессе участвуют раздельно и экваториальные координаты звезд определяются не из уравнительных вычислений по методу наименьших квадратов, что ведет к нарушению математической строгости, как в определении положений звезд, так и в определении их средних квадратических ошибок.

Данный алгоритм был применен при обработке двух комплектов снимков (астронегативов). Окончательные значения экваториальных координат звезд стандарта вычислялись как средние значения из экваториальных координат звезд, полученных на различных комплектах.

Средняя квадратическая ошибка определения экваториальных координат звезд была получена, используя метод малых выборок.

Точность выведенных положений звезд стандарта оценивается величиной средней квадратической ошибки $0'',06$.

Результаты сравнения значений экваториальных координат 37-ми звезд (табл. 4.2), полученных из обработки звездной фототриангуляции проективным методом, с каталогом «Широкоугольный стандарт в московской зенитной зоне» (табл. 4.4) показывают, что различия в значениях экваториальных координат звезд находятся в пределах точности определений: $m_{\alpha} \cos \delta = 0'',008$ и $m_{\delta} = 0'',07$.

Таблица 4.4

**Фрагмент каталога «Широкоугольный стандарт
в московской зенитной зоне», метод – ГАИШ**

№	α 1950.0	δ 1950.0
1	2	3
93	22 ^h 14 ^m 35 ^s .580	+58° 22 39.11
105	22 16 26.192	+57 56 55.82
111	22 17 06.941	+57 26 31.64
121	22 18 52.007	+57 04 44.20
160	22 20 40.210	+57 49 48.57
163	22 24 00.342	+58 11 43.57
137	22 24 18.943	+57 44 26.79
164	22 25 14.157	+57 14 12.27
166	22 25 22.538	+57 34 20.66
167	22 25 27.224	+58 41 11.55
173	22 26 13.794	+59 34 47.53
176	22 26 28.288	+58 10 59.97
183	22 27 09.719	+57 46 40.30
192	22 28 29.402	+57 45 48.46
196	22 28 52.461	+57 09 45.94
207	22 30 38.593	+57 36 35.82
209	22 31 07.844	+57 49 56.39
210	22 31 11.868	+58 13 13.11
214	22 31 29.643	+58 33 53.11
216	22 31 49.084	+56 16 28.86
219	22 32 52.246	+56 59 27.60
222	22 33 04.735	+57 20 42.03
227	22 33 38.070	+57 50 49.45
231	22 33 47.583	+56 07 20.50
234	22 34 35.883	+58 20 42.04

№	α 1950.0	δ 1950.0
1	2	3
245	22 36 49.797	+58 01 49.25
249	22 37 27.323	+58 44 46.83
254	22 37 53.381	+58 17 15.01
255	22 37 58.753	+57 04 08.00
257	22 38 29.434	+57 47 28.02
259	22 39 14.216	+57 30 28.11
279	22 41 41.703	+55 52 37.53
280	22 41 54.211	+57 42 38.08
284	22 42 27.394	+58 28 48.06
287	22 42 42.966	+58 54 14.84
290	22 43 18.922	+57 35 18.82
300	22 44 40.725	+58 01 54.35

§ 4.8. Сравнение результатов обработки звездной фототриангуляции с каталогом, полученным методом, основанным на зависимостях аналитической фотограмметрии

Каталог положений 80-ти звезд был получен методом, в основе которого лежит использование уравнений коллинеарности (6), устанавливающих однозначное соответствие между координатами изображения звезды и направлением на нее в пространстве [71].

При построении каталога использовались пять перекрывающихся снимков, которые входили в комплект, состоящий из 25-ти астронегативов (эмульсия ZU2). В качестве неизвестных, в процессе математической обработки звездной фототриангуляции данным методом, принимались элементы внутреннего

ориентирования x_{Tp}, y_{Tp}, F_p , три угла Эйлера I_p, ω_p, Ω_p ($p = 1 \div 5$), характеризующих положение p -го снимка и экваториальные координаты 80-ти звезд. В первом приближении при построении и уравнивании звездной фототриангуляции координаты главной точки, фокусное расстояние и три эйлеровых угла для каждого снимка, были получены из предварительной калибровки широкоугольного астрографа по специальной программе.

Построение и уравнивание звездной фототриангуляции методом, в основе которого находится уравнение коллинеарности (6), а также калибровка астрографа выполнялась при следующем условии [71]:

– измерительный прибор обеспечивает выполнение условия ортогональности осей измерительной системы.

При этом экваториальные координаты 80-ти звезд были получены со средними квадратическими ошибками $m_\alpha \cos \delta = 0^s,008$ и $m_\delta = 0'',11$ по прямому восхождению и склонению соответственно, с ошибкой единицы веса 0,0017 мм.

В табл. 4.5 приведены значения экваториальных координат 18-ти звезд каталога, полученного методом, основанным на использовании зависимостей аналитической фотограмметрии (6). Координаты этих же 18-ти звезд, полученные из обработки одних и тех же перекрывающихся снимков (трех из пяти) проективным методом, указаны в табл. 4.2.

Таблица 4.5

Фрагмент каталога, полученного фотограмметрическим методом

№ п.п.	№ по станд.	α (1950,0)	δ (1950,0)	$m_\alpha \cos \delta$	m_δ
1	105	22 ^h 14 ^m 35 ^s ,555	+58°22'39",07	0 ^s ,008	0",11
2	93	22 16 26,175	+57 56 55,76	0,007	0,11
3	160	22 24 00,351	+58 11 43,56	0,007	0,11
4	163	22 24 18,957	+57 44 26,77	0,007	0,11
5	167	22 25 27,232	+58 41 11,46	0,007	0,11
6	173	22 26 23,793	+59 34 47,60	0,007	0,11
7	176	22 26 28,295	+58 10 59,82	0,007	0,11
8	209	22 31 07,863	+57 49 56,27	0,007	0,11
9	210	22 31 11,898	+58 13 13,12	0,007	0,11
10	214	22 31 29,666	+58 33 53,10	0,007	0,11
11	227	22 33 38,093	+57 50 49,48	0,007	0,11
12	234	22 34 35,905	+58 20 42,16	0,007	0,11
13	245	22 36 49,818	+58 01 49,25	0,007	0,11
14	249	22 37 27,345	+58 44 46,83	0,007	0,11
15	254	22 37 53,394	+58 17 14,82	0,007	0,11
16	257	22 38 29,454	+57 47 28,01	0,007	0,11
17	279	22 41 41,708	+57 42 38,09	0,007	0,11
18	287	22 42 42,980	+58 28 48,14	0,007	0,11

Результаты сравнений значений экваториальных координат звезд, полученных из обработки звездной фототриангуляции двумя различными методами, показывают, что различия в определении положений звезд находятся в пределах точности определений:

$m_{\alpha} \cos \delta = 0^s,008$ – по прямому восхождению и $m_{\delta} = 0'',07$ – по склонению.

При этом, если прямые восхождения звезд определяются с одинаковой точностью, как одним, так и другим методом, то склонения звезд определяются несколько точнее методом, основанным на использовании инвариантных соотношений проективной геометрии.

Кроме того, анализ сравнения результатов, полученных тремя различными методами, показывает, что результаты построения и уравнивания звездной фототриангуляции методом, рассмотренным в разделе 2.5, лучше сходятся с результатами, полученными из обработки фототриангуляции методом, основанным на использовании зависимостей аналитической фотограмметрии.

Выводы

Разработана теория и методика построения и уравнивания звездной, аналитической фототриангуляции в основе которой находятся инварианты проективной геометрии. Данный алгоритм позволяет строить фототриангуляцию без знания элементов внутреннего ориентирования, автоматически учитывать искажения линейного характера. В уравнивательных вычислениях одновременно участвуют как определяемые, так и опорные звезды, при этом, координаты изображений опорных звезд могут быть уточнены в процессе уравнивательных вычислений. Оптимальный алгоритм

решения системы нормальных уравнений, позволяет включать в обработку большое количество определяемых и опорных объектов.

Исследования разработанного алгоритма построения и уравнивания звездной фототриангуляции, выполненные на практическом материале, подтверждают его работоспособность.

Глава 5. Решение некоторых задач фотограмметрии с применением инвариантных соотношений проективной геометрии

§ 5.1. Обработка снимка с известным центром проектирования.

Прямая проективная засечка

Обработка снимков с известным центром фотографирования является одной из задач аналитической фотограмметрии. На основе соотношений евклидовой геометрии эта задача рассматривается, в частности, в [55].

Использование векторной интерпретации инвариантов проективной геометрии позволяет решить указанную задачу непосредственным использованием формулы (1.37) или (1.38) [7, 76]. Данный алгоритм был разработан Ю.М. Труниным и представлен в статье [4].

Рассмотрим решение задачи применительно к аэрофотоснимку. Предположим, что в пространстве имеется пять опорных точек, из которых S – центр проектирования, заданный вектором $\vec{R}_S$ с прямоугольными координатами X_S, Y_S, Z_S , то есть $\vec{R}_S = [X_S, Y_S, Z_S]^T$.

Эти точки определяют четыре опорных вектора $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \vec{R}_4$. Далее пусть имеется снимок с изображениями опорных точек и определяемой точки, которым поставим в соответствие однородные векторы изображений: для опорных – $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$, для определяемой – $\vec{r}_0$. Этих данных достаточно для определения по формуле (1.37) или (1.38), вектора $\vec{R}_0$ (направления) на искомую точку, то есть построения геодезически ориентированной и конгруэнтной моменту фотографирования связки прямых. В астрономии формула (1.38) нашла применение для определения положения одиночного объекта. Эта формула во второй главе представлена выражением (2.8). Решение задачи обработки снимка с известным центром фотографирования представим выражение подобным образом (2.8):

$$\rho \vec{R}_0 = \vec{R}_2 \vec{R}_3 \vec{R}_4 \frac{\vec{r}_2 \vec{r}_3 \vec{r}_0}{\vec{r}_2 \vec{r}_3 \vec{r}_4} \vec{R}_1 + \vec{R}_3 \vec{R}_1 \vec{R}_4 \frac{\vec{r}_3 \vec{r}_1 \vec{r}_0}{\vec{r}_3 \vec{r}_1 \vec{r}_4} \vec{R}_2 + \vec{R}_1 \vec{R}_2 \vec{R}_4 \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_0}{\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_4} \vec{R}_3, \quad (5.1)$$

где $\vec{R}_j = [X_j - X_S, Y_j - Y_S, Z_j - Z_S]^T$, ($j=1,2,3,4$) – векторы опорных точек; $\vec{r}_j$, ($j=1,2,3,4$) и $\vec{r}_0$ – однородные векторы изображений соответственно опорных точек и определяемого объекта; ρ – коэффициент пропорциональности.

Для определения вектора $\vec{R}_0$ достаточно вычислить смешанные произведения векторов $\vec{R}_j$ опорных точек и проективные координаты. Проективными координатами, как и в случае выражения (2.8), будут величины, составленные из отношений смешанных произведений

однородных векторов изображений опорных точек и определяемого объекта:

$$\xi_1 = \frac{\vec{r}_2 \vec{r}_3 \vec{r}_0}{\vec{r}_2 \vec{r}_3 \vec{r}_4}; \quad \xi_2 = \frac{\vec{r}_3 \vec{r}_1 \vec{r}_0}{\vec{r}_3 \vec{r}_1 \vec{r}_4}; \quad \xi_3 = \frac{\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_0}{\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_4}. \quad (5.2)$$

Соотношение (5.1) по аналогии с (2.25) приведем к следующему виду:

$$\rho R_0 = \tilde{A}_1 \vec{R}_1 \xi_1 + \tilde{A}_2 \vec{R}_2 \xi_2 + \tilde{A}_3 \vec{R}_3 \xi_3, \quad (5.3)$$

где ρ – коэффициент пропорциональности, $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ – смешанные произведения, составленные из векторов положения опорных точек в пространстве:

$$\tilde{A}_1 = \vec{R}_2 \vec{R}_3 \vec{R}_4; \quad \tilde{A}_2 = \vec{R}_3 \vec{R}_1 \vec{R}_4; \quad \tilde{A}_3 = \vec{R}_1 \vec{R}_2 \vec{R}_4. \quad (5.4)$$

Вычисление величин $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ как смешанных произведений векторов сводится к вычислению определителей третьего порядка:

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} X_2 - X_S & X_3 - X_S & X_4 - X_S \\ Y_2 - Y_S & Y_3 - Y_S & Y_4 - Y_S \\ Z_2 - Z_S & Z_3 - Z_S & Z_4 - Z_S \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\tilde{A}_2 &= \begin{pmatrix} X_3 - X_S & X_1 - X_S & X_4 - X_S \\ Y_3 - Y_S & Y_1 - Y_S & Y_4 - Y_S \\ Z_3 - Z_S & Z_1 - Z_S & Z_4 - Z_S \end{pmatrix} \\ \tilde{A}_3 &= \begin{pmatrix} X_1 - X_S & X_2 - X_S & X_4 - X_S \\ Y_1 - Y_S & Y_2 - Y_S & Y_4 - Y_S \\ Z_1 - Z_S & Z_2 - Z_S & Z_4 - Z_S \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Выражение (5.3) легко привести к координатной форме:

$$\begin{aligned}X_0 - X_S &= (Z_0 - Z_S) \frac{a_1(X_1 - X_S) + a_2(X_2 - X_S) + a_3(X_3 - X_S)}{a_1(Z_1 - Z_S) + a_2(Z_2 - Z_S) + a_3(Z_3 - Z_S)} = (Z_0 - Z_S) \frac{X'}{Z'} \\ Y_0 - Y_S &= (Z_0 - Z_S) \frac{a_1(Y_1 - X_S) + a_2(Y_2 - X_S) + a_3(Y_3 - X_S)}{a_1(Z_1 - Z_S) + a_2(Z_2 - Z_S) + a_3(Z_3 - Z_S)} = (Z_0 - Z_S) \frac{Y'}{Z'}\end{aligned}\quad (5.6)$$

где $a_1 = A_1\xi_1$, $a_2 = A_2\xi_2$, $a_3 = A_3\xi_3$.

Уравнения (5.6) решают задачу обработки одиночного снимка и отражают условие коллинеарности.

Из обработки одиночного аэроснимка можно определить только две координаты (плановые), при этом третья координата ($H = Z_S - Z_0$) должна быть известна. На практике это бывает, когда местность почти не отличается от горизонтальной. В этом случае можно вести речь о преобразовании из плоскости снимка в плоскость местности и (5.6) можно принять $Z_S = Y_S = X_S = 0$, а $Z_0 = const$, например $Z_0 = 1$.

Зависимости между координатами соответственных точек местности и снимка, в классическом варианте – на основе знания элемен-

тов внутреннего и внешнего ориентирования, решающая задачу обработки одиночного снимка, как известно, имеют вид [55, 57]:

$$\begin{aligned} X_i &= X_S + (Z_i - Z_S) \frac{b_{11}(x_i - x_0) + b_{12}(y_i - y_0) - b_{13}f}{b_{31}(x_i - x_0) + b_{32}(y_i - y_0) - b_{33}f} = (Z_i - Z_S) \frac{\tilde{x}_i}{\tilde{z}_i}; \\ Y_i &= Y_S + (Z_i - Z_S) \frac{b_{11}(x_i - x_0) + b_{12}(y_i - y_0) - b_{13}f}{b_{31}(x_i - x_0) + b_{32}(y_i - y_0) - b_{33}f} = (Z_i - Z_S) \frac{\tilde{y}_i}{\tilde{z}_i}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь b_{lm} – направляющие косинусы, x_0, y_0, f – элементы внутреннего ориентирования. Предположив, что координаты центра проекции (X_S, Y_S, Z_S) и координаты главной точки снимка (x_0, y_0) равны нулю, сравнивая последнее выражения с выражениями (5.6), получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3}{a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + a_3 Z_3} &= \frac{b_{11}x_i + b_{12}y_i - b_{13}f}{b_{31}x_i + b_{32}y_i - b_{33}f}, \\ \frac{a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3}{a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + a_3 Z_3} &= \frac{b_{11}x_i + b_{12}y_i - b_{13}f}{b_{31}x_i + b_{32}y_i - b_{33}f}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Очевидно, что теоретически данное равенство будет справедливо при заданных углах внешнего ориентирования для любой точки, изобразившейся на снимке и любых 4-х точек, задающих систему проективных координат.

§ 5.2. Исследование алгоритма прямой проективной засечки

В табл. 5.1 приведены результаты эксперимента по обработке одного из не метрических снимков (аэроснимка) – пересчет из плос-

кости снимка в плоскость местности. Блок перекрывающихся снимков был получен не метрической камерой с фокусным расстоянием равным примерно 80 мм. Съёмка была выполнена с дельтаплана. Объектом съёмки являлся один из населенных пунктов РТ. Цель съёмки – определение координат поворотных точек границ землепользований. Высота съёмки и примерный масштаб снимка соответственно составили около 400 м и 1:5000. Площадь съёмки составила около 800 га. Местность ровная, система координат – условная. Для обработки снимка были выбраны 13 точек в качестве опорных, из них, 7 точек использовались для формирования опорных групп (опорная группа содержит 4 точки). На снимке формировалось 3 опорные группы, оставшиеся точки использовались в качестве контрольных точек.

Полученное изображение (негатив) сканировалось с разрешающей способностью 600 dpi, размер пикселя на местности составил около 0,20 м.

Таблица 5.1

Сравнение значений координат

№ точки	Контрольные значения координат		Значения координат, полученные из обработки снимка			Расхождения значений координат по опорным группам		
			I оп. гр.	II оп. гр.	III оп. гр.	I оп. гр.	II оп. гр.	III оп. гр.
1	2	3	4	5	6	7	8	9
126	X	11031,34	31,37	–	31,29	-0,03	–	+0,05
	Y	11869,54	69,53	–	69,51	+0,01	–	+0,03
3	X	10861,37	61,48	–	–	-0,11	–	–

№ точки	Контрольные значения координат		Значения координат, полученные из обработки снимка			Расхождения значений координат по опорным группам		
			I оп. гр.	II оп. гр.	III оп. гр.	I оп. гр.	II оп. гр.	III оп. гр.
	Y	11897,68	97,74	—	—	-0,06	—	—
45	X	10863,95	64,31	—	64,30	-0,36	—	-0,35
	Y	11730,62	30,82	—	30,80	-0,20	—	-0,18
29	X	10946,75	45,92	45,89	45,86	+0,83	+0,86	+0,89
	Y	11865,75	65,42	65,40	65,38	+0,33	+0,30	+0,27
143	X	10861,98	61,92	61,68	61,86	+0,06	+0,30	+0,12
	Y	11814,91	15,17	15,08	15,11	-0,26	-0,17	-0,20
2	X	10871,44	71,04	70,86	70,97	+0,40	+0,58	+0,47
	Y	11839,09	39,44	39,37	39,38	-0,35	-0,28	-0,29
113	X	11036,00	35,95	35,98	35,95	+0,05	+0,02	+0,05
	Y	11847,83	47,92	47,94	47,90	-0,09	-0,11	-0,07
134	X	11030,77	31,29	31,29	31,29	-0,52	-0,52	-0,52
	Y	11779,24	80,11	80,12	80,10	-0,87	-0,88	-0,86
127	X	11031,23	—	31,29	—	—	-0,06	—
	Y	11898,78	—	98,78	—	—	0,00	—
84	X	19837,06	—	36,90	36,94	—	+0,16	+0,12
	Y	11893,08	—	93,01	93,01	—	+0,07	+0,07
142	X	10863,69	63,07	62,87	63,00	+0,62	+0,82	+0,69
	Y	11835,44	35,97	35,89	35,90	-0,53	-0,45	-0,46
130	X	11005,44	04,92	04,95	04,91	+0,52	+0,49	+0,53
	Y	11858,42	58,21	58,22	58,19	+0,21	+0,20	+0,23
128	X	10973,16	72,35	72,35	72,31	+0,81	+0,81	+0,85
	Y	11868,14	68,12	68,11	68,09	+0,02	+0,03	+0,05

Примечание: в столбцах 4, 5, 6 приведены три последние цифры координат.

Как это видно из таблицы, средняя квадратическая ошибка определения положения четких контуров составила не хуже $\pm 0,25$ м по координате X и Y. Для нечетких контуров данная величина равна $\pm 0,75$ м. Для снимка, результаты обработки, которого приведены в таблице четкими точками являются точки –126, 143, 113, 127.

Кроме того, анализ снимков выполнялся посредством сравнения длин линий – сторон землепользований, полученных из непосредственных измерений на местности, а также из обработки не метрических снимков. Промеры были выполнены по фасадам, число промеров составило несколько десятков. Среднее квадратическое отклонение для длин линий получилось равным $\pm 0,32$ м. Фактически из обработки не метрических снимков получены результаты (положения точек, длины линий) соответствующие точности топографического плана масштаба 1:2000, который и используется в качестве базового масштаба при ведении земельного кадастра в сельских населенных пунктах.

По результатам исследований можно сделать вывод, что данный алгоритм вполне приемлем для решения некоторых практических задач, в частности, для целей земельного кадастра.

§ 5.3. Обработка снимка с неизвестным центром проектирования. Обратная проективная засечка

Задача определения центра проекции на основе векторной интерпретации основных инвариантов проективной геометрии фактически решена в работе [9]. Суть алгоритма обратной проективно-фотограмметрической засечки состоит в следующем.

Для решения задачи необходимо иметь минимум шесть опорных точек. При этом опорные точки должны быть по пять не компланарными и по четыре не коллинеарными, а однородные векторы изображений этих точек не должны принадлежать конусу второго порядка, включая вырождения.

Основное решение задачи сводится к определению направления на центр фотографирования S из каких-либо двух опорных точек и решения в последствии прямой засечки. В качестве таких точек могут быть выбраны, например, точка 6 и точка 5.

Рассматривая рис. 5.1 представим вместо связки шести прямых с вершиной S два пучка из пяти плоскостей. Первый пучок – пучок плоскостей с ребром 6- S , второй пучок с ребром 5- S . При решении задачи начало координат помещается соответственно в точку 6 и точку 5, поэтому будем иметь векторы:

$$\tilde{\vec{R}}_l = \vec{R}_l - \vec{R}_6, l = 1, 2, 3, 4, 5 \text{ – для первого пучка плоскостей;}$$

$$\tilde{\vec{R}}_l = \vec{R}_l - \vec{R}_5, l = 1, 2, 3, 4, 6 \text{ – для второго пучка плоскостей}$$

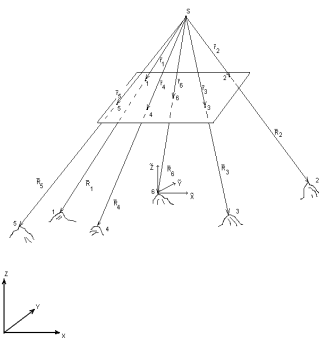


Рис. 5.1. Обратная проективно-фотограмметрическая засечка

Плоскости каждого из этих пучков можно определить дважды. Первый пучок плоскостей представляется:

1. Векторными произведениями, составленными из векторов:

$$\vec{R}_6 \times \vec{R}_1, \vec{R}_6 \times \vec{R}_2, \vec{R}_6 \times \vec{R}_3, \vec{R}_6 \times \vec{R}_4, \vec{R}_6 \times \vec{R}_5 ; \quad (5.9)$$

2. Векторными произведениями, составленными из векторов:

$$\vec{r}_6 \times \vec{\tilde{R}}_1, \vec{r}_6 \times \vec{\tilde{R}}_2, \vec{r}_6 \times \vec{\tilde{R}}_3, \vec{r}_6 \times \vec{\tilde{R}}_4, \vec{r}_6 \times \vec{\tilde{R}}_5. \quad (5.10)$$

В первом случае ребром плоскостей является вектор $\vec{R}_6$, во втором случае вектор $-\vec{r}_6$. Поскольку пучки (5.9) и (5.10) проективны, поэтому

$$\vec{\tilde{r}}_6 = \left[\vec{\tilde{R}}'_4 \times \vec{\tilde{R}}_4 \right] \times \left[\vec{\tilde{R}}'_5 \times \vec{\tilde{R}}_5 \right], \quad (5.11)$$

где

$$\vec{\tilde{R}}'_4 = \vec{\tilde{R}}_2 \vec{\tilde{R}}_3 \vec{\tilde{R}}_5 \cdot \frac{\vec{R}_1 \vec{R}_6 \vec{R}_5}{\vec{R}_1 \vec{R}_6 \vec{R}_4} \cdot \vec{\tilde{R}}_1 + \vec{\tilde{R}}_3 \vec{\tilde{R}}_1 \vec{\tilde{R}}_5 \cdot \frac{\vec{R}_2 \vec{R}_6 \vec{R}_5}{\vec{R}_2 \vec{R}_6 \vec{R}_4} \cdot \vec{\tilde{R}}_2 + \vec{\tilde{R}}_1 \vec{\tilde{R}}_2 \vec{\tilde{R}}_5 \cdot \frac{\vec{R}_3 \vec{R}_6 \vec{R}_5}{\vec{R}_3 \vec{R}_6 \vec{R}_4} \cdot \vec{\tilde{R}}_3, \quad (5.12)$$

$$\vec{\tilde{R}}'_5 = \vec{\tilde{R}}_2 \vec{\tilde{R}}_3 \vec{\tilde{R}}_4 \cdot \frac{\vec{R}_1 \vec{R}_6 \vec{R}_4}{\vec{R}_1 \vec{R}_6 \vec{R}_5} \cdot \vec{\tilde{R}}_1 + \vec{\tilde{R}}_3 \vec{\tilde{R}}_1 \vec{\tilde{R}}_4 \cdot \frac{\vec{R}_2 \vec{R}_6 \vec{R}_4}{\vec{R}_2 \vec{R}_6 \vec{R}_5} \cdot \vec{\tilde{R}}_2 + \vec{\tilde{R}}_1 \vec{\tilde{R}}_2 \vec{\tilde{R}}_4 \cdot \frac{\vec{R}_3 \vec{R}_6 \vec{R}_4}{\vec{R}_3 \vec{R}_6 \vec{R}_5} \cdot \vec{\tilde{R}}_3. \quad (5.13)$$

Второй пучок плоскостей представляется:

1. Векторными произведениями, составленными из векторов

$$\vec{R}_5 \times \vec{R}_1, \vec{R}_5 \times \vec{R}_2, \vec{R}_5 \times \vec{R}_3, \vec{R}_5 \times \vec{R}_4, \vec{R}_5 \times \vec{R}_6. \quad (5.14)$$

2. Векторными произведениями, составленными из векторов

$$\vec{r}_5 \times \vec{\tilde{R}}_1, \vec{r}_5 \times \vec{\tilde{R}}_2, \vec{r}_5 \times \vec{\tilde{R}}_3, \vec{r}_5 \times \vec{\tilde{R}}_4, \vec{r}_5 \times \vec{\tilde{R}}_6. \quad (5.15)$$

В первом случае для данного пучка плоскостей ребром является вектор $\vec{R}_5$, во втором случае – вектор $\vec{r}_5$. Пучки (5.14) и (5.15), так же проективны, поэтому

$$\vec{\tilde{r}}_5 = \left[\vec{\tilde{R}}_4'' \times \vec{\tilde{R}}_4 \right] \times \left[\vec{\tilde{R}}_6'' \times \vec{\tilde{R}}_6 \right], \quad (5.16)$$

где

$$\vec{\tilde{R}}_4'' = \vec{\tilde{R}}_2 \vec{\tilde{R}}_3 \vec{\tilde{R}}_6 \cdot \frac{\vec{R}_1 \vec{R}_5 \vec{R}_6}{\vec{R}_1 \vec{R}_5 \vec{R}_4} \cdot \vec{\tilde{R}}_1 + \vec{\tilde{R}}_3 \vec{\tilde{R}}_1 \vec{\tilde{R}}_6 \cdot \frac{\vec{R}_2 \vec{R}_5 \vec{R}_6}{\vec{R}_2 \vec{R}_5 \vec{R}_4} \cdot \vec{\tilde{R}}_2 + \vec{\tilde{R}}_1 \vec{\tilde{R}}_2 \vec{\tilde{R}}_6 \cdot \frac{\vec{R}_3 \vec{R}_5 \vec{R}_6}{\vec{R}_3 \vec{R}_5 \vec{R}_4} \cdot \vec{\tilde{R}}_3, \quad (5.17)$$

$$\vec{\tilde{R}}_6'' = \vec{\tilde{R}}_2 \vec{\tilde{R}}_3 \vec{\tilde{R}}_4 \cdot \frac{\vec{R}_1 \vec{R}_5 \vec{R}_4}{\vec{R}_1 \vec{R}_5 \vec{R}_6} \cdot \vec{\tilde{R}}_1 + \vec{\tilde{R}}_3 \vec{\tilde{R}}_1 \vec{\tilde{R}}_4 \cdot \frac{\vec{R}_2 \vec{R}_5 \vec{R}_4}{\vec{R}_2 \vec{R}_5 \vec{R}_6} \cdot \vec{\tilde{R}}_2 + \vec{\tilde{R}}_1 \vec{\tilde{R}}_2 \vec{\tilde{R}}_4 \cdot \frac{\vec{R}_3 \vec{R}_5 \vec{R}_4}{\vec{R}_3 \vec{R}_5 \vec{R}_6} \cdot \vec{\tilde{R}}_3. \quad (5.18)$$

В конце концов прямой засечкой из точек 5 и 6 определяется вектор приращения, например, вектор $\hat{\vec{r}}_5$ по формуле

$$\hat{\vec{r}}_5 = \frac{\left[\vec{\tilde{R}}_6 \times \vec{\tilde{r}}_6 \right] \cdot \left[\vec{\tilde{r}}_5 \times \vec{\tilde{r}}_6 \right]}{\left[\vec{\tilde{r}}_5 \times \vec{\tilde{r}}_6 \right]^2} \cdot \vec{\tilde{r}}_5. \quad (5.19)$$

§ 5.4. Исследование алгоритма обратной проективной засечки

Исследования выполнялись с использованием макетных снимков (аэроснимков). Параметры (фрагмент) одного из макетных снимков приведены в табл. 5.2. Данный макетный снимок идеальный: в координатах отсутствуют случайные ошибки.

Таблица 5.2

№ точки	Макетный снимок Пространственные координаты (м)			Координаты на снимке (мм)	
	X	Y	Z	x	y
1	1140,87	4841,16	10,00	-0,070	68,715
2	3644,56	4674,99	200,00	67,870	71,816
3	1790,45	305,61	10,00	33,948	-66,698
4	991,84	331,41	200,00	-0,013	-69,272
5	1937,31	1904,83	300,00	34,022	1,449
6	2989,57	2015,51	100,00	67,261	3,623
Центр проекции	1000,00	1000,00	2750,00	—	—

При исследованиях координаты изображений и пространственные координаты опорных точек искажались случайными ошибками. Результаты решения обратной проективной засечки представлены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Решение обратной проективной засечки

Вариант решения засечки	Координаты центра проекции (м)		Уклонения от идеальных значений (м)
Случайные ошибки только в координатах изображений, ср. кв. ошибка $\pm 3,5$ мкм	X	1000,003	-0,003
	Y	993,890	+6,110
	Z	2756,240	+6,240
Случайные ошибки только в координате Z, ср. кв. ошибка $\pm 1,3$ м	X	981,509	+18,491
	Y	975,094	+24,904
	Z	2807,131	-57,131
Случайные ошибки только в координате Z, ср. кв. ошибка $\pm 2,5$ м	X	1040,521	-40,521
	Y	1049,803	-49,803
	Z	2631,756	+118,244
Случайные ошибки: в координатах изображений (ср. кв. ошибка $\pm 3,5$ мкм) в координате Z (ср. кв. ошибка $\pm 1,3$ м)	X	981,888	+18,112
	Y	970,150	+29,850
	Z	2811,925	-61,925
Случайные ошибки только в плановых координатах, (ср. кв. ошибка $\pm 0,9$ м)	X	1078,554	-78,554
	Y	1018,749	-18,749
	Z	2598,427	+151,537
Случайные ошибки: в плановых координатах ср. кв. ошибка $\pm 0,9$ м; в высоте ср. кв. ошибка $\pm 1,3$ м; в координатах изображений ср. кв. ошибка $\pm 3,5$ мкм	X	1055,644	-644
	Y	982,695	+17,305
	Z	2668,574	+81,426

Результаты исследований показывают, что случайные ошибки в координатах точек на местности и на снимке влияют на конечный результат: на определение координат центра проекции. К тому же конечный результат существенным образом зависит и от выбора опоры, от ее геометрии. Ошибка определения координат центра проекции в данном эксперименте составила в процентах от высоты фотографирования: не более 3 % для плановых координат и 6 % для координаты Z .

Аналогичные результаты автором были получены и при обработке реальных снимков. Поэтому применение данного метода на практике для точных определений вряд ли возможно или возможно только для приближенных определений.

§ 5.5. Аналитическая фототриангуляция с проективно преобразованными снимками. Математическая модель фототриангуляции

Рассмотрим возможность построения и уравнивания аналитической фототриангуляции с использованием проективно-преобразованных снимков. Установим структуру матрицы нормальных уравнений, возникающей в блоке фототриангуляции (аэрофототриангуляции).

В данном случае уравнения связи в координатной форме будут иметь вид аналогичный уравнению (2.37):

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \cdot \xi_1 \\ A_2 \cdot \xi_2 \\ A_3 \cdot \xi_3 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

В уравнении (5.20) коэффициент ρ будет определяться известными выражениями (2.26) и (2.38): $\rho = \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3$; $\rho = A_1 \xi_1 + A_2 \xi_2 + A_3 \xi_3$. Величины A_1, A_2, A_3 вычисляются по формулам (2.27): $A_1 = \bar{r}_2 \bar{r}_3 \bar{r}_4$; $A_2 = \bar{r}_3 \bar{r}_1 \bar{r}_4$; $A_3 = \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4$. Проективные координаты точки будут определяться формулами (2.28) с тем отличием, что смешанные произведения векторов в числителе и знаменателе этих выражений будут составлены из векторов опорных точек $\vec{R}_j = [X_j - X_S, Y_j - Y_S, Z_j - Z_S]^T$, ($j=1,2,3,4$) и определяемой точки $\vec{R}_0$:

$$\xi_1 = \frac{\bar{R}_2 \bar{R}_3 \bar{R}_0}{\bar{R}_2 \bar{R}_3 \bar{R}_4} = \frac{\tilde{A}_{10}}{\tilde{A}_1}; \quad \xi_2 = \frac{\bar{R}_3 \bar{R}_1 \bar{R}_0}{\bar{R}_3 \bar{R}_1 \bar{R}_4} = \frac{\tilde{A}_{20}}{\tilde{A}_2}; \quad \xi_3 = \frac{\bar{R}_1 \bar{R}_2 \bar{R}_0}{\bar{R}_1 \bar{R}_2 \bar{R}_4} = \frac{\tilde{A}_{30}}{\tilde{A}_3}. \quad (5.21)$$

Знаменатели $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ в формулах вычисления проективных координат определяются выражениями (5.4) и (5.5). Числители $\tilde{A}_{10}, \tilde{A}_{20}, \tilde{A}_{30}$ – смешанные произведения векторов, в (5.21) определяться:

$$\tilde{A}_{10} = \bar{R}_2 \bar{R}_3 \bar{R}_0; \quad \tilde{A}_{20} = \bar{R}_3 \bar{R}_1 \bar{R}_0; \quad \tilde{A}_{30} = \bar{R}_1 \bar{R}_2 \bar{R}_0. \quad (5.22)$$

Их вычисление будет осуществляться по формулам (3.5), в которых компоненты вектора $\vec{R}_4$ следует заменить на компоненты вектора $\vec{R}_0$.

При построении линеаризованной формы уравнения связи (5.20) в качестве уточняемых величин можно выделить три группы параметров:

- геодезические координаты определяемой точки;
- координаты центра фотографирования;
- координаты изображений опорных точек, составивших

опорные группы.

Сделаем предположения, как и в случае звездной фототриангуляции. Пусть имеется N перекрывающихся изображений (снимков) местности. Далее, пусть на каждом p -ом ($p = 1, 2, \dots, N$) снимке изобразилось k_p определяемых точек и опознано n_p опорных точек, из которых составлено m_p опорных групп. Всего опорных групп на всех снимках будет $m = \sum_1^N m_p$. Все m опорных групп составляются при условии, что опорные группы не содержат общих точек.

Для формирования наиболее общей модели временно допустим, что каждая определяемая точка изобразилась на каждом снимке, то есть перекрытие между снимками равно 100 %.

Уравнение поправок для i -ой определяемой точки, изобразившейся на p -ом снимке, на котором сформирована j -ая опорная группа, представим в следующем виде:

$$\underset{(2,3)}{\dot{B}_{ijp}} \underset{(3,1)}{\ddot{\delta}_i} + \underset{(2,3)}{\hat{B}_{ijp}} \underset{(3,1)}{\hat{\delta}_p} + \underset{(2,8)}{\ddot{B}_{ijp}} \underset{(8,1)}{\ddot{\delta}_{jp}} = \underset{(2,1)}{\vec{\varepsilon}_{ijp}} + \underset{(2,1)}{\vec{V}_{ijp}}, \quad (5.23)$$

где

$$\dot{B}_{(2,3)}^{ijp} = \frac{\partial(x_0, y_0)_{ijp}}{\partial(X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i})} \quad (5.24)$$

– матрица частных производных от неоднородных координат i -ой определяемой точки ($i = 1, 2, \dots, k$), изобразившейся на p -ом снимке по геодезическим координатам X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i} точки, составленная для j -ой опорной группы точек данного снимка ($j = 1, 2, \dots, m$);

$$\hat{B}_{(2,3)}^{ijp} = \frac{\partial(x_0, y_0)_{ijp}}{\partial(X_{S,p}, Y_{S,p}, Z_{S,p})} \quad (5.25)$$

– матрица частных производных от неоднородных координат i -ой определяемой точки, изобразившейся на p -ом снимке по координатам $X_{S,p}, Y_{S,p}, Z_{S,p}$ центра съемки, составленная для j -ой опорной группы точек данного p -го снимка;

$$\dot{\hat{\delta}}_{(3,1)}^i = [dX_0 \quad dY_0 \quad dZ_0]_i^T \quad (5.56)$$

– вектор поправок к предварительным значениям геодезических координат X_{0i}, Y_{0i}, Z_{0i} i -ой определяемой точки;

$$\hat{\hat{\delta}}_{(3,1)}^p = [dX_S \quad dY_S \quad dZ_S]_p^T \quad (5.27)$$

– вектор поправок к предварительным значениям геодезических координат $X_{S,p}, Y_{S,p}, Z_{S,p}$ p -го центра съемки;

$\vec{\mathcal{E}}_{ijp}$ и $\vec{V}_{ijp}$ – вектор свободных членов и вектор поправок соответственно;

– матрица $\ddot{B}_{ijp}$ и вектор $\ddot{\delta}_{jp}$ имеют тот же смысл, что и в уравнении поправок (2.47) при построении звездной фототриангуляции и вычисляются по формулам (2.62) и (2.64).

Коэффициенты матриц частных производных $\dot{B}_{ijp}$ и $\hat{B}_{ijp}$ будут вычисляться по следующим формулам:

1. Случай $\rho_{ijp} = (r_1 r_2 r_3)_{ijp}$.

Коэффициенты матрицы $\dot{B}_{ijp}$ будут вычисляться:

$$\dot{B}_{ijp} = \frac{1}{\rho} \cdot U_{jp} \cdot \dot{W}_{ijp}, \quad (5.28)$$

где

$$U_{jp} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}_{jp}, \quad (5.59)$$

$$\dot{W}_{ijp} = \begin{bmatrix} A_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial X_0} & A_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial Y_0} & A_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial Z_0} \\ A_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial X_0} & A_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial Y_0} & A_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial Z_0} \\ A_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial X_0} & A_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial Y_0} & A_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial Z_0} \end{bmatrix}_{ijp} = \begin{bmatrix} \dot{w}_{11} & \dot{w}_{12} & \dot{w}_{13} \\ \dot{w}_{21} & \dot{w}_{22} & \dot{w}_{23} \\ \dot{w}_{31} & \dot{w}_{32} & \dot{w}_{33} \end{bmatrix}_{ijp}, \quad (5.30)$$

$$\left. \begin{aligned}
\dot{w}_{11} &= \frac{A_1}{\widetilde{A}_1} (-Y_S \Delta Z_{32} + Z_S \Delta Y_{32} - g_1) \\
\dot{w}_{12} &= \frac{A_1}{\widetilde{A}_1} (X_S \Delta Z_{32} + Z_S \Delta X_{23} - g_2) \\
\dot{w}_{13} &= \frac{A_1}{\widetilde{A}_1} (X_S \Delta Y_{23} - Y_S \Delta X_{23} - g_3) \\
\dot{w}_{21} &= \frac{A_2}{\widetilde{A}_2} (-Y_S \Delta Z_{31} + Z_S \Delta Y_{31} - e_1) \\
\dot{w}_{22} &= \frac{A_2}{\widetilde{A}_2} (X_S \Delta Z_{31} + Z_S \Delta X_{13} - e_2) \\
\dot{w}_{23} &= \frac{A_2}{\widetilde{A}_2} (X_S \Delta Y_{13} - Y_S \Delta X_{13} - e_3) \\
\dot{w}_{31} &= \frac{A_3}{\widetilde{A}_3} (Y_S \Delta Z_{12} + Z_S \Delta Y_{12} - h_1) \\
\dot{w}_{32} &= \frac{A_3}{\widetilde{A}_3} (X_S \Delta Z_{12} + Z_S \Delta X_{21} - h_2) \\
\dot{w}_{33} &= \frac{A_3}{\widetilde{A}_3} (X_S \Delta Y_{21} - Y_S \Delta X_{21} - h_3)
\end{aligned} \right\}_{ijp}. \quad (5.31)$$

В выражениях (5.31) через g_l, e_l, h_l ($l=1,2,3$) обозначены

$$\left. \begin{aligned}
g_1 &= Y_3 Z_2 - Z_3 Y_2; & g_2 &= X_2 Z_3 - X_3 Z_2; & g_3 &= X_3 Y_2 - Y_3 X_2; \\
e_1 &= Y_3 Z_1 - Z_3 Y_1; & e_2 &= X_1 Z_3 - X_3 Z_1; & e_3 &= X_3 Y_1 - Y_3 X_1; \\
h_1 &= Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2; & h_2 &= X_2 Z_1 - X_1 Z_2; & h_3 &= X_1 Y_2 - Y_1 X_2.
\end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Матрица частных производных $\hat{B}$ вычислится по формуле:

$$\hat{B}_{ijp} = \frac{1}{\rho} \cdot U_{jp} \cdot \hat{W}_{ijp} \quad (2,3) \quad (2,3) \quad (3,3) \quad (5.33)$$

где

$$\hat{W}_{ijp}^{(3,3)} = \begin{bmatrix} A_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial X_S} & A_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial Y_S} & A_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial Z_S} \\ A_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial X_S} & A_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial Y_S} & A_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial Z_S} \\ A_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial X_S} & A_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial Y_S} & A_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial Z_S} \end{bmatrix}_{ijp} = \begin{bmatrix} \hat{w}_{11} & \hat{w}_{12} & \hat{w}_{13} \\ \hat{w}_{21} & \hat{w}_{22} & \hat{w}_{23} \\ \hat{w}_{31} & \hat{w}_{32} & \hat{w}_{33} \end{bmatrix}_{ijp}, \quad (5.34)$$

(5.35)

$$\left. \begin{aligned} \hat{w}_{11} &= \frac{A_1}{\tilde{A}_1^2} [\tilde{A}_1 (Y_0 \Delta Z_{32} + Z_0 \Delta Y_{23} + g_1) - \tilde{A}_{10} (Y_4 \Delta Z_{32} + Z_4 \Delta Y_{23} + g_1)] \\ \hat{w}_{12} &= \frac{A_1}{\tilde{A}_1^2} [\tilde{A}_1 (-X_0 \Delta Z_{32} - Z_0 \Delta X_{23} + g_2) - \tilde{A}_{10} (-X_4 \Delta Z_{32} - Z_4 \Delta X_{23} + g_2)] \\ \hat{w}_{13} &= \frac{A_1}{\tilde{A}_1^2} [\tilde{A}_1 (X_0 \Delta Y_{32} + Y_0 \Delta X_{23} + g_3) - \tilde{A}_{10} (X_4 \Delta Y_{32} + Y_4 \Delta X_{23} + g_3)] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{w}_{21} &= \frac{A_2}{\tilde{A}_2^2} [\tilde{A}_2 (Y_0 \Delta Z_{31} + Z_0 \Delta Y_{13} + e_1) - \tilde{A}_{20} (Y_4 \Delta Z_{31} + Z_4 \Delta Y_{13} + e_1)] \\ \hat{w}_{22} &= \frac{A_2}{\tilde{A}_2^2} [\tilde{A}_2 (-X_0 \Delta Z_{31} - Z_0 \Delta X_{13} + e_2) - \tilde{A}_{20} (-X_4 \Delta Z_{31} - Z_4 \Delta X_{13} + e_2)] \\ \hat{w}_{23} &= \frac{A_2}{\tilde{A}_2^2} [\tilde{A}_2 (X_0 \Delta Y_{31} + Y_0 \Delta X_{13} + e_3) - \tilde{A}_{20} (X_4 \Delta Y_{31} + Y_4 \Delta X_{13} + e_3)] \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{w}_{31} &= \frac{A_3}{\tilde{A}_3^2} [\tilde{A}_3 (Y_0 \Delta Z_{12} + Z_0 \Delta Y_{21} + h_1) - \tilde{A}_{30} (Y_4 \Delta Z_{12} + Z_4 \Delta Y_{21} + h_1)] \\ \hat{w}_{32} &= \frac{A_3}{\tilde{A}_3^2} [\tilde{A}_3 (-X_0 \Delta Z_{12} - Z_0 \Delta X_{21} + h_2) - \tilde{A}_{30} (-X_4 \Delta Z_{12} - Z_4 \Delta X_{21} + h_2)] \\ \hat{w}_{33} &= \frac{A_3}{\tilde{A}_3^2} [\tilde{A}_3 (X_0 \Delta Y_{12} + Y_0 \Delta X_{21} + h_3) - \tilde{A}_{30} (X_4 \Delta Y_{12} + Y_4 \Delta X_{21} + h_3)] \end{aligned} \right\}.$$

(5.35)

2. Случай $\rho_{ijp} = A_{1jp}\xi_{1ijp} + A_{2jp}\xi_{2ijp} + A_{3jp}\xi_{3ijp}$.

Матрицы $\dot{B}_{ijp}$ и $\hat{B}_{ijp}$ определяются выражениями:

$$\dot{B}_{ijp} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \tilde{U}_{jp} \cdot \dot{V}_{ijp} \quad , \quad (5.36)$$

(2,3) (2,3) (3,3)

$$\hat{B}_{ijp} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \tilde{U}_{jp} \cdot \hat{V}_{ijp} \quad , \quad (5.37)$$

(2,3) (2,3) (3,3)

где

$$\tilde{U}_{jp} = \begin{bmatrix} \Delta x_{21} & \Delta x_{31} & \Delta x_{32} \\ \Delta y_{21} & \Delta y_{31} & \Delta y_{32} \end{bmatrix}_{jp} \quad , \quad (5.38)$$

$$\dot{V}_{ijp} = \begin{bmatrix} A_1\xi_1\dot{w}_{21} - A_2\xi_2\dot{w}_{11} & A_1\xi_1\dot{w}_{22} - A_2\xi_2\dot{w}_{12} & A_1\xi_1\dot{w}_{23} - A_2\xi_2\dot{w}_{13} \\ A_1\xi_1\dot{w}_{31} - A_3\xi_3\dot{w}_{11} & A_1\xi_1\dot{w}_{32} - A_3\xi_3\dot{w}_{12} & A_1\xi_1\dot{w}_{33} - A_3\xi_3\dot{w}_{13} \\ A_2\xi_2\dot{w}_{31} - A_3\xi_3\dot{w}_{21} & A_2\xi_2\dot{w}_{32} - A_3\xi_3\dot{w}_{22} & A_2\xi_2\dot{w}_{33} - A_3\xi_3\dot{w}_{23} \end{bmatrix} \quad , \quad (5.39)$$

(3,3)

$$\hat{V}_{ijp} = \begin{bmatrix} A_1\xi_1\hat{w}_{21} - A_2\xi_2\hat{w}_{11} & A_1\xi_1\hat{w}_{22} - A_2\xi_2\hat{w}_{12} & A_1\xi_1\hat{w}_{23} - A_2\xi_2\hat{w}_{13} \\ A_1\xi_1\hat{w}_{31} - A_3\xi_3\hat{w}_{11} & A_1\xi_1\hat{w}_{32} - A_3\xi_3\hat{w}_{12} & A_1\xi_1\hat{w}_{33} - A_3\xi_3\hat{w}_{13} \\ A_2\xi_2\hat{w}_{31} - A_3\xi_3\hat{w}_{21} & A_2\xi_2\hat{w}_{32} - A_3\xi_3\hat{w}_{22} & A_2\xi_2\hat{w}_{33} - A_3\xi_3\hat{w}_{23} \end{bmatrix} \quad . \quad (5.40)$$

(3,3)

Матрицы $\dot{V}_{ijp}$ и $\hat{V}_{ijp}$ очень схожи, они идентичны и отличаются только тем, что в одной используются коэффициенты матрицы $\dot{W}_{ijp}$, а в другой – $\hat{W}_{ijp}$. Коэффициенты этих матриц определяются соответственно формулами (5.30) и (5.34).

Можно составить уравнение поправок аналогичное уравнению (5.23) и для опорной точки. При этом данная опорная точка не долж-

на участвовать в формировании опорной группы. В качестве такой точки можно выбрать опорную точку, которая не подходит для формирования опорной группы точек, например, располагается в центральной части снимка. Уравнение поправок для s -ой опорной точки, изобразившейся на p -ом снимке и не входящей в j -ю опорную группу точек данного снимка, представим в следующем виде:

$$\hat{\tilde{B}}_{sjp} \hat{\tilde{\delta}}_p + \tilde{B}_{sjp} \ddot{\tilde{\delta}}_{jp} = \tilde{\varepsilon}_{sjp} + \tilde{V}_{sjp}. \quad (5.41)$$

$(2,3) \quad (3,1) \quad (2,8) \quad (8,1) \quad (2,1) \quad (2,1)$

Матрицы $\hat{\tilde{B}}_{sjp}$ и $\tilde{B}_{sjp}$ определяются аналогично матрицам $\hat{B}_{ijp}$ и B_{ijp}

$(2,3) \quad (2,8) \quad (2,3) \quad (2,8)$

$\ddot{B}_{ijp}$ в уравнении (5.23) с тем лишь отличием, что матрицы $\hat{\tilde{B}}_{sjp}$ и $\tilde{B}_{sjp}$

$(2,8) \quad (2,3) \quad (2,8)$

вычисляются по опорным точкам. Векторы $\hat{\tilde{\delta}}_p$ и $\ddot{\tilde{\delta}}_{jp}$ – векторы поправок в координаты центра съемки и координаты изображений опорных точек.

Совокупность всех возможных уравнений поправок вида (5.23) и (5.41) будет представлять собой математическую модель, описывающую сумму проективных преобразований, возникающих при построении и уравнивании фототриангуляции, только по результатам измерений изображений (снимков). Данный способ, как известно, позволяет совместно с фотограмметрическими измерениями уравнивать геодезические и бортовые измерения [46]. Существенный интерес представляет учет бортовых, спутниковых GPS/ГЛОНАСС-измерений.

§ 5.6. Уравнения поправок

Неизвестные, входящие в уравнения поправок фототриангуляции (5.23) и (5.41), составляют три группы. Предположим, что имеются некоторые априорные значения определяемых величин. Определим уравнения поправок для каждой группы уточняемых параметров.

Прежде всего рассмотрим уравнение поправок для второй группы неизвестных – координат центра проекции, то есть рассмотрим возможность учета бортовых GPS/ГЛОНАСС-измерений.

Спутниковое геодезическое оборудование позволяет получать координаты и составляющие скорости на некоторый момент времени. В нашем случае будем рассматривать только координаты. Пусть:

$X_{SP}^{GPS}, Y_{SP}^{GPS}, Z_{SP}^{GPS}$ – координаты p -го центра фотографирования, полученные GPS-приемником;

$X_{SP}^0, Y_{SP}^0, Z_{SP}^0$ – приближенные (предварительные) значения линейных элементов внешнего ориентирования;

X_{SP}, Y_{SP}, Z_{SP} – истинные значения линейных элементов внешнего ориентирования, то есть координаты центра съемки.

Априорным значениям координат центра съемки p -го снимка поставим в соответствие уравнения поправок:

$$\begin{aligned} X_{SP} &= X_{SP}^0 + \delta X_{SP} = X_{SP}^{GPS} + v_{x_{sp}}; \dots\dots\dots X_{SP}^0 - X_{SP}^{GPS} = v_{x_{sp}} - \delta X_{SP}; \\ Y_{SP} &= Y_{SP}^0 + \delta Y_{SP} = Y_{SP}^{GPS} + v_{y_{sp}}; \dots\dots\text{или} \dots\dots Y_{SP}^0 - Y_{SP}^{GPS} = v_{y_{sp}} - \delta Y_{SP}; \\ Z_{SP} &= Z_{SP}^0 + \delta Z_{SP} = Z_{SP}^{GPS} + v_{z_{sp}}; \dots\dots\dots Z_{SP}^0 - Z_{SP}^{GPS} = v_{z_{sp}} - \delta Z_{SP}. \end{aligned}$$

В матричной форме эти выражения представим в следующем виде:

$$\hat{\bar{V}}_{(3,1)p} - \hat{\delta}_{(3,1)p} = \hat{\bar{C}}_{(3,1)p}, \quad p = 1, 2, \dots, N, \quad (5.42)$$

где $\hat{\bar{V}}_{(3,1)p}$ – вектор поправок к предварительным значениям координат

центра фотографирования $X_{SP}^0, Y_{SP}^0, Z_{SP}^0$;

$$\hat{\bar{V}}_{(3,1)p} = \begin{bmatrix} v_{X_s} \\ v_{Y_s} \\ v_{Z_s} \end{bmatrix}_p \quad - \text{вектор поправок в измеренные} \quad (5.43)$$

значения координат центра съемки $X_{SP}^{GPS}, Y_{SP}^{GPS}, Z_{SP}^{GPS}$;

$$\hat{\bar{C}}_{(3,1)i} = \begin{bmatrix} X_{SP}^0 - X_{SP}^{GPS} \\ Y_{SP}^0 - Y_{SP}^{GPS} \\ Z_{SP}^0 - Z_{SP}^{GPS} \end{bmatrix} \quad - \text{вектор свободных членов.} \quad (5.44)$$

Координатам центра фотографирования, полученным из спутниковых определений, можно поставить в соответствии некоторую ковариационную матрицу [51], соответствующую уравнению поправок (5.42):

$$\hat{K}_{(3,3)p} = \begin{bmatrix} q_{X_s X_s} & q_{X_s Y_s} & q_{X_s Z_s} \\ q_{X_s Y_s} & q_{Y_s Y_s} & q_{Y_s Z_s} \\ q_{X_s Z_s} & q_{Y_s Z_s} & q_{Z_s Z_s} \end{bmatrix}_p. \quad (5.45)$$

Весовая матрица соответственно определится: $\hat{P}_{(3,3)} = \hat{K}_{(3,3)}^{-1}$.

Уравнение поправок, соответствующие первой и третьей группе уточняемых параметров представим по аналогии с уравнениями (3.7) и (3.12) учитывая изменение размерности векторов $\dot{\bar{V}}_i, \dot{\bar{\delta}}_i, \dot{\bar{C}}_i$ и весовой матрицы $\dot{P}_i$.

Первой группе неизвестных будет соответствовать уравнение поправок:

$$\dot{\bar{V}}_i - \dot{\bar{\delta}}_i = \dot{\bar{C}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (5.46)$$

где $\dot{\bar{\delta}}_i$ – вектор поправок к предварительным значениям координат

определяемой точки $X_{0i}^0, Y_{0i}^0, Z_{0i}^0$;

$$\dot{\bar{V}}_i = \begin{bmatrix} \nu_{X_0} \\ \nu_{Y_0} \\ \nu_{Z_0} \end{bmatrix}_i - \text{вектор поправок в измеренные значения} \quad (5.47)$$

координат $\tilde{X}_{0i}, \tilde{Y}_{0i}, \tilde{Z}_{0i}$;

$$\dot{\bar{C}}_i = \begin{bmatrix} X_{0i}^0 - \tilde{X}_{0i} \\ Y_{0i}^0 - \tilde{Y}_{0i} \\ Z_{0i}^0 - \tilde{Z}_{0i} \end{bmatrix} - \text{вектор свободных членов.} \quad (5.48)$$

Ковариационная матрица, соответствующая уравнению поправок (5.46), будет иметь вид:

$$\dot{\mathbf{K}}_{(3,3)} = \begin{bmatrix} q_{X_0 X_0} & q_{X_0 Y_0} & q_{X_0 Z_0} \\ q_{X_0 Y_0} & q_{Y_0 Y_0} & q_{Y_0 Z_0} \\ q_{X_0 Z_0} & q_{Y_0 Z_0} & q_{Z_0 Z_0} \end{bmatrix}, \quad (5.49)$$

а весовая матрица

$$\dot{P}_{(3,3)} = \dot{\mathbf{K}}_{(3,3)}^{-1}. \quad (5.50)$$

Сети, состоящей из k точек, соответствует система уравнений поправок

$$\dot{\bar{V}}_{(3k,1)} - \dot{\bar{\delta}}_{(3k,1)} = \dot{\bar{C}}_{(3k,1)}. \quad (5.51)$$

При этом корреляция между координатами точек практически отсутствует, потому ковариационная матрица для k точек сети будет иметь диагональный вид, то есть

$$\dot{\mathbf{K}}_{(3k,3k)} = \text{diag} \left(\dot{\mathbf{K}}_{(3,3)}^1, \dot{\mathbf{K}}_{(3,3)}^2, \dots, \dot{\mathbf{K}}_{(3,3)}^k \right). \quad (5.52)$$

Точно так же весовая матрица будет диагональной:

$$\dot{P}_{(3k,3k)} = \dot{\mathbf{K}}_{(3k,3k)}^{-1} = \text{diag} \left(\dot{P}_{(3,3)}^1, \dot{P}_{(3,3)}^2, \dots, \dot{P}_{(3,3)}^k \right). \quad (5.53)$$

Третьей группе неизвестных будет соответствовать уравнение поправок, аналогичное уравнению (3.12):

$$\ddot{\bar{V}}_{(8,1)}^j - \ddot{\bar{\delta}}_{(8,1)}^j = \ddot{\bar{C}}_{(8,1)}^j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (5.54)$$

где $\ddot{\bar{\delta}}_{(8,1)}^j$ – вектор поправок (2.47) в предварительные значения

координат $\tilde{x}_{lj}^0, \tilde{y}_{lj}^0$ опорных точек j -ой опорной группы; $\ddot{\bar{V}}_{(8,1)}^j$ – вектор

поправок в измеренные на снимке координаты $\tilde{x}_{lj}, \tilde{y}_{lj}$ ($\ell = 1, 2, 3, 4$) опорных точек j -ой группы (3.13); $\ddot{\bar{C}}_j$ _(8,1) – вектор свободных членов (3.13).

Ковариационная матрица $\ddot{\bar{K}}_j$ _(8,8), соответствующая уравнению поправок (5.54), имеет диагональный вид и определяется формулой (3.14), а весовая $\ddot{P}_j$ _(8,8) матрица, также диагональная, определяется формулой (3.15).

§ 5.7. Структура системы нормальных уравнений фототриангуляции

Основные конструктивные блоки системы нормальных уравнений, возникающей в фототриангуляции, как и ранее, определим посредством составления формальных систем нормальных уравнений (см. раздел 3.2).

Формальную систему нормальных уравнений, соответствующую уравнению (5.23), запишем в виде:

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}_{ijp} & \hat{Q}_{ijp} & \bar{Q}_{ijp} \\ (3,3) & (3,3) & (3,8) \\ \hat{Q}_{ijp}^T & \hat{Q}_{ijp} & \hat{Q}_{ijp} \\ (3,3) & (3,3) & (3,8) \\ \bar{Q}_{ijp}^T & \hat{Q}_{ijp}^T & \ddot{Q}_{ijp} \\ (8,3) & (8,3) & (8,8) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\delta}_i \\ (3,1) \\ \hat{\delta}_p \\ (3,1) \\ \ddot{\delta}_{jp} \\ (8,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{ijp} \\ (3,1) \\ \hat{\varepsilon}_{ijp} \\ (3,1) \\ \ddot{\varepsilon}_{ijp} \\ (8,1) \end{bmatrix}. \quad (5.55)$$

Блоки $\dot{Q}_{ijp}$, $\hat{Q}_{ijp}$, $\ddot{Q}_{ijp}$, $\hat{\bar{Q}}_{ijp}$, $\bar{Q}_{ijp}$, $\dot{\bar{Q}}_{ijp}$, $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ijp}$, $\hat{\bar{\varepsilon}}_{ijp}$, $\ddot{\bar{\varepsilon}}_{ijp}$ определяются

следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{Q}_{ijp} &= \dot{B}_{ijp}^T \cdot P_{ip} \cdot \dot{B}_{ijp} ; & \hat{Q}_{ijp} &= \dot{B}_{ijp}^T \cdot P_{ip} \cdot \hat{B}_{ijp} ; & \dot{\bar{\varepsilon}}_{ijp} &= \dot{B}_{ijp}^T \cdot P_{ip} \cdot \bar{\varepsilon}_{ijp} ; \\ (3,3) & (3,2) (2,2) (2,3) & (3,3) & (3,2) (2,2) (2,3) & (3,1) & (3,2) (2,2) (2,1) \\ \hat{Q}_{ijp} &= \hat{B}_{ijp}^T \cdot P_{ip} \cdot \hat{B}_{ijp} ; & \hat{\bar{Q}}_{ijp} &= \hat{B}_{ijp}^T \cdot P_{ip} \cdot \hat{B}_{ijp} ; & \hat{\bar{\varepsilon}}_{ijp} &= \hat{B}_{ijp}^T \cdot P_{ip} \cdot \bar{\varepsilon}_{ijp} ; \\ (3,3) & (3,2) (2,2) (2,3) & (3,8) & (3,2) (2,2) (2,8) & (3,1) & (3,2) (2,2) (2,1) \\ \ddot{Q}_{ijp} &= \ddot{B}_{ijp}^T \cdot P_{ip} \cdot \ddot{B}_{ijp} ; & \bar{Q}_{ijp} &= \hat{B}_{ijp}^T \cdot P_{ip} \cdot \ddot{B}_{ijp} ; & \ddot{\bar{\varepsilon}}_{ijp} &= \ddot{B}_{ijp}^T \cdot P_{ip} \cdot \bar{\varepsilon}_{ijp} ; \\ (8,8) & (8,2) (2,2) (2,8) & (3,8) & (3,2) (2,2) (2,8) & (8,1) & (8,2) (2,2) (2,1) \end{aligned} \right\} (5.56)$$

Формальную систему нормальных уравнений, соответствующую уравнению (5.41), представим в виде:

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{Q}}_{sjp} & \widetilde{\bar{Q}}_{sjp} \\ (3,3) & (3,8) \\ \widetilde{\bar{Q}}_{sjp}^T & \widetilde{\bar{Q}}_{sjp} \\ (8,3) & (8,8) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{\bar{\delta}}_p \\ (3,1) \\ \widetilde{\bar{\delta}}_{jp} \\ (8,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\bar{\varepsilon}}_p \\ (3,1) \\ \widetilde{\bar{\varepsilon}}_{jp} \\ (8,1) \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Блоки $\hat{\bar{Q}}_{sjp}$, $\widetilde{\bar{Q}}_{sjp}$, $\widetilde{\bar{Q}}_{sjp}$, $\hat{\bar{\varepsilon}}_{sjp}$, $\widetilde{\bar{\varepsilon}}_{sjp}$ определяются следующими вы-

ражениями:

$$\left. \begin{aligned} \hat{\bar{Q}}_{sjp} &= \hat{B}_{sjp}^T \tilde{P}_{sp} \hat{B}_{sjp} ; & \hat{\bar{\varepsilon}}_{sjp} &= \hat{B}_{sjp}^T \tilde{P}_{sp} \widetilde{\bar{\varepsilon}}_{sjp} ; \\ (3,3) & (3,2) (2,2) (2,3) & (3,1) & (3,2) (2,2) (2,1) \\ \widetilde{\bar{Q}}_{sjp} &= \widetilde{\bar{B}}_{sjp}^T \tilde{P}_{sp} \widetilde{\bar{B}}_{sjp} ; & \widetilde{\bar{\varepsilon}}_{sjp} &= \widetilde{\bar{B}}_{sjp}^T \tilde{P}_{sp} \widetilde{\bar{\varepsilon}}_{sjp} ; \\ (8,8) & (8,2) (2,2) (2,8) & (8,1) & (8,2) (2,2) (2,1) \\ \widetilde{\bar{Q}}_{sjp} &= \hat{B}_{sjp}^T \tilde{P}_{sp} \widetilde{\bar{B}}_{sjp} ; \\ (3,8) & (3,2) (2,2) (2,8) \end{aligned} \right\} (5.58)$$

Следует отметить, что некоторые конструктивные блоки в выражениях (5.56) и (5.58) определяются, так же, как и в случае звездной фототриангуляции. Блоки $\tilde{\dot{Q}}_{sjp}$, $\tilde{\dot{\varepsilon}}_{sjp}$ в выражении (5.58) определяются, аналогично формулам (3.29), а блоки $\dot{Q}_{ijp}$, $\ddot{Q}_{ijp}$, $\bar{Q}_{ijp}$ и векторы $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ijp}$, $\ddot{\bar{\varepsilon}}_{ijp}$ в выражениях (5.56) определяются аналогично формулам (3.26). При этом необходимо учесть изменение размерностей матриц частных производных $\dot{B}$, $\ddot{B}$.

$$\begin{matrix} \tilde{\dot{Q}}_{sj} &= & \tilde{\dot{B}}^T_{sj} & \tilde{P}_s & \tilde{\dot{B}}_{sj} &; & \tilde{\dot{\varepsilon}}_{sj} &= & \tilde{\dot{B}}^T_{sj} & \tilde{P}_s & \bar{\varepsilon}_{sj} &.; \\ (8,8) & & (8,2) & (2,2) & (2,8) & & (8,1) & & (8,2) & (2,2) & (2,1) \end{matrix} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{ij} &= \dot{B}^T_{ij} P_i \dot{B}_{ij} ; & \dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} &= \dot{B}^T_{ij} P_i \bar{\varepsilon}_{ij} ; \\ (2,2) & (2,2) (2,2) (2,2) & (2,1) & (2,2) (2,2) (2,1) \\ \ddot{Q}_{ij} &= \ddot{B}^T_{ij} P_i \ddot{B}_{ij} ; & \ddot{\bar{\varepsilon}}_{ij} &= \ddot{B}^T_{ij} P_i \bar{\varepsilon}_{ij} ; \\ (8,8) & (8,2) (2,2) (2,8) & (8,1) & (8,2) (2,2) (2,1) \\ Q_{ij} &= \dot{B}^T_{ij} P_i \dot{B}_{ij} . \\ (2,8) & (2,2) (2,2) (2,8) \end{aligned} \quad (5.60)$$

В наиболее общем случае система нормальных уравнений, составленная для всех точек, измеренных на N -снимках блока фототриангуляции, с учетом иных (не фотограмметрических) измерений будет иметь структуру представленную выражением (5.61):

[illegible]

Блоки $\hat{\mathcal{Q}}_{ip}, \hat{\mathcal{Q}}_p, \ddot{\mathcal{Q}}_p, \hat{\hat{\mathcal{E}}}_p$ определяются формулами:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{Q}}_{ip} &= \sum_{j=1}^{m_p} \hat{\mathcal{Q}}_{ijp}; \\
 \hat{\mathcal{Q}}_p &= \sum_{j=1}^{m_p} \sum_{i=1}^{k_p} \hat{\mathcal{Q}}_{ijp} + \sum_{j=1}^{m_p} \sum_{S=1}^{n_p-4} \hat{\hat{\mathcal{Q}}}_{Sjp}; \\
 \hat{\hat{\mathcal{E}}}_p &= \sum_{j=1}^{m_p} \sum_{i=1}^{k_p} \hat{\hat{\mathcal{E}}}_{ijp} + \sum_{j=1}^{m_p} \sum_{S=1}^{n_p-4} \hat{\hat{\hat{\mathcal{E}}}}_{Sjp}; \\
 \hat{\mathcal{Q}}_{jp} &= \sum_{i=1}^{k_p} \hat{\mathcal{Q}}_{ijp} + \sum_{S=1}^{n_p-4} \widetilde{\mathcal{Q}}_{Sjp}.
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

Для блоков $\hat{\mathcal{Q}}_p, \hat{\hat{\mathcal{E}}}_p$ первое суммирование выполняется по номерам определяемых точек, второе суммирование по номерам опорных групп p -го снимка. Для блоков $\hat{\hat{\mathcal{Q}}}_{Sjp}, \hat{\hat{\hat{\mathcal{E}}}}_{Sjp}$ первое суммирование выполняется по номерам опорных точек, не вошедших в j -ю опорную группу p -го снимка, второе суммирование по номерам опорных групп. Блоки $\hat{\mathcal{Q}}_{ijp}, \hat{\mathcal{Q}}_{jp}, \widetilde{\mathcal{Q}}_{Sjp}$ суммируются соответственно по номерам опорных групп, номерам определяемых точек и номерам опорных точек, не вошедших в j -ю опорную группу p -го снимка.

Порядок β системы нормальных уравнений определится формулой

$$\beta = 3 \cdot (K + N) + 8m, \tag{5.63}$$

где K – общее количество определяемых точек; N – количество снимков в фототриангуляции; M – общее количество опорных групп на всех снимках.

В частном случае, когда поправки в измеренные координаты изображений точек, составивших опорные группы не определяются, количество неизвестных – определяемых параметров существенно уменьшается. Тогда определяемыми параметрами являются ординаты точек сети сгущения и координаты центров съемки, при этом, выполняется учет бортовых, спутниковых (ГЛОНАСС/GPS) измерений. Структура системы нормальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{Q}_1 + \dot{P}_1 & 0 & \dots & 0 & \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \dots & \hat{Q}_{1N} \\ 0 & \dot{Q}_2 + \dot{P}_2 & \dots & 0 & \hat{Q}_{21} & \hat{Q}_{22} & \dots & \hat{Q}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dot{Q}_K + \dot{P}_K & \hat{Q}_{K1} & \hat{Q}_{K2} & \dots & \hat{Q}_{KN} \\ \hat{Q}_{11}^T & \hat{Q}_{21}^T & \dots & \hat{Q}_{K1}^T & \hat{Q}_1 + \hat{P}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{Q}_{12}^T & \hat{Q}_{22}^T & \dots & \hat{Q}_{K2}^T & 0 & \hat{Q}_2 + \hat{P}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{Q}_{1N}^T & \hat{Q}_{2N}^T & \dots & \hat{Q}_{KN}^T & 0 & 0 & \dots & \hat{Q}_N + \hat{P}_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\delta}_K \\ \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\delta}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 - \dot{P}_1 \dot{\bar{C}}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 - \dot{P}_2 \dot{\bar{C}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\varepsilon}_K - \dot{P}_K \dot{\bar{C}}_K \\ \hat{\varepsilon}_1 - \hat{P}_1 \hat{\bar{C}}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 - \hat{P}_2 \hat{\bar{C}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_N - \hat{P}_N \hat{\bar{C}}_N \end{bmatrix}.$$

Порядок β системы нормальных уравнений в этом случае определится формулой

$$\beta = 3 \cdot (K + N). \quad (5.64)$$

Прямое решение системы нормальных уравнений представляется нецелесообразным, поскольку матрица содержит

квазидиагональные блоки. Поэтому решения такой системы уравнений потребуют оптимальный алгоритм, аналогичный алгоритму решения системы уравнений, как в случае аналитической фототриангуляции для изображений звездного неба.

Заключение

В монографии рассмотрены и исследованы возможности применения инвариантов проективной геометрии (двойного отношения, проективных координат) для решения некоторых задач фотограмметрии.

Использование проективных координат позволяет решать задачу обработки снимка (изображения) без знания элементов внутреннего ориентирования, а также, без угловых элементов внешнего ориентирования снимка. Кроме того, задача обработки изображения может быть решена в неортогональном базисе.

Известен ряд методов, основанных на использовании проективных координат и двойного отношения: метод Ванн Гента, А.А. Киселева, Ю.М. Трунина и т. д. Векторная интерпретация инвариантов проективной геометрии данная Ю.М. Труниным, позволила ему построить алгоритмы обработки различных снимков (звездных, наземных, аэроснимков). Но строгое и изящное геометрическое решение прямой и обратной задач фотограмметрии не было подкреплено возможностями уравнительных вычислений, в частности, возможностями метода наименьших квадратов (МНК). Это фактически явилось существенным недостатком предложенных процедур.

Одной из основных целей данной работы являлось решение задачи применения метода математической статистики, в частности, метода наименьших квадратов (МНК), при обработке снимков (изображений) с использованием векторной интерпретации инвариантов проективной геометрии.

В монографии показано, что уравнение коллинеарности, записанное через проективные координаты, фактически позволяет строить алгоритмы обработки снимков (изображений) используя уравнительные вычисления по методу наименьших квадратов.

В работе представлен ряд алгоритмов по обработке одиночных и перекрывающихся снимков (изображений) с применением МНК: одиночного изображения звездного неба; определения собственных движений звезд; звездной фототриангуляции; одиночного наземного и аэроснимка; аэрофототриангуляции.

При этом необходимо отметить, что алгоритм построения и уравнивания аналитической аэрофототриангуляции на основе проективных координат, так же, как и в классическом случае, позволяет учитывать не только фотограмметрические измерения. В частности, что особенно важно в современных условиях, алгоритм позволяет учитывать спутниковые геодезические измерения.

В монографии представлены оптимальные алгоритмы решения систем уравнений, как для случаев обработки серии перекрывающихся снимков, так и для обработки одиночного снимка. Для всех рассматриваемых случаев определены структуры матриц нормальных уравнений. Алгоритмы проверены на макетном материале и на реальных снимках (изображения звездного неба, аэрофотоснимки).

Необходимо отметить следующее: позволяя выполнять обработку изображений, в том числе и перекрывающихся, без знания элементов внутреннего ориентирования, и углов ориентирования, тем не менее, применение инвариантов проективной геометрии накладывает существенные требования к геометрии опоры и предполагает полное отсутствие искажений нелинейного характера (дисторсии).

Учет дисторсии, в принципе, не является препятствием к применению предложенных методов, дисторсия всегда учитывается. Требования, предъявляемые к опоре – более существенный фактор, но фотографирование с большим перекрытием, может позволить разработанным алгоритмам найти определенное место в обработке изображений.

Список литературы

1. *Алексашин Е.П., Тимофеев Ю.С., Ширенин А.М.* Построение селенодезической сети по материалам съемок с КА «Зонд-8» // Селенодезия и динамика Луны: сб. научн. тр. Главная астрономическая обсерватория. Киев: Наукова думка, 1990. С. 80–90.
2. *Агапов С.В.* Фотограмметрия сканерных снимков. М.: Картогеоцентр – Геодезиздат, 1996. 176 с.
3. *Баранов В.Н., Бойко Е.Г., Краснорылов И.И. и др.* Космическая геодезия. М.: Недра, 1986. 407 с.
4. *Большаков В.Д., Журкин И.Г., Могилин А.О.* Современное состояние и перспективы развития астрономического обеспечения космической навигации // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1983. № 5. С. 18–25.
5. *Блажко С.Н.* Курс практической астрономии. М.: Наука, 1979. 432 с.
6. *Богуславская Е.Я.* Фотографическая астрометрия. М.-Л.: Гос-техиздат, 1974. 342 с.
7. *Буров М.И., Трунин Ю.М., Алешников Э.Ф.* Обработка стереопары проективно-преобразованных снимков с известными центрами проектирования // Геодезия и картография, 1975. № 8. С. 44–47.
8. *Буров М.И., Нефедов В.И., Трунин Ю.М., Алешников Э.Ф.* К вопросу обработки стереопары проективно-преобразованных снимков с неизвестными центрами проектирования // Известия вузов, 1975. № 4. С. 59–65.

9. Буров М.И., Трунин Ю.М., Робиташвили И.Ф. Определение центра фотографирования по данным опоры и результатам измерений проективно-преобразованного снимка // Фотограмметрия в горном деле. Свердловск, 1976. С. 17–26.
10. Буземан Г.Б., Келли П.Д. Проективная геометрия и проективные метрики // Известия иностранной литературы, 1957. 410 с.
11. Блажко С.Н. Курс сферической астрономии. М.: Гостехиздат, 1954. 332 с.
12. Безменов В.М. Алгоритмы уравнительных вычислений при проективных преобразованиях астронегатива // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1991. № 3. С. 64–73.
13. Безменов В.М. Некоторые результаты исследований алгоритмов уравнительных вычислений при проективных преобразованиях астронегативов // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1991. № 6. С. 84–89.
14. Безменов В.М. Построение и уравнивание астрометрических сетей с использованием проективных преобразований // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1994. № 2–3. С. 117–128.
15. Безменов В.М. Результаты исследования метода построения и уравнивания астрометрических сетей, основанного на использовании проективных преобразований // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1994. № 5. С. 103–110.
16. Безменов В.М. Проективные преобразования двух плоских полей по методу наименьших квадратов // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1994. № 6. С. 93–98.

17. *Безменов В.М.* определение собственных движений звезд из обработки проективно-преобразованных снимков // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1996. № 1–2. С. 46–59.
18. *Безменов В.М., Савельев А.А., Хамзин Р.Х.* Некоторые практические и теоретические аспекты обработки одиночного неметрического снимка // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1998. № 2. С. 98–105.
19. *Безменов В.М.* Структура системы нормальных уравнений при построении и уравнивании аналитической фототриангуляции. Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 2002. № 4. С. 98–111.
20. *Бочкарев Н.Г., Кузнецова Е.В., Куимов К.В.* Опыт исследования широкоугольного астрономического объектива, основанного на расчете его характеристик // Астрометрия и астрофизика, 1979. Вып. 38. С. 56–61.
21. *Варин М.П., Крайнин Е.И., Поттер Х.И.* О формулах учета дифференциальной рефракции и аберрации // Известия ГАО в Пулкове, 1968. № 183. С. 91–104.
22. *Георгиев Н.И., Масевич А.Г. и др.* Использование оптических наблюдений искусственных спутников Земли для геодезии. София: Изд-во Болгарской Академии наук, 1979.
23. *Губанова Е.П.* Некоторые результаты исследования проективного метода редукции астронегативов // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1978. № 3. С. 47–52.
24. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Гостехиздат, 1951. 259 с.

25. *Глаголев Н.А.* Проективная геометрия. М.-Л.: ОНТИ, 1963. 344 с.
26. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М.-Л.: ОГИЗ, 1948. 480 с.
27. *Гольцман Ф.М.* Физический эксперимент и статистические выводы. Л.: ЛГУ, 1982. 192 с.
28. *Гольцман Ф.М.* Статистические модели интерпретации. М.: Наука, 1971. 327 с.
29. *Губанова Е.П.* Применение теории проективных преобразований при обработке фотографических наблюдений ИСЗ и звезд: дис. ... канд. техн. наук. М., 1982. 188 с.
30. *Дума Д.П.* О перспективах определения точных угловых координат искусственных небесных тел фотографическим способом. Проблемы астрометрии: тр. 22-й Астрометр. конф. СССР. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 244–247.
31. *Дейч А.Н.* К вопросу о редукции фотографических положений при произвольном оптическом центре // *Астрономический журнал*, 1965. Т. 42. С. 1114–1116.
32. *Дубнов Я.С.* Основы векторного исчисления. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. Ч. 1.
33. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. М.: Наука, 1978. 576 с.
34. *Зверев М.С.* Астрометрия в новых условиях // *Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка*, 1976. № 5. С. 57–82.
35. *Игнациус Г.И.* Проективная геометрия. М.: Знание, 1966.
36. *Изотов А.А., Зубинский В.И., Макаренко Н.Л., Микиша А.М.* Основы спутниковой геодезии. М.: Недра, 1974. 381 с.

37. *Краснорылов И.И., Урмаев М.С.* К теории пространственно-временной привязки результатов космической съемки // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1976. № 4. С. 91–101.
38. *Киселев А.А.* Теоретические основы фотографической астрометрии. // Проблемы астрометрии: тр. 22-й Астрометр. конф. СССР. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 44–56.
39. *Кислюк В.С., Семеренко Р.Л.* Определение ориентировки Луны по наземным фотографическим наблюдениям // Селенодезия и динамика Луны: сб. научн. тр. Главная астрономическая обсерватория. Киев: Наукова думка, 1990. С. 99–104.
40. *Киселев А.А.* Теоретические основы фотографической астрометрии. М.: Наука, 1989, 264 с.
41. Курс астрофизики и звездной астрономии / под ред. А.А. Михайлова. Т. 1. М.: Наука, 1973. 608 с.
42. *Клейн Ф.* Высшая геометрия. М.-Л.: ГОНТИ, 1939. 399 с.
43. *Киселев А.А.* Интерполяционный метод определения положений небесного объекта на фотографии // Астрономический журнал, 1950. Т. 36. Вып. 2. С. 348–360.
44. *Кисилев А.А.* Векторная интерпретация основных методов фотографической астрометрии // Астрономический журнал, 1965. Т. 42. Вып. 2. С. 452–463.
45. *Киселев А.А., Кияева О.В., Калинин О.А.* Геометрический метод астрометрической редукции фотографий и его применение для широкоугольных камер // Известия ГАО в Пулкове, 1976. № 194. С. 149–157.

46. *Киселев А.А., Кияева О.В.* Результаты калибровки широкоугольных астрографов и короткофокусных камер на основе геометрического метода // Известия ГАО в Пулкове, 1985. № 203. С. 59–64.
47. *Киселев А.А.* Применение гомографии в фотографической астрометрии // Астрономический журнал, 1965. Т. 42. Вып. 4. С. 831–844.
48. *Коган В.Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. М. Л.: Гостехиздат, 1947. Ч. 1. 512 с.
49. *Киселев А.А.* Алгоритм метода гомографических координат для определения положения небесного объекта по четырем опорным звездам с учетом дифференциальной рефракции. Методы вычислений топоцентрических координат искусственных спутников Земли по их фотографическим наблюдениям. М.: Интеркосмос, 1969. С. 59–67.
50. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1978. 832 с.
51. *Коугия В.А.* О корреляции приращений координат, вычисленных по результатам спутниковых измерений // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 2009. № 4. С. 3–6.
52. *Клейн Ф.* Неевклидова геометрия. М.-Л.: ГОНТИ, 1936. 206 с.
53. *Кантарович Л.В.* О методе Ньютона: труды математического института им. В.А. Стеклова, 1949. Вып. 28. С. 63–74.
54. *Калантаров Е.И.* Решение обратной и прямой фотограмметрической засечки по проективным снимкам // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, № 19. С. 72–76.
55. *Лобанов А.Н.* Фотограмметрия. М.: Недра, 1984. 552 с.

56. Лобанов А.Н., Калантаров Е.И., Чибуничев А.Г. Построение и уравнивание фотограмметрических сетей методом блочной модели // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1982. № 5. С. 87–92.
57. Лобанов А.Н., Дубиновский В.Б., Машимов М.М., Овсяников Р.П. Аналитическая пространственная фототриангуляция. М.: Недра, 1991. 255 с.
58. Муравьев М.С. Начертательная и проективная геометрия. М.: Геодезиздат, 1960. 284 с.
59. Маневич В.А., Котов И.И., Зенгин А.Р. Аналитическая геометрия с теорией изображений. М.: Высшая школа, 1969. 304 с.
60. Маркузе Ю.И. Алгоритмы для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ. М.: Недра, 1989, 248 с.
61. Немиро А.А., Губанов В.С. Научно-техническая революция и астрометрия // Проблемы астрометрии: тр. 22-й Астрометр. конф. СССР. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. С. 13–22.
62. Нефедьев Ю.А., Безменов В.М. Обработка классических гелиометрических рядов с использованием помехоустойчивого статистического анализа // Известия АОЭ. Казань, 1990. № 55. С. 110–117.
63. Плахов Ю.В., Урмаев М.С. Перспективы развития космической геодезии и космической фотограмметрии // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1987. № 4. С. 3–14.
64. Подобед В.В., Нестеров В.В. Общая астрометрия. М.: Наука, 1982. 576 с.
65. Подобед В.В. Фундаментальная астрометрия. Установление фундаментальной системы небесных координат. М.: Наука, 1968. 452 с.

66. Пособие по фотограмметрии / под ред. В.И. Кораблева. М.: Недра, 1970. 271 с.
67. *Поттер Х.И.* Методы обработки фотографических наблюдений Луны, ведущихся с помощью камеры Марковица в Пулкове: труды 14-й Астрометр. конф. СССР. М.-Л., 1960. С. 385–394.
68. *Рахимов Л.И., Ризванов Н.Г.* Исследование селенодезических каталогов по фотографическим наблюдениям Луны со звездами // Селенодезия и динамика Луны: сб. научн. тр., Главная астрометрическая обсерватория. Киев: Наукова думка, 1990. С. 118–121.
69. *Родин С.П.* Калибровка широкоугольных астрографов по результатам фотограмметрической обработки астронегативов с использованием математических моделей радиальной дисторсии и дисторсии децентрации // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1987. № 5. С. 88–95.
70. *Родин С.П.* Математическая обработка звездной фототриангуляции для создания фотографических звездных каталогов // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1987. № 6. С. 76–83.
71. *Родин С.П.* Разработка и исследование методов аналитической фотограмметрии для составления фотографических звездных каталогов: дис. ... канд. техн. наук. М., 1988. 167 с.
72. *Смирнов С.А.* Свойства проективных координат // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1978. № 6. С. 43–47.
73. *Смирнов С.А.* Проективная геометрия. М.: Недра, 1976. 176 с.
74. *Смирнов С.А.* Решение уравнений фотограмметрии в проективных координатах // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1976. № 5. С. 3–7.

75. *Трунин Ю.М., Урмаев М.С., Губанова Е.П.* Использование проективных преобразований для обработки астронегативов // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1977. № 5. С. 80–83.
76. *Трунин Ю.М.* Некоторые вопросы теории фотограмметрии // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1959. № 5. С. 105–116.
77. *Урмаев М.С.* Космическая фотограмметрия. М.: Недра, 1989. 279 с.
78. *Урмаев М.С.* Орбитальные методы космической геодезии. М.: Недра, 1981. 256 с.
79. *Урмаев М.С., Безменов В.М.* Метод наименьших квадратов при обработке астронегативов с использованием проективных преобразований // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1991. № 2. С. 49–58.
80. *Фролова Н.Б.* Фотографический каталог координат 323 звезд Московской зенитной зоны // Труды ГАИШ, 1974. Т. 45. С. 95–105.
81. *Хабибуллин Ш.Т., Ризванов Н.Г., Рахимов Л.И., Нефедьев Ю.А., Кибардина М.И.* О методе построения каталога динамических координат 1400 точек лунной поверхности // Селенодезия и динамика Луны: сб. научн. тр. Главная астрономическая обсерватория. Киев: Наукова думка, 1990. С. 133–136.
82. *Хабибуллин Ш.Т.* Физическая либрация Луны // Известия АОЭ. Казань, 1958. № 31. 182 с.
83. *Чибуничев А.Г., Михайлов А.П., Курков В.М.* К вопросу о совместном использовании уравнений компланарности и коллинеарности при уравнивании блочных сетей фототриангуляции // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1985. № 1. С. 80–87.

84. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. М.: Просвещение, 1969. 367 с.
85. Шокин Ю.А., Евстигнеева Н.М. Широкоугольный астрометрический стандарт в московской зенитной зоне // Труды ГАИШ, 1983. Т. 55. С. 3–13.
86. Brown D.C. Illustrative Solutions of Analitic Problems in Aerial Photogrammetry. Ohio State University Research Foundation, 1950. № 97. P. 130.
87. Eichorn H. Astronomy of Star Positions. New Y., 1974. P. 232.
88. Keller M., Tewinkel G.C. Aerotriangulation: Image Coordinate Re-finement, U.S.C. and G.C. Technical Bulletin, 1965. № 25.
89. Keller M., Tewinkel G.C. Block Analitic Aerotriangulation, ESSA Technical Report C. and G.S. Environmental Services Administration, Rockville, Md., 1967. P. 35.
90. Manual of Photogrammetry. Fourth Edition. Published by American Society of Photogrammetry. Washing, 1980. P. 1056.
91. Schoeps D. On the reduction of photographic satellite plates. CO-SPAR trans., 1970. № 7. P. 245–248.
92. Wolf Erich. Zum methodischen Beitrag der Richtungsmessungen. Veroff. Bayer. Kommis. Int. Erdmess. Bayer. Akad. Wiss. Astron. Geod. Arb., 1980. № 40. P. 46–50.
93. Ilkka Niini. Relative orientation of multiple images using projective singular correlation. Helsinki University of Technology Insitute of Photogrammetry and remote Sensing, 1994. 55 p.
94. Roger Mor and Bill Triggs. Projective geometry for image analysis. A tutorial given at ISPRS, Vienna, July 1996. 42 p.
95. Nigel Hitchin. Projective geometry. b3 course 2003. 74 p.

Безменов Владимир Михайлович

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ФОТОГРАММЕТРИИ
НА ОСНОВЕ ВЕКТОРНОЙ
ИНТЕРПРЕТАЦИИ ИНВАРИАНТОВ
ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Корректор
Л.Р. Кутдусова

Компьютерная верстка
Т.А. Григорьев

Дизайн обложки
М.А. Ахметов

Подписано в печать 10.07.2014.
Бумага офсетная. Печать цифровая.
Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 14,18
Уч.-изд. л. 5,87. Тираж 500 экз. Заказ 162/4.

420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37
тел. (843) 233-73-59, 233-73-28