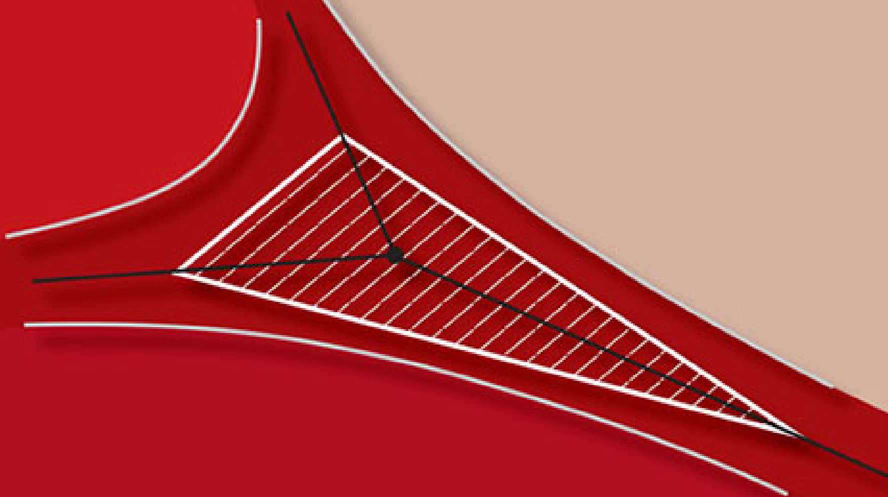
Л. С. Атанасян

ГЕОМЕТРИЯ Лобачевского



ИЗДАТЕЛЬСТВО БИНОМ

Л. С. Атанасян

ГЕОМЕТРИЯ Лобачевского

2-е издание, исправленное
(электронное)

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2014

УДК 087.5:514
ББК 22.151
А92

Атанасян Л. С.

А92 Геометрия Лобачевского [Электронный ресурс] / Л. С. Атанасян. — 2-е изд., испр. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 467 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2364-7

Излагается геометрия Лобачевского на основе школьной аксиоматики абсолютной геометрии и аксиомы Лобачевского. Первая часть книги посвящена планиметрии Лобачевского, а вторая — стереометрии. В конце каждой главы даются задачи, в конце книги — ответы и указания к ним. Этим книга выгодно отличается от других пособий по геометрии Лобачевского.

Книга может с успехом использоваться студентами и преподавателями и физико-математических факультетов университетов, и педагогических вузов. Она также будет полезна учителям классов с углубленным изучением математики для индивидуальной работы с учениками, интересующимися математикой.

УДК 087.5:514
ББК 22.151

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Геометрия Лобачевского / Л. С. Атанасян. — 2-е изд., испр. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. — 464 с. : ил.

ISBN 978-5-9963-2364-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основой курса «Геометрия Лобачевского» послужили лекции, которые автор неоднократно читал для студентов и магистрантов математического факультета Московского педагогического государственного университета.

Автор поставил своей задачей дать систематическое, достаточно полное и строгое изложение геометрии Лобачевского на основе известных аксиом абсолютной геометрии и аксиомы Лобачевского. Метод изложения элементарно геометрический, синтетический, т. е. тот же, что и при изложении элементарной геометрии Евклида в книгах [1], [4], [11] и др.* В связи с этим в книге практически нет ссылок на проективную геометрию, на теорию групп и другие разделы высшей математики.

Настоящий курс состоит из двух частей. Первая часть посвящена планиметрии Лобачевского, а вторая часть — стереометрии. В последней главе второй части курса дается доказательство логической непротиворечивости трехмерной геометрии Лобачевского, приведены краткие исторические сведения об открытии геометрии Лобачевского и излагаются некоторые философские вопросы, связанные с применением геометрии Лобачевского к реальному пространству. Как первая, так и вторая части учебного пособия снабжены достаточным числом задач для самостоятельного решения (свыше 300 задач). Задачи помещены в конце каждой главы и соответствуют ее материалу. В конце книги даны краткие указания к решению многих задач, а также приложения со списком аксиом абсолютной планиметрии и аксиом стереометрии Лобачевского.

---

* Здесь и в дальнейшем цифры в квадратных скобках отсылают читателя к списку литературы, помещенному на с. 456.

В заключение отметим, что в случае недостатка времени отдельные главы, например главы VI, VII, VIII части I и главы V, VI части II можно опустить без ущерба понимания материала последующих глав. Кроме того, некоторые утверждения и теоремы, которые доказываются сложно (например, содержание § 5, частично § 8, лемма I из § 14 и др.), можно дать без доказательства, опираясь на наглядно интуитивные соображения. Это особенно важно при изучении геометрии Лобачевского учащимися средней школы.

Книга будет полезна студентам физико-математических факультетов университетов и педагогических высших учебных заведений. Она может быть использована учителями и учащимися в классах общеобразовательных учреждений, особенно в школах (классах) с углубленным изучением математики, для проведения факультативных занятий, в работе математических кружков, а также для индивидуальной работы с учащимися, проявляющими интерес к математике.

ЧАСТЬ I

ПЛАНИМЕТРИЯ

Глава 1

ОБЗОР ОСНОВНЫХ ФАКТОВ АБСОЛЮТНОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

Геометрия Лобачевского (или гиперболическая геометрия) основана на аксиомах абсолютной геометрии и на аксиоме Лобачевского, поэтому все понятия, определения и теоремы абсолютной геометрии имеют место и в геометрии Лобачевского.

В этой главе дан краткий обзор основных определений и следствий из аксиом абсолютной планиметрии, а сами аксиомы абсолютной планиметрии (аксиомы групп I–IV) приведены в приложении (см. с. 322).

§ 1. Обзор основных следствий и аксиом групп I–III абсолютной планиметрии

1. Простейшие фигуры на плоскости. Равенство фигур. Основными понятиями в планиметрии Лобачевского так же, как и в планиметрии Евклида, являются точки и прямые (основные объекты), принадлежность точки прямой, «лежать между» для трех точек одной прямой и наложение (основные отношения). Сформулируем аксиомы группы I, которые характеризуют взаимное расположение точек и прямых, и аксиомы группы II, которые характеризуют свойства понятия «лежать между». Если точка B лежит между точками A и C, то будем писать $A–B–C$. Если точка A не лежит между точками B и C, то будем писать $\overline{A}BC$.

Группа I. **Аксиомы принадлежности.**

I_1. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки*.

---

* Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три прямые», будем считать, что рассматриваемые точки и прямые различны.

I_2. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

Группа II. **Аксиомы порядка.**

II_1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C — три различные точки некоторой прямой и точка B лежит также между точкой C и точкой A.

II_2. Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

Фигура, состоящая из двух точек A и B и всех точек, лежащих между ними, называется *отрезком*, а точки A и B — его концами.

II_3. Каждая точка O, лежащая на прямой, разделяет множество остальных точек этой прямой на два непустых подмножества так, что точка O лежит между любыми двумя точками различных подмножеств и не лежит между любыми двумя точками одного и того же подмножества.

Фигура, состоящая из каждого подмножества точек, на которые точка O делит остальные точки данной прямой, называется *лучом*, оба этих луча называются *дополнительными* лучами, а точка O — началом этих лучей.

Если точки A и B не принадлежат прямой a, то будем говорить, что они лежат по одну сторону от прямой a, если прямая a не имеет общих точек с отрезком AB. Обозначим это так: $A, B \doteqdot a$. Если точки A и B не принадлежат прямой a, то будем говорить, что они лежат по разные стороны от прямой a, если существует точка X, лежащая на отрезке AB и на прямой a. Обозначим это так: $A, B \div a$.

II_4. Каждая прямая a разделяет множество всех точек плоскости, не лежащих на этой прямой, на два подмножества так, что любые две точки разных подмножеств лежат по разные стороны от прямой a, а любые две точки одного и того же подмножества лежат по одну сторону от прямой a.

Фигура, состоящая из каждого подмножества точек, указанных в аксиоме II_4, называется *полуплоскостью*, а прямая a — ее границей.

Пользуясь аксиомами групп I–II (см. приложение, с. 444), вводятся простейшие понятия планиметрии и доказывается ряд утверждений и теорем, которые имеют место как в евклидовой геометрии, так и в геометрии Лобачевского. Кроме понятий отрезка, луча, полуплоскости, вводятся понятия угла, внутренней области угла и доказываются утверждения о свойствах этих фигур (см. [1], § 1–4). Не останавливаясь подробно на этом, отметим лишь отдельные важные утверждения и теоремы, которые необходимы для дальнейшего изложения.

1.1°. (Предложение Паша.) Если прямая пересекает отрезок AB и не проходит через точку C, то она пересекает один из отрезков AC или BC и не имеет общих точек с другим отрезком.

Луч, который исходит из вершины неразвернутого угла и содержит хотя бы одну внутреннюю точку, целиком состоит из внутренних точек угла. Такой луч называется *внутренним лучом угла*.

1.2°. Внутренний луч неразвернутого угла пересекает отрезок, концы которого лежат на разных сторонах угла.

Говорят, что угол hk отложен от луча h в полуплоскость λ, если луч h принадлежит границе полуплоскости λ, а луч k — самой полуплоскости.

1.3°. Если углы hk_1 и hk_2 с общей стороной h отложены от этого луча в одну и ту же полуплоскость и лучи k_1 и k_2 не совпадают, то один и только один из лучей k_1 и k_2 является внутренним лучом угла, образованного лучом h и другим лучом.

Понятие равенства фигур в абсолютной геометрии мы вводим с помощью наложения, которое является основным отношением. Наложение — это отображение плоскости в себя. Свойства наложений выражены в аксиомах группы III. Фигура Ф называется *равной* фигуре Ф$'$, если существует наложение, при котором фигура Ф переходит в фигуру Ф$'$, т. е. каждая точка фигуры Ф переходит в некоторую точку фигуры Φ' и каждая точка фигуры Φ' имеет прообраз, принадлежащий фигуре Φ. Запись $\Phi = \Phi'$ означает, что фигура Φ равна фигуре Φ'.

Группа III. **Аксиомы наложения.**

III$_1$. Каждая фигура равна самой себе.

III$_2$. Если фигура Φ равна фигуре Φ', то фигура Φ' равна фигуре Φ.

III$_3$. Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3.

III$_4$. Если при наложении концы отрезка AB отображаются в концы отрезка $A'B'$, то отрезок AB отображается на отрезок $A'B'$.

III$_5$. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

III$_6$. Если hk — неразвернутый угол и $\angle hk = \angle h'k'$, то существует наложение, при котором луч h переходит в луч h', а луч k — в луч k'.

III$_7$. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

Из этих аксиом легко вывести ряд важных свойств наложений (см. [1], § 5). Отметим, в частности, что при наложении отрезок, луч, прямая, угол, полуплоскость отображаются соответственно на отрезок, луч, прямую, угол, полуплоскость.

Пользуясь аксиомами группы III, можно доказать следующее утверждение:

1.4°. Любое наложение является преобразованием полуплоскости, при котором три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, лежащие на одной прямой, а три точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.

Из аксиом наложения непосредственно следует, что отношение равенства фигур является отношением эквивалентности.

2. Сравнение отрезков и углов. Пусть AB и CD — произвольные отрезки. Если на отрезке CD существует такая точка M, что $AB = CM$, то говорят, что отрезок AB меньше отрезка CD или отрезок CD больше отрезка AB, и пишут так: $AB < CD$, или $CD > AB$. Основные свойства сравнения отрезков заключаются в следующем:

а) если $AB < CD$, $CD = EF$ или $AB = CD$, $CD < EF$, то $AB < EF$;
б) если $AB < CD$, $CD < EF$, то $AB < EF$.

Аналогично вводится сравнение углов. Пусть hk и lm — данные неразвернутые углы. Если существует внутренний луч s угла lm, такой, что $\angle hk = \angle ls$, то говорят, что угол hk меньше угла lm или угол lm больше угла hk, и пишут так: $\angle hk < \angle lm$, или $\angle lm > \angle hk$. Если один из углов развернутый, а другой неразвернутый, то считают, что развернутый угол больше неразвернутого.

Основные свойства сравнения углов аналогичны основным свойствам сравнения отрезков:

а) если $\angle hk < \angle lm$, $\angle lm < \angle pq$ или $\angle hk < \angle lm$, $\angle lm < \angle pq$, то $\angle hk < \angle pq$;
б) если $\angle hk < \angle lm$, $\angle lm < \angle pq$, то $\angle hk < \angle pq$.

Свойства сравнения отрезков и углов доказываются на основании групп аксиом I–III (см. [1], § 6).

3. Смежные и вертикальные углы. Прямой угол. Напомним, что два угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие стороны являются дополнительными лучами. Два неразвернутых угла называются *вертикальными*, если стороны одного угла являются соответственно дополнительными лучами сторон другого угла. Пользуясь аксиомами групп I–III, нетрудно доказать, что если неразвернутые углы равны, то углы, соответственно смежные с ними, равны и что вертикальные углы равны (см. [1], § 7).

Угол называется *прямым*, если он равен одному из углов, смежных с ним. Ясно, что прямой угол равен каждому из своих смежных углов.

Нетрудно доказать, что угол, равный прямому, также является прямым и что любые два прямых угла равны друг другу (см. [1], § 7).

Угол, меньший прямого угла, называется *острым*, а неразвернутый угол, больший прямого угла, — *тупым*. Нетрудно доказать, что угол, смежный с острым углом, является тупым, а угол, смежный с тупым, — острым.

Две пересекающиеся прямые называются *перпендикулярными* (или взаимно перпендикулярными), если они при пересечении образуют четыре прямых угла. Сформулируем теорему о перпендикулярных прямых (см. [1], § 8). Этой теоремой и ее следствиями мы будем неоднократно пользоваться в дальнейшем изложении.

Теорема. *Через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.*

Следствие 1. *Две прямые, перпендикулярные к одной прямой, не пересекаются.*

Рассмотрим прямую a и точку A, не лежащую на ней; отрезок AH, соединяющий точку A с точкой H прямой a, называется *перпендикуляром, проведенным из точки A к прямой a*, если $AH \perp a$.

Следствие 2. *Из точки, не лежащей на прямой, можно провести один и только один перпендикуляр к этой прямой.*

§ 2. Треугольники

1. Признаки равенства треугольников. Понятие треугольника и определения элементов треугольника, известные читателю из курса геометрии средней школы, относятся к абсолютной геометрии, поэтому они являются также понятиями геометрии Лобачевского. Все теоремы и утверждения о треугольниках, которые в школьном курсе геометрии доказываются без помощи аксиомы параллельных прямых, т. е. используя только аксиомы абсолютной геометрии, имеют место также в геометрии Лобачевского. К этим теоремам относятся в первую очередь признаки равенства треугольников, в частности прямоугольных треугольников, и теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника.

Рассмотрим сначала три теоремы, выражающие основные признаки равенства треугольников. Доказательства этих признаков читатель найдет в учебном пособии [1] в главе II.

Теорема 1 (*первый признак равенства треугольников*). *Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Теорема 2 (*второй признак равенства треугольников*). *Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Теорема 3 (*третий признак равенства треугольников*). *Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

Так же как и в евклидовой геометрии, эти теоремы широко используются в геометрии Лобачевского. Ниже мы сформулируем и докажем еще два признака равенства треугольников в абсолютной геометрии.

2. Теорема о внешнем угле треугольника. Напомним, что прямая называется *секущей* по отношению к двум прямым, если она пересекает их в двух точках. При пересечении прямых AC и BD секущей AB образуются восемь неразвернутых углов, четыре из которых имеют общую вершину A, а другие четыре — общую вершину B. Если $C, D \div AB$, то углы CAB и DBA называются *накрест лежащими углами*. Если $C, D \dot{-} AB$, E и F — точки, такие, что E–A–B, A–B–F, то углы ABD и EAC, а также углы BAC и FBD называются *соответственными углами*. При пересечении двух прямых секущей образуются две пары накрест лежащих углов и четыре пары соответственных углов.

Докажем лемму о прямых, которые при пересечении с секущей образуют равные накрест лежащие или равные соответственные углы.

Лемма. *Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны или соответственные углы равны, то данные прямые не пересекаются.*

□ Пусть секущая AB пересекает прямые AC и BD, $C,\ D \div AB$ и $\angle BAC = \angle ABD$. Докажем, что прямые AC и BD не пересекаются (рис. 1, a). Допустим, что это не так, т. е. что прямые AC и BD имеют общую точку. Не нарушая общности, можно предположить, что этой точкой является точка C. Отложим на луче BD отрезок BC' равный отрезку AC (рис. 1, *б*). Треугольники ABC и BAC' равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $\angle ABC = \angle BAC'$. С другой стороны, так как $\angle ABD = \angle BAC$, то углы ABC и BAE, смежные с этими углами, также равны. Здесь AE — продолжение луча AC (см. рис. 1, *б*). Так как C', $E \ddot{-} AB$, то по аксиоме III_7 лучи AC' и AE совпадают. Это невозможно, так как две прямые AC и BC не могут иметь две общие точки C и C'.

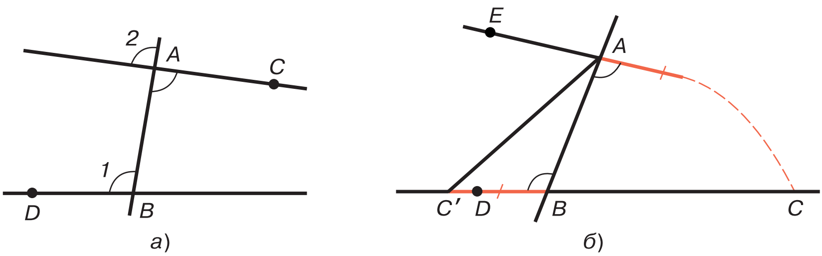


Рис. 1

Если при пересечении прямых AC и BD соответственные углы равны (например, углы 1 и 2 на рис. 1, a), то $\angle 2 = \angle BAC$, поэтому $\angle 1 = \angle BAC$, и по доказанному прямые AB и CD не пересекаются. ■

Пользуясь этой леммой, докажем следующую важную теорему абсолютной геометрии о внешнем угле треугольника. Эта теорема играет существенную роль в геометрии Лобачевского.

Теорема 4. *Внешний угол треугольника больше каждого угла треугольника, не смежного с ним.*

□ Рассмотрим треугольник ABC и докажем, например, что $\angle BCD > \angle A$, где D — точка, такая, что $A{-}C{-}D$ (рис. 2, *а*).

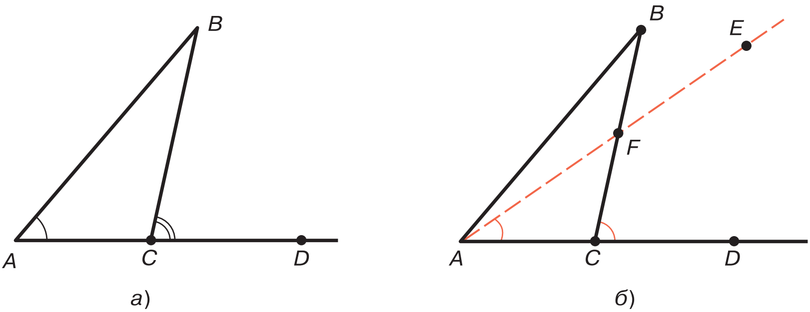


Рис. 2

Так как $\angle A$ и $\angle BCD$ являются соответственными углами при пересечении пересекающихся прямых AB и CB секущей AC, то по доказанной лемме $\angle BCD \neq \angle A$. Поэтому возможны два случая: а) $\angle BCD < \angle A$; б) $\angle BCD > \angle A$. Докажем методом от противного, что случай а) невозможен.

По предположению $\angle A > \angle BCD$, поэтому существует внутренний луч AE угла A, такой, что $\angle BCD = \angle EAC$ (рис. 2, *б*). По свойству 1.2° § 1 луч AE пересекает отрезок BC в некоторой точке F. Прямые AE и CB пересекаются и при пересечении с секущей AC образуют равные односторонние углы FAC и FCD. Этот вывод противоречит предыдущей лемме. Таким образом, $\angle BCD > \angle A$. ■

Следствие. *Если в треугольнике один из углов прямой или тупой, то два других угла острые.*

□ Пусть в треугольнике ABC угол A прямой или тупой. Тогда смежный с ним угол прямой или острый. Этот угол являете внешним углом треугольника, поэтому углы B и C треугольника ABC острые. ■

3. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Напомним, что треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны. Равные стороны называются боковые сторонами, а третья сторона — основанием равнобедренного треугольника. Равнобедренный треугольник является фигурой абсолютной геометрии и, следовательно, фигурой геометрии Лобачевского.

Следующая теорема о равнобедренном треугольнике доказывается на основе первого и второго признаков равенства треугольников. Ее доказательство читатель может найти в учебном пособии [1], § 10 (теорема 2).

Теорема 5. *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.* Обратно: *если в треугольнике два угла равны, то стороны, противолежащие этим углам, равны, т. е. треугольник равнобедренный.*

Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника, известная читателю из курса геометрии средней школы, является теоремой абсолютной геометрии.

Теорема 6. *В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.* Обратно: *против большего угла лежит большая сторона.*

Отрезок PQ называется суммой отрезков AB и CD, если на этом отрезке существует точка M, такая, что $AB = PM$, а $CD = MA$. Нетрудно доказать, что если PQ и $P'Q'$ являются суммами отрезков AB и CD, то $PQ = P'Q'$. Отсюда следует, что сумма двух отрезков AB и CD, которая обозначается через $AB + CD$, определяется с точностью равенства отрезков.

Теорема о неравенстве треугольника также является теоремой абсолютной геометрии.

Теорема 7. *Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.*

Доказательства теорем 6 и 7 читатель найдет в учебном пособии [1], § 16 (теоремы 1 и 2).

4. Четвертый и пятый признаки равенства треугольников.

Теорема 8 (*четвертый признак равенства треугольников*). *Если два угла и сторона, противолежащая одному из этих углов, одного треугольника соответственно равны двум углам и соответствующей стороне другого, то такие треугольники равны.*

□ Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $AB = A_1B_1$. Докажем, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Принимая во внимание первый признак равенства треугольников, достаточно доказать, что $AC = A_1C_1$. Докажем это равенство методом от противного. Пусть, например, $AC < A_1C_1$. Тогда на отрезке A_1C_1, существует такая точка D_1, что $AC = A_1D_1$. По первому признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A_1B_1D_1$, поэтому $\angle C = \angle B_1D_1A_1$. С другой стороны, по условию $\angle C = \angle C_1$, следовательно, $\angle B_1D_1A_1 = \angle C_1$. Мы пришли к противоречию с теоремой о внешнем угле треугольника: в треугольнике $B_1C_1D_1$ угол C_1, равен внешнему углу при вершине D_1. ■

Замечание. В геометрии Евклида теорема является непосредственным следствием второго признака равенства треугольников и теоремы о сумме углов треугольника. В самом деле, из теоремы о сумме углов треугольника следует, что $\angle B = \angle B_1$, поэтому треугольники ABC и AB_1C равны по стороне и двум прилежащим углам.

Теорема 9 (*пятый признак равенства треугольников*). *Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого и угол одного треугольника, лежащий против большей из этих сторон, равен соответствующему углу другого, то такие треугольники равны.*

□ Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ и в треугольнике ABC $AB < AC$. Тогда, очевидно, $A_1B_1 < A_1C_1$ (рис. 3). Теорема будет доказана, если мы докажем что $BC = B_1C_1$.

Допустим, что $BC \neq B_1C_1$, например, что $BC < B_1C_1$. Тогда на отрезке B_1C_1 существует такая точка C_2, что

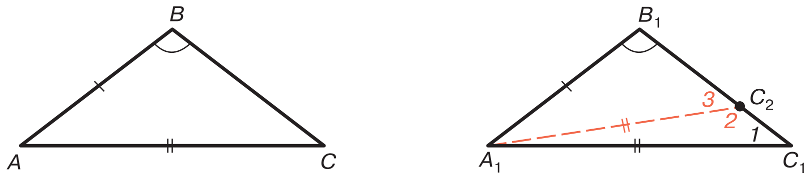


Рис. 3

$BC = B_1C_2$. По первому признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_2$, поэтому $AC = A_1C_2$. Отсюда следует, что $A_1C_1 = A_1C_2$, т. е. треугольник $A_1C_1C_2$ равнобедренный, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ (см. рис. 3). По теореме о внешнем угле треугольника $\angle 3 > \angle 1$ и $\angle 2 > \angle B_1$. Из этих неравенств следует, что $\angle 3 > \angle B_1$.

Применив теорему 6 к треугольнику $A_1B_1C_2$, получим $A_1B_1 > A_1C_2$, но $A_1C_2 = A_1C_1$, поэтому $A_1B_1 > A_1C_1$. Мы пришли к противоречию. ■

5. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Из следствия теоремы 4 о внешнем угле треугольника непосредственно вытекает, что на плоскости Лобачевского, так же как и на евклидовой плоскости, в любом треугольнике либо все три угла острые (остроугольный треугольник), либо один угол прямой, а два других острые (прямоугольный треугольник), либо один угол тупой, а два других острые (тупоугольный треугольник). Из теоремы 6 мы заключаем, что в прямоугольном треугольнике гипотенуза (т. е. сторона, лежащая против прямого угла) больше любого из его катетов (т. е. двух других его сторон).

Сформулируем теперь признаки равенства прямоугольны треугольников.

Теорема 10. *Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами C и C_1, равны, если выполняется одно из условий:*

1°. $CA = C_1A_1$, $CB = C_1B_1$.
2°. $CA = C_1A_1$, $\angle A = \angle A_1$.
3°. $CA = C_1A_1$, $\angle B = \angle B_1$.
4°. $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$.
5°. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$.

Эти признаки не требуют особого доказательства, так как они непосредственно следуют из соответствующих признаков равенства треугольников. В самом деле, признаки 1° и 2° следуют из теорем 1 и 2, признаки 3° и 4° — из теоремы 8, а признак 5° — из теоремы 9.

6. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Понятия середины отрезка и биссектрисы угла относятся к абсолютной геометрии, поэтому в геометрии Лобачевского эти понятия вводятся точно так же, как и в евклидовой геометрии.

Серединой отрезка AB называется такая точка C прямой AB, что $AC = CB$. *Биссектрисой* неразвернутого угла hk называется такой внутренний луч l этого угла, что $\angle hl = \angle lk$. Пользуясь признаками равенства треугольников, можно доказать, что каждый отрезок имеет одну и только одну середину, которая лежит на самом отрезке, и каждый неразвернутый угол имеет одну и только одну биссектрису (см. [1], § 11).

Таким образом, учитывая следствие 2 теоремы из § 1 о перпендикулярных прямых, мы приходим к выводу, что понятия медиан, биссектрис и высот треугольника относятся к абсолютной геометрии, поэтому в геометрии Лобачевского они вводятся точно так же, как и в геометрии Евклида. Каждый треугольник имеет три медианы, три биссектрисы и три высоты. Медиана, биссектриса и высота треугольника в геометрии Лобачевского обладают свойствами, которые в ряде случаев существенно отличаются от свойств этих отрезков на плоскости Евклида. В дальнейшем изложении мы подробно рассмотрим эти вопросы.

§ 3. Аксиомы непрерывности. Измерение отрезков и углов

1. Длина отрезка. Понятия длины отрезка и величины угла относятся к абсолютной геометрии, поэтому теория измерения отрезков и углов, известная читателю из курса оснований геометрии, полностью применима и в геометрии Лобачевского. Рассмотрим в обзорном порядке основы этой теории.

Говорят, что введено измерение отрезков, если установлено соответствие между отрезками и положительными числами так, что выполняются условия:

$Д_1$. Равным отрезкам соответствует одно и то же число.

$Д_2$. Если точка B лежит на отрезке AC и отрезкам AB и BC соответствуют числа a и b, то отрезку AC соответствует число $a+b$.

$Д_3$. Некоторому произвольно выбранному отрезку PQ соответствует число 1.

Положительное число, указанным образом соответствующее отрезку, называется *длиной этого отрезка*. Отрезок PQ называется *единицей измерения* или единичным отрезком.

2. Аксиомы непрерывности. Существование соответствия, удовлетворяющего условиям $Д_1$, $Д_2$ и $Д_3$, невозможно установить, пользуясь аксиомами групп I–III. Для этого необходимо ввести новую аксиому, в качестве которой мы примем следующую аксиому существования длин отрезков.

IV_1. При произвольно выбранном единичном отрезке PQ существует соответствие, удовлетворяющее условиям $Д_1$, $Д_2$ и $Д_3$.

Пользуясь аксиомами групп I–III и аксиомой IV, можно доказать предложение Архимеда, которое в схеме Гильберта принято как аксиома.

Теорема 1 (***предложение Архимеда***). *Если AB и CD — произвольные отрезки, то на луче AB существует n точек, таких, что $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n = CD$ и точка B лежит между точками A и A_1* (см. [1], § 14, теорема 1).

Важно отметить, что если выбран единичный отрезок PQ, то существует не более одного соответствия между отрезками и положительными числами, при котором удовлетворяются условия $Д_1$, $Д_2$ и $Д_3$ измерения отрезков (см. [1], § 14, теорема 2).

Длина отрезка зависит от выбора единицы измерения. При переходе от одной единицы измерения к другой длины всех отрезков умножаются на одно и то же число (см. [1], § 14, теорема 3).

Для полного обоснования теории измерения отрезков и углов необходимо принять еще одну аксиому — аксиому существования отрезка данной длины.

IV_2. Для любого положительного числа существует отрезок, длина которого при выбранном единичном отрезке равна данному числу.

Эта аксиома в дальнейшем неоднократно будет использована для доказательства ряда теорем и утверждений геометрии Лобачевского. Отметим, в частности, следующее утверждение абсолютной геометрии о делении отрезка на равные части (см. [1], § 14, теорема 4): на каждом отрезке существуют точки, которые делят его на n равных частей, где n — произвольное натуральное число, $n > 1$.

Аксиомы группы IV, состоящие из двух аксиом IV_1 и IV_2, называются *аксиомами непрерывности*.

Пользуясь аксиомами групп I–IV, можно доказать предложение Дедекинда (см. [2], теорема 50).

Теорема 2 (*предложение Дедекинда*). *Пусть все точки отрезка AB разбиты на два класса K_1 и K_2 так, что выполняются условия:* а) *каждая точка отрезка AB принадлежит одному и только одному из классов K_1 и K_2;* б) *$A \in K_1$, $B \in K_2$. Каждый из классов K_1 и K_2 содержит точки, отличные от A и B;* в) *каждая точка класса K_1, отличная от точки A, лежит между точкой A и любой точкой класса K_2. Тогда существует единственная точка C, лежащая на отрезке AB, такая, что любая точка, лежащая между точками A и C, принадлежит классу K_1, а любая точка, лежащая между точками C и B,— классу K_2.*

Интересно отметить, что аксиомы IV_1 и IV_2 при сохранении аксиом групп I–III эквивалентны предложению Дедекинда.

3. Мера угла. *Мера угла* определяется аналогично длине отрезка. Говорят, что введено измерение углов, если установлено

соответствие между углами и положительными числами так, что выполняются условия:

1. Равным углам соответствует одно и то же число.

2. Если l — внутренний луч* угла hk и углам hl и lk соответствуют числа α и β, то углу hk соответствует число $\alpha+\beta$.

3. Некоторому неразвернутому углу p_0q_0 соответствует число, равное единице.

Положительное число, указанным образом соответствующее данному углу, называется *мерой* этого угла. Угол p_0q_0 называется единицей измерения углов.

Пользуясь аксиомами групп I–IV, можно доказать, что если p_0q_0 — произвольный неразвернутый угол, то существует одно и только одно соответствие, удовлетворяющее условиям 1, 2 и 3 (см. [2], § 27–29).

Имеют место следующие свойства измерения углов:

3.1°. Если при некотором выборе единицы измерения углов прямой угол имеет меру d, то: а) сумма мер любых двух смежных углов равна $2d$; б) мера α любого неразвернутого угла заключена в пределах $0<\alpha<2d$, а мера развернутого угла равна $2d$.

3.2°. Каково бы ни было число α, такое, что $0<\alpha\leqslant 2d$, существует угол, мера которого равна α.

3.3°. Для любого неразвернутого угла существует n лучей, которые делят его на $n+1$ равных частей, где n — любое натуральное число.

Пользуясь свойством 3.2°, вводится градусная мера угла. Для этого за единицу измерения углов принимают угол, который равен $\frac{1}{90}$ части прямого угла. Тогда, очевидно, прямой угол имеет градусную меру 90°, а из свойства 3.1° следует, что: а) сумма градусных мер двух смежных углов равна 180°; б) градусная мера развер-

* Если угол hk развернутый, то l — любой луч, исходящий из вершины угла hk и не совпадающий с лучами h и k.

нутого угла равна 180°, а числовое значение градусной меры любого угла заключено в пределах $0 < \alpha \leqslant 180^\circ$.

4. Теоремы о биссектрисе угла и серединном перпендикуляре к отрезку. Напомним, что длина перпендикуляра, проведенного из точки к прямой, называется *расстоянием от точки до прямой*.

Сформулируем две теоремы, которые доказываются в абсолютной геометрии (см. [1], § 17, теоремы 1 и 3).

Теорема 3 (*о биссектрисе угла*). *Биссектриса угла есть луч, состоящий из всех внутренних точек угла, каждая из которых равноудалена от прямых, содержащих стороны угла.*

Напомним, что прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему, называется серединным перпендикуляром к отрезку.

Теорема 4 (*о серединном перпендикуляре к отрезку*). *Серединный перпендикуляр к отрезку есть прямая, состоящая из всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от концов данного отрезка.*

5. Теорема Лежандра о сумме углов треугольника. В дальнейшем сумму мер углов данного треугольника ABC будем обозначать через $\sigma\,(ABC)$.

Лемма. *Каков бы ни был треугольник ABC, существует треугольник $A_1B_1C_1$, такой, что $\sigma(A_1B_1C_1) = \sigma(ABC)$ и $\widehat{C}_1 \leqslant \frac{1}{2}\,\widehat{C}$.*

□ Обозначим через C' точку, симметричную точке C относительно середины O отрезка AB. Не нарушая общности, можно считать, что $\angle OCB \leqslant \angle OCA$. Рассмотрим треугольник CBC'. Ясно, что $\sigma(CBC') = \sigma(COB) + \sigma(OBC') - 2d$. Но $\triangle OBC' = \triangle OAC$, поэтому $\sigma(OBC') = \sigma(OAC)$. Таким образом, $\sigma(CBC') = \sigma(COB) + \sigma(OAC) - 2d = \sigma(ABC)$.

Если точки B, C, C' обозначим соответственно A_1, B_1, C_1, то треугольник $A_1B_1C_1$ искомый. ■

Теорема 5. *В абсолютной геометрии сумма мер углов треугольника не больше $2d$.*

□ Теорему докажем методом от противного. Предположим, что существует треугольник ABC, такой, что $\sigma(ABC) = 2d+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Пользуясь доказанной леммой, рассмотрим треугольники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ..., $A_nB_nC_n$, такие, что $\sigma(ABC) = \sigma(A_1B_1C_1) = \ldots = \sigma(A_nB_nC_n)$ и $\widehat{C}_2 \leqslant \frac{1}{2}\,\widehat{C}$, $\widehat{C}_2 \leqslant \frac{1}{2}\,\widehat{C}_1 \leqslant \frac{1}{4}\,\widehat{C}$, ..., $\widehat{C}_n \leqslant \frac{1}{2^n}\,\widehat{C}$. Выберем число n так, чтобы $\frac{1}{2^n}\,\widehat{C} < \varepsilon$. Тогда $\sigma(A_nB_nC_n) = \widehat{A}_n + \widehat{B}_n + \widehat{C}_n < \widehat{A}_n + \widehat{B}_n + \varepsilon$. Отсюда следует, что $2d + \varepsilon < \widehat{A}_n + \widehat{B}_n + \varepsilon$, или $\widehat{A}_n + \widehat{B}_n > 2d$.

Это неравенство противоречит теореме о внешнем угле треугольника. В самом деле, если α — мера внешнего угла треугольника $A_nB_nC_n$ при вершине B_n, то $\alpha > \widehat{A}_n$, $\alpha + \widehat{B}_n = 2d$, поэтому $\widehat{A}_n + \widehat{B}_n < 2d$. ■

§ 4. Движения. Осевая и центральная симметрии

1. Движения. Напомним, что преобразование точек плоскости называется *движением*, если при этом преобразовании сохраняются расстояния между любыми двумя точками, т. е. если две произвольные точки A и B переходят соответственно в точки A' и B' то $AB = A'B'$. Движение является понятием абсолютной геометрии. Так как наложение — это преобразование плоскости и при наложении отрезок переходит в равный ему отрезок, то *любое наложение является движением*. Имеет место и обратное утверждение, для доказательства которого предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. *Если ABC и $A'B'C'$ — произвольные треугольники, то существует не более одного движения, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'.*

□ Доказательство леммы проведем методом от противного, т. е. предположим, что существует по крайней мере два движения g_1 и g_2, при которых точки A, B, C переходят соответственно в точки A', B', C'. Так как g_1 и g_2 не совпадают, то на плоскости существует точка M, такая, что точки $M_1 = g_1(M)$ и $M_2 = g_2(M)$ не совпадают. Так как при движениях g_1 и g_2 сохраняются расстояния, то $AM = A'M$, $AM = A'M_2$, поэтому $A'M_1 = A'M_2$. Согласно теореме 4 § 3 точка A' лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку M_1M_2. Аналогично доказывается, что $B' \in l$, $C' \in l$. Но это невозможно, так как вершины треугольника не могут лежать на одной прямой. ■

Теорема 1. *Любое движение является наложением.*

□ Пусть g — произвольное движение. Рассмотрим какой-нибудь треугольник ABC и предположим, что $AC \geqslant AB$, $AC \geqslant BC$. По теореме 7 § 2 $AC < AB + BC$. Если $A' = g(A)$, $B' = g(B)$, $C' = g(C)$, то $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, поэтому $A'C' \geqslant A'B'$, $A'C' \geqslant B'C'$, $A'C' < A'B' + B'C'$. Отсюда следует, что точки A', B', C' не лежат на одной прямой (см. задачу 15), поэтому $A'B'C'$ — треугольник. По третьему признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Значит, существует наложение f, такое, что $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Так как f — движение, то по предыдущей лемме движения f и g совпадают, т. е. движение g является наложением. ■

Из теоремы 1 следует, что все свойства наложений являются также свойствами движений. Отсюда мы заключаем, что при любом движении отрезок, луч, прямая, полуплоскость отображаются соответственно на отрезок, луч, прямую, полуплоскость. По свойству 1.4° § 1 любое движение является преобразованием плоскости, при котором три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, лежащие на одной прямой, а три точки, не лежащие на одной прямой,— в три точки, не лежащие на одной прямой. Отсюда мы заключаем, что при движении неразвернутый угол отображается на равный ему неразвернутый угол.

Докажем, что в абсолютной геометрии существует бесконечное множество движений плоскости. Пусть hk — произвольный неразвернутый угол, а h' — какой-либо луч плоскости. Пользуясь аксиомой III_7, от луча h'

в одну из полуплоскостей с границей, содержащей луч h', отложим угол $h'k'$, равный углу hk. Тогда по аксиоме III_6 существует наложение (движение), при котором $h \to h'$, $k \to k'$.

Отметим, однако, что в евклидовой геометрии при изучении свойств движений в большинстве случаев используется аксиома параллельных прямых, поэтому теория движений, которая излагается в курсах элементарной геометрии (см., например, [1], гл. VII), не может быть полностью перенесена в геометрию Лобачевского. В частности, классификация движений на евклидовой плоскости существенно отличается от классификации движений на плоскости Лобачевского. Движения на плоскости Лобачевского подробно будут изучены ниже, в главе VI. Здесь же в рамках абсолютной геометрии для удобства дальнейшего изложения рассмотрим только два вида движений — симметрию относительно точки и симметрию относительно прямой.

2. Симметрия относительно точки. Напомним, что две точки A и B называются *симметричными относительно точки* O, если O — середина отрезка AB. Точка O считается симметричной самой себе.

Если на плоскости дана точка O, то для каждой точки M плоскости существует одна и только одна точка M', симметричная точке M относительно точки O. Отображение $M' = f(M)$ плоскости называется *центральной симметрией* с центром O или *отражением от точки* O. Ясно, что отражение от точки является преобразованием плоскости.

Пользуясь аксиомами групп I–IV, докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Отражение от точки является движением.*

□ Пусть f — отражение от точки O. Докажем, что если X и Y — две произвольные точки плоскости, а $X' = f(X)$, $Y' = f(Y)$, то $X'Y' = XY$. Если одна из точек X или Y совпадает с точкой O, то это утверждение очевидно, поэтому предположим, что O, X и Y —

попарно различные точки. Рассмотрим два возможных случая:

а) точки O, X и Y не лежат на одной прямой. Тогда точки O, X' и Y' также не лежат на одной прямой, $OX = OX'$, $OY = OY'$ и $\angle XOY = \angle X'OY'$ как вертикальные углы. Отсюда следует, что $\triangle OXY = \triangle OX'Y'$ по первому признаку равенства треугольников, следовательно, $X'Y' = XY$;

б) точки O, X и Y лежат на одной прямой. Если $X - O - Y$, то $XY = OX + OY$. В этом случае $X'–O–Y'$ и $X'Y' = OX' + OY'$. По определению отражения от точки $OX = OX'$, $OY = OY'$, следовательно, $X'Y' = XY$.

Пусть теперь X и Y — точки, лежащие на одном луче h с началом O. Тогда точки X' и Y' лежат на дополнительном луче h'. Не нарушая общности, можно предположить, что $O–X–Y$, т. е. что $OX < OY$. Тогда $OX' < OY'$ и поэтому $O–X'–Y'$. Таким образом, $OX+XY = OY$, $OX'+X'Y' = OY'$. Но $OX = OX'$, $OY = OY'$, поэтому $XY = X'Y'$. ■

Из этой теоремы непосредственно следует:

Следствие. *Если середины отрезков AA_1 и BB_1 совпадают, то $AB = A_1B_1$.*

3. Симметрия относительно прямой. Напомним, что две точки A и B называются *симметричными относительно прямой* a, если a — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Каждая точка прямой a считается симметричной самой себе.

Если на плоскости дана прямая a, то для каждой точки M плоскости существует одна и только одна точка M', симметричная точке M относительно прямой a. Отображение $M' = f(M)$ плоскости называется *осевой симметрией* с осью a или *отражением от прямой* a. Ясно, что отражение от прямой a является преобразованием плоскости. Пользуясь аксиомами групп I–IV, докажем следующую теорему*.

* В курсах евклидовой геометрии при доказательстве этой теоремы используется аксиома параллельных прямых (см. [1], § 32 или [3], часть I, § 43). Здесь мы приводим доказательство, основанное только на аксиомах абсолютной геометрии.

Теорема 3. *Отражение от прямой является движением.*

□ Пусть f — отражение от прямой a. Докажем, что если X и Y — произвольные точки плоскости, а $X' = f(X)$, $Y' = f(Y)$, то $X'Y' = XY$. Обозначим через X_0 середину* отрезка XX', а через Y_0 середину отрезка YY'. Ясно, что точки X_0, Y_0 лежат на прямой a.

Если точки X и Y лежат на прямой a, то равенство $X'Y' = XY$ очевидно. Если $XY \perp a$, то точки X', Y' лежат на прямой XY и отрезки XX', YY' имеют общую середину X_0, поэтому при отражении от точки X_0 точки X и Y переходят в точки X' и Y', следовательно, $XY = X'Y'$. Рассмотрим общий случай, когда прямые XY и a не совпадают и не являются взаимно перпендикулярными прямыми. Возможны три случая:

а) $X \in a$, $Y \notin a$ (или $X \notin a$, $Y \in a$) (рис. 4, a). В этом случае $\triangle XYY_0 = \triangle XY'Y_0$, поэтому $XY = XY'$, т. е. $XY = X'Y'$;

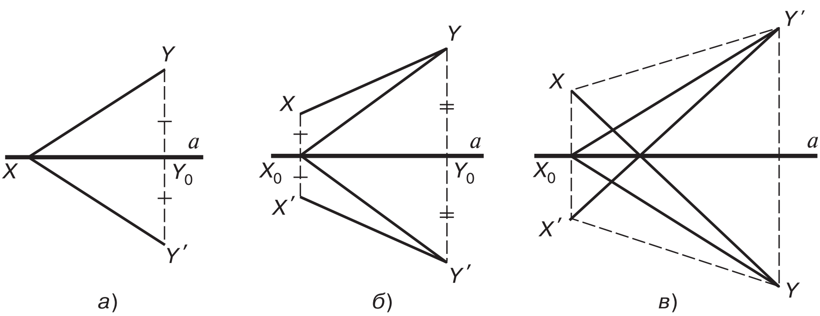


Рис. 4

б) X, $Y \ddot{-} a$. Тогда X', $Y' \ddot{-} a$ и по следствию 1 из теоремы § 1 прямые XX' и YY' не пересекаются, поэтому Y, $Y_0 \ddot{-} XX'$, Y_0, $Y' \ddot{-} XX'$. Отсюда следует, что X_0Y — внутренний луч прямого угла XX_0Y_0, а X_0Y' — внутренний луч прямого угла $X'X_0Y_0$

* Мы не исключаем случай, когда точки X и X' совпадают, т. е. когда отрезок «нулевой». Серединой «нулевого» отрезка XX считается сама точка X.

(рис. 4, *б*). Поэтому $\widehat{XX_0Y} + \widehat{YX_0Y_0} = \widehat{X'X_0Y'} + \widehat{Y'X_0Y_0}$. Но $\triangle X_0YY_0 = \triangle X_0Y'Y_0$, следовательно, $X_0Y = X_0Y'$ и $\widehat{YX_0Y_0} = \widehat{Y'X_0Y_0}$. Таким образом, $\angle XX_0Y = \angle X'X_0Y'$. Треугольники X_0XY и $X_0X'Y'$ равны по первому признаку равенства треугольников (см. рис. 4, *б*), следовательно, $XY = X'Y'$;

в) X, $Y \div a$. Тогда X, $Y' \mathrel{\ddot{-}} a$ и X', $Y \mathrel{\ddot{-}} a$ (рис. 4, *в*). По доказанному в случае б) $\triangle X_0XY' = \triangle X_0X'Y$, поэтому $XY' = X'Y$ и $\angle X_0XY' = \angle X_0X'Y$. Треугольники $X'XY'$ и $XX'Y$ равны по первому признаку равенства треугольников, следовательно, $XY = X'Y'$. ■

§ 5. Сонаправленность лучей. Направленная прямая

1. Понятие луча. В геометрии Лобачевского при изучении взаимного расположения прямых существенную роль играют лучи и часто используется понятие направленной прямой. Эти понятия (луч и направленная прямая) относятся к абсолютной геометрии и вводятся на основе аксиом групп I–III, не опираясь на наглядные и интуитивные соображения. В этом параграфе мы дадим обзор основных предложений, которые необходимы для дальнейшего изложения.

Понятие луча вводится на основе аксиомы II_3 (см. приложение, с. 443): каждая точка O, лежащая на прямой, разделяет множество остальных точек этой прямой на два непустых подмножества так, что точка O лежит между любыми двумя точками различных подмножеств и не лежит между любыми двумя точками одного и того же подмножества. Можно доказать, что каждое из этих подмножеств есть бесконечное множество точек. Фигура, состоящая из каждого из подмножеств точек, на которые точка O делит остальные точки данной прямой, называется *лучом*, исходящим из точки O (или с началом в точке O). Особо отметим, что начало луча не принадлежит самому лучу.

Лучи обозначают буквами h, k, l или двумя буквами, например OM (O — начало луча, а M — произвольная его точка). Два луча одной прямой, исходящие из одной точки, называются *дополнительными лучами*. Если h и k — дополнительные лучи, то говорят, что луч h является продолжением луча k, а луч k — продолжением луча h.

Сформулируем два наглядно очевидных свойства, которые можно строго доказать, пользуясь аксиомами групп I–IV. Доказательство первого из них предоставляем читателю.

5.1°. Если точка A принадлежит лучу h, исходящему из точки O, то любая точка, лежащая на отрезке OA, принадлежит лучу h.

5.2°. Если h и k — два различных луча и если все точки луча h принадлежат лучу k, то начало луча h также принадлежит лучу k.

□ Обозначим через H и K начала лучей h и k и отметим на луче h какую-нибудь точку M. Так как $h \subset k$, то $M \in k$, т. е. M — общая точка лучей h и k. Отметим, что H и K — различные точки, так как в противном случае лучи h и k совпадут.

По условию лучи h и k принадлежат одной прямой, поэтому точка K лежит на прямой HM, следовательно, либо $K \in h$, либо $K \in h'$, где h' — продолжение луча h. Первый случай невозможен, так как по условию $h \subset k$, и, следовательно, в этом случае K — точка луча k, что невозможно. По аксиоме II_3 $K–H–M$, следовательно, по свойству 5.1° точка H принадлежит лучу k. ■

2. Сонаправленные лучи. Лучи h и k, лежащие на одной прямой, называются *сонаправленными* (одинаково направленными), если все точки одного из этих лучей принадлежат другому лучу. В противном случае лучи, лежащие на одной прямой, называются *противоположно направленными*. Если лучи h и k сонаправлены (противоположно направлены), то пишут так: $h \upuparrows k$ ($h \uparrow\downarrow k$). Из этого определения следует, что если лучи h и k совпадают, то $h \upuparrows k$, а если они являются дополнительными лучами одной прямой, то $h \uparrow\downarrow k$.

Докажем лемму, выражающую признак сонаправленности двух лучей.

Лемма. *Два различных луча прямой сонаправлены тогда и только тогда, когда начало одного из этих лучей принадлежит другому лучу, а начало второго луча не принадлежит первому лучу.*

□ Пусть h_1 и h_2 — данные лучи, исходящие соответственно из точек O_1 и O_2. Предположим сначала, что $h_1 \upuparrows h_2$, например, что $h_1 \subset h_2$. По свойству 5.2° O_1 и O_2 — различные точки и $O_1 \in h_2$. Точка O_2 не принадлежит лучу h_2, а все точки луча h_1 принадлежат этому лучу, поэтому $O_2 \notin h_1$.

Обратно: предположим, что $O_1 \in h_2$, $O_2 \notin h_1$, и докажем, что $h_1 \subset h_2$, т. е. что $h_1 \upuparrows h_2$. Пусть X — произвольная точка луча h_1. Так как $O_2 \notin h_1$ то O_2–O_1–X, поэтому точка O_2 не лежит между точками O_1 и X. Отсюда, учитывая, что $O_1 \in h_2$, мы заключаем, что $X \in h_2$. Таким образом, $h_1 \subset h_2$. ■

Из доказанной леммы непосредственно следует, что два различных луча прямой противоположно направлены тогда и только тогда, когда либо начало каждого из этих лучей принадлежит другому лучу, либо начало ни одного из них не принадлежит другому лучу.

Воспользовавшись этой леммой, докажем теорему о транзитивности отношения сонаправленности лучей.

Теорема. *Если h_1, h_2 и h_3 — лучи, принадлежащие одной прямой, и $h_1 \upuparrows h_2$, $h_2 \upuparrows h_3$, то $h_1 \upuparrows h_3$.*

□ Утверждение теоремы очевидно, если хотя бы два из данных лучей совпадают, поэтому рассмотрим случай, когда h_1, h_2 и h_3 — попарно различные лучи.

Обозначим через O_1, O_2 и O_3 начала этих лучей. Так как $h_1 \upuparrows h_2$ и $h_2 \upuparrows h_3$, то из предыдущей леммы следует, что точки O_1 и O_2, а также точки O_2 и O_3 не совпадают. Докажем, что и точки O_1 и O_3 не могут совпадать. В самом деле, допустим, что O_1 и O_3 — одна и та же точка. Так как h_1 и h_3 — различные лучи, то они являются дополнительными лучами прямой a. Если $O_2 \in h_1$, то по предыдущей лемме $O_1 \notin h_2$, поэтому $O_3 \notin h_2$, следовательно, в силу того, что $h_2 \upuparrows h_3$, $O_2 \in h_3$, что невозможно. Если же $O_2 \notin h_1$, то по предыдущей лемме $O_1 \in h_2$, т. е. $O_3 \in h_2$, следовательно, $O_2 \notin h_3$, что также невозможно.

Таким образом, O_1, O_2 и O_3 — попарно различные точки. Не нарушая общности, можно рассмотреть два случая в зависимости от того, лежит ли точка O_2 между точками O_1 и O_3 или не лежит между ними.

1) O_1–O_2–O_3. Не нарушая общности, можно предположить, что обозначения лучей h_1 и h_3 выбраны так, что $O_1 \in h_2$. По предыдущей лемме $O_1 \notin h_1$ и так как $\overline{O}_1O_2O_3$, то $O_3 \notin h_1$. Далее, $h_2 \upuparrows h_3$, $O_3 \notin h_2$, поэтому по предыдущей лемме $O_2 \in h_3$ и в силу $\overline{O}_3O_2O_1$ имеем: $O_1 \in h_3$. По предыдущей лемме $h_1 \upuparrows h_3$.

2) Не нарушая общности, можно предположить, что обозначения лучей h_1, и h_3 выбраны так, что O_2–O_1–O_3. Возможны два случая: а) $O_2 \in h_1$, тогда $O_3 \in h_1$. Так как $h_1 \upuparrows h_2$, то по предыдущей лемме $O_1 \notin h_2$, поэтому и $0_3 \notin h_2$. Так как $h_2 \upuparrows h_3$, то $O_2 \in h_3$ и в силу $\overline{O}_3O_1O_2$ имеем: $O_1 \in h_3$. По предыдущей лемме $h_1 \upuparrows h_3$; б) $O_3 \in h_1$, тогда $O_2 \notin h_1$. Так как $h_1 \upuparrows h_2$, то $O_1 \in h_2$. В силу $\overline{O}_2O_1O_3$, $O_3 \in h_2$. Так как $h_2 \upuparrows h_3$, то $O_2 \notin h_3$ и в силу $O_3O_1O_2$ имеем: $O_1 \notin h_3$. По предыдущей лемме $h_1 \upuparrows h_3$. ■

3. Направленная прямая. Пусть H — множество всех лучей данной прямой a. Ясно, что отношение сонаправленности ($\upuparrows$) является бинарным отношением во множестве H. Легко видеть, что отношение $\upuparrows$ является *отношением эквивалентности во множестве H всех лучей прямой a*. В самом деле, из определения сонаправленности непосредственно следует, что для любого луча h $h \upuparrows h$ и для двух лучей h и k, если $h \upuparrows k$, то $k \upuparrows h$. Таким образом, отношение $\upuparrows$ удовлетворяет условиям рефлексивности и симметричности. Из предыдущей теоремы следует, что бинарное отношение удовлетворяет также условию транзитивности.

Докажем, что фактор-множество H ($\upuparrows$) состоит лишь из двух элементов. Для этого рассмотрим два дополнительных луча m_1 и m_2 прямой a с общим началом M и обозначим через K_1 и K_2 классы эквивалентности, которым принадлежат эти лучи.

Пусть h — произвольный луч с началом O множества H. Если точки O и M совпадают, то ясно, что луч h совпадает с одним из лучей m_1 и m_2, поэтому либо $h \in K_1$, либо $h \in K_2$. Если же M и O — различные точки, то, не нарушая общности, можно предположить, что $O \in m_1$, $O \notin m_2$. Тогда если $M \in h$, то по лемме о сонаправленных лучах $h \upuparrows m_2$, т. е. $h \in K_2$, а если $M \notin h$, то $h \upuparrows m_1$, т. е. $h \in K_1$.

Каждый из элементов фактор-множества H $(\upuparrows)$ называется направлением прямой a. Одно из направлений прямой можно зафиксировать и назвать положительным, другое направление — отрицательным. Прямая называется *направленной* или *ориентированной*, если на ней выбрано положительное направление (положительная ориентация). В дальнейшем направленные прямые будем обозначать так: $\overline{a}$, $\overline{b}, \ldots$.

Ясно, что положительное направление прямой однозначно определяется заданием хотя бы одного из лучей этого направления. Если h — луч положительного направления данной направленной прямой, то эту направленную прямую часто будем обозначать через $\overline{h}$. Аналогично, если UV — луч положительного направления данной направленной прямой, то прямую будем обозначать через $\overline{UV}$. В этом случае предполагается, что все рассматриваемые нами точки прямой UV лежат между точками U и V.

Задачи к главе 1

1. Доказать *предложение Паша*: если прямая пересекает отрезок AB и не проходит через точку C, то она пересекает один из отрезков AC и BC и не имеет общих точек с другим отрезком.
2. Доказать, что внутренний луч неразвернутого угла пересекает любой отрезок, концы которого лежат на разных сторонах угла.
3. Доказать утверждение 1.4°: любое наложение является преобразованием полуплоскости, при котором три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, лежащие на одной прямой, а три

точки, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.

4. Доказать свойство о двух лучах полуплоскости (свойство 1.3°): если углы hk_1 и hk_2 с общей стороной h отложены от этого луча в одну и ту же полуплоскость и лучи k_1 и k_2 не совпадают, то один и только один из лучей k_1 и k_2 является внутренним лучом угла, образованного лучом h и другим лучом.
5. Доказать, что угол, смежный с острым углом, является тупым, а угол, смежный с тупым, — острым.
6. Доказать, что через каждую точку плоскости проходит прямая, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.
7. Доказать, что от любого луча в полуплоскость, границе которой принадлежит луч, можно отложить один и только один прямой угол.
8. Две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а углы, заключенные между ними, не равны. Доказать, что третьи стороны треугольников не равны и против большего угла лежит большая сторона.
9. Сформулировать и доказать утверждение, обратное утверждению задачи 8.
10. Доказать, что треугольник равнобедренный, если выполняется хотя бы одно из условий: а) две его высоты равны; б) две его медианы равны.
11. Доказать, что биссектриса угла есть луч, состоящий из всех внутренних точек угла, каждая из которых равноудалена от прямых, содержащих стороны угла.
12. Доказать, что серединный перпендикуляр к отрезку есть прямая, состоящая из всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от концов данного отрезка.
13. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой BC, $AC = b$, $BC = a$. Доказать, что: а) если точка M лежит на катете AB, то $b < CM < a$; б) если число m удовлетворяет неравенствам $b < m < a$, то на катете AB существует одна и только одна точка M, такая, что $BM = m$.

14. Доказать, что точка M лежит между точками A и B тогда и только тогда, когда $AM + MB = AB$.
15. Доказать, что три точки A, B и C не лежат на одной прямой, если $AC \geqslant AB$, $AC \geqslant BC$, $AC < AB + BC$.
16. Доказать, что каждая точка, лежащая на отрезке OM, принадлежит лучу OM (см. свойство 5.1°).
17. Доказать, что два луча h_1 и h_2 сонаправлены тогда и только тогда, когда они имеют общую точку и начало одного из этих лучей не принадлежит второму лучу.
18. Лучи h, k и k' принадлежат прямой, где k' — продолжение луча k. Доказать утверждения: а) если $h \upuparrows k$, то $h \uparrow\downarrow k'$; б) если $h \uparrow\downarrow k$, то $h \upuparrows k'$.
19. Лучи h_1, h_2 и h_3 принадлежат прямой. Доказать утверждения: а) если $h_1 \upuparrows h_2$, $h_2 \uparrow\downarrow h_3$, то $h_1 \uparrow\downarrow h_3$; б) если $h_1 \uparrow\downarrow h_2$, $h_2 \uparrow\downarrow h_3$, то $h_1 \upuparrows h_3$.

Глава 2

АКСИОМА ЛОБАЧЕВСКОГО. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Эта глава посвящена теории параллельных прямых гиперболической плоскости, или плоскости Лобачевского. В начале главы сформулирована аксиома параллельности Лобачевского и доказана одна из важнейших теорем геометрии Лобачевского — теорема о сумме углов треугольника. Далее рассмотрены предложения, эквивалентные аксиоме Лобачевского.

Последующие два параграфа посвящены определению и основным свойствам направленных и ненаправленных параллельных прямых. В последнем параграфе главы введена функция Лобачевского и рассмотрены ее основные свойства.

§ 6. Аксиома Лобачевского. Теоремы о сумме углов треугольника и четырехугольника

1. Аксиома Лобачевского. Геометрия Лобачевского основана на аксиомах групп I–IV абсолютной геометрии и на следующей аксиоме Лобачевского, являющейся отрицанием аксиомы параллельных прямых евклидовой геометрии.

$V_л$. Существуют прямая a_0 и точка A_0, не лежащая на ней, такие, что через точку A_0 проходит не менее двух прямых, не пересекающих прямую a_0.

В этом параграфе мы докажем, что для любой прямой a и любой точки A, не лежащей на ней, существует не менее двух прямых, проходящих через точку A и не пересекающих прямую a.

В геометрии Лобачевского имеют место все утверждения и теоремы абсолютной геометрии, в частности те, которые рассмотрены нами в § 1–5.

2. Дефект треугольника. Введем понятие дефекта треугольника, которое в геометрии Лобачевского играет существенную роль при изучении свойств геометрических фигур. *Дефектом треугольника* ABC называется число $\delta(ABC) = 2d - \sigma(ABC)$, где $\sigma(ABC)$ — сумма мер углов треугольника ABC. В евклидовой геометрии, как следует из теоремы о сумме углов треугольника, дефект любого треугольника равен нулю. Мы докажем, что в геометрии Лобачевского дефект любого треугольника — положительное число. Для этого рассмотрим некоторые свойства дефектов треугольников в абсолютной геометрии, т. е. свойства, которые доказываются без использования аксиомы Лобачевского.

Из теоремы 5 § 3 непосредственно следует:

6.1°. В абсолютной геометрии дефект любого треугольника есть неотрицательное число.

6.2°. Если точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, то $\delta(ABC) = \delta(ABD) + \delta(ADC)$.

Если при этом $\delta(ABC) = 0$, то $\delta(ABD) = \delta(ADC) = 0$. Это свойство следует из очевидного равенства $\sigma(ABC) = \sigma(ABD) + \sigma(ADC) - 2d$ и из свойства 6.1°.

Предлагаем читателю, пользуясь свойствами 6.1° и 6.2°, самостоятельно доказать утверждение:

6.3°. Если точки B' и C' лежат на сторонах AB и AC треугольника ABC и $\delta(ABC) = 0$, то $\delta(AB'C') = 0$.

Докажем теперь две леммы о прямоугольных треугольниках, дефекты которых равны нулю.

Лемма 1. *Если дефект хотя бы одного прямоугольного треугольника равен нулю, то дефект любого прямоугольного треугольника равен нулю.*

□ Пусть дефект прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A равен нулю. Сначала докажем, что $\delta(AB_1C_1) = 0$, где B_1 и C_1 — точки, симметричные точке A относительно точек B и C (рис. 5). Если $\alpha = \widehat{B}$, $\beta = \widehat{C}$, то ясно, что $\alpha + \beta = d$.

Рассмотрим точку D, симметричную точке A относительно середины отрезка BC. Треугольники ABC и DCB равны, так как они симметричны относительно середины отрезка BC, поэтому $CD = AB$, $BD = AC$, $\widehat{BCD} = \alpha$, $\widehat{CBD} = \beta$, $\widehat{CDB} = d$. Так как $\alpha + \beta = d$, то $CD \perp AC$ и $DB \perp AB$. Таким образом, $\triangle CC_1D = \triangle ACB$ и $\triangle BDB_1 = \triangle ACB$, поэтому $\widehat{CC_1D} = \beta$, $\widehat{CDC_1} = \alpha$, $\widehat{BB_1D} = \alpha$, $\widehat{BDB_1} = \beta$. Луч DC — внутренний луч угла C_1DA, а DB — внутренний луч угла ADB_1, поэтому $C_1DA = 2\alpha$, $ADB_1 = 2\beta$. Отсюда, учитывая, что C_1, $B_1 \div AD$, мы заключаем, что точка D лежит на отрезке B_1C_1, и, следовательно, $\sigma(AB_1C_1) = d + \alpha + \beta = 2d$, $\delta(AB_1C_1) = 0$.

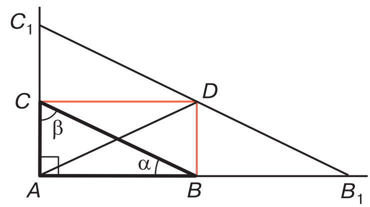


Рис. 5

Рассмотрим теперь произвольный прямоугольный треугольник PQR с прямым углом P и докажем, что $\delta(PQR) = 0$. Для этого на лучах AB и AC от точки A отложим отрезки $AQ' = PQ$, $AR' = PR$ и сначала докажем, что $\delta(AQ'R') = 0$.

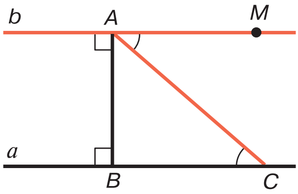
Рассмотрим точки B_1 и C_1, симметричные точке A относительно точек B и C. По доказанному $\delta(AB_1C_1) = 0$. Рассмотрим затем точки B_2 и C_2, симметричные точке A относительно точек B_1 и C_1. По доказанному $\delta(AB_2C_2) = 0$. Продолжая это построение, через n шагов получим треугольник AB_nC_n, такой, что $\delta(AB_nC_n) = 0$, $A–Q'–B_n$ и $A–R'–C_n$. Согласно свойству 6.3° $\delta(PQ'R') = 0$. Так как $\triangle PQR = \triangle AQ'R'$, то $\delta(PQR) = 0$. ■

Лемма 2. *Если дефект прямоугольного треугольника ABC с прямым углом A равен нулю, то на луче AB существует точка B_n, такая, что $\delta(ACB_n) = 0$ и $\widehat{B}_n = \frac{1}{2^n}\widehat{B}$.*

□ Возьмем на луче AB точку B_1 так, чтобы $A–B–B_1$ и $BB_1 = BC$. Треугольник BCB_1 равнобедренный, поэтому $\angle B_1 = \angle BCB_1$. Если M — середина основания CB_1 этого треугольника, то $\triangle BCM = \triangle BB_1M$, поэтому эти треугольники прямоугольные и по лемме 1 $\delta(BCM) = \delta(BB_1M) = 0$. Тогда по свойству 6.2° $\delta(BCB_1) = \delta(BCM) + \delta(BMB_1) = 0$. Отсюда следует, что $\widehat{AB_1C} = \frac{1}{2}\widehat{B}$ и $\delta(ACB_1) = \delta(ABC) + \delta(BCB_1) = 0$. Возьмем теперь на луче AB точки $B_2, B_3, \ldots, B_n$ так, чтобы $A{-}B_1{-}B_2$, $B_1B_2 = B_1C$; $A{-}B_2{-}B_3$, $B_2B_3 = B_2C, \ldots, A{-}B_{n-1}{-}B_n$, $B_{n-1}B_n = B_{n-1}C$. Тогда $\widehat{AB_2C} = \frac{1}{2}\widehat{AB_1C} = \frac{1}{2^2}\widehat{B}, \ldots, \widehat{AB_nC} = \frac{1}{2^n}\widehat{B}$. ■

Теорема 1. *На плоскости Лобачевского даны любая прямая a и любая точка A, не лежащая на ней, тогда через точку A проходит не менее двух прямых, не пересекающих прямую a.*

□ Доказательство проведем методом от противного. Пусть существуют точка A и прямая a, не проходящая через точку A, такие, что через A проходит менее двух прямых, не пересекающих прямую a. Проведем через точку A перпендикуляр AB к прямой a, затем через точку A проведем прямую b, перпендикулярную прямой AB. Тогда по лемме § 2 прямые a и b не пересекаются, следовательно, b — единственная прямая, проходящая через точку A и не пересекающая прямую a. Рассмотрим любую точку C прямой a, отличную от B (рис. 6, a). От луча AC в полуплоскости, не содержащей точку B, отложим угол CAM, равный углу BCA. По лемме § 2 прямые a и AM не пересекаются, следовательно, точка M принадлежит прямой b. Так как AC — внутренний луч угла BAM, то $\widehat{BAM} = \widehat{BAC} + \widehat{CAM} = \widehat{BAC} + \widehat{ACB}$. По построению углы ABC и BAM прямые, поэтому сумма мер углов треугольника ABC равна $2d$, тогда по лемме 1 получаем, что дефект любого прямоугольного треугольника равен нулю. По аксиоме $\text{V}_\text{л}$ на плоскости Лобачевского существуют прямая a_0 и точка A_0, не лежащая на ней, такие, что через A_0 проходит не менее двух прямых, не пересекающих a_0. Проведем из точки A_0 перпендикуляр A_0C_0 на прямую A_0 и прямую A_0E, перпендикулярную прямой A_0C_0. По лемме § 2



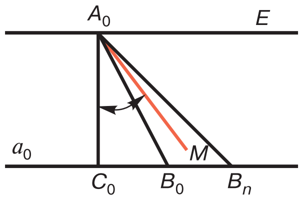


Рис. 6

прямые A_0E и a_0 не пересекаются. Рассмотрим вторую прямую A_0M, не пересекающую прямую a_0. Не нарушая общности, можно считать, что точка M — внутренняя точка угла C_0A_0E (рис. 6, *б*). Обозначим через C_0B_0 тот луч прямой a_0, который лежит по одну сторону с точкой M относительно прямой A_0C_0, и обозначим через α меру угла C_0A_0M.

Пользуясь леммой 2, на луче C_0B_0 возьмем точку B_n так, чтобы $\widehat{A_0B_nC_0} = \frac{1}{2^n}\widehat{A_0B_0C_0}$, где натуральное число n удовлетворяет неравенству $2^n > \frac{\widehat{B}}{d-\alpha}$. Тогда, очевидно, $\widehat{B}_n < d - \alpha$, а так как дефект любого прямоугольного треугольника равен нулю, то $\widehat{C_0A_0B_n} = d - \widehat{B}_n > d-(d-\alpha) = \alpha$, т. е. $\angle C_0A_0B_n > \angle C_0A_0M$. Отсюда следует, что A_0M — внутренний луч угла $C_0A_0B_n$, следовательно, по свойству 1.2° этот луч пересекает прямую a_0, что противоречит выбору прямой A_0M. Поэтому наше предположение неверно и через точку A проходит не менее двух прямых, не пересекающих прямую a. ■

Часто вместо аксиомы V$_л$ рассматривают аксиому V*.

V*. Через любую точку A, не лежащую на произвольной прямой a, проходит не менее двух прямых, не пересекающих прямую a.

Докажем, что через точку A, не лежащую на данной прямой a, проходит бесконечное множество прямых, не пересекающихся с прямой a. В самом деле, пусть b и c — две прямые, которые проходят через точку A и согласно аксиоме V* не пересекают прямую a. Эти

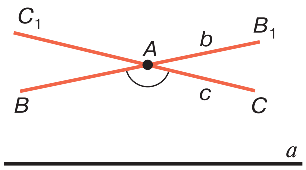


Рис. 7

прямые образуют две пары вертикальных углов, которые на рис. 7 обозначены через BAC, B_1AC_1 и BAC_1, B_1AC. Ясно, что все точки прямой A принадлежат внутренней области угла BAC. Тогда любая прямая, проходящая через точку A и лежащая внутри вертикальных углов BAC_1 и B_1AC, не пересекает прямую a. Таких прямых, очевидно, бесконечное множество. Итак, в пучке прямых с центром A существует бесконечное множество прямых, не пересекающих прямую a. В этом же пучке, очевидно, существует бесконечное множество прямых, пересекающих прямую a. Ниже будет доказано, что в пучке с центром A существуют две граничные прямые, которые отделяют пересекающие прямую а прямые от не пересекающих ее прямых.

Эти прямые и называются *прямыми, параллельными прямой a, по Лобачевскому*. Наша ближайшая задача заключается в том, чтобы более четко сформулировать это утверждение и доказать его. Однако сначала докажем теорему о сумме углов треугольника, которая неоднократно используется в дальнейшем изложении.

3. Сумма углов треугольника и четырехугольника.

Теорема 2. *На плоскости Лобачевского сумма углов любого треугольника меньше $2d$.*

□ Доказательство проведем методом от противного. Пусть существует треугольник BCD, такой, что $\sigma(BCD) \geqslant 2d$ и, следовательно, $\delta(BCD) \leqslant 0$. По свойству 6.1° $\delta(BCD) = 0$. Не нарушая общности, можно считать, что углы B и D острые. Тогда, если CA — высота треугольника, то B–A–D, поэтому по свойству 6.2° $\delta(ABC) = 0$. Через точку C проведем прямую CE, перпендикулярную CA. По лемме § 2 прямая CE не пересекает прямую AB. По аксиоме V* существует прямая CM, отличная от CE, не пересекающая прямую AB. Так же как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что прямая CM пересекает прямую AB, что противоречит выбору прямой CM, поэтому наше предположение неверно и сумма углов любого треугольника меньше $2d$. ■

Следствие 1. *На плоскости Лобачевского дефект любого треугольника есть положительное число.*

Понятие многоугольника, в частности выпуклого четырехугольника, относится к абсолютной геометрии, поэтому все определения и теоремы, приведенные в § 23 пособия [1], имеют место и в геометрии Лобачевского.

Напомним, что четырехугольник называется *выпуклым*, если каждые две его соседние вершины лежат по одну сторону от прямой, проходящей через две другие вершины. Четырехугольник является выпуклым тогда и только тогда, когда его диагонали пересекаются (см. [1] § 23, теорема 1).

Докажем теорему о сумме углов выпуклого четырехугольника на плоскости Лобачевского.

Теорема 3. *На плоскости Лобачевского сумма углов выпуклого четырехугольника меньше* $4d$.

□ Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$ и докажем, что $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}<4d$. Обозначим через O точку пересечения диагоналей AC и BD. Так как BD — внутренний луч угла ABC, то $\widehat{B}=\widehat{ABD}+\widehat{DBC}$. Аналогично $\widehat{D}=\widehat{ADB}+\widehat{BDC}$. По теореме о сумме углов треугольника $\sigma(ABD)=\widehat{A}+\widehat{ABD}+\widehat{BDA}<2d$ и $\sigma(BDC)=\widehat{C}+\widehat{DBC}+\widehat{BDC}<2d$. Сложив эти неравенства и учтя предыдущие два равенства, получим: $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}<4d$. ■

Следствие. *В любом выпуклом четырехугольнике хотя бы один из его углов острый.*

§ 7. Признаки равенства треугольников на плоскости Лобачевского

1. Равенство треугольников по трем углам. В § 2 было отмечено, что все пять признаков равенства треугольников, известные нам из курса геометрии (см. § 2, теоремы 1–3, 8, 9), относятся к абсолютной геометрии, поэтому они имеют место и в геометрии Лобачевского. В этой геометрии имеется еще один важный признак равенства треугольников, не имеющий места в геометрии Евклида.

Теорема. *Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.*

□ Докажем, что $AB = A_1B_1$. Тогда по второму признаку равенства треугольников $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Допустим, что это не так, т. е. $AB \neq A_1B_1$. Пусть, например, $AB < A_1B_1$. Отложим на лучах A_1B_1 и A_1C_1 отрезки A_1B' и A_1C', равные соответственно отрезкам AB и AC. Тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B'C'$ по первому признаку равенства треугольников (рис. 8). Отсюда следует, что $\angle A_1B'C' = \angle B_1$ и $\angle A_1C'B' = \angle C_1$. По лемме § 2 прямые B_1C_1 и $B'C'$ не пересекаются. Так как $A_1B' = AB < A_1B_1$, то $A_1 - B' - B_1$ и по предложению Паша $A_1 - C' - C_1$.

Четырехугольник $B_1C_1C'B'$ выпуклый, и сумма его углов равна $4d$. В самом деле, $\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{2} + \widehat{1} = B_1 + C_1 + (2d - \widehat{A_1C'B'}) + (2d - \widehat{C'B'A}) = 4d + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 - \widehat{C}_1 - \widehat{B}_1 = 4d$. Мы пришли к противоречию с теоремой 2 § 6. Таким образом, $AB = A_1B_1$, поэтому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. ■

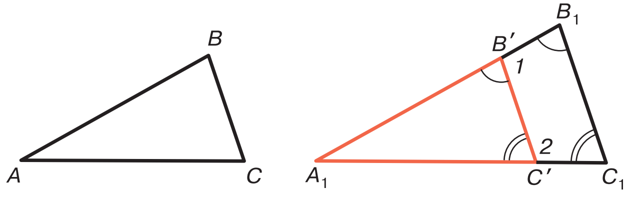


Рис. 8

Следствие. *Два прямоугольных треугольника равны, если острые углы одного треугольника соответственно равны острым углам другого.*

Из доказанной теоремы следует важнейший вывод: *в геометрии Лобачевского не существуют два неравных подобных треугольника.* Отсюда легко прийти к выводу, что в геометрии Лобачевского вообще не существуют фигуры, которые подобны, но не равны друг другу.

2. Другие признаки равенства треугольников. Признаки равенства треугольников, рассмотренные выше, основаны на равенстве трех основных элементов — сторон и углов двух треугольников. Однако в геометрии Лобачевского, так же как и в геометрии Евклида, можно сформулировать и другие признаки равенства треугольников, основанные на равенстве других элементов треугольников, некоторые из которых отличны от сторон и углов.

Рассмотрим примеры. Сначала рассмотрим признаки равенства треугольников в абсолютной геометрии.

Задача 1. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $AM=A_1M_1$, где AM и A_1M_1 — медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

□ Пусть точки A и D симметричны относительно точки M, а точки A_1 и D_1 симметричны относительно точки M_1 (рис. 9). Треугольники ABM и DCM равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $AB=DC$. Аналогично $\triangle A_1B_1M_1=\triangle D_1C_1M_1$, поэтому $A_1B_1=D_1C_1$.

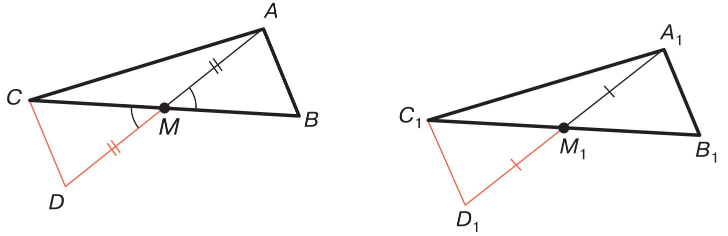


Рис. 9

Так как $AM=A_1M_1$, то $AD=A_1D_1$. Таким образом, $\triangle ACD=\triangle A_1C_1D_1$, следовательно, $\angle CAD=\angle C_1A_1D_1$. Отсюда мы заключаем, что $\triangle ACM=\triangle A_1C_1M_1$ по первому признаку равенства треугольников, следовательно, $CM=C_1M_1$.

Из равенства $CM = C_1M_1$ следует, что $BC = B_1C_1$, поэтому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трем сторонам. ■

Задача 2. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $AH = A_1H_1$, где AH и A_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ и углы B и B_1 не острые.

□ Очевидно, $AH \leqslant AB$. Возможны два случая:

а) $AB = AH$. В этом случае точки B и H совпадают, поэтому $\angle ABC$ прямой. Так как $AB = A_1B_1$, $AH = A_1H_1$, то $A_1B_1 = A_1H_1$ и $\angle A_1B_1C_1$ прямой. Таким образом, в этом случае данные треугольники прямоугольные и равны по гипотенузе и катету.

б) $AH < AB$. В этом случае точки B и H не совпадают, поэтому $\angle ABC$ тупой и точка H лежит на продолжении луча BC (рис. 10). Так как $AB = A_1B_1$, $AH = A_1H_1$, то $A_1H_1 < A_1B_1$. Аналогично предыдущему $\angle A_1B_1C_1$ тупой и точка H_1 лежит на продолжении луча B_1C_1.

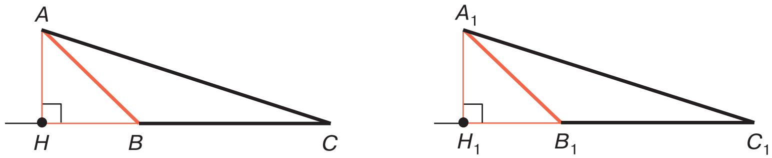


Рис. 10

Прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по гипотенузе и катету, поэтому $\angle ABH = \angle A_1B_1H_1$. Отсюда следует, что $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. В треугольнике ABC $\angle B > \angle C$, поэтому $AC > AB$. Итак, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AC > AB$, поэтому эти треугольники равны по пятому признаку равенства треугольников. ■

В абсолютной геометрии имеются и другие признаки равенства треугольников, два из которых сформулированы в задаче 6 к главе II.

Рассмотрим теперь две задачи, в которых сформулированы признаки равенства треугольников в геометрии Лобачевского.

Задача 3. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $\angle B = \angle B_1$, $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$, $\angle CMA = \angle C_1M_1A_1$, где AM и A_1M_1 — медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

□ Так как $\angle CMA = \angle C_1M_1A_1$, то смежные с ними углы равны: $\angle BMA = \angle B_1M_1A_1$ (рис. 11). Треугольники ABM и $A_1B_1M_1$ равны по трем углам, поэтому $AB = A_1B_1$, $BM = B_1M_1$. Из второго равенства следует, что $BC = B_1C_1$. Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников: $BA = B_1A_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. ■

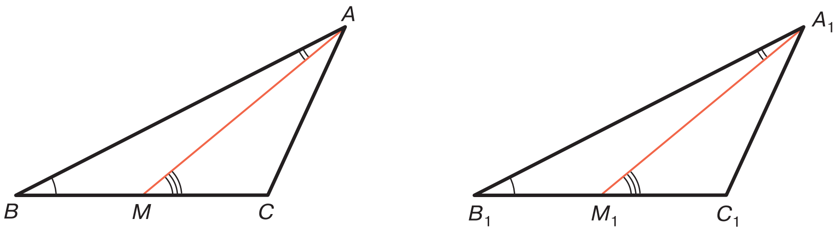


Рис. 11

Задача 4. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle ACH = \angle A_1C_1H_1$, где CH и C_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

□ По условию задачи точки A и H, а также точки A_1 и H_1 не совпадают, поэтому либо углы A и A_1 данных треугольников острые (рис. 12, *а*), либо оба угла тупые (рис. 12, *б*). Очевидно, и в первом и во втором случаях $\angle CAH = \angle C_1A_1H_1$ (в первом случае $\angle CAH = \angle CAB = \angle C_1A_1B_1 = \angle C_1A_1H_1$, во втором случае $\angle CAH = 2d - \angle CAB = 2d - \angle C_1A_1B_1 = \angle C_1A_1H_1$).

Прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по двум острым углам: $\angle ACH = \angle A_1C_1H_1$ по условию и $\angle CAH = \angle C_1A_1H_1$, следовательно, $AC = A_1C_1$. Таким образом, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AC = A_1C_1$, поэтому треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по четвертому признаку равенства треугольников. ■

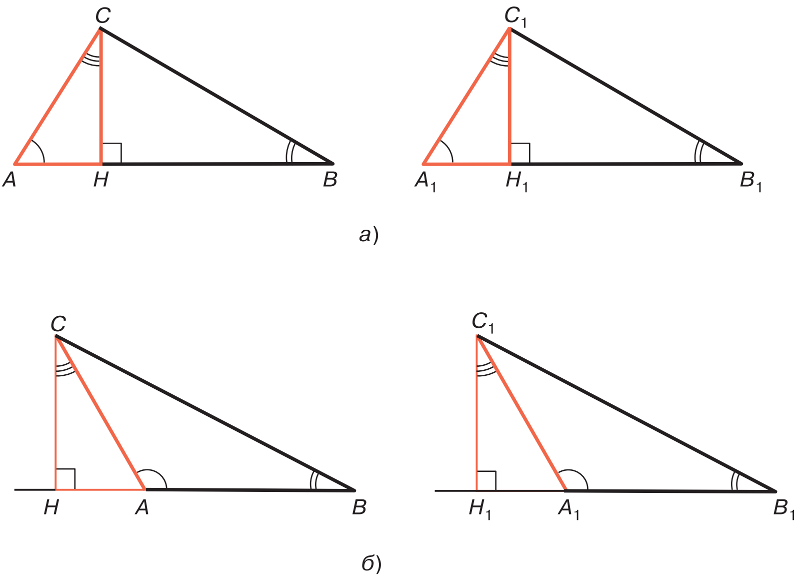


Рис. 12

Важно заметить, что признаки равенства треугольников, которые сформулированы в задачах 3 и 4, не имеют места в евклидовой геометрии.

§ 8. Предложения, эквивалентные аксиоме Лобачевского

1. Эквивалентные предложения. Пусть предложения $П_1$ и $П_2$ сформулированы в терминах абсолютной геометрии. Говорят, что предложение $П_1$ эквивалентно предложению $П_2$ в терминах абсолютной геометрии (запись: $П_1 \sim П_2$), если предложение $П_2$ является логическим следствием аксиом АГ и предложения $П_1$, и предложение $П_1$ является логическим следствием аксиом АГ и предложения $П_2$. (Здесь АГ — система аксиом абсолютной геометрии, т. е. аксиомы групп I, II, III и IV.) Ясно, что если $П_1 \sim П_2$, то $П_2 \sim П_1$.

Пусть $П_1$, $П_2$ и $П_3$ — три предложения, сформулированные в терминах абсолютной геометрии. Докажем, что если $П_1 \sim П_2$ и $П_2 \sim П_3$, то $П_1 \sim П_3$. В самом деле, из $П_1 \sim П_2$ следует, что АГ, $П_1 \Rightarrow П_2$ и АГ, $П_2 \Rightarrow П_1$. Из $П_2 \sim П_3$ следует, что АГ, $П_2 \Rightarrow П_3$ и АГ, $П_3 \Rightarrow П_2$. Таким образом, АГ, $П_1 \Rightarrow$ *АГ*, $П_2 \Rightarrow П_3$ и АГ, $П_2 \Rightarrow П_1$, поэтому $П_1 \sim П_3$.

В системе аксиом Лобачевского аксиому V^* можно заменить любым предложением П, сформулированным в терминах абсолютной геометрии и эквивалентным предложению V^*. Другими словами, геометрия, построенная на аксиомах АГ, П, совпадает с геометрией Лобачевского. В самом деле, если какое-нибудь утверждение или теорема Т доказана как логическое следствие аксиом АГ, П, т. е. АГ, $П \Rightarrow Т$, то в силу АГ, $V^* \Rightarrow$ АГ, П имеем: АГ, $V^* \Rightarrow Т$. Обратно: если АГ, $V^* \Rightarrow Т$, то в силу АГ, $П \Rightarrow$ АГ, V^* имеем: АГ, $П \Rightarrow Т$.

2. Предложения, эквивалентные аксиоме Лобачевского. Пользуясь теоремой о сумме углов треугольника и леммами 1–2 § 6, рассмотрим пять предложений, эквивалентных аксиоме V^*.

Предложение $Л_1$. *Сумма мер углов любого треугольника меньше $2d$.*

□ Доказанная в § 6 теорема о сумме углов треугольника означает, что АГ, $V^* \Rightarrow Л_1$.

Докажем обратное утверждение, т. е. что АГ, $Л_1 \Rightarrow V^*$. Это означает, что, пользуясь аксиомами АГ, $Л_1$, следует доказать, что через произвольную точку A, не лежащую на прямой a, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие прямую a. Рассмотрим перпендикуляр AH и какую-нибудь наклонную AM к прямой a (рис. 13). Через точку A проведем прямую AC, перпендикулярную к прямой AH, где $M,\ C \mathrel{\ddot{-}} AH$. По следствию 1 теоремы § 1 прямые a и AC не пересекаются. Так как AM — внутренний луч

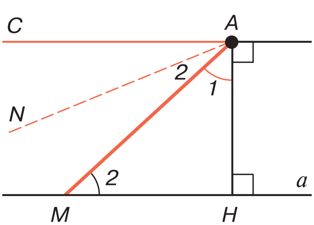


Рис. 13

прямого угла HAC, то $\widehat{1}+\widehat{MAC}=d$ (см. рис. 13). Но по предложению Л$_1$ $\widehat{1}+\widehat{2}<d$, следовательно, $\widehat{2}<\widehat{MAC}$. Отсюда следует, что существует внутренний луч AN угла MAC, такой, что $\angle MAN=\angle 2$. По лемме § 2 прямые AN и a не пересекаются. Итак, через точку A проходят две прямые AN и AC, которые не пересекают прямую a. ■

Предложение Л$_2$. *Сумма мер углов хотя бы одного треугольника меньше $2d$.*

□ Докажем сначала, что предложения Л$_1$ и Л$_2$ эквивалентны. Ясно, что АГ, Л$_1 \Rightarrow$ Л$_2$. Докажем методом от противного, что АГ, Л$_2 \Rightarrow$ Л$_1$. Допустим, что существует хотя бы один треугольник MNP, такой, что $\sigma(MNP)\geqslant 2d$. Тогда ясно, что $\sigma(MNP)=2d$, поэтому $\delta(MNP)=0$. Не нарушая общности, можно предположить, что углы M и P острые, поэтому если NH — высота этого треугольника, то M–H–P (рис. 14).

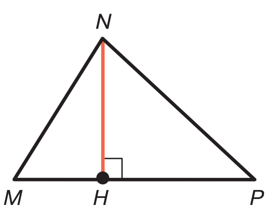


Рис. 14

По свойству 6.2° $\delta(MNH)=0$. По лемме 1 § 6 дефект любого прямоугольного треугольника равен нулю. Но это невозможно, так как согласно предложению Л$_2$ существует треугольник $A_0B_0C_0$, такой, что $\delta(A_0B_0C_0)>0$. Если углы A_0 и B_0 этого треугольника острые и C_0H_0 — высота треугольника, то по свойству 6.2° $\delta(A_0B_0C_0)=\delta(A_0B_0H_0)+\delta(C_0H_0B_0)$, поэтому дефект хотя бы одного из прямоугольных треугольников $A_0C_0H_0$ и $C_0H_0B_0$ — положительное число.

Итак, Л$_1 \sim$ Л$_2$. Выше было доказано, что Л$_1 \sim \mathrm{V}^*$, поэтому Л$_1 \sim \mathrm{V}^*$. ■

Докажем теперь, что аксиома Лобачевского эквивалентна предложению, которое является отрицанием аксиомы параллельных прямых евклидовой геометрии.

Предложение Л$_3$. *Существуют прямая a_0 и точка A_0, не лежащая на ней, такие, что через эту точку проходят не менее двух прямых, не пересекающих данную прямую.*

□ Как было показано в п. 1 § 6, из $\mathrm{V}_{\text{л}}$ следует V^*. Ясно, что из V^* следует Л_3. ■

Предложение Л_4. *Если AOB — произвольный острый угол, то существует хотя бы одна прямая, которая пересекает сторону OB угла под прямым углом и не имеет общих точек со стороной OA.*

□ Докажем сначала, что АГ, $\text{Л}_4 \sim \mathrm{V}^*$. Обозначим через a прямую, о существовании которой говорится в предложении Л_4. Через точку O проведем прямую b, перпендикулярную к OB. Тогда, очевидно, OA и b — различные прямые и по следствию 1 теоремы § 1 прямые a и b не пересекаются (рис. 15, *а*). По условию прямые a и OA также не пересекаются (продолжение луча OA не может пересечь прямую a, так как этот луч и прямая a расположены в разных полуплоскостях с общей границей b). Таким образом, имеет место предложение Л_3, т. е. АГ, $\text{Л}_4 \Rightarrow \text{Л}_3$. В силу $\text{Л}_3 \sim \mathrm{V}^*$ имеем: АГ, $\text{Л}_3 \Rightarrow \mathrm{V}^*$, поэтому АГ, $\text{Л}_4 \Rightarrow \mathrm{V}^*$.

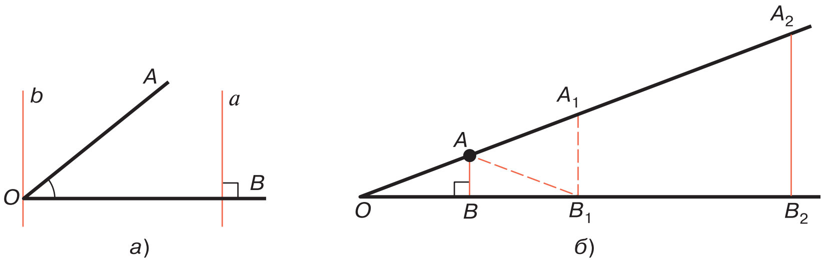


Рис. 15

Докажем теперь методом от противного, что АГ, $\mathrm{V}^* \Rightarrow \text{Л}_4$. Допустим, что это не так, т. е. что любая прямая, пересекающая луч OB под прямым углом, пересекает луч OA. Так как $\angle AOB$ острый, то, не нарушая общности, можно предположить, что AB — перпендикуляр, проведенный к прямой OB. Обозначим через δ_0 дефект треугольника OAB. По следствию 1 теоремы § 6 $\delta_0 > 0$. Возьмем точку B_1, симметричную точке O относительно B, проведем прямую через точку B_1, перпендикулярную к прямой OB, и обозначим через A_1 точку пересечения этой прямой с лучом OA (рис. 15, *б*). Ясно, что $\delta(OA_1B_1)=\delta(OAB)+\delta(ABB_1)+\delta(AB_1A_1)=2\delta_0+$ $+\delta(AB_1A_1)>2\delta_0$. Аналогично строим $\triangle OB_2A_2$ так, что точки O и B_2 симметричны относительно точки B_1 и $A_2B_2\perp OB$. По доказанному $\delta(OB_2A_2)>$ $>2\delta(OB_1A_1)>2^2\delta_0$. Продолжая этот процесс, через n шагов мы построим треугольник OB_nA_n, такой, что $\delta(OB_nA_n)>2^n\delta_0$. Если выбрать n так, чтобы $2^n\delta_0>2d$, то получим: $\delta(OB_nA_n)>2d$. Но это неравенство противоречит определению дефекта треугольника, так как $\delta(OB_nA_n)=2d-\sigma(ABC)<2d$. Итак, АГ, $\mathrm{V}^*\Rightarrow$ Л$_4$, поэтому Л$_4\Rightarrow\mathrm{V}^*$. ■

Предложение Л$_5$. *Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

□ Доказанная в § 7 теорема, выражающая признак равенства треугольников, означает, что АГ, $\mathrm{V}^*\Rightarrow$ Л$_5$.

Докажем обратное утверждение, т. е. что АГ, Л$_5\Rightarrow\mathrm{V}^*$. Докажем сначала, что АГ, Л$_5\Rightarrow$ Л$_2$. Возьмем точку B_1 на стороне AB некоторого треугольника ABC и от луча B_1A в полуплоскость, содержащую точку C, отложим угол AB_1M_1, равный углу B (рис. 16). По лемме § 2 прямые BC и B_1M_1 не имеют общих точек, поэтому по предложению Паша прямая B_1M_1 пересекает отрезок AC в некоторой точке C_1 (см. рис. 16).

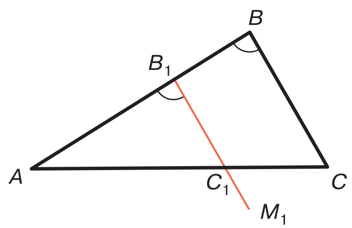


Рис. 16

Ясно, что $\angle C\neq\angle B_1C_1A$, так как в противном случае $\triangle ABC=\triangle AB_1C_1$ и $AB=AB_1$, что невозможно. Таким образом, у треугольников ABC и AB_1C_1 $\angle A$ общий,

$\angle B = \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$, поэтому $\sigma(ABC) \neq \sigma(AB_1C_1)$. Учитывая теорему Лежандра (см. § 3, теорема 5), мы заключаем, что сумма углов хотя бы одного из треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ меньше $2d$. Итак, имеет место утверждение Л_2.

Выше было указано, что $\text{Л}_2 \sim \text{V}^*$, поэтому АГ, $\text{Л}_2 \Rightarrow \text{V}^*$. Таким образом, АГ, $\text{Л}_5 \Rightarrow$ АГ, Л_2, АГ, $\text{Л}_2 \Rightarrow \text{V}^*$, поэтому АГ, $\text{Л}_5 \Rightarrow \text{V}^*$. ■

Из предыдущего изложения следует, что любое предложение, эквивалентное аксиоме Лобачевского, является, по существу, теоремой геометрии Лобачевского. В частности, предложение Л_1 есть теорема о сумме углов треугольника (см. § 6, теорема 1), предложение Л_5 — теорема § 7. Предложения Л_2 и Л_3 являются очевидными следствиями из теоремы 1 § 6 и аксиомы V^*, а предложение Л_4 является теоремой, которую мы используем при изучении взаимного расположения прямых на плоскости Лобачевского.

Замечание. Очевидно, любое утверждение, эквивалентное аксиоме V^*, неверно в евклидовой геометрии. В частности, в евклидовой геометрии любая прямая, пересекающая сторону острого угла под прямым углом, пересекает другую сторону угла. Это утверждение непосредственно следует из пятого постулата Евклида.

§ 9. Параллельность луча и прямой

1. Параллельность двух лучей. Луч AB назовем *параллельным* лучу CD, если прямые AB и CD не имеют общих точек и любой внутренний луч угла CAB пересекает луч CD (рис. 17).

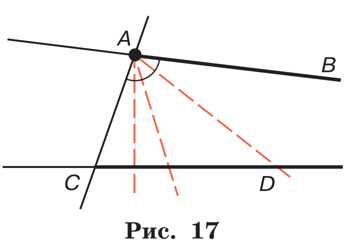


Рис. 17

Из этого определения следует, что если луч AB параллелен лучу CD, то лучи AB и CD расположены в одной полуплоскости с границей AC. Предлагаем читателю самостоятельно доказать это утверждение (см. задачу 10).

