

Тамаз Бацикадзе, Джумбер Нижарадзе

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ
(Первая часть)

«Технический университет»

ГРУЗИНСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Тамаз Бацикадзе, Джумбер Нижарадзе

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ
(Первая часть)

Утверждено в качестве учебника
Редакционно-издательским советом
Грузинского Технического Университета.
2016, протокол №

Тбилиси
2016

УДК 539.32

Все вопросы, рассмотренные в учебнике, соответствуют силабусам по этому предмету.

С целью облегчения усвоения данного сложного предмета, в конце каждой главы даются ответы на вопросы для самопроверки и решения конкретных задач. В большинстве случаев даются также полные математические выкладки получения формул в конечном виде. Работа насыщена иллюстрациями, соответствующими рассматриваемым темам.

Учебник предназначен для студентов технического ВУЗ-а. Воспользоваться им могут студенты всех трёх ступеней — бакалавриата, магистратуры и докторантуры. Инженерам он может пригодиться в качестве вспомогательного пособия при решении инженерных задач.

Рецензенты: профессор М.Кублашвили,
профессор Д.Табатадзе

Введение

§ 1. Предмет теории упругости

Краткий исторический обзор

В сопротивлении материалов на прочность, жёсткость и устойчивость изучались стержни. В теории упругости кроме них изучаются такие конструктивные элементы, как пластинки, оболочки и массивные тела. Используемый здесь математический аппарат более мощный и соответственно применяемые методы дают более точные результаты. Поэтому полученные результаты служат как-бы эталоном для результатов, полученных в сопротивлении материалов.

Приоритет в создании основ теории упругости принадлежит французским математикам и механикам: Коши, Навье и Пуассону, получившим основные дифференциальные уравнения этой теории.

Сама дисциплина теория упругости сформировалась, как один из важных разделов математической физики в первой половине XIX века. Хотя и до этого времени, трудами ученых XVII и XVIII веков — Галилея, Мариотта, Гука, Бернулли, Эйлера, Кулона и других — была довольно детально разработана теория изгиба тонких упругих стержней. В начале XIX века Лагранжем и Софи Жермен было дано решение задачи об изгибе и колебаниях тонких упругих пластинок.

Важность приложений теории упругости в физике и технике привлекли к этой новой отрасли науки внимание крупнейших исследователей XIX и XX веков. Помимо названных выше основателей теории упругости Коши, Навье и Пуассона, здесь можно назвать таких выдающихся ученых, как М. В. Остроградский, Ламе (выпустивший в 1852 г. первый курс лекций по теории упругости), Клапейрон, Сен-Венан, Грин, Максвелл, В. Томсон (лорд Кельвин), Релей, Митчелл, Матье, Ф. С. Ясинский, С. П. Тимошенко, Г. В. Колосов и многие другие.

Особое развитие теории упругости получило в XX веке, что было обусловлено непреложной необходимостью создания широких инфраструктур, а также – развития передовой техники. В этом направлении важнейшие исследования провели великие учёные, такие как А. Крылов, Н. Мусхелишвили, Б. Галёркин, К. Завриев, В. Власов, П. Папкович, И. Рабинович, А. Смирнов и др.

Из грузинских учёных в развитие теории упругости большой вклад внесли Н. И. Мусхелишвили, И.Н. Векуа, В.Д. Купрадзе и др.

В XX — XXI веках, с появлением компьютерной техники, прикладные задачи теории упругости всё больше решаются с применением численных методов, таких как метод конечных элементов или метод граничных элементов и их модификаций. В этой связи надо отметить труды Зенкевича О., Чанга И., Томаса П. Д., Хаслингера Дж., Хлавасека И., и многих других зарубежных авторов. Из российских — Михлина С.Г., Постнова В.А., Оганесяна Л. А., Розина Л.А. и других. Из грузинских авторов — Купрадзе В.Д., Моцонелидзе А.Н., Калабегишвили М.А. и других.

§ 2. Принятые допущения и гипотезы

1. В теории упругости не учитывается, что тело на самом деле состоит из атомов. Сложная структура тела заменяется однородной и предполагается, что тело — одно

сплошное целое. Этим даётся возможность выделить из тела элементарную часть, применить анализ бесконечно малых и результаты распространить на всё тело.

Следовательно, тело считается однородным (однородным называется тело, каждый элементарный объём которого проявляет одни и те же свойства, как физические, так и механические).

2. Тело считается изотропным (изотропным называется тело, физические и механические свойства которого, по всем направлениям одни и те же).

3. Принимается, что тело является абсолютно упругим, т.е. считается, что после снятия нагрузки оно полностью восстанавливает свою первоначальную форму и размеры. Считается также, что до приложения нагрузки оно имеет определённую форму, размеры и что напряжений в нём нет, т.е. находится в естественном состоянии.

4. Рассматриваются деформации, которые настолько малы по сравнению с размерами конструктивных элементов, что не меняют их размеры.

5. Применяется принцип независимого действия сил, заключающийся в следующем: значение какого-либо вектора, вызванное действием группой сил, равно сумме значений векторов, вызванных действием сил, состоящих в этой группе по отдельности.

6. Применяется принцип Сен-Венана, по которому: для точек, достаточно удалённых от точек приложения нагрузок, не имеет значения закон распределения нагрузок в местах их приложения, т.е. нагрузки в достаточно удалённых точках заменяются их равнодействующими.

Перечисленные гипотезы общие — для всех конструктивных элементов. По ходу изучения предмета, будут вводиться также гипотезы, необходимые для решения отдельных задач.

§ 3. Поверхностные и объёмные силы

Силы, действующие на тело, можно разделить на поверхностные и объёмные силы.

Поверхностными являются силы, которые действуют на тело снаружи (сосредоточенная сила, распределённая нагрузка, крутящий и изгибающий момент от пар сил).

К объёмным силам относятся силы, приложенные к каждой частице тела: собственный вес тела, силы инерции, магнитные, электромагнитные силы и т. д.

Раздел первый ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Глава 1 Теория напряжений

§ 1.1. Дифференциальные уравнения равновесия. Взаимность касательных напряжений

Рассмотрим тело произвольной формы, на которое действуют как поверхностные, так и объёмные силы. Предположим, что под действием этих сил тело находится в равновесии.

Для изучения напряжённого состояния в любой точке M напряжённого тела, вырезаем в её окрестности, плоскостями, параллельными координатным плоскостям, элементарный параллелепипед (рис. 1). Влияние отброшенного остального тела выражаем силами. На каждой грани будем иметь три составляющих этих сил. Всего будет $3 \cdot 6 = 18$ неизвестных.

Обозначим проекции объёмной силы, соответствующих единице массы через X , Y , Z . Надо помнить, что это заданная сила. Теперь обозначим количество массы, приходящейся на единицу объёма (плотность) через ρ , тогда проекции объёмной силы, соответствующие единице объёма, будут:

$$X \cdot \rho, Y \cdot \rho, Z \cdot \rho.$$

Проекции всей объёмной силы, приходящейся на элементарный параллелепипед, будут:

$$X \cdot \rho \cdot dV, Y \cdot \rho \cdot dV, Z \cdot \rho \cdot dV.$$

где $dV = dx \cdot dy \cdot dz$.

Если объёмной силой является сила тяжести, то $X = Y = 0$, а $Z = -1 \cdot g = -g$, где g - ускорение свободного падения. Вес единицы объёма будет:

$$Z \cdot \rho = -g \cdot \rho = p,$$

а вес всего элементарного параллелепипеда:

$$P = p \cdot dV = -g \cdot \rho \cdot dV.$$

Вернёмся к неизвестным проекциям сил, выражающих влияние отброшенного остального тела. Их количество можно уменьшить, если поступить следующим образом:

Выразим проекции сил на гранях элементарного параллелепипеда через нормальные σ и касательные τ напряжения. Примем во внимание, что если нормальное напряжение σ_x ,

являясь функцией x, y и z , на грани $Mabc$, удалённой от координатной плоскости yoz на расстояние x , имеет значение $\sigma_x = f(x, y, z)$, то на грани $M'a'b'c'$, удалённой на расстояние $x + dx$, будет иметь значение $\sigma'_x = f(x + dx, y, z)$. Разложим функцию $f(x + dx, y, z)$ в ряд Тейлора по формуле

$$f(x + dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} dx^2 + \dots,$$

пренебрегая членами, содержащими бесконечно малые высо-

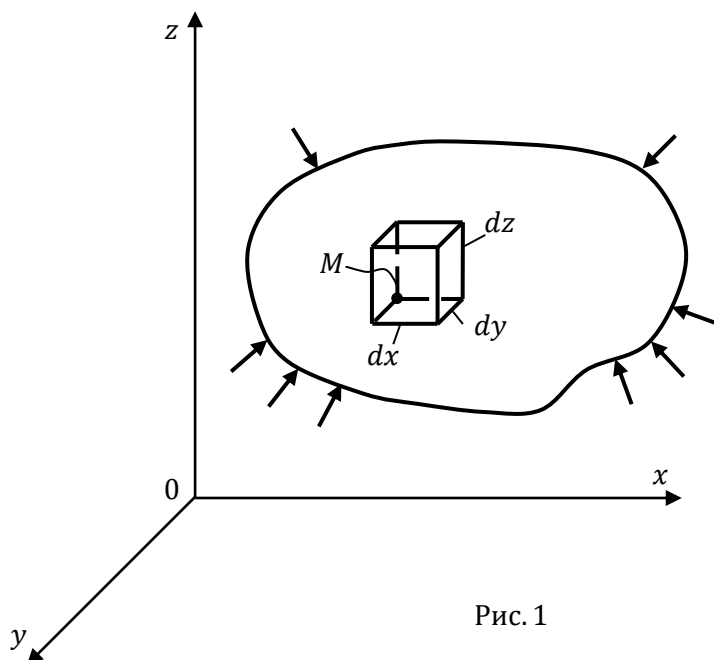


Рис. 1

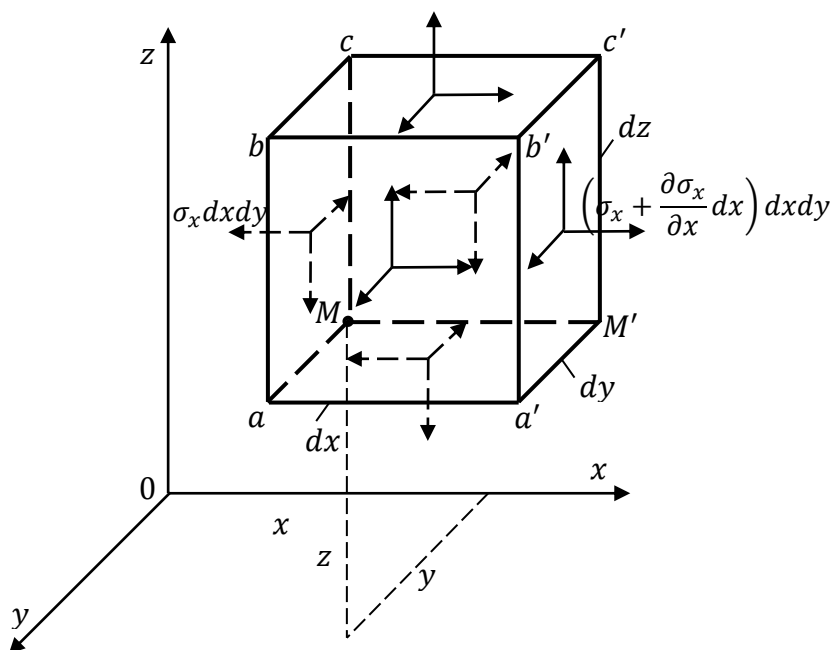


Рис. 2

ких степеней, т.е. сохраняя первые два слагаемых, получим:

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx.$$

Аналогичным рассуждением можно получить значения и других напряжений σ'_y и σ'_z , выраженных по значениям напряжений σ_y и σ_z . Направления нормальных напряжений берутся по направлениям внешних нормалей граней параллелепипеда.

Проделав то же самое и с касательными напряжениями, из 18 проекций сил, выраженных через нормальные и касательные напряжения, останутся 9 (рис.2).

Так как всё напряжённое тело находится в равновесии, то в равновесии должен находиться и вырезанный из него рассматриваемый элементарный параллелепипед.

Для него составляются уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\sum X &= 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \\ \sum M_x &= 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0.\end{aligned}$$

Составим из них первое уравнение, т. е. $\sum X = 0$ (рис. 3), получим:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + X \cdot \rho dx dy dz = 0$$

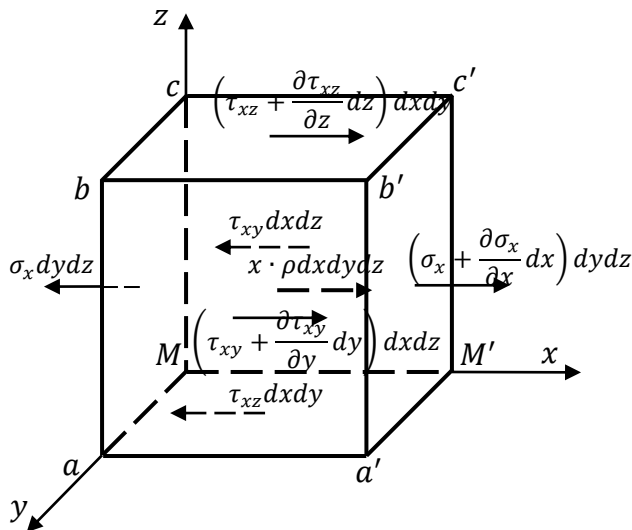


Рис. 3

Так как масса параллелепипеда равна произведению плотности на объём - $\rho dx dy dz$, то проекции объёмной силы соответствующие массе этого объёма, как уже было сказано - равны:

$$X \cdot \rho dx dy dz, \quad Y \cdot \rho dx dy dz, \quad Z \cdot \rho dx dy dz.$$

Раскроем скобки и сократим все члены на $dx dy dz$, получим:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \cdot \rho = 0$$

Аналогично получаются и остальные два уравнения в направлении у и z.

Уравнения равновесия в итоге будут иметь вид (статическая задача):

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \cdot \rho &= 0\end{aligned}\right\} \quad (1.1.1)$$

Если система испытывает колебания или движется, то согласно принципу Даламбера действующим силам добавляются силы инерций. Обозначим перемещения точки M по направлениям координатных осей, соответственно через u , v и w , тогда проекций ускорения соответственно будут $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$. Следовательно, в случае движения (динамическая задача) в правой части будут стоять $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\rho \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ и $\rho \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$, т.е. будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \cdot \rho &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \cdot \rho &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \cdot \rho &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1')$$

Уравнения (1.1.1) называются уравнениями равновесия или уравнениями Навье.

Составим теперь уравнения для моментов. Рассмотрим сначала силы, которые пытаются повернуть параллелепипед вокруг оси y .

Величины моментов третьего порядка малости относительно оси y дают только две силы $(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz) dxdy$ и $(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dydz$ и они равны: $-(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) dydz \cdot dx$, $(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz) dxdy \cdot dz$. Остальные силы дают моменты бесконечно малых величин четвёртого порядка, которыми пренебрегаем.

Действительно, разность сил $\sigma_x dydz$ и $(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx) dydz$, даёт момент $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dxdydz \cdot \frac{dz}{2}$, разности сил $\tau_{xy} dxdz$, $(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} dz) dxdz$ и $\tau_{zy} dxdz$, $(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz) dxdz$, дают соответственно моменты $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dxdydz \cdot \frac{dz}{2}$ и $\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dxdzdy \cdot \frac{dy}{2}$. Объёмная сила даёт момент $-Z \cdot \rho dxdydz \cdot \frac{dx}{2}$.

Следовательно, уравнение моментов будет иметь вид (рис. 4):

$$-\tau_{zx} dydz \cdot dx + \tau_{xz} dxdy \cdot dz = 0$$

откуда

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Если составить затем уравнения моментов и для двух других осей x и y , то получим ещё два аналогичных выражения. В итоге будем иметь:

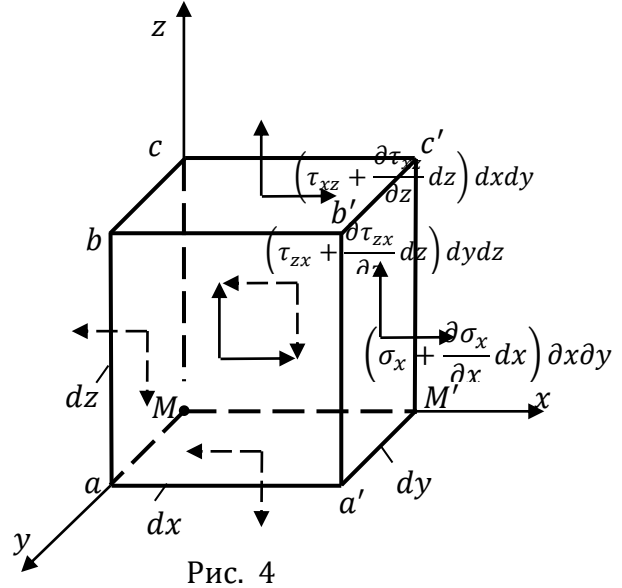
$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad (1.1.2)$$

Как видно, для объёмного напряжённого состояния получен закон взаимности касательных напряжений, который встречался во время изучения чистого сдвига, т.е. для плоского напряжённого состояния в курсе сопротивления материалов.

Этим из уравнений (1.1.1) исключаются вдобавок еще три неизвестные и остаются три уравнения с шестью неизвестными. Недостающие три уравнения составляются из условий совместности деформаций.

Для плоского напряжённого состояния уравнения равновесия записываются так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y \cdot \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1'')$$



§ 1.2. Напряжения на наклонных площадках

Как было отмечено, если нагруженное тело находится в равновесии, то в равновесии должна находиться и любая его вырезанная часть, т.е. главный вектор и главный момент от всех приложенных к этой части нагрузок должны равняться нулю. Это касается и тех частей тела, которые имеют общую с поверхностью тела поверхность. В общем случае, поверхность тела, как и любая её элементарная площадка, наклонна к координатным осям.

На этой поверхности может действовать внешняя нагрузка. Следовательно, необходимо установить зависимость между проекциями внешней нагрузки (внешнего напряжения), приходящими на малой наклонной площадке и напряжениями, возникшими

на гранях, параллельных координатным плоскостям.

Выделим из тела элементарный тетраэдр $Oabc$ (рис. 5) со сторонами $Oa = dx$, $Ob = dy$ и $Oc = dz$. Для наклонной площадки abc проведём внешнюю нормаль v . Обозначим косинусы углов её наклона с координатными осями x , y и z соответственно: $\cos(x, v)$, $\cos(y, v)$ и $\cos(z, v)$, т.е. косинусы углов между внешней нормалью и координатными осями x , y и z , соответственно через l , m и n : $\cos(x, v) = l$, $\cos(y, v) = m$ и $\cos(z, v) = n$

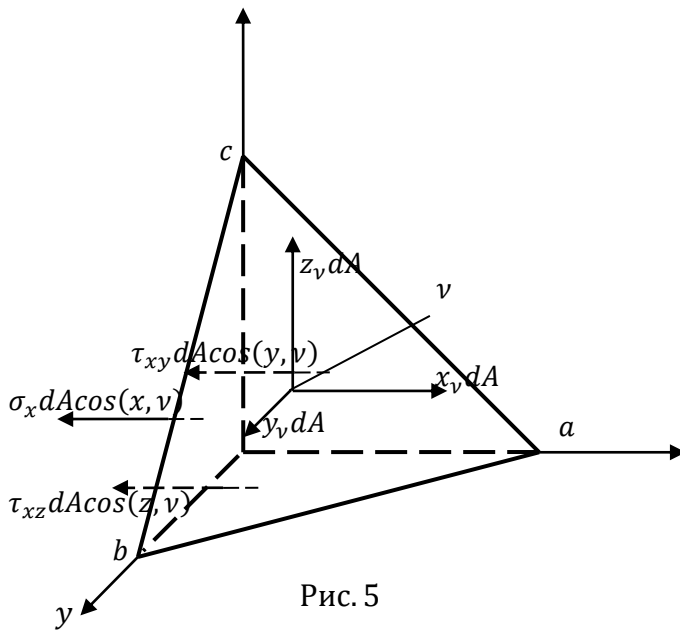


Рис. 5

Допустим, полным внешним напряжением является p , тогда его составляющие по координатным осям будут X_v , Y_v и Z_v . Обозначим площадь наклонной грани abc через dA , тогда площади граней, совпадающие с координатными плоскостями, соответственно будут:

$$A_{Oab} = dA \cdot n,$$

$$A_{Obc} = dA \cdot l,$$

$$A_{Oac} = dA \cdot m.$$

Составим уравнение равновесия по оси x , т.е. $\sum X = 0$:

$$X_v dA - \sigma_x dA \cdot l - \tau_{xy} dA \cdot m - \tau_{xz} dA \cdot n = 0.$$

Мы здесь не ввели проекцию $X \cdot \rho dV$ объёмной силы, т.к. она — малая третьего порядка малости $-X \cdot \rho dV = X \cdot \rho \frac{dx dy dz}{6}$, остальные же силы — малые второго порядка. Сократим на dA , получим:

$$X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n.$$

Аналогично получим и остальные два уравнения относительно осей y и z . В итоге будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_v &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.1)$$

В случае плоского напряжённого состояния будем иметь:

$$\begin{cases} X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m; \\ Y_v = \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{cases} \quad (1.2.1')$$

§ 1.3. Понятие тензора напряжений

Ранее, в курсе сопротивления материалов, когда требовалось изучение напряжённого состояния в какой-либо точке напряжённого тела, оно рассекалось в этом месте на две части одной какой-либо плоскостью, определялось усилие и по ним полное напряжение, которое в свою очередь разлагалось на составляющие в этой точке.

Сейчас для этой цели высекается частица тела в окрестности рассматриваемой точки: проводится не одна, а три плоскости, параллельные координатным плоскостями. Если на этих плоскостях известны шесть составляющие напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ и $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, то по формуле (1.2.1) можно определить проекции X_v, Y_v и Z_v полного напряжения p_v на любой наклонной плоскости, проведённой через эту точку. Совокупность этих шести составляющих напряжений даёт тензор напряжений:

$$(S) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

Таким образом, напряжённое состояние в какой-либо точке напряжённого тела определяется шестью компонентами тензора напряжений.

§ 1.4. Главные напряжения. Инварианты напряжённого состояния

Продолжим исследование напряжённого состояния в точке тела. По уравнению (1.2.1) можно вычислить составляющие X_v, Y_v и Z_v напряжения p_v на любой наклонной площадке. Полное напряжение p_v вычисляется как геометрическая сумма этих составляющих X_v, Y_v и Z_v :

$$p_v = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2}.$$

(a)

Разложим полученное полное напряжение p_v на составляющие по нормали v и вдоль плоскости площадки, т.е. на нормальное σ_v и касательное τ_v напряжение (рис. 6).

Нормальное напряжение σ_v вычисляется, как сумма проекций составляющих X_v, Y_v и Z_v на ось v . Будем иметь:

$$\sigma_v = X_v \cdot l + Y_v \cdot m + Z_v \cdot n. \quad (1.4.1)$$

Подставляя сюда значения составляющих X_v, Y_v и Z_v из (1.2.1), получаем

$$\sigma_v = (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n) \cdot l + (\tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n) \cdot m + (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n) \cdot n$$

или

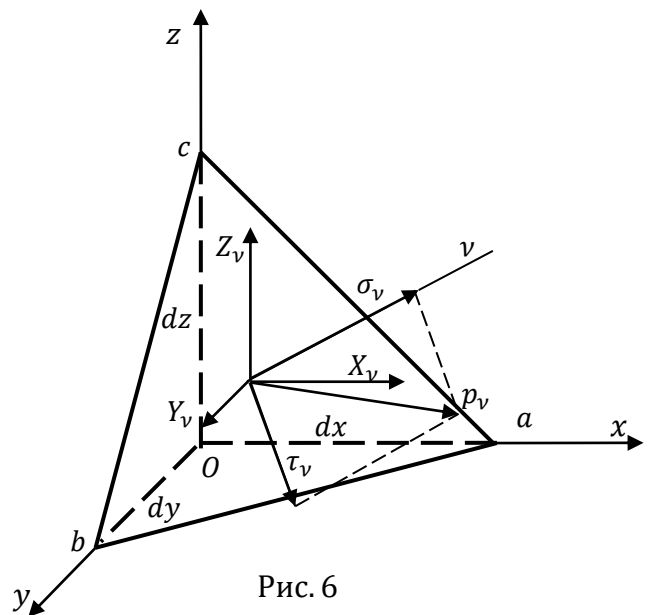


Рис. 6

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl. \quad (1.4.2)$$

Касательное напряжение вычисляется из прямоугольного треугольника по теореме Пифагора:

$$\tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2. \quad (1.4.3)$$

Последняя формула даёт только величину касательного напряжения, но не указывает его направление в плоскости площадки.

Найдём составляющую касательного напряжения в плоскости площадки с нормалью v по заданному направлению η с направляющими косинусами l_1, m_1, n_1 (рис. 6). Так как направления v и η взаимно перпендикулярны, то между их направляющими косинусами существует известное из аналитической геометрии соотношение

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0 \quad (1.4.4)$$

Искомое касательное напряжение равно сумме проекций составляющих напряжений X_v, Y_v, Z_v на направление η

$$\tau_{\eta v} = X_v l_1 + Y_v m_1 + Z_v n_1$$

Подставляя сюда значения составляющих X, Y и Z_v из (1.2.1), находим

$$\begin{aligned} \tau_{\eta v} = & (\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n) \cdot l_1 + (\tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n) \cdot m_1 + (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n) \cdot n_1 = \\ & \sigma_x ll_1 + \sigma_y mm_1 + \sigma_z nn_1 + \tau_{yx}(lm_1 + l_1 m) + \tau_{yz}(mn_1 + m n_1) + \tau_{zx}(nl_1 + l n_1) \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Если принять в выражении (1.4.3) $\tau_v = 0$, то получим, что $p_v = \sigma_v$, т.е. на главной площадке полное напряжение p_v совпадает с нормальным σ_v по величине и направлению.

По условию $\tau_v = 0$, определим величину главных напряжений и положение главных площадок. Обозначим главное напряжение буквой σ . Проецируя σ на координатные оси, находим его составляющие

$$X_v = \sigma \cdot l, \quad Y_v = \sigma \cdot m, \quad Z_v = \sigma \cdot n. \quad (б)$$

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n; \\ \text{Вносим их в левую часть формул (1.2.1) — } Y_v &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n; \\ Z_v &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \right\}$$

будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \sigma \cdot l &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n; \\ \sigma \cdot m &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n; \\ \sigma \cdot n &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n &= 0; \\ \tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{yz} \cdot n &= 0; \\ \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Получили три линейных однородных уравнения относительно l, m и n .

В нашем случае система не может иметь нулевое $l = m = n = 0$ решение, т.к.

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (г)$$

следовательно, система может иметь решения при нулевом определителе:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (д)$$

Раскроем этот детерминант. Получим:

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) + 2\tau_{yx}\tau_{zy}\tau_{xz} - (\sigma_y - \sigma)\tau_{zx}^2 - (\sigma_x - \sigma)\tau_{yz}^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_{xy}^2 = 0$$

После перемножения и группировки по степеням σ , получим кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - \begin{vmatrix} \sigma_x\tau_{xy}\tau_{xz} \\ \tau_{yx}\sigma_y\tau_{yz} \\ \tau_{zx}\tau_{zy}\sigma_z \end{vmatrix} = 0, (e)$$

или короче

$$\sigma^3 - S_1\sigma^2 - S_2\sigma - S_3 = 0, \quad (1.4.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ S_2 &= -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{yx}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ S_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yx}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.4.7)$$

Для решения кубического уравнения (1.4.6) используем следующую подстановку

$$\sigma = x + \frac{1}{3}S_1 \quad (1.4.8)$$

Тогда уравнение (1.4.3) примет вид

$$x^3 + 3px + 3q = 0 \quad (1.4.9)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3}\left(S_2 - \frac{1}{3}S_1^2\right) \\ q &= -\frac{1}{27}S_1^3 + \frac{1}{6}S_1S_2 - \frac{1}{2}S_3 \end{aligned}$$

все три корня: σ_1 , σ_2 и σ_3 действительны в том случае, когда дискриминант отрицателен:

$$\Delta = p^3 + q^2 < 0.$$

Если подставить соответствующие численные значения коэффициентов S_1 , S_2 , S_3 в выражения для p и q , затем вычислить Δ , то можно убедиться в том, что Δ всегда отрицателен. Это следует также из физических соображений – главные напряжения могут быть только действительными величинами.

При $\Delta < 0$ для решения кубического уравнения применяется так называемый тригонометрический метод.

При этом корни уравнения (1.4.6) представляются следующим образом:

$$x_1 = 2\sqrt{|p|}\cos\varphi, \quad x_2 = 2\sqrt{|p|}\cos(\varphi + 120^\circ), \quad x_3 = 2\sqrt{|p|}\cos(\varphi - 120^\circ),$$

где $|p|$ – абсолютное значение коэффициента p и

$$\varphi = \frac{1}{3}\arccos\frac{-q}{|p|^{\frac{3}{2}}}.$$

Для последующего определения главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 найденные значения корней x_1 , x_2 и x_3 подставляются в выражение (1.4.8).

Наибольший корень по алгебраическому значению принято обозначать σ_1 , а наименьший – σ_3 . Таким образом, в каждой точке тела всегда можно найти три главных напряжения: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Для нахождения косинусов какого-либо главного напряжения $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$, надо внести его значение в уравнения (в), а затем решить совместно с уравнением (г) любые два из них. Например,

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n &= 0; \\ \tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{yz} \cdot n &= 0; \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Таким же образом находятся косинусы и для других двух главных напряжений.

Полученные значения косинусов соответствуют главным напряжениям, которые получаются взаимно перпендикулярными, поэтому и главные площадки будут взаимно перпендикулярны. Этим доказывается, что в любой точке напряжённого тела можно провести три взаимно перпендикулярные главные площадки. В этом частном случае:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ S_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ S_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\}$$

Очевидно, что корни кубического уравнения не могут зависеть от выбора координатных осей, следовательно, его коэффициенты S_1, S_2, S_3 должны сохранять постоянные значения при преобразовании осей, т.е. они, по сути, должны являться инвариантами.

Первым инвариантом называется величина

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (\text{ж})$$

Он показывает, что сумма нормальных напряжений на трёх взаимно перпендикулярных площадках — величина постоянная.

Вторым инвариантом называется величина:

$$S_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1. \quad (\text{з})$$

Им пользуются в теории пластичности.

Третьим инвариантом называется величина, являющаяся детерминантом составленного из элементов тензора напряжений:

$$S_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{yx}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \quad (\text{и})$$

В теории напряжений инварианты следует рассматривать как основные характеристики напряженного состояния в точке; составляющие же напряжений, как величины, связанные с осями координат, являются вспомогательными.

§ 1.5. Наибольшие касательные напряжения

Совместим оси координат x, y, z с направлениями ранее найденных главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Проведём произвольную площадку ABC с площадью dA и нормалью ν . Пусть полное напряжение, действующее на этой площадке, равно p_ν , его составляющие по осям x, y, z равны X_ν, Y_ν и Z_ν , а нормальные и касательные напряжения на площадке dA равны σ_ν и τ_ν . Имеем очевидные равенства (рис. 6)

$$p_\nu^2 = X_\nu^2 + Y_\nu^2 + Z_\nu^2. \quad (1.5.1)$$

$$p_\nu^2 = \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2 \quad (1.5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} X_\nu &= \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n; \\ Y_\nu &= \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n; \\ Z_\nu &= \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \right\} \quad \text{С другой стороны, из (1.2.1) —}$$

$$X_\nu = \sigma_1 \cdot l, \quad Y_\nu = \sigma_2 \cdot m, \quad Z_\nu = \sigma_3 \cdot n$$

После подстановки этих выражений в (1.5.1) получим

$$p_\nu^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2, \quad (1.5.3)$$

Проектируя X_ν, Y_ν и Z_ν на направление ν , получим выражение для σ_ν :

$$\sigma_\nu = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (1.5.4)$$

Далее, подставляя выражения (1.5.3), (1.5.4) в (1.5.2), найдём выражение для касательного напряжения τ_v :

$$\tau_v^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2. (1.5.5)$$

Подставляя равенство $n^2 = 1 - l^2 - m^2$, полученное из геометрического соотношения $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ в (1.5.5), получим следующее выражение для τ_v^2 :

$$\tau_v^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) m^2 + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \sigma_3]^2. (1.5.6)$$

Таким образом, величина касательного напряжения τ_v зависит от двух независимых переменных l и m . Для определения экстремума этой величины необходимо взять частные производные от τ_v по l и m и приравнять их нулю:

$$\frac{\partial(\tau_v)^2}{\partial l} = 2l\{\sigma_1^2 - \sigma_3^2 - 2(\sigma_1 - \sigma_3)[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3]\} = 0,$$

$$\frac{\partial(\tau_v)^2}{\partial m} = 2m\{\sigma_2^2 - \sigma_3^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3)[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3]\} = 0.$$

После сокращения первого уравнения на $(\sigma_1 - \sigma_3)$, а второго на $(\sigma_2 - \sigma_3)$ получим следующую систему уравнений для нахождения значений l, m, n , удовлетворяющих условиям экстремума касательного напряжения τ_v :

$$\left. \begin{aligned} l\{\sigma_1 - \sigma_3 - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2]\} &= 0, \\ m\{\sigma_2 - \sigma_3 - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2]\} &= 0, \\ l^2 + m^2 + n^2 - 1 &= 0. \end{aligned} \right\} (1.5.7)$$

Условиям $l = m = 0$ и $n = 1$ соответствуют главные площадки, на которых касательные напряжения равны нулю.

Если $l \neq 0$, а $m = 0$, то второе уравнение удовлетворяется при любых значениях l , а первое – удовлетворяется при условии

$$\sigma_1 - \sigma_3 - 2(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 = 0,$$

откуда $2l^2 = 1$ и $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда из третьего уравнения (1.5.7) для n получаем $n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Аналогично можно получить при $l = 0$ и $m \neq 0$ по второму уравнению $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ и из третьего уравнения $n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

В итоге для углов, характеризующих направление площадок экстремальных касательных напряжений, получим таблицу 1.

Таблица 1

Первые три строчки таблицы соответствуют направлениям нормалей ν , совпадающих с главными осями координат ($\tau = 0$).

Остальные три строчки соответствуют площадкам, проходящим через одну из главных осей и делящим угол между двумя другими пополам. Таким образом,

l	m	n
0	0	± 1
0	± 1	0
± 1	0	0
0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0

оказывается, что площадки экстремальных касательных напряжений составляют с главными площадками угол, равный 45° . Подставляя в выражение (1.5.6) – $\tau_v^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2) m^2 + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2 + \sigma_3]^2$ для τ_v значения l, m, n , обращающие его в экстремум, получим следующие экстремальные значения касательных напряжений:

$$\tau_v^{max} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \tau_v^{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \tau_v^{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Так как $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то $\tau_v^{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

Теория деформации

§ 1.6. Перемещения и деформации в упругом теле

Перемещения любой точки тела может произойти:

1. Из-за перемещения всего тела, не меняющего форму, т.е., как жёсткого целого.
2. В результате деформации тела, т.е. взаимных перемещений частиц в пределах тела.

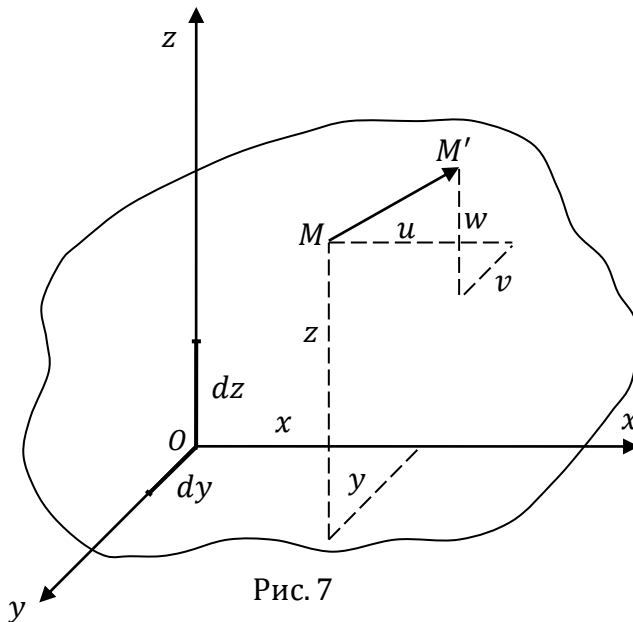


Рис. 7

Перемещения первого вида изучаются в теоретической механике.

В нашей дисциплине изучаются перемещения второго вида.

Закрепим тело точкой O . Этим устраняется возможность линейных перемещений тела.

Кроме того, закрепим малый линейный элемент dz тела. Это устранил возможность поворота тела относительно координатных осей x и y . Закрепив тело также элементом dy , устраняется возможность поворота тела относительно оси z и получается неподвижно закреплённое тело (рис.7). Этим

исключается перемещение тела, как жёсткого целого.

Допустим в результате деформации тела, какая-либо точка M тела займёт положение M' . Полным перемещением точки M будет вектор MM' , который можно представить посредством его составляющих u, v и w , вдоль координатных осей x, y и z , т.е. как результат трёх последовательных перемещений u, v и w

Следовательно, перемещения MM' произвольной точки M тела можно выразить через перемещения u, v и w , как функций координат точки M :

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z).$$

Очевидно, что при перемещении MM' точки M , перемещения u, v и w изменяются непрерывно, т.е. они являются непрерывными функциями координат. Принимается также, что непрерывными являются и их производные.

§ 1.7. Линейные и угловые деформации

Для изучения деформаций упругого тела в какой-либо точке $A(x, y, z)$, выделим из тела элементарный параллелепипед с плоскостями, параллельными координатным плоскостям так, чтобы точка $A(x, y, z)$ лежала на одной из его вершин.

Если параллелепипед закреплён не в окрестности точки A , то он, в результате деформаций всего тела, переместится, изменив размеры рёбер, и одновременно, начнёт деформироваться сам по себе. Из-за малости деформаций можем принять, что его

бесконечно малые ребра остаются прямыми, но изменяют длину и поворачиваются в пространстве.

Рассмотрим фронтальную проекцию $ABCD$ передней грани параллелепипеда в координатной плоскости xOz (рис. 8). Деформацию проекции этой грани будем рассматривать в два этапа последовательно:

1. Линейные перемещения u и w проекции грани $ABCD$, с учётом изменения размеров рёбер.

2. Изменение углов между проекциями рёбер этой грани.

Исследуем проекцию ребра AB .

Сначала определим линейную составляющую деформации. Точка B , отстоящая от точки A на бесконечно малом расстоянии dx , получит перемещение u_1 , которое будет отличаться от перемещения u в точке A на бесконечно малую величину $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ за счёт изменения координаты x (по аналогии $\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$):

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Проекция AB абсолютного приращения ребра по оси x

$$\Delta AB = A'B'' - AB = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx.$$

Относительная деформация вдоль оси x

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

называется линейной деформацией по направлению оси x .

Аналогично получим линейные деформации для проекций двух других рёбер по направлениям соответственно y и z :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Затем определим изменение углов между проекциями рёбер параллелепипеда.

Тангенс угла поворота проекции ребра AB в плоскости xOz

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx) - w}{dx(1 + \frac{\partial u}{\partial x})} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x}.$$

Ограничиваясь рассмотрением только малых деформаций, можно положить $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$, также ввиду малости величины ε_x по сравнению с единицей, им можно пренебречь. Будем иметь:

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Аналогично находим угол поворота проекции ребра AC :

$$\beta = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

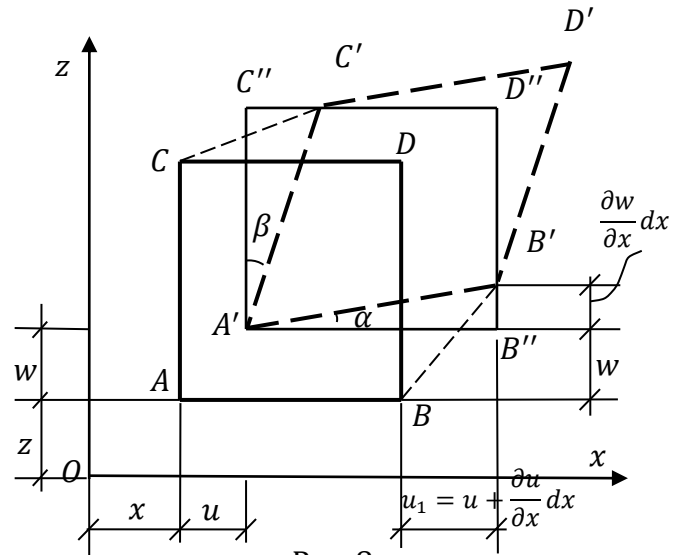


Рис. 8

Угол сдвига в плоскости xOz , т.е. искажение прямого угла BAC , называется угловой деформацией и определяется как сумма углов поворота проекций рёбер AB и AC :

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Аналогичным рассуждением (или круговым перемещением входящих букв и их индексов) можно найти угловые деформаций в двух других координатных плоскостях:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

В итоге даются шесть основных зависимостей линейных и угловых деформаций от соответствующих перемещений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (1.7.1)$$

Эти геометрические характеристики были выведены Коши и называются уравнениями Коши.

Правило знаков:

1. Положительным линейным деформациям отвечают удлинения по соответствующим направлениям координатных осей, а отрицательным — укорочения.

2. Положительным угловым деформациям соответствуют уменьшение углов между положительными направлениями координатных осей, а отрицательным — увеличение тех же углов.

Вообще, если при росте x или y , соответственно функция u или v растёт, то деформация положительна.

§ 1.8. Понятие тензора деформации

Совокупность шести компонентов уравнения Коши образует тензор деформации, определяющий деформированное состояние в точке. Доказывается, что в тензоре деформации надо брать половину угловых деформаций. Тогда он будет иметь вид

$$(E) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (1.8.1)$$

В точности также как это было при рассмотрении главных напряжений ($\tau_{ij} = 0$), когда говорилось, что имеются соответствующие им три взаимно перпендикулярные площадки, так и для деформаций можно показать, что существуют три взаимно перпендикулярные главные деформаций, т.е. деформаций, в плоскости которых отсутствуют сдвиги ($\gamma_{ij} = 0$).

Надо отметить, что главные площадки получаются перпендикулярными главным напряжениям, а главные площадки деформации, т.е. площадки, где не имелись бы сдвиги, совпадают с направлениями главных деформаций. Оси, соответствующие этим направлениям, называются главными осями деформаций. По их направлениям, волокна испытывают только растяжение или сжатие.

Направления главных осей деформаций определяются по аналогии нахождения положений главных площадок. Получается кубическое уравнение, коэффициенты которого являются инвариантами, т.е. постоянными при преобразовании координатных осей. Они содержат в себе компоненты тензора деформации:

$$\left. \begin{aligned} S_{1\varepsilon} &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ S_{2\varepsilon} &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \gamma_{zx}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1, \\ S_{3\varepsilon} &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \frac{1}{4} \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4} \varepsilon_z \gamma_{xy}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.8.2)$$

§ 1.9. Объёмная деформация

В процессе деформаций изменяется объём тела. Это изменение связано только с изменением длин рёбер, а не с изменением углов, т.к. это последнее меняет объём на величину высшего порядка малости.

Рассмотрим параллелепипед, рёбра которого параллельны главным направлениям деформаций.

В этом случае меняются длины рёбер, а прямые углы параллелепипеда не меняются. Длина рёбра AB после деформации становится:

$$dx_1 = dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = dx(1 + \varepsilon_x).$$

Аналогично вычисляются длины двух других рёбер:

$$\left. \begin{aligned} dy_1 &= dy(1 + \varepsilon_y), \\ dz_1 &= dz(1 + \varepsilon_z). \end{aligned} \right\}$$

Объём параллелепипеда до деформации был равен $dV = dxdydz$. После деформаций он становится:

$$dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dx(1 + \varepsilon_x) dy(1 + \varepsilon_y) dz(1 + \varepsilon_z).$$

Раскрывая скобки, пренебрегая произведениями, которые дают величины второго и третьего порядков малости и, учитывая, что $dxdydz = dV$, находим:

$$dV_1 = dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Относительная объёмная деформация равна:

$$\frac{dV_1 - dV}{dV} = \frac{dV(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) - dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

т.е. внося обозначения θ , получается выражение для первого инварианта $S_{1\varepsilon}$:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.9.1)$$

Таким образом, объёмная деформация θ , также как и первый инвариант деформаций $S_{1\varepsilon}$, равна сумме трёх линейных деформаций.

§ 1.10. Уравнения неразрывности деформаций

Во время изучения деформаций рассматривался элементарный прямоугольный параллелепипед, выделенный из тела. Очевидно, что его деформации должны быть связаны каким-то образом с деформациями примыкающих к нему таких же элементарных параллелепипедов.

Так как по допущению рассматриваемое тело упругое, то в нём будут иметь место только упругие деформации, и не будут образовываться трещины. Тело, сплошное до деформации, останется сплошным и после деформации.

Представим тело, разрезанное взаимно перпендикулярными плоскостями (рис. 9). До деформации грани параллелепипедов тесно примыкают друг к другу. Из-за деформации рёбра параллелепипедов меняются в длине, прямые углы искажаются, но всё же грани параллелепипедов остаются тесно примыкающими. Например, рёбра ab и a_1b_1 одинаково деформируются, т.к. на самом деле они оба — одно ребро. В точке O сумма всех смежных вокруг неё углов, равная 360° до деформации, останется той же и после деформации.

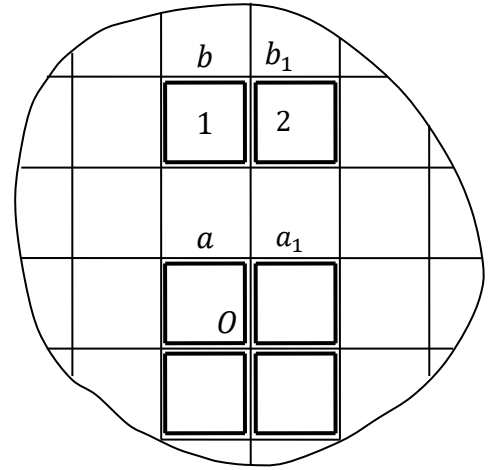


Рис. 9

Полное перемещение MM' какой-либо точки $M(x, y, z)$, выражается составляющими u, v и w , которые являются функциями координат, также как и шесть компонент деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$.

Если задаются u, v и w , то величины $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ не могут быть произвольными. Между ними должна быть определённая зависимость. Для установления этой зависимости из уравнений Коши надо исключить составляющие u, v и w . Таким способом получаются две группы зависимостей:

1. Первая группа:

Берутся первые два уравнения Коши $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ и $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, и дифференцируются дважды:

$$\text{первое по } y: \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2};$$

$$\text{второе по } x: \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y};$$

слагаются почленно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right);$$

лежащее в скобках выражение является угловой деформацией γ_{xy} . Следовательно, получается:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Проделав то же самое сначала с первым и третьим, а потом со вторым и третьим уравнениями, и соответственно сложив их, получаются вдобавок ещё два уравнения.

2. Вторая группа:

Берутся последние три уравнения Коши:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$

и каждое дифференцируется той переменной, которой по индексу в них нет:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

В правых частях полученных уравнений появляются одинаковые члены, например, во втором и третьем $-\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$. С учётом этого, и того, что в оставшиеся в правых частях этих уравнений слагаемые: во втором $-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}$, и в третьем $-\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$, составляют правую часть первого, делается следующий шаг – складываются второе и третье уравнение и отнимается первое. Тогда получается:

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Для исключения в производном, стоящем в правой части, перемещения w , ещё раз проводится дифференцирование по z . Получается

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z},$$

но

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial z}.$$

И получается уравнение конечного вида

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y \partial z}.$$

Проделав то же самое в двух других случаях, сначала сложив первое и третье уравнения, и отняв второе, а потом сложив первое и второе и отняв третье, получаются соответственно уравнения:

$$\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y \partial z}.$$

Произведя дифференцирование первого из них по x , а второго по y получаются два остальных уравнения с конечным видом.

В итоге, система уравнений неразрывности деформации выражается шестью уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.10.1)$$

Они называются уравнениями неразрывности деформаций Сен-Венана.

Физический смысл уравнений совместности деформаций (Сен-Венана) состоит в том, что при произвольном задании шести функций деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ без соблюдения зависимостей (1.10.1), тело, сплошное и непрерывное до деформации, перестаёт быть сплошным и непрерывным. В теле появляются разрывы, так как заданные деформации произвольны, они не совместны.

В первую группу входят уравнения, устанавливающие связи между деформациями ε и γ , относящимися к одной плоскости, а во вторую – связи между деформациями в разных

плоскостях.

Для плоской деформации из этой системы уравнений остаётся только одно уравнение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (1.10.1')$$

Вопросы для самопроверки и задачи

1. Что называется напряжением?

Напряжением называется интенсивность внутренних усилий, т.е. усилие, приходящееся на единицу площади сечения.

2. Какие виды напряжений различают и как они направлены по отношению к площадке, выделенной в точке тела?

Различают полное напряжение p по трём площадкам, перпендикулярным координатным осям или по три составляющие каждого из p (рис. 2), из которых нормальным называются направленные по нормали к площадкам, т.е. $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ напряжения, и касательным, направленными вдоль площадок по направлениям двух других координатных осей, напряжения: τ_{yx}, τ_{zx} на площадке, перпендикулярной к оси x ; τ_{xy}, τ_{zy} на площадке, перпендикулярной к оси y и τ_{xz}, τ_{yz} на площадке, перпендикулярной к оси z (рис.2). Первый индекс указывает на направление касательного напряжения, а второй индекс показывает нормаль к площадке.

При стягивании бесконечно малого параллелепипеда к точке M , все эти напряжения оказываются приложенными в точке M . Значит напряжения в точке зависят от того в какой проведенной площадке они рассматриваются.

3. Какие напряжения σ и τ принимаются положительными?

Положительными считаются растягивающие нормальные напряжения σ .

За положительные направления касательных τ напряжений принимаются положительные направления координатных осей x, y и z для тех граней, где растягивающие напряжения σ действуют в направлении координатных осей x, y и z . И наоборот, для граней, где положительные растягивающие напряжения σ совпадают с отрицательными направлениями координатных осей x, y и z , положительные направления касательных напряжений совпадают с отрицательными направлениями осей x, y и z .

4. В чём состоит закон парности касательных напряжений?

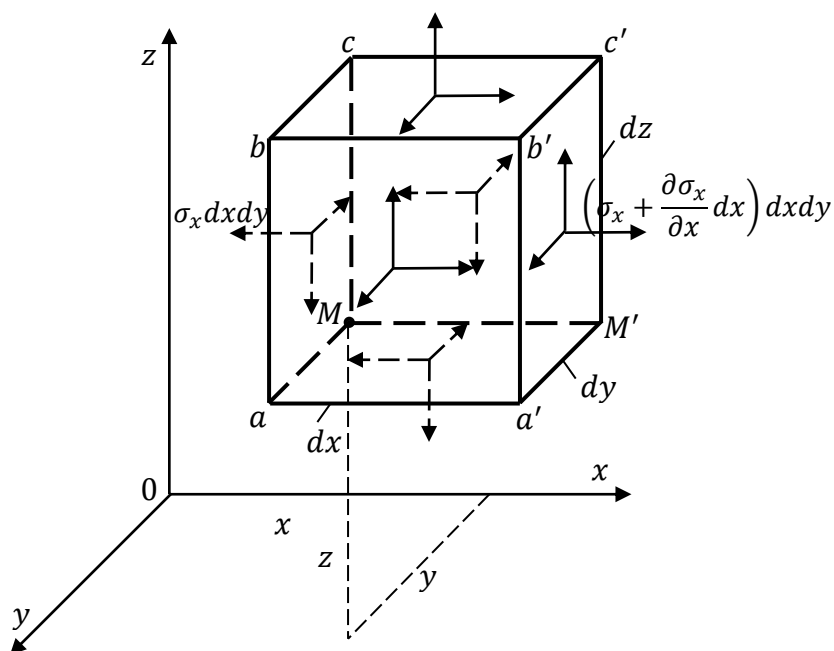


Рис. 2

Касательные напряжения с одинаковыми индексами, действующие на двух взаимно перпендикулярных площадках, равны друг другу по величине, т.е.

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

5. Что представляет собой тензор напряжений?

Матрицу, в каждой строке которой составляющие (компоненты) напряжения имеют одинаковое направление, а в каждом столбце – относятся к одной и той же площадке.

$$(S) = \left(\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array} \right)$$

6. Какие составляющие напряжения характеризуют напряжённое состояние в точке?

Напряжённое состояние в точке характеризуется шестью составляющими напряжений:

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$, являющимися компонентами тензора напряжения, т.е. — составляющими напряжений, действующими на параллельных координатным плоскостям гранях элементарного параллелепипеда (Рис.2).

7. Как определяются составляющие X_v , Y_v , Z_v полного напряжения p_v , действующего на наклонной площадке с направляющими косинусами l , m , n ?

По формулам (1.2.1) –

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_v &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\}$$

см. Рис 5.

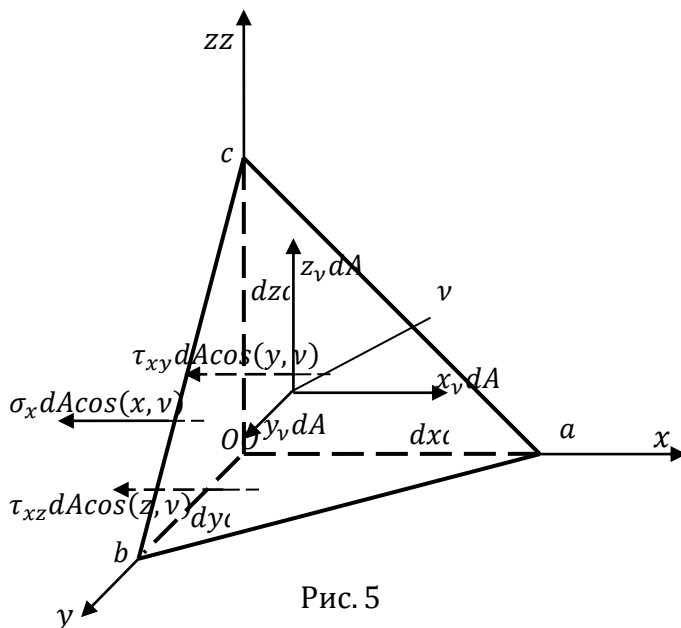


Рис. 5

8. Какой вид имеет кубическое уравнение для определения главных напряжений?

$$\sigma^3 - S_1\sigma^2 - S_2\sigma - S_3 = 0, \quad (1.4.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ S_2 &= -\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + \tau_{yx}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ S_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yx} \tau_{yz} \tau_{xz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} (1.4.7)$$

9. Может ли кубическое уравнение для определения главных напряжений наряду с действительными корнями иметь и мнимые корни?

Нет, так как дискриминант кубического уравнения всегда отрицательный.

10. Что представляют собой коэффициенты кубического уравнения для определения главных напряжений?

Они являются инвариантами тензора напряжений. S_1 является первым инвариантом:

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (\text{e})$$

Он показывает, что сумма нормальных напряжений на трёх взаимно перпендикулярных площадках величина постоянная.

S_2 – вторым инвариантом:

$$S_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1. \quad (3)$$

Им пользуются в теории пластичности.

Третьим инвариантом называется величина S_3 , являющаяся детерминантом составленного из элементов тензора напряжений:

$$S_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \sigma_y \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yx} \tau_{yz} \tau_{xz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

11. Каким напряжённым состояниям соответствуют условия равенства нулю третьего инварианта ($S_3 = 0$), третьего и второго ($S_3 = S_2 = 0$)?

При $S_3 = 0$ одно из главных напряжений равно нулю, поскольку кубическое уравнение превращается в квадратное:

$$\sigma^2 - S_1 \sigma + S_2 = 0,$$

т.е. получается двухосное напряжённое состояние.

Если не только третий, но и второй инвариант равен нулю, то два главных напряжения равны нулю, т.е. получается одноосное напряжённое состояние.

12. Как определяется нормальное напряжение σ_v на произвольной площадке через главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$?

По формуле

$$\sigma_v = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2.$$

Действительно, внося в формулу (1.4.2) $\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl$, главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, имеем $\sigma_v = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$.

13. Как определяется касательное напряжение τ_v на произвольной площадке, через главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$?

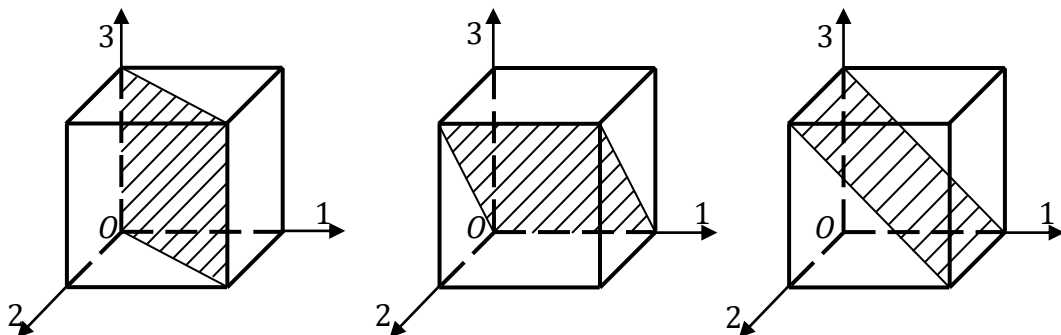
$$\tau_v = \sqrt{p_v^2 - \sigma_v^2} = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2} \text{ или}$$

при заданном направлении η с направляющими косинусами l_1, m_1, n_1 ,

по формуле (1.4.5) $-\tau_{\eta v} = \sigma_x ll_1 + \sigma_y mm_1 + \sigma_z nn_1 + \tau_{yx}(lm_1 + l_1 m) + \tau_{yz}(mn_1 + m n_1) + \tau_{zx}(nl_1 + n n_1)$, внося в неё главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, имеем

$$\tau_{\eta v} = \sigma_1 ll_1 + \sigma_2 mm_1 + \sigma_3 nn_1.$$

14. Как определяются величины максимальных касательных напряжений и направление соответствующих площадок?



$$l\{\sigma_1 - \sigma_3 - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2]\} = 0,$$

Найденные из системы уравнений (1.5.7) $-m\{\sigma_2 - \sigma_3 - 2[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2]\} = 0,$

$$l^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0.$$

значения l, m, n , удовлетворяющих условиям экстремума касательного напряжения τ_v ,

вставляются в формулу (1.5.5), решением которой получаются экстремальные касательные напряжения:

$$\tau_{12}^{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23}^{max} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{13}^{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Так как $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то $\tau_{13}^{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

15. Выведите дифференциальные уравнения равновесия элемента упругого тела (уравнения Навье-Коши). Напряжённое тело находится в равновесии, поэтому в равновесии должно находиться и вырезанный из него любой элементарный параллелепипед.

Для него составляются шесть уравнения равновесия, первые три из которых имеют вид:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0.$$

Остальные три уравнения в результате дают закон парности касательных напряжений.

Составим из первых трёх первое уравнение, т.е. $\sum X = 0$ (рис. 3), получим:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + X \cdot \rho dx dy dz = 0$$

Так как масса параллелепипеда равна произведению плотности на объём — $\rho dx dy dz$, то соответствующие этой массе проекции объёмной силы равны: $X \cdot \rho dx dy dz$, $Y \cdot \rho dx dy dz$, $Z \cdot \rho dx dy dz$.

Раскроем скобки и сократим все члены на $dx dy dz$, получим:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \cdot \rho = 0$$

Аналогично получаются и остальные два уравнения в направлениях y и z .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \cdot \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

16. Выведите уравнения равновесия на поверхности тела.

Заменяя в уравнении (1.2.1) —

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_v &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\}, \text{ составляющие } X_v, Y_v, Z_v \text{ полного напряжения } p_v \text{ на составляющие}$$

$\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, поверхностных сил, действующих на единицу поверхности тела, получим уравнения равновесия на поверхности

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - \bar{X} &= 0; \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n - \bar{Y} &= 0; \\ \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n - \bar{Z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

которая определяет статические условия равновесия на поверхности тела. Искомые напряжения должны удовлетворять уравнениям (1.1.1) и (1.2.2).

17. Как записываются компоненты линейных и угловых деформаций (уравнения Коши)?

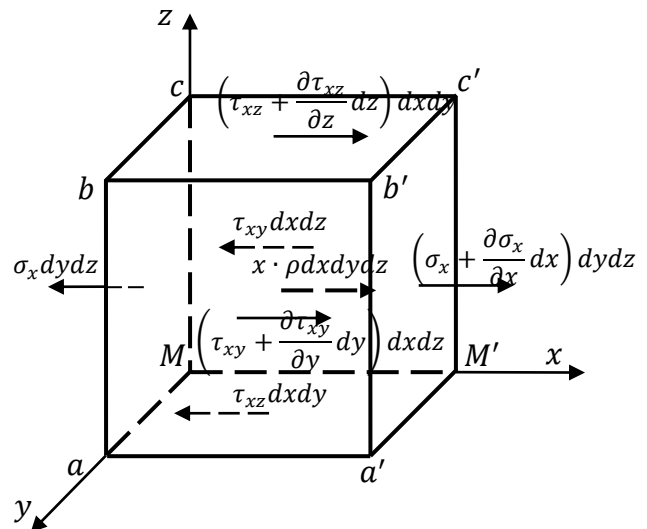


Рис. 3

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.7.1)$$

18. Как записывается тензор деформаций (E) ?

$$(E) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (1.8.1)$$

19. Как вычисляется деформация ε в направлении, определяемом косинусами l, m, n , через известные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$?

Аналогично нормальному напряжению на площадке, определяемому косинусами l, m, n , (1.4.2) – $(\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl.)$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl.$$

20. Как определяются главные деформации?

Из кубического уравнения

$$\lambda^3 - S_{1\varepsilon}\lambda^2 - S_{2\varepsilon}\lambda - S_{3\varepsilon} = 0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} S_{1\varepsilon} &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ S_{2\varepsilon} &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1, \\ S_{3\varepsilon} &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_z \gamma_{xy}^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3. \end{aligned} \right\}$$

Все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ этого уравнения являются действительными и равны главным деформациям.

21. Каков физический смысл условия совместности деформаций (Сен-Венана)?

Физический смысл уравнений совместности деформаций (Сен-Венана) состоит в том, что при произвольном задании шести функций деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, без соблюдения зависимостей (1.10.1), тело, сплошное и непрерывное до деформации, перестаёт быть сплошным и непрерывным. В теле появляются разрывы, так как заданные деформации произвольны, они не совместны.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.10.1)$$

22. На какие две группы можно разбить шесть уравнений совместности деформаций?

На две группы. В первую группу входят уравнения, устанавливающие связи между деформациями ε и γ , относящимися к одной плоскости, а во вторую – связи между деформациями в разных плоскостях.

23. *Задача.* Определить нормальное σ_v , касательное τ_v и полное p_v напряжения на наклонной площадке с направляющими косинусами $l = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $n = 0$, если известно, что $\sigma_x = 40$ МПа, $\sigma_y = -30$ МПа, $\sigma_z = 60$ МПа, $\tau_{xy} = 20$ МПа, $\tau_{xz} = -20$ МПа, $\tau_{yz} = 0$.

Решение:

$$p_v^2 = X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2, \quad X_v = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n = 40 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \cdot \frac{1}{2} = 44,6 \text{ МПа.}$$

$$Y_v = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 30 \cdot \frac{1}{2} = 2,3 \text{ МПа,}$$

$$Z_v = \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n = -20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -17,3 \text{ МПа,}$$

$$p_v^2 = 44,6^2 + 2,3^2 + (-17,3)^2 = 2294 \text{ (МПа)}^2, \quad p_v = 47,9 \text{ МПа, по формуле}$$

$$(1.4.1) - \sigma_v = X_v \cdot l + Y_v \cdot m + Z_v \cdot n = 44,6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2,3 \cdot \frac{1}{2} = 39,8 \text{ МПа,}$$

$$\tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2 = 2294 - (39,8)^2 = 710 \text{ (МПа)}^2, \quad \tau_v = 26,6 \text{ МПа.}$$

24. *Задача.* Определить главные напряжения и направления главных площадок, если напряжённое состояние в точке задано следующими значениями компонент напряжения: $\sigma_x = 10$ МПа, $\sigma_y = -20$ МПа, $\sigma_z = 30$ МПа, $\tau_{xy} = 20$ МПа, $\tau_{yz} = 30$ МПа, $\tau_{xz} = 40$ МПа.

Решение:

1. Определяем инварианты S_1, S_2, S_3 :

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 20 \text{ МПа,}$$

$$S_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = -34 \cdot 10^2 \text{ (МПа)}^2,$$

$$S_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yx}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 53 \cdot 10^3 \text{ (МПа)}^3$$

2. Определяем коэффициенты p и q уравнения

$$p = \frac{1}{3} \left(S_2 - \frac{1}{3} S_1^2 \right) = -11,7777 \cdot 10^2, \quad q = -\frac{1}{27} S_1^3 + \frac{1}{6} S_1 S_2 - \frac{1}{2} S_3 = 38,12962 \cdot 10^3,$$

$$\Delta = p^3 + q^2 = (-1633,734 - 1453,867) \cdot 10^6;$$

$\Delta < 0$ – все три корня действительные.

3. Вычисляем корни уравнения (1.4.6) – $x^3 + 3px + 3q = 0$: x_1, x_2 и x_3 и главные напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 :

$$\cos 3\varphi = -\frac{q}{|p|^{\frac{3}{2}}} = 0,943347. \quad \varphi = \frac{19^\circ 23'}{3} = 6^\circ 8', \quad \sqrt{|p|} = 34,31875, \quad 2\sqrt{|p|} = 68,6375,$$

$$\cos \varphi = 0,99364, \quad \cos(\varphi + 120^\circ) = -0,59436, \quad \cos(\varphi - 120^\circ) = -0,39928,$$

$$x_1 = 2\sqrt{|p|} \cdot \cos \varphi = 68,20007, \quad x_2 = 2\sqrt{|p|} \cdot \cos(\varphi + 120^\circ) = -40,79539, \quad x_3 = 2\sqrt{|p|} \cdot \cos(\varphi - 120^\circ) = -27,40558.$$

Вычисляем σ_1, σ_2 и σ_3 по формуле (1.4.5) – $\sigma = x + \frac{1}{3} S_1$ $\sigma_1 = 68,20007 + \frac{20}{3} = 74,87$ МПа, $\sigma_2 = -27,40558 + \frac{20}{3} = -20,74$ МПа, $\sigma_3 = -40,79539 + \frac{20}{3} = -34,13$ МПа.

Проверка. $S_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 74,87 - 20,74 - 34,13 = 20$ МПа, $S_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = 74,87 \cdot (-20,74) + (-20,74)(-34,13) + (-34,13) \cdot 74,87 = -34 \cdot 10^2 \text{ (МПа)}^2,$
 $S_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 74,87 \cdot (-20,74)(-34,13) = 53 \cdot 10^3 \text{ (МПа)}^3.$

4. Определяем направляющие косинусы главных площадок. Для этого в два из трёх

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n &= 0; \\ -\tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{yz} \cdot n &= 0; \\ \tau_{zx} \cdot l + \tau_{zy} \cdot m + (\sigma_z - \sigma) \cdot n &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ подставляем пооче-}$$

редно найденные значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а в качестве третьего используем геометрическое равенство (в) параграфа § 1.4 $-l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1$, где $i = 1, 2, 3$. Первая система уравнений для определения l, m, n имеет вид

$$\left. \begin{aligned} (10 - 74.87)l_1 + 20m_1 + 40n_1 &= 0, \\ 20l_1 - (20 + 74.87)m_1 + 30n_1 &= 0, \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы уравнений приводит к следующим значениям l_1, m_1, n_1 : $l_1 = 0.567525$, $m_1 = 0.354619$, $n_1 = 0.743073$.

Аналогично определяются направляющие косинусы двух других главных площадок. Результаты решения сведём в таблицу 1.2

Таблица 1.2

σ l, m, n	$\sigma_1 = 74.87 \text{ МПа}$	$\sigma_2 = -20.74 \text{ МПа}$	$\sigma_3 = -34.13 \text{ МПа}$
l_i	0.567525	0.821073	0.060981
m_i	0.354619	-0.175902	-0.918045
n_i	0.743073	-0.543042	0.391744

Для проверки правильности найденных значений направляющих косинусов используем условие ортогональности главных площадок, т.е.

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

25. *Задача.* Определить полное p_v нормальное σ_v и касательное τ_v напряжения на наклонной площадке с направляющими косинусами $l = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{\sqrt{2}}{2}$, если известно, что $\sigma_x = 10 \text{ МПа}$, $\sigma_y = -20 \text{ МПа}$, $\sigma_z = 30 \text{ МПа}$, $\tau_{xy} = 0$, $\tau_{xz} = 10 \text{ МПа}$, $\tau_{yz} = -10 \text{ МПа}$.

Решение:

$$\begin{aligned} p_v^2 &= X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2, \quad X_v = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n = 10 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &12.07 \text{ МПа. } Y_v = \tau_{yx} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n = 0 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -17.07 \text{ МПа, } Z_v = \tau_{zx} \cdot l + \\ &\tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n = 10 \cdot \frac{1}{2} - 10 \cdot \frac{1}{2} + 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 21.21 \text{ МПа, } p_v^2 = 12.07^2 + (-17.07)^2 + 21.21^2 = \\ &145.68 + 291.38 + 449.86 = 886.92 (\text{МПа})^2, \quad p_v = 29.78 \text{ МПа, по формуле (1.4.1) } - \sigma_v = \\ &X_v \cdot l + Y_v \cdot m + Z_v \cdot n = 12.07 \cdot \frac{1}{2} - 17.07 \cdot \frac{1}{2} + 21.21 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 12.5 \text{ МПа, } \tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2 = \\ &886.92 - 12.5^2 = 730.67 (\text{МПа})^2, \quad \tau_v = 27.03 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

26. *Задача.* Определить нормальные σ_v и касательное τ_v напряжения на площадке, равнонаклоненной к направлениям главных напряжений $\sigma_1 = 30 \text{ МПа}$, $\sigma_2 = 10 \text{ МПа}$, $\sigma_3 = -20 \text{ МПа}$.

Решение:

Направляющие косинусы для равнонаклоненной площадки равны: $l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$. По формуле (1.5.4) $-\sigma_v = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \frac{1}{3} (30 + 10 - 20) = \frac{20}{3} = 6. (6) \text{ МПа}$, а по

формуле (1.5.5) $-\tau_v^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2 = \frac{1}{3}(30^2 + 10^2 + 20^2) - \left[\frac{1}{3}(30 + 10 - 20)\right]^2 = 466. (6) - 44. (4) = 422. (2)(\text{МПа})^2$, $\tau_v = 20.55 \text{ МПа}$. Так как сумма первых трёх слагаемых в формуле (1.5.5) составляет квадрат полного напряжения, то полное напряжение $p_v = \sqrt{466. (6)} = 21.60 \text{ МПа}$.

27. *Задача.* Определить главные напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 , если напряжённое состояние в точке задано следующими значениями компонент напряжения: $\sigma_x = 20 \text{ МПа}$, $\sigma_y = 15 \text{ МПа}$, $\sigma_z = 30 \text{ МПа}$, $\tau_{xy} = -10 \text{ МПа}$, $\tau_{xz} = 20 \text{ МПа}$, $\tau_{yz} = 0$.

Решение:

1. Определяем инварианты S_1 , S_2 , S_3 :

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 65 \text{ МПа}, S_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 20 \cdot 15 + 15 \cdot 30 + 30 \cdot 20 - (-10)^2 - 0 - 20^2 = 300 + 450 + 600 - 100 - 400 = 8.5 \cdot 10^2 (\text{МПа})^2, \\ S_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yx} \tau_{yz} \tau_{xz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 20 \cdot 15 \cdot 30 + 0 - 0 - 15 \cdot 20^2 - 30 \cdot (-10)^2 = 9 \cdot 10^3 - 6 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^3 = 0$$

2. Раз третий инвариант равен нулю, то кубическое уравнение превращается в квадратное:

$$\sigma^2 - S_1 \sigma = 0, \text{ или} \\ \sigma^2 - 65\sigma + 850 = 0 \\ \sigma = \frac{65 \pm \sqrt{65^2 - 4 \cdot 850}}{2} = \frac{65 \pm \sqrt{4225 - 3400}}{2} = \frac{65 \pm 28.72}{2} \\ \sigma_1 = \frac{65+28.72}{2} = 46.86 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = \frac{65-28.72}{2} = 18.14 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = 0.$$

28. *Задача.* Определить главные напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 , если напряжённое состояние в точке задано следующими значениями компонент напряжения: $\sigma_x = 20 \text{ МПа}$, $\sigma_y = 15 \text{ МПа}$, $\sigma_z = 60 \text{ МПа}$, $\tau_{xy} = 10 \text{ МПа}$, $\tau_{xz} = 20 \text{ МПа}$, $\tau_{yz} = -10 \text{ МПа}$.

Решение:

1. Определяем инварианты S_1 , S_2 , S_3 :

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 20 + 15 + 60 = 95 \text{ МПа}, S_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 20 \cdot 15 + 15 \cdot 60 + 60 \cdot 20 - 10^2 - (-10)^2 - 20^2 = 300 + 900 + 1200 - 100 - 100 - 400 = 18.0 \cdot 10^2 (\text{МПа})^2, \\ S_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yx} \tau_{yz} \tau_{xz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 20 \cdot 15 \cdot 60 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot (-10) - 20 \cdot (-10)^2 - 15 \cdot 20^2 - 60 \cdot 10^2 = 18 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^3 - 6 \cdot 10^3 - 6 \cdot 10^3 = 0$$

2. Раз третий инвариант равен нулю, то кубическое уравнение превращается в квадратное:

$$\sigma^2 - S_1 \sigma + S_2 = 0, \text{ или} \\ \sigma^2 - 95\sigma + 1800 = 0 \\ \sigma = \frac{95 \pm \sqrt{95^2 - 4 \cdot 1800}}{2} = \frac{95 \pm \sqrt{9025 - 7200}}{2} = \frac{95 \pm 42.72}{2} \\ \sigma_1 = \frac{95+42.72}{2} = 68.86 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = \frac{95-42.72}{2} = 26.14 \text{ МПа}, \quad \sigma_3 = 0.$$

29. *Задача.* Напряжённое состояние в точке характеризуется следующими значениями составляющих напряжений: $\sigma_x = 20 \text{ МПа}$, $\sigma_y = 80 \text{ МПа}$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{xy} = 40 \text{ МПа}$, $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$. Доказать, что это напряжённое состояние является одноосным.

Решение:

1. Определяем инварианты S_1, S_2, S_3 :

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + 0 = 20 + 80 + 0 = 100 \text{ МПа}, S_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 20 \cdot 80 + 80 \cdot 0 + 0 \cdot 20 - 40^2 - 0 - 0 = 1600 - 1600 = 0, S_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yx}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0.$$

2. Раз второй и третий инварианты равны нулю, то кубическое уравнение превращается в линейное:

$$\sigma^2 - S_1 \sigma = 0 \text{ или } \sigma(\sigma - S_1) = 0$$

$$\sigma_1 = 100 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0.$$

30. *Задача.* Определить главные напряжения и направления главных площадок, если напряжённое состояние в точке задано следующими значениями компонент напряжения: $\sigma_x = 40 \text{ МПа}, \sigma_y = \sigma_z = 0, \tau_{xy} = 30 \text{ МПа}, \tau_{xz} = 10 \text{ МПа}, \tau_{yz} = 15 \text{ МПа}.$

Решение:

1. Определяем инварианты S_1, S_2, S_3

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 40 + 0 + 0 = 40 \text{ МПа}, S_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 0 + 0 + 0 - 30^2 - 10^2 - 15^2 = -12.25 \cdot 10^2 (\text{МПа})^2, S_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yx}\tau_{yz}\tau_{xz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 0 + 2 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 15 - 40 \cdot 15^2 - 0 - 0 = 9 \cdot 10^3 - 9 \cdot 10^3 = 0.$$

Равенство нулю инварианта S_3 указывает на то, что напряжённое состояние в заданной точке является двухосным. Уравнение (1.4.3) $\sigma^3 - S_1 \sigma^2 - S_2 \sigma - S_3 = 0$ получит вид:

$$\sigma^2 - S_1 \sigma + S_2 = 0, \text{ или } \sigma^2 - 40\sigma - 1225 = 0.$$

2. Решением квадратного уравнения

$$\sigma = 20 \pm \sqrt{20^2 + 1225} = 20 \pm \sqrt{1625} = 20 \pm 40.31,$$

получаем главные напряжения:

$$\sigma_1 = 60.31 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -20.31 \text{ МПа}.$$

3. Определяем направляющие косинусы l_1, m_1, n_1 площадок с главным напряжением $\sigma_1 = 60.31 \text{ МПа}$. Система уравнений (е) параграфа §1.4

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n &= 0; \\ \tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{yz} \cdot n &= 0; \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

примет вид

$$\left. \begin{aligned} -20.31l_1 + 30m_1 + 10n_1 &= 0; \\ 30l_1 - 60.31m_1 + 15n_1 &= 0; \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему уравнений, находим $l_1 = 0.8377, m_1 = 0.4810, n_1 = 0.2585$.

Аналогично, для площадок с главным напряжением $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = -20.31 \text{ МПа}$ получим направляющие косинусы l_2, m_2, n_2 и l_3, m_3, n_3 . Значения направляющих косинусов для главных площадок помещены в таблице 1.3.

Таблица 1.3

σ l, m, n	$\sigma_1 = 60.31 \text{ МПа}$	$\sigma_2 = 0$	$\sigma_3 = -20.31 \text{ МПа}$
l_i	0.8377	-0.42857	-0.3384

m_i	0.4810	0.28571	0.82886
n_i	0.2585	0.85714	-0.4455

Для проверки правильности найденных значений направляющих косинусов подставим их в уравнение $l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = 0$ при $i \neq j$.

31. *Задача.* Определить главные напряжения и направления главных площадок, если напряжённое состояние в точке задано следующими значениями компонент напряжения: $\sigma_x = 0, \sigma_y = 10 \text{ МПа}, \sigma_z = -40 \text{ МПа}, \tau_{xy} = 5 \text{ МПа}, \tau_{yz} = 0, \tau_{xz} = 10 \text{ МПа}$,

Решение:

1. Определяем инварианты S_1, S_2, S_3 :

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 0 + 10 - 40 = -30 \text{ МПа}, \quad S_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 0 + 10 \cdot (-40) + 0 - 5^2 - 0 - 10^2 = -5.25 \cdot 10^2 (\text{МПа})^2, \quad S_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yx} \tau_{yz} \tau_{xz} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = 0 + 0 - 0 - 10 \cdot 10^2 - (-40) \cdot 5^2 = -1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3 = 0.$$

Равенство нулю инварианта S_3 указывает на то, что напряжённое состояние в заданной точке является двухосным. Уравнение (1.4.3) $\sigma^3 - S_1 \sigma^2 - S_2 \sigma - S_3 = 0$ получит вид

$$\sigma^2 - S_1 \sigma + S_2 = 0, \text{ или } \sigma^2 + 30\sigma - 525 = 0.$$

2. Решением квадратного уравнения

$$\sigma = -15 \pm \sqrt{15^2 + 525} = -15 \pm \sqrt{750} = -15 \pm 27.39,$$

получаем главные напряжения:

$$\sigma_1 = 12.386 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -42.386 \text{ МПа}.$$

3. Определяем направляющие косинусы l_1, m_1, n_1 площадок с главным напряжением $\sigma_1 = 12.386 \text{ МПа}$. Система уравнений (е) параграфа §1.4

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) \cdot l + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n &= 0; \\ \tau_{yx} \cdot l + (\sigma_y - \sigma) \cdot m + \tau_{yz} \cdot n &= 0; \\ l^2 + m^2 + n^2 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

примет вид

$$\left. \begin{aligned} -12.386 l_1 + 5 m_1 + 10 n_1 &= 0; \\ 5 l_1 - 2.386 m_1 + 0 &= 0; \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Из второго уравнения $l_1 = \frac{2.386}{5} m_1 = 0.4772 m_1$, подстановкой в первое уравнение получаем: $-12.386 \cdot 0.4772 m_1 + 5 m_1 + 10 n_1 = 0$ или $-0.9106 m_1 + 10 n_1 = 0$, откуда $n_1 = 0.09106 m_1$

$$0.22772 m_1^2 + m_1^2 + 0.008292 m_1^2 = 1,$$

$$1.23601 m_1^2 = 1,$$

$$m_1^2 = 0.809055,$$

$$m_1 = 0.89945,$$

$$l_1 = 0.42922, \quad n_1 = 0.081903$$

Аналогично, для площадок с главным напряжением $\sigma_2 = 0, \sigma_3 = -20.31 \text{ МПа}$ получим направляющие косинусы l_2, m_2, n_2 и l_3, m_3, n_3 . Значения направляющих косинусов для главных площадок помещены в таблице 1.4.

Таблица 1.4

	$\sigma_1 = 12.386 \text{ МПа}$	$\sigma_2 = 0$	$\sigma_3 = -42.386 \text{ МПа}$
l_i	042922	0.87287	-0.232039
m_i	0.89945	-0.436435	0.022147
n_i	0.081903	0.0218217	0.972449

Для проверки правильности найденных значений направляющих косинусов подставим их в уравнение $l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = 0$ при $i \neq j$.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 2.1. Обобщённый закон Гука. Выражение деформаций через напряжения для анизотропного и изотропного тела

Для совместного рассмотрения теории напряжений и теории деформаций необходимо установить зависимости между напряжениями и деформациями.

Если тело обладает различными упругими свойствами в разных направлениях, то такое тело – анизотропное. В самом общем виде связь между деформациями и напряжениями в анизотропном теле можно записать в виде следующей системы линейных зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{yz} + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + a_{24}\tau_{yz} + a_{25}\tau_{zx} + a_{26}\tau_{xy} \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{zx} + a_{36}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= a_{41}\sigma_x + a_{42}\sigma_y + a_{43}\sigma_z + a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{zx} + a_{46}\tau_{xy} \\ \gamma_{zx} &= a_{51}\sigma_x + a_{52}\sigma_y + a_{53}\sigma_z + a_{54}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{zx} + a_{56}\tau_{xy} \\ \gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{64}\tau_{yz} + a_{65}\tau_{zx} + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

Коэффициенты a_{ij} в системе уравнений (2.1.1) характеризуют податливость упругого тела. Чем больше величина этих коэффициентов, тем больше будут деформации при одних и тех же напряжениях.

Из 36 упругих постоянных a_{ij} независимыми являются 21. Матрица коэффициентов a_{ij} симметрична относительно главной диагонали, т.е. имеют место равенства $a_{ij} = a_{ji}$.

Если тело обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии упругих свойств, то такое тело называется ортотропным. Для ортотропного тела число упругих постоянных снижается до 9. В случае ортотропного тела линейные деформации тела $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ зависят только от нормальных напряжений $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ и не зависят от касательных напряжений $(\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy})$. При этом угловые деформации $(\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})$ пропорциональны соответствующим касательным напряжениям $(\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy})$ и не зависят от величин нормальных напряжений.

Уравнения обобщенного закона Гука распадаются на две независимые группы:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= a_{55}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} &= a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

Для ортотропного тела упругие коэффициенты имеют следующий вид

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_1}, & a_{22} &= \frac{1}{E_2}, & a_{33} &= \frac{1}{E_3} \\ a_{12} &= a_{21} = -\frac{\mu_{21}}{E_2} = -\frac{\mu_{12}}{E_1}, \\ a_{13} &= a_{31} = -\frac{\mu_{31}}{E_3} = -\frac{\mu_{13}}{E_1}, \\ a_{23} &= a_{32} = -\frac{\mu_{32}}{E_3} = -\frac{\mu_{23}}{E_2}, \\ a_{44} &= \frac{1}{G_{23}}, & a_{55} &= \frac{1}{G_{13}}, & a_{66} &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

Здесь E_1, E_2, E_3 – модули упругости в направлениях координатных осей x, y, z соответственно; $\mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32}$ – коэффициенты Пуассона. Например, коэффициент μ_{12} характеризует величину поперечной деформации в направлении оси y от напряжения σ_x , а μ_{21} – величину поперечной деформации в направлении оси x от напряжения σ_y . Поскольку матрица коэффициентов a_{ij} симметрична и $a_{ij} = a_{ji}$, то коэффициенты Пуассона μ_{ij} и модули упругости E_i, E_j для ортотропного тела связаны дополнительными равенствами

$$\mu_{ij}E_j = \mu_{ji}E_i. \quad (2.1.4)$$

Учитывая равенства (3.1.3), обобщённый закон Гука для ортотропного тела можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \mu_{21} \frac{\sigma_y}{E_2} - \mu_{31} \frac{\sigma_z}{E_3}, \\ \varepsilon_y &= -\mu_{12} \frac{\sigma_x}{E_1} + \frac{\sigma_y}{E_2} - \mu_{32} \frac{\sigma_z}{E_3}, \\ \varepsilon_z &= -\mu_{13} \frac{\sigma_x}{E_1} - \mu_{23} \frac{\sigma_y}{E_2} + \frac{\sigma_z}{E_3}. \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_{23}} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G_{31}} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_{12}} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

Если тело обладает одинаковыми упругими свойствами в любых направлениях оно – изотропное. За основу берётся экспериментально установленный закон Гука для линейного напряжённого состояния, который распространяется для пространственного случая (рис. 10). Из произвольно нагруженного и находящегося в равновесии тела высекается элементарный параллелепипед. Влияние отброшенных частей на его гранях заменяется усилиями. На противоположных гранях усилия отличаются малыми приращениями, которые в свою очередь тоже вызывают деформации, но они являются малыми высшего порядка и ими можно пренебречь, т.е. считается, что на противоположных гранях возникшие усилия одинаковые. Для упрощения записи берутся единичные рёбра, т.е. рассматривается куб единичных размеров. Следовательно, усилия на гранях будут численно равны напряжениям.

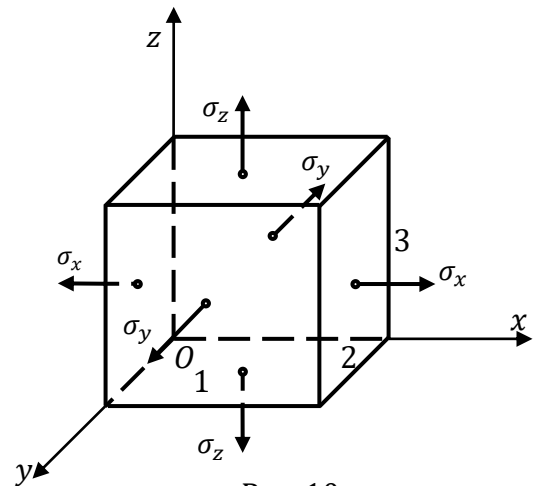


Рис. 10

Так как линейные деформации тела $(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \varepsilon_y)$ зависят только от нормальных напряжений $(\sigma_x, \sigma_z, \sigma_y)$, то сначала ведём их вычисление при наличии только нормальных напряжений $\sigma_x, \sigma_z, \sigma_y$.

В рассматриваемом кубе абсолютные деформации (удлинения или укорочения) рёбер численно равняются относительным деформациям $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \varepsilon_y$. Применив принцип

независимого действия сил, линейную деформацию ребра 1, в направлении оси x вычисляем, как сумму трёх линейных деформаций:

$$\varepsilon_x = \varepsilon'_x + \varepsilon''_x + \varepsilon'''_x. \quad (a)$$

Первое слагаемое соответствует действию напряжения σ_x , которое направлено по направлению ребра 1 и поэтому, по закону Гука, деформация ε'_x равна:

$$\varepsilon'_x = \frac{\sigma_x}{E}.$$

Второе и третье слагаемые соответственно вызываются действием напряжений σ_y и σ_z , для которых направление ребра 1 является поперечным и поэтому по формуле $\varepsilon = -\nu\varepsilon'$, ε'_x и ε''_x будут равняться:

$$\varepsilon'_x = -\nu\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon''_x = -\nu\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_z}{E}.$$

Поставляя эти значения в выражении (a), получается:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

Аналогично можно написать выражения продольных деформаций и для двух других рёбер – 2 и 3 (рис. 10). В итоге получаются три уравнения зависимости линейных деформаций и нормальных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.6)$$

Затем вычисляем угловые деформации при наличии только касательных напряжений:

Здесь принцип наложения сил не применяется, т.к. каждое из касательных напряжений τ_{xy} , τ_{yz} и τ_{zx} вызывает одну из трёх угловых деформаций γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} исключительно в своей плоскости: τ_{xy} в плоскости параллельной xOy , τ_{yz} в плоскости параллельной yOz и τ_{zx} в плоскости zOx и не искажает углы в остальных двух других, перпендикулярных ей плоскостях.

Для начала, рассматривается какая-либо одна из них, например, плоскость, параллельная координатной плоскости xOy (рис. 11).

Закон Гука записывается в следующем виде:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

Вполне аналогично составляются и два других уравнения. В итоге получаются три уравнения зависимости угловых деформаций и касательных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

При наличии одновременно всех шести напряжений: трёх нормальных $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и трёх касательных напряжений $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, получается система, составленная из шести уравнений:

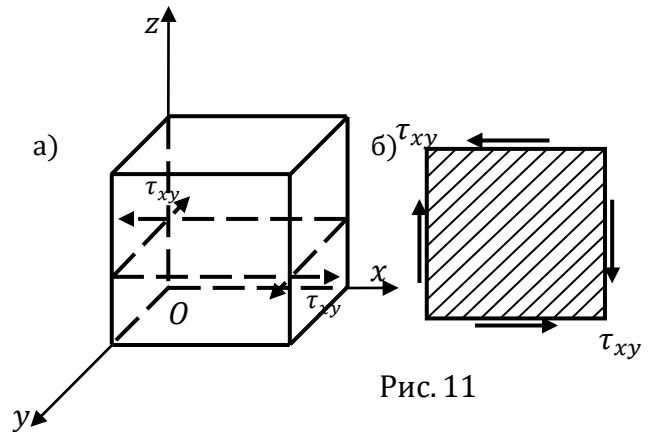


Рис. 11

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.7)$$

Система (2.1.7) называется обобщённым законом Гука для изотропного тела, и выражает линейную зависимость между составляющими деформации и напряжения.

§ 2.2. Выражение составляющих напряжения через составляющие деформации для изотропного тела

1) Обобщённый закон Гука (2.1.7) можно записать и в обратной форме.

С этой целью:

а) предварительно выводится соотношение для объёмной деформации:

Складывая почленно первые три формулы обобщенного закона, находим

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] + \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (a)$$

Левая часть является объёмной деформацией θ , а в правой части сумма $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, первым инвариантом S_1 напряжённого состояния. С учётом этого получаем:

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E} S_1. \quad (2.2.1)$$

Введя модуль объёмного расширения

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad (б)$$

получаем $\theta = \frac{1}{3K} S_1$, откуда

$$S_1 = 3K\theta, \quad (2.2.2)$$

т.е. первый инвариант прямо пропорционален объёмной деформации. Заменяя S_1 средним напряжением $\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} S_1$, вместо уравнения (2.2.2), получаем:

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (2.2.3)$$

Соотношение (2.2.3) выражает прямо пропорциональную зависимость между средним напряжением и объёмной деформацией и по форме совпадает с законом Гука.

б) выводятся формулы обобщённого закона Гука:

Берём первую формулу системы уравнений (2.1.7) и к членам в квадратных скобках прибавляем и вычитываем величину $\nu\sigma_x$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_x - \nu S_1].$$

Подставляя сюда выражение S_1 по формуле $S_1 = 3K\theta = \frac{E}{1-2\nu}\theta$, получим

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu)\sigma_x - \frac{E\nu}{1-2\nu}\theta \right] = \frac{(1 + \nu)}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{1-2\nu}\theta,$$

откуда находим напряжение

$$\sigma_x = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\theta + \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_x. \quad (в)$$

Обозначим коэффициенты перед θ и ε_x , соответственно через λ и η . Примем их за новые модули упругости

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.2.4)$$

В последнем выражении можно заметить, что μ является тем же, что и модуль сдвига $\mu = G$.

В (2.2.4) оба λ и μ вместе называются упругими постоянными Ламе. Формула (в) принимает вид:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x. \quad (\text{г})$$

Аналогично формуле (г), получаются ещё две формулы для вычисления остальных двух напряжений σ_y и σ_z .

В итоге, с учётом ещё трёх формул закона Гука для сдвига, получаются все шесть формул закона Гука обратной формы, т.е. закона Гука, записанного в напряжениях:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, & \tau_{yz} &= \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= \mu\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.5)$$

2) Через коэффициенты Ламе можно записать соотношение между средним напряжением и средней деформацией.

Складывая первые три уравнения системы (2.2.5), находим

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda\theta + 2\mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

или

$$S_1 = (3\lambda + 2\mu)\theta \quad (2.2.6)$$

Заменяя первый инвариант в этом соотношении, утроенным средним напряжением $S_1 = 3 \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = 3\sigma_0$ в точке O , а объёмную деформацию – утроенной средней деформацией $\theta = 3 \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = 3\varepsilon_0$ в точке O , получаем ещё одну форму закона Гука

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_0. \quad (2.2.7)$$

§ 2.3. Потенциальная энергия деформации. Формулы Кастильяно и Грина

Рассмотрим элементарный параллелепипед с рёбрами dx, dy, dz , по граням которого действуют внутренние усилия $\sigma_x dydz, \sigma_y dxdz, \dots, \tau_{xy} dydz$ (рис.12). Потенциальная энергия деформации численно равна работе внутренних усилий на перемещениях, вызванных действием этих усилий, отнесённой к единице объёма:

$$\bar{w} = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy}), \quad (2.3.1)$$

Используя выражение для обобщённого закона Гука (2.1.7), представим выражение для $\bar{w}$ через напряжения:

$$\bar{w} = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E}(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (2.3.2)$$

Из выражения (2.3.2) следует, что в любой точке тела потенциальная энергия деформации положительна.

Потенциальная энергия деформации для всего тела может быть получена интегрированием выражений (2.3.1) или (2.3.2) по всему объёму тела:

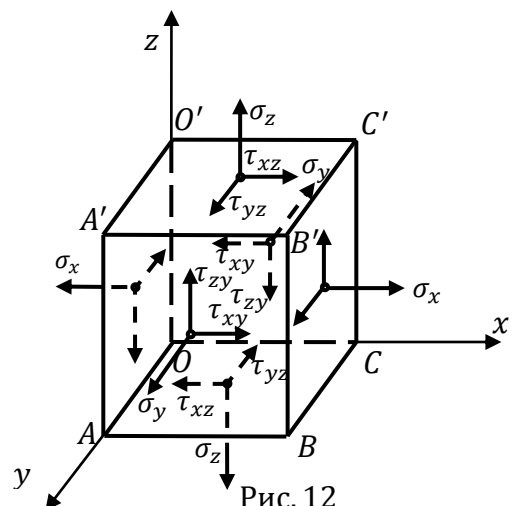


Рис. 12

$$W = \iiint_V \bar{w} dx dy dz. \quad (2.3.3)$$

Если взять частные производные от выражения для удельной потенциальной (2.3.2) по напряжениям, то мы получим соответствующие деформации.

$$\text{В самом деле, } \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E} (\sigma_y + \sigma_z) = \varepsilon_x.$$

Аналогично можно получить выражения и для остальных деформаций

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_x} &= \varepsilon_x; & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_y} &= \varepsilon_y; & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_z} &= \varepsilon_z. \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau_{yz}} &= \gamma_{yz}; & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau_{zx}} &= \gamma_{zx}; & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau_{xy}} &= \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.4)$$

Выражения (2.3.4) называются формулами Кастильяно.

Потенциальную энергию деформации $\bar{w}$ можно выразить через деформации. Для этого необходимо воспользоваться выражениями закона Гука в форме Ламе (2.2.5) и подставить их в (2.3.1). После преобразований можно получить

$$\bar{w} = \frac{1}{2} [(2G\varepsilon_x^2 + \lambda\theta\varepsilon_x) + (2G\varepsilon_y^2 + \lambda\theta\varepsilon_y) + (2G\varepsilon_z^2 + \lambda\theta\varepsilon_z) + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)] \quad (2.3.5)$$

Определив частные производные от выражения (2.3.5) по деформациям $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \dots, \gamma_{xy}$, получим соответствующие напряжения.

Например, возьмём частную производную $\frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_x}$:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_x} = \frac{1}{2} [4G\varepsilon_x + \lambda(2\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z] = 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

Так как $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, то правая часть полученного уравнения, как следует из (2.2.5), равна σ_x и $\frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x$.

Аналогично могут быть получены частные производные от $\bar{w}$ по другим составляющим деформаций $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \dots, \gamma_{xy}$.

Таким образом, имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_x} &= \sigma_x; & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_y} &= \sigma_y; & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_z} &= \sigma_z. \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma_{yz}} &= \tau_{yz}; & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma_{zx}} &= \tau_{zx}; & \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma_{xy}} &= \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3.6)$$

Выражения (2.3.6) представляют собой так называемые формулы Грина.

§ 2.4. Основные принципы

1. Принцип взаимности (теорема Бетти). Пусть на тело действуют две системы поверхностных сил $\bar{X}_v^I, \bar{Y}_v^I, \bar{Z}_v^I$ и $\bar{X}_v^{II}, \bar{Y}_v^{II}, \bar{Z}_v^{II}$. Напряжения, деформации и перемещения, соответствующие действию каждой из систем нагрузок, обозначим соответственно $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{yz}, \tau'_{zx}, \tau'_{xy}, \varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \varepsilon'_z, \gamma'_{yz}, \gamma'_{zx}, \gamma'_{xy}, u', v', w'$ при действии первой системы сил и $\sigma''_x, \sigma''_y, \sigma''_z, \tau''_{yz}, \tau''_{zx}, \tau''_{xy}, \varepsilon''_x, \varepsilon''_y, \varepsilon''_z, \gamma''_{yz}, \gamma''_{zx}, \gamma''_{xy}, u'', v'', w''$ при действии второй системы сил.

Работу внутренних усилий, вызванных действием первой системы сил, на перемещениях, вызванных действием второй системой сил, обозначим A_{12} . Эта работа внутренних сил запишется в виде

$$A_{12} = \iiint_V (\sigma'_x \varepsilon''_x + \sigma'_y \varepsilon''_y + \sigma'_z \varepsilon''_z + \tau'_{yz} \gamma''_{yz} + \tau'_{zx} \gamma''_{zx} + \tau'_{xy} \gamma''_{xy}) dx dy dz. \quad (2.4.1)$$

Аналогично запишем выражение для работы внутренних усилий, вызванных действием второй системой сил, на перемещениях, вызванных действием первой системой сил:

$$A_{21} = \iiint_V (\sigma'_x \varepsilon'_x + \sigma'_y \varepsilon'_y + \sigma'_z \varepsilon'_z + \tau'_{yz} \gamma'_{yz} + \tau'_{zx} \gamma'_{zx} + \tau'_{xy} \gamma'_{xy}) dx dy dz. \quad (2.4.2)$$

Докажем, что в случае справедливости закона Гука, т.е. тогда, когда между напряжениями и деформациями имеет место линейная зависимость, $A_{12} = A_{21}$.

Если в (2.4.1) и (2.4.2) вместо деформаций подставить соответствующие им выражения из (2.1.7), то нетрудно доказать, что подинтегральные функции в (2.4.1) и (2.4.2) будут одинаковы.

В самом деле, после подстановки в (2.4.1) выражений для деформаций получим

$$\sigma'_x \varepsilon'_x + \sigma'_y \varepsilon'_y + \sigma'_z \varepsilon'_z + \tau'_{yz} \gamma'_{yz} + \tau'_{zx} \gamma'_{zx} + \tau'_{xy} \gamma'_{xy} = \frac{1}{E} \{ \sigma'_x \sigma'_x + \sigma'_y \sigma'_y + \sigma'_z \sigma'_z - \mu [\sigma'_x (\sigma'_y + \sigma'_z) + \sigma'_y (\sigma'_x + \sigma'_z) + \sigma'_z (\sigma'_x + \sigma'_y)] \} + \frac{2(1+\mu)}{E} [\tau'_{yz} \tau'_{yz} + \tau'_{zx} \tau'_{zx} + \tau'_{xy} \tau'_{xy}].$$

После подстановки (2.1.7), в подинтегральное выражение (2.4.2) будем иметь

$$\sigma''_x \varepsilon'_x + \sigma''_y \varepsilon'_y + \sigma''_z \varepsilon'_z + \tau''_{yz} \gamma'_{yz} + \tau''_{zx} \gamma'_{zx} + \tau''_{xy} \gamma'_{xy} = \frac{1}{E} \{ \sigma''_x \sigma'_x + \sigma''_y \sigma'_y + \sigma''_z \sigma'_z - \mu [\sigma''_x (\sigma'_y + \sigma'_z) + \sigma''_y (\sigma'_x + \sigma'_z) + \sigma''_z (\sigma'_x + \sigma'_y)] \} + \frac{2(1+\mu)}{E} [\tau''_{yz} \tau'_{yz} + \tau''_{zx} \tau'_{zx} + \tau''_{xy} \tau'_{xy}].$$

Сравнивая правые части полученных равенств, убеждаемся в том, что правые части этих равенств одинаковы. Отсюда следует, что и левые части должны быть равны, т.е. $A_{12} = A_{21}$, или

$$\iiint_V (\sigma'_x \varepsilon'_x + \sigma'_y \varepsilon'_y + \sigma'_z \varepsilon'_z + \tau'_{yz} \gamma'_{yz} + \tau'_{zx} \gamma'_{zx} + \tau'_{xy} \gamma'_{xy}) dx dy dz = \iiint_V (\sigma''_x \varepsilon'_x + \sigma''_y \varepsilon'_y + \sigma''_z \varepsilon'_z + \tau''_{yz} \gamma'_{yz} + \tau''_{zx} \gamma'_{zx} + \tau''_{xy} \gamma'_{xy}) dx dy dz. \quad (2.4.3)$$

Итак, мы доказали, что для упругого тела, следующего закону Гука, работа усилий, вызванных действием сил первого состояния, на перемещениях, вызванных действием сил второго состояния, равна работе усилий, вызванных действием сил второго состояния, на перемещениях, вызванных действием сил первого состояния.

Это и есть так называемый принцип взаимности работ или теорема Бетти. Этот принцип распространяется в равной мере как на работу внутренних усилий, так и на работу внешних нагрузок.

Следует отметить, что теорема Бетти о взаимности работ может быть подобным же образом доказана и для любого анизотропного тела, для которого обобщённый закон Гука в самом общем виде может быть представлен выражениями (2.1.1).

Принцип взаимности работ – один из основных принципов классической линейной теории упругости.

2. Начало возможных перемещений Лагранжа. Применительно к твёрдым телам начало возможных перемещений сформировано Лагранжем в его «Аналитической механике» (1788 г.). К упругим телам (стержневой системе) этот принцип впервые был применён Пуассоном в 1833 г. Подобно тому, как для твёрдых тел начало возможных перемещений позволяет получить уравнения равновесия твёрдого тела, так и для упругих тел начало возможных перемещений может заменить уравнения равновесия тела.

Согласно началу возможных перемещений работа всех внешних сил, действующих на упругое тело, находящееся в равновесии, на любом возможном перемещении равна приращению потенциальной энергии.

Под возможными перемещениями $\delta u, \delta v, \delta w$ понимают такие, которые совместимы с условиями закрепления тела на границах и условиями неразрывности внутри тела.

Работа внешних сил на этих перемещениях равна

$$\delta A = \iiint_V (X\rho\delta u + Y\rho\delta v + Z\rho\delta w)dxdydz + \iint_S (\bar{X}\delta u + \bar{Y}\delta v + \bar{Z}\delta w)dS.$$

Первый интеграл представляет собой работу объёмных сил, а второй – поверхностных внешних сил.

Работа внутренних упругих сил на возможных перемещениях равна изменению потенциальной энергии

$$\delta W = \iiint_V (\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy})dxdydz,$$

$$\text{где } \delta\varepsilon_x = \frac{\partial\delta u}{\partial x}, \delta\varepsilon_y = \frac{\partial\delta v}{\partial y}, \delta\varepsilon_z = \frac{\partial\delta w}{\partial z}, \delta\gamma_{yz} = \frac{\partial\delta v}{\partial z} + \frac{\partial\delta w}{\partial y}, \delta\gamma_{zx} = \frac{\partial\delta w}{\partial x} + \frac{\partial\delta u}{\partial z}, \delta\gamma_{xy} = \frac{\partial\delta u}{\partial y} + \frac{\partial\delta v}{\partial x}.$$

При этом предполагается, что напряжения $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy})$ не изменяются в процессе варьирования перемещений, а возможные перемещения достаточно малы.

Так как все внутренние и внешние силы считаются неизменными при вычислении работы на любых возможных перемещениях, то значок δ можно вынести за знак интеграла.

Тогда будем иметь

$$\delta \left[\iiint_V \bar{w}dxdydz - \iiint_V (X\rho\delta u + Y\rho\delta v + Z\rho\delta w)dxdydz - \iint_S (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w)dS \right] = 0 \quad (2.4.4)$$

Первый интеграл в скобках представляет потенциальную энергию деформации, а второй – потенциальную энергию внешних объёмных сил, действующих на тело, если принять потенциал этих сил равным нулю при $u = v = w = 0$. Таким образом, все выражения в скобках есть полная потенциальная энергия системы, а выражение(2.4.4) указывает, что в случае равновесия тела возможные перемещения должны быть такими, чтобы полная потенциальная энергия системы имела экстремальное значение. Если равновесие устойчивое, то потенциальная энергия системы будет минимальной.

Отметим, что начало возможных перемещений может применяться и к упругим телам, не следующим закону Гука.

3. Начало виртуальных изменений напряжённого состояния (принцип Кастильяно). Виртуальными изменениями напряжённого состояния называются такие, при которых будут справедливы уравнения равновесия внутри тела и на его поверхности. Используя уравнения (1.1.1) и (1.2.1), будем иметь внутри тела

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\delta\sigma_x + \frac{\partial}{\partial y}\delta\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\delta\tau_{xz} + \delta(X \cdot \rho) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\delta\tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}\delta\sigma_y + \frac{\partial}{\partial z}\delta\tau_{yz} + \delta(Y \cdot \rho) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\delta\tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}\delta\tau_{zy} + \frac{\partial}{\partial z}\delta\sigma_z + \delta(Z \cdot \rho) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.5)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy} m + \delta\tau_{xz} n &= \delta\bar{X}; \\ \delta\tau_{yx} l + \delta\sigma_y m + \delta\tau_{yz} n &= \delta\bar{Y}; \\ \delta\tau_{zx} l + \delta\tau_{zy} m + \delta\sigma_z n &= \delta\bar{Z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.6)$$

Здесь через $\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}, \delta\tau_{xy}$ обозначены виртуальные изменения напряжений, а через $\delta(X \cdot \rho), \delta(Y \cdot \rho), \delta(Z \cdot \rho), \delta\bar{X}, \delta\bar{Y}, \delta\bar{Z}$ – виртуальные изменения внешних сил, объёмных и поверхностных.

При всяком виртуальном изменении напряжённого состояния тела сумма работ приращений всех внешних сил $\delta(X \cdot \rho), \delta(Y \cdot \rho), \delta(Z \cdot \rho), \delta\bar{X}, \delta\bar{Y}, \delta\bar{Z}$, производимых на перемещениях, статически соответствующих этим силам (т.е. на действительных перемещениях тела), равна приращению потенциальной энергии тела.

В случае отсутствия объёмных сил ($X \cdot \rho = Y \cdot \rho = Z \cdot \rho = 0$) начало виртуальных изменений напряжённого состояния запишется в следующем виде:

$$\iint_S (u\delta\bar{X} + v\delta\bar{Y} + w\delta\bar{Z}) dS = \delta W. \quad (2.4.7)$$

Здесь u, v, w – действительные перемещения точек тела. В правой части равенства (2.4.7) стоит приращение потенциальной энергии тела, обусловленное изменениями напряжений, совместимых с условиями равновесия. Для единицы объёма приращение потенциальной энергии тела составит

$$\delta\bar{W} = \frac{\partial\bar{W}}{\partial\sigma_x} \delta\sigma_x + \frac{\partial\bar{W}}{\partial\sigma_y} \delta\sigma_y + \frac{\partial\bar{W}}{\partial\sigma_z} \delta\sigma_z + \frac{\partial\bar{W}}{\partial\tau_{yz}} \delta\tau_{yz} + \frac{\partial\bar{W}}{\partial\tau_{zx}} \delta\tau_{zx} + \frac{\partial\bar{W}}{\partial\tau_{xy}} \delta\tau_{xy}.$$

Применяя во внимание формулы Кастильяно (2.3.4) –

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\bar{W}}{\partial\sigma_x} &= \varepsilon_x; \frac{\partial\bar{W}}{\partial\sigma_y} = \varepsilon_y; \frac{\partial\bar{W}}{\partial\sigma_z} = \varepsilon_z. \\ \frac{\partial\bar{W}}{\partial\tau_{yz}} &= \gamma_{yz}; \frac{\partial\bar{W}}{\partial\tau_{zx}} = \gamma_{zx}; \frac{\partial\bar{W}}{\partial\tau_{xy}} = \gamma_{xy}. \end{aligned} \right\}, \text{ справедливые для материалов, подчиняющихся закону}$$

Гука, будем иметь

$$\delta\bar{W} = \varepsilon_x \delta\sigma_x + \varepsilon_y \delta\sigma_y + \varepsilon_z \delta\sigma_z + \gamma_{yz} \delta\tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta\tau_{zx} + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy}. \quad (2.4.8)$$

Если выражение (2.4.8) проинтегрировать по всему объёму тела и принять во внимание (2.4.5) и (2.4.6), то можно доказать справедливость (2.4.7).

Таким образом, из сказанного следует, что начало виртуальных изменений

напряжённого состояния можно применять к таким упругим телам, которые следуют закону Гука.

4. Начало наименьшей работы. При рассмотрении начала виртуальных изменений напряжённого состояния изменениям подвергались как внутренние усилия, так и внешние нагрузки. Накладывалось только условие, чтобы эти изменения напряжённого состояния удовлетворяли уравнениям равновесия на поверхности и внутри тела. Допустим теперь, что внешние нагрузки не изменяются, а изменяется только напряжённое состояние внутри тела. Тогда, поскольку $\delta\bar{X} = \delta\bar{Y} = \delta\bar{Z} = 0$, вместо (2.4.6) запишем

$$\left. \begin{aligned} \delta\sigma_x l + \delta\tau_{xy} m + \delta\tau_{xz} n &= 0; \\ \delta\tau_{yx} l + \delta\sigma_y m + \delta\tau_{yz} n &= 0; \\ \delta\tau_{zx} l + \delta\tau_{zy} m + \delta\sigma_z n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.9)$$

Так как левая часть равенства (2.4.7) при этом будет равна нулю, то оказывается, что

$$\delta W = 0 \quad (2.4.10)$$

Это означает, что из всех напряжённых состояний, статически соответствующих заданным внешним нагрузкам тела, действительное напряжённое состояние должно удовлетворять условию (2.4.10), т.е. обращать приращение потенциальной энергии в нуль. Можно

показать, что действительное напряжённое состояние тела обращает потенциальную энергию тела в минимум.

Уравнение (2.4.10) выражает так называемое начало наименьшей работы. Так же, как и принцип Кастильяно, начало наименьшей работы применимо к телам, следующим закону Гука.

Следует отметить, что начало наименьшей работы может применяться и в том случае, если внешние силы (реакции связей) подвергаются изменениям, но перемещения соответствующих точек приложения этих сил равны нулю. В этом случае работа этих внешних сил будет равна нулю и левая часть уравнения (2.4.7) также будет равна нулю. В такой форме начало наименьшей работы может использоваться для определения реакций в статически неопределимых системах (имеющих «лишние» связи). Уравнениями для определения этих «лишних» связей будут

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{X}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{Y}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{Z}} = 0. \quad (2.4.11)$$

При этом предварительно потенциальную энергию необходимо выразить через неизвестные реакции связей $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$.

Сравнивая начало возможных перемещений Лагранжа и начало виртуальных изменений напряжённого состояния упругого тела Кастильяно, следует отметить, что первое заменяет собой уравнения равновесия (внутри тела и на его поверхности), а второе – уравнения совместности деформаций.

При использовании начала возможных перемещений при выборе функций для перемещений или деформаций необходимо соблюдать условия неразрывности внутри тела и геометрические граничные условия на поверхности.

При решении задач теории упругости с использованием начала виртуальных изменений напряжённого состояния необходимо учитывать, что выбираемые функции напряжений и их вариации $(\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}, \delta\tau_{xy})$ должны удовлетворять условиям равновесия внутри тела и статическим граничным условиям на поверхности.

Многие методы решения задач прикладной теории упругости, например, такие, как прямые вариационные методы, о которых более подробно будет сказано далее, в основе своём опираются на принципы Лагранжа и Кастильяно.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какие тела называются изотропными и какие анизотропными?

Тела, упругие свойства которых в любых направлениях одинаковые, называются изотропными.

Тела, у которых упругие свойства в разных направлениях разные, называются анизотропными.

2. Какое количество упругих постоянных имеются в уравнениях закона Гука анизотропного тела в самом общем виде?

В самом общем случае в системе линейных зависимостей между деформациями и напряжениями обобщённого закона Гука для анизотропного тела имеются 36 упругих постоянных, из которых независимыми являются 21. Матрица коэффициентов a_{ij} симметричная относительно главной диагонали, т.е. имеют место равенства $a_{ij} = a_{ji}$.

3. Какие тела называются ортотропными?

Тела, которые обладают тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии упругих свойств. Для ортотропного тела число упругих постоянных снижается до 9.

4. Напишите уравнения закона Гука для ортотропного тела.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z \\ \varepsilon_z &= a_{31}\sigma_x + a_{32}\sigma_y + a_{33}\sigma_z \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= a_{55}\tau_{zx} \\ \gamma_{xy} &= a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \right\}$$

5. Напишите уравнения обобщённого закона Гука для изотропного тела.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.7)$$

6. Как записываются уравнения обобщённого закона Гука в форме Ляме?

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y, \quad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, \quad \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.5)$$

7. Как выражаются упругие постоянные Ляме μ, λ через модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν ?

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.2.4)$$

8. Как выражается потенциальная энергия деформации упругого тела W через напряжения?

W выражается тройным интегралом от удельной потенциальной энергии $\bar{w}$ (интегрированием $\bar{w}$ по всему телу)

$$W = \iiint_V \bar{w} dx dy dz,$$

где $\bar{w} = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{xy}\gamma_{xy}),$

или через напряжения

$$\bar{w} = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\mu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2).$$

9. Как выражается удельная потенциальная энергия деформаций $\bar{w}$ упругого тела через деформации?

$$\bar{w} = \frac{1}{2}[(2G\varepsilon_x^2 + \lambda\theta\varepsilon_x) + (2G\varepsilon_y^2 + \lambda\theta\varepsilon_y) + (2G\varepsilon_z^2 + \lambda\theta\varepsilon_z) + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)].$$

где $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$

10. Как записываются формулы Кастильяно?

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_x} &= \varepsilon_x; \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_y} = \varepsilon_y; \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z. \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau_{yz}} &= \gamma_{yz}; \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau_{zx}} = \gamma_{zx}; \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}. \end{aligned}$$

11. Какие зависимости устанавливают формулы Грина?

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_x} &= \sigma_x; \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y; \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z. \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma_{yz}} &= \tau_{yz}; \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx}; \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}. \end{aligned}$$

12. Сформулируйте принцип взаимности работ (теорему Бетти).

Для упругого тела, следующему закону Гука, работа усилий, вызванных действием сил первого состояния, на перемещениях, вызванных действием сил второго состояния, равна работе усилий, вызванных действием сил второго состояния, на перемещениях, вызванных действием сил первого состояния.

13. Как формулируется начало возможных перемещений Лагранжа применительно к упругим телам?

В случае равновесия тела возможные перемещения должны быть такими, чтобы полная потенциальная энергия системы имела экстремальное значение. Если равновесие устойчивое, то потенциальная энергия системы будет минимальной:

$$\delta \left[\iiint_V \bar{w} dx dy dz - \iiint_V (X\rho u + Y\rho v + Z\rho w) dx dy dz - \iint_S (\bar{X}u + \bar{Y}v + \bar{Z}w) dS \right] = 0 \quad (2.4.4)$$

Первый интеграл в скобках представляет потенциальную энергию деформации, а второй работу внешних объёмных сил, действующих на тело, если принять потенциал этих сил равным нулю при $u = v = w = 0$. Третий – работу поверхностных внешних сил.

14. Как формулируется начало виртуальных изменений напряжённого состояния (принцип Кастильяно)?

Виртуальными изменениями напряжённого состояния называются такие, при которых будут справедливы уравнения равновесия для каждой точки внутри тела и на его поверхности

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \delta \sigma_x + \frac{\partial}{\partial y} \delta \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \delta \tau_{xz} + \delta (X \cdot \rho) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \delta \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \sigma_y + \frac{\partial}{\partial z} \delta \tau_{yz} + \delta (Y \cdot \rho) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \delta \tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} \delta \tau_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} \delta \sigma_z + \delta (Z \cdot \rho) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta \sigma_x l + \delta \tau_{xy} m + \delta \tau_{xz} n &= \delta \bar{X}; \\ \delta \tau_{yx} l + \delta \sigma_y m + \delta \tau_{yz} n &= \delta \bar{Y}; \\ \delta \tau_{zx} l + \delta \tau_{zy} m + \delta \sigma_z n &= \delta \bar{Z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.6)$$

При всяком виртуальном изменении напряжённого состояния тела сумма работ всех внешних сил $\delta (X \cdot \rho), \delta (Y \cdot \rho), \delta (Z \cdot \rho), \delta \bar{X}, \delta \bar{Y}, \delta \bar{Z}$, производимых на перемещениях, статически соответствующих этим силам (т.е. на действительных перемещениях тела), равна приращению потенциальной энергии тела.

В случае отсутствия объёмных сил ($\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$) начало виртуального изменении напряжённого состояния запишется в следующем виде

$$\iint_S (u \delta \bar{X} + v \delta \bar{Y} + w \delta \bar{Z}) dS = \delta W. \quad (2.4.7)$$

Начало виртуальных изменений напряжённого состояния можно применять только таким телам, которые следуют закону Гука.

15. Как формулируется начало наименьшей работы?

Если считать, что внешние нагрузки не изменяются, а изменяется только напряжённое состояния внутри тела, тогда

$$\left. \begin{aligned} \delta \sigma_x l + \delta \tau_{xy} m + \delta \tau_{xz} n &= 0; \\ \delta \tau_{yx} l + \delta \sigma_y m + \delta \tau_{yz} n &= 0; \\ \delta \tau_{zx} l + \delta \tau_{zy} m + \delta \sigma_z n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4.9)$$

так как левая часть формулы

$$\iint_S (u\delta\bar{X} + v\delta\bar{Y} + w\delta\bar{Z}) dS = \delta W.$$

при этом равна нулю, то оказывается, что

$$\delta W = 0. \quad (2.4.10)$$

Из всех напряжённых состояний, статически соответствующих заданным внешним нагрузкам тела, действительное напряжённое состояние должно удовлетворять условию $\delta W = 0$, т.е. обращать приращение потенциальной энергии в нуль.

16. Как можно использовать начало наименьшей работы для определения реакций «лишних» связей в статически неопределимых системах?

Работа реакции внешних связей равна нулю и в том случае, когда эти силы подвергаются изменениям, но перемещения соответствующих точек их приложения равны нулю.

В этом случае приращение потенциальной энергии по уравнению $\iint_S (u\delta\bar{X} + v\delta\bar{Y} + w\delta\bar{Z}) dS = \delta W$ также оказывается равным нулю.

Уравнениями для определения этих «лишних» связей будут

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{X}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{Y}} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \bar{Z}} = 0. \quad (2.4.11)$$

При этом предварительно потенциальную энергию необходимо выразить через неизвестные реакции связей $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$.

Глава 3

ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 3.1. Сводка основных уравнений

В предыдущих главах были рассмотрены статические условия (условия равновесия) внутри и на поверхности тела (уравнения (1.1.1), (1.2.1)), геометрические уравнения, устанавливающие связь между деформациями и перемещениями (уравнения Коши (1.7.1)) и между деформациями (условия Сен-Венана (1.10.1)), и, наконец, связь между напряжениями и деформациями в точке тела (обобщённый закон Гука, уравнения (2.1.7) и (2.2.5)). Составим сводку основных уравнений теории упругости.

1. Статические уравнения:

а) дифференциальные уравнения равновесия внутри тела (уравнения Навье):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \cdot \rho &= 0 \end{aligned} \right\}$$

б) статические граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ Z_v &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\}$$

2. Геометрические уравнения.

а) связь между деформациями и перемещениями уравнения Коши)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

б) уравнения неразрывности деформаций (тождества Сен-Венана)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\}$$

3. Физические уравнения

а) обобщённый закон Гука для изотропного тела:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\}$$

б) обобщённый закон Гука в форме Ляме:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_y, & \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_z, & \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\}$$

где $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$, $\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Итак, исходные основные уравнения теории упругости: статические, геометрические и физические заданы приведёнными выше соотношениями.

§ 3.2. Представление уравнений равновесия Навье и условий на поверхности в перемещениях. План решения задач теории упругости в перемещениях

1) Если за неизвестными считать три составляющих перемещения $u = f_1(x, y, z)$, $v = f_2(x, y, z)$ и $w = f_3(x, y, z)$, то для их определения следует иметь систему, состоящую из трех уравнений с этими тремя неизвестными. Её можно получить из системы уравнений Навье (1.1.1), выразив в них напряжения через перемещения.

Возьмём первое из этих уравнений и подставим в него напряжения из формул закона Гука

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \cdot \rho = 0 \quad (a)$$

Воспользуемся системой уравнений (2.2.5) и отберём из них входящие в выражения (а) компоненты напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \\ \tau_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right). \end{aligned} \right\}$$

Возьмём их первые производные по выражению (а), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\}$$

Сложив эти выражения почленно и добавив $X \cdot \rho$, получаем:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \cdot \rho = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + X \cdot \rho = 0$$

Из первой скобки выносится знак дифференцирования по $x - \frac{\partial}{\partial x}$, тогда в скобках остаётся выражение объёмной деформации: $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

Выражения второй скобки являются суммой вторых производных u по переменным x, y, z . Такая операция обозначается символом ∇^2 и называется оператором Лапласа. Следовательно, это слагаемое записывается так $\mu \nabla^2 u$ и наконец, имеем:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \mu \nabla^2 u + X \cdot \rho = 0$$

или

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X \cdot \rho = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} (\lambda + \mu) + \mu \nabla^2 u + X \cdot \rho = 0$$

Аналогично преобразуются остальные два уравнения системы (1.1.1). В итоге имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} (\lambda + \mu) + \mu \nabla^2 u + X \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} (\lambda + \mu) + \mu \nabla^2 v + Y \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} (\lambda + \mu) + \mu \nabla^2 w + Z \cdot \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.2.1)$$

Эти уравнения называются уравнениями Ламе или синтезированными уравнениями, т. к. они объединяют статические, геометрические и физические предпосылки теории упругости, рассмотренные в предыдущих главах. Действительно, в них содержатся условия равновесия каждого элемента тела, геометрические характеристики u, v, w, θ и физические характеристики λ и μ .

2) Условия на поверхности, т.е. напряжения на наклонной площадке, преобразуется следующим образом:

В первое уравнение системы (1.2.1) подставляются отобранные из системы (2.2.5) закона Гука, записанные в напряжениях, напряжения: $\sigma_x = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x$, $\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}$, $\tau_{xz} = \mu\gamma_{xz}$

$$X_v = (\lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x)l + \mu\gamma_{xy} \cdot m + \mu\gamma_{xz} \cdot n.$$

Подставим сюда значения деформаций по формулам Коши (2.2.1) и сгруппируем следующим образом

$$X_v = \lambda\theta l + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right). (б)$$

Выражение в первых скобках представляет собой производную функции $u = f_1(x, y, z)$ по направлению нормали v к поверхности тела. Действительно, вычисляя частную производную сложной функции $u = f_1(x, y, z)$ по переменной v , получаем

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dv} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dv} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dv}$$

$$\frac{dx}{dv} = l; \quad \frac{dy}{dv} = m, \quad \frac{dz}{dv} = n.$$

Учитывая это в выражение (а), получаем

$$X_v = \lambda \theta l + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right). \quad (в)$$

Аналогично преобразуются остальные два уравнения системы (1.2.1). В итоге имеем:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \lambda \theta l + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) \\ Y_v &= \lambda \theta m + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right) \\ Z_v &= \lambda \theta n + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) \end{aligned} \right\}. \quad (3.2.2)$$

Последовательность непосредственного решения задачи теории упругости в перемещениях состоит в следующем: для отыскания трёх составляющих перемещения

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z) \quad \text{и} \quad w = f_3(x, y, z),$$

следует проинтегрировать три уравнения Ламе (3.2.1) и удовлетворить условиям на поверхности (3.2.2). Условия совместности деформаций, при решении задачи теории упругости в перемещениях, удовлетворяются тождественно.

По найденным перемещениям из геометрических соотношений Коши (1.7.1) определяют составляющие деформации, а затем из формул закона Гука в обратной форме (2.2.5) – составляющие напряжения.

§ 3.3. Постановка задач теории упругости

Рассмотрим возможные постановки задач в теории упругости.

1. Прямая постановка задач в теории упругости. В случае так называемой прямой постановки задач в теории упругости предполагается, что на границах тела заданы внешние нагрузки, и если учитывается действие объёмных сил, то задаются и массовые силы (инерционные, тяжести) для точек внутри тела. По заданным внешним нагрузкам требуется деформации на поверхности.

В некоторых случаях на границах тела задаются не усилия, а перемещения. В этом случае по заданным перемещениям границ тела требуется определить перемещения, деформации и напряжения для всех внутренних точек тела и напряжения и деформации на поверхности.

Возможна также прямая постановка задачи при задании на части границ тела внешних нагрузок, а на другой части – перемещений (смешанная форма граничных условий). В этом случае, как и в предыдущих, по заданным условиям на границах тела требуется определить перемещения, деформации и напряжения точек внутри тела.

Таким образом, при прямой постановке задачи теории упругости требуется определить три компоненты перемещений (u, v, w) , шесть компонент деформации $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})$ и шесть компонент напряжений $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy})$ как функций точек тела. Для решения

этой задачи могут быть использованы приведённые выше системы статических, геометрических и физических уравнений теории упругости.

Для определения 15 неизвестных функций имеется 15 основных уравнений (3 уравнения равновесия, 6 уравнений – соотношения Коши и 6 уравнений закона Гука). Кроме того, найденные напряжения, перемещения и деформации должны удовлетворить статическим условиям на границах тела и условиям совместности деформаций.

Решение такой задачи представляет очень большие трудности, и в общем виде решить её пока не удаётся.

2. Обратная постановка задачи теории упругости. Возможна обратная постановка задачи теории упругости, когда задаются напряжения, деформации или перемещения для всех внутренних точек тел как функции координат точек, а требуется определить условия на границах тела, которым соответствует заданное напряжённое и деформированное состояние тела.

Решение задачи теории упругости в обратной постановке значительно проще. Особенно просто эта задача решается, если задано внутреннее поле перемещений. В самом деле, если перемещения u, v, w заданы как функция координат точек тела (включая и точки на поверхности тела), то, используя уравнения Коши, находим деформации, а затем из обобщённого закона Гука в форме Ламе определяем напряжения. Внешние нагрузки (объёмные и поверхностные) после этого без труда определяются из уравнений равновесия для точек внутри тела и на поверхности.

§ 3.4. Решение задачи теории упругости в напряжениях при постоянстве объёмных сил

Если за неизвестными считать шесть составляющих напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ и $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, то для их определения следует иметь систему уравнений с этими неизвестными.

В случае, когда объёмные силы постоянны по всему объёму тела или равны нулю, все производные составляющих объёмных сил по координатам x, y и z обращаются в нуль, что облегчает решение задач в напряжениях. Поэтому ограничимся рассмотрением только таких случаев.

а) Для решения такой задачи, резонно предварительно рассмотреть свойства функций θ и S_1 при постоянстве объёмных сил:

Продифференцируем первое уравнение Ламе (3.3.1) по x , второе – по y , третье – по z и почленно сложим, получим

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 v + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 w \right) = 0 \quad (a)$$

Выражение, стоящее в первом слагаемом в скобках, является оператором Лапласа над функцией θ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \nabla^2 \theta,$$

Выражение, стоящее во втором слагаемом в скобках можно преобразовать следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 v + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 w = \nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \nabla^2 \theta,$$

Тогда вместо выражения (a), получим

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\theta = 0,$$

или

$$\nabla^2\theta = 0. \quad (3.4.1)$$

Следовательно, при постоянстве объёмных сил объёмная деформация θ является гармонической функцией.

Подставляя в уравнение (3.4.1) выражение объёмной деформации (3.2.1), и деля на постоянный множитель, получаем

$$\nabla^2 S_1 = 0. \quad (3.4.2)$$

б) Как указывалось ранее в § 1.1, для отыскания шести составляющих напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ и $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, три уравнения равновесия (1.1.1) недостаточно, и к ним нужно добавить ещё шесть уравнений неразрывности деформаций (1.10.1). В последнее входят составляющие деформаций, которые необходимо выразить через напряжения.

Для этого запишем их в другом виде

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x) = \frac{1}{E}[\sigma_x + \nu\sigma_x - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z] = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_x - \nu S_1]$$

или

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_x - \nu S_1].$$

Аналогично $\varepsilon_y = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_y - \nu S_1]$. Придадим также другой вид соотношению закона Гука для касательного напряжения $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$, т.е. будем иметь выражения Гука, записанные в виде

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_x - \nu S_1] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_y - \nu S_1] \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Берём вторые производные выражения (б) в том порядке, каким они входят в первое уравнение системы уравнений (1.10.1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} \right] \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \right] \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Подставляя в первое уравнение $\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$ выражения (2.5.1), получаем

$$\frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} \right] + \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} \right] = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

или

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.4.3)$$

Для практического применения, уравнение (3.4.3) следует преобразовать.

Выразим касательное напряжение τ_{xy} через нормальные напряжения. Это можно проделать, применив уравнения равновесия Навье (1.1.1).

Сначала применим первые два уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \cdot \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\Gamma)$$

продифференцировав первое уравнение системы (Г) по x , второе по y

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\Delta)$$

и сложив почленно, получим выражение

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) \quad (\epsilon)$$

После этого, применим третье уравнение равновесия (1.1.1), с целью выразить правую часть (е) только нормальными напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

$$\text{Перепишем третье уравнение } \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \cdot \rho = 0$$

в виде

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - Z \cdot \rho, \quad (\Ж)$$

и внося (ж) в слагаемое со скобками выражения (е), получаем выражение

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - Z \cdot \rho \right) \text{ или} \\ 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Выражение (3) внесём в (3.4.3)

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} \right) = (1 + \nu) \left(-\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right).$$

Сложив члены с множителем $(1 + \nu)$, получаем

$$(1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} \right) = 0;$$

в первом слагаемом прибавим и вычтем по отдельности $\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2}$, а во втором — $\frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2}$.

Получим:

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} \right) - \nu \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} + \right. \\ \left. \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} \right) = 0 \Rightarrow (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) - \\ \nu \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} \right) = 0 \Rightarrow (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} - \nabla^2 \sigma_z \right) - \nu \left(\nabla^2 S_1 - \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (\text{и}) \end{aligned}$$

В множителе в скобках первого слагаемого выражения (и), прибавим и вычтем $\frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2}$:

$$\begin{aligned} (1 + \nu) \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} - \nabla^2 \sigma_z \right) - \nu \left(\nabla^2 S_1 - \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} \right) &= 0 \Rightarrow \\ (1 + \nu) \left(\nabla^2 S_1 - \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} - \nabla^2 \sigma_z \right) - \nu \left(\nabla^2 S_1 - \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

С учётом уравнения (3.4.2) $-\nabla^2 S_1 = 0$, получаем

$$(1 + \nu) \left(-\frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} - \nabla^2 \sigma_z \right) - \nu \left(-\frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} \right) = 0 \Rightarrow -(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_z - \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} + \nu \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0$$

или

$$(1 + \nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0 \quad (\kappa)$$

Аналогично можно преобразовать остальные уравнения неразрывности деформаций (1.10.1), в результате получаем шесть уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x\partial y} &= 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y\partial z} &= 0 \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4.4)$$

Система уравнений (3.4.4) называется уравнениями Бельтрами-Митчелла, и она выражает неразрывность деформаций, записанную в напряжениях.

В случае плоской задачи из шести уравнений системы (3.4.4) остаётся только одно уравнение простого вида $-\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y)$.

Для решения задачи теории упругости приходится интегрировать девять уравнений (1.1.1) и (3.4.4). Наличие трёх лишних уравнений необходимо для получения однозначного решения, что обсуждалось при выводе уравнений неразрывности деформации (1.10.1), следствием которых являются уравнения Бельтрами-Митчелла.

Полученные после интегрирования шесть составляющих напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ и $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, должны удовлетворять условиям на поверхности (1.2.1). После этого по закону Гука (2.1.7) определяют составляющие деформации, а из геометрических соотношений Коши (1.7.1) – составляющие перемещений.

Несмотря на то, что общий план решения задач теории упругости в перемещениях или в напряжениях достаточно ясен, реализация этого плана представляет весьма большие трудности, и в общем случае решить эти уравнения пока не представляется возможным. Лишь для простейших случаев удаётся получить решение задачи теории упругости, однако эти решения задач в самой общей постановке представляют очень большую ценность. Точные решения задач теории упругости являются своеобразным эталоном, с которым можно сравнивать приближённые решения, полученные в результате введения определённых дополнительных гипотез.

§ 3.5. Единственность решения

Пусть тело находится под действием системы объёмных сил $X \cdot \rho, Y \cdot \rho, Z \cdot \rho$, а граничные условия на одной части поверхности заданы силами, а на другой – перемещениями $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$. Допустим, что мы нашли такую систему перемещений u', v', w' , деформаций $\varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \varepsilon'_z, \gamma'_{yz}, \gamma'_{zx}, \gamma'_{xy}$, напряжений $\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{yz}, \tau'_{zx}, \tau'_{xy}$, которые удовлетворяют всем уравнениям теории упругости внутри тела и условиям на поверхности.

Покажем, что найденное решение задачи линейной теории упругости будет единственным.

Предположим, что заданным объёмным силам $X \cdot \rho, Y \cdot \rho, Z \cdot \rho$ и условиям на поверхности отвечает ещё одно решение. При этом перемещения, деформации и напряжения этого решения обозначим $u'', v'', w'', \varepsilon''_x, \varepsilon''_y, \varepsilon''_z, \gamma''_{yz}, \gamma''_{zx}, \gamma''_{xy}, \sigma''_x, \sigma''_y, \sigma''_z, \tau''_{yz}, \tau''_{zx}, \tau''_{xy}$. Теперь, используя принцип суперпозиции, справедливый в линейной теории упругости, построим третье решение как разность первого и второго, т.е. перемещения,

деформации и напряжения будут равны $u' - u'', v' - v'', w' - w'', \varepsilon'_x - \varepsilon''_x, \varepsilon'_y - \varepsilon''_y, \varepsilon'_z - \varepsilon''_z, \gamma'_{yz} - \gamma''_{yz}, \gamma'_{zx} - \gamma''_{zx}, \gamma'_{xy} - \gamma''_{xy}, \sigma'_x - \sigma''_x, \sigma'_y - \sigma''_y, \sigma'_z - \sigma''_z, \tau'_{yz} - \tau''_{yz}, \tau'_{zx} - \tau''_{zx}, \tau'_{xy} - \tau''_{xy}$. При этом уравнения равновесия для внутренних точек тела будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\sigma'_x - \sigma''_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau'_{xy} - \tau''_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tau'_{xz} - \tau''_{xz})}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\tau'_{yx} - \tau''_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma'_y - \sigma''_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau'_{yz} - \tau''_{yz})}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\tau'_{zx} - \tau''_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tau'_{zy} - \tau''_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma'_z - \sigma''_z)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5.1)$$

а для той части поверхности тела, где приложены $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, придём к следующим однородным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma'_x - \sigma''_x)l + (\tau'_{xy} - \tau''_{xy})m + (\tau'_{xz} - \tau''_{xz})n &= 0; \\ (\tau'_{yx} - \tau''_{yx})l + (\sigma'_y - \sigma''_y)m + (\tau'_{yz} - \tau''_{yz})n &= 0; \\ (\tau'_{zx} - \tau''_{zx})l + (\tau'_{zy} - \tau''_{zy})m + (\sigma'_z - \sigma''_z)n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.2)$$

Для части поверхности, где заданы перемещения, получим

$$u' - u'' = 0, \quad v' - v'' = 0, \quad w' - w'' = 0. \quad (3.5.3)$$

Третье решение, равное разности двух решений, удовлетворяющих всем уравнения теории упругости, можно трактовать как решение задачи линейной теории упругости рассматриваемого тела при условии, что объёмные и поверхностные силы отсутствуют, а перемещения $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ на торцах тела равны нулю.

При этих условиях работа внешних сил равна нулю, а следовательно, должна быть равна нулю и потенциальная энергия деформации $W = \iiint_V \bar{w} dx dy dz$. Ранее было отмечено, что удельная потенциальная энергия $\bar{w}$ всегда положительна. Поэтому потенциальная энергия деформации тела W может быть равна нулю только в том случае, если $\bar{w} = 0$. Отсюда следует, что все компоненты деформаций и напряжений, относящихся к третьему решению, равны нулю, т.е.

$$\varepsilon'_x = \varepsilon''_x, \varepsilon'_y = \varepsilon''_y, \varepsilon'_z = \varepsilon''_z, \gamma'_{yz} = \gamma''_{yz}, \gamma'_{zx} = \gamma''_{zx}, \gamma'_{xy} = \gamma''_{xy}, \sigma'_x = \sigma''_x, \sigma'_y = \sigma''_y, \sigma'_z = \sigma''_z, \\ \tau'_{yz} = \tau''_{yz}, \tau'_{zx} = \tau''_{zx}, \tau'_{xy} = \tau''_{xy}.$$

Это и доказывает единственность решения задач линейной теории упругости.

Что касается перемещений, то они могут отличаться на величину, характеризующую перемещение твёрдого тела в том случае, когда на поверхности тела заданы только силы, а перемещения точек тела не заданы.

Теорема о единственности решения была доказана Кирхгофом.

§ 3.6. Полуобратный метод Сен-Венана. Задача Сен-Венана. Принцип Сен-Венана

Как уже отмечалось, решение задач теории упругости в прямой постановке (в перемещениях либо напряжениях) представляет очень большие сложности и общих методов решения задач в такой постановке пока не существует. Обратная постановка задач часто не соответствует потребностям практики, так как жизнь обычно ставит задачи в прямой постановке. При этом известны граничные условия, и требуется определить поле напряжений, деформаций и перемещений, соответствующих заданным граничным условиям.

Сен-Венаном был предложен так называемый полуобратный метод (1853 г.), суть которого состоит в том, что при решении задачи теории упругости задаются частью компонент перемещений и частью компонент напряжений, а недостающие компоненты определяются из уравнений теории упругости так, чтобы удовлетворились все уравнения теории упругости и граничные условия. Этим методом Сен-Венан решил задачи о кручении бруса некруглого сечения и об изгибе бруса.

Заметим, что, несмотря на то, что в полуобратном методе частью компонент перемещений и частью компонент напряжений можно задаваться, однако, поскольку все компоненты напряжений и перемещений в конечном счёте удовлетворяют всем уравнениям теории упругости, полученное решение является точным решением.

Конечно, полуобратный метод не является общим. Он требует определённой интуиции для того, чтобы удачно задаться компонентами перемещений и напряжений. Однако этот метод может быть полезен при решении некоторых задач теории упругости.

В качестве примера применения полуобратного метода Сен-Венана рассмотрим решение задачи о кручении бруса постоянного сечения произвольной формы.

В отличие от бруса круглого сечения, при кручении бруса произвольной формы поперечного сечения имеет место деформация сечений, т.е. гипотеза плоских сечений становится несправедливой. Сен-Венан решает задачу о кручении бруса в предположении, что деформация сечения ничем не стеснена, т.е. перемещения w вдоль оси бруса не зависят от координаты z . При этом нормальные напряжения $\sigma_z = 0$. Кроме того, считаются равными нулю компоненты напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$.

Тогда, полагая объёмные силы отсутствующими, из (1.1.1) —

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \cdot \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \text{получим следующие уравнения равновесия:}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (3.6.1)$$

Из первых двух уравнений (3.6.1) следует, что напряжения τ_{xz}, τ_{zy} не зависят от координаты z , т.е. распределение касательных напряжений по сечению для всех сечений бруса одинаково.

Введём функцию напряжений φ , через которую напряжения τ_{xz}, τ_{yz} представляются в виде

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (3.6.2)$$

При этом третье уравнение равновесия удовлетворяется тождественно:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \equiv 0.$$

Теперь обратимся к уравнениям совместности деформаций в форме Бельтрами-

$$\text{Митчелла (3.4.4) — } \left. \begin{aligned} (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} &= 0, & (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial y} &= 0 \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} &= 0, & (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y \partial z} &= 0 \\ (1 + \nu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} &= 0, & (1 + \nu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z \partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad \text{При принятых}$$

ранее предположениях относительно составляющих напряжения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ первые четыре уравнения системы (3.4.4) удовлетворяются при любых выражениях функции φ , а последние два уравнения получают следующий вид:

$$\nabla^2 \tau_{xz} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{yz} = 0. \quad (3.6.3)$$

После подстановки (3.6.2) в (3.6.3) получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (3.6.4)$$

Следовательно, выражение в скобках $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ является величиной постоянной, т.е.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = C. \quad (3.6.5)$$

Так как боковая поверхность бруса свободна от внешних нагрузок (скручивающий момент приложен к торцам бруса), то проекция касательных напряжений на нормаль к контуру должна быть равна нулю, иными словами, касательные напряжения у контура должны быть направлены по касательной к контуру. Это граничное условие можно записать в виде (рис.13)

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0$$

С помощью уравнения (3.6.2) оно принимает вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (3.6.6)$$

Это показывает, что функция напряжения φ должна быть постоянной вдоль границы поперечного сечения. В случае односвязных областей, например, для сплошного сечения, эту константу можно выбирать произвольно, и в последующем мы будем принимать её равной нулю.

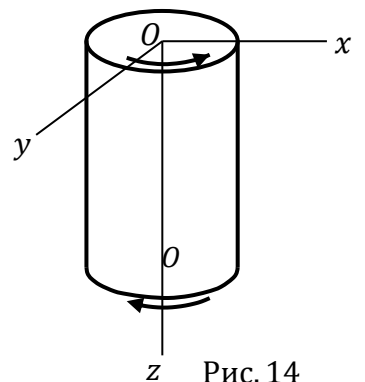
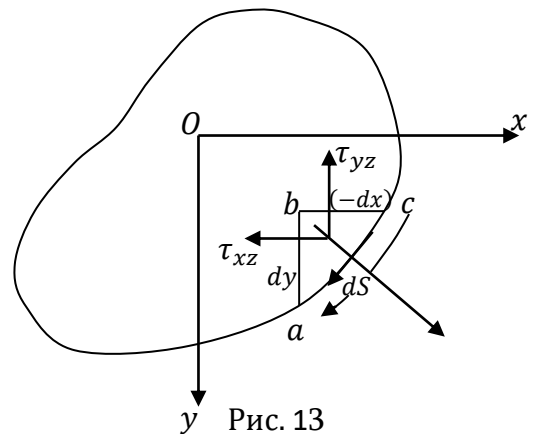
Таким образом, задача о кручении бруса сводится к отысканию такой функции напряжения φ , которая бы удовлетворяла уравнению (3.6.5) и всюду на контуре была бы равна нулю.

К торцовым сечениям приложены скручивающие брус моменты $M_{кр}$ в виде распределённых по поверхности торца бруса касательных напряжений. Следовательно, на торцах бруса статические граничные условия запишутся в виде

$$\tau_{xz} = \pm \bar{X}, \quad \tau_{yz} = \pm \bar{Y}.$$

где знак $+$ должен приниматься для конца стержня, для которого внешняя нормаль совпадает с положительным направлением оси z ; это, например, имеет место для нижнего конца стержня, изображённого на рис. 14. Мы видим, что на концах касательные усилия распределяются таким же образом, как и касательные напряжения по поперечным сечениям стержня. Результирующая усилий, распределённых по концам стержня, равна нулю и эти силы сводятся к моменту, величина которого равна

$$M_{кр} = \iint (\bar{Y}x - \bar{X}y) dx dy = - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} x dx dy - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} y dx dy \quad (a)$$



Интегрируя это выражение по частям и учитывая, что на границе $\varphi = 0$, получаем

$$M_{кр} = 2 \iint \varphi dx dy. \quad (3.6.7)$$

Каждый из интегралов в правой части уравнения (а) даёт половину этого крутящего момента.

Рассмотрим случай, когда сечения бруса представляет собой эллипс, уравнение которого $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, где a – размер большой полуоси, а b – малой полуоси эллипса.

Примем для φ выражение вида

$$\varphi = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (3.6.8)$$

Всюду на контуре $\varphi = 0$. При подстановке (3.6.8) в (3.6.5) $-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = C$, получим $2m \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = C$, откуда $m = C \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)}$. Следовательно, выражения для φ примет вид

$$\varphi = C \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (3.6.9)$$

Из (3.6.7) $M_{кр} = 2 \iint \varphi dx dy$, найдём выражение для C через скручивающий момент

$$M_{кр} = \frac{a^2 b^2 C}{a^2 + b^2} \left(\frac{1}{a^2} \iint x^2 dx dy + \frac{1}{b^2} \iint y^2 dx dy - \iint dx dy \right), \quad (б)$$

т.к. для эллипса $\iint x^2 dx dy = I_y = \frac{\pi b a^3}{4}$, $\iint y^2 dx dy = I_x = \frac{\pi a b^3}{4}$, $\iint dx dy = \pi a b$, то

выражение (б) примет вид $M_{кр} = -\frac{\pi a^3 b^3 C}{2(a^2 + b^2)}$, откуда

$$C = -\frac{2M_{кр}(a^2 + b^2)}{\pi a^3 b^3}. \quad (в)$$

Окончательно для φ будем иметь

$$\varphi = -\frac{M_{кр}}{\pi a b} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (3.6.10)$$

Для касательных напряжений, по формуле (3.6.2) $\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$,

получаем выражения

$$\tau_{xz} = -\frac{2M_{кр}}{\pi a b^3} y, \quad \tau_{yz} = \frac{2M_{кр}}{\pi a^3 b} x. \quad (3.6.11)$$

Наибольшее касательное напряжение имеет место на конце малой полуоси сечения, при $y = b$

$$\tau_{max} = \frac{2M_{кр}}{\pi a b^2}.$$

Для определения относительного угла закручивания сечения θ и деформации w необходимо рассмотреть связь перемещений с напряжениями. Так как $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$, то по закону Гука следует, что $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$.

Из закона Гука для сдвига, полагая $\tau_{xy} = 0$, имеем

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (3.6.12)$$

При кручении ось бруса z остаётся неподвижной и сечения поворачиваются относительно этой оси так, чтобы удовлетворялись уравнения (3.6.12). Прямая, точки которой при кручении бруса остаются неподвижными, называется осью кручения. Следовательно, ось бруса z является осью кручения.

Если для перемещений u и v принять выражения вида $u = -\theta yz$, $v = \theta xz$, то первое из уравнений (3.6.12) будет удовлетворяться, а из двух последних получим

$$-\theta y + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \theta x + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} + \theta y, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} - \theta x. \quad (3.6.13)$$

Если второе из уравнений (3.6.12) продифференцировать по y , а третье – по z и затем вычесть из первого второе, то получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} = \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} \right). \quad (3.6.14)$$

При принятых для u и v выражениях: $u = -\theta yz$, $v = \theta xz$, левая часть равенства (3.6.14) равна -2θ , а правая, принимая во внимание (3.6.2) – $\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, равна $\frac{1}{G} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)$. Таким образом, из (3.6.14), учитывая выражение (3.6.5) – $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = C$, получим

$$-2\theta G = C, \quad (3.6.15)$$

а относительный угол поворота сечения θ равен $\theta = -\frac{C}{2G}$.

В рассматриваемой задаче о кручении бруса эллиптического сечения выражения для θ имеет вид $\left(C = -\frac{2M_{кр}(a^2+b^2)}{\pi a^3 b^3} \right)$

$$\theta = \frac{M_{кр}(a^2+b^2)}{\pi a^3 b^3 G}. \quad (3.6.16)$$

Подставляя (3.6.11) – $\tau_{xz} = -\frac{2M_{кр}}{\pi a b^3} y$, $\tau_{yz} = \frac{2M_{кр}}{\pi a^3 b} x$, и (3.6.16) в (3.6.13) $-\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} + \theta y$, $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G} - \theta x$, получив $\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2M_{кр}}{G \pi a b^3} y + \frac{M_{кр}(a^2+b^2)}{\pi a^3 b^3 G} y = \left[\frac{M_{кр}(b^2-a^2)}{\pi a^3 b^3 G} \right] y$ или $\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2M_{кр}}{G \pi a^3 b} x - \frac{M_{кр}(a^2+b^2)}{\pi a^3 b^3 G} x = \left[\frac{M_{кр}(b^2-a^2)}{\pi a^3 b^3 G} \right] x$, после интегрирования получаем следующее выражение для w :

$$w = \frac{M_{кр}(b^2-a^2)}{\pi a^3 b^3 G} xy. \quad (3.6.17)$$

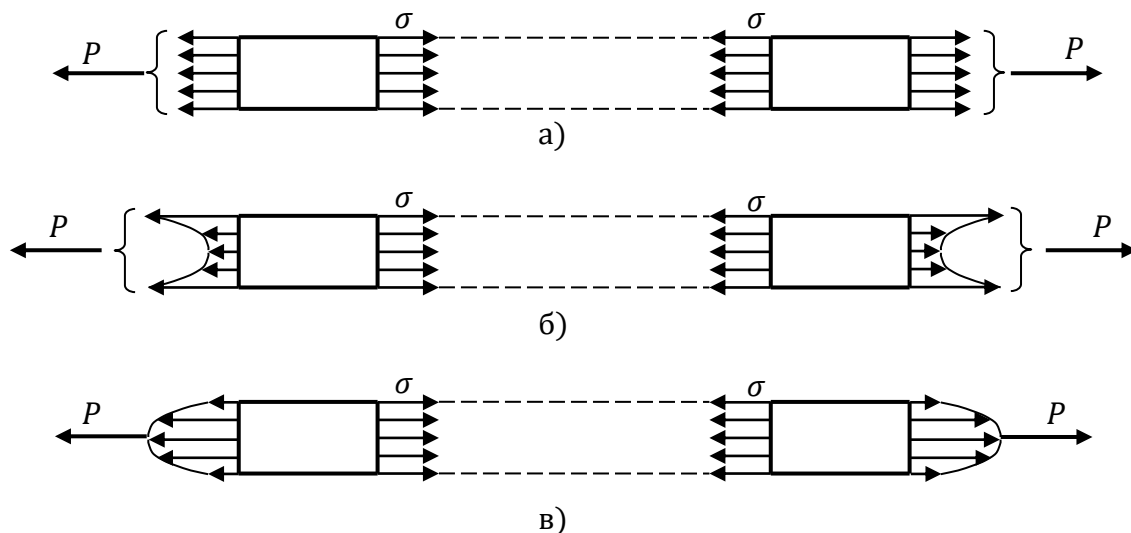
Решение задачи о кручении бруса эллиптической формы сечения получено в предположении, что внешние нагрузки $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ распределены по торцам по тому же закону, что и τ_{xz} и τ_{yz} , т.е. согласно уравнениям (3.6.11) – $\tau_{xz} = -\frac{2M_{кр}}{\pi a b^3} y$, $\tau_{yz} = \frac{2M_{кр}}{\pi a^3 b} x$.

Распределение напряжений и деформаций для внутренних точек тела при достаточном удалении их от границ тела слабо зависит от характера распределения внешней нагрузки на границах тела. Таким образом, если на некоторой части поверхности тела изменить закон распределения внешней нагрузки так, что видоизменённая нагрузка будет статически эквивалентной прежней, то такое изменение приведёт лишь к изменению напряжённого и деформированного состояния в области тела, прилегающей к нагруженному участку, т.е. местных напряжений. Напряжённое и деформированное состояние тела вдали от места нагружения при этом почти не изменится. Это утверждение получило название принципа Сен-Венана.

Таким образом, полученное решение задачи о кручении бруса эллиптической формы сечения согласно принципу Сен-Венана справедливо для сечений, достаточно удалённых от

торцов, при любом распределении внешних нагрузок $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ по торцу бруса, если созданный ими крутящий момент статически эквивалентен моменту $M_{кр}$,

Другим примером использования принципа Сен-Венана является задача о растяжении бруса силами, приложенными к его торцам. В этом случае закон распределения напряжений по сечению бруса на достаточном удалении от торцов не зависит от того,



каким образом распределяются приложенная по торцевому сечению нагрузка, лишь бы величина равнодействующей нагрузки и точка её приложения не изменялись.

Принцип Сен-Венана имеет большое значение в решении многих задач прикладной теории упругости. Он позволяет при решении некоторых задач удовлетворять граничным условиям не в каждой точке торцевого сечения, а лишь в интегральном смысле, т.е. в смысле удовлетворения условия статики для тела в целом.

Однако следует иметь в виду, что в некоторых случаях принцип Сен-Венана неприменим. В тонкостенных конструкциях (пластинки, оболочки, тонкостенные стержни) могут иметь место случаи, когда статически эквивалентные изменения внешних нагрузок на торцах приводят не к местным изменениям напряжений и деформаций, а изменяют напряжённое и деформированное состояние всего тонкостенного стержня.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что означает прямая постановка задачи теории упругости?

По заданным внешним нагрузкам или по заданным перемещениям границ тела или же при задании на части границ тела внешних нагрузок, а на другой части – перемещений (смешанная форма граничных условий) требуется определить перемещения, деформации и напряжения для внутренних точек тела и на поверхности.

При прямой постановке задачи теории упругости требуется определить три компоненты перемещений (u, v, w), шесть компонент деформации ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$) и шесть компонент напряжений ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$) как функций точек тела. Для решения этой задачи могут быть использованы приведённые выше системы статических, геометрических и физических уравнений теории упругости.

Для определения 15 неизвестных функций имеется 15 основных уравнений (3 уравнения равновесия, 6 уравнений – соотношения Коши и 6 уравнений закона Гука). Кроме

того, найденные напряжения, перемещения и деформации должны удовлетворять статическим условиям на границах тела и условиям совместности деформаций.

Решение такой задачи представляет очень большие трудности, и в общем виде решить её пока не удаётся

2. Что означает обратная постановка задачи теории упругости?

Задаются напряжения, деформации или перемещения для всех внутренних точек тел как функции координат точек, и требуется определить условия на границах тела, которым соответствует заданное напряжённое и деформированное состояние тела.

Решение задачи теории упругости в обратной постановке значительно проще.

3. Рассмотрением каких случаев ограничиваемся при решении задачи теории упругости в напряжениях?

Когда объёмные силы постоянны по всему объёму тела или равны нулю.

4. Какие свойства выявляют функции θ и S_1 при постоянстве объёмных сил?

Они являются гармоническими функциями.

5. Какие уравнения требуются для решения задачи теории упругости в напряжениях?

Для отыскания шести составляющих напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ и $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, требуются три уравнения равновесия (1.1.1) и шесть уравнений неразрывности деформаций.

6. При решении задачи теории упругости в напряжениях как выражаются уравнения неразрывности деформаций и как они называются?

Составляющие деформаций, входящие в (1.10.1) выражаются через напряжения. Уравнения неразрывности деформаций в напряжениях (3.4.4) называются уравнениями Бельтрами-Митчелла.

7. Какова последовательность решения задачи теории упругости в перемещениях?

Последовательность непосредственного решения задачи теории упругости в перемещениях состоит в следующем: для отыскания трёх составляющих перемещения

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z) \text{ и } w = f_3(x, y, z),$$

следует проинтегрировать три уравнения Ламе (3.2.1) и удовлетворить условиям на поверхности (3.2.2). Условия совместности деформаций, при решении задачи теории упругости в перемещениях, удовлетворяются тождественно.

По найденным перемещениям из геометрических соотношений Коши (1.7.1) определяют составляющие деформации, а затем из формул закона Гука в обратной форме (2.2.5) – составляющие напряжения.

8. В чём смысл полубратного метода Сен-Венана решения задачи теории упругости?

Смысл метода Сен-Венана состоит в том, что при решении задачи теории упругости задаются частью компонент перемещений и частью компонент напряжений, а недостающие компоненты определяются из уравнений теории упругости так, чтобы удовлетворялись все уравнения теории упругости и граничные условия. Этим методом Сен-Венан решил задачи о кручении бруса некруглого сечения и об изгибе бруса.

Несмотря на то, что в полубратном методе частью компонент перемещений и частью компонент напряжений можно задаваться, однако, поскольку все компоненты напряжений

и перемещений в конечном счёте удовлетворяют всем уравнениям теории упругости, полученное решение является точным решением.

9. В чём смысл принципа Сен-Венана и каково его значения для решения задач теории упругости?

Он позволяет при решении некоторых задач удовлетворять граничным условиям не в каждой точке торцевого сечения, а лишь в интегральном смысле, т.е. в смысле удовлетворения условия статики для тела в целом. Поэтому он имеет большое значение в решении многих задач прикладной теории упругости.

Раздел второй ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Глава 4

Плоская задача в декартовых координатах

§ 4.1. Общие понятия

Существует широкий класс задач, при решении которых можно исключить одну из трёх координат (например z), т.е. рассматривать заданное явление, как происходящее в одной плоскости. Этот класс задач называется плоской задачей теории упругости.

Плоская задача теории упругости делится на две категории:

1. Плоская деформация.
2. Обобщённое плоское напряжённое состояние.

§ 4.2. Плоская деформация

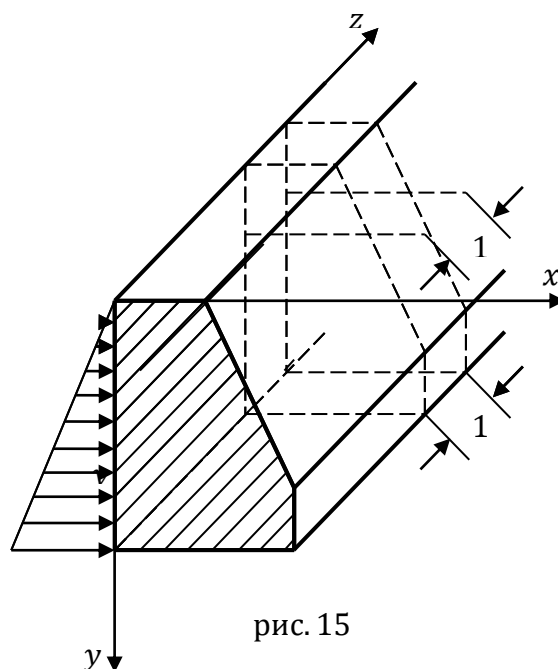
Допустим, что длина тела вдоль оси z большая. Сечения, перпендикулярные к оси z , постоянны по всей длине тела вдоль оси z . Нагрузки лежат в перпендикулярных к оси z сечениях и закон их распределения не меняется в направлении оси z . Не меняются в направлении оси z также и условия закрепления или опирания.

В таком случае, часть тела, достаточно удалённая от закрепления концов тела, не будет испытывать перемещения по направлению z , а перемещения по направлению остальных двух осей x и y не будут являться функциями координаты z , т.е.

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = 0. \quad (4.2.1)$$

К примеру, можно брать опорную стену или плотину постоянного сечения и высоты. Вырезав двумя сечениями, направленными перпендикулярно к оси z , полосу единичной длины (рис. 15), заметим, что она будет испытывать только изгиб – наклонится вправо. По направлению оси z перемещения не будут, т.к. соседние элементы находятся в одинаковом положении.

Таким образом, деформации развиваются в плоскости, параллельной координатной плоскости xOy . Отсюда появилось и название –



плоская деформация. Это значит, что деформации (сдвиги) в остальных двух плоскостях равны нулю. Поэтому, геометрические соотношения Коши (1.7.1) упрощаются и получаются следующие составляющие деформации:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_1(x, y) & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \varphi_3(x, y) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varphi_2(x, y) & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.2)$$

Переходим к определению напряжений. Так как $\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} = 0$, и $\gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} = 0$, то $\tau_{yz} = 0$ и $\tau_{zx} = 0$. Из оставшихся четырёх напряжений определим σ_z . Воспользуемся третьим уравнением закона Гука (2.1.7) и в силу третьего уравнения (4.2.2) приравняем его к нулю:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (a)$$

т.е. напряжение по направлению оси z выражается посредством напряжений σ_x, σ_y и не равно нулю.

Следовательно, при плоской деформации линейная деформация ε_z равна нулю, а нормальное напряжение не равно нулю:

$$\varepsilon_z = 0 \text{ и } \sigma_z \neq 0.$$

Наличие только трёх компонент напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} значительно упрощает формулы теории упругости.

Дифференциальные уравнения равновесия Навье (1.1.1) будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \cdot \rho &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y \cdot \rho &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.3)$$

Условия на поверхности или выражения составляющих напряжения (1.2.1) на наклонных площадках будут:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m, \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4)$$

Из соотношения Коши (1.7.1) останутся только три выражения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.5)$$

Из уравнений неразрывности деформаций (1.10.1) останется только одно

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad (4.2.6)$$

Для записи формул закона Гука вернёмся к обобщённому закону Гука (2.1.7). Первое уравнение, с учётом выражения (a), примет вид

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E}\{\sigma_x - \nu[\sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\} = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right),$$

т. е.
$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_y\right).$$

Аналогичным получается и второе уравнение $\varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right)$.

Вся система уравнения (2.1.7) примет вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.7)$$

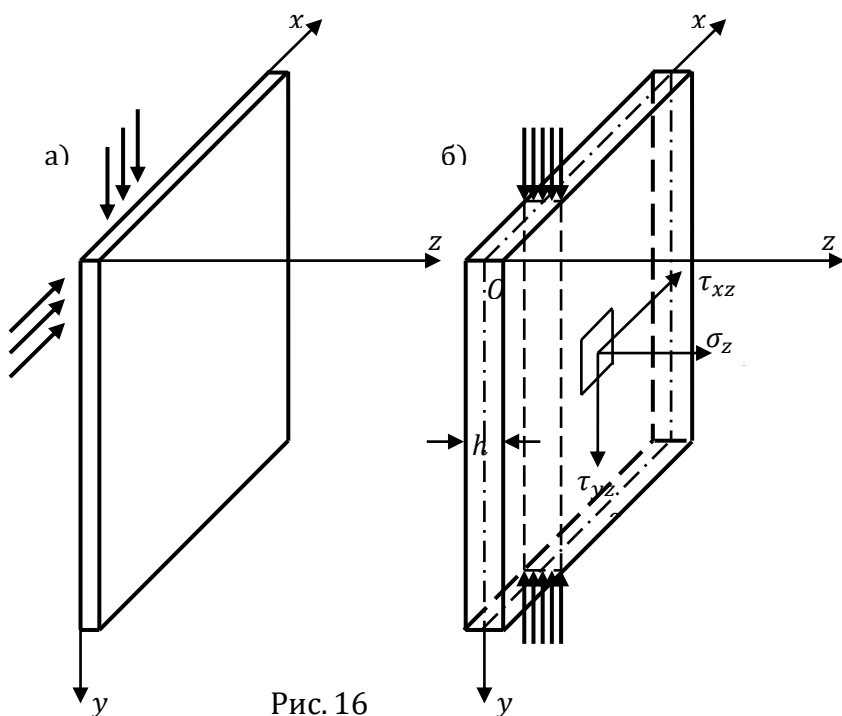


Рис. 16

§ 4.3. Обобщённое плоское напряжённое состояние

Рассмотрим тонкую пластину, которая нагружена силами по контуру в плоскости пластинки (рис. 16, а). Допустим, что деформация происходит без искривления пластинки. В этом случае напряжения σ_z , τ_{yz} и τ_{xz} не возникают, а напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} не зависят от координаты z , так как толщина пластинки очень мала.

В практических, инженерных задачах пластинка имеет определённую конечную толщину h . Проведём плоскость, которая делит пластину пополам по толщине. Назовем её срединной плоскостью пластинки.

Рассмотрим случай, когда приложенные на пластинку силы постоянны по всей толщине пластинки (рис. 16, б). В этом случае равнодействующие сил получаются приложенными к срединной плоскости. На боковых поверхностях никакие напряжения не возникают:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Внутри пластины они могут возникнуть, но из-за малости толщины пластинки не будут достигать значительных величин, и поэтому ими пренебрегают.

Напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} по толщине пластинки меняются очень незначительно, поэтому берутся их средние значения. Например, $(\sigma_x)_{cp} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz$, т.е. считается, что они не зависят от переменной z :

$$\sigma_x = f_1(x, y); \quad \sigma_y = f_2(x, y); \quad \tau_{xy} = f_3(x, y). \quad (4.3.1)$$

Такой случай называется обобщённым плоским напряжённым состоянием.

Надо заметить, что в отношении напряжений обобщённое плоское напряжённое состояние отличается от плоской деформации лишь условием $\sigma_z = 0$. Переходя к

деформациям, учитывая это условие в третьей формуле закона Гука (2.1.7) – $\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$, получаем, что составляющая

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.3.2)$$

не равна нулю и основания пластинки будут несколько искривляться.

Следовательно, в отличие от плоской деформации, когда $\varepsilon_z = 0$ и $\sigma_z \neq 0$, при обобщённом плоском напряжённом состоянии, нормальное напряжение σ_z равно нулю, а линейная деформация ε_z не равна нулю:

$$\varepsilon_z \neq 0 \text{ и } \sigma_z = 0.$$

При этих предположениях основные уравнения плоской деформации сохраняются:

Дифференциальные уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y \cdot \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3.3)$$

Условия на поверхности:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m, \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.4)$$

Соотношения Коши

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.5)$$

Из уравнений неразрывности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \quad (4.3.6)$$

Меняются только формулы закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3.7)$$

§ 4.4. Решение плоской задачи в напряжениях.

Уравнения неразрывности в напряжениях

Для того, чтобы решить плоскую задачу в напряжениях, предварительно необходимо выразить уравнения неразрывности деформации

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

в напряжениях. Воспользуемся уравнениями закона Гука для плоской деформации

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

и составим производные напряжений, входящих в выражение (a):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\}$$

Внесём их в выражение (а) и сократим полученное выражение на $\frac{1}{E}$

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (б)$$

Этому выражению можно придать более простой вид, если касательное напряжение τ_{xy} выразить через нормальные напряжения σ_x и σ_y . Для этого воспользуемся дифференциальными уравнениями равновесия (4.3.3) –

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y \cdot \rho &= 0 \end{aligned} \right\}. \text{Продифференцируем первое уравнение по } x, \text{ а второе по } y, \text{ подразумевая, что объёмные силы постоянны и сложим их}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

Подставим это выражение в (б) и перенесём в левую часть:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + (1+\nu) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \\ \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \\ \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \Rightarrow \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \end{aligned}$$

т.е. оператор Лапласа относительно суммы нормальных напряжений равен нулю.

Таким образом, сумма нормальных напряжений в задаче плоской деформации является гармонической функцией:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (4.4.1)$$

Это условие носит название уравнения неразрывности деформации Леви и здесь оно выведено для плоской деформации. Оно не содержит упругих постоянных и поэтому в случае обобщённого плоского напряжённого состояния имеет тот же вид. Это уравнение используется только тогда, когда объёмные силы $X \cdot \rho$ и $Y \cdot \rho$ постоянны – $X \cdot \rho = const$ и $Y \cdot \rho = const$ или равны нулю $X \cdot \rho = Y \cdot \rho = 0$.

§ 4.5. Ввод функции напряжения

При плоском напряжённом состоянии имеются три неизвестных напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} . Поэтому, для решения плоской задачи теории упругости в напряжениях, при постоянстве объёмных сил, требуется проинтегрировать три уравнения: два уравнения равновесия (4.3.3) –

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \cdot \rho &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y \cdot \rho &= 0. \end{aligned} \right\}$$

и одно уравнение неразрывности деформации (4.3.6) –

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},$$

при обязательном удовлетворении условия на поверхности (4.3.4) –

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m, \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{aligned} \right\}$$

В(4.3.3) и (4.3.6) произойдут изменения:

Если объёмной силой является сила тяжести, то при вертикальном расположении оси u сверху вниз, составляющая веса единицы объёма тела будет: $Y \cdot \rho = g \cdot \rho = p$, а две другие составляющие исчезнут: $X \cdot \rho = Z \cdot \rho = 0$.

Вместо уравнения неразрывности деформации (4.3.6) представленного в деформациях, будет применяться уравнение, представленное в напряжениях (4.4.1). Тогда решающими уравнениями будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + p &= 0, \\ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.5.1)$$

Рассмотрим первые два уравнения. Эта система неоднородная. Её решение состоит из суммы общего решения однородной системы уравнений и частного решения неоднородной системы уравнения. Одно из частных решений будет:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{yx} = -px \quad (4.5.2)$$

Действительно, эти значения удовлетворяют двум уравнениям (4.5.1)

$$\left. \begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ -p + 0 + p &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Найдём теперь общее решение однородной системы. Рассмотрим первое уравнение:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

По нему видно, что напряжения σ_x и τ_{xy} взаимосвязаны друг с другом: частное производное первого по x , равно частному производному второго по y , с обратным знаком. Это возможно в том случае, если существует какая-то функция $A(x, y)$, производные которой равны этим напряжениям:

по y

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \sigma_x, \quad (a)$$

по x

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -\tau_{xy}, \quad (б)$$

т.к. по вторым производным функции $A(x, y)$, получается равенство $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$.

Действительно

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y},$$

в силу равенства левых частей $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$.

Вполне аналогично, из второго однородного—однородное потому, что ищем общее решение—уравнения $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$ системы (4.5.1), получаем равенство

$$-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}.$$

Также как в первом случае, и здесь должна существовать какая-то функция $B(x, y)$, производные которой равны этим напряжениям:

по y

$$\frac{\partial B}{\partial y} = -\tau_{xy}, \quad (в)$$

по x

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \sigma_y, \quad (г)$$

и здесь по вторым производным функции $B(x, y)$, должно получаться равенство $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$.

Действительно

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$$

в силу равенства левых частей $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}$.

Теперь приравняем левые части выражений (б) и (в):

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}$$

По этому равенству видно, что функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ взаимосвязаны друг с другом: частное производное первой по x , равно частному производному второй по y . Это возможно в том случае, если существует какая-то функция $\varphi(x, y)$, производные которой равны этим функциям:

по y

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = A \quad (д)$$

по x

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = B \quad (е)$$

т.к. по вторым производным функции $\varphi(x, y)$ получается равенство $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}$.

Действительно

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial A}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial y}$$

в силу равенства левых частей $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial y}$.

Внесённая функция $\varphi(x, y)$ называется функцией Эри (по имени английского астронома XIX века Эри Джорджа Бидделла) и ею выражаются напряжения:

а) нормальное напряжение σ_x из соотношений (а) $-\frac{\partial A}{\partial y} = \sigma_x$ и (д) $-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = A$,
 $\left(\sigma_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad (4.5.3)$$

б) нормальное напряжение σ_y из соотношений (г) $-\frac{\partial B}{\partial x} = \sigma_y$ и (е) $-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = B$, $\left(\sigma_y = \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)$:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad (4.5.4)$$

в) касательное напряжение τ_{xy} из соотношений (б) $-\frac{\partial A}{\partial x} = -\tau_{xy}$ и (д) $-\frac{\partial \varphi}{\partial y} = A$,
 $\left(\tau_{xy} = -\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (4.5.5)$$

Таким образом, общее решение системы однородных уравнений выражается неизвестной функцией Эри. К нему добавляется частное решение (4.5.2) $-\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{yx} = -px$. В итоге получим окончательные выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px \end{aligned} \right\} \quad (4.5.6)$$

§ 4.6. Бигармоническое уравнение плоской задачи

Подстановкой выражений напряжений (4.5.6), представленных функцией Эри, в уравнение неразрывности (4.4.1) $-\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$, получаем:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0$$

или

$$\nabla^2(\nabla^2 \varphi) = 0$$

или

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (4.6.1)$$

Функция φ , подчиняющая уравнение (4.6.1) называется функцией напряжения. Она бигармоническая, также как и уравнение (4.6.1) — бигармоническое уравнение. Запишем последнее уравнение без применения двойного оператора Лапласа:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Произведём дифференцирование:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (4.6.2)$$

Выразим условия на поверхности для плоской задачи (4.3.4) – $\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m, \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{aligned} \right\}$ через

функцию напряжений с помощью уравнений (4.5.6) – $\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px \end{aligned} \right\}:$

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px \right) m; \\ Y_v &= -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px \right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m. \end{aligned} \right\} \quad (4.6.3)$$

Итак, плоская задача теории упругости сводится к отысканию одной бигармонической функции $\varphi(x, y)$, удовлетворяющей заданным условиям на контуре.

§ 4.7. Полуобратный метод. Решение в полиномах

Функция $\varphi(x, y)$ в каждой точке внутри тела должна удовлетворять уравнению (4.6.2) – $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$, а на границе тела поверхностные условия (4.6.3) –

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px \right) m; \\ Y_v &= -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px \right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m. \end{aligned} \right\}$$

Если сможем найти такую функцию $\varphi(x, y)$, то по формулам (4.5.6)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

найдем и напряжения, а дальше, при необходимости, по ним, деформации и перемещения.

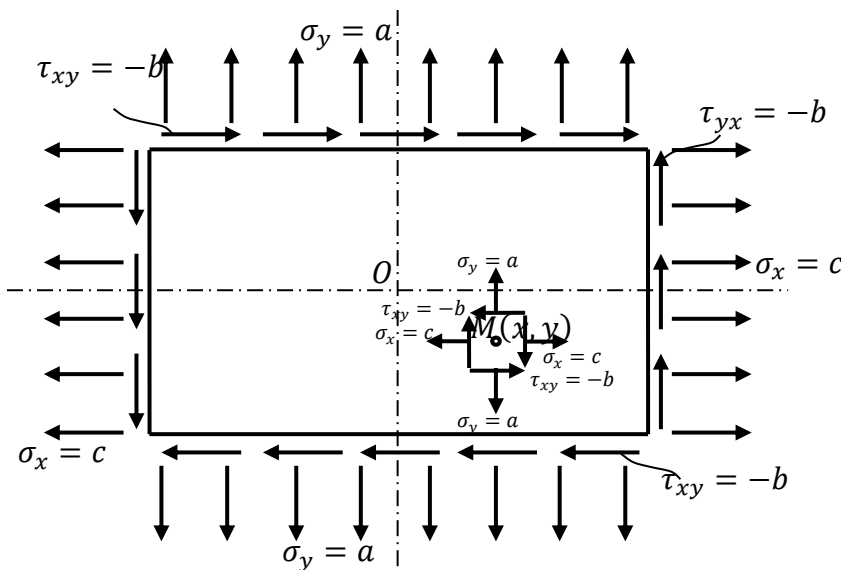


Рис. 17

Найдем функцию напряжения $\varphi(x, y)$ полуобратным методом, который заключается в следующем:

Задается аналитический вид функции φ .

Определяются коэффициенты этой функции, как неизвестные, по поверхностным условиям.

Решение начнем с простых полиномов (целых функций):

Полином первой степени не пригоден, так как

напряжения в (a) являются их вторыми производными и напряжения окажутся нулями.

а) Рассмотрим полином второй степени:

$$\varphi(x, y) = \frac{a}{2}x^2 + bxy + \frac{c}{2}y^2; \quad (б)$$

Уравнение неразрывности деформации (4.6.1) – $\nabla^4 \varphi = 0$ удовлетворяется, т.е. полином второй степени является бигармонической функцией, т. к. в (4.6.1) функция $\varphi(x, y)$ представлена четвёртыми производными и они окажутся нулями. По формулам (а), пренебрегая составляющим собственного веса $-px$, получаем выражения:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -b. \quad (4.7.1)$$

Таким образом, взяв полином второй степени, получаем напряжения постоянного значения. Случай, когда в каждой точке напряжённого тела напряжения одинаковые, независимо от место нахождения точки $M(x, y)$ в теле (рис.17), т.е. независимо от координат x и y , называется однородным напряжённым состоянием.

Коэффициенты a, b и c определяются по условиям на контуре и условиям на поверхности тела, которое в этом случае (рис. 17) не нагружено.

б) Возьмём за функцию напряжения полином третьей степени:

$$\varphi(x, y) = \frac{d}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{e}{2 \cdot 1}x^2y + \frac{f}{1 \cdot 2}y^2x + \frac{k}{2 \cdot 3}y^3; \quad (г)$$

в многочлен не были введены члены второй степени, т.к. известно, что они прибавят постоянные напряжения в каждой точке.

Условие неразрывности деформации удовлетворяется, т.к. четвёртые производные функции $\varphi(x, y)$ равны нулю.

Составим выражения для напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = fx + ky; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = dx + ey; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px = -(e + p)x - fy. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.2)$$

Полином третьей степени пригоден, когда все напряжения меняются линейным законом. Чтобы выразить на рисунке напряжённое состояние для общего случая, т.е. при линейном изменении всех трёх напряжений, потребуются достаточно искусные навыки.

Ограничимся частными случаями, например, когда $\varphi = \frac{k}{6}y^3$ и посмотрим, решение какой задачи даётся этой функцией. Собственным весом пренебрегаем.

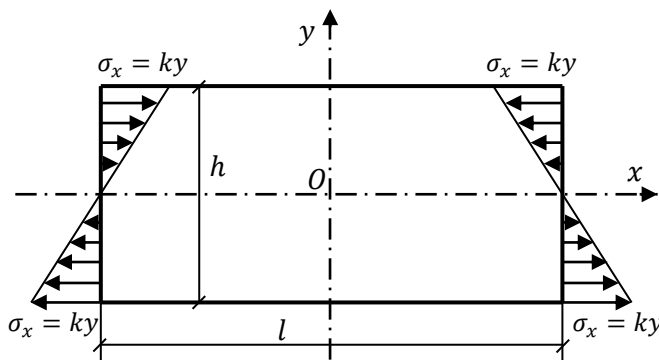


Рис. 18

Выражения для напряжений будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = ky; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.7.3)$$

По (4.7.3) становится очевидным, что только нормальное напряжение σ_x меняется в перпендикулярных к оси x сечениях по линейному закону, т.е. закону наклонной прямой. Такое напряжённое состояние, как известно из курса сопротивления материалов, соответствует случаю чистого изгиба (рис. 18).

в) Полином четвёртой степени

$$\varphi(x, y) = \frac{a}{12}x^4 + \frac{b}{3}x^3y + \frac{c}{2}x^2y^2 + \frac{d}{3}xy^3 + \frac{e}{12}y^4 \quad (\Gamma)$$

уже не удовлетворяет бигармоническому уравнению, т.к. четвёртые производные функции напряжения не превращаются в нули. Составим выражения четвертых производных:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 2a; \quad 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 4c; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 2e$$

и подставим их в уравнение (4.6.2) – $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$, получим:

$$2a + 4c + 2e = 0. \quad (\Delta)$$

Полученное соотношение между коэффициентами полинома показывает, что они не могут быть выбраны произвольно.

Выразим один из них посредством остальных других из (Δ):

$$e = -(a + 2c), \quad (e)$$

остальные четыре коэффициента определяются из боковых граничных условий.

Рассмотрим пример, когда функцией напряжения является $\varphi = \frac{d}{3}xy^3$. Условие неразрывности деформации по ней удовлетворяется, т.к. четвёртые производные функции $\varphi(x, y)$ равны нулю.

Для напряжений будем иметь следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 2dxy; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{4}dy^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.7.4)$$

Напряжения σ_x в точках, расположенных на осях x и y , равны нулю. По мере удаления

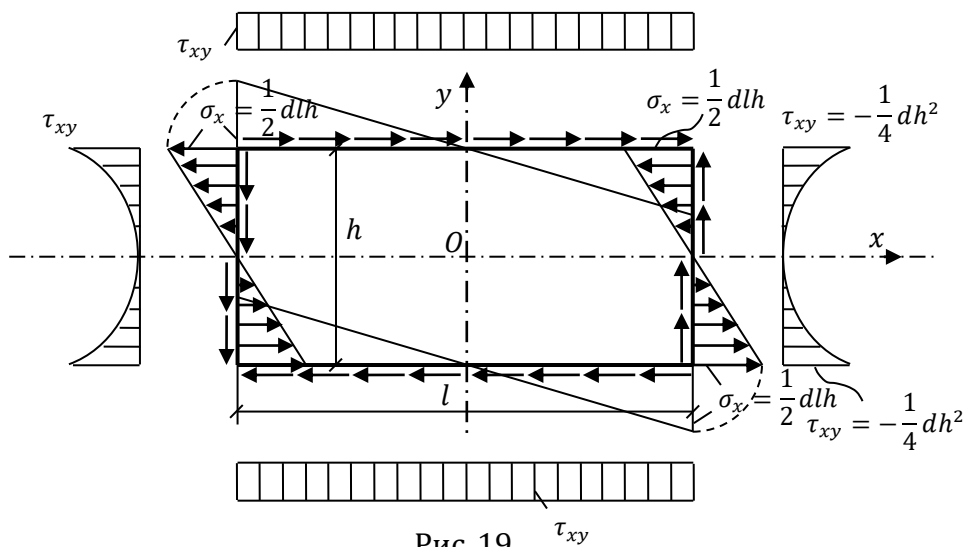


Рис. 19. τ_{xy}

от горизонтальной оси x и вертикальной оси y его значение растёт линейно и достигает наибольшего значения в точках крайних углов тела (рис. 19.):

$$\sigma_x = \left| \frac{1}{2}dlh \right|.$$

Касательные напряжения τ_{xy} по длине прямоугольника остаются постоянными, а

по высоте прямоугольника меняются по закону параболы. Вдоль оси x оно равно нулю, а крайних точках достигает максимума по абсолютному значению:

$$\tau_{xy} = \left| \frac{1}{4} dh^2 \right|. \quad (4.7.5)$$

§ 4.8. Изгиб консоли силой, приложенной на свободном конце

1. Подбор функции напряжения

Рассмотрим консоль с единичной толщиной – $b = 1$. Длина консоли больше или равна высоте $l \geq h$. Собственный вес консоли не принимается во внимание. Так как, рассматривается плоская задача теории упругости, необходимо подобрать функцию

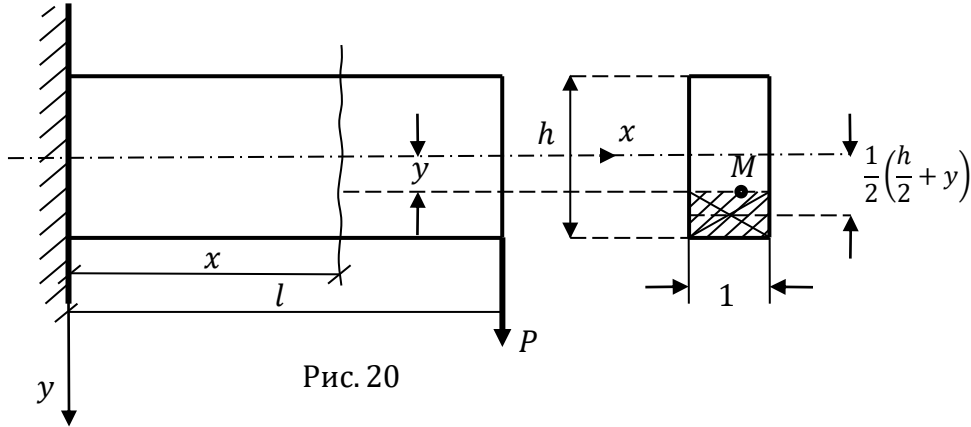


Рис. 20

напряжения $\varphi(x, y)$ в виде полинома. Это можно сделать двумя путями:

1) Можно испробовать полиномы разных степеней и продолжить делать это до тех пор, пока не найдётся такая комбинация, которая удовлетворит поставленной задаче. Для этой цели можно воспользоваться таблицами, составленными для полиномов разных степеней или же применить решения задач, имеющих в литературе и по ним подобрать надлежащую функцию φ .

2) Можно воспользоваться формулами сопротивления материалов и по ним найти функцию напряжения $\varphi(x, y)$. Если эта функция не удовлетворит уравнениям теории упругости, то путём проводимого анализа, можно внести соответствующие корректировки.

Воспользуемся вторым способом:

По формуле сопротивления материалов, изгибающий момент в поперечном сечении, удалённого от опоры на расстояние x , будет

$$M(x) = -P(l - x).$$

Нормальное напряжение σ_x в любой точке $M(x, y)$ этого поперечного сечения, т.е. вертикального сечения, вычисляется по формуле:

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I_z} y = -\frac{P(l-x)}{I_z} y = -\frac{Pl}{I_z} y + \frac{P}{I_z} xy. \quad (a)$$

Таким образом, получается выражение вида

$$\sigma_x = A \cdot y + B \cdot x \cdot y, \quad (4.8.1)$$

где, коэффициенты $A = -\frac{Pl}{I_z}$ и $B = \frac{P}{I_z}$ для этого сечения являются постоянными величинами.

Нормальное напряжение σ_y в этой же точке $M(x, y)$ продольного сечения, т.е. горизонтального сечения, равно нулю

$$\sigma_y = 0. \quad (4.8.2)$$

По закону парности касательных напряжений в точке $M(x, y)$ возникают касательные напряжения τ_{xy} в обеих плоскостях и они равны по абсолютному значению

$$\tau_{xy} = \frac{Q(x) \cdot S_{отс}}{I_z \cdot b}; \quad (б)$$

где $Q(x)$ — поперечная сила и она равна:

$$Q(x) = P.$$

$S_{отс}$ является статическим моментом части поперечного сечения, отсеченной проведенным через точку $M(x, y)$ продольным сечением, т.е. горизонтальной плоскостью на расстоянии y от нейтрального слоя:

$S_{отс} = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) \left(\frac{h}{2} - y \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$; а толщина b на уровне точки $M(x, y)$ равна единице.

Внесением этих значений в формулу (а), получаем

$$\tau_{xy} = \frac{P \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{2I_z} = \frac{P \cdot h^2}{8I_z} - \frac{P \cdot y^2}{2I_z}. \quad (в)$$

Таким образом, получается выражение вида

$$\tau_{xy} = C + D \cdot y^2 \quad (4.8.3)$$

Представляя выражения (4.8.1), (4.8.3) и $\sigma_y = 0$ через вторые производные функции напряжения, будем иметь:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = A \cdot y + B \cdot x \cdot y; \quad (4.8.4)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad (4.8.5)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = C + D \cdot y^2. \quad (4.8.6)$$

Найдём функцию напряжения по её вторым производным.

Интегрируя (4.8.4) дважды по y , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{A \cdot y^2}{2} + \frac{Bxy^2}{2} + f_1(x); \\ \varphi(x, y) &= \frac{A \cdot y^3}{6} + \frac{Bxy^3}{6} + f_1(x) \cdot y + f_2(x). \end{aligned} \quad (4.8.7)$$

Произвольные функций интегрирования $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определяются из условий (4.8.5) и (4.8.6). Продифференцируем (4.8.7) дважды по x и приравняем нулю, согласно формуле (4.8.5):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = f_1''(x) \cdot y + f_2''(x) = 0.$$

Т.к. y является произвольной переменной, а не нулём, то:

$$f_1''(x) \equiv 0 \text{ и } f_2''(x) \equiv 0$$

Проинтегрируем оба тождества дважды:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= E \text{ и } f_2'(x) = H \\ f_1(x) &= E \cdot x + F \text{ и } f_2(x) = H \cdot x + K. \end{aligned}$$

Таким образом, функции интегрирования $f_1(x)$ и $f_2(x)$ оказались линейными функциями переменной x .

Составим смешанное второе производное от выражения (4.8.7)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{By^2}{2} + f_1'(x) = \frac{By^2}{2} + E,$$

и приравняем к нему (4.8.6):

$$-\frac{By^2}{2} - E = C + D \cdot y^2$$

откуда

$$C = -E \text{ и } D = -\frac{B}{2}. \quad (4.8.8)$$

Выражение (4.8.7) для $\varphi(x, y)$ примет вид:

$$\varphi(x, y) = \frac{A \cdot y^3}{6} + \frac{Bxy^3}{6} + (E \cdot x + F) \cdot y + H \cdot x + K.$$

Пренебрегаем слагаемыми, содержащими нулевые и первые степени переменных x и y , которые в выражениях напряжений $\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ всё равно станут нулями и заменяем E на $-C$.

Получаем окончательное выражение функции напряжения

$$\varphi(x, y) = \frac{A \cdot y^3}{6} + \frac{Bxy^3}{6} - Cxy. \quad (4.8.9)$$

Полученной функцией напряжения удовлетворяются как уравнения равновесия

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

так и уравнение неразрывности деформации $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$, т.е. она бигармоническая функция.

Это означает, что взятые вначале напряжения:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = Ay + Bxy; \quad (4.8.4)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \quad (4.8.5)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{By^2}{2} + C, \quad (4.8.6)$$

удовлетворяют уравнениям теории упругости.

2. Определение произвольных коэффициентов

Коэффициенты A , B и C определяются по условиям на поверхности. Так как передняя и задняя грани не нагружены, то рассматриваются граничные условия на контуре.

1) На верхнем и нижнем краях нет как нормальных напряжений σ_y , так и касательного напряжения τ_{xy} , т.е. когда $y = \pm \frac{h}{2}$, то $\sigma_y = 0$ и $\tau_{xy} = 0$.

Из первого условия ничего не вытекает, а со второго выходит, что $-\frac{Bh^2}{8} + C = 0$

или

$$C = \frac{Bh^2}{8}. \quad (a)$$

2) На правом краю нет нормальных напряжений σ_x , т.е. когда $x = l$, то $\sigma_x = 0$ или $A \cdot y + B \cdot l \cdot y = 0$, откуда

$$B = -\frac{A}{l}. \quad (б)$$

3) На правом краю возникают касательные напряжения τ_{xy} и их равнодействующая

$Q(z) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy$ уравнивает внешнюю силу P , т.е. $Q(z) - P = 0$, или $Q(z) = P$ и

$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy = P$. Здесь граничное условие соблюдается приближённо, т.к. закон распределения касательных напряжений $\tau_{xy} = \frac{Q(x) \cdot S_{отс}}{I_z \cdot b}$ был подобран из курса сопротивления материалов, что подлежало корректировке в точном решении теории упругости.

Подобная замена точного условия приближённым называется смягчением граничных условий. Смягчая граничное условие, используя его в виде, когда $x = l$, то $Q(z) = P$, подставляем в интеграл выражение касательного напряжения $\tau_{xy} = -\frac{By^2}{2} + C = -\frac{By^2}{2} + \frac{Bh^2}{8}$, получаем

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dy = P \Rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(-\frac{By^2}{2} + \frac{Bh^2}{8} \right) dy = P \Rightarrow \left[-\frac{By^3}{6} + \frac{Bh^2 y}{8} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = P \Rightarrow -\left(\frac{Bh^3}{48} + \frac{Bh^3}{48} \right) + \frac{Bh^3}{16} + \frac{Bh^3}{16} = P \Rightarrow -\frac{Bh^3}{24} + \frac{Bh^3}{8} = P \Rightarrow \frac{-Bh^3 + 3Bh^3}{24} = P \Rightarrow \frac{Bh^3}{12} = P,$$

откуда

$$B = \frac{12}{h^3} P = \frac{P}{I_z}. \quad (4.8.10)$$

где I_z – момент инерции поперечного сечения балки $I_z = \frac{1 \cdot h^3}{12}$.

Значение коэффициента B определено заданными величинами: силой P , высотой h и толщиной $b = 1$ консольной балки. По ним определяются и остальные два коэффициента:

Из выражения (б) – $B = -\frac{A}{l}$,

$$A = -B \cdot l = -\frac{P \cdot l}{I_z}. \quad (4.8.11)$$

И из выражения (а):

$$C = \frac{Bh^2}{8} = \frac{Ph^2}{8I_z}. \quad (4.8.12)$$

Вспомним также, что по выражению (4.8.8):

$$D = -\frac{B}{2} = -\frac{P}{2I_z}. \quad (4.8.13)$$

Теперь, после того, как найдены значения всех коэффициентов, можно составить выражения напряжений в окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{P \cdot l}{I_z} \cdot y + \frac{P}{I_z} \cdot y \cdot x = -\frac{P(l-x)}{I_z} \cdot y; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \\ \tau_{xy} &= \frac{Ph^2}{8I_z} - \frac{P}{2I_z} \cdot y^2 = \frac{P}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{aligned} \right\}, \quad (4.8.14)$$

Найденные выражения в виде формул сопротивления материалов полностью

удовлетворяют уравнениям теории упругости (4.5.1) –
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \\ \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

и граничным условиям.

Надо отметить, что в задачах сопротивления материалов этого сделать, т.е. удовлетворить уравнениям теории упругости, не всегда удаётся.

3. Определение перемещений

Закон Гука при плоском напряжённом состоянии, как известно, имеет вид (4.3.7):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = -\frac{1}{E} \frac{P(l-x)}{I_z} \cdot y, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = \frac{\nu}{E} \frac{P(l-x)}{I_z} \cdot y, \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (4.8.15)$$

Представим в нём деформации посредством перемещений по соотношениям Коши (4.3.5)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\}$$

Получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{P}{EI_z}(l-x) \cdot y, \quad (в)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\nu P}{EI_z}(l-x) \cdot y, \quad (г)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(1+\nu)P}{EI_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (д)$$

Проинтегрируем уравнения (в) и (г) по соответствующим переменным x и y :

$$u = -\frac{P}{EI_z} \left(lxy - \frac{x^2 y}{2} \right) + f_3(y) \quad (е)$$

$$v = \frac{\nu P}{EI_z} \left(\frac{ly^2}{2} - \frac{xy^2}{2} \right) + f_4(x) \quad (ж)$$

Для определения полученных произвольных функций интегрирования $f_3(y)$ и $f_4(x)$, составляем соответствующие производные по левой части уравнения (д) и их сумму приравниваем к правой части:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{P}{EI_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + f_3'(y); \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\nu P}{EI_z} \cdot \frac{y^2}{2} + f_4'(x); \\ -\frac{P}{EI_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + f_3'(y) - \frac{\nu P}{EI_z} \frac{y^2}{2} + f_4'(x) &= \frac{(1+\nu)P}{EI_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \end{aligned}$$

Переписываем это выражение следующим образом:

$$\left[f_4'(x) - \frac{P}{EI_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \right] + \left[f_3'(y) - \frac{\nu P}{EI_z} \frac{y^2}{2} + \frac{(1+\nu)P}{EI_z} y^2 \right] = \frac{(1+\nu)P}{EI_z} \frac{h^2}{4}. \quad (з)$$

Выражение в первых квадратных скобках зависит только от переменной x , во вторых скобках – от y , правая же сторона постоянная величина. Так как x и y – полностью независимые переменные (не зависят друг от друга), то это равенство может иметь место тогда, когда в каждой из квадратных скобок отдельно, выражение будет постоянным, т.е. когда:

$$\begin{aligned} C_1 = f_4'(x) - \frac{P}{EI_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \text{ и } C_2 = f_3'(y) - \frac{\nu P}{EI_z} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{(1+\nu)P}{EI_z} y^2 &= f_3'(y) - \frac{P}{EI_z} \left\{ \left[\frac{\nu}{2} - \right. \right. \\ &\left. \left. (1+\nu) \right] y^2 \right\} = f_3'(y) + \frac{P}{EI_z} \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) y^2, \end{aligned} \quad (и)$$

Следовательно, выражению (и) можем придать вид

$$C_1 + C_2 = \frac{(1+\nu)P}{EI_z} \frac{h^2}{4}. \quad (й)$$

Из выражений (и) получаем

$$f_4'(x) = \frac{P}{EI_z} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1; \quad f_3'(y) = -\frac{P}{EI_z} \left(1 + \frac{\nu}{2} \right) y^2 + C_2 = -\frac{P}{EI_z} y^2 - \frac{P}{EI_z} \frac{\nu}{2} y^2 + C_2.$$

Проинтегрируем эти выражения:

$$f_4(x) = \frac{P}{EI_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + d_1;$$

$$f_3(y) = -\frac{Py^3}{3EI_z} - \frac{P}{EI_z} \frac{v \cdot y^3}{2 \cdot 3} + C_2y + d_2 = -\frac{P(2+v)}{EI_z} \frac{y^3}{6} + C_2y + d_2.$$

Итак, получили выражения функций $f_3(y)$ и $f_4(x)$. Внесём их в выражения (е) и (ж).

Получим выражения перемещений:

$$u = -\frac{P}{EI_z} \left(lxy - \frac{x^2y}{2} \right) - \frac{P(2+v)}{EI_z} \frac{y^3}{6} + C_2y + d_2 = \frac{P}{EI_z} \left[-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{(2+v)}{6} \cdot y^3 \right] + C_2y + d_2;$$

$$v = \frac{vP}{EI_z} \left(\frac{ly^2}{2} - \frac{xy^2}{2} \right) + \frac{P}{EI_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + d_1 = \frac{P}{EI_z} \left(\frac{vly^2}{2} - \frac{vxy^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + d_1,$$

т.е.

$$u = \frac{P}{EI_z} \left(-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{(2+v)}{6} \cdot y^3 \right) + C_2y + d_2; \quad (\kappa)$$

$$v = \frac{P}{EI_z} \left(\frac{vly^2}{2} - \frac{vxy^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + d_1. \quad (\lambda)$$

Для определения произвольных постоянных интегрирования C_1, C_2, d_1 и d_2 нужно использовать условия закрепления.

Закрепим левую крайнюю точку оси стержня и примем её за точку начала координатной системы xOy .

Когда $x = 0$ и $y = 0$, тогда $u = 0$ и $v = 0$. (м)

Воспользуемся условием (а), сначала в уравнении (κ), получим

$$d_2 = 0,$$

а затем в уравнении (λ), получим

$$d_1 = 0.$$

т.е.

$$d_1 = d_2 = d = 0. \quad (\text{н})$$

Теперь, надо выразить математически то, что закреплённый стержень в закреплении не будет поворачиваться.

Для этого в начале координатной системы надо закрепить какой-нибудь материальный элемент.

а) Закрепим горизонтальный элемент dx (рис. 21). Как считается в сопротивлении материалов, горизонтальная касательная, проведённая к оси стержня в начальной точке, останется горизонтальной и после деформации, т.е.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=y=0} = 0. \quad (\text{о})$$

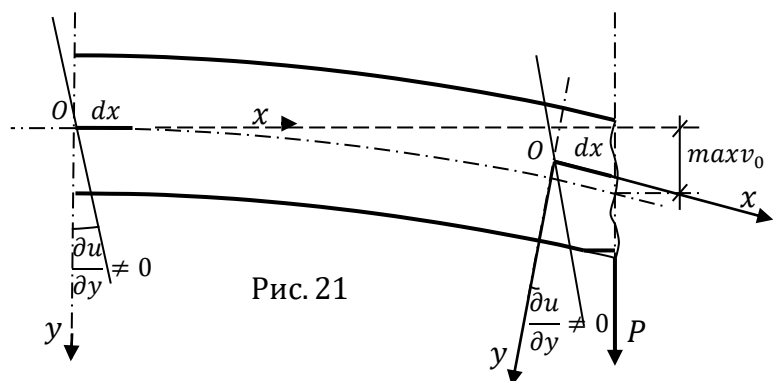
Продифференцировав (λ) – $v =$

$$\frac{P}{EI_z} \left(\frac{vly^2}{2} - \frac{vxy^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + d_1, \text{ получим}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{P}{EI_z} \left(-\frac{vy^2}{2} + lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1,$$

т.е., когда $x = y = 0$,

$$C_1 = 0. \quad (\text{п})$$



Тогда, с учётом $C_1 = 0$, из (й) – $C_1 + C_2 = \frac{(1+\nu)P}{EI_z} \frac{h^2}{4}$,

получим

$$C_2 = \frac{(1+\nu)P}{EI_y} \frac{h^2}{4}. \quad (p)$$

В итоге, выражения перемещений (к) – $u = \frac{P}{EI_z} \left(-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{(2+\nu)}{6} \cdot y^3 \right) + C_2y + d_2$ и

(л) – $v = \frac{P}{EI_z} \left(\frac{\nu ly^2}{2} - \frac{\nu xy^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + d_1$, получают вид:

$$u = \frac{P}{EI_z} \left[-lxy + \frac{x^2}{2} - \frac{(2+\nu)}{6} \cdot y^3 + \frac{(1+\nu)}{4} h^2 \cdot y \right]; \quad (4.8.16)$$

$$v = \frac{P}{EI_z} \left(\frac{\nu ly^2}{2} - \frac{\nu xy^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (4.8.17)$$

Уравнение изогнутой оси стержня можем получить, если внесём в выражение (4.8.17) значение $y = 0$, т.е., уравнение изогнутой оси или упругой линии, будет иметь вид:

$$v_0 = \frac{P}{EI_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right). \quad (4.8.18)$$

Прогиб на конце консоли, когда $x = l$, т.е. стрела прогиба будет

$$\max v_0 = f = \frac{P}{EI_z} \left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{6} \right) = \frac{Pl^3}{3EI_y}. \quad (4.8.19)$$

Получили то же значение, что и было в сопротивлении материалов.

2) Закрепим вертикальный элемент dy (рис.22). Касательная к оси x , после деформации стержня, как это было в предыдущем случае, уже не занимает горизонтальное положение, т.е. $\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0$.

В этом случае, когда $x = y = 0$, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (с)$$

Воспользуемся условием (с) в (к) –

$$u = \frac{P}{EI_z} \left[-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{(2+\nu)}{6} \cdot y^3 \right] + C_2y;$$

продифференцировав сначала по y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{P}{EI_z} \left[-lx + \frac{x^2}{2} - \frac{(2+\nu)}{2} \cdot y^2 \right] + C_2 = 0,$$

т.е. когда $x = y = 0$,

$$C_2 = 0 \quad (т)$$

с учётом $C_2 = 0$, из (й) – $C_1 + C_2 = \frac{(1+\nu)P}{EI_z} \frac{h^2}{4}$, получим

$$C_1 = \frac{(1+\nu)P}{EI_z} \frac{h^2}{4}. \quad (у)$$

В итоге, для перемещений u и v будем иметь выражения:

$$u = \frac{P}{EI_z} \left[-lxy + \frac{x^2y}{2} - \frac{(2+\nu)}{6} \cdot y^3 \right]; \quad (4.8.20)$$

$$v = \frac{P}{EI_z} \left[\frac{\nu ly^2}{2} - \frac{\nu xy^2}{2} + \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(1+\nu)}{4} h^2 \cdot x \right]. \quad (4.8.21)$$

Уравнение изогнутой оси стержня получим, если внесём в выражение (4.8.21) значение $y = 0$,

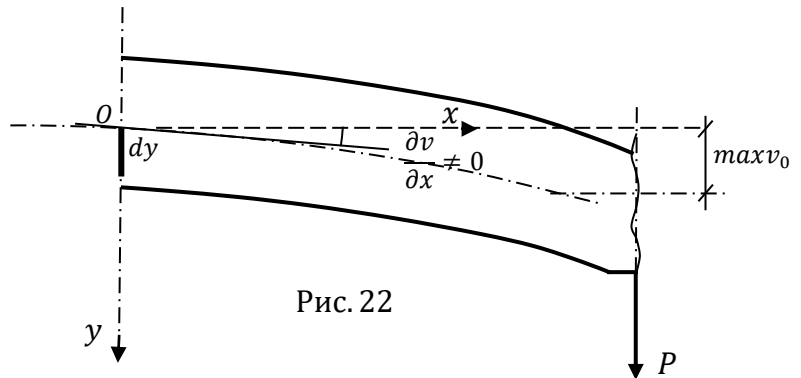


Рис. 22

$$v_0 = \frac{P}{EI_z} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{(1+\nu)}{4} h^2 \cdot x \right). \quad (4.8.22)$$

Прогиб на конце консоли, когда $x = l$, т.е. стрела прогиба будет:

$$\max v_0 = f = \frac{Pl^3}{3EI_z} + \frac{(1+\nu)P}{EI_z} \frac{h^2}{4} \cdot l. \quad (4.8.23)$$

Получили значение, которое отличается от значения (4.8.19) – $\max v_0 = \frac{Pl^3}{3EI_y}$ вторым слагаемым $\frac{(1+\nu)P}{EI_y} \frac{h^2}{4} \cdot l$

Это происходит по причине сдвига в вертикальной плоскости, которому вертикально закреплённый отрезок не препятствует $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=y=0} \neq 0$, а горизонтально закреплённый препятствовал $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x=y=0} = 0$.

Надо отметить, что поперечные сечения не остаются плоскими, а искривляются по кубической параболе, по выражениям (4.8.16) и (4.8.20). Несмотря на это, формула для определения нормального напряжения σ_x , выведённая на основании гипотезы плоских сечений, $\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I_z} = -\frac{P(l-x)}{I_z} \cdot y$, остаётся справедливой.

§ 4.9 Изгиб консоли силой, приложенной на свободном концес применением полиномов

Возьмём консоль длиной l , высотой $2c$ и толщиной, равной 1, нагруженной силой P , приложенной на конце (рис. 23). Решение задачи получим, если используем принцип суперпозиции и представим функцию φ в виде суммы рассмотренных ранее полиномов четвёртой и второй степеней:

$$\varphi = \varphi_4 + \varphi_2 = \frac{d_4}{6} xy^3 + b_2 xy. \quad (4.9.1)$$

Функция напряжения в виде (4.9.1), как следует из предыдущего (§ 4.7), удовлетворяет основному уравнению плоской задачи (4.6.2) – $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$. Запишем выражения для напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = d_4 xy; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{d_4}{2} y^2 - b_2. \end{aligned} \right\}$$

Для того чтобы функция (4.9.1) удовлетворяла граничным условиям, необходимо потребовать, во-первых, чтобы касательные напряжения на верхней и нижней кромках полосы были равны нулю и, во-вторых, чтобы равнодействующая касательных усилий на левой кромке ($x = 0$) была равна приложенной силе P .

Первое условие удовлетворяется, если мы потребуем, чтобы τ_{xy} при $y = \pm c$ было равно нулю: $-\frac{d_4}{2} c^2 - b_2 = 0$, откуда $b_2 = -\frac{d_4}{2} c^2$.

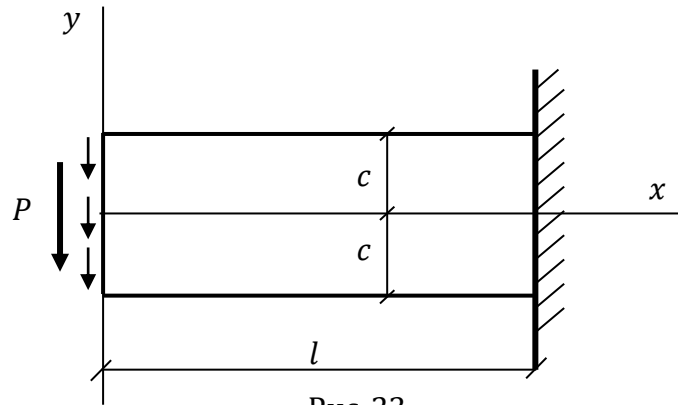


Рис. 23

Второе условие удовлетворяется, если проинтегрируем выражение для τ_{xy} по высоте полосы и приравняем результат интегрирования силе P :

$$\int_{-c}^c \tau_{xy} dy = - \int_{-c}^c \left(\frac{d_4}{2} y^2 + b_2 \right) dy = - \int_{-c}^c \left(\frac{d_4}{2} y^2 - \frac{d_4}{2} c^2 \right) dy = - \frac{d_4}{2} \left(\frac{y^3}{3} - c^2 y \right) \Big|_{-c}^c = - \frac{d_4}{2} \left(\frac{2c^3}{3} - 2c^3 \right) = - \frac{2}{3} d_4 c^3 = P.$$

Отсюда $d_4 = \frac{3P}{2c^3}$, а $b_2 = -\frac{3P}{4c}$.

Подставив найденные значения коэффициентов полинома в (4.9.1), получим

$$\varphi = \frac{P}{4c^3} xy^3 - \frac{3P}{4c} xy. \quad (4.9.2)$$

Теперь найдём выражения для напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{3P}{2c^3} xy; \\ \sigma_y &= 0; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{3P}{4c} \left[1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.9.3)$$

Из приведённых выражений для напряжений видно, что они совпадают с теми,

которые известны из курса сопротивления материалов (там $\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Px}{I_z} \cdot y; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \\ \tau_{xy} &= \frac{P}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \end{aligned} \right\}, \text{ т.к.}$

$$c = \pm \frac{h}{2} \text{ и } I_z = \frac{2}{3} c^3$$

В самом деле, выражение для нормальных напряжений σ_x можно представить в следующем виде: $\sigma_x = \frac{M(x)}{I_x} y$, где $M(x) = Px$, а $I_z = \frac{2c^3}{3}$ для полосы, имеющей толщину, равную 1. Выражение для касательных напряжений также полностью согласуется с известной формулой Журавского для касательных напряжений при изгибе балки. Касательные напряжения по высоте сечения распределяются по параболе. Следовательно, и приложенная на торце балки сила P должна быть распределена по высоте сечения по параболе.

Используя уравнения закона Гука, найдём выражения для деформаций ε_x , ε_y и γ_{xy} :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{3P}{2Ec^3} xy; \\ \varepsilon_y &= -\nu \frac{3P}{2Ec^3} xy; \\ \gamma_{xy} &= \frac{3(1+\nu)P}{2E} \frac{1}{c} \left[1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.9.4)$$

Далее проинтегрировав уравнения Коши (4.3.5) — $\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \right\}, \text{ получаем}$

выражения для перемещений u и v . Постоянные интегрирования могут быть получены из условия закрепления консоли (§ 4.8). При этом оказывается, гипотеза плоских сечений не подтверждается.

Таким образом, для консоли, нагруженной на конце силой P , распределение нормальных σ_x и $\sigma_y = 0$ и касательных напряжений τ_{xy} соответствует тому, которое известно из

курса сопротивления материалов, если сила P распределена на торце по параболе, а заделанный конец не имеет стеснений для деформаций.

§ 4.10. Изгиб прямоугольной полосы на двух опорах под равномерно распределённой нагрузкой

Рассмотрим задачу об изгибе полосы длиной $2l$, высотой $2c$ и толщиной, равной 1, нагруженной равномерно распределённой по длине нагрузкой интенсивностью q (рис. 24). Будем полагать, что полоса свободно опёрта по краям. На боковые кромки действуют реактивные усилия, равные ql , а продольная сила N_x и момент M_z на этих кромках равны нулю.

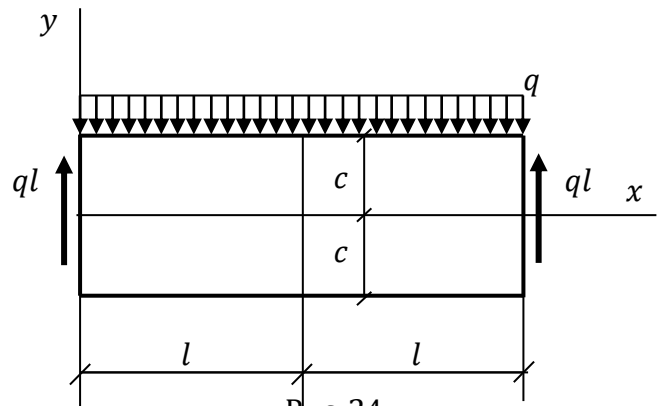


Рис. 24

Таким образом, граничные условия для полосы можно записать в следующем виде:

- а) для верхней кромки ($y = c$) $\tau_{xy} = 0, \sigma_y = -q$;
- б) для нижней кромки ($y = -c$) $\tau_{xy} = 0, \sigma_y = 0$;
- в) для боковых кромок ($x = 0, x = 2l$)

$$N_x = \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0, M_z = \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0.$$

Граничные условия для боковых кромок записаны в интегральной форме на основании принципа Сен-Венана, согласно которому характер распределения статически эквивалентных нагрузок оказывает влияние на величину и распределение напряжений в ограниченной области тела вблизи места приложения внешних нагрузок.

Для рассматриваемой задачи в случае отсутствия объёмных сил уравнения равновесия

$$(4.2.3) - \left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y \cdot \rho &= 0 \end{aligned} \right\} \text{и совместности деформаций через напряжения и (4.4.1) -}$$

$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$, запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0; \\ \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.10.1)$$

Следуя Н.И. Безухову, вначале предположим, что напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} определяются известными выражениями из курса сопротивления материалов. Затем, подставив эти выражения в уравнения равновесия и совместности деформаций (4.10.1), потребуем, чтобы эти уравнения удовлетворялись. Из условий на кромках полосы определим произвольные постоянные интегрирования.

Итак, в первом приближении представим, что

$$\sigma_x = \frac{M(x)}{I_z} y = -\frac{qlx - \frac{qx^2}{2}}{I_z} y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{QS^*}{I_z \cdot 1} = \frac{(ql - qx) \frac{c^2}{2} \left[1 - \left(\frac{y}{c} \right)^2 \right]}{I_z}.$$

Учитывая, что $I_z = \frac{2}{3}c^3$, для σ_x и τ_{xy} получим следующие выражения:

$$\sigma_x = -\frac{3}{2}\frac{q}{c^3}\left(l - \frac{x}{2}\right)xy, \quad \tau_{xy} = \frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(l - x)(c^2 - y^2).$$

(Здесь было проделано следующее: $\tau_{xy} = \frac{(ql - qx)\frac{c^2}{2}\left[1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2\right]}{I_z} = \frac{3}{2}\frac{q}{c^3}(l - x)\frac{c^2}{2}\left(\frac{c^2 - y^2}{c^2}\right) = \frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(l - x)(c^2 - y^2).$)

Возьмём производные от σ_x , τ_{xy} и σ_y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= -\frac{3}{2}\frac{q}{c^3}(l - x)y, & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \frac{3}{2}\frac{q}{c^3}(l - x)y, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= \frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(c^2 - y^2), & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в первое и второе уравнения равновесия (4.10.1), находим, что первое уравнение удовлетворяется, а второе уравнение не удовлетворяется.

Однако первое уравнение будет удовлетворяться и в том случае, если выражение для σ_x будет содержать ещё некоторую функцию от y , т.е. напряжение σ_x можно представить в виде двух слагаемых, первое из которых – выражение, известное из курса сопротивления материалов, а второе – неизвестная функция от y :

$$\sigma_x = -\frac{3}{2}\frac{q}{c^3}\left(l - \frac{x}{2}\right)xy + f_1(y). \quad (4.10.2)$$

Из второго уравнения равновесия находим выражение для $\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$:

$$\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(c^2 - y^2) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}(c^2 - y^2).$$

Проинтегрируем последнее выражение и найдём

$$\sigma_y = -\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}\left(c^2y - \frac{y^3}{3}\right) + f_2(x). \quad (4.10.3)$$

Для определения неизвестной функции $f_2(x)$ воспользуемся граничными условиями для σ_y на верхней и нижней кромках. При $y = c$ $\sigma_y = -q$, т.е.

$$-\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}\left(c^3 - \frac{c^3}{3}\right) + f_2(x) = -q.$$

откуда $f_2(x) = -\frac{q}{2}$.

Проверим выполнение второго граничного условия на нижней кромке. При $y = c$ $\sigma_y = 0$, т.е.

$$-\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}\left(-c^3 + \frac{c^3}{3}\right) + f_2(x) = 0.$$

Действительно, если вместо $f_2(x)$ подставить полученное ранее значение $f_2(x) = -\frac{q}{2}$, то условие на нижней кромке также удовлетворяется.

Подставим найденные значения σ_x и σ_y в уравнение совместности деформаций (третье уравнение (4.10.1)). Для этого сначала определим вторые производные от σ_x и σ_y по x и y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} &= \left(-\frac{3}{2}\frac{q}{c^3}(l - x)y\right)'_x = \frac{3}{2}\frac{q}{c^3}y, \\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} &= \left(-\frac{3}{2}\frac{q}{c^3}\left(l - \frac{x}{2}\right)xy + f_1(y)\right)''_y = f_1''(y), \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} &= \left(-\frac{3}{4}\frac{q}{c^3}\left(c^2y - \frac{y^3}{3}\right) - \frac{q}{2}\right)''_y = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = \left(-\frac{3}{4} \frac{q}{c^3} \left(c^2 y - \frac{y^3}{3} \right) - \frac{q}{2} \right)_y'' = \frac{3}{2} \frac{q}{c^3} y.$$

После подстановки найденных производных в (4.4.1) – $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ будем иметь

$$\frac{3}{2} \frac{q}{c^3} y + f_1''(y) + 0 + \frac{3}{2} \frac{q}{c^3} y = 0, \text{ откуда } f_1''(y) = -\frac{3q}{c^3} y.$$

В результате двойного интегрирования получим функцию $f_1(y)$:

$$f_1(y) = -\frac{q}{2c^3} y^3 + C_1 y + C_2. \quad (4.10.4)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдём из граничных условий для боковых кромок при $x = 0, 2l$:

$$N_x = \int_{-c}^c \sigma_x dy = 0, \quad M_z = \int_{-c}^c \sigma_x y dy = 0.$$

Первый интеграл даёт $C_2 = 0$. Действительно, по выражению

$$\int_{-c}^c \sigma_x dy = \int_{-c}^c \left(-\frac{3}{2} \frac{q}{c^3} \left(l - \frac{x}{2} \right) xy - \frac{q}{2c^3} y^3 + C_1 y + C_2 \right) dy = 0,$$

после подстановки $x = 0$ и интегрирования имеем: $\int_{-c}^c \sigma_x dy = \left| -\frac{q}{2c^3} \frac{y^4}{4} \right|_{-c}^c + C_1 \left| \frac{y^2}{2} \right|_{-c}^c + C_2 y \Big|_{-c}^c = 0$. Чётные функции y в интеграле от $-c$ до $+c$ равны нулю, следовательно $C_2 = 0$.

(Подстановка $x = 2l$ в первом интеграле даёт тот же результат, $C_2 = 0$. Действительно,

$$\int_{-c}^c \sigma_x dy = -\frac{3}{2} \frac{q}{c^3} \left(2l^2 - \frac{4l^2}{2} \right) \left| \frac{y^2}{2} \right|_{-c}^c - \frac{q}{2c^3} \left| \frac{y^4}{4} \right|_{-c}^c + C_1 \left| \frac{y^2}{2} \right|_{-c}^c + C_2 y \Big|_{-c}^c = 0).$$

Используя второе граничное условие, в выражений

$$\int_{-c}^c \sigma_x y dy = \int_{-c}^c \left(-\frac{3}{2} \frac{q}{c^3} \left(l - \frac{x}{2} \right) xy - \frac{q}{2c^3} y^3 + C_1 y + C_2 \right) y dy = 0, \text{ после интегрирования и}$$

подстановки $x = 0$, имеем

$$\int_{-c}^c \sigma_x y dy = \int_{-c}^c \left(-\frac{3}{2} \frac{q}{c^3} \left(l - \frac{x}{2} \right) xy^2 - \frac{q}{2c^3} y^4 + C_1 y^2 + C_2 \right) y dy = -\frac{3}{2} \frac{q}{c^3} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-c}^c - \frac{q}{2c^3} \left| \frac{y^5}{5} \right|_{-c}^c + C_1 \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-c}^c = \frac{q}{10c^3} |y^5|_{-c}^c + C_1 \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-c}^c = \frac{2qc^5}{10c^3} + C_1 \frac{2}{3} c^3 = 0, \text{ откуда } C_1 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{qc^2}{5c^3} = -\frac{3q}{10c}.$$

(Подстановка $x = 2l$ во втором интеграле даёт тот же результат, $C_1 = -\frac{3q}{10c}$.)

Действительно,

$$\int_{-c}^c \sigma_x y dy = -\frac{3}{2} \frac{q}{c^3} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-c}^c - \frac{q}{2c^3} \left| \frac{y^5}{5} \right|_{-c}^c + C_1 \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-c}^c = \frac{q}{10c^3} |y^5|_{-c}^c + C_1 \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-c}^c = \frac{2qc^5}{10c^3} + C_1 \frac{2}{3} c^3 = -\frac{3}{2} \frac{q}{c^3} \left(2l^2 - \frac{4l^2}{2} \right) \frac{y^3}{3} \Big|_{-c}^c - \frac{q}{2c^3} \left| \frac{y^5}{5} \right|_{-c}^c + C_1 \left| \frac{y^3}{3} \right|_{-c}^c = 0, \text{ т.к. в первом слагаемом множитель в скобках при } x = 2l \text{ становится нулём).}$$

Теперь выражения для σ_x приобретает следующий вид:

$$\sigma_x = -\frac{3q}{2c} \left(l - \frac{x}{2} \right) xy - \frac{q}{2c^3} y^3 - \frac{3q}{10c} y. \quad (4.10.5)$$

Таким образом, мы убеждаемся, что найденные значения σ_x , σ_y и τ_{xy} удовлетворяют уравнениям равновесия и совместности деформаций. Кроме того, σ_y и τ_{xy} удовлетворяют граничным условиям по верхней и нижней кромкам в каждой точке, а что касается удовлетворения граничным условиям на боковых кромках, то τ_{xy} и σ_x удовлетворяют этим условиям в интегральном смысле. Реакция опор на боковых кромках для точного удовлетворения граничным условиям должна быть распределена по параболе. Нормальные напряжения на боковых кромках не равны нулю, но их равнодействующая и момент равны нулю.

Принимая во внимание принцип Сен-Венана, можно утверждать, что иное распределение напряжений на торцах, чем внешняя нагрузка, при условии их статической эквивалентности приведёт лишь к местному перераспределению напряжений вблизи торцов. На достаточном же удалении от торцов (большем, чем высота полосы) влияние местных торцовых эффектов будет незначительным.

Сравнивая решение задачи об изгибе полосы, полученное методами теории упругости, с решением аналогичной задачи методами сопротивления материалов, замечаем, что при точном решении задачи напряжения σ_y не равны нулю, т.е. волокна надавливают друг на друга, и напряжения σ_y изменяются по высоте сечения по закону кубической параболы. Нормальные осевые напряжения σ_x имеют вид, отличающийся от линейного закона распределения напряжений, однако уточнения, вносимые двумя последними членами выражения (4.10.5) – $\sigma_x = -\frac{3q}{2c}\left(l - \frac{x}{2}\right)xy - \frac{q}{2c^3}y^3 - \frac{3q}{10c}y$, невелики. Распределение касательных напряжений по высоте полосы (при условии, что P на торцах распределено по такому же закону) соответствует тому, которое получается по элементарной теории изгиба балок.

§ 4.11. Решение плоской задачи при помощи рядов Фурье

Для решения основного дифференциального уравнения плоской задачи (4.6.2) – $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$ можно применить метод разделения переменных, представив функцию напряжений φ в виде произведения двух функций $f(y)$ и $\psi(x)$, каждая из которых зависит только от одного аргумента. Если при этом функцию $\psi(x)$ представить в виде ряда по синусам или косинусам, то бигармоническое уравнение (4.6.2) можно преобразовать в обычное линейное однородное дифференциальное уравнение, решение которого хорошо известно.

Такой подход к решению задачи об изгибе балки (стенки) был применён Рибьером (1899г.), Файлоном (1903г.) и, независимо от них, русским инженером – путейцем Бельзецким (1905г.).

Рассмотрим вначале случай, когда функция $\psi(x) = \sin \alpha x$, где $\alpha = \frac{m\pi}{l}$, l – длина балки, а m – целое число. Функцию напряжения можно написать в виде

$$\varphi = f(y) \sin \alpha x \quad (4.11.1)$$

В таком виде функция φ была представлена Файлоном.

Подставив (4.11.1) в бигармоническое уравнение, получим следующее обыкновенное линейное однородное дифференциальное уравнение четвёртого порядка:

$$f^{IV}(y) - 2\alpha^2 f''(y) + \alpha^4 f(y) = 0. \quad (4.11.2)$$

Как известно, общее решение уравнения (4.10.2) можно написать в виде

$$f(y) = C_1 \sinh \alpha y + C_2 \cosh \alpha y + C_3 y \sinh \alpha y + C_4 y \cosh \alpha y \quad (4.11.3)$$

Функция (4.11.3) удовлетворяет условию отсутствия нормальных напряжений на торцах балки. Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничных условий.

Аналогичное решение может быть получено и в том случае, если функцию напряжений φ представить в виде

$$\varphi = f(y)\cos ax \quad (4.11.4)$$

Такое выражение для φ принимал в решении плоской задачи Рибьер.

После подстановки (4.11.4) в бигармоническое уравнение мы снова получим уравнение (4.11.2). Однако при таком задании функции φ нормальные напряжения на торцах балки не будут равными нулю.

При задании функции напряжений φ в виде (4.11.1) при $x = 0, l$ $\sigma_x = 0$, $\tau_{xy} \neq 0$, $v = 0$, $u \neq 0$. Такое условие соответствует свободно опёртой по кромкам балке (рис. 23, а)

В случае, если функция напряжений φ задаётся в виде (4.11.4), то при $x = 0, l$ $\sigma_x \neq 0$, $\tau_{xy} = 0$, $v \neq 0$, $u = 0$. Такие граничные условия имеют место в симметрично нагруженной многопролётной балке для участка между серединами пролётов (рис. 25, б).

Большим преимуществом метода решения плоской задачи с помощью тригонометрических рядов по сравнению с использованием для этой цели целых полиномов является то, что с помощью тригонометрических рядов можно отыскать решение для балки, нагруженной по верхней и нижней кромкам нагрузкой, распределённой по любому произвольному закону.

Любую поперечную нагрузку, действующую по верхней и нижней кромкам, можно разложить в ряды Фурье и представить выражениями

$$q_{\text{в}} = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} a'_m \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad (4.11.5)$$

$$q_{\text{н}} = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{l} + \sum_{m=1}^{\infty} b'_m \cos \frac{m\pi x}{l}. \quad (4.11.6)$$

Таким образом, общую задачу можно разложить на ряд частных задач. Любая нагрузка представляется как сумма равномерно распределённой нагрузки и синусоидальных нагрузок. Применяя принцип суперпозиции, рассматриваем отдельно задачу изгиба балки от действия равномерно распределённой нагрузки и от действия синусоидальных нагрузок. Первую задачу удобно решать с помощью полиномов, а вторую — с помощью тригонометрических рядов. Складывая ряд частных решений мы найдём решение общей задачи.

Так, если в выражениях (4.11.5), (4.11.6) ограничиться n членами разложения, то и функцию φ также представим в виде разложения в ряд по синусам n членами. Тогда

$$\varphi = \sum_{m=1}^n \sin \frac{m\pi x}{l} \left(C_{1m} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} + C_{2m} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} + C_{3m} y \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{l} + C_{4m} y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{l} \right). \quad (4.11.7)$$

Выражение (4.11.7) содержит $4n$ произвольных постоянных C_{im} , которые определяются из граничных условий:

$$\begin{aligned} \text{при } y = c \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= q_{\text{в}}, \quad -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = t_{\text{в}}, \\ \text{при } y = -c \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= q_{\text{н}}, \quad -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = t_{\text{н}}. \end{aligned}$$

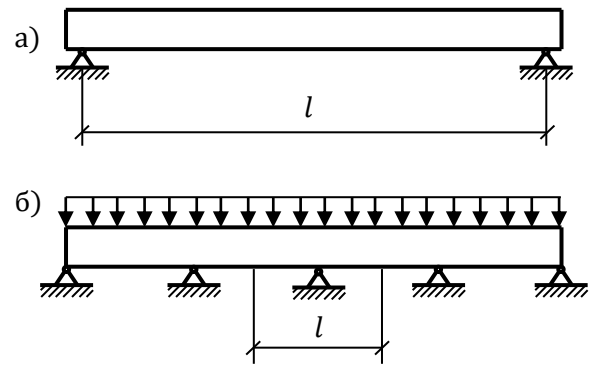


Рис. 25.

Из вида функции для (4.11.7) следует, что на касательные усилия, приложенные к верхней и нижней кромкам t_B и t_H , должно быть наложено ограничение $\int_0^l t_B dx = 0$, $\int_0^b t_H dx = 0$, т.е. эти усилия на кромках должны самоуравновешиваться.

Принцип Сен-Венана.

Характер распределения нагрузки по поверхности тела влияет на напряжения только в точках её приложения и непосредственной близости от них и почти не влияет на напряжения в точках тех участков, которые достаточно удалены от него.

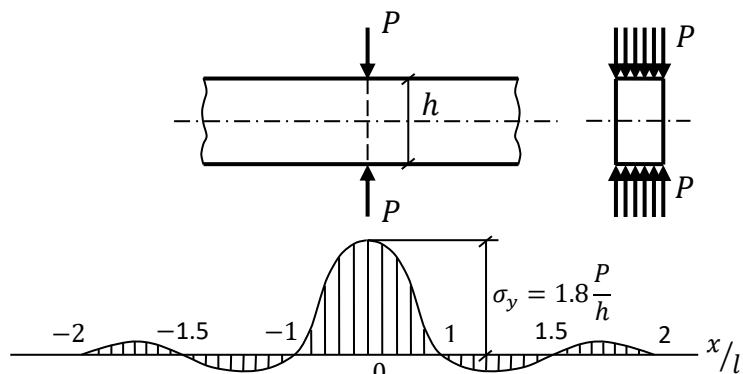


Рис. 26

Например, при захвате проволоки клещами, передаваемые на место захвата силы создают большие напряжения, которые быстро уменьшаются при удалении влево или вправо (рис.26).

Примерно таже самая картина обрисовывается и в балке на двух опорах, на которую, в отличие от проволоки, сила передаётся только с одной стороны.

§ 4.12. Расчёт плотины треугольного профиля

Решения плоских задач теории упругости в полиномах можно использовать для расчёта плотин треугольного профиля. Тело плотины по её высоте можно разделить на две части:

1) Верхняя часть будет иметь высоту $-H = \left(\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}\right) h$; где $-h$ высота плотины и рассчитывается формулами теории упругости, как тело, простирающееся вниз неограниченно (рис.27), что исключает влияние связи низа плотины с основанием.

2) Нижняя часть, при расчёте которой надо исследовать связь низа плотины с основанием, фильтрацию воды в теле плотины и другие факторы.

Эти две части сначала рассматриваются по отдельности, а потом для них, по месту их соединения составляются граничные условия.

Расчёт начинаем с верхней части, подразумевается, что водохранилище полно водой, тогда будем иметь два вида нагрузки:

- а) давление воды;
- б) собственный вес кладки.

Обозначим вес единичного объёма воды через γ ; вес единичного объёма кладки — p .

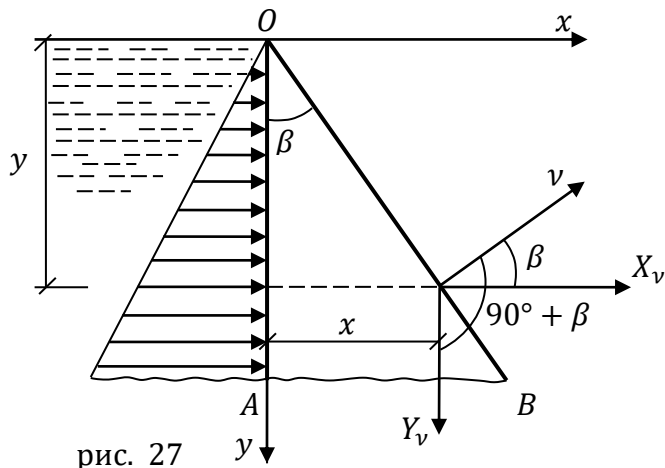


рис. 27

Составим условия на поверхности: на грани OA , т.е. когда $x = 0$, будем иметь, что внешние напряжения:

$$\sigma_x = -\gamma \cdot y \quad (a)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (б)$$

На грани OB , т.е. когда $x = y \cdot tg\beta$, силы не приложены, поэтому проекции на координатных осях будут равны нулю:

$$X_v = 0, \quad (в)$$

$$Y_v = 0. \quad (г)$$

В рассматриваемом случае основной деформацией является изгиб: треугольная консольная балка изгибается гидростатической, т.е. линейной, треугольной нагрузкой. Поэтому выбираем полином третьей степени (рис. 27):

$$\varphi(x, y) = \frac{d}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{e}{2 \cdot 1} x^2 y + \frac{f}{1 \cdot 2} y^2 x + \frac{k}{2 \cdot 3} y^3 \quad (д)$$

Составим выражения для напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = fx + ky; \quad (е)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = dx + ey; \quad (ж)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px = -ex - fy - px. \quad (з)$$

Начнём с определения постоянных коэффициентов k и f . Воспользуемся условием на поверхности (а), когда $x = 0$, то $\sigma_x = -\gamma \cdot y$, в уравнении (е):

$$-\gamma \cdot y = f \cdot 0 + k \cdot y$$

откуда

$$k = -\gamma. \quad (и)$$

и условием (б), когда $x = 0$, $\tau_{xy} = 0$, в уравнении (з):

$$0 = e \cdot 0 - fy - p \cdot 0$$

откуда

$$f = 0. \quad (к)$$

Выражения для напряжений будут

$$\sigma_x = -\gamma \cdot y; \quad (л)$$

$$\sigma_y = dx + ey; \quad (м)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px = -(e + p)x. \quad (н)$$

Затем определим e и d по условиям (в) и (г) на наклонной поверхности: когда $x = y \cdot tg\beta$, тогда по условию (в) — $X_v = 0$ и по условию (г) — $Y_v = 0$. Для этого применим уравнения (4.2.4):

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m, \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{aligned} \right\}$$

и внесём в них выражения напряжений (л), (м) и (н), получим:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= -\gamma \cdot y \cdot l - (e + p)x \cdot m, \\ Y_v &= -(e + p)l + (dx + ey)m. \end{aligned} \right\}$$

где, косинусы углов между внешней нормалью v наклонной поверхности OB и координатными осями,

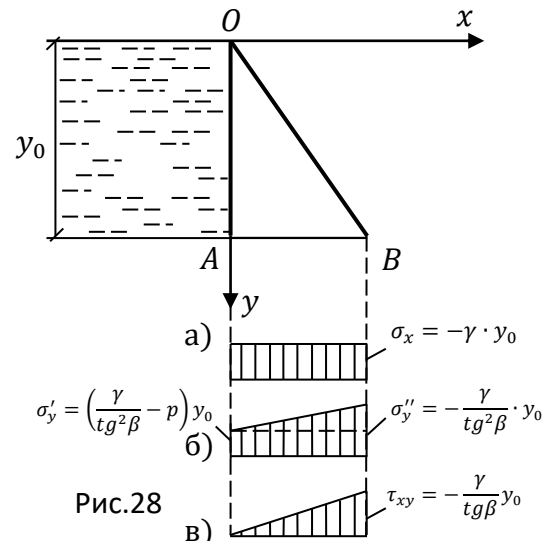


Рис.28

имеют значения (рис. 27): $l = \cos(x, v) = \cos\beta$, $m = \cos(y, v) = \cos(90^\circ + \beta) = -\sin\beta$

$$\left. \begin{aligned} X_v &= -\gamma \cdot y \cdot \cos\beta + (e + p) \cdot y \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \sin\beta \\ Y_v &= -(e + p)\cos\beta - (dx + ey)\sin\beta \end{aligned} \right\},$$

тогда по условиям (в) и (г) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\gamma \cdot y \cdot \cos\beta + (e + p) \cdot y \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \sin\beta \\ 0 &= -(e + p)y \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \cos\beta - (d \cdot y \cdot \operatorname{tg}\beta + e \cdot y)\sin\beta \end{aligned} \right\},$$

откуда получаем значения d и e :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\gamma \cdot \cos\beta + (e + p) \cdot \operatorname{tg}\beta \cdot \sin\beta \\ 0 &= -(e + p)\sin\beta - (d \cdot \operatorname{tg}\beta + e)\sin\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 0 &= -\gamma \cdot \cos\beta + (e + p) \cdot \frac{\sin^2\beta}{\cos\beta} \\ 0 &= -(e + p) - (d \cdot \operatorname{tg}\beta + e) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\gamma \cdot \cos^2\beta + (e + p) \cdot \sin^2\beta \\ 0 &= -e - p - d \cdot \operatorname{tg}\beta - e \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 0 &= -\gamma \cdot \cos^2\beta + e \cdot \sin^2\beta + p \cdot \sin^2\beta \\ 0 &= -2e - p - d \cdot \operatorname{tg}\beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} - p \\ d \cdot \operatorname{tg}\beta &= -2 \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} + 2p - p \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} e &= \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} - p \\ d &= -\frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3\beta} + \frac{p}{\operatorname{tg}\beta} \end{aligned} \right\}, \quad \text{т.е.}$$

$$d = \frac{p}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3\beta}, \quad (\text{o})$$

$$e = \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} - p. \quad (\text{п})$$

Определив значения коэффициентов по выражениям (и), (к), (о) и (п), можем составить выражения напряжений в окончательном виде:

$$\sigma_x = -\gamma \cdot y; \quad (4.12.1)$$

$$\sigma_y = \left(\frac{p}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3\beta} \right) x + \left(\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} - p \right) y; \quad (4.12.2)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} x. \quad (4.12.3)$$

Поинтересуемся значениями напряжения на горизонтали, расположенной на глубине y_0 . Из формулы (4.12.1) видно, что напряжение σ_x остаётся постоянным по всей толщине AB плотины (рис. 28, а) и равно: $\sigma_x = -\gamma \cdot y_0$.

Формулой (4.12.2) для напряжения σ_y , по толщине AB , получаем:

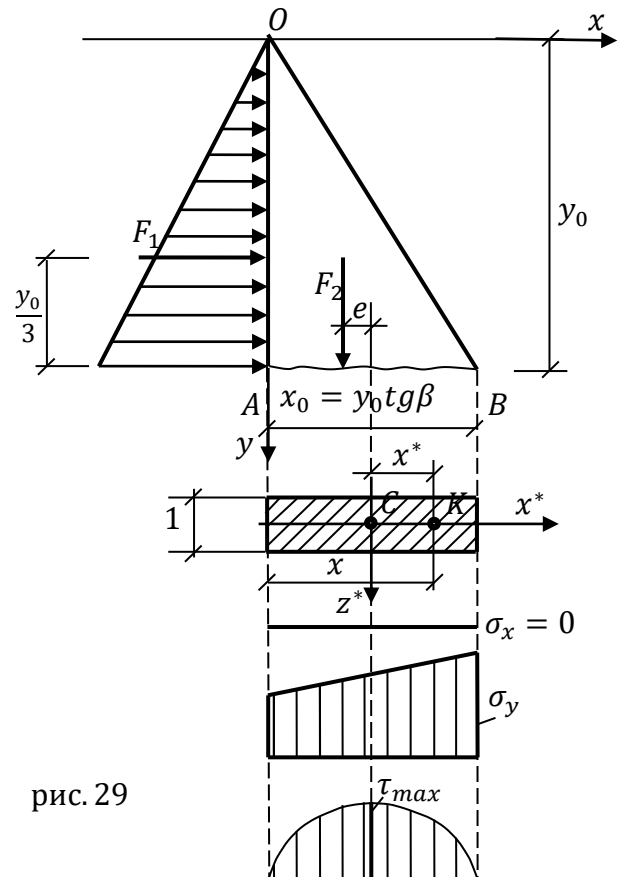
Ординату эпюры σ_y слева (рис. 28, б):

$$\sigma'_y = \left(\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} - p \right) y_0, \quad (\text{р})$$

Ординату эпюры σ_y справа:

$$\sigma''_y = -\frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} \cdot y_0 \cdot u \quad (\text{с})$$

При вычислении этой ординаты по формуле (4.12.2), мы прибавили значению ординаты слева, значение по второму слагаемому, когда $x_0 = y_0 \operatorname{tg}\beta$, то $\left(\frac{p}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3\beta} \right) y_0 \operatorname{tg}\beta = \left(\frac{p \operatorname{tg}^2\beta - 2\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} \right) y_0 = \left(p - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^2\beta} \right) \cdot y_0$ и получили (рис. 28, б):



$$\sigma_y'' = \left(\frac{\gamma}{tg^2\beta} - p \right) y_0 + \left(p - \frac{2\gamma}{tg^2\beta} \right) \cdot y_0 = \frac{\gamma}{tg^2\beta} y_0 - p y_0 + p y_0 - \frac{2\gamma}{tg^2\beta} y_0 = -\frac{\gamma}{tg^2\beta} \cdot y_0.$$

Касательные напряжения возрастают по линейному закону слева направо (рис. 28, в) — от нуля, когда $x = 0$, $\tau_{xy} = 0$, до конечного значения, когда $x_0 = y_0 tg\beta$, $\tau_{xy} = -\frac{\gamma}{tg^2\beta} \cdot y_0 tg\beta = -\frac{\gamma}{tg\beta} y_0$, т.е. ордината справа имеет значение:

$$\tau_{xy} = -\frac{\gamma}{tg\beta} y_0. \quad (т)$$

Из выражения (р) видно, что вертикальная грань OA плотины окажется в состоянии сжатия или растяжения, в зависимости от того, p больше или меньше $\frac{\gamma}{tg^2\beta}$.

Появление растягивающих напряжений σ_y' нежелательно, т. к. материалы: бетон или кирпичная кладка, из чего может быть построенная плотина, плохо работают на растяжение. Определим значение угла β , при котором грань OA не будет растягиваться, т.е. определим предельное значение угла β .

Когда $\sigma_y' = \left(\frac{\gamma}{tg^2\beta} - p \right) y_0 = 0$, тогда

$$p = \frac{\gamma}{tg^2\beta},$$

где, объёмный вес воды $\gamma = 1 \frac{\text{Т}}{\text{М}^3} = 10 \frac{\text{кН}}{\text{М}^3}$ и объёмный вес кладки плотины $p = 2 \frac{\text{Т}}{\text{М}^3} = 20 \frac{\text{кН}}{\text{М}^3}$, т.е. $p = 2\gamma$.

С учётом этого имеем:

$$tg^2\beta = \frac{\gamma}{p} = \frac{1}{2} \Rightarrow tg\beta = \sqrt{0.5} = 0.707,$$

откуда

$$\beta = 35,264^\circ \approx 35^\circ.$$

Для сравнения, проведём расчёт способами сопротивления материалов. На плотину в сечении, проведённом на глубину y_0 , вызываются напряжения от действия двух сил F_1 и F_2 (рис. 29):

а) равнодействующей гидростатического давления на вертикальную грань OB :

$$F_1 = \frac{1}{2} \gamma y_0 \cdot y_0 \cdot 1,$$

приложенной в центре тяжести треугольника. Она вызывает изгиб.

б) равнодействующей собственного веса, приложенной в центре тяжести треугольника:

$$F_2 = \frac{1}{2} p \cdot y_0 tg\beta \cdot y_0 \cdot 1.$$

Она создаёт внецентренное сжатие, т.е. имеются: центральное сжатие от F_2 и изгиб от момента $M' = F_2 \cdot e$. x^* и z^* - главные центральные оси сечения y_0 , а $e = \frac{1}{2} y_0 tg\beta - \frac{1}{3} y_0 tg\beta$, эксцентриситет приложения силы F_2 в поперечном сечении балки на глубину y_0 .

Согласно формулам сопротивления материалов,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 0; \\ \sigma_y &= \frac{N}{A} + \frac{M \cdot x^*}{I_z}; \\ \tau_{xy} &= \frac{Q S_{отс}}{I_z b}. \end{aligned} \right\}$$

Представим расчётную схему в виде, обычно используемом в сопротивлении материалов. Расположим плотину, как балку единичной толщины, горизонтально.

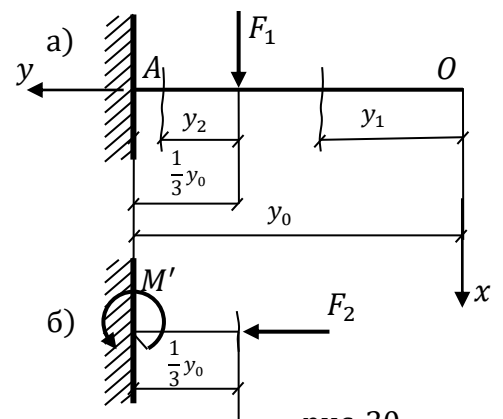


рис. 30

Выразим её осью и направим координатные оси: ось y справа налево, а ось x сверху вниз. При расчёте усилий Q , N и M , учтём что, в статически определимых балках, переменность сечения балки не играет роли (рис. 30).

По принятой схеме видно, что на первом участке нагрузок F_1 , F_2 и образованного силой F_2 момента M' нет (рис. 30, а) и поэтому, все усилия: Q , N и M равны нулю. Значит, будем рассматривать только второй участок.

Приступим к расчёту.

При расчёте напряжения σ_x вспомним, что по допущению сопротивления материалов, продольные слои балки друг на друга не давят и поэтому, оно равно нулю, т.е.

$$\sigma_x = 0.$$

В расчётную формулу нормального напряжения σ_y входят два усилия N и M . Усилие N вызывается сжимающей силой $F_2 = \frac{1}{2}p \cdot y_0 \operatorname{tg} \beta \cdot y_0$ и будет иметь отрицательный знак и равное значение по всей длине $\frac{1}{3}y_0$ (рис. 30, б):

$$N = -F_2 = -\frac{1}{2}p \cdot y_0^2 \operatorname{tg} \beta.$$

При расчёте напряжения σ_y применим принцип независимого действия сил F_1 и F_2 и посчитаем составляющие этого напряжения по отдельности на сжатие и на изгиб:

$$\sigma_y = \sigma'_y + \sigma''_y.$$

На сжатие от силы F_2 (рис. 30, б)

$$\sigma'_y = \frac{N}{A} = \frac{-\frac{1}{2}p \cdot y_0^2 \operatorname{tg} \beta}{y_0 \operatorname{tg} \beta} = -\frac{1}{2}p \cdot y_0.$$

На изгиб от сил F_1 и F_2 (рис. 30, а, б). Входящий во втором слагаемом момент M вычисляем, как сумму моментов, вызванных от действия сил F_1 и F_2 по отдельности

$$M = M' + M''.$$

Изгибающий момент M' (рис. 30, б) от действия силы F_2 равен (рис. 29, а):

$$M' = F_2 \cdot e = \frac{1}{2}p \cdot y_0^2 \operatorname{tg} \beta \cdot \left(\frac{1}{2}y_0 \operatorname{tg} \beta - \frac{1}{3}y_0 \operatorname{tg} \beta \right) = \frac{1}{2}p \cdot y_0^2 \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{1}{6}y_0 \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{12}p \cdot y_0^3 \operatorname{tg}^2 \beta$$

Изгибающий момент M'' , от действия силы F_1 в сечении $y_2 = \frac{1}{3}y_0$ равен (рис. 30, а):

$$M'' = -F_1 \cdot \frac{1}{3}y_0 = -\frac{1}{2}\gamma y_0^2 \cdot \frac{1}{3}y_0 = -\frac{1}{6}\gamma y_0^3.$$

Значение изгибающего момента M будет:

$$M = M' + M'' = \frac{1}{12}p \cdot y_0^3 \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{1}{6}\gamma y_0^3$$

В какой-либо точке K , на расстоянии x^* от нейтральной оси z^* , напряжение σ''_y будет:

$$\sigma''_y = \frac{M \cdot x^*}{I_z} = \frac{\left(\frac{1}{12}p \cdot y_0^3 \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{1}{6}\gamma y_0^3 \right) \cdot x^*}{\frac{y_0^3 \operatorname{tg}^3 \beta}{12}} = \frac{\frac{y_0^3}{12}(p \cdot \operatorname{tg}^2 \beta - 2\gamma) \cdot x^*}{\frac{y_0^3 \operatorname{tg}^3 \beta}{12}} = \frac{(p \cdot \operatorname{tg}^2 \beta - 2\gamma) \cdot x^*}{\operatorname{tg}^3 \beta}$$

или

$$\sigma''_y = \frac{M \cdot x^*}{I_z} = \frac{(p \cdot \operatorname{tg}^2 \beta - 2\gamma) \cdot x^*}{\operatorname{tg}^3 \beta} = \left(\frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \right) \cdot x^*;$$

вместо x^* внесём $x^* = x - \frac{y_0 \operatorname{tg} \beta}{2}$, получим

$$\sigma''_y = \left(\frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \right) \cdot \left(x - \frac{y_0 \operatorname{tg} \beta}{2} \right) = \frac{p}{\operatorname{tg} \beta} x - \frac{p}{\operatorname{tg} \beta} \frac{y_0 \operatorname{tg} \beta}{2} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} x + \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \frac{y_0 \operatorname{tg} \beta}{2} = \left(\frac{p}{\operatorname{tg} \beta} - \frac{2\gamma}{\operatorname{tg}^3 \beta} \right) x - \left(\frac{p}{2} - \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right) y_0$$

В итоге для напряжения σ_y будем иметь:

$$\sigma_y = -\frac{1}{2}p \cdot y_0 - \left(\frac{p}{tg\beta} - \frac{2\gamma}{tg^3\beta}\right)x - \left(\frac{p}{2} - \frac{\gamma}{tg^2\beta}\right)y_0 = -\frac{1}{2}p \cdot y_0 + \frac{p}{tg\beta}x - \frac{2\gamma}{tg^3\beta}x - \frac{py_0}{2} + \frac{2\gamma y_0}{2tg^2\beta} =$$

$$\left(\frac{p}{tg^2\beta} - \frac{2\gamma}{tg^3\beta}\right)x - \left(p - \frac{\gamma}{tg^2\beta}\right)y_0 = \left(\frac{p}{tg^2\beta} - \frac{2\gamma}{tg^3\beta}\right)x + \left(\frac{\gamma}{tg^2\beta} - p\right)y_0,$$

т.е.

$$\sigma_y = \left(\frac{p}{tg\beta} - \frac{2\gamma}{tg^3\beta}\right)x + \left(\frac{\gamma}{tg^2\beta} - p\right)y_0.$$

В расчётную формулу касательного напряжения τ_{xy} входят: статический момент отсечённой части $S_{отс}$ всего сечения с абсциссой $y_2 = \frac{1}{3}y_0$ и поперечная сила Q там же.

Часть, отсечённая от всего сечения вертикальной плоскостью, проведённой через рассматриваемую точку K , имеет размеры:

толщину $b = 1$ и ширину:

$$\frac{y_0 tg\beta}{2} - x^* = \frac{y_0 tg\beta}{2} - \left(x - \frac{y_0 tg\beta}{2}\right) = y_0 tg\beta - x;$$

расстояние от нейтральной оси z^* до центра тяжести этого прямоугольника будет:

$$x_c = x^* + \frac{1}{2}(y_0 tg\beta - x) = x - \frac{y_0 tg\beta}{2} + \frac{1}{2}y_0 tg\beta - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x;$$

статический момент:

$$S_{отс} = x_c \cdot A_{отс} = \frac{1}{2}x(y_0 tg\beta - x) = \frac{1}{2}(xy_0 tg\beta - x^2).$$

Поперечная сила Q на втором участке будет постоянной (рис. 28, а):

$$Q = F_1 = \frac{1}{2}\gamma y_0^2.$$

И поэтому касательное напряжение в точке K будет иметь значение:

$$\tau_{xy} = -\frac{QS_{отс}}{I_z b} = -\frac{\frac{1}{2}\gamma y_0^2 \frac{1}{2}(xy_0 tg\beta - x^2)}{\frac{1 \cdot y_0^3 tg^3\beta}{12} \cdot 1} = -\frac{3\gamma}{y_0 tg^3\beta}(xy_0 tg\beta - x^2) = -\frac{3\gamma}{tg^3\beta}\left(xtg\beta - \frac{x^2}{y_0}\right).$$

В итоге имеем выражения для всех трёх напряжений:

$$\sigma_x = 0; \quad (4.12.4)$$

$$\sigma_y = \left(\frac{p}{tg\beta} - \frac{2\gamma}{tg^3\beta}\right)x + \left(\frac{\gamma}{tg^2\beta} - p\right)y_0; \quad (4.12.5)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3\gamma}{tg^3\beta}\left(xtg\beta - \frac{x^2}{y_0}\right). \quad (4.12.6)$$

Ранее методами теории упругости мы рассчитали те же напряжения и получили выражения:

$$\sigma_x = -\gamma \cdot y; \quad (4.12.1)$$

$$\sigma_y = \left(\frac{p}{tg\beta} - \frac{2\gamma}{tg^3\beta}\right)x + \left(\frac{\gamma}{tg^2\beta} - p\right)y; \quad (4.12.2)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\gamma}{tg^2\beta}x. \quad (4.12.3)$$

Их сравнение показывает, что совпадают только формулы для определения напряжения σ_y . Что же касается остальных двух, здесь явное несоответствие.

Напряжение σ_x по формуле (4.12.4) равно нулю, в то время как по формуле теории упругости (4.12.1) оно имеет тот же порядок, что и напряжение σ_y и пренебречь им нельзя.

Касательные напряжения τ_{xy} , посчитанные по формулам сопротивления материалов (4.12.6) – $\tau_{xy} = -\frac{3\gamma}{tg^3\beta}\left(xtg\beta - \frac{x^2}{y_0}\right)$ и теории упругости (4.12.3) – $\tau_{xy} = -\frac{\gamma}{tg^2\beta}x$, отличаются друг от друга не только количественно, но и качественно.

В первом случае, закон распределения по высоте сечения выражается параболой (рис. 29). Во втором – прямой (рис. 28, в). Максимальное значение напряжения τ_{xy} ,

полученного по формуле сопротивления материалов (4.12.6) в середине сечения, т.е. в середине параболы, составляет $\frac{3}{4}$ от максимального значения по формуле теории упругости (4.12.3), полученного для точки B наклонной грани OB , т.е. от максимальной ординаты треугольника.

Следовательно, решение способами сопротивления материалов нельзя считать приемлемыми.

Вопросы для самопроверки и задачи

1. Что называется плоской деформацией?

Плоской называется деформация тела, когда перемещение всех его точек параллельно одной и той же плоскости (плоскости деформации) и не зависит от координаты в направлении по нормали к плоскости деформации.

Если за плоскость деформации принять xy , то перемещения u, v зависят только от координат x, y ($\gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0$), а перемещение w всюду в теле равно нулю. Поэтому

$$\varepsilon_z = 0; \sigma_z \neq 0, \text{ т.к. } \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0, \text{ то } \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \neq 0.$$

Очевидно, что из деформаций остаются $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и γ_{xy} , а из напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} . σ_z не является искомой, т.к. $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$

2. Какое напряжённое состояние называется обобщённым плоским?

Обобщённым плоским напряжённым состоянием называется состояние, вызываемое погонными усилиями, которые приложены по её контуру и направлены вдоль её срединной плоскости.

Если совместить координатную систему xOy со срединной плоскостью пластинки, то перемещения u, v , происходящие в этой плоскости, не будут зависеть от координаты z , а будут зависеть только от координат x, y ($\gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0$).

Для всех точек перпендикуляра к срединной плоскости, проведённого через рассматриваемую точку, перемещения w одинаковы и равны перемещению этой точки. Поэтому надавливания слоёв друг на друга не происходит, т.е.

$$\sigma_z = 0, \varepsilon_z \neq 0, \text{ т.к. } \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \text{ то } \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

Очевидно, что из деформаций остаются $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и γ_{xy} , а из напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} . ε_z не является искомой, т.к. $\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$.

3. Как записываются уравнения равновесия в случае обобщённого плоского напряжённого состояния?

$$\text{По формуле (4.2.3) - } \left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y \cdot \rho &= 0 \end{aligned} \right\}$$

4. Как выглядит условие неразрывности Сен-Венана в случаях плоского напряжённого состояния и плоской деформации?

$$\text{Одинаково для обоих случаев, по формуле (4.4.1) - } \nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

5. Какой вид приобретает условие неразрывности в случае применения функции напряжений (функция Эри)?

Вид бигармонического уравнения (4.6.1) – $\nabla^4 \varphi = 0$ или $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = 0$,
или после дифференцирования (4.6.2) – $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$.

6. Как записать статические условия на границе тела через функцию напряжений?

Условия на поверхности тела (плоская деформация) или по контуру пластинки (обобщённое плоское напряжённое состояние) для плоской задачи через функцию

напряжений можно записать по формулам (4.6.3) –
$$\begin{cases} X_v = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px\right) m; \\ Y_v = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px\right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m. \end{cases}$$

где p – составляющая веса $Y \cdot \rho = g \cdot \rho = p$ единицы объёма пластинки при её вертикальном расположении (обобщённое плоское напряжённое состояние) или единицы объёма части тела единичной толщины (плоская деформация).

7. Покажите, что при использовании функции напряжений φ , уравнения равновесия удовлетворяются тождественно.

Подстановкой (4.5.6) –
$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - px \end{cases}$$
 в (4.5.1) –
$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + p = 0 \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^2 \partial x} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = 0; \\ -\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} - p + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} + p = 0 \end{cases}.$$

8. Как следует записать выражение для напряжений через функцию напряжений φ в случае действия объёмных сил, потенциал которых равен U ?

Полагая, что объёмные силы имеют потенциал U , так что $\bar{X} = -\frac{\partial U}{\partial x}$, а $\bar{Y} = -\frac{\partial U}{\partial y}$ (где $\bar{X} = X \cdot \rho$, $\bar{Y} = Y \cdot \rho$) через функцию напряжений φ представляют разности между напряжениями и потенциалом объёмных сил, т.е.

$$\begin{cases} (\sigma_x - U) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ (\sigma_y - U) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

9. Какой вид будет иметь основное уравнение плоской задачи в случае действия объёмных сил с потенциалом U ?

Подстановкой в основное уравнение $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) = 0$ получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) (\sigma_y + \sigma_x - 2U) = 0$$

Вычисляем $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) (-2U)$:

Первое производное по x

$$(-2U)'_x = -2 \frac{\partial U}{\partial x} = 2\bar{X};$$

Второе производное по x

$$(-2U)''_x - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial \bar{X}}{\partial x}.$$

Аналогично второе производное по y

$$(-2U)''_y = -2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y}.$$

Основное уравнение (4.6.2) $-\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$, принимает вид

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = -2 \left(\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Y}}{\partial y} \right)$$

10. Удовлетворяют ли основному уравнению плоской задачи следующие выражения для функций напряжения:

- 1) $\varphi = a_2 x^2$; 2) $\varphi = b_2 xy$; 3) $\varphi = c_2 y^2$; 4) $\varphi = a_3 x^3$;
5) $\varphi = b_3 x^2 y$; 6) $\varphi = c_3 xy^2$; 7) $\varphi = d_3 y^3$; 8) $\varphi = a_4 x^4$?

$$1) (a_2 x^2)'_x = 2a_2 x; (a_2 x^2)''_x = (2a_2 x)'_x = 2a_2; (a_2 x^2)''_y = 0.$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) 2a_2 = 0.$$

$$2) (b_2 xy)'_x = b_2 y; (b_2 xy)''_x = (b_2 y)'_x = 0; (b_2 xy)''_y = 0.$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) 0 = 0.$$

$$3) (c_2 y^2)''_x = 0; (c_2 y^2)'_y = 2c_2 y; (c_2 y^2)''_x = (2c_2 y)'_y = 2c_2;$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) 2c_2 = 0.$$

$$4) (a_3 x^3)'_x = 3a_3 x^2; (a_3 x^3)''_x = (3a_3 x^2)'_x = 6a_3 x; (a_3 x^3)''_y = 0.$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) 6a_3 x = 0.$$

$$5) (b_3 x^2 y)'_x = 2b_3 xy; (b_3 x^2 y)''_x = (2b_3 xy)'_x = 2b_3 y; (b_3 x^2 y)''_y = 0.$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) 2b_3 y = 0.$$

$$6) (c_3 xy^2)''_x = 0; (c_3 xy^2)'_y = 2c_3 xy; (c_3 xy^2)''_x = (2c_3 xy)'_y = 2c_3 x;$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) 2c_3 x = 0.$$

$$7) (d_3 y^3)''_x = 0; (d_3 y^3)'_y = 3d_3 y^2; (d_3 y^3)''_x = (3d_3 y^2)'_y = 6d_3 y;$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) 6d_3 y = 0.$$

$$8) (a_4 x^4)'_x = 4a_4 x^3; (a_4 x^4)''_x = (4a_4 x^3)'_x = 12a_4 x^2; (a_4 x^4)''_y = 0.$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) 12a_4 x^2 = 24a_4 \neq 0, \text{ т.е. выражение } (a_4 x^4)'_x \text{ не удовлетворяет.}$$

11. Удовлетворяет ли граничным условиям функция $\varphi = axu^3$? Как выражаются нормальные σ_x и касательные τ_{xy} напряжения при выборе функции φ в таком виде? Как изменяются они в зависимости от координат x и y ?

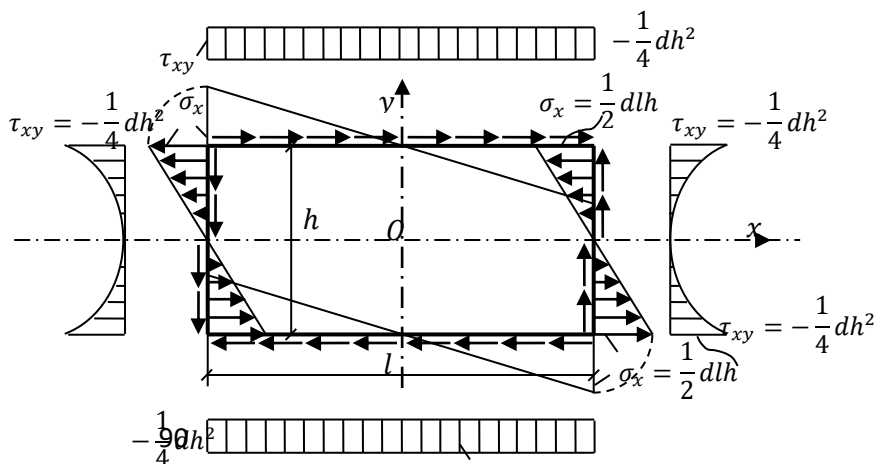


Рис. 19 τ_{xy}

Основное уравнение удовлетворяется при любом значении коэффициента a .

Действительно

$$(axy^3)''_x = 0; \quad (axy^3)'_y = 3axy^2; \quad (axy^3)''_y = (3axy^2)'_y = 6axy;$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) 6axy = 0.$$

При таком задании функции напряжений по форму-

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6axy; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial(3axy^2)}{\partial x} = -3ay^2. \end{aligned} \right\} \text{лам(4.5.6)}$$

Нормальные напряжения σ_x зависят линейно как от координаты x , так и от координаты y . Касательные напряжения не зависят от координаты x , а по координате y изменяются по закону параболы. Статические граничные условия, соответствующие этим напряжениям, при $\frac{d}{3} = a$ и $h = 2c$ показаны на рис. 19.

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{4}dh^2 = -\frac{3}{4}a4c^2 = -3ac^2; \quad \sigma_x = \frac{1}{2}dlh = \frac{3}{2}a2c = 3alc.$$

12. В каком виде выбирают функцию φ при решении задачи об изгибе консоли силой P , приложенной на конце?

Функцию φ выбирают в виде суммы полиномов четвёртой и второй степеней:

$$(4.9.1) - \varphi = \varphi_4 + \varphi_2 = \frac{d_4}{6}xy^3 + b_2xy.$$

13. Удовлетворяет ли основному уравнению плоской задачи функция φ , заданная в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi &= k_1x^5 - 5k_1xy^4 + k_2x^3y? \\ (k_1x^5)_x^{IV} &= 120k_1x; \quad (k_1x^5)_y^{IV} = 0; \quad (k_1x^5)_{xy}^{IV} = 0. \\ (5k_1xy^4)_x^{IV} &= 0; \quad (5k_1xy^4)_y^{IV} = 120k_1x; \quad (5k_1xy^4)_{xy}^{IV} = 0. \\ (k_2x^3y)_x^{IV} &= 6k_2xy, \quad (k_2x^3y)_{xy}^{IV} = 6(k_2xy)''_y = 0. \\ \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} &= 120k_1x + 0 + 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 120k_1x + 0 = 0. \end{aligned}$$

Да, удовлетворяет.

14. При каких условиях удовлетворяет бигармоническому уравнению полином четвёртой степени следующего вида:

$$\begin{aligned} \varphi &= a_4x^4 + b_4x^3y + c_4x^2y^2? \\ (a_4x^4)_x^{IV} &= 24a_4; \quad (a_4x^4)_y^{IV} = 0; \quad (a_4x^4)_{xy}^{IV} = 0. \\ (b_4x^3y)_x^{IV} &= 0; \quad (b_4x^3y)_y^{IV} = 0; \quad (b_4x^3y)_{xy}^{IV} = 0. \\ (c_4x^2y^2)_x^{IV} &= 0; \quad (c_4x^2y^2)_y^{IV} = 0; \quad (c_4x^2y^2)_{yy}^{IV} = 4c_4. \\ 24a_4 + 0 + 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4c_4 + 0 + 0 + 0 &= 0, \text{ т.е. при условии, что } 24a_4 + 4c_4 = 0 \end{aligned}$$

или

$$6a_4 + c_4 = 0$$

15. Чем отличается распределение σ_x по высоте балки, лежащей на двух опорах и нагруженной распределённой по её длине нагрузкой, полученное методами теории упругости, от элементарного решения, полученного методами сопротивления материалов?

Сравнивая решение задачи об изгибе полосы, полученное методами теории упругости, с решением аналогичной задачи методами сопротивления материалов, замечаем, что при точном решении задачи напряжения σ_y не равны нулю, т.е. волокна надавливают друг на друга, и напряжения σ_y изменяются по высоте сечения по закону кубической параболы. Нормальные осевые напряжения σ_x имеют вид отличающийся от линейного закона распределения напряжений, однако уточнения, вносимые двумя последними членами выражения (4.10.5) – $\sigma_x = -\frac{3q}{2c}\left(l - \frac{x}{2}\right)xy - \frac{q}{2c^3}y^3 - \frac{3q}{10c}y$, невелики. Распределение касательных напряжений по высоте полосы (при условии, что P на торцах распределено по такому же закону) соответствует тому, которое получается по элементарной теории изгиба балок.

16. В каком виде принимается функция напряжения φ при решении задачи о напряжённом состоянии треугольной стенки, нагруженной гидростатическим давлением?

В рассматриваемом случае основной деформацией является изгиб: треугольная консольная балка изгибается гидростатической, т.е. линейной, треугольной нагрузкой. Поэтому выбираем полином третьей степени (рис. 27):

$$(д) - \varphi(x, y) = \frac{d}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{e}{2 \cdot 1} x^2 y + \frac{f}{1 \cdot 2} y^2 x + \frac{k}{2 \cdot 3} y^3.$$

17. В чём преимущество применения тригонометрических рядов вместо полиномов для функции напряжения φ при решении плоской задачи?

Большим преимуществом метода решения плоской задачи с помощью тригонометрических рядов по сравнению с использованием для этой цели целых полиномов является то, что с помощью тригонометрических рядов можно отыскать решение для балки, нагруженной по верхней и нижней кромкам нагрузкой, распределённой по любому произвольному закону.

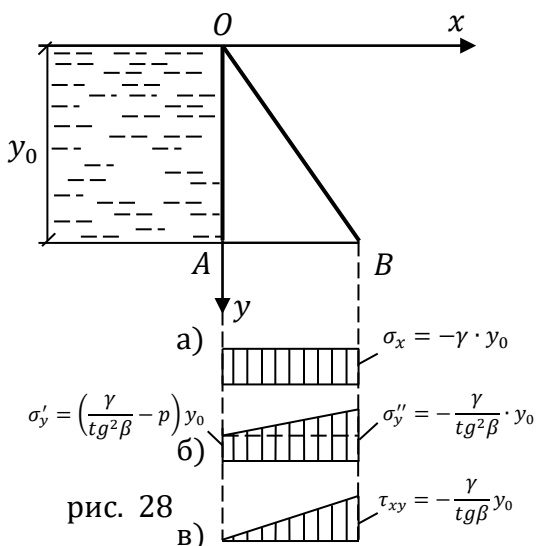


рис. 28

18. Задача. Для подпорной треугольной стенки, изображённой на рис. 28, определить компоненты напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} для сечения при $y = 2$ м и построить эпюры напряжений. Дано: $\gamma = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$, $p = 15 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$, $\beta = 30^\circ$.

$$\sigma_x = -\gamma \cdot y_0 = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кПа};$$

$$(\sigma_y)_{x=0} = \left(\frac{\gamma}{tg^2 \beta} - p \right) y_0 = \left(\frac{10}{tg^2 30^\circ} - 15 \right) 2 = \left(\frac{10}{0.3} - 15 \right) 2 = (30 - 15) 2 = 30 \text{ кПа};$$

$$(\sigma_y)_{x=x_{max}} = \sigma_y'' = -\frac{\gamma}{tg^2 \beta} \cdot y_0 = -\frac{10}{0.3} \cdot 2 = -30 \cdot 2 = -60 \text{ кПа};$$

$$(\tau_{xy})_{x=x_{max}} = -\frac{\gamma}{tg \beta} y_0 = -\frac{10}{tg 30^\circ} \cdot 2 =$$

$$-\frac{20}{0.577} = -34.67 \approx -35 \text{ кПа}$$

Ответ. $\sigma_x = -20 \text{ кПа}$, $(\sigma_y)_{x=0} = 30 \text{ кПа}$, $(\sigma_y)_{x=x_{max}} = -60 \text{ кПа}$, $(\tau_{xy})_{x=x_{max}} = -35 \text{ кПа}$.

§ 5.1. Основные понятия

Соотношение между декартовыми и полярными координатами, как известно

, выражается следующими формулами (рис. 31):

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta; \\ y &= r \sin \theta; \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \theta &= \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.1)$$

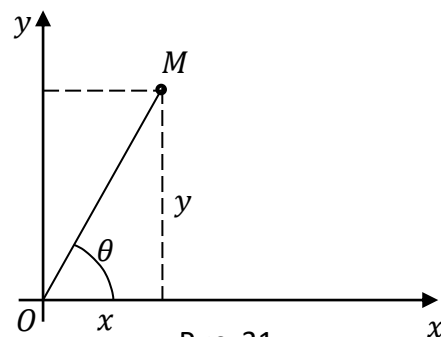


Рис. 31

При решении плоской задачи встречаются тела, ограниченные поверхностями кругового цилиндра и радиально расходящимися плоскостями. В этих случаях переход от декартовой системы координат к полярной системе значительно упрощает задачу. Положение любой точки определяется радиус-вектором r и полярным углом θ , отсчитываемым от начального положения радиус-вектора r_0 . Примем, что размер тела по направлению z , т.е. по направлению перпендикулярном плоскости чертежа, или слишком велика (плоская деформация) или слишком мала (обобщённое плоское напряжённое состояние). Для упрощения записи будем рассматривать тело единичной толщины.

§ 5.2. Основные уравнения в полярных координатах

а) дифференциальные уравнения равновесия для плоской задачи

Рассмотрим пластинку произвольного очертания с единичной толщиной и допустим, что она находится в равновесии при действии системы сил, приложенных к контуру. Плоскость действия сил совпадает со срединной плоскостью пластинки (рис. 32). Объёмными силами пренебрегаем. Выделим из пластинки элемент $abcd$ размерами $ad = r d\theta$, $bc = (r + dr) d\theta$, $ab = cd = dr$.

Проведём ось r , делящую угол $d\theta$ на две части, а также проведём дугу $(r + \frac{dr}{2}) d\theta$. В точке их пересечения проведём касательную к дуге, которая пройдёт перпендикулярно оси r . Примем эту касательную за вторую ось и обозначим её через $O'\theta$ (рис. 33). Так как угол $d\theta$ — малая величина, то $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$ и $\cos \frac{d\theta}{2} = 1$.

Составим уравнение равновесия элемента $abcd$, сначала в виде суммы проекций всех сил, приложенных на него, на ось r :

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_r \cdot r d\theta - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \tau_{r\theta} dr + R r d\theta \cdot dr = 0 \quad (a)$$

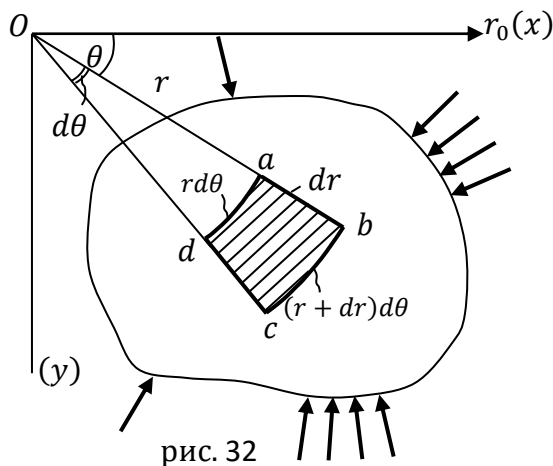


рис. 32

Просуммируем подобные члены:

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr d\theta + \sigma_r dr d\theta + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr dr d\theta - 2\sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} - \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta dr \frac{d\theta}{2} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta dr + R r d\theta \cdot dr = 0;$$

отбросим величины третьего порядка малости и сократим на площадь элемента $r d\theta dr$, получим:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad (б)$$

Аналогично, составив второе уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил, приложенных на элемент, на ось θ :

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr - \sigma_\theta dr + \\ & \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} + \tau_{r\theta} dr \frac{d\theta}{2} + \\ & \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \tau_{\theta r} r d\theta + \theta r d\theta \cdot dr = 0; \end{aligned} \quad (в)$$

проведя такие же преобразования, как и в предыдущем случае, учитывая, что $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$, получим

$$\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \theta = 0. \quad (г)$$

Таким образом, мы получили дифференциальные уравнения равновесия для плоской задачи в полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.1)$$

Особенностью этих уравнений равновесия по сравнению с уравнениями равновесия

плоской задачи в декартовых координатах (4.3.3) –
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \cdot \rho &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y \cdot \rho &= 0 \end{aligned} \right\},$$

является наличие в знаменателе величины r . Чем ближе к началу координат, тем быстрее будут возрастать слагаемые, содержащие множитель $\frac{1}{r}$ величины, так как r неограниченно убывает. Поэтому уравнения (5.2.1) неприемлемы для точек, лежащих вблизи полюса.

б) перемещения и деформации

Перемещения на плоскости произвольной точки M можно представить двумя составляющими:

u — по направлению радиус-вектора.

v — по направлению перпендикулярному радиус-вектору (рис. 34, а).

Для вычисления линейных и угловых относительных деформаций рассмотрим ранее выделенный элемент $abcd$.

Начнём с линейных деформаций:

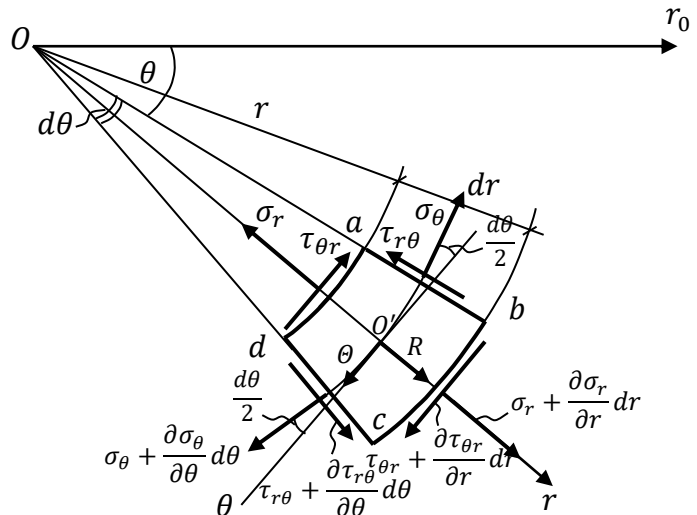


Рис. 33

а) Деформация по направлению радиуса r . Длина отрезка ab после деформации изменится и станет a_1b_1 . Приращение длины будет вызвано разностью в значениях переме-

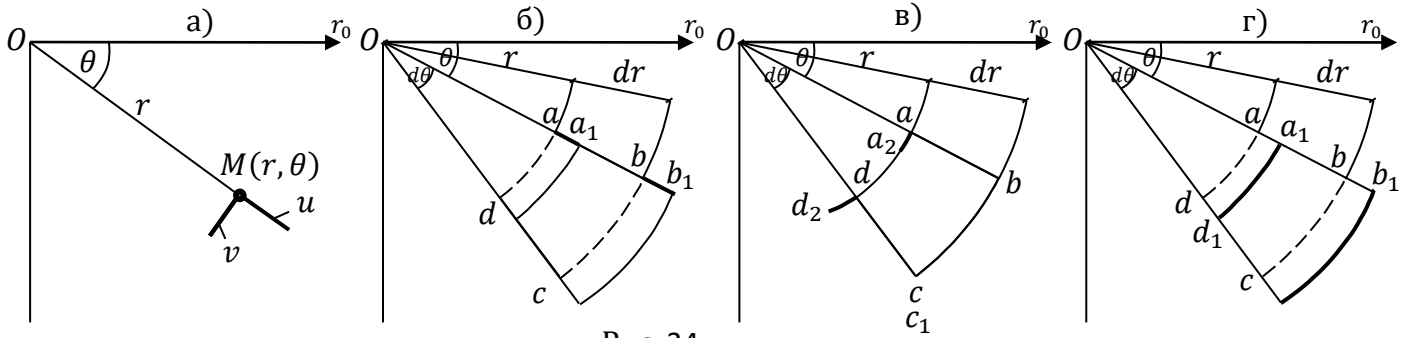


Рис. 34

щений точки a и точки b (рис. 34, б):

$$aa_1 = u \text{ и } bb_1 = u + \frac{\partial u}{\partial r} dr \Rightarrow \Delta ab = bb_1 - aa_1 = u + \frac{\partial u}{\partial r} dr - u = \frac{\partial u}{\partial r} dr;$$

относительная деформация по направлению радиуса r будет:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta ab}{ab} = \frac{\frac{\partial u}{\partial r} dr}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (д)$$

б) Деформация по направлению, перпендикулярному направлению радиуса r .

Здесь длина отрезка ad после деформации изменится по двум причинам:

1) от разности в значениях перемещений v точки $a - aa_2 = v$ и точки $d - dd_2 = v + \frac{\partial v}{\partial s} ds$ в направлении дуги $dS = ad = r d\theta$ (рис. 34, в).

Приращение длины ad будет

$$\Delta' ad = dd_2 - aa_2 = v + \frac{\partial v}{\partial s} ds - v = \frac{\partial v}{\partial s} ds$$

а относительная деформация:

$$\varepsilon'_\theta = \frac{\Delta' ad}{ad} = \frac{\frac{\partial v}{\partial s} ds}{ds} = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}.$$

2) от радиального перемещения u (рис. 34, г).

Длина дуги $dS = ad = r d\theta$ станет $dS_1 = a_1 d_1 = (r + u) d\theta$. Приращение длины дуги ad будет:

$$\Delta'' ad = (r + u) d\theta - r d\theta = u d\theta,$$

а относительная деформация:

$$\varepsilon''_\theta = \frac{\Delta'' ad}{ad} = \frac{u d\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r}.$$

Суммируя, получим

относительную деформацию по направлению оси θ :

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon'_\theta + \varepsilon''_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}.$$

(е)

Перейдём к определению угловых деформаций.

Деформация сдвига происходит за счёт поворота отрезков ab и ad

относительно точки a . Изменение прямого угла между этими отрезками будет (рис. 35, а).

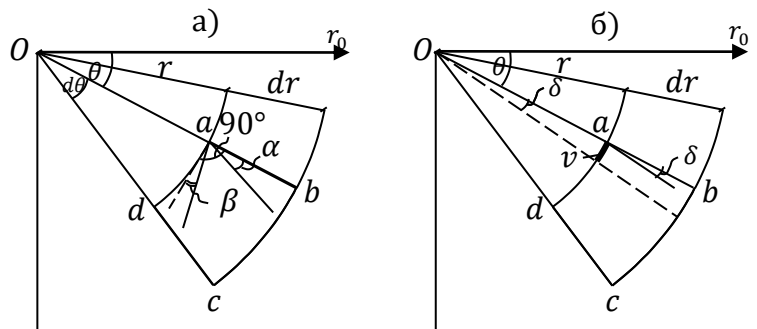


Рис. 35

$$\gamma'_{r\theta} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (\text{ж})$$

т.к. дуга $dv = \alpha dr$, а $du = \beta dS = \beta r d\theta$. Но этим дело не ограничивается. Появляется ещё один угол δ , связанный с вращением элемента $abcd$, как абсолютно твёрдого тела относительно оси проходящей через точку O . Следует отметить, что в суммарном угле (состоящим из углов α и δ) вклад в деформации сдвига вносит только часть $\alpha = \frac{\partial v}{\partial r}$ (рис. 35 а), а не другая его часть, равная $\delta = \frac{v}{r}$ (рис. 35 б) и представляющая угловое перемещение.

Как видно из рисунка 35, б, новое положение боковой грани ab отсекает с угла α угол δ , поэтому δ надо брать отрицательным знаком.

В итоге, угловую деформацию в точке a определяем, как алгебраическую сумму всех этих углов:

$$\gamma_{r\theta} = \alpha - \delta + \beta = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (\text{з})$$

На рисунке 36 показана полная картина деформации в точке a .

Таким образом, геометрические соотношения Коши в полярной системе координат образуют систему уравнений (д), (е), (з):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.2)$$

в) уравнение неразрывности деформации

Уравнение неразрывности деформации в декартовых координатах имело вид

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (\text{а})$$

В обобщённом плоском напряжённом состоянии первым инвариантом S_1 напряжённого состояния является сумма двух нормальных напряжений σ_x и σ_y , т.к. в первом уравнении (з) параграфа §1.4 – $S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$, $\sigma_z = 0$:

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y.$$

При плоской деформации в первом уравнении (з) параграфа § 1.4 надо ввести $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$,

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \nu)(\sigma_x + \sigma_y).$$

Выходит, что в плоской задаче в каждой точке сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная:

$$\sigma_x + \sigma_y \equiv \sigma_r + \sigma_\theta.$$

Следовательно, в полярных координатах выражение (а) будет иметь вид

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (5.2.3)$$

Преобразуем в этом выражении оператор Лапласа к полярным координатам. Для этого

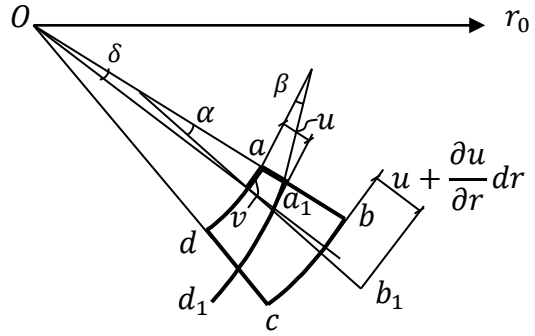


рис. 36

совместим ось x с начальным радиус-вектором r_0 (рис.31), а ось y направим вниз и воспользуемся зависимостями (5.1.1):

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \theta &= \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned} \right\}$$

Учтём, что $\frac{x}{r} = \cos \theta$ и $\frac{y}{r} = \sin \theta$ и продифференцируем эти зависимости по x и y

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x})}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{y}{r \cdot r} = -\frac{\sin \theta}{r}; \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{x})}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} = \frac{x}{r^2} = \frac{x}{r \cdot r} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

В выражениях (б) были использованы формулы: $(x^n)' = nx^{n-1}$ и $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Сначала выразим первые производные функции φ по x и y в полярных координатах r и θ : $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}$. Внесём в эти уравнения значения (б):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \cos \theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \quad \text{Получим}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Затем определим вторые производные:

по x

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta \right) = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \cos \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} + \\ &+ \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r^2} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \cos \theta + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \cos^2 \theta - \\ &- 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}, \end{aligned} \quad (г)$$

по y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} - \\ &- \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\cos \theta}{r} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2}, \end{aligned} \quad (д)$$

по x и y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} &= \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right) = \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \sin \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} + \\ &+ \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r^2} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \cos \theta - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \sin \theta - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{r} - \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta = \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\cos 2\theta}{r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2}. \end{aligned}$$

Складывая вместе уравнения (г) и (д), оператор Лапласа примет вид

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}. \quad (е)$$

Формула уравнения неразрывности деформации (5.2.3) – $\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$, с учётом (е) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (5.2.4)$$

Пользуясь тождеством $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$ и выражением (е), найдём уравнение совместности (неразрывности) деформации (4.6.2) – $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$ в полярных координатах в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (\text{ж})$$

г) функция напряжений

Решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах заключается в отыскании трёх функций $\sigma_r(r, \theta)$, $\sigma_\theta(r, \theta)$ и $\tau_{r\theta}(r, \theta)$ с помощью трёх уравнений:

двух уравнений равновесия (5.2.1) – $\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \Theta &= 0. \end{aligned} \right\}$ и уравнения неразрывности деформации (5.2.4) – $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$ при обязательном удовлетворении условий на поверхности.

Аналогично тому, как было сделано при решении плоской задачи в декартовых координатах (см. § 4.5), решение в полярных координатах можно свести к отысканию одной функции напряжения $\varphi(r, \theta)$. Выберем эту функцию так, чтобы напряжения выражались через неё следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.2.4)$$

Подставляя эти выражения в уравнения равновесия (5.2.1), убеждаемся, что при отсутствии объёмных сил последние обращаются в тождества. Чтобы преобразовать уравнение неразрывности деформаций (5.2.3) – $\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$, сложим почленно формулы для нормальных напряжений (5.2.4):

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}.$$

Правая часть этой суммы представляет собой выражение (е) оператора Лапласа предыдущего параграфа – $\nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$ – над функцией $\varphi(r, \theta)$. Следовательно,

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \nabla^2 \varphi$$

по уравнению (5.2.3), получаем

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$$

или

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (5.2.5)$$

В развёрнутом виде уравнение неразрывности деформации (5.2.3) записывается следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (5.2.6)$$

Таким образом, функция напряжения $\varphi(r, \theta)$ для плоской задачи теории упругости в полярных координатах также должна быть бигармонической. Формула (5.2.6) совпадает с выражением уравнения неразрывности деформации (ж), полученного путём непосредственного дифференцирования функции напряжения $\varphi(x, y)$ попеременным r и θ . Этим подтверждается правильность подбора выражений (5.2.4) для напряжений σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$.

д) формулы закона Гука для плоской задачи в полярных координатах

Для обобщённого плоского напряжённого состояния соотношения между напряжениями и деформациями в полярных координатах сохраняют такой же вид, что и в декартовых

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \text{ координатах (4.3.7)}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{r\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.7)$$

Для случая плоской деформации в формуле (5.2.7) меняются упругие постоянные, а именно E на $E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}$ и ν на $\nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ и формулы принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\theta \right), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_\theta - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r \right), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.7')$$

(В третьей формуле были проведены простые алгебраические операции:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\frac{\nu}{1-\nu})}{\frac{E}{1-\nu^2}} \tau_{r\theta} = \frac{2(\frac{1-\nu+\nu}{1-\nu})}{\frac{E}{(1-\nu)((1+\nu))}} \tau_{r\theta} = \frac{2(\frac{1}{1-\nu})}{\frac{E}{(1-\nu)(1+\nu)}} \tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta}.$$

или в напряжениях для обобщённого плоского напряжённого состояния

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{r\theta} \end{aligned} \right\} \quad (5.2.8)$$

Таким образом, для решения плоской задачи в полярных координатах и определения напряженного и деформированного состояния имеем уравнения равновесия (5.2.1) –

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ геометрические уравнения} \quad (5.2.2) - \left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \text{ и}$$

физические уравнения (5.2.7) или (5.2.8).

Плоскую задачу можно решать либо в напряжениях, либо перемещениях.

В первом случае подбираем выражение функции напряжения φ так, чтобы напряже-

ния выражались по формулам (5.2.4) –
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\}$$
 и чтобы она удовлетворяла

уравнению неразрывности деформации (основному уравнению) (5.2.6) и граничным условиям.

Во втором случае необходимо сначала получить уравнения равновесия (5.2.1) –
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0. \end{aligned} \right\}$$
 в перемещениях. Для этого надо представить напряжения σ_r , σ_θ и

$\tau_{r\theta}$, выраженные формулами (5.2.8) –
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{r\theta} \end{aligned} \right\}$$

через перемещения u и v , выраженные формулами (5.2.2) –
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\}:$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \nu \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.2.9)$$

и подставить их в (5.2.1)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{r \partial \theta \partial r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{r \partial \theta \partial r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1-\nu}{2} \frac{v}{r^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.10)$$

Решение сводится к отысканию таких функции перемещений $u(r, \theta)$, $v(r, \theta)$, которые бы удовлетворили уравнениям (5.2.10) и условиям на границе тела (4.2.4) – $X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m$, $Y_v = \tau_{yx} l + \sigma_y m$, } которые для плоской задачи в полярных координатах принимают вид

$$\left. \begin{aligned} R_v &= \lambda \theta l + \nu \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial r} l + \frac{\partial v}{\partial r} m \right) \\ \Theta_v &= \lambda \theta m + \nu \frac{\partial u}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} l + \frac{\partial v}{\partial \theta} m \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.2.11)$$

где $-\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta$. По найденным перемещениям из геометрических соотношений Коши (5.2.2) определяют составляющие деформации, а затем из формул закона Гука в обратной форме (5.2.9) составляющие напряжения.

§ 5.3. Случаи, когда напряжения не зависят от полярного угла θ – осесимметричные задачи

На практике встречаются случаи, когда напряжения не зависят от полярного угла θ . Например, ствол артиллерийского орудия, круглый колодец своротом и т.д.. В этом случае задача упрощается: возникают только нормальные напряжения σ_r и σ_θ , а касательное

напряжение $\tau_{r\theta}$ становится нулём, из-за полной (геометрической и физической) симметрии поставленной задачи.

Первый способ. Для получения выражения функции напряжения $\varphi(r, \theta)$ можно воспользоваться выражением неразрывности деформации (5.2.6) – $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) = 0$, приравнявая в нём нулю производные от переменной θ :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0 \quad (a)$$

В этом случае функция напряжения $\varphi(r, \theta)$ становится функцией одной переменной r , т.е. – $\varphi(r)$. Поэтому выражения частных производных заменяются выражениями обыкновенных производных. Представим (a) в развёрнутом виде:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d^4 \varphi}{dr^4} + \frac{2}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^4 \varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} = 0,$$

т.е.

$$\frac{d^4 \varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (5.3.1)$$

(Здесь были проделаны следующие операции дифференцирования

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}\right) = -\frac{1}{r^2} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \varphi}{dr^2};$$

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{d}{dr} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \varphi}{dr^2}\right) = \frac{2r}{r^4} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} = \frac{2}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3};$$

т.е.

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{2}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3}.$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \varphi}{dr^2}\right) = -\frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2}.$$

Сложность решения однородного дифференциального уравнения четвёртого порядка (5.3.1) состоит в том, что входящие в него коэффициенты: $\frac{2}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}$, являю переменными. Введём обозначения $r = e^t$ или $t = \ln r$, тогда получим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Действительно,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d(\ln r)}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dt};$$

т.к. $\frac{dt}{dr} = \frac{d(\ln r)}{dr} = \frac{1}{r}$, то второе производное будет

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} = \left(\frac{d\varphi}{dt} \frac{dt}{dr}\right)' = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \frac{dt}{dr} \frac{dt}{dr} + \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2 t}{dr^2} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \frac{1}{r^2} + \frac{d\varphi}{dt} \left(\frac{1}{r}\right)' = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 \varphi}{dt^2} - \frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Таким же путём получим далее

$$\frac{d^3 \varphi}{dr^3} = \frac{1}{r^3} \left(\frac{d^3 \varphi}{dt^3} - 3 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\varphi}{dt}\right);$$

$$\frac{d^4 \varphi}{dr^4} = \frac{1}{r^4} \left(\frac{d^4 \varphi}{dt^4} - 6 \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + 11 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} - 6 \frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Подставляя всё это в уравнение (5.3.1), приведём его к виду

$$\frac{d^4 \varphi}{dt^4} + 4 \frac{d^3 \varphi}{dt^3} - 4 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0 \quad (б)$$

характеристическое уравнение будет

$$k^4 - 4k^3 + 4k^2 = k^2(k - 2)^2 = 0;$$

его двум (двукратным) корням $k = 0$ и $k = 2$ соответствуют четыре частных интеграла уравнения (б):

$$e^{0t} = 1; te^{0t}; e^{2t}; te^{2t}.$$

Поэтому общий интеграл уравнения (б) будет

$$\varphi = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t} + C_4 t e^{2t}.$$

Сюда надо подставить $t = \ln r$, тогда

$$\varphi = C_1 + C_2 \ln r + C_3 e^{2 \ln r} + C_4 \ln r e^{2 \ln r};$$

или если учесть, что $e^{2 \ln r} = e^{\ln r^2} = r^2$

$$\varphi = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 \ln r r^2; \quad (5.3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \text{ в которых отсутствуют слага-}$$

емые, зависящие от полярного угла θ , находим напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{C_2}{r^2} + 2C_4 \ln r + (2C_3 + C_4); \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{C_2}{r^2} + 2C_4 \ln r + 3C_4 + 2C_3; \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.3)$$

(Здесь были взяты производные:

$$(\ln r)'_r = \frac{1}{r}; \quad (r^2)'_r = 2r; \quad (\ln r r^2)'_r = \frac{1}{r} \cdot r^2 + \ln r \cdot 2r;$$

$$(\ln r)''_r = -\frac{1}{r^2}; \quad (r^2)''_r = 2; \quad (\ln r r^2)''_r = (r + \ln r \cdot 2r)'_r = 1 + \frac{1}{r} \cdot 2r + \ln r \cdot 2 = 3 + 2 \ln r;$$

или если заменить обозначение постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3 и C_4 на $C_2 = A, C_4 = B, C_3 = C$ и $C_1 = D$ будем иметь

$$\varphi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D; \quad (5.3.2')$$

и

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + 2B \ln r + B + 2C; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + 2B \ln r + 3B + 2C; \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.3')$$

Второй способ. При решении задачи в перемещениях надо учесть, что составляющая перемещения v в силу симметрии равна нулю и поэтому из уравнения равновесия

$$(5.2.10) - \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{r \partial \theta \partial r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{r \partial \theta \partial r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1-\nu}{2} \frac{v}{r^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ остаётся только одно}$$

обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (5.3.4)$$

с переменными коэффициентами. Приведём его к уравнению с постоянными коэффициентами посредством следующей подстановки:

$$t = \ln r \quad (в)$$

или

$$r = e^t \quad (г)$$

Дифференцируя выражение (в) по переменной r , получаем

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}. \quad (д)$$

Установим связь между производными функции u по старой и новым переменным

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dr}. \quad (е)$$

С учётом равенства (д) получаем

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du}{dt} \quad (з)$$

Вторая производная

$$\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{du}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{du}{dt} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{du}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt} \right). \quad (ж)$$

Подставляя производные (з) и (ж) в (5.3.4) $-\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$, находим

$$\frac{d^2u}{dt^2} - u = 0. \quad (5.3.5)$$

Ищем решение дифференциального уравнения (б) в виде $u = e^{kt}$. Возьмём от него первое $\frac{du}{dt} = ke^{kt}$ и второе производное $\frac{d^2u}{dt^2} = k^2e^{kt}$. Внесём k^2e^{kp} и $u = e^{kt}$ в (а), получим $k^2e^{kt} - e^{kt} = 0$,

характеристическое уравнение будет

$$k^2 - 1 = 0$$

его двум корням $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$ соответствуют два частных интеграла $r = e^{kt}$ уравнения: e^t и e^{-t} .

Поэтому общий интеграл уравнения (5.3.5) будет

$$u = Ae^t + Be^{-t}; \text{ или } u = Ae^t + B \frac{1}{e^t}.$$

Сюда надо подставить $t = \ln r$. Тогда

$$u = Ae^{\ln r} + B \frac{1}{e^{\ln r}} = Ar + B \frac{1}{r} \text{ или } u = Ar + \frac{B}{r}. \quad (5.3.6)$$

Для случае осесимметричной задачи из выражений Коши (5.2.2) –
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\}$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{du}{dr} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} \\ \gamma_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.3.7)$$

Зная составляющую перемещения $u = Ar + B \frac{1}{r}$, находим составляющие деформации:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= A - \frac{B}{r^2} \\ \varepsilon_\theta &= A + \frac{B}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (5.3.8)$$

Для случая осесимметричной задачи из формул (5.2.9) –
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \nu \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\}$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right), \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.9)$$

Составляющие напряжения будут

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)A - (1-\nu) \frac{B}{r^2} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[(1+\nu)A + (1-\nu) \frac{B}{r^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.3.10)$$

(Здесь были проделаны следующие преобразования

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(A - \frac{B}{r^2} + \nu \frac{Ar + \frac{B}{r}}{r} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{Ar + \frac{B}{r}}{r} + \nu \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(A - \frac{B}{r^2} + \nu A + \nu \frac{B}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(A + \frac{B}{r^2} + \nu \left(A - \frac{B}{r^2} \right) \right) \end{aligned} \right\}$$

Постоянные интегрирования A и B определяются из граничных условий.

Применение основных формул в плоской задаче в полярных координатах

§ 5.4. Задача Ламе о равномерном внешнем и внутреннем сжатии круглой трубы

Рассмотрим задачу Ламе о сжатой трубе, находящейся под равномерно распределённым внешним p_2 и внутренним давлением p_1 . Если считать, что труба достаточно длинная, то будем иметь дело с плоской деформацией, а из-за полной симметрии (рис. 37) с плоской задачей с напряжениями, не зависящими от полярного угла θ .

а) *Первый способ.* Воспользуемся уравнениями (5.3.3') –

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + 2B \ln r + B + 2C; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + 2B \ln r + 3B + 2C; \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для определения постоянных A , B и C имеем два очевидных граничных условия

$$\left. \begin{aligned} \text{при } r = a \quad \sigma_r &= -p_1; \\ \text{при } r = b \quad \sigma_r &= -p_2. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Для получения решения Ламе при этих условиях произвольную постоянную B положим равной нулю; Тогда уравнения (5.3.3') дают

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + 2C; \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2C; \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Входящие здесь произвольные постоянные определяются внесением условий (а) в первом из них

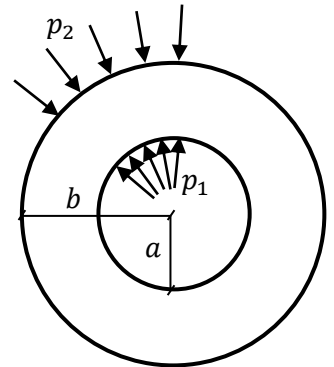


Рис. 37

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} -p_1 &= \frac{A}{a^2} + 2C; \\ -p_2 &= \frac{A}{b^2} + 2C; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} p_1 &= -\frac{A}{a^2} - 2C; \\ -p_2 &= \frac{A}{b^2} + 2C \end{aligned} \right\} \Rightarrow p_1 - p_2 = -\frac{A}{a^2} + \frac{A}{b^2}; \Rightarrow p_1 - p_2 = \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)A; \Rightarrow \\
& p_1 - p_2 = \left(\frac{-b^2+a^2}{a^2b^2}\right)A; \Rightarrow A = \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}(p_1 - p_2); \Rightarrow A = \frac{a^2b^2}{b^2-a^2}(p_2 - p_1); \\
& 2C = -p_1 - \frac{A}{a^2} \Rightarrow 2C = -p_1 - \frac{\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}(p_2-p_1)}{a^2} \Rightarrow 2C = -p_1 - \frac{a^2b^2(p_2-p_1)}{a^2(b^2-a^2)} \Rightarrow 2C = -p_1 - \\
& \frac{b^2(p_2-p_1)}{b^2-a^2} \Rightarrow 2C = \frac{-p_1(b^2-a^2)-b^2(p_2-p_1)}{b^2-a^2}; \Rightarrow 2C = \frac{-p_1b^2+p_1a^2-p_2b^2+p_1b^2}{b^2-a^2}; \Rightarrow 2C = \frac{p_1a^2-p_2b^2}{b^2-a^2}; \\
& \Rightarrow 2C = \frac{a^2p_1-b^2p_2}{b^2-a^2};
\end{aligned}$$

т.е.

$$A = \frac{a^2b^2}{b^2-a^2}(p_2 - p_1) \quad \text{и} \quad 2C = \frac{a^2p_1-b^2p_2}{b^2-a^2}.$$

Таким образом, выражения напряжений (б) принимают вид

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{a^2b^2}{b^2-a^2} \cdot \frac{(p_2-p_1)}{r^2} + \frac{a^2p_1-b^2p_2}{b^2-a^2}; \\ \sigma_\theta = -\frac{a^2b^2}{b^2-a^2} \cdot \frac{(p_2-p_1)}{r^2} + \frac{a^2p_1-b^2p_2}{b^2-a^2}; \end{cases} \quad (5.4.1)$$

Заметим, что полученные выражения напряжений отличаются друг от друга только знаком первого слагаемого. Следовательно, сумма нормальных напряжений σ_r и σ_θ во всех точках трубы одинакова:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2 \frac{a^2p_1-b^2p_2}{b^2-a^2} = \text{const.} \quad (\text{в})$$

Как известно в случае плоской деформации в поперечных сечениях трубы возникают также нормальные напряжения σ_z . По аналогии с формулой (а) § 4.2 – $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$, напомним

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu \frac{a^2p_1-b^2p_2}{b^2-a^2}. \quad (5.4.2)$$

Осевые нормальные напряжения σ_z постоянны по длине трубы. Исключение составляют сечения, находящиеся вблизи концов трубы, где, очевидно, труба не будет испытывать плоской деформации.

Продолжим рассмотрение задачи Ламе. В частном случае, когда на трубу действует только внутреннее давление, т.е., когда $p_2 = 0$, формулы

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{a^2b^2}{b^2-a^2} \cdot \frac{(p_2-p_1)}{r^2} + \frac{a^2p_1-b^2p_2}{b^2-a^2}; \\ \sigma_\theta = -\frac{a^2b^2}{b^2-a^2} \cdot \frac{(p_2-p_1)}{r^2} + \frac{a^2p_1-b^2p_2}{b^2-a^2}; \end{cases} \quad (5.4.1)$$

напряжения σ_r, σ_θ принимают следующий вид

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{a^2p_1}{b^2-a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right); \\ \sigma_\theta = \frac{a^2p_1}{b^2-a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right). \end{cases} \quad (5.4.3)$$

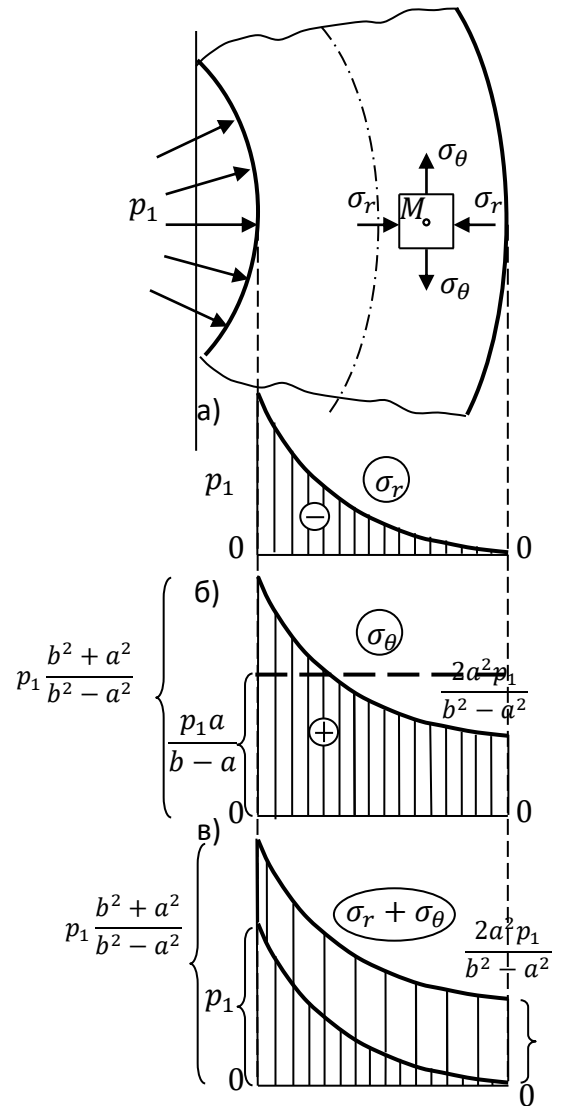


рис. 38

(Здесь были проделаны следующие алгебраические операции

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{-p_1}{r^2} + \frac{a^2 p_1}{b^2 - a^2} = -\frac{b^2}{r^2} \frac{a^2 p_1}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 p_1}{b^2 - a^2} = -\frac{a^2 p_1}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right); \\ \sigma_\theta &= -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{-p_1}{r^2} + \frac{a^2 p_1}{b^2 - a^2} = \frac{b^2}{r^2} \frac{a^2 p_1}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 p_1}{b^2 - a^2} = \frac{a^2 p_1}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right); \end{aligned} \right\}$$

Из формул (5.4.3) видно, что σ_r является сжимающим напряжением (рис.38, а), а σ_θ —растягивающим (рис.38,б). Эпюры этих напряжений изображены на рисунках 38, а и 38, б.

Наибольшие сжимающие радиальные σ_r и растягивающие тангенциальные нормальные напряжения σ_θ возникают в точках у внутренней поверхности трубы, т.е. при $r = a$:

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_r &= -p_1; \\ \max \sigma_\theta &= p_1 \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\}$$

В точках у наружной поверхности трубы (при $r = b$)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 0; \\ \sigma_\theta &= \frac{2p_1 a^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\}$$

Как известно, при решении этой задачи в курсе сопротивления материалов кольцевое (тангенциальное) напряжение σ_θ упрощённо рассчитывается по усилию, возникшему в каждом из двух диаметральных сечений — $N = \frac{p_1 2al}{2}$. Напряжения σ_θ в таких сечениях, считаются равномерно распределёнными: $\sigma_\theta = \frac{N}{A} = \frac{\frac{p_1 2al}{2}}{(b-a)l} = \frac{p_1 a}{b-a}$, т.е. $\sigma_\theta = \frac{p_1 a}{b-a}$. Эта ордината на рисунке 38, б показана пунктирной линией.

Там же, на рисунке 38,в, с разрежённой штриховкой показана суммарная эпюра двух нормальных напряжений σ_r и σ_θ . По ней видно, что везде $\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{2p_1 a^2}{b^2 - a^2}$. Эта сумма получается одинаковой, т.к. обе эпюры (рис.38, а) и (рис.38, б) ограничены одной и той же кривой. На эпюре указаны их значения: на внутренней $\sigma_r + \sigma_\theta = p_1 \left(\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - 1 \right) = p_1 \left(\frac{b^2 + a^2 - b^2 + a^2}{b^2 - a^2} \right) = \frac{2a^2 p_1}{b^2 - a^2}$ и на внешней поверхностях $\sigma_r + \sigma_\theta = 0 + \frac{2a^2 p_1}{b^2 - a^2} = \frac{2a^2 p_1}{b^2 - a^2}$.

Если рассмотрим трубу намного большим наружным радиусом, чем её внутренний радиус, то из формул (5.4.3) после деления числителя и знаменателя на b^2 получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_1 a^2}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{p_1 a^2}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{b^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

Переходя к пределу при $b \rightarrow \infty$, находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_1 a^2}{r^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{p_1 a^2}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.4)$$

Это значит, что все точки трубы испытывают одинаковые по значению радиальные и тангенциальные напряжения, отличающиеся лишь знаком. Следовательно, труба с бесконечно большим наружным радиусом находится в условиях чистого сдвига, т.к. чистый сдвиг вызывается как раз такими напряжениями. В точках внутренней поверхности (при $r = a$) эти напряжения равны давлению p_1 , а в точках, соответствующих $r = 4a$, они составляют

$\frac{p_1}{16}$. Если в практических расчётах достаточна точность в 6%, то наружный радиус $b \geq 4a$ можно считать бесконечно большим. В этом случае решение не связано с формой внешнего контура и формулы (5.4.4) характеризуют распределение напряжений для трубы любой формы внешнего контура при условии, что все его точки отстоят от центра отверстия на расстоянии больше $4a$.

Во втором частном случае, когда на трубу действует только наружное давление

$$(p_1 = 0), \text{ из формул (5.4.1) - } \left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{(p_2 - p_1)}{r^2} + \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2}; \\ \sigma_\theta &= -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{(p_2 - p_1)}{r^2} + \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2}; \end{aligned} \right\} \text{ получаем}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_2 b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right); \\ \sigma_\theta &= -\frac{p_2 b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.4.5)$$

Эпюры этих напряжений изображены на рисунке 37, б. В точках внутренней поверхности, при $r = a$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 0; \\ \sigma_\theta &= -\frac{2p_2 a^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\}$$

В точках наружной поверхности, при $r = b$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p_2; \\ \sigma_\theta &= -p_2 \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\}$$

Для наглядности на рисунке 39, показаны оба случая. Первый случай (рис. 39, а)

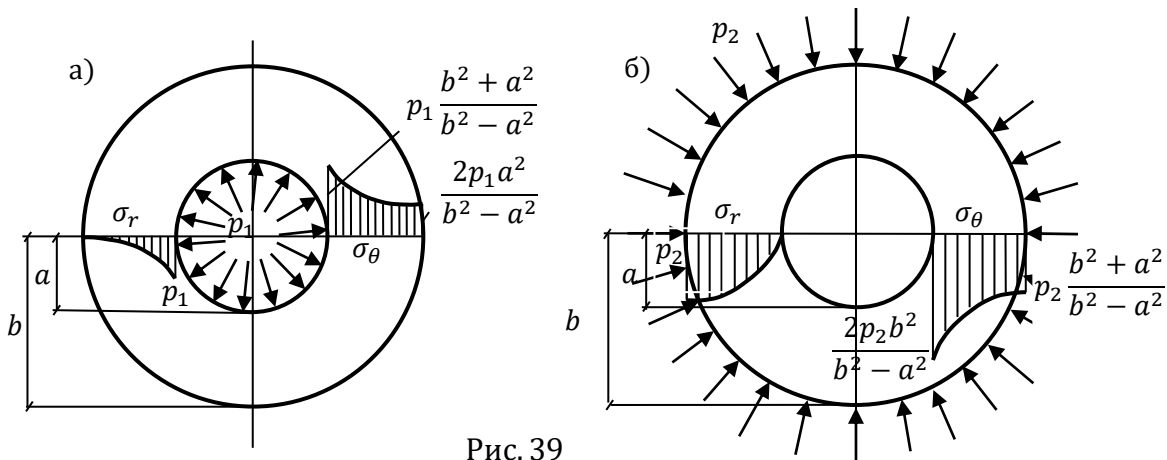


Рис. 39

когда действовало только внутреннее давление p_1 и второй случай (рис. 39, б), когда только внешнее давление p_2 .

При решении этой задачи мы сделали допущение, положив заранее $B = 0$; имея три произвольных постоянных A, B, C и два граничных условия (а); мы могли бы решить задачу и при других допущениях. Однако, можно доказать, что действительному распределению напряжений соответствует решение Ламе (5.4.1). Особенность этой задачи заключается в том, что мы здесь встречаемся с *двухсвязным контуром*, так как сечение трубы ограничено двумя замкнутыми кривыми, не пересекающимися между собой; при наличии двухсвязного или многосвязного контура решение задачи, вообще говоря, осложняется, и возможна многозначность решения; в данной задаче это затруднение можно обойти, выбрав в

качестве неизвестных перемещения; такой метод решения задачи Ламе приводится в курсах сопротивления материалов.

б) *Второй способ.* Решение задач в перемещениях. Так как напряжения и деформации не зависят от полярного угла θ , то из уравнений равновесия (5.2.1) –

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \text{остается одно первое, и оно упрощается:}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0; \quad (5.4.6)$$

зависимости Коши (5.2.2) –

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\}$$

также упрощаются

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\}. \quad (5.4.7)$$

Закон Гука в случае плоской деформации (5.2.7) –

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\theta \right), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_\theta - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r \right), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta} \end{aligned} \right\}$$

принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\theta \right) = \frac{1}{E_1} (\sigma_r - \nu_1 \sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_\theta - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r \right) = \frac{1}{E_1} (\sigma_\theta - \nu_1 \sigma_r). \end{aligned} \right\}. \quad (5.4.8)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} (\varepsilon_r + \nu_1 \varepsilon_\theta); \\ \sigma_\theta &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} (\varepsilon_\theta + \nu_1 \varepsilon_r). \end{aligned} \right\} \quad (5.4.9)$$

(Формулы (5.4.9) от (5.4.8) были получены следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E_1} (\sigma_r - \nu_1 \sigma_\theta); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_1} (\sigma_\theta - \nu_1 \sigma_r). \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \nu_1 \varepsilon_r &= \frac{1}{E_1} (\nu_1 \sigma_r - \nu_1^2 \sigma_\theta); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E_1} (\sigma_\theta - \nu_1 \sigma_r). \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon_\theta + \nu_1 \varepsilon_r = \frac{1}{E_1} (\sigma_\theta - \nu_1^2 \sigma_\theta) \Rightarrow$$

$$\sigma_\theta (1 - \nu_1^2) = E_1 (\varepsilon_\theta + \nu_1 \varepsilon_r) \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} (\varepsilon_\theta + \nu_1 \varepsilon_r), \text{ аналогично } \sigma_r = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} (\varepsilon_r + \nu_1 \varepsilon_\theta).$$

или, подставляя сюда из (5.2.2), имеем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu_1 \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left(\frac{u}{r} + \nu_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.4.10)$$

Внеся эти выражения напряжений в уравнение равновесия (5.4.6) – $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$, придём к дифференциальному уравнению второго порядка относительно u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (5.4.11)$$

(Здесь были проделаны следующие операции: а) дифференцирование

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{r-u}{r^2} \right) \right]; \text{ б) подстановка в } \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0:$$

$$\frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{r-u}{r^2} \right) \right] + \frac{\frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu_1 \frac{u}{r} \right) - \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left(\frac{u}{r} + \nu_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right)}{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu_1 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu_1 \frac{u}{r} - \frac{u}{r} - \nu_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu_1 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + (1-\nu_1) \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0).$$

Сложность решения однородного дифференциального уравнения второго порядка состоит в том, что входящие в него коэффициенты $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$ являются переменными. Введём обозначение $r = e^t$ или $t = \ln r$, тогда получим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Действительно,

$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{du}{dt} \frac{d(\ln r)}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du}{dt};$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} = \frac{d^2 u}{dt^2} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 + \frac{du}{dt} \frac{d^2 t}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \frac{du}{dt^2} - \frac{1}{r^2} \frac{du}{dt} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{du}{dt} \right), \text{ т.к. } \left(\frac{du}{dt} \frac{dt}{dr} \right)'_r = \frac{d^2 u}{dt^2} \frac{dt}{dr} \frac{dt}{dr} + \frac{d^2 t}{dr^2} \frac{du}{dt}$$

т.е.

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{r} \frac{du}{dt} \text{ и } \frac{d^2 u}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{du}{dt} \right)$$

Подставляя всё это в уравнение (5.4.11) $-\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = 0$, приведём его к виду

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - u = 0 \quad (\text{а})$$

$$\left(\frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{du}{dt} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{du}{dt} - \frac{u}{r^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{du}{dt} + \frac{du}{dt} - u = 0).$$

Ищем решение дифференциального уравнения (а) в виде $u = e^{kt}$. Возьмём от него первое $\frac{du}{dt} = k e^{kt}$ и второе производное $\frac{d^2 u}{dt^2} = k^2 e^{kt}$. Внесём $k^2 e^{kt}$ и $u = e^{kt}$ в (а), получим

$$k^2 e^{kt} - e^{kt} = 0,$$

характеристическое уравнение будет

$$k^2 - 1 = 0 \quad (\text{б})$$

его двум корням $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$ соответствуют два частных интеграла $r = e^{kt}$ уравнения (б): e^t и e^{-t} ;

Поэтому общий интеграл уравнения (б) будет

$$u = e^t C_1 + e^{-t} C_2; \text{ или } u = e^t C_1 + \frac{1}{e^t} C_2.$$

Сюда надо подставить $t = \ln r$. Тогда

$$u = e^{\ln r} C_1 + \frac{1}{e^{\ln r}} C_2 = C_1 r + \frac{1}{r} C_2 \quad (5.4.12)$$

Отсюда по уравнениям (5.4.10) — $\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu_1 \frac{u}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left(\frac{u}{r} + \nu_1 \frac{\partial u}{\partial r} \right). \end{aligned} \right\}$ находим напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_1 (1 + \nu_1) - C_2 (1 - \nu_1) \frac{1}{r^2} \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_1 (1 + \nu_1) + C_2 (1 - \nu_1) \frac{1}{r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{в})$$

(Здесь были проделаны следующие операции: а) была подсчитана первая производная $\frac{\partial u}{\partial r} = C_1 - \frac{1}{r^2} C_2$: б) были внесены в первое уравнение $\frac{\partial u}{\partial r} = C_1 - \frac{1}{r^2} C_2$ и $u = C_1 r + \frac{1}{r} C_2$.

$$\sigma_r = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left(C_1 - \frac{1}{r^2} C_2 + \nu_1 \frac{C_1 r + \frac{1}{r} C_2}{r} \right) = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left(C_1 - \frac{1}{r^2} C_2 + \nu_1 C_1 + \nu_1 C_2 \frac{1}{r^2} \right) = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_1 (1 + \nu_1) - C_2 (1 - \nu_1) \frac{1}{r^2} \right];$$

аналогично было вычислено напряжение σ_θ).

Постоянные C_1 и C_2 определяем из следующих граничных условий:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = a \quad \sigma_r = -p_1 \\ \text{при } r = b \quad \sigma_r = -p_2 \end{array} \right\} \quad (\Gamma)$$

имеем

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1}{1+\nu_1} \cdot \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2}; \\ C_2 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1}{1-\nu_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot (p_1 - p_2). \end{array} \right\} \quad (\Delta)$$

(Здесь были проделаны следующие алгебраические операции:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_1 (1 + \nu_1) - C_2 (1 - \nu_1) \frac{1}{a^2} \right] = -p_1; \\ \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_1 (1 + \nu_1) - C_2 (1 - \nu_1) \frac{1}{b^2} \right] = -p_2. \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_2 (1 - \nu_1) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right] = -p_1 + p_2 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_1 (1 + \nu_1) - C_2 (1 - \nu_1) \frac{1}{a^2} \right] = -p_1; \\ \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_1 (1 + \nu_1) - C_2 (1 - \nu_1) \frac{1}{b^2} \right] = -p_2. \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_2 (1 - \nu_1) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right] = -p_1 + p_2 \Rightarrow$$

$$\frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_2 (1 - \nu_1) \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \right) \right] = -p_1 + p_2 \Rightarrow C_2 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1}{1-\nu_1} \left[- \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \right) \right] (-p_1 + p_2)$$

т.е.

$$C_2 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1}{1-\nu_1} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} p_1$$

внесением в первое уравнение было получено

$$\frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_1 (1 + \nu_1) - C_2 (1 - \nu_1) \frac{1}{a^2} \right] = -p_1 \Rightarrow \frac{E_1}{1-\nu_1^2} C_1 (1 + \nu_1) - \frac{E_1}{1-\nu_1^2} C_2 (1 - \nu_1) \frac{1}{a^2} =$$

$$-p_1 \Rightarrow \frac{E_1}{1-\nu_1^2} C_1 (1 + \nu_1) - \frac{E_1}{1-\nu_1^2} (1 - \nu_1) \frac{1}{a^2} \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1}{1-\nu_1} \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_1 - p_2) = -p_1 \Rightarrow$$

$$\frac{E_1}{1-\nu_1^2} C_1 (1 + \nu_1) - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_1 - p_2) = -p_1 \Rightarrow$$

$$\frac{E_1}{1-\nu_1^2} C_1 (1 + \nu_1) = \frac{b^2 (p_1 - p_2) - (b^2 - a^2) p_1}{b^2 - a^2} \Rightarrow \frac{E_1}{1-\nu_1^2} C_1 (1 + \nu_1) = \frac{b^2 p_1 - b^2 p_2 - b^2 p_1 + a^2 p_1}{b^2 - a^2} \Rightarrow$$

$$\frac{E_1}{1-\nu_1^2} C_1 (1 + \nu_1) = \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2}, \text{ т.е. } C_1 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1}{1+\nu_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2},$$

откуда

$$\left. \begin{array}{l} C_1 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1}{1+\nu_1} \cdot \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2}; \\ C_2 = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1}{1-\nu_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot (p_1 - p_2). \end{array} \right\}$$

После включения постоянных C_1 и C_2 выражения (5.4.7) и (в) принимают вид

$$u = C_1 r + \frac{1}{r} C_2 = \frac{1-\nu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu_1}{E_1} \frac{a^2 b^2}{r} \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{b^2 - a^2}, \quad (5.4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \cdot \frac{(p_2 - p_1)}{b^2 - a^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \cdot \frac{(p_2 - p_1)}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.14)$$

(Здесь были проделаны следующие алгебраические операции:

$$\begin{aligned} u &= C_1 r + \frac{1}{r} C_2 \Rightarrow u = \left(\frac{1-\nu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} \right) r + \frac{1}{r} \left[\frac{1+\nu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot (p_1 - p_2) \right] \Rightarrow u = \frac{1-\nu_1}{E_1} \cdot \\ &\quad \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu_1}{E_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{r} \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{b^2 - a^2}. \\ \sigma_r &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_1 (1 + \nu_1) - C_2 (1 - \nu_1) \frac{1}{r^2} \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[C_1 (1 + \nu_1) + C_2 (1 - \nu_1) \frac{1}{r^2} \right]; \Rightarrow \\ \sigma_r &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1}{1+\nu_1} \cdot \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} (1 + \nu_1) - \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1}{1-\nu_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot (p_1 - p_2) (1 - \nu_1) \frac{1}{r^2} \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1}{1+\nu_1} \cdot \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} (1 + \nu_1) + \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{1}{1-\nu_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot (p_1 - p_2) (1 - \nu_1) \frac{1}{r^2} \right]; \\ \Rightarrow \sigma_r &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} - \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot (p_1 - p_2) \frac{1}{r^2} \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} + \frac{1-\nu_1^2}{E_1} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot (p_1 - p_2) \frac{1}{r^2} \right]; \\ \sigma_r &= \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot (p_1 - p_2) \frac{1}{r^2}; \quad \sigma_r = \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \cdot \frac{(p_2 - p_1)}{b^2 - a^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot (p_1 - p_2) \frac{1}{r^2}. \quad \sigma_\theta = \frac{p_1 a^2 - p_2 b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \cdot \frac{(p_2 - p_1)}{b^2 - a^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, полученные выражения напряжений σ_r и σ_θ по первому (5.4.1) и по второму способу (5.4.14) идентичны.

§ 5.5. Чистый изгиб криволинейного стержня. Задача Головина

Рассмотрим кривой брус, ось которого очерчена по дуге окружности. Брус нагружен на

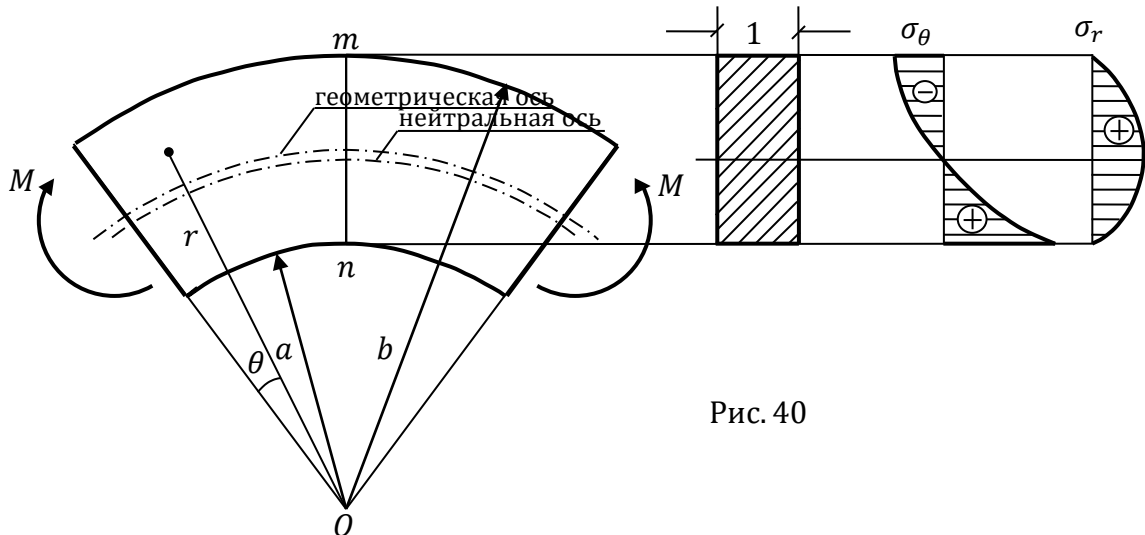


Рис. 40

концах равными и противоположно направленными сосредоточенными моментами M (рис. 40). Поскольку брус находится в условии чистого изгиба, возникшие во всех радиальных сечениях изгибающие моменты одинаковы. Следовательно, напряжения не будут зависеть от полярного угла θ , и можем воспользоваться формулами: для функции напряжения (5.3.2) — $\varphi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D$; и нормальных напряжений σ_r и σ_θ (5.3.3') —

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + 2B \ln r + B + 2C; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + 2B \ln r + 3B + 2C; \end{aligned} \right\}.$$

Для определения произвольных постоянных интегрирования A , B и C , составим контурные условия:

1) Нижний и верхний края свободны от радиальных напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } r = b \quad \sigma_r &= 0; \\ \text{при } r = a \quad \sigma_r &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (\text{а})$$

2) На торцах бруса кольцевая нормальная сила N равна нулю:

$$N = \int_a^b \sigma_\theta dr = 0. \quad (\text{б})$$

3) На торцах бруса внешний изгибающий момент M уравнивается изгибающим моментом M' , составленным от кольцевых нормальных напряжений σ_θ (рис. 40):

$$M - M' = 0, \quad \text{или} \quad M = M',$$

где $M' = \int_a^b \sigma_\theta r dr$, т.е.

$$M = \int_a^b \sigma_\theta r dr \quad (\text{в})$$

Воспользуемся этими условиями:

1) Подставим оба значения r , по условию (а), в уравнения (5.3.3'). Будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{b^2} + B(2 \ln b + 1) + 2C &= 0 \\ \frac{A}{a^2} + B(2 \ln a + 1) + 2C &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (\text{г})$$

2) Выразим σ_θ в выражение (б) через функцию напряжения φ

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = \int_a^b \frac{d^2 \varphi}{dr^2} dr = \left| \frac{d\varphi}{dr} \right|_a^b = 0$$

Возьмём первую производную, входящую в это выражение:

$$\frac{d\varphi}{dr} = A \frac{1}{r} + 2B r \ln r + Br + 2Cr$$

получим

$$\left| \frac{d\varphi}{dr} \right|_a^b = \left[\frac{A}{b} + B(2b \ln b + b) + 2Cb \right] - \left[\frac{A}{a} + B(2a \ln a + a) + 2Ca \right] = 0 \quad (\text{д})$$

(Здесь была подсчитана первая производная от $\varphi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = A \frac{1}{r} + B(r^2 \ln r)'_r + 2Cr = A \frac{1}{r} + B 2r \ln r + Br^2 \frac{1}{r} + C 2r = A \frac{1}{r} + 2B r \ln r + Br + 2Cr;$$

с учётом, что $(r^2 \ln r)'_r = 2r \ln r + r^2 \frac{1}{r} = 2r \ln r + r$).

Выражения в квадратных скобках отличаются от выражений (г) только постоянными множителями:

$$b \left[\frac{A}{b^2} + B(2 \ln b + 1) + 2C \right] - a \left[\frac{A}{a^2} + B(2 \ln a + 1) + 2C \right] = 0$$

Поэтомуполучается $0 - 0 = 0$, т.е. тождество $0 = 0$.

3) Выразим σ_θ в выражение (в) через функцию напряжения φ

$$M = \int_a^b \sigma_\theta r dr = \int_a^b \frac{d^2 \varphi}{dr^2} r dr = \left| r \frac{d\varphi}{dr} \right|_a^b - |\varphi|_a^b = M \quad (\text{е})$$

(Здесь была использована формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b uv' dr = |uv|_a^b - \int_a^b vu' dr, \text{ где были внесены:}$$

$$u = r, \quad v' = \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right), \quad v = \frac{d\varphi}{dr} \text{ и } u' = \frac{dr}{dr} = 1;$$

$$\Rightarrow \int_a^b r \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) dr = \left| r \frac{d\varphi}{dr} \right|_a^b - \int_a^b \frac{d\varphi}{dr} \cdot 1 \cdot dr \Rightarrow \int_a^b r \frac{d}{dr} \left(\frac{d\varphi}{dr} \right) dr = \left| r \frac{d\varphi}{dr} \right|_a^b - |\varphi|_a^b.$$

Первое слагаемое выражения (в) равно нулю, поскольку по выражению (д) $\left| \frac{d\varphi}{dr} \right|_a^b = 0$ и поэтому $\left| r \frac{d\varphi}{dr} \right|_a^b = 0$. Значит, второе слагаемое равняется M . Подставим значение в выражение $|\varphi|_a^b$:

$$A \ln b + B b^2 \ln b + C b^2 + D - (A \ln a + B a^2 \ln a + C a^2 + D) = M.$$

Раскроем скобки

$$A \ln \frac{b}{a} + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + C(b^2 - a^2) = M. \quad (\text{ж})$$

Получили три уравнения с тремя неизвестными: два уравнения (г) и одно (ж). Сначала воспользуемся уравнениями (г), а потом выражением (ж), получим:

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{4Ma^2b^2 \ln \frac{b}{a}}{N}; \\ B &= -\frac{2M}{N}(b^2 - a^2); \\ C &= \frac{M}{N}[b^2 - a^2 - 2(a^2 \ln a - b^2 \ln b)]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2$

(Здесь были проделаны следующие вычисления. Сначала исключили из уравнений (г) произвольную постоянную C , получили соотношение между A и B :

$$\left. \begin{aligned} \frac{A}{b^2} + B(2 \ln b + 1) + 2C &= 0 \\ \frac{A}{a^2} + B(2 \ln a + 1) + 2C &= 0; \end{aligned} \right\} \Rightarrow A \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + 2B \ln \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow A = -2B \frac{a^2b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a}; \Rightarrow$$

$$A = 2B \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a}.$$

Это выражение внесли в первое уравнение и C определили через B

$$2B \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \frac{1}{b^2} + B(2 \ln b + 1) + 2C = 0 \Rightarrow 2B \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} + \ln b + \frac{1}{2} \right) = -2C \Rightarrow$$

$$C = -B \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} + \ln b + \frac{1}{2} \right)$$

Затем воспользовались выражением (ж):

$$A \ln \frac{b}{a} + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) + C(b^2 - a^2) = M \Rightarrow 2B \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} \ln \frac{b}{a} + B(b^2 \ln b -$$

$$a^2 \ln a) - B \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} + \ln b + \frac{1}{2} \right) (b^2 - a^2) = M \Rightarrow$$

$$2B \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 + B(b^2 \ln b - a^2 \ln a) - B \left[a^2 \ln \frac{b}{a} + (b^2 - a^2) \ln b + \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \right] = M \Rightarrow$$

$$B \left[2 \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 + b^2 \ln b - a^2 \ln a - a^2 \ln b + a^2 \ln a - b^2 \ln b + a^2 \ln b - \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \right] = M \Rightarrow$$

$$B \left[2 \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{1}{2} (b^2 - a^2) \right] = M \Rightarrow B \left[\frac{4a^2b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 - (b^2 - a^2)^2}{2(b^2 - a^2)} \right] = M,$$

откуда определили

$$B = -\frac{2M(b^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2b^2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2};$$

и внесли его в выражение для A

$$A = -2B \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2} \ln \frac{b}{a} \Rightarrow A = 2 \frac{2M(b^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}\right) \ln \frac{b}{a} \Rightarrow - \frac{4Ma^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2};$$

$$A = - \frac{4Ma^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2};$$

и в выражение для C

$$C = \frac{2M(b^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} \left[\frac{a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} + \ln b + \frac{1}{2} \right] \Rightarrow C = \frac{2M(b^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} \left[\frac{b^2 - a^2 - 2(a^2 \ln a - b^2 \ln b)}{2(b^2 - a^2)} \right]$$

с учётом того, что выражение в квадратных скобках было равно

$$\left[\frac{a^2}{b^2 - a^2} (\ln b - \ln a) + \ln b + \frac{1}{2} \right] = \left(\frac{a^2 \ln b - a^2 \ln a}{b^2 - a^2} + \ln b + \frac{1}{2} \right) = \frac{2a^2 \ln b - 2a^2 \ln a + \ln b 2(b^2 - a^2) + b^2 - a^2}{2(b^2 - a^2)} =$$

$$\frac{2a^2 \ln b - 2a^2 \ln a + 2b^2 \ln b - 2a^2 \ln b + b^2 - a^2}{2(b^2 - a^2)} = \frac{-2a^2 \ln a + 2b^2 \ln b + b^2 - a^2}{2(b^2 - a^2)} = \frac{b^2 - a^2 - 2(a^2 \ln a - b^2 \ln b)}{2(b^2 - a^2)}$$

и получили выражение для C

$$C = \frac{M}{(b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2} [b^2 - a^2 - 2(a^2 \ln a - b^2 \ln b)]$$

В итоге получили

$$\left. \begin{aligned} A &= - \frac{4Ma^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{N}; \\ B &= - \frac{2M(b^2 - a^2)}{N}; \\ C &= \frac{M}{N} [b^2 - a^2 - 2(a^2 \ln a - b^2 \ln b)]. \end{aligned} \right\}$$

где было введено обозначение $N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(\ln \frac{b}{a}\right)^2$.

Внесём полученные значения A, B и C в формулах для напряжений σ_r и σ_θ (5.3.3) –

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A}{r^2} + 2B \ln r + B + 2C; \\ \sigma_\theta &= -\frac{A}{r^2} + 2B \ln r + 3B + 2C; \end{aligned} \right\}, \text{ получим}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} - a^2 \ln \frac{r}{a} \right); \\ \sigma_\theta &= -\frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} - a^2 \ln \frac{r}{a} + b^2 - a^2 \right); \end{aligned} \right\} \quad (5.5.1)$$

(Здесь были проделаны следующие вычисления

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\frac{4Ma^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{N}}{r^2} - 2 \frac{2M(b^2 - a^2)}{N} \ln r - \frac{2M(b^2 - a^2)}{N} + 2 \frac{M}{N} [b^2 - a^2 - 2(a^2 \ln a - b^2 \ln b)]; \\ \sigma_\theta &= \frac{\frac{4Ma^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{N}}{r^2} - 2 \frac{2M(b^2 - a^2)}{N} \ln r - 3 \frac{2M(b^2 - a^2)}{N} + 2 \frac{M}{N} [b^2 - a^2 - 2(a^2 \ln a - b^2 \ln b)]; \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{4M}{N} \left\{ -\frac{a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{r^2} - (b^2 - a^2) \ln r - \frac{(b^2 - a^2)}{2} + \frac{1}{2} [b^2 - a^2 - 2(a^2 \ln a - b^2 \ln b)] \right\}; \\ \sigma_\theta &= \frac{4M}{N} \left\{ \frac{a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{r^2} - (b^2 - a^2) \ln r - 3 \frac{(b^2 - a^2)}{2} + \frac{1}{2} [b^2 - a^2 - 2(a^2 \ln a - b^2 \ln b)] \right\}; \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{r^2} - b^2 \ln r + a^2 \ln r - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2 - a^2 \ln a + b^2 \ln b \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{r^2} - b^2 \ln r + a^2 \ln r - \frac{3}{2} b^2 + \frac{3}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 - \frac{1}{2} a^2 - a^2 \ln a + b^2 \ln b \right); \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{r^2} - b^2 \ln r + a^2 \ln r - a^2 \ln a + b^2 \ln b \right); \\
\sigma_\theta &= \frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{r^2} - b^2 \ln r + a^2 \ln r - b^2 + a^2 - a^2 \ln a + b^2 \ln b \right); \\
\sigma_r &= \frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{r^2} - (b^2 \ln r - b^2 \ln b) + a^2 \ln r - a^2 \ln a \right); \\
\sigma_\theta &= \frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2 \ln \frac{b}{a}}{r^2} - (b^2 \ln r - b^2 \ln b) + a^2 \ln r - b^2 + a^2 - a^2 \ln a \right); \\
\sigma_r &= \frac{4M}{N} \left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{r}{a} \right); \\
\sigma_\theta &= \frac{4M}{N} \left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{r}{a} - b^2 + a^2 \right);
\end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

По результатам сравнения значений, полученных вычислением напряжения σ_θ по формуле (5.5.1) со значениями, которые даёт элементарная теория бруса большой кривизны (гипотеза плоских сечений) по формуле

$$\sigma_\theta = \frac{M}{Az_0} \cdot \frac{z_0 + z}{r_0 + z}$$

где z_0 — расстояние от нейтрального слоя до центра тяжести сечения;

r_0 — средний радиус кривизны стержня;

установлено, что они отличаются очень незначительно, т.е. эта формула вполне приемлема.

По полученным здесь выражениям σ_r и σ_θ , максимальные значения σ_r составляют около 20% процентов от максимальных тангенциальных напряжений σ_θ . Они возникают в точках, где σ_θ близко к нулю и поэтому не могут влиять на прочность стержня. Это оправдывает допущение, изложенное в курсе сопротивления материалов, согласно которому отдельные волокна бруса друг на друга не давят, т.е. по которому радиальное напряжение равно нулю — $\sigma_r = 0$.

Допущение о том, что сечения после деформации остаются плоскими, подтверждается точным решением методами теории упругости.

Применение уравнений плоской задачи в разных случаях § 5.6. Растяжение полосы, ослабленной круговым отверстием

На рисунке 41 показана пластинка величиной P подверженная однородному растяжению в направлении оси x . Если в пластинке проделано малое круглое отверстие, то распределение напряжений вблизи этого отверстия изменится; однако в соответствии с принципом Сен-Венана можно сделать вывод, что этим изменением можно пренебречь на расстояниях, достаточно больших по сравнению с радиусом отверстия a .

Проведём окружность радиусом b . Подберём b таким образом, чтобы влияние отверстия дальше этой окружности не ощущалось. В произвольной точке m , лежащей на ней, напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$, возникшие в касательной плоскости к окружности, определяем, как напряжения на наклонных площадках, из условия равновесия вырезанного треугольника (рис. 41,б), при простом растяжении, по формулам сопротивления материалов:

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_r &= \sigma \cos^2 \theta = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\theta); \\
\tau_{r\theta} &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta
\end{aligned} \right\} \quad (5.6.1)$$

Напряжения внутри проведённой окружности определяем от действия напряжений (5.6.1), как от внешней нагрузки. Для определения напряжений от действия σ_r , представим его, как сумму двух слагаемых:

$$\sigma_r = \sigma'_r + \sigma''_r = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos 2\theta,$$

Воспользуемся принципом суперпозиции.

Первое слагаемое – постоянная величина. Значит, по внешней поверхности круга с радиусом b единичной толщины, будет действовать равномерно распределённая, растягивающая нагрузка с интенсивностью $\sigma'_r = \frac{\sigma}{2}$ (рис. 42, а). Напряжение внутри круга будет опре-

деляться по формулам (5.4.5)
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_2 b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right); \\ \sigma_\theta &= -\frac{p_2 b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right). \end{aligned} \right\}$$
 полученным для случая толстостен-

ной трубы, когда она нагружена сжимающим радиальным давлением p_2 на внешней поверхности, заменяя в них значение $-p_2$ значением $\frac{\sigma}{2}$ и полагая что $\frac{a}{b} = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{\sigma}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right); \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2} \frac{b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{\sigma}{2} \frac{1}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) = \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (5.6.2)$$

Что же касается второго слагаемого $\sigma''_r = \frac{\sigma}{2} \cos 2\theta$ (рис. 42, б), то оно как и касательное

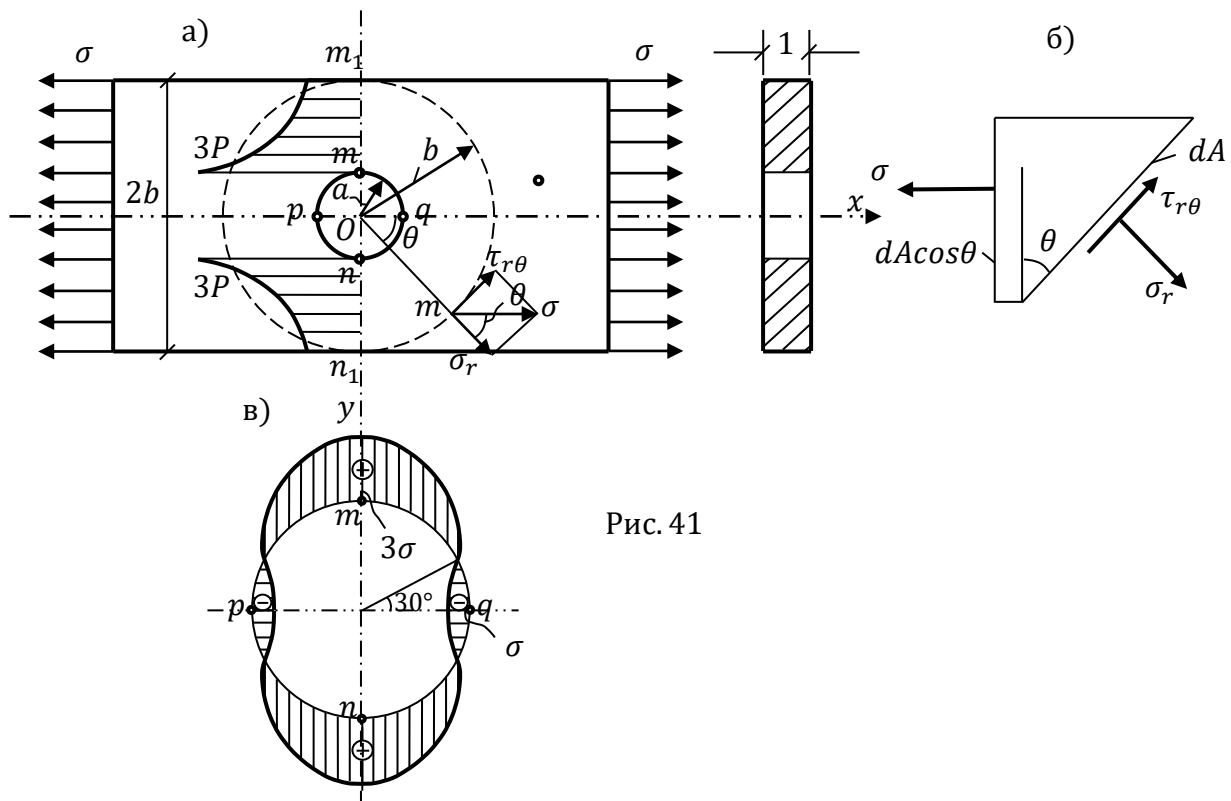


Рис. 41

напряжение $\tau_{r\theta} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta$ является переменной величиной, зависящей от полярного угла θ . Поэтому для определения напряжений, возникших внутри круга от совместного действия σ''_r (рис. 42, б) и $\tau_{r\theta}$ (рис. 42, в), придётся использовать функцию напряжения – $\varphi(r, \theta)$.

Выражение $\varphi(r, \theta)$ нужно подобрать так, чтобы оно удовлетворяло основному уравнению плоской задачи – уравнению совместности деформации (5.2.6):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) = 0 \quad (a)$$

и следующим граничным условиям:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } r = a \quad \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0; \\ \text{при } r = b \quad \sigma_r = \frac{\sigma}{2} \cos 2\theta, \quad \tau_{r\theta} = \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta. \end{array} \right\} \quad (б)$$

Берём функцию напряжения в виде

$$\varphi = f(r) \cos 2\theta$$

Её подстановкой в выражение (а) приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению для определения $f(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2}\right) = 0 \quad (в)$$

(Действительно, так как

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \cos 2\theta \frac{df}{dr}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \cos 2\theta \frac{d^2 f}{dr^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -2f \sin 2\theta, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -4f \cos 2\theta$$

то

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) = \left(\cos 2\theta \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \cos 2\theta \frac{df}{dr} - \frac{4}{r^2} f \cos 2\theta\right)$$

т.е.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}\right) = \cos^2 2\theta \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2}\right) = 0,$$

а после сокращения на $\cos^2 2\theta$, и замены частных производных на обыкновенные, получаем

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2}\right) = 0.$$

или в развёрнутом виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2}\right) = 0 &\Rightarrow \frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{24}{r^4} f + \frac{16}{r^3} \frac{df}{dr} - \\ &\frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r^2} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2}\right) - \frac{1}{r} \left(-\frac{8}{r^3} f + \frac{4}{r^2} \frac{df}{dr}\right) - \frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{4}{r^2} \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \frac{4}{r^2} \frac{4f}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^4 f}{dr^4} + \\ &\frac{2}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{24}{r^4} f + \frac{16}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{1}{r^3} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{8}{r^4} f - \frac{4}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} - \\ &\frac{4}{r^3} \frac{df}{dr} + \frac{16f}{r^4} = 0 \Rightarrow \frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{9}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{9}{r^3} \frac{df}{dr} = 0. \end{aligned}$$

Для приведения к развёрнутому виду были подсчитаны производные:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{df}{dr}\right)' = -\frac{1}{r^2} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2};$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{df}{dr}\right)'' = \left(-\frac{1}{r^2} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 f}{dr^2}\right)' = \frac{2r}{r^4} \frac{df}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} = \frac{2}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{2}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^3 f}{dr^3};$$

$$\left(\frac{4}{r^2} f\right)' = -\frac{8r}{r^4} f - \frac{4}{r^2} \frac{df}{dr};$$

$$\left(\frac{4}{r^2} f\right)'' = \left(-\frac{8}{r^3} f + \frac{4}{r^2} \frac{df}{dr}\right)' = \frac{3r^2 \cdot 8}{r^6} f - \frac{8}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{2r \cdot 4}{r^4} \frac{df}{dr} + \frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{24}{r^4} f - \frac{8}{r^3} \frac{df}{dr} - \frac{8}{r^3} \frac{df}{dr} +$$

$$\frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{24}{r^4} f - \frac{16}{r^3} \frac{df}{dr} + \frac{4}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2}.$$

т.е., получили

$$\frac{d^4 f}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 f}{dr^3} - \frac{9}{r^2} \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{9}{r^3} \frac{df}{dr} = 0. \quad (5.6.4)$$

Отсюда получаем функцию напряжений

$$\varphi(r, \theta) = \left(Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D\right) \cos 2\theta, \quad (5.6.5)$$

которое удовлетворяет дифференциальному уравнению (в).

(Действительно, взяв производные φ от r

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dr} &= \left(2Ar + 4Br^3 - 2C\frac{1}{r^3}\right) \cos 2\theta, \\ \frac{d^2\varphi}{dr^2} &= \left(2A + 12Br^2 + 6C\frac{1}{r^4}\right) \cos 2\theta, \\ \frac{d^3\varphi}{dr^3} &= \left(24Br - 24C\frac{1}{r^5}\right) \cos 2\theta, \\ \frac{d^4\varphi}{dr^4} &= \left(24B + 120C\frac{1}{r^6}\right) \cos 2\theta,\end{aligned}$$

внеся их в уравнения (5.6.4.) получаем нуль:

$$\begin{aligned}\frac{d^4\varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\varphi}{dr^3} - \frac{9}{r^2} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{9}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} &= \left(24B + 120C\frac{1}{r^6}\right) \cos 2\theta + \frac{2}{r} \left(24Br - 24C\frac{1}{r^5}\right) \cos 2\theta - \\ \frac{9}{r^2} \left(2A + 12Br^2 + 6C\frac{1}{r^4}\right) \cos 2\theta + \frac{9}{r^3} \left(2Ar + 4Br^3 - 2C\frac{1}{r^3}\right) \cos 2\theta &= \left(24B + 120C\frac{1}{r^6} + \right. \\ \frac{2}{r} 24Br - \frac{2}{r} 24C\frac{1}{r^5} - \frac{9}{r^2} 2A - \frac{9}{r^2} 12Br^2 - \frac{9}{r^2} 6C\frac{1}{r^4} + \frac{9}{r^3} 2Ar + \frac{9}{r^3} 4Br^3 - \frac{9}{r^3} 2C\frac{1}{r^3} \Big) \cos 2\theta &= \\ \left(24B + 120C\frac{1}{r^6} + 48B - 48C\frac{1}{r^6} - 18A\frac{1}{r^2} - 108B - 54C\frac{1}{r^6} + 18A\frac{1}{r^2} + 36B - 18C\frac{1}{r^6}\right) \cos 2\theta &= \\ 0. \end{aligned}$$

и соответствующие компоненты напряжений, согласно уравнениям (5.2.4):

$$\left. \begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = -\left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2}\right) \cos 2\theta; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4}\right) \cos 2\theta; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2}\right) \sin 2\theta.\end{aligned}\right\} \quad (\Gamma)$$

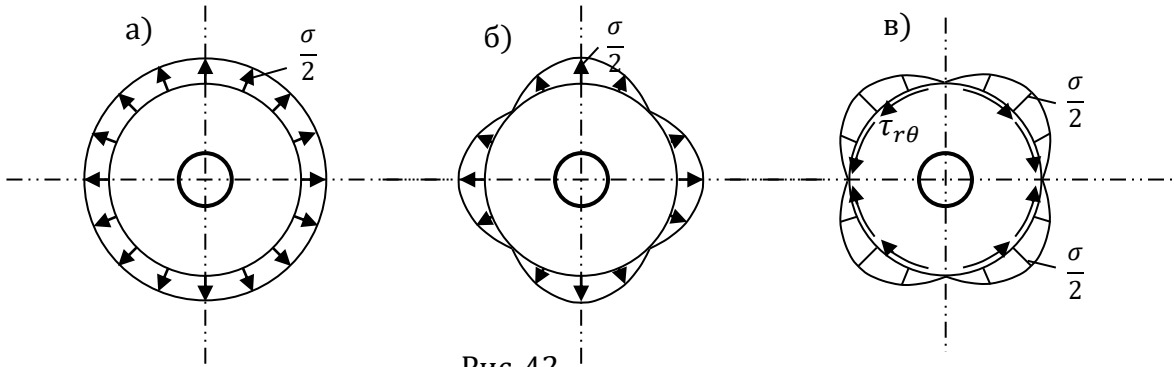


Рис. 42

Произвольные постоянные интегрирования A, B, C, D нужно теперь определять из граничных условий (б). Эти условия дают

$$\begin{aligned}2A + \frac{6C}{a^4} + \frac{4D}{a^2} &= 0, & 2A + 6Br^2 - \frac{6C}{a^4} - \frac{2D}{a^2} &= 0, \\ 2A + \frac{6C}{b^4} + \frac{4D}{b^2} &= -\frac{\sigma}{2}, & 2A + 6Br^2 - \frac{6C}{b^4} - \frac{2D}{b^2} &= -\frac{\sigma}{2}.\end{aligned}$$

Решая эту систему и полагая $\frac{a}{b} = 0$, т.е., считая пластинку неограниченно большой по сравнению с отверстием, получаем:

$$A = -\frac{\sigma}{2}, \quad B = 0, \quad C = -\frac{a^4}{4} \sigma, \quad D = \frac{a^2}{4} \sigma.$$

Подставляя эти значения постоянных интегрирования в уравнения (Г), и добавляя

определяемые выражениями (5.6.2) –
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right). \end{aligned} \right\}$$
 напряжения, вызываемые действующим на внешней границе равномерным радиальным растяжением интенсивности $\frac{\sigma}{2}$ (рис. 42, а), находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.6.6)$$

Если радиус r очень велик ($r \gg a$), напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$ приближаются к значениям, даваемым уравнениями (5.6.1) –
$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma \cos^2 \theta = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos 2\theta); \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\theta \end{aligned} \right\}.$$

На краю отверстия $r = a$, получаем

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} 2 - \frac{\sigma}{2} 4 \cos 2\theta = \sigma - 2\sigma \cos 2\theta = \sigma(1 - 2\cos 2\theta).$$

Можно видеть, что напряжения σ_θ , когда $\theta = \frac{\pi}{2}$ или $\theta = \frac{3\pi}{2}$, т.е. на концах m и n диаметра, перпендикулярного к направлению растяжения (рис. 39, в), достигают максимальных значений. В этих точках $(\sigma_\theta)_{\max} = 3\sigma$. Это максимальное растягивающее напряжение втрое больше постоянного напряжения σ , приложенного на концах пластинки.

В точках p и q , где θ равно π и 0 , получаем

$$\sigma_\theta = -\sigma.$$

Таким образом, в окружном направлении в этих точках действует сжимающее напряжение.

Для поперечного сечения пластинки, проходящего через отверстие и перпендикулярного оси x , угол θ равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому из уравнения (5.6.6) находим

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right). \quad (\Gamma)$$

В практических расчётах значения коэффициента концентрации k определяются в зависимости от отношения диаметра отверстия к ширине пластинки. Коэффициент k вычисляется, как отношение $(\sigma_\theta)_{\max}$ со средним напряжением, возникшим в ослабленном поперечном сечении, определяемом по формуле сопротивления материалов

$$(\sigma_\theta)_{\text{ср}} = \frac{S}{A_{\text{нормо}}},$$

где S – усилие, возникшее от действия внешних растягивающих напряжений σ . Значение $k = \frac{(\sigma_\theta)_{\max}}{(\sigma_\theta)_{\text{ср}}}$ равно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{b} = 0.3 & \quad k = 2.52; \\ \frac{a}{b} = 0.4 & \quad k = 2.24; \\ \frac{a}{b} = 0.5 & \quad k = 2.21. \end{aligned} \right\}$$

Получается, что по мере возрастания отношения $\frac{a}{b}$ коэффициент k уменьшается, т.е. наиболее опасными являются отверстия с малым диаметром.

Надо отметить, что коэффициент концентрации напряжения зависит также от формы

отверстия. У отверстия эллиптической формы, при перпендикулярном положении большой осик направлению растяжения, k ощутимо больше, чем у отверстия круглой формы.

Ясно, что влияние отверстия носит локальный характер. С увеличением r напряжение σ_θ приближается к значению σ . Распределение этих напряжений показано на рисунке 41, а. Если ширина пластинки не меньше четырёх диаметров отверстия, можно считать, что пластинка и в ширине бесконечно большая и можно применять формулу для напряжения σ_θ из выражений (5.6.6). Погрешность при вычислении $(\sigma_\theta)_{max}$ не превышает 6%.

§ 5.7. Простое радиальное напряжённое состояние

Для решения плоской задачи в напряжениях в полярной координатной системе

$$\text{координат имеем два уравнения равновесия (5.2.1) - } \left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \theta &= 0. \end{aligned} \right\}$$

и уравнение неразрывности деформации (5.2.3) – $\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0$ или в другом виде

$$(5.2.4) - \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0.$$

Однако часто приходится иметь дело с напряжённым состоянием, при котором во всех точках тела действуют только радиальные нормальные напряжения σ_r . Остальные составляющие напряжений, как и составляющие объёмных сил, равны нулю. Такое напряжённое состояние называется *простым радиальным*.

В этом случае второе уравнение равновесия обращается в тождество, а первое уравнение и уравнение неразрывности деформации значительно упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \theta^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Систему уравнений (а) можно проинтегрировать в общем виде методом Фурье. Для этого представим напряжение σ_r , являющееся функцией двух переменных r и θ , в виде произведения двух функций:

$$\sigma_r = \varphi(r)\psi(\theta), \quad (б)$$

первая из которых $\varphi(r)$ является функцией только одной переменной r , а вторая $\psi(\theta)$ – только переменной θ .

Подставляя функцию (б) в уравнения (а), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения с двумя неизвестными функциями φ и ψ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \psi + \frac{\varphi \psi}{r} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \psi + \frac{1}{r^2} \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Первое уравнение (в) после деления на ψ даёт

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\varphi}{r} = 0,$$

откуда после разделения переменных

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}{\varphi} = -\frac{1}{r} \quad \text{или} \quad \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}{\varphi} dr = -\frac{1}{r} dr,$$

интегрируя, получаем

$$\ln \varphi = -\ln r + \ln C,$$

или

$$\ln \varphi = \ln \left(\frac{C}{r} \right).$$

Потенцируя, находим

$$\varphi = \frac{C}{r}. \quad (\text{г})$$

Для отыскания функции ψ подставим найденную функцию $\varphi = \frac{C}{r}$ и её производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} C \text{ и } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{2r}{r^4} C \text{ во второе уравнение (в)}$$

$$\frac{2C}{r^3} \psi - \frac{C}{r^3} \psi + \frac{C}{r^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0$$

После деления на дробь $\frac{C}{r^3}$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \psi = 0.$$

Его решение представляется в виде

$$\psi = A \cos \theta + B \sin \theta. \quad (\text{д})$$

Подставляя решения (г) и (д) в выражение (б) — $\sigma_r = \varphi(r) \psi(\theta)$, находим

$$\sigma_r = \frac{1}{r} C (A \cos \theta + B \sin \theta). \quad (\text{е})$$

Для удобства дальнейших выкладок введём новые произвольные постоянные k и θ_0 :

$$C \cdot A = -k \cos \theta_0; \quad C \cdot B = -k \sin \theta_0.$$

Тогда функция (е) примет вид

$$\sigma_r = -\frac{k}{r} (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0), \quad (5.7.1)$$

или, если применить тригонометрическую формулу преобразования косинуса разности двух углов,

$$\sigma_r = -\frac{k}{r} \cos(\theta - \theta_0).$$

Следовательно, простое радиальное напряженное состояние представляется следующими напряжениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{k}{r} \cos(\theta - \theta_0); \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.2)$$

Постоянные k и θ_0 определяются из граничных условий.

§ 5.8. Клин, нагруженный в вершине сосредоточенной силой

Решение (5.7.2) можно применить к задаче о клине, в вершине которого приложена сила P произвольного направления (рис. 43). Угол раствора клина равен 2α . Начальный радиус-вектор r_0 совпадает с биссектрисой угла. Линия действия силы составляет с начальным радиус-вектором угол β . Покажем, что в этом случае клин находится в простом радиальном напряжённом состоянии. Для этого воспользуемся выражением напряжения σ_r в форме (5.7.1):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{k}{r} (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0); \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.8.1)$$

и определим постоянные k и θ_0 , при которых удовлетворяются граничные условия постав-

ленной задачи.

Исключим из рассмотрения закрепление нижней кромки клина, которое оказывает влияние на распределение напряжений только вблизи от места закрепления.

На боковых поверхностях клина, т.е. при $\theta = \pm\alpha$, $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$. Из формул (5.8.1) следует, что это условие тождественно выполняется во всех точках боковой поверхности, кроме полюса O . В полюсе при $r = 0$ указанные формулы неприемлемы. Для включения в граничные условия силы P заменим её на основании принципа Сен-Венана эквивалентной нагрузкой, распределённой по дуге малого радиуса ρ (рис. 44).

Рассмотрим равновесие элемента клина, отсекаемого дугой произвольного радиуса ρ . Спроецируем все силы, приложенные к этому элементу на вертикальную и горизонтальные оси. Принимая толщину клина в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, равной единице, получим:

$$\left. \begin{aligned} - \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_r \rho d\theta \cos \theta + P \cos \beta &= 0; \\ - \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_r \rho d\theta \sin \theta + P \sin \beta &= 0. \end{aligned} \right\}$$

После подстановки напряжения σ_r из формул (6.5.1) –

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{k}{r} (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0); \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\}, \text{ при } r = \rho, \text{ эти условия равновесия преобразуются в}$$

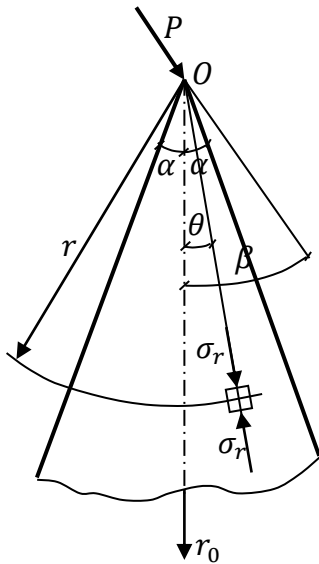


Рис. 43

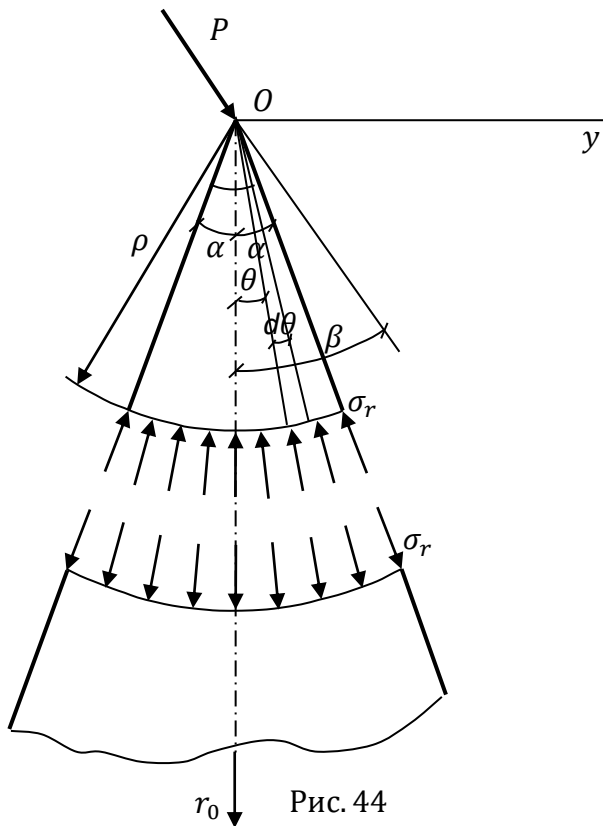


Рис. 44

следующие:

$$\left. \begin{aligned} k \cos \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \theta d\theta + k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta + P \cos \beta &= 0; \\ k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta \sin \theta d\theta + k \sin \theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \theta d\theta + P \sin \beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Интегрируя, получаем систему двух уравнений для определения постоянных k и θ_0 :

$$\left. \begin{aligned} k \cos \theta_0 (\alpha + 0.5 \sin 2\alpha) + P \cos \beta &= 0; \\ k \sin \theta_0 (\alpha - 0.5 \sin 2\alpha) + P \sin \beta &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(Здесь были подсчитаны входящие в (а) интегралы: $\int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha$; $\int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{1}{2} (\sin^2 \alpha - \sin^2(-\alpha)) = 0$; $\int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{-\alpha}^{+\alpha} = \alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha$), откуда

$$\left. \begin{aligned} k \cos \theta_0 &= -\frac{2P \cos \beta}{2\alpha + \sin 2\alpha}; \\ k \sin \theta_0 &= -\frac{2P \cos \beta}{2\alpha - \sin 2\alpha}; \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Разделив почленно второе уравнение (б) на первое, получаем условие для определения постоянной θ_0 :

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \operatorname{tg} \beta. \quad (5.8.2)$$

Возведём оба уравнения (б) в квадрат и сложим:

$$k^2 (\cos^2 \theta_0 + \sin^2 \theta_0) = \frac{4P^2 \cos^2 \beta}{(2\alpha + \sin 2\alpha)^2} + \frac{4P^2 \sin^2 \beta}{(2\alpha - \sin 2\alpha)^2}$$

Извлекая корень, находим

$$k = 2P \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{(2\alpha + \sin 2\alpha)^2} + \frac{\sin^2 \beta}{(2\alpha - \sin 2\alpha)^2}}. \quad (5.8.3)$$

Таким образом, удалось удовлетворить граничным условиям и, следовательно, рассматриваемый клин находится в простом радиальном напряжённом состоянии. При этом постоянные k и θ_0 определяются по формулам (5.8.2) и (5.8.3).

§ 5.9. Сжатие клина

Задачу о сжатии клина сосредоточенной силой, приложенной к его вершине (рис. 45) можно рассматривать как частный случай задачи, разобранный в § 5.8, когда $\beta = 0$. При этом постоянные θ_0 и k согласно формулам (5.8.2) –

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \operatorname{tg} \beta; \quad \text{и} \quad (5.8.3) - k =$$

$$2P \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{(2\alpha + \sin 2\alpha)^2} + \frac{\sin^2 \beta}{(2\alpha - \sin 2\alpha)^2}} \text{ принимают следующие значения:}$$

$$\theta_0 = 0, \quad k = \frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha}. \quad (5.9.1)$$

Внося эти значения в формулу (5.8.1) –

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{k}{r} (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0); \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \text{ получаем такие}$$

составляющие напряжения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos \theta}{r}; \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.9.2)$$

Эпюра радиальных напряжений σ_r в сечении $r = \text{const}$ показана на том же рисунке.

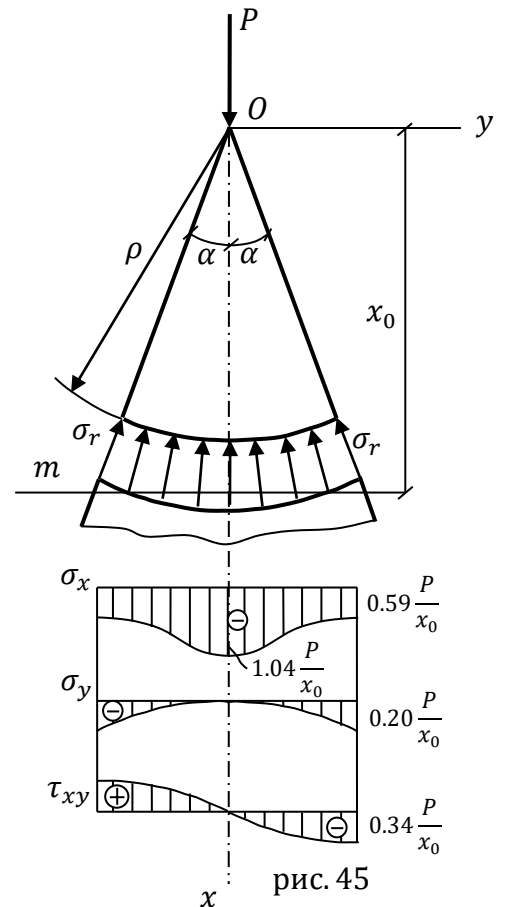


рис. 45

Для исследования напряжённого состояния в сжатом клине удобно перейти к его поперечным и продольным сечениям. Если ось x совместить с осью симметрии клина, а ось y направить вправо, то в поперечном сечении будут действовать составляющие напряжений σ_x и τ_{yx} , а в продольном σ_y и τ_{xy} .

Связь между составляющими напряжений в декартовой и полярных системах координат для плоской задачи получим из формул (1.4.1) –

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl, \text{ и}$$

$$(1.4.5) - \tau_{\eta\nu} = \sigma_x ll_1 + \sigma_y mm_1 + \sigma_z nn_1 + \tau_{yx}(lm_1 + l_1 m) + \tau_{yz}(mn_1 + m n_1) + \tau_{zx}(nl_1 + l n_1)$$

и (с) параграфа § 1.4 – $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, изменяя в них обозначения соответствующих направлений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r l^2 + \sigma_\theta m^2 + 2\tau_{r\theta} lm; \\ \sigma_y &= \sigma_r l_1^2 + \sigma_\theta m_1^2 + 2\tau_{r\theta} l_1 m_1; \\ \tau_{yx} &= \sigma_r ll_1 + \sigma_\theta mm_1 + \tau_{r\theta}(lm_1 + l_1 m). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

В этих формулах направляющие косинусы l и m определяют положение оси x по отношению соответственно к осям r и θ :

$$\left. \begin{aligned} l &= \cos(r, x) = \cos\theta, \\ m &= \cos(\theta, x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

а направляющие косинусы l_1 и m_1 – положение оси y :

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos(r, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \\ m_1 &= \cos(\theta, y) = \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

После подстановки направляющих косинусов (б) и (в) в формулы (а) получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2\theta + \sigma_\theta \sin^2\theta - 2\tau_{r\theta} \sin\theta \cos\theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2\theta + \sigma_\theta \cos^2\theta + 2\tau_{r\theta} \sin\theta \cos\theta; \\ \tau_{yx} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin\theta \cos\theta + \tau_{r\theta} (\cos^2\theta - \sin^2\theta). \end{aligned} \right\} \quad (5.9.3)$$

Пользуясь значениями напряжений (5.9.2), находим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos^3\theta}{r}; \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos\theta \sin^2\theta}{r}; \\ \tau_{yx} &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos^2\theta \sin\theta}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

(Здесь в (5.9.3) была сделана подстановка только одного $\sigma_r = \frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos\theta}{r}$: в $\sigma_x = -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos\theta}{r} \cos^2\theta$; в $\sigma_y = \frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos\theta}{r} \sin^2\theta$; и в $\tau_{yx} = -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos\theta}{r} \sin\theta \cos\theta$).

Перейдём в правой части полученных равенств от полярных координат к декартовым координатам, связь между которыми выражается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \cos\theta &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.9.4)$$

Подставляя эти соотношения в формулы (г), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{yx} &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.9.5)$$

Исследуем выведенные формулы на примере клина с углом $\alpha = \frac{\pi}{6}$ радиан. В сечении mn , находящемся на расстоянии x_0 от вершины

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{0.957} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= \frac{P}{0.957} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{yx} &= -\frac{P}{0.957} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

(Здесь в знаменателе число 0.957 было вычислено по выражениям (5.9.5): $2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{\frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{1.047 + 0.866}{2} = \frac{1.913}{2} = 0.957$).

Эпюры этих напряжений изображены на рисунке 45.

Для сравнения приведём решение с позиций сопротивления материалов, где принимается, что при сжатии нормальные напряжения σ_x^0 в поперечном сечении распределены равномерно, а напряжения σ_y^0 и τ_{xy}^0 отсутствуют:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= -\frac{P}{A_{mn}} = -\frac{P}{2x_0 \operatorname{tg} \alpha} = -0.866 \frac{P}{x_0}; \\ \sigma_y^0 &= \tau_{xy}^0 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Сопоставляя эти напряжения с напряжениями (д), заключаем, что нормальное напряжение σ_x^0 , получаемое методами сопротивления материалов, отличается от максимального нормального напряжения σ_x , получаемого методами теории упругости, на 17%. В случае, когда угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ радиан, эта разница достигает 36%. Отсюда следует, что методика сопротивления материалов не пригодна для расчёта сжатых стержней переменного сечения с большим углом раствора α .

§ 5.10. Изгиб клина

Задачу об изгибе клина силой, приложенной к его вершине (рис. 46) можно также рассматривать как частный случай задачи, разобранный в § 5.8, при $\beta = \frac{\pi}{2}$. Придерживаясь той же

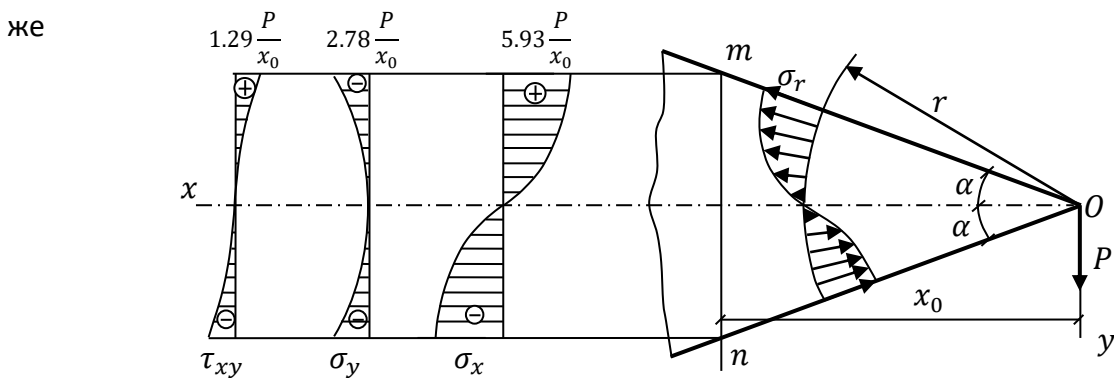


Рис. 46

последовательности, что и в предыдущем параграфе, находим постоянные θ_0 и k согласно

формулам (5.8.2) – $tg\theta_0 = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} tg\beta$ и (5.8.3) – $k = 2P \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{(2\alpha + \sin 2\alpha)^2} + \frac{\sin^2 \beta}{(2\alpha - \sin 2\alpha)^2}}$ принимают следующие значения

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \frac{\pi}{2}; \\ k &= \frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \end{aligned} \right\}$$

$$(tg\theta_0 = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} tg \frac{\pi}{2} \Rightarrow tg\theta_0 = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \infty \Rightarrow tg\theta_0 = \infty \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2};)$$

и составляющих напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{\sin \theta}{r}; \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.10.1)$$

(формулы (5.10.1) получены из формул (5.8.1) – $\sigma_r = -\frac{k}{r} (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0)$; $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$.)

Эпюра радиальных напряжений σ_r , в сечении $r = \text{const}$ показана на указанном рисунке.

Переходя с помощью формул (5.9.5) – $\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \right\}$ к декартовой системе

координат, находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{yx} &= -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\}$$

(5.10.2)

(Здесь

$$(5.9.5) - \left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{\sin \theta}{r}; \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\}$$

было внесено в (5.9.3)–

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta; \\ \tau_{yx} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \right\}$$

и получено $\sigma_x = -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{\sin \theta}{r} \cos^2 \theta$;

$$\sigma_y = -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{\sin \theta}{r} \sin^2 \theta; \quad \tau_{yx} = \left(-\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right) \frac{\sin \theta}{r} \sin \theta \cos \theta, \text{ а затем внесением}$$

$$(5.9.5) - \left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \sin \theta &= \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \right\} \text{ было получено (5.10.2) - } \left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{yx} &= -\frac{2P}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\}$$

Исследуем распределение напряжений в клине с углом $\alpha = \frac{\pi}{7.2} = 0.436$ радиан. В этом

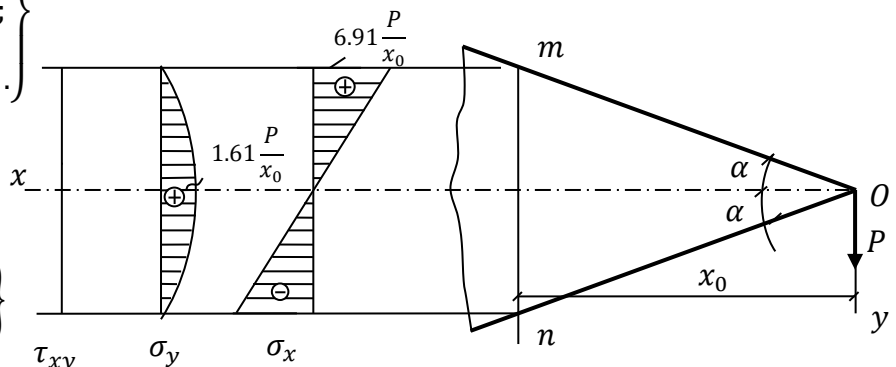


Рис. 47

случае в поперечном сечении, отстоящем от вершины на расстоянии x_0 , возникнут следующие напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{0.533} \frac{x_0^2 y}{(x_0^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{P}{0.533} \frac{y^3}{(x_0^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{yx} &= -\frac{P}{0.533} \frac{x_0 y^2}{(x_0^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.10.3)$$

Их эпюры также показаны на рисунке 46.

Для сравнения приведём решение, получаемое методами сопротивления материалов:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= \frac{My}{I_x} = \frac{-Px_0 y}{\frac{1 \cdot (2x_0 t g \alpha)^3}{12}} = -\frac{3}{2} \frac{Py}{x_0^2 t g^3 \alpha}; \\ \sigma_y^0 &= 0; \\ \tau_{yx}^0 &= \frac{QS_z^0}{I_x b} = \frac{P \frac{(x_0^2 t g^2 \alpha - y^2)}{2}}{\frac{1 \cdot (2x_0 t g \alpha)^3}{12}} = \frac{3}{4} \frac{P(x_0^2 t g^2 \alpha - y^2)}{x_0^3 t g^3 \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (5.10.4)$$

Эпюры этих напряжений, при том же значении угла α , представлены на рисунке 47.

Сравнивая соответствующие эпюры на рисунках 46 и 47, замечаем, что они значительно отличаются друг от друга. Эпюра нормальных напряжений σ_x , построенная по формулам (5.10.2), криволинейная, а эпюра напряжений σ_x^0 , построенная по формулам (5.10.4), прямолинейная, причём максимальные значения напряжений отличаются на 17%. С увеличением угла α эта разница возрастает.

Эпюры касательных напряжений τ_{yx}^0 и τ_{yx} вообще не имеют ничего общего. Нормальное напряжение σ_y^0 по всему сечению равно нулю, а максимальное значение нормального напряжения σ_y для исследуемого угла α составляет около 22% от максимального значения нормального напряжения σ_x .

С уменьшением угла α расхождение между решениями теории упругости и сопротивления материалов также уменьшается. Следовательно, методика сопротивления материалов пригодна лишь для малых углов.

§ 5.11. Действие сосредоточенной силы на границе полуплоскости

Этот случай плоской задачи теории упругости также представляет собой простое радиальное напряженное состояние и имеется когда:

1) Полупространство, ограниченное горизонтальной плоскостью, нагружено вертикальной нагрузкой, которая распределена равномерно по прямой (плоская деформация) (рис. 48,а). Например, нагрузка железнодорожной полосы на грунт.

2) Пластика больших размеров, ограниченная плоскостью одной стороной и нагруженная таким образом, что равнодействующая сил проходит вдоль срединной плоскости (обобщённое плоское напряжённое состояние) (рис. 48,б).

В обоих случаях напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ определяются одинаково.

Такие задачи будем называть задачами о действии сосредоточенной силы на границе полуплоскости.

Пусть к прямолинейному краю пластины, имеющей толщину, равную 1, приложена

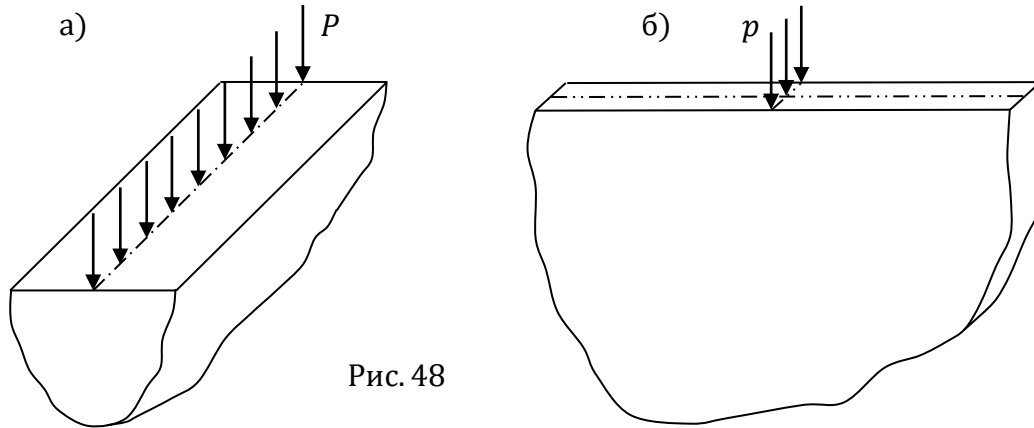


Рис. 48

сила P , направленная перпендикулярно к краю пластины и равномерно распределённая по его толщине (рис. 49).

Задачу о действии сосредоточенной силы на границе полуплоскости можно рассматривать как распространение случая нагружения бесконечного клина в вершине силой P (сжатие клина) в предположении, что угол раствора клина равен π , т.е. $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$. Следовательно, все формулы для определения напряжений в сечении клина, приведённые выше,

$$(5.9.2) - \left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{\cos \theta}{r}; \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \text{ и } (5.9.6) - \left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{yx} &= -\frac{2P}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \text{ будут справедливы и}$$

для определения напряжений в полуплоскости, но только нужно в них заменить α через $\frac{\pi}{2}$. При этом получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}; \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.11.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2Px^3}{\pi(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{2Pxy^2}{\pi(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{yx} &= -\frac{2Px^2y}{\pi(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.11.2)$$

(здесь $2\alpha + \sin 2\alpha = 2\frac{\pi}{2} + \sin 2\frac{\pi}{2} = \pi$)

Из рисунка 49 следует, что $\frac{r}{\cos \theta} = d$,

следовательно,

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}. \quad (5.11.3)$$

Таким образом, если провести окружность диаметром d так, чтобы она касалась прямолинейного края пластины в точке O приложения силы P , то в любой точке окружности нормальные радиальные напряжения σ_r будут одинаковы и вычисляются по формуле (5.11.3). Эти окружности называют кругами Буссинеска, по имени учёного, впервые решившего в 1885 году задачу о действии сосредоточенной силы на упругое

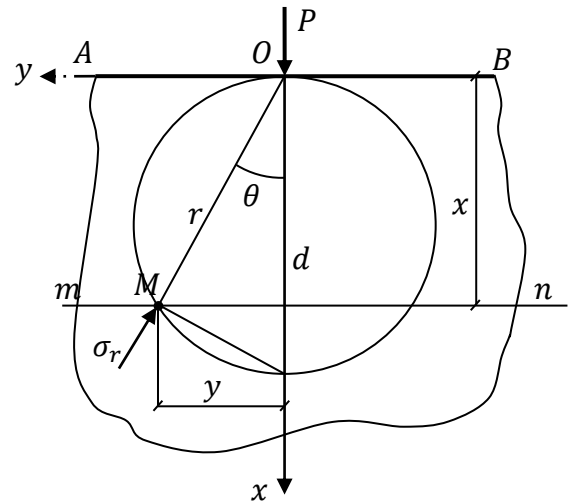


Рис. 49

полупространство (пространственная задача теории упругости). Задача о действии сосредоточенной силы на полуплоскость была решена Фламаном (1895). В литературе её именуют задачей Бессинеска— Фламана.

Рассмотрим эпюры напряжений σ_x , σ_y и τ_{yx} при заданном расстоянии x_0 от границы AB полуплоскости.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2Px^3}{\pi(x^2+y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{2Pxy^2}{\pi(x^2+y^2)^2}; \\ \tau_{yx} &= -\frac{2Px^2y}{\pi(x^2+y^2)^2}. \end{aligned} \right\}.$$

При $y = 0$ $\sigma_x = -\frac{2P}{\pi x_0} = -0.637 \frac{P}{x_0}$.

Распределение напряжений σ_x показано на рисунке 50, а. Оно достигает максимума под силой P и затухает при удалении от линии её действия как в ширину, так и в глубину.

Касательные напряжения τ_{xy} под силой равны нулю, на некотором расстоянии от линии её действия достигают максимума, а затем постепенно затухают. По мере углубления максимум смещается всё дальше от оси x (рис. 50, б). Так же как τ_{xy} , ведут себя и нормальные напряжения σ_y , достигающие максимального значения на том же расстоянии, но по глубине (рис. 50, в).

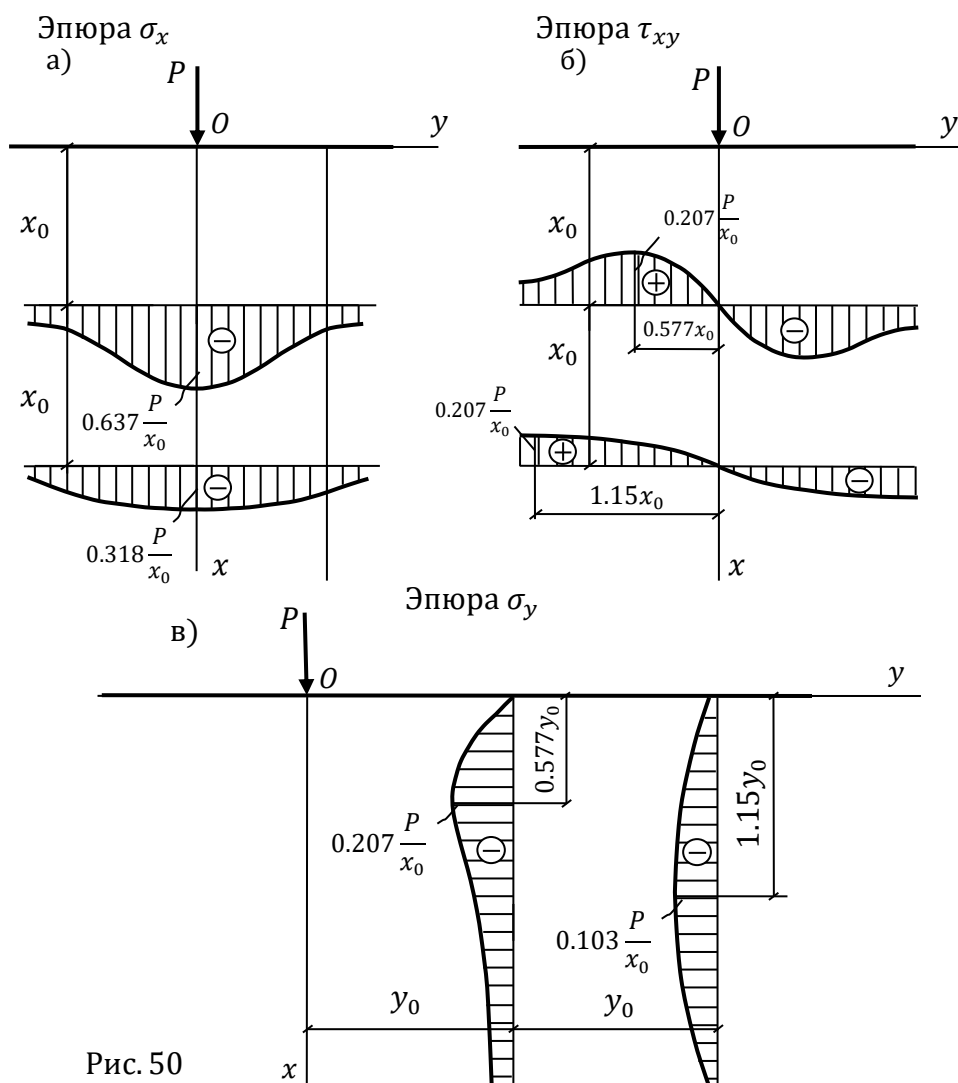


Рис. 50

Если положить $P = 1$, то графики, изображённые на рисунке 50, можно рассматривать как линии влияния соответствующих напряжений (σ_x , σ_y и τ_{xy}) для точки O при заданном x .

Линиями влияния называются графики, которые показывают, как изменяются некоторые физические величины (например, σ_x , σ_y и τ_{xy}) при перемещении единичной силы ($P = 1$) вдоль оси y .

В этом случае напряже- ние в точке O от действия нескольких сил будет равно сумме произведений этих сил на ординаты линии влияния под точками приложения этих сил.

Пусть на край полубес- конечной пластины действуют сосредоточенная сила P в точке A и равномерно распре- делённая нагрузка интенсив- ности q на участке BC (рис. 51). Напряжение σ_x в точке O_1 на расстоянии x от границы полуплоскости мож- но определить с помощью линии влияния напряжения σ_x , показанной на рисунке 51, а, следующим образом:

$$\sigma_x = P|\overline{ab}| + q\Omega,$$

где $\overline{ab}$ – ордината линии влияния σ_x под силой P , а Ω – заштрихованная площадь под линией влияния на участке BC приложения распределённой нагрузки q .

Выведем формулы для определения напряжений σ_x , σ_y и τ_{yx} в некоторой точке O_1 полуплоскости, отстоящей от края на расстояние x , от действия равномерно распределённой нагрузки интенсивности q на краю полуплоскости (рис. 51, б). Участок нагружения BC ограничивается углами θ_1 и θ_2 .

Если выделить элемент длины dy участка BC , то действующая элементарная нагрузка будет qdy . Найдём величину радиального напряжения $d\sigma_r$ в точке O_1 от нагрузки qdy .

Согласно (5.11.1) – $\sigma_r = -\frac{2P\cos\theta}{\pi r}$, имеем $d\sigma_r = -\frac{2qdy}{\pi r}\cos\theta$. Из рисунка 51, б следует,

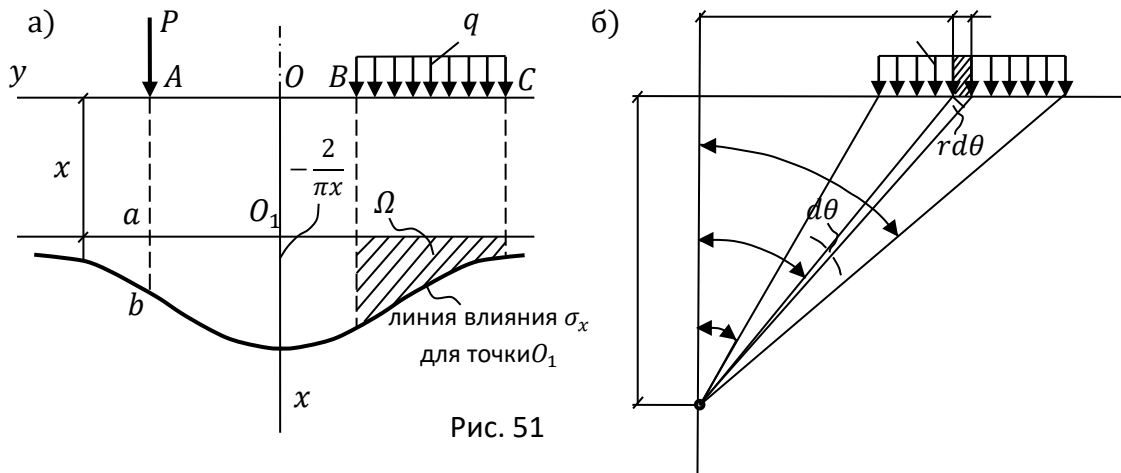


Рис. 51

что $r = \frac{x}{\cos\theta}$. После подстановки выражение для $d\sigma_r$, получим $d\sigma_r = -\frac{2q}{\pi x}\cos^2\theta dy$. Так как $dy = \frac{rd\theta}{\cos\theta} = \frac{xd\theta}{\cos^2\theta}$, то для $d\sigma_r$, имеем

$$d\sigma_r = -\frac{2q}{\pi x}\cos^2\theta \frac{xd\theta}{\cos^2\theta} = -\frac{2q}{\pi}d\theta.$$

Итак, мы получили, что

$$d\sigma_r = -\frac{2q}{\pi}d\theta. \quad (5.11.3)$$

Теперь перейдём к определению напряжений σ_x , σ_y и τ_{yx} , имея в виду, что по

$$\text{формулам (5.9.3) – } \left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2\theta + \sigma_\theta \sin^2\theta - 2\tau_{r\theta} \sin\theta \cos\theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2\theta + \sigma_\theta \cos^2\theta + 2\tau_{r\theta} \sin\theta \cos\theta; \\ \tau_{yx} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin\theta \cos\theta + \tau_{r\theta} (\cos^2\theta - \sin^2\theta). \end{aligned} \right\} \sigma_x = \sigma_r \cos^2\theta, \quad \sigma_y = \sigma_r \sin^2\theta,$$

$\tau_{yx} = \sigma_r \sin\theta \cos\theta$. Согласно этим формулам для случая радиального сжатия от нагрузки qdy , делаем соответствующие замены на $d\sigma_r$, $d\sigma_x$, $d\sigma_y$, $d\tau_{xy}$. Очевидно, что от всей

распределённой нагрузки интенсивности q , действующей на BC , напряжение σ_r в точке O_1 будет равно:

$$\sigma_r = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\sigma_r = -\frac{2q}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta.$$

Соответственно и напряжения σ_x , σ_y и τ_{yx} будут равны:

$$\sigma_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\sigma_r \cos^2 \theta, \quad \sigma_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\sigma_r \sin^2 \theta, \quad \tau_{xy} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\sigma_r \sin \theta \cos \theta \quad \text{или}$$

$$\sigma_x = -\frac{2q}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2 \theta d\theta, \quad \sigma_y = -\frac{2q}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta d\theta, \quad \tau_{xy} = -\frac{2q}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

и окончательно

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{q}{\pi} \left[(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \right]; \\ \sigma_y &= -\frac{q}{\pi} \left[(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{2} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \right]; \\ \tau_{xy} &= -\frac{q}{\pi} [\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1]. \end{aligned} \right\} \quad (5.11.4)$$

(Здесь были подсчитаны входящие в выражениях σ_x , σ_y и τ_{yx} интегралы:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{1}{2} \left[(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \right];$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{1}{2} \left[(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{2} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \right];$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{1}{2} (\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1).$$

Формулы (5.11.2) и (5.11.4) можно применить в инженерной практике для расчёта оснований фундаментов, с целью определения напряжения в толще грунта по горизонтальному и вертикальному сечениям.

В случае, если на край полубесконечной пластины действует сосредоточенная сила P , которая наклонена под углом β к оси x (рис. 52), то её нужно разложить на вертикальную и горизонтальную составляющие и определить напряжения от вертикальной и горизонтальной составляющих отдельно, а затем результаты сложить:

$$\sigma_r = \sigma'_r + \sigma''_r.$$

Напряжение σ'_r , в точке D на расстоянии r от точки приложения силы P , от вертикальной составляющей $P \cos \beta$ мы найдём по формуле (5.11.1) – $\sigma_r = -\frac{2P \cos \beta}{\pi r}$.

$$\sigma'_r = \frac{2P \cos \beta}{\pi r} \cos \theta$$

Для горизонтальной составляющей $P \sin \beta$ по формулам (5.8.2) – $\tan \theta_0 = \tan \beta \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$ и (5.8.3) – $k =$

$$2P \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{(2\alpha + \sin 2\alpha)^2} + \frac{\sin^2 \beta}{(2\alpha - \sin 2\alpha)^2}} \quad \text{находим } \theta_0 = \beta = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad k = \frac{2P}{\pi}.$$

Поэтому напряжение σ''_r в той же точке D , по формуле (5.8.1) – $\sigma_r = -\frac{k}{r} (\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0)$ будет

$$\sigma''_r = -\frac{2P \sin \beta}{\pi r} \sin \theta.$$

(Здесь были подсчитаны постоянные θ_0 и k : по формуле

(5.8.2) $\tan \theta_0 = \tan \beta \frac{\pi}{\pi}$, т.е. $\theta_0 = \beta$, и т.к. для составляющей $P \sin \beta$ угол

наклона $\beta = \frac{\pi}{2}$, то $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$; по формуле (5.8.3) $k = 2P \frac{\sin \beta}{2\alpha - \sin 2\alpha} = 2P \frac{1}{\pi} = \frac{2P}{\pi}$)

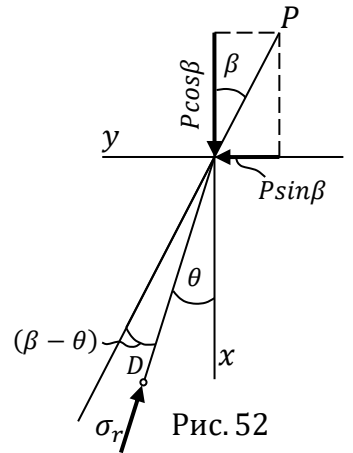


Рис. 52

Окончательно будем иметь

$$\sigma_r = \sigma_r' + \sigma_r'' = -\frac{2P\cos\beta}{\pi r}\cos\theta - \frac{2P\sin\beta}{\pi r}\sin\theta = -\frac{2P}{\pi r}(\cos\beta\cos\theta + \sin\beta\sin\theta) = -\frac{2P}{\pi r}\cos(\beta - \theta). \quad (5.11.5)$$

Следовательно, при действии сосредоточенной силы под углом β к вертикали нормальное радиальное напряжение σ_r может определяться по той же формуле, что и в случае действия вертикальной силы (5.11.1) — $\sigma_r = -\frac{2P\cos\theta}{\pi r}$, но угол следует отсчитывать не от вертикали (оси x), а от направления действия силы P (рис. 52).

§ 5.12. Действие двух равных и противоположно направленных по радиусу сил на круглый диск — задача Герца

Найдём напряжения, возникающие в круглом диске диаметром d от действия двух сил P , направленных по радиусу навстречу друг другу (рис. 53). Толщина диска равна единице и P есть интенсивность равномерно распределённых по толщине сосредоточенных сил. Принимаем, что внешняя поверхность диска свободна от напряжений.

Если допустить, что радиальные напряжения σ_r в диске определяются также, как и в случае действия сосредоточенной силы на полуплоскость, то в точке M на окружности по площадке перпендикулярной к радиусу r , будет действовать напряжение

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos\theta}{r},$$

а по площадке, перпендикулярной к радиусу r_1 в той же точке, напряжение

$$\sigma_{r_1} = -\frac{2P}{\pi} \frac{\cos\theta_1}{r_1}.$$

Так как радиусы r и r_1 взаимно перпендикулярны, то $\cos\theta = \frac{r}{d}$, а $\cos\theta_1 = \frac{r_1}{d}$, или

$$\frac{\cos\theta}{r} = \frac{\cos\theta_1}{r_1} = \frac{1}{d}.$$

Таким образом, напряжения в точке M по двум взаимно перпендикулярным площадкам будут равны между собой: $\sigma_r = \sigma_{r_1} = -\frac{2P}{\pi d}$.

Эти напряжения являются главными. Значит, если через точку M на контуре диска провести любую другую площадку, перпендикулярную к плоскости диска, то она будет главной ($\sigma_\varphi = \sigma_r \cos^2 \varphi + \sigma_r \sin^2 \varphi = \sigma_r, \tau_\varphi = \frac{\sigma_r - \sigma_r}{2} \sin 2\varphi = 0$), и на ней будет действовать такое же нормальное напряжение. Таким образом, чтобы создать предполагаемые два простых радиальных распределения напряжений, нужно по

окружности диска приложить нормальные сжимающие усилия интенсивностью $\frac{2P}{\pi d}$.

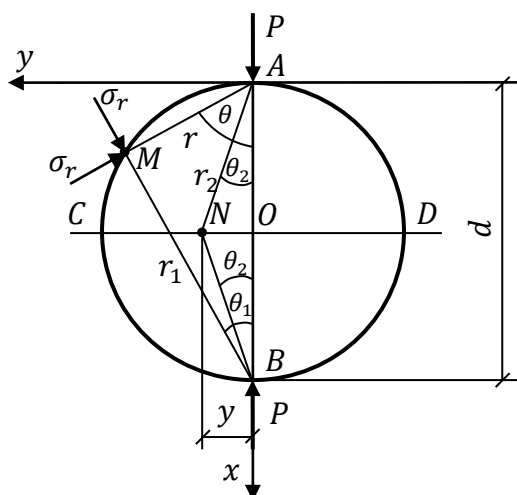


Рис. 53

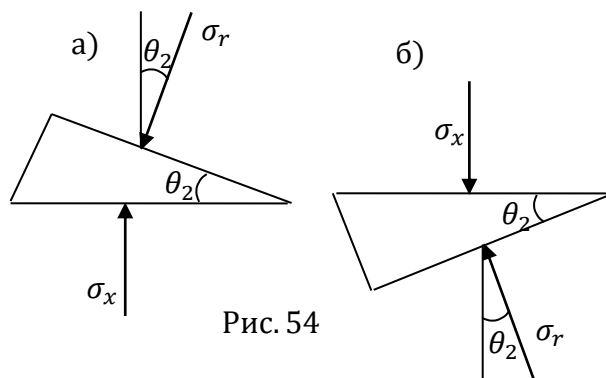


Рис. 54

Если граница диска свободна от внешних усилий, то напряжения в любой точке получается путём наложения однородного растяжения в плоскости диска величиной $\frac{2P}{\pi d}$ на два простых радиальных распределения напряжений. Рассмотрим напряжения в горизонтальном диаметрально́м сечении диска в точке N . Из условия симметрии можно сделать вывод, что в этой плоскости не будет касательных напряжений. Нормальное напряжение, вызываемые двумя равными сжимающими усилиями, равно

$$\sigma'_x = -2\sigma_r \cos^2 \theta_2$$

(от одних равных сжимающих усилий (рис. 54 а, б) $-\sigma_r d A \cos \theta_2 \cos \theta_2 - \sigma_x d A = 0 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta_2$, а от двух $\sigma'_x = -2\sigma_r \cos^2 \theta_2$).

или с учётом, что $\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta_2}{\pi r_2}$

$$\sigma'_x = -\frac{4P \cos^3 \theta_2}{\pi r_2},$$

где r_2 — расстояние AN , и θ_2 — угол между AN и вертикальным диаметром. Используя тот факт, что из ΔAON

$$\cos \theta_2 = \frac{d/2}{\sqrt{y^2 + (d/2)^2}} = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4y^2}}, \text{ и } r_2 = \sqrt{y^2 + (d/2)^2} = \frac{\sqrt{d^2 + 4y^2}}{2},$$

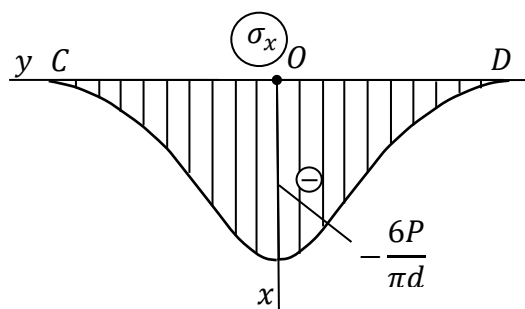


Рис. 55

для сжимающего нормального напряжения будем иметь

$$\sigma'_x = -\frac{8P}{\pi} \frac{d^3}{(d^2 + 4y^2)^2}. \quad (\text{а})$$

Если к сжимающему напряжению σ'_x добавить равномерно распределённые растягивающие напряжения

$$\sigma''_x = \frac{2P}{\pi d}, \quad (\text{б})$$

то окончательно для напряжения σ_x получим

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x = -\frac{2P}{\pi d} \left[\frac{4d^4}{(d^2 + 4y^2)^2} - 1 \right]. \quad (6.9.1)$$

В точке O при $y = 0$ σ_x достигает максимального значения, равного $-\frac{6P}{\pi d}$, а в точках C и D при $y = \pm \frac{d}{2}$ напряжение $\sigma_x = 0$. Эпюра напряжений σ_x в диаметрально́м сечении диска показана на рисунке 55.

Результаты решения задачи о распределении напряжений в круглом диске, подвергнутом действию двух радиальных сил, могут быть использованы для расчёта на прочность цилиндрических катков. Цилиндрические катки при нагружении их равномерно распределёнными погонными усилиями по образующей находятся в условиях, близких к тем, которые рассмотрены в задаче диска.

§ 5.13. Понятие о расчёте цилиндрических катков

Расчёт цилиндрических катков представляет собой задачу о сжатии тел, соприкасающихся по поверхности конечных размеров. Такая задача относится к разряду контактных задач. Она встречается при расчёте опорных частей мостов, эстакад, шлюзовых

ворот, при изучении местных напряжений в колёсах подвижного состава, в головках железнодорожных рельсов.

Рассмотрим два параллельных цилиндра, соприкасающихся по образующей и сжимаемых равномерно распределёнными по длине силами, равнодействующие которых направлены по оси x (рис. 56).

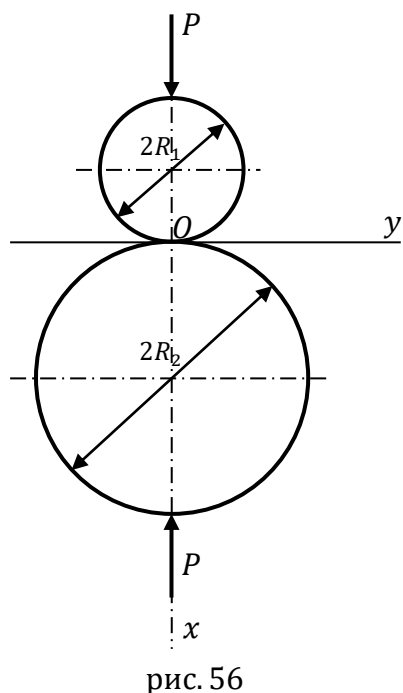


рис. 56

Вследствие деформирования под действием этих сил соприкосновение цилиндров произойдёт по некоторой поверхности в виде узкой полосы, называемой поверхностью давления. Её ширина всегда мала по сравнению с размерами цилиндров, поэтому рассматриваемую задачу можно решать, как плоскую задачу теории упругости. Вырежем у одного из цилиндров диск толщиной, равной единице. Если принять в расчёт действительную геометрическую форму соприкасающихся тел, то определение напряжений и деформаций в области контакта окажется невозможным. Поэтому ввиду малости ширины поверхности контакта по сравнению с диаметрами цилиндров соприкасающиеся тела заменяют двумя упругими полуплоскостями. Силы же давления, возникающие на поверхности контакта, считают приложенными к каждой полуплоскости. Вся трудность дальнейшего решения заключается в определении закона распределения давления P по линии контакта. Немецкий учёный Г.Герц в 1883 году показал, что это распределение

вдоль оси y можно принять по закону полуэллипса.

Согласно рисунку 57,

$$\frac{p^2}{p_0^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a)$$

где p_0 – максимальная ордината на эпюре давления посередине полосы давления; b – половина ширины полосы давления.

Определим нормальное напряжение σ_x в произвольной точке A по оси x . Напряжение, создаваемое элементарной силой, согласно первой формуле (5.11.2) – $\sigma_x = -\frac{2Px^3}{\pi(x^2+y^2)^2}$ – составляет

$$d\sigma_x = -\frac{2}{\pi} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2} p dy,$$

а напряжения от давления по всей площади контакта

$$\sigma_x = -\frac{2x^3}{\pi} \int_{-b}^{+b} \frac{p dy}{(x^2+y^2)^2}.$$

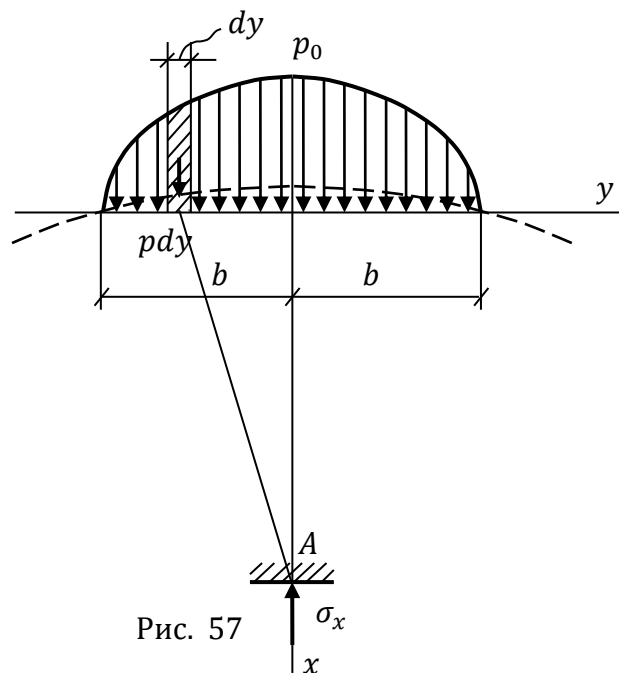


Рис. 57

Подставим в это выражение интенсивность давления из формулы (а) $-\frac{p^2}{p_0^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{p^2}{p_0^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow p^2 = p_0^2 \left(\frac{b^2 - y^2}{b^2} \right) \Rightarrow p = \frac{p_0}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ и выполним интегрирование (интеграла типа Коши):

$$\sigma_x = -\frac{2x^3}{\pi} \frac{p_0}{b} \int_{-b}^{+b} \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{p_0 b}{\sqrt{(x^2 + b^2)}}.$$

Если цилиндры сжимаются силой P , приходящейся на единицу длины образующей, то

$$P = \int_{-b}^{+b} p dy.$$

Подставляя сюда p из формулы (а) $-p = \frac{p_0}{b} \sqrt{b^2 - y^2}$ и выполняя интегрирование находим

$$P = \frac{p_0 \pi b}{2},$$

откуда

$$p_0 = \frac{2P}{\pi b}.$$

Тогда выражение напряжения σ_x в точках на оси x принимает вид

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi \sqrt{(x^2 + b^2)}}. \quad (5.13.1)$$

При $x = 0$ это напряжение достигает максимального абсолютного значения $\max |\sigma_x| = \frac{2P}{\pi b}$. Для определения ширины полосы контакта необходимо рассмотреть деформации в области контакта. Приводим результаты решения для случая, когда материал обоих цилиндров одинаков и коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$;

$$b = 1.52 \sqrt{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

где R_1 и R_2 – радиусы соприкасающихся цилиндров; E – модуль упругости материалов цилиндров.

Материал соприкасающихся тел в центре площади контакта находится в условиях объёмного напряжённого состояния и поэтому может безопасно работать при больших сжимающих напряжениях. Так, например, сталь железнодорожного рельса выдерживает давление порядка $3500 \div 4000$ МПа. При этом на поверхности контакта расчётное напряжение близко к пределу текучести, а внутри соприкасающихся тел даже превышает его.

§ 5.14. Понятие о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство

Упругим полупространством называется часть пространства, ограниченная плоскостью. Задача о действии силы P , приложенной по нормали к этой плоскости (рис. 58), относится к пространственной задаче теории упругости и является более сложной, чем задача о действии силы на границе полуплоскости (смотрите § 5.11 данной главы). Её решение удобно строить в цилиндрической системе координат. В этой системе любая точка пространства определяется тремя координатами r, θ, z . Задача является

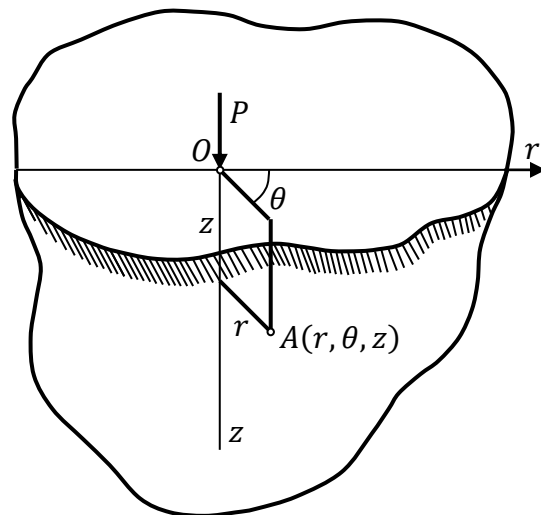


Рис. 58

осесимметричной, поэтому все сечения, перпендикулярные плоскости rOz , находятся в одинаковых условиях и все функции не зависят от полярного угла θ .

Решение рассматриваемой задачи принадлежит Ж. Буссинеску. Интегрирование системы дифференциальных уравнений равновесия и уравнений неразрывности Бельтрами-Митчелла в цилиндрической системе координат даёт следующий результат:

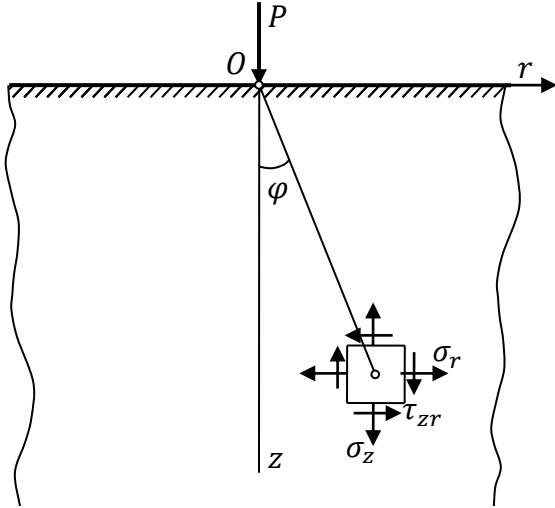


Рис. 59

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{P}{2\pi R^2} \left[(1-2\nu) \frac{R}{R+z} - \frac{3r^2 z}{R^3} \right]; \\ \sigma_\theta &= -\frac{P}{2\pi R^2} \left[(1-2\nu) \frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right]; \\ \sigma_z &= -\frac{3P}{2\pi R^2} \frac{z^3}{R^3}; \\ \tau_{rz} &= -\frac{3P}{2\pi R^2} \frac{rz^3}{R^3}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Здесь по-прежнему ν коэффициент Пуассона, а $R = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Напряжённое состояние, описываемое формулами (а), изображено на рисунке 59. Из формул следует, что на любой прямой $\frac{z}{r} = \text{const}$ напряжения обратно пропорциональны квадрату расстояния от начала координат O .

Решение, как и в плоской задаче, имеет особенность в начале координат, поэтому для

включения в него силы P произведена его замена статически эквивалентной нагрузкой, которая распределена по сфере малого радиуса ρ , очерченной из начала координат O (смотрите рисунок 44). На основании принципа Сен-Венана такая замена скажется на распределении напряжений только вблизи начала координат.

На горизонтальной площадке в произвольной точке M (рис. 60) отношение напряжений

$$\frac{\tau_{rz}}{\sigma_z} = \frac{r}{z} = tg\varphi$$

и, следовательно, направление полного напряжения p на этой площадке проходит через начало координат O (рис. 58). Величина этого напряжения

$$p = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{rz}^2} = \frac{3Pz^2}{2\pi R^5} \sqrt{r^2 + z^2} = \frac{3Pz^2}{2\pi R^4} = \frac{3P}{2\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{R^2}.$$

Если начертить сферу диаметром d , проходящую через точку M и касающуюся границы плоскости в начале координат (рис. 60), то

$$\frac{\cos \varphi}{R} = \frac{1}{d}$$

и полное напряжение

$$p = \frac{3P}{2\pi d^2}.$$

Таким образом, во всех точках рассматриваемой сферы полное напряжение на горизонтальных площадках постоянно.

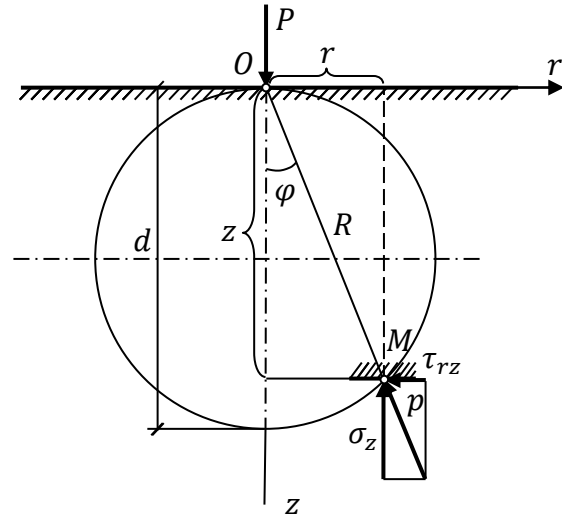


Рис. 60

Для определения перемещений в полупространстве необходимо напряжения (а) подставить в формулы закона Гука, выраженные в цилиндрической системе координат, и найти деформации. Затем следует проинтегрировать геометрические соотношения Коши в цилиндрической системе координат, в результате чего получим следующие составляющие перемещений:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{P(1+\nu)r}{2\pi ER^2} \left[(1-2\nu) \frac{R}{R+z} - \frac{z}{R} \right]; \\ v &= 0; \\ w &= \frac{P(1+\nu)}{2\pi ER} \left[2(1-2\nu) - \frac{z^2}{R^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где u – радиальная составляющая перемещения; v – окружная, а w – перемещение вдоль оси z .

Из формул (6) следует, что на любой прямой $\frac{z}{r} = \text{const}$ перемещения обратно пропорциональны расстоянию от начала координат и при $R \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

Наибольший интерес представляют вертикальные перемещения точек на границе плоскости (при $z = 0$)

$$w|_{z=0} = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi Er}.$$

Эта формула справедлива во всех точках, за исключением малой области у начала координат.

Решение, полученное для сосредоточенной силы, можно распространить на нагрузку, распределённую по некоторой площади граничной плоскости.

Вопросы для самопроверки и задачи

1. Как записываются уравнения равновесия плоской задачи в полярных координатах?

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \Theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.1)$$

2. Как в полярных координатах выражаются деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$ через перемещения u и v ?

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.2)$$

3. Каков вид уравнений закона Гука в полярных координатах?

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r), \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{r\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.7)$$

4. Какова последовательность решения плоской задачи в перемещениях?

Решение сводится к отысканию таких функций перемещений $u(r, \theta), v(r, \theta)$, которые бы удовлетворяли уравнениям равновесия, записанным в перемещениях (5.2.10) –

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{r \partial \theta \partial r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{r \partial \theta \partial r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1-\nu}{2} \frac{v}{r^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ и условиям на границе тела}$$

$$(5.2.11) - \left. \begin{aligned} R_\nu &= \lambda \theta l + \nu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial r} l + \frac{\partial v}{\partial r} m \right) \\ \Theta_\nu &= \lambda \theta m + \nu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} l + \frac{\partial v}{\partial \theta} m \right) \end{aligned} \right\}, \text{ где } -\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta. \text{ По найденным перемеще-}$$

ниям из геометрических соотношений Коши (5.2.2) –
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \text{ определяют}$$

составляющие деформации, а затем из формул закона Гука в обратной форме (5.2.9) –

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \nu \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \text{ составляющие напряжений.}$$

5. Как можно выразить напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ через функцию напряжений $\varphi(r, \theta)$?

$$\text{Через формулы (5.2.4) – } \left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\}$$

6. Как записывается основное уравнение плоской задачи (бигармоническое уравнение) в полярных координатах?

$$\text{Через формулы (5.2.3) – } \nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0.$$

или в развёрнутом виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

7. Какова последовательность решения плоской задачи в напряжениях с помощью функций напряжения?

Решается основное уравнение плоской задачи – уравнение неразрывности деформации (5.3.1) – $\frac{d^4 \varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} = 0$. Это уравнение с переменными коэффициентами приводится посредством ввода обозначения $r = e^t$ или $t = \ln r$, к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

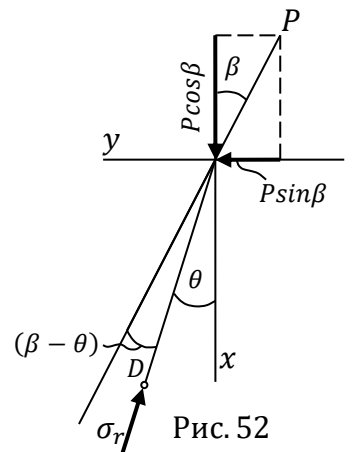
$$\frac{d^4 \varphi}{dt^4} + 4 \frac{d^3 \varphi}{dt^3} - 4 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0$$

и решается. Функция напряжения имеет вид

$$\varphi = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + D, \quad (5.3.2')$$

а напряжения, определённые по ней

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + 2B \ln r + B + 2C; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + 2B \ln r + 3B + 2C; \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.3')$$



8. Какие напряжения равны нулю в осесимметричных задачах?

Касательные напряжения $\tau_{rz}, \tau_{\theta z}$, и касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ равны нулю, т.е.,

$$\tau_{r\theta} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0.$$

При обобщённом плоском напряжённом состоянии также равно нулю $\sigma_z = 0$:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = \sigma_z = 0;$$

При плоской деформации (задача Ламе) $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \neq 0$:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0.$$

9. Получите уравнения равновесия в перемещениях для осесимметричной задачи.

В уравнениях равновесия (5.2.10) –

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{r \partial \theta \partial r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} &= 0, \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{r \partial \theta \partial r} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{3-\nu}{2r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1-\nu}{2r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1-\nu}{2} \frac{v}{r^2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

все члены, зависящие от θ и содержащие составляющую перемещения v , отбрасываются и остаётся только одно обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0.$$

10. Получите уравнение совместности деформаций, выраженное через функцию напряжения φ , в случае осесимметричной задачи.

Для получения выражения функции напряжения $\varphi(r, \theta)$ пользуемся выражением неразрывности деформации (5.2.6) – $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0$, приравняв в нём нулю производные от переменной θ :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

11. Определите, во сколько раз внутреннее давление в толстостенной трубе (p_B) должно быть больше наружного давления (p_H), чтобы при $b = 2a$ тангенциальные напряжения всюду были положительными.

Условием того, что при $r = a$ $\sigma_\theta > 0$, является неравенство $\frac{p_B}{p_H} > \frac{2b^2}{b^2 + a^2}$.

При $b = 2a$ $\frac{p_B}{p_H} > \frac{2 \cdot 4a^2}{4a^2 + a^2} = \frac{8}{5}$

откуда

$$p_B > \frac{8}{5} p_H.$$

Для того чтобы у верхней поверхности при $r = b$ тангенциальные напряжения σ_θ были положительными, необходимо, чтобы было $\frac{p_B}{p_H} > \frac{a^2 + b^2}{2a^2}$.

При $b = 2a$ $\frac{p_B}{p_H} > \frac{a^2 + b^2}{2a^2} = \frac{4a^2 + a^2}{2a^2} = \frac{5}{2}$

откуда

$$p_B > \frac{5}{2} p_H,$$

т.е. напряжения σ_θ будут всюду положительными, если $p_B > 2,5 p_H$.

(формулы $\frac{p_B}{p_H} > \frac{2b^2}{b^2 + a^2}$ и $\frac{p_B}{p_H} > \frac{a^2 + b^2}{2a^2}$ получены из неравенства $\sigma_\theta > 0$, где по формуле

(5.4.1) – $\sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{(p_2 - p_1)}{r^2} + \frac{a^2 p_1 - b^2 p_2}{b^2 - a^2}$, внесением в неё сначала $r = a$, а затем $r = b$).

12. Чем отличаются напряжённые состояния двух одинаковых дисков, к наружному контуру которых приложены одинаковые равномерно распределённые растягивающие усилия, если один из них имеет центральное отверстие, а другой не имеет?

Расчётные формулы напряжений в задаче Кирша имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta; \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta; \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (6.3.6)$$

при $r = a$ $\sigma_r = 0$, $\tau_{r\theta} = 0$, а $\sigma_\theta = \sigma - 2\sigma \cos 2\theta$.

В точках m, n (рис. 41, в) $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ и $\sigma_\theta = 3\sigma$. Таким образом σ_θ около малого отверстия в три раза больше, чем σ_x в диске без отверстия, когда оба они вырезаны из полосы нагруженной равномерно распределёнными растягивающими усилиями σ .

13. Подтверждается ли гипотеза плоских сечений при точном решении задачи о чистом изгибе бруса большой кривизны?

Допущение о том, что сечения после деформации остаются плоскими, подтверждается точным решением методами теории упругости.

14. Подтверждается ли гипотеза о ненадавливании волокон друг на друга при чистом изгибе бруса большой кривизны?

Точное решение этой задачи показывает, что волокна при изгибе взаимодействуют друг с другом в радиальном направлении. Напряжения σ_r увеличиваются по абсолютной величине от крайних волокон к середине и достигают максимального значения для волокон, расположенных несколько ближе к центру кривизны, чем нейтральный слой. Максимальное σ_r составляют 19,2% от σ_θ^{max} , однако они возникают в точках, где напряжения σ_θ близки к нулю, и, следовательно, не имеют значения при оценке прочности. Поэтому решение сопротивления материалов вполне приемлемо.

15. Проверьте удовлетворяет ли основному уравнению плоской задачи (5.2.6) – $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0$, функция напряжения $\varphi = kr\theta \sin \theta$.

Для вычисления второго множителя определяем входящие в него производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = k(r\theta \sin \theta)'_r = k(\theta \sin \theta)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{k}{r} (\theta \sin \theta)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = k(\theta \sin \theta)'_r = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = kr(\theta \sin \theta)'_\theta = kr(\sin \theta + \theta \cos \theta)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = kr(\cos \theta + \cos \theta - \theta \sin \theta) = kr(2\cos \theta - \theta \sin \theta)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r^2} kr(2\cos \theta - \theta \sin \theta) = \frac{k}{r} (2\cos \theta - \theta \sin \theta)$$

И суммируем их по второму множителю

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 + \frac{k}{r} (\theta \sin \theta) + \frac{k}{r} (2\cos \theta - \theta \sin \theta) = \frac{k}{r} 2\cos \theta = \frac{2k}{r} \cos \theta$$

Далее берём производные от полученного выражения второго множителя $\frac{2k}{r} \cos \theta$.

$$\left(\frac{2k}{r} \cos \theta \right)'_r = -\frac{2k}{r^2} \cos \theta$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{2k}{r}\cos\theta\right)''_r &= \left(-\frac{2k}{r^2}\cos\theta\right)'_r = -2k\cos\theta\frac{-2r}{r^4} = \frac{4k}{r^3}\cos\theta \\ \frac{1}{r}\left(-2\cos\theta\frac{k}{r^2}\right) &= -\frac{2k}{r^3}\cos\theta \\ \left(\frac{2k}{r}\cos\theta\right)'_\theta &= -\frac{2k}{r}\sin\theta \\ \left(\frac{2k}{r}\cos\theta\right)''_\theta &= \left(-\frac{2k}{r}\sin\theta\right)'_\theta = -\frac{2k}{r}\cos\theta \\ \frac{1}{r^2}\left(-\frac{2k}{r}\cos\theta\right) &= -\frac{2k}{r^3}\cos\theta\end{aligned}$$

И суммируем их по первому множителю

$$\frac{4k}{r^3}\cos\theta - \frac{2k}{r^3}\cos\theta - \frac{2k}{r^3}\cos\theta = 0, \text{ получаем}$$

$$0 = 0$$

Значит функция напряжения $\varphi = kr\theta\sin\theta$ удовлетворяет основному уравнению плоской задачи.

16. Определите максимальную величину давления в основании клина высотой $H = 1\text{м}$, с углом при вершине $2\alpha = 30^\circ$ и нагруженного силой $P = 10\text{кН/м}$ (погонная нагрузка по единичной толщине).

$$\sigma_{x_0}^{max} = -\frac{Px_0^3}{\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)x_0^4} = -\frac{10 \cdot 1^3}{(0.262 + 0.25) \cdot 1^4} = -19,5 \text{ кПа}$$

Ответ. $\sigma_{max} = -19.5 \text{ кПа}$.

17. Проверьте, удовлетворяет ли функция вида $\varphi = A\theta + B\sin\theta$ основному уравнению плоской задачи и запишите выражения для напряжений σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ для заданной функции φ .

Все производные по переменной r будут равняться нулю, т.к. в $\varphi = A\theta + B\sin 2\theta$ переменная r не входит.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} &= A + 2B\cos 2\theta \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} &= -4B\sin 2\theta\end{aligned}$$

Внесём полученное выражение в уравнение $-\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right) = 0$ получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(-\frac{4B}{r^2}\sin 2\theta\right) = 0$$

берём производные от полученного выражения второго множителя $-\frac{4B}{r^2}\sin 2\theta$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{4B}{r^2}\sin 2\theta\right)'_r &= \frac{8B}{r^3}\sin 2\theta \\ \left(-\frac{4B}{r^2}\sin 2\theta\right)''_r &= \left(\frac{8B}{r^3}\sin 2\theta\right)'_r = 8B\sin 2\theta\frac{-3r^2}{r^6} = -\frac{24B}{r^4}\sin 2\theta \\ \frac{1}{r}\left(-\frac{4B}{r^2}\sin 2\theta\right)'_r &= \frac{1}{r}\left(\frac{8B}{r^3}\sin 2\theta\right) = \frac{8B}{r^4}\sin 2\theta \\ \left(-\frac{4B}{r^2}\sin 2\theta\right)'_\theta &= -\frac{8B}{r^2}\cos 2\theta \\ \left(-\frac{4B}{r^2}\sin 2\theta\right)''_\theta &= \left(-\frac{8B}{r^2}\cos 2\theta\right)'_\theta = \frac{16B}{r^2}\sin 2\theta \\ \frac{1}{r^2}\left(\frac{16B}{r^2}\sin 2\theta\right) &= \frac{16B}{r^4}\sin 2\theta\end{aligned}$$

И суммируем их по первому множителю

$$-\frac{24B}{r^4} \sin 2\theta + \frac{8B}{r^4} \sin 2\theta + \frac{16B}{r^4} \sin 2\theta = 0, \text{ получаем} \\ 0 = 0$$

Значит функция напряжения $\varphi = A + B \sin 2\theta$ удовлетворяет основному уравнению плоской задачи.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \text{ для искоемых}$$

напряжений, по заданной функции напряжения $\varphi = A\theta + B \sin 2\theta$, получаем выражения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} 0 + \frac{1}{r^2} (-4B \sin 2\theta) = -\frac{4B}{r^2} \sin 2\theta; \\ \sigma_\theta &= 0; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} (A + 2B \cos 2\theta) \right] = \frac{1}{r^2} (A + 2B \cos 2\theta). \end{aligned} \right\} \text{ или}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4B}{r^2} \sin 2\theta; \\ \sigma_\theta &= 0; \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} (A + 2B \cos 2\theta). \end{aligned} \right\}$$

18. Чему равны нормальные напряжения σ_x в точках O , A , B в сечении клина на расстоянии 1 м от вершины. Если угол при вершине клина равен 30° , а нагрузка $P = 10$ кН/м действует под углом 45° к вертикали (рис. 43').

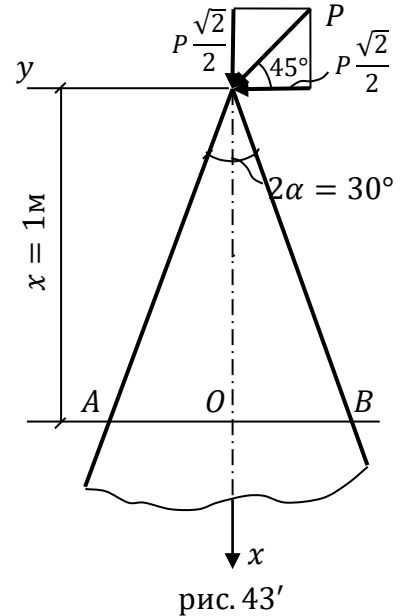


рис. 43'

$$\sigma_x = \sigma'_x + \sigma''_x = -\frac{2 \cdot P \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2 \cdot P \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2};$$

где $-\sigma'_x = -\frac{2 \cdot P \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\alpha + \sin 2\alpha} \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}$ от сжатия клина силой $P \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sigma''_x = -\frac{2 \cdot P \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\alpha - \sin 2\alpha} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$ от изгиба клина силой $P \frac{\sqrt{2}}{2}$

После подстановки значения $P = 10$ кН/м, $2\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $x = 1$, будем иметь:

$$\sigma'_x = -\frac{2 \cdot P \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\alpha + \sin 2\alpha} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{10 \cdot \sqrt{2}}{0.524 + 0.5} \cdot \frac{1^3}{(1^2 + y^2)^2} = -\frac{14.14}{0.524 + 0.5} \cdot \frac{1^3}{(1^2 + y^2)^2} = -13.816 \cdot \frac{1^3}{1^2 + 2y^2 + y^4}$$

$$\sigma''_x = -\frac{2 \cdot P \frac{\sqrt{2}}{2}}{2\alpha - \sin 2\alpha} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{14.14}{0.524 - 0.5} \cdot \frac{1^2 y}{(1^2 + y^2)^2} = -599.274 \cdot \frac{1^2 y}{1^4 + 2y^2 + y^4}$$

Для точки A , т.е. при $y = tg \frac{\pi}{12}$

$$\frac{1^2}{1^4 + 2y^2 + y^4} = \frac{1}{1^4 + 2tg^2 \frac{\pi}{12} + tg^4 \frac{\pi}{12}} = \frac{1}{1 + 2 \cdot 0.268^2 + 0.268^4} = \frac{1}{1 + 2 \cdot 0.0718 + 0.005155} = \frac{1}{1 + 0.143594 + 0.005155} = \frac{1}{1.148748} = 0.8705.$$

$$\frac{1^2 y}{1^4 + 2y^2 + y^4} = \frac{tg \frac{\pi}{12}}{1^4 + 2tg^2 \frac{\pi}{12} + tg^4 \frac{\pi}{12}} = \frac{0.268}{1.148748} = 0.233$$

$$\sigma_x = -13.816 \cdot 0.8705 - 599.274 \cdot 0.233 = -12.027 - 139.57 = -151.594 \approx -152 \text{ кПа}$$

Для точки B , т.е. при $y = tg \left(-\frac{\pi}{12} \right) = -tg \frac{\pi}{12}$ изменится знак выражения

$$\frac{1^2 y}{1^4 + 2y^2 + y^4} = \frac{-\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1^4 + 2\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{12}} = \frac{-0.268}{1.148748} = -0.233$$

$$\sigma_x = -13.816 \cdot 0.8705 + 599.274 \cdot 0.233 = -12.027 + 139.57 = 127.543 \approx 128 \text{ кПа}$$

Для точки O , т.е. при $y = 0$,

$$\frac{1^2}{1^4 + 2y^2 + y^4} = 1$$

$$\frac{1^2 y}{1^4 + 2y^2 + y^4} = 0$$

$$\sigma_x = -13.816 \approx -14 \text{ кПа}$$

Ответ: Для O $\sigma_x = -14 \text{ кПа}$, для A $\sigma_x = -152 \text{ кПа}$, для B $\sigma_x = 128 \text{ кПа}$.

19. Что такое круги Буссинеска, каким свойством они обладают?

Окружность диаметром d , которая касается прямолинейного края пластины в точке O приложения силы P .

В любой точке этой окружности нормальные радиальные напряжения σ_r одинаковы и вычисляются по формуле (6.8.3) — $\sigma_r = -\frac{2P}{\pi d}$.

20. Задача. Определите величину напряжения σ_x в точке O_1 полуплоскости от двух сил, соответственно равных 100 кН/м и 200 кН/м (рис. 51').

Ординату линии влияния σ_x для точки O_1 берём из рис. 51, приняв $P = 1$ и $x_0 = 2$ м и она будет равна 0.3185 (рис. 51').

Для вычисления второй ординаты пользуемся первой формулой (6.8.2) — $\sigma_x = -\frac{2Px^3}{\pi(x^2+y^2)^2}$; и вносим в неё $P = 1 \text{ кН/м}$, $x = 2$ м и $y = 3$ м

$$-\frac{2 \cdot 1 \cdot 2^3}{\pi(2^2+3^2)^2} = -\frac{16}{\pi(4+9)^2} = -\frac{16}{530.93} = -0.0301365;$$

Умножив эти ординаты на соответствующие значения сил $P_1 = 100 \text{ кН/м}$ и $P_2 = 200 \text{ кН/м}$, получим значение напряжения σ_x в точке O_1 :

$$\sigma_x = -0.3185 \cdot 100 - 0.0301365 \cdot 200 = -31.85 - 6.026 = -37.876 \text{ кПа}.$$

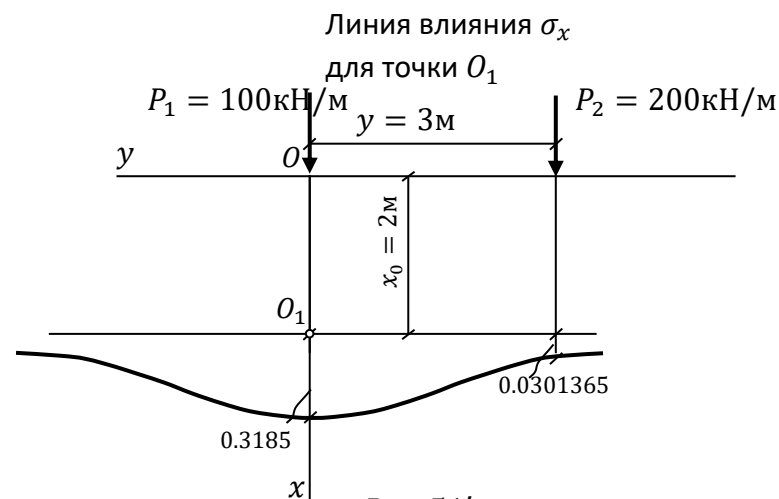
21. Задача. Вычислите напряжения σ_x в точке D (рис. 52) с координатами $x_0 = 1$ м, $y_0 = 0.575$ м. Внешняя нагрузка $P = 100 \text{ кН/м}$, действующая на полуплоскость, наклонена к вертикали под углом $\beta = 45^\circ$.

Сначала вычисляем радиальное напряжение σ_r по формуле (6.8.5) — $\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r} \cos(\beta - \theta)$; где $\beta = 45^\circ$, а $\operatorname{tg} \theta = \frac{0.575}{1}$, откуда $\theta = 30^\circ$.

После внесения в формулу $P = \frac{100 \text{ кН}}{\text{м}}$, $r = \sqrt{1^2 + 0.575^2} = \sqrt{1 + 0.330625} = \sqrt{1.330625} = 1.15353$, $\beta - \theta = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, получим

$$\sigma_r = -\frac{2 \cdot 100}{\pi \cdot 1.15353} \cos 15^\circ = -\frac{200}{3.624} \cdot 0.966 = -53.311$$

Затем вычисляем σ_x по формуле $\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \theta$



$$\sigma_x = -53.311 \cdot \cos^2 30 = -53.311 \cdot 0.866^2 = -53.311 \cdot 0.75 = -39.96 \text{ кПа}$$

22. *Задача.* Определите напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} в точке O_1 (рис. 51, б) на расстоянии $x = 1$ м от края полуплоскости в случае действия равномерно распределённой нагрузки интенсивностью $q = 10$ кПа, если $\theta_1 = -45^\circ$, а $\theta_2 = 45^\circ$.

Для их определения имеются формулы (6.8.4) –

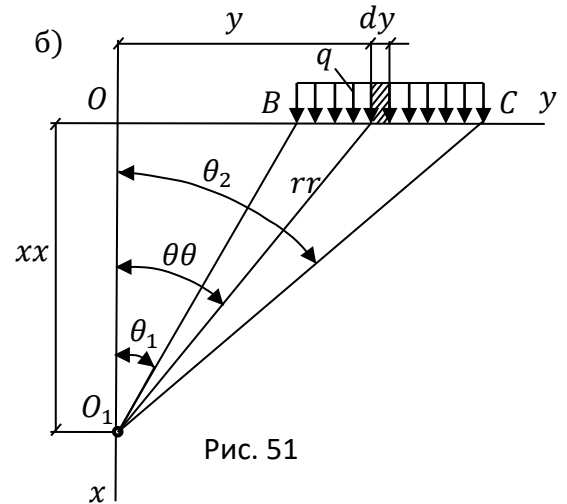
$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{q}{\pi} \left[(\theta_2 - \theta_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \right]; \\ \sigma_y &= -\frac{q}{\pi} \left[(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{2} (\sin 2\theta_2 - \sin 2\theta_1) \right]; \\ \tau_{xy} &= -\frac{q}{\pi} [\sin^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_1]. \end{aligned} \right\}$$

внеся в них $q = 10$ кПа, $\theta_1 = -45^\circ$, $\theta_2 = 45^\circ$, вычислим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{10}{\pi} \left\{ [45^\circ - (-45^\circ)] + \frac{1}{2} [\sin(2 \cdot 45^\circ) - \sin 2(-45^\circ)] \right\}; \\ \sigma_y &= -\frac{10}{\pi} \left\{ [45^\circ - (-45^\circ)] - \frac{1}{2} [\sin(2 \cdot 45^\circ) - \sin 2(-45^\circ)] \right\}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{10}{\pi} [\sin^2 45^\circ - \sin^2(-45^\circ)]. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{10}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (1 + 1) \right]; \\ \Rightarrow \sigma_y &= -\frac{10}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} (1 + 1) \right]; \\ \tau_{xy} &= -\frac{10}{\pi} (0.5 - 0.5). \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_x &= -3.1831 \left[1.5708 + \frac{1}{2} (1 + 1) \right]; \\ \sigma_y &= -3.1831 \left[1.5708 - \frac{1}{2} (1 + 1) \right]; \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -3.1831 \cdot 2.5708; \\ \sigma_y &= -3.1831 \cdot 0.5708; \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \sigma_x &= -8.183 \text{ кПа}; \\ \sigma_y &= -1.817 \text{ кПа}; \\ \tau_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\}$$



23. Чему равны максимальные напряжения в катке диаметром 0.1 м, если действующая на него погонная нагрузка составляет 1 МН/м.

В задаче Герца по эпюре напряжений σ_x в горизонтальном диаметрально сечении диска, показанной на рисунке 51, максимальная ордината по середине равна

$$\sigma_x^{\max} = -\frac{6P}{\pi d} = -\frac{6 \cdot 1}{\pi \cdot 0.1} = -\frac{60}{\pi} = -19.1 \text{ кПа}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. თ. ბაციკაძე, გ. გაჩეჩილაძე. დრეკადობის თეორია. თბილისი: გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 1997 წ.
2. თ. ბაციკაძე, ა. კვარაცხელია, ზ. მაძალუა. დრეკადობის, პლასტიკურობის და ცოცვადობის თეორიების მოკლე კურსი. თბილისი: გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 2014 წ.
3. ა. ლოსაბერიძე. დრეკადობის თეორია. თბილისი: გამომცემლობა „ტექნიკური უნივერსიტეტი“, 1989 წ.
4. Самуль В.И.. Основы теории упругости и пластичности. Москва: Высшая школа, 1982 г.
5. Теребушко О. И.. Основы теории упругости и пластичности. Москва: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1984 г.
6. Тимошенко С.П., Гудьер Дж.. Теория упругости. Москва: «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1979 г.
7. Филоненко- Бородич М.М.. Теория упругости. Москва: Государственное издание физико-математической литературы, 1959г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

§ 1	Предмет теории упругости. Краткий исторический обзор	3
§ 2	Принятые допущения и гипотезы.	3
§ 3	Поверхностные и объёмные сил	4

Раздел первый

ГЛАВА 1

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

§ 1.1	Дифференциальные уравнения равновесия. Взаимность касательных напряжений	4
§ 1.2	Напряжения на наклонных площадках.	8
§ 1.3	Понятие тензора напряжений.	9
§ 1.4	Главные напряжения. Инварианты напряжённого состояния	9
§ 1.5	Наибольшие касательные напряжения.	12

ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИИ

§ 1.6	Перемещения и деформаций в упругом теле.	14
§ 1.7	Линейные и угловые деформации.	14
§ 1.8	Понятие тензора деформации.	16
§ 1.9	Объёмная деформация.	17
§ 1.10	Уравнения неразрывности деформации.	17
	Вопросы для самопроверки и задачи.	20

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 2.1	Обобщённый закон Гука. Выражение деформации через напряжения для анизотропного и изотропного тела.	30
§ 2.2	Выражение составляющих напряжения через составляющие деформации для изотропного тела.	33
§ 2.3	Потенциальная энергия деформации. Формулы Кастильяно и Грина	34
§ 2.4	Основные принципы.	36
	Вопросы для самопроверки и задачи.	39

ГЛАВА 3

ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§ 3.1	Сводка основных уравнений	42
§ 3.2	Представление уравнений равновесия Навье и условий на поверхности в перемещениях. План решения задач теории упругости в перемещениях.	43
§ 3.3	Постановка задач теории упругости	45
§ 3.4	Решение задачи теории упругости в напряжениях при постоянстве объёмных сил	46
§ 3.5	Единственность решения	49

§ 3.6	Полуобратный метод Сен-Венана. Задача Сен-Венана. Принцип Сен-Венана.	51
	Вопросы для самопроверки	55

Раздел второй
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
ГЛАВА 4
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

§ 4.1	Общие понятия.	57
§ 4.2	Плоская деформация	57
§ 4.3	Обобщённое плоское напряжённое состояние.	59
§ 4.4	Уравнения неразрывности в напряжениях.	61
§ 4.5	Ввод функции напряжения.	62
§ 4.6	Бигармоническое уравнение плоской задачи.	65
§ 4.7	Полуобратный метод. Решение в полиномах	65
	Применение уравнений плоской задачи в конкретных примерах	
§ 4.8	Изгиб консоли силой, приложенной на свободном конце	68
§ 4.9	Изгиб консоли силой, приложенной на свободном конце с применением полиномов	76
§ 4.10	Изгиб прямоугольной полосы на двух опорах под равномерно распределённой нагрузкой	77
§ 4.11	Решение плоской задачи при помощи рядов Фурье	81
§ 4.12	Расчёт плотины треугольного профиля.	83
	Вопросы для самопроверки	88

	ГЛАВА 5	
	ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ	
§ 5.1	Основные понятия.	93
§ 5.2	Основные уравнения в полярных координатах	94
	а) дифференциальные уравнения равновесия.	94
	б) перемещения и деформаций.	95
	в) Уравнение неразрывности деформации.	97
	г) функция напряжений.	98
	д) формулы закона Гука для плоской задачи в полярных координатах	99
§ 5.3	Случаи, когда напряжения не зависят от полярного угла θ – осесимметричные задачи	101
	Применение основных формул в осесимметричных задачах	
§ 5.4	Задача Ламе о равномерном внешнем и внутреннем сжатии круглой трубы	105

	а) Первый способ – решение в напряжениях	105
	б) Второй способ – решение в перемещениях	108
§ 5.5	Чистый изгиб криволинейного стержня. Задача Головина	112
	Применение уравнений плоской задачи в разных случаях	
§ 5.6	Задача Кирша – растяжение полосы, ослабленной круговым отверстием	116
§ 5.7	Простое радиальное напряжённое состояние.	121
§ 5.8	Клин, нагруженный в вершине сосредоточенной силой	122
§ 5.9	Сжатие клина.	124
§ 5.10	Изгиб клина.	126
§ 5.11	Действие сосредоточенной силы на границе полуплоскости	128
§ 5.12	Действие двух равных и противоположно направленных по радиусу сил на круглый диск — задача Герца	133
§ 5.13	Понятие о расчёте цилиндрических катков	134
§ 5.14	Понятие о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство	136
	Вопросы для самопроверки и задачи	138