Докажем лемму о симметричности параллельности двух лучей.

Лемма. *Если луч AB параллелен лучу CD, то луч CD параллелен лучу AB.*

□ Так как луч AB параллелен лучу CD, то прямые CD и AB не имеют общих точек. Поэтому лемма будет доказана, если мы докажем, что любой внутренний луч угла ACD пересекает луч AB. Пусть это не так, т. е. существует некоторый внутренний луч CM угла ACD, который не пересекает луч AB (рис. 18). Не нарушая общности, можно считать, что угол $\angle DCM$ острый (в противном случае вместо луча CM возьмем внутренний луч CM' угла DCM так, чтобы $\angle DCM'$ был острым).

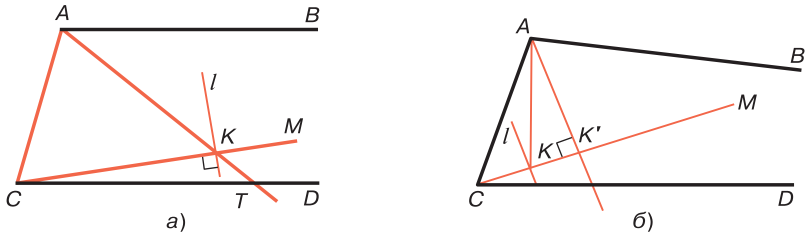


Рис. 18

Докажем, что любая прямая l, проходящая через произвольную точку K луча CM и перпендикулярная лучу CM, пересекает луч CD. Для этого заметим, что каждая точка луча CM, в частности точка K, является внутренней точкой угла CAB, поэтому AK — внутренний луч этого угла. Из условия леммы следует, что луч AK пересекает луч CD в некоторой точке T.

Если $\angle AKC$ прямой, то луч AK принадлежит прямой l, и в этом случае очевидно, что l пересекает луч CD. Рассмотрим два других возможных случая: а) угол AKC острый (рис. 18, *а*). Тогда смежный с ним угол CKT тупой, поэтому прямая l проходит внутри этого угла и по свойству $1.2°$ пересекает луч CD; б) угол

AKC тупой (рис. 18, *б*). Тогда смежный с ним угол AKM острый, поэтому если AK' — перпендикуляр к прямой CM, то C–K–K'. Луч AK' — внутренний луч угла CAB, поэтому он пересекает луч CD. По предложению Паша прямая l пересекает луч CD.

Полученный нами вывод противоречит предложению $Л_4$, поэтому наше предположение неверно, и, следовательно, любой внутренний луч угла ACD пересекает луч AB. ■

Доказанная лемма позволяет говорить о параллельности двух лучей, не указывая порядок, в котором они заданы.

Параллельность лучей h и k будем обозначать так: $h \parallel k$, или $k \parallel h$, а лучей AB и CD так: л$AB \parallel$ лCD, или л$CD \parallel$ лAB.

З а д а ч а. Доказать, что если лучи AB и CD параллельны, то их продолжения AB' и CD' не параллельны.

□ Так как л$AB \parallel$ лCD, то прямые AB и CD не пересекаются. По аксиоме V* через точку A проходит по крайней мере еще одна прямая AM, отличная от AB, которая не пересекает прямую CD. Предположим, что $M, C \doteq AB$. Тогда AM является внутренним лучом либо угла CAB, либо угла CAB' и не пересекает прямую CD. Первый случай невозможен, так как л$AB \parallel$ лCD, следовательно, AM — внутренний луч угла CAB'. Отсюда следует, что лучи AB' и CD' не параллельны. ■

2. Параллельность луча и прямой. Будем говорить, что *луч h параллелен данной прямой a*, если на прямой a существует такое направление, что луч h параллелен любому лучу этого направления прямой a.

Докажем теорему, являющуюся признаком параллельности луча и прямой.

Теорема. *Если данный луч h параллелен хотя бы одному лучу, принадлежащему прямой a, то луч h параллелен прямой a.*

□ Пусть $h \parallel k$, где k — луч, принадлежащий прямой a. Теорема будет доказана, если мы докажем, что $h \parallel l$, где l — любой луч прямой a, сонаправленной с лучом k.

Очевидно, представляет интерес только тот случай, когда лучи k и l не совпадают.

Так как $k \upuparrows l$, то эти лучи имеют общие точки, одну из которых обозначим через M. Обозначим лучи h, k и l соответственно через OA, KM и LM. Из соотношения $h \parallel k$ следует, что прямые OA и LM не имеют общих точек, поэтому для доказательства того, что $h \parallel l$, достаточно доказать, что любой внутренний луч x угла AOL пересекает луч l.

Согласно лемме § 5 возможны два случая, каждый из которых рассмотрим в отдельности.

а) $L \in k$, $K \notin l$ (рис. 19, a). Так как все точки луча k принадлежат внутренней области угла KOA, то точка L принадлежит внутренней области угла, поэтому луч OL — внутренний луч этого угла. Луч x — внутренний луч угла AOL, следовательно, x — внутренний луч угла KOA (см. рис. 19, a). В силу соотношения $h \parallel k$ луч x пересекает луч k. Точка пересечения не может принадлежать отрезку KL (углы KOE и LOA не имеют общих внутренних точек), поэтому эта точка лежит на луче l, т. е. луч x пересекает луч l. Следовательно, $h \parallel l$.

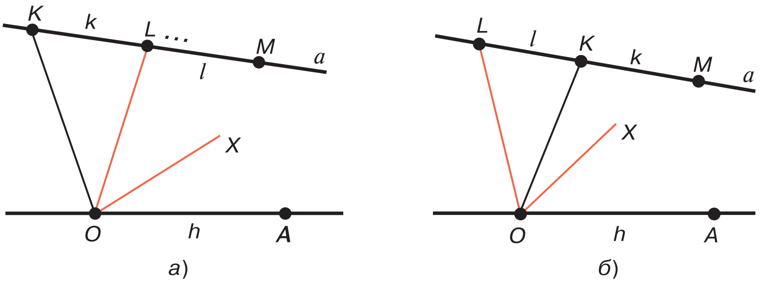


Рис. 19

б) $K \in l$, $L \notin k$ В этом случае L–K–M, поэтому $L, A \div OK$. Отсюда, учитывая, что лучи OL и OK расположены в одной полуплоскости с границей OA, заключаем, что OK — внутренний луч угла LOA. Так как x — внутренний луч угла AOL, то либо луч x

проходит внутри угла LOK, либо совпадает с лучом OK, либо проходит внутри угла KOA. Очевидно, в любом из этих случаев луч x пересекает луч l. Следовательно, и в этом случае $h \parallel l$. ■

Если луч h параллелен прямой a, то на прямой A однозначно определяется некоторое направление, которому принадлежат все лучи прямой a, каждый из которых параллелен лучу h. Это направление на прямой A будем называть *направлением параллельности*: $h \parallel a$. Параллельность луча h и прямой a будем обозначать так: $h \parallel \overline{a}$, или $h \parallel \overline{a}$, где $\overline{a}$ — *направленная прямая* a, лучи положительного направления которой параллельны лучу h.

§ 10. Параллельность направленных прямых

1. Признак параллельности направленных прямых. Две направленные прямые называются *параллельными*, если любой луч положительного направления каждой из этих прямых параллелен любому лучу положительного направления другой прямой. Из этого определения следует, что параллельные прямые не имеют общих точек. Параллельность прямых $\overline{U_1V_1}$ и $\overline{U_2V_2}$ обозначается так: $\overline{U_1V_1} \parallel \overline{U_2V_2}$ или $\overline{U_2V_2} \parallel \overline{U_1V_1}$.

Докажем теорему, выражающую признак параллельности двух направленных прямых.

Теорема 1. *Если хотя бы один луч положительного направления прямой* $\overline{UV}$ *параллелен некоторому лучу положительного направления прямой* $\overline{U'V'}$, *то прямые* $\overline{UV}$ *и* $\overline{U'V'}$ *параллельны.*

□ Пусть h_0 и h'_0 — данные параллельные лучи положительных направлений соответственно прямых $\overline{UV}$ и $\overline{U'V'}$. Докажем, что если h и h' — произвольные лучи положительных направлений этих прямых, то $h \parallel h'$. Так как $h_0 h'_0$, то по теореме § 9 $h_0 \parallel \overline{U'V'}$, поэтому $h_0 \parallel h'$. Из соотношения $h' \parallel h_0$ по той же теореме $h' \parallel \overline{UV}$, поэтому $h' \parallel h$. ■

2. Теорема существования параллельных прямых. Докажем основную теорему.

Теорема 2. *Существует одна и только одна направленная прямая, проходящая через данную точку O и параллельная данной направленной прямой $\overline{UV}$, не проходящей через точку O.*

□ Докажем сначала, что существует направленная прямая, проходящая через точку O и параллельная прямой $\overline{UV}$. Для этого проведем перпендикуляр OH к прямой UV и сначала докажем, что существует луч OD, параллельный лучу HV.

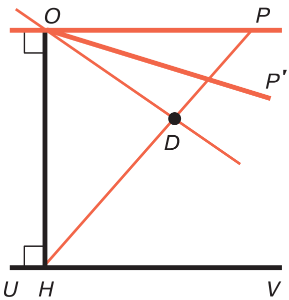


Рис. 20

Проведем прямую OP, перпендикулярную к прямой OH, где $P, V \,\ddot{-}\, OH$. По следствию 1 теоремы § 1 прямые OP и UV не пересекаются (рис. 20). По аксиоме V* через точку O, кроме прямой OP, проходит по крайней мере еще одна прямая, не пересекающая прямую UV. Тогда прямая, симметричная ей относительно OH, также не пересекает UV. Обозначим через OP' луч той из этих прямых, которая проходит внутри угла HOP (см. рис. 20).

Точки отрезка HP разобьем на два класса K_1 и K_2 по следующему закону: $X \in K_1$, если луч OX пересекает прямую UV; $Y \in K_2$, если луч OY не пересекает эту прямую. Ясно, что $H \in K_1$, $P \in K_2$ и каждый из классов содержит точки, отличные от H и P (например, точка пересечения луча OP' с отрезком HP принадлежит классу K_2). Далее, если $X \in K_1$ и X не совпадает с H, а $Y \in K_2$, то $H{-}X{-}Y$, так как в противном случае имеем: $H{-}Y{-}X$. Отсюда следует, что луч OY — внутренний луч угла HOX, поэтому пересекает прямую UV, что невозможно. Таким образом, классы точек K_1 и K_2 удовлетворяют условиям предложения Дедекинда (см. § 3, теорема 2).

Обозначим через D точку отрезка HP, которая производит сечение точек этого отрезка на классы K_1 и K_2. Нетрудно видеть, что $D \in K_2$, так как в противном случае на отрезке DP должны существовать точки класса K_1. В самом деле, пусть луч OD пересекает прямую UV в точке D_1, а E — точка прямой UV, такая, что H–D_1–E. Луч OE пересекает отрезок DP в точке, принадлежащей первому классу, что невозможно. Луч OD по определению параллелен лучу HV. По теореме 1 $\overline{OD} \parallel \overline{HV}$.

Докажем теперь, что $\overline{OD}$ — единственная прямая, проходящая через точку O и параллельная прямой $\overline{UV}$. Пусть, напротив, $\overline{OD_1}$ — другая прямая, параллельная $\overline{UV}$. По определению параллельности прямых каждый из лучей OD и OD_1 параллелен лучу HV, поэтому лучи OD, OD_1, HV расположены в одной полуплоскости с границей OH. По свойству 1.3° либо OD — внутренний луч угла HOD_1, либо OD_1 — внутренний луч угла HOD, но тогда один из лучей — OD или OD_1 — пересекает луч HV, что противоречит определению параллельности лучей. ■

3. Теорема о транзитивности параллельных прямых. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ *и прямая* CC' *пересекает отрезок* AB *в точке* C *и не имеет общих точек с прямыми* AA' *и* BB'. *Тогда если точки* A', B' *и* C' *лежат по одну сторону от прямой* AB, *то* $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ *и* $\overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$.

□ Докажем, что $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$. Для этого заметим, что по условию прямые AA' и CC' не пересекаются, поэтому достаточно доказать, что любой внутренний луч x угла CAA' пересекает луч CC'. Но это очевидно, так как л$AA' \parallel$ лBB' поэтому луч x, который является внутренним лучом угла BAA', пересекает луч BB', поэтому он пересекает и прямую CC' в некоторой точке M. Ясно, что точка M лежит на луче CC'.

Точно так же доказывается, что $\overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$. ■

Докажем теперь теорему о транзитивности параллельности направленных прямых.

Теорема 3. *Если каждая из двух направленных прямых* $\overline{U_1V_1}$ *и* $\overline{U_2V_2}$ *параллельна направленной прямой* $\overline{U_0V_0}$, *то* $\overline{U_1V_1} \parallel \overline{U_2V_2}$.

□ Прямые $\overline{U_1V_1}$ и $\overline{U_2V_2}$ не имеют общих точек с прямой $\overline{U_0V_0}$, поэтому возможны два случая, каждый из которых рассмотрим в отдельности.

а) Прямые U_1V_1 и U_2V_2 расположены в разных полуплоскостях с общей границей U_0V_0. Возьмем точки A_1 и A_2 на прямых U_1V_1 и U_2V_2 и обозначим через A_0 точку пересечения отрезка A_1A_2 с прямой U_0V_0 (рис. 21, a).

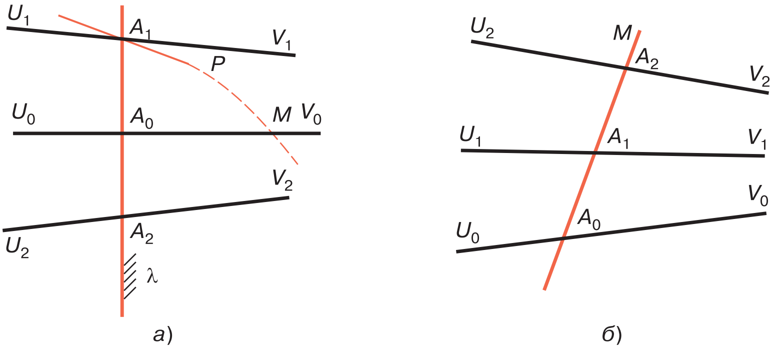


Рис. 21

Если λ — полуплоскость с границей A_1A_2, содержащая точку V_1, то все три луча A_1V_1, A_0V_0, A_2V_2 принадлежат полуплоскости λ. Проведем через точку A_1 прямую $\overline{A_1P}$, $\overline{A_1P} \parallel \overline{U_2V_2}$, $P \in \lambda$ и докажем, что эта прямая совпадает с прямой $\overline{U_1V_1}$. Пусть это не так, тогда и A_1V_1 и A_1P — различные лучи, принадлежащие полуплоскости λ, поэтому по свойству 1.3° либо A_1P — внутренний луч угла $A_0A_1V_1$, либо A_1V_1 — внутренний луч угла A_0A_1P. В первом случае (см. рис. 21, a), так как лучи A_1V_1 и A_0V_0 параллельны, луч A_1P пересекает прямую U_0V_0 в некоторой точке M. Мы пришли к противоречию с предыдущей теоремой: через точку M проходят две прямые, параллельные прямой $\overline{U_2V_2}$. Во втором случае луч A_1V_1 пересекает луч A_2V_2, следовательно, прямая U_1V_1

пересекает прямую U_0V_0, что невозможно, так как $\overline{U_1V_1} \parallel \overline{U_0V_0}$.

б) Прямые U_1V_1 и U_2V_2 расположены в одной полуплоскости с границей U_0V_0. Из предыдущей теоремы следует, что прямые U_1V_1 и U_2V_2 не имеют общих точек. Нетрудно показать, что существует хотя бы один луч A_0M, где $A_0 \in U_0V_0$, который пересекает прямые U_1V_1 и U_2V_2 соответственно в точках A_1 и A_2 (рис. 21, *б*). Для этого отметим на прямой U_1V_1 точку B_1, а на прямой U_2V_2 точку B_2 и рассмотрим лучи A_0B_1 и A_0B_2. Если они совпадают, то этот луч и есть луч A_0M, а если они не совпадают, то, учитывая, что $\overline{U_0V_0} \parallel \overline{U_1V_1}$ и $\overline{U_0V_0} \parallel \overline{U_2V_2}$, и используя свойство 1.3°, читатель без труда докажет, что один из лучей A_0B_1 и A_0B_2 пересекает обе прямые U_1V_1 и U_2V_2, т. е. является лучом A_0M. Не нарушая общности, можно считать, что A_0–A_1–A_2. По предыдущей лемме $\overline{U_1V_1} \parallel \overline{U_2V_2}$. ■

4. Теорема о пересечении параллельных прямых секущей.

Теорема 4. *При пересечении двух направленных параллельных прямых секущей накрест лежащие углы не равны друг другу. При этом меньшим является тот из углов, сторона которого, не принадлежащая секущей, имеет положительное направление.*

□ Пусть параллельные прямые $\overline{U_1V_1}$ и $\overline{U_2V_2}$ пересечены секущей A_1A_2 (рис. 22). Тогда лучи A_1V_1 и A_2V_2 имеют положительные направления. Докажем, например, что $\angle A_2A_1V_1 < \angle A_1A_2U_2$. Допустим, что это неравенство неверно, т. е. либо $\angle A_2A_1V_1 > \angle A_1A_2U_2$, либо $\angle A_2A_1V_1 = \angle A_1A_2U_2$. В первом случае существует внутренний луч A_1E угла $A_2A_1V_1$, такой, что $\angle A_1A_2U_2 = \angle A_2A_1E$. Так как лучи A_1V_1 и A_2V_2 параллельны, то луч A_1E пересекает луч A_2V_2 в некоторой точке K (см. рис. 22). Мы вступили в противоречие с леммой § 2: согласно этой лемме прямые A_1E и U_2V_2 не пересекаются.

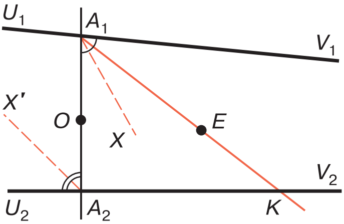


Рис. 22

Предположим теперь, что $\angle A_2A_1V_1 = \angle A_1A_2U_2$. Рассмотрим симметрию относительно середины O отрезка A_1A_2. Очевидно, при этой симметрии угол OA_1V_1, переходит в угол OA_2U_2, а луч A_2V_2 — в луч A_1U_1. Поэтому любой внутренний луч x' угла $A_1A_2U_2$ пересекает луч A_1U_1, так как x' является образом некоторого внутреннего луча x угла $A_2A_1V_1$, который в силу параллельности лучей A_1V_1 и A_2V_2 пересекает луч A_2V_2 (см. рис. 22). Отсюда следует, что л$A_2U_2 \parallel$ лA_1U_1. Мы пришли к противоречию с утверждением задачи § 9. ■

Отрезок AB называется *общим перпендикуляром* прямых a и b, если точки A и B лежат соответственно на прямых a и b и $a \perp AB$, $b \perp AB$.

Следствие. *Две параллельные прямые не имеют ни одного общего перпендикуляра.*

§ 11. Параллельность ненаправленных прямых

1. Ненаправленные параллельные прямые. Две ненаправленные прямые называются *параллельными*, если на этих прямых можно выбрать направления так, чтобы они были параллельны как направленные прямые. Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$. Из теоремы существования направленных параллельных прямых следует, что существует бесконечное множество пар параллельных прямых.

Докажем следующую лемму:

Лемма. *Если* $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, *то* $\overline{AB} \nparallel \overline{DC}$, $\overline{BA} \nparallel \overline{CD}$, $\overline{BA} \nparallel \overline{DC}$.

□ Обозначим через h и k лучи AB и CD, а через h' и k' продолжения соответственно лучей h и k (рис. 23). Так как $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, то $h \parallel k$, поэтому лучи h и k принадлежат одной полуплоскости с границей AC. Отсюда следует, что лучи h и k' принадлежат разным полуплоскостям с границей AC, поэтому $h \nparallel k'$. Но k' принадлежит положительному направлению прямой DC, следовательно, $\overline{AB} \nparallel \overline{DC}$. Аналогично, так как $h' \nparallel k$, то $\overline{BA} \nparallel \overline{CD}$. По задаче § 9 $h' \nparallel k'$, следовательно, $\overline{BA} \nparallel \overline{DC}$. ■

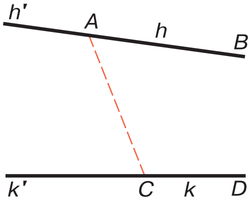


Рис. 23

Из доказанной леммы следует, что если $a \parallel b$, то на каждой из прямых a и b определяется единственное направление так, что данные прямые, как направленные, являются параллельными. Направление на каждой из этих прямых будем называть *направлением параллельности*: $a \parallel b$.

Теорема 1. *Через точку A, не лежащую на данной прямой a, проходят две и только две прямые, параллельные прямой a, которые симметричны относительно прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной к прямой a.*

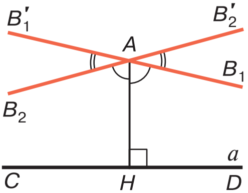


Рис. 24

□ Проведем перпендикуляр AH к прямой a и на прямой A отметим две точки C и D так, чтобы C–H–D (рис. 24). По теореме существования параллельных прямых через точку A проходит единственная прямая $\overline{AB_1}$, $\overline{AB_1} \parallel \overline{CD}$ и единственная прямая $\overline{AB_2}$, $\overline{AB_2} \parallel \overline{DC}$. По предыдущей лемме прямые AB_1 и AB_2 не совпадают, а по теореме 4 § 10 углы HAB_1 и HAB_2 острые. Докажем, что эти углы равны друг другу. Пусть, напротив, один из них больше другого, например $\angle HAB_2 > \angle HAB_1$. Тогда при симметрии относительно прямой AH прямая AB_1', симметричная прямой AB_1, пройдет внутри угла HAB_2, что невозможно, так как AB_1' не пересекает прямую a в силу того, что прямая AB_1 не пересекает прямую a. Итак, прямые AB_1 и AB_2 симметричны относительно прямой AH. ■

Очевидно, отношение параллельности двух ненаправленных прямых удовлетворяет условию симметричности. Но это отношение не всегда транзитивно. В самом деле, по доказанной теореме через точку A, не лежащую на данной прямой a, проходят две прямые b_1 и b_2, такие, что $b_1 \parallel a$, $b_2 \parallel a$. Ясно, что $b_1 \nparallel b_2$. Однако нетрудно доказать, что если каждая из двух прямых a и b параллельна прямой c и на прямой c направления параллельности $a \parallel c$ и $b \parallel c$ совпадают, то $a \parallel b$ (см. задачу 16).

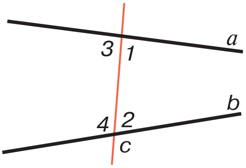


Рис. 25

2. Секущая равного наклона параллельных прямых. Если при пересечении двух прямых a и b секущей c односторонние углы (углы 1 и 2, а также 3 и 4 на рис. 25) равны, то прямая c называется *секущей равного наклона прямых* a и b. На рис. 25 прямая c является секущей равного наклона прямых a и b.

Теорема 2. *Через каждую точку одной из двух параллельных прямых проходит одна и только одна секущая равного наклона этих прямых.*

□ Пусть $a \parallel b$, а A — произвольная точка прямой a. Докажем, что через точку A проходит одна и только одна секущая равного наклона параллельных прямых a и b.

Докажем сначала, что существует хотя бы одна секущая равного наклона прямых a и b. Для этого возьмем на прямых a и b параллельные лучи AA' и BB'. Так как $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$, то биссектриса угла BAA' пересекает луч BB' в некоторой точке C, а биссектриса угла ABC пересекает отрезок AC в точке, которую обозначим через D (рис. 26, a). По теореме о биссектрисе угла (см. § 3, теорема 3) $DH_1 = DH_3$, $DH_3 = DH_2$, где DH_1, DH_2, DH_3 — перпендикуляры, проведенные соответственно к прямым AA', BB' и AB, поэтому $DH_1 = DH_2$. Так как $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$, то согласно следствию из теоремы 4 § 10 точки H_1, D и H_2 не могут лежать на одной прямой, т. е. H_1H_2D — равнобедренный треугольник с основанием H_1H_2. Отсюда следует, что $\angle DH_1H_2 = \angle DH_2H_1$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ (см. рис. 26, a), т. е. H_1H_2 — секущая равного наклона прямых a и b.

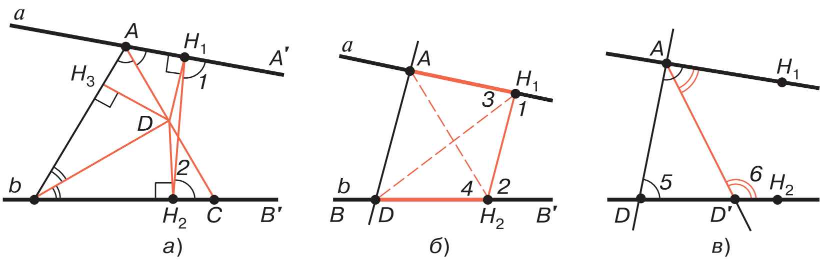


Рис. 26

Докажем теперь, что существует секущая равного наклона прямых a и b, проходящая через точку A. Для этого отложим на луче H_2B отрезок H_2D, равный отрезку H_1A. Треугольники AH_1H_2 и DH_2H_1 равны, так как они имеют общую сторону H_1H_2, $\angle 3 = \angle 4$ и $H_1A = H_2D$ (рис. 26, *б*), поэтому $AH_2 = DH_1$. Отсюда следует, что треугольники AH_1D и DH_2A равны по трем сторонам, следовательно, $\angle H_1AD = \angle H_2DA$, т. е. AD — секущая равного наклона прямых a и b.

Остается доказать, что AD — единственная секущая равного наклона прямых a и b. Пусть это не так, т. е. существует по крайней мере еще одна секущая равного наклона AD'. Допустим для определенности, что точка D' лежит по ту же сторону от AD, что и точки H_1, и H_2 (рис. 26, *в*). Тогда AD' — внутренний луч угла DAH_1, поэтому $\angle DAH_1 > \angle D'AH_1$. Но $\angle DAH_1 = \angle 5$, а $\angle D'AH_1 = \angle 6$, следовательно, $\angle 5 > \angle 6$. Мы пришли к противоречию с теоремой о внешнем угле треугольника, поэтому наше предположение неверно и AD — единственная секущая равного наклона прямых a и b, проходящая через точку A. ■

3. Ось симметрии параллельных прямых. Прямая c называется *осью симметрии* параллельных прямых a и b, если при осевой симметрии с осью c прямая a переходит в прямую b, а прямая b — в прямую a.

Теорема 3. *Любые две параллельные прямые a и b имеют единственную ось симметрии c, причем $c \parallel a$*

и $c \parallel b$. *На прямой* c *направления параллельностей* $c \parallel a$ *и* $c \parallel b$ *совпадают.*

□ Пусть AB — секущая равного наклона прямых a и b, а c — серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис. 27). Тогда, очевидно, c — ось симметрии прямых a и b.

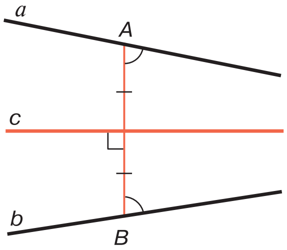


Рис. 27

Ясно, что прямые A и b не имеют общих точек с прямой c и расположены по разные стороны от этой прямой. По лемме § 10 $a \parallel c$, $b \parallel c$ и на прямой c направления параллельностей $c \parallel a$ и $c \parallel b$ совпадают.

Остается доказать, что c — единственная ось симметрии прямых a и b. Пусть c' — какая-то ось симметрии этих прямых, а B_1 — точка, симметричная точке A относительно прямой c'. Тогда $B_1 \in b$ и AB_1 — секущая равного наклона прямых a и b. По теореме 2 точки B и B_1 совпадают. Так как c' — серединный перпендикуляр к отрезку AB_1, т. е. к отрезку AB, то прямые c' и c совпадают. ■

§ 12. Функция Лобачевского

1. Угол параллельности, соответствующий данному отрезку. Возьмем произвольный отрезок* $\widetilde{x}$, обозначим его концы через A и B, через точку B проведем прямую $U'V'$, перпендикулярную к отрезку $\widetilde{x}$, а через точку A — прямую $\overline{UV}$, параллельную прямой $\overline{U'V'}$. Здесь обозначения выбраны так, что U'–B–V', U–A–V (рис. 28). Угол $\widetilde{\varphi}$, равный углу BAV, называется *углом параллельности*, соответствующим отрезку $\widetilde{x}$. Рассмотрим некоторые свойства угла параллельности.

12.1°. Угол параллельности, соответствующий произвольному отрезку, является острым углом.

* Здесь и в дальнейшем отрезки и углы наряду с обычными обозначениями будем записывать также через $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{x}, \ldots$, $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}, \ldots$.

□ На рис. 28 $\overline{UV} \parallel \overline{U'V'}$ угол $\widetilde{\varphi}$ — угол параллельности, соответствующий отрезку $\widetilde{x}$. По теореме 4 § 10 $\angle\widetilde{\varphi} < \angle ABU' = d$. ■

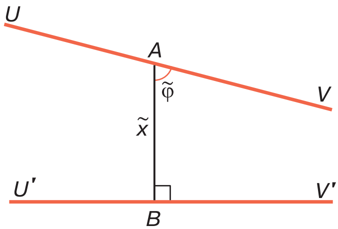


Рис. 28

12.2°. Если два отрезка равны, то соответствующие им углы параллельности также равны.

□ Возьмем два равных отрезка $\widetilde{x}_1 = A_1B_1$ и $\widetilde{x}_2 = A_2B_2$ и рассмотрим углы параллельности, соответствующие этим отрезкам: $\widetilde{\varphi}_1 = \angle B_1A_1V_1$ и $\widetilde{\varphi}_2 = \angle B_2A_2V_2$. Докажем, что $\widetilde{\varphi}_1 = \widetilde{\varphi}_2$. Пусть это равенство неверно, например, $\widetilde{\varphi}_1 > \widetilde{\varphi}_2$. Тогда существует внутренний луч A_1M угла $B_1A_1V_1$, исходящий из точки A_1, такой, что $\angle B_1A_1M = \widetilde{\varphi}_2$. Так как $\overline{U_1V_1} \parallel \overline{U_1' \parallel V_1'}$, то этот луч пересекает луч B_1V_1' в некоторой точке C_1 (рис. 29). Отложим на луче B_2V_2' отрезок $B_2C_2 = B_1C_1$. Очевидно, прямоугольные треугольники $B_1A_1C_1$ и $B_2A_2C_2$ равны по двум катетам, поэтому $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2$. С другой

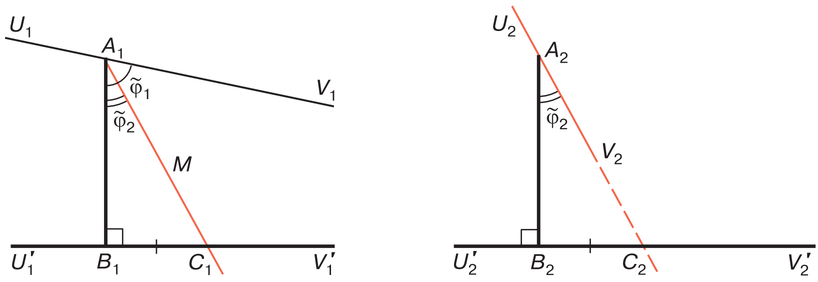


Рис. 29

стороны, $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2V_2$. Отсюда следует, что лучи A_2V_2 и A_2C_2 совпадают, что невозможно, так как $\overline{U_2V_2} \parallel \overline{U_2'V_2'}$, поэтому эти прямые не пересекаются. ■

12.3°. *Если $\widetilde{\varphi}_1$ и $\widetilde{\varphi}_2$ — углы параллельности, соответствующие отрезкам $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$, и $\widetilde{x}_1 > \widetilde{x}_2$, то $\widetilde{\varphi}_1 < \widetilde{\varphi}_2$.*

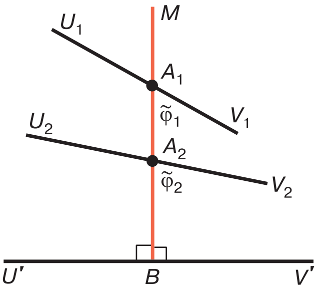


Рис. 30

□ На общей стороне BM двух смежных прямых углов $U'BM$ и $V'BM$ отложим отрезки $BA_1 = \widetilde{x}_1$, $BA_2 = \widetilde{x}_2$ и через точки A_1 и A_2 проведем прямые $\overline{U_1V_1}$ и $\overline{U_2V_2}$, параллельные прямой $\overline{U'V'}$ (рис. 30). Так как $\widetilde{x}_1 > \widetilde{x}_2$, то $B\text{–}A_2\text{–}A_1$. По теореме 3 § 10 $\overline{U_1V_1} \parallel \overline{U_2V_2}$, поэтому по теореме 4 § 10 $\widetilde{\varphi}_1 < \angle A_1A_2U_2$. Углы $A_1A_2U_2$ и $\widetilde{\varphi}_2$ — вертикальные углы, следовательно, они равны. Таким образом, $\widetilde{\varphi}_1 < \widetilde{\varphi}_2$. ■

12.4°. *Любой острый угол является углом параллельности, соответствующим некоторому отрезку.*

□ Пусть AOB — данный острый угол. Не нарушая общности, можно считать, что $AB \perp OB$. Согласно предложению $Л_4$ § 8 существует прямая, которая пересекает луч OB под прямым углом в некоторой точке C и не имеет общих точек с лучом OA (рис. 31). Если D — точка луча OB, такая, что $O\text{–}C\text{–}D$, то прямая, проходящая через точку D и перпендикулярная к OB, также не пересекает луч OA.

Точки отрезка OD разобьем на два класса K_1 и K_2 по следующему закону. К классу K_1 отнесем точку O и любую точку X отрезка OD, такую, что прямая, проходящая через точку X и перпендикулярная к прямой OB, пересекает луч OA. К классу K_2 отнесем любую точку Y отрезка OD, такую, что прямая, проходящая через точку Y и перпендикулярная к прямой OB, не имеет общих точек с лучом OA. Ясно, что $O \in K_1$, $D \in K_2$ и каждый из классов содержит точки, отличные от O и D (например, $B \in K_1$, $C \in K_2$). Далее, если $X \in K_1$, $X \neq O$, а $Y \in K_2$, то $O\text{–}X\text{–}Y$. Таким образом, классы K_1

и K_2 удовлетворяют условиям предложения Дедекинда (см. § 3, теорема 2).

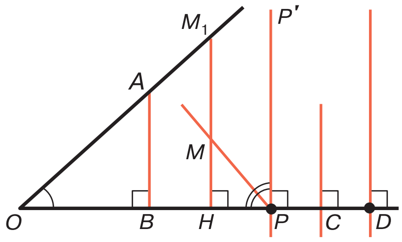


Рис. 31

Обозначим через P точку отрезка OD, которая производит сечение точек отрезка OD на классы K_1, и K_2. Нетрудно видеть, что $P \in K_2$. Докажем, что луч PP', перпендикулярный к прямой OB и расположенный в той же полуплоскости с границей OB, что и луч OA, параллелен лучу OA. Для этого достаточно доказать, что любой внутренний луч PM угла OPP' пересекает луч OA. Если $P, M \div OA$, то это утверждение очевидно, а если $P, M \mathbin{\ddot{-}} OA$ (см. рис. 31), то перпендикуляр MH, проведенный к прямой OB, пересекает отрезок OP в точке H, принадлежащей классу K_1, поэтому прямая HM пересекает луч OA в некоторой точке M_1. Применив предложение Паша к треугольнику OHM_1 и прямой PM, мы убеждаемся в том, что эта прямая пересекает отрезок OM_1, т. е. луч OA. Ясно, что точка пересечения лежит на луче PM, так как продолжение этого луча и луч OA расположены в разных полуплоскостях с общей границей OB. ■

2. Функция Лобачевского. Пусть $\widetilde{x}$ — произвольный отрезок, а $\widetilde{\varphi}$ — соответствующий ему угол параллельности. Введем единицу измерения отрезков и единицу измерения углов и обозначим длину отрезка $\widetilde{x}$ через x, а меру угла $\widetilde{\varphi}$ через φ. По свойству 12.2° равным отрезкам соответствуют равные углы параллельности. Но равные отрезки имеют одну и ту же длину, а равные углы — одну и ту же меру, поэтому φ полностью определяется длиной x отрезка $\widetilde{x}$. Таким образом, φ является некоторой функцией от x: $\varphi = \Pi(x)$.

Эта функция в неевклидовой геометрии играет фундаментальную роль и называется *функцией Лобачевского*. Рассмотрим ее простейшие свойства.

Прежде всего отметим, что областью определения функции Лобачевского является множество всех действительных положительных чисел, т.е. числовой промежуток $0 < x < \infty$. В самом деле, пусть x_0 — произвольное положительное число. Тогда по аксиоме IV_2 (см. приложение, с. 444) существует отрезок $\widetilde{x}_0$, длина которого в выбранной единице измерения равна x_0. Если $\widetilde{\varphi}_0$ — угол параллельности, соответствующий отрезку $\widetilde{x}_0$, а φ_0 — мера этого угла, то ясно, что $\varphi_0 = \Pi(x_0)$.

Так как угол параллельности, соответствующий любому отрезку, есть острый угол, то областью значений этой функции является промежуток $0 < \varphi < d$, где d — мера прямого угла. Более того, по свойству 12.4° функция $\Pi(x)$ принимает все значения, заключенные между 0 и d. Отметим также, что согласно свойству 12.3° функция $\Pi(x)$ является монотонно убывающей функцией. Отсюда вытекает, что $\Pi(x)$ является непрерывной функцией, так как монотонная функция, которая вместе с любыми двумя значениями принимает все промежуточные значения, является непрерывной во всей области своего определения.

Таким образом, нами доказана теорема:

Теорема. *Функция* $\Pi(x)$ *Лобачевского определена для каждого положительного* x, *монотонно убывает и непрерывна. Для любого* $x > 0$ *имеем:* $0 < \Pi(x) < d$, *где* d — *мера прямого угла, причем* $\Pi(x)$ *принимает все значения интервала* $(0; d)$.

Во второй части пособия мы определим аналитическое выражение функции Лобачевского.

Зависимость между отрезками и углами, которая устанавливается функцией Лобачевского, обусловливает своеобразный характер геометрии Лобачевского. Одной из важных особенностей этой геометрии является вопрос о выборе единицы измерения отрезков. В евклидовой геометрии имеется естественная единица измерения углов (например, радиан или градус, который равен $\frac{1}{90^\circ}$ части прямого угла), но нет естественных единиц измерения отрезков, т. е. нет таких отрезков, построение которых можно описать абстрактно, пользуясь аксиомами и теоремами евклидовой геометрии. Для того чтобы ввести измерение отрезков, необходимо условиться о выборе единичного отрезка. В качестве такового в принципе может быть взят произвольный отрезок. Практически в качестве единицы измерения отрезков в евклидовой геометрии пользуются копиями эталона метра, который специально хранится. Выбор эталона единицы измерения отрезков геометрически ничем не обусловлен.

В противоположность этому в геометрии Лобачевского наряду с естественной единицей измерения углов существуют также и естественные единицы измерения отрезков, которые можно абстрактно описать. Например, за единицу измерения отрезков можно принять отрезок, которому соответствует угол параллельности с мерой, равной $\frac{1}{2}d$ или $\frac{1}{3}d$.

Зависимость между углами и отрезками, которая устанавливается функцией Лобачевского, обусловливает также еще одну особенность геометрии Лобачевского, которую мы отметили в § 6 п. 4: в этой геометрии нет подобия фигур.

Задачи к главе 2

1. Точки D и E лежат соответственно на сторонах BC и AC треугольника ABC. Доказать, что $\delta(ABC) = \delta(ABE) + \delta(BDE) + \delta(DCE)$.
2. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC, дефект которого равен нулю. Доказать, что $\delta(ABD) = \delta(ACD) = 0$.
3. Прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC, дефект которого равен нулю, в точках D и E. Доказать, что $\delta(ADE) = 0$ (см. свойство 6.3°).

4. Прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC, дефект которого больше нуля, в точках D и E. Доказать, что $\delta(ABC) > \delta(ABE)$, $\delta(ABC) > \delta(ADC)$, $\delta(ABC) > \delta(ADE)$.
5. Медиана AM треугольника ABC равна половине стороны BC. Доказать, что $\angle A$ треугольника ABC острый.
6. Доказать, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ в каждом из следующих случаев:

   а) $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$, $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$;

   б) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AM = A_1M_1$, где AM и A_1M_1 — медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.
7. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены биссектрисы CD и C_1D_1. Доказать, что эти треугольники равны, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$.
8. В треугольнике ABC, где $AB \neq AC$, проведен отрезок AM, где M — произвольная точка, лежащая на стороне BC. Доказать, что треугольники AMB и AMC не равны друг другу.
9. Доказать, что каждое из следующих предложений эквивалентно аксиоме Лобачевского:

   а) в прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A $\widehat{B} + \widehat{C} < d$,

   б) в равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC $\widehat{B} < d - \frac{1}{2}\widehat{A}$;

   в) внутри любого неразвернутого угла существует такая точка, что через нее проходит хотя бы одна прямая, не пересекающая стороны угла и не проходящая через его вершину;

   г) существует хотя бы один выпуклый четырехугольник, сумма углов которого меньше $4d$.
10. Лучи AB и CD параллельны. Доказать, что эти лучи расположены в одной полуплоскости с границей AC.
11. Луч h параллелен прямой a. Доказать, что любой луч, принадлежащий прямой A и параллельный лучу h, принадлежит на прямой A направлению параллельности $h \parallel a$.

12. Лучи h и k не принадлежат одной прямой и $h \parallel \overline{a}$, $k \parallel \overline{a}$. Доказать, что $h \parallel k$.
13. Две прямые $\overline{U_1V_1}$ и $\overline{U_2V_2}$ параллельны прямой $\overline{U_0V_0}$. Доказать, что на прямой $\overline{U_0V_0}$ существует по крайней мере один луч, через каждую точку которого проходит хотя бы одна прямая, пересекающая прямые U_1V_1 и U_2V_2.
14. Даны три луча h, k и l, причем лучи h и k не принадлежат одной прямой. Доказать, что если $h \parallel l$ и $k \parallel l$, то $h \parallel k$.
15. Точка O не лежит на прямой a. Доказать, что существуют два и только два луча, которые исходят из точки O и параллельны прямой a.
16. Каждая из двух ненаправленных прямых a и b параллельна прямой c. Доказать, что если на прямой c направления параллельностей $a \parallel c$ и $b \parallel c$ совпадают, то прямые a и b параллельны.
17. Прямые a и b параллельны. Доказать, что прямая a', симметричная прямой a относительно прямой b, параллельна как прямой a, так и прямой b.
18. Прямые $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$ параллельны, а прямая $\overline{CC_1}$ параллельна прямой $\overline{A_1A}$ и пересекает отрезок AB. Доказать, что прямые BB_1 и CC_1 пересекаются.
19. Даны три прямые $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ и $\overline{CC'}$ причем $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ и $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$. Доказать, что если AB — секущая равного наклона прямых $\overline{AA'}$ и $\overline{BB'}$, а BC — секущая равного наклона прямых $\overline{BB'}$ и $\overline{CC'}$, то AC — секущая равного наклона прямых $\overline{AA'}$ и $\overline{CC'}$.
20. Доказать, что у всех треугольников ABC, у которых $\widehat{A} = \alpha$, где α — данная величина, высоты AH ограничены неравенством $AH < \widetilde{p}$, где $\Pi(\widetilde{p}) = \frac{\alpha}{2}$.
21. Лучи AA_1 и BB_1 параллельны, а угол ABB_1 прямой. Доказать, что любая прямая, пересекающая отрезок AB под прямым углом, пересекает луч AA_1.
22. Лучи AA_1 и BB_1 параллельны. Доказать, что любая прямая, пересекающая отрезок AB, либо параллельна лучам AA_1 и BB_1, либо пересекает один и только один из этих лучей.

23. Диагонали четырехугольника пересекаются и в точке пересечения делятся пополам. Доказать, что: а) противоположные стороны четырехугольника равны; б) противоположные углы четырехугольника равны; в) прямые, содержащие противоположные стороны четырехугольника, не пересекаются и не параллельны.
24. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике хотя бы один из углов острый.
25. Доказать, что существуют выпуклые четырехугольники, у которых: а) три угла прямые; б) три угла тупые.
26. Лучи AA' и BB' расположены в одной полуплоскости с границей AB и перпендикулярны к прямой AB. Доказать, что существует луч, исходящий из некоторой точки луча BB', параллельный лучу AA' и перпендикулярный к прямой BB'.

Глава 3

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 13. Двупрямоугольник. Четырехугольник Саккери

1. Четырехугольник Саккери. Выпуклый четырехугольник называется *двупрямоугольником*, если два угла, прилежащие к одной стороне, прямые. В двупрямоугольнике $ABCD$ с прямыми углами A и B сторона AB называется основанием, а стороны AD и BC — боковыми сторонами. Из теоремы 2 § 6 о сумме углов выпуклого четырехугольника следует, что сумма двух углов двупрямоугольника, прилегающих к стороне, противоположной основанию, меньше $2d$.

Двупрямоугольник с равными боковыми сторонами называется *четырехугольником Саккери*. Докажем теорему, выражающую необходимый и достаточный признаки четырехугольника Саккери.

Теорема 1. *Двупрямоугольник является четырехугольником Саккери тогда и только тогда, когда его диагонали равны.*

□ Пусть $ABCD$ — четырехугольник Саккери с основанием AB. Докажем, что его диагонали AC и BD равны (рис. 32). Для этого заметим, что прямоугольные треугольники ABD и BAC равны по двум катетам, поэтому их гипотенузы AC и BD равны.

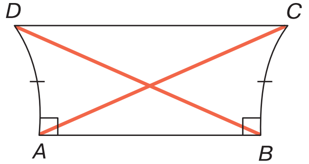


Рис. 32

Обратно: пусть в двупрямоугольнике $ABCD$ с основанием AB $AC = BD$. Прямоугольные треугольники ABD и BAC равны по гипотенузе и катету: $AB = BA$,

$BD = AC$ (см. рис. 32), поэтому $AD = BC$, т. е. $ABCD$ — четырехугольник Саккери. ■

Рассмотрим некоторые свойства четырехугольника Саккери.

13.1°. В четырехугольнике Саккери $ABCD$ с основанием AB $\angle C = \angle D$ и эти углы острые.

□ По теореме 1 $AC = BD$ (см. рис. 32), поэтому $\triangle BDC = \triangle ACD$ по трем сторонам. Отсюда следует, что $\angle C = \angle D$.

По теореме о сумме углов выпуклого четырехугольника в четырехугольнике $ABCD$ $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} < 4d$. Но $\widehat{A} + \widehat{B} = 2d$, поэтому $\widehat{C} + \widehat{D} < 2d$, и так как $\widehat{C} = \widehat{D}$, то $\widehat{C} = \widehat{D} < d$. ■

13.2°. Прямая, проходящая через середины основания и противоположной стороны четырехугольника Саккери, перпендикулярна к этим сторонам.

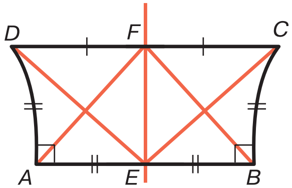


Рис. 33

□ Пусть E и F соответственно середины основания AB и стороны CD четырехугольника Саккери $ABCD$ (рис. 33). Проведем отрезки CE и DE и рассмотрим прямоугольные треугольники AED и BEC. Они равны по двум катетам, поэтому $ED = EC$. Отсюда следует, что треугольник ECD равнобедренный, следовательно, его медиана EF является высотой треугольника. Таким образом, $EF \perp CD$.

Проведем теперь отрезки AF и BF и рассмотрим треугольники DAF и CBF. Эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $AF = BF$. Отсюда следует, что треугольник AFB равнобедренный, поэтому его медиана FE является высотой. Итак, $EF \perp AB$ и $EF \perp CD$. ■

Из этого свойства непосредственно следует:

13.3°. Прямая, проходящая через середины основания и противоположной стороны четырехугольника Саккери, является осью симметрии четырехугольника.

2. Двупрямоугольник. Докажем теорему о двупрямоугольнике.

Теорема 2. *В двупрямоугольнике $ABCD$ с основанием AB неравенство $BC > AD$ имеет место тогда и только тогда, когда $\angle C < \angle D$.*

□ Пусть в двупрямоугольнике с основанием AB $BC > AD$. Тогда на стороне BC существует точка E, такая, что $AD = BE$ (рис. 34). Нетрудно видеть, что DE — внутренний луч угла ADC. В самом деле, так как отрезки AC и BD пересекаются, то луч DB пересекает отрезок AC, поэтому DB — внутренний луч угла ADC. Аналогично луч DE пересекает отрезок BC, поэтому DE — внутренний луч угла BDC. Отсюда следует, что DE — внутренний луч угла ADC. Таким образом, $\angle 1 < \angle ADC$ (см. рис. 34). Но $ADEB$ — четырехугольник Саккери, поэтому по свойству 13.1° $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, $\angle 2 < \angle ADC$. Угол 2 является внешним углом треугольника DEC, поэтому $\angle C < \angle 2$. Итак, $\angle C < \angle 2 < \angle ADC$, следовательно, $\angle C < \angle ADC$.

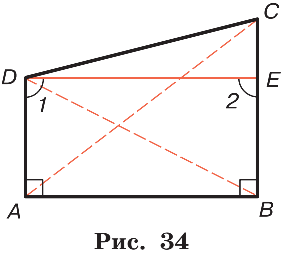


Рис. 34

Докажем обратное утверждение, т. е. предположим, что в двупрямоугольнике $ABCD$ с основанием AB $\angle C < \angle D$, и докажем, что $BC > AD$. Возможны три случая: а) $BC = AD$; б) $BC < AD$; в) $BC > AD$. В случае а) $ABCD$ — четырехугольник Саккери по свойству 13.1° $\angle C = \angle D$, что противоречит условию. В случае б) по доказанному $\angle D > \angle C$, что также противоречит условию. Следовательно, $BC > AD$. ■

Теорема 3. *Двупрямоугольник $ABCD$ с основанием AB является четырехугольником Саккери тогда и только тогда, когда $\angle C = \angle D$.*

□ Если $ABCD$ — четырехугольник Саккери с основанием AB, то по свойству 13.1° $\angle C = \angle D$.

Обратно: пусть в двупрямоугольнике $ABCD$ с основанием AB $\angle C = \angle D$. Возможны три случая: а) $BC > AD$; б) $BC < AD$; в) $BC = AD$. Согласно теореме 2 случаи а) и б) не имеют места, поэтому $BC = AD$, т. е. $ABCD$ — четырехугольник Саккери. ■

В заключение докажем два неравенства, связанные с двупрямоугольником, которые необходимы для дальнейшего изложения.

13.4°. В двупрямоугольнике $ABCD$ с основанием AB и боковыми сторонами $BC = a$, $AD = b$ $CD > |a - b|$ и $FE < \frac{1}{2}(a+b)$. Здесь FE — перпендикуляр, проведенный из середины F стороны CD к прямой AB.

□ Рассмотрим сначала случай, когда $a = b$. В этом случае $ABCD$ — четырехугольник Саккери и неравенство $CD > |a - b|$ очевидно. Докажем, что $FE < \frac{1}{2}(a + b)$. По свойству 13.2° прямая EF перпендикулярна к стороне CD, поэтому $AEFD$ — двупрямоугольник с основанием AE, в котором угол D острый, а угол F прямой (см. рис. 33). По теореме 2 $AD > EF$, т. е. $EF < a$. Следовательно, $EF < \frac{1}{2}(a + a) = \frac{1}{2}(a + b)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $a \neq b$, например, когда $a > b$. Воспользовавшись рис. 35, на котором $AD = PE$, $CB = EQ$, докажем, что $CD > a - b$. В треугольнике DFP угол P тупой, так как смежный с ним угол DPE острый. Отсюда следует, что $FD > FP$. В четырехугольнике Саккери $BCQE$ $\angle EQC = \angle QCB$. Но $\angle QCF < \angle QCB$, поэтому в $\triangle FQC$ $FC > FQ$. Так как $PQ = PF + FQ = a - b$, то $CD > a - b$.

Докажем, что $EF < \frac{1}{2}(a + b)$ (рис. 35). Если $EF < b$, то $EF < a$, поэтому $2EF < a+b$ и $EF < \frac{1}{2}(a+b)$. Пусть $EF > b$. По теореме 2 в двупрямоугольнике $AEFD$ $\angle D > \angle F$, поэтому $\angle F$ острый и смежный с ним угол EFC тупой. Отсюда мы заключаем, что в двупрямоугольнике $BEFC$ $EF < BC = a$. Итак, $b < EF < a$. На луче EF отложим отрезки $EP = AD$, $EQ = CB$. Из предыдущих неравенств следует, что P–F–Q (см. рис. 35). При симметрии относительно точки F точка C переходит в точку D, а точка P — в некоторую точку P', которая лежит между точками F и Q. В самом деле, $\triangle FPD = \triangle FP'C$, поэтому $\angle FPD = \angle FP'C$ и эти углы тупые. Но угол FQC острый, следовательно, F–P'–Q. Таким образом, $FP < FQ$, т. е. $EF - b < a - EF$. Отсюда и следует искомое неравенство. ■

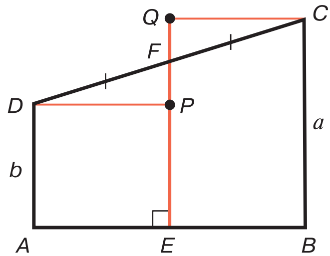


Рис. 35

§ 14. Взаимное расположение параллельных прямых

1. Лемма о двуугольнике. Фигура, состоящая из отрезка AB и двух лучей h и k, которые исходят соответственно из точек A и B, не имеют общих точек и принадлежат одной полуплоскости с границей AB, называется *двуугольником* и обозначается так: $hABk$ (рис. 36, a). Отрезок AB называется *стороной*, h и k — *лучами*, а $\angle A$ и $\angle B$ — *углами двуугольника* $hABk$. Точки, принадлежащие отрезку AB и лучам h и k, называются *точками двуугольника*.

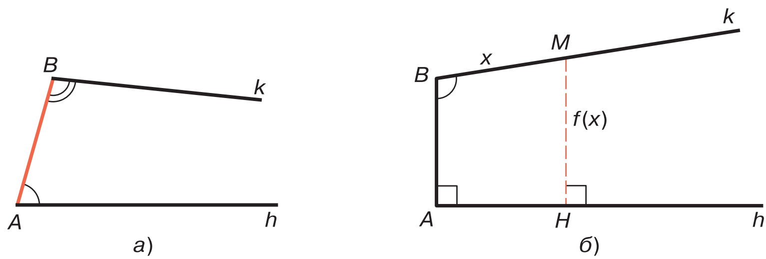


Рис. 36

Докажем лемму о двуугольнике, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма 1. *Пусть $hABk$ — двуугольник, угол A которого прямой, а угол B прямой или тупой* (*рис.* 36, *б*). *Пусть, далее, M — переменная точка луча k, MH — перпендикуляр, проведенный к прямой, содержащей луч h, $BM = x$, $MH = f(x)$. Тогда функция $f(x)$*

является монотонной, неограниченно возрастающей, непрерывной функцией, которая принимает любое значение a, где $a > BA$.

□ Функция $y = f(x)$, очевидно, определена для всех положительных x и принимает только положительные значения.

а) Докажем, что $f(x)$ — монотонно возрастающая функция, т. е. если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$. Возьмем на луче k точки M_1 и M_2 так, чтобы $x_1 = BM_1$, $x_2 = BM_2$ (рис. 37). Тогда ясно, что $B–M–M_2$. Если $f(x_1) = M_1H_1$, $f(x_2) = M_2H_2$, то четырехугольник ABM_1H_1 является двупрямоугольником и угол B не острый, поэтому угол BM_1H_1 острый. Следовательно, смежный с ним угол $H_1M_1M_2$ тупой. Аналогично, рассматривая двупрямоугольник $H_1M_1M_2H_2$, мы заключаем, что угол $M_1M_2H_2$ острый. По теореме 2 § 13 $f(x_1) < f(x_2)$.

б) Докажем теперь, что $f(x)$ — неограниченно возрастающая функция. Для этого возьмем последовательность положительных чисел $x_1, x_2 = 2x_1$, $x_3 = 3x_1, \ldots$, $x_n = nx_1$ и на луче k рассмотрим последовательность следующих друг за другом точек M_1, $M_2, \ldots$, M_n, таких, что $BM_1 = x_1$, $BM_2 = x_2, \ldots$, $BM_n = x_n$ (рис. 38). Ясно, что $BM_1 = M_1M_2 = \ldots = M_{n-1}M_n$. Если $y_i = f(x_i) = M_iH_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, а $b = AB$, то по доказанному $b < y_1 < y_2 < \ldots < y_n$. Пусть $y_1 = b + \delta_1$, $y_2 = y_1 + \delta_2, \ldots, y_{i+1} = y_i + \delta_{i+1}, \ldots$, $y_n = y_{n-1} + \delta_n$, где δ_1, δ_2, $\ldots$, δ_n — положительные числа. Сложив эти равенства, получаем

$$y_n = b + \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n. \tag{1}$$

По свойству 13.4° $2y_1 < b + y_2$, $y_1 - b < y_2 - y_1$ или $\delta_1 < \delta_2$. Аналогично при $i = 2, 3, \ldots, n-1$ имеем: $2y_i < y_{i-1} + y_{i+1}$, т. е. $\delta_i < \delta_{i+1}$. Таким образом, $\delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_n$. Отсюда из равенства (1) следует, что $f(x_n) = b + \delta_1 + \ldots + \delta_n > b + n\delta_1$. Таким образом, при неограниченном возрастании x функция $f(x)$ неограниченно возрастает.

в) Докажем, что $f(x)$ — непрерывная функция в любой точке x. Пусть $x' - x = \Delta x$ — приращение аргумента, $\Delta y = f(x') - f(x)$ — соответствующее приращение функции.

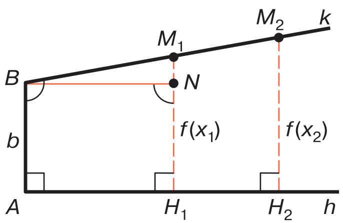


Рис. 37

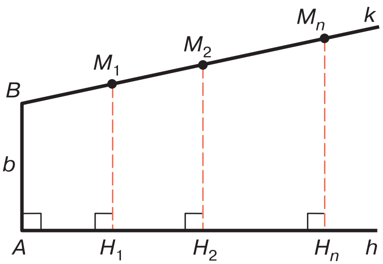


Рис. 38

По свойству 13.4° $|\Delta x| > |\Delta y|$, поэтому при $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$, т. е. $f(x)$ — непрерывная функция.

г) Остается доказать, что если a — любое положительное число, большее $BA = b$, то на луче k найдется такая точка M_0, что $f(x_0) = a$, где $x_0 = BM_0$.

Возьмем на луче k точку M_1 так, чтобы $BM_1 < a - b$. Докажем, что $M_1H_1 < a$, где M_1H_1 — перпендикуляр к прямой, содержащей луч h. Четырехугольник ABM_1H_1 — двупрямоугольник и по теореме 2 § 13 $M_1H_1 > b$. Возьмем точку N на отрезке M_1H_1 так, чтобы $H_1N = b$ (см. рис. 37). Учитывая, что $ABNH_1$ — четырехугольник Саккери, имеем: $\angle BNH_1 < d$, поэтому $\angle BNM_1$ тупой, следовательно, в треугольнике BM_1N $M_1N < BM_1 < a - b$. Таким образом, $M_1H_1 < b + (a - b)$, т. е. $M_1H_1 < a$.

Так как $f(x)$ — монотонно неограниченно возрастающая функция, то на луче k существует такая точка M_2, что $f(x_2) > a$, где $x_2 = BM_2$ и $B - M_1 - M_2$. Таким образом, $x_1 < x_2$, $f(x_1) < a < f(x_2)$.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на числовом отрезке $[x_1x_2]$, и в силу предыдущих неравенств на концах этого отрезка она принимает неравные значения. По теореме Коши на отрезке $[x_1x_2]$ существует такая точка x_0, что $f(x_0) = a$. ■

2. Различные случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости Лобачевского. На евклидовой плоскости две прямые либо пересекаются, либо параллельны, т. е. не имеют общих точек. На плоскости

Лобачевского если две прямые не имеют общих точек, то отсюда еще не следует, что они параллельны. Докажем лемму, согласно которой на плоскости Лобачевского существуют прямые, которые не пересекаются и не параллельны.

Лемма 2. *Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые не параллельны и не пересекаются.*

□ Пусть A_1A_2 и B_1B_2 — данные прямые, которые пересечены секущей AB, причем обозначения выбраны так, что $A_1–A–A_2$, $B_1–B–B_2$, A_1, $B_1 \stackrel{..}{-} AB$, A_2, $B_2 \stackrel{..}{-} AB$ (рис. 39). Тогда BAA_2 и ABB_1 — накрест лежащие равные углы. По лемме § 2 прямые A_1A_2 и B_1B_2 не пересекаются.

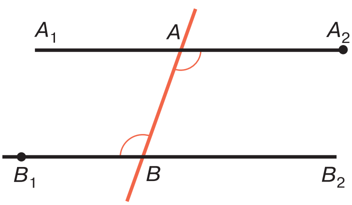


Рис. 39

Предположим, что эти прямые параллельны. Так как лучи AA_1 и BB_2, а также AA_2 и BB_1 расположены по разные стороны от прямой AB, то возможны только два случая: либо $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{B_1B_2}$, либо $\overline{A_2A_1} \parallel \overline{B_2B_1}$. По теореме 4 § 10 в первом случае $\angle BAA_2 < \angle ABB_1$, а во втором случае $\angle BAA_1 < \angle ABB_2$. Эти неравенства противоречат условию леммы, поэтому прямые A_1A_2 и B_1B_2 не параллельны. ■

Таким образом, возможны три случая взаимного расположения двух прямых на плоскости Лобачевского: а) прямые пересекаются, т. е. имеют только одну общую точку; б) прямые параллельны; в) прямые не пересекаются и не параллельны. Такие прямые называются *расходящимися* (или сверхпараллельными) прямыми. В этом параграфе рассмотрим особенности взаимного расположения параллельных прямых, а в § 15 — расходящихся прямых.

3. Теорема о взаимном расположении параллельных прямых. На евклидовой плоскости все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой. На плоскости Лобачевского картина совершенно иная, что вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. *Расстояние y от переменной точки одной из двух параллельных прямых до другой прямой монотонно неограниченно возрастает при перемещении точки в сторону, противоположную направлению параллельности, и монотонно убывает и стремится к нулю при перемещении точки в сторону параллельности. При этом расстояние y принимает все возможные положительные значения.*

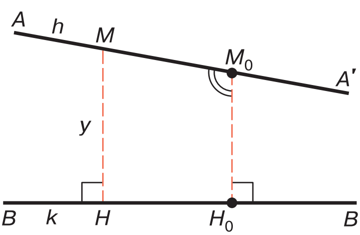


Рис. 40

□ Пусть $\overline{AA'}$ и $\overline{BB'}$ — параллельные направленные прямые, M — переменная точка прямой AA', а MH — перпендикуляр к прямой BB'. Из некоторой точки M_0 прямой AA' проведем перпендикуляр M_0H_0 к прямой BB' и рассмотрим двуугольник hM_0H_0k, где h и k соответственно лучи M_0A и H_0B (рис. 40). Заметим, что $\angle H_0M_0A'$ — угол параллельности, соответствующий отрезку M_0H_0, поэтому он острый, следовательно, $\angle AM_0H_0$ тупой. К двуугольнику hM_0H_0k применима лемма 1 о двуугольнике, т. е. если переменная точка M перемещается по лучу h, удаляясь от точки M_0, то $y = MH$ монотонно неограниченно возрастает. Так как за точку M_0 можно взять любую точку прямой AA', то отсюда мы заключаем, что при перемещении переменной точки M прямой AA' в направлении $\overline{A'A}$ $y = MH$ монотонно неограниченно возрастает.

Ясно, что если точка M перемещается по прямой AA' в обратном направлении, т. е. в сторону параллельности, то $y = MH$ монотонно убывает.

Докажем теперь, что на прямой AA' всегда существует такая точка M, что перпендикуляр к прямой BB' равен любому данному отрезку $\widetilde{p}$. Для этого на прямой AA' возьмем точку P так, чтобы перпендикуляр PQ к прямой BB' был больше отрезка $\widetilde{p}$. Согласно доказанному это возможно. Отложим на луче QP отрезок $QC = \widetilde{p}$ и через точку C проведем две прямые $\overline{CD} \parallel \overline{B'B}$ и $\overline{CD'} \parallel \overline{BB'}$ (рис. 41). Углы DCQ и $D'CQ$ являются углами параллельности, соответствующими отрезку CQ, поэтому они равны друг другу и оба угла острые. Отсюда следует, что $\angle PCD'$ тупой, и так как P–C–Q, то луч CD_1, дополнительный к лучу CD, является внутренним лучом угла PCD'. Так как $\overline{CD'} \parallel \overline{BB'}$, $\overline{BB'} \parallel \overline{AA'}$, то $\overline{CD'} \parallel \overline{AA'}$ поэтому лучи CD' и PA' параллельны. Следовательно, луч CD_1 пересекает луч PA' в некоторой точке D_2. Итак, $\overline{D_2A'} \parallel \overline{BB'}$, $\overline{D_2D} \parallel \overline{B'B}$, поэтому по теореме 1 § 11 прямые D_2A' и D_2D симметричны относительно прямой D_2H_2, перпендикулярной к прямой BB' (см. рис. 41). Если M и H — точки, симметричные точкам C и Q относительно D_2H_2, то, очевидно, $MH = \widetilde{p}$.

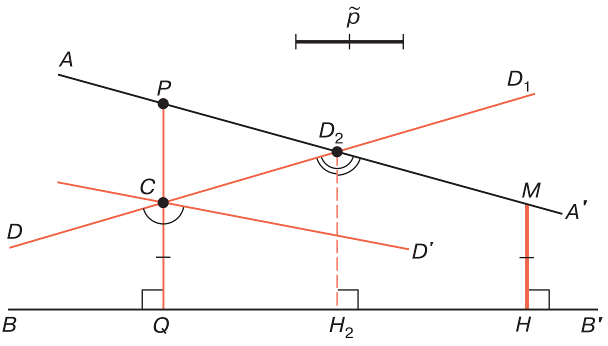


Рис. 41

Мы доказали, что расстояние y от переменной точки M прямой AA' до прямой BB' принимает любое положительное значение. Отсюда, учитывая, что при перемещении точки M прямой AA' в сторону параллельности $y = MH$ монотонно убывает, мы заключаем, что при этом перемещении y стремится к нулю, так как он может принимать значения, меньшие любого сколь угодно малого $\varepsilon > x$. ■

4. Теорема о равенстве двух пар параллельных прямых. В § 1 п. 1 было отмечено, что при наложении прямая отображается на прямую, а луч — на луч. Докажем, что *при наложении параллельные лучи отображаются на параллельные лучи*. В самом деле, пусть лучи AA_1 и BB_1 параллельны, а $A'A'_1$ и $B'B'_1$ — образы этих лучей при данном наложении. Мы предполагаем, что A', A'_1, B', B'_1 — образы соответственно точек A, A_1, B, B_1. Так как лучи AA_1 и BB_1 не имеют общих точек и принадлежат одной полуплоскости с границей AB, то лучи $A'A'_1$ и $B'B'_1$ не имеют общих точек и принадлежат одной полуплоскости с границей $A'B'$ (рис. 42).

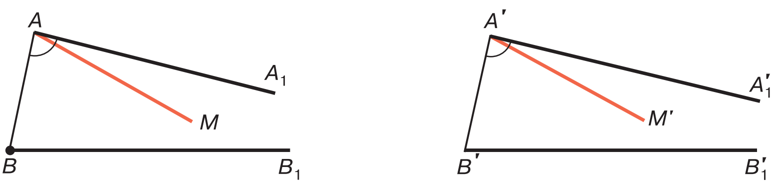


Рис. 42

Далее, пусть $A'M'$ — произвольный внутренний луч угла $B'AA'_1$, а AM — прообраз этого луча. Ясно, что AM — внутренний луч угла BAA_1, поэтому в силу того, что $AA_1 \parallel BB_1$, луч AM пересекает луч BB_1. Следовательно, и луч $A'M'$ пересекает луч $B'B'_1$. Итак, лучи $A'A'_1$ и $B'B'_1$ параллельны.

Докажем теперь, что при наложении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые. Пусть $\overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1}$, а $A'A'_1$, $B'B'_1$ — образы прямых AA_1 и BB_1. Из определения параллельности прямых следует, что лучи AA_1 и BB_1 параллельны. По доказанному лучи $A'A'_1$ и $B'B'_1$ параллельны, поэтому $\overline{A'A'_1} \parallel \overline{B'B'_1}$. Итак, *при наложении параллельные прямые отображаются на параллельные прямые*.

Отсюда следует, что *фигура, равная паре параллельных прямых, есть пара параллельных прямых*. Очевидно, аналогичное утверждение верно и на евклидовой плоскости. Но на евклидовой плоскости расстояние между параллельными прямыми для различных пар параллельных прямых может быть различным, поэтому, если, например, $a \parallel b$ и $c \parallel d$ и расстояние между прямыми a и b не равно расстоянию между прямыми c и d, то не существует наложение, при котором пара прямых a, b переходит в пару прямых c, d.

В противоположность этому на плоскости Лобачевского имеет место следующая интересная теорема.

Теорема 2. *Если a, b и c, d — произвольные пары параллельных прямых* (*т. е.* $a \parallel b$ *и* $c \parallel d$), *то существует наложение, при котором прямые a и b переходят соответственно в прямые c и d.*

□ Пусть PQ — перпендикуляр, проведенный из некоторой точки прямой a к прямой b. Согласно теореме 1 на прямой c существует такая точка R, что перпендикуляр RS, проведенный к прямой d, равен PQ. На прямых a, b, c и d возьмем соответственно точки A, B, C и D так, чтобы $\overline{PA} \parallel \overline{QB}$, $\overline{RC} \parallel \overline{SD}$ (рис. 43). Тогда, очевидно, $\angle QPA$ есть угол параллельности, соответствующий отрезку PQ, а $\angle SRC$ — угол параллельности, соответствующий отрезку RS, поэтому $\angle QPA = \angle SRC$.

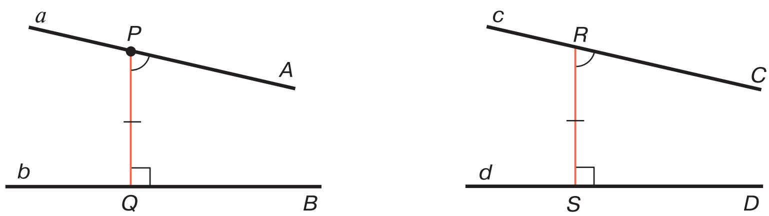


Рис. 43

По аксиоме III_6 в силу равенства $\angle PQB = \angle RSD$ существует наложение f, при котором лучи QP и QB переходят соответственно в лучи SR и SD, поэтому $d = f(b)$. Так как $QP = SR$, то $R = f(P)$, следовательно, при наложении f луч PQ переходит в луч RS и в силу равенства $\angle QPA = \angle SRC$ луч PA переходит в луч RC, поэтому $c = f(a)$. Итак, f — искомое наложение. ■

Таким образом, на плоскости Лобачевского любые две пары параллельных прямых равны.

5. Некоторые свойства параллельности прямых и лучей. Рассмотрим некоторые свойства параллельности лучей и прямых, необходимые для дальнейшего изложения.

14.1°. Если луч h параллелен как прямой a, так и другой прямой b, то $a \parallel b$.

□ Пусть луч h исходит из точки O и содержит точку P. Так как л$OP \parallel a$, л$OP \parallel b$, то прямые a и b можно обозначить через AA' и BB' так, чтобы $\overline{OP} \parallel \overline{AA'}$, $\overline{OP} \parallel \overline{BB'}$. По теореме 3 § 10 о транзитивности параллельных прямых $AA' \parallel BB'$, поэтому $a \parallel b$. ■

14.2°. Если две ненаправленные прямые a и b параллельны прямой c и на прямой c направления параллельностей $c \parallel a$ и $c \parallel b$ совпадают, то $a \parallel b$.

□ Обозначим прямые c, a и b через CC', AA' и BB' так, чтобы $\overline{CC'} \parallel \overline{AA'}$, $CC' \parallel BB'$. По теореме 3 § 10 $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$, т. е. $a \parallel b$. ■

Предлагаем читателю, используя определения и утверждения, сформулированные в § 5 п. 2, § 9 п. 1, и теорему 3 § 10, самостоятельно доказать еще два утверждения:

14.3°. Если каждый из лучей h и k параллелен лучу l или сонаправлен с ним, то $h \parallel k$ или $h \upuparrows k$.

14.4°. Существует одна и только одна прямая, проходящая через данную точку и параллельная данному лучу или содержащая этот луч.

§ 15. Расходящиеся прямые

1. Определение расходящихся прямых. Как было отмечено выше, две прямые на плоскости Лобачевского называются *расходящимися прямыми*, если они не пересекаются и не параллельны. Существование расходящихся прямых непосредственно следует из леммы 2 § 14. Более того, из этой леммы следует, что существует бесконечное множество пар расходящихся прямых. В частности, через точку A, не лежащую на данной прямой CD, проходит бесконечное множество прямых, каждая из которых расходится с прямой CD. В самом деле, если AH — перпендикуляр к прямой CD, то по теореме 1 § 11 существуют только две прямые, проходящие через точку A и параллельные прямой CD. Эти прямые симметричны относительно прямой AH. На рис. 24 они обозначены через $B_1'B_1$ и $B_2'B_2$, причем $\overline{B_1'B_1} \parallel \overline{CD}$, $\overline{B_2'B_2} \parallel \overline{DC}$. Тогда любая прямая, проходящая через точку A внутри вертикальных углов B_1AB_2' и B_2AB_1', расходится с прямой a.

Докажем лемму о двух прямых, перпендикулярных к одной из расходящихся прямых и параллельных другой.

Лемма. *Если a и b — расходящиеся прямые, то существуют две и только две прямые l_1 и l_2, каждая из которых перпендикулярна к прямой b и параллельна прямой a. При этом на прямой a направления параллельностей $l_1 \parallel a$ и $l_2 \parallel a$ не совпадают.*

□ Из некоторой точки M прямой a проведем перпендикуляр MH к прямой b и обозначим прямые a и b через AA' и BB' так, как показано на рис. 44. Проведем лучи HC и HC', л$HC \parallel$ лMA, л$HC' \parallel$ лMA'. Ясно, что л$HC \parallel a$, л$HC' \parallel a$.

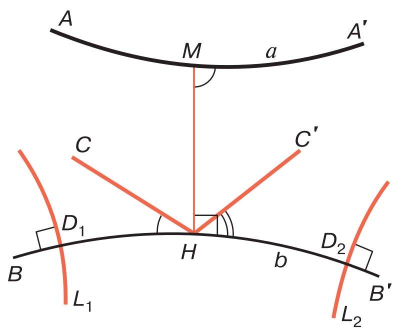


Рис. 44

Лучи HB и HC не совпадают и принадлежат вместе с лучом MA одной полуплоскости с границей HM. Учитывая свойство 1.3° и то обстоятельство, что лучи HC и MA параллельны, мы заключаем, что HC — внутренний луч прямого угла BHM. Отсюда следует, что $\angle BHC$ острый. По свойству 12.4° этот угол является углом параллельности, соответствующим некоторому отрезку. Отложим на луче HB отрезок HD_1, равный этому отрезку, и через D_1 проведем прямую l_1, перпендикулярную к прямой b. Тогда л$HC \parallel l_1$, и по свойству 14.1° $l_1 \parallel a$. Аналогично на луче HB' отложим отрезок HD_2, которому соответствует угол параллельности $B'HC'$, и через точку D_2 проведем прямую l_2, перпендикулярную к прямой b. Тогда л$HC' \parallel l_2$, и по свойству 14.1° $l_2 \parallel a$.

На прямой a направления параллельностей $l_1 \parallel a$ и $l_2 \parallel a$ не совпадают, так как в противном случае по свойству 14.2° $l_1 \parallel l_2$, что противоречит следствию теоремы 4 § 10.

Докажем, что l_1 и l_2 — единственные прямые, перпендикулярные к прямой b и параллельные прямой a. Пусть, напротив, существует еще одна прямая l_3, $l_3 \perp b$ и $l_3 \parallel a$. На прямой a направление параллельности $l_3 \parallel a$ совпадает либо с направлением параллельности $l_1 \parallel a$, либо с направлением параллельности $l_2 \parallel a$, поэтому по свойству 14.2°, либо $l_1 \parallel l_3$, либо $l_2 \parallel l_3$. Мы пришли к противоречию со следствием теоремы 4 § 10. ■

2. Теорема о взаимном расположении расходящихся прямых. Напомним, что отрезок PQ называется общим перпендикуляром прямых a и b, если прямая PQ пересекает прямые a и b соответственно в точках P и Q и перпендикулярна к этим прямым (см. § 10, п. 4). Докажем теорему о взаимном расположении расходящихся прямых.

Теорема 1. *Две расходящиеся прямые имеют один и только один общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они монотонно неограниченно удаляются друг от друга.*

□ Пусть a и b — данные расходящиеся прямые. Докажем сначала, что эти прямые имеют общий перпендикуляр.

По предыдущей лемме существуют две прямые DE и $D'E'$, перпендикулярные к прямой b и параллельные прямой a. Здесь D и D' — точки прямой b, а точки E, E' и прямая a принадлежат одной полуплоскости с границей b. Из середины P отрезка DD' проведем перпендикуляр PQ к прямой a и докажем, что PQ — общий перпендикуляр расходящихся прямых a и b (рис. 45).

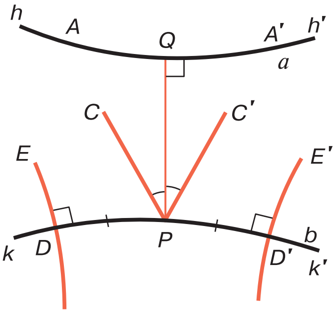


Рис. 45

На прямой a возьмем точки A и A' так, чтобы A–Q–A', $D, A \overset{\cdot\cdot}{-} PQ$. Тогда $D', A' \overset{\cdot\cdot}{-} PQ$. Проведем лучи PC и PC', параллельные соответственно лучам QA и QA'. Лучи PC и PD принадлежат одной полуплоскости с границей PQ и не совпадают, поэтому, учитывая свойство 1.3° и то обстоятельство, что лучи PC и QA параллельны, мы заключаем, что PC — внутренний луч угла DPQ. Так как $\overline{PC} \parallel \overline{QA}$, то $\angle QPC$ является углом параллельности, соответствующим отрезку PQ, т. е. $\widehat{QPC} = \Pi(PQ)$. С другой стороны, $\overline{DE} \parallel \overline{QA}$, поэтому $\overline{DE} \parallel \overline{PC}$, следовательно, $\angle DPC$ является углом параллельности, соответствующим отрезку PD, т. е. $\widehat{DPC} = \Pi(DP)$. Таким образом, $\widehat{DPQ} = \widehat{QPC} + \widehat{DPC} = \Pi(PQ) + \Pi(DP)$. Точно так же, рассматривая лучи PC', PD' и PQ, получаем: $\widehat{D'PQ} = \Pi(PQ) + \Pi(D'P)$. Так как $DP = D'P$, то $\widehat{DPQ} = \widehat{D'PQ}$. Углы DPQ и $D'PQ$ смежные, поэтому $PQ \perp DD'$. Таким образом, PQ — общий перпендикуляр прямых a и b.

Прямые a и b имеют только один общий перпендикуляр PQ. В самом деле, если предположить, что P_1Q_1 еще один общий перпендикуляр этих прямых, где

$P_1 \in b$, $Q_1 \in a$, то получим выпуклый четырехугольник PP_1Q_1Q, все углы которого прямые, т. е. сумма мер углов этого четырехугольника равна $4d$, что невозможно.

Остается доказать, что прямые a и b по обе стороны от PQ монотонно неограниченно удаляются друг от друга. Это утверждение непосредственно следует из леммы 1 § 14 о двуугольнике. В самом деле, двуугольники $hQPk$ и $h'QPk'$, где h, k, h', k' соответственно лучи QA, PD, QA', PD', удовлетворяют условиям этой леммы, так как их углы P и Q прямые. Поэтому если M — переменная точка луча h или луча h', то при возрастании QM расстояние от точки M до прямой b монотонно безгранично возрастает. ■

Из доказательства теоремы непосредственно следует утверждение.

Следствие 1. *Если a и b — расходящиеся прямые, а PQ — их общий перпендикуляр, то две прямые, перпендикулярные к b и параллельные a, симметричны относительно прямой PQ.*

Длина общего перпендикуляра двух расходящихся прямых называется *расстоянием между этими прямыми*.

Предлагаем читателю, пользуясь предыдущей теоремой, доказать следующее утверждение.

Следствие 2. *Расстояние между двумя расходящимися прямыми меньше длины любого отрезка, отличного от общего перпендикуляра, концы которого лежат на данных прямых.*

Из доказанной теоремы и леммы 2 § 14 следует утверждение.

Следствие 3. *Две прямые являются расходящимися прямыми тогда и только тогда, когда они имеют общий перпендикуляр.*

3. Ось симметрии расходящихся прямых. Прямая c называется *осью симметрии* расходящихся прямых a и b, если при осевой симметрии с осью c прямая a переходит в прямую b, а прямая b — в прямую a.

Теорема 2. *Две расходящиеся прямые имеют одну и только одну ось симметрии, которая является серединным перпендикуляром к их общему перпендикуляру.*

□ Обозначим через a и b данные расходящиеся прямые и рассмотрим их общий перпендикуляр PQ, где $P \in a$, $Q \in b$. Очевидно, серединный перпендикуляр c к отрезку PQ является осью симметрии прямых a и b (рис. 46, *а*). В самом деле, при симметрии с осью c точка P переходит в точку Q, а так как $a \perp PQ$, $b \perp PQ$, то прямая a переходит в прямую b.

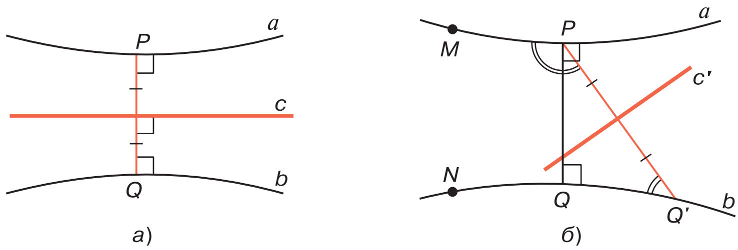


Рис. 46

Пусть c' — какая-то ось симметрии прямых a и b, а Q' — точка, симметричная точке P относительно прямой c'. Докажем, что точки Q и Q' совпадают. Допустим, что это не так. Возьмем на прямых a и b точки M и N так, чтобы $M, N \doteq PQ'$ и $N{-}Q{-}Q'$ (рис. 46, *б*). Прямая c' — серединный перпендикуляр к отрезку PQ', и так как прямые a и b симметричны относительно прямой c', то лучи PM и $Q'N$ также симметричны относительно прямой c', поэтому $\angle MPQ' = \angle NQ'P$. Но это невозможно, так как $\angle MPQ'$ тупой, а $\angle NQ'P$ острый (см. рис. 46). Таким образом, точки Q и Q' совпадают, следовательно, и прямые C и c' совпадают. ■

4. Теорема о равенстве двух пар расходящихся прямых. Докажем, что *при наложении расходящиеся прямые отображаются на расходящиеся прямые и расстояние между ними сохраняется.* В самом деле, пусть a и b — данные расходящиеся прямые, AB — их общий перпендикуляр, $A \in a$, $B \in b$, а $a' = f(a)$, $b' = f(b)$, где f — данное наложение. Если $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, то, очевидно, $A' \in a'$, $B' \in b'$, $A'B' \perp a'$, $A'B' \perp b'$, т. е. $A'B'$ — общий перпендикуляр прямых a' и b', поэтому a' и b' — расходящиеся прямые. Так как $A'B' = AB$, то расстояние между прямыми a', b' равно расстоянию между прямыми a и b.

Докажем теперь теорему о равенстве двух пар расходящихся прямых.

Теорема 3. *Даны две произвольные пары расходящихся прямых a_1, b_1 и a_2, b_2, расстояния между которыми равны ρ_1 и ρ_2. Для того чтобы существовало наложение, при котором прямые a_1, b_1 переходят соответственно в прямые a_2, b_2, необходимо и достаточно, чтобы $\rho_1 = \rho_2$.*

□ Пусть A_1B_1 и A_2B_2 — общие перпендикуляры расходящихся прямых a_1, b_1 и a_2, b_2, где $A_1 \in a_1$, $B_1 \in b_1$, $A_2 \in a_2$, $B_2 \in b_2$.

Предположим, что существует наложение f, такое, что $a_2 = f(a_1)$, $b_2 = f(b_1)$. Если $A_1' = f(A_1)$, $B_1' = f(B_1)$, то, очевидно, $A_1' \in a_2$, $B_1' \in b_2$ и $A_1'B_1' \perp a_2$, $A_1'B_1' \perp b_2$. Таким образом, $A_1'B_1'$ — общий перпендикуляр прямых a_2, b_2. По теореме 1 отрезок $A_1'B_1'$ совпадает с отрезком A_2B_2, поэтому $\rho_1 = A_1B_1 = A_1'B_1' = A_2B_2 = \rho_2$.

Обратно: пусть $\rho_1 = \rho_2$, т. е. $A_1B_1 = A_2B_2$. Возьмем на прямых b_1 и b_2 соответственно точки C_1 и C_2, отличные от точек B_1 и B_2. По аксиоме III_6 в силу равенства $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$ существует наложение f, при котором лучи B_1A_1 и B_1C_1 переходят соответственно в лучи B_2A_2 и B_2C_2, поэтому $b_2 = f(b_1)$. Так как $A_1B_1 = A_2B_2$, то $A_2 = f(A_1)$. Таким образом, прямая B_1A_1 переходит в прямую B_2A_2. Но $a_1 \perp A_1B_1$, $a_2 \perp A_2B_2$, поэтому $a_2 = f(a_1)$. Итак, $b_2 = f(b_1)$, $a_2 = f(a_1)$, т. е. f — искомое наложение. ■

§ 16. Заградительные прямые

1. Заградительная прямая угла. *Заградительной прямой неразвернутого угла* называется ненаправленная прямая, которая параллельна сторонам этого угла, т. е. если l — заградительная прямая угла hk, то $h \parallel l$, $k \parallel l$.

Теорема 1. *Каждый неразвернутый угол имеет одну и только одну заградительную прямую. Заградительная прямая угла пересекает биссектрису этого угла, перпендикулярна к ней и целиком расположена внутри угла.*

□ Пусть AOB — данный неразвернутый угол, а OC — биссектриса данного угла (рис. 47). Заметим, что $\angle AOC$ острый, поэтому на луче OC можно отложить отрезок OD, которому соответствует угол параллельности AOC. Через точку D проведем прямую l, перпендикулярную к прямой OC. Из определения угла параллельности следует, что л$OA \parallel l$. По теореме 1 § 11 л$OB \parallel 1$. Таким образом, l — заградительная прямая угла AOB.

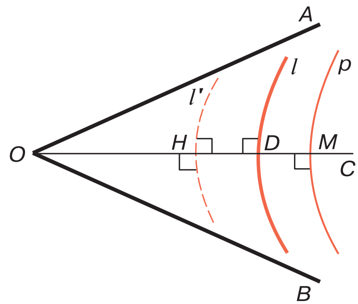


Рис. 47

Так как D — внутренняя точка угла AOB и прямая l не имеет общих точек со сторонами этого угла, то прямая l целиком расположена внутри угла AOB.

Докажем теперь, что l — единственная заградительная прямая угла AOB. Предположим, что существует еще одна заградительная прямая l' этого угла. Проведем перпендикуляр OH к прямой l'. Углы AOH и BOH являются углами параллельности, соответствующими отрезку OH, поэтому они равны друг другу и являются острыми углами. Так как лучи OA и OB не совпадают, то отсюда следует, что OH — биссектриса угла AOB, т. е. лучи OH и OC совпадают. Итак, $l' \perp OC$, $l \perp OC$, следовательно, l и l' — расходящиеся прямые.

С другой стороны, л$OA \parallel l$, л$OA \parallel l'$, следовательно, по свойству 14.1° $l \parallel l'$. Мы пришли к противоречию, поэтому наше допущение неверно и l — единственная заградительная прямая угла AOB. ■

Следствие. *Существует бесконечное множество прямых, каждая из которых целиком расположена внутри данного неразвернутого угла.*

□ Обозначим через AOB данный неразвернутый угол, а через OC его биссектрису, которая пересекает заградительную прямую l данного угла в некоторой точке D. Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что если M — точка луча OC, такая, что $O–D–M$, то прямая p, проходящая через точку M и перпендикулярная к прямой OC, целиком расположена внутри угла AOB (см. рис. 47). Очевидно, таких прямых бесконечное множество. ■

Существование заградительной прямой угла является особенностью геометрии Лобачевского. На евклидовой плоскости через любую внутреннюю точку угла проходит прямая, пересекающая обе стороны угла, и любая прямая, проходящая через эту точку и не содержащая вершину угла, пересекает хотя бы одну из сторон угла.

Замечание. Термин «заградительная прямая» заимствован нами у В. Ф. Кагана (см. [5], § 21). В. Ф. Каган отмечает, что «заградительная прямая угла представляет собой как бы границу, за которую стороны угла не переходят» (см. задачу 16, *а* к главе III).

2. Заградительные прямые двух пересекающихся прямых. *Заградительной прямой двух пересекающихся прямых* называется ненаправленная прямая, которая параллельна как одной, так и другой прямой.

Если данные прямые AB и CD пересекаются в точке O, то образуются четыре неразвернутых угла AOC, COB, BOD и DOA. Ясно, что прямая C является заградительной прямой данных прямых тогда и только тогда, когда она является заградительной прямой одного из указанных четырех неразвернутых углов. Поэтому, учитывая теорему 1, приходим к теореме 2.

Теорема 2. *Существуют четыре и только четыре заградительные прямые двух пересекающихся прямых. Каждая из этих заградительных прямых является заградительной прямой одного из четырех неразвернутых углов, образованных этими прямыми, расположена внутри угла и перпендикулярна к биссектрисе этого угла.*

На рис. 48 изображены пересекающиеся в точке O прямые AB и CD и их заградительные прямые m_1, m_2, m_3 и m_4. Прямые m_1, и m_3 являются расходящимися прямыми, так как они перпендикулярны к прямой, содержащей биссектрисы вертикальных углов AOC и BOD. Точно так же m_2 и m_4 — расходящиеся прямые. С другой стороны, так как $m_1 \parallel$ лOA и $m_2 \parallel$ лOA, то по свойству 14.1° $m_1 \parallel m_2$. Аналогично $m_2 \parallel m_3$, $m_3 \parallel m_4$, $m_4 \parallel m_1$.

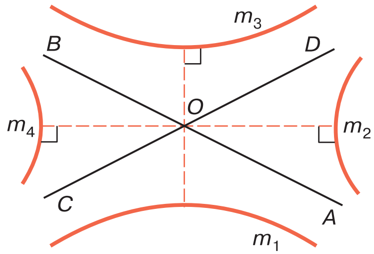


Рис. 48

Следствие. *Заградительные прямые двух пересекающихся прямых, расположенные внутри вертикальных углов, расходятся, а заградительные прямые, расположенные внутри смежных углов, параллельны.*

Фигура, изображенная на рис. 48, является своеобразным «четырехсторонником» со «сторонами» m_1, m_2, m_3 и m_4. Прямые AB и CD служат как бы «диагоналями» этого «четырехсторонника». Интересно отметить, что точка O пересечения прямых AB и CD является центром симметрии этой фигуры.

3. Заградительные прямые двух параллельных прямых. *Заградительной прямой двух параллельных прямых* a и b называется прямая c, которая параллельна как прямой a, так и прямой b, причем на прямой c направления параллельностей $c \parallel a$ и $c \parallel b$ не совпадают.

Из этого определения вытекают следующие два свойства:

16.1°. Параллельные прямые A и b расположены по одну сторону от их заградительной прямой c.

□ Так как $c \parallel a$ и $c \parallel b$, то прямые b и A не пересекают прямую c. Если предположить, что они расположены по разные стороны от прямой c, то по лемме § 10 на прямой c направления параллельностей $c \parallel a$ и $c \parallel b$ совпадают, что противоречит определению заградительной прямой. ■

16.2°. Если c — заградительная прямая параллельных прямых a и b, то: а) на прямой a направления параллельностей $a \parallel c$ и $a \parallel b$ не совпадают; б) на прямой b направления параллельностей $b \parallel c$ и $b \parallel a$ не совпадают.

□ а) Утверждение докажем методом от противного, т. е. предположим, что на прямой A направления параллельностей $a \parallel c$ и $a \parallel b$ совпадают. Тогда прямые a, b и c можно обозначить соответственно через AA_1, BB_1 и CC_1 так, чтобы $\overline{AA_1} \parallel \overline{CC_1}$ и $\overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1}$. По теореме 3 § 10 о транзитивности параллельных прямых $\overline{CC_1} \parallel \overline{BB_1}$, следовательно, $\overline{CC_1} \parallel \overline{AA_1}$ и $\overline{CC_1} \parallel \overline{BB_1}$. Мы пришли к выводу, что на прямой c направления параллельностей $c \parallel a$ и $c \parallel b$ совпадают. Этот вывод противоречит определению заградительной прямой двух параллельных прямых.

Утверждение б) доказывается аналогично. ■

Докажем теорему существования заградительной прямой двух параллельных прямых.

Теорема 3. *Существует одна и только одна заградительная прямая двух параллельных прямых. Заградительная прямая параллельных прямых перпендикулярна к оси симметрии этих прямых.*

□ Пусть $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ — данные параллельные прямые, AB — их секущая равного наклона, а C — середина отрезка AB. Серединный перпендикуляр CC_1 к отрезку AB является осью симметрии прямых AA_2 и BB_2 (см. § 11, пп. 2 и 3). Предположим, что обозначения выбраны так, что $\overline{AA_2} \parallel \overline{BB_2} \parallel \overline{CC_2}$, $A_1–A–A_2$, $B_1–B–B_2$. Тогда AA_2, BB_2 и CC_2 — продолжения соответственных лучей AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 49).

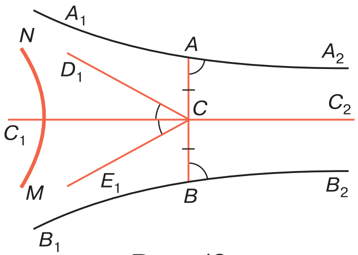


Рис. 49

Проведем луч CD_1, параллельный лучу AA_1. Очевидно, CD_1 — внутренний луч угла C_1CA, поэтому $\angle C_1CD_1$ острый. При симметрии относительно прямой CC_1 луч AA_1 переходит в луч BB_1, а луч CD_1 — в некоторый луч CE_1. Так как л$CD_1 \parallel$ лAA_1, то л$CE_1 \parallel$ лBB_1 и луч CC_1 — биссектриса угла D_1CE_1 (см. рис. 49). Обозначим через MN заградительную прямую угла D_1CE_1. Тогда, очевидно, $MN \parallel C_1C_2$ и $MN \parallel$ лAA_1, $MN \parallel$ лBB_1, следовательно, MN — заградительная прямая параллельных прямых A_1A_2 и B_1B_2.

Докажем, что MN — единственная заградительная прямая параллельных прямых A_1A_2 и B_1B_2. Предположим, что $M'N'$ — другая заградительная прямая этих прямых. Тогда л$AA_1 \parallel MN$, л$AA_1 \parallel M'N'$. Предположим, что обозначения выбраны так, что л$AA_1 \parallel \overline{MN}$ и л$AA_1 \parallel \overline{M'N'}$. По свойству 14.1° $MN \parallel M'N'$. С другой стороны, по определению заградительной прямой л$\overline{BB_1} \parallel \overline{NM}$ и л$\overline{BB_1} \parallel \overline{N'M'}$, поэтому $\overline{NM} \parallel \overline{N'M'}$. Мы пришли к противоречию с леммой § 11. Следовательно, наше допущение неверно, т. е. MN — единственная заградительная прямая параллельных прямых A_1A_2 и B_1B_2. ■

Следствие. *Все точки заградительной прямой двух параллельных прямых принадлежат полосе, ограниченной данными параллельными прямыми.*

Из определения заградительной прямой параллельных прямых и свойства 16.2° непосредственно следует свойство:

16.3°. Если прямая c является заградительной прямой параллельных прямых a и b, то прямая b – заградительная прямая параллельных прямых a и c, а прямая a – заградительная прямая параллельных прямых b и c.

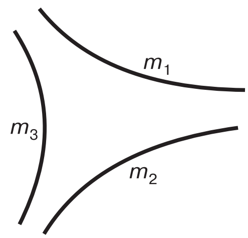


Рис. 50

Фигура, изображенная на рис. 50, является своеобразным «треугольником» со «сторонами» m_1, m_2 и m_3. Она является частным случаем так называемых вырожденных треугольников, которые будут изучены в главе VIII.

4. Заградительные прямые двух расходящихся прямых. Заградительной прямой двух расходящихся прямых a и b называется прямая c, которая параллельна как прямой a, так и прямой b, причем прямые A и b лежат в одной полуплоскости с границей c.

Из этого определения вытекает следующее свойство:

16.4°. Если c — заградительная прямая расходящихся прямых a и b, то на прямой c направления параллельностей $c \parallel a$ и $c \parallel b$ не совпадают.

□ Предположим, что на прямой c направления параллельностей $c \parallel a$ и $c \parallel b$ совпадают. Тогда по свойству 14.2° $a \parallel b$, что противоречит определению расходящихся прямых. ■

Докажем теорему о заградительных прямых двух расходящихся прямых.

Теорема 4. *Существуют две и только две заградительные прямые двух данных расходящихся прямых. Заградительные прямые расходящихся прямых перпендикулярны к оси симметрии этих прямых.*

□ Пусть a и b — данные расходящиеся прямые, PQ — их общий перпендикуляр, $P \in a$, $Q \in b$, а p — ось симметрии прямых a и b. Прямые a и p являются расходящимися прямыми, поэтому по лемме § 15 существуют две прямые l и l', каждая из которых перпендикулярна к прямой p и параллельна прямой a (рис. 51). При симметрии относительно прямой p $a \mapsto b$, $b \mapsto a$, $p \mapsto p$, $l \mapsto l$, $l' \mapsto l'$, поэтому, так как $a \parallel l$ и $a \parallel l'$, то $b \parallel l$ и $b \parallel l'$ (см. § 14, п. 4).

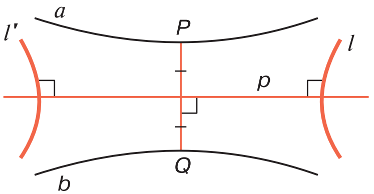


Рис. 51

Прямые a и b лежат в одной полуплоскости с границей l. В самом деле, так как l и PQ — расходящиеся прямые, то $P,\ Q \mathbin{\ddot{-}} l$. Но прямые a и b не имеют общих точек с прямой l, следовательно, они лежат в одной полуплоскости с границей l. Точно так же доказывается, что прямые a и b лежат в одной полуплоскости с границей l'. Итак, l и l' — заградительные прямые расходящихся прямых a и b.

Докажем, что l и l' — единственные заградительные прямые расходящихся прямых a и b. Предположим, что существует еще одна заградительная прямая m этих прямых. Так как l и l' — расходящиеся прямые, то на прямой a направления параллельностей $a \parallel l$ и $a \parallel l'$ не совпадают (см. свойство 14.2°), поэтому, если прямые a и b обозначим через AA' и BB' так, как показано на рис. 52, *а* и *б*, то л$PA \parallel l$, л$QB \parallel l$, а л$PA' \parallel l'$, л$QB' \parallel l'$. Так как $m \parallel a$ и $m \parallel b$, то все точки прямой m принадлежат полосе, ограниченной прямыми a и b (см. задачу 20, *а*). С другой стороны, прямая m не пересекает отрезок PQ, так как прямые a и b лежат по одну сторону от прямой m. Отсюда следует, что возможны только два случая: а) л$PA \parallel m$ и л$QB \parallel m$; б) л$PA' \parallel m$ и л$QB' \parallel m$. Рассмотрим каждый случай в отдельности.

а) Так как л$PA \parallel l$ и л$PA \parallel m$, то прямые l и m можно обозначить через LL_1 и MM_1 так, чтобы л$PA \parallel \overline{LL_1}$, л$PA \parallel \overline{MM_1}$ (см. рис. 52, *а*). Тогда согласно

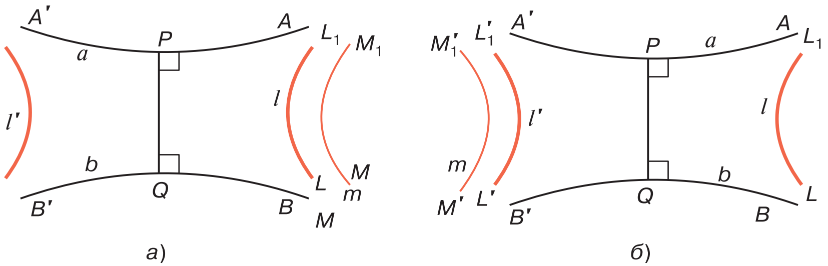


Рис. 52

свойству 16.4° л$QB \parallel \overline{L_1L}$, л$QB \parallel \overline{M_1M}$, поэтому по свойству 14.1° $\overline{LL_1} \parallel \overline{MM_1}$ и $\overline{L_1L} \parallel \overline{M_1M}$. Мы снова пришли к противоречию с леммой § 11.

б) Аналогично случаю а) прямые l и m можно обозначить через $L'L'_1$ и $M'M'_1$ так, чтобы л$PA' \parallel \overline{L'L'_1}$, л$PA' \parallel \overline{M'M'_1}$ (см. рис. 52, *б*). Согласно свойству 16.4° л$QB' \parallel \overline{L'_1L'}$, л$QB' \parallel \overline{M'_1M'}$, поэтому по свойству 14.1° $\overline{L'L'_1} \parallel \overline{M'M'_1}$, $\overline{L'_1L'} \parallel \overline{M'_1M'}$. Мы снова пришли к противоречию с леммой § 11. ■

Следствие 1. *Две заградительные прямые данных расходящихся прямых являются расходящимися прямыми.*

Это утверждение следует из следствия 3 теоремы 1 § 15.

Следствие 2. *Если l и l' являются заградительными прямыми расходящихся прямых a и b, то a и b являются заградительными прямыми расходящихся прямых l и l'.*

Предлагаем читателю, пользуясь рис. 51, самостоятельно обосновать это утверждение.

§ 17. Проекция прямой на прямую

1. Две леммы. Мы рассмотрим еще одну особенность взаимного расположения прямых на плоскости Лобачевского. На евклидовой плоскости, если прямая a не перпендикулярна к прямой b, то ее проекция на прямую b

есть вся прямая b. На плоскости Лобачевского проекция прямой на другую прямую, не перпендикулярную к ней, есть либо луч, либо интервал. Для доказательства этих утверждений докажем сначала две леммы.

Лемма 1. *Произвольный внутренний луч неразвернутого угла пересекает заградительную прямую этого угла.*

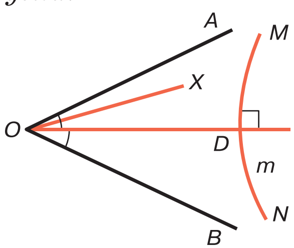


Рис. 53

□ Пусть m — заградительная прямая угла AOB, D — точка пересечения прямой m с биссектрисой этого угла. Возьмем на прямой m точки M и N так, чтобы лDM $\parallel$ лOA, лDN $\parallel$ лOB (рис. 53). Любой внутренний луч x угла AOB, отличный от луча OD, является внутренним лучом либо угла DOA, либо угла DOB. В первом случае в силу того, что лOA $\parallel$ лDM луч x пересекает луч DM, а во втором случае луч x пересекает луч DN. Таким образом, любой внутренний луч угла AOB пересекает прямую m. ■

Лемма 2. *Каковы бы ни были параллельные прямые a и b, существует единственная прямая p, перпендикулярная к прямой b и параллельная прямой a.*

□ Пусть a' — прямая, симметричная прямой a относительно прямой b. Прямые a и a' параллельны, а b — их ось симметрии. Обозначим через p заградительную прямую прямых a и a'. По теореме 3 § 16 $p \perp b$. Итак, $p \parallel a$ и $p \perp b$.

Докажем, что p — единственная прямая, удовлетворяющая условиям леммы. Предположим, что существует еще одна прямая p', такая, что $p' \parallel a$, $p' \perp b$. Читатель без труда самостоятельно убедится в том, что p' — заградительная прямая параллельных прямых a и a'. Мы пришли к противоречию с теоремой 3, § 16. ■

2. Проекция прямой на параллельную прямую.

Теорема 1. *Проекция прямой a на параллельную ей прямую b есть некоторый луч прямой b, параллельный прямой a. Началом этого луча является точка P*

пересечения прямых b *и* p, *где* $p \perp b$ *и* $p \parallel a$ (*см. лемму* 2).

□ Так как $b \parallel a$ и $p \parallel a$, то на прямых b и p существуют лучи h и k, исходящие из точки P и параллельные прямой a (рис. 54). Докажем, что луч h — проекция прямой a на параллельную ей прямую b.

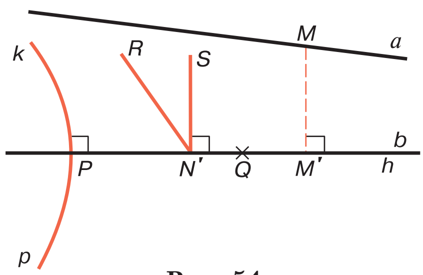


Рис. 54

Прямая a является заградительной прямой угла hk, поэтому все ее точки принадлежат внутренней области этого угла. Пусть M — произвольная точка прямой a, а M' — ее проекция на прямую b. Прямые p и MM' не имеют общих точек, так как $p \perp b$ и $MM' \perp b$, поэтому $M, M' \mathrel{\ddot{-}} p$. Отсюда следует, что M' — точка луча h, так как любая точка продолжения луча h и точка M лежат по разные стороны от прямой p.

Возьмем теперь произвольную точку N' луча h и докажем, что она является проекцией некоторой точки прямой a. Для этого рассмотрим два луча $N'R$ и $N'S$, исходящие из точки N', расположенные в той же полуплоскости с границей b, что и прямая a, и такие, что л$N'R \parallel k$, л$N'S \perp b$ (см. рис. 54). Ясно, что л$N'R \parallel a$, поэтому a — заградительная прямая угла $RN'Q$, где Q — точка на продолжении луча $N'P$.

Угол $PN'R$ является углом параллельности, соответствующим отрезку PN', поэтому он острый, следовательно, смежный с ним угол $RN'Q$ тупой. Отсюда мы заключаем, что $N'S$ — внутренний луч угла $RN'Q$, и по лемме 1 этот луч пересекает прямую a в некоторой точке N. Точка N' — проекция точки N на прямую b. ■

3. Проекция одной из двух непараллельных прямых на другую. Докажем теорему о проекции одной из двух расходящихся прямых на другую.

Теорема 2. *Проекция прямой a на прямую b, которая расходится с прямой a, есть некоторый интервал, через концы которого проходят прямые, каждая из которых перпендикулярна к прямой b и параллельна прямой a* (*см. лемму § 15*).

□ Обозначим через BA и $B'A'$ прямые, которые параллельны прямой a и пересекают прямую b под прямыми углами в точках B и B'. Мы предполагаем, что прямая a и точки A, A' расположены в одной полуплоскости с границей b (рис. 55). Докажем, что проекция прямой a на прямую b есть интервал BB'.

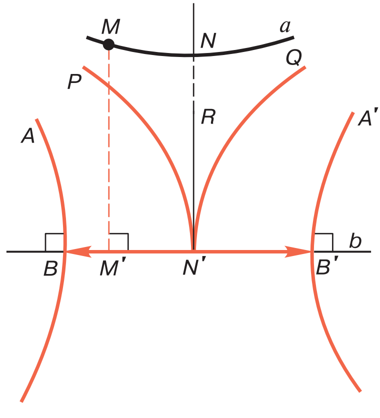


Рис. 55

Прямые BA и $B'A'$ перпендикулярны к прямой b, поэтому они не пересекаются. Обозначим через Ω множество всех точек полосы между прямыми AB и $A'B'$, т. е. множество общих точек двух полуплоскостей — полуплоскости с границей AB, содержащей точку B', и полуплоскости с границей $A'B'$, содержащей точку B. Ясно, что все точки прямой a принадлежат Ω, а пересечение $b \cap \Omega$ есть интервал $B\,B'$.

Пусть M — произвольная точка прямой a, а M' — ее проекция на прямую b. Так как $MM' \perp b$, то прямые MM', BA и $B'A'$ попарно не пересекаются, поэтому $M' \in \Omega$, следовательно, M' — точка интервала BB'.

Возьмем теперь произвольную точку N' интервала BB' и докажем, что она является проекцией некоторой точки прямой a. Для этого в полуплоскости с границей b, содержащей прямую a, проведем три луча $N'P$, $N'Q$ и $N'R$ так, чтобы л$N'P \parallel$ лBA, л$N'Q \parallel$ л$B'A'$, л$N'R \perp b$ (см. рис. 55). Лучи $N'P$ и $N'Q$ параллельны прямой a, поэтому a — заградительная прямая угла $PN'Q$. Читатель без труда самостоятельно докажет, что $N'R$ — внутренний луч угла $PN'Q$. По лемме 1 этот луч пересекает прямую a в некоторой точке N. Точка N' — проекция точки N на прямую b. ■

Сформулируем, наконец, теорему о проекции одной из пересекающихся прямых на другую.

Теорема 3. *Прямые a и b пересекаются в точке O и угол между ними равен φ, $\varphi < d$. Тогда проекция прямой a на прямую b есть интервал с серединой в точке O, длина ρ которого удовлетворяет равенству* $\Pi\left(\frac{\rho}{2}\right) = \varphi$.

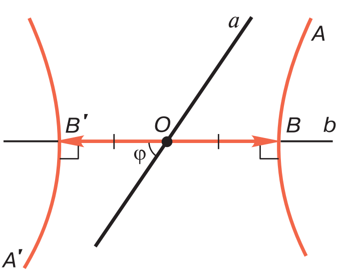


Рис. 56

□ Отложим на дополнительных лучах прямой b, исходящих из точки O, равные друг другу отрезки OB и OB', которым соответствует угол параллельности φ, и через точки B и B' проведем прямые BA и $B'A'$, перпендикулярные к прямой b (рис. 56). Тогда ясно, что $AB \parallel a$, $A'B' \parallel a$.

Предлагаем читателю, используя рис. 56, по аналогии с доказательством предыдущей теоремы доказать, что проекция прямой a на прямую b есть интервал BB'. ■

Задачи к главе 3

1. Доказать, что по крайней мере один из углов двупрямоугольника острый и существуют двупрямоугольники, у которых только один угол острый.
2. Доказать, что в четырехугольнике Саккери $ABCD$ с основанием AB: а) $AB < CD$; б) точка O пересечения диагоналей лежит на отрезке, который соединяет середины основания и противоположной стороны; в) $AO = OB$, $CO = OD$.
3. Доказать, что в четырехугольнике Саккери отрезок, соединяющий середины основания и противоположной стороны, меньше боковых сторон.
4. Доказать, что сторона двупрямоугольника, противолежащая основанию, больше основания.
5. Доказать, что каждая пара противоположных сторон четырехугольника Саккери принадлежит расходящимся прямым.
6. Дан двуугольник $hABk$. Доказать, что: а) если лучи h и k не параллельны, то существует бесконечное множество прямых, пересекающих луч h под прямым углом и не пересекающих луч k, причем одна и только одна из этих прямых параллельна лучу k; б) если $h \parallel k$ и $\angle A$ прямой или тупой, то любая прямая, пересекающая луч h под прямым углом, пересекает луч k.
7. Даны две пары параллельных лучей $h_1 \parallel k_1$ и $h_2 \parallel k_2$. Доказать, что существует наложение, при котором лучи h_1 и k_1 переходят соответственно в лучи h и k, такие, что $h \upuparrows h_2$, $k \upuparrows k_2$.
8. Доказать, что два двуугольника $h_1A_1B_1k_1$ и $h_2A_2B_2k_2$ равны, если $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$ и $A_1B_1 = A_2B_2$.
9. Каждый из лучей h и k параллелен лучу l или сонаправлен с этим лучом. Доказать, что $h \parallel k$ или $h \upuparrows k$.
10. Лучи h и k параллельны прямой a и на этой прямой направления параллельностей $h \parallel a$ и $k \parallel a$ совпадают. Доказать, что либо $h \parallel k$, либо $h \upuparrows k$.

11. Доказать, что существует одна и только одна прямая, проходящая через данную точку и параллельная данному лучу или содержащая этот луч.
12. Доказать, что расстояние между двумя расходящимися прямыми меньше длины любого отрезка, отличного от общего перпендикуляра, концы которого лежат на данных прямых.
13. Доказать, что любые две секущие равного наклона двух параллельных или расходящихся прямых являются расходящимися прямыми и отсекают на этих прямых равные отрезки.
14. Точки A_1, и B_1 лежат соответственно на сторонах OA и OB неразвернутого угла AOB, причем $OA = OB$, $OA_1 = OB_1$. Доказать, что AB и A_1B_1 — расходящиеся прямые.
15. Даны отрезок $\widetilde{p}$, острый угол $\widetilde{\varphi}$. Существует ли равнобедренный треугольник ABC с основанием BC, равным $\widetilde{p}$, $\angle A = \widetilde{\varphi}$? Ответ обосновать.
16. Прямая m является заградительной прямой угла hk. Доказать, что: а) угол hk расположен в одной полуплоскости с границей m; б) на прямой m направления параллельностей $h \parallel m$ и $k \parallel m$ не совпадают.
17. Даны два луча h и k, $h \uparrow\downarrow k$. Доказать, что не существует прямой, параллельной как лучу h, так и лучу k.
18. Прямая m является заградительной прямой пересекающихся прямых a и b. Доказать, что на прямой m направления параллельностей $m \parallel a$ и $m \parallel b$ не совпадают.
19. Даны две параллельные прямые a и b. Доказать, что существует не более одной прямой, перпендикулярной к прямой b и параллельной прямой a.
20. Даны две расходящиеся прямые a и b. Доказать, что: а) если прямая c параллельна прямым a и b, то все точки прямой c принадлежат полосе, ограниченной прямыми a и b; б) существуют две и только две прямые, каждая из которых параллельна как прямой a, так и прямой b, причем прямые a и b лежат по разные стороны от каждой из них.

21. Доказать утверждение: если прямые l и l' являются заградительными прямыми расходящихся прямых a и b, то прямые a и b являются заградительными прямыми расходящихся прямых l и l'.
22. Дан острый угол AOB. Доказать, что проекция луча OA на прямую OB есть интервал OH, где H — точка на луче OB, такая, что $\Pi|OH| = \widehat{AOB}$.
23. Найти проекцию отрезка на данную прямую. Рассмотреть возможные случаи.
24. Найти проекцию луча h на прямую a, если: а) $h \parallel a$; б) $h \nparallel a$.

Глава 4

ОКРУЖНОСТЬ, ЭКВИДИСТАНТА И ОРИЦИКЛ

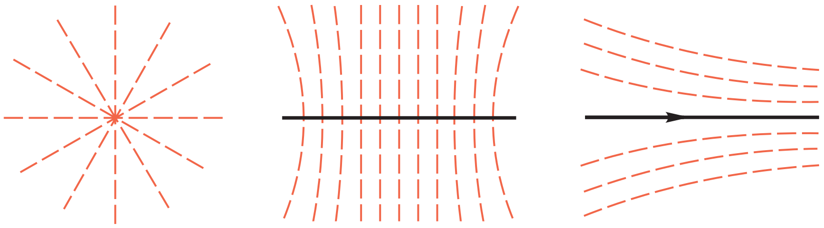
§ 18. Пучки прямых на плоскости Лобачевского и их образы при движении

1. Три типа пучков гиперболической плоскости. На плоскости Лобачевского рассматривают три типа пучков:

а) пучок пересекающихся прямых — множество всех прямых плоскости, проходящих через одну точку, которая называется *центром пучка* (рис. 57, *а*);

б) пучок расходящихся прямых — множество всех прямых плоскости, перпендикулярных к одной прямой, которая называется *базой пучка* (рис. 57, *б*);

в) пучок параллельных прямых — множество прямых, состоящих из некоторой направленной прямой и всех направленных прямых, каждая из которых параллельна ей (рис. 57, *в*).



а)   *б*)   *в*)

Рис. 57

Из этих определений следует, что пучок пересекающихся прямых однозначно определяется заданием его центра, пучок расходящихся прямых — заданием его базы, а пучок параллельных прямых — заданием одной направленной прямой пучка.

Докажем лемму о задании пучка двумя его прямыми.

Лемма. *Каковы бы ни были две прямые плоскости, существует один и только один пучок, которому они принадлежат.*

□ Пусть a и b — данные прямые. Если эти прямые пересекаются в некоторой точке O, то, очевидно, они принадлежат пучку с центром O и только этому пучку.

Рассмотрим случай, когда a и b — расходящиеся прямые. Обозначим через l прямую, содержащую общий перпендикуляр прямых a и b, а через P пучок расходящихся прямых с базой l. Ясно, что $a \in P$ и $b \in P$. Если P' — некоторый пучок прямых, которому принадлежат прямые a и b, то, очевидно, P' — пучок расходящихся прямых с некоторой базой l'. Так как $a \perp l'$ и $b \perp l'$, то по теореме 1 § 15 прямые l' и l совпадают, следовательно, и пучки P' и P совпадают.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $a \parallel b$. Обозначим через $\overline{a}$ направленную прямую a, на которой в качестве положительного направления выбрано направление параллельности $a \parallel b$. Обозначим через Q пучок параллельных прямых, определяемый направленной прямой $\overline{a}$. Тогда $a \in Q$ и $b \in Q$. Пусть Q' — некоторый пучок, которому принадлежат прямые a и b. Так как $a \parallel b$, то Q' — пучок параллельных прямых, заданный некоторой направленной прямой $\overline{p}$. Но $\overline{a} \in Q'$, поэтому либо $\overline{p}$ и $\overline{a}$ совпадают, либо $\overline{p} \parallel \overline{a}$. В каждом из этих случаев пучки Q и Q' совпадают. ■

2. Образы пучков при движениях. Докажем теорему об образах пучков при движениях.

Теорема 1. *При движении f пучок пересекающихся прямых с центром O переходит в пучок пересекающихся прямых с центром $O' = f(O)$, пучок расходящихся прямых с базой l — в пучок расходящихся прямых с базой $l' = f(l)$, а пучок параллельных прямых, заданный направленной прямой $\overline{AB}$, — в пучок параллельных прямых, заданный прямой $\overline{A'B'} = f(\overline{AB})$.*

□ Обозначим через P данный пучок. Рассмотрим сначала случай, когда P — пучок пересекающихся прямых с центром O, и обозначим через P' пучок пересекающихся прямых с центром $O' = f(O)$. Если a — произвольная прямая пучка P, т. е. если $O \in a$ и $a' = f(a)$, то $O' \in a'$, поэтому $a' \in P'$. Обратно: если b' — произвольная прямая пучка P' а b — прообраз этой прямой, то $O' \in b'$, поэтому $O \in b$, т. е. $b \in P$. Таким образом, $P' = f(P)$.

Доказательство теоремы для случая, когда P — пучок расходящихся прямых с базой l, а $l' = f(l)$, мы опускаем, так как оно, по существу, совпадает с предыдущим доказательством.

Рассмотрим случай, когда P — пучок параллельных прямых, который задан прямой $\overline{AB}$, а $\overline{A'B'} = f(\overline{AB})$. Докажем, что $P' = f(P)$, где P' — пучок параллельных прямых, заданный прямой $\overline{A'B'}$. Возьмем произвольную направленную прямую $\overline{CD}$ пучка P, отличную от прямой $\overline{AB}$, тогда $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. Если $\overline{C'D'} = f(\overline{CD})$, то $\overline{A'B'} \parallel \overline{C'D'}$ (см. § 14, п. 4), поэтому $\overline{C'D'} \in P'$. Обратно: если $\overline{E'F'}$ — произвольная прямая пучка P', а $\overline{EF}$ — прообраз этой прямой, то, так как $\overline{A'B'} \parallel \overline{E'F'}$, имеем: $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$, поэтому $\overline{EF} \in P$. ■

3. Теорема о серединных перпендикулярах к сторонам треугольника. Воспользовавшись понятием пучка, докажем теорему, в которой выражено специфическое свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника на плоскости Лобачевского. Как известно, на евклидовой плоскости серединные перпендикуляры к трем сторонам любого треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром описанной около треугольника окружности. Это утверждение, как мы сейчас покажем, верно не для любого треугольника плоскости Лобачевского.

Теорема 2. *Серединные перпендикуляры к трем сторонам треугольника принадлежат одному пучку, причем существуют треугольники, серединные перпендикуляры к сторонам которых принадлежат каждому из трех типов пучков.*

□ Пусть ABC — данный треугольник, M_1, M_2, M_3 — середины сторон BC, CA, AB, а l_1, l_2 и l_3 — серединные перпендикуляры к этим сторонам. Докажем сначала, что прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат одному пучку. Рассмотрим три возможных случая.

а) Какие-нибудь две из прямых l_1, l_2 и l_3, например прямые l_1 и l_2, пересекаются в некоторой точке O. По теореме 4 § 3 $OB = OC$, $OC = OA$, поэтому $OB = OA$. По той же теореме точка O лежит на прямой l_3, т. е. в этом случае прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат пучку пересекающихся прямых.

б) Какие-нибудь две из прямых l_1, l_2 и l_3, например l_1 и l_2, являются расходящимися прямыми. Тогда существует общий перпендикуляр H_1H_2 этих прямых (рис. 58, *а*). Докажем, что $l_3 \perp H_1H_2$. Пары прямых H_1H_2, BC, а также H_1H_2, AC являются расходящимися прямыми (каждая из этих пар прямых имеет общий перпендикуляр), поэтому точки A, B и C лежат по одну сторону от прямой H_1H_2.

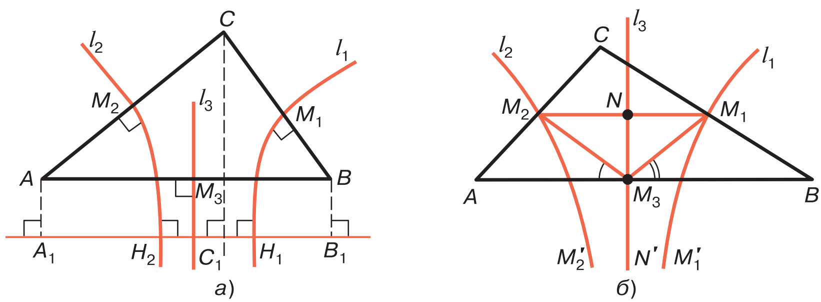


Рис. 58

Проведем перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 к прямой H_1H_2 и докажем, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Сначала докажем, что $AA_1 = CC_1$. Для этого рассмотрим двупрямоугольник AA_1C_1C. При симметрии относительно прямой l_2 в силу соотношений $AM_2 = M_2C$, $AC \perp l_2$, $H_1H_2 \perp l_2$ точка A переходит в точку C, прямая H_1H_2 переходит в себя, поэтому отрезок AA_1 переходит в отрезок CC_1, следовательно, $AA_1 = CC_1$. Точно так же, рассматривая двупрямоугольник BB_1C_1C и прямую l_1, доказывается, что $CC_1 = BB_1$. Таким образом, $AA_1 = BB_1$, следовательно, AA_1B_1B — четырехугольник Саккери. По свойству 13.2° серединный перпендикуляр к основанию A_1B_1 совпадает с прямой l_3, поэтому $l_3 \perp H_1H_2$. В этом случае прямые l_1, l_2, l_3 принадлежат пучку расходящихся прямых с базой H_1H_2.

в) $l_1 \parallel l_2$, $l_2 \parallel l_3$, $l_1 = l_3$. Не нарушая общности, предположим, что $AB \geqslant AC$, $AB \geqslant BC$. Тогда в треугольниках AM_2M_3 и BM_1M_3 углы при вершине M_3 острые, поэтому точки M_1, и M_2 лежат по разные стороны от прямой l_3 (см. рис. 58, *б*). Следовательно, на прямой l_3 существует точка N, которая лежит на отрезке M_1M_2. Так как $l_1 \parallel l_2$, то на прямых l_1 и l_2 можно отметить точки M_1' и M_2' так, чтобы $\overline{M_1M_1'} \parallel \overline{M_2M_2'}$. На прямой l_3 возьмем точку N' так, чтобы точки M_1', M_2', N' лежали по одну сторону от прямой M_1M_2. По лемме § 10 $\overline{M_1M_1'} \parallel \overline{NN'}$ и $\overline{M_2M_2'} \parallel \overline{NN'}$. Отсюда следует, что прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат одному пучку параллельных прямых.

Остается доказать, что существуют треугольники, для которых все три случая, рассмотренные выше, возможны. Для этого достаточно привести три примера, соответствующие каждому из этих случаев.

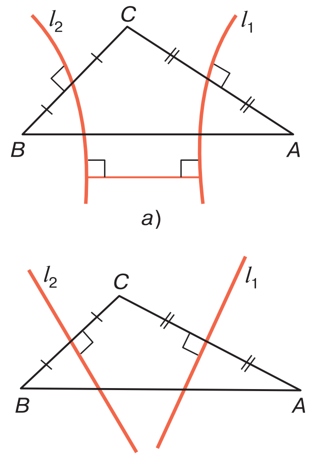


Рис. 59

Возьмем две пересекающиеся прямые l_1 и l_2 и точку C, не лежащую на них. Рассмотрим точки A и B, симметричные точке C относительно прямых l_2 и l_1. Очевидно, точки A, B и C не лежат на одной прямой. Из вышеизложенного следует, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC принадлежат пучку пересекающихся прямых.

Возьмем теперь две расходящиеся или параллельные прямые l_1 и l_2 и точку C, лежащую на полосе между прямыми l_1 и l_2. Аналогично предыдущему строим треугольник ABC, как показано на рис. 59, *а* и *б*, и убеждаемся в том, что существуют треугольники, серединные перпендикуляры которых принадлежат пучку расходящихся или параллельных прямых. ■

Из доказательства этой теоремы вытекает утверждение:

Следствие. *Если серединные перпендикуляры к сторонам треугольника принадлежат пучку расходящихся прямых, то вершины треугольника лежат по одну сторону от базы пучка и равноудалены от нее.*

§ 19. Траектории пучков

1. Траектории пучка прямых. Точку плоскости, на которой задан пучок P, назовем обыкновенной точкой, если она не совпадает с центром пучка в случае пучка пересекающихся прямых и не лежит на базе пучка в случае расходящихся прямых. Если P является пучком параллельных прямых, то любая точка плоскости считается обыкновенной. Точку, не являющуюся обыкновенной, назовем особой.

Две обыкновенные точки плоскости называются *соответствующими друг другу относительно данного пучка*, если они симметричны относительно некоторой прямой этого пучка.

Докажем лемму о транзитивности понятия соответствующих точек.

Лемма. *Если две точки A и B соответствуют точке C относительно данного пучка, то точки A, B и C не лежат на одной прямой и точки A и B соответствуют друг другу относительно того же пучка.*

□ Точки A, B и C не могут лежать на одной прямой l, так как при этом предположении серединные перпендикуляры p и q к отрезкам AC и BC перпендикулярны к прямой l. Но прямые p и q принадлежат данному пучку P, поэтому P — пучок расходящихся прямых с базой l. Это невозможно, так как A, B и C — обыкновенные точки.

Таким образом, ABC — некоторый треугольник. По теореме 2 § 18 о серединных перпендикулярах к сторонам треугольника прямые p, q и r, где r — серединный перпендикуляр к отрезку AB, принадлежат одному пучку. По лемме § 18 $r \in P$. Отсюда следует, что точки A и B соответствуют друг другу относительно пучка P. ■

Покажем, что с каждым пучком прямых связаны определенные линии. Пусть Ω — множество всех обыкновенных точек плоскости, на которой задан пучок P. Во множестве Ω точек введем бинарное отношение Δ следующим образом. Если $X \in \Omega$, $Y \in \Omega$, то будем считать, что $X\Delta Y$, если либо точка Y совпадает с точкой X, либо X и Y — соответствующие точки относительно пучка P. Отсюда непосредственно следует, что отношение Δ удовлетворяет условиям рефлексивности и симметричности. Оно удовлетворяет также условию транзитивности. В самом деле, пусть $A\Delta B$, $B\Delta C$. Если точки A и B или точки B и C совпадают, то ясно, что $A\Delta C$. Если же A, B и C попарно различные точки, то A и B соответствуют друг другу. Точки C и B также соответствуют друг другу, поэтому по предыдущей лемме точки A и C соответствуют друг другу, т. е. $A\Delta C$. Таким образом, бинарное отношение Δ, заданное во множестве Ω, является отношением эквивалентности. Как известно из алгебры, в этом случае множество Ω разбивается на непересекающиеся классы точек, которые называются классами эквивалентности. Каждый класс эквивалентности есть некоторое подмножество точек множества Ω, которому принадлежат те и только те точки из Ω, любые две из которых находятся в отношении Δ. Каждая точка $A \in \Omega$ принадлежит одному и только одному классу эквивалентности, который обозначим через K_A. Если $B \in K_A$, то классы K_B и K_A совпадают, а если $B \notin K_A$, то $K_A \cap K_B = \varnothing$.

Множество всех этих классов по отношению Δ называется *фактор-множество* и обозначается через Ω/Δ. Фигура, состоящая из всех точек каждого элемента фактор-множества Ω/Δ, т. е. из всех точек каждого класса эквивалентности, называется *траекторией пучка* P.

Из предыдущего изложения ясно, что *траектория пучка P, проходящая через точку A, состоит из точки A и тех и только тех точек X множества Ω, что выполняется условие: точки A и X соответствуют друг другу относительно пучка P*. Это утверждение является конструктивным определением траектории пучка, проходящей через данную точку A.

Прежде чем приступить к изучению общих свойств траекторий всех трех типов пучков, докажем, что траектории пучка пересекающихся прямых являются окружностями. Определение окружности как фигуры, состоящей из всех точек плоскости, каждая из которых находится на данном расстоянии r от некоторой точки O, относится к абсолютной геометрии, поэтому окружность — фигура геометрии Лобачевского. Точка O называется центром окружности, а число r — радиусом окружности.

С каждой окружностью связан пучок пересекающихся прямых, центр которого совпадает с центром окружности. Ясно, что со всеми концентрическими окружностями с общим центром O связан один и тот же пучок.

Теорема 1. *Траектория пучка пересекающихся прямых есть окружность.* Обратно: *любая окружность есть траектория пучка пересекающихся прямых с центром в центре окружности.*

□ Докажем сначала, что траектория γ_A пучка P пересекающихся прямых с центром O, проходящая через точку A, есть окружность (O, OA). По определению траектории $X \in \gamma_A$ тогда и только тогда, когда точки A и X соответствуют друг другу относительно пучка P, т. е. когда точки A и X симметричны относительно некоторой прямой пучка P. Таким образом, $X \in \gamma_A$ тогда и только тогда, когда $OA = OX$. Отсюда следует, что линия γ_A совпадает с окружностью (O, OA).

Докажем обратное утверждение. Пусть (O, OB) — произвольная окружность. Рассмотрим траекторию γ_B пучка P с центром O, проходящую через точку B. По доказанному линия γ_B совпадает с окружностью (O, OB). ■

2. Свойства траекторий пучков. Рассмотрим общие свойства траекторий пучков. Мы покажем, что многие свойства окружности являются общими свойствами траекторий всех трех типов пучков.

Если γ — траектория пучка P, то каждая прямая пучка P называется *осью траектории* γ. Нетрудно видеть, что траектория пучка *симметрична относительно любой своей оси.* В самом деле, пусть d — произвольная прямая пучка P, а γ — одна из его траекторий. Если $X \in y$, то точка X', симметричная точке X относительно прямой d, соответствует точке X относительно пучка P, поэтому $X' \in y$.

19.1°. Каждая ось траектории пучка пересекающихся прямых пересекает траекторию в двух и только в двух точках, а каждая ось траектории пучка расходящихся или параллельных прямых — в одной и только в одной точке.

□ Пусть y — траектория данного пучка P, а d — произвольная ось этой траектории. Если P — пучок пересекающихся прямых, то по теореме 1 γ — окружность, а d — прямая, проходящая через ее центр, поэтому прямая d пересекает γ в двух и только в двух точках.

Рассмотрим случай, когда P — пучок расходящихся или параллельных прямых. Докажем сначала, что прямая d имеет общую точку с траекторией γ. Пусть траектория γ проходит через точку A, а a — ось траектории, проходящая через эту точку. Если прямые a и d совпадают, то $A \in d$. Предположим, что a и d — различные прямые. Так как эти прямые не имеют общих точек, то согласно теореме 3 § 11 (если $a \parallel d$) или теореме 2 § 15 (если прямые a и d расходятся) прямые a и d имеют ось симметрии, которая принадлежит пучку P. Поэтому точка B, симметричная точке A относительно этой оси, лежит на прямой d и соответствует точке A относительно пучка P, т. е. $B \in \gamma$.

Если предположить, что какие-то две точки M и N прямой d принадлежат γ, то серединный перпендикуляр к отрезку MN принадлежит пучку P, что невозможно, так как P — пучок расходящихся или параллельных прямых. Итак, прямая d пересекает траекторию γ в одной и только в одной точке. ■

19.2°. Прямая, лежащая на плоскости данного пучка, пересекает любую траекторию данного пучка не более чем в двух точках.

□ Утверждение докажем методом от противного, т. е. предположим, что какая-то прямая пересекает траекторию γ пучка более чем в двух точках. Обозначим через A, B и C три из этих точек. Так как $A \in \gamma$, $B \in \gamma$ и $C \in \gamma$, то точки A и B соответствуют точке C относительно данного пучка. Мы пришли к противоречию с леммой п. 1. ■

Из свойств 19.1° и 19.2° следует важный вывод: *траектория любого пучка прямых есть кривая, состоящая из бесконечного множества точек мощности континуум.*

По аналогии с окружностью вводятся понятия секущей и хорды траектории пучка: прямая, пересекающая траекторию пучка в двух точках, называется секущей, а отрезок секущей, соединяющий эти две точки,— хордой траектории. Концы любой хорды траектории являются соответствующими точками относительно пучка, поэтому справедливо утверждение:

19.3°. Серединный перпендикуляр к хорде траектории пучка является осью траектории.

Для удобства дальнейшего изложения введем понятие луча траектории пучка. Луч h, исходящий из точки траектории и лежащий на оси m траектории, будем называть *лучом траектории*, если на этом луче лежит особая точка плоскости (в случае траектории пучков пересекающихся или расходящихся прямых) или если этот луч принадлежит положительному направлению оси m (в случае пучка параллельных прямых). Очевидно, из каждой точки траектории пучка исходит один и только один луч траектории, причем для траектории пучка пересекающихся прямых все лучи проходят через центр пучка, а для траектории пучка расходящихся прямых пересекают базу пучка под прямым углом. Для пучка параллельных прямых любые два луча траектории параллельны.

19.4°. Если AB — хорда траектории пучка, которая не принадлежит оси пучка, а AA_1 и BB_1 — лучи траектории, исходящие из точек A и B, то эти лучи принадлежат одной полуплоскости с границей AB и углы A_1AB и B_1BA являются равными друг другу острыми углами.

□ Пусть P — данный пучок, γ — траектория этого пучка. Рассмотрим три возможных случая.

а) P — пучок пересекающихся прямых. По теореме 1 γ является окружностью с центром в некоторой точке O, которая по условию не лежит на прямой AB. Лучи AA_1 и BB_1 проходят через точку O, следовательно, они принадлежат одной полуплоскости с границей AB, и так как $AO = OB$, то $\triangle ABO$ равнобедренный, поэтому $\angle A_1AB = \angle B_1BA$ и эти углы острые.

б) P — пучок расходящихся прямых с базой l. Если a — серединный перпендикуляр к отрезку AB, то $a \perp l$ и $a \perp AB$, поэтому точки A и B лежат по одну сторону от прямой l. Отсюда следует, что лучи AA_1 и BB_1 принадлежат той же полуплоскости с границей AB, что и прямая l, поэтому эти лучи симметричны относительно прямой a (рис. 60, a). Точки A_2 и B_2 пересечения этих лучей с прямой l также симметричны относительно прямой a. Таким образом, A_2B_2BA — четырехугольник

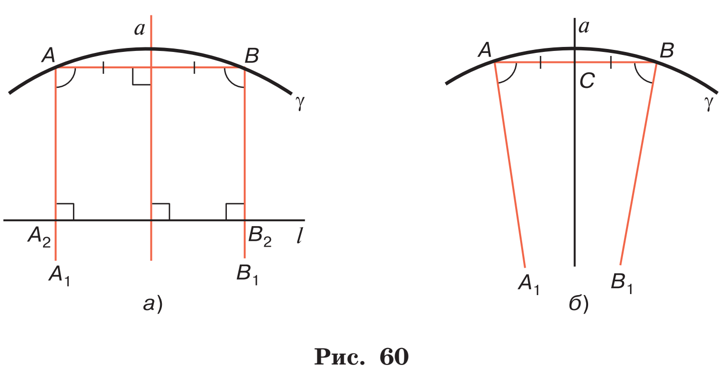


Рис. 60

Саккери с основанием A_2B_2. Отсюда и следует, что A_1AB и B_1BA — равные острые углы (см. рис. 60, *а*).

в) P — пучок параллельных прямых. Лучи AA_1 и BB_1 принадлежат направленным прямым $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$, которые параллельны. Следовательно, эти лучи параллельны, поэтому принадлежат одной полуплоскости с границей AB.

Обозначим через C середину отрезка AB (см. рис. 60, *б*). Углы A_1AB и B_1BA являются углами параллельности, которые соответствуют равным отрезкам CA и CB, следовательно, A_1AB и B_1BA — равные острые углы. ■

3. Касательная к траектории пучка. Прямая, проходящая через точку траектории пучка и перпендикулярная к оси, проходящей через эту точку, называется *касательной* к траектории пучка в данной точке. Ясно, что в случае пучка пересекающихся прямых это определение совпадает с определением касательной к окружности в данной точке.

Можно доказать, что определение касательной к траектории пучка совпадает с обычным определением касательной к кривой в данной точке M_0 как предельного положения секущей M_0N, когда переменная точка N кривой стремится к точке M_0.

Докажем теорему о касательной к траектории пучка.

Теорема 2. *В произвольной точке M_0 траектории любого пучка существует одна и только одна касательная M_0T, которая имеет только одну общую точку M_0 с траекторией. Все точки траектории, кроме точки M_0, принадлежат полуплоскости с границей M_0T, содержащей луч траектории, исходящий из точки M_0.*

□ Существование и единственность касательной M_0T к траектории γ в точке M_0 непосредственно следуют из определения касательной.

Докажем второе утверждение теоремы. Обозначим через M_0M_1 луч траектории γ в точке M_0, а через λ — полуплоскость с границей M_0T, которой принадлежит луч M_0M_1. Ни одна из точек касательной M_0T, отличных от точки M_0, не может лежать на линии γ, так как если предположить, например, что $T \in \gamma$ то M_0T — хорда траектории, не совпадающая с осью, поэтому по свойству 19.4° угол M_1M_0T острый. Это противоречит определению касательной.

Остается доказать, что если $X \in \gamma$ и X не совпадает с M_0, то $X \in \lambda$. Если прямая M_0X не является осью траектории γ, то по свойству 19.4° угол M_1M_0X острый, поэтому $X \in \lambda$. Если же M_0X — ось траектории, то γ — окружность, и в этом случае X — точка луча M_0M_1, поэтому $X \in \lambda$. ■

4. Циклические линии. На плоскости Лобачевского траектории всех трех типов пучков называются *циклическими линиями*. При этом траекторию пучка P будем называть циклической линией, соответствующей пучку P.

Докажем теорему об образах циклических линий при движениях.

Теорема 3. *При движении f циклическая линия, соответствующая пучку P, переходит в циклическую линию, соответствующую пучку $P' = f(P)$, причем пучки P и P' принадлежат одному и тому же типу пучков.*

□ Пусть γ — данная циклическая линия, соответствующая пучку P, которая проходит через точку A. Согласно теореме 1 § 18 при данном движении f пучок P переходит в пучок $P' = f(P)$ того же типа, что и пучок P. Из определения соответствующих точек относительно пучка следует, что при движении f две соответствующие точки относительно пучка P переходят в две соответствующие точки относительно пучка $P' = f(P)$. Поэтому любая траектория пучка P при движении f переходит в траекторию пучка $P' = f(P)$, в частности линия γ переходит в траекторию γ' пучка P, проходящую через точку $A' = f(A)$. ■

Известная теорема евклидовой геометрии о том, что через любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна окружность, неверна в геометрии Лобачевского. Аналогом этой теоремы является следующая теорема:

Теорема 4. *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна циклическая линия.*

□ Пусть A, B и C — данные точки, а p, q и r — серединные перпендикуляры к сторонам AB, BC и AC треугольника ABC. По теореме 2 § 18 прямые p, q и r принадлежат одному пучку, который обозначим через P. Пара точек A и B, а также пара точек A и C соответствуют друг другу относительно пучка P, поэтому если γ — траектория этого пучка, проходящая через точку A, то $B \in \gamma$ и $C \in \gamma$.

Докажем теперь, что γ — единственная циклическая линия, проходящая через точки A, B и C. Пусть γ' — какая-то циклическая линия, которая является траекторией пучка P' и проходит через эти точки. Так как AB, BC и AC — хорды циклической линии γ', то по свойству 19.3° прямые p, q и r принадлежат пучку P'. По лемме § 18 пучки P и P' совпадают, поэтому γ и γ' — траектории одного и того же пучка P. Но $A \in \gamma'$, следовательно, γ и γ' — одна и та же линия. ■

Из доказательства теоремы следует утверждение:

Следствие. *Циклическая линия, проходящая через данные три неколлинеарные точки A, B и C, соответствует пучку, которому принадлежат серединные перпендикуляры к отрезкам AB, BC и CA.*

§ 20. Окружность

1. Окружность и круг. *Окружностью* с центром O радиуса r называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, каждая из которых отстоит от точки O на расстоянии r. Любой отрезок, соединяющий центр окружности с какой-нибудь ее точкой, также называется радиусом окружности. Многие свойства окружности, известные читателю из курса планиметрии средней школы, относятся к абсолютной геометрии, следовательно, этими свойствами обладают и окружности на плоскости Лобачевского. Все общие свойства траекторий пучков, рассмотренные в § 19, являются, конечно, и свойствами окружностей. Окружность обладает также рядом специфических свойств, которые мы рассмотрим в этом параграфе.

Напомним некоторые понятия, связанные с окружностью. Прямая, пересекающая окружность в двух точках, называется *секущей*, а отрезок секущей, соединяющий две точки окружности,— *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром* окружности. Очевидно, длина любого диаметра окружности равна $2r$, где r — радиус окружности, поэтому все диаметры окружности равны друг другу. На плоскости Лобачевского, так же как и на евклидовой плоскости, любая хорда, отличная от диаметра, меньше диаметра. В самом деле, на рис. 61 BC — диаметр, а AB — хорда, отличная от диаметра окружности с центром O. В треугольнике AOB $AB < AO + OB$, поэтому $AB < OC + OB = BC$.

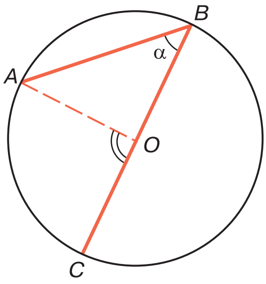


Рис. 61

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной к окружности*, а эта точка — *точкой касания*. Так же как и на евклидовой плоскости, *через каждую точку окружности проходит одна и только одна касательная к окружности, которая перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку*. Докажем это утверждение. Пусть M — произвольная точка окружности радиуса r с центром O. Прямая MA, перпендикулярная к OM, является касательной к окружности, так как для любой точки X этой прямой, отличной от M, $OX > OM = r$. Таким образом, M — единственная общая точка прямой MA и окружности. Далее, любая прямая l, проходящая через точку M и отличная от MA, является секущей. В самом деле, пусть OH — перпендикуляр, проведенный к прямой l. Ясно, что точки H и M не совпадают. Отложим на продолжении луча HM отрезок $HN = HM$. Так как $\triangle OHM = \triangle OHN$, то $HN = ON = r$, следовательно, N — точка окружности, т. е. l — секущая. Итак, MA — единственная касательная к окружности, проходящая через точку M.

Таким образом, общее определение касательной к траектории пучка (см. § 19, п. 3) для окружности совпадает с обычным определением касательной, которое дается в школьных учебниках по геометрии.

Точка M называется *внутренней точкой относительно окружности* с центром O радиуса r, если она совпадает с точкой O или если $OM < r$. Фигура, состоящая из всех точек окружности с центром O радиуса r и всех внутренних точек относительно этой окружности, называется кругом с центром O радиуса r. Сама окружность называется *границей круга*. Точка плоскости, не являющаяся внутренней и не лежащая на окружности, называется *внешней точкой относительно окружности*. Множество всех внутренних точек относительно окружности называется *внутренней областью*, а множество всех внешних точек — *внешней областью* относительно окружности.

2. Градусная мера дуги окружности. Две точки A и B, принадлежащие окружности, разделяют окружность на две дуги с концами A и B. Дуга называется *полуокружностью*, если отрезок, соединяющий ее концы, является диаметром окружности.

Градусная мера дуги окружности на плоскости Лобачевского, как мы сейчас покажем, вводится точно так же, как и на евклидовой плоскости. Угол, вершина которого совпадает с центром O окружности, называется *центральным углом*. Если дуга AB окружности с центром O не больше полуокружности, то градусной мерой этой дуги считается градусная мера центрального угла AOB. Если же дуга AB больше полуокружности, то ее градусная мера считается равной $360^\circ - \widehat{AOB}$.

Отметим, что известная теорема евклидовой геометрии о том, что вписанный в окружность угол (т. е. угол, вершина которого лежит на окружности) измеряется половиной дуги, на которую он опирается (см. [1], § 46, теорема 1), неверна на плоскости Лобачевского. В этом легко убедиться на следующем примере. На рис. 61 ABC — вписанный в окружность угол. Если $\alpha = \widehat{ABC}$, то ясно, что $\overset{\smile}{AC} = \widehat{AOC} = 180^\circ - \widehat{AOB}$. Но $2\alpha + \widehat{AOB} < 180^\circ$, поэтому $\overset{\smile}{AC} > 2\alpha$ и $\alpha < \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC}$. В частности, вписанные в окружность углы, которые опираются на полуокружность, не прямые, а острые. В самом деле, на рис. 62 угол ABC вписан в окружность с центром O и опирается на диаметр. Если $\alpha = \widehat{ABO}$, $\beta = \widehat{CBO}$, то $ABC = \alpha + \beta < \frac{1}{2}\overset{\smile}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{DC} = \frac{1}{2}\overset{\smile}{ADC} = 90^\circ$. Таким образом, $\widehat{ABC} < 90^\circ$.

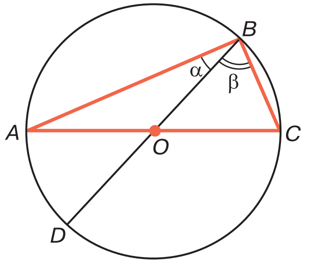


Рис. 62

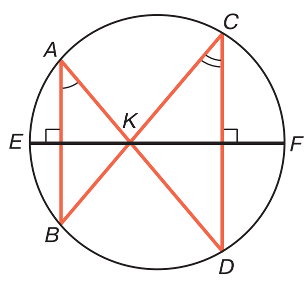


Рис. 63

Отметим, наконец, что вписанные в окружность углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, вообще говоря, не равны друг другу. В этом легко убедиться на примере, изображенном на рис. 63. Неравные хорды AB и CD перпендикулярны к диаметру EF. Углы BAD и BCD опираются на одну и ту же дугу BD, но эти углы не могут быть равны друг другу, так как если предположить, что $\angle A = \angle C$, то тогда $\angle B = \angle D$ и треугольники ABK и CDK равны по трем углам. Но это невозможно в силу того, что $AB \neq CD$.

3. Равенство двух окружностей. Напомним, что две фигуры, в частности две окружности, называются равными, если существует наложение (движение), при котором одна фигура переходит в другую.

Для доказательства теоремы о равенстве двух окружностей необходимо доказать две леммы.

Лемма 1. *При данном движении f окружность с центром O радиуса r переходит в окружность с центром O' того же радиуса r, где $O' = f(O)$.*

☐ По теореме 1 § 19 данная окружность есть траектория пучка P пересекающихся прямых с центром O. По теореме 3 § 19 данная окружность переходит в траекторию пучка $P' = f(P)$, который является пучком пересекающихся прямых с центром $O' = f(O)$ (см. § 18, теорема 1). Траектория пучка P' есть окружность с центром O'. Так как при движении сохраняются расстояния, то образ данной окружности радиуса r имеет радиус r. ■

Лемма 2. *Каковы бы ни были лучи AA_1 и BB_1, существует движение, при котором луч AA_1 переходит в луч BB_1.*

☐ Проведем какой-нибудь луч AA_2, который образует с лучом AA_1 неразвернутый угол A_1AA_2, и от луча BB_1 отложим в одну из полуплоскостей с границей BB_1 угол B_1BB_2, равный углу A_1AA_2. Согласно аксиоме III_6 (см. приложение, с. 444) существует наложение f, при котором луч AA_1 переходит в луч BB_1, а луч AA_2 — в луч BB_2. Любое наложение является движением, следовательно, f — искомое движение. ■

Из леммы 1 следует, что фигура, равная окружности, является окружностью. Докажем теперь теорему о равенстве двух окружностей.

Теорема 1. *Две окружности равны тогда и только тогда, когда их радиусы равны.*

☐ Пусть ω_1 и ω_2 — данные окружности. Если они равны, то существует движение, при котором окружность ω_1 переходит в окружность ω_2. По лемме 1 радиусы окружностей ω_1 и ω_2 равны.

Обратно: пусть $\omega_1 = (O_1, O_1A_1)$ и $\omega_2 = (O_2, O_2A_2)$ — данные окружности, радиусы O_1A_1 и O_2A_2 которых равны. По лемме 2 существует движение f, при котором луч O_1A_1 переходит в луч O_2A_2. Ясно, что $O_2 = f(O_1)$, и так как $O_1A_1 = O_2A_2$, то $A_2 = f(A_1)$. По лемме 1 окружность (O_1, O_1A_1) переходит в окружность (O_2, O_2A_2). Таким образом, окружности ω_1 и ω_2 равны. ■

4. Вписанная и описанная окружности. Напомним, что окружность называется *вписанной* в треугольник, если прямые, содержащие стороны треугольника, являются касательными к окружности и точки касания лежат на сторонах треугольника. Теорема о том, что в любой треугольник можно вписать одну и только одну окружность (см. [4], гл. VIII, § 4), является теоремой абсолютной геометрии, поэтому она имеет место и в геометрии Лобачевского. Доказательство этой теоремы, которое приводится в школьных учебниках, полностью применимо и в геометрии Лобачевского, так как оно основано на двух теоремах абсолютной геометрии — на теореме 3 § 3 о биссектрисе угла и на теореме о том, что биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке.

Окружность называется *описанной* около треугольника, если все вершины треугольника лежат на окружности. В отличие от теоремы об окружности, вписанной в треугольник, теорема об окружности, описанной около треугольника, т. е. теорема о том, что около любого треугольника можно описать окружность (см. [4], гл. VIII, § 4), как было отмечено в п. 4 § 19, не имеет места в геометрии Лобачевского. Здесь верна следующая теорема:

Теорема 2. *Если серединные перпендикуляры l_1, l_2 и l_3 к сторонам треугольника принадлежат пучку пересекающихся прямых, то около треугольника можно описать окружность, и притом только одну. Если же прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат пучку параллельных или расходящихся прямых, то не существует окружности, описанной около треугольника.*

□ Пусть серединные перпендикуляры l_1, l_2 и l_3 к сторонам треугольника ABC принадлежат пучку пересекающихся прямых с центром O. По теореме 4 § 3 о серединном перпендикуляре $OA = OB = OC$, поэтому окружность (O, OA) является описанной около треугольника ABC.

По теореме 4 § 19 через точки A, B и C проходит только одна циклическая линия, следовательно, (O, OA) — единственная окружность, описанная около треугольника ABC.

Предположим теперь, что прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат пучку параллельных или расходящихся прямых, и докажем, что не существует окружности, описанной около треугольника. Пусть это не так, т. е. существует окружность с центром O, проходящая через точки A, B и C. Тогда $AO = BO = CO$, следовательно, точка O лежит на прямых l_1, l_2, l_3, т. е. эти прямые принадлежат пучку пересекающихся прямых с центром O. Мы пришли к противоречию. ■

Согласно теореме 2 § 18 существуют треугольники, серединные перпендикуляры к сторонам которых принадлежат пучкам расходящихся или параллельных прямых, поэтому из доказанной теоремы непосредственно следует утверждение, которое, по существу, является противоположным к теореме евклидовой геометрии об окружности, проходящей через три неколлинеарные точки.

Следствие. *Через три точки, лежащие на циклической линии, соответствующей пучку параллельных или расходящихся прямых, нельзя провести окружность.*

§ 21. Взаимное расположение прямой и окружности и двух окружностей

1. Теорема о взаимном расположении прямой и окружности. Известная из школьного курса планиметрии теорема о взаимном расположении прямой и окружности (см. [1], § 43, теорема 1) верна также на плоскости Лобачевского. Однако доказательство этой теоремы, которое в евклидовой геометрии проводится с использованием теоремы Пифагора, должно быть заменено другим доказательством, так как теорема Пифагора здесь не применима.

Предварительно докажем следующую лемму абсолютной геометрии.

Лемма 1. *Если один конец отрезка принадлежит внутренней области, а другой конец — внешней области относительно окружности ω, то отрезок имеет общую точку с этой окружностью.*

□ Пусть A — точка внутренней области, а B — точка внешней области относительно окружности ω. Разобьем все точки отрезка на два класса K_1 и K_2 так, чтобы все точки отрезка, принадлежащие внутренней области, принадлежали классу K_1, а все другие точки отрезка — классу K_2. Легко видеть, что это разбиение удовлетворяет условиям предложения Дедекинда (см. § 3, теорема 2). Выполнение условия а) этой теоремы очевидно. Внутренняя и внешняя области относительно окружности ω являются открытыми множествами, поэтому существуют открытые круги ω_A и ω_B с центрами A и B, такие, что все точки первого круга принадлежат внутренней области, а все точки второго круга — внешней области относительно окружности ω. Отсюда следует, что классы K_1 и K_2 удовлетворяют условию б) теоремы. Далее, так как внутренняя область есть выпуклое множество, то для любой точки $X_1 \in K_1$, отличной от A, все точки отрезка AX_1 являются внутренними точками относительно окружности ω и принадлежат классу K_1. Отсюда следует, что выполняется также условие в) теоремы.

Точка C, о существовании которой говорится в теореме, принадлежит окружности ω. Это утверждение следует из того обстоятельства, что по предложению Дедекинда в любой окрестности точки C существуют как точки класса K_1, так и точки класса K_2, поэтому точка C не принадлежит ни внутренней, ни внешней областям относительно окружности ω. Значит, $C \in \omega$. ■

Теорема 1. *Пусть d — расстояние от центра O окружности радиуса r до прямой l. Тогда если $d < r$, то прямая и окружность пересекаются в двух точ-*

ках; если $d = r$, то прямая имеет с окружностью только одну общую точку; а если $d > r$, то прямая с окружностью не имеют ни одной общей точки.

□ Обозначим через ω данную окружность и проведем перпендикуляр OH к прямой l. Тогда $OH = d$.

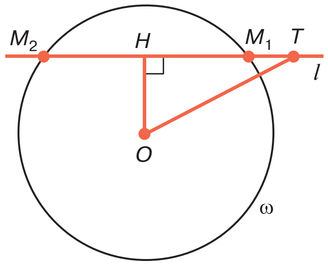


Рис. 64

а) $d < r$. В этом случае H — внутренняя точка относительно данной окружности. От точки H на одном из дополнительных лучей прямой l отложим отрезок $HT = r$ (рис. 64). Треугольник OHT прямоугольный с прямым углом OHT, поэтому $OT > HT = r$. Следовательно, T — внешняя точка относительно окружности ω. По предыдущей лемме отрезок HT имеет общую точку M_1 с окружностью ω, которая, очевидно, не совпадает с точкой H. Тогда точка M_2, симметричная точке M_1 относительно точки H, также является общей точкой прямой l и окружности ω. По свойству 19.2° прямая l и окружность ω не имеют других общих точек.

б) $d = r$. Точка H прямой l принадлежит окружности ω, так как $OH = r$. Любая другая точка X прямой l является внешней точкой относительно окружности ω, так как $OX > OH$, поэтому прямая l имеет с окружностью ω только одну общую точку H.

в) $d > r$, т. е. $OH > r$. В этом случае для любой точки X прямой l имеем: $OX \geqslant OH > r$, т. е. на прямой l нет ни одной точки окружности ω. ■

Следствие. *Если прямая проходит через внутреннюю точку относительно окружности, то она является секущей.*

2. Теорема о пересечении двух окружностей. Теорема о пересечении двух окружностей, известная из школьного курса планиметрии, также верна на плоскости Лобачевского (см. [1], § 45, теорема 1). Однако ее доказательство, которое приводится в учебниках элементарной геометрии, основано на теореме Пифагора, поэтому в геометрии Лобачевского оно должно быть заменено другим доказательством. Предварительно сформулируем следующую лемму абсолютной геометрии*.

Лемма 2. *Если один конец дуги некоторой окружности является внутренней точкой, а другой конец — внешней точкой относительно данной окружности ω, то дуга и окружность ω имеют общую точку.*

□ Пусть $\smile AB$ — дуга окружности, A — внутренняя точка, а B — внешняя точка относительно окружности ω. Рассмотрим сначала случай, когда $\smile AB$ меньше полуокружности (рис. 65).

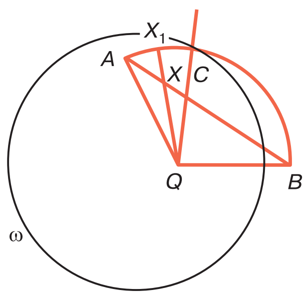


Рис. 65

Разобьем все точки отрезка AB на два класса K_1 и K_2 следующим образом. Точку X отрезка отнесем к классу K_1, если прямая, проходящая через эту точку и через центр Q окружности, которой принадлежит дуга AB, пересекает дугу AB в точке X_1, принадлежащей внутренней области относительно окружности ω. К классу K_2 отнесем все другие точки отрезка AB. Предлагаем читателю по аналогии с доказательством леммы 1 самостоятельно убедиться в том, что такое разбиение точек отрезка AB удовлетворяет условиям теоремы Дедекинда и что если C — граничная точка, о существовании которой говорится в этой теореме, то луч QC пересекает дугу AB в точке C, принадлежащей окружности ω (см. рис. 65).

Пусть теперь дуга AB больше или равна полуокружности. Если M — середина дуги AB, то ясно, что дуги AM и MB меньше полуокружности. Возможны три случая: а) M — внешняя точка относительно окружности ω. По доказанному дуга AM пересекает окружность ω,

* В курсе элементарной геометрии Д. И. Перепелкина (см. [11], § 15, 16) утверждения лемм 1 и 2 приняты в качестве аксиом абсолютной геометрии (первая и вторая аксиомы окружности).

следовательно, и дуга AB пересекает окружность ω; б) M — внутренняя точка относительно окружности ω. По доказанному дуга MB пересекает окружность ω, следовательно, и дуга AB пересекает окружность ω; в) M — точка окружности ω. Утверждение леммы очевидно. ■

Теорема 2. *Если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов, но больше абсолютной величины их разности, то обе окружности имеют две и только две общие точки.*

□ Пусть (O_1, r) и (O_2, r_2) — данные окружности. Предположим, для определенности, что $r_2 \geqslant r_1$. По условиям теоремы $O_1O_2 < r_1 + r_2$, $O_1O_2 > r_2 - r_1$. Из второго неравенства следует, что точки O_1 и O_2 не совпадают. Обозначим через A и B точки пересечения окружности (O_1, r_1) с прямой O_1O_2, причем B — точка на луче O_1O_2, а A — точка на продолжении этого луча (рис. 66).

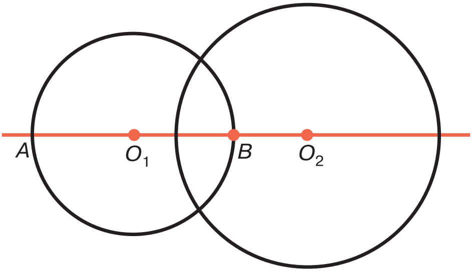


Рис. 66

Ясно, что $AO_2 = AO_1 + O_1O_2 = r_1 + O_1O_2$. Так как $O_1O_2 > r_2 - r_1$, то из предыдущего равенства следует, что $AO_2 > r_2$, т. е. точка A лежит вне, окружности (O_2, r_2). Докажем, что точка B лежит внутри этой окружности. Если точки B и O_2 совпадают, то это утверждение очевидно, поэтому рассмотрим два других возможных случая: O_1–B–O_2 (см. рис. 66) и O–O_2–B. В первом случае $BO_2 + BO_1 = O_1O_2$, или $BO_2 + r_1 = O_1O_2$. Но $O_1O_2 < r_1 + r_2$, поэтому $BO_2 + r_1 < r_1 + r_2$, т. е. $BO_2 < r_2$. Во втором случае $O_1O_2 + O_2B = O_1B = r_1 \leqslant r_2$, поэтому $O_2B < r_2$.

По лемме 2 каждая из двух полуокружностей с концами в точках A и B пересекает окружность (O_2, r_2), следовательно, окружности (O_1, r_1) и (O_2, r_2) имеют две общие точки.

Данные две окружности не могут иметь более чем две общие точки.

В самом деле, пусть M, N и P являются их общими точками. Согласно свойству 19.2° эти точки не лежат на одной прямой. Мы пришли к противоречию с теоремой 4 § 19, согласно которой через эти точки проходит только одна циклическая линия. ■

3. Теорема существования треугольника, стороны которого равны данным отрезкам. Пользуясь доказанными теоремами, легко доказать важные теоремы существования прямоугольного треугольника и произвольного треугольника, стороны которых равны данным отрезкам.

Теорема 3. *Если даны два произвольных неравных отрезка, то существует прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна большему из этих отрезков, а один из катетов — меньшему отрезку.*

□ Пусть AB и PQ — данные отрезки, где $AB < PQ$. Через точку B проведем прямую l, $l \perp AB$ и рассмотрим окружность ω с центром A радиуса PQ. По теореме прямая l пересекает окружность ω в двух точках, одну из которых обозначим через C. Очевидно, треугольник ABC искомый. ■

Пользуясь этой теоремой в рамках абсолютной геометрии, можно доказать известную теорему о том, что через любую внешнюю точку относительно данной окружности проходят две и только две касательные к ней (см. [1], § 44, теорема 2).

Теорема 4. *Если длины a, b и c данных отрезков удовлетворяют неравенствам $a + b - c > 0$, $b + c - a > 0$, $c + a - b > 0$, то существует треугольник, стороны которого соответственно равны данным отрезкам.*

□ Не нарушая общности, можно предположить, что обозначения выбраны так, что $a \geqslant b$. Возьмем отрезок O_1O_2, длина которого равна c, и рассмотрим две окружности — ω_1 с центром O_1, радиуса $r_1 = a$ и ω_2 с центром O_2 радиуса $r_2 = b$. Из данных неравенств следует, что $r_1 + r_2 > O_1O_2$ и $r_1 - r_2 < O_1O_2$. По теореме 2 окружности ω_1 и ω_2 пересекаются. Если M — одна из точек пересечения этих окружностей, то ясно, что O_1O_2M — искомый треугольник. ■

Следствие. *Существует равносторонний треугольник, стороны которого равны данному произвольному отрезку.*

§ 22. Эквидистанта

Основными простейшими кривыми плоскости Лобачевского обычно называют циклические линии. Согласно теореме 1 § 19 траектория пучка пересекающихся прямых есть окружность, которая, как было отмечено выше, является фигурой абсолютной геометрии. Свойства окружности в рамках геометрии Лобачевского были подробно рассмотрены в § 20, 21. Теперь мы приступаем к изучению свойств траекторий двух других типов пучков — пучков расходящихся и параллельных прямых. Эти линии специфичны для геометрии Лобачевского и не имеют аналогов в евклидовой геометрии.

1. Эквидистанта. Фигура плоскости Лобачевского, которая состоит из всех точек некоторой произвольной полуплоскости λ, равноудаленных от ее границы, называется *эквидистантой*. Граница полуплоскости λ называется *базой эквидистанты*, а перпендикуляр, проведенный из любой точки эквидистанты на базу, — *высотой*. Высотой называется также длина этого перпендикуляра. Полуплоскость λ будем называть *полуплоскостью эквидистанты*.

Если на евклидовой плоскости, так же как и на плоскости Лобачевского, ввести понятие эквидистанты, то на евклидовой плоскости эквидистанта — это прямая, параллельная ее базе. В отличие от этого, на плоскости Лобачевского эквидистанта есть кривая, о чем свидетельствует следующая теорема.

Теорема 1. *Каждая траектория пучка расходящихся прямых есть эквидистанта.* Обратно: *любая эквидистанта есть траектория пучка расходящихся прямых с базой, совпадающей с базой эквидистанты.*

□ Пусть P — данный пучок расходящихся прямых с базой l. Обозначим через γ_A траекторию этого пучка, проходящую через точку A, а через δ_A эквидистанту с базой l, проходящую через точку A, и докажем, что линии γ_A и δ_A совпадают.

Возьмем произвольную точку X линии γ_A, отличную от A, и проведем перпендикуляры AA_1 и XX_1, к прямой l (рис. 67). По свойству 19.4° углы A_1AX и X_1XA являются равными острыми углами, поэтому по теореме 3 § 13 двупрямоугольник AXX_1A_1 — четырехугольник Саккери, т. е. $AA_1 = XX_1$. Отсюда следует, что $X \in \delta_A$. Обратно: пусть $X \in \delta_A$, т. е. $AA_1 = XX_1$ и AXX_1A_1 — четырехугольник Саккери. По свойству 13.3° прямая a, проходящая через середины отрезков AX и A_1X_1, является осью симметрии этого четырехугольника, следовательно, точки A и X симметричны относительно этой прямой. Отсюда мы заключаем, что $X \in \gamma_A$. Таким образом, линии γ_A и δ_A совпадают.

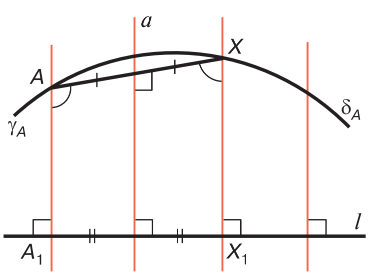


Рис. 67

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть δ_A — произвольная эквидистанта с базой l, проходящая через точку A (см. рис. 67). Рассмотрим траекторию γ_A пучка P расходящихся прямых с базой l, проходящую через точку A. По доказанному линия γ_A совпадает с эквидистантой δ_A. ■

2. Взаимное расположение прямой и эквидистанты. Из предыдущей теоремы следует, что свойства 19.1° и 19.2° траекторий пучков о взаимном расположении прямой и траектории пучка применимы к эквидистанте. В частности, прямая, лежащая в плоскости эквидистанты, пересекает ее не более чем в двух точках. Определение касательной к траектории пучка и теорема 2 § 19 о касательной также применимы к эквидистанте. Так как касательная к эквидистанте в точке A перпендикулярна к высоте AA_1 эквидистанты, то касательная в любой точке эквидистанты расходится с базой эквидистанты. Общим перпендикуляром касательной в данной точке и базы является высота эквидистанты, проведенная из этой точки.

Точка M называется *внутренней точкой* относительно эквидистанты с базой l и высотой h, если она принадлежит полуплоскости λ эквидистанты и расстояние от точки M до прямой l меньше, чем h. Точки полуплоскости λ, не являющиеся внутренними и не лежащие на эквидистанте, называются *внешними* относительно эквидистанты.

Докажем лемму о хорде эквидистанты.

Лемма 1. *Если AB — произвольная хорда эквидистанты с базой l, то AB и l — расходящиеся прямые. Все точки, лежащие на хорде AB, являются внутренними, а все точки прямой AB, не принадлежащие хорде,— внешними относительно эквидистанты.*

□ Проведем перпендикуляры AA_1 и BB_1 к прямой l. Четырехугольник AA_1B_1B является четырехугольником Саккери. По свойству 13.2° прямая, проходящая через середины отрезков AB и A_1B_1, перпендикулярна к этим отрезкам, поэтому AB и l — расходящиеся прямые. Отсюда следует, что все точки прямой AB принадлежат полуплоскости эквидистанты.

Возьмем произвольную точку M на отрезке AB и произвольную точку N прямой AB вне отрезка AB, например, так, чтобы A–B–N, и проведем перпендикуляры MM и NN_1 к прямой l (рис. 68). Докажем, что $MM_1 < h$, $NN_1 > h$, где $h = AA_1 = BB_1$ — высота эквидистанты. Не нарушая общности, можно предположить, что $\angle AMM_1 \geqslant \angle BMM_1$, т. е. что $\angle AMM_1$ не острый. Так как $\angle A_1AM$ острый, то, применив теорему 2 § 13 к двупрямоугольнику AA_1M_1M, имеем: $MM_1 < AA_1 = h$. Аналогично в двупрямоугольнике BB_1N_1N угол B тупой, поэтому $\angle BNN_1$ острый, следовательно, $NN_1 > BB_1 = h$. Таким образом, M — внутренняя, а N — внешняя точка относительно эквидистанты. ■

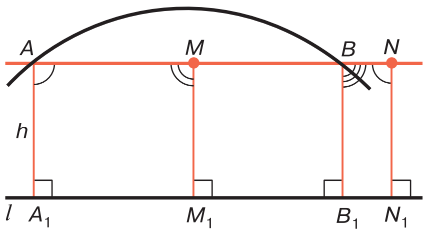


Рис. 68

Докажем теперь две теоремы о взаимном расположении прямой и эквидистанты, первая из которых является аналогом теоремы 1 § 21 о взаимном расположении прямой и окружности.

Теорема 2. *Пусть d — расстояние от базы l эквидистанты с высотой h до прямой p, которая расходится с прямой l и лежит в полуплоскости эквидистанты. Тогда если $d < h$, то прямая и эквидистанта пересекаются в двух точках; если $d = h$, то прямая имеет с эквидистантой только одну общую точку; а если $d > h$, то прямая не имеет с эквидистантой ни одной общей точки.*

□ Пусть PL — общий перпендикуляр прямых p и l. Тогда прямая PL — ось данной эквидистанты γ и пересекает ее в некоторой точке A. Ясно, что $AL = h$, $PL = d$.

а) $d < h$, т. е. $PL < AL$ (рис. 69). Возьмем на прямых p и l точки P_1 и L_1 так, чтобы $P_1, L_1 \doteq PL$, и рассмотрим двуугольник $mLPk$, где m и k — лучи LL_1 и PP_1. По лемме о двуугольнике (см. § 14, лемма 1) на луче k существует такая точка M, что перпендикуляр MM_1

к прямой l равен h. Очевидно, M — точка пересечения прямой p и эквидистанты γ. Так как AL — ось эквидистанты, то точка M', симметричная точке M относительно прямой AL, также является точкой пересечения прямой p и эквидистанты γ. По свойству 19.2° прямая p и эквидистанта γ не имеют других общих точек.

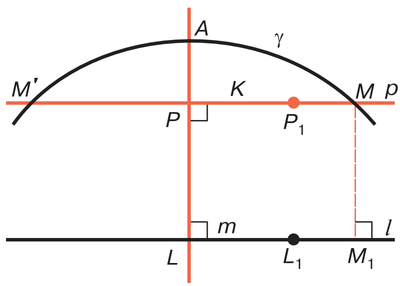


Рис. 69

б) $d = h$. В этом случае p — касательная к эквидистанте γ, поэтому по теореме 2 § 19 прямая p имеет с эквидистантой только одну общую точку.

в) $d > h$, т. е. $PL > AL$. По лемме 1 § 14 для любой точки X прямой p $XX_1 \geqslant PL > AL$, где XX_1 — перпендикуляр к прямой l. Поэтому $XX_1 > h$, и на прямой p нет ни одной точки эквидистанты γ. ■

Теорема 3. *Если прямая p пересекает базу эквидистанты или параллельна ей и принадлежит полуплоскости эквидистанты, то она имеет одну и только одну общую точку с эквидистантой.*

Пусть γ — данная эквидистанта с базой l и высотой h, а λ — полуплоскость эквидистанты. Если $p \perp l$, то прямая p — ось эквидистанты, поэтому утверждение теоремы непосредственно следует из свойства 19.1°. Рассмотрим общий случай, когда $p \parallel l$ или прямые p и l пересекаются, но не взаимно перпендикулярны.

На прямой p возьмем точку M_0 так, чтобы $M_0 \in \lambda$ и перпендикуляр M_0H_0 к прямой l был меньше, чем h. Докажем, что такая точка существует. В самом деле, если $p \parallel l$, то точка M_0 существует в силу теоремы 1 § 14. Если же прямые p и l пересекаются в точке O, то на луче прямой p, который исходит из точки O и принадлежит полуплоскости эквидистанты, отложим отрезок $OM_0 = h$. Ясно, что $M_0H_0 < h$.

На прямых p и l возьмем точки M_1 и N_1 так, чтобы $M_1, N_1 \mathbin{\ddot{-}} M_0H_0$ и $\angle H_0M_0M_1$ был тупым, и рассмотрим двуугольник mH_0M_0k, где m и k — лучи H_0N_1 и M_0M_1 (рис. 70). Применив лемму 1 § 14 к двуугольнику mH_0M_0k, приходим к выводу, что на луче k существует единственная точка M, такая, что расстояние от этой точки до прямой l равно h.

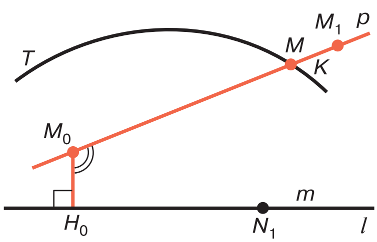


Рис. 70

3. Равенство двух эквидистант. Для доказательства теоремы о равенстве двух эквидистант предварительно докажем лемму.

Лемма 2. *При данном движении f эквидистанта с базой l и высотой h переходит в эквидистанту с базой l' и той же высотой h, где $l' = f(l)$.*

□ По теореме 1 данная эквидистанта есть траектория пучка P расходящихся прямых с базой l. По теореме 3 § 19 данная эквидистанта переходит в траекторию пучка $P' = f(P)$, который является пучком расходящихся прямых с базой $l' = f(l)$ (см. § 18, теорема 1). Траектория пучка P' есть эквидистанта с базой l'. Так как при движении сохраняются расстояния и перпендикулярность прямых, то образ данной эквидистанты с высотой h имеет высоту h. ■

Из этой леммы следует, что фигура, равная эквидистанте, является эквидистантой.

Теорема 4. *Две эквидистанты равны тогда и только тогда, когда их высоты равны.*

□ Обозначим через γ_1 и γ_2 данные эквидистанты. Если они равны, то по предыдущей лемме их высоты равны.

Докажем обратное утверждение. Пусть l_1 и l_2 — базы данных эквидистант, высоты которых равны. Проведем произвольные лучи A_1B_1 и A_2B_2 данных эквидистант, где точки B_1 и B_2 лежат на соответствующих базах. По лемме 2 § 20 существует движение f, при котором луч A_1B_1 переходит в луч A_2B_2. Так как $A_2 = f(A_1)$ и высоты данных эквидистант равны, то $B_2 = f(B_1)$. Очевидно, $A_1B_1 \perp l_1$, $A_2B_2 \perp l_2$, поэтому $l_2 = f(l_1)$. По лемме 2 при движении f эквидистанта γ_1 переходит в эквидистанту γ'_1 с базой l_2, проходящую через точку B_1, т. е. в эквидистанту γ_2. Таким образом, эквидистанты γ_1 и γ_2 равны. ■

§ 23. Орицикл

1. Определение орицикла. *Орициклом* (или *предельной линией*), заданным лучом AA_1, называется фигура, состоящая из точки A и всех точек плоскости, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой направленной прямой, параллельной прямой AA_1.

Настоящий и следующий параграфы посвящены изучению орициклов, которые имеют очень важное значение для вывода основных формул тригонометрии Лобачевского. Докажем сначала теорему об орицикле.

Теорема 1. *Каждая траектория пучка параллельных прямых есть орицикл.* Обратно: *любой орицикл, заданный лучом AA_1, есть траектория пучка параллельных прямых, который задан прямой $\overline{AA_1}$.*

□ Пусть γ_A — траектория пучка P параллельных прямых, проходящая через точку A. Обозначим через AA_1 прямую пучка P, проходящую через точку A, и докажем, что γ_A — орицикл, заданный лучом AA_1.

По определению траектории пучка $X \in \gamma_A$ тогда и только тогда, когда A и X соответствуют друг другу относительно пучка P, т. е. когда точки A и X симметричны относительно некоторой прямой пучка P. Из определения орицикла следует, что γ_A — орицикл, заданный лучом AA_1.

Обратно: пусть δ_B — произвольный орицикл, заданный лучом BB_1. Рассмотрим траекторию γ_B пучка P параллельных прямых, заданного прямой $\overline{BB_1}$. По доказанному линия γ_B совпадает с орициклом δ_B. ■

Следствие. *Орицикл имеет бесконечное множество точек.*

Пусть орицикл γ задан лучом AA_1. По доказанной теореме γ — траектория пучка параллельных прямых, заданного прямой $\overline{AA_1}$. Направленные прямые этого пучка являются осями орицикла. Из каждой точки орицикла γ исходит луч траектории, который будем называть *лучом орицикла* γ. Ясно, что орицикл может быть задан любым своим лучом.

2. Вырожденный треугольник, вписанный в орицикл. Для удобства дальнейшего изложения введем понятие вырожденного треугольника. Напомним, что фигура $hABk$, состоящая из отрезка AB и двух лучей h и k, исходящих из точек A и B, не имеющих общих точек и принадлежащих одной полуплоскости с границей AB, называется двуугольником. Двуугольник hABk называется *вырожденным треугольником*, если лучи h и k параллельны. Отрезок AB называется стороной, h, k — лучами, точки A и B — вершинами, а углы A и B — углами вырожденного треугольника (рис. 71, *а*). Вырожденный треугольник с лучами AA_1 и BB_1 будем обозначать так: $\triangle(AA_1)(BB_1)$.

Вырожденный треугольник можно рассматривать как фигуру, которая является предельным положением обычного треугольника, когда длина одной из его сторон стремится к бесконечности.

В самом деле, пусть BAC — некоторый обычный треугольник, а X — переменная точка луча AC (рис. 71, *б*). Каждому положению точки X на луче AC соответствует треугольник ABX. При $AX \to \infty$ предельным положением треугольника ABX является вырожденный треугольник $(AA_1)(BB_1)$.

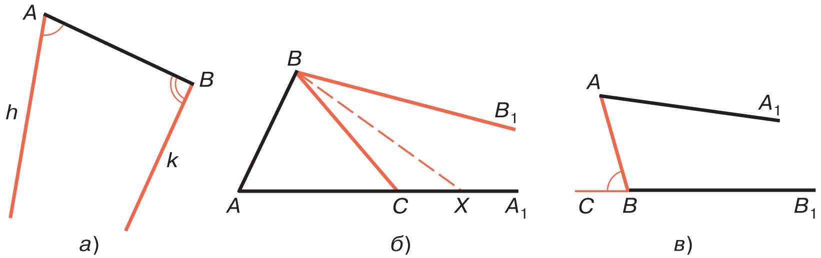


Рис. 71

Рассмотрим два свойства углов вырожденного треугольника, необходимых для дальнейшего изложения. Эти свойства являются обобщениями теорем о внешнем угле и сумме углов обычных треугольников. *Внешним углом вырожденного треугольника* называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника.

23.1°. В вырожденном треугольнике внешний угол больше угла этого треугольника, не смежного с ним.

□ Пусть ABC — внешний угол вырожденного треугольника $(AA_1)(BB_1)$ (рис. 71, *в*). Так как $\overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1}$, а AB — секущая, которая их пересекает, то по теореме 4 § 10 $\angle ABC > \angle BAA_1$. ■

23.2°. Сумма мер двух углов вырожденного треугольника меньше чем $2d$, где d — мера прямого угла.

□ Пусть ABC — внешний угол вырожденного треугольника $(AA_1)(BB_1)$ (см. рис. 71, *в*). По свойству 23.1° $\widehat{ABC} > \widehat{A}$, а по свойству 3.1° о смежных углах $\widehat{ABC} + \widehat{ABB_1} = 2d$, поэтому $\widehat{A} + \widehat{B} < 2d$. ■

Будем говорить, что вырожденный треугольник $(AA_1)(BB_1)$ вписан в орицикл γ, если лучи AA_1 и BB_1 являются лучами этого орицикла (рис. 72).

Теорема 2. *Вырожденный треугольник* $(AA_1)(BB_1)$ *вписан в орицикл* γ, *заданный лучом* AA_1, *тогда и только тогда, когда* $\angle A = \angle B$ *и эти углы острые.*

□ Орицикл γ есть траектория некоторого пучка P параллельных прямых.

Если треугольник $(AA_1)(BB_1)$ вписан в орицикл γ, то прямые $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$ принадлежат пучку P. Так как $B \in \gamma$, то по свойству 19.4° в треугольнике $(AA_1)(BB_1) \angle A = \angle B$ и эти углы острые.

Обратно: пусть в треугольнике $(AA_1)(BB_1) \angle A = \angle B$ и эти углы острые. Так как AA_1 — луч орицикла, а $\overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1}$, то достаточно доказать, что $B \in \gamma$. Прямая AB является секущей равного наклона параллельных прямых $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$, поэтому она перпендикулярна к оси симметрии CC_1 этих прямых и пересекает эту ось в середине отрезка AB. По теореме 3 § 11 $\overline{CC_1} \subset P$, следовательно, $B \in \gamma$. Таким образом, треугольник $(AA_1)(BB_1)$ вписан в орицикл γ. ■

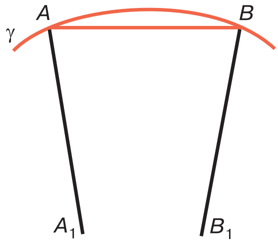


Рис. 72

Отметим, что в этой теореме, по существу, выражено необходимое и достаточное условие того, что точка B принадлежит орициклу, заданному лучом AA_1.

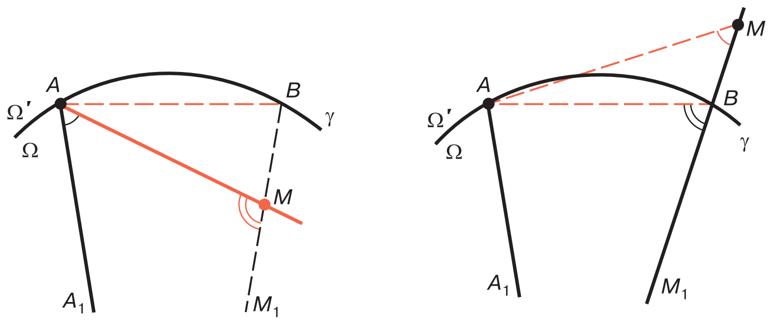
3. Внутренняя и внешняя области относительно орицикла. Точка M называется *внутренней* точкой относительно данного орицикла, если она лежит на каком-нибудь луче орицикла. Точки плоскости, не являющиеся внутренними и не лежащие на орицикле, называются *внешними* относительно орицикла.

Докажем теорему, которая позволяет определить, является ли данная точка плоскости внутренней или внешней точкой относительно орицикла.

Теорема 3. *Пусть γ — орицикл, заданный лучом AA_1, а Ω и Ω' соответственно множества внутренних и внешних точек относительно γ. Необходимым и достаточным условием того, что вершина M вырожденного треугольника $(AA_1)(MM_1)$ принадлежит:* а) *множеству Ω, является неравенство $\angle A < \angle M$;* б) *множеству Ω', является неравенство $\angle A > \angle M$.*

□ Прямая $\overline{MM_1}$ является осью орицикла, поэтому пересекает его в некоторой точке B. Не нарушая общности, можно считать, что BM_1 есть луч орицикла.

а) Если $M \in \Omega$, то точка M лежит на луче BM_1 (рис. 73, *а*), следовательно, AM — внутренний луч угла BAA_1, поэтому $\angle MAA_1 < \angle BAA_1$. Учитывая предыдущую теорему и теорему о внешнем угле треугольника, получаем: $\angle BAA_1 = \angle ABM_1 < \angle AMM_1$. Таким образом, $\angle MAA_1 < \angle AMM_1$ т. е. в вырожденном треугольнике $(AA_1)(MM_1) \angle A < \angle M$.



а) *б*)

Рис. 73

Обратно: если в треугольнике $(AA_1)(MM_1)$ $\angle A < \angle M$, то из предыдущей теоремы следует, что $M \notin \gamma$, поэтому точка M лежит либо на луче BM_1, либо на продолжении этого луча. Второй случай невозможен, так как в этом случае $\angle A > \angle BAA_1 = \angle ABM_1$, а по теореме о внешнем угле треугольника $\angle M < \angle ABM_1$ (рис. 73, *б*), поэтому $\angle A > \angle M$. Таким образом, M — точка луча BM_1, т. е. $M \in \Omega$.

б) Пусть теперь $M \in \Omega'$. Из предыдущей теоремы следует, что углы A и M треугольника $(AA_1)(MM_1)$ не равны друг другу и по доказанному $\angle A$ не меньше, чем угол M, следовательно, $\angle A > \angle M$.

Обратно: если $\angle A > \angle M$, то по предыдущей теореме точка M не лежит на орицикле и по доказанному эта точка не принадлежит области Ω, поэтому $M \in \Omega'$. ■

Используя эту теорему, докажем лемму о секущей орицикла, аналогичную соответствующему свойству секущей окружности.

Лемма. *Если AB — секущая, которая пересекает орицикл в точках A и B, то все точки, лежащие на хорде AB, являются внутренними точками, а все точки прямой AB, не принадлежащие отрезку AB, — внешними точками относительно данного орицикла.*

□ Пусть AA_1 и BB_1 — лучи данного орицикла γ, M — произвольная точка на хорде AB. Через точку M проведем ось орицикла и обозначим через MM_1 луч положительного направления этой оси (рис. 74). Очевидно, этот луч расположен в той же полуплоскости λ с границей AB, что и лучи AA_1 и BB_1. Рассмотрим вырожденные треугольники $(AA_1)(BB_1)$, $(AA_1)(MM_1)$, $(BB_1)(MM_1)$ и воспользуемся цифровыми обозначениями углов на рис. 74. По свойству 23.1° $\angle 1 > \angle 4$, а по теореме 2 $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\angle 1 > \angle 3$. По теореме 3 M — внутренняя точка относительно орицикла. Рассмотрим теперь произвольную точку N прямой AB вне отрезка AB. Пусть, например, A–B–N (см. рис. 74). Проведем луч NN_1, параллельный лучу BB_1. В треугольнике $(BB_1)(NN_1)$ $\angle 4 > \angle 5$ (см. свойство 23.1°), а так как $\angle 3 = \angle 4$, то $\angle 5 < \angle 3$. Применив теорему 3 к треугольнику $(AA_1)(NN_1)$, мы заключаем, что N — внешняя точка относительно орицикла γ. ■

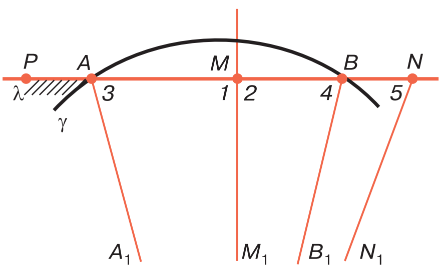


Рис. 74

Для дальнейшего изложения необходимо напомнить некоторые понятия, относящиеся к множествам точек плоскости. Точка непустого множества называется *внутренней точкой* множества, если существует открытый круг с центром в этой точке, все точки которого принадлежат множеству. Множество называется *открытым*, если все его точки являются внутренними. Множество называется *выпуклым*, если все точки отрезка, соединяющего любые две точки множества, принадлежат этому множеству. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить ломаной, в частности отрезком, все точки которой принадлежат этому множеству. *Областью называется любое непустое открытое связное множество.*

Докажем следующую важную теорему.

Теорема 4. *Множество всех внутренних точек относительно орицикла является выпуклой областью, а множество всех внешних точек — невыпуклой областью.*

□ Обозначим через Ω и Ω' множества внутренних и внешних точек относительно данного орицикла γ.

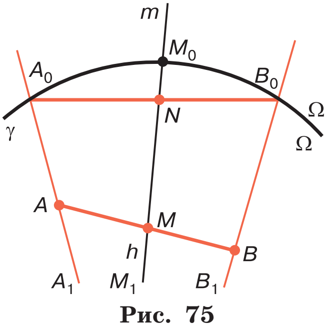


Рис. 75

Докажем сначала, что Ω — выпуклое множество. Пусть $A \in \Omega$ и $B \in \Omega$. Докажем, что любая точка M отрезка AB принадлежит множеству Ω. Это утверждение очевидно, если точки A и B лежат на одном луче орицикла γ, поэтому предположим, что они лежат на двух лучах A_0A_1 и B_0B_1 этого орицикла (рис. 75). Через точку M проведем ось $\overline{m}$ орицикла γ и обозначим через M_0M_1 луч орицикла, принадлежащий этой оси. Докажем, что M — точка луча M_0M_1.

Так как A, $B \div m$ и лучи A_0A_1 и B_0B_1 не имеют общих точек с прямой m, то A_0, $B_0 \div m$. Отсюда следует, что прямая m пересекает отрезок A_0B_0 в некоторой точке N. Так как прямая $\overline{m}$ параллельна лучу A_0A_1, то на этой прямой из точки N исходит луч h, параллельный лучу A_0A_1. Но лучи A_0A_1 и M_0M_1 также параллельны, следовательно, лучи M_0M_1 и h сонаправлены. Точка N согласно лемме 1 принадлежит лучу M_0M_1, отсюда, учитывая лемму § 5, мы заключаем, что точка M_0 не принадлежит лучу h. Таким образом, M_0–N–M, следовательно, M — точка луча M_0M_1, т. е. M — внутренняя точка относительно орицикла γ.

Докажем, что Ω — открытое множество. Пусть $M \in \Omega$, а M_0M_1 — луч орицикла, на котором лежит точка M. Достаточно доказать, что любая точка X, лежащая внутри круга $\overline{\omega}$ с центром M радиуса M_0M_1, принадлежит Ω. Обозначим через M_2 точку пересечения луча M_0M_1 с границей круга $\overline{\omega}$. Если точка X лежит на диаметре M_0M_1, то ясно, что $X \in \Omega$, поэтому рассмотрим случай, когда эта точка не лежит на отрезке M_0M_2 (рис. 76). Проведем луч XX_1, параллельный лучу M_0M_1, и рассмотрим вырожденный треугольник $(M_0M_1)(XX_1)$. В треугольнике M_0XM_2 $M_2X < M_0M_2$, поэтому $\angle M_1M_0X < \angle M_0XM_2$. Но $\angle M_0XM_2 < \angle M_0XX_1$ (так как лучи M_0M_1 и XX_1 параллельны). Следовательно, $\angle M_1M_0X < \angle M_0XX_1$. По теореме 3 $X \in \Omega$.

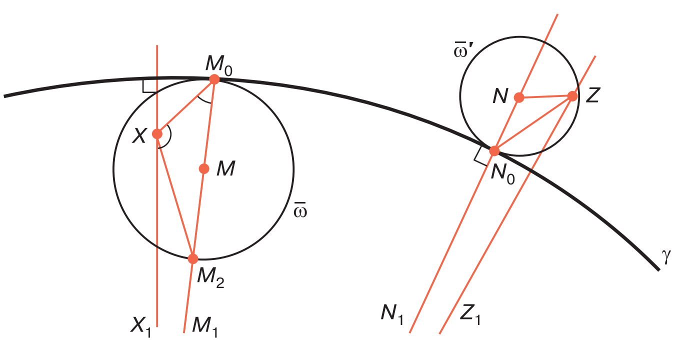


Рис. 76

Мы доказали, что Ω — открытое выпуклое множество, поэтому Ω — связное множество, т. е. Ω — выпуклая область.

Докажем теперь, что Ω' — открытое множество. Пусть $N \in \Omega'$, а N_0N_1 — луч орицикла, дополнительный к лучу

N_0N. Аналогично предыдущему достаточно доказать, что любая точка Z, лежащая внутри круга $\overline{\omega'}$ с центром N радиуса NN_0, принадлежит Ω' (см. рис. 76). Если точка Z лежит на прямой N_0N_1, то ясно, что $Z \in \Omega'$, поэтому допустим, что $Z \notin N_0N_1$. Проведем луч ZZ_1, параллельный лучу N_0N_1, и рассмотрим вырожденный треугольник $(N_0N_1)(ZZ_1)$. Так как $\angle NN_0Z$ острый, то смежный с ним угол ZN_0N_1 тупой, поэтому в этом треугольнике согласно свойству 23.2° $\angle Z$ острый. По теореме 3 $Z \in \Omega'$.

В отличие от множества Ω, множество Ω' не является выпуклым. В самом деле, пусть AB — хорда орицикла, N — точка на продолжении луча BA, а P — точка на продолжении луча AB (см. рис. 74). По предыдущей лемме $P \in \Omega'$, $N \in \Omega'$, но не все точки отрезка PN принадлежат множеству Ω'. Предлагаем читателю доказать самостоятельно, что Ω' — связное множество, поэтому Ω' — область. ■

Множества Ω и Ω' будем называть соответственно *внутренней и внешней областями относительно данного орицикла*.

Из доказательства теоремы следует:

Следствие. *Если M_0M — ось орицикла, то любая точка, лежащая внутри круга с центром M радиуса MM_0, принадлежит внутренней области относительно орицикла.*

§ 24. Взаимное расположение прямой и орицикла. Предельная линия

1. Центральная точка прямой относительно орицикла. Из теоремы 1 § 23 следует, что все общие свойства траекторий пучков, рассмотренные нами в § 19, в частности свойства 19.1° и 19.2° о взаимном расположении прямой и траектории пучка, являются свойствами орицикла, т. е. каждая ось орицикла пересекает его в одной и только в одной точке и любая прямая пересекает орицикл не более чем в двух точках.

Докажем лемму, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма 1. *Если прямая MN не является осью орицикла, то существует одна и только одна ось орицикла, перпендикулярная к этой прямой.*

□ Докажем сначала, что существует ось орицикла, перпендикулярная к прямой MN. Для этого проведем ось $\overline{MM_1}$ данного орицикла. Если $MM_1 \perp MN$, то $\overline{MM_1}$ — искомая ось, поэтому предположим, что угол между прямыми MM_1 и MN острый. Не нарушая общности, можно считать, что точка N на данной прямой выбрана так, что $\angle NMM_1$ острый. На луче MN отложим отрезок MN_0, которому соответствует угол параллельности, равный $\widehat{NMM_1}$, и через точку N_0 проведем прямую m, перпендикулярную к прямой MN. Ясно, что эта прямая с надлежащим образом выбранным направлением является искомой осью.

Так как любые две оси орицикла параллельны, а параллельные прямые не могут быть перпендикулярными к одной прямой, то $\overline{m}$ — единственная ось орицикла, перпендикулярная к прямой l. ■

Точку пересечения данной прямой l с перпендикулярной к ней осью линии γ будем называть *центральной точкой прямой* l относительно γ.

2. Касательная к орициклу. В соответствии с общим определением касательной к траектории пучка прямая, проходящая через точку M_0 орицикла и перпендикулярная к оси, проходящей через эту точку, называется *касательной к орициклу* в точке M_0. В соответствии с теоремой 2 § 19 о касательной в каждой точке M_0 орицикла существует одна и только одна касательная, которая имеет только одну общую точку M_0 с орициклом. Все точки орицикла, кроме точки M_0, принадлежат полуплоскости, границей которой является касательная и которой принадлежит луч M_0M_1 орицикла, исходящий из точки M_0 (рис. 77). Можно доказать, что этой же полуплоскости принадлежат все точки внутренней области относительно орицикла (см. задачу 27). Отсюда следует, что все точки касательной, кроме точки касания, принадлежат внешней области относительно орицикла.

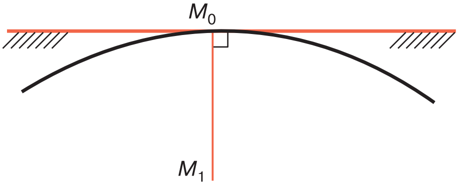


Рис. 77

Докажем теорему о касательной к орициклу.

Теорема 1. *Прямая, отличная от оси орицикла, является касательной к орициклу тогда и только тогда, когда ее центральная точка принадлежит орициклу.*

□ Пусть M_0 — центральная точка прямой l относительно данного орицикла γ. Если $M_0 \in \gamma$, то по определению центральной точки ось M_0M_1 орицикла γ перпендикулярна к прямой l, поэтому l — касательная к орициклу в точке M_0.

Обратно: пусть l — касательная к орициклу γ в точке M_0. Если M_0M_1 — ось орицикла γ, проходящая через точку M_0, то по определению касательной $M_0M_1 \perp l$, следовательно, M_0 — центральная точка прямой l относительно орицикла γ. ■

3. Теорема о взаимном расположении прямой и орицикла. Сформулируем следующую лемму.

Лемма 2. *Если один конец отрезка принадлежит внутренней области, а другой конец — внешней области относительно орицикла γ, то отрезок имеет общую точку с этим орициклом.*

Доказательство этой леммы мы опускаем, так как оно в точности совпадает с доказательством леммы 1 § 21, если в этом доказательстве слова «окружность ω» заменить словами «орицикл γ».

Докажем теорему о взаимном расположении прямой и орицикла.

Теорема 2. *Пусть A — центральная точка прямой l, которая не является осью данного орицикла, а Ω и Ω' — внутренняя и внешняя области относительно орицикла. Тогда если $A \in \Omega$, то прямая l пересекает орицикл в двух и только в двух точках, а если $A \in \Omega'$, то прямая l не имеет с орициклом ни одной общей точки и все ее точки принадлежат области Ω'.*

□ Пусть ось орицикла γ, проходящая через точку A, пересекает орицикл в точке A_0, а A_0A_1 — луч орицикла, исходящий из точки A_0.

Рассмотрим сначала случай, когда $A \in \Omega$. Тогда A — точка луча A_0A_1 (рис. 78). Докажем, что на прямой l существует хотя бы одна точка, принадлежащая области Ω'. На прямой l возьмем точки B и C так, чтобы A–B–C, $BC > A_0B$, $AC > \widetilde{p}$, где $\widetilde{p}$ — отрезок, которому соответствует угол параллельности AA_0B. Проведем ось $\overline{CC_1}$ орицикла и воспользуемся обозначениями мер углов, указанными на рис. 78. В треугольнике A_0BC $A_0B < BC$, поэтому $\beta_1 < \beta$. Так как $AC > \widetilde{p}$, то $\alpha_1 < \alpha$, следовательно, $\alpha + \beta > \alpha_1 + \beta_1$, или $\angle CA_0A_1 > \angle A_0CC_1$. Применив теорему 3 § 23 к вырожденному треугольнику $(A_0A_1)(CC_1)$, мы приходим к выводу, что C — внешняя точка относительно орицикла γ.

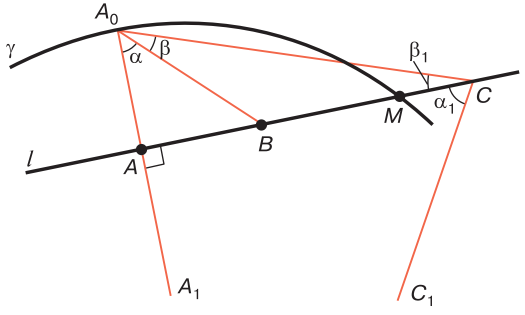


Рис. 78

По предыдущей лемме отрезок AC имеет общую точку M с орициклом γ. Так как прямая A_0A —

ось симметрии орицикла, то точка N, симметричная точке M относительно A, также является общей точкой прямой l и орицикла γ. По свойству 19.2° на прямой l нет других точек орицикла.

Рассмотрим теперь случай, когда $A \in \Omega'$, и докажем, что все точки прямой l принадлежат области Ω', поэтому прямая l не может иметь общих точек с орициклом γ. Пусть M — произвольная точка прямой l, отличная от точки A, а MM_1 — ось орицикла γ.

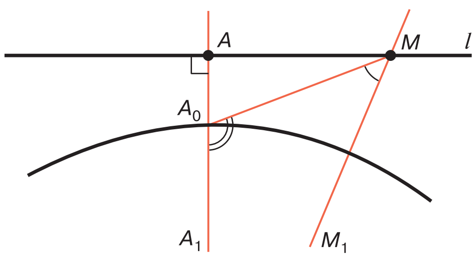


Рис. 79

Так как $A \in \Omega'$, то $A{-}A_0{-}A_1$ (рис. 79). В вырожденном треугольнике $(A_0A_1)(MM_1)$ $\angle MA_0A_1$ тупой, так как смежный с ним угол AA_0M как угол прямоугольного треугольника острый. По свойству 23.1° угол A_0MM_1 острый. По теореме 3 § 23 $M \in \Omega'$. ■

Следствие 1. *Прямая, отличная от оси орицикла, проходящая через точку внутренней области* Ω *относительно орицикла, пересекает орицикл в двух точках.*

□ Пусть l — данная прямая, которая проходит через точку $M \in \Omega$, а A — центральная точка этой прямой относительно данного орицикла γ. Докажем, что $A \in \Omega$. Ясно, что $A \notin \Omega'$, так как если допустить, что $A \in \Omega'$, то по доказанной теореме на прямой l не может существовать точки $M \in \Omega$. Точно так же, учитывая теорему 1 о касательной, мы заключаем, что $A \notin \gamma$. Следовательно, $A \in \Omega$, и поэтому по доказанной теореме прямая l является секущей. ■

Следствие 2. *Прямая, проходящая через точку орицикла и не совпадающая ни с осью орицикла, ни с касательной в этой точке, пересекает орицикл в двух точках.*

□ Пусть l — прямая, проходящая через точку A_0 орицикла и не совпадающая ни с осью A_0A_1, ни с касательной в точке A_0. Тогда l образует с осью A_0A_1 острый угол. Ясно, что на прямой l имеются точки, лежащие внутри круга с центром A_1 радиуса A_1A_0. По следствию теоремы 4 § 23 эти точки являются внутренними точками относительно данного орицикла. По следствию 1 прямая l пересекает орицикл в двух точках. ■

4. Предельная линия. Из вышеизложенного следует, что орицикл имеет много общих свойств с окружностью. По существу, все основные свойства орицикла, рассмотренные нами в этом и предыдущих параграфах, а также свойства 19.1°, 19.2° и 19.3° траекторий пучков являются как свойствами окружности, так и свойствами орицикла. Особо следует отметить лемму и теорему 4 § 23, а также все утверждения о взаимном расположении прямой и орицикла: лемму 2, теоремы 1 и 2 настоящего параграфа. При этом центральная точка прямой аналогична основанию перпендикуляра, проведенного из центра окружности к прямой. Все это вполне согласуется с интуитивным представлением об орицикле как о линии, которая является пределом переменной окружности, когда ее радиус стремится к бесконечности (отсюда термин «предельная линия», который принадлежит Н. И. Лобачевскому). В самом деле, пусть γ — орицикл, заданный лучом AA_1, а M — переменная точка этого луча. Рассмотрим окружность ω_M с центром M, проходящую через точку A. Для каждой точки M луча AA_1 соответствующая окружность ω_M и орицикл γ имеют единственную точку A и общую касательную AT в этой точке (рис. 80). Все точки круга с границей ω_M, за исключением точки A, принадлежат внутренней области орицикла (см. следствие теоремы 4 § 23).

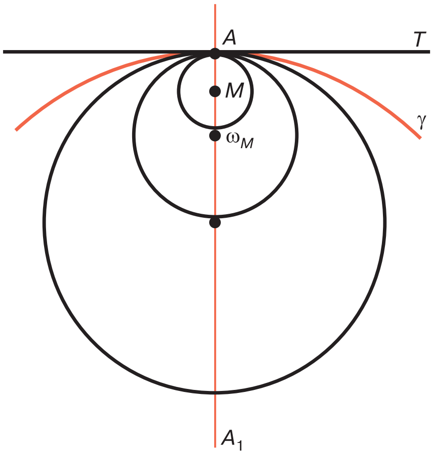


Рис. 80

Отметим также, что согласно следствию 2 теоремы 2 любая прямая, проходящая через точку A и не совпадающая с осью орицикла или с касательной AT, пересекает и окружность ω_M, и орицикл γ еще в одной точке.

Для каждого положения точки M на луче AA_1 окружность ω_M является траекторией пучка P_M пересекающихся прямых с центром M. При $AM \to \infty$ пределом переменного пучка P_M является пучок P_0 параллельных прямых, заданный прямой $\overline{AA_1}$. Интуитивно ясно, что пределом переменной окружности ω_M является траектория пучка P_0, проходящая через точку A.

Имеет место следующая интересная теорема, которая полностью согласуется с изложенными выше соображениями о том, что орицикл есть предельное положение окружности, радиус которой есть переменная величина, стремящаяся к бесконечности.

Теорема 3. *Любые два орицикла равны друг другу.*

□ Пусть γ и γ' — произвольные орициклы, которые являются траекторией пучков P и P' параллельных прямых и заданы лучами AA_1 и $A'A'_1$. По лемме 2 § 20 существует движение f, при котором луч AA_1 переходит в луч $A'A'_1$. Ясно, что $A' = f(A)$. При этом движении, очевидно, $P'' = f(P)$, и по теореме 1 § 18 P'' — пучок параллельных прямых, заданный прямой AA'_1. Отсюда следует, что пучок P'' совпадает с пучком P'. По теореме 3 § 19 при движении f орицикл γ переходит в орицикл, который является траекторией пучка P' и проходит через точку A', т. е. γ переходит в γ'. ■

В заключение этого параграфа введем еще одно понятие, связанное с орициклами. Два орицикла называются *параллельными*, если они являются траекториями одного и того же пучка параллельных прямых (рис. 81). Отсюда следует, что два параллельных орицикла имеют одни и те же оси и не имеют ни одной общей точки. Из предыдущей теоремы следует, что *любые два параллельных орицикла равны друг другу*.

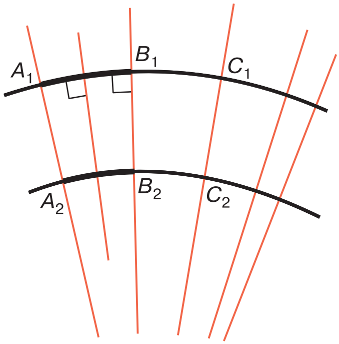


Рис. 81

Каждая ось двух параллельных орициклов пересекает как один, так и другой орицикл в одной и только в одной точке. Можно доказать, что отрезки осей двух параллельных орициклов с концами на данных орициклах (отрезки $A_1A_2, B_1B_2, \ldots$ на рис. 81) равны друг другу (см. задачу 31 к этой главе). Это свойство, а также равенство параллельных орициклов аналогичны соответствующим свойствам параллельных прямых на евклидовой плоскости.

Аналогом параллельных орициклов являются две концентрические окружности для пучка пересекающихся прямых и две эквидистанты, имеющие общую базу, для пучка расходящихся прямых. Очевидно, такие пары циклических линий не обладают указанными выше свойствами параллельных орициклов.

Задачи к главе 4

1. Имеют ли два данных пучка прямых общие ненаправленные прямые и если имеют, то сколько? Рассмотреть все возможные случаи в зависимости от того, к каким типам пучков принадлежат данные пучки.
2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle B$. Доказать, что серединный перпендикуляр к отрезку AB принадлежит пучку, которому принадлежат прямые: а) AD и BC; б) содержащие биссектрисы углов A и B.
3. На плоскости задан пучок прямых P и прямая l, не принадлежащая этому пучку. Существует ли прямая пучка, перпендикулярная к прямой l, и сколько таких прямых, если P — пучок: а) пересекающихся прямых; б) параллельных прямых; в) расходящихся прямых?
4. Сколько общих точек могут иметь две циклические линии? Ответ обосновать и привести примеры, соответствующие каждому случаю.
5. Дополнительные лучи одной прямой, исходящие из точки O, являются лучами двух циклических линий. Доказать, что O является единственной общей точкой данных циклических линий.
6. Доказать, что множество всех внутренних точек относительно окружности есть открытое выпуклое множество, а множество всех внешних точек относительно окружности — открытое невыпуклое множество.
7. Доказать, что диаметр окружности, перпендикулярный к хорде, проходит через середину хорды;

обратно: прямая, проходящая через середину хорды и перпендикулярная к ней, проходит через центр окружности.

8. Доказать, что треугольник ABC, вписанный в окружность с диаметром AB, является остроугольным, причем $\angle A < \angle C$ и $\angle B < \angle C$.
9. На рис. 63 углы A и C опираются на одну и ту же дугу BD, хорды AB и CD перпендикулярны к диаметру и $AB < CD$. Доказать, что $\angle A > \angle C$.
10. Угол вписан в окружность, центр которой лежит на одной из сторон угла или внутри угла. Доказать, что мера угла меньше половины дуги, на которую опирается угол.
11. Доказать, что существуют остроугольные, прямоугольные и тупоугольные треугольники, около которых нельзя описать окружность.
12. Доказать, что если около тупоугольного или прямоугольного треугольника можно описать окружность, то все стороны треугольника меньше диаметра описанной окружности.
13. Доказать, что прямая является секущей, если она проходит через: а) внутреннюю точку относительно окружности; б) конец диаметра и не перпендикулярна к диаметру; в) точку, лежащую на хорде окружности.
14. Доказать, что все точки касательной к окружности, за исключением точки касания, принадлежат внешней области относительно окружности.
15. Расстояние от центра окружности до прямой l больше радиуса окружности. Доказать, что все точки прямой l являются внешними относительно окружности.
16. Точка A окружности ω_1 является внутренней точкой относительно окружности ω_2, а точка B окружности ω_2 — внутренней точкой относительно окружности ω_1. Доказать, что окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в двух точках.
17. Расстояние между центрами двух окружностей равно сумме их радиусов. Доказать, что окружности имеют только одну общую точку, которая лежит между

их центрами, и что все точки каждой из окружностей, отличные от их общей точки, принадлежат внешней области относительно другой окружности.

18. Даны две окружности (O_1, r_1) и (O_2, r_2), причем $O_1O_2 = r_1 - r_2 > 0$. Доказать, что данные окружности имеют только одну общую точку, которая лежит на прямой O_1O_2, и что все точки окружности (O_2, r_2), отличные от общей точки окружности, принадлежат внутренней области относительно окружности (O_1, r_1).
19. Доказать, что существует равносторонний треугольник, сторона которого равна данному произвольному отрезку.
20. Даны два отрезка PQ и RS, причем $PQ > \frac{1}{2}RS$. Доказать, что существует равнобедренный треугольник, основание которого равно отрезку RS, а боковая сторона — отрезку PQ.
21. Доказать, что две окружности (O_1, r_1) и (O_2, r_2) не имеют общих точек, если $O_1O_2 > r_1 + r_2$ или $O_1O_2 < |r_1 - r_2|$.
22. Прямая d проходит через внутреннюю точку относительно эквидистанты с базой l. Доказать, что если прямые d и l параллельны или пересекаются, то прямая d пересекает эквидистанту в одной и только в одной точке, а если d и l — расходящиеся прямые, то прямая d пересекает эквидистанту в двух точках.
23. Прямая d и база данной эквидистанты являются расходящимися прямыми, расстояние между которыми равно высоте эквидистанты. Доказать, что: а) прямая d — касательная эквидистанты; б) все точки касательной, кроме точки касания, являются внешними точками относительно эквидистанты.
24. Доказать, что множество всех внутренних точек относительно эквидистанты есть открытое выпуклое множество, а множество всех внешних точек — открытое невыпуклое множество.
25. Доказать, что две эквидистанты с общей базой и разными высотами не имеют ни одной общей точки, а две эквидистанты, базы которых пересекаются,

а высоты равны, имеют одну и только одну общую точку.

26. Доказать, что существует вырожденный треугольник с равными углами: а) сторона которого равна данному отрезку; б) углы которого равны данному острому углу.
27. Прямая M_0T — касательная к орициклу в точке M_0 а M_0M_1 — луч орицикла. Доказать, что все точки внутренней области относительно данного орицикла принадлежат полуплоскости M_0T, которой принадлежит луч M_0M_1.
28. Доказать, что если один конец отрезка принадлежит внутренней области, а другой конец — внешней области относительно орицикла, то отрезок имеет общую точку с орициклом.
29. Доказать, что через две произвольные точки A и B плоскости проходят две и только две предельные линии. Эти предельные линии симметричны относительно прямой AB.
30. Две предельные линии проходят через точку A, в которой касательные к этим линиям не совпадают. Доказать, что данные предельные линии имеют еще одну общую точку.
31. Доказать, что отрезки осей двух параллельных орициклов, соединяющие точки пересечения каждой оси с орициклами, равны друг другу.

Глава 5

ТРЕУГОЛЬНИКИ, ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ И ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

§ 25. Сумма углов треугольника

1. Треугольники на плоскости Лобачевского. В § 2 было отмечено, что понятие треугольника и определения элементов треугольника относятся к абсолютной геометрии. Там были рассмотрены признаки равенства треугольников, в частности признаки равенства прямоугольных треугольников, и были доказаны некоторые теоремы о треугольниках в рамках абсолютной геометрии. Ясно, что все эти теоремы имеют место и в геометрии Лобачевского. Однако в геометрии Лобачевского треугольники обладают рядом специфических свойств, которые мы рассмотрим в этой главе. Одной из важных теорем, относящихся к этой категории, является теорема 1 § 6 о сумме углов треугольника: на плоскости Лобачевского сумма углов треугольника меньше $2d$. Более того, сумма углов треугольника не является постоянной величиной. В этом параграфе мы исследуем более подробно этот вопрос и докажем основную теорему существования треугольника с данной суммой углов.

2. Четырехугольник Саккери, присоединенный к треугольнику. Пусть ABC — произвольный треугольник, а MN — прямая, проходящая через середины M и N сторон AC и BC. Проведем перпендикуляры AP, BQ и CR к прямой MN и докажем, что они равны друг другу.

Рассмотрим сначала случай, когда точка M не совпадает с точкой P, а точка N — с точкой Q (рис. 82, a). Прямоугольные треугольники APM и CRM равны, так как они имеют равные гипотенузы и равные углы при общей вершине M, поэтому $AP = CR$. Аналогично из равенства $\triangle BQN = \triangle CRN$ следует, что $BQ = CR$, следовательно, $AP = BQ$. Читатель легко убедится в том, что это равенство справедливо и в том случае, когда совпадают точки P и M (рис. 82, *б*) или точки Q и N.

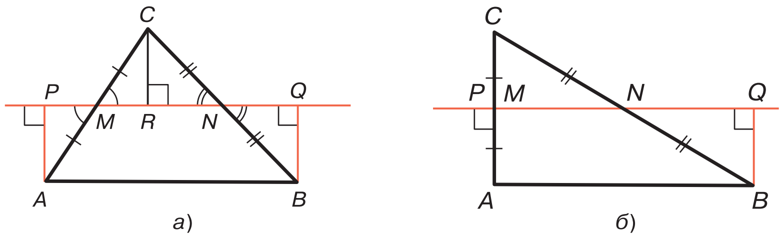


Рис. 82

Таким образом, $ABQP$ — четырехугольник Саккери с основанием PQ. Будем говорить, что этот четырехугольник *присоединен к треугольнику* ABC *к его стороне* AB.

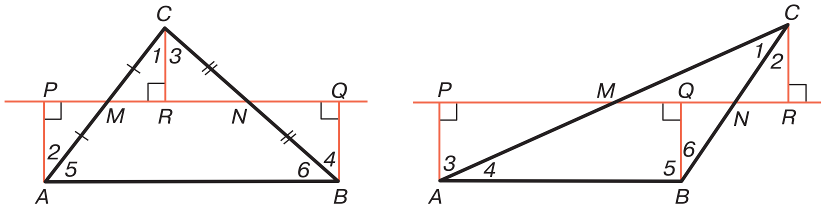
Ясно, что к треугольнику ABC можно присоединить еще два четырехугольника к сторонам BC и CA. Итак, к каждому треугольнику можно присоединить три четырехугольника Саккери.

Докажем теорему об острых углах четырехугольника Саккери, присоединенного к данному треугольнику.

Теорема 1. *Каждый из острых углов четырехугольника, присоединенного к данному треугольнику* ABC, *равен* $\frac{1}{2}\sigma(ABC)$.

□ Пусть $ABQP$ — четырехугольник, присоединенный к треугольнику ABC к его стороне AB (рис. 83). Докажем, что $\widehat{BAP} = \widehat{ABQ} = \frac{1}{2}\sigma(ABC)$.

Рассмотрим сначала случаи, когда середины M и N отрезков AC и BC лежат на отрезке PQ, и воспользуемся цифровыми обозначениями углов, которые указаны на рис. 83, *а*. На этом рисунке CR — перпендикуляр к прямой MN. Так как $\triangle APM = \triangle CRM$ и $\triangle BQN = \triangle CRN$, то $\angle 1 = \angle 2$,



а) б)

Рис. 83

$\angle 3 = \angle 4$. Но $\widehat{PAB} = \widehat{2} + \widehat{5}$, $\widehat{QBA} = \widehat{4} + \widehat{6}$, поэтому $\widehat{PAB} + \widehat{QBA} = \widehat{2} + \widehat{5} + \widehat{4} + \widehat{6} = \widehat{1} + \widehat{3} + \widehat{5} + \widehat{6} = a(ABC)$. Отсюда, учитывая, что $\widehat{PAB} = \widehat{QBA}$, получаем

$$\widehat{PAB} = \frac{1}{2}\sigma(ABC), \quad \widehat{QBA} = \frac{1}{2}\sigma(ABC). \tag{1}$$

Читатель легко убедится в том, что эти равенства верны при любом другом расположении точек P, R, Q на прямой MN. Например, на рис. 83, *б* в силу равенства соответствующих треугольников имеем: $\widehat{1} + \widehat{2} = \widehat{3}$, $\widehat{2} = \widehat{6}$, поэтому $\widehat{PAB} + \widehat{QBA} = (\widehat{3} + \widehat{4}) + \widehat{5} = \widehat{1} + \widehat{2} + \widehat{4} + \widehat{5} = \widehat{1} + \widehat{4} + \widehat{5} + \widehat{6} = \sigma(ABC)$. Так как $\widehat{PAB} = \widehat{QBA}$, то мы снова приходим к равенству (1). ■

Возникает вопрос: существует ли треугольник, к которому присоединен данный четырехугольник Саккери? Для ответа на этот вопрос сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если $ABQP$ — произвольный четырехугольник Саккери с основанием PQ, а ABC — треугольник, середина одной из сторон которого AC или BC лежит на прямой PQ, то четырехугольник $ABQP$ присоединен к треугольнику ABC к его стороне AB.*

□ Пусть, например, середина M стороны AC треугольника ABC лежит на прямой PQ. Достаточно доказать, что середина стороны BC также лежит на прямой PQ. Так как $A, B \mathbin{\ddot{-}} PQ$, а $A, C \div PQ$, то $B, C \div PQ$. Обозначим через N точку пересечения отрезка BC с прямой PQ и докажем, что N — середина отрезка BC (рис. 84).

Для этого проведем перпендикуляр CR к прямой PQ. Возможны два случая.

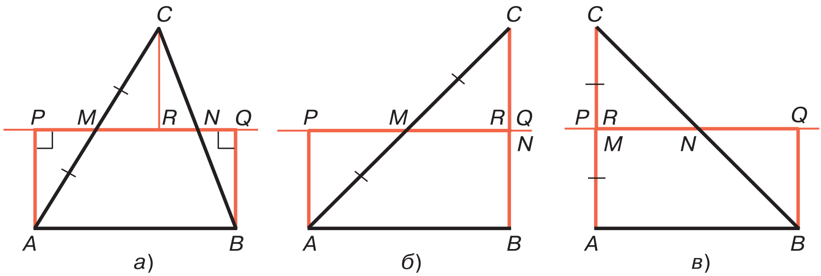


Рис. 84

а) Точка R не совпадает с точкой P (рис. 84, *а*). Тогда P, M и R — попарно различные точки. Прямоугольные треугольники PMA и RMC равны по гипотенузе и острым углам при общей вершине M, поэтому $AP = CR$. Но $PA = QB$, поэтому $CR = QB$. Если точки R и Q не совпадают, то R, N и Q — попарно различные точки и $\triangle RCN = \triangle QBN$ (см. § 2, теорема 10, свойство 3°), следовательно, $CN = NB$, т. е. N — середина отрезка BC. Если точки R и Q совпадают (рис. 84, *б*), то точка N совпадает с этими точками, поэтому $CN = NB$, т. е. и в этом случае N — середина отрезка BC.

б) Точки R и P совпадают (рис. 84, *в*). Тогда и точка M совпадает с этими точками. Так как $AP = BQ$, то $PC = QB$. Отсюда мы заключаем, что $\triangle PCN = \triangle QBN$ (см. § 2, теорема 10, свойство 3°), поэтому $CN = NB$, т. е. N — середина отрезка BC. ■

Следующая теорема дает ответ на поставленный выше вопрос.

Теорема 2. *Существует бесконечное множество треугольников с общим основанием AB, к каждому из которых присоединен данный произвольный четырехугольник Саккери $ABQP$ с основанием PQ. При этом все эти треугольники имеют одну и ту же сумму углов, равную* $2\widehat{A} = 2\widehat{B}$.

□ Возьмем на прямой PQ произвольную точку M, затем точку C, симметричную точке A относительно точки M, и проведем отрезки BC и AC (см. рис. 84, a). По лемме 1 четырехугольник $ABQP$ присоединен к треугольнику ABC к стороне AB. Так как точку M на прямой PQ можно взять произвольно, то искомых треугольников ABC бесконечное множество.

Второе утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 1. ■

Напомним, что отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника. На евклидовой плоскости средняя линия треугольника параллельна одной из сторон и равна половине этой стороны. На плоскости Лобачевского это утверждение неверно. Предлагаем читателю, используя четырехугольник, присоединенный к данному треугольнику, самостоятельно решить следующую задачу.

Задача. Доказать, что средняя линия MN треугольника ABC, соединяющая середины боковых сторон AC и BC, меньше половины основания и MN и AB — расходящиеся прямые.

3. Теорема существования треугольников с данной суммой углов. Известно, что суммы углов треугольников, следовательно, и дефекты треугольников не являются постоянными величинами. Исследуем вопрос о пределах изменения этих величин. Докажем сначала лемму.

Лемма 2. *Если* $\Pi\left(\frac{a}{2}\right) < \varphi < d$, *то существует четырехугольник Саккери* $ABCD$ *с основанием* AB, *такой, что* $\widehat{C} = \widehat{D} = \varphi$ *и* $CD = a$.

□ Возьмем отрезок CD длины a и обозначим λ одну из полуплоскостей с границей CD. Далее проведем лучи CC_1 и DD_1 полуплоскости λ так, чтобы $\widehat{DCC_1} = \widehat{CDD_1} = \varphi$ (рис. 85). Докажем, что CC_1 и DD_1 — расходящиеся прямые. Для этого проведем серединный перпендикуляр OO_1 к отрезку CD (O — середина отрезка CD, а $O_1 \in \lambda$) и луч CE, параллельный прямой $\overline{OO_1}$.

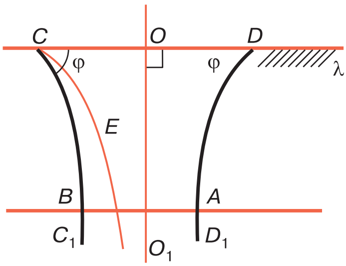


Рис. 85

Так как $\widehat{OCE} = \Pi(CO) = \Pi\left(\dfrac{a}{2}\right)$, $\widehat{OCC_1} = \varphi$ и по условию $\varphi > \Pi\left(\dfrac{a}{2}\right)$, то $\angle OCC_1 > \angle OCE$. Отсюда следует, что CE — внутренний луч угла OCC_1, т.е. угла DCC_1. Следовательно, CC_1 и DD_1 — расходящиеся прямые и имеют общий перпендикуляр AB (см. рис. 85). Предлагаем читателю, используя неравенство $\varphi < d$, самостоятельно доказать, что точки A и B лежат соответственно на лучах DD_1 и CC_1. По теореме 3 § 13 $ABCD$ — четырехугольник Саккери, который удовлетворяет условиям леммы. ■

Докажем теперь следующую основную теорему.

Теорема 3. *Если* $0 < \varphi < 2d$, *то существует бесконечное множество не равных друг другу треугольников, сумма мер углов каждого из которых равна* φ.

□ По условию $0 < \dfrac{\varphi}{2} < d$, поэтому согласно теореме § 12 существует положительное число a, такое, что $\Pi(a) = \dfrac{\varphi}{2}$. Возьмем отрезок AB так, чтобы $\dfrac{AB}{2} > a$, тогда $\Pi\left(\dfrac{AB}{2}\right) < \dfrac{1}{2}\varphi < d$. По лемме 2 существует четырехугольник Саккери $ABPQ$ с основанием PQ, такой, что $\widehat{A} = \widehat{B} = \dfrac{\varphi}{2}$. По теореме 2 существует бесконечное множество треугольников с общим основанием AB, к каждому из которых присоединен четырехугольник $ABPQ$, причем все эти треугольники имеют одну и ту же сумму углов σ, где $\sigma = 2\widehat{A} = 2\widehat{B} = \varphi$. ■

Следствие. *Если $0 < \delta < 2d$, то существует бесконечное множество не равных друг другу треугольников, дефект каждого из которых равен δ.*

□ Пусть $\varphi = 2d - \delta$. Данные неравенства $0 < \delta < 2d$ эквивалентны неравенствам $0 < 2d - \varphi < 2d$. Отсюда следует, что $0 < \varphi < 2d$. По доказанной теореме существует бесконечное множество не равных друг другу треугольников, сумма углов каждого из которых равна φ, поэтому дефект каждого из них равен $2d - \varphi = \delta$. ■

4. Неравенства между суммой углов треугольника и длинами его сторон.

Теорема 4. *Если σ — сумма углов треугольника, а c — длина одной из его сторон, то*

$$2\Pi\left(\frac{c}{2}\right) < \sigma < 2d. \qquad (2)$$

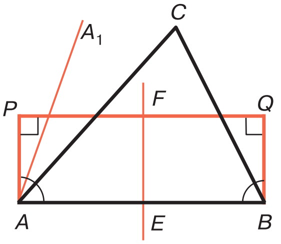


Рис. 86

□ Пусть ABC — данный треугольник, $AB = c$. Рассмотрим четырехугольник $ABQP$, присоединенный к стороне AB данного треугольника (рис. 86). По теореме 1 $\widehat{A} = \widehat{B} = \frac{1}{2}\sigma$. Если EF — прямая, проходящая через середины E и F сторон AB и PQ, то по свойству 13.2° $EF \perp AB$, поэтому AP и EF — расходящиеся прямые. Отсюда следует, что луч AA_1, параллельный лучу EF, проходит внутри угла PAE, следовательно, $\widehat{A} > \widehat{EAA_1} = \Pi\left(\frac{c}{2}\right)$. Так как $\widehat{A} = \frac{1}{2}\sigma$, то $\frac{1}{2}\sigma > \Pi\left(\frac{c}{2}\right)$ или

$\sigma > 2\Pi\left(\frac{c}{2}\right)$.

Неравенство $\sigma < 2d$ непосредственно следует из теоремы 1 § 6 о сумме углов треугольника. Итак, имеют место неравенства (2). ■

В заключение докажем интересную теорему о сумме углов треугольника, который отсечен от данного треугольника.

Теорема 5. *Если ABC — произвольный треугольник и $2d > \varphi_0 > \sigma(ABC)$, то на отрезке AC существует точка C_0, такая, что $\sigma(ABC_0) = \varphi_0$.*

□ Обозначим через $APQB$ четырехугольник, который присоединен к треугольнику ABC к стороне AB, а через λ — полуплоскость с границей AB, содержащую точки P и Q. Проведем лучи AA_1 и BB_1, принадлежащие полуплоскости λ, так, чтобы $\widehat{A_1AB} = \widehat{B_1BA} = \frac{\varphi_0}{2}$. По теореме 1 $\widehat{PAB} = \widehat{QBA} = \frac{1}{2}\varphi$, где $\varphi = \sigma(ABC)$, а по условию $2d > \varphi_0 > \varphi$, или $d > \frac{\varphi_0}{2} > \frac{\varphi}{2}$. Отсюда следует, что углы A_1AB и B_1BA острые и лучи AA_1 и BB_1 — расходящиеся прямые (рис. 87) и, следовательно, имеют общий перпендикуляр $P'Q'$, который принадлежит полуплоскости λ. По теореме 3 § 13 $AP'Q'B$ — четырехугольник Саккери с основанием $P'Q'$. Серединный перпендикуляр l к отрезку AB является также серединным перпендикуляром к отрезкам PQ и $P'Q'$.

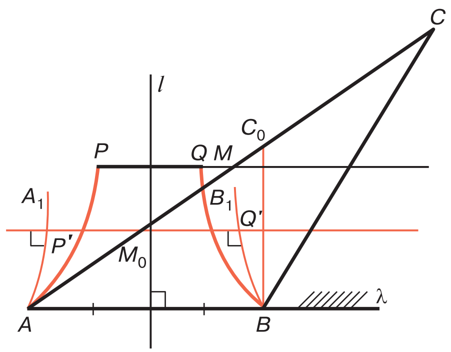


Рис. 87

Читатель без труда, используя рис. 87, убедится в том, что прямые PQ и $P'Q'$ не совпадают, поэтому они являются расходящимися прямыми, и прямые PQ и AB принадлежат разным полуплоскостям с общей границей $P'Q'$.

Середина M отрезка AC лежит на прямой PQ, поэтому прямая $P'Q'$ пересекает отрезок AM в некоторой точке M_0. Обозначим через C_0 точку, симметричную точке A относительно M_0, и рассмотрим треугольник AC_0B. Ясно, что точка C_0 лежит на отрезке AC. По лемме 1 четырехугольник $AP'Q'B$ присоединен к треугольнику ABC_0, и поэтому по теореме 1 $\frac{1}{2}\varphi_0 = \frac{1}{2}\sigma(ABC_0)$, т. е. $\sigma(ABC_0) = \varphi$.

■

§ 26. Замечательные точки и прямые треугольника

1. Замечательные прямые и точки треугольника. В § 2 было отмечено, что понятия биссектрис, высот и медиан треугольника относятся к абсолютной геометрии, поэтому все эти понятия являются понятиями геометрии Лобачевского.

Замечательными прямыми треугольника называются прямые, содержащие биссектрисы, высоты, медианы треугольника, а также прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника и серединные перпендикуляры к сторонам треугольника. Точки пересечения соответствующих групп замечательных прямых называются *замечательными точками* треугольника.

В этом и следующем параграфах мы покажем, что отдельные свойства взаимного расположения замечательных прямых на плоскости Лобачевского те же, что и на евклидовой плоскости.

Однако в ряде случаев, как будет показано ниже, на плоскости Лобачевского имеется существенное отличие во взаимном расположении отдельных групп замечательных прямых.

2. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника. Описанная циклическая линия. В § 18 была доказана теорема 2, согласно которой серединные перпендикуляры к трем сторонам треугольника принадлежат одному пучку, причем существуют треугольники, серединные перпендикуляры к сторонам которых принадлежат каждому из трех типов пучков: пучку пересекающихся прямых, пучку параллельных прямых и пучку расходящихся прямых.

Взаимное расположение серединных перпендикуляров к сторонам треугольника связано с понятием циклической линии, описанной около треугольника. Так называется циклическая линия, на которой лежат все три вершины треугольника. Согласно теореме 4 § 19 через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна циклическая линия. Отсюда следует важный вывод: *около каждого треугольника можно описать одну и только одну циклическую линию*. При этом согласно следствию теоремы 4 § 19 серединные перпендикуляры p, q и r к сторонам данного треугольника ABC являются осями этой циклической линии, следовательно, прямые p, q и r принадлежат одному пучку. Возможны три случая:

а) прямые p, q и r принадлежат пучку пересекающихся прямых, т. е. имеют общую точку O. В этом случае γ является окружностью с центром O;

б) прямые p, q и r принадлежат пучку расходящихся прямых с базой l. В этом случае γ является эквидистантой с базой l;

в) прямые p, q и r принадлежат пучку параллельных прямых. В этом случае γ является орициклом.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Около любого треугольника можно описать одну и только одну циклическую линию γ. При этом если серединные перпендикуляры p, q и r к сторонам треугольника пересекаются в точке O, то γ — окружность с центром O; если прямые p, q и r принадлежат пучку расходящихся прямых с базой l, то γ — эквидистанта с базой l; а если они принадлежат пучку параллельных прямых, то γ — орицикл.*

3. Биссектрисы углов и внешних углов треугольника. Напомним теорему о точке пересечения биссектрис треугольника.

Теорема 2. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

Эта теорема является теоремой абсолютной геометрии. Ее доказательство основано на свойстве 1.2° и на теореме 3 § 3 о биссектрисе угла. При доказательстве теоремы не используется аксиома параллельных прямых и ее следствия (см. [1], § 17, теорема 2), поэтому теорема 2 является также теоремой геометрии Лобачевского.Пользуясь теоремой 2, легко доказать следующую теорему об окружности, вписанной в треугольник (см. [1], § 49, теорема 1).

Теорема 3. *В любой треугольник можно вписать одну и только одну окружность.*

Теорема верна также и на плоскости Лобачевского.

В евклидовой геометрии имеет место еще одна теорема о биссектрисах угла и внешних углов треугольника: три прямые, одна из которых содержит биссектрису данного угла треугольника, а две другие — биссектрисы внешних углов треугольника, не смежных с данным, пересекаются в одной точке (см. [11], теорема 60). В геометрии Лобачевского утверждение этой теоремы выполняется не для любого треугольника. Соответствующая теорема здесь формулируется так:

Теорема 4. *Прямая, содержащая биссектрису данного угла треугольника, и две другие прямые, которые содержат биссектрисы внешних углов треугольника, не смежных с данным, принадлежат одному пучку.*

□ Пусть ABC — данный треугольник, l_1 — прямая, содержащая биссектрису угла A, а l_2 и l_3 — прямые, содержащие биссектрисы внешних углов треугольника при вершинах B и C. Докажем, что прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат одному пучку. Возможны три случая:

а) Прямые l_2 и l_3 пересекаются в некоторой точке O (рис. 88, *а*). По теореме 3 § 3 $OH_2 = OH_1$ и $OH_1 = OH_3$, где OH_1, OH_2 и OH_3 — перпендикуляры, проведенные соответственно к прямым BC, CA и AB, поэтому $OH_2 = OH_3$. По той же теореме точка O лежит на прямой l_1, т. е. прямые l_1, l_2, l_3 принадлежат пучку пересекающихся прямых с центром O.

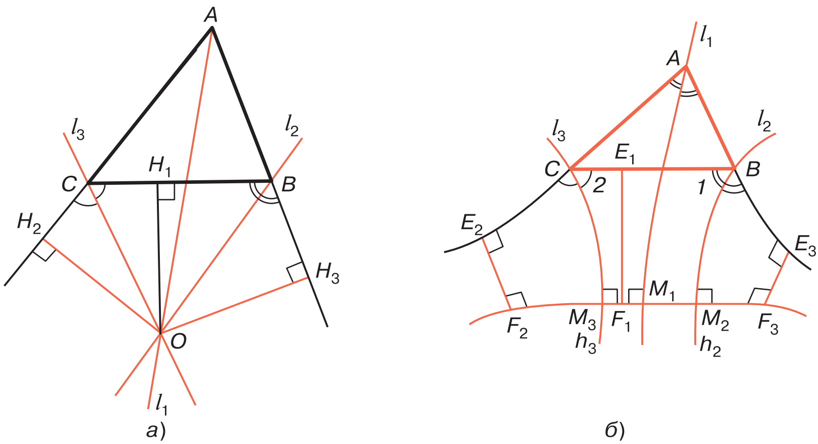


Рис. 88

б) Прямые l_2 и l_3 являются расходящимися прямыми. Обозначим через h_2 и h_3 лучи этих прямых, исходящие из точек B и C и являющиеся сторонами острых углов, которые на рис. 88, *б* обозначены цифрами 1 и 2. Тогда общий перпендикуляр прямых l_2 и l_3 пересекает лучи h_2 и h_3 в некоторых точках M_2 и M_3, причем M_2M_3 и BC — расходящиеся прямые (см. задачу 9).

Прямые CA и CB симметричны относительно прямой l_3, поэтому прямые AC и M_2M_3 также являются расходящимися прямыми. Точно так же доказывается, что AB и M_2M_3 — расходящиеся прямые. Итак, каждая из прямых, содержащих стороны треугольника ABC, расходится с прямой M_2M_3, поэтому все они лежат в одной полуплоскости с границей M_2M_3 (в той же полуплоскости, что и точка A).

Пусть E_1F_1, E_2F_2 и E_3F_3 соответственно общие перпендикуляры пар расходящихся прямых M_2M_3, BC; M_2M_3, AC и M_2M_3, AB (см. рис. 88, *б*). Так как при симметрии относительно прямой l_3 расходящиеся прямые CB и M_2M_3 переходят соответственно в прямые AC и M_2M_3, то общий перпендикуляр E_1F_1 прямых CB и M_2M_3 переходит в общий перпендикуляр E_2F_2

прямых AC и M_2M_3, следовательно, $E_1F_1 = E_2F_2$. Аналогично доказывается, что $E_1F_1 = E_3F_3$, следовательно, $E_2F_2 = E_3F_3$.

Прямая l_1 не пересекает отрезки BM_2 и CM_3, так как в противном случае точка пересечения принадлежала бы всем трем прямым l_1, l_2 и l_3, что невозможно. Отсюда, учитывая, что прямая l_1 пересекает отрезок BC, мы заключаем, что эта прямая пересекает отрезок M_2M_3 в некоторой точке M_1. Двупрямоугольники $AM_1F_2E_2$ и $AM_1F_3E_3$ равны, так как у них основания F_2E_2 и F_3E_3 равны, сторона AM_1 общая и $\angle E_2AM_1 = \angle E_3AM_1$ (см. задачу 12), следовательно, $\angle AM_1F_2 = \angle AM_1F_3$. Так как эти углы смежные, то они прямые, т. е. $l_1 \perp M_2M_3$. Итак, прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат одному пучку расходящихся прямых с базой M_2M_3.

в) Прямые l_2 и l_3 параллельны. Прямая l_1 пересекает отрезок BC и, как это было отмечено в пункте б), не пересекает ни одну из прямых l_2 и l_3, поэтому прямая l_1 принадлежит пучку параллельных прямых, определяемому прямыми l_2 и l_3 (см. лемму § 10). ■

Замечание. Нетрудно доказать, что на плоскости Лобачевского существуют треугольники, для которых указанные в теореме прямые l_1, l_2, l_3 принадлежат каждому из трех типов пучков (см. задачу 10).

4. Вневписанные циклические линии треугольника. *Вневписанной циклической линией треугольника* будем называть такую циклическую линию, которая касается всех трех прямых, содержащих стороны треугольника, причем одна из точек касания лежит на стороне треугольника, а две другие точки касания — на продолжениях двух других сторон. Понятие вневписанной циклической линии является обобщением понятия вневписанной окружности треугольника евклидовой плоскости (см. [1], § 50).

Пользуясь теоремой 4, нетрудно доказать, что каждый треугольник имеет три вневписанные циклические линии. Каждая сторона треугольника касается одной и только одной из этих линий*. В самом деле, пусть ABC — данный треугольник, l_1 — прямая, содержащая биссектрису угла A, а l_2 и l_3 — прямые, содержащие биссектрисы внешних углов при вершинах B и C. По теореме 4 прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат одному пучку. Возможны три случая:

а) Прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат пучку пересекающихся прямых с центром O. В этом случае $OH_1 = OH_2 = OH_3$, где OH_1, OH_2 и OH_3 — перпендикуляры, проведенные к прямым BC, CA и AB. Окружность с центром O радиуса OH_1 является вневписанной окружностью, которая касается отрезка BC (рис. 89, *а*).

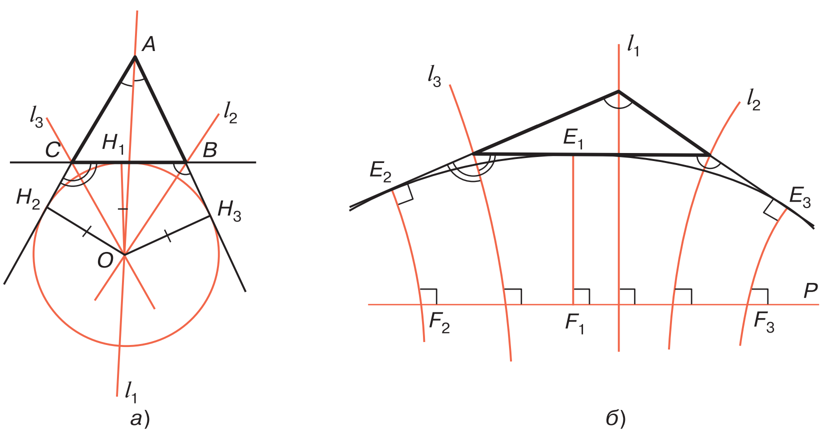


Рис. 89

б) Прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат пучку расходящихся прямых с базой p. При доказательстве теоремы 4 было показано, что $E_1F_1 = E_2F_2 = E_3F_3$, где E_1F_1, E_2F_2 и E_3F_3 — общие перпендикуляры пар расходящихся прямых p, BC; p, AC и p, AB (см. рис. 89, *б*), причем прямые AB, BC и AC лежат в одной полуплоскости с границей p. Эквидистанта с базой p и высотой E_1F_1

* Говорят, что *отрезок касается циклической линии*, если прямая, содержащая этот отрезок, является касательной к циклической линии и точка касания лежит на отрезке.

является вневписанной эквидистантой с базой p. Она касается отрезка BC.

в) Прямые l_1, l_2 и l_3 принадлежат пучку параллельных прямых. Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что в этом случае существует вневписанный орицикл с осями l_1, l_2 и l_3, который касается отрезка BC.

5. Медианы треугольника. На плоскости Лобачевского, так же как и на евклидовой плоскости, медианы любого треугольника пересекаются в одной точке. Доказательство этой теоремы в евклидовой геометрии, как известно, основано на теории подобия, т. е. при доказательстве теоремы существенно используется аксиома параллельных линий (см., например, [1], § 42), поэтому оно не может быть перенесено на плоскость Лобачевского. Здесь доказательство теоремы о пересечении медиан треугольника значительно сложнее. Теорема может быть доказана либо с использованием тригонометрических формул, либо с использованием теорем стереометрии. Во второй части настоящего пособия мы докажем эту теорему первым способом.

§ 27. Взаимное расположение прямых, содержащих высоты треугольника

1. Высоты треугольника. Мы отмечали, что понятие высоты треугольника относится к абсолютной геометрии. В рамках этой геометрии рассмотрим некоторые свойства высот треугольника.

27.1°. Если в треугольнике ABC углы B и C острые, то основание H высоты AH треугольника лежит на стороне BC, а если один из этих углов тупой, то H не принадлежит отрезку BC.

□ Рассмотрим сначала случай, когда углы B и C острые. Ясно, что точка H не совпадает ни с одной из точек B или C. Если предположить, что точка H не принадлежит отрезку BC, например H–B–C, то по теореме о внешнем угле треугольника $\angle ABC$ тупой, что противоречит условию. Следовательно, точка H лежит на отрезке BC.

Пусть теперь один из углов B и C, например $\angle B$, тупой. Тогда точка H не может лежать на отрезке BC, так как при этом предположении в треугольнике ABH $\angle ABH$ острый, что невозможно. В самом деле, этот угол совпадает с углом ABC, который по предположению тупой. ■

Из доказанного свойства непосредственно следует:

27.2°. В остроугольном треугольнике основания всех трех высот лежат на соответствующих сторонах треугольника, а в тупоугольном треугольнике основание высоты, проведенной из вершины тупого угла, лежит на противоположной стороне, а основания двух других высот не принадлежат сторонам треугольника.

Таким образом, если ABC — остроугольный или тупоугольный треугольник, AH_1, BH_2 и CH_3 — его высоты, то либо все три точки H_1, H_2 и H_3 лежат на соответствующих сторонах треугольника, либо одна из них лежит на стороне треугольника, а две другие точки не принадлежат двум другим сторонам. Отсюда, учитывая предложение 1.1° Паша, получаем:

27.3°. Основания трех высот остроугольного или тупоугольного треугольника не лежат на одной прямой.

Пользуясь свойством 27.2°, читатель без труда самостоятельно докажет следующее утверждение:

27.4°. Если в треугольнике ABC с высотами AH_1, BH_2 углы A и B острые, а угол C не прямой, то отрезок H_1H_2 не имеет общих точек с прямой AB.

2. Теорема о прямых, содержащих высоты треугольника. На евклидовой плоскости прямые, содержащие высоты любого треугольника, пересекаются в одной точке (см. [1], § 49, теорема 3). На плоскости Лобачевского картина несколько иная: здесь имеет место теорема, аналогичная теореме 2 § 18 о серединных перпендикулярах к сторонам треугольника.

Теорема. *Три прямые, содержащие высоты треугольника, принадлежат одному пучку. При этом если треугольник остроугольный, то сами высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

□ Пусть AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC. Если этот треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C, то точки H_1 и H_2 совпадают с точкой C, поэтому прямые AH_1, BH_2 и CH_3 имеют общую точку C, т. е. принадлежат пучку пересекающихся прямых. Рассмотрим общий случай, когда в треугольнике ABC ни один из углов не прямой. Пусть углы A и B треугольника острые. Тогда по свойству 27.4° отрезок H_1H_2 не имеет общих точек с прямой AB. Возможны два случая, каждый из которых рассмотрим в отдельности.

а) Угол C острый, т. е. треугольник ABC остроугольный. В этом случае по свойству 27.2 B–H_1–C и A–H_2–C, поэтому высоты AH_1 и BH_2 пересекаются в некоторой точке H и углы HH_1H_2 и HH_2H_1, острые (рис. 90).

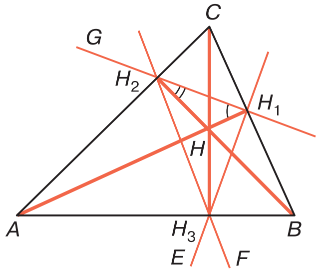


Рис. 90

Проведем прямую H_1E, симметричную прямой H_1H_2 относительно прямой AH_1, и другую прямую H_2F, симметричную прямой H_1H_2 относительно прямой BH_2. Точка A лежит на биссектрисе угла H_2H_1E, поэтому она равноудалена от прямых H_1H_2 и H_1E. С другой стороны, так как H_2B — ось симметрии прямых H_1H_2 и H_2F, то перпендикулярная к ней прямая AH_2 или

AC — ось симметрии тех же прямых, поэтому точка A равноудалена от прямых H_1H_2 и H_2F. Значит, точка A равноудалена от прямых H_2F и H_1E. Точно так же можно показать, что точка B равноудалена от тех же прямых H_2F и H_1E. Отсюда следует, что AB — ось симметрии прямых H_2F и H_1E. Эти прямые пересекаются в некоторой точке H_3, так как в противном случае прямая AB должна пересечь отрезок H_1H_2, что невозможно. Точка H_3 лежит на оси симметрии прямых H_2F и H_1E, т. е. H_3 — точка прямой AB.

Ясно, что точки H_1, H_2 и H_3 не лежат на одной прямой, тогда $H_1H_2H_3$ — некоторый треугольник, причем лучи H_1H и H_2H — биссектрисы углов H_1 и H_2 этого треугольника. По теореме 2 § 26 луч H_3H является биссектрисой угла H_3 того же треугольника. Отсюда мы заключаем, что H_3H — ось симметрии прямых H_1H_3 и H_2H_3, следовательно, $AB \perp H_3H$.

Отметим, наконец, что точка C равноудалена от прямых H_2H_3 и H_2H_1, так как она лежит на прямой AH_2, которая является осью симметрии этих прямых. Точно так же точка C равноудалена от прямых H_2H_1, и H_1H_3. Следовательно, точка C равноудалена от прямых H_2H_3 и H_1H_3, поэтому она лежит на оси симметрии этих прямых, т. е. на прямой H_3H (см. рис. 90). Таким образом, CH_3 — высота треугольника ABC. Итак, три высоты треугольника ABC имеют общую точку H.

б) Угол C тупой. По свойству 27.2° H_1–C–B и A–C–H_2, поэтому высоты AH_1 и BH_2 не имеют общих точек и углы CH_1H_2 и CH_2H_1 острые (рис. 91).

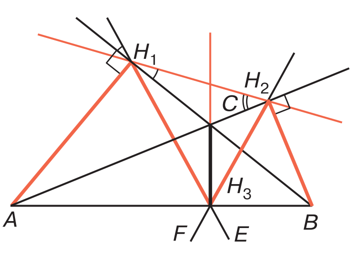


Рис. 91

Аналогично случаю а) проведем прямые H_1E и H_2F, симметричные прямой H_1H_2 относительно прямых BH_1 и AH_2. Аналогично случаю а) доказывается, что прямая AB — ось симметрии прямых H_1E и H_2F и что эти прямые пересекаются в некоторой точке H_3, лежащей на отрезке AB.

Так как по построению H_1A и H_2B — биссектрисы внешних углов при вершинах H_1 и H_2 треугольника $H_1H_2H_3$ и $H_1C \perp H_1A$, $H_2C \perp H_2B$, то H_1C и H_2C — биссектрисы углов H_1 и H_2 этого треугольника. Следовательно, по теореме 2 § 26 H_3C — биссектриса угла H_3 треугольника. Отсюда следует, что $H_3C \perp AB$, т. е. H_3C — высота треугольника ABC. По теореме 4 § 26 AH_1, BH_2 и CH_3 принадлежат одному пучку. ■

В ходе доказательства этой теоремы мы установили следующие интересные свойства треугольника $H_1H_2H_3$.

Следствие 1. *Если AH_1, BH_2, CH_3 — высоты остроугольного треугольника ABC, то лучи H_1A, H_2B и H_3C являются биссектрисами углов треугольника $H_1H_2H_3$.*

Следствие 2. *Если AH_1, BH_2, CH_3 — высоты треугольника ABC, у которого угол C тупой, то лучи H_1A и H_2B являются биссектрисами внешних углов при вершинах H_1 и H_2 треугольника $H_1H_2H_3$, а луч H_3C — биссектрисой угла H_3 этого треугольника.*

В заключение докажем, что существуют треугольники, для которых прямые, содержащие их высоты, принадлежат к каждому из трех типов пучков. Для остроугольного треугольника, как следует из доказанной теоремы, эти прямые принадлежат пучку пересекающихся прямых. Очевидно, то же утверждение верно для прямоугольного треугольника. Поэтому прямые, содержащие высоты треугольника, могут принадлежать пучку расходящихся или параллельных прямых только в том случае, когда треугольник тупоугольный.

Пусть $ABEF$ — четырехугольник Саккери с основанием EF, а AH_2 и BH_1 — перпендикуляры к прямым BE и AF (рис. 92). Так как углы A и B четырехугольника острые, то точка H_1 лежит на луче AF, а точка H_2 — на луче BF. Очевидно, отрезки AH_2 и BH_1 пересекаются в некоторой точке C. Рассмотрим треугольник ABC. Отрезки AH_1 и BH_2 — высоты этого треугольника, но прямые AH_1 и BH_2 имеют общий перпендикуляр FE, поэтому они расходящиеся прямые. По доказанной теореме прямые AH_1, BH_2, CH_3, где CH_3 — высота треугольника ABC, принадлежат пучку расходящихся прямых.

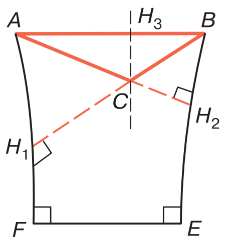


Рис. 92

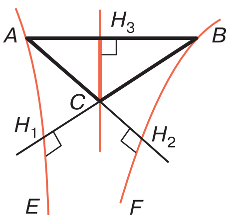


Рис. 93

Аналогично на рис. 93 изображен треугольник ABC, у которого прямые, содержащие высоты AH_1, BH_2 и CH_3, принадлежат пучку параллельных прямых. На этом рисунке $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$, AB — секущая равного наклона, углы BAE и ABF острые, AH_2 и BH_1 — перпендикуляры к прямым BF и AE, а C — точка пересечения отрезков AH_2 и BH_1.

Отметим, что не у каждого тупоугольного треугольника высоты принадлежат пучку расходящихся или параллельных прямых. Существует бесконечное множество тупоугольных треугольников, у каждого из которых прямые, содержащие высоты, принадлежат пучку пересекающихся прямых. В самом деле, на рис. 94 изображен остроугольный треугольник ABO с высотами AH_2, BH_1 и OH_3. Согласно доказанной теореме эти отрезки пересекаются в некоторой точке C. Так как точка C лежит на отрезке BH_1, а угол ACH_1 острый, то угол ACB тупой, т. е. ABC является тупоугольным треугольником.

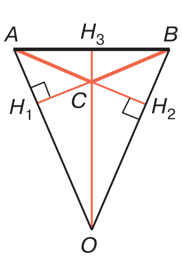


Рис. 94

Очевидно, отрезки AH_1, BH_2 и CH_3 — высоты этого треугольника. Они принадлежат пучку пересекающихся прямых с центром O.

§ 28. Основные виды выпуклых четырехугольников

Этот параграф посвящен изучению важнейших видов выпуклых четырехугольников на плоскости Лобачевского. В § 6 мы уже ввели понятие выпуклого четырехугольника, доказали теорему о сумме углов выпуклого четырехугольника, а в § 13 рассмотрели основные свойства двупрямоугольника и его частного вида — четырехугольника Саккери. Здесь мы рассмотрим сначала признаки равенства двупрямоугольников, затем изучим свойства других основных типов выпуклых четырехугольников.

1. Признаки равенства двупрямоугольников. Докажем теорему, выражающую признаки равенства двупрямоугольников.

Теорема 1. *Двупрямоугольники* $ABCD$ *и* $A'B'C'D'$ *с основаниями* AB *и* $A'B'$ *равны, если выполняется одно из следующих условий:*

1°. $AB = A'B'$ *и попарно равны боковые стороны.*
2°. $CD = C'D'$, $CB = C'B'$, $\angle C = \angle C'$ *или* $CD = C'D'$, $AD = A'D'$, $\angle D = \angle D'$.
3°. $CD = C'D'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = D'$.
4°. $CD = C'D'$, $AD = A'D'$, $BC = B'C'$.

□ 1°. Так как $\angle A = \angle A'$, то по аксиоме III_6 существует наложение f, при котором $A' = f(A)$, луч AB переходит в луч $A'B'$, луч AD — в луч $A'D'$. В силу равенств $AB = A'B'$ и $AD = A'D'$ имеем: $B' = f(B)$, $D' = f(D)$. Углы B и B' прямые, поэтому при наложении f луч BC переходит в луч $B'C'$, и в силу равенства $BC = B'C'$, $C' = f(C)$. Таким образом, вершины четырехугольника $ABCD$ переходят соответственно в вершины четырехугольника $A'B'C'D'$. По аксиоме III_4 отрезки AB, BC, CD, DA отображаются соответственно на отрезки

$A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$, следовательно, четырехугольник $ABCD$ отображается на четырехугольник $A'B'C'D'$, т. е. эти четырехугольники равны.

2°. Пусть $CD = C'D'$, $CB = C'B'$, $\angle C = \angle C'$. Проведем диагонали BD и $B'D'$ и рассмотрим треугольники BCD и $B'C'D'$ (рис. 95). Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $BD = B'D'$ и $\angle 1 = \angle 1'$. Отсюда следует, что $\angle 2 = \angle 2'$. Прямоугольные треугольники ABD и $A'B'D'$ равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $AB = A'B'$, $AD = A'D'$. По признаку 1° данные четырехугольники равны.

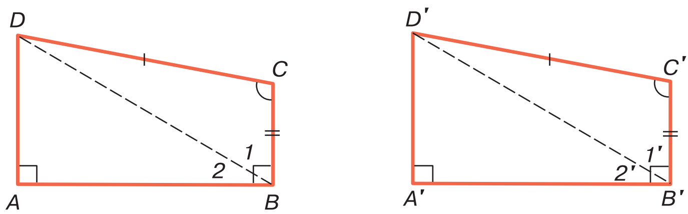


Рис. 95

3°. Так как $\angle C = \angle C'$, то существует наложение f, при котором $C' = f(C)$, луч CB переходит в луч $C'B'$, а луч CD — в луч $C'D'$. В силу равенства $CD = C'D'$ имеем: $D' = f(D)$. Так как $\angle D = \angle D'$, то при наложении f луч DA переходит в луч $D'A'$. Таким образом, образы A'' и B'' точек A и B лежат на прямых $A'D'$ и $B'C'$. Отрезок $A''B''$ является общим перпендикуляром прямых $A'D'$ и $B'C'$. По теореме 1 § 15 отрезки $A''B''$ и $A'B'$ совпадают, т. е. точка A'' совпадает с точкой A', а точка B'' — с точкой B'. По признаку 1° четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны.

4°. Углы A и A' четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ прямые, поэтому существует наложение f, при котором $A' = f(A)$, луч AB переходит в луч $A'B'$, а луч AD — в луч $A'D'$. В силу равенства $AD = A'D'$ имеем: $D' = f(D)$. Тогда при наложении f двупрямоугольник $ABCD$ переходит в двупрямоугольник $A'B''C'D'$ с основанием $A'B''$, где B'' — точка луча $A'B'$.

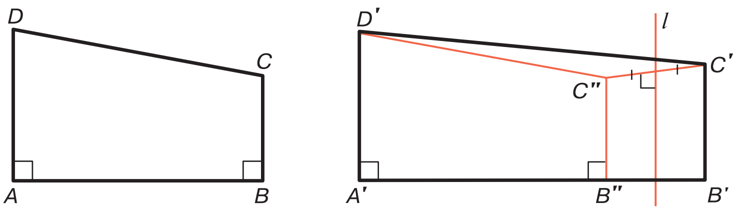


Рис. 96

Докажем, что точки B' и B'' совпадают. Пусть это не так, например A'–B''–B' (рис. 96). Так как $C'D' = C''D'$, то точка C'' не лежит на луче $D'C'$: в противном случае она совпала бы с точкой C', поэтому совпали бы и точки B' и B''. Так как $B''C''C'B'$ — четырехугольник Саккери, то серединный перпендикуляр l к отрезку $C'C''$ перпендикулярен к отрезку $B'B$". Треугольник $D'C''C'$ равнобедренный, поэтому $D' \in l$. Мы пришли к противоречию: расходящиеся прямые $A'D'$ и l имеют общую точку D'. Итак, точки B' и B" совпадают, следовательно, $AB = A'B'' = A'B'$ и по признаку 1° четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ равны. ■

Следствие. *Два четырехугольника Саккери равны, если у них соответственно равны:*

1°. *Основания и боковые стороны.*
2°. *Стороны, противоположные основаниям, и острые углы.*
3°. *Стороны, противоположные основаниям, и боковые стороны.*

□ Эти признаки непосредственно следуют из признаков 1°, 3° и 4° равенства двупрямоугольников. ■

2. Трипрямоугольники. Частным видом двупрямоугольника является выпуклый четырехугольник, у которого три угла прямые. В этом случае четырехугольник называется *трипрямоугольником* или *четырехугольником Ламберта* (см. [5], § 23). Из теоремы о сумме углов четырехугольника следует, что у трипрямоугольника угол, отличный от прямых углов, острый. Стороны, образующие острый угол, называются высотами, а две другие стороны — основаниями трипрямоугольника.

Примерами трипрямоугольников являются два четырехугольника, на которые разлагается четырехугольник Саккери отрезком, соединяющим середину основания с серединой противоположной стороны (рис. 97).

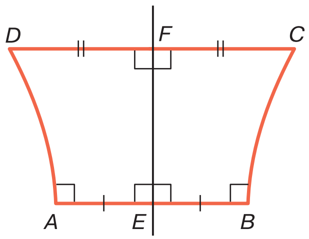


Рис. 97

Легко показать, что всегда существует трипрямоугольник, у которого одно из оснований и прилежащая к нему высота соответственно равны данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2. В самом деле, возьмем прямой угол EAB, где $AB = P_1Q_1$ и проведем луч BF, перпендикулярный к прямой AB и расположенный внутри угла EAB. Затем на луче BF отложим отрезок $BC = P_2Q_2$ и проведем перпендикуляр CD к прямой AE (рис. 98). Четырехугольник $ABCD$ искомый, так как он выпуклый, его углы при вершинах A, B и D прямые и $AB = P_1Q_1$, $BC = P_2Q_2$.

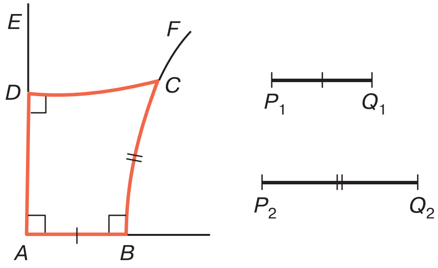


Рис. 98

Сформулируем теорему, выражающую признаки равенства трипрямоугольников.

Теорема 2. *Два трипрямоугольника равны, если выполняется одно из условий:*

1°. *Основание и прилежащая высота одного трипрямоугольника соответственно равны основанию и прилежащей высоте другого.*

2°. *Высота и острый угол одного трипрямоугольника соответственно равны высоте и острому углу другого.*

3°. *Оба основания одного трипрямоугольника равны основаниям другого.*

4°. *Две высоты одного трипрямоугольника равны двум высотам другого.*

□ Признаки 1° и 2° непостредственно следуют из признаков 2° и 3° равенства двупрямоугольников. Докажем два других признака.

3°. Пусть основания AB, AD, $A'B'$, $A'D'$ трипрямоугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно равны: $AB = A'B'$, $AD = A'D'$. Проведем диагонали BD и $B'D'$ и рассмотрим прямоугольные треугольники ABD и $A'B'D'$ (рис. 99). Они равны по двум катетам, поэтому $\angle 1 = \angle 1'$, $\angle 2 = \angle 2'$. Отсюда следует, что $\angle 3 = \angle 3'$, $\angle 4 = \angle 4'$, следовательно, $\triangle BCD = \triangle B'C'D'$ по второму признаку равенства треугольников. Таким образом, $BC = B'C'$ и $\angle C = \angle C'$. По признаку 2° данные трипрямоугольники равны.

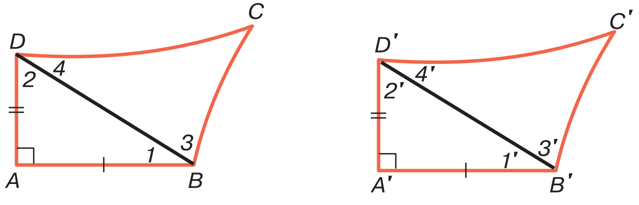


Рис. 99

4°. Пусть высоты BC, CD, $B'C'$, $C'D'$ трипрямоугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответственно равны:

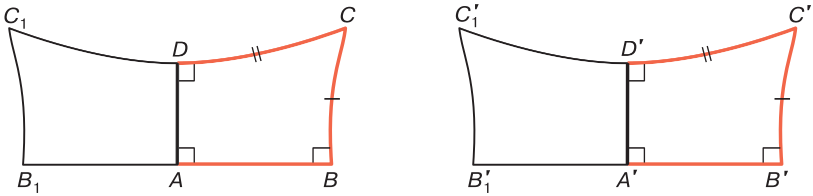


Рис. 100

$BC = B'C'$, $CD = C'D'$. Рассмотрим трипрямоугольники AB_1C_1D и $A'B_1'C_1'D'$, симметричные данным относительно прямых AD и $A'D'$, как показано на рис. 100. Тогда, очевидно, BB_1C_1C и $B'B_1'C_1'C'$ — четырехугольники Саккери с основаниями BB_1 и $B'B_1'$. Эти четырехугольники равны по признаку 3° следствия из теоремы 1, поэтому $\angle C = \angle C'$. По признаку 2° данные трипрямоугольники равны. ■

3. Равнобедренный четырехугольник. Выпуклый четырехугольник, у которого две противоположные стороны равны и образуют равные углы с одной из двух других сторон, называется *равнобедренным четырехугольником*. Четырехугольник Саккери является равнобедренным четырехугольником. Равные стороны называются боковыми сторонами, а две другие стороны — основаниями. На рис. 101 изображен выпуклый четырехугольник $ABCD$, где $AD = BC$, $\angle A = \angle B$. Этот четырехугольник является равнобедренным с боковыми сторонами AD и BC и основаниями AB и CD.

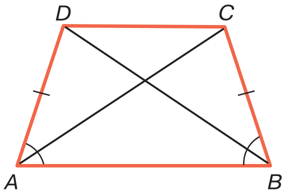


Рис. 101

Рассмотрим некоторые свойства равнобедренных четырехугольников.

28.1°. В равнобедренном четырехугольнике диагонали равны и углы, прилежащие к каждому основанию, также равны.

□ Пусть $ABCD$ — равнобедренный четырехугольник с боковыми сторонами $AD = BC$ и равными углами $\angle A = \angle B$. Докажем, что $AC = BD$ и $\angle C = \angle D$.

Треугольники ABC и BAD равны по первому признаку равенства треугольников, поэтому $AC = BD$ (см. рис. 101). Тогда $\triangle ACD = \triangle BDC$ по третьему признаку равенства треугольников, следовательно, $\angle C = \angle D$. ■

28.2°. Прямая, проходящая через середины двух оснований равнобедренного четырехугольника, перпендикулярна к основаниям и является осью симметрии четырехугольника.

□ Рассмотрим равнобедренный четырехугольник $ABCD$ с основаниями AB и CD и проведем серединный перпендикуляр l к отрезку AB. При симметрии относительно l точка A переходит в точку B, а точка B — в точку A. Так как $\angle A = \angle B$, то луч AD переходит в луч BC, а луч BC — в луч AD. В силу равенства $AD = BC$ точка C переходит в точку D, а точка D — в точку C. Отсюда следует, что прямая l проходит через середину отрезка CD и перпендикулярна к нему. Следовательно, l — ось симметрии четырехугольника $ABCD$. ■

Докажем теорему, в которой выражен признак того, что данный четырехугольник является равнобедренным.

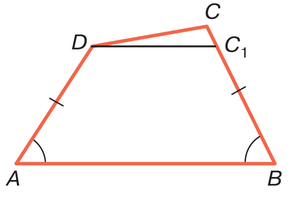


Рис. 102

Теорема 3. *Если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle B$ и $\angle C = \angle D$, то он является равнобедренным с боковыми сторонами BC и AD.*

□ Доказательство теоремы проведем методом от противного, т. е. допустим, что $BC \neq AD$. Пусть, например, $BC > AD$. Тогда на отрезке BC существует точка C_1, такая, что $AD = BC_1$ (рис. 102). Четырехугольник ABC_1D равнобедренный, поэтому по свойству 28.1° $\angle ADC_1 = \angle BC_1D$.

Но по условию $\angle ADC = \angle BCD$ и по построению $\angle ADC_1 < \angle ADC$, поэтому $\angle BC_1D < \angle BCD$. Мы пришли к противоречию: в треугольнике DCC_1 внешний угол при вершине C_1 меньше угла C. Следовательно, наше предположение неверно и $BC = AD$. ■

4. Гиперболический параллелограмм. Четырехугольник $ABCD$ называется *гиперболическим параллелограммом*, если $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ и $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (рис. 103). Вершину A будем называть первой основной вершиной, а противоположную вершину C — второй основной вершиной.

Гиперболический параллелограмм является выпуклым четырехугольником. В самом деле, прямые, содержащие его противоположные стороны, параллельны, поэтому каждые две его соседние вершины лежат по одну сторону от прямой, проходящей через две другие вершины.

Отсюда следует, что *диагонали гиперболического параллелограмма пересекаются и сумма углов гиперболического параллелограмма меньше* $4d$.

Свойства гиперболического параллелограмма существенно отличаются от свойств параллелограмма на евклидовой плоскости. В качестве примера рассмотрим следующее свойство:

Угол гиперболического параллелограмма при первой основной вершине меньше угла при противоположной второй основной вершине.

□ Пусть $ABCD$ — данный гиперболический параллелограмм, где A — первая основная вершина. Докажем, что $\angle A < \angle C$. Воспользуемся цифровыми обозначениями углов на рис. 103 и докажем, что $\angle 1 < \angle 2$. Углы 1 и 6

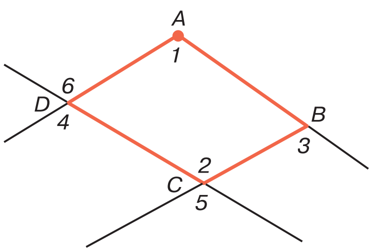


Рис. 103

являются накрест лежащими углами при пересечении параллельных прямых $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ секущей AD, поэтому по теореме 4 § 10 $\angle 1 < \angle 6$. Аналогично, применив ту же теорему к параллельным прямым $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ и секущей CD, имеем: $\angle 4 < \angle 2$. Но $\angle 4 = \angle 6$, следовательно, $\angle 1 < \angle 2$. ■

Докажем *теорему Я. С. Дубнова* о гиперболическом параллелограмме.

Теорема 4. *В гиперболическом параллелограмме четыре прямые, две из которых содержат биссектрисы углов при основных вершинах, а две другие — биссектрисы внешних углов при двух других вершинах, принадлежат одному пучку расходящихся прямых.*

□ Пусть $ABCD$ — гиперболический параллелограмм, у которого A — первая основная вершина, а C — вторая. Проведем заградительную прямую m угла BAD и обозначим через λ полуплоскость с границей m, содержащую точку A (рис. 104). Так как прямые AB и AD не пересекают прямую m, то $B \in \lambda$, $D \in \lambda$, следовательно, $C \in \lambda$. Таким образом, все точки четырехугольника $ABCD$ принадлежат полуплоскости λ.

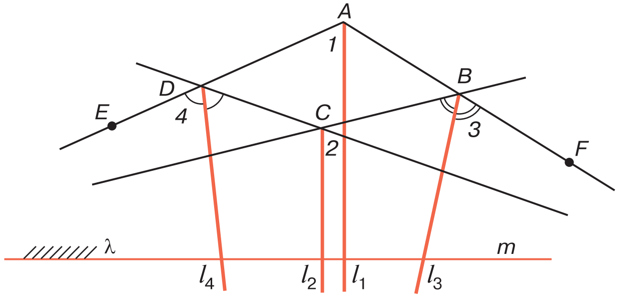


Рис. 104

Возьмем на прямых AD и AB точки E и F так, чтобы $A–D–E$ и $A–B–F$. Тогда углы EDC и FBC являются внешними углами четырехугольника $ABCD$ при вершинах D и B. Обозначим через l_1, l_2, l_3, l_4

прямые, содержащие соответственно биссектрисы углов, обозначенных на рис. 104 цифрами 1, 2, 3, 4.

Так как $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, то лучи AB и DC параллельны. С другой стороны, лучи AD и DE сонаправлены, поэтому прямая m является заградительной прямой и угла 4. Аналогично доказывается, что прямая m является заградительной прямой углов 2 и 3. По теореме 1 § 16 прямые l_1, l_2, l_3, l_4 перпендикулярны к прямой m, следовательно, они принадлежат пучку расходящихся прямых с базой m. ■

Замечание. В отдельных случаях прямые l_1 и l_2 могут совпасть, но ясно, что и в этом случае доказанная теорема верна.

5. Гиперболический ромб. *Гиперболическим ромбом* называется гиперболический параллелограмм, у которого две смежные стороны, имеющие общую основную вершину, равны. Рассмотрим некоторые свойства гиперболического ромба.

28.3°. Прямая, проходящая через две основные вершины гиперболического ромба, является осью симметрии этого ромба.

□ Пусть $ABCD$ — данный гиперболический ромб, у которого A — первая основная вершина, а C — вторая. Допустим, что $AB = AD$ (рис. 105). Обозначим через O середину диагонали BD и докажем, что прямая AO — ось симметрии четырехугольника $ABCD$. Так как треугольник ABD равнобедренный, то $AO \perp BD$, поэтому при симметрии f относительно прямой AO имеем: $A = f(A)$, $B = f(D)$, $D = f(B)$.

Направленные прямые $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ параллельны, следовательно, их образы также параллельны. При движении f прямая AB переходит в прямую AD, поэтому параллельная ей прямая DC переходит в прямую, проходящую через точку B и параллельную пря-

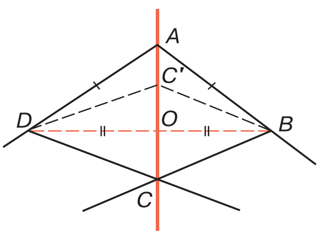


Рис. 105

мой AD, т. е. в прямую BC. Следовательно, прямая BC переходит в прямую DC. Отсюда следует, что точка C лежит на оси симметрии данного гиперболического ромба.

Доказательство этого свойства для случая $CB = CD$ дословно совпадает с предыдущим текстом, если в нем всюду точки A и C переставить местами. ■

Из свойства 28.3° непосредственно следуют утверждения:

28.4°. Диагонали гиперболического ромба взаимно перпендикулярны и диагональ, соединяющая основные вершины, делит пополам другую диагональ и углы при основных вершинах.

28.5°. В гиперболическом ромбе углы при противоположных вершинах, отличных от основных вершин, равны и стороны, имеющие общую основную вершину, равны.

Существенное отличие гиперболического ромба от евклидова заключается в следующем свойстве:

28.6°. Противоположные стороны гиперболического ромба не равны друг другу. При этом большей является сторона, которой принадлежит первая основная вершина.

□ Пусть $ABCD$ — гиперболический ромб, A — первая основная вершина, а O — точка пересечения диагоналей. Докажем, что $AB > CD$. Для этого рассмотрим точку C', симметричную точке C относительно прямой BD (см. рис. 105). Так как $BD \perp AC$, то точка C' лежит на луче OA, причем в силу того, что $\angle C > \angle A$, C' — точка, лежащая на отрезке OA (это утверждение предлагаем читателю обосновать самостоятельно). В треугольнике ABC' угол C' тупой, так как смежный с ним угол $BC'O$ острый. Отсюда следует, что $AB > BC'$, но $BC' = BC = CD$, следовательно, $AB > CD$. ■

В заключение отметим, что из теоремы Я. С. Дубнова непосредственно следует утверждение, которое известно как *теорема Д. Гильберта* (см. [5], § 23): *прямые, содержащие биссектрисы внешних углов гиперболического ромба, расходятся.*

§ 29. Правильные многоугольники

1. Правильный многоугольник. *Правильным многоугольником* на плоскости Лобачевского мы называем многоугольник, у которого все стороны равны, а вершины лежат на некоторой окружности, которая называется *окружностью, описанной около многоугольника.*

Нетрудно доказать, что *правильный многоугольник является выпуклым и все его углы равны друг другу.* В самом деле, пусть $F = A_1A_2\ldots A_n$ — правильный многоугольник, а ω — окружность с центром O, описанная около многоугольника. Если A_iA_{i+1} — произвольная сторона многоугольника, то этот отрезок является хордой окружности ω, поэтому точки A_i и A_{i+1} делят окружность на две дуги, причем все вершины $A_{i+2}, \ldots, A_n, A_1 \ldots, A_{i-1}$ принадлежат одной из дуг. Следовательно, все эти вершины принадлежат одной полуплоскости с границей A_iA_{i+1}. Отсюда и следует, что F — выпуклый многоугольник. Далее рассмотрим поворот вокруг точки O, при котором точка A_1 переходит в точку A_2. При этом повороте окружность ω переходит в себя, поэтому образы всех вершин многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ лежат на окружности ω, а так как $A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{n-1}A_n = A_nA_1$, то $A_2 \mapsto A_3$, $A_3 \mapsto A_4$, $\ldots$, $A_{n-1} \mapsto A_n$, $A_n \mapsto A_1$. Следовательно, $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_2A_3A_4 = \angle A_3A_4A_5 = \ldots = \angle A_{n-2}A_{n-1}A_n = \angle A_{n-1}A_nA_1$.

Докажем, что, *каково бы ни было натуральное число $n (n > 2)$, существует бесконечное множество правильных n-угольников.* Для этого опишем один из возможных способов построения n-угольника. Рассмотрим угол PQR, мера которого равна $\dfrac{4d}{n}$. Согласно свойству 3.2° абсолютной геометрии такой угол существует. Затем от произвольного луча OM_1, отложим последовательно лучи OM_2, OM_3, $\ldots$, OM_n так, чтобы $\angle M_1OM_2 = \angle M_2OM_3 = \ldots = \angle M_{n-1}OM_n = \angle PQR$ (рис. 106). При этом, очевидно, $\angle M_nOM_1 = \angle PQR$. Построим теперь окружность с центром O произвольного радиуса. Пусть A_1, A_2, $\ldots$, A_n — точки пересечения этой окружности с лучами OM_1, OM_2, ..., OM_n. Очевидно, $A_1A_2\dots A_n$ — правильный n-угольник.

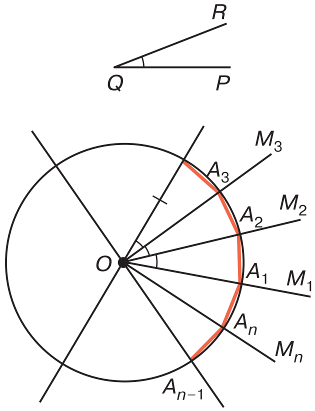


Рис. 106

Воспользуемся этим способом для построения правильного шестиугольника. Возьмем произвольный луч OM_1 и от него отложим последовательно лучи OM_2, OM_3, ..., OM_6 так, чтобы $\widehat{M_1OM_2} = \widehat{M_2OM_3} = \dots = \widehat{M_6OM_1} = 60^\circ$ (рис. 107). Проведем теперь окружность с центром O произвольного радиуса r. Эта окружность пересечет лучи $OM_1, OM_2, \dots, OM_6$ в точках $A_1, A_2, \dots, A_6$, которые являются вершинами правильного шестиугольника $A_1A_2\dots A_6$. Если провести другую окружность с центром O радиуса R, где $R > r$, то получим другой правильный шестиугольник $B_1B_2\dots B_6$, который изображен на рис. 107.

Так же как и на евклидовой плоскости, правильный шестиугольник $A_1A_2\dots A_6$ отрезками $OA_1, OA_2, \dots, OA_6$ можно разложить на шесть равных друг другу треугольников $OA_1A_2, OA_2A_3, \dots, OA_6A_1$, однако, в отличие от плоскости Евклида, эти треугольники не являются равносторонними. В самом деле, в треугольнике OA_1A_2 $\widehat{A_1OA_2} = 60^\circ$, а $\widehat{OA_1A_2} = \widehat{OA_2A_1} = \alpha < 60^\circ$, так как $\sigma(OA_1A_2) < 180^\circ$. Отсюда следует, что $A_1A_2 > OA_1$.

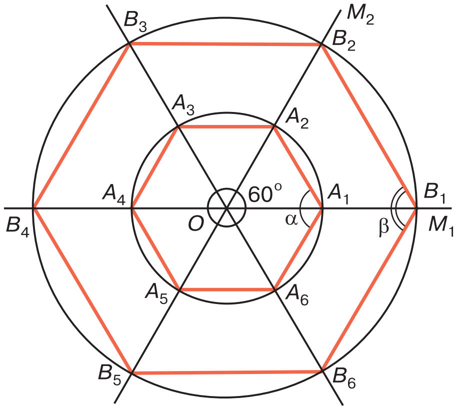


Рис. 107

Таким образом, на плоскости Лобачевского сторона правильного шестиугольника больше радиуса описанной окружности. Докажем, что на рис. 107 каждый из углов шестиугольника $A_1A_2\ldots A_6$ больше каждого из углов шестиугольника $B_1B_2\ldots B_6$. В самом деле, пусть α и β — меры углов соответственно шестиугольников $A_1\ldots A_6$ и $B_1\ldots B_6$. Так как $r < R$, то O–A_1–B_1, O–A_2–B_2, поэтому $\delta(OA_1A_2) < \delta(OB_1B_2)$, или $180°-60°-2\widehat{A_1} < 180°-60°-2\widehat{B_1}$, но $2\widehat{A_1}=\alpha$, $2\widehat{B_1}=\beta$, следовательно, $\alpha > \beta$. Итак, чем больше радиус описанной около правильного шестиугольника окружности, тем меньше угол шестиугольника. Более того, можно доказать, что для любого сколь угодно малого $\varphi > 0$ существует правильный шестиугольник, меры углов которого меньше φ (см. задачу 24).

2. Правильный треугольник. Наиболее простым правильным многоугольником является *правильный треугольник*, построение которого с помощью способа, описанного в п. 1, выполнено на рис. 108. Градусная мера α каждого из углов треугольника ABC, в отличие от углов правильного треугольника на евклидовой плоскости, меньше чем $60°$ и не является постоянной величиной.

В самом деле, $\delta(ABC) = 180° - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C} = 180° - 3\alpha > 0$, поэтому $\alpha < 60°$.

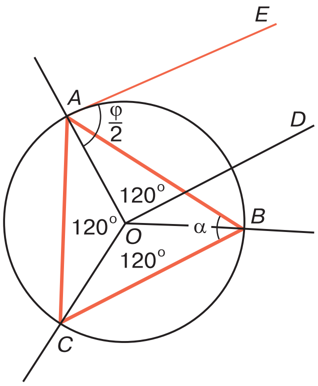


Рис. 108

Более того, мы сейчас докажем, что если φ — произвольная градусная величина, такая, что $0^\circ < \varphi < 60^\circ$, то на плоскости Лобачевского существует правильный треугольник, мера каждого из углов которого меньше φ. Для построения такого правильного треугольника воспользуемся рис. 108. За радиус r окружности с центром O возьмем число, такое, чтобы $\Pi(r) = \frac{\varphi}{2}$, т. е. чтобы $\Pi(OA) = \frac{\varphi}{2}$. Проведем луч OD, $OD \perp OA$ и другой луч AE, параллельный лучу OD. Тогда ясно, что $\widehat{OAE} = \frac{\varphi}{2}$. Луч OD — внутренний луч угла AOB, поэтому он пересекает отрезок AB, следовательно,

$$\angle OAB < \angle OAE,$$

т. е.

$$\frac{\alpha}{2} < \frac{\varphi}{2}, \quad \text{или} \quad \alpha < \varphi.$$

Итак, существуют правильные треугольники, меры углов которых сколь угодно близки к нулю.

Покажем, что на плоскости Лобачевского, так же как и на плоскости Евклида, существуют правильные треугольники, стороны которых равны данному отрезку. Для этого сначала докажем, что *треугольник, все стороны которого равны друг другу, является правильным*.

В самом деле, пусть в треугольнике ABC $AB = BC = CA$. Проведем высоты AH_1, BH_2 и CH_3 треугольника. По свойству 27.1° точки H_1, H_2, H_3 лежат на соответствующих сторонах треугольника, и по теореме § 27 отрезки AH_1, BH_2, CH_3 пересекаются в некоторой точке O (рис. 109). Так как $\triangle AH_1B = \triangle AH_1C$ по гипотенузе и общему катету, то $BH_1 = CH_1$. Отсюда следует, что AH_1 — серединный перпендикуляр к отрезку BC, поэтому $OB = OC$.

Точно так же можно доказать, что $OA = OB$. Итак, вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром O радиуса OA, следовательно, ABC — правильный треугольник.

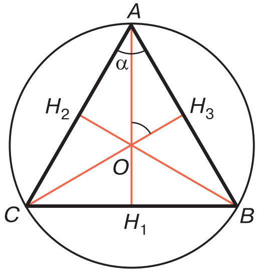


Рис. 109

Докажем теперь, что если PQ — произвольный отрезок длины a, то существует правильный треугольник, все стороны которого равны отрезку PQ. Так как $a+a-a > 0$, то по теореме 4 § 21 существует треугольник ABC, такой, что $AB = a$, $BC = a$, $CA = a$. По доказанному ABC – правильный треугольник.

Как известно, на плоскости Евклида правильный треугольник можно использовать для построения с помощью циркуля и линейки угла 60°. Для этого достаточно построить какой-нибудь равносторонний треугольник, и его углы будут искомыми. На плоскости Лобачевского этот способ непригоден, так как углы правильного треугольника не равны 60°. Тем не менее и здесь с помощью правильного треугольника можно построить с помощью циркуля и линейки угол 60°. Для этого достаточно построить какой-нибудь равносторонний треугольник ABC и провести его высоты AH_1, BH_2, CH_3 (см. рис. 109). Если O — точка пересечения этих высот, то $\widehat{AOH_3} = 60°$. Тогда, очевидно, что можно построить также углы 120°, 30°, 15° и т. д. Например, $AOB = 120°$.

3. Гиперболический квадрат. *Гиперболическим квадратом* или просто квадратом называется правильный четырехугольник. С помощью способа, описанного в п. 1, на рис. 110 выполнено построение квадрата $ABCD$. Градусная мера α каждого из углов этого четырехугольника меньше чем 90° и не является постоянной величиной. В самом деле, $\delta(ABCD) = 360^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C} - \widehat{D} = 360^\circ - 4\alpha$. Отсюда следует, что $\alpha < 90^\circ$. Так же как и в случае правильного треугольника, легко показать, что если φ — произвольная градусная величина, такая, что $0 < \varphi < 90^\circ$, то на плоскости Лобачевского существует квадрат, мера каждого из углов которого меньше φ. Для построения такого квадрата воспользуемся рис. 110, причем за радиус r окружности с центром O возьмем число, такое, чтобы $\Pi(r) = \frac{\varphi}{2}$, т. е. чтобы $\Pi(OA) = \frac{\varphi}{2}$. Проведем луч AE, параллельный лучу OB. Тогда $\widehat{OAE} = \frac{\varphi}{2}$, $\angle OAB < \angle OAE$, т. е. $\frac{\alpha}{2} < \frac{\varphi}{2}$, или $\alpha < \varphi$. Итак, существуют квадраты, меры углов которых сколь угодно близки к нулю. Можно доказать, что, какова бы ни была величина $0 < \alpha < 90^\circ$, всегда существует квадрат, углы которого равны α.

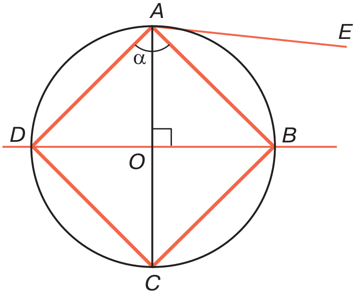


Рис. 110

Отметим еще одно интересное обстоятельство, в котором проявляется особенность геометрии Лобачевского. Как известно, любую часть евклидовой плоскости можно полностью покрыть паркетом, состоящим из равных друг другу квадратных дощечек. Это основано на том, что углы каждой дощечки равны 90°, и поэтому каждые четыре дощечки, имеющие общую величину, полностью покрывают часть плоскости в окрестности этой вершины. На плоскости Лобачевского картина совершенно иная. Здесь каждый угол квадрата меньше чем 90°, поэтому равные квадраты, приложенные друг к другу и имеющие общую вершину O, не всегда полностью покрывают часть плоскости в окрестности точки O. Однако это не означает, что невозможно полностью покрыть любую часть плоскости Лобачевского с помощью равных друг другу квадратов. Возьмем, например, равные друг другу квадраты, каждый угол которых равен 60°, и приложим шесть из них друг к другу так, чтобы они имели общую вершину O и не перекрывали друг друга. Тогда в окрестности точки O часть плоскости полностью покрывается этими квадратами. Если мы повторим тот же процесс с другими вершинами этих квадратов, т. е. к каждой вершине, отличной от O, приложим квадраты так, чтобы к каждой из этих вершин были приложены друг к другу шесть квадратов, мы тем самым полностью покроем любую часть плоскости квадратами. Аналогично можно поступить, если использовать квадраты с углами 45°, 72° или в общем случае $\frac{360^\circ}{n}$, где $n > 4$.

Задачи к главе 5

1. Доказать, что средняя линия треугольника, содержащая середины боковых сторон: а) равна половине основания четырехугольника Саккери, присоединенного к треугольнику к его основанию; б) меньше половины основания треугольника и прямые, содержащие среднюю линию и основание, расходятся.
2. Даны два острых угла h_1k_1 и h_2k_2 и отрезок MN. Доказать, что существует прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, такой, что: а) $\angle A = \angle h_1k_1$ и $BC = MN$; б) $\angle B < \angle h_2k_2$.
3. Углы A и B двуугольника $hABk$ являются равными острыми углами, а прямые, содержащие лучи h и k, расходятся. Доказать, что существует один и толь-

ко один отрезок, перпендикулярный к лучам h и k концы которого лежат на этих лучах.

4. Доказать, что существует бесконечное множество неравных друг другу треугольников, сумма углов каждого из которых равна его дефекту, и все треугольники остроугольные.
5. Два четырехугольника Саккери $ABQP$ и $ABQ'P'$ имеют общую сторону AB, противоположную основаниям PQ и $P'Q'$. Доказать, что если острые углы при вершине A или при вершине B этих четырехугольников не равны друг другу, то PQ и $P'Q'$ — расходящиеся прямые и прямые AB, PQ и $P'Q'$ имеют общий перпендикуляр.
6. Пусть ABC — произвольный треугольник и $0 < \delta_0 < \delta(ABC)$. Доказать, что на отрезке AC существует точка C_0, такая, что $\delta(ABC_0) = \delta_0$. Здесь $\delta(ABC)$ и $\delta(ABC_0)$ — дефекты соответствующих треугольников.
7. Доказать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
8. Доказать, что в любой треугольник можно вписать одну и только одну окружность. Центром этой окружности является точка пересечения биссектрис треугольника.
9. Углы двуугольника $hABk$ острые, и лучи h и k принадлежат расходящимся прямым AA' и BB'. Доказать, что общий перпендикуляр к прямым AA' и BB' пересекает как луч h, так и луч k и расходится с прямой AB.
10. Доказать, что существуют треугольники, для которых три прямые: одна, содержащая биссектрису данного угла, и две прямые, содержащие биссектрисы внешних углов, не смежных с данным, — принадлежат к каждому из трех типов пучков.
11. Вершины треугольника $H_1H_2H_3$ являются основаниями высот остроугольного треугольника ABC. Доказать, что вневписанные циклические линии треугольника $H_1H_2H_3$ являются окружностями с центрами в точках A, B и C.

12. Доказать, что двупрямоугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ с основаниями AB и A_1B_1 равны, если $AB = A_1B_1$, $CD = C_1D_1$ и $\angle C = \angle C_1$ (или $\angle D = \angle D_1$).
13. Доказать, что двупрямоугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ с основаниями AB и $A'B'$ равны, если $AB = A'B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$.
14. Доказать, что два четырехугольника Саккери равны, если у них соответственно равны основания и острые углы.
15. Доказать, что два трипрямоугольника равны, если основание и острый угол одного из них соответственно равны основанию и острому углу другого.
16. Доказать, что два трипрямоугольника равны, если основание и противолежащая высота одного трипрямоугольника соответственно равны основанию и противолежащей высоте другого.
17. Доказать, что существует трипрямоугольник, острый угол которого равен данному острому углу.
18. Доказать, что существует четырехугольник Саккери, острые углы которого равны данному острому углу.
19. Доказать, что существует равнобедренный четырехугольник, у которого все углы равны данному острому углу.
20. Доказать, что в равнобедренном четырехугольнике хотя бы два угла, прилежащие к одному из оснований, являются равными друг другу острыми углами.
21. Доказать, что в гиперболическом ромбе углы при противоположных вершинах, отличных от основных вершин, равны и стороны, имеющие общую основную вершину, равны.
22. Доказать, что существует равнобедренный треугольник, основание которого равно данному отрезку, а угол, лежащий против основания, равен данному неразвернутому углу.
23. Доказать, что существует правильный n-угольник, сторона которого равна данному отрезку.
24. Дан произвольный неразвернутый угол. Доказать, что существует правильный шестиугольник, каждый из углов которого меньше данного угла.

Глава 6

ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ

§ 30. Движения плоскости. Произведение движений

1. Теоремы о задании движений. Напомним, что движением называется такое преобразование точек плоскости, при котором сохраняются расстояния между любыми двумя точками. Некоторые свойства движений были нами рассмотрены в § 4. В частности, была доказана теорема о том, что любое движение является наложением, т. е. движение и наложение — это одно и то же преобразование. Отсюда следует, что все свойства наложений являются также свойствами движений, поэтому при любом движении отрезок, прямая, луч, полуплоскость переходят соответственно в отрезок, прямую, луч, полуплоскость. Угол переходит в угол, причем сохраняется мера угла.

Отметим, что при движении направленная прямая переходит в направленную прямую. В самом деле, из леммы § 5 непосредственно следует, что при движении сонаправленные лучи прямой переходят в сонаправленные лучи ее образа, поэтому если $\overline{AB}$ — направленная прямая, а A' и B' — образы точек A и B при движении f, то луч AB переходит в луч $A'B'$, следовательно, направленная прямая $\overline{AB}$ переходит в направленную прямую $\overline{A'B'}$.

Докажем теорему о задании движений, которая является теоремой абсолютной геометрии (см. [1], § 33, теорема 2).

Теорема 1. *Каковы бы ни были треугольники ABC и $A'B'C'$, такие, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$*, существует*

* Запись $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ означает, что существует наложение, при котором точки A, B, C переходят соответственно в точки A', B', C'.

одно и только одно движение, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'.

□ Пусть $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. Существует наложение f, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'. Ясно, что f является движением. По лемме § 4 f — единственное движение, при котором точки A, B и C переходят соответственно в точки A', B' и C'. ■

Упорядоченную тройку точек A, B, C называют *ортонормированным репером* и обозначают через $R = (A, B, C)$, если ABC — прямоугольный равнобедренный треугольник с прямым углом A и $AB = AC = 1$. Если f — движение и $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, то, очевидно, упорядоченная тройка точек A', B', C' является также ортонормированным репером: $R' = (A', B', C')$. Репер R' называется образом репера R при движении f: $R' = R(f)$.

Из доказанной теоремы следует:

Следствие. *Каковы бы ни были ортонормированные реперы $R = (A, B, C)$ и $R' = (A', B', C')$, существует одно и только одно движение f, такое, что $R' = f(R)$.*

Пусть O — некоторая точка, h — луч, исходящий из этой точки, а λ — полуплоскость, границе которой принадлежит луч h. Фигура, состоящая из точки O, луча h и полуплоскости λ, называется *флагом* и обозначается так: (O, h, λ). Ясно, что при движении флаг переходит в флаг.

Теорема 2. *Если (O, h, λ) и (O', h', λ') — произвольные флаги, то существует одно и только одно движение, при котором флаг (O, h, λ) переходит в флаг (O', h', λ').*

□ Рассмотрим ортонормированные реперы $R = (O, E_1, E_2)$ и $R' = (O', E'_1, E'_2)$, где $E_1 \in h_1$, $E_2 \in \lambda$, $E'_1 \in h'_1$, $E'_2 \in \lambda'$ (рис. 111). Пусть g — движение, при котором репер R переходит в репер R'. Так как $O' = g(O)$, $E'_1 = g(E_1)$, $E'_2 = g(E_2)$, то $h' = g(h)$ и $\lambda' = g(\lambda)$. Таким образом, при движении g флаг $\Phi = (O, h, \lambda)$ переходит в флаг $\Phi' = (O'_1, h', \lambda')$.

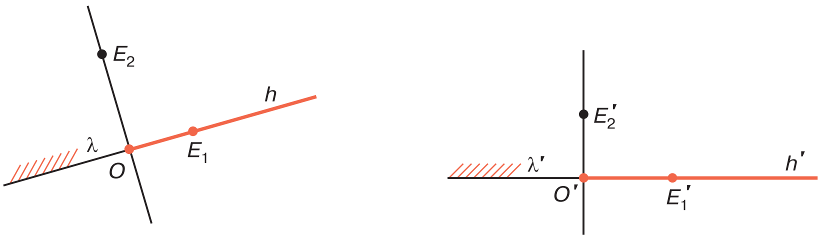


Рис. 111

Докажем, что g — единственное движение, при котором флаг Φ переходит в флаг Φ'. Пусть f — произвольное движение, такое, что $\Phi' = f(\Phi)$. Так как $h' = f(h)$, то $E_1' = f(E_1)$. Углы E_1OE_2 и $E_1'O'E_2'$ прямые, $E_2 \in \lambda$, $E_2' = \lambda'$ и $\lambda' = f(\lambda)$, поэтому движение f луч OE_2 переводит в луч $O'E_2'$ и, следовательно, $E_2' = f(E_2)$. Таким образом, $R' = f(R)$. По следствию теоремы 1 движения f и g совпадают. ■

При тождественном преобразовании каждый флаг переходит в себя, поэтому из доказанной теоремы непосредственно следует утверждение.

Следствие. *Если Φ — произвольный флаг, то существует одно и только одно движение — тождественное преобразование, при котором флаг Φ переходит в себя.*

2. Движения, переводящие один луч в другой.

Теорема 3. *Каковы бы ни были лучи h и h', существуют два и только два движения, при каждом из которых луч h переходит в луч h'.*

□ Обозначим луч h через OA, а луч h' через $O'A'$. Пусть λ — одна из полуплоскостей с границей OA, а λ_1 и λ_2 — две полуплоскости с общей границей $O'A'$. Рассмотрим флаги $\Phi = (O, h, \lambda)$, $\Phi_1 = (O', h', \lambda_1)$ и $\Phi_2 = (O', h', \lambda_2)$. Согласно теореме 2 существуют движения f_1 и f_2, такие, что $\Phi_1 = f_1(\Phi)$, $\Phi_2 = f_2(\Phi)$. Ясно, что $h' = f_1(h)$, $h' = f_2(h)$. Итак, существуют два движения f_1 и f_2, которые луч h переводят в луч h'.

Докажем, что если при произвольном движении f $h' = f(h)$, то f совпадает либо с $\lambda_1 = f_1(h)$, либо с $\lambda_2 = f_2(h)$. В самом деле, так как $h' = f(h)$, то $O' = f(O)$, и, кроме того, либо $\lambda_1 = f(\lambda)$, либо $\lambda_2 = f(\lambda)$, следовательно, либо $\Phi_1 = f(\Phi)$, либо $\Phi_2 = f(\Phi)$. По теореме 2 движение f совпадает либо с f_1, либо с f_2. ■

Следствие. *Движение, при котором данный луч переходит в себя, есть либо тождественное преобразование, либо симметрия с осью, содержащей данный луч.*

□ Пусть h — данный луч, исходящий из точки O, OA — прямая, содержащая луч h, а λ_1 и λ_2 — две полуплоскости с общей границей OA. Если f — движение, при котором $h = f(h)$, то возможны только два случая: а) $\lambda_1 = f(\lambda_1)$; б) $\lambda_2 = f(\lambda_1)$.

Рассмотрим флаги $\Phi_1 = (O, h, \lambda_1)$ и $\Phi_2 = (O, h, \lambda_2)$.

В случае а) $\Phi_1 = f(\Phi_1)$ и по следствию теоремы 2 f — тождественное преобразование. В случае б) $\Phi_2 = f(\Phi_1)$. Но при симметрии относительно прямой OA флаг Φ_1 также переходит в флаг Φ_2, следовательно, по теореме 2 f — осевая симметрия с осью OA. ■

3. Произведение движений. Напомним, что произведением двух данных преобразований f_1 и f_2 плоскости называется преобразование f, при котором каждая точка M плоскости переходит в точку M' по следующему закону: $M' = f_2(f_1(M))$. Преобразование f обозначается так: $f = f_2f_1$. Если f_1 и f_2 — движения, то каждое из этих преобразований сохраняет расстояния, поэтому $f = f_2f_1$ также сохраняет расстояния, т. е. является движением.

Известно, что произведение преобразований ассоциативно, т. е. для любых трех преобразований, в частности движений f_1, f_2 и f_3, имеем: $f_1(f_2f_3) = (f_1f_2)f_3$. Далее, если f — движение, то обратное преобразование f^{-1} также является движением и $ff^{-1} = f^{-1}f = e$, где e — тождественное преобразование. Отсюда следует, что *множество всех движений плоскости Лобачевского* (так же как и множество всех движений евклидовой плоскости) *образует группу*.

Из всех видов движений плоскости Лобачевского осевая симметрия играет особую роль, о чем свидетельствует следующая теорема, которая является теоремой абсолютной геометрии, следовательно, она верна и на евклидовой плоскости (см. [3], § 44, теорема 1).

Теорема 4. *Любое движение g плоскости Лобачевского либо является осевой симметрией, либо представляет собой произведение двух или трех осевых симметрий.*

□ Возьмем произвольный луч h, исходящий из точки O, и рассмотрим его образ $h' = g(h)$. Пусть $O' = g(O)$. Тогда O' — начало луча h'. Возможны три случая:

а) Лучи h и h' совпадают. По следствию из теоремы 3 движение g есть либо осевая симметрия, либо тождественное преобразование e, которое можно представить в виде $e = ff$, где f — произвольная осевая симметрия.

б) Точки O и O' совпадают, но лучи h и h' различны. Рассмотрим прямую p, проходящую через точку O, относительно которой лучи h и h' симметричны. Ясно, что такая прямая существует. Обозначим через f_1 осевую симметрию с осью p. Тогда при движении f_1g луч h переходит в себя, поэтому согласно следствию из теоремы 3 движение $f_2 = f_1g$ есть либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия. Из предыдущего равенства получаем: $f_1f_2 = f_1(f_1g) = g$. Мы видим, что g есть произведение не более двух осевых симметрий.

в) Точки O и O' не совпадают. Пусть f_3 — осевая симметрия, осью которой является серединный перпендикуляр к отрезку OO'. Тогда при движении f_3g луч h переходит в луч h_1, причем лучи h и h_1 имеют общее начало. Следовательно (см. п. а) и б)), движение $f_4 = f_3g$ есть произведение не более двух осевых симметрий. Из предыдущего равенства получаем: $f_3f_4 = f_3(f_3g) = (f_3f_3)g = g$. ■

§ 31. Инвариантные точки и инвариантные прямые движения

1. Инвариантные точки движения. Точка плоскости называется *инвариантной* или *неподвижной точкой* движения, если при этом движении она переходит в себя. Наиболее простым видом движения является тождественное преобразование, т. е. отображение плоскости в себя, при котором каждая точка плоскости переходит в себя. Любая точка плоскости является неподвижной точкой тождественного преобразования. Для осевой симметрии, рассмотренной нами в § 4, любая точка оси симметрии является неподвижной точкой, а центральная симметрия имеет только одну неподвижную точку — центр симметрии. Ниже мы рассмотрим примеры движений, которые не имеют ни одной неподвижной точки.

Рассмотрим типы движений, которые имеют более чем одну неподвижную точку.

31.1°. Если движение g имеет по крайней мере три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой, то g — тождественное преобразование.

□ Обозначим через A, B и C неподвижные точки движения g, не лежащие на одной прямой. Тогда каждая вершина треугольника ABC при движении g переходит в себя. Так как при тождественном преобразовании каждая вершина треугольника ABC также переходит в себя, то по теореме 1 § 30 движение g — тождественное преобразование. ■

31.2°. Если движение g, отличное от тождественного преобразования, имеет по крайней мере две неподвижные точки A и B, то g — осевая симметрия с осью AB.

□ По условию $A = g(A)$, $B = g(B)$, поэтому при движении g луч AB переходит в себя. По следствию из теоремы 3 § 30 движение g либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия с осью AB. По условию g не является тождественным преобразованием, поэтому g — осевая симметрия с осью AB. ■

31.3°. Если оси p_1 и p_2 двух осевых симметрий f_1 и f_2 являются параллельными или расходящимися прямыми, то движение $f = f_2 f_1$ не имеет инвариантных точек. Если же прямые p_1 и p_2 пересекаются, то их точка пересечения является единственной неподвижной точкой движения f.

□ Докажем, что если движение f имеет инвариантную точку M, то прямые p_1 и p_2 пересекаются в точке M. Пусть $M_1 = f_1(M)$, тогда $f_2(M_1) = f_2(f_1(M)) = f(M) = M$. Итак, $M_1 = f_1(M)$ и $f_2(M_1) = M$. Отсюда следует, что точки M и M_1 совпадают, так как в противном случае прямые p_1 и p_2, которые являются серединными перпендикулярами к отрезку MM_1, должны совпадать, что невозможно. Таким образом, $M = f_1(M)$ и $M = f_2(M)$, поэтому $M \in p_1$ и $M \in p_2$.

Таким образом, если прямые p_1 и p_2 не имеют общих точек, то f не имеет неподвижных точек, а если прямые p_1 и p_2 пересекаются, то ясно, что их точка пересечения — неподвижная точка движения f. По доказанному выше f не имеет других неподвижных точек. ■

Из свойства 31.3° следует, что существует бесконечное множество движений, не имеющих неподвижных точек, а также бесконечное множество движений, имеющих только одну неподвижную точку.

2. Поворот вокруг точки. Понятие поворота вокруг точки евклидовой плоскости, по существу, относится к абсолютной геометрии. Однако при его определении обычно пользуются наглядными соображениями (см., например, [1], § 32), что непригодно для изучения геометрии Лобачевского. Для строгого определения поворота необходимо предварительно ввести понятие ориентированной плоскости (см., например, [3], § 13), что не так просто сделать в геометрии Лобачевского. Здесь мы введем поворот, используя произведение двух осевых симметрий.

Пусть O — данная точка, а φ — градусная мера некоторого угла. Проведем через точку O две прямые p_1 и p_2, угол между которыми равен $\frac{1}{2}\varphi$, и рассмотрим две осевые симметрии g_1 и g_2 с осями p_1 и p_2. Тогда $g = g_2 g_1$ является движением и по свойству 31.3° имеет только одну неподвижную точку O. Движение g называется *поворотом вокруг точки O на угол φ*. Точка O

называется *центром поворота*. Важно отметить, что в произведении $g = g_2 g_1$ важен порядок, в котором берутся осевые симметрии g_1 и g_2, так как $g_2 g_1 \neq g_1 g_2$. Нетрудно доказать, что если $g = g_2 g_1$, то $g_1 g_2 = g^{-1}$ (см. задачу 11).

Покажем, что если M — произвольная точка плоскости, отличная от точки O, и $M' = g(M)$, то $OM = OM'$ и $\widehat{MOM'} = \varphi$. В самом деле, $g(M) = g_2(g_1(M)) = g_2(M_1) = M'$, где $M_1 = g_1(M)$. Так как $OM = OM_1$, $OM_1 = OM'$, то $OM = OM'$. Далее, пользуясь рис. 112, читатель легко убедится в том, что для любой точки M плоскости, отличной от O, $\widehat{MOM'} = \varphi$. Точка M' получается путем поворота точки M вокруг точки O на угол φ, причем интуитивно ясно, что для всех точек плоскости поворот совершается в одном и том же направлении, которое определяется направлением поворота прямой p_1 вокруг точки O до совпадения с прямой p_2, по кратчайшему пути.

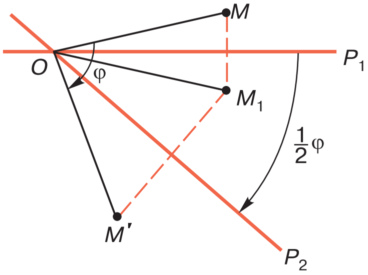


Рис. 112

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что центральная симметрия с центром O есть поворот вокруг точки O на угол $\varphi = 180°$. В этом случае направление поворота несущественно. Итак, *центральная симметрия* с центром O есть произведение двух осевых симметрий, оси которых проходят через точку O и взаимно перпендикулярны.

Таким образом, поворот вокруг точки является движением, которое имеет только одну неподвижную точку. Докажем обратное предположение.

Теорема 1. *Движение, которое имеет только одну неподвижную точку O, является поворотом вокруг точки O на некоторый угол.*

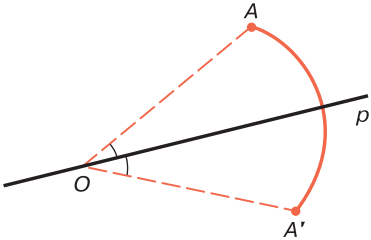


Рис. 113

□ Пусть g — данное движение. Возьмем какую-нибудь точку A плоскости, отличную от точки O, и рассмотрим ее образ $A' = g(A)$. Точки A и A' не совпадают и $OA = OA'$ поэтому лучи OA и OA' не могут совпасть, т. е. AOA' — некоторый угол (рис. 113). Рассмотрим движение

$$f = f_1 g, \tag{1}$$

где f_1 — симметрия относительно прямой p, содержащей биссектрису угла AOA' (если $\angle AOA'$ развернутый, то p — прямая, проходящая через O и перпендикулярная к прямой OA). Ясно, что точки O и A являются неподвижными точками движения f, поэтому при движении f луч OA переходит в себя и по следствию из теоремы 3 § 30 f либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия с осью OA. Из равенства (1) получаем: $ff_1 = f_1(f_1 g) = (f_1 f_1)g = eg = g$, где e — тождественное преобразование. Отсюда следует, что f не может быть тождественным преобразованием, так как при этом предположении $g = f_1$, т. е. g — осевая симметрия. Это противоречит условию теоремы. Итак, f — осевая симметрия, поэтому g — поворот вокруг точки O на некоторый угол. ■

3. Инвариантные прямые движения. Прямая называется *инвариантной* (неподвижной) *прямой* движения, если при этом движении она переходит в себя. Если все точки прямой являются инвариантными точками, то ясно, что и прямая является инвариантной. В этом случае она называется *прямой инвариантных точек*. Например, если f — отражение от прямой a, то a является прямой инвариантных точек, а любая прямая, перпендикулярная к a, является инвариантной прямой.

Лемма 1. *Если движение не имеет инвариантных точек, то оно может иметь не более чем одну инвариантную прямую.*

□ Доказательство проведем методом от противного, т. е. предположим, что существует некоторое движение g, которое не имеет неподвижных точек и имеет более чем одну инвариантную прямую. Две из них обозначим через a и b. Эти прямые не могут пересекаться, так как при этом предположении точка их пересечения была бы инвариантной точкой движения g, что противоречит условию леммы.

Рассмотрим два других возможных случая.

а) Прямые a и b являются расходящимися прямыми. Пусть AB — их общий перпендикуляр, $A \in a$, $B \in b$, а $A' = g(A)$, $B' = g(B)$. По следствию 2 из теоремы 1 § 15 длина отрезка AB меньше длины любого отрезка, отличного от AB, концы которого лежат на данных прямых. Так как $AB = A'B'$ и $A' \in a$, $B' \in b$, то отсюда мы заключаем, что точки A' и B' совпадают соответственно с точками A и B. Но этот вывод противоречит условию леммы.

б) Прямые a и b параллельны. Пусть AB — перпендикуляр, проведенный из точки A прямой a к прямой b, а $A' = g(A)$, $B' = g(B)$. Тогда $A' \in a$, $B' \in b$ и $A'B' \perp b$. Так как $AB = A'B'$, то по теореме 1 § 14 точки A и A' совпадают, что противоречит условию леммы.

Таким образом, наше предположение неверно, т. е. движение g либо не имеет ни одной инвариантной прямой, либо имеет только одну инвариантную прямую. ■

Отметим, что лемма 1 для движений евклидовой плоскости неверна. Например, параллельный перенос евклидовой плоскости не имеет неподвижных точек, но имеет бесконечное множество неподвижных прямых.

Лемма 2. *Если движение имеет только одну инвариантную прямую, то оно не имеет инвариантных точек и на инвариантной прямой каждый луч переходит в сонаправленный луч.*

□ Пусть a — единственная инвариантная прямая движения g. Если предположить, что существует инвариантная точка A движения g, т. е. $A = g(A)$, то прямая p, проходящая через точку A и перпендикулярная к a, является инвариантной прямой, так как образ p' этой прямой проходит через точку A, и перпендикулярна к a, т. е. совпадает с прямой p. Таким образом, движение g не может иметь инвариантных точек.

Докажем теперь второе утверждение леммы. Рассмотрим произвольный луч h прямой a, исходящий из точки A, его образ $h' = g(h)$, исходящий из точки A', и докажем, что $h \upuparrows h'$. Так как движение g не имеет неподвижных точек, то A и A' — различные точки. Обозначим через O середину отрезка AA'.

Допустим, что $h \uparrow\downarrow h'$. Из леммы § 5 мы заключаем, что либо $O \in h$ и $O \in h'$, либо $O \in h_1$ и $O \in h'_1$, где h_1 и h'_1 — продолжения соответственно лучей h и h'. Так как $h'_1 = g(h_1)$ и $AO = A'O$, то в каждом из этих случаев имеем: $O = g(O)$. Это противоречит доказанному выше утверждению, поэтому наше предположение неверно и $h \upuparrows h'$. ■

4. Движения, имеющие единственную инвариантную прямую. Пусть a — единственная инвариантная прямая движения g, а λ_1 и λ_2 — полуплоскости с общей границей a. Возьмем два случая: а) $\lambda_1 = g(\lambda_1)$ и $\lambda_2 = g(\lambda_2)$; б) $\lambda_2 = g(\lambda_1)$ и $\lambda_1 = g(\lambda_2)$. В случае а) движение называется *переносом вдоль прямой* a, а в случае б) — *скользящей симметрией* с осью a. Согласно лемме 2 эти движения не имеют ни одной инвариантной точки. Докажем теорему, из которой следует, что такие движения существуют.

Теорема 2. *Если a — произвольная прямая плоскости Лобачевского, а A и A' — две произвольные точки* *на ней, то существует единственный перенос вдоль прямой a и единственная скользящая симметрия с осью a, при которых точка A переходит в точку A'.*

□ Обозначим через h луч AA', а через h' луч $A'B$, сонаправленный с лучом h, и введем в рассмотрение флаги $\Phi = (A, h, \lambda_1)$, $\Phi'_1 = (A', h', \lambda_1)$и $\Phi'_2 = (A', h', \lambda_2)$, где λ_1 и λ_2 — полуплоскости с общей границей a.

а) Докажем, что существует единственный перенос вдоль прямой a, при котором точка A переходит в точку A'. По теореме 2 § 30 существует движение f, такое, что $\Phi'_1 = f(\Phi)$. Ясно, что a — инвариантная прямая этого движения. Докажем, что движение f не имеет неподвижных точек. Пусть, например, P — неподвижная точка этого движения f. Тогда прямая l, проходящая через точку P и перпендикулярная к прямой a, также является инвариантной прямой (см. доказательство леммы 2), поэтому точка O пересечения прямых a и l — неподвижная точка движения f, следовательно, $AO = OA'$, т. е. O — середина отрезка AA'. Но это невозможно, так как $O \in h$ и $O \notin h'$.

Согласно лемме 1 прямая a — единственная инвариантная прямая движения f. По определению f — перенос вдоль прямой a и $A' = f(A)$. Если f' — какой-нибудь перенос вдоль прямой a, при котором точка A переходит в точку A', то, очевидно, $\Phi'_1 = f'(\Phi)$, поэтому согласно теореме 2 § 30 f' совпадает с движением f.

б) Аналогично доказывается, что существует единственная скользящая симметрия с осью a, при которой точка A переходит в точку A'. Рассмотрим движение g, такое, что $\Phi'_2 = g(\Phi)$. Точно так же, как и в случае а), доказывается, что движение g не имеет неподвижных точек и имеет только одну инвариантную прямую — прямую a, поэтому g — скользящая симметрия с осью a и $A' = g(A)$.

Если g' — какая-нибудь скользящая симметрия с осью a, при которой точка A переходит в точку A', то, очевидно, $\Phi'_2 = g'(\Phi)$, поэтому согласно теореме 2 § 30 g' совпадает с движением g. ■

§ 32. Орициклическое движение

1. Орициклическое движение. Существенное отличие движений плоскости Лобачевского от движений евклидовой плоскости заключается в том, что на плоскости Лобачевского, в отличие от евклидовой плоскости, существуют движения, у которых нет ни одной инвариантной точки и ни одной инвариантной прямой. Такие движения называются *орициклическими движениями*. Смысл этого термина мы поясним в конце параграфа.

Докажем лемму, из которой следует, что существует бесконечное множество орициклических движений.

Лемма 1. *Произведение двух осевых симметрий, оси которых параллельны, есть орициклическое движение.*

□ Пусть f_1 и f_2 — данные осевые симметрии, оси AA' и BB' которых параллельны: $AA' \parallel BB'$. Докажем, что $f = f_2 f_1$ — орициклическое движение. По свойству 31.3° движение f не имеет инвариантных точек.

Докажем методом от противного, что f не имеет также инвариантных прямых.

Пусть p — инвариантная прямая этого движения. Тогда если $p' = f_1(p)$, то $p = f_2(p')$. Ясно, что прямые p и p' не совпадают, так как в противном случае прямая p является инвариантной прямой каждой из осевых симметрий f_1 и f_2, оси которых параллельны, что невозможно. Более того, прямые p и p' не имеют ни одной общей точки, так как если предположить, что M — их общая точка, то $M \in AA'$ и $M \in BB'$ что также невозможно, так как $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$. Следовательно, $p,\ p' \div AA'$ и $p,\ p' \div BB'$.

Отсюда мы заключаем, что непересекающиеся прямые p и p' имеют две оси симметрии AA' и BB'. Этот вывод противоречит теореме 3 § 11 или теореме 2 § 15.

Итак, движение $f = f_2 f_1$ не имеет ни инвариантных точек, ни инвариантных прямых, т. е. является орициклическим движением. ■

Докажем теперь теорему о задании орициклического движения.

Теорема 1. *Если лучи AA' и BB' параллельны и $\angle A'AB = \angle B'BA$, то существует одно и только одно орициклическое движение, при котором луч AA' переходит в луч BB'.*

□ Докажем сначала, что существует орициклическое движение, при котором луч AA' переходит в луч BB'. Для этого рассмотрим серединный перпендикуляр d к отрезку AB.

Так как AB — секущая равного наклона параллельных прямых $\overline{AA'}$ и BB', то прямая d является осью симметрии прямых AA' и BB', причем по теореме 3 § 11 $AA' \parallel d$, $BB' \parallel d$. Рассмотрим осевую симметрию f_1 с осью AA' и другую осевую симметрию f_2 с осью d. Движение $f = f_2 f_1$ — искомое орициклическое движение. В самом деле, по предыдущей лемме f — орициклическое движение. При движении f_1 луч AA' переходит в себя, а при симметрии f_2 — в луч BB' (лучи AA' и BB' симметричны относительно прямой d, так как $\angle A'AB = \angle B'BA$ и d — ось симметрии прямых AA' и BB'). Таким образом, при движении f луч AA' переходит в луч BB'.

Из теоремы 3 § 30 непосредственно следует, что f — единственное орициклическое движение, при котором луч AA' переходит в луч BB'. В самом деле, существуют только два движения, при каждом из которых луч AA' переходит в луч BB'. Одним из этих движений является движение f, а другим — движение f_2. Но f_2 имеет бесконечное множество неподвижных точек, следовательно, не является орициклическим движением. ■

2. Инвариантные пучки движения. Согласно теореме 1 § 18 при движении пучок прямых данного типа переходит в пучок прямых того же типа. Пучок будем называть *инвариантным пучком движения*, если при этом движении пучок переходит в себя.

Очевидно, пучок пересекающихся прямых с центром O является инвариантным пучком движения g тогда и только тогда, когда O — неподвижная точка движения g, а пучок расходящихся прямых с базой l является инвариантным пучком движения g тогда и только тогда, когда l — инвариантная прямая движения g. Отсюда следует, что если движение не имеет инвариантных точек (инвариантных прямых), то оно не может иметь инвариантных пучков пересекающихся прямых (расходящихся прямых). В частности, поворот вокруг точки, отличный от центральной симметрии, не имеет инвариантных пучков расходящихся прямых, а перенос вдоль прямой и скользящая симметрия не имеют инвариантных пучков пересекающихся прямых.

Выясним теперь, при каком условии пучок P параллельных прямых, заданный направленной прямой $\overline{AB}$, является инвариантным пучком движения g. Если $\overline{A'B'} = g(\overline{AB})$, то ясно, что пучок P является инвариантным пучком движения g тогда и только тогда, когда либо $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$, либо $\overline{A'B'}$ и $\overline{AB}$ — одна и та же направленная прямая. Например, если g — перенос вдоль прямой a, при котором точка A этой прямой переходит в точку A' той же прямой, то по лемме 2 § 31 при движении g направленная прямая AA' переходит в себя, поэтому пучок параллельных прямых, заданный прямой AA', является инвариантным пучком параллельных прямых движения g.

Отметим, наконец, что существуют движения, которые имеют бесконечное множество инвариантных пучков. Например, если g — осевая симметрия с осью a, то любой пучок пересекающихся прямых с центром на прямой a является инвариантным пучком и любой пучок расходящихся прямых с базой, перпендикулярной к прямой a, а также пучок с базой a являются инвариантными пучками движения g.

3. Теорема существования инвариантного пучка параллельных прямых орициклического движения. Орициклическое движение не имеет ни одной инвариантной точки и ни одной инвариантной прямой, поэтому оно не может иметь инвариантных пучков пересекающихся прямых или инвариантных пучков расходящихся прямых. Докажем, что орициклическое движение имеет инвариантный пучок параллельных прямых. Предварительно рассмотрим лемму.

Лемма 2. *Два пучка параллельных прямых имеют одну и только одну общую ненаправленную прямую.*

□ Обозначим через P_1 и P_2 данные пучки параллельных прямых. Докажем сначала, что эти пучки имеют общую прямую. Для этого через какую-нибудь точку A плоскости проведем направленные прямые AB_1 и AB_2, $AB_1 \in P_1$, $AB_2 \in P_2$. Если ненаправленные прямые AB_1 и AB_2 совпадают, то AB_1 — общая прямая данных пучков. Рассмотрим случай, когда AB_1 и AB_2 — различные прямые, т. е. когда $\angle B_1AB_2$ неразвернутый. Пусть l — заградительная прямая этого угла. Возьмем на прямой l точки C и D так, чтобы $CD \parallel AB_1$, тогда $DC \parallel AB_2$. Отсюда следует, что l — общая прямая пучков P_1 и P_2.

Прямая l — единственная общая прямая пучков P_1 и P_2, так как в противном случае согласно лемме § 18 пучки P_1 и P_2 совпадают. ■

Теорема 2. *Каждое орициклическое движение имеет один и только один инвариантный пучок параллельных прямых.*

□ Возьмем произвольную точку A плоскости и рассмотрим точки $A_1 = g(A)$, $A_2 = g(A_1)$, где g — данное орициклическое движение. Так как движение g не имеет неподвижных точек и инвариантных прямых, то A, A_1, A_2 — попарно различные точки, не лежащие на одной прямой. Обозначим через B и C середины отрезков AA_1 и A_1A_2 и проведем серединные перпендикуляры b и c к отрезкам AA_1 и A_1A_2. Так как $AA_1 = A_1A_2$, а B и C — середины отрезков AA_1 и A_1A_2, то $C = g(B)$, поэтому $c = g(b)$ (рис. 114, a).

Обозначим через λ, полуплоскость с границей BC, $A \in \lambda$, $A_2 \in \lambda$ и на прямых b и c возьмем точки $B_1 \in \lambda$, $C_1 \in \lambda$. Пусть h и k — лучи BB_1 и CC_1 (см. рис. 114, a). При движении g луч BC переходит в луч CC', где $C' = g(C)$, поэтому угол A_1BC переходит в угол A_2CC'.

Так как $\alpha = \beta = \gamma$ (см. обозначения углов на рис. 114, a), то точка C' не может лежать на прямой BC (в противном случае BC — инвариантная прямая движения g, что невозможно), поэтому точка C' лежит

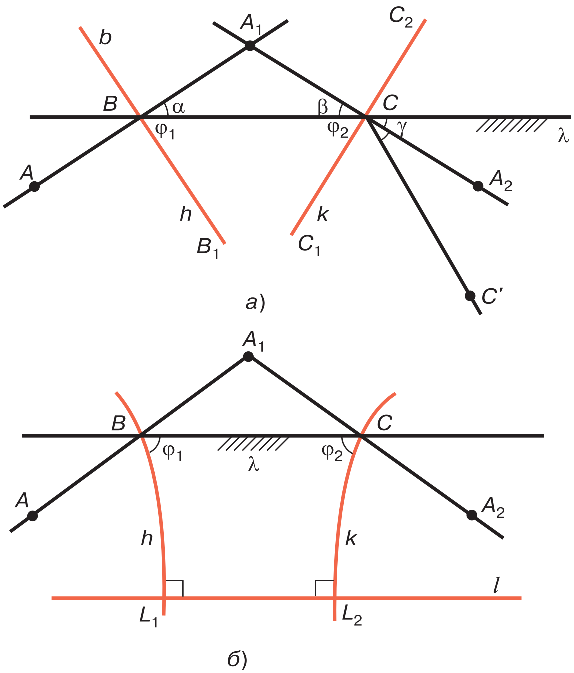


Рис. 114

внутри угла BCA_2, и, следовательно, угол $C'CC_2$ тупой, где $C_2 \in c$ и C_1–C–C_2.

Докажем, что $k = g(h)$. Так как при движении g $B \mapsto C$, $b \mapsto c$, то либо $h \mapsto k$, либо $h \mapsto$ лCC_2, где лCC_2 — продолжение луча k. Второй случай невозможен, так как углы φ_1 и φ_2 острые и острый угол B_1BC не может перейти в тупой угол C_2CC'. Итак, $k = g(h)$. Отсюда следует, что $\overline{CC_1} = g(\overline{BB_1})$.

Докажем, что $\overline{BB_1} \parallel \overline{CC_1}$. Для этого заметим, что по теореме 2 § 18 серединные перпендикуляры к сторонам треугольника AA_1A_2 принадлежат одному пучку, который обозначим через P. Возможны три случая:

а) P — пучок пересекающихся прямых с центром O. Точка O принадлежит лучам h и k, так как углы φ_1 и φ_2 острые. Далее, $\triangle A_1BO = \triangle A_2CO$, поэтому

$BO = CO$. Отсюда мы заключаем, что O — неподвижная точка движения g, что невозможно.

б) P — пучок расходящихся прямых с базой l, которая пересекает прямые b и c соответственно в точках L_1 и L_2 (рис. 114, *б*). По следствию из теоремы 2 § 18 точки A, A_1 и A_2 лежат по одну сторону от прямой l, поэтому и точки B и C лежат по одну сторону от нее. Так как $\varphi_1 = \varphi_2$ острые углы, то $L_1 \in h$ и $L_2 \in k$, и по теореме 3 § 13 L_1L_2CB — четырехугольник Саккери, т. е. $BL_1 = CL_2$. Отсюда следует, что $L_2 = g(L_1)$. При движении g прямая l, которая проходит через точку L_1 и $l \perp b$, переходит в прямую l', проходящую через точку L_2 и $l' \perp c$. Но $L_2 \in l$ и $l \perp c$, поэтому прямые l и l' совпадают, что невозможно.

в) P — пучок параллельных прямых, т. е. $b \parallel c$. Так как φ_1 и φ_2 — равные острые углы, то $h \parallel k$, т. е. $\overline{BB_1} \parallel \overline{CC_1}$. Таким образом, пучок Q параллельных прямых, заданный прямой $\overline{BB_1}$, переходит в пучок Q' параллельных прямых, заданный прямой $\overline{CC_1}$. Так как $\overline{BB_1} \parallel \overline{CC_1}$, то Q и Q' совпадают, т. е. Q — инвариантный пучок параллельных прямых движения g.

Остается доказать, что Q — единственный инвариантный пучок параллельных прямых движения g.

Пусть, напротив, Q_1 — еще один инвариантный пучок параллельных прямых этого движения. По предыдущей лемме существует общая прямая l этих двух пучков. Если $l' = g(l)$, то ясно, что $l' \in Q$ и $l' \in Q_1$. По предыдущей лемме l и l' совпадают, т. е. l — инвариантная прямая движения g. Мы пришли к противоречию. ■

Следствие 1. *Любое движение на плоскости Лобачевского имеет хотя бы один инвариантный пучок.*

□ Пусть g — данное движение. Если оно имеет хотя бы одну инвариантную точку или инвариантную прямую, то, как было отмечено выше, движение g имеет инвариантный пучок пересекающихся или расходящихся прямых. Если же g не имеет инвариантных точек и прямых, то оно является орициклическим движением, поэтому по доказанной теореме оно имеет инвариантный пучок параллельных прямых. ■

В заключение параграфа отметим следующее интересное свойство инвариантного пучка параллельных прямых орициклического движения, доказательство которого предоставляем читателю (см. задачу 26): *при данном орициклическом движении f каждый орицикл, осями которого являются прямые инвариантного пучка параллельных прямых движения f, переходит в себя*. Это свойство поясняет термин «орициклическое движение».

§ 33. Классификация движений на плоскости Лобачевского

1. Классификация движений, имеющих инвариантные точки. Проведем классификацию движений плоскости Лобачевского, рассматривая все возможные случаи в зависимости от наличия неподвижных точек.

1°. Движение имеет по крайней мере три неподвижные точки, не лежащие на одной прямой. По свойству 31.1° данное движение является тождественным преобразованием.

2°. Движение, отличное от тождественного преобразования, имеет по крайней мере две неподвижные точки. По свойству 31.2° данное движение является осевой симметрией, на оси которой лежат все неподвижные точки движения.

3°. Движение имеет только одну неподвижную точку. По теореме 1 § 31 данное движение является поворотом вокруг неподвижной точки.

Таким образом, на плоскости Лобачевского движение, имеющее хотя бы одну неподвижную точку, является либо тождественным преобразованием, либо осевой симметрией, либо поворотом вокруг точки.

Мы видим, что классификация движений на плоскости Лобачевского, имеющих неподвижные точки, совпадает с классификацией движений на плоскости Евклида, имеющих неподвижные точки.

2. Классификация движений, не имеющих инвариантных точек. Согласно лемме 1 § 31 движение, которое не имеет инвариантных точек, может иметь не более чем одну инвариантную прямую, поэтому возможны два случая:

4°. Движение имеет единственную инвариантную прямую. Если a — инвариантная прямая, а λ_1 и λ_2 — полуплоскости с общей границей a, то согласно изложенному в п. 4 § 31 данное движение g является либо переносом вдоль прямой a (в этом случае $\lambda_1 = g(\lambda_1)$, $\lambda_2 = g(\lambda_2)$), либо скользящей симметрией (в этом случае $\lambda_2 = g(\lambda_1)$ и $\lambda_1 = g(\lambda_2)$).

5°. Движение не имеет инвариантных прямых. В этом случае по определению движение является орициклическим движением.

Таким образом, на плоскости Лобачевского существуют три типа движений, не имеющих инвариантных точек: перенос вдоль прямой, скользящая симметрия (эти движения имеют единственную инвариантную прямую) и орициклическое движение, которое не имеет инвариантных точек и инвариантных прямых, но имеет единственный инвариантный пучок параллельных прямых.

3. Теорема о классификации движений на плоскости Лобачевского. Подытожив результаты, полученные выше, мы приходим к следующей теореме:

Теорема. *На плоскости Лобачевского существует шесть типов движений, которые приведены в следующей таблице.*

№	**Наименование движения**	**Инвариантные точки**	**Инвариантные прямые**
	Движения, которые имеют неподвижные точки		
1	Тождественное преобразование	Любая точка плоскости	Любая прямая плоскости
2	Осевая симметрия	Любая точка оси симметрии	Ось симметрии и любая прямая, перпендикулярная к ней

№	**Наименование движения**	**Инвариантные точки**	**Инвариантные прямые**
Движения, которые имеют неподвижные точки			
3	Поворот вокруг точки на угол φ	Одна точка, центр поворота	Нет, если $\varphi \neq 180^\circ$, и любая прямая, проходящая через центр симметрии, если $\varphi = 180^\circ$
Движения, которые не имеют неподвижных точек			
4	Перенос вдоль прямой	Нет	Одна прямая
5	Скользящая симметрия	Нет	Одна прямая
6	Орициклическое движение	Нет	Нет

§ 34. Группа симметрий циклических линий

1. Группа симметрий фигуры. Напомним читателю понятие группы симметрий данной фигуры. Множество D_F всех движений плоскости, переводящих данную фигуру F в себя, образует группу. Если эта группа содержит элементы, отличные от единицы группы (тождественного преобразования), то она называется *группой симметрий фигуры* F, а ее элементы — симметриями фигуры F (см. [3], § 45). Если D_F состоит из одного тождественного преобразования, то говорят, что фигура F не имеет симметрии. Группа D_F может иметь бесконечное множество элементов и может содержать конечное число элементов. Например, равнобедренный, но не равносторонний треугольник имеет группу симметрий, состоящую из двух элементов: тождественного преобразования и отражения от прямой, содержащей биссектрису треугольника, проведенную к основанию. Равносторонний треугольник имеет группу симметрий, состоящую из шести элементов, а разносторонний треугольник не имеет симметрий. Ниже рассмотрим примеры фигур, имеющих бесконечное множество симметрий.

2. Группа симметрий циклических линий. Группа симметрий фигуры F называется *транзитивной*, если, каковы бы ни были две точки A и B фигуры, существует элемент группы, т. е. движение, которое фигуру F переводит в себя и точку A — в точку B.

Теорема. *Каждая циклическая линия имеет бесконечную транзитивную группу симметрий.*

□ Пусть γ — данная циклическая линия, а A и B — две произвольные ее точки. Линия γ является траекторией некоторого пучка, поэтому по свойству 19.3° серединный перпендикуляр d к хорде AB является осью линии γ, следовательно, линия γ симметрична относительно прямой d. Таким образом, существует движение f (симметрия относительно прямой d), которое линию γ переводит в себя, а точку A — в точку B. Ясно, что f принадлежит группе симметрий линии γ. Так как точки A и B на линии γ можно выбрать произвольно и γ имеет бесконечное множество точек, то группа симметрий этой линии является бесконечной транзитивной группой. ■

Из доказательства этой теоремы непосредственно следует:

Следствие. *Отражение от произвольной оси данной циклической линии γ является элементом группы симметрий линии γ.*

Выясним более подробно, какие движения могут быть элементами группы симметрий D_γ той или иной циклической линии γ.

а) Окружность. Пусть γ — окружность с центром O радиуса r. Докажем утверждение: *для того чтобы $f \in D_\gamma$, необходимо и достаточно, чтобы $O = f(O)$.* В самом деле, если $O = f(O)$, то по лемме 1 § 20 окружность γ переходит в окружность с центром O радиуса r, т. е. в ту же окружность γ. Обратно: если $f \in D_\gamma$, т. е. если $\gamma = f(\gamma)$, то по теореме 3 § 19 $O = f(O)$. Таким образом, если y — окружность с центром O, то

D_γ состоит из тех и только тех движений, для которых точка O является инвариантной точкой. Согласно теореме § 33 D_γ состоит из следующих движений: 1) тождественное преобразование; 2) любая осевая симметрия, ось которой проходит через точку O; 3) любой поворот вокруг точки O.

б) Эквидистанта. Пусть γ — эквидистанта с базой l, полуплоскостью λ и высотой h. Докажем утверждение: *для того чтобы $f \in D_\gamma$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda = f(\lambda)$.* В самом деле, если $\lambda = f(\lambda)$, то $l = f(l)$ (см. задачу 2). По лемме 2 § 22 эквидистанта γ переходит в эквидистанту с полуплоскостью λ, базой l и высотой h, т. е. в ту же эквидистанту γ. Обратно: если $f \in D_\gamma$, т. е. если $\gamma = f(\gamma)$, то по теореме 3 § 19 $\lambda = f(\lambda)$.

Таким образом, если γ — эквидистанта с базой l и полуплоскостью λ, то D_γ состоит из тех и только тех движений, для которых прямая l является инвариантной прямой, а полуплоскость λ переходит в полуплоскость λ. Согласно теореме § 33 D_γ состоит из следующих движений: 1) тождественное преобразование; 2) любая осевая симметрия, ось которой перпендикулярна прямой l; 3) любой перенос вдоль прямой l.

в) Орицикл. Пусть γ — орицикл, заданный лучом AA_1. Докажем утверждение: *для того чтобы $f \in D_\gamma$, необходимо и достаточно, чтобы образ луча AA_1 при движении f являлся лучом орицикла γ.* В самом деле, пусть $A'A'_1$ — образ луча AA_1 при данном движении f и $A'A'_1$ — луч орицикла γ. При движении f орицикл γ переходит в орицикл, заданный лучом $A'A'_1$, т. е. в тот же орицикл γ. Обратно: если $f \in D_\gamma$, т. е. если $\gamma = f(\gamma)$, то, очевидно, образ луча AA_1 является лучом орицикла γ.

Таким образом, если γ — орицикл, заданный лучом AA_1, то D_γ состоит из тех и только тех движений, для которых образ луча AA_1 является лучом того же орицикла γ. Пусть AA_1 и BB_1 — произвольные лучи орицикла γ. Если эти лучи совпадают, то согласно следствию из теоремы 3 § 30 движение f является либо тождественным преобразованием, либо симметрией относительно прямой AA_1. Если же AA_1 и BB_1 —

различные лучи, то согласно теореме 3 § 30 существуют два и только два движения, при каждом из которых луч AA_1 переходит в луч BB_1. Одним из этих движений, очевидно, является симметрия относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB. Другим движением согласно теореме 1 § 32 является орициклическое движение, при котором луч AA_1 переходит в луч BB_1. Итак, D_γ состоит из следующих движений: 1) тождественное преобразование; 2) любая симметрия относительно прямой, которая является осью орицикла γ; 3) любое орициклическое движение, которое один из произвольных лучей орицикла γ переводит в другой произвольный луч.

Отметим также, что из утверждения, сформулированного в конце § 32, непосредственно следует: если P — пучок параллельных прямых, который образуют оси данного орицикла γ, то любое орициклическое движение, для которого P является инвариантным пучком параллельных прямых, принадлежит группе симметрий орицикла.

§ 35. Конгруэнтные отображения прямой на прямую. Движения прямой

1. Конгруэнтные отображения прямой на прямую. Взаимно однозначное отображение точек прямой a на точки прямой a' называется *конгруэнтным*, если при этом отображении сохраняются расстояния между любыми двумя точками, т. е. если произвольные точки M и N прямой a переходят в точки M' и N' прямой a', то $MN = M'N'$. В случае, когда прямые a и a' совпадают, т. е. когда конгруэнтное отображение является отображением точек прямой на точки той же прямой, то отображение называется *движением прямой*. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть две прямые a и b симметричны относительно точки O. Каждой точке M прямой a поставим в соответствие точку N прямой b, симметричную точке M относительно точки O. Очевидно, такое отображение точек прямой a на прямую b является конгруэнтным.

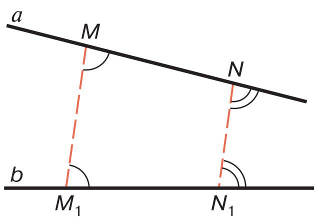


Рис. 115

Пример 2. Рассмотрим две параллельные прямые a и b. Каждой точке M прямой a поставим в соответствие точку M_1 прямой b, где MM_1 — секущая равного наклона прямых a и b (рис. 115). Если M и N — произвольные точки прямой a, а M_1 и N_1 — их образы на прямой b, то $MN = M_1N_1$, так как по теореме 3 § 28 MNN_1M_1 — равнобедренный четырехугольник. Таким образом, построенное нами отображение является конгруэнтным.

Пример 3. Пусть f — какое-нибудь движение плоскости, при котором прямая a переходит в прямую b. Каждой точке M прямой a поставим в соответствие точку $M' = f(M)$ прямой a'. Очевидно, такое отображение точек прямой a на точки прямой a' является конгруэнтным. Если a — инвариантная прямая движения f, то прямые a и a' совпадают и построенное нами отображение является движением прямой a. Нетрудно доказать, что при конгруэнтном отображении прямой на прямую, в частности при движении прямой, каждый луч переходит в луч. Далее, если h и k — произвольные лучи на прямых a и b, то существует одно и только одно конгруэнтное отображение прямой a на прямую b, при котором луч h переходит в луч k.

2. Теорема Гельмслева. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. *Если l — инвариантная прямая движения g, а точки M и $M' = f(M)$ лежат по разные стороны от прямой l, то точка M_0 пересечения отрезка MM' с прямой l является серединой отрезка MM'.*

□ Пусть MH и $M'H'$ — перпендикуляры, проведенные к прямой l. При движении g прямая MH, которая перпендикулярна к прямой l, переходит в прямую, проходящую через точку M' и перпендикулярную к прямой

l, т. е. в прямую $M'H'$. Отсюда следует, что $H' = g(H)$, поэтому $MH = M'H'$.

Если точки H и H' совпадают, то точка M_0 совпадает с этими точками и поэтому является серединой отрезка MM'. А если H и H' — различные точки, то прямоугольные треугольники HMM_0 и $H'M'M_0$ равны по катету и противолежащему углу, поэтому $MM_0 = M'M_0$, т. е. M_0 — середина отрезка MM'. ■

Докажем теперь теорему, которая в евклидовой геометрии была известна очень давно. Шведский математик Гельмслев в начале XX века установил, что эта теорема относится к абсолютной геометрии, поэтому она остается справедливой и в геометрии Лобачевского. Эта теорема, которую мы назовем *теоремой Гельмслева*, имеет многочисленные приложения.

Теорема. *При конгруэнтном отображении f прямой a на прямую b середины отрезков*, соединяющих соответственные точки, лежат на одной прямой.*

□ Если прямые a и b совпадают, то утверждение теоремы очевидно, поэтому докажем теорему для случая, когда a и b — различные прямые.

Пусть A_1 и A_2 — произвольные точки прямой a, а B_1 и B_2 — их образы на прямой b. Обозначим через T_1 середину отрезка A_1B_1 и проведем прямую c, симметричную прямой a относительно точки T_1 (рис. 116).

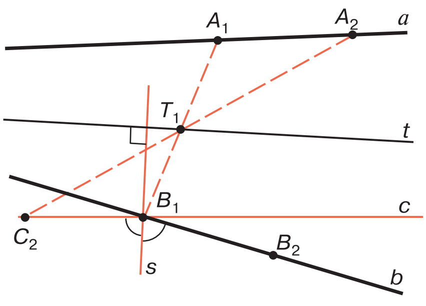


Рис. 116

* Мы не исключаем случай, когда отдельные отрезки «нулевые», т. е. их конечные точки совпадают. Серединой «нулевого» отрезка AA считается точка A.

Отметим, далее, на прямой c точку C_2, симметричную точке A_2 относительно точки T_1, и проведем прямую s, содержащую биссектрису угла $B_2B_1C_2$ (если прямые B_1B_2 и B_1C_2 совпадают, то s — прямая, относительно которой лучи B_1B_2 и B_1C_2 симметричны). Проведем, наконец, прямую t, проходящую через точку T_1 и перпендикулярную к прямой s (см. рис. 116).

Докажем, что середины отрезков, соединяющих соответственные точки прямых a и b, при отображении f лежат на прямой t. При симметрии g_1 плоскости относительно точки T_1 прямая a переходит в прямую c, а при симметрии g_2 относительно прямой s прямая c переходит в прямую b. Ясно, что $B_1 = g_2g_1(A_1)$, $B_2 = g_2g_1(A_2)$. Отсюда, учитывая, что f — единственное конгруэнтное отображение прямой a на прямую b, при котором луч A_1A_2 переходит в луч B_1B_2, мы заключаем, что движение g_2g_1 индуцирует на прямых a и b отображение f. С другой стороны, $t = g_1(t)$, $t = g_2(t)$, поэтому $t = g_2g_1(t)$, т. е. t — инвариантная прямая движения g_2g_1.

Пусть $X \in a$, а Y — образ точки X на прямой b при отображении f. Тогда $Y = g_2g_1(X)$. Докажем, что X, $Y \div t$. Возможны два случая: а) прямые a и t не имеют общих точек. Прямая t — инвариантная прямая движения g_2g_1, поэтому и прямые b и t не имеют общих точек, поэтому так как A_1, $B_1 \div t$, то X, $Y \div t$; б) прямые a и t пересекаются в некоторой точке M. Ясно, что точка $N = f(M)$ является точкой пересечения прямых t и b, при отображении f луч MA_1 переходит в луч NB_1, и так как A_1, $B_1 \div t$, то лучи MA_1 и NB_1 расположены в разных полуплоскостях с границей t. Следовательно, если X — точка луча MA_1, то Y — точка луча NB_1, тогда X, $Y \div t$. Аналогично, если X — точка на продолжении луча MA_1, то Y — точка на продолжении луча NB_1, тогда и в этом случае X, $Y \div t$. По предыдущей лемме середина отрезка XY лежит на прямой t. ■

Задачи к главе 6

1. Доказать, что если при данном движении полуплоскость переходит в себя, то ее граница является инвариантной прямой движения.
2. На биссектрисе внешнего угла при вершине C треугольника ABC взята точка M. Доказать, что $AC + CB < AM + MB$.
3. Две точки A и B лежат по одну сторону от прямой l. Доказать, что на прямой l существует единственная точка M_0, такая, что $AM_0 + M_0B < AM + MB$, где M — любая точка прямой l, отличная от точки M_0.
4. На боковых сторонах равнобедренного треугольника ABC с основанием BC вне треугольника построены равносторонние треугольники ABC_1 и ACB_1. Доказать, что $BB_1 = CC_1$.
5. Точка B — середина отрезка AC. На отрезках AB и BC в одной полуплоскости с границей AC построены равносторонние треугольники ABE и BCF. Точки M и N — середины отрезков AF и CE. Доказать, что треугольник BMN равнобедренный.
6. Даны две пересекающиеся прямые и точка M, не лежащая на них. Доказать, что существует не более чем один отрезок с серединой M, концы которого лежат на данных прямых.
7. К какому типу относятся движения, при которых данный луч h переходит в: а) продолжение луча h; б) луч k, где hk — неразвернутый угол?
8. Преобразование, обратное данному движению f, совпадает с f. Доказать, что f либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия, либо центральная симметрия.
9. Доказать, что произведение центральной симметрии с центром O и осевой симметрии с осью a есть: а) осевая симметрия, если $O \in a$; б) скользящая симметрия, если $O \notin a$.
10. Даны две осевые симметрии g_1 и g_2. Доказать, что если $g_2 g = g$, то $g_1 g_2 = g^{-1}$.

11. Указать все виды движений, при которых данный равносторонний треугольник переходит в себя.
12. Указать все виды движений, при которых данный отрезок переходит в себя.
13. Дан двуугольник $hABk$, углы A и B которого прямые. Указать все виды движений, при которых луч h переходит в луч k.
14. Доказать, что произведение двух осевых симметрий, оси которых взаимно перпендикулярны, есть центральная симметрия.
15. Доказать, что произведение двух осевых симметрий, оси которых являются расходящимися прямыми, есть перенос вдоль прямой.
16. Доказать, что произведение двух центральных симметрий является переносом вдоль прямой.
17. Доказать, что произведение переноса вдоль прямой a и симметрии относительно a есть скользящая симметрия с осью a.
18. Доказать, что любую скользящую симметрию с осью a можно представить как произведение переноса вдоль прямой a и симметрии относительно прямой a.
19. При переносе вдоль прямой a точка A, не лежащая на прямой a, переходит в точку A_1, а точка A_1 — в точку A_2. Доказать, что A, A_1 и A_2 попарно различные точки и лежат на одной эквидистанте с базой a.
20. Доказать, что при данном переносе вдоль прямой a любая эквидистанта с базой a переходит в себя.
21. Дана эквидистанта γ с базой a и высотой h. Доказать, что при скользящей симметрии с осью a эквидистанта γ переходит в эквидистанту γ' с той же базой a и высотой h, симметричную эквидистанте γ относительно прямой a.
22. При движении g луч AA_1 переходит в параллельный луч BB_1, причем $\angle A_1AB \neq \angle B_1BA$. Доказать, что g является либо скользящей симметрией, либо переносом вдоль прямой.

23. При орициклическом движении луч AA_1 переходит в параллельный луч BB_1. Доказать, что $\angle A_1AB = \angle B_1BA$.
24. При орициклическом движении точка A переходит в точку A_1, а точка A_1 — в точку A_2. Доказать, что A, A_1 и A_2 — попарно различные точки и лежат на одном орицикле.
25. Пучок P является инвариантным пучком параллельных прямых данного орициклического движения. Доказать, что при данном движении любой орицикл, оси которого принадлежат пучку P, переходит в себя.
26. Доказать, что при конгруэнтном отображении прямой на прямую, в частности при движении прямой: а) сохраняется отношение «лежать между»; б) каждый луч переходит в луч.
27. Даны две прямые AB и CD. Доказать, что существует не более одного конгруэнтного отображения прямой AB на прямую CD, при котором точка A переходит в точку C, а точка B — в точку D.
28. На прямых a и b даны соответственно лучи h и k. Доказать, что существует одно и только одно конгруэнтное отображение прямой a на прямую b, при котором луч h переходит в луч k.
29. Доказать, что если движение данной прямой имеет по крайней мере две неподвижные точки, то оно является тождественным преобразованием прямой.

Глава 7

РАСШИРЕННАЯ ПЛОСКОСТЬ. ВЫРОЖДЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

§ 36. Отображение плоскости Лобачевского на открытый круг

1. Отображение Ω_{Or}. Введем некоторые отображения плоскости о Лобачевского в себя, которые будут использованы в дальнейшем изложении.

Зададим произвольную окружность (O, r) и обозначим через Ω множество всех внутренних точек круга $(\overline{O, r})$ с границей (O, r). Рассмотрим затем острый угол $\widetilde{\varphi}$, мера φ которого равна $\Pi(r)$, и, используя его, построим отображение плоскости σ на Ω. Точке O поставим в соответствие ту же точку O, а каждой точке A плоскости σ, отличной от точки O,— точку A' луча OA, которая определяется так: отложим от луча OA угол AOM, равный углу $\widetilde{\varphi}$, проведем перпендикуляр AA_0 к прямой OM, а затем на луче OA отложим отрезок OA', равный отрезку OA_0 (рис. 117, *а*). Так как угол $\widetilde{\varphi}$ острый, то A_0 — точка луча OM. Легко видеть, что $OA' = OA_0 < r$. В самом деле, если на луче OM отложить

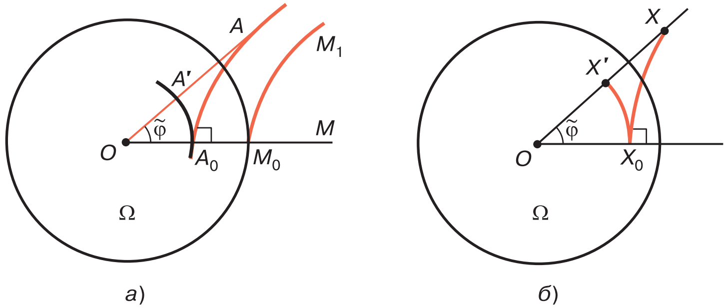


Рис. 117

отрезок $OM_0 = r$ и провести прямую $M_0M_1 \perp OM$, то так как $\widetilde{\varphi}$ — угол параллельности, соответствующий отрезку OM_0, то $\overline{OA} \parallel \overline{M_0M_1}$, поэтому $OA_0 < r$. Таким образом, $OA' < r$, т. е. $A' \in \Omega$. Построенное нами отображение для краткости назовем *отображением* Ω_{Or}.

Докажем, что *отображение* Ω_{Or} *является взаимно однозначным отображением всех точек плоскости* σ *Лобачевского на внутреннюю область* Ω *круга* $(\overline{O, r})$.

Выше было показано, что при этом отображении любая точка X плоскости переходит в точку $X' \in \Omega$. Докажем, что если точки X и Y не совпадают, то их образы X' и Y' также не совпадают.

Это утверждение очевидно, если одна из этих точек совпадает с точкой O или если OX и OY — различные лучи. Если эти лучи совпадают, то так как $OX \neq OY$, то $OX_0 \neq OY_0$, поэтому $OX' \neq OY'$, т. е. X' и Y' — различные точки. Читатель, используя рис. 117, *б*, без труда самостоятельно докажет, что если X' — произвольная точка области Ω, то существует точка X плоскости, образом которой при отображении Ω_{0r} является точка X'.

2. Основные свойства отображения Ω_{Or}. Докажем две теоремы, в которых выражены основные свойства отображения Ω_{Or}.

Теорема 1. *При отображении* Ω_{Or}*:*

а) *сохраняется коллинеарность трех точек;*

б) *сохраняется отношение «лежать между» для точек;*

в) *три неколлинеарные точки переходят в три неколлинеарные точки.*

□ а) Пусть A, B, C — три коллинеарные точки, а A', B', C' — их образы. Если точки A, B, C лежат на прямой, проходящей через точку O, то точки A', B', C' лежат на той же прямой, поэтому они коллинеарны.

Рассмотрим случай, когда точка O не лежит на прямой a, проходящей через точки A, B и C.

Пусть f — поворот вокруг точки O на угол $2\widetilde{\varphi}$, а $a_1 = f(a)$, $A_1 = f(A)$, $B_1 = f(B)$, $C_1 = f(C)$. Здесь $\varphi = \Pi(r)$. На прямых a и a_1 индуцируется конгруэнтное отображение (см. § 35, п. 1, пример 3), поэтому по теореме Гельсмлева середины A_0, B_0 и C_0 отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 лежат на одной прямой (рис. 118).

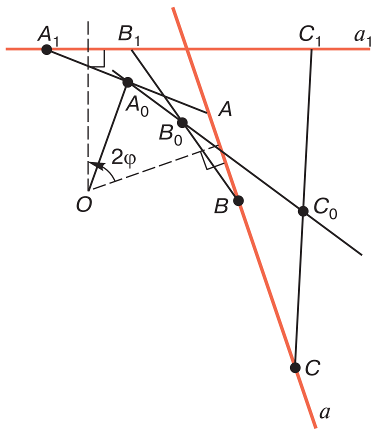


Рис. 118

Так как $\angle AOA_1 = 2\widetilde{\varphi}$ и OA_0 — медиана равнобедренного треугольника AOA_1, то $OA_0 \perp AA_0$, т. е. AA_0 — перпендикуляр к прямой OA_0 и $\angle AOA_0 = \widetilde{\varphi}$. Аналогично BB_0 — перпендикуляр к прямой OB_0 и $\angle BOB_0 = \widetilde{\varphi}$, CC_0 — перпендикуляр к прямой OC_0 и $\angle COC_0 = \widetilde{\varphi}$. При повороте f_1 вокруг точки O на угол $\widetilde{\varphi}$ имеем: $A' = f_1^{-1}(A_0)$, $B' = f_1^{-1}(B_0)$, $C' = f_1^{-1}(C_0)$ (на рис. 118 точки A', B' и C' не изображены). Так как при повороте сохраняется коллинеарность точек, то точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

б) Докажем теперь, что если A–B–C, то A'–B'–C. По доказанному точки A', B', C' лежат на одной прямой a'. Возможны два случая:

1) $O \in a$. Тогда прямая a' совпадает с прямой a. В этом случае, очевидно, A_0–B_0–C_0, и поэтому A'–B'–C' (рис. 119, *а*);

2) $O \notin a$. В этом случае так как A–B–C, то OB — внутренний луч угла AOC, следовательно, OB' — внутренний луч угла $A'OB'$, и, учитывая, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой, мы заключаем, что A'–B'–C' (рис. 119, *б*).

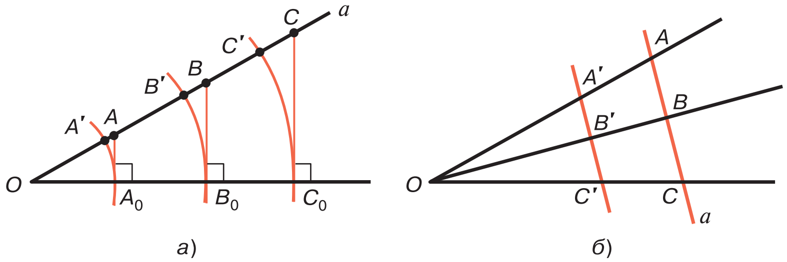


Рис. 119

в) Предлагаем читателю, пользуясь методом от противного, самостоятельно доказать, что при отображении Ω_{Or} любые три неколлинеарные точки переходят в три неколлинеарные точки. ■

3. Образ прямой при отображении Ω_{Or}. Докажем теорему об образе прямой при отображении Ω_{Or}. Для краткости изложения хорды без концов окружности (O, r) будем называть открытыми хордами и обозначать через UV, где U и V — концы хорды. Таким образом, открытая хорда UV есть фигура, состоящая из всех точек хорды без U и V.

Теорема 2. *При отображении Ω_{Or} прямая переходит в открытую хорду окружности (O, r). При этом прямая, проходящая через точку O, переходит в открытую хорду, по которой эта прямая пересекает открытый круг, а прямая a, не проходящая через точку O, — в открытую хорду UV, где U и V — точки пересечения окружности (O, r) с двумя лучами, исходящими из точки O и параллельными прямой a.*

□ Докажем сначала, что при отображении Ω_{Or} произвольная прямая AB переходит в открытую хорду. Пусть A' и B' — образы точек A и B, а U и V — концы хорды, на которой лежат точки A' и B'. Докажем, что образом прямой AB является открытая хорда UV. Если X — произвольная точка прямой AB, не совпадающая с точками A и B, а X' — ее образ, то по теореме 1 точки A', B' и X' лежат на одной прямой, но $X' \in \Omega$, поэтому $X' \in (UV)$. Обратно: пусть Y' — произвольная точка интервала (UV), а Y — прообраз этой точки. Согласно теореме 1 $Y \in AB$, так как в противном случае образы неколлинеарных точек A, B и Y лежали бы на одной прямой.

Докажем теперь, что образом прямой a, проходящей через точку O, является открытая хорда, по которой прямая a пересекает окружность (O, r). По доказанному образом прямой a является некоторая открытая хорда UV окружности (O, r). По определению отображения Ω_{Or} образ любой точки прямой a лежит на самой прямой a, следовательно, $(UV) \subset a$. Отсюда следует, что (UV) — пересечение прямой a и открытого круга Ω.

Рассмотрим случай, когда $O \notin a$. Проведем лучи OA и OB, параллельные прямой a, в разных направлениях, обозначим через U_0 и V_0 точки пересечения этих лучей с окружностью (O, r) и докажем, что открытая хорда U_0V_0 — образ прямой a при отображении Ω_{Or} (рис. 120). Ясно, что a — заградительная прямая угла AOB, поэтому прямая a расположена во внутренней области угла AOB. Отсюда следует, что луч, исходящий из точки O, может пересекать прямую a в том и только в том случае, когда он является внутренним лучом угла AOB. Следовательно, если UV — образ прямой a, то все точки открытой хорды UV принадлежат внутренней области угла AOB, поэтому точки U и V принадлежат дуге U_0V_0 окружности (O, r), расположенной внутри угла

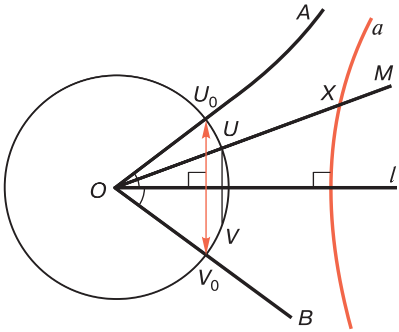


Рис. 120

AOB. Отсюда мы заключаем, что одна из точек U и V совпадает с точкой U_0, а другая — с точкой V_0, так как в противном случае найдется такой внутренний луч OM угла AOB (см. рис. 120), который пересекает прямую a в некоторой точке X и не имеет общих точек с открытой хордой UV. Но это невозможно, так как образ X' точки X лежит на луче OM и принадлежит открытой хорде UV. Следовательно, хорды UV и U_0V_0 совпадают, т. е. открытая хорда U_0V_0 — образ прямой a при отображении Ω_{Or}. ■

Следствие. *При отображении Ω_{Or} данная прямая a, не проходящая через точку O, переходит в открытую хорду, перпендикулярную к прямой, которая проходит через точку O и перпендикулярна к прямой a.*

□ Обратимся к рис. 120. По теореме 1 § 16 прямая a перпендикулярна к биссектрисе угла AOB. Хорда U_0V_0 также перпендикулярна к биссектрисе этого угла, так как треугольник OU_0V_0 равнобедренный. Следовательно, если l — прямая, содержащая биссектрису угла AOB, то $a \perp l$ и $U_0V_0 \perp l$. ■

Воспользовавшись теоремами 1 и 2, можно доказать, что отображение Ω_{Or} является непрерывным отображением. Это означает, что если M — предельная точка бесконечной последовательности точек $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, то образ M' точки M — предельная точка последовательности $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n, \ldots$, состоящей из образов точек $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$.

Замечание. На евклидовой плоскости не существует отображения, аналогичного отображению Ω_{Or}, т. е. отображения, при котором плоскость отображается на ее часть и сохраняется, отношение «лежать между». Но в каком-то смысле на евклидовой плоскости аналогом отображения Ω_{Or} является гомотетия. В самом деле, пусть на евклидовой плоскости задана точка O и некоторый острый угол $\widetilde{\varphi}$. Пользуясь схемой, описанной в п. 1, построим отображение, при котором точке A плоскости ставится в соответствие точка A'. Точки A и A' лежат на одном луче, исходящем из точки O, и $OA' = OA_0$. В данном случае $OA_0 = OA \cos\varphi$, поэтому

$OA' = OA\cos\varphi$. Построенное таким образом отображение является гомотетией с коэффициентом $m = \cos\varphi$. Существенно отметить, что это отображение, в отличие от отображения Ω_{Or}, является *преобразованием всей евклидовой плоскости*.

§ 37. Образы простейших фигур при отображении Ω_{Or}

1. Образы отрезков, лучей и углов при отображении Ω_{Or}.

37.1°. При отображении Ω_{Or} отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$, где A' и B' — образы точек A и B.

□ Пусть X — произвольная точка отрезка AB, а X' — ее образ. Так как $A–X–B$, то по теореме 1 § 36 $A'–X'–B'$, поэтому X' — точка отрезка $A'B'$. Обратно: пусть Y' — произвольная точка отрезка $A'B'$, а Y — прообраз этой точки. Согласно теореме 2 § 36 точки A, B и Y лежат на одной прямой, но $A'–Y'–B'$, поэтому $A–Y–B$, так как в противном случае точка Y' не может лежать между точками $A'B'$. Итак, отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$. ■

Выясним теперь, в какую фигуру переходит луч при отображении Ω_{Or}. Для краткости *открытой полухордой* будем называть интервал, в котором одна из граничных точек (начало полухорды) принадлежит области Ω, а другая граничная точка (конец полухорды) является точкой окружности (O, r). Открытую полухорду с началом A и концом U обозначим через AU.

37.2°. Если при отображении Ω_{Or} точки A и M переходят в точки A' и M', то луч AM переходит в открытую полухорду $A'U$, на которой лежит точка M' (рис. 121).

□ Обозначим через V другой конец открытой хорды, в которую переходит прямая AM. Пусть X — произвольная точка луча AM, а X' — образ этой точки. По теореме 2 § 36 точка X' лежит на хорде UV. Так как $\overline{AXM}$, то по теореме 1 § 36 $\overline{A'X'M'}$, поэтому X' — точка

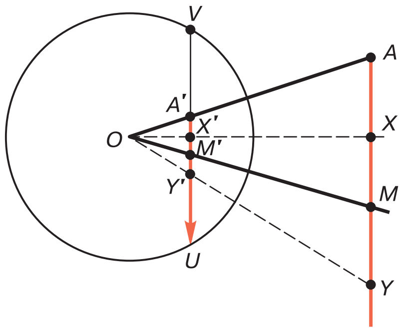


Рис. 121

полухорды $A'U$. Обратно: пусть Y' — произвольная точка полухорды $A'M$, а Y — прообраз точки Y'. Ясно, что точка Y лежит на прямой AM. Так как $\overline{A'Y'M'}$, то $\overline{AYM}$ (см. рис. 121), т. е. Y — точка луча AM. ■

37.3°. При отображении Ω_{Or} полуплоскость λ с границей a переходит в сегмент открытого круга Ω, стягивающая хорда которого является образом UV прямой a (рис. 122).

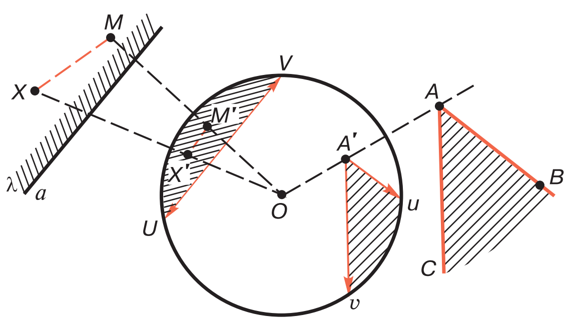


Рис. 122

□ Пусть M — некоторая точка полуплоскости λ, M' — образ этой точки. Обозначим через λ' сегмент открытого круга Ω со стягивающей хордой UV, которому принадлежит точка M' (на рис. 122 этот сегмент заштрихован).

Если X — произвольная точка полуплоскости λ, отличная от точки M, то отрезок MX не имеет общих точек с прямой a, поэтому его образ $M'X'$ не имеет общих точек с хордой UV. Отсюда следует, что $X' \in \lambda'$. Обратно: пусть Y' — произвольная точка сегмента λ', отличная от точки M', а Y — прообраз этой точки. Так как отрезок $M'Y'$ не имеет общих точек с хордой UV, то отрезок MY не имеет общих точек с прямой a, поэтому $Y \in \lambda$. ■

Учитывая, что при отображении Ω_{Or} неколлинеарные точки переходят в неколлинеарные точки, из свойств 37.2° и 37.3° непосредственно следует:

37.4°. Если при отображении Ω_{Or} стороны неразвернутого угла BAC переходят в открытые полухорды $A'U$ и $A'V$, то угол BAC переходит в фигуру, образованную двумя полухордами $A'U$ и $A'V$, причем внутренняя область угла BAC переходит в пересечение внутренней области угла $UA'V$ с областью Ω (см. рис. 122).

Согласно свойству 37.1° при отображении Ω_{Or} отрезок переходит в отрезок, поэтому при этом отображении треугольник переходит в треугольник, а n-угольник при $n > 3$ — в n-угольник, причем выпуклый n-угольник переходит в выпуклый n-угольник.

2. Образы параллельных прямых при отображении Q_{Or}. Из определения сонаправленных лучей и свойства 37.2° следует, что при отображении Ω_{Or} сонаправленные лучи переходят в открытые полухорды с общим концом, принадлежащие одной хорде окружности (O, r). Отсюда следует важный вывод: при отображении Ω_{Or} направленная прямая $\overline{a}$ переходит в направленную открытую хорду $\overline{UV}$, конечные точки которой заданы в определенном порядке. Здесь V — общий конец образов всех лучей положительного направления прямой $\overline{a}$. Таким образом, если $\overline{UV}$ — образ направленной прямой $\overline{AB}$, то $\overline{VU}$ — образ направленной прямой $\overline{BA}$.

Докажем теперь теоремы об образах параллельных лучей и параллельных прямых.

Теорема 1. *Два луча параллельны тогда и только тогда, когда открытые полухорды, в которые они переходят при отображении* Ω_{0r}, *имеют общий конец и принадлежат разным хордам окружности* (O, r).

□ Обозначим через AA_1 и BB_1 данные лучи, а через $A'V_1$ и $B'V_2$ их образы.

Пусть лучи AA_1 и BB_1 параллельны. Тогда прямые AA_1 и BB_1 не имеют общих точек, и эти лучи принадлежат одной полуплоскости с границей AB. Поэтому открытые хорды, которым принадлежат открытые полухорды $A'V_1$ и $B'V_2$ не имеют общих точек. Согласно свойству 37.3° эти полухорды принадлежат одному сегменту, стягивающая хорда UV которого проходит через точки A' и B' (рис. 123; на этом рисунке прямые AA_1 и BB_1 не изображены). Докажем методом от противного, что точки V_1 и V_2 совпадают. Пусть V_1 и V_2 — различные точки, а W — точка дуги V_1V_2, которая целиком расположена по одну сторону от хорды UV (рис. 123, a). Так как полухорды $A'V_1$ и $B'V_2$ не имеют общих точек, то полухорда $A'W$ проходит внутри угла $V_1A'B'$ и не имеет общих точек с полухордой $B'V_2$. Отсюда следует, что прообраз полухорды $A'W$ является внутренним лучом угла BAA_1 и не имеет общих точек с лучом BB_1. Мы пришли к противоречию с определением параллельных прямых.

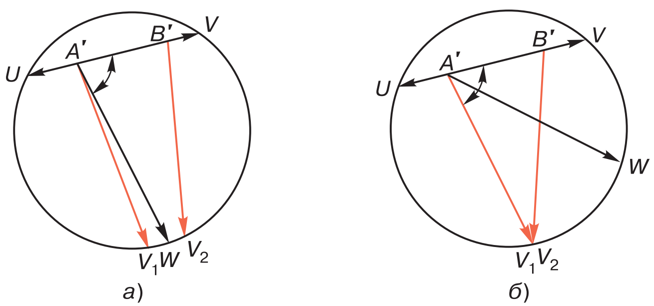


Рис. 123

Обратно: пусть образы $A'V_1$ и $B'V_2$ лучей AA_1 и BB_1 не совпадают, но их концы V_1 и V_2 совпадают (рис. 123, *б*). Тогда, очевидно, прямые AA_1 и BB_1 не имеют общих точек. Любая полухорда $A'W$, проходящая внутри угла $V_1A'B'$, пересекает полухорду $B'V_2$, поэтому любой внутренний луч угла BAA_1 пересекает луч BB_1. Это означает, что лучи AA_1 и BB_1 параллельны. ■

Теорема 2. *Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда при отображении Ω_{Or} они переходят в две открытые хорды окружности (O, r), имеющие общий конец.*

□ Обозначим через a_1 и a_2 данные две прямые, а через U_1V_1 и U_2V_2 их образы при отображении Ω_{Or}.

Если прямые a_1 и a_2 параллельны, то они не имеют общих точек и существуют параллельные лучи h и k, принадлежащие этим прямым. Поэтому хорды U_1V_1 и U_2V_2 не имеют общих точек и образы лучей h и k, которые являются открытыми полухордами хорд U_1V_1 и U_2V_2, согласно теореме 1 имеют общий конец. Следовательно, и хорды U_1V_1 и U_2V_2 имеют общий конец.

Обратно: пусть у двух хорд U_1V_1 и U_2V_2 концы V_1 и V_2 совпадают. Рассмотрим какие-нибудь полухорды $A_1'V_1$ и $A_2'V_2$, принадлежащие соответственно хордам U_1V_1 и U_2V_2. Их прообразы являются лучами, принадлежащими прямым a_1 и a_2, и по теореме 1 эти лучи параллельны. По теореме 1 § 10 прямые a_1 и a_2 параллельны. ■

Следствие. *Две прямые расходятся тогда и только тогда, когда при отображении Ω_{Or} они переходят в две открытые хорды, не имеющие общих точек и общих концов.*

Предлагаем читателю, пользуясь теоремами 1 и 2, самостоятельно доказать следующее утверждение.

37.5°. Луч параллелен прямой тогда и только тогда, когда при отображении Ω_{Or} их образы не имеют общих точек, но конец образа луча совпадает с одним из концов образа прямой.

3. Применение отображений Ω_{Or} для изучения свойств фигур плоскости Лобачевского. Отображения Ω_{Or} могут быть с успехом использованы для наглядной иллюстрации многих свойств фигур плоскости Лобачевского и для доказательства отдельных теорем о взаимном расположении отрезков, лучей и прямых. Основная идея доказательства таких теорем и утверждений заключается в следующем: пусть F — данная фигура, состоящая из прямых, лучей и отрезков, определенное свойство Π которой следует доказать. Рассматривается образ F' фигуры F при некотором отображении Ω_{Or} и, пользуясь свойствами этого отображения, которые были изложены выше, формулируется и доказывается соответствующее свойство Π' фигуры F'. Отсюда непосредственно следует вывод, что свойство Π фигуры F является верным утверждением. Как правило, доказательство свойства Π' фигуры F' значительно проще, чем доказательство свойства Π фигуры F.

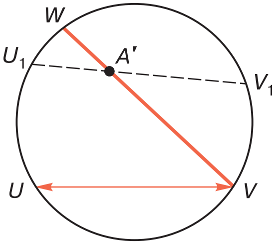


Рис. 124

Докажем, например, теорему 2 § 10: существует одна и только одна направленная прямая, проходящая через данную точку A и параллельная данной направленной прямой $\overline{a}$, не проходящей через точку A. Рассмотрим некоторое отображение Q_{0r} и обозначим через $\overline{UV}$ открытую направленную хорду окружности (O, r), в которую переходит направленная прямая $\overline{a}$, а через A' — образ точки A (рис. 124; на этом рисунке точка A и прямая $\overline{a}$ не изображены). Очевидно, точка A' не лежит на хорде $\overline{UV}$ и через точку A' проходит одна и только одна направленная хорда $\overline{WV}$, имеющая общий конец V хорды $\overline{UV}$. Прообраз $\overline{b}$ этой хорды проходит через точку A и $\overline{b} \parallel \overline{a}$. Любая другая прямая $\overline{c}$, проходящая через точку A, отображается в хорду $\overline{U_1V_1}$, проходящую через точку A', причем точки V и V_1 не совпадают. Отсюда следует, что $\overline{c} \nparallel \overline{a}$.

Аналогично можно доказать и другие теоремы о взаимном расположении лучей и прямых.

Например, пользуясь рис. 125, легко доказать теорему 1 § 11: через точку A, не лежащую на данной ненаправленной прямой a, проходят две и только две прямые, параллельные прямой a.

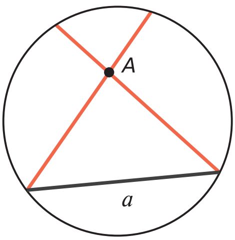


Рис. 125

Докажем еще одно утверждение, которое не было доказано выше.

37.6°. Если каждый из двух лучей h и k параллелен лучу l или сонаправлен с ним, то $h \parallel k$ или $h \uparrow\uparrow k$.

□ Рассмотрим отображение Ω_{Or} и обозначим через HU, KV и LW открытые полухорды окружности (O, r), которые являются образами лучей h, k и l. Так как $h \parallel l$ или $h \uparrow\uparrow l$, то точки U и W совпадают. Аналогично, так как $k \parallel l$ или $h \uparrow\uparrow l$, то точки V и W совпадают. Отсюда следует, что точки U и V совпадают, следовательно, лучи h и k параллельны или сонаправлены. ■

§ 38. Несобственные точки плоскости. Расширенная плоскость

1. Расширенная плоскость. Для удобства дальнейшего изложения введем следующее соглашение. Дополним плоскость Лобачевского новыми точками, а именно ко всем обыкновенным точкам каждого луча добавим еще одну, так называемую *несобственную* или *бесконечно удаленную точку*. При этом *будем считать, что несобственные точки совпадают тогда и только тогда, когда лучи, на которых они лежат, либо параллельны, либо сонаправлены*.

В дальнейшем изложении обыкновенные точки будем называть *собственными* точками и будем обозначать, как обычно, через $A, B, \ldots, X, Y$, а несобственные точки — через $U_\infty, V_\infty, \ldots$. Для задания несобственной точки достаточно задать какой-нибудь луч, которому принадлежит эта точка. Луч, исходящий из точки O и содержащий точку U_∞, будем называть *расширенным* лучом и иногда будем обозначать через OU_∞.

Пусть h — произвольный луч плоскости, а U_∞ — несобственная точка этого луча. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех тех лучей плоскости, каждый из которых либо параллелен лучу h, либо сонаправлен с этим лучом. Из утверждения 37.6° следует, что несобственная точка U_∞ принадлежит тем и только тем лучам плоскости, которые принадлежат множеству $\mathfrak{M}$, причем для задания точки U_∞ можно взять любой из лучей этого множества.

Если расширенный луч h принадлежит прямой a, то *будем считать, что несобственная точка луча h является также несобственной точкой прямой a.* Отсюда следует, что если $k \parallel a$, то луч k и прямая a имеют общую несобственную точку.

Несобственные точки U_∞ и V_∞ дополнительных лучей h_1 и h_2, принадлежащих прямой a, не совпадают. С другой стороны, если h — произвольный луч, принадлежащий этой прямой, то либо $h \upuparrows h_1$, либо $h \upuparrows h_2$, поэтому лучу h принадлежит либо точка U_∞, либо точка V_∞.

Итак, на каждой прямой имеются две и только две несобственные точки, причем если прямые параллельны, то они имеют одну и только одну общую несобственную точку, а если две прямые не параллельны, то все четыре несобственные точки этих прямых (две точки на одной прямой и две точки на другой) попарно различны. Отметим также, что если луч h параллелен прямой a, то несобственная точка луча h является одной из несобственных точек прямой a.

Из этих соглашений следует, что на плоскости существует бесконечное множество несобственных точек, причем любые три из них не лежат на одной прямой.

Далее, если две прямые имеют общую собственную или несобственную точку, то они либо пересекаются, либо параллельны. Таким образом, если две прямые не имеют ни одной общей собственной или несобственной точки, то эти прямые являются расходящимися прямыми.

Прямую a, дополненную двумя несобственными точками, будем называть *расширенной прямой* и в этой главе будем обозначать через $\overline{a}$, а плоскость, дополненную несобственными точками, — *расширенной плоскостью*. В этой главе плоскость Лобачевского будем обозначать через σ, а расширенную плоскость — через $\overline{\sigma}$.

На расширенной прямой каждое ее направление может быть задано ее несобственной точкой. В самом деле, если $\overline{a}$ — ненаправленная прямая, а U_∞ и V_∞ — ее несобственные точки, то все лучи одного и того же направления прямой a имеют общую несобственную точку U_∞ или V_∞. Поэтому направление на прямой $\overline{a}$ можно задать, зафиксировав одну из этих точек. В частности, если $\overline{a} \parallel \overline{b}$, то общая несобственная точка прямых $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяет на каждой из них направление параллельности $a \parallel b$.

Важно отметить, что, в отличие от проективной плоскости, мы здесь не вводим понятие несобственной прямой, т. е. считаем, что любая прямая плоскости является обыкновенной, «собственной» прямой, дополненной двумя несобственными точками.

2. Отображение расширенной плоскости на круг. Пусть при отображении Ω_{Or} луч h переходит в открытую полухорду $A'U$. Ясно, что все точки отрезка $A'U$, кроме точки U, имеют прообразы на плоскости Лобачевского. Поэтому введем следующее соглашение: будем считать, что точка U является образом несобственной точки луча h. Другими словами, образом несобственной точки данного луча будем считать конец полухорды, которая является образом этого луча при отображении Ω_{Or}.

Ясно, что при нашем соглашении вся расширенная плоскость $\overline{\sigma}$ отображается на круг (O, r), состоящий из внутренней области Ω и границы (O, r). При этом несобственные точки и только эти точки переходят в точки окружности (O, r). С другой стороны, каждая точка этой окружности является образом некоторой несобственной точки плоскости $\overline{\sigma}$. Следовательно, существует взаимно однозначное отображение между множеством всех несобственных точек плоскости $\overline{\sigma}$ и множеством точек окружности (O, r). По этой причине множество всех несобственных точек $\overline{\sigma}$ целесообразно назвать «несобственной окружностью» расширенной плоскости $\overline{\sigma}$.

Построенное нами отображение для краткости будем называть *отображением* $\overline{\Omega_{Or}}$. Оно, очевидно, является взаимно однозначным отображением множества всех точек расширенной плоскости на круг $(\overline{O, r})$.

Если при отображении Ω_{Or} прямая a переходит в открытую хорду UV, то из свойства 37.5° мы заключаем, что при отображении $\overline{\Omega_{Or}}$ несобственные точки прямой $\overline{a}$ переходят в точки U и V, т. е. расширенная прямая $\overline{a}$ переходит в хорду UV (включая ее концы) окружности (O, r).

3. Расширенная прямая. Используя отображение $\overline{\Omega_{Or}}$, докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Через любые две точки расширенной плоскости* (*собственные или несобственные*) *проходит одна и только одна прямая.*

□ Пусть A и B — две данные точки (собственные или несобственные) расширенной плоскости $\overline{\sigma}$, а A' и B' — их образы при некотором отображении $\overline{\Omega_{Or}}$. Рассмотрим хорду UV окружности (O, r), которой принадлежат точки A' и B'. Прообраз отрезка UV является расширенной прямой, которая, очевидно, проходит через точки A и B. Так как существует только одна хорда окружности (O, r), которой принадлежат точки A' и B', то через точки A и B проходит единственная расширенная прямая. ■

Введем теперь понятие «лежать между» для трех точек расширенной прямой. Пусть A, B и C — три собственные или несобственные точки расширенной прямой $\overline{p}$. Примем следующее соглашение: будем считать, что точка A лежит между точками B и C (запись:

B–A–C или C–A–B) тогда и только тогда, когда A — собственная точка, а B и C — собственные или несобственные точки прямой $\overline{p}$, лежащие на дополнительных лучах, исходящих из точки A. Из этого соглашения следует, что точка A лежит между точками B и C тогда и только тогда, когда при отображении Ω_{Or} образ A' точки A лежит между образами B' и C' точек B и C. Используя предыдущее соглашение и это утверждение, легко доказать предложения.

38.1°. Если A, B и C — собственные точки прямой, то отношение «лежать между» для этих точек вводится обычным образом.

38.2°. Если A и B — собственные точки, а U — несобственная точка, то B–A–U_∞ тогда и только тогда, когда точка A принадлежит лучу BU_∞.

38.3°. Несобственная точка прямой не может лежать между двумя другими точками.

38.4°. Произвольная собственная точка прямой лежит между двумя несобственными точками этой прямой.

Докажем теперь лемму о трех точках расширенной прямой.

Лемма 2. *Из трех точек расширенной прямой одна и только одна точка лежит между двумя другими.*

□ Пусть A, B и C — три точки (собственные или несобственные) расширенной прямой $\overline{a}$, A', B', C' — образы этих точек, а UV — образ прямой $\overline{a}$ при некотором отображении $\overline{\Omega_{Or}}$. Так как точки A', B' и C' принадлежат отрезку UV, то они лежат на прямой UV, поэтому одна и только одна из этих точек лежит между двумя другими. Согласно теореме 1 § 36 одна и только одна из точек A, B и C лежит между двумя другими точками. ■

4. Полуплоскость расширенной плоскости. Пользуясь отображением $\overline{\Omega_{Or}}$, легко доказать следующую теорему, которая является обобщением соответствующей теоремы абсолютной геометрии на расширенную плоскость [см., например, [3], § 76, ч. II].

Теорема. *Прямая $\overline{a}$ расширенной плоскости $\overline{\sigma}$ разделяет множество точек этой плоскости, не лежащих на прямой $\overline{a}$, на два непустых подмножества λ_1 и λ_2 так, что если точки A и B принадлежат одному подмножеству, то на прямой $\overline{a}$ нет точки, лежащей между точками A и B; если же эти точки принадлежат разным подмножествам, то существует точка прямой $\overline{a}$, лежащая между точками A и B.*

□ Пусть при некотором отображении Ω_{Or} прямая $\overline{a}$ переходит в хорду UV окружности (O, r). Эта хорда разделяет круг $(\overline{O, r})$ на два сегмента с общей стягивающей хордой UV. Множество всех точек одного из этих сегментов обозначим через λ'_1 а другого через λ'_2 (рис. 126). При этом мы считаем, что точки хорды UV не принадлежат этим множествам, однако точки дуг с общими концами U и V окружности (O, r) являются точками этих множеств.

Обозначим через λ_1 и λ_2 множества прообразов всех точек соответственно множеств λ'_1 и λ'_2 при отображении $\overline{\Omega_{Or}}$. Читатель легко самостоятельно убедится в том, что множества λ_1 и λ_2, которые являются подмножествами множества всех точек расширенной плоскости, удовлетворяют условиям теоремы. ■

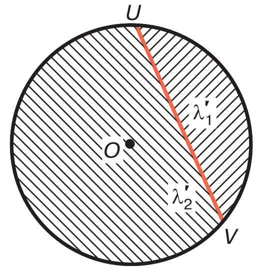


Рис. 126

Фигуру, состоящую из точек каждого из подмножеств, определяемых этой теоремой, будем называть *полуплоскостью расширенной плоскости* $\overline{\sigma}$ с границей $\overline{a}$. Очевидно, на каждой полуплоскости с границей $\overline{a}$ существует бесконечное множество несобственных точек, которые являются прообразами точек соответствующей дуги с концами U и V окружности (O, r).

Введенные нами понятия несобственных точек, расширенной прямой и полуплоскости в ряде случаев, как мы убедимся ниже, значительно упрощают формулировки отдельных определений и теорем, связанных с параллельностью прямых и лучей. Например, можно воспользоваться следующими определениями: две прямые (или два луча, не принадлежащие одной прямой) называются *параллельными*, если они имеют общую несобственную точку, причем если $a \parallel b$, то направление параллельности $a \parallel b$ на каждой из прямых a и b определяется их общей несобственной точкой. Далее, две прямые называются *расходящимися*, если они не имеют ни одной общей собственной или несобственной точки. Или другой пример: прямая называется *заградительной* прямой неразвернутого угла AOB, если она проходит через несобственные точки лучей OA и OB. Используя несобственные точки, можно упростить определение пучка параллельных прямых, которое приведено в § 18: *пучком параллельных прямых называется множество всех прямых расширенной плоскости, проходящих через одну несобственную точку*. Эту точку целесообразно назвать *центром пучка*. Таким образом, можно сформулировать следующее общее определение пучка прямых на расширенной плоскости: *пучком прямых* на расширенной плоскости называется множество всех прямых, проходящих через одну точку (собственную или несобственную) или перпендикулярных к одной прямой.

Пользуясь этой терминологией, в следующем параграфе введем понятие вырожденных треугольников и изучим их свойства.

§ 39. Вырожденные треугольники

1. Три типа вырожденных треугольников. Пусть A, B и C — три точки расширенной плоскости, не лежащие на одной прямой, причем хотя бы одна из этих точек является несобственной точкой. Фигура, образованная из точек A, B и C и трех отрезков, лучей или прямых AB, BC и CA, называется *вырожденным треугольником*. Точки A, B и C называют *вершинами*, а AB, BC и CA — *сторонами* этого треугольника. Так же как и в обычном треугольнике, в вырожденном треугольнике любая сторона и вершина, не принадлежащая ей, называются противоположными. Вырожденные треугольники не имеют аналогов на евклидовой плоскости.

Возможны три типа вырожденных треугольников в зависимости от того, сколько несобственных вершин имеет треугольник. Несобственные вершины вырожденных треугольников будем обозначать буквами U_∞, V_∞, W_∞ и в соответствии с этим вырожденные треугольники будем обозначать так:

а) ABU_∞ — треугольник с одной несобственной вершиной и двумя собственными вершинами A и B. Сторонами этого треугольника являются отрезок AB и два луча AU_∞ и BU_∞ (рис. 127, *а*);

б) $CU_\infty V_\infty$ — треугольник с двумя несобственными вершинами. Его сторонами являются лучи CU_∞, CV_∞ и прямая $U_\infty V_\infty$ (рис. 127, *б*);

в) $U_\infty V_\infty W_\infty$ — треугольник с тремя несобственными вершинами. Его сторонами являются прямые $U_\infty V_\infty$, $V_\infty W_\infty$ и $V_\infty U_\infty$ (рис. 127, *в*).

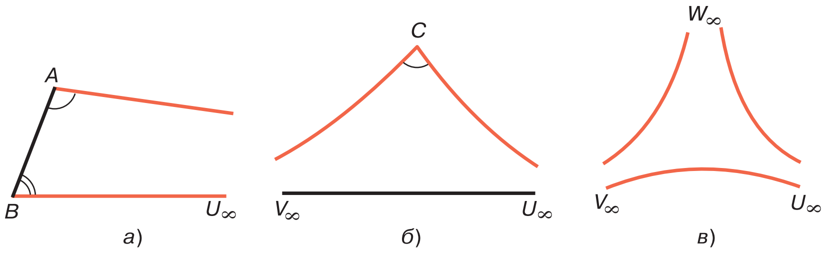


Рис. 127

Легко доказать, что на расширенной плоскости существуют вырожденные треугольники, принадлежащие к каждому из этих типов. В самом деле, возьмем на расширенной плоскости три произвольные несобственные точки U_∞, V_∞, W_∞. Так как на каждой прямой существуют только две несобственные точки, то эти точки не лежат на одной прямой. Отметим затем на прямой $V_\infty W_\infty$ две собственные точки A и B (рис. 128). Треугольники ABU_∞, $AU_\infty V_\infty$ и $U_\infty V_\infty W_\infty$ являются вырожденными треугольниками соответственно с одной, двумя и тремя несобственными вершинами.

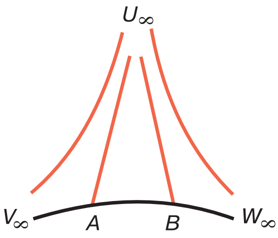


Рис. 128

Если ABU_∞ и $CU_\infty V_\infty$ — вырожденные треугольники, то углы BAU_∞ и ABU_∞ называются углами треугольника ABU_∞, а угол $U_\infty CV_\infty$ — углом треугольника $CU_\infty V_\infty$. Эти углы обычно обозначают одной буквой: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ (см. рис. 127, *а*, *б*). Углы, смежные с углами треугольника, называют внешними углами вырожденного треугольника. Таким образом, вырожденный треугольник с одной несобственной вершиной имеет два угла, вырожденный треугольник с двумя несобственными вершинами только один угол, а с тремя несобственными вершинами ни одного угла.

Напомним, что в § 23 п. 2 мы ввели понятие вырожденного треугольника как двуугольника $hABk$, у которого лучи h и k параллельны. На расширенной плоскости лучи h и k имеют общую несобственную точку. Если эту точку обозначить через U_∞, то двуугольник $hABk$ есть не что иное, как вырожденный треугольник ABU_∞ с одной несобственной вершиной. В § 23 были доказаны следующие два свойства углов такого треугольника (см. свойства 23.1° и 23.2°): внешний угол вырожденного треугольника с одной несобственной вершиной больше угла треугольника, не смежного с ним; сумма мер двух углов вырожденного треугольника с одной несобственной вершиной меньше $2d$, где d — мера прямого угла.

Вырожденный треугольник будем называть *прямоугольным*, если хотя бы одна из его вершин является собственной точкой и угол при этой вершине прямой. Вырожденный прямоугольный треугольник может иметь одну или две несобственные вершины. Если вырожденный прямоугольный треугольник имеет только одну несобственную вершину, то по свойству 23.2° угол этого треугольника, отличный от прямого, является острым.

Пользуясь понятием полуплоскости расширенной плоскости так же, как и для обычных треугольников, можно ввести понятие внутренней области вырожденного треугольника. Для этого заметим, что с каждым вырожденным треугольником на расширенной плоскости связаны три полуплоскости. На границе каждой полуплоскости лежат две вершины треугольника (собственные или несобственные), а в самой полуплоскости — третья вершина. Пересечение этих полуплоскостей называется *внутренней областью треугольника*. Любая точка, лежащая на отрезке, концы которого принадлежат разным сторонам треугольника и не совпадают с его вершинами, принадлежит внутренней области треугольника (см. задачу 18). Отсюда следует, что внутренняя область вырожденного треугольника есть бесчисленное выпуклое множество. На рис. 129 внутренние области вырожденных треугольников ABU_∞, $CU_\infty V_\infty$ и $U_\infty V_\infty W_\infty$ заштрихованы. Нетрудно доказать, что внутренняя область треугольника ABU_∞ является пересечением внутренних областей углов A и B этого треугольника, а внутренняя область треугольника $CU_\infty V_\infty$ является подмножеством множества всех точек внутренней области угла C этого треугольника.

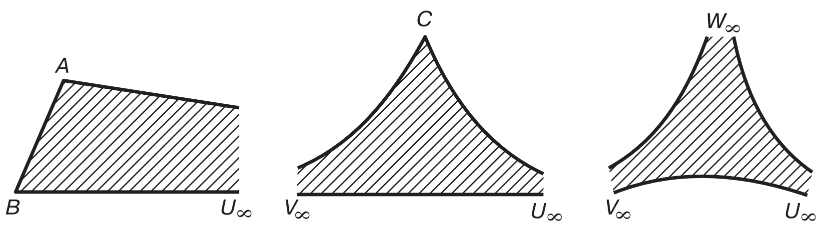


Рис. 129

2. Образы вырожденных треугольников при отображении $\overline{\Omega_{Or}}$. Предложение Паша. Из свойств отображения $\overline{\Omega_{Or}}$, введенного в § 38, следует, что при этом отображении вырожденный треугольник переходит в обычный треугольник, все точки которого принадлежат кругу $(\overline{O, r})$, причем образы собственных вершин принадлежат внутренней области этого круга, а образы несобственных вершин лежат на границе круга, т. е. на окружности (O, r). На рис. 130, *а* $\triangle A'B'U'_\infty$ является образом вырожденного треугольника ABU_∞ с одной несобственной вершиной, а $\triangle C'V'_\infty W'_\infty$ — образом вырожденного треугольника $CV_\infty W_\infty$ с двумя несобственными вершинами. На рис. 130, *б* $\triangle U'_\infty V'_\infty W'_\infty$ — образ вырожденного треугольника $U_\infty V_\infty W_\infty$ с тремя несобственными вершинами.

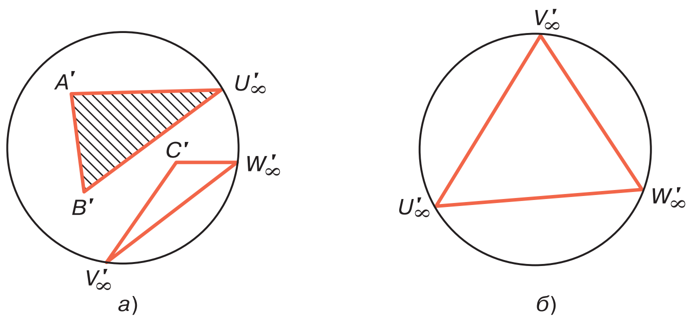


Рис. 130

Очевидно, при отображении $\overline{\Omega_{Or}}$ внутренняя область вырожденного треугольника переходит во внутреннюю область его образа (рис. 130, *а*; на этом рисунке внутренняя область образа треугольника ABU_∞ заштрихована).

Отображения $\overline{\Omega_{Or}}$ могут быть использованы для изучения некоторых свойств вырожденных треугольников (см. № 37, п. 3). Эти треугольники обладают рядом свойств, аналогичных свойствам обычных треугольников. Покажем, например, что предложение Паша (см. свойство 1.1°) имеет место и для вырожденных треугольников с одной, двумя и тремя несобственными вершинами.

39.1°. Прямая, не проходящая ни через одну из вершин вырожденного треугольника и пересекающая одну из его сторон, пересекает одну и только одну из двух других сторон.

□ Пусть ABC — данный вырожденный треугольник с одной, двумя или тремя несобственными вершинами, а l — данная прямая, которая не проходит через точки A, B и C и пересекает сторону AB. Обозначим через

$A'B'C$ образ треугольника ABC, а через $U'_\infty V'_\infty$ образ прямой l при отображении Ω_{Or}. Здесь U'_∞ и V'_∞ — образы несобственных точек прямой l (рис. 131; на этом рисунке изображен вырожденный треугольник с одной несобственной вершиной).

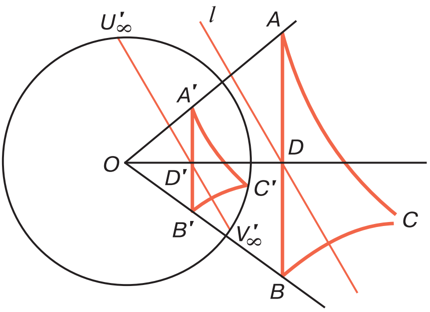


Рис. 131

Так как прямая l не проходит через точки A, B и C и пересекает сторону AB, то точки A', B' и C' не лежат на хорде $U'_\infty V'_\infty$ и эта хорда пересекает отрезок $A'B'$. По предложению 1.1° Паша прямая $U'_\infty V'_\infty$ пересекает одну и только одну из двух сторон $B'C'$ или $A'C'$ треугольника $A'B'C'$. Ясно, что точка пересечения лежит на хорде $U'_\infty V'_\infty$. Отсюда мы заключаем, что прямая l пересекает одну и только одну из двух сторон BC или AC треугольника ABC. ■

Предлагаем читателю аналогично доказать следующие предложения (ср. со свойством 1.2°):

39.2°. Внутренний луч угла вырожденного треугольника с одной или двумя несобственными вершинами пересекает сторону, противоположную вершине данного угла.

39.3°. Если прямая проходит через данную несобственную вершину и через внутреннюю точку вырожденного треугольника с одной, двумя или тремя несобственными вершинами, то она пересекает сторону, противолежащую данной вершине (рис. 132; на этом рисунке изображен треугольник с двумя несобственными вершинами).

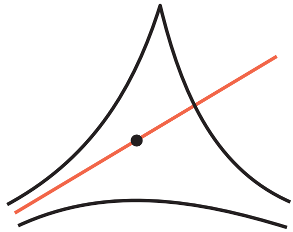


Рис. 132

§ 40. Биссектрисы и высоты вырожденного треугольника

1. Биссектрисы вырожденного треугольника. Пусть ABU_∞ — вырожденный треугольник с одной несобственной вершиной. По свойству 39.2° биссектрисы углов A и B этого треугольника пересекают стороны BU_∞ и AU_∞ в некоторых точках A_1 и B_1 (рис. 133, *а*). Отрезки AA_1 и BB_1 называются *биссектрисами треугольника* ABU_∞, проведенными к сторонам BU_∞ и AU_∞. Ось симметрии параллельных прямых AU_∞ и BU_∞ пересекает отрезок AB в некоторой точке C_1 и по теореме 3 § 11 проходит через точку U_∞. Луч C_1U_∞ будем называть биссектрисой треугольника ABU_∞, проведенной к стороне AB (см. рис. 133, *а*).

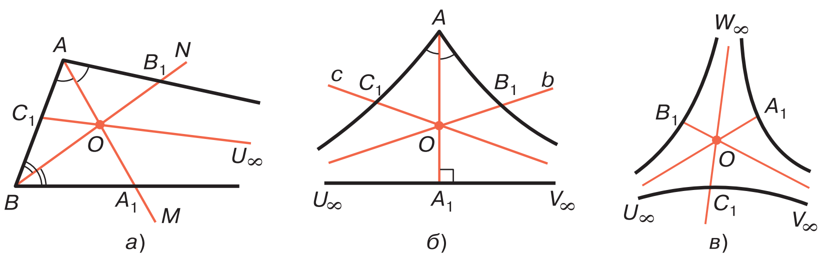


Рис. 133

Аналогично можно ввести понятие биссектрис треугольников с двумя и тремя несобственными вершинами. На рис. 133, *б* луч AA_1 — биссектриса угла $U_\infty AV_\infty$, а прямые b и c — оси симметрии параллельных прямых AU_∞, $V_\infty U_\infty$ и AV_∞, $U_\infty V_\infty$. По свойству 39,3° прямая b пересекает луч AV_∞ в некоторой точке B_1, а прямая c — луч AU_∞ в некоторой точке C_1. Отрезок AA_1 и лучи B_1U_∞ и C_1V_∞ — биссектрисы треугольника $AU_\infty V_\infty$. На рис. 133, *в* A_1U_∞, B_1V_∞, C_1W_∞ — оси симметрий соответствующих параллельных прямых. Лучи A_1U_∞, B_1V_∞ и C_1W_∞ — биссектрисы треугольника $U_\infty V_\infty W_\infty$.

Таким образом, каждый вырожденный треугольник имеет три биссектрисы. У треугольника ABU_∞ с одной несобственной вершиной две биссектрисы AA_1 и BB_1 являются отрезками, а третья биссектриса — лучом. У треугольника $AU_\infty V_\infty$ с двумя несобственными вершинами одна биссектриса AA_1 — отрезок, а две другие биссектрисы — лучи, а у треугольника $U_\infty y_\infty w_\infty$ все три биссектрисы — лучи (см. рис. 133, *а*, *б*, *в*).

Докажем лемму о биссектрисе треугольника с тремя несобственными вершинами.

Лемма. *Биссектриса треугольника $U_\infty V_\infty W_\infty$, проведенная к данной стороне, перпендикулярна к этой стороне.*

□ Пусть A_1U_∞, B_1V_∞ и C_1W_∞ — биссектрисы треугольника $U_\infty V_\infty W_\infty$ (см. рис. 133, *в*). Докажем, например, что $C_1W_\infty \perp U_\infty V_\infty$. Прямая C_1W_∞ является осью симметрии параллельных прямых $U_\infty W_\infty$ и $V_\infty W_\infty$, а прямая $U_\infty V_\infty$ — заградительной прямой этих прямых. Следовательно, по теореме 3 § 16 $C_1W_\infty \perp U_\infty V_\infty$. ■

Докажем теорему, аналогичную теореме 2 § 26 о точке пересечения биссектрис обычного треугольника.

Теорема 1. *Биссектрисы вырожденного треугольника пересекаются в одной точке.*

□ Возможны три случая в зависимости от числа несобственных вершин треугольника.

а) Данный треугольник ABU_∞ имеет только одну несобственную вершину U_∞. Пусть AA_1 BB_1 и CU_∞ — биссектрисы этого треугольника (рис. 134). Пря-

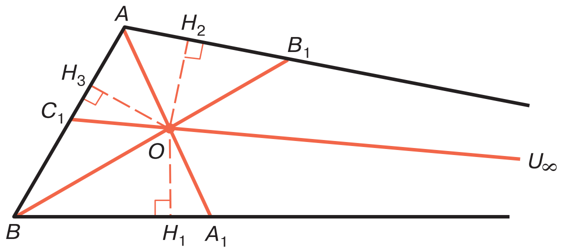


Рис. 134

мая C_1U_∞ — ось симметрии параллельных прямых AU_∞ и BU_∞, поэтому отрезок AA_1 пересекает прямую C_1U_∞ в некоторой точке O. Очевидно, точка O лежит на луче C_1U_∞. Проведем перпендикуляры OH_1, OH_2 и OH_3 к прямым BU_∞, AU_∞ и AB. Прямая C_1U_∞ — ось симметрии прямых AU_∞ и BU_∞, поэтому $OH_1 = OH_2$. С другой стороны, точка O лежит на биссектрисе угла A, следовательно, $OH_2 = OH_3$, поэтому $OH_1 = OH_3$. Отсюда следует, что O — точка, лежащая на биссектрисе угла B. Ясно, что точка O лежит на отрезке BB_1. Итак, все три биссектрисы треугольника ABU_∞ пересекаются в точке O.

б) Данный треугольник $AU_\infty V_\infty$ имеет две несобственные вершины. Пусть AA_1, B_1U_∞ и C_1V_∞ — биссектрисы этого треугольника (см. рис. 133, *б*). Прямая B_1U_∞ — ось симметрии прямых AU_∞ и $V_\infty U_\infty$, поэтому она пересекает отрезок AA_1 в некоторой точке O. Ясно, что O— точка луча B_1U_∞.

Так как $AA_1 \perp U_\infty V_\infty$ то при симметрии относительно прямой AA_1 имеем: $A \mapsto A$, $O \mapsto O$, $U_\infty V_\infty \mapsto U_\infty V_\infty$, луч $AV_\infty \mapsto$ луч AU_∞. Отсюда мы заключаем, что луч $B_1U_\infty \mapsto$ луч C_1V_∞, поэтому точка O лежит на луче C_1V_∞. Таким образом, все три биссектрисы AA_1B_1 B_1U_∞ и C_1V_∞ треугольника $AU_\infty V_\infty$ имеют общую точку O.

в) Данный треугольник и $U_\infty V_\infty W_\infty$ имеет три несобственные вершины. Пусть A_1U_∞, B_1V_∞, C_1W_∞ — биссектрисы этого треугольника (см. рис. 133, *в*). Прямая A_1U_∞ пересекает сторону $W_\infty V_\infty$ треугольника $C_1V_\infty W_\infty$

в точке A_1 и не пересекает сторону C_1V_∞ этого треугольника, поэтому она пересекает сторону C_1W_∞ в некоторой точке O. Точка O лежит на луче A_1U_∞, так как продолжение этого луча и луч C_1W_∞ лежат по разные стороны от прямой $V_\infty W_\infty$. Следовательно, O — точка пересечения лучей A_1U_∞ и C_1W_∞, т. е. точка пересечения двух биссектрис данного треугольника.

По предыдущей лемме $U_\infty V_\infty \perp C_1W_\infty$ и, кроме того, прямые $U_\infty W_\infty$ и $V_\infty W_\infty$ симметричны относительно прямой C_1W_∞, поэтому при симметрии относительно прямой C_1W_∞ имеем: $U_\infty V_\infty \mapsto U_\infty V_\infty$, $V_\infty W_\infty \mapsto U_\infty W_\infty$. Отсюда мы заключаем, что луч $A_1U_\infty \mapsto$ луч B_1V_∞, следовательно, точка O лежит на луче B_1V_∞. Таким образом, все три биссектрисы A_1U_∞, B_1V_∞, C_1W_∞ имеют общую точку O. ■

2. Окружность, вписанная в вырожденный треугольник. По аналогии с обычными треугольниками окружность называется вписанной в вырожденный треугольник, если прямые, содержащие стороны треугольника, являются касательными к окружности и точки касания лежат на сторонах треугольника. Пользуясь теоремой 1, докажем следующую теорему, аналогичную теореме 3 § 26.

Теорема 2. *В любой вырожденный треугольник можно вписать одну и только одну окружность.*

□ Докажем теорему для вырожденного треугольника ABU_∞ с одной несобственной вершиной (рис. 135, *а*). Пользуясь рис. 135, *б* и *в*, читатель по аналогии с при-

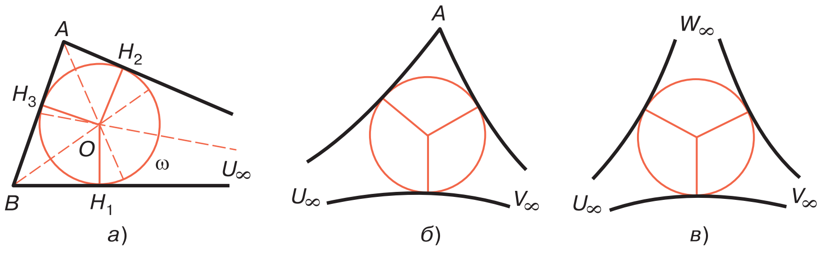


Рис. 135

веденным ниже доказательством легко докажет теорему для двух других видов вырожденных треугольников.

Пусть O — точка пересечения биссектрис треугольника ABU_∞, а OH_1, OH_2 и OH_3 — перпендикуляры, проведенные к прямым BU_∞, AU_∞ и AB. Так как углы OBU_∞, OAU_∞, OBA и OAB острые, то точка H_1 лежит на луче BU_∞, точка H_2 — на луче AU_∞, а точка H_3 — на отрезке AB. При доказательстве теоремы 1 мы установили, что $OH_1 = OH_2 = OH_3$, поэтому окружность ω с центром O радиуса OH_1 проходит через точки H_2 и H_3. Стороны треугольника ABU_∞ касаются этой окружности в точках H_1, H_2 и H_3. Значит, окружность ω является вписанной в треугольник ABU_∞.

Докажем теперь, что ω — единственная окружность, вписанная в треугольник ABU_∞. В самом деле, допустим, что ω' — другая окружность с центром O', вписанная в этот треугольник. Точка O' является внутренней точкой углов A и B и равноудалена от прямых BU_∞, BA и AU_∞, поэтому лежит на биссектрисах углов A и B, т. е. совпадает с точкой O. Радиус окружности ω' равен расстоянию от точки O до прямых, содержащих стороны треугольника. Следовательно, окружности ω и ω' совпадают. ■

3. Высоты вырожденного треугольника. Предположим, что ABU_∞ — вырожденный треугольник с одной несобственной вершиной. Перпендикуляры AA_1 и BB_1, проведенные соответственно к прямым BU_∞ и AU_∞, называются *высотами* этого треугольника. Треугольник имеет еще одну высоту, а именно луч C_1U_∞, который исходит из точки C_1 прямой AB и перпендикулярен к этой прямой (рис. 136). Легко доказать, что такая высота существует и определяется однозначно. В самом деле, по свойству 23,2° хотя бы один из углов A и B данного треугольника, например угол A, острый. Отложим на луче AB отрезок AC_1, которому соответствует угол параллельности $\widehat{BAU_\infty}$. Тогда ясно, что луч C_1U_∞ — высота треугольника ABU_∞, так как он перпендикулярен к прямой AB. Любой другой луч D_1U_∞, исходящий из точки D_1 прямой AB, отличной от точки C_1, согласно свойству 12,3° не может быть перпендикулярен к прямой AB, поэтому луч C_1U_∞ — единственная высота, проведенная к прямой AB.

Итак, вырожденный треугольник ABU_∞ имеет три высоты, две из которых AA_1 и BB_1 — отрезки, а третья C_1U_∞ — луч. Точки A_1, B_1 и C_1 называются *основаниями высот*. По существу, все свойства 27.1°–27.4° высот обычных треугольников имеют место и для высот вырожденных треугольников. В частности, если углы A и B острые, то основания всех высот лежат на соответствующих сторонах (см. рис. 136).

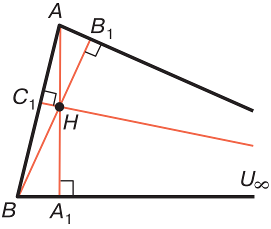


Рис. 136

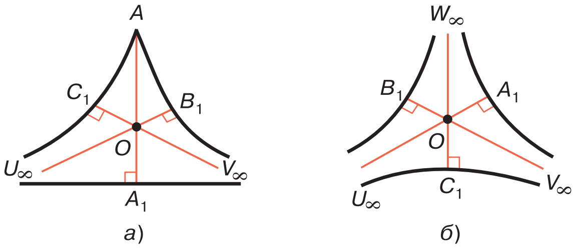


Рис. 137

Аналогично вводятся понятия высот вырожденных треугольников с двумя и тремя несобственными вершинами. На рис. 137, *а* отрезок AA_1 и лучи C_1V_∞ и B_1U_∞ — высоты вырожденного треугольника $AU_\infty V_\infty$. Здесь AA_1 — перпендикуляр, проведенный к прямой $U_\infty V_\infty$ и $B_1U_\infty \perp AV_\infty$, $C_1V_\infty \perp AU_\infty$. На рис. 137, *б* лучи A_1U_∞, B_1V_∞ и C_1W_∞ — высоты вырожденного треугольника $U_\infty V_\infty W_\infty$. Здесь $A_1U_\infty \perp V_\infty W_\infty$, $B_1V_\infty \perp U_\infty W_\infty$ и $C_1W_\infty \perp U_\infty V_\infty$. Согласно лемме 2 § 17 прямые A_1U_∞, B_1V_∞ и C_1W_∞ существуют и определяются однозначно. Таким образом, вырожденный треугольник $U_\infty V_\infty W_\infty$ имеет три высоты и все они являются лучами.

Из леммы п. 1 непосредственно следует утверждение: 40.1°. Биссектрисы вырожденного треугольника с тремя несобственными вершинами совпадают с его высотами.

4. Взаимное расположение прямых, содержащих высоты вырожденного треугольника. Отметим, что теорема § 27 о взаимном расположении прямых, содержащих высоты обычного треугольника, верна и для вырожденного треугольника, т. е. *три прямые, содержащие высоты вырожденного треугольника, принадлежат одному пучку, причем существуют вырожденные треугольники, для которых указанные прямые принадлежат каждому из трех типов пучков*. Доказательство этой теоремы мы приводим в основном для случая, когда прямые, содержащие высоты треугольника, принадлежат пучку пересекающихся прямых.

Утверждение теоремы, очевидно, верно для вырожденного прямоугольного треугольника. В самом деле, две высоты такого треугольника совпадают с двумя его сторонами, образующими прямой угол, поэтому три прямые, содержащие высоты треугольника, проходят через вершину прямого угла, т. е. принадлежат пучку пересекающихся прямых.

Докажем сначала теорему о пересечении высот вырожденного треугольника, у которого два острых угла.

Теорема 3. *Если углы A и B вырожденного треугольника ABU_∞ острые, то его высоты пересекаются в одной точке.*

□ Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы § 27. Пусть AH_1 и BH_2 — две высоты треугольника ABU_∞. По условию теоремы углы A и B острые, поэтому точки H_1 и H_2 лежат соответственно на лучах BU_∞ и AU_∞ и отрезки AH_1 и BH_2 пересекаются в некоторой точке H, которая не лежит на прямой AB (рис. 138).

Заметим, что отрезки BH_1 и AH_2 — высоты треугольника ABH. Так как $\overline{BH_1} \parallel \overline{AH_2}$ то по теореме § 27 $\overline{H_3H} \parallel \overline{AH_2}$, где отрезок HH_3 — высота треугольника ABH (см. рис. 138). Отсюда следует, что U_∞ — общая точка лучей H_3H и AH_2. Таким образом, луч H_3U_∞ —

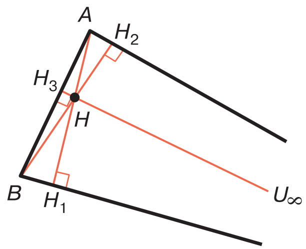


Рис. 138

высота вырожденного треугольника. Мы доказали, что три высоты AH_1, BH_2 и H_3U_∞ треугольника ABU_∞ пересекаются в точке H. ■

Предлагаем читателю доказать более общую теорему.

Теорема 4. *Если прямые, содержащие две высоты вырожденного треугольника ABU_∞ с одной несобственной вершиной, пересекаются, то через точку пересечения этих прямых проходит прямая, содержащая третью высоту треугольника.*

Докажем теперь две теоремы о высотах вырожденных треугольников с двумя и тремя несобственными вершинами.

Теорема 5. *Если вырожденный треугольник имеет три несобственные вершины или две несобственные вершины, а угол при третьей вершине острый, то его высоты пересекаются в одной точке.*

□ Рассмотрим вырожденный треугольник $U_\infty V_\infty W_\infty$ с тремя несобственными вершинами. Согласно свойству 40.1° высоты этого треугольника являются его биссектрисами, поэтому по теореме 1 они пересекаются в одной точке.

Рассмотрим теперь вырожденный треугольник $AU_\infty V_\infty$, где $\angle A$ острый. Проведем высоту AA_1 треугольника и на лучах AU_∞ и BV_∞ отложим отрезки $AC_1 = AB_1$, которым соответствует угол параллельности $\varphi = \widehat{A}$ (см. рис. 137, *а*). Проведем далее лучи B_1U_∞ и C_1V_∞. Очевидно, $B_1U_\infty \perp AV_\infty$ и $C_1V_\infty \perp AU_\infty$, поэтому эти лучи являются высотами треугольника $AU_\infty V_\infty$. Так как лучи AV_∞ и C_1V_∞ параллельны и AA_1 — внутренний луч угла C_1AV_∞, то этот луч пересекает луч C_1V_∞ в некоторой точке O, которая принадлежит отрезку AA_1.

Треугольник $AU_\infty V_\infty$ симметричен относительно прямой AA_1, поэтому лучи C_1V_∞ и B_1U_∞ симметричны относительно этой прямой. Отсюда следует, что точка O лежит на луче B_1U_∞, т. е. все три высоты треугольника $AU_\infty V_\infty$ проходят через точку O. ■

Теорема 6. *Пусть φ — мера угла A вырожденного треугольника $AU_\infty V_\infty$ с двумя несобственными вершинами. Тогда прямые, содержащие высоты этого треугольника, принадлежат пучку:* а) *пересекающихся прямых, центр которого не принадлежит высотам треугольника, если $90^\circ < \varphi < 120^\circ$;* б) *параллельных прямых, если $\varphi = 120^\circ$;* в) *расходящихся прямых, если* $180^\circ > \varphi > 120^\circ$.

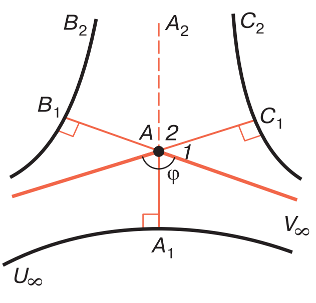


Рис. 139

□ По условиям теоремы $\varphi > 90^\circ$, поэтому $180^\circ - \varphi < 90^\circ$. Проведем высоту AA_1 треугольника, на продолжениях лучей AU_∞ и AV_∞ отложим отрезки $AC_1 = AB_1$, которым соответствует угол параллельности $180^\circ - \varphi$, и проведем лучи B_1U_∞ и C_1V_∞ (рис. 139). Так как $\widehat{B_1AU}_\infty = \widehat{C_1AV}_\infty = 180^\circ - \varphi$, то $B_1U_\infty \perp AV_\infty$, $C_1V_\infty \perp AU_\infty$. Отсюда следует, что лучи B_1U_∞ и C_1V_∞ — высоты данного треугольника. Заметим, что данный треугольник симметричен относительно прямой AA_1, поэтому и прямые C_1U_∞ и B_1V_∞ симметричны относительно этой прямой.

а) $90^\circ < \varphi < 120^\circ$. Используя обозначения углов на рис. 139, имеем: $\widehat{1} = 180^\circ - \varphi$, $\widehat{2} = \frac{\varphi}{2}$. Так как $\varphi < 120^\circ$, то $\widehat{1} > 60^\circ$, $\widehat{2} < 60^\circ$, поэтому $\widehat{1} > \widehat{2}$. Отсюда мы заключаем, что прямая C_1V_∞ пересекает прямую AA_1 в некоторой точке O, которая лежит на продолжении луча AA_1 (рис. 139; на этом рисунке точка O не изображена). Прямые B_1U_∞ и C_1V_∞ симметричны относительно прямой AA_1, поэтому прямая B_1U_∞ также проходит через точку O. Таким образом, все три прямые, содержащие высоты данного треугольника, проходят через точку O;

б) $\varphi = 120^\circ$. Используя обозначения углов на рис. 139, по аналогии со случаем а) читатель без труда докажет, что в этом случае $\overline{C_1C_2} \parallel \overline{AA_2}$, $\overline{B_1B_2} \parallel \overline{AA_2}$, поэтому прямые, содержащие высоты данного треугольника, принадлежат пучку параллельных прямых;

в) $180^\circ > \varphi > 120^\circ$. Используя обозначения углов на рис. 139, имеем: $\widehat{1} = 180^\circ - \varphi < 60^\circ$, $\widehat{2} = -\frac{\varphi}{2} > 60^\circ$, поэтому $\widehat{1} < \widehat{2}$. Отсюда следует, что C_1C_2 и AA_1 — расходящиеся прямые, поэтому существует прямая p, такая, что $p \perp C_1C_2$ и $p \perp AA_1$. Прямые C_1C_2 и B_1B_2 симметричны относительно прямой AA_1, поэтому $p \perp B_1B_2$, т. е. прямые, содержащие высоты треугольника, принадлежат пучку расходящихся прямых. ■

§ 41. Движения расширенной плоскости

1. Определение движения расширенной плоскости. Рассмотрим произвольное движение f обычной плоскости σ и покажем, что оно индуцирует на расширенной плоскости $\overline{\sigma}$ некоторое отображение $\overline{f}$, при котором каждой собственной точке соответствует собственная точка, а каждой несобственной точке — несобственная точка, следующим образом. Если M — собственная точка, а $M' = f(M)$, то будем считать, что $M' = \overline{f}(M)$. Если же U_∞ — несобственная точка расширенной плоскости, то возьмем один из лучей h плоскости σ, которому принадлежит точка U_∞, и будем считать, что $U'_\infty = \overline{f}(U_\infty)$, где U'_∞ — несобственная точка луча $h' = f(h)$.

В п. 4 § 14 было доказано, что при движении параллельные лучи плоскости σ отображаются на параллельные лучи. Так как на плоскости σ любое движение есть наложение, то *при движении плоскости параллельные* *лучи отображаются на параллельные лучи*. С другой стороны, из леммы § 5 непосредственно следует, что *при движении плоскости σ сонаправленные лучи отображаются на сонаправленные лучи*. Таким образом, точка U'_∞ не зависит от случайного выбора луча h.

Читатель легко убедится самостоятельно, что отображение $\overline{f}$ является преобразованием расширенной плоскости $\overline{\sigma}$. Это преобразование будем называть *движением* расширенной плоскости σ, индуцированным движением f обычной плоскости σ. При этом преобразованием $\overline{f}$ на расширенной плоскости индуцируются два преобразования: преобразование множества всех собственных точек (которое совпадает с преобразованием f) и преобразование множества всех несобственных точек.

Очевидно, что если при движении $\overline{f}$ плоскости $\overline{\sigma}$ $A' = \overline{f}(A)$, $U'_\infty = \overline{f}(U_\infty)$, $V'_\infty = \overline{f}(V_\infty)$, то расширенный луч AU_∞ переходит в расширенный луч $A'U'_\infty$ а расширенная прямая $U_\infty V_\infty$ — в расширенную прямую $U'_\infty V'_\infty$. Предлагаем читателю, пользуясь этими замечаниями, доказать утверждения.

41.1°. При движении $\overline{f}$ три точки расширенной плоскости $\overline{\sigma}$, не лежащие на одной прямой, переходят в три точки, не лежащие на одной прямой.

42.2°. При движении $\overline{f}$ плоскости $\overline{\sigma}$ невырожденный треугольник переходит в невырожденный треугольник, а вырожденный треугольник данного типа — в вырожденный треугольник того же типа.

2. Равенство фигур на расширенной плоскости. Две фигуры расширенной плоскости σ называются равными, если существует движение этой плоскости, при котором одна фигура переходит в другую.

Из свойства 41.2° следует, что фигура, равная невырожденному треугольнику, есть невырожденный треугольник, а фигура, равная вырожденному треугольнику данного типа, является вырожденным треугольником того же типа. Рассмотрим признаки равенства вырожденных треугольников на расширенной плоскости. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Для того чтобы на плоскости* $\overline{\sigma}$ $\angle U_\infty O V_\infty = \angle U'_\infty O' V'_\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы на плоскости* σ $\angle AOB = \angle A'O'B'$. *Здесь* U_∞, V_∞, U'_∞, V'_∞ — *несобственные точки соответственно лучей* OA, OB, $O'A'$, $O'B'$.

□ Пусть на плоскости $\overline{\sigma}$ $\angle U_\infty O V_\infty = \angle U'_\infty O'_\infty V'_\infty$. Это означает, что существует движение $\overline{f}$, при котором $\angle U_\infty O V_\infty \mapsto \angle U'_\infty O' V'_\infty$ и $O' = f(O)$. Тогда, очевидно, при движении f плоскости σ, которое индуцирует движение $\overline{f}$, $\angle AOB = \angle A'O'B'$. Обратно: если $\angle AOB = \angle A'O'B'$, то на плоскости σ существует наложение (движение) f, при котором л$OA \mapsto$ л$O'A'$, л$OB \mapsto$ л$O'B'$. Тогда на плоскости $\overline{\sigma}$ $U_\infty \mapsto U'_\infty$, $V_\infty \mapsto V'_\infty$, поэтому при движении $\overline{f}$, индуцированном движением f, л$OU_\infty \mapsto$ л$O'U'_\infty$ и л$OV_\infty \mapsto$ л$O'V'_\infty$. Следовательно, $\angle U_\infty O V_\infty = \angle U'_\infty O' V'_\infty$. ■

Лемма 2. *Если на плоскости* $\overline{\sigma}$ $\angle U_\infty O V_\infty = \angle U'_\infty O' V'_\infty$, *то существует движение* $\overline{f}$, *при котором лучи* OU_∞ *и* OV_∞ *переходят соответственно в лучи* $O'U'_\infty$ *и* $O'V'_\infty$.

□ Пусть точки U_∞, V_∞, U'_∞, V'_∞ принадлежат соответственно лучам OA, OB, $O'A'$, $O'B'$ плоскости σ. По лемме 1 на плоскости σ $\angle AOB = \angle A'O'B'$. Согласно аксиоме III$_6$ на плоскости σ существует наложение (движение) f, при котором лучи OA и OB переходят соответственно в лучи $O'A'$ и $O'B'$. Тогда точка U_∞ переходит в точку U'_∞, а точка V_∞ — в точку V'_∞, поэтому на плоскости $\overline{\sigma}$ при движении $\overline{f}$, индуцированном движением f, лучи OU_∞ и OV_∞ переходят соответственно в лучи $O'U'_\infty$ и $O'V'_\infty$. Следовательно, $\angle U_\infty O V_\infty = \angle U'_\infty O' V'_\infty$. ■

41.3°. Треугольники ABU_∞ и $A_1B_1V_\infty$ равны, если $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$.

□ По условию $\angle BAU_\infty = \angle B_1A_1V_\infty$, поэтому согласно лемме 2 на плоскости $\overline{\sigma}$ существует движение $\overline{f}$, такое, что расширенный луч AB переходит в расширенный луч A_1B_1, луч AU_∞ — в луч A_1V_∞ и $A_1 = \overline{f}(A)$. Поэтому $V_\infty = \overline{f}(U_\infty)$. Так как $AB = A_1B_1$, то $B_1 = f(B)$.

Следовательно, при движении $\bar{f}$ отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1, луч AU_∞ — в луч A_1U_∞, а луч BU_∞ — в луч B_1V_∞. Таким образом, при движении $\bar{f}$ стороны треугольника ABU_∞ переходят соответственно в стороны треугольника $A_1B_1V_\infty$, поэтому эти треугольники равны. ■

41.4°. Треугольники ABU_∞ и $A_1B_1V_\infty$ равны, если $\angle A = \angle A_1$,

□ На луче A_1B_1 отложим отрезок A_1B', равный отрезку AB, и проведем луч $B'V_\infty$ (рис. 140). По признаку 41.3° $\triangle ABU_\infty = \triangle A_1B'V_\infty$, следовательно, $\angle ABU_\infty = \angle A_1B'V_\infty$, значит, $\angle A_1B_1V_\infty = \angle A_1B'V_\infty$. Отсюда следует, что точки B_1 и B' совпадают, так как в противном случае в вырожденном треугольнике $B_1B'V_\infty$ внешний угол при одной из вершин B_1 или B' будет равен углу этого треугольника при другой вершине, что противоречит свойству 23.1°. Итак, точки B_1 и B' совпадают, поэтому $AB = A_1B_1$ и по признаку 41.3° данные треугольники равны. ■

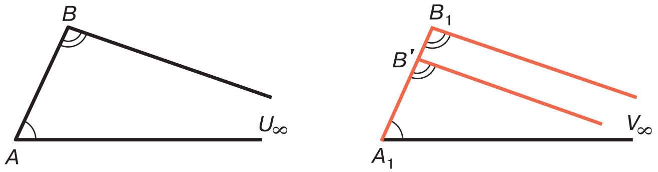


Рис. 140

41.5°. Треугольники $AU_\infty V_\infty$ и $A'U'_\infty V'_\infty$ равны, если $\angle U_\infty AV_\infty = \angle U'_\infty A'V'_\infty$.

□ Так как $\angle U_\infty AV_\infty = \angle U'_\infty A'V'_\infty$, то по предыдущей лемме существует движение $\bar{f}$, при котором $A' = \bar{f}(A)$, луч AU_∞ переходит в луч $A'U'_\infty$, а луч AV_∞ — в луч $A'V'_\infty$. При этом движении $U'_\infty = \bar{f}(U_\infty)$, а $V'_\infty = \bar{f}(V_\infty)$, поэтому прямая $U_\infty V_\infty$ переходит в прямую $U'_\infty V'_\infty$. Таким образом, при движении $\bar{f}$ стороны треугольника $AU_\infty V_\infty$ переходят в стороны треугольника $A'U'_\infty V'_\infty$, следовательно, эти треугольники равны. ■

Из этого свойства непосредственно следует, что любые два вырожденных прямоугольных треугольника с двумя несобственными вершинами равны друг другу.

41.6°. Любые два вырожденных треугольника, каждый из которых имеет три несобственные вершины, равны.

□ Пусть $U_\infty V_\infty W_\infty$ и $U'_\infty V'_\infty W'_\infty$ — произвольные вырожденные треугольники, каждый из которых имеет три несобственные вершины. Проведем высоты AW_∞ и $A'W'_\infty$ этих треугольников и рассмотрим углы $U_\infty AW_\infty$ и $U'_\infty A'W'_\infty$. На плоскости σ углы BAC и $B'A'C'$ прямые, поэтому они равны друг другу (рис. 141). По лемме 1 $\angle U_\infty AW_\infty = \angle U'_\infty A'W'_\infty$, а по лемме 2 существует наложение $\overline{f}$ плоскости $\overline{\sigma}$, такое, что л$AU_\infty \mapsto$ л$A'U'_\infty$, л$AW_\infty \mapsto$ л$A'W'_\infty$. При этом наложении прямая $U_\infty V_\infty$ переходит в прямую $U'_\infty V'_\infty$, следовательно, л$AV_\infty \to$ л$A'V'_\infty$. Таким образом, при движении $\overline{f}$ точка U_∞ переходит в точку U'_∞, точка V_∞ — в точку V'_∞, а точка W_∞ — в точку W'_∞. Отсюда следует, что при этом движении прямая $V_\infty W_\infty$ переходит в прямую $V'_\infty W'_\infty$ т. е. при движении $\overline{f}$ стороны треугольника $U_\infty V_\infty W_\infty$ переходят в стороны треугольника $U'_\infty V'_\infty W'_\infty$, поэтому эти треугольники равны. ■

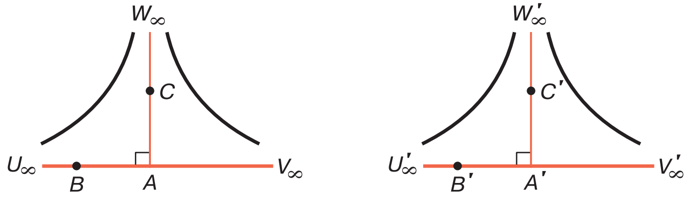


Рис. 141

3. Неподвижные точки и инвариантные прямые расширенной плоскости. Точка расширенной плоскости $\overline{\sigma}$ называется *инвариантной* или *неподвижной*, если при данном движении $\overline{f}$ она переходит в себя. Расширенная прямая называется *инвариантной прямой* движения $\overline{f}$, если ее образ совпадает с самой прямой. Ясно, что если обыкновенная точка A движения f плоскости σ является неподвижной точкой этого движения, то эта же точка является неподвижной точкой индуцированного отображения $\overline{f}$ плоскости $\overline{\sigma}$. Аналогично, если прямая a плоскости σ является инвариантной прямой движения f, то расширенная прямая $\overline{a}$ плоскости σ является инвариантной прямой движения $\overline{f}$ и на этой прямой либо каждая из двух несобственных точек переходит в себя, т. е. является неподвижной точкой, либо каждая из них переходит в другую несобственную точку той же прямой.

Движение $\overline{g}$ плоскости $\overline{\sigma}$ называется *тождественным* преобразованием, если при этом движении каждая точка плоскости $\overline{\sigma}$ является неподвижной. Докажем лемму, аналогичную свойству 31.1°.

Лемма. *Если движение $\overline{g}$ плоскости $\overline{\sigma}$ имеет по крайней мере три неподвижные точки* (*собственные или несобственные*), *не лежащие на одной прямой, то $\overline{g}$ — тождественное преобразование.*

□ Пусть A, B и C — собственные или несобственные неподвижные точки движения $\overline{g}$, не лежащие на одной прямой. Проведем высоты A_1A, B_1B и C_1C треугольника ABC. Здесь A_1A, B_1B и C_1C — отрезки или лучи в зависимости от того, являются ли точки A, B и C собственными или несобственными точками плоскости $\overline{\sigma}$ (см. § 40, п. 3). Так как B и C — неподвижные точки движения $\overline{g}$, то BC — инвариантная прямая, поэтому точка $A_1' = \overline{f}(A_1)$ лежит на прямой BC. При движении $\overline{g}$ луч или отрезок A_1A переходит в луч или отрезок $A_1'A$. Так как $A_1A \perp BC$, то $A_1'A \perp BC$, поэтому точки A_1 и A_1' совпадают, т. е. A_1 — неподвижная собственная точка движения $\overline{g}$. Аналогично доказывается, что B_1 и C_1 — неподвижные собственные точки движения $\overline{g}$.

Точки A_1, B_1 и C_1 не лежат на одной прямой, следовательно, по свойству 31.1° движение g плоскости σ, которое на расширенной плоскости $\overline{\sigma}$ индуцирует движение $\overline{g}$, является тождественным преобразованием. Отсюда следует, что и движение $\overline{g}$ — тождественное преобразование. В самом деле, пусть U_∞ — произвольная несобственная точка плоскости $\overline{\sigma}$, а h — какой-нибудь луч плоскости σ, которому принадлежит точка U_∞. Так как $h = g(h)$, то образом U'_∞ точки U_∞ при движении $\overline{g}$ является несобственная точка луча h, т. е. та же точка U_∞. Следовательно, U_∞ — неподвижная точка движения $\overline{g}$. ■

4. Классификация движений расширенной плоскости. Каждое из шести типов движений плоскости σ, которые перечислены в таблице теоремы § 33, индуцирует на расширенной плоскости $\overline{\sigma}$ соответствующее движение с тем же названием. Определим инвариантные прямые и несобственные неподвижные точки каждого из этих типов движений плоскости σ:

а) Тождественное преобразование. Очевидно, каждая несобственная точка расширенной плоскости $\overline{\sigma}$ является неподвижной точкой движения.

б) Осевая симметрия. Неподвижными несобственными точками являются только две несобственные точки, принадлежащие оси. Отметим также, что при осевой симметрии через каждую несобственную точку U_∞, не лежащую на оси, проходит единственная прямая $U_\infty V_\infty$, перпендикулярная к оси, которая является инвариантной прямой движения. Если A — точка пересечения этой прямой с осью симметрии, то луч AU_∞ переходит в луч AV_∞ а луч AV_∞ — в луч AU_∞, поэтому точка U_∞ переходит в точку V_∞, а точка V_∞ — в точку U_∞.

в) Поворот вокруг (собственной) точки. При этом движении ни одна из несобственных точек расширенной плоскости не является неподвижной точкой преобразования. Если движение является центральной симметрией относительно точки O, то прямые, проходящие через точку O, являются инвариантными прямыми, поэтому каждая несобственная точка плоскости переходит в другую несобственную точку прямой, проходящей через эту точку и точку O.

г) Перенос вдоль прямой. Пусть f — перенос вдоль прямой a плоскости σ, а $\overline{f}$ — движение расширенной плоскости $\overline{\sigma}$, индуцированное движением f. Согласно лемме 2 § 31 движение f не имеет инвариантных точек, поэтому движение $\overline{f}$ не имеет инвариантных собственных точек. По той же лемме при движении f на прямой a каждый луч переходит в сонаправленный луч, следовательно, каждая из несобственных точек U_∞ и V_∞ расширенной прямой $\overline{a}$ плоскости $\overline{\sigma}$ является неподвижной точкой движений $\overline{f}$. По предыдущей лемме движение $\overline{f}$ не имеет других несобственных инвариантных точек. Итак, U_∞ и V_∞ — единственные инвариантные точки движения $\overline{f}$.

Отметим, наконец, что если λ — одна из полуплоскостей с границей a, а $\overline{\lambda}$ — соответствующая расширенная полуплоскость, то $\overline{\lambda} = \overline{f}(\overline{\lambda})$, так как $\lambda = f(\lambda)$. Поэтому каждая несобственная точка полуплоскости λ переходит в несобственную точку той же полуплоскости.

д) Скользящая симметрия. Пусть f — скользящая симметрия вдоль прямой a плоскости σ, а $\overline{f}$ — движение расширенной плоскости $\overline{\sigma}$, индуцированное движением f. Точно так же, как и в случае переноса вдоль прямой, доказывается, что движение $\overline{f}$ имеет две и только две неподвижные несобственные точки, а именно несобственные точки прямой a. В отличие от случая переноса вдоль прямой, каждая из двух полуплоскостей с границей $\overline{a}$ переходит в другую полуплоскость, поэтому каждая несобственная точка одной из этих полуплоскостей переходит в несобственную точку другой полуплоскости.

е) Орициклическое движение. Пусть f — орициклическое движение плоскости σ, а $\overline{f}$ — движение расширенной плоскости $\overline{\sigma}$, индуцированное движением f. Так как f не имеет инвариантных точек и прямых, то и $\overline{f}$ не имеет инвариантных собственных точек и инвариантных прямых. По теореме 2 § 32 движение f имеет единственный инвариантный пучок параллельных прямых. Центр этого пучка параллельных прямых есть несобственная точка (см. § 38, п. 4), которая является единственной неподвижной несобственной точкой движения $\overline{f}$. Поэтому $\overline{f}$ называется *поворотом вокруг несобственной точки*.

Из предыдущего изложения следуют утверждения:

а) Каждое движение расширенной плоскости имеет по крайней мере одну неподвижную точку, которая может быть собственной или несобственной.

б) Движение расширенной плоскости, не имеющее неподвижных несобственных точек, имеет только одну неподвижную собственную точку и является поворотом вокруг собственной точки.

в) Движение расширенной плоскости, имеющее только одну неподвижную точку (собственную или несобственную), является поворотом вокруг этой точки.

г) Если движение расширенной плоскости имеет только две неподвижные точки, то эти точки являются несобственными, а движение — либо перенос вдоль прямой, либо скользящая симметрия.

д) Движение расширенной плоскости, отличное от тождественного преобразования, имеет не более чем две несобственные неподвижные точки.

Задачи к главе 7

1. Доказать, что отображение Ω_{Or} является взаимно однозначным отображением всей плоскости σ Лобачевского на множество внутренних точек круга $(\overline{O,r})$, при котором имеется только одна неподвижная точка — центр окружности (O,r).
2. Доказать, что при отображении Ω_{Or} произвольная окружность с центром O переходит в окружность ω' с тем же центром, но меньшего радиуса, причем круг $\overline{\omega}$ с границей ω переходит в круг $\overline{\omega'}$ с границей ω'.
3. Доказать, что при отображении Ω_{Or} любые три неколлинеарные точки переходят в три неколлинеарные точки.
4. Доказать, что при отображении Ω_{Or} треугольник переходит в треугольник и выпуклый n-угольник при $n > 3$ переходит в выпуклый n-угольник.
5. Доказать, что при отображении Ω_{Or} сонаправленные лучи переходят в открытые полухорды с общим

концом, принадлежащие одной хорде окружности (O, r).

6. Доказать, что луч параллелен прямой тогда и только тогда, когда их образы при отображении Ω_{Or} не имеют общих точек, но конец хорды, содержащей образ луча, совпадает с одним из концов хорды, содержащей образ прямой.
7. Точка O лежит на прямой a. Доказать, что прямая b перпендикулярна к прямой a тогда и только тогда, когда при отображении Ω_{Or} образ прямой b перпендикулярен к образу прямой a.
8. Пользуясь отображением Ω_{Or}, доказать лемму § 11 и теорему 1 § 11.
9. Пользуясь отображением Ω_{Or}, доказать, что существует одна и только одна прямая, проходящая через данную точку и параллельная данному лучу или содержащая этот луч.
10. Доказать предложения 38.2°–38.4°.
11. Пользуясь понятием несобственных точек, дать определение заградительных прямых угла и двух пересекающихся прямых и обосновать теоремы 1 и 2 § 16.
12. Пользуясь понятием несобственных точек, дать определение заградительной прямой двух параллельных прямых и доказать свойства 16.1°, 16.3° и теорему 3 § 16.
13. Пользуясь понятием несобственных точек, дать определение заградительной прямой двух расходящихся прямых и доказать теорему существования заградительных прямых.
14. Пользуясь отображением Ω_{Or}, доказать леммы 1 и 2 § 17.
15. Пользуясь отображением Ω_{Or}, доказать теоремы 1 и 2 § 17.
16. Доказать, что у вырожденного прямоугольного треугольника с одной несобственной вершиной один из углов острый. Доказать также, что если $\widetilde{\alpha}$ — произвольный острый угол, то существует вырожденный прямоугольный треугольник с одной несобственной вершиной, острый угол которого равен $\widetilde{\alpha}$.

17. Даны два угла $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, сумма мер которых меньше $2d$. Доказать, что существует вырожденный треугольник ABU_∞ с одной несобственной вершиной, такой, что $\angle A = \widetilde{\alpha}$, $\angle B = \widetilde{\beta}$.
18. Концы отрезка MN принадлежат разным сторонам данного вырожденного треугольника и не совпадают с его вершинами. Доказать, что любая точка, лежащая на отрезке MN, принадлежит внутренней области данного треугольника.
19. Доказать, что внутренняя область треугольника ABU_∞ с одной несобственной вершиной является пересечением внутренних областей углов BAU_∞ и ABU_∞.
20. Пользуясь отображением $\overline{\Omega_{Or}}$, доказать предложение 39.2°.
21. Пользуясь отображением Ω_{Or} доказать предложение 39.3°.
22. В вырожденном треугольнике ABC с одной, двумя или тремя несобственными вершинами биссектриса, проведенная к стороне AB, совпадает с высотой, проведенной к этой же стороне. Доказать, что либо обе вершины A и B треугольника — собственные точки и $\angle A = \angle B$, либо эти вершины — несобственные точки.
23. Доказать, что если в треугольнике ABC обе вершины A и B — несобственные точки или обе они собственные и $\angle A = \angle B$, а вершина C — собственная или несобственная точка, то биссектриса, проведенная к стороне AB, совпадает с высотой, проведенной к той же стороне.
24. Доказать теорему 2 § 40 для вырожденных треугольников с двумя или тремя несобственными вершинами.
25. Доказать теорему 4 § 40.
26. В вырожденном треугольнике ABU_∞ с одной несобственной вершиной прямые, содержащие две высоты AA_1 и BB_1 параллельны. Доказать, что три прямые, содержащие все высоты треугольника, принадлежат пучку параллельных прямых.

27. Доказать, что отображение $\overline{f}$ расширенной плоскости $\overline{\sigma}$, индуцированное движением f плоскости σ, является преобразованием плоскости $\overline{\sigma}$.
28. Доказать утверждения 41.1° и 41.2°.
29. На прямой a расширенной плоскости даны две собственные точки A и B. Доказать, что существует движение $\overline{f}$ расширенной плоскости, такое, что $U_\infty = \overline{f}(U_\infty)$, $V_\infty = \overline{f}(V_\infty)$, $B = \overline{f}(A)$, где U_∞ и V_∞ — несобственные точки прямой $\overline{a}$.
30. Две точки A и B расширенной прямой $\overline{a}$, из которых по крайней мере одна точка собственная, являются неподвижными точками движения $\overline{f}$. Доказать, что любая точка прямой $\overline{a}$ является неподвижной точкой. Верно ли аналогичное утверждение для случая, когда обе точки A и B несобственные? Ответ обосновать.

Глава 8

ДЕФЕКТ И ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 42. Дефект многоугольника

1. Многоугольник и его дефект. Понятия многоугольника, простого и выпуклого многоугольников, а также понятие внутренней области многоугольника относятся к абсолютной геометрии. Мы предполагаем, что читателю известны эти понятия из курса элементарной геометрии (см. [1], § 23). В этой главе под многоугольником мы понимаем фигуру, которая является объединением простой замкнутой ломаной и ее внутренней области. Напомним, что у такого многоугольника несмежные стороны не имеют общих точек, а смежные стороны не лежат на одной прямой. Однако для удобства дальнейшего изложения несколько расширим понятие простого многоугольника, считая, что у него могут существовать такие смежные стороны, которые лежат на одной прямой. На рис. 142 изображен такой шестиугольник $ABCDEF$ (смежные стороны с общей вершиной F лежат на одной прямой).

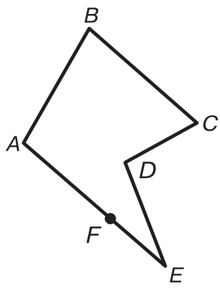


Рис. 142

Введем понятие дефекта многоугольника. Это понятие играет существенную роль в теории площадей многоугольников на плоскости Лобачевского. Пусть B — произвольная вершина n-угольника F_n, а AB и BC — стороны с общей вершиной B, не лежащие на одной прямой. Мера φ угла, смежного с углом ABC, взятая с определенным знаком, называется *мерой внешнего угла многоугольника F_n при вершине B*. При этом $\varphi > 0$, если на сторонах BA и BC найдутся такие две точки, что весь отрезок, соединяющий эти точки, принадлежит многоугольнику. В противном случае мы считаем, что $\varphi < 0$. Если у многоугольника смежные стороны с общей вершиной A лежат на одной прямой, то считаем, что мера смежного угла при вершине A равна нулю.

Очевидно, меры внешних углов любого выпуклого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ положительны, поэтому они равны: $2d - \widehat{A_1}$, $2d - \widehat{A_2}$, $\ldots$, $2d - \widehat{A_n}$. В частности, меры внешних углов треугольника ABC равны: $2d - \widehat{A}$, $2d - \widehat{B}$, $2d - \widehat{C}$. На рис. 143 изображен невыпуклый четырехугольник $ABCD$. Ясно, что меры внешних углов при вершинах A, B и C соответственно равны: $2d - \widehat{BAC}$, $2d - \widehat{ABD}$, $2d - \widehat{ACD}$. Мера φ внешнего угла при вершине D отрицательна, т. е. $\varphi = -(2d - \widehat{BDC}) = \widehat{BDC} - 2d$.

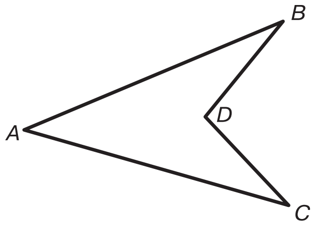


Рис. 143

Если α_1, α_2, $\ldots$, α_n — меры внешних углов произвольного n-угольника F_n, то число

$$\delta(F_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 4d \qquad \textbf{(1)}$$

называется *дефектом многоугольника* F_n. Отсюда следует, что дефект выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ равен: $\sum_{i=1}^{n}(2d - \widehat{A_i}) - 4d = 2(n-2)d - \sum_{i=1}^{n}\widehat{A_i}$. В частности, дефект треугольника ABC равен: $\delta(ABC) = 2d - \sigma(ABC)$. Таким образом, формула **(1)** полностью согласуется с определением дефекта треугольника, которое было дано в п. 2 § 6.

Пусть $F_n = A_1A_2\ldots A_n$ — n-угольник, а P — точка, лежащая на одной из его сторон, например на стороне

A_iA_{i+1} (рис. 144). Тогда $F_{n+1} = A_1A_2\ldots A_iPA_{i+1}\ldots A_n$ — новый $(n+1)$-угольник. Будем говорить, что многоугольник F_{n+1} получен из многоугольника F_n присоединением точки P. Согласно формуле (1) $\delta(F_n) = \delta(F_{n+1})$, т. е. *дефект многоугольника, который получен из данного многоугольника присоединением точки, равен дефекту данного многоугольника.*

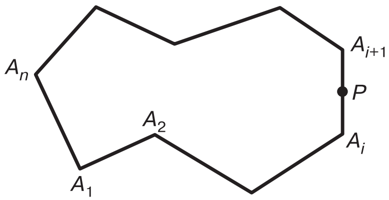


Рис. 144

Аналогично предыдущему из данного n-угольника можно получить многоугольник присоединением к нему более чем одной точки. Например, на рис. 145 шестиугольник $APBQCD$ получен из четырехугольника $ABCD$ присоединением точек P и Q.

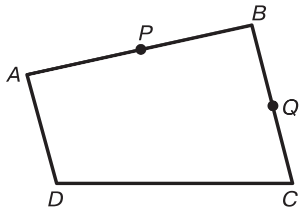
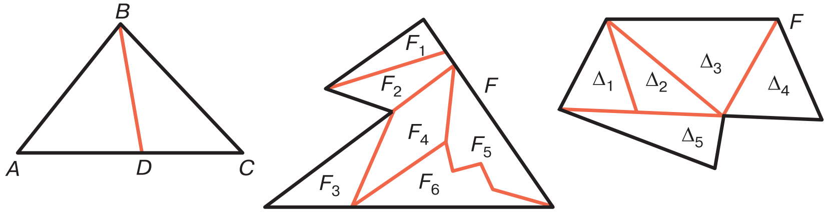


Рис. 145

2. Теорема о дефекте многоугольника. Будем говорить, что многоугольник F разложен на n многоугольников $F_1, F_2, \ldots, F_n$, где $n > 1$, если $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$, и для любых двух многоугольников F_i и F_j, где $i \neq j$, множество точек $F_i \cap F_j$ либо пустое, либо содержит только такие точки, которые принадлежат как границе многоугольника F_i, так и границе многоугольника F_j.

На рис. 146, *а* треугольник ABC разложен на два треугольника ABD и BCD, на рис. 146, *б* многоугольник F разложен на шесть многоугольников F_1 F_2, ..., F_6, а на рис. 146, *в* многоугольник F разложен на пять треугольников.



а) б) в)

Рис. 146

Пусть F — данный многоугольник, а L — простая незамкнутая ломаная, концы которой принадлежат границе многоугольника F и все точки, кроме концов, являются внутренними точками этого многоугольника. Можно доказать, что ломаная L разлагает многоугольник F на два многоугольника F_1 и F_2, при этом $F_1 \cap F_2 = L$ (рис. 147, *а*). В частности, ломаная L может состоять только из одного отрезка (рис. 147, *б*). Имеет место следующая важная теорема.

а) б)

Рис. 147

Теорема. *Если ломаная L разлагает многоугольник F на два многоугольника F_1 и F_2, то дефект многоугольника F равен сумме дефектов многоугольников F_1 и F_2.*

□ Пусть $F = A_1A_2\ldots A_n$ — данный многоугольник, а L — ломаная с концами P и Q, которая разлагает его на два многоугольника F_1 и F_2. Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ меры внешних углов соответственно при вершинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ многоугольника F. Не нарушая общности, можно считать, что точки P и Q совпадают с двумя вершинами многоугольника F_n. В самом деле, если, например, точка P лежит на стороне A_iA_{i+1} многоугольника F, то докажем теорему для многоугольника $F_{n+1} = A_1A_2\ldots A_iPA_{i+1}\ldots A_n$, который получен из многоугольника F присоединением точки P. Так как $\delta(F) = \delta(F_{n+1})$, то тем самым теорема будет доказана и для многоугольника F.

Рассмотрим сначала случай, когда ломаная L — некоторый отрезок PQ. Пусть точка P совпадает с точкой A_1, а Q — с точкой A_i. Отрезок PQ разлагает многоугольник F на два многоугольника $F_1 = A_1A_2\ldots A_i$ и $F_2 = A_iA_{i+1}\ldots A_n$ (рис. 148). Обозначим через β_1 и γ_1 меры внешних углов при вершинах A_1 и A_i многоугольника F_1, а через β_2 и γ_2 меры внешних углов при тех же вершинах многоугольника F_2 (см. рис. 148). Нетрудно показать, что, каковы бы ни были внешние углы при вершинах A_1 и A_i многоугольников F, F_1 и F_2, выполняются равенства

$$\alpha_1 + 2d = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_i + 2d = \gamma_1 + \gamma_2. \qquad (2)$$

Например, на рис. 148 $\alpha_1 = 2d - \widehat{A_2A_1A_n}$, $4d = \beta_1 + \beta_2 + \widehat{A_2A_1A_n}$. Сложив эти равенства, получаем первое из равенств (2). На этом же рисунке $\alpha_i = \widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}} - 2d$,

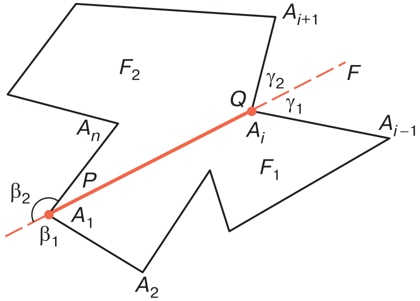


Рис. 148

$\widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}} = \gamma_1 + \gamma_2$. Сложив эти равенства, получаем второе из равенств (2).

Согласно формуле (1) имеем

$$\delta(F_1) = \beta_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{i-1} + \gamma_1 - 4d, \tag{3}$$

$$\delta(F_2) = \gamma_1 + \alpha_{i+1} + \ldots + \alpha_n + \beta_2 - 4d. \tag{4}$$

Сложив эти равенства и учитывая равенства (1) и (2), получаем

$$\delta(F_1) + \delta(F_2) = \delta(F). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда ломаная L состоит более чем из одного звена. Пусть, например, $L = PR_1R_2R_3Q$ (рис. 149). Эта ломаная разлагает многоугольник F на два многоугольника $F_1 = A_1A_2 \ldots A_iR_3R_2R_1$ и $F_2 = A_iA_{i+1} \ldots A_1R_1R_2R_3$. Обозначим через δ_1, δ_2, δ_3 меры внешних углов при вершинах R_1, R_2 и R_3 многоугольника F_1. Тогда ясно, что меры внешних углов при тех же вершинах R_1, R_2 и R_3 многоугольника F_2 равны $-\delta_1$, $-\delta_2$, $-\delta_3$, поэтому, применив те же обозначения для мер внешних углов при вершинах A_1 и A_i, что и в предыдущем случае, вместо формул (3) и (4) получаем

$$\delta(F_1) = \beta_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{i-1} + \gamma_1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - 4d,$$

$$\delta(F_2) = \gamma_2 + \alpha_{i+1} + \ldots \alpha_n + \beta_2 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - 4d.$$

Сложив эти равенства, получаем равенство (5). ■

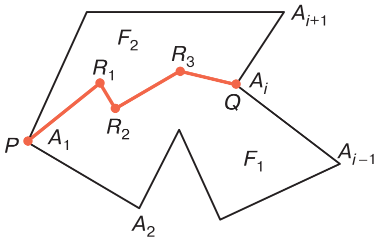


Рис. 149

Из доказанной теоремы следует утверждение.

42.1°. Если многоугольник F разложен на многоугольники F_1, F_2, ..., F_n, где $n > 2$, то $\delta(F) = \delta(F_1) + \delta(F_2) + \ldots + \delta(F_n)$.

Это утверждение легко доказать методом математической индукции, если воспользоваться доказанной теоремой.

Так же как и на евклидовой плоскости, имеют место утверждения.

42.2°. Любой многоугольник можно разложить на конечное множество треугольников.

42.3°. Дефект любого многоугольника есть положительная величина.

□ Пусть F — данный многоугольник. Разложим его на конечное множество треугольников Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n. По свойству 42.1° $\delta(F) = \delta(\Delta_1) + \ldots + \delta(\Delta_n)$. Дефект любого треугольника есть положительная величина (следствие из теоремы 1 § 6), поэтому $\delta(F) > 0$. ■

3. Дефект четырехугольника Саккери. Пусть $F_4 = ABCD$ — четырехугольник Саккери с основанием AB. Обозначим через φ меры его острых углов при вершинах C и D, а через a длину стороны CD. Пользуясь формулой (1), легко показать, что

$$\delta(F_4) = 2(d - \varphi). \tag{6}$$

Прямая O_1O_2, проходящая через середины отрезков CD и AB, является осью симметрии четырехугольника F_4. Проведем луч CE, параллельный прямой O_1O_2 (рис. 150). Так как CB и O_1O_2 — расходящиеся прямые ($CB \perp AB$, $O_1O_2 \perp AB$), то CE — внутренний луч угла BCO_1, следовательно, $\varphi > \widehat{ECO_1}$. Но $\widehat{ECO_1} = \Pi\left(\frac{CD}{2}\right) = \Pi\left(\frac{a}{2}\right)$, поэтому

$$\varphi > \Pi\left(\frac{a}{2}\right). \tag{7}$$

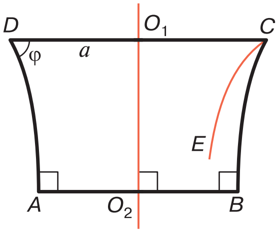


Рис. 150

Используя соотношения (6) и (7) и утверждение 42.3°, получаем

$$0 < \delta(F_4) < 2\left(d - \Pi\left(\frac{a}{2}\right)\right). \tag{8}$$

Докажем следующую лемму, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма. *Дефект треугольника равен дефекту четырехугольника Саккери, присоединенного к треугольнику на любой его стороне.*

□ Пусть ABC — данный треугольник, а $APQB$ — присоединенный к нему четырехугольник. По теореме 1 § 25 $\varphi = \frac{1}{2}\sigma(ABC)$, где φ — мера каждого из острых углов четырехугольника $APQB$. По формуле (6) $\delta(ABQP) = 2(d - \varphi) = 2d - \sigma(ABC) = \delta(ABC)$. ■

§ 43. Площадь многоугольника. Равносоставленные и равновеликие многоугольники

1. Понятие площади многоугольника. Задача измерения площадей на плоскости Лобачевского формулируется точно так же, как и на плоскости Евклида. Рассмотрим множество M всех многоугольников на плоскости Лобачевского и обозначим через R_+ множество всех действительных положительных чисел. Говорят, что установлено измерение площадей многоугольников, если определено отображение S, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) Если многоугольники F и F' равны, то $S(F) = S(F')$.
2) Если многоугольник F разложен на многоугольники F_1 и F_2, то $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$.

Положительное число, которое ставится в соответствие многоугольнику F, называется *мерой* или *площадью многоугольника* F.

Отметим, что аксиому 2 измерения площадей легко обобщить на случай, когда данный многоугольник разложен на n многоугольников, где $n > 2$, т. е. имеет место утверждение: если установлено измерение площадей многоугольников и многоугольник F разложен на многоугольники $F_1, F_2, \ldots, F_n$, где $n > 1$, то

$$S(F) = S(F_1) + S(F_2) + \ldots + S(F_n). \qquad (1)$$

При $n = 2$ это утверждение сводится к аксиоме 2 измерения площадей, а при $n > 2$ его легко доказать методом математической индукции.

2. Равносоставленные и равновеликие многоугольники. Так же как и на плоскости Евклида, два многоугольника называются *равносоставленными*, если их можно разложить на одно и то же число соответственно равных многоугольников. Примером равносоставленных многоугольников являются треугольник ABC и четырехугольник $MNPQ$, изображенные на рис. 151. На этом рисунке CH — высота треугольника ABC. Треугольник ABC разложен на два треугольника F_1 и F_2, а четырех-

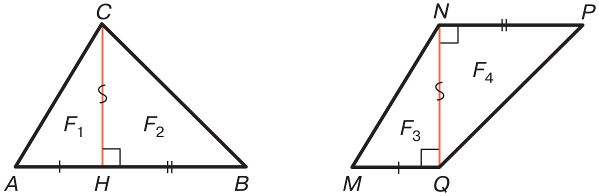


Рис. 151

угольник $MNPQ$ — на треугольники F_3 и F_A, при этом $F_l = F_3$ и $F_2 = F_4$.

Если установлено измерение площадей, то ясно, что равносоставленные многоугольники имеют равные площади. Такие многоугольники называются *равновеликими*.

Лемма 1. *Произвольный треугольник и присоединенный к нему четырехугольник Саккери* (*см.* § 25, *п.* 2) *равносоставлены, поэтому если установлено измерение площадей, то они равновелики.*

□ Пусть ABC — данный треугольник, а $APQB$ — присоединенный к нему четырехугольник (рис. 152). По определению прямая PQ проходит через середины M и N сторон AC и BC треугольника. Проведем перпендикуляр CR к прямой PQ.

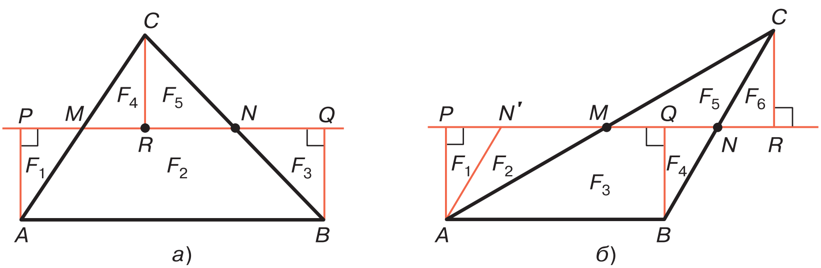


Рис. 152

Рассмотрим сначала случай, когда точки M и N лежат на отрезке PQ, и воспользуемся обозначениями, которые указаны на рис. 152, *а*. Четырехугольник $APQB$ разложен на два треугольника F_1 и F_3 и четырехугольник F_2, а треугольник ABC — на четырехугольник F_2 и треугольники F_4 и F_5. Но $F_1 = F_4$, $F_3 = F_5$, поэтому четырехугольник $APQB$ и треугольник ABC равносоставлены. Читатель без труда убедится в том, что это утверждение верно при любом другом расположении точек P, Q и R на прямой MN. Например, на рис. 152, *б* четырехугольник $APQB$ разложен на треугольники F_1 и F_2 и четырехугольник F_3. Здесь N' — точка, симметричная точке N относительно точки M. С другой стороны, треугольник ABC разложен на четырехугольник F_3 и два треугольника F_4 и F_5. Но $F_2 = F_5$, $F_1 = F_6 = F_4$, поэтому $APQB$ и ABC равносоставлены. Таким образом, если установлено измерение площадей, то $S(APQB) = S(ABC)$. ■

3. Теоремы о равновеликих треугольниках. Докажем сначала ряд утверждений, предполагая, что введено измерение площадей, т. е. что существует отображение S: $M \to R_+$, удовлетворяющее двум аксиомам измерения площадей.

Теорема 1. *Если установлено измерение площадей, то любые два треугольника, имеющие равные дефекты, равновелики.*

□ Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные треугольники, имеющие равные дефекты δ, а следовательно, и равные суммы φ углов.

Сначала рассмотрим случай, когда $AB = A_1B_1$. Построим четырехугольники $APQB$ и $A_1P_1Q_1B_1$, присоединенные к данным треугольникам на их равных сторонах. По теореме 1 § 25 острые углы четырехугольников $APQB$ и $A_1P_1Q_1B_1$ равны и так как $AB = A_1B_1$, то по следствию 2° из теоремы 1 § 28 $APQB = A_1P_1Q_1B_1$, поэтому $S(APQB) = S(A_1P_1Q_1B_1)$. Но по лемме $S(ABC) = S(APQB)$, $S(A_1B_1C_1) = S(A_1P_1Q_1B_1)$, следовательно, $S(ABC) = S(A_1B_1C_1)$.

Рассмотрим теперь общий случай. Не нарушая общности, можно предположить, что $A_1C_1 \geqslant AC$. Тогда $\frac{A_1C_1}{2} \geqslant \frac{AC}{2} = AM$, где M — середина отрезка AC. Следовательно, $\frac{A_1C_1}{2} \geqslant AP$, поэтому на прямой PQ существует точка M', такая, что $AM' = \frac{A_1C_1}{2}$ (рис. 153). Возьмем точку C', симметричную точке A относительно точки M', и рассмотрим треугольник $AC'B$. По лемме 1 § 25 четырехугольник $APQB$ присоединен к треугольнику ABC'. По лемме § 42 $\delta(APQB) = \delta(ABC)$, $\delta(APQB) = \delta(ABC')$, поэтому $\delta(ABC) = \delta(ABC') = \delta(A_1B_1C_1)$. Так как у треугольников ABC и ABC' сторона AB общая, то по доказанному $S(ABC) = S(ABC')$. С другой стороны, $AC' = A_1C_1$, поэто-

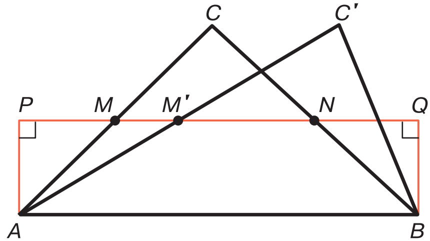


Рис. 153

му по доказанному $S(ABC') = S(A_1B_1C_1)$, следовательно, $S(ABC) = S(A_1B_1C_1)$. ■

В евклидовой геометрии любые два равновеликих треугольника, которые имеют общее основание, имеют равные высоты. В геометрии Лобачевского картина совершенно иная, что вытекает из теоремы, которую мы сейчас докажем. Рассмотрим сначала следующую лемму.

Лемма 2. *Если два треугольника ABC_1 и ABC_2 равновелики и расположены по одну сторону от прямой AB, то их средние линии, соответствующие стороне AB, принадлежат одной прямой.*

□ Пусть A_1B_1 и A_2B_2 — средние линии данных треугольников, а AP_1Q_1B и AP_2Q_2B — четырехугольники Саккери, присоединенные к этим треугольникам. По теореме 1 § 25 острые углы этих четырехугольников равны, поэтому по следствию 2° теоремы 1 § 28 $AP_1Q_1B = AP_2Q_2B$. Отсюда следует, что AP_1Q_1B и AP_2Q_2B — один и тот же четырехугольник, поэтому отрезки A_1B_1 и A_2B_2 принадлежат прямой PQ. ■

Теорема 2. *Если установлено измерение площадей, то фигура γ, образованная из множества всех вершин треугольников, имеющих одно и то же основание AB, равные площади и расположенных по одну сторону от прямой AB, есть эквидистанта. Базой этой эквидистанты является прямая, которой принадлежат средние линии указанных треугольников, которые соответствуют основанию AB.*

□ Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех треугольников, указанных в теореме. Согласно лемме 2 средние линии всех треугольников множества $\mathfrak{M}$ принадлежат некоторой прямой l. Если AP и BQ — перпендикуляры, проведенные к прямой l, то ясно, что $APQB$ — четырехугольник Саккери, присоединенный к каждому из треугольников множества $\mathfrak{M}$ к его стороне AB.

Рассмотрим эквидистанту γ' с базой l, высотой, равной AP, и полуплоскостью λ, которая не содержит точки A и B (рис. 154), и докажем, что фигура γ' совпадает с фигурой γ. Если $X \in \gamma$ то треугольник ABX принадлежит множеству $\mathfrak{M}$. Отсюда следует, что середина X_1 стороны AX лежит на прямой l, поэтому $AP = XX_0$, где XX_0 — перпендикуляр к прямой l (см. рис. 154). Следовательно, $X \in \gamma'$.

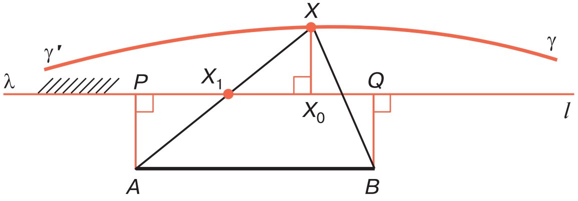


Рис. 154

Обратно, пусть $Y \in \gamma'$, а YY_0 — перпендикуляр к прямой l. Так как $A, Y \div l$ и $YY_0 = AP$, то середина отрезка AY лежит на прямой l, поэтому по лемме 1 § 25 четырехугольник $APQB$ присоединен к треугольнику ABY к его стороне AB. По лемме 1 треугольник ABY и четырехугольник $APQB$ равновелики. Отсюда мы заключаем, что треугольник принадлежит множеству $\mathfrak{M}$, поэтому $Y \in \gamma$. Итак, фигура γ совпадает с эквидистантой γ'. ■

§ 44. Основные теоремы о площадях многоугольников

1. Теорема об отношении площадей двух многоугольников.

Лемма. *Если установлено измерение площадей и ABC — произвольный треугольник, а C_1 — точка,* *лежащая на стороне* AC, *то* $\frac{S}{S_1} = \frac{\delta}{\delta_1}$, *где* S *и* S_1 — *площади треугольников* ABC *и* ABC_1, *а* δ *и* δ_1 — *их дефекты.*

□ Пусть n — произвольное натуральное число, $n > 1$. На луче AC возьмем следующие друг за другом точки $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, D_n$ так, чтобы

$$\delta(ABD_1) = \delta(D_1BD_2) = \ldots = \delta(D_{n-1}BD_n) = \frac{1}{n}\,\delta.$$

Читатель, пользуясь теоремой 5 § 25, легко убедится в том, что такие точки существуют. При этом, согласно свойству 42.1°, $\delta(ABD_n) = \delta(ABD_1) + \delta(D_1BD_2) + \ldots + \delta(D_{n-1}BD_n) = n\cdot\frac{1}{n}\,\delta = \delta$, т. е. $\delta(ABD_n) = \delta$. Отсюда мы заключаем, что точки C и D_n совпадают.

Пусть точка C_1 принадлежит отрезку D_mD_{m+1} и не совпадает с точкой D_{m+1}. Тогда $\delta_1 \geqslant \delta(ABD_m) = \frac{m}{n}\,\delta$ и $\delta_1 < \delta(ABD_{m+1}) = \frac{m+1}{n}\,\delta$. Следовательно, $\frac{m}{n}\,\delta \leqslant \delta_1 < \frac{m+1}{n}\,\delta$ или

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{\delta_1}{\delta} < \frac{m+1}{n}\,. \tag{1}$$

С другой стороны, по теореме 1 § 43 все n треугольников имеют равные площади, поэтому, если S_0 — площадь каждого из этих треугольников, то $S = nS_0$, $mS_0 \leqslant S_1 < (m+1)S_0$. Отсюда получаем: $\frac{mS_0}{nS_0} \leqslant \frac{S_1}{S} \leqslant \frac{(m+1)S_0}{nS_0}$, т. е.

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{S_1}{S} < \frac{m+1}{n}\,. \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) следует, что $\left|\frac{S_1}{S} - \frac{\delta_1}{\delta}\right| < \frac{1}{n}$. Так как n можно выбирать сколь угодно большим, то $\frac{S_1}{S} - \frac{\delta_1}{\delta} = 0$ или $\frac{S_1}{S} = \frac{\delta_1}{\delta}$. ■

Докажем теперь теорему об отношении площадей двух многоугольников.

Теорема 1. *Если установлено измерение площадей и S, δ — площадь и дефект произвольного многоугольника, то $S = k\delta$, где k — постоянная величина, одна и та же для всех многоугольников.*

□ Докажем сначала теорему для треугольников, т. е. докажем, что отношение площадей любых двух треугольников равно отношению их дефектов.

Пусть ABC и $A'B'C$ — произвольные треугольники, S и S' — их площади, а δ и δ' — их дефекты. Если $\delta' = \delta$, то по теореме 1 § 43 $S' = S$, поэтому в этом случае утверждение теоремы очевидно. Предположим, что $\delta' \neq \delta$. Отсюда следует, что $\triangle ABC \neq \triangle A'B'C'$.

Рассмотрим сначала случай, когда $AB = A'B'$. Построим треугольник ABC_1, равный треугольнику $A'B'C'$ так, чтобы $C, C_1 \doteqdot AB$. Тогда $S(ABC_1) = S'$, а $\delta(ABC_1) = \delta'$.

Если $\angle BAC_1 = \angle BAC$, то точка C_1 лежит на луче AC, поэтому согласно предыдущей лемме $\dfrac{S}{S(ABC_1)} = \dfrac{\delta}{\delta(ABC_1)}$, т. е.

$$\frac{S}{S'} = \frac{\delta}{\delta'}\,. \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда $\angle BAC_1 \neq \angle BAC$; пусть, например, $\angle BAC_1 < \angle BAC$. Обозначим через C_0 точку пересечения луча AC_1 с отрезком BC. Если точки C_1 и C_0 совпадают, то по предыдущей лемме выполняется равенство (3), поэтому $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{\delta}{\delta'}$. Если же точки C_0 и C_1 не совпадают (рис. 155), то по предыдущей лемме $\dfrac{S(ABC_0)}{S(ABC_1)} = \dfrac{\delta(ABC_0)}{\delta(ABC_1)}$, $\dfrac{S(ABC_0)}{S(ABC)} = \dfrac{\delta(ABC_0)}{\delta(ABC)}$. Разделив первое

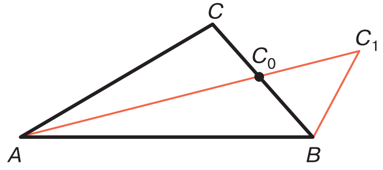


Рис. 155

из этих равенств на второе, получаем: $\dfrac{S(ABC)}{S(ABC_1)} = \dfrac{\delta(ABC)}{\delta(ABC_1)}$ или $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{\delta}{\delta'}$.

Рассмотрим теперь случай, когда ABC и $A'B'C'$ — произвольные треугольники. Построим третий треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = A'C'$. По доказанному $\dfrac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} = \dfrac{\delta(A_1B_1C_1)}{\delta(ABC)}$; $\dfrac{S(A_1B_1C_1)}{S(A'B'C')} = \dfrac{\delta(A_1B_1C_1)}{\delta(A'B'C')}$. Разделив второе равенство на первое, получаем: $\dfrac{S(ABC)}{S(A'B'C')} = \dfrac{\delta(ABC)}{\delta(A'B'C')}$ или $\dfrac{S}{S'} = \dfrac{\delta}{\delta'}$.

Докажем, наконец, теорему для произвольных многоугольников. Рассмотрим произвольный многоугольник F и разложим его на треугольники $F_1, F_2, \ldots, F_n$, площади которых равны соответственно $S_1, S_2, \ldots, S_n$, а их дефекты $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$. По доказанному

$$\frac{S_1}{\delta_1} = \frac{S_2}{\delta_2} = \ldots = \frac{S_n}{\delta_n} = k,$$

$$\text{т. е.}\quad S_1 = k\delta_1, \quad S_2 = k\delta_2, \ldots, \quad S_n = k\delta_n,$$

где k — некоторая постоянная величина. Согласно формуле (1) § 43 $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, поэтому $S = k(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n)$. По свойству 42.1° $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = \delta$, поэтому $S = k\delta$. ■

2. Две основные теоремы об измерении площадей. Необходимо теперь доказать, что на плоскости Лобачевского существуют отображения S: $M \to R_+$, удовлетворяющие аксиомам 1 и 2 измерения площадей, и при определенных условиях такое отображение определяется однозначно. Докажем сначала теорему существования площади многоугольника.

Теорема 2. *Отображение $S: M \to R_+$ по закону:*

$$S(F) = k\delta(F), \tag{4}$$

где k — произвольное положительное число, а $\delta(F)$ — дефект многоугольника F, удовлетворяет аксиомам 1 и 2 измерения площадей.*

* Здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что выбрана определенная единица измерения углов, поэтому для каждого многоугольника F $\delta(F)$ определенное положительное число.

□ Так как дефект $\delta(f)$ любого многоугольника F — положительное число (утверждение **42.3°**), то число $S(F)$, соответствующее многоугольнику по формуле **(3)**, является положительным. Докажем, что это отображение удовлетворяет аксиомам 1 и 2 измерения площадей.

1) Пусть многоугольники F и F' равны. Тогда существует наложение f такое, что $F' = f(F)$. При этом наложении вершины и стороны многоугольника F переходят соответственно в вершины и стороны многоугольника F' причем внутренняя область многоугольника F переходит во внутреннюю область многоугольника F'. Поэтому мера внешнего угла при каждой вершине многоугольника F равна мере внешнего угла при соответствующей вершине многоугольника F'. Следовательно, используя формулу **(3)**, получаем: $S(F) = k \cdot \delta(F) = k \cdot \delta(F') = S(F')$.

2) Докажем, что если многоугольник F разложен на многоугольники F_1 и F_2, то $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$. По теореме § 42 о дефекте многоугольника $\delta(F) = \delta(F_1) + \delta(F_2)$, поэтому $k\delta(F) = k\delta(F_1) + k\delta(F_2)$, т. е. $S(F) = S(F_1) + S(F_2)$. ■

Следствие. *Существует бесконечное множество отображений S: $M \to R_+$, удовлетворяющих аксиомам* 1 *и* 2 *измерения площадей.*

Пользуясь этой теоремой, докажем вторую основную теорему об измерении площадей.

Теорема 3. *Дан произвольный многоугольник F_0. Тогда существует одно и только одно отображение S: $M \to R_+$, удовлетворяющее аксиомам 1 и 2 измерения площадей, при котором $S(F_0) = 1$.*

□ Пусть δ_0 — дефект многоугольника F_0. Тогда отображение S: $M \to R_+$, при котором $S(F) = \frac{1}{\delta_0}\delta(F)$, согласно предыдущей теореме удовлетворяет аксиомам 1 и 2 измерения площадей. При этом $S(F_0) = \frac{1}{\delta_0}\delta(F_0)$, т. е. S — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы.

Докажем теперь, что $S(F) = \frac{1}{\delta_0}\delta(F)$ является единственным отображением, удовлетворяющим условиям теоремы. Пусть S': $M \to R_+$ — какое-то отображение, которое также удовлетворяет условиям теоремы. По теореме 1 § 44 отображение S' имеет вид $S'(F) = k\delta(F)$, где k — постоянная величина. Так как $S'(F_0) = 1$, то $k\delta(F_0) = 1$, откуда получаем: $k = \dfrac{1}{\delta(F_0)}$. Таким образом, $S'(F) = \dfrac{1}{\delta_0}\delta(F)$, т. е. отображения S и S' совпадают. ■

3. Выбор единицы измерения площадей. Формула (4) является основной формулой для вычисления площади любого многоугольника. Как видно из этой формулы, числовое значение площади многоугольника зависит, с одной стороны, от выбора единицы измерения углов (т. е. от числового значения $\delta(F)$), с другой стороны, от выбора постоянной k. Из первой основной теоремы (теоремы 2) следует, что k может быть выбрано произвольно, но в соответствии со второй основной теоремой (теоремой 3) при выбранной единице измерения углов коэффициент k определяется однозначно, если выбран какой-нибудь многоугольник в качестве единицы измерения. Таким образом, если выбраны единица измерения углов и единица измерения площадей, то площадь каждого многоугольника имеет вполне определенное числовое значение. В частности, если угол измеряется радианной мерой, при которой, как известно, прямой угол выражается числом $\dfrac{\pi}{2}$, то дефект треугольника ABC равен: $\delta = \pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}$, поэтому

$$S(ABC) = k(\pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}). \tag{5}$$

Возьмем в качестве единицы измерения площадей треугольник $A_0B_0C_0$ такой, что $\delta(A_0B_0C_0) = 1$. По следствию из теоремы 3 § 25 такой треугольник существует. По формуле (3) $S(A_0B_0C_0) = k \cdot 1$, т. е. $k = 1$. Для удобства дальнейшего изложения такой *выбор единиц измерения углов и площадей* будет называть *каноническим*.

При каноническом выборе единиц измерения углов и площадей формула (5) принимает вид:

$$S(ABC) = \pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C}. \tag{6}$$

Из этой формулы следует, что $S(ABC) < \pi$. Итак, при данном выборе единиц измерения углов и площадей площадь любого треугольника геометрии Лобачевского не может быть больше определенной величины.

§ 45. Площадь вырожденного треугольника

1. Площадь вырожденного треугольника с одной несобственной вершиной. В п. 2 § 23 было отмечено, что вырожденный треугольник ABU_∞ можно рассматривать как фигуру, которая является пределом треугольника ABX с переменной вершиной X на луче AU_∞, когда $AX \to \infty$ (рис. 156, *а*). При каждом положении точки X площадь δ треугольника ABX — определенное число, поэтому δ есть функция от длины отрезка $AX = x$, т. е. $\delta = \delta(x)$. Предел этой функции при $x \to \infty$ называется *площадью треугольника* ABU_∞.

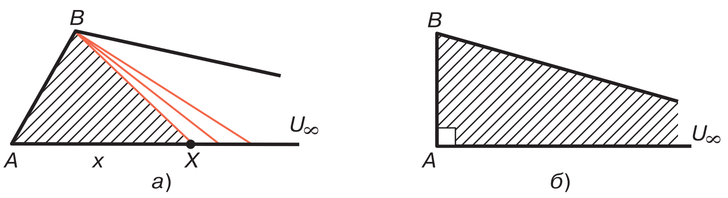


Рис. 156

При каноническом выборе единиц измерения углов и площадей согласно формуле (6) § 44 $S(ABX) = \pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{X}$, поэтому при $AX = x \to \infty$ мера угла X стремится к нулю, и, следовательно,

$$S(ABU_\infty) = \pi - \widehat{A} - \widehat{B}. \tag{1}$$

Если для вырожденного треугольника ABU_∞ меру угла при вершине U_∞ считать равной нулю, то правая часть равенства (1) есть не что иное, как дефект треугольника ABU_∞. Итак, при подходящем выборе единиц измерения углов и площадей площадь вырожденного треугольника с одной несобственной вершиной равна дефекту этого треугольника.

В частности, если треугольник ABU_∞ прямоугольный с прямым углом A (рис. 156, *б*), то согласно формуле (1) площадь такого треугольника вычисляется так: $S(ABU_\infty) = \frac{\pi}{2} - \widehat{B}$. В данном случае $\widehat{B} = \Pi(AB)$, поэтому формула (1) принимает вид:

$$S(ABU_\infty) = \frac{\pi}{2} - \Pi(AB). \tag{2}$$

2. Площади вырожденных треугольников с двумя и тремя несобственными вершинами. Пусть $AU_\infty V_\infty$ — вырожденный треугольник с несобственными вершинами U_∞ и V_∞, а AA_1 — высота этого треугольника (рис. 157, *а*). Этот треугольник можно рассматривать как фигуру, которая является пределом треуголника AXU_∞, где X — переменная точка луча A_1V_∞, когда $A_1X \to \infty$ (рис. 157, *б*). При этом площадь S треугольника AXU_∞ есть функция от $x = A_1X$, и предел этой функции при $x \to \infty$ называется *площадью треугольника* $AU_\infty V_\infty$. По формуле (1) $S(AXU_\infty) = \pi - \widehat{A} - \widehat{X}$. При $x \to \infty$ мера угла X стремится к нулю, следовательно,

$$S(AU_\infty V_\infty) = \pi - \widehat{A}. \tag{3}$$

В частности, если угол A треугольника $AU_\infty V_\infty$ прямой, то

$$S(AU_\infty V_\infty) = \frac{\pi}{2}\,. \tag{4}$$

Площадь треугольника $AU_\infty V_\infty$ можно вычислить иначе. Пусть $\angle 1 = A_1AU_\infty$, $\angle 2 = A_1AV_\infty$ (см. рис. 157, *а*). Так как $\widehat{1} = \Pi(AA_1)$, $\widehat{2} = \Pi(AA_1)$, то $\widehat{1} = \widehat{2}$, т. е. AA_1 —

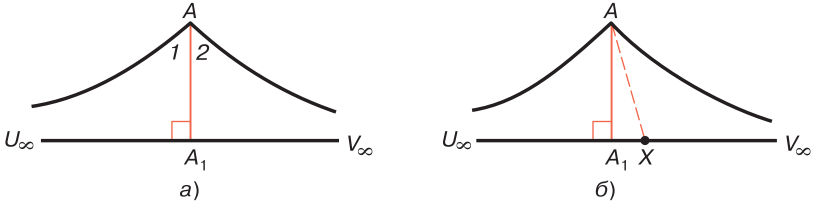


Рис. 157

биссектриса треугольника $AU_\infty V_\infty$, проведенная к стороне $U_\infty V_\infty$. В соответствии с общей теорией площадей многоугольников будем считать, что $S(AU_\infty V_\infty) = S(AA_1U_\infty) + S(AA_1V_\infty)$, поэтому согласно формуле (1) $S(AA_1U_\infty) = \pi - \frac{\pi}{2} - \widehat{1}$, $S(AA_1V_\infty) = \pi - \frac{\pi}{2} - \widehat{2}$, следовательно, $S(AU_\infty V_\infty) = \pi - \widehat{1} - \widehat{2} = \pi - \widehat{A}$, т. е. мы снова приходим к формуле (3).

Вычислим, наконец, площадь вырожденного треугольника $U_\infty V_\infty W_\infty$ с тремя несобственными вершинами. Пусть A_1W_∞ — высота треугольника (рис. 158). В соответствии с общей теорией площадей многоугольников будем считать, что $S(U_\infty V_\infty W_\infty) = S(A_1U_\infty W_\infty) + S(A_1V_\infty W_\infty)$. По формуле (4) получаем

$$S(U_\infty V_\infty W_\infty) = \pi. \qquad (5)$$

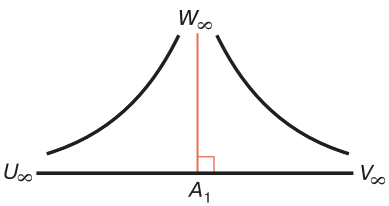


Рис. 158

Таким образом, *все вырожденные треугольники с тремя несобственными вершинами имеют одну и ту же площадь*. Это утверждение полностью согласуется с тем фактом, что любые два таких треугольника равны (см. свойство 41.6°). Учитывая формулы (6) § 44 и (1), (3), (5), заключаем, что *площадь вырожденного треугольника с тремя несобственными вершинами больше площади любого треугольника, у которого хотя бы одна вершина собственная*.

Мы видим, что при каноническом выборе единиц измерения углов и площадей число π является наибольшим значением, которое может иметь площадь треугольника. Это свойство подтверждает тот факт, что для любого данного треугольника, у которого хотя бы одна вершина собственная, всегда можно построить вырожденный треугольник $U_\infty V_\infty W_\infty$ так, чтобы данный треугольник целиком лежал внутри треугольника $U_\infty V_\infty W_\infty$. В самом деле, пусть ABC — данный треугольник. Возьмем точку M внутри этого треугольника и проведем лучи MA, MB, MC, а затем проведем заградительные прямые $U_\infty V_\infty$, $V_\infty W_\infty$, $W_\infty U_\infty$ углов AMB, BMC и CMA. Треугольник $U_\infty V_\infty W_\infty$ искомый (рис. 159, *а*, *б* и *в*).

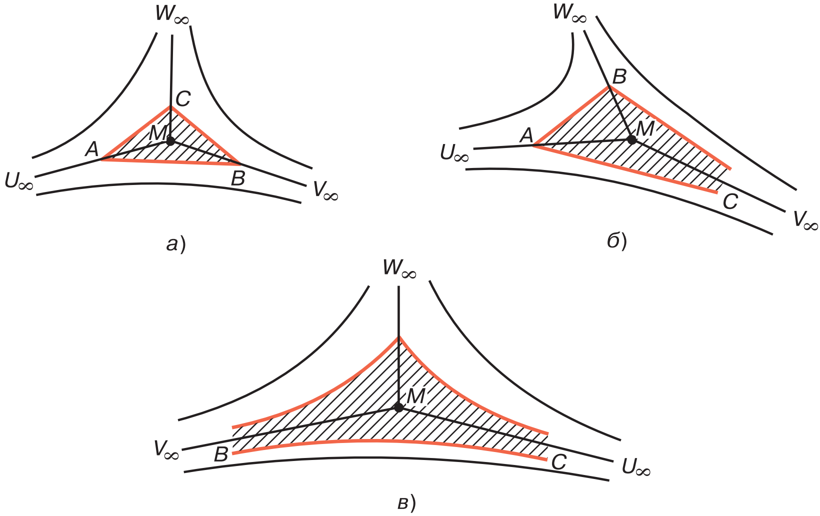


Рис. 159

3. Площади правильных треугольников и квадратов. Выясним теперь пределы изменения площадей правильных треугольников. Пусть ABC — данный правильный треугольник, а α — мера каждого из его углов (см. рис. 109). При каноническом выборе единиц измерения углов и площадей площадь треугольника вычисляется по формуле (6) § 44, поэтому $S(ABC) = \pi - 3\alpha$. Отсюда следует, что $S(ABC) < \pi$. Но α может быть сколь угодно близкой к нулю, поэтому существуют правильные треугольники, площади которых отличаются от π на сколь угодно малую величину. Это утверждение наглядно проиллюстрировано на рис. 160. На этом рисунке $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^\circ$, $U_\infty V_\infty$, $V_\infty W_\infty$, $W_\infty U_\infty$ — заградительные прямые соответствующих углов, ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ — правильные треугольники, а $U_\infty V_\infty W_\infty$ — треугольник с тремя несобственными вершинами. Можно считать, что этот треугольник является пределом правильных треугольников, когда их углы стремятся к нулю. Так как $\triangle ABC \subset \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_1B_1C_1 \subset \triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_2B_2C_2 \subset U_\infty V_\infty W_\infty$, то $S(ABC) \subset$ $\subset S(A_1B_1C_1) \subset S(A_2B_2C_2) \subset S(U_\infty V_\infty W_\infty) = \pi$.

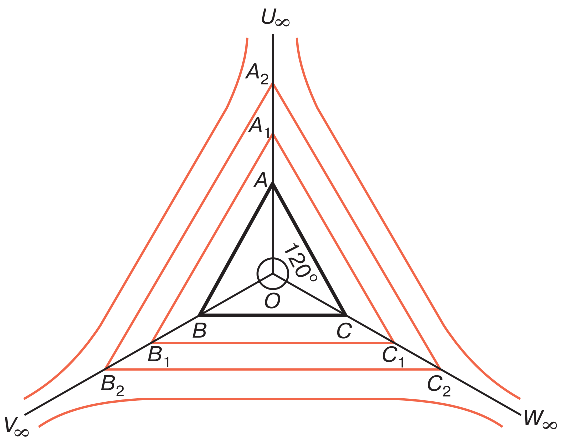


Рис. 160

Чем больше стороны правильного треугольника, тем меньше меры его углов и, следовательно, тем больше его площадь.

В заключение выясним пределы изменения площадей квадратов. Пусть $ABCD$ — квадрат, а α — мера каждого из его углов. При каноническом выборе единиц измерения углов и площадей формула (4) § 44 для четырехугольника $ABCD$ принимает вид:

$$S(ABCD) = \delta(ABCD) = 2\pi - 4\alpha.$$

Отсюда следует, что при каноническом выборе единиц измерения углов и площадей площадь любого

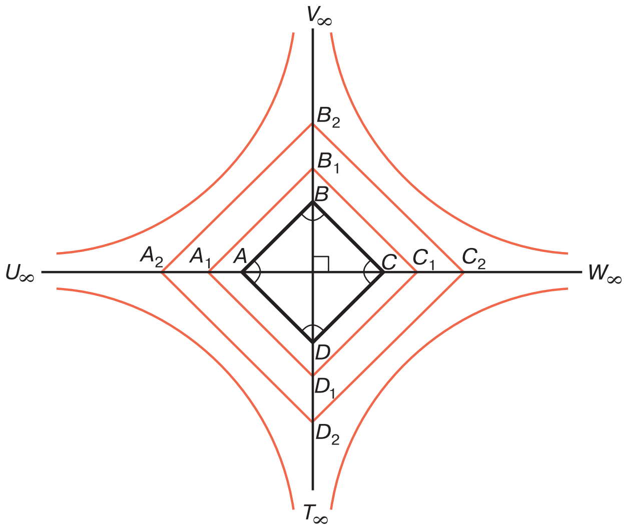


Рис. 161

квадрата меньше, чем 2π. Но α может быть сколь угодно близкой к нулю, поэтому существуют квадраты, площади которых отличаются от 2π на сколь угодно малую величину. На рис. 161 дана наглядная иллюстрация этих утверждений. На нем квадраты $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ вложены друг в друга, $U_\infty V_\infty$, $V_\infty W_\infty$, $W_\infty T_\infty$ и $T_\infty U_\infty$ — заградительные прямые соответствующих углов. Можно считать, что фигура $U_\infty V_\infty W_\infty T_\infty$ является вырожденным квадратом — предельным положением квадратов $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $\ldots$, когда их углы стремятся к нулю. Квадрат $U_\infty V_\infty W_\infty T_\infty$ прямой BD разложен на два вырожденных треугольника $U_\infty V_\infty T_\infty$ и $W_\infty V_\infty T_\infty$. Согласно формуле (5) $S(U_\infty V_\infty T_\infty) = S(W_\infty V_\infty T_\infty) = \pi$, поэтому $S(U_\infty V_\infty W_\infty T_\infty) = 2\pi$. Чем больше сторона квадрата, тем меньше меры его углов и, следовательно, тем больше его площадь.

Задачи к главе 8

1. Найти дефект пятиугольника $ABCDE$, если $ABCD$ — выпуклый трипрямоугольник, $\widehat{D} = 60^\circ$, точка E

лежит внутри этого четырехугольника и ADE — равносторонний треугольник, углы которого равны α.

2. Доказать, что дефект любого n-угольника меньше, чем $(n-2)\pi$.
3. Доказать, что дефект выпуклого n-угольника F равен $(n-2)\pi - s(F)$, где $s(F)$ — сумма мер углов многоугольника.
4. Все точки простой ломаной $A_1M_1 \ldots M_kA_i$, кроме концов A_1 и A_i, принадлежат внешней области многоугольника $F = A_1 \ldots A_n$. Установить связь между дефектами многоугольников $F_1 = A_1M_1 \ldots M_kA_iA_{i-1} \ldots A_2$ и $F_2 = A_1M_1 \ldots M_kA_iA_{i+1} \ldots A_n$.
5. Доказать, что если δ — дефект треугольника, а a — наименьшая его сторона, то $0 < \delta < \pi - 2\Pi\left(\frac{a}{2}\right)$.
6. Доказать, что выпуклый четырехугольник $ABCD$, у которого $AD = BC < AB$, $\widehat{A} + \widehat{B} = \pi$, равносоставлен с четырехугольником Саккери, основание которого принадлежит прямой AB, а отрезок CD — сторона, противоположная основанию.
7. Диагонали гиперболического ромба $ABCD$ с первой основной вершиной A пересекаются в точке O. Точка O' симметрична точке O относительно прямой AB. Доказать, что ромб $ABCD$ и шестиугольник $AODCBO'$ равносоставлены.
8. Доказать, что два многоугольника, которые равносоставлены с третьим многоугольником, равносоставлены между собой.
9. Точка M лежит на основании AB равнобедренного треугольника ABC. Доказать, что треугольники ACM и BCM равновелики тогда и только тогда, когда $AM = MB$.
10. Верно ли утверждение, что если два треугольника имеют равные основания и равные высоты, проведенные к этим основаниям, то они равновелики? Ответ обосновать.

11. Доказать, что два треугольника, у которых общее основание, а средние линии, соответствующие этим основаниям, лежат на одной прямой, равновелики.
12. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены средние линии MN и M_1N_1, соответствующие сторонам BC и B_1C_1. Доказать, что площади треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $BC = B_1C_1$ и $AH = A_1H_1$, где AH и A_1H_1 — высоты треугольников AMN и $A_1M_1N_1$.
13. Дан гиперболический ромб $ABCD$ с первой основной вершиной A. Сравнить площади треугольников: а) ABC и ADC; б) ABD и CBD.
14. Дан произвольный треугольник ABC. Доказать, что на стороне AC существует точка D, такая, что $S(ABD) = m$, где m — данное положительное число, меньшее $S(ABC)$.

В задачах **15–20** предполагается, что выбор единиц измерения углов и площадей является каноническим.

15. Вычислить площадь: а) трипрямоугольника, острый угол которого равен α; б) равнобедренного четырехугольника, у которого углы, прилежащие к одной из боковых сторон, равны α и β; в) четырехугольника Саккери, острые углы которого равны α.
16. Вычислить площадь правильного n-угольника, углы которого равны α.
17. Высоты треугольника $U_\infty V_\infty W_\infty$ пересекаются в точке H. Найти площади треугольников $HU_\infty V_\infty$ и $HW_\infty U_\infty$.
18. Отрезок AA_1 — высота треугольника $AU_\infty V_\infty$, причем $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$. Найти площади треугольников AA_1U_∞ и AA_1V_∞.
19. Прямые, содержащие высоты треугольника $AU_\infty V_\infty$, пересекаются в точке W_∞. Найти площадь треугольников $U_\infty AW_\infty$, $V_\infty AW_\infty$ и $U_\infty AV_\infty$.
20. Две прямые $U_\infty W_\infty$ и $V_\infty T_\infty$ пересекаются в собственной точке. Найти площадь вырожденного четырехугольника $U_\infty V_\infty W_\infty T_\infty$, т. е. фигуры, ограниченной прямыми $U_\infty W_\infty$, $W_\infty T_\infty$ и $T_\infty U_\infty$.

ЧАСТЬ II

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Глава 1

ОБЗОР ОСНОВНЫХ ФАКТОВ АБСОЛЮТНОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Эта глава посвящена изучению основных фактов геометрии в трехмерном пространстве. Вначале дается обзор основных следствий из аксиом групп I–IV (см. с. 446), все следствия из которых составляют абсолютную геометрию в пространстве, а затем изучается перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве Лобачевского. Последний параграф главы посвящен простейшим движениям трехмерного пространства.

§ 1. Обзор основных следствий из аксиом абсолютной геометрии трехмерного пространства

1. Аксиомы групп I–II абсолютной стереометрии и простейшие следствия. Основными понятиями в стереометрии Лобачевского, так же как и в стереометрии Евклида, являются точки, прямые, плоскости (основные объекты), принадлежность точки прямой, принадлежность точки плоскости, «лежать между» для трех точек одной прямой и наложение (основные отношения). Свойства основных геометрических понятий выражены в аксиомах стереометрии Лобачевского. Так же как и в планиметрии, имеются пять групп аксиом, первые четыре из которых — группы I–IV — являются аксиомами абсолютной стереометрии. Эти аксиомы, а также все следствия, вытекающие из них, являются общими как в геометрии Евклида, так и в геометрии Лобачевского. Последняя группа — группа V — состоит из одной аксиомы Лобачевского, которая является, по существу, отрицанием аксиомы параллельных прямых. Полный список аксиом стереометрии Лобачевского приведен в приложении.

В аксиомах групп I–II выражены основные свойства взаимного расположения отношений принадлежности точки прямой, точки плоскости, а также отношения «лежать между». Пользуясь аксиомами групп I–II, вводятся понятия отрезка, луча, угла, полуплоскости, полупространства и доказывается ряд утверждений и теорем, которые хорошо известны читателю из курса элементарной геометрии (см. [3], § 1, 2).

В стереометрии на каждой плоскости выполняются все аксиомы групп I — II планиметрии, сформулированные в приложении 1 (см. с. 445). Аксиома II_5 стереометрии позволяет ввести понятие полупространства: фигура, состоящая из каждого подмножества точек, указанных в этой аксиоме, называется *полупространством*, а плоскость — *границей* каждого из этих полупространств.

2. Равенство фигур. Так же как и в планиметрии, понятие равенства фигур вводится с помощью наложения, которое является основным понятием. Свойства наложений выражены в семи аксиомах группы III. При формулировке этих аксиом существенным является понятие равенства фигур. Фигура Ф называется равной фигуре Φ', если существует наложение, при котором фигура Ф переходит в фигуру Φ'. Здесь нет надобности формулировать все аксиомы группы III, однако одну из них — аксиому III_6 — сформулируем в несколько более развернутом виде. Эту аксиому мы неоднократно будем использовать при доказательстве теорем и утверждений.

III_6^*. Два равных угла hk и h_1k_1, лежащие в плоскостях, являющихся границами полупространств P и P_1, можно совместить наложением так, что при этом совместятся полупространства P и P_1, причем это можно сделать двумя способами: в одном случае совместятся лучи h и h_1, k и k_1, а в другом — лучи h и k_1, k и h_1.

Можно доказать, что наложение является преобразованием пространства и что при наложении отрезок, луч, прямая, угол, плоскость, полуплоскость, полупространство переходят соответственно в отрезок, луч, прямую, угол, плоскость, полуплоскость, полупространство (см. [3], § 3).

Если α и β — произвольные плоскости, то, пользуясь аксиомой III_6^*, легко доказать, что существует бесконечное множество наложений, при которых плоскость α переходит в плоскость β. В частности, если α — произвольная плоскость пространства, то существует бесконечное множество наложений, при каждом из которых плоскость α переходит в себя. Эти наложения индуцируют на плоскости α некоторые преобразования. Можно доказать, что эти преобразования удовлетворяют всем аксиомам наложений планиметрии (см. [3], § 9).

Таким образом, на любой плоскости пространства выполняются аксиомы группы III планиметрии. А так как на плоскости α выполняются также все аксиомы групп I–II планиметрии, то выполняются и все следствия из аксиом групп I–III.

Теория сравнения отрезков и углов в пространстве, а также связанные с этой теорией понятия смежных и вертикальных углов и их свойства аналогичны соответствующей теории на плоскости. Обзор этой теории дан в ч. I, § 1, п. 2 и 3. Так как в каждой плоскости выполняются аксиомы групп I–III и их следствия, то все свойства смежных и вертикальных углов, сформулированные в ч. I, § 1, п. 3, имеют место в каждой плоскости пространства. Читателя, желающего более подробно ознакомиться с этой теорией в пространстве, отсылаем к книге [3], § 4.

Напомним, что угол называется *прямым*, если он равен одному из смежных с ним углов. Можно доказать, что угол, равный прямому углу и расположенный в пространстве произвольно, является прямым и что любые два прямых угла, расположенные как в одной плоскости, так и в разных плоскостях, равны друг другу.

§ 2. Перпендикулярность прямых, прямой и плоскости

1. **Перпендикулярность прямых в пространстве.** Понятия перпендикулярности прямых и плоскостей относятся к абсолютной геометрии. Они существенно используются в геометрии Лобачевского, поэтому дадим обзор основных определений и свойств перпендикулярности прямых и плоскостей.

Две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла. Так же как и на евклидовой плоскости, зная один из этих углов, легко найти остальные три угла. *Углом между пересекающимися прямыми a и b* называется мера того из четырех углов, которая не превосходит меры каждого из трех остальных углов. Если φ — угол между прямыми a и b, то ясно, что $0^\circ < \varphi \leqslant 90^\circ$. Две пересекающиеся прямые называются *перпендикулярными* (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°.

Существенно подчеркнуть, что в пространстве Лобачевского, в отличие от евклидова пространства, понятие перпендикулярности двух прямых вводится только для пересекающихся прямых.

Напомним теорему о перпендикулярных прямых в пространстве.

Теорема 1. *Через каждую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, перпендикулярная к данной, и притом только одна.*

В отличие от теоремы о перпендикулярных прямых на плоскости (см. ч. I, § 1), через каждую точку данной прямой в пространстве проходит бесконечное множество прямых, каждая из которых перпендикулярна к данной прямой.

2. **Перпендикулярность прямой и плоскости.** Прямая называется *перпендикулярной к плоскости*, если она пересекает плоскость и перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости и проходящей через точку пересечения.

Напомним теорему, выражающую признак перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема 2. *Если прямая пересекает плоскость и перпендикулярна к двум прямым, которые лежат в плоскости и проходят через точку пересечения, то она перпендикулярна к этой плоскости.*

Доказательство этой теоремы в рамках абсолютной геометрии можно найти в учебниках по геометрии для средней школы, например в учебнике [10], п. 278.

Докажите самостоятельно теорему о плоскости, перпендикулярной к данной прямой. Эта теорема также относится к абсолютной геометрии, однако в школьных учебниках при ее доказательстве используется аксиома параллельности.

Теорема 3. *Через данную точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой, и притом только одна.*

Пользуясь этой теоремой, легко доказать следующие два утверждения. Их доказательства, основанные на аксиомах абсолютной геометрии, читатель найдет в книге [3], § 11, п. 4.

2.1°. Множество всех прямых, каждая из которых проходит через точку A и перпендикулярна к данной прямой AB, есть пучок пересекающихся прямых с центром A, плоскость которого проходит через точку A и перпендикулярна к прямой AB.

2.2°. Фигура, состоящая из множества всех точек пространства, каждая из которых равноудалена от двух данных точек A и B, есть плоскость, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная к этому отрезку.

3. Теоремы о трех перпендикулярах и прямой, перпендикулярной к данной плоскости. Рассмотрим плоскость α и точку A, не лежащую в этой плоскости. Пусть AH — прямая, перпендикулярная к плоскости α, а H — точка пересечения этой прямой и плоскости α. Точка H называется *проекцией точки A на плоскость α*, а отрезок AH — *перпендикуляром, проведенным из точки*

A к плоскости α. Если M — точка плоскости α, отличная от точки H, то отрезок AM называется *наклонной*, проведенной из точки A к плоскости, а отрезок MH — *проекцией наклонной* (рис. 1). Ясно, что наклонная больше перпендикуляра, проведенного из одной и той же точки к данной плоскости.

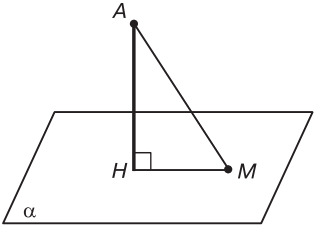


Рис. 1

Известная из курса стереометрии теорема о трех перпендикулярах относится к абсолютной геометрии. Мы приводим здесь доказательство теоремы, основанное на аксиомах абсолютной геометрии.

Теорема 4. *Прямая проведена в плоскости через основание наклонной. Если она перпендикулярна к проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна к самой наклонной. Обратно: если прямая перпендикулярна к наклонной, то она перпендикулярна к проекции наклонной на эту плоскость.*

□ Пусть AB — наклонная, BH — ее проекция на данную плоскость α, а a — прямая плоскости α, проходящая через точку B (рис. 2).

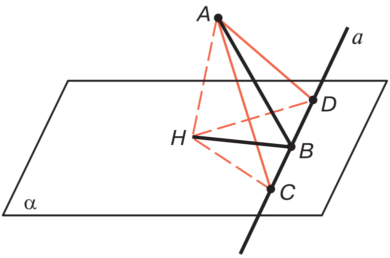


Рис. 2

Предположим, что $a \perp BH$, и докажем, что $a \perp AB$. Для этого возьмем на прямой a две точки C и D, симметричные относительно точки B, и соединим эти точки с точками H и A отрезками. Так как $BH \perp a$, то HBC и HBD — прямоугольные треугольники. Они равны по двум катетам, поэтому $HC = HD$. Отсюда мы заключаем, что $\triangle HAC = \triangle HAD$, следовательно, $AC = AD$.

Треугольник ACD равнобедренный, AB — медиана этого треугольника, поэтому она является и высотой. Таким образом, $AB \perp a$.

Обратно: предположим, что $a \perp AB$, и докажем, что $a \perp BH$. Для этого воспользуемся тем же рис. 2. В треугольнике ACD отрезок AB — высота и медиана, поэтому этот треугольник равнобедренный, т. е. $AC = AD$. Отсюда следует, что $\triangle AHC = \triangle AHD$, следовательно, $HC = HD$, т. е. треугольник HCD равнобедренный. Медиана BH этого треугольника является высотой, поэтому $a \perp BH$. ■

Теорему о прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной плоскости, в школьных учебниках обычно доказывают с использованием параллельных прямых. Проведите ее доказательство самостоятельно в рамках абсолютной геометрии.

Теорема 5. *Через данную точку пространства проходит одна и только одна прямая, перпендикулярная к данной плоскости.*

§ 3. Перпендикулярность плоскостей

1. Двугранный угол. Напомним, что *двугранным углом* называется фигура, образованная данной прямой a (ребро двугранного угла) и двумя полуплоскостями с общей границей a, не принадлежащими одной плоскости (грани двугранного угла). Если через произвольную точку ребра двугранного угла провести плоскость, перпендикулярную к его ребру, то в пересечении этой плоскости с двугранным углом образуется угол, который называется *линейным углом двугранного угла*. Следующая лемма о линейных углах двугранного угла хорошо известна читателю из курса стереометрии. Это утверждение в школьных учебниках обычно доказывается с применением известного свойства о равенстве двух углов с соответственно параллельными сторонами.

Мы здесь приводим доказательство леммы, пользуясь аксиомами абсолютной геометрии.

Лемма. *Все линейные углы двугранного угла равны друг другу.*

□ Пусть AOB и $A_1O_1B_1$ — два линейных угла данного двугранного угла, образованного полуплоскостями λ и μ. Проведем через середину O' отрезка OO_1 плоскость, перпендикулярную к OO_1, которая пересечет двугранный угол по линейному углу $A'O'B'$ (рис. 3). Обозначим через P и P_1 полупространства с общей границей $A'O'B'$, содержащие соответственно точки O и O_1. Так как $\angle A'O'B' = \angle A'O'B'$, то по аксиоме III_6^* существует наложение f, при котором каждый из лучей $O'A'$ и $O'B'$ переходит в себя, а полупространство P — в полупространство P_1. При этом, очевидно, $O' \mapsto O'$ и плоскость $A'O'B'$ переходит в себя. Так как углы $A'O'O$ и $B'O'O$ прямые, то при наложении f луч $O'O$ переходит в луч, исходящий из точки O', расположенный в полупространстве P_1 и перпендикулярный к лучам $O'A'$ и $O'B'$. Следовательно, луч $O'O$ переходит в луч $O'O_1$, в силу равенства $O'O = O'O_1$ имеем: $O \mapsto O_1$. При наложении f $\lambda \mapsto \lambda$, $\mu \mapsto \mu$, поэтому луч OA, который перпендикулярен к прямой OO_1, переходит в луч O_1A_1. Аналогично луч OB переходит в луч O_1B_1.

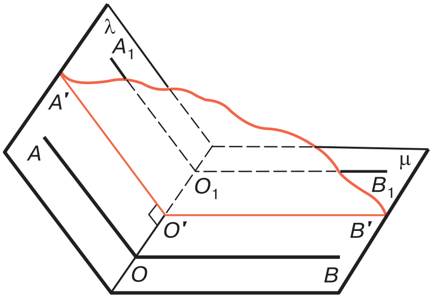


Рис. 3

Итак, $\angle AOB \mapsto \angle A_1O_1B_1$, поэтому $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. ■

Мерой двугранного угла называется мера любого его линейного угла. Мера φ двугранного угла заключена в пределах $0^\circ < \varphi < 180^\circ$. Двугранный угол называется *прямым*, если все его линейные углы прямые, т. е. если его мера равна 90°.

Напомним теорему о равенстве двугранных углов. Доказательство этой теоремы читатель найдет в книге [3], § 20.

Теорема 1. *Двугранные углы равны тогда и только тогда, когда равны их линейные углы, т. е. когда их меры равны.*

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром. Зная меру одного из двух двугранных углов, легко найти меры остальных трех двугранных углов. *Углом между пересекающимися плоскостями* α и β называется мера того из четырех двугранных углов, которая не превосходит меры каждого из трех остальных углов. Если φ — угол между плоскостями α и β, то ясно, что $0^\circ < \varphi \leqslant 90^\circ$.

2. Перпендикулярные плоскости. Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными* (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°. Две перпендикулярные плоскости при пересечении образуют четыре прямых двугранных угла с общим ребром.

Справедлива теорема, выражающая признак перпендикулярности двух плоскостей.

Теорема 2. *Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.*

Следствие. *Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей.*

Приведем без доказательства некоторые утверждения о перпендикулярности прямых и плоскостей.

3.1°. Если перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c, то любая плоскость, перпендикулярная к прямой c, пересекает плоскости α и β по двум взаимно перпендикулярным прямым.

3.2°. Плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой c, а прямая MN проходит через некоторую точку N плоскости α. Прямая MN перпендикулярна к плоскости β тогда и только тогда, когда она лежит в плоскости α и перпендикулярна к прямой c.

3.3°. Каковы бы ни были две плоскости, всегда существует третья плоскость, которая перпендикулярна к ним обеим.

3. Угол между прямой и плоскостью. Понятие угла между прямой и плоскостью вводится на основании следующей теоремы, доказательство которой проведите самостоятельно.

Теорема 3. *Через прямую, не перпендикулярную к данной плоскости, в частности через прямую, лежащую в данной плоскости, проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная к данной плоскости.*

Пользуясь теоремой 3, так же как и в геометрии Евклида, вводится понятие угла между прямой и плоскостью. Пусть a — прямая, пересекающая плоскость α и не перпендикулярная к ней. Через прямую a проведем плоскость, перпендикулярную к плоскости α, и обозначим через b прямую, по которой пересекаются плоскости* α и β. Мера угла между пересекающимися прямыми a и b называется *углом между прямой a и плоскостью* α. Ясно, что при $a \not\perp \alpha$ мера этого угла меньше 90°. Если $a \perp \alpha$, то считается, что угол между прямой a и плоскостью α равен 90°.

Справедливо следующее утверждение, в котором выражен геометрический смысл угла между прямой и плоскостью. Это утверждение относится к абсолютной геометрии.

3.4°. Прямая MA проходит через точку A плоскости α и образует с этой плоскостью угол $\varphi_0 \neq 90°$. Тогда

---

*В некоторых книгах прямую b ошибочно называют проекцией прямой a на плоскость α. Как следует из содержания § 17 ч. I в пространстве Лобачевского проекция прямой на плоскость не является прямой.

φ_0 является наименьшим из всех углов, которые прямая MA образует с прямыми, проведенными в плоскости α через точку A.

§ 4. Движения пространства

1. Движения пространства. Преобразование пространства называется *движением*, если при этом преобразовании сохраняются расстояния между любыми двумя точками. Движение — понятие абсолютной геометрии. Ясно, что любое наложение пространства является движением.

Так же как и на плоскости, можно доказать обратное утверждение (см. ч. I, § 4, теорема 1): *любое движение пространства является наложением.* Доказательство этой теоремы читатель найдет в книге [3], § 17 (теорема 1). Отсюда следует, что все свойства наложений, сформулированные нами в § 1, являются также свойствами движений.

Так как при любом наложении (движении) прямой угол переходит в прямой угол, прямая — в прямую, а плоскость — в плоскость, то при любом наложении перпендикулярные прямые переходят в перпендикулярные прямые, прямая и перпендикулярная к ней плоскость переходят в прямую и перпендикулярную к ней плоскость и две взаимно перпендикулярные плоскости переходят в две взаимно перпендикулярные плоскости.

Упорядоченную четверку точек A, B, C, D, не лежащих в одной плоскости, называют *репером* и обозначают так: (A, B, C, D). Этот репер называется *ортонормированным*, если $AB \perp AC$, $AB \perp AD$, $AC \perp AD$ и $AB = AC = AD = 1$. Из предыдущего изложения ясно, что при любом движении репер переходит в репер и ортонормированный репер переходит в ортонормированный репер. Имеет место следующая лемма абсолютной геометрии.

Лемма 1. *Если* (A, B, C, D) *и* (A_1, B_1, C_1, D_1) — *произвольные реперы, то существует не более одного движения, при котором точки* A, B, C, D *переходят соответственно в точки* A_1, B_1, C_1, D_1.

□ Допустим, что утверждение леммы неверно, т. е. существуют по крайней мере два движения g_1 и g_2, которые точки A, B, C, D переводят соответственно в точки A_1, B_1, C_1, D_1. Тогда найдется такая точка M, что точки $M_1 = g_1(M)$ и $M_2 = g_2(M)$ не совпадают. Так как $A_1 = g_1(A)$, $A_1 = g_2(A)$, то $AM = A_1M_1$ и $AM = A_1M_2$, поэтому $A_1M_1 = A_1M_2$. Аналогично доказывается, что $B_1M_1 = B_2M_2$, $C_1M_1 = C_2M_2$, $D_1M_1 = D_2M_2$. Отсюда следует согласно свойству 2.2°, что точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости. Это противоречит определению репера. ■

Докажем теперь следующую важную теорему о задании движений в пространстве, которая является теоремой абсолютной геометрии.

Теорема 1. *Каковы бы ни были ортонормированные реперы* (A, B, C, D) *и* (A_1, B_1, C_1, D_1), *существует одно и только одно движение* (*наложение*), *при котором точки* A, B, C, D *переходят соответственно в точки* A_1, B_1, C_1, D_1.

□ Так как $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то по аксиоме III_6 существует наложение (движение) f, такое, что $A_1 = f(A)$, луч AB переходит в луч A_1B_1, луч AC — в луч A_1C_1, а полупространство с границей ABC, содержащее точку D, — в полупространство с границей $A_1B_1C_1$, содержащее точку D_1. Так как $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, то $B_1 = f(B)$, $C_1 = f(C)$.

Луч AD перпендикулярен к плоскости ABC, а луч A_1D_1 перпендикулярен к плоскости $A_1B_1C_1$, поэтому при движении f луч AD переходит в луч A_1D_1, и, следовательно, в силу равенства $AD = A_1D_1$ имеем: $D_1 = f(D)$. Итак, при движении f точки A, B, C, D переходят соответственно в точки A_1, B_1, C_1, D_1. Согласно предыдущей лемме f — единственное движение, удовлетворяющее этому условию. ■

Следствие. *Если* h *и* k — *произвольные лучи пространства, то существует хотя бы одно движение, при котором луч* h *переходит в луч* k.

Предлагаем читателю обосновать это утверждение.

Из доказанной теоремы следует, что в пространстве Лобачевского, так же как и в евклидовом пространстве, существует бесконечное множество движений.

Движения в пространстве могут быть заданы также с помощью так называемых флагов пространства. Пусть O — некоторая точка пространства, h — луч, исходящий из этой точки, λ — полуплоскость, границе которой принадлежит луч h, а P — полупространство, границе которого принадлежит полуплоскость λ. Фигура, состоящая из O, h, λ, и P, называется *флагом* и обозначается так: (O, h, λ, P). Ясно, что при любом движении флаг переходит во флаг. Можно доказать, что *если* $(O_1, h_1, \lambda_1, P_1)$ и $(O_2, h_2, \lambda_2, P_2)$ — *произвольные флаги, то существует одно и только одно движение, при котором флаг* $(O_1, h_1, \lambda_1, P_1)$ переходит во флаг $(O_2, h_2, \lambda_2, P_2)$.

2. Простейшие виды движений пространства Лобачевского. Пользуясь доказанной теоремой, по аналогии с классификацией движений евклидова пространства (см. [3], § 18) можно провести классификацию движений в трехмерном пространстве Лобачевского. В настоящем пособии мы не будем рассматривать этот вопрос подробно, ограничимся лишь рассмотрением отдельных примеров движений, которые чаще всего встречаются при изучении стереометрии Лобачевского. Эти движения хорошо известны читателю из курса стереометрии евклидовой геометрии.

а) Симметрия относительно точки. Напомним, что две точки M и M' называются симметричными относительно точки O, если O — середина отрезка MM'.

б) Симметрия относительно плоскости. Напомним, что две точки M и M' называются симметричными относительно плоскости α, если отрезок MM' перпендикулярен к плоскости α и его середина лежит в этой плоскости.

в) Поворот вокруг прямой. Пусть a — данная прямая, а φ — градусная мера некоторого угла. Через прямую a проведем две плоскости α_1 и α_2, угол между которыми равен $\frac{1}{2}\varphi$.

Рассмотрим симметрии g_1 и g_2 относительно плоскостей α_1 и α_2. Преобразование $f = g_2g_1$ является движением, при котором каждая точка прямой a переходит в себя, а все точки любой плоскости γ, перпендикулярной к прямой a и пересекающей ее в точке M, переходят в точки, лежащие в той же плоскости. При этом в плоскости γ порождается поворот вокруг точки M на угол φ. Отсюда следует, что любая плоскость β, проходящая через прямую a, переходит в плоскость β', проходящую через ту же прямую, и угол между плоскостями β и β' равен φ. Такое движение называется *поворотом вокруг прямой a на угол φ*. Прямая a называется *осью поворота*, а угол φ — *углом поворота*.

Важно отметить, что движения $f = g_2g_1$ и $f' = g_1g_2$ в случае, когда $\varphi \neq 180^\circ$, не совпадают. Выражаясь наглядно, эти два движения являются поворотами вокруг прямой a на угол φ, но в противоположных направлениях.

г) Симметрия относительно прямой. Рассмотрим поворот вокруг прямой a на угол $\varphi = 180^\circ$. В этом случае $\frac{1}{2}\varphi = 90^\circ$, поэтому плоскости α_1 и α_2 взаимно перпендикулярны и при движении g_2g_1 каждая точка M пространства переходит в точку M', симметричную точке M относительно прямой a (т. е. прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку MM'). Это движение называется *симметрией относительно прямой a* или отражением от прямой a. Отметим, что при $\varphi = 180^\circ$ движения g_2g_1 и g_1g_2 совпадают.

Глава 2

АКСИОМА ЛОБАЧЕВСКОГО. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 5. Аксиома Лобачевского. Параллельность лучей

1. Аксиома Лобачевского. Аксиома Лобачевского трехмерного пространства формулируется так:

V. Через точку, не лежащую на данной прямой, в плоскости, проходящей через точку и прямую, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную прямую.

Таким образом, в каждой плоскости пространства Лобачевского выполняются все пять групп аксиом планиметрии Лобачевского, поэтому выполняются также все определения и теоремы планиметрии, доказанные в главах 1–8 части I. Особо отметим следующие предложения, которые неоднократно будут использованы в дальнейшем изложении.

$Л_1$. Сумма мер углов любого треугольника меньше $2d$.

$Л_2$. Если AOB — произвольный острый угол, то в плоскости этого угла существует хотя бы одна прямая, которая пересекает сторону OB угла под прямым углом и не имеет общих точек со стороной OA.

$Л_3$. Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Следует учесть, что данные треугольники могут быть расположены как в одной плоскости, так и в разных плоскостях (см. задачу 1).

2. Параллельность двух лучей. Луч AB называется *параллельным* лучу CD в трехмерном пространстве Лобачевского, если прямые AB и CD расположены в одной плоскости, не имеют общих точек и любой внутренний луч угла CAB пересекает луч CD. Ясно, что лемма (см. ч. I, § 9) имеет место в любой плоскости пространства, т. е. *если луч AB параллелен лучу CD, то луч CD параллелен лучу AB*. Из определения параллельности лучей следует, что если лучи AB и CD параллельны, то прямые AB и CD лежат в одной плоскости и в этой плоскости лучи AB и CD расположены в одной полуплоскости с границей AC. Эту полуплоскость будем называть *полуплоскостью параллельности лучей AB и CD* (рис. 4). Имеет место следующая важная теорема.

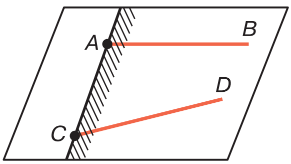


Рис. 4

Теорема 1. *Если точка A не лежит на прямой CD, то существует один и только один луч h, исходящий из точки A и параллельный лучу CD. Луч h лежит в плоскости ACD.*

Доказательство этой теоремы, по существу, совпадает с доказательством теоремы 2 (см. ч. I, § 10), поэтому мы его опускаем и предлагаем читателю доказать теорему самостоятельно.

Справедливо следующее утверждение. Докажите его самостоятельно.

5.1°. При любом движении пространства образы двух параллельных лучей параллельны.

3. Вырожденный треугольник. В трехмерном пространстве, так же как и в планиметрии, можно рассматривать вырожденные треугольники. Однако в стереометрии мы не вводим в рассмотрение несобственные точки пространства. Здесь мы ограничиваемся вырожденными треугольниками с одной несобственной вершиной. В соответствии с определением п. 2 (см. ч. I, § 23) *вырожденным треугольником* называется двуугольник $hABk$, у которого лучи h и k параллельны и исходят из точек A и B. Такую фигуру будем обозначать через ABU_∞. Эта запись просто означает, что рассматривается двуугольник со стороной AB и параллельными лучами AU_∞ и BU_∞ (рис. 5). Углы BAU_∞ и ABU_∞ назовем *углами вырожденного треугольника* ABU_∞ и будем обозначать так: $\angle A$ и $\angle B$. Углы, смежные с ними, называются *внешними углами треугольника* ABU_∞.

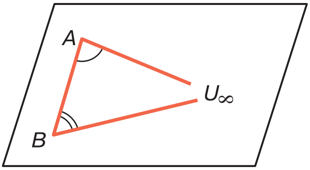


Рис. 5

Свойства 23.1° и 23.2°, доказанные в ч. I, очевидно, имеют место и в пространстве, т. е.

- в вырожденном треугольнике внешний угол больше угла этого треугольника, не смежного с ним;
- сумма мер двух углов вырожденного треугольника меньше $2d$.

Вырожденный треугольник называется *прямоугольным*, если один из его углов прямой, тогда другой его угол острый.

Из свойства 5.1° непосредственно следует, что при любом движении вырожденный треугольник переходит в вырожденный треугольник. Два вырожденных треугольника называются *равными*, если существует движение, при котором один из них переходит в другой.

Используя аксиому III_6^*, докажите самостоятельно признак равенства двух прямоугольных вырожденных треугольников.

5.2°. Прямоугольные треугольники ABU_∞ и $A_1B_1V_\infty$, расположенные в одной или в разных плоскостях, равны, если $AB = A_1B_1$.

4. Функция Лобачевского в пространстве. В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос об определении функции Лобачевского в стереометрии. В планиметрии мы определили функцию Лобачевского с помощью понятия угла параллельности, соответствующего данному отрезку. Напомним, что если $\widetilde{x}$ — данный отрезок, а $\widetilde{\varphi}$ — угол параллельности, соответствующий этому отрезку, то $\widetilde{\varphi}$ определяется, по существу, с помощью построения вырожденного прямоугольного треугольника ABU_∞, где $AB = \widetilde{x}$, $\angle A = 90°$. Тогда $\widetilde{\varphi} = \angle B$ (рис. 6). Определение функции Лобачевского существенно основано на следующем утверждении:

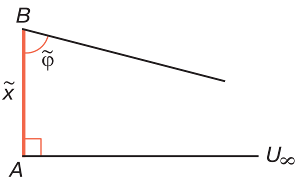


Рис. 6

5.3°. Если два отрезка равны, то соответствующие им углы параллельности, построенные в одной плоскости или в разных плоскостях, равны.

Доказательство этого утверждения основано на признаке 5.2°. Проведите его самостоятельно.

§ 6. Параллельность прямых в пространстве. Взаимное расположение прямых

1. Параллельные прямые в пространстве. Две ориентированные прямые в трехмерном пространстве Лобачевского называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и параллельны по определению параллельных прямых в планиметрии (см. ч. I, § 10). Так же как и на плоскости, параллельность направленных прямых $\overline{AA_1}$ и $\overline{BB_1}$ обозначается так: $\overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1}$. Аналогично вводится понятие параллельности двух ненаправленных прямых (см. ч. I, § 11, п. 1).

Докажем теорему о параллельных прямых в пространстве Лобачевского.

Теорема 1. *Через любую точку пространства, не лежащую на данной направленной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.*

□ Рассмотрим прямую $\overline{AA_1}$ и точку M, не лежащую на этой прямой. Через точку M и прямую AA_1 проходит одна и только одна плоскость, которую обозначим через α. По теореме 2 (см. ч. I, § 10) в плоскости α существует одна и только одна направленная прямая $\overline{UV}$, проходящая через точку M и параллельная прямой $\overline{AA_1}$. Пусть $\overline{U'V'}$ — какая-то прямая пространства, проходящая через точку M и параллельная прямой $\overline{AA_1}$. Прямые $U'V'$ и AA_1 должны лежать в одной плоскости, которая проходит через точку M. Но через точку M и прямую AA_1 проходит только одна плоскость, плоскость α, следовательно, прямая $U'V'$ должна лежать в плоскости α. По теореме 2 (см. ч. I, § 10) прямые $\overline{U'V'}$ и $\overline{UV}$ совпадают. ■

Самостоятельно убедитесь в справедливости следующего утверждения.

6.1°. При любом движении пространства образы параллельных прямых параллельны.

Ясно, что все свойства параллельных прямых, рассмотренные в главах 2–3 части I, имеют место в любой плоскости пространства Лобачевского. Особо отметим теорему 1 (см. ч. I, § 14) о взаимном расположении параллельных прямых.

Теорема 2. *Расстояние y от переменной точки одной из двух параллельных прямых до другой прямой монотонно неограниченно возрастает при перемещении точки в сторону, противоположную направлению параллельности, и монотонно убывает и стремится к нулю при перемещении точки в сторону параллельности. При этом расстояние принимает всевозможные положительные значения.*

Предлагаем читателю самостоятельно доказать следующее утверждение.

6.2°. Если a, b и c, d — произвольные пары параллельных прямых в пространстве (т. е. $a \parallel b$ и $c \parallel d$), плоскости которых совпадают или не совпадают, то существует движение, при котором прямые a и b переходят соответственно в прямые c и d.

2. Теорема о транзитивности параллельных прямых. Очевидно, теорема 3 (см. ч. I, § 10) о транзитивности параллельных прямых имеет место в любой плоскости пространства. Докажем, что эта теорема верна и в том случае, когда прямые не лежат в одной плоскости. Для этого сначала докажем лемму о пересекающихся плоскостях, проходящих через параллельные прямые.

Лемма. *Через две направленные параллельные прямые* $\overline{AA'}$ *и* $\overline{BB'}$ *проведены плоскости* α *и* β*, которые пересекаются по прямой* c*, не совпадающей с данными прямыми. Тогда на прямой* c *можно выбрать направление* $\overline{CC'}$ *так, что* $\overline{AA'} \parallel \overline{CC'}$ *и* $\overline{BB'} \parallel \overline{CC'}$.

□ На прямой c возьмем произвольную точку C и другую точку C' так, чтобы точка C' лежала по ту же сторону от плоскости ABC, что и точки A' и B' (рис. 7). Докажем, что $\overline{CC'} \parallel \overline{AA'}$. Для этого достаточно доказать, что лучи CC' и AA' параллельны.

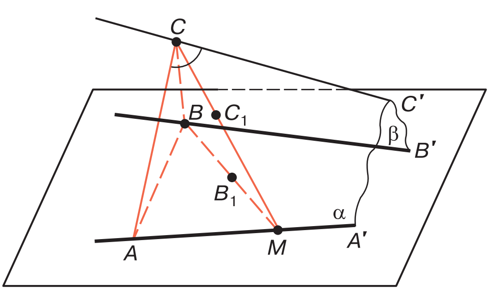


Рис. 7

Прямые CC' и AA' лежат в плоскости α и не пересекаются, так как в противном случае через точку пересечения проходила бы прямая $\overline{BB'}$, что невозможно. Отсюда следует, что и лучи CC' и AA' лежат в одной плоскости и не пересекаются. Докажем, что любой внутренний луч CC_1 угла ACC' пересекает луч AA'. Для этого проведем плоскость BCC_1 и обозначим через BB_1 луч, по которому эта плоскость пересекает полуплоскость с границей BB_1, содержащую прямую AA'. Луч BB_1 проходит внутри угла ABB' и поэтому в силу того, что лучи AA' и BB' параллельны, пересекает луч AA' в некоторой точке M. Ясно, что через точку M проходит и луч CC_1. Итак, лучи CC' и AA' параллельны, следовательно, $\overline{CC'} \parallel \overline{AA'}$. Точно так же можно доказать, что $\overline{CC'} \parallel \overline{BB'}$. ■

Теорема 3. *Если две прямые $\overline{U_1V_1}$ и $\overline{U_2V_2}$ параллельны прямой $\overline{U_0V_0}$, то $\overline{U_1V_1} \parallel \overline{U_2V_2}$.*

□ Эта теорема была доказана в ч. I, § 10 для случая, когда все три прямые лежат в одной плоскости. Рассмотрим общий случай. Плоскости $U_0V_0U_1$ и $U_2V_2U_1$ проходят через параллельные прямые $\overline{U_0V_0}$ и $\overline{U_2V_2}$, поэтому по предыдущей лемме на прямой, по которой они пересекаются (точка U_1 лежит на этой прямой), можно выбрать направление $\overline{U_1V'}$ так, чтобы $\overline{U_1V'} \parallel \overline{U_0V_0}$, $\overline{U_1V'} \parallel \overline{U_2V_2}$. Но по условию $\overline{U_1V_1} \parallel \overline{U_0V_0}$, следовательно, по теореме 1 прямые $\overline{U_1V'}$ и $\overline{U_1V_1}$ совпадают. Итак, $\overline{U_1V_1} \parallel \overline{U_2V_2}$. ■

3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. В пространстве Лобачевского возможны следующие четыре случая взаимного расположения двух прямых в пространстве: а) прямые пересекаются, т. е. лежат в одной плоскости и имеют только одну общую точку; б) прямые параллельны, т. е. лежат в одной плоскости и параллельны по определению параллельных прямых в планиметрии; в) прямые расходятся, т. е. лежат в одной плоскости, не пересекаются и не параллельны; г) прямые являются скрещивающимися, т. е. не лежат в одной плоскости.

Из теоремы 1 следует, что в пространстве существует бесконечное множество пар параллельных прямых. Ясно, что в каждой плоскости существует бесконечное множество пар расходящихся прямых. В пространстве Лобачевского существует также бесконечное множество пар скрещивающихся прямых. Это утверждение непосредственно следует из теоремы абсолютной геометрии, выражающей признак скрещивающихся прямых, доказательство которой предлагаем провести самостоятельно.

Теорема 4. *Если прямая a лежит в плоскости α, а прямая b пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на прямой a, то a и b — скрещивающиеся прямые.*

§ 7. Параллельность прямой и плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Параллельность прямой и плоскости. Говорят, что прямая *лежит в плоскости*, если все точки прямой лежат в плоскости. Из аксиомы I_5 следует, что если хотя бы две точки прямой лежат в данной плоскости, то прямая лежит в этой плоскости. Поэтому, так же как и в евклидовом пространстве, прямая, не лежащая в плоскости, не может иметь с плоскостью более чем одну общую точку. Прямая называется *параллельной плоскости*, если она не лежит в плоскости и параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости. Параллельность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$.

Прямая, параллельная плоскости, не имеет общих точек с плоскостью, так как в противном случае их общая точка должна лежать и на прямой, лежащей в плоскости и параллельной данной, что невозможно.

Рассмотрим некоторые свойства параллельности прямой и плоскости.

7.1°. Если прямая a параллельна плоскости α, то любая плоскость, проходящая через прямую a и пересекающая плоскость α, пересекает ее по прямой, параллельной прямой a.

□ Так как $a \parallel \alpha$, то в плоскости α существует прямая l, такая, что $a \parallel l$ или $\overline{AA'} \parallel \overline{LL'}$, где $\overline{AA'}$ и LL' —

прямые a и l с выбранными на них направлениями параллельности. Пусть β — произвольная плоскость, проходящая через прямую $\overline{AA'}$ и пересекающая плоскость α по прямой b. Представляет интерес тот случай, когда b и l — различные прямые (рис. 8). Плоскости α и β пересекаются по прямой b и проходят через параллельные прямые $\overline{AA'}$ и $\overline{LL'}$, поэтому согласно лемме § 6 на прямой b можно выбрать направление $\overline{BB'}$ так, что $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$. ■

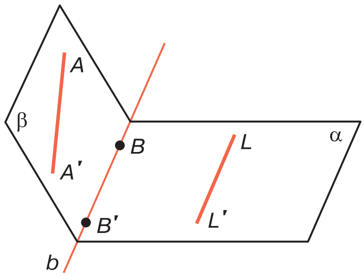


Рис. 8

Из этого свойства и теоремы 3 § 3 непосредственно следует:

7.2°. Через прямую a, параллельную данной плоскости, проходит одна и только одна плоскость, перпендикулярная к данной. Эта плоскость пересекает данную плоскость по прямой, параллельной прямой a.

Из хода доказательства свойства 7.1° следует, что если $a \parallel \alpha$ и l — любая прямая плоскости α, параллельная прямой a, то на прямой a направление параллельности $a \parallel l$ не зависит от выбора прямой l. Другими словами, если $a \parallel \alpha$, то на прямой a единственным образом определяется направление, которое *назовем направлением параллельности*: $a \parallel \alpha$.

7.3°. Если прямая $\overline{BB'}$ и плоскость α параллельны прямой $\overline{AA'}$, то либо $\overline{BB'} \parallel \alpha$, либо $BB' \subset \alpha$.

□ Предположим, что $BB' \not\subset \alpha$, и докажем, что $\overline{BB'} \parallel \alpha$. Так как $\overline{AA'} \parallel \alpha$, то в плоскости α существует прямая

LL', такая, что $\overline{LL'} \parallel \overline{AA'}$. По теореме 3 § 6 $\overline{BB'} \parallel \overline{LL'}$, поэтому $\overline{BB'} \parallel \alpha$. ■

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. *Если прямая $\overline{a}$ параллельна плоскости α, то через каждую точку плоскости α проходит одна и только одна направленная прямая, параллельная прямой $\overline{a}$, причем все эти прямые лежат в плоскости α и образуют пучок Ω параллельных прямых этой плоскости.*

□ Пусть M — произвольная точка плоскости α. Точка M не лежит на прямой a, поэтому через эту прямую и точку M проходит плоскость β, которая пересекает плоскость α по некоторой прямой $\overline{l}$, проходящей через точку M. По свойству 7.1° $\overline{l} \parallel \overline{a}$. По теореме 1 § 6 $\overline{l}$ — единственная прямая, проходящая через точку M и параллельная прямой $\overline{a}$.

Обозначим через Ω множество всех направленных прямых плоскости α, каждая из которых параллельна прямой $\overline{a}$. Обозначим через $\overline{l_0}$ одну из прямых этого множества. Тогда если $\overline{l}$ — произвольная прямая множества Ω, отличная от $\overline{l_0}$, то $\overline{l_0} \parallel \overline{a}$, $\overline{l} \parallel \overline{a}$, поэтому по теореме о транзитивности параллельных прямых (см. § 6, теорема 3) множество Ω есть пучок параллельных прямых плоскости α. ■

Пучок Ω, о котором говорится в теореме 1, будем называть *пучком параллельных прямых плоскости* α, определяемым прямой a.

Следствие. *Если прямая l лежит в плоскости α, параллельной прямой a, и не принадлежит пучку параллельных прямых, определяемому прямой a, то a и l — скрещивающиеся прямые.*

Предлагаем читателю, воспользовавшись свойством 7.1°, самостоятельно обосновать это следствие.

Рассмотрим теорему о взаимном расположении прямой и параллельной ей плоскости. Эта теорема аналогична теореме 2 § 6 о взаимном расположении параллельных прямых, Докажите ее самостоятельно, используя свойство 3.2°.

Теорема 2. *Расстояние y от переменной точки направленной прямой до плоскости, которой она параллельна, монотонно неограниченно возрастает при перемещении точки в сторону, противоположную направлению параллельности, и монотонно убывает и стремится к нулю при перемещении точки в сторону параллельности. При этом расстояние y принимает все возможные положительные значения.*

2. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. В пространстве Лобачевского возможны следующие четыре случая взаимного расположения прямой и плоскости: а) прямая лежит в плоскости; б) прямая пересекает плоскость, т. е. имеет с ней только одну общую точку; в) прямая параллельна плоскости; г) прямая не имеет общих точек с плоскостью и не параллельна ей, т. е. прямая расходится с плоскостью.

Справедлива следующая лемма, которая является признаком расхождения прямой с плоскостью. Ее доказательство непосредственно следует из свойства 7.1°.

Лемма. *Если прямая a не лежит в плоскости α и расходится с некоторой прямой b, лежащей в плоскости α, то прямая a расходится с плоскостью α.*

Докажем теперь теорему о взаимном расположении прямой и плоскости. Из этой теоремы непосредственно следует, что существует бесконечное множество прямых, каждая из которых расходится с данной плоскостью.

Теорема 3. *Из точки A прямой AA_1 проведен перпендикуляр AH к плоскости α, причем $\angle A_1AH$ острый или прямой. Тогда если $\widehat{A_1AH} < \Pi(AH)$, $\widehat{A_1AH} = \Pi(AH)$, $\widehat{A_1AH} > \Pi(AH)$, то прямая AA_1 соответственно пересекает плоскость α, параллельна этой плоскости или расходится с ней.*

□ Проведем плоскость A_1AH и обозначим через HH_1 прямую, по которой эта плоскость пересекает плоскость α, причем обозначения выбраны так, что A_1, $H_1 \mathrel{\ddot{-}} AH$ (рис. 9). Далее в плоскости A_1AH проведем луч AB, параллельный лучу HH_1. Так как $\angle AHH_1$ прямой, то $\overline{BAH} = \Pi(AH)$. Если $\widehat{A_1AH} < \Pi(AH)$, т. е.

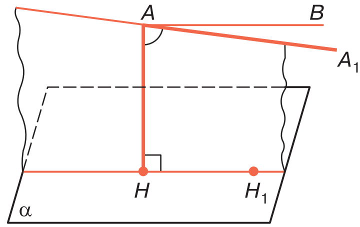


Рис. 9

если $\widehat{A_1AH} < \overline{BAH}$, то AA_1 — внутренний луч угла BAH (см. рис. 9), поэтому этот луч пересекает луч HH_1, следовательно, прямая AA_1 пересекает плоскость α. Если $\widehat{A_1AH} = \Pi(AH) = \angle BAH$, то лучи AA_1 и AB совпадают, поэтому $\overline{AA_1} \parallel \overline{HH_1}$, т. е. $AA_1 \parallel \alpha$. Если, наконец, $\widehat{A_1AH} > \Pi(AB) = \angle BAH$, то луч AB — внутренний луч угла HAA_1, поэтому AA_1 и HH_1 — расходящиеся прямые ($\angle HAA_1$ острый или прямой). По предыдущей лемме прямая AA_1 расходится с плоскостью α. ■

Докажем теперь теорему, аналогичную теореме 1 (см. ч. I, § 15).

Теорема 4. *Если прямая расходится с плоскостью, то они имеют один и только один общий перпендикуляр. Расстояния от точек прямой до плоскости монотонно и неограниченно растут по мере удаления переменной точки прямой от основания общего перпендикуляра по обе стороны.*

□ Пусть a и α — данные прямая и плоскость. Проведем через прямую a плоскость β, перпендикулярную к плоскости α (см. § 3, теорема 3) и обозначим через l прямую, по которой пересекаются плоскости α и β. Так как прямая a расходится с плоскостью α, то a и l — расходящиеся прямые, поэтому они имеют общий перпендикуляр AL, где $A \in a$, $L \in l$. По свойству 3.2° $AL \perp \alpha$. Итак, AL — общий перпендикуляр прямой a и плоскости α. Предположим теперь, что прямая a и плоскость α имеют еще один общий перпендикуляр $A'L'$, где $A' \in a$, $L' \in \alpha$. По свойству 3.2° $A'L' \perp l$. Мы пришли к противоречию с теоремой 1 (см. ч. I, § 15).

По свойству 3.2° каждый общий перпендикуляр прямых a и l является общим перпендикуляром прямой a и плоскости α, поэтому второе утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 1 (см. ч. I, § 15). ■

Если прямая расходится с плоскостью, то длина их общего перпендикуляра называется *расстоянием от прямой до плоскости*. Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что расстояние от прямой до расходящейся с ней плоскости меньше длины любого отрезка, отличного от общего перпендикуляра, один конец которого лежит на прямой, а другой конец — в плоскости.

3. Конус параллелей. Пусть точка A не лежит в плоскости α, а AH — перпендикуляр, проведенный к этой плоскости. Рассмотрим множество всех прямых, проходящих через точку A, каждая из которых параллельна плоскости α. Это множество является бесконечным. Согласно теореме 3 все прямые этого множества наклонены под одним и тем же острым углом φ к перпендикуляру AH, где $\varphi = \Pi(AH)$. Отсюда мы заключаем, что рассматриваемое множество прямых есть круговой конус с вершиной A и осью AH. Этот конус называется *конусом параллелей* к плоскости α в точке A (рис. 10). Очевидно, все образующие этого конуса параллельны плоскости α. Плоскость α перпендикулярна к оси конуса и не пересекает его образующие, поэтому ее можно назвать *заградительной плоскостью* конуса параллелей к ней.

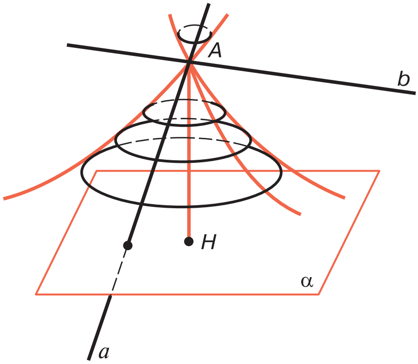


Рис. 10

§ 8. Параллельность плоскостей

1. Параллельные плоскости. Плоскость α называется *параллельной плоскости* β, если эти две плоскости не имеют общих точек и в плоскости α существует хотя бы одна прямая, параллельная плоскости β. Из этого определения следует, что в плоскости β также существует прямая, параллельная плоскости α. Следовательно, если $\alpha \parallel \beta$, то $\beta \parallel \alpha$, т. е. понятие параллельности плоскостей есть взаимное понятие.

Докажем теорему о параллельных плоскостях. Но для этого необходимо сначала доказать лемму, выражающую признак пересечения двух плоскостей в пространстве.

Лемма. *Если через какую-нибудь точку плоскости α проходят две прямые, лежащие в этой плоскости и параллельные другой плоскости β, то плоскости α и β пересекаются. Прямая пересечения плоскостей параллельна данным прямым.*

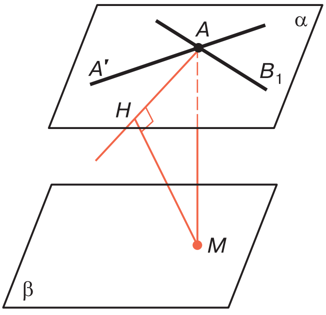


Рис. 11

□ Пусть через точку A плоскости α проходят две прямые $\overline{AA'}$ и $\overline{AB_1}$ лежащие в этой плоскости и параллельные плоскости β. Проведем перпендикуляр AM к плоскости β и перпендикуляр MH к плоскости α (рис. 11). Угол $A'AM$ является углом параллельности, соответствующим отрезку AM, поэтому он острый. Отсюда следует, что точка H не совпадает с точкой A. Точка H не лежит также на прямых AA' и AB_1. В самом деле, если предположить, например, что $H \in AA'$, то $\widehat{A'AM}$ является углом между прямой AM и плоскостью α. Но это противоречит свойству 3.4°, так как прямая AM образует с прямой AB_1 угол B_1AM, равный углу $\widehat{A'AM} = \Pi(AM)$. Итак, прямая AH не совпадает с прямой AA'. По свойству 3.4° $\widehat{HAM} < \widehat{A'AM}$, т. е. $\widehat{HAM} < \Pi(AM)$, и, следовательно, по теореме 3 § 7 прямая AH пересекает плоскость β. Отсюда и следует, что плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой l. По свойству 7.1° $AA' \parallel l$ и $AB_1 \parallel l$. ■

Докажем теперь теорему о параллельных плоскостях.

Теорема 1. *Если плоскость α параллельна плоскости β, то через каждую точку плоскости α проходит одна и только одна прямая, лежащая в плоскости α и параллельная плоскости β. Множество Ω всех этих прямых образует пучок параллельных прямых плоскости α.*

□ Пусть AA' — прямая плоскости α, которая параллельна плоскости β. Это означает, что в плоскости β существует прямая $\overline{BB'}$, $\overline{BB'} \parallel \overline{AA'}$. Докажем сначала, что через произвольную точку M плоскости α в этой плоскости проходит прямая $\overline{MM'} \parallel \beta$. Представляет интерес только тот случай, когда $M \notin AA'$. Проведем прямую $\overline{MM'} \parallel \overline{AA'}$. Ясно, что $MM' \subset a$, и по теореме о транзитивности прямой $\overline{MM'} \parallel \overline{BB'}$, следовательно, $\overline{MM'} \parallel \beta$.

Очевидно, MM' — единственная прямая плоскости α, проходящая через точку M и параллельная плоскости β. В самом деле, если предположить, что в плоскости α через точку M проходит еще одна прямая MM'', параллельная плоскости β, то по предыдущей лемме плоскости α и β пересекаются, что противоречит определению параллельности двух плоскостей.

Остается доказать, что множество Ω образует пучок параллельных прямых плоскости α. Очевидно, $AA' \in \Omega$. Рассмотрим пучок ω параллельных прямых плоскости α, определяемый прямой $\overline{AA'}$, и докажем, что множества Ω и ω совпадают. Если $\overline{XX'} \in \Omega$, то $\overline{XX'} \parallel \beta$. Через точку X проведем прямую $\overline{XX''} \parallel \overline{AA'}$. По теореме о транзитивности $\overline{XX''} \parallel \overline{BB'}$, поэтому $\overline{XX''} \parallel \beta$. По доказанному выше прямые $\overline{XX'}$ и $\overline{XX''}$ совпадают, т. е. $XX' \in \omega$.

Обратно: пусть $YY' \in \omega$, $\overline{YY'} \neq \overline{AA'}$. Так как $\overline{YY'} \parallel \overline{AA'}$, $AA' \parallel \beta$, то по свойству 7.3° $\overline{YY'} \parallel \beta$, т. е. $\overline{YY'} \in Q$. ■

Пучок Ω, о котором говорится в теореме 1, будем называть *пучком параллельных прямых плоскости* α, *определяемым* параллельной ей плоскостью β.

Следствие. *Если плоскость α параллельна плоскости β, то любая прямая плоскости α, не принадлежащая пучку Ω параллельных прямых, определяемому плоскостью β, расходится с плоскостью β.*

Если $\alpha \parallel \beta$, то $\beta \parallel \alpha$, поэтому из доказанной теоремы следует, что через каждую точку плоскости β проходит одна и только одна прямая, параллельная плоскости α, и множество всех этих прямых образует пучок параллельных прямых плоскости β. Таким образом, если $\alpha \parallel \beta$, то в каждой из плоскостей α и β существует пучок параллельных прямых, определяемый другой плоскостью.

2. Теорема существования параллельных плоскостей. Докажем теперь следующую основную теорему.

Теорема 2. *Через прямую a, параллельную плоскости α, проходит одна и только одна плоскость, параллельная плоскости α. Все другие плоскости, проходящие через прямую a, пересекают плоскость α.*

$\square$ Через прямую a проведем плоскость β, перпендикулярную к плоскости α (см. § 3, теорема 3), и обозначим через b прямую, по которой пересекаются плоскости β и α.

Докажем сначала, что через прямую a проходит плоскость, которая не пересекает плоскость α. Для этого через прямую a проведем плоскость γ, перпендикулярную к плоскости β, и докажем, что плоскости α и γ не пересекаются. Пусть, напротив, они имеют общую точку M (рис. 12, a). Ясно, что точка M не лежит на прямых a и b. Проведем в плоскости α перпендикуляр MP к прямой b, а в плоскости γ перпендикуляр MQ к прямой a. По свойству 3.2° $MP \perp \beta$, $MQ \perp \beta$, поэтому MPQ — треугольник с двумя прямыми углами — $\angle P$ и $\angle Q$, что невозможно. Следовательно, плоскости α и γ не могут иметь общих точек и они параллельны.

Докажем теперь, что любая плоскость δ, проходящая через прямую a и отличная от γ, пересекает плоскость α. В плоскости β через какую-нибудь точку A прямой a проведем перпендикуляр AB к прямой b. Тогда по свойству 3.2° $AB \perp \alpha$. Так как $a \parallel b$ (см. свойство 7.1°), то на прямых a и b можно взять точки A_1 и B_1 так, чтобы $\overline{AA_1} \parallel \overline{BB_1}$.

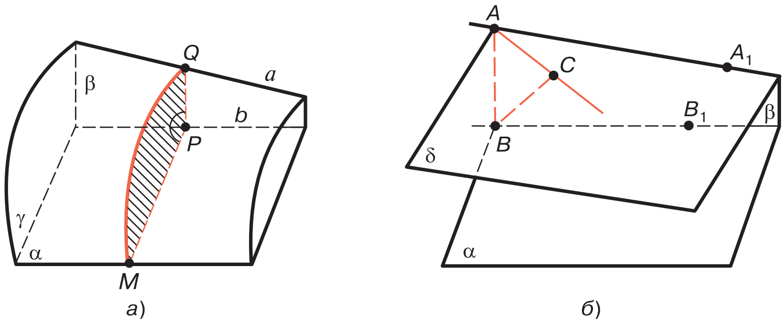


Рис. 12

Если $B \in \delta$, то δ и α пересекаются, поэтому рассмотрим случай, когда $B \notin \delta$. Проведем перпендикуляр BC к плоскости δ (рис. 12, *б*; на этом рисунке плоскость γ не изображена). Точка C не лежит на прямой a, так как в противном случае прямая BC принадлежит плоскости β и, следовательно, плоскости γ и δ совпадают. Прямая AB образует с плоскостью δ угол $\widehat{BAC}$. По свойству 3.4° $\widehat{BAC} < \widehat{BAA_1}$, а так как $\widehat{BAA_1} = \Pi(AB)$, то $\widehat{BAC} < \Pi(AB)$. Отсюда согласно теореме 3 § 7 прямая AC пересекает плоскость α, следовательно, плоскости α и δ пересекаются. ■

Из доказательства теоремы непосредственно следует утверждение.

Следствие. *Если прямая a параллельна плоскости α, то плоскость, проходящая через прямую a и параллельная плоскости α, перпендикулярна к плоскости, которая проходит через прямую a и перпендикулярна к плоскости α.*

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что *существует бесконечное множество пар параллельных плоскостей*. В самом деле, пусть α — произвольная плоскость, а A — точка, не лежащая на ней. Возьмем произвольную прямую l плоскости α и через точку A проведем прямую m, параллельную прямой l (см. § 6, теорема 1). Тогда $m \parallel \alpha$, и по доказанной теореме через прямую m проходит плоскость β, $\beta \parallel \alpha$.

3. Некоторые особенности расположения параллельных плоскостей в пространстве Лобачевского. Сравнивая свойства взаимного расположения параллельных плоскостей в пространстве Лобачевского и в пространстве Евклида, мы можем отметить следующие особенности:

а) В евклидовом пространстве на двух параллельных плоскостях α и β имеется бесконечное множество пар пучков параллельных прямых (один пучок пары принадлежит плоскости α, а другой — плоскости β), таких, что любые две прямые этих пучков параллельны. В пространстве Лобачевского, если $\alpha \parallel \beta$, то имеется только одна пара таких пучков (один пучок пары принадлежит плоскости α, а другой — плоскости β).

б) В евклидовом пространстве расстояния от любой точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости равны друг другу. В пространстве Лобачевского эти расстояния не равны друг другу. Имеет место следующая интересная теорема, которая непосредственно вытекает из теоремы 1 § 7 о взаимном расположении прямой и параллельной ей плоскости.

Теорема 3. *Пусть плоскости α и β параллельны, прямая $\overline{a}$ лежит в плоскости α и параллельна плоскости β. Тогда расстояние y от переменной точки прямой $\overline{a}$ до плоскости β монотонно неограниченно возрастает при перемещении точки в сторону, противоположную направлению параллельности, и монотонно убывает и стремится к нулю при перемещении точки в сторону параллельности. При этом расстояние y принимает любое положительное значение.*

Наглядно выражаясь, параллельные плоскости α и β асимптотически приближаются друг к другу в направлении параллельности и неограниченно удаляются одна от другой в противоположном направлении (рис. 13).

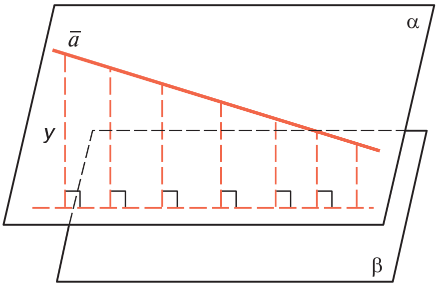


Рис. 13

в) В евклидовом пространстве через точку, не лежащую в данной плоскости, проходит одна и только одна плоскость, параллельная данной. В отличие от этого, в пространстве Лобачевского через точку A, не лежащую в плоскости α, проходит бесчисленное множество плоскостей, параллельных плоскости α. В самом деле, рассмотрим конус параллелей с вершиной A (см. рис. 10). Образующие этого конуса параллельны плоскости α, поэтому по теореме 2 через каждую образующую конуса проходит плоскость, которая параллельна плоскости α. Каждая из этих плоскостей является касательной к конусу параллельностей. Очевидно, этих плоскостей бесконечное множество.

г) В евклидовом пространстве если две плоскости параллельны третьей плоскости, то они параллельны. В пространстве Лобачевского две плоскости, параллельные третьей, могут пересекаться, быть параллельными и могут быть плоскостями, которые не пересекаются и не параллельны.

§ 9. Взаимное расположение двух плоскостей

1. Различные случаи взаимного расположения двух плоскостей. В пространстве Лобачевского возможны следующие три случая взаимного расположения двух плоскостей: а) плоскости пересекаются; б) плоскости параллельны; в) плоскости не имеют общих точек и не параллельны. В этом случае говорят, что они *расходятся*.

Пусть α и β — две произвольные плоскости. Установим признаки, выражающие условия взаимного расположения этих плоскостей в зависимости от взаимного расположения прямых, лежащих в них. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Через произвольную точку каждой из двух данных плоскостей проходят не более чем две прямые, параллельные другой плоскости.*

□ Пусть α и β — данные плоскости. Утверждение леммы докажем методом от противного. Предположим, что через некоторую точку A плоскости α проходят по крайней мере три прямые a, b и c, каждая из которых параллельна плоскости β. Так как $a \parallel \beta$ и $b \parallel \beta$, то по лемме § 8 плоскости α и β пересекаются по некоторой прямой l и $a \parallel l$, $b \parallel l$. Так как $c \parallel \beta$, то по свойству 7.1° $c \parallel l$. Мы пришли к противоречию с теоремой 1 (см. ч. I, § 11). ■

Рассмотрим три признака, выражающие условия того, что две плоскости пересекаются, параллельны или расходятся.

9.1°. Если через некоторую точку плоскости α проходят две прямые, лежащие в этой плоскости и параллельные плоскости β, то плоскости α и β пересекаются. При этом через каждую точку плоскости α, не лежащую на линии пересечения плоскостей α и β, проходят ровно две прямые, лежащие в плоскости и параллельные плоскости β.

Утверждение непосредственно следует из леммы § 8 и теоремы 1 (см. ч. I, § 11).

9.2°. Если через некоторую точку плоскости α проходит только одна прямая, лежащая в этой плоскости и параллельная плоскости β, то $\alpha \parallel \beta$. При этом через каждую точку плоскости α проходит ровно одна прямая, параллельная плоскости β.

□ Ясно, что плоскости α и β не пересекаются, так как в противном случае согласно свойству 9.1° через данную точку плоскости α проходят две прямые, параллельные плоскости β. Таким образом, по определению

$\alpha \parallel \beta$. Второе утверждение непосредственно следует из теоремы 1 § 8. ■

Из утверждений 9.1° и 9.2° непосредственно следует:

9.3°. Если через некоторую точку плоскости α, не лежащую в плоскости β, не проходит ни одна прямая, лежащая в плоскости α и параллельная плоскости β, то α и β — расходящиеся плоскости.

9.4°. Если α и β — расходящиеся плоскости, то любая прямая, лежащая в плоскости α, расходится с плоскостью β.

2. Расходящиеся плоскости. Напомним, что α и β называются расходящимися плоскостями, если они не имеют общих точек и не параллельны. Справедливо утверждение, из которого следует, что существует бесконечное множество пар расходящихся прямых. Его доказательство непосредственно следует из свойства 9.3° и теоремы 3 § 17.

9.5°. Если две плоскости α и β перпендикулярны к одной прямой, то они расходятся.

Докажем теперь теорему об общем перпендикуляре двух расходящихся плоскостей. Она аналогична теореме 1 (см. ч. I, § 15) и теореме 4 § 7.

Теорема 1. *Две расходящиеся плоскости имеют один и только один общий перпендикуляр. Расстояния от точек одной из плоскостей до другой монотонно и неограниченно растут по мере удаления точки от основания общего перпендикуляра в любом направлении.*

□ Докажем сначала, что данные расходящиеся плоскости, которые обозначим через α и β, имеют общий перпендикуляр. Из точки A плоскости α проведем перпендикуляр AB к плоскости β, а из точки B — перпендикуляр BC к плоскости α. Если точки A и C совпадают, то отрезок AB — общий перпендикуляр этих плоскостей. Предположим, что A и C — различные точки, и проведем плоскость ABC, которая пересекает плоскость α по прямой AC, а плоскость β по прямой BD, проходящей через точку B. Прямые AC и BD —

расходящиеся прямые, поэтому они имеют общий перпендикуляр PQ, $P \in AC$, $Q \in BD$. Так как плоскость ABC перпендикулярна как к плоскости α, так и к плоскости β, то по свойству 3.2° $PQ \perp \alpha$ и $PQ \perp \beta$.

Предположим теперь, что плоскости α и β имеют еще один общий перпендикуляр $P'Q'$, $P' \in \alpha$, $Q' \in \beta$. Проведем плоскость PQP', которая перпендикулярна как к плоскости α, так и к плоскости β. По свойству 3.2 прямая $P'Q'$ лежит в этой плоскости. Прямые PP' и QQ' являются расходящимися прямыми и имеют два общих перпендикуляра PQ и $P'Q'$. Мы пришли к противоречию с теоремой 1 (см. ч. I, § 15).

Для доказательства второго утверждения теоремы проведем в плоскости α через точку P произвольную прямую a. Заметим, что PQ — общий перпендикуляр прямой a и расходящейся с ней плоскостью β. По теореме 2 § 7 расстояния от точек прямой a до плоскости β монотонно и неограниченно растут по мере удаления переменной точки M прямой a (следовательно, и плоскости α) от точки P. ■

Длина общего перпендикуляра двух расходящихся плоскостей называется *расстоянием между этими плоскостями*. Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что расстояние между двумя расходящимися плоскостями меньше длины любого отрезка, отличного от общего перпендикуляра, концы которого лежат в данных плоскостях.

Докажем теорему о проекции одной из двух расходящихся плоскостей на другую.

Теорема 2. *Если α и β — расходящиеся плоскости, а AB — их общий перпендикуляр, где $B \in \beta$, то проекция плоскости α на плоскость β есть открытый круг плоскости β с центром в точке B.*

□ Через прямую AB проведем плоскость γ и обозначим через a и b прямые, по которым пересекаются плоскости α, γ и β, γ (рис. 14). Прямые a и b расходятся, поэтому по теореме 2 (см. ч. I, § 17) проекция прямой a на прямую b есть некоторый интервал MN, серединой которого является точка B. Так как $\gamma \perp \beta$, то

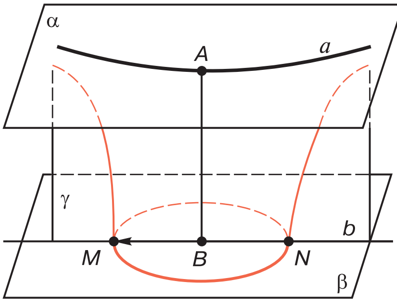


Рис. 14

по свойству 3.2° интервал MN — проекция прямой a на плоскость β. Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что открытый круг Ω с центром B и диаметром MN есть проекция плоскости α на плоскость β. При этом следует использовать поворот вокруг прямой AB и учесть, что при этом повороте каждая из плоскостей α и β переходит в себя и Ω также переходит в себя. ■

3. Теоремы о равенстве двух пар параллельных и расходящихся плоскостей. Предлагаем читателю, пользуясь свойством 6.1°, доказать утверждение.

9.6°. При любом движении пространства образы параллельных плоскостей параллельны.

На плоскости Лобачевского, в отличие от плоскости Евклида, имеет место следующая теорема, аналогичная свойству 6.2°.

Теорема 3. *Если $\alpha_1 \parallel \beta_1$, и $\alpha_2 \parallel \beta_2$, то существует движение, при котором плоскости α_1 и β_1, переходят соответственно в плоскости α_2 и β_2.*

□ Проведем в плоскости α_1 прямую a_1, параллельную плоскости β_1, и через эту прямую проведем плоскость γ_1, перпендикулярную к плоскости β_1, которая пересекает эту плоскость по прямой b_1. По свойству 7.1° $a_1 \parallel b_1$. Выполним аналогичные построения, используя плоскости α_2 и β_2 (рис. 15). По следствию теоремы 2 § 8 $\alpha_1 \perp \gamma_1$ и $\alpha_2 \perp \gamma_2$.

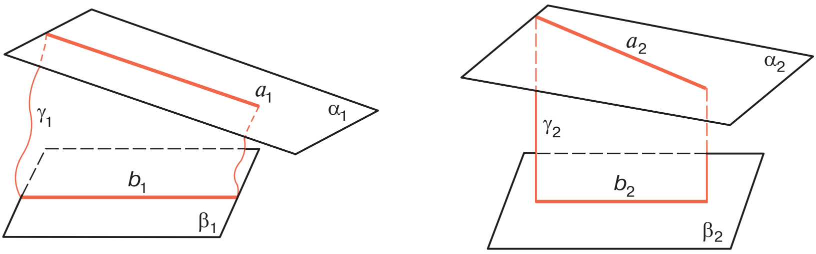


Рис. 15

Согласно свойству **6.2°** существует движение f, при котором прямые a_1 и b_1 переходят соответственно в параллельные прямые a_2 и b_2. Тогда ясно, что $\gamma_2 = f(\gamma_1)$ и так как при движении сохраняется перпендикулярность плоскостей, то $\alpha_2 = f(\alpha_1)$ и $\beta_2 = f(\beta_1)$. ■

Докажем теперь теорему о равенстве двух пар расходящихся плоскостей.

Теорема 4. *Даны две произвольные пары расходящихся плоскостей* α_1, β_1 *и* α_2, β_2, *расстояния между которыми равны* ρ_1 *и* ρ_2. *Для того чтобы существовало движение, при котором плоскости* α_1, β_1 *переходят соответственно в плоскости* α_2, β_2, *необходимо и достаточно, чтобы* $\rho_1 = \rho_2$.

□ Пусть A_1B_1 и A_2B_2 — общие перпендикуляры расходящихся плоскостей α_1, β_1 и α_2, β_2, где $A_1 \in \alpha_1$, $B_1 \in \beta_1$, $A_2 \in \alpha_2$, $B_2 \in \beta_2$.

Предположим, что существует движение f, такое, что $\alpha_2 = f(\alpha_1)$, $\beta_2 = f(\beta_1)$. Так как при движении сохраняется перпендикулярность прямой и плоскости, то, используя теорему 1, легко убедиться в том, что $A_2 = f(A_1)$, $B_2 = f(B_1)$, поэтому $A_1B_1 = A_2B_2$, т. е. $\rho_1 = \rho_2$.

Обратно: пусть $\rho_1 = \rho_2$, т. е. $A_1B_1 = A_2B_2$. Рассмотрим движение f, при котором луч A_1B_1 переходит в луч A_2B_2 (см. следствие из теоремы § 4). Тогда, очевидно, $A_2 = f(A_1)$. Так как $A_1B_1 = A_2B_2$, то $B_2 = f(B_1)$, поэтому прямая A_1B_1 переходит в прямую A_2B_2. При движении f сохраняется перпендикулярность прямой и плоскости, следовательно, плоскость α_1 переходит в плоскость, которая проходит через точку A_2 и перпендикулярна к прямой A_2B_2, т. е. $\alpha_2 = f(\alpha_1)$. Аналогично $\beta_2 = f(\beta_1)$, следовательно, расходящиеся плоскости α_1, β_1 переходят соответственно в расходящиеся плоскости α_2, β_2. ■

Задачи к главе 2

1. Три угла треугольника ABC соответственно равны трем углам треугольника $A_1B_1C_1$, причем плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ не совпадают. Доказать, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
2. Точка A не лежит на прямой CD. Доказать, что в плоскости ACD существует один и только один луч AB, параллельный лучу CD.
3. Доказать, что вырожденные треугольники ABU_∞ и $A_1B_1V_\infty$ равны, если выполняется хотя бы одно из условий: а) $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$; б) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.
4. Даны два прямоугольных вырожденных треугольника ABU_∞ и $A_1B_1V_\infty$, где углы A и A_1 прямые, расположенные в одной или разных полуплоскостях. Доказать, что $AB > A_1B_1$ тогда и только тогда, когда $\angle B < \angle B_1$.
5. Доказать, что при любом движении пространства образы параллельных прямых параллельны.
6. Доказать, что если движение пространства не имеет неподвижных точек, то оно имеет не более чем одну инвариантную прямую.
7. Доказать, что если $a \parallel b$ и $c \parallel d$ и плоскости этих прямых не совпадают, то существует движение, при котором прямые a и b переходят соответственно в прямые c и d.
8. Доказать, что если в пространстве два луча h и k параллельны лучу l, то $h \parallel k$.
9. Даны три прямые, каждые две из которых лежат в одной плоскости, но все три не расположены в одной плоскости. Доказать утверждение: а) если каждые две из данных прямых пересекаются, то эти прямые имеют общую точку; б) если две из данных прямых параллельны, то третья прямая параллельна каждой из них.

10. Одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость α. Следует ли отсюда, что и вторая прямая пересекает плоскость α? Ответ обосновать.
11. Точки A и B прямой AB лежат по одну сторону от плоскости α и равноудалены от этой плоскости. Доказать, что прямая AB расходится с плоскостью α.
12. Прямая a параллельна плоскости α. Доказать, что если b — произвольная прямая плоскости α, не принадлежащая пучку параллельных прямых, определяемому прямой a, то a и b — скрещивающиеся прямые.
13. Доказать, что расстояние от прямой до плоскости, с которой прямая расходится, меньше длины любого отрезка, отличного от общего перпендикуляра, один конец которого лежит на прямой, а другой конец — в плоскости.
14. Прямая a расходится с плоскостью α. Доказать, что любая плоскость, проходящая через прямую a и пересекающая плоскость α, пересекает ее по прямой, которая расходится с прямой a.
15. Прямая a расходится с плоскостью α. Доказать, что через каждую точку плоскости α в этой плоскости проходит одна и только одна прямая, которая расходится с прямой a, причем все эти прямые образуют пучок расходящихся прямых плоскости α.
16. Доказать, что любая прямая, которая проходит через вершину A конуса параллелей к плоскости α, пересекает плоскость α, если прямая проходит внутри конуса параллелей, и расходится с плоскостью α, если она проходит вне конуса параллелей.
17. Даны две плоскости α и β. Доказать, что через каждую точку плоскости α проходят не более чем две прямые, параллельные плоскости β.
18. Две плоскости α и β перпендикулярны к плоскости γ и пересекают ее по параллельным прямым. Доказать, что плоскости α и β параллельны.
19. Две плоскости α и β перпендикулярны к плоскости γ и пересекают ее по расходящимся прямым. Доказать, что α и β — расходящиеся плоскости.

20. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Доказать, что через каждую из этих прямых проходят две и только две плоскости, параллельные другой прямой.
21. Доказать, что расстояние между двумя расходящимися плоскостями меньше длины любого отрезка, отличного от общего перпендикуляра, концы которого лежат на данных плоскостях.
22. Доказать, что при движении пространства: а) сохраняется параллельность прямой и плоскости; б) параллельные плоскости переходят в параллельные плоскости.
23. Даны две параллельные плоскости. Доказать, что существуют прямые, каждая из которых перпендикулярна к одной из плоскостей и параллельна другой.
24. Две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью. Верно ли утверждение, что прямые, по которым они пересекаются, параллельны? Ответ обосновать.
25. Прямая a пересекает плоскость α в точке M и не перпендикулярна к ней. Доказать, что фигура, состоящая из проекций всех точек прямой a на плоскость α, есть интервал, серединой которого является точка M.
26. Даны две параллельные плоскости. Доказать, что существует одна и только одна плоскость, которая перпендикулярна к одной из данных плоскостей и параллельна другой.

Глава 3

ПРОСТЕЙШИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 10. Связки прямых в пространстве и их траектории

1. Связки прямых. В пространстве Лобачевского рассматривают три типа связок:

а) Связка пересекающихся прямых — множество всех прямых пространства, проходящих через одну точку, которая называется *центром связки*.

б) Связка расходящихся прямых — множество всех прямых пространства, перпендикулярных к одной плоскости, которая называется *базой связки*.

в) Связка параллельных прямых — множество направленных прямых пространства, состоящее из некоторой направленной прямой $\overline{AA_1}$ и всех направленных прямых, каждая из которых параллельна $\overline{AA_1}$. В этом случае говорят, что связка задана направленной прямой $\overline{AA_1}$.

Ясно, что связка пересекающихся прямых однозначно определяема заданием ее центра, связка расходящихся прямых — заданием ее базы, а связка параллельных прямых — заданием одной направленной прямой связки.

Отметим следующие очевидные свойства, которые читатель легко докажет самостоятельно.

10.1°. Через каждую точку пространства, отличную от центра связки пересекающихся прямых, проходит одна и только одна прямая связки.

Будем говорить, что плоскость принадлежит связке, если в ней лежит хотя бы одна прямая связки.

10.2°. Если плоскость α принадлежит связке, то каждая прямая связки, проходящая через произвольную точку плоскости, лежит в этой плоскости и множество всех этих прямых образует пучок прямых того же наименования, что и сама связка.

Отсюда непосредственно следует, что если какая-нибудь прямая связки пересекает плоскость α, то плоскость α не принадлежит связке.

Справедлива следующая лемма:

Лемма. *Любые две прямые связки лежат в одной плоскости. Каковы бы ни были две прямые пространства, лежащие в одной плоскости, существует одна и только одна связка, которой они принадлежат.*

□ Первое утверждение леммы очевидно для связок пересекающихся и параллельных прямых, а для случая связки расходящихся прямых читатель легко докажет самостоятельно (см. гл. I, задача 9).

Докажем второе утверждение леммы для случая расходящихся прямых. Случаи, когда прямые пересекаются или параллельны, рассмотрите самостоятельно.

Пусть прямые a и b связки расходятся. Пусть l — прямая, содержащая их общий перпендикуляр AB, $A \in a$, $B \in b$ (рис. 16). Через прямую l проведем две плоскости — α, содержащую прямую a, и β, перпендикулярную к a. Тогда по свойству 3.2 $b \perp \beta$. Таким образом, прямые a и b принадлежат связке P расходящихся прямых с базой β.

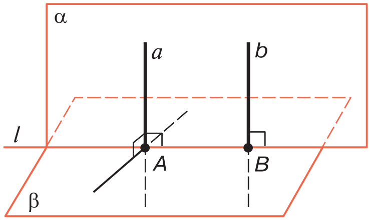


Рис. 16

Пусть P' — какая-то связка, которой принадлежат прямые a и b. Очевидно, P' — связка расходящихся прямых с некоторой базой β'. Отрезок, соединяющий точки пересечения прямых a и b с плоскостью β', является общим перпендикуляром этих прямых, поэтому он совпадает с отрезком AB. Следовательно, $A \in \beta'$, $B \in \beta'$, поэтому плоскости β' и β совпадают, так как $\beta' \perp a$, $\beta \perp a$, $A \in \beta'$, $A \in \beta$. Таким образом, связки P и P' совпадают. ■

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 1. *Если плоскость не принадлежит связке параллельных прямых, то существует одна и только одна прямая этой связки, которая пересекает плоскость под прямым углом.*

□ Докажем сначала, что существует прямая данной связки Ω, перпендикулярная к данной плоскости α. Для этого через какую-нибудь точку A плоскости α проведем направленную прямую $\overline{AA'}$ связки (см. свойство 10.1°). По условию теоремы прямая $\overline{AA'}$ пересекает плоскость α. Пусть $A'H$ — перпендикуляр к плоскости α. Если точки H и A совпадают, то $\overline{AA'}$ — искомая прямая, поэтому рассмотрим случай, когда A и H — различные точки (рис. 17). На луче AH отложим отрезок AB, которому соответствует острый угол $\widehat{A'AH}$ параллельности, и через точку B проведем прямую $BB' \perp \alpha$, где точка B' выбрана так, что $A', B' \doteq \alpha$. Так как плоскость $AA'H$ перпендикулярна к плоскости α, то по свойству 3.2° прямая BB' лежит в плоскости $AA'H$. Отсюда следует, что $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$, т. е. $\overline{BB'}$ — искомая прямая.

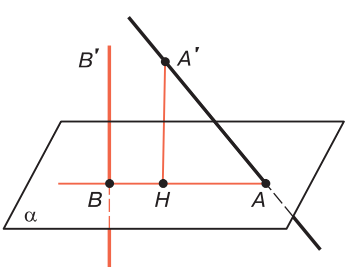


Рис. 17

В связке Ω параллельных прямых существует только одна прямая, которая перпендикулярна к плоскости α. В самом деле, прямые, перпендикулярные к плоскости α, имеют общий перпендикуляр, поэтому являются расходящимися прямыми. ■

Если плоскость α не принадлежит связке параллельных прямых, то точка пересечения прямой связки, перпендикулярной к плоскости α, называется *центральной точкой плоскости* α относительно данной связки. Плоскость, принадлежащая связке, не имеет центральной точки.

2. Соответствующие точки на прямых связки. По аналогии с понятием соответствующих точек на прямых пучка (см. ч. I, § 19) введем понятие соответствующих точек на прямых связки. Точку пространства, в котором задана связка Ω, назовем *обыкновенной точкой*, если она не совпадает с центром связки (в случае связки пересекающихся прямых) и не лежит на базе связки (в случае связки расходящихся прямых). Точку, не являющуюся обыкновенной, назовем *особой*.

Две обыкновенные точки называются *соответствующими* друг другу относительно данной связки, если они симметричны относительно некоторой прямой этой связки. Читатель, пользуясь свойствами равнобедренного треугольника и четырехугольника Саккери, легко докажет самостоятельно следующие два утверждения, выражающие признаки соответствующих точек на прямых связок пересекающихся и расходящихся прямых.

10.3°. Две точки A и B соответствуют друг другу относительно связки пересекающихся прямых с центром O тогда и только тогда, когда $OA = OB$.

10.4°. Две точки A и B соответствуют друг другу относительно связки расходящихся прямых с базой α тогда и только тогда, когда $A, B \doteq \alpha$ и $AA_1 = BB_1$, где AA_1 и BB_1 — перпендикуляры, проведенные к плоскости α.

Докажем важную теорему о транзитивности понятия соответствующих точек. Эта теорема является обобщением леммы (см. ч. I, § 19) на случай трехмерного пространства.

Теорема 2. *Если две точки A и B соответствуют точке C относительно данной связки, то точки A,*

B и C не лежат на одной прямой и точки A и B соответствуют друг другу относительно той же связки.

□ Пусть AA', BB' и CC' — прямые данной связки Ω, проходящие через точки A, B и C. Если эти прямые лежат в одной плоскости, то эта плоскость принадлежит связке и по свойству 10.2° они принадлежат одному пучку того же наименования, что и связка Ω, поэтому в этом случае утверждение теоремы непосредственно следует из леммы (см. ч. I, § 19).

Докажем теорему для случая, когда прямые AA', BB' и CC' не лежат в одной плоскости. В этом случае, очевидно, точки A, B и C не лежат на одной прямой, так как в противном случае прямые AA', BB' и CC' лежали бы в одной плоскости. Ясно, что плоскость ABC не принадлежит связке Ω.

Докажем, что точки A и B соответствуют друг другу относительно связки Ω. Если Ω — связка пересекающихся прямых или расходящихся прямых, то это утверждение непосредственно следует из свойств 10.3° и 10.4°. Рассмотрим случай, когда Ω — связка параллельных прямых и $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ и $\overline{CC'}$ — данные направленные прямые*.

Обозначим через O центральную точку плоскости ABC относительно связки Ω, а через OO' направленную прямую связки. Тогда $\overline{OO'} \perp ABC$. Очевидно, точки A', B', C', O' лежат по одну сторону от плоскости ABC.

Так как точки A и C, а также точки B и C соответствуют друг другу, то $\angle A'AC = \angle C'CA$, $\angle B'BC = \angle C'CB$ и эти углы острые. Отсюда, учитывая, что $OO' \perp ABC$, мы заключаем, что точка O не совпадает ни с одной из точек A, B и C. Докажем теорему, предположив, что точка O не лежит на прямых, содержащих стороны треугольника ABC. Пусть OA_1, OB_1 и OC_1 — перпендикуляры к прямым BC, CA и AB (рис. 18). По лемме § 6 плоскости $O'OA_1$ и $B'BC$ пересекаются по некоторой прямой $\overline{A_1A_1'}$, проходящей через точку

* Приведенное здесь доказательство теоремы для случая пучка параллельных прямых принадлежит Н. И. Лобачевскому.

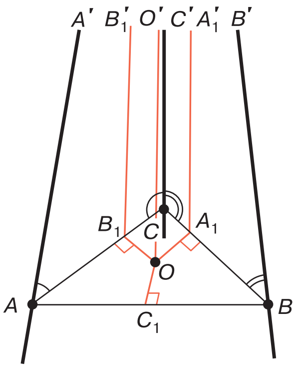


Рис. 18

A_1 и параллельной прямым $\overline{OO'}$ и $\overline{BB'}$. Отсюда следует, что $\overline{A_1A_1'}$ — прямая связки Ω. Кроме того, так как $OO' \perp ABC$, то $ABC \perp O'OA_1$. С другой стороны, $BA_1 \perp OA_1$, следовательно, $BA_1 \perp O'OA_1$. Отсюда мы заключаем, что $A_1A_1' \perp BC$, поэтому $\widehat{B'BA_1} = \Pi(BA_1)$, $\widehat{C'CA_1} = \Pi(CA_1)$ и в силу равенства углов $B'BA_1$ и $C'CA_1$ имеем: $BA_1 = CA_1$, т. е. A_1 — середина отрезка BC и, следовательно, A_1O — серединный перпендикуляр к отрезку BC. Точно так же доказывается, что OB_1 — серединный перпендикуляр к отрезку AC. По теореме 2 (см. ч. I, § 18) OC_1 — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Если C_1C_1' — прямая, по которой пересекаются плоскости $O'OC_1$ и $A'AB$, то по аналогии с предыдущим $\overline{C_1C_1'} \parallel \overline{AA'}$, $\overline{C_1C_1'} \parallel \overline{BB'}$ и $C_1C_1' \perp AB$. Таким образом, $\widehat{A'AC_1} = \Pi(AC_1)$, $\widehat{B'BC_1} = \Pi(BC_1)$, поэтому $\angle A'AC_1 = \angle B'BC_1$, значит, A и B — соответствующие точки.

Если точка O лежит на одной из прямых, содержащих стороны треугольника ABC, то доказательство теоремы проводится по той же схеме, причем в этом случае ход рассуждений несколько упрощается. Предоставляем читателю самостоятельно рассмотреть этот случай. ■

Следствие. *Если на трех прямых $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ связки параллельных прямых, не лежащих в одной плоскости, точки A, B и C попарно соответствуют друг другу, то эти точки лежат на одной окружности, центром которой является центральная точка плоскости ABC относительно связки.*

Это утверждение следует из доказательства этой теоремы и теоремы 1 (см. ч. I, § 26).

3. Траектории связки. По аналогии с понятием траектории пучка прямых на плоскости введем понятие траектории связки прямых в пространстве. Пусть L_0 —

множество всех обыкновенных точек пространства Лобачевского, в котором задана связка Ω. Во множестве L_0 точек введем бинарное отношение Δ следующим образом. Если $X \in L_0$, $Y \in L_0$, то будем считать, что $X\Delta Y$, если либо точки X и Y совпадают, либо они соответствуют друг другу относительно связки Ω. Учитывая теорему 2, так же как и в случае пучков прямых, легко доказать, что отношение Δ является отношением эквивалентности. Обозначим через L_0/Δ фактор-множество, элементами которого являются классы эквивалентности бинарного отношения Δ. Фигура, состоящая из всех точек каждого класса эквивалентности, т. е. каждого элемента фактор-множества L_0/Δ, называется *траекторией связки* Ω. Из этого определения следует, что траектория связки Ω, проходящая через точку A, состоит из точки A и тех и только тех точек X множества L_0, каждая из которых соответствует точке A относительно связки Ω. Это утверждение является конструктивным определением траектории данной связки, проходящей через точку A.

Если γ — траектория связки P, то каждая прямая связки P называется *осью траектории* γ.

Теорема 3. *Сечение траектории связки P плоскостью, проходящей через ось траектории, есть циклическая линия: окружность, если P — связка пересекающихся прямых, эквидистанта, если P — связка расходящихся прямых, и орицикл, если P — связка параллельных прямых.*

□ Пусть плоскость α проходит через ось a траектории ω связки P. Плоскость α принадлежит связке, поэтому согласно свойству 10.2° множество всех прямых связки P, принадлежащих плоскости α, образует пучок P_0 прямых того же наименования, что и сама связка P. Пусть γ — сечение траектории связки P плоскостью α. Так как $\gamma \subset \omega$, то любые две точки линии γ соответствуют друг другу относительно связки P, поэтому они соответствуют друг другу и относительно пучка P_0. Таким образом, γ — траектория пучка P_0. Если P — связка пересекающихся прямых, то P_0 — пучок пересекающихся прямых, поэтому по теореме 1 (см. ч. I, § 19)

γ — окружность. Аналогично если P — связка расходящихся прямых, то P_0 — пучок расходящихся прямых и по теореме 1 (см. ч. I, § 22) γ — эквидистанта. Если, наконец, P — связка параллельных прямых, то P_0 — пучок параллельных прямых и по теореме 1 (см. ч. I, § 23) γ — орицикл. ■

Из этой теоремы и соответствующих свойств циклических линий следует ряд утверждений о свойствах траекторий связок в пространстве. Траектория любого пучка прямых симметрична относительно каждой своей оси, следовательно, имеет место утверждение:

Следствие. *Траектория связки прямых симметрична относительно каждой своей оси.*

Из доказанной теоремы и свойства 19.1° (см. ч. I, § 19) следует утверждение:

10.5°. Каждая ось траектории связки пересекающихся прямых пересекает траекторию связки в двух и только в двух точках, а каждая ось траектории связки расходящихся или параллельных прямых — в одной и только в одной точке.

Из этого свойства следует, что каждая траектория связки содержит бесконечное множество точек и что траекторию связки можно рассматривать как некоторую поверхность, расположенную в пространстве.

10.6°. Траектория связки прямых симметрична относительно каждой плоскости, проходящей через некоторую ее ось.

□ Пусть α — плоскость, проходящая через некоторую ось траектории ω связки P. Возьмем произвольную точку $M \in \omega$ и докажем, что точка M', симметричная точке M относительно плоскости α, принадлежит ω. Если $M \in \alpha$, то точки M и M' совпадают, поэтому $M' \in \alpha$. Рассмотрим случай, когда $M \notin \alpha$. Прямая MM' перпендикулярна к плоскости α и пересекает ее в середине H отрезка MM' (рис. 19). По условию плоскость α принадлежит связке P, поэтому по свойству 10.2° прямая a связки P (т. е. ось траектории ω), проходящая через точку H, лежит в плоскости α. Так как $MM' \perp \alpha$,

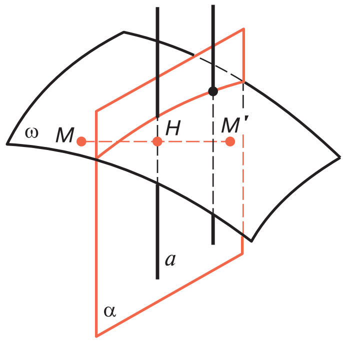


Рис. 19

то $MM' \perp a$, следовательно, точки M и M' симметричны относительно прямой a. По следствию теоремы 3 $M' \in \omega$. Итак, траектория ω симметрична относительно плоскости α. ■

Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятие геодезической линии поверхности, в частности геодезической линии траектории пучка. Линией *на данной поверхности* будем называть любую линию, все точки которой принадлежат поверхности. *Геодезической линией поверхности* мы называем такую линию на поверхности, каждая достаточно малая дуга AB которой короче всякой другой дуги на поверхности с теми же концами A и B. Например, геодезическими линиями плоскости являются, очевидно, прямые линии. Геодезическими линиями сферы являются окружности больших кругов, так как дуга большого круга, меньшая полуокружности, короче всякой другой дуги на сфере с теми же концами.

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого мы опускаем.

10.7°. Линия на траектории связки прямых есть геодезическая линия тогда и только тогда, когда эта линия является сечением траектории плоскостью, проходящей через любую ось траектории.

§ 11. Сфера

1. Сфера и шар. *Сферой с центром O радиуса r* называется фигура, состоящая из всех точек пространства, каждая из которых отстоит от точки O на расстоянии r. Любой отрезок, соединяющий центр сферы с какой-нибудь ее точкой, также называется *радиусом сферы*. Многие свойства сферы, известные читателю из курса стереометрии средней школы, относятся к абсолютной геометрии, следовательно, этими свойствами обладают и сферы в пространстве Лобачевского.

С каждой сферой связана некоторая связка пересекающихся прямых, центр которой совпадает с центром сферы. Любая прямая этой связки пересекает сферу в двух точках, симметричных относительно центра сферы. Отрезок, соединяющий эти две точки, называется *диаметром сферы*. Все диаметры сферы равны друг другу и их длины равны $2r$, где r — радиус сферы.

Справедлива следующая теорема, доказательство которой проведите самостоятельно.

Теорема 1. *Траектория связки пересекающихся прямых есть сфера.* Обратно: *любая сфера есть траектория связки пересекающихся прямых с центром в центре сферы.*

Из этой теоремы следует, что сфера обладает всеми свойствами траекторий связок пересекающихся прямых, которые были рассмотрены в § 10. Из теоремы 3 § 10 следует:

11.1°. Сечение сферы радиуса r плоскостью, проходящей через центр O сферы, есть окружность с центром O радиуса r.

Из следствия теоремы 3 и свойства 10.6° непосредственно следует:

11.2°. Сфера симметрична относительно каждой прямой и каждой плоскости, проходящей через ее центр.

Точка M пространства называется *внутренней точкой относительно сферы*, если она совпадает с центром O сферы или если $OM < r$, где r — радиус сферы. Точка N называется *внешней точкой относительно* *сферы*, если $ON > r$. Множество всех внутренних точек относительно сферы называется *внутренней областью*, а множество всех внешних точек — *внешней областью* относительно сферы.

Фигура, состоящая из всех точек сферы с центром O радиуса r и всех внутренних точек относительно этой сферы, называется *шаром с центром O радиуса r*. Сама сфера называется *поверхностью шара*.

2. Пересечение сферы с прямой и с плоскостью, пересечение двух сфер. Предлагаем читателю самостоятельно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть d — расстояние от центра O сферы радиуса r до прямой l. Тогда если $O \in l$ или если $d < r$, то прямая и сфера пересекаются в двух точках; если $d = r$, то прямая l имеет со сферой только одну общую точку; а если $r > d$, то прямая l не имеет ни одной общей точки со сферой.*

Рассмотрим теперь теорему о взаимном расположении сферы и плоскости. Она является теоремой абсолютной геометрии, поэтому имеет место и в евклидовой геометрии. Ее доказательство также проведите самостоятельно.

Теорема 3. *Пусть d — расстояние от центра O сферы радиуса r до плоскости α. Тогда если $O \in \alpha$ или $d < r$, то плоскость α и сфера пересекаются по окружности, центр которой есть проекция точки O на плоскость α; если $d = r$, то плоскость α имеет со сферой только одну общую точку; а если $d > r$, то плоскость α не имеет ни одной общей точки со сферой.*

Сформулируем еще одну теорему о пересечении двух сфер, которую предлагаем читателю доказать самостоятельно, воспользовавшись теоремой 2 (см. ч. I, § 21) и теоремой о пересечении двух окружностей.

Теорема 4. *Если расстояние между центрами O_1 и O_2 двух сфер меньше суммы радиусов, но больше абсолютной величины их разности, то сферы пересекаются по окружности, центр которой лежит на* *прямой O_1O_2, а плоскость этой окружности перпендикулярна к этой прямой.*

3. Касательная прямая и касательная плоскость к сфере. Прямая, которая имеет со сферой только одну общую точку, называется *касательной* к сфере, а эта точка — *точкой касания.*

11.3°. Прямая является касательной к сфере тогда и только тогда, когда она проходит через точку сферы и перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку.

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из теоремы 2.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется *касательной плоскостью* к сфере, а эта точка — *точкой касания.*

Теорема 5. *Плоскость является касательной к сфере тогда и только тогда, когда она проходит через точку сферы и перпендикулярна к радиусу, проведенному в эту точку.*

Доказательство теоремы легко следует из теоремы 3.

Следствие. *Через каждую точку сферы проходит одна и только одна плоскость, касательная к сфере.*

Читатель, пользуясь утверждением 11.3° и теоремой 5, без труда самостоятельно докажет следующее утверждение.

11.4°. Множество всех прямых, каждая из которых является касательной к сфере в данной точке A, есть пучок прямых с центром в точке A, плоскостью которого является касательная плоскость к сфере в точке A.

4. Равенство двух сфер. Согласно общему определению равенства фигур две сферы называются *равными*, если существует движение, при котором одна сфера переходит в другую.

Для доказательства теоремы о равенстве двух сфер необходимо доказать следующую лемму.

Лемма. *При данном движении f пространства сфера ω с центром O радиуса r переходит в сферу ω' с центром O' того же радиуса r, где $O' = f(O)$.*

□ Пусть M — произвольная точка сферы ω, а $M' = f(M)$. Так как $O'M' = OM = r$, то $M' \in \omega'$. Обратно: пусть N' — произвольная точка сферы ω', а N — прообраз этой точки. Тогда $O'N' = ON = r$, поэтому $N \in \omega$. Таким образом, $\omega' = f(\omega)$. ■

Теорема 6. *Две сферы равны тогда и только тогда, когда равны их радиусы.*

□ Пусть ω_1 и ω_2 — данные сферы. Если они равны, то существует движение, при котором сфера ω_1 переходит в сферу ω_2. По предыдущей лемме радиусы сфер ω_1 и ω_2 равны.

Предположим теперь, что радиусы данных сфер ω_1 и ω_2 равны. Обозначим через O_1 и O_2 их центры и возьмем произвольные точки $A_1 \in \omega_1$ и $A_2 \in \omega_2$. Тогда $O_1A_1 = O_2A_2$. По следствию теоремы § 4 существует движение f, при котором луч O_1A_1 переходит в луч O_2A_2. Ясно, что $O_2 = f(O_1)$, и так как $O_1A_1 = O_2A_2$, то $A_2 = f(A_1)$. По предыдущей лемме $\omega_2 = f(\omega_1)$, т. е. сферы ω_1 и ω_2 равны. ■

Таким образом, из вышеизложенного можно заключить, что основные свойства сфер в пространстве Лобачевского не отличаются от их свойств в евклидовом пространстве. Однако отметим, что не все теоремы о сферах евклидова пространства верны в пространстве Лобачевского. В качестве примера рассмотрим хорошо известную теорему евклидовой геометрии о задании сферы четырьмя точками общего положения: через четыре точки, не лежащие в одной плоскости, проходит одна и только одна сфера (см. [3], § 23). Эта теорема неверна в пространстве Лобачевского, в чем легко убедиться на следующем примере. Возьмем в некоторой плоскости α пространства Лобачевского три точки A, B и C, лежащие на эквидистанте или на орицикле, и произвольную точку D, не лежащую в этой плоскости. Легко видеть, что через точки A, B, C и D не проходит ни одна сфера. В самом деле, предположим, что такая сфера существует. Так как плоскость α имеет со сферой более чем одну общую точку, то согласно теореме 3 плоскость α и сфера пересекаются по окружности, т. е. точки A, B и C лежат на одной окружности. Но это противоречит следствию из теоремы 2 (см. ч. I, § 20), согласно этой теореме через точки A, B и C нельзя провести окружность.

Из приведенного примера следует еще один интересный вывод. Известно, что в евклидовом пространстве через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит бесконечное множество сфер. В пространстве Лобачевского это утверждение неверно: через точки A, B и C не проходит ни одна сфера.

Отметим также, что практически все вычислительные формулы, связанные со сферами, которыми мы широко пользуемся в евклидовой геометрии, в частности формулы для вычисления площади сферы и ее частей, объема сферы, неверны в пространстве Лобачевского.

§ 12. Эквидистантная поверхность

1. Эквидистантная поверхность. Фигура, состоящая из всех точек некоторого полупространства, равноудаленных от его границы, называется *эквидистантной поверхностью* или *гиперсферой*. Граница полупространства называется *базой*, а само полупространство — полупространством этой поверхности. Перпендикуляр, подведенный из любой точки поверхности к базе, называется *высотой* эквидистантной поверхности. Длина этого перпендикуляра также называется высотой поверхности.

С каждой эквидистантной поверхностью связана связка расходящихся прямых с базой, совпадающей с базой поверхности. Прямые этой связки называются *осями* эквидистантной поверхности. Ясно, что любая ось эквидистантной поверхности пересекает ее в одной точке.

Доказательство следующей теоремы легко следует из свойства 10.4°.

Теорема 1. *Траектория связки расходящихся прямых есть эквидистантная поверхность.* Обратно:

любая эквидистантная поверхность есть траектория связки расходящихся прямых с базой, совпадающей с базой поверхности.

Из этой теоремы следует, что эквидистантная поверхность обладает всеми свойствами траекторий связок расходящихся прямых, которые были рассмотрены в § 10. Из теоремы 3 § 10 следует:

12.1°. Сечение эквидистантной поверхности с высотой h плоскостью σ, перпендикулярной к базе α, есть эквидистанта с высотой h, базой которой является прямая, по которой пересекаются плоскости σ и α.

Из следствия теоремы 3 § 10 и свойства 10.6° непосредственно следует:

12.2°. Эквидистантная поверхность симметрична относительно каждой своей оси и каждой плоскости, перпендикулярной к базе.

2. Пересечение эквидистантной поверхности с прямой и плоскостью. Докажем теорему о пересечении эквидистантной поверхности с прямой.

Теорема 2. *Любая прямая l, которая пересекает базу α эквидистантной поверхности или параллельна базе и расположена в полупространстве поверхности, имеет одну и только одну общую точку с поверхностью.*

Прямая, которая расположена в полупространстве эквидистантной поверхности с высотой h и расходится с базой α, пересекает поверхность в двух точках, если $d < h$; имеет с поверхностью только одну общую точку, если $d = h$; и не имеет ни одной общей точки, если $d > h$. Здесь d — расстояние от данной прямой до плоскости α.

□ Через данную прямую l проведем плоскость σ, перпендикулярную к плоскости α (см. § 3, теорема 3). По свойству 12.1° плоскость σ пересекает эквидистантную поверхность по эквидистанте γ с высотой, равной высоте эквидистантной поверхности, базой которой является прямая m, по которой пересекаются плоскости σ и α.

Так как $l \subset \sigma$, то все общие точки прямой l и данной поверхности, если они существуют, совпадают с точками пересечения прямой l и эквидистанты γ.

Пусть прямая l пересекает плоскость α или параллельна ей. Тогда прямая l пересекает прямую m или параллельна ей и в этом случае утверждение теоремы следует из теоремы 3 (см. ч. I, § 22).

Пусть теперь прямая l расходится с плоскостью α. Ясно, что прямые l и m расходятся и расстояние между ними равно d. В этом случае утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 2 (см. ч. I, § 22). ■

Докажем теперь две теоремы о пересечении эквидистантной поверхности плоскостью.

Теорема 3. *Сечение эквидистантной поверхности с базой α плоскостью σ есть:* а) *эквидистанта с базой m, если плоскость σ пересекает плоскость α по прямой m;* б) *орицикл, если плоскость σ параллельна плоскости α и расположена в полупространстве эквидистантной поверхности.*

□ а) Если $\sigma \perp \alpha$, то теорема следует из свойства 12.1°. Рассмотрим случай, когда $\sigma \not\perp \alpha$. В плоскости σ через произвольную точку A_1 прямой m проведем прямую a, перпендикулярную к прямой m. По теореме 2 прямая a пересекает эквидистантную поверхность в некоторой точке A. Рассмотрим эквидистанту γ_A плоскости σ с базой m и докажем, что данная поверхность пересекается с плоскостью σ по эквидистанте γ_A.

Пусть M — некоторая точка поверхности, лежащая в плоскости σ, а MM_1 и MM_2 — перпендикуляры к прямой m и к плоскости α, а AA_2 — перпендикуляр к плоскости α (рис. 20). Тогда $AA_2 = MM_2$, так как M — точка эквидистантной поверхности. Углы AA_1A_2 и MM_1M_2 — линейные углы двугранного угла с ребром m, грани которого принадлежат плоскостям σ и α, поэтому $\angle AA_1A_2 = \angle MM_1M_2$. Прямоугольные треугольники AA_2A_1 и MM_2M_1 равны по катету и противолежащему углу, поэтому $AA_1 = MM_1$, т. е. $M \in \gamma_A$.

Обратно: пусть M — произвольная точка эквидистанты γ_A, а MM_1 — перпендикуляр к прямой m (см. рис. 20).

Проведем перпендикуляр MM_2 к плоскости α. Так как $AA_1 = MM_1$, то прямоугольные треугольники AA_2A_1 и MM_2M_1 равны по гипотенузе и острому углу, поэтому $AA_2 = MM_2$, т. е. M — точка эквидистантной поверхности.

б) Согласно теореме 1 § 8 в плоскости σ существует пучок Ω параллельных прямых, каждая из которых параллельна плоскости α. Возьмем одну из этих прямых и обозначим через A точку пересечения этой прямой с эквидистантной поверхностью (см. теорему 2). Рассмотрим орицикл γ_A плоскости σ, заданный лучом AA_1, где $\overline{AA_1}$ — прямая пучка Ω, и докажем, что данная поверхность пересекается с плоскостью σ по орициклу γ_A.

Пусть M — некоторая точка поверхности, лежащая в плоскости σ, MM_2 — перпендикуляр к плоскости α, а $\overline{MM_1}$ — прямая пучка Ω (рис. 21). Точки A, A_2, M_2, M лежат в одной плоскости, перпендикулярной к плоскости α, поэтому AMM_2A_2 — двупрямоугольник с прямыми углами A_2 и M_2, а так как $AA_2 = MM_2$, то AMM_2A_2 — четырехугольник Саккери с основанием A_2M_2. По свойству 13.2° ч. I прямая BB_2, проходящая через середины B и B_2 отрезков AM и A_2M_2, перпендикулярна к этим отрезкам. Прямая BB_1 плоскости σ, перпендикулярная к отрезку AM, не пересекает прямые AA_1 и MM_1, поэтому по лемме из § 10 ч. I $\overline{BB_1} \parallel \overline{AA_1}$ т. е. $\overline{BB_1} \in \Omega$.

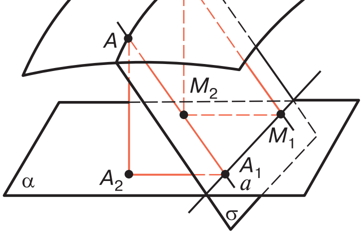


Рис. 20

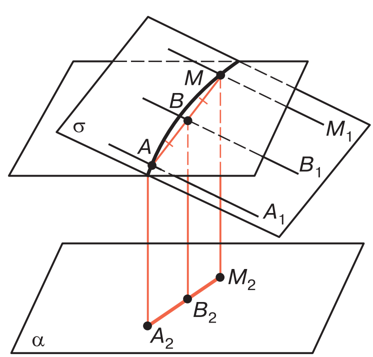


Рис. 21

Плоскость B_2BB_1 перпендикулярна к прямой AM, поэтому точки A и M симметричны относительно этой плоскости и, следовательно, относительно прямой BB_1. Отсюда по определению орицикла $M \in \gamma_A$.

Обратно: пусть M — произвольная точка орицикла γ_A. Проведем перпендикуляр MM_2 к плоскости α и ось MM_1 орицикла и докажем, что $MM_2 = AA_2$ (см. рис. 21). Допустим, что это не так. Тогда ось MM_1 пересекает поверхность в некоторой точке N, отличной от M. По доказанному выше $N \in \gamma_A$, что невозможно, так как прямая MM_1 пересекает орицикл только в одной точке. Итак, $MM_2 = AA_2$, т. е. M — точка эквидистантной поверхности. ■

Теорема 4. *Пусть плоскость σ расходится с базой α эквидистантной поверхности с высотой h, расположенной в полупространстве поверхности, и расстояние между плоскостями σ и α равно d. Тогда если $d < h$, то плоскость σ и эквидистантная поверхность пересекаются по окружности с центром в точке пересечения общего перпендикуляра к плоскостям σ и α с плоскостью σ; если $d = h$, то плоскость σ имеет с поверхностью только одну общую точку; а если $d > h$, то плоскость σ не имеет с поверхностью ни одной общей точки.*

□ Проведем общий перпендикуляр HH_1 к плоскостям σ и α, где $H \in \sigma$. Ясно, что $HH_1 = d$.

а) $d < h$. В плоскости σ через точку H проведем какую-нибудь прямую a. По свойству 9.4° эта прямая расходится с плоскостью α. Расстояние от прямой a до плоскости α равно d, поэтому по теореме 2 прямая a имеет с эквидистантной поверхностью две общие точки, одну из которых обозначим через A. Проведем перпендикуляр AA_1 к плоскости α. Рассмотрим окружность γ с центром H радиуса HA (рис. 22) и докажем, что плоскость σ и эквидистантная поверхность пересекаются по окружности γ. Пусть M — произвольная точка окружности γ, а MM_1 — перпендикуляр к плоскости α. По теореме 2 (см. ч. I, § 28) трипрямоугольники M_1H_1HM

и A_1H_1HA равны, следовательно, $MM_1 = AA_1$, т. е. M — точка данной эквидистантной поверхности.

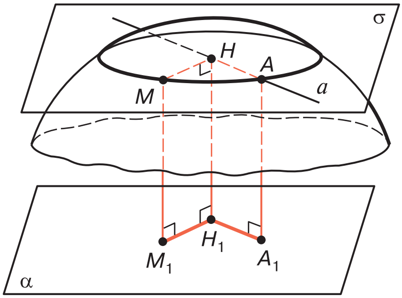


Рис. 22

Обратно: пусть некоторая точка N данной эквидистантной поверхности лежит в плоскости σ. Тогда $AA_1 = NN_1$, где NN_1 — перпендикуляр к плоскости α. В трипрямоугольниках N_1H_1HN и A_1H_1HA сторона HH_1 общая, а $NN_1 = AA_1$, поэтому они равны, следовательно, $N \in \gamma$. Ясно, что данная поверхность не имеет с плоскостью σ других общих точек, кроме точек окружности γ.

б) $d = h$. В этом случае $HH_1 = h$, поэтому H — точка данной поверхности. Если X — произвольная точка плоскости σ, отличная от точки X, то по теореме 1 § 9 расстояние от точки X до плоскости α больше h, поэтому точка X не принадлежит эквидистантной поверхности.

в) $d > h$. В этом случае $HH_1 > h$, поэтому если X — произвольная точка плоскости σ, а XX_1 — перпендикуляр к плоскости α, то $XX_1 \geqslant HH_1 = d > h$. Следовательно, точка не принадлежит данной поверхности, т. е. плоскость σ и поверхность не имеют ни одной общей точки. ■

3. Касательная плоскость к эквидистантной поверхности. Плоскость, имеющая с эквидистантной поверхностью только одну общую точку, называется *касательной плоскостью к поверхности*, а эта точка — *точкой касания*.

Теорема 5. *Плоскость является касательной к эквидистантной поверхности тогда и только тогда, когда она проходит через точку поверхности и перпендикулярна к высоте, проведенной в эту точку.*

□ Обозначим через α базу, а через h высоту данной эквидистантной поверхности.

Пусть σ — касательная плоскость. Плоскости α и σ расходятся, поэтому имеют общий перпендикуляр HH_1. По теореме 4 $HH_1 = h$. Отсюда следует, что H — точка касания к плоскости σ с данной поверхностью и HH_1 — высота поверхности. Ясно, что $\sigma \perp HH_1$.

Обратно: пусть плоскость σ проходит через точку A данной поверхности, AA_1 — высота поверхности и $\sigma \perp AA_1$. Очевидно, AA_1 — общий перпендикуляр плоскостей α и σ. Так как $AA_1 = h$, то по теореме 4 плоскость σ и поверхность имеют только одну общую точку, т. е. σ — касательная плоскость к поверхности. ■

Следствие. *Через каждую точку эквидистантной поверхности проходит одна и только одна касательная плоскость к ней.*

4. Равенство эквидистантных поверхностей. Напомним, что две фигуры, в частности две эквидистантные поверхности, называются равными, если существует движение пространства, при котором одна фигура переходит в другую.

Задача о равенстве двух эквидистантных поверхностей решается точно так же, как и соответствующая задача для сфер (см. § 11, п. 4). Сначала следует доказать следующую лемму:

Лемма. *При данном движении f пространства эквидистантная поверхность с базой α и высотой h переходит в эквидистантную поверхность с базой $\alpha' = f(\alpha)$ и той же высотой h.*

Предлагаем читателю самостоятельно доказать эту лемму.

Пользуясь этой леммой, легко доказать теорему о равенстве двух эквидистантных поверхностей.

Теорема 6. *Две эквидистантные поверхности равны тогда и только тогда, когда равны их высоты.*

§ 13. Орисфера

1. Орисфера. *Орисферой* или *предельной поверхностью*, заданной лучом AA_1, называется фигура, состоящая из точки A и всех точек пространства, каждая из которых симметрична точке A относительно некоторой направленной прямой, параллельной прямой AA_1.

Орисфера играет существенную роль в дальнейшем изложении, поэтому настоящий и частично следующий параграфы посвящены изучению свойств этой поверхности. При изучении свойств орисферы мы широко будем пользоваться свойствами орицикла, которые изложены в § 23–24 ч. I.

С каждой орисферой, заданной лучом AA_1 связана связка параллельных прямых, заданная прямой $\overline{AA_1}$. Направленные прямые этой связки называются *осями орисферы*, а любая плоскость, принадлежащая связке, — *диаметральной плоскостью*.

Теорема 1. *Траектория связки параллельных прямых есть орисфера.* Обратно: *любая орисфера, заданная лучом AA_1, есть траектория связки параллельных прямых, которая задана прямой $\overline{AA_1}$.*

Доказательство теоремы непосредственно следует из определений орисферы и траектории связки параллельных прямых.

Из этой теоремы следует, что орисфера обладает всеми свойствами связок параллельных прямых, которые были рассмотрены в § 10. Каждая ось орисферы пересекает ее в одной точке, поэтому орисфера имеет бесконечное множество точек. Из каждой точки A орисферы γ исходит луч AA_1 где $\overline{AA_1}$ — ось орисферы, который будем называть *лучом орисферы* γ. Ясно, что орисфера может быть задана любым своим лучом.

Из теоремы 3 § 10 следует утверждение:

13.1°. Сечение орисферы диаметральной плоскостью есть орицикл.

Из следствия теоремы 3 § 10 и свойства 10.6° следует:

13.2°. Орисфера симметрична относительно каждой своей оси и каждой диаметральной плоскости.

По аналогии с орициклом точку пространства будем называть *внутренней точкой относительно орисферы*, если она лежит на каком-нибудь луче орисферы. Точка пространства, не являющаяся внутренней точкой и не лежащая на орисфере, называется *внешней точкой относительно орисферы*. Множество всех внутренних (внешних) точек относительно орисферы называется внутренней (внешней) областью относительно орисферы. Так же как и в случае орицикла (см. ч. I, § 23, теорема 4), можно доказать, что внутренняя область относительно орисферы является выпуклым открытым множеством, а внешняя область — открытым невыпуклым множеством.

2. Пересечение орисферы с прямой и плоскостью. Докажем теорему о пересечении орисферы с прямой.

Теорема 2. *Любая прямая пересекается с орисферой не более чем в двух точках, причем прямая пересекается с орисферой в двух точках тогда и только тогда, когда она проходит через некоторую внутреннюю точку относительно орисферы и не совпадает с осью.*

□ Первое утверждение докажем методом от противного, т. е. предположим, что какая-то прямая пересекается с орисферой более чем в двух точках. Обозначим три из них через A, B и C. Так как точки A и C, а также B и C соответствуют друг другу относительно связки осей орисферы, то по теореме 2 § 10 точки A, B и C не могут лежать на одной прямой.

Докажем теперь второе утверждение. Через данную прямую l проведем диаметральную плоскость σ. По свойству 13.1° сечение орисферы с плоскостью σ есть некоторый орицикл γ. Так как $l \subset \sigma$, то все общие точки прямой l и орисферы, если они существуют, совпадают с точками пересечения прямой l и орицикла γ. Отметим также, что точка M плоскости σ принадлежит внутренней области Ω относительно орисферы тогда и только тогда, когда M — внутренняя точка относительно орицикла γ.

Пусть точка M прямой l принадлежит внутренней области Ω. Если l — ось орисферы, то она пересекает орисферу только в одной точке, а если l не совпадает с осью орисферы, то по следствию 1 теоремы 2 (см. ч. I, § 24) прямая l пересекает орицикл γ в двух точках, следовательно, прямая l пересекает орисферу также в двух точках.

Обратно: пусть прямая l пересекает орисферу в двух точках A и B. Эти точки принадлежат орициклу γ, поэтому согласно лемме § 23 ч. I любая точка, лежащая на отрезке AB, является внутренней точкой относительно орицикла γ, следовательно, и относительно орисферы, т. е. прямая l проходит через внутреннюю точку орисферы. ■

Докажем теперь теорему о пересечении орисферы с плоскостью. Согласно свойству 13.1° любая диаметральная плоскость орисферы пересекает ее по орициклу.

Рассмотрим случай, когда данная плоскость не является диаметральной. В этом случае согласно теореме 1 § 10 на плоскости существует центральная точка относительно связки осей орицикла.

Теорема 3. *Если центральная точка A_0 плоскости σ, которая не является диаметральной относительно связки осей данной орисферы, является внутренней точкой относительно орисферы, то плоскость σ пересекает орисферу по окружности с центром A_0; если A_0 — внешняя точка относительно орисферы, то плоскость σ и орисфера не имеют общих точек.*

□ Пусть ω — данная орисфера, а AA_0 — луч орисферы, на котором лежит точка A_0. В плоскости σ через точку A_0 проведем произвольную прямую p (рис. 23, *а*). По теореме 2 прямая p пересекает орисферу ω в двух и только в двух точках. Таким образом, на каждой прямой пучка пересекающихся прямых с центром A_0 плоскости σ существуют две и только две точки орисферы. Отсюда следует, что плоскость σ пересекает орисферу ω по замкнутой линии L. Пусть M — какая-нибудь точка этой линии, а X — произвольная ее точка. По следствию теоремы 2 § 10 точка X лежит на окружности γ с центром A_0 радиуса AM. Обратно: если Y — произвольная точка этой окружности, то прямая A_0Y пересекает линию L в двух точках, лежащих на окружности γ, значит, одна из этих точек совпадает с точкой Y. Таким образом, линии L и γ совпадают.

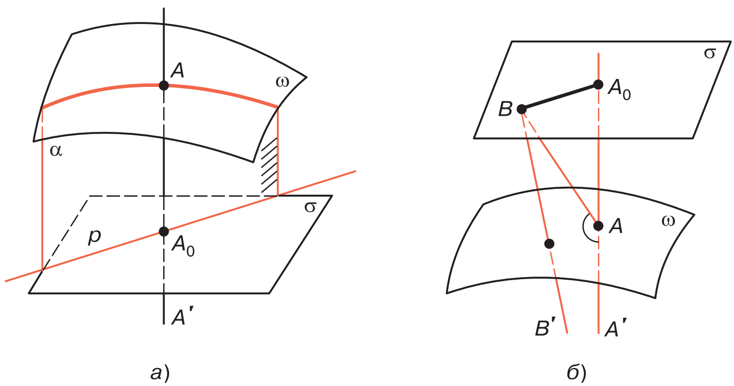


Рис. 23

Докажем второе утверждение. Обозначим через A_0A' ось данной орисферы ω, проходящей через точку A, где $A \in \omega$. Точка A_0 по условию лежит на продолжении луча AA'. Пусть B — произвольная точка плоскости σ, не совпадающая с точкой A_0, а BB' — ось орисферы (рис. 23, *б*). Угол BAA_0 острый как угол прямоугольного треугольника A_0BA с прямым углом A_0, поэтому $\angle BAA'$ тупой. Докажем, что угол $B'BA$ острый. В самом деле $\widehat{B'BA} < \widehat{B'BA_0} = \Pi(A_0B) < d$. Отсюда следует, что точки A и B не соответствуют друг другу относительно связки осей орисферы ω, следовательно, $B \notin \omega$. Таким образом, в этом случае плоскость σ и орисфера ω не имеют общих точек. ■

3. Касательная плоскость к орисфере. Плоскость, которая имеет с орисферой только одну общую точку, называется *касательной плоскостью к орисфере*, а эта точка — *точкой касания*.

Теорема 4. *Плоскость является касательной к орисфере тогда и только тогда, когда она не совпадает с диаметральной плоскостью и ее центральная точка относительно связки осей орисферы принадлежит орисфере.*

□ Пусть σ — касательная плоскость к данной орисфере ω. Из свойства 13.1° следует, что плоскость σ не совпадает с диаметральной плоскостью, поэтому на этой плоскости существует центральная точка A_0 относительно связки осей орисферы. Если предположить, что $A_0 \notin \omega$, то из предыдущей теоремы следует, что плоскость σ либо пересекается с орисферой по окружности, либо не имеет ни одной общей точки с ней. Но это невозможно, так как σ — касательная плоскость, следовательно, $A_0 \in \omega$.

Обратно: пусть $A_0 \in \omega$. Так как A_0 — центральная точка плоскости σ относительно связки осей орисферы ω, то ось $\overline{A_0A_1}$, проходящая через точку A_0, перпендикулярна к плоскости σ. Пусть M — произвольная точка плоскости σ, а $\overline{MM_1}$ — ось орисферы, проходящая через точку M. Докажем, что $M \notin \omega$. В самом деле, $\overline{A_0A_1} \parallel \overline{MM_1}$, поэтому $\angle A_0MM_1$ — угол параллельности, соответствующий отрезку A_0M, т. е. $\angle A_0MM_1$ острый. Но угол MA_0A_1 прямой, следовательно, точки A_0 и M не являются соответствующими точками относительно связки осей поверхности ω. Отсюда и следует, что $M \notin \omega$, т. е. на плоскости σ имеется только одна точка — точка A_0, принадлежащая орисфере ω. Таким образом, σ — касательная плоскость к ω. ■

Следствие. *Плоскость является касательной к орисфере тогда и только тогда, когда она проходит через точку орисферы и перпендикулярна к оси орисферы, которая проходит через эту точку.*

□ Пусть σ — касательная плоскость к орисфере ω в точке M_0. По доказанной теореме M_0 — центральная точка плоскости σ связки осей поверхности ω, поэтому $\sigma \perp \overline{M_0M_1}$, где $\overline{M_0M_1}$ — ось орисферы.

Обратно: если M_0 — произвольная точка орисферы ω, а σ — плоскость, проходящая через эту точку и перпендикулярная к оси M_0M_1 орисферы, то по определению M_0 — центральная точка плоскости σ относительно связки осей орицикла ω. По теореме 3 σ — касательная плоскость. ■

Предлагаем читателю решить следующую задачу:

Задача. В точке A орисферы проведена касательная плоскость σ. Доказать, что все точки орисферы, кроме точки A, лежат по ту же сторону от плоскости σ, что и луч AA' орисферы.

4. Возможные случаи взаимного расположения плоскости и орисферы. Итак, возможны четыре и только четыре случая взаимного расположения плоскости и орисферы:

а) Плоскость пересекает орисферу по орициклу.

б) Плоскость пересекает орисферу по окружности.

в) Плоскость является касательной к орисфере, т. е. имеет с ней только одну общую точку.

г) Плоскость не имеет с орисферой ни одной общей точки.

Докажем два утверждения, необходимые для дальнейшего изложения.

13.3°. Плоскость, проходящая через данную точку орисферы и не совпадающая ни с касательной плоскостью, ни с диаметральной плоскостью, пересекает орисферу по окружности.

□ Пусть M — данная точка орисферы, через которую проходит данная плоскость σ. По теореме 3 центральная точка A_0 этой плоскости относительно осей орисферы не совпадает с точкой M. Точка A_0 не может быть внешней точкой относительно орисферы, так как при этом предположении согласно теореме 3 $M \notin \sigma$. Следовательно, A_0 — внутренняя точка относительно орисферы, поэтому согласно теореме 3 плоскость σ пересекает орисферу по окружности. ■

13.4°. Если орицикл γ принадлежит данной орисфере, т. е. все его точки лежат на орисфере, то плоскость орицикла γ является диаметральной плоскостью орисферы.

□ Пусть σ — плоскость орицикла γ. Так как плоскость σ не пересекает орисферу по окружности, то по свойству 13.3° эта плоскость совпадает либо с касательной плоскостью к орисфере, либо с диаметральной плоскостью. Ясно, что первый случай невозможен, поэтому σ — диаметральная плоскость. ■

5. Равенство орисфер. Заметим, что при любом движении f связка параллельных прямых, заданная прямой $\overline{AA_1}$, переходит в связку параллельных прямых, заданную прямой $\overline{A'A'_1}$, где $A' = f(A)$, $A'_1 = f(A_1)$. Это утверждение можно доказать точно так же, как и теорему 1 (см. ч. I, § 18). Предлагаем читателю самостоятельно его доказать.

Лемма. *При движении f орисфера, заданная лучом AA_1, переходит в орисферу, заданную лучом $A'A'_1$, где $A' = f(A)$, $A'_1 = f(A_1)$.*

□ Обозначим через Ω связку осей данной орисферы ω, а через Ω' образ этой связки. По определению соответствующих точек относительно связки при движении f две соответствующие точки относительно связки Ω переходят в две соответствующие точки относительно связки Ω'. Отсюда мы заключим, что любая траектория связки Ω, которая задана прямой $\overline{AA_1}$, в частности ω, переходит в траекторию ω' связки, заданной прямой $\overline{A'A'_1}$. Таким образом, ω' — орисфера. Так как $A \in \omega$, то $A' \in \omega'$, т. е. орисфера ω' задана лучом $A'A'_1$. ■

Докажем теорему о равенстве орисфер, которая существенно отличается от соответствующих теорем о равенстве сфер или эквидистантных поверхностей.

Теорема 5. *Любые две орисферы равны.*

□ Пусть ω и ω' — произвольные орисферы, заданные лучами AA_1 и $A'A'_1$. Не нарушая общности, можно считать, что $AA_1 = A'A'_1$. По следствию из теоремы § 4 существует движение f, при котором луч AA_1 переходит в луч $A'A'_1$. Ясно, что $A' = f(A)$, $A'_1 = f(A_1)$. Согласно предыдущей лемме при движении f орисфера γ переходит в орисферу γ'. ■

Глава 4

ОРИЦИКЛ. ВНУТРЕННИЕ ГЕОМЕТРИИ ОРИСФЕРЫ И ЭКВИДИСТАНТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ 14. Длина дуги орицикла

1. Равенство орициклов. В § 24 части I было доказано, что на плоскости Лобачевского любые два орицикла равны друг другу. Докажем, что это утверждение верно для любых двух орициклов пространства независимо от того, расположены они в одной плоскости или в разных плоскостях.

Теорема 1. *Любые два орицикла пространства Лобачевского равны друг другу.*

□ Пусть γ_1 и γ_2 — произвольные орициклы, расположенные в плоскостях α_1 и α_2 и заданные лучами A_1B_1 и A_2B_2. Проведем лучи A_1C_1 и A_2C_2, принадлежащие касательным к данным орициклам, и обозначим через P_1 одно из полупространств с границей α_1, а через P_2 одно из полупространств с границей α_2 (рис. 24).

Так как углы $C_1A_1B_1$ и $C_2A_2B_2$ прямые, то они равны друг другу, и по аксиоме III_6^* существует движение f пространства, при котором луч $A_1B_1 \mapsto$ луч A_2B_2, луч $A_1C_1 \mapsto$ луч A_2C_2 и $P_1 \mapsto P_2$. Ясно, что при этом движении $\alpha_1 \mapsto \alpha_2$ и пучок параллельных прямых плоскости α_1, заданный прямой $\overline{A_1B_1}$ переходит в пучок параллельных прямых плоскости α_2, заданный прямой $\overline{A_2B_2}$. Поэтому орицикл γ_1 плоскости α_1 переходит в орицикл γ_1' плоскости α_2. Так как $A_2 = f(A_1)$ и луч $A_1B_1 \mapsto$ луч A_2B_2, то орицикл γ_1' проходит через точку A_2 и луч A_2B_2 является лучом этого орицикла. Отсюда следует, что орициклы γ_1' и γ_2 совпадают, поэтому $\gamma_2 = f(\gamma_1)$. Таким образом, $\gamma_1 = \gamma_2$. ■

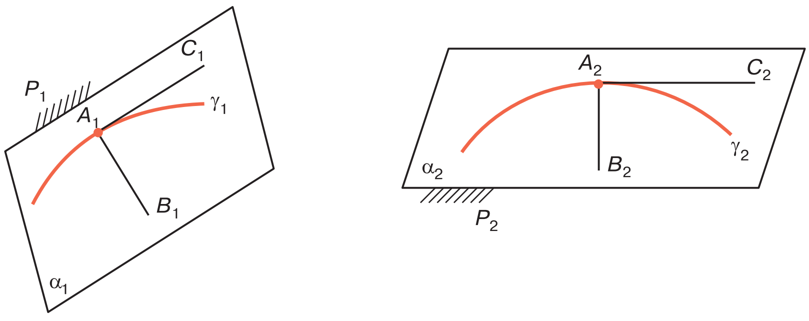


Рис. 24

Произвольная точка A орицикла γ разделяет орицикл на две части, которые будем называть *полуорициклами*, исходящими из точки A. Из доказательства теоремы следует утверждение.

Следствие. *Каковы бы ни были два произвольных полуорицикла, один из которых принадлежит орициклу γ_1 и исходит из точки A, а другой — орициклу γ_2 и исходит из точки B, существует движение f, при котором первый полуорицикл переходит во второй. При этом $B = f(A)$, $\gamma_2 = f(\gamma_1)$.*

Понятие полуорицикла аналогично понятию луча прямой. Однако, в отличие от луча прямой, полуорицикл не определяется однозначно заданием точки, из которой он исходит, и какой-нибудь точки на ней. В самом деле, если даны две точки A и M пространства, то существует бесконечное множество плоскостей, проходящих через эти точки, и в каждой из этих плоскостей существует два полуорицикла, исходящих из точки A и содержащих точку M. Поэтому для обозначения полуорицикла, который принадлежит орициклу γ, исходит из точки A и содержит точку M, необходимо, кроме точек A и M, указать еще орицикл γ. Полуорицикл орицикла γ, исходящий из точки A и содержащий точку M, будем обозначать так: AM/γ.

2. Дуга орицикла. Введем понятие дуги орицикла. Для этого заметим, что для точек, лежащих на орицикле, можно ввести понятие «лежать между», аналогичное соответствующему понятию для точек прямой. Будем говорить, что точка B орицикла γ лежит между точками A и C этой линии, если ось орицикла, проходящего через точку B, расположена между осями, проходящими через точки A и C. Нетрудно показать, что понятие «лежать между» для точек орицикла обладает всеми основными свойствами аналогичного понятия для точек прямой.

Дугой орицикла γ с концами A и B называется фигура, состоящая из точек A и B и всех точек орицикла γ, лежащих между точками A и B. Эта дуга обозначается так: $\smile AB/\gamma$. Выражаясь наглядно, дуга орицикла с концами A и B есть часть орицикла, заключенная между его концами. Две дуги орициклов называются равными, если существует движение пространства, при котором одна дуга переходит в другую.

Понятия «больше» и «меньше» для дуг орициклов вводятся аналогично понятиям «больше» и «меньше» для отрезков. Если точка M лежит на дуге $\smile AB/\gamma_1$ и $\smile AM/\gamma_1 = \smile CD/\gamma_2$, то будем считать, что дуга $\smile AB/\gamma_1$ больше дуги $\smile CD/\gamma_2$ или дуга $\smile CD/\gamma_2$ меньше дуги $\smile AB/\gamma_1$.

Имеет место следующее утверждение: *для любых дуг* $\smile AB/\gamma_1$ *и* $\smile CD/\gamma_2$ *орициклов выполняется одно и только одно из соотношений*: $\smile AB/\gamma_1 = \smile CD/\gamma_2$, $\smile AB/\gamma_1 < \smile CD/\gamma_2$, $\smile AB/\gamma_1 > \smile CD/\gamma_2$.

Доказательство этого утверждения ничем не отличается от доказательства теоремы 1 (см. [2], § 6) о сравнении отрезков на евклидовой плоскости, поэтому мы его опускаем.

Отрезок AB, соединяющий концы дуги $\smile AB/\gamma$ орицикла γ, будем называть *хордой* этой дуги.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать утверждения:

14.1°. Две дуги орициклов равны тогда и только тогда, когда их хорды равны.

14.2°. Дуга $\smile AB/\gamma_1$ больше дуги $\smile CD/\gamma_2$ тогда и только тогда, когда $AB > CD$.

В пространстве Лобачевского можно ввести измерение дуг орициклов, т. е. ввести понятие длины дуги орицикла. Длина дуги орицикла вводится точно так же, как и длина отрезков в евклидовом пространстве. Для этого следует принять произвольную дугу $\smile PQ/\gamma$ орицикла за единицу измерения и применить алгоритм, который называется процессом измерения дуг. При этом каждой дуге $\smile AB/\gamma_1$ орицикла ставится в соответствие положительное действительное число, полученное в результате процесса измерения этой дуги. Это число называется длиной дуги $\smile AB/\gamma_1$ в единице $\smile PQ/\gamma$. Отметим, что процесс измерения отрезков подробно описан в § 23 книги [5], а процесс измерения дуг орициклов практически ничем не отличается от процесса измерения отрезков.

Длины дуг орициклов удовлетворяют следующим условиям:

а) Если дуги орициклов равны, то их длины равны.

б) Если точка M лежит на дуге $\smile AB/\gamma$, то длина дуги $\smile AB/\gamma$ равна сумме длин дуг $\smile AM/\gamma$ и $\smile MB/\gamma$.

в) Существует дуга орицикла, длина которой равна единице.

Сформулируем теорему о переходе от одной единицы измерения дуг орициклов к другой.

Теорема 2. *При переходе от одной единицы измерения дуг орициклов к другой длины всех орициклов умножаются на одно и то же число, равное длине старой единицы измерения в новой единице измерения.*

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от доказательства теоремы 3 (см. [2], § 14) об отрезках на евклидовой плоскости, поэтому мы его опускаем.

Если в пространстве выбрана единица измерения отрезков, то, так же как и в евклидовом пространстве, можно измерить длину любой гладкой дуги, в частности дуги орицикла, путем предельного перехода вписанной в дугу ломаной, когда ее наибольшее звено стремится к нулю. Таким образом можно согласовать единицы измерений отрезков и дуг орициклов, т. е. за единицу измерения дуг орициклов принять такую дугу $\smile PQ/\gamma$, длина которой в выбранной единице измерения отрезков равна единице. В дальнейшем изложении мы будем считать это условие выполненным.

§ 15. Концентрические дуги орициклов

1. Определение и простейшие свойства концентрических дуг орициклов. Дуги $\smile A_1B_1/\gamma$ и $\smile A_2B_2/\gamma_2$ орициклов называются *концентрическими дугами*, если они лежат в одной плоскости и орициклы γ_1 и γ_2 являются траекториями одного и того же пучка параллельных прямых, которому принадлежат прямые $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ (рис. 25). Можно установить биективное соответствие между точками концентрических дуг $\smile A_1B_1/\gamma_1$ и $\smile A_2B_2/\gamma_2$, поставив произвольной точке M первой дуги в соответствие точку M' второй дуги, в которой общая ось $\overline{MM_1}$ орициклов γ_1 и γ_2 пересекает дугу $\smile A_2B_2/\gamma_2$ (см. рис. 25). Ясно, что при этом соответствии точкам A_1 и B_1 соответствуют точки A_2 и B_2.

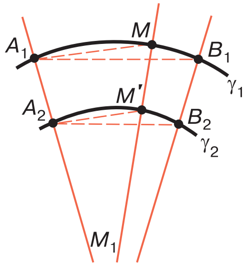


Рис. 25

Рассмотрим некоторые свойства концентрических дуг орициклов.

15.1°. Отрезки, соединяющие соответствующие точки двух концентрических дуг орициклов, равны между собой.

Доказательство этого утверждения проведите самостоятельно, воспользовавшись теоремой 3 (см. ч. I, § 28).

Длину отрезка, соединяющего соответствующие точки двух концентрических дуг орициклов, будем называть расстоянием между этими дугами.

15.2°. Если $\smile A_1B_1/\gamma_1$ и $\smile A_2B_2/\gamma_2$ — концентрические дуги орициклов, а $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ — общие оси орициклов γ_1 и γ_2, то $\smile A_1B_1/\gamma_1 > \smile A_2B_2/\gamma_2$.

□ Обозначим через M_1 и M_2 середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2. По свойству 15.1° $A_1A_2 = B_1B_2$, поэтому $A_1B_1B_2A_2$ — равнобедренный четырехугольник и по свойству 28.2° ч. I $M_1M_2 \perp A_1B_1$ и $M_1M_2 \perp A_2B_2$. Отсюда следует, что прямая M_1M_2 — ось симметрии параллельных прямых $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$, поэтому по теореме 3 (см. ч. I, § 11) $\overline{M_1M_2} \parallel \overline{A_1A_2}$. По теореме 1 (см. ч. I, § 14) $A_1M_1 > A_2M_2$, следовательно, $A_1B_1 > A_2B_2$. По свойству 14.2° $\smile A_1B_1/\gamma_1 > \smile A_2B_2/\gamma_2$. ■

15.3°. Если расстояние между концентрическими дугами $\smile A_1B_1/\gamma_1$ и $\smile A_2B_2/\gamma_2$ равно расстоянию между концентрическими дугами $\smile A'_1B'_1/\gamma'_1$ и $\smile A'_2B'_12/\gamma'_2$ и $\smile A_1B_1/\gamma_1 = \smile A'_1B'_1/\gamma'_1$, то $\smile A_2B_2/\gamma_2 = \smile A'_2B'_2/\gamma'_2$. Здесь $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A'_1A'_2}$ — оси соответствующих орициклов.

□ Четырехугольники $A_1B_1B_2A_2$ и $A'_1B'_1B'_2A'_2$ являются равнобедренными четырехугольниками, поэтому прямая M_1M_2, проходящая через середины отрезков A_1B_1 и A_2B_2, является осью симметрии параллельных прямых $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{B_1B_2}$ и $\overline{M_1M_2} \parallel \overline{A_1A_2}$ (см. доказательство свойства 15.2°) (рис. 26). Аналогично если $M'_1M'_2$ — прямая, проходящая через середины отрезков $A'_1B'_1$ и $A'_2B'_2$, то $\overline{M'_1M'_2} \parallel \overline{A'_1A'_2}$. Отсюда мы заключаем, что $\widehat{A_1} = \Pi(A_1M_1)$ и $A'_1 = \Pi(A'_1M'_1)$. По условию дуги $\smile A_1B_1/\gamma_1$ и $\smile A'_1B'_1/\gamma'_1$ равны, следовательно, по свойству 14.1° хорды этих дуг равны: $A_1B_1 = A'_1B'_1$, поэтому $A_1M_1 = A'_1M'_1$ и $\widehat{A_1} = \widehat{A'_1}$.

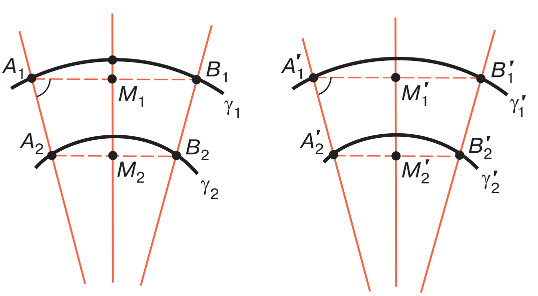


Рис. 26

По теореме 1 (2°) (см. ч. I, § 28) четырехугольники $A_1M_1M_2A_2$ и $A_1'M_1'M_2'A_2'$ равны, следовательно, $A_2M_2 = A_2'M_2'$, и поэтому $A_2B_2 = A_2'B_2'$. По свойству 14.1° $\smile A_2B_2/\gamma_2 = \smile A_2'B_2'/\gamma_2'$. ■

2. Основная теорема об отношении длин концентрических дуг. Сначала докажем следующую лемму:

Лемма. *Если расстояние между концентрическими дугами* $\smile A_1B_1/\gamma_1$ *и* $\smile A_2B_2/\gamma_2$ *равно расстоянию между концентрическими дугами* $\smile A_1'B_1'/\gamma_1'$ *и* $\smile A_2'B_2'/\gamma_2'$, *то* $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{\rho_1'}{\rho_2'}$, *где* ρ_1, ρ_2, ρ_1', ρ_2' — *длины соответствующих дуг.*

□ Примем какую-нибудь дугу $\smile PQ/\gamma_1$, меньшую чем $\smile A_1B_1/\gamma_1$, за единицу измерения и предположим, что ρ_1, ρ_2, ρ_1', ρ_2' являются длинами соответствующих дуг в этой единице измерения. Применим процесс измерения дуг орициклов и найдем длину ρ_1 дуги $\smile A_1B_1/\gamma_1$. Для этого, как известно, на полуорицикле A_1B_1/γ_1 отметим следующие друг за другом точки M_1, $M_2, \ldots, M_n$ так, чтобы дуги $\smile A_1M_1/\gamma_1$, $\smile M_1M_2/\gamma_2$, ..., были равны дуге $\smile PQ/\gamma_1$ и чтобы точка M_n либо совпала с точкой B_1, либо была первой точкой за точкой B_1. Если $N_1, N_2, \ldots, N_n$ — соответствующие им точки на дуге $\smile A_2B_2/\gamma_2$, то по свойству 15.3° $\smile A_2N_1/\gamma_2 = \smile N_1N_2/\gamma_2 = \ldots = \smile N_{n-1}N_n/\gamma_2$ (рис. 27). Приняв теперь дугу $\smile A_2N_1/\gamma_2$ за единицу измерения, найдем длину дуги $\smile A_2B_2/\gamma_2$. Ясно, что в этой единице

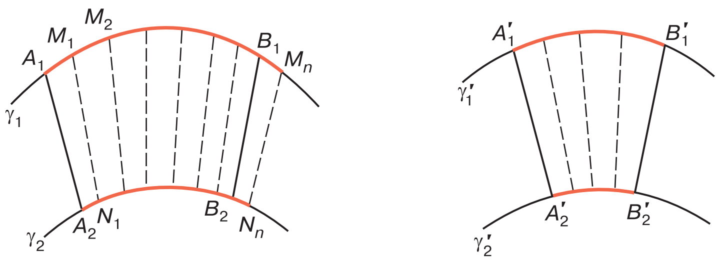


Рис. 27

измерения длина дуги $\smile A_2B_2/\gamma_2$ равна тому же числу ρ_1. В частности, если дуга $\smile A_2N_1/\gamma_2$ укладывается в дуге $\smile A_2B_2/\gamma_2$ точно ρ_1 раз, то по свойству 15.3° дуга $\smile A_2N_2/\gamma_2$ укладывается в дуге $\smile A_2B_2/\gamma_2$ точно ρ_1 раз.

По теореме 2 § 14 при переходе от одной единицы измерения дуг орициклов к другой длины всех дуг умножаются на одно и то же число, поэтому в единице измерения $\smile PQ/\gamma_1$ длина ρ_2 дуги $\smile A_2B_2/\gamma_2$ равна $m\rho_1$, где $m = \smile A_2N_1/\gamma_2 : \smile PQ/\gamma_1$. Таким образом, $\rho_2 = m\rho_1$.

Применив те же рассуждения к концентрическим дугам $\smile A_1'B_1'/\gamma_1'$ и $\smile A_2'B_2'/\gamma_2'$, найдем длину ρ_1' дуги $\smile A_1'B_1'/\gamma_1'$ в единице измерения $\smile PQ/\gamma_1$ и длину ρ_2' дуги $\smile A_2'B_2'/\gamma_2'$ в единице измерения $\smile A_2N_1/\gamma_2$. Мы приходим к выводу, что $\rho_2' = m'\rho_1'$, где $m' = \smile A_2N_1/\gamma_2 : \smile PQ/\gamma_1$. Так как $m' = m$, то $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{\rho_1'}{\rho_2'}$. ■

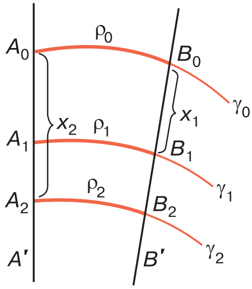


Рис. 28

Из этой леммы следует важный вывод: *отношение длин двух концентрических дуг орициклов зависит только от расстояния между этими дугами.*

Докажем теперь основную теорему.

Теорема. *Отношение длин ρ_1 и ρ_2 концентрических дуг орициклов ($\rho_1 > \rho_2$) выражается показательной функцией от расстояния x между дугами, т. е.*

$$\rho_1 : \rho_2 = e^{\frac{x}{k}}, \tag{1}$$

где k — некоторое положительное число.

□ Пусть ρ_1 и ρ_2 — длины концентрических дуг $\smile AB/\gamma$ и $\smile A'B'/\gamma'$ орициклов с общими осями $\overline{AA'}$ и $\overline{BB'}$, а x — расстояние между ними. По предыдущей лемме $\dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ зависит только от x, т. е. $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = f(x)$, где f — некоторая функция от длины x произвольного отрезка. Функция $f(x)$ определена для всех положительных x и принимает только положительные значения. Более того, по свойству 15.2°, $\rho_1 > \rho_2$, поэтому для любого x $f(x) > 1$ функция $f(x)$ является возрастающей. В самом деле, пусть $x_1 < x_2$, а $\smile A_0B_0/\gamma_0$, $\smile A_1B_1/\gamma_1$, $\smile A_2B_2/\gamma_2$ — попарно концентрические дуги с общими осями $\overline{A_0A_2}$, $\overline{B_0B_2}$, причем $A_0A_1 = x_1$, $A_0A_2 = x_2$, $A_0 - A_1 - A_2$ (рис. 28). Если ρ_0, ρ_1 и ρ_2 — длины соответствующих дуг, то $f(x_1) = \frac{\rho_0}{\rho_1}$, $f(x_2) = \frac{\rho_0}{\rho_2}$. По свойству 15.2° $\rho_2 < \rho_1$, поэтому $f(x_1) < f(x_2)$.

Докажем, что для произвольных значений x и y аргументов функция f удовлетворяет равенству

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y). \tag{2}$$

Возьмем на луче A_0A' произвольные точки A_1 и A_2 так, чтобы $A_0A_1 = x$, $A_1A_2 = y$, $A_0 - A_1 - A_2$, и проведем концентрические дуги $\smile A_1B_1/\gamma_1$ и $\smile A_2B_2/\gamma_2$, каждая из которых является концентрической с дугой $\smile A_0B_0/\gamma_0$ (см. рис. 28). Если ρ_0, ρ_1, и ρ_2 — длины соответствующих дуг, то ясно, что $\frac{\rho_0}{\rho_1} = f(x)$, $\frac{\rho_0}{\rho_2} = f(x+y)$, $\frac{\rho_1}{\rho_2} = f(y)$. Из этих равенств следует равенство (2).

Из равенства (2) следует, что для любого натурального числа имеем

$$f(mx) = [f(x)]^m. \tag{3}$$

Заменив в этом равенстве x на $\frac{x}{n}$, получим

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m. \tag{4}$$

С другой стороны, заменив в равенстве (3) m на n, а x на $\frac{x}{n}$, где n — произвольное натуральное число, получим $f(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)^n$ или $f\left(\frac{x}{n}\right) = [f(x)]^{\frac{1}{n}}$. Отсюда и из равенства (4) имеем: $f\left(\frac{m}{n}x\right) = [f(x)]^{\frac{m}{n}}$.

Пусть в этом равенстве $x = 1$, а $f(1) = a$. Тогда $f\left(\frac{m}{n}\right) = a^{\frac{m}{n}}$. Таким образом, для рациональных x имеем $f(x) = a^x$. Так как $f(x)$ — возрастающая функция, то это равенство верно и для иррациональных значений x, так как две возрастающие функции, принимающие одинаковые значения для рациональных значений аргументов, равны.

Выше было отмечено, что для любого x $f(x) > 1$, поэтому $a = f(1) > 1$. Если ввести обозначение $k = \dfrac{1}{\ln a}$, то $a = e^{\frac{1}{k}}$, поэтому $f(x) = e^{\frac{x}{k}}$. ■

В заключение выясним геометрический смысл числа k, которое входит в равенство (1). В этой формуле ρ_1 и ρ_2 — длины концентрических дуг орициклов, а x — расстояние между ними. Рассмотрим две концентрические дуги, расстояние x между которыми равно k. Тогда по формуле (1) имеем: $\rho_1 : \rho_2 = e$. Таким образом, при *выбранной единице измерения число k, которое входит в формулу* (1), *есть расстояние между концентрическими дугами орициклов, отношение длин которых равно e.* В следующем параграфе установим более простой геометрический смысл числа k.

§ 16. Гиперболические функции

1. Гиперболические функции. Гиперболические функции определяются с помощью натуральной показательной функции e^x следующим образом:

$\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ — гиперболический синус,

$\operatorname{ch} x = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ — гиперболический косинус,

$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ — гиперболический тангенс,

$\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ — гиперболический котангенс.

Гиперболические функции обладают свойствами, аналогичными свойствам тригонометрических функций. Из определений гиперболических функций непосредственно следуют формулы

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1. \tag{1}$$

Первое из этих соотношений аналогично равенству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ в обычной тригонометрии. Нетрудно видеть, что для любого x

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \quad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x. \tag{2}$$

Отметим также следующие формулы, аналогичные соответствующим формулам обычной тригонометрии:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y\\ \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y\end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Здесь записаны четыре формулы, в которых выражены функции суммы и разности двух аргументов через функции одного аргумента. Подставив в правую и левую части каждой из этих формул значения $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ через показательные функции, после несложных вычислений мы убеждаемся в том, что в каждой формуле правая часть равна левой. Предлагаем читателю самостоятельно выполнить эти выкладки.

Гиперболические функции, а также функция e^x не являются алгебраическими, они трансцендентные функции. В курсе математического анализа показывается, что функции $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, e^x можно разложить в бесконечные ряды, которые имеют вид

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \qquad (4)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \qquad (5)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \qquad (6)$$

Формулы (4)–(6) можно использовать для нахождения приближенных значений $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, e^x для достаточно малых значений x. В частности, для достаточно малых значений x (для $x < 1$) следующие формулы дают приближенные значения $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$, достаточно близкие к точным значениям:

$$\operatorname{sh} x \approx x + \frac{1}{6} x^3, \quad \operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{1}{2} x^2. \qquad (7)$$

Например, $\operatorname{ch} \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$, причем отклонение от точного значения $\operatorname{ch} \frac{1}{2}$ меньше, чем $\frac{1}{320}$.

Из формулы (4) следует, что $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} = 1 + \dfrac{1}{6}x^2 + \ldots$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1. \tag{8}$$

§ 17. Трехвершинник. Абсолютная дуга орицикла

1. Трехвершинник. Рассмотрим плоскую фигуру, образованную дугой $\smile AB/\gamma$ орицикла и двумя отрезками AC и BC, где AC — касательная к орициклу γ в точке A, а $\overline{CB}$ — ось этого орицикла (рис. 29, *а*). Такую фигуру будем называть *трехвершинником* и обозначать так: $\overset{\smile}{AB}/C$. Отрезки AC и BC назовем сторонами, дугу $\smile AB/\gamma$ — дугой, а точки A, B, C — вершинами этого трехвершинника. Будем считать, что мера угла при вершине A равна нулю, а мера угла при вершине B равна 90° (мера угла между касательной к орициклу в точке B и лучом BC). Нетрудно видеть, что $\angle C = \angle ACB$ острый, поэтому его мера меньше 90°. В самом деле, в треугольнике ABC $\angle B$ тупой (см. рис. 29, *а*), поэтому два других угла этого треугольника острые. Отсюда следует, что $AC > BC$. Таким образом, *сторона трехвершинника, принадлежащая касательной к дуге орицикла, больше другой стороны.*

Если в определении трехвершинника вершину C заменить несобственной точкой, то получим фигуру, образованную дугой $\smile AB/\gamma$ орицикла и двумя параллельными лучами h и k, исходящими из точек A и B, где луч h принадлежит касательной к орициклу γ в точке A, а k — продолжение луча орицикла, исходящего из точки B. Эту фигуру будем называть *вырожденным трехвершинником* и обозначать так: $\overset{\smile}{AB}/hk$. Если пользоваться несобственными точками плоскости, в которой расположен орицикл γ, то трехвершинник $\overset{\smile}{AB}/hk$ можно обозначать так: $\overset{\smile}{AB}/U_\infty$, где U_∞ — общая несобственная точка параллельных лучей h и k (рис. 29, *б*).

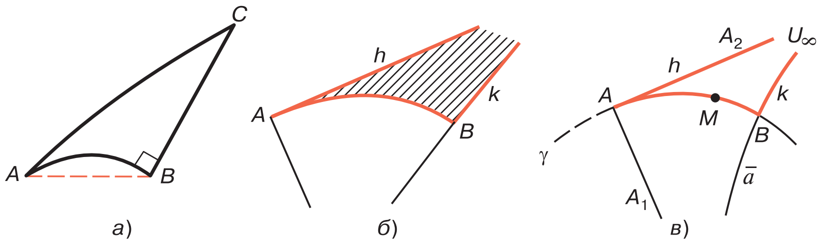


Рис. 29

Покажем, что *существует бесконечное множество вырожденных трехвершинников*. Для этого рассмотрим произвольный полуорицикл AM/γ, проведем луч AA_1 орицикла γ и касательную AA_2 к этому орициклу в точке A, где $M,\ A_2 \doteq AA_1$ (рис. 29, *в*). Заградительная прямая $\overline{a}$ угла A_1AA_2 с соответствующим на ней направлением является осью орицикла γ, так как она параллельна лучу AA_1, поэтому пересекает полуорицикл AM/γ в некоторой точке B. Обозначим через k луч прямой $\overline{a}$, исходящий из точки B и не принадлежащий положительному направлению этой прямой (см. рис. 29, *в*), а через h луч AA_2. Тогда, очевидно, $\smile{AB}\,/hk$ — вырожденный трехвершинник. Так как существует бесконечное множество полуорициклов, то существует бесконечное множество вырожденных трехвершинников.

Докажем следующую важную теорему:

Теорема 1. *Любые два вырожденных трехвершинника равны друг другу.*

□ Пусть $\smile{AB}\,/hk$ и $\smile{A'B'}\,/h'k'$ — два произвольных вырожденных трехвершинника, γ и γ' — орициклы, которым принадлежат дуги $\smile AB$ и $\smile A'B'$. Пусть, далее, α и α' — плоскости орициклов γ и γ', AA_1 и $A'A_1'$ — лучи этих орициклов, а $\overline{BB_1}$ и $\overline{B'B_1'}$ — оси орициклов, которым принадлежат лучи k и k' (рис. 30). Обозначим лучи h и h' через AA_2 и $A'A_2'$ и заметим, что прямая BB_1 является заградительной прямой угла A_1AA_2, так

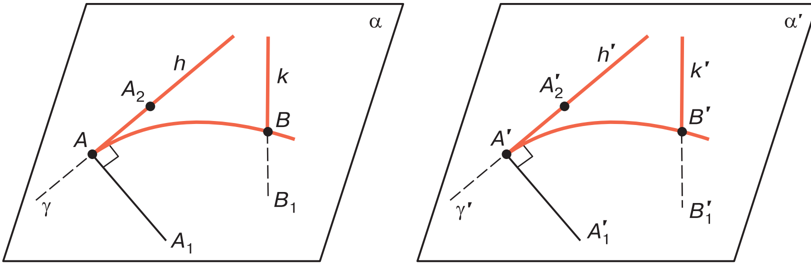


Рис. 30

как $\overline{BB_1} \parallel \overline{AA_1}$, $\overline{B_1B} \parallel \overline{AA_2}$. Аналогично прямая $B'B'_1$ является заградительной прямой угла $A'_1A'A'_2$.

Согласно следствию из теоремы 1 § 15 существует движение f, при котором полуорицикл AB/γ переходит в полуорицикл $A'B'/\gamma'$, причем $A' = f(A)$, $\gamma' = f(\gamma)$. Ясно, что при этом движении плоскость α и лучи AA_1, AA_2 переходят соответственно в плоскость α' и лучи $A'A'_1$, $A'A'_2$, т. е. угол A_1AA_2 переходит в угол $A'_1A'A'_2$. Так как при движении заградительная прямая угла переходит в заградительную прямую его образа, то при движении f прямая BB_1 переходит в прямую $B'B'_1$, поэтому $B' = f(B)$, $k' = f(k)$. Итак, при движении f вырожденный трехвершинник $\overset{\frown}{AB}/hk$ переходит в вырожденный трехвершинник $\overset{\frown}{A'B'}/h'k'$, т. е. эти трехвершинники равны. ■

2. Абсолютная дуга орицикла. Следуя А. П. Нордену, дугу вырожденного трехвершинника будем называть а б с о л ю т н о й д у г о й о р и ц и к л а (см. [10], § 57). Согласно предыдущей теореме *любые две абсолютные дуги орициклов равны друг другу*. Наличие абсолютной дуги орицикла является одной из важных особенностей геометрии Лобачевского. В евклидовой геометрии нет таких отрезков или дуг кривых, заданных с точностью до движения, построение которых можно описать абстрактно, пользуясь аксиомами и теоремами евклидовой геометрии. В противоположность этому в геометрии Лобачевского существуют абсолютные дуги орициклов, которые равны друг другу, поэтому их можно использовать для выбора естественной единицы измерения отрезков. Так как любые две абсолютные дуги орициклов равны друг другу, то любые два отрезка, длины которых в выбранной единице измерения равны длине абсолютной дуги орицикла в той же единице измерения, равны друг другу. Отрезок, длина которого равна длине абсолютной дуги орицикла, называется *радиусом кривизны пространства Лобачевского*. Длина этого отрезка также называется радиусом кривизны пространства Лобачевского.

В дальнейшем мы увидим, что если радиус кривизны пространства принять за единицу измерения отрезков, то тригонометрические формулы Лобачевского значительно упрощаются.

3. Теорема о соотношениях между длинами сторон и дуги трехвершинника. Докажем теорему, с помощью которой ниже мы выведем основные формулы тригонометрии Лобачевского.

Теорема 2. *В трехвершиннике* $\overset{\smile}{AB}/C$ *длины сторон* $AC = u$, $BC = v$ *и длина дуги* $AB = s$ *удовлетворяют равенствам*

$$e^{\frac{v}{k}} = \operatorname{ch}\frac{u}{k}\,, \tag{1}$$

$$s = \sigma \operatorname{th}\frac{u}{k}\,. \tag{2}$$

Здесь k — *постоянная величина, а* σ — *длина абсолютной дуги орицикла.*

□ При доказательстве теоремы будем пользоваться несобственными точками плоскости данного трехвершинника. Обозначим через γ орицикл, которому принадлежит дуга $\smile AB$, а через W_∞ центр пучка осей этого орицикла. Тогда, очевидно, AW_∞ и BW_∞ — лучи орицикла. AC — касательная к орициклу в точке A, тогда $AC \perp AW_\infty$. Выполним ряд дополнительных построений, как показано на рис. 31. Обозначим через U_∞ несобственную точку луча AC, а через V_∞ несобственную точку луча CA. На луче CW_∞ отложим отрезок $CF = u$, а на дополнительном луче — отрезок CE, равные u. Так как $v < u$, то C–B–F и, кроме того, E–C–B. Проведем теперь лучи EU_∞ и FV_∞ (см. рис. 31).

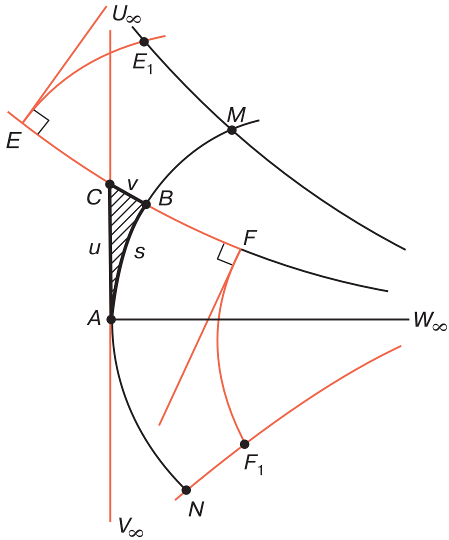


Рис. 31

По признаку 41.3° (см. ч. I) вырожденные треугольники ACW_∞, ECU_∞ и FCV_∞ попарно равны, поэтому углы $U_\infty EC$ и $V_\infty FC$ прямые.

Проведем заградительные прямые $U_\infty W_\infty$ и $V_\infty W_\infty$ соответственно прямых углов $U_\infty AW_\infty$ и $V_\infty AW_\infty$. Ясно, что эти же прямые являются заградительными прямыми соответственно прямых углов $U_\infty EW_\infty$ и $V_\infty FW_\infty$. Пусть орицикл γ пересекает прямую $U_\infty W_\infty$ в точке M, а прямую $V_\infty W_\infty$ — в точке N. Проведем, наконец, дугу $\smile EE_1$ орицикла с осью $\overline{EW_\infty}$, где E_1 — точка на прямой $U_\infty W_\infty$, и другую дугу $\smile FF_1$ орицикла с осью $\overline{FW_\infty}$, где F_1 — точка на прямой $V_\infty W_\infty$. Мы получим два вырожденных трехвершинника $\overset{\smile}{EE_1}/U_\infty$ и $\overset{\smile}{FF_1}/V_\infty$.

Фигуры $\overset{\smile}{AM}/U_\infty$ и $\overset{\smile}{AN}/V_\infty$ также являются вырожденными трехвершинниками, поэтому дуги $\smile AM$,

$\smile EE_1$, $\smile FF_1$ и $\smile AN$ — абсолютные дуги орициклов и их длины равны σ. Далее, дуги $\smile EE_1$ и $\smile BM$ являются концентрическими дугами орициклов, расстояние между которыми равно $EB = u + v$, поэтому по теореме § 15 $\overset{\smile}{EE_1} : \overset{\smile}{BM} = e^{\frac{u+v}{k}}$. Аналогично дуги $\smile NB$ и $\smile F_1F$ являются концентрическими дугами орициклов, расстояние между которыми равно $BF = u - v$, поэтому $\overset{\smile}{NB} : \overset{\smile}{F_1F} = e^{\frac{u-v}{k}}$.

Так как $\overset{\smile}{EE_1} = \sigma$, $\overset{\smile}{BM} = \overset{\smile}{AM} - \overset{\smile}{AB} = \sigma - s$, $\overset{\smile}{NB} = \overset{\smile}{AN} + \overset{\smile}{AB} = \sigma + s$, $\overset{\smile}{F_1F} = \sigma$, то предыдущие равенства принимают вид

$$\frac{\sigma - s}{\sigma} = e^{\frac{u+v}{k}}, \quad \frac{\sigma + s}{\sigma} = e^{\frac{u-v}{k}}. \tag{3}$$

Теперь легко доказать равенства (1) и (2). Из равенства (3) получаем $\frac{\sigma - s}{\sigma} + \frac{\sigma + s}{\sigma} = e^{\frac{u-v}{k}} + e^{\frac{u+v}{k}}$ или $2 = \frac{e^{\frac{u}{k}} + e^{\frac{-u}{k}}}{e^{\frac{v}{k}}}$, $e^{\frac{v}{k}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{u}{k}} + e^{\frac{-u}{k}}\right) = \operatorname{ch}\frac{u}{k}$. Равенство (1) доказано.

Из тех же равенств (3) имеем: $\frac{\sigma - s}{\sigma} - \frac{\sigma + s}{\sigma} = e^{-\frac{u+v}{k}} - e^{\frac{u-v}{k}}$ или $\frac{2s}{\sigma} = \left(e^{\frac{u}{k}} - e^{\frac{-u}{k}}\right)e^{-\frac{v}{k}}$, поэтому $s = \sigma e^{-\frac{v}{k}} \operatorname{sh}\frac{u}{k}$ или $s = \sigma \frac{\operatorname{sh}\frac{u}{k}}{e^{\frac{v}{k}}}$. Подставив сюда значение $e^{\frac{v}{k}}$ из равенства (1), получаем равенство (2). ■

4. Теорема о длине абсолютной дуги орицикла. В теореме § 15 и предыдущей теореме были выведены формулы, в которых фигурирует константа k. Эта константа и в дальнейшем изложении входит во все тригонометрические формулы геометрии Лобачевского. В § 15 мы показали, что k есть расстояние между концентрическими дугами орициклов, отношение длин которых равно e. Докажем теорему, в которой сформулирован более простой геометрический смысл этой константы. Для этого предварительно докажем лемму о соотношении между длинами дуги орицикла и ее хорды.

Лемма. *Длина s дуги орицикла и длина l ее хорды удовлетворяют равенству*

$$s = 2\sigma \operatorname{sh} \frac{l}{2k}\,. \qquad (4)$$

□ Пусть $\overset{\smile}{AB}$ — дуга длины s орицикла γ, а AB — ее хорда длины l. Проведем лучи AU_∞, BU_∞ и CU_∞ орицикла γ, где C — середина дуги $\overset{\smile}{AB}$ (рис. 32). Ясно, что луч CU_∞ проходит через середину D хорды AB и перпендикулярен к этой хорде.

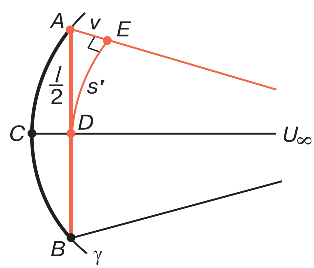


Рис. 32

Проведем дугу $\overset{\smile}{DE}$ орицикла, концентрическую с дугой $\overset{\smile}{CA}$, т. е. так, чтобы дуги $\overset{\smile}{AC}$ и $\overset{\smile}{ED}$ принадлежали орициклам, имеющим общие оси $\overline{AE}$ и $\overline{CD}$ (см. рис. 32). Рассмотрим трехвершинник $\overset{\smile}{DE}/A$ и обозначим через s' и v соответственно длину дуги $\overset{\smile}{DE}$ и длину стороны AE этого трехвершинника. Так как $AD = \frac{l}{2}$, $\overset{\smile}{AC} = \frac{1}{2}s$, то по формулам (1) § 15 и (2) имеем: $\frac{s}{2} = s' e^{\frac{v}{k}}$, $s' = \sigma \operatorname{th} \frac{l}{2k}$. Подставляя значения s' из второго равенства в первое и учитывая равенство (1), получаем: $\frac{s}{2} = \sigma e^{\frac{v}{k}} \operatorname{th} \frac{l}{2k} = \sigma \operatorname{ch} \frac{l}{2k} \operatorname{th} \frac{l}{2k}$. Отсюда следует равенство (4). ■

Теорема 3. *При выбранной единице измерения константа k в равенствах* (1), (2) *и* (4) *есть длина абсолютной дуги орицикла, т. е. длина радиуса кривизны пространства.*

□ Пусть $\smile{AB}$ — дуга орицикла длины s, а AB — ее хорда длины l. Согласно предыдущей лемме $s = 2\sigma \operatorname{sh} \frac{l}{2k}$, или

$$2k\,\frac{s}{l} = 2\sigma \cdot \left(\operatorname{sh} \frac{l}{2k} : \frac{l}{2k}\right). \tag{5}$$

Предположим теперь, что l, а вместе с ней и s убывают, стремясь к нулю. Тогда, очевидно, $\lim\limits_{l\to 0} \frac{s}{l} = 1$. Если $x = \frac{l}{2k}$, то при $l \to 0$ имеем: $x \to 0$, поэтому согласно равенству (8) (см. § 16) $\lim\limits_{l\to 0}\left(\operatorname{sh} \frac{l}{2k} : \frac{l}{2k}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$. Таким образом, при $l \to 0$ из равенства (5) получаем: $2k = 2\sigma$, т. е. $k = \sigma$.

■

§ 18. Внутренние геометрии орисферы и эквидистантной поверхности

1. Внутренняя геометрия орисферы. *Внутренней геометрией поверхности* называют систему основных положений и их следствий, характеризующих взаимное расположение фигур на данной поверхности. При этом для доказательства тех или иных утверждений пользуются только соображениями, относящимися к геометрическим образам самой поверхности, и не пользуются соображениями, относящимися к геометрическим образам, лежащим в пространстве вне поверхности. Одним из замечательных результатов, полученным Н. И. Лобачевским и положенным им в основу вывода тригонометрических формул, является построение внутренней геометрии орисферы. Он показал, что внутренняя геометрия орисферы совпадает с планиметрией Евклида. Доказательство этого утверждения, по существу, сводится к тому, чтобы ввести основные понятия геометрии на орисфере и доказать, что они удовлетворяют всем аксиомам планиметрии Евклида.

Напомним, что основными понятиями планиметрии Евклида являются точки, прямые (основные объекты), принадлежность точки прямой, отношение «лежать между» и наложение (основные отношения). Возьмем какую-нибудь орисферу ω и на ней введем основные понятия геометрии. Под точкой орисферы ω будем понимать любую точку, лежащую на орисфере, а под прямой орисферы ω — любую геодезическую линию орисферы, т. е. любой орицикл на данной орисфере. Понятие принадлежности точки орисферы прямой орисферы понимаем в обычном смысле.

Если A, B и C — точки орисферы ω, то будем считать, что A–B–C, если точки A, B и C лежат на одном орицикле и в плоскости ABC ось BB_1 орисферы лежит между осями AA_1 и CC_1. Отметим, наконец, что под наложением на орисфере ω будем понимать любое преобразование точек орисферы ω, которое индуцируется на ней каким-нибудь элементом группы симметрий данной орисферы.

Нетрудно доказать, что введенные нами основные понятия геометрии орисферы ω удовлетворяют всем аксиомам планиметрии Евклида, т. е. аксиомам групп I–IV абсолютной геометрии (см. приложение к книге [1]) и аксиоме параллельности евклидовой планиметрии.

Выполнение аксиомы I_1 очевидно. Так как через любые две точки A и B орисферы проходит одна и только одна диаметральная плоскость, то из свойства 13.4° следует, что через точки A и B проходит один и только один орицикл на орисфере. Таким образом, аксиомы I_2 и I_3 выполняются.

Выполнение аксиом II_1–II_3 очевидно, поэтому проверим лишь выполнение аксиомы II_4. Пусть δ — прямая орисферы, т. е. некоторый орицикл на орисфере, а α — диаметральная плоскость, пересечение которой с орисферой есть орицикл δ. Ясно, что две точки A и B орисферы лежат по разные стороны от δ тогда и только тогда, когда $A, B \div \alpha$, и точки A и B лежат по одну сторону от δ тогда и только тогда, когда $A, B \doteq \alpha$. Обозначим через λ_1 множество всех точек орисферы, которые принадлежат одному из полупространств с границей α, а через λ_2 множество всех точек орисферы, которые принадлежат другому полупространству с той же границей. Так как в пространстве Лобачевского выполняется аксиома II_5 абсолютной стереометрии, то на орисфере выполняется аксиома II_4 планиметрии.

Переходя к проверке аксиом группы III, заметим, что множество всех наложений на орисфере образует группу, поэтому выполнение аксиом III_1–III_3 очевидно. Проверим аксиому III_6. Проверку остальных аксиом этой группы предоставляем читателю провести самостоятельно. На орисфере угол — фигура $O\gamma_1\gamma_2$, которая состоит из точки O и двух полуорициклов γ_1 и γ_2, исходящих из этой точки.

Если в касательной плоскости к орисфере в точке O провести лучи h_1 и h_2, касательные соответственно к линиям γ_1 и γ_2, то получим в этой плоскости угол Oh_1h_2, который будем называть соответствующим углу $O\gamma_1\gamma_2$ на орисфере. Из определения наложения на орисфере следует, что два угла на орисфере равны тогда и только тогда, когда соответствующие им углы в пространстве равны.

Пусть $O\gamma_1\gamma_2$ и $O'\gamma_1'\gamma_2'$ — два равных угла на орисфере. Докажем, что существует наложение на орисфере, при котором $O \mapsto O'$, $\gamma_1 \mapsto \gamma_1'$, $\gamma_2 \mapsto \gamma_2'$. Для этого рассмотрим углы h_1h_2 и $h_1'h_2'$ с вершинами O и O', соответствующие данным углам, а также лучи OO_1 и $O'O_1$ орисферы и полупространства P и P', границами которых являются плоскости данных углов, которым принадлежат соответственно точки O_1 и O_1'. По аксиоме III_6 абсолютной стереометрии существует наложение пространства, при котором $O \mapsto O'$, $h_1 \mapsto h_1'$, $h_2 \mapsto h_2'$, $P \mapsto P'$. При этом наложении луч OO_1 орисферы переходит в луч $O'O_1'$ той же орисферы. По лемме § 13 орисфера переходит в себя, поэтому на ней индуцируется наложение орисферы, при котором $O \mapsto O'$, $\gamma_1 \mapsto \gamma_1'$.

Для проверки аксиом непрерывности заметим, что две аксиомы IV_1 и IV_2 этой группы эквивалентны предложению Дедекинда (см. ч. I, § 3, теорема 2). На орисфере отрезок AB — это дуга δ орицикла с концами A и B. Спроектируем каждую точку M дуги δ на отрезок AB, пользуясь для этого проектирования осью орисферы MM', проходящей через точку M. При этом проектировании устанавливается взаимно однозначное отображение дуги δ на отрезок AB, причем концы дуги отображаются сами в себя (рис. 33).

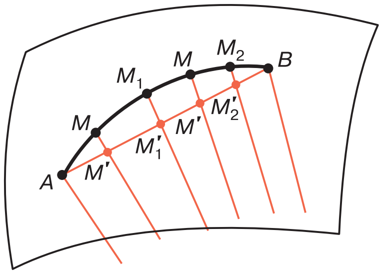


Рис. 33

Важно отметить, что при этом отображении сохраняется отношение «лежать между», т. е. если на дуге δ орисферы M_1–M–M_2, то их проекции M_1', M', M_2' на отрезке AB удовлетворяют соотношению M_1'–M'–M_2' (см. рис. 33). Так как для точек обычного отрезка AB выполняется предложение Дедекинда, то и для точек отрезка δ на орисфере выполняется то же предложение.

Перейдем к проверке аксиомы V параллельных прямых. Пусть δ — прямая орисферы ω, т. е. некоторый орицикл на этой орисфере, а A — точка орисферы, не лежащая на ней. Обозначим через α диаметральную плоскость, содержащую орицикл δ, а через AA_1 — ось орисферы. Любой орицикл на орисфере, проходящий через точку A, лежит в некоторой диаметральной плоскости, проходящей через точку A, т. е. в некоторой плоскости, проходящей через прямую AA_1. Так как $\alpha \parallel AA_1$, то по теореме 2 § 8 через прямую AA_1 проходит только одна плоскость, не пересекающая плоскость α. Поэтому через точку A на орисфере ω проходит только один орицикл, не пересекающий δ. Все другие орициклы на орисфере, проходящие через точку A, пересекают δ. Итак, аксиома V на орисфере выполняется.

Таким образом, нами доказано следующее фундаментальное предложение: *внутренняя геометрия орисферы есть геометрия Евклида*.

2. Внутренняя геометрия эквидистантной поверхности. По аналогии с внутренней геометрией орисферы построим внутреннюю геометрию эквидистантной поверхности и докажем, что, в отличие от орисферы, внутренняя геометрия эквидистантной поверхности совпадает с планиметрией Лобачевского.

Для доказательства этого утверждения возьмем какую-нибудь эквидистантную поверхность ω с базой α и введем основные понятия геометрии. Под точкой эквидистантной поверхности ω будем понимать любую точку, лежащую на поверхности ω, а под прямой эквидистантной поверхности ω — любую геодезическую линию поверхности ω, т. е. любую эквидистанту на поверхности ω, плоскость которой перпендикулярна к плоскости α (см. свойство 10.7°).

Для того чтобы ввести основные понятия и проверить выполнение аксиом, рассмотрим отображение точек поверхности ω на плоскость α: каждой точке M поверхности ω поставим в соответствие ее проекцию M' на плоскость α (рис. 34, a). При этом, очевидно, проекциями точек и прямых (т. е. геодезических линий) эквидистантной поверхности являются точки и обычные прямые плоскости α Лобачевского.

Точки и прямые поверхности ω будем обозначать через $A, B, C, \ldots, a, b, c, \ldots$, а их проекции соответственно буквами со штрихами: $A', B', C', \ldots, a', b', c', \ldots$.

Будем считать, что точка A принадлежит прямой a поверхности ω, если $A' \in \omega'$. Далее, если A, B и C — три точки поверхности ω, то будем считать, что A–B–C, если A'–B'–C' (см. рис. 34, a). Отметим, наконец, что под наложением на поверхности со будем понимать любое преобразование точек поверхности ω, которое индуцируется на ней каким-нибудь элементом группы симметрий эквидистантной поверхности ω. Важно отметить, что если f — элемент группы симметрий поверхности ω, т. е. если при движении f имеем: $\omega' = f(\omega)$, то при этом

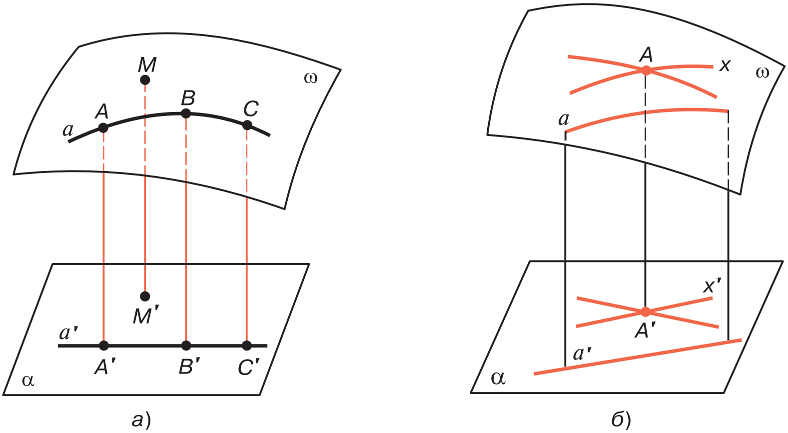


Рис. 34

же движении $\alpha = f(\alpha)$. Более того, если при движении f $B = f(A)$, то $B' = f(A')$. Следовательно, движение f индуцирует на плоскости α некоторое движение точек этой плоскости.

Ясно, что введенные нами основные понятия геометрии поверхности ω удовлетворяют всем аксиомам групп I–IV абсолютной геометрии, так как эти аксиомы выполняются для точек и прямых плоскости α. Покажем теперь, что на поверхности ω выполняется аксиома Лобачевского. Пусть $\boldsymbol{a}$ — прямая поверхности ω, т. е. некоторая эквидистанта на этой поверхности, плоскость которой перпендикулярна к плоскости α, а A — точка поверхности ω, не лежащая на прямой $\boldsymbol{a}$ (рис. 34, *б*). Обозначим через A' и $\boldsymbol{a}'$ их проекции на плоскость α. Так как $A \notin \boldsymbol{a}$, то $A' \notin \boldsymbol{a}'$. Каждая прямая $\boldsymbol{x}'$ плоскости α, проходящая через точку A', является проекцией некоторой эквидистанты $\boldsymbol{x}$ поверхности ω, проходящей через точку A. Если прямые $\boldsymbol{x}'$ и $\boldsymbol{a}'$ не пересекаются, то эквидистанты $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{a}$ также не пересекаются, т. е. не имеют общих точек. По аксиоме Лобачевского на плоскости α через точку A' проходит бесконечно много прямых, не пересекающих прямую $\boldsymbol{a}'$, поэтому на поверхности ω и через точку A проходит бесконечно много эквидистант, плоскости которых перпендикулярны плоскости α, не имеющих общих точек с эквидистантой a. А это означает, что во внутренней геометрии поверхности ω выполняется аксиома параллельных Лобачевского.

Таким образом, нами доказано следующее фундаментальное предложение: *внутренняя геометрия эквидистантной поверхности есть геометрия Лобачевского.*

В заключение поставим следующий вопрос: существует ли в евклидовом пространстве поверхность, на которой осуществляется геометрия Лобачевского? Ответ на этот вопрос дает *теорема Бельтрами*, которая была доказана примерно в 1870 году. В евклидовом пространстве в окрестности каждой точки псевдосферы имеет место геометрия Лобачевского. Попытка Бельтрами реализовать планиметрию Лобачевского в целом в виде внутренней геометрии некоторой поверхности евклидова пространства не увенчалась успехом. Это не случайно, так как Д. Гильбертом было доказано, что в евклидовом пространстве нет поверхности, изометричной всей плоскости Лобачевского. В рамках настоящей книги у нас нет возможности подробно осветить этот вопрос. Читателя, желающего более подробно ознакомиться с этой проблемой, мы отсылаем к книге Н. Е. Ефремова «Высшая геометрия».

Задачи к главе 4

1. Доказать, что для любых двух дуг $\smile AB/\gamma_1$ и $\smile CD/\gamma_2$ орициклов выполняется одно и только одно из соотношений: $\smile AB/\gamma_1 = \smile CD/\gamma_2$, $\smile AB/\gamma_1 < \smile CD/\gamma_2$, $\smile AB/\gamma_1 > \smile CD/\gamma_2$.
2. Доказать утверждение 14.1°.
3. Доказать утверждение 14.2°.
4. Доказать, что при переходе от одной единицы измерения дуг орициклов к другой длины всех орициклов умножаются на одно и то же число, равное длине старой единицы измерения в новой единице измерения.
5. Доказать, что $\operatorname{sh} x = \dfrac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}} = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}$,

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}}.$$

6. Доказать, что $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}} = \dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x}$,
$\operatorname{cth} x = \dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}$.
7. Доказать, что $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$,
$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
8. Доказать, что $\operatorname{th}(x \pm y) = (\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y) : (1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y)$,
$\operatorname{cth}(x \pm y) = (1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y) : (\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y)$.
9. Доказать, что $\operatorname{sh} \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} x - 1)}$, $\operatorname{ch} \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1}{2} (\operatorname{ch} x + 1)}$.
10. Доказать, что $\operatorname{th} \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{ch} x + 1}}$, $\operatorname{cth} \frac{1}{2} x = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} x + 1}{\operatorname{ch} x - 1}}$.
11. Даны два трехвершинника $\overset{\smile}{A_1B_1}/C_1$ и $\overset{\smile}{A_2B_2}/C_2$. Доказать, что если дуга $\overset{\smile}{A_1B_1}$ первого трехвершинника меньше дуги $\overset{\smile}{A_2B_2}$ второго, то $\angle A_1C_1B_1 > \angle A_2C_2B_2$.
12. Доказать, что трехвершинники $\overset{\smile}{A_1B_1}/C_1$ и $\overset{\smile}{A_1B_1}/C_2$ равны, если выполняется хотя бы одно из условий: а) $\overset{\smile}{A_1B_1} = \overset{\smile}{A_2B_2}$; б) $A_1C_1 = A_2C_2$; в) $B_1C_1 = B_2C_2$; г) $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_2B_2$.
13. Доказать, что абсолютная дуга орицикла больше дуги $\overset{\smile}{AB}$ любого трехвершинника $\overset{\smile}{AB}/C$.
14. Через концы A и A_1 двух дуг $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{A_1B_1}$ орициклов проведены оси AA' и A_1A_1' соответствующих орициклов. Доказать, что $\overset{\smile}{AB} = \overset{\smile}{A_1B_1}$, если расстояние от точки B до прямой AA' равно расстоянию от точки B_1 до прямой A_1A_1'.
15. В трехвершиннике $\overset{\smile}{AB}/C$ $AC = u$. Доказать, что $\sin \widehat{ACB} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} \frac{u}{k}}$, $BC = k \ln \operatorname{ch} \frac{u}{k}$, $\overset{\smile}{AB} = \sigma \operatorname{th} \frac{u}{k}$.
16. Доказать, что в соответствии с соглашениями, которые введены в § 14, п. 1, на орисфере выполняются аксиомы III_4, III_5 и III_7 планиметрии Лобачевского (см. приложение на с. 444).

Глава 5

ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Эта глава посвящена выводу основных формул гиперболической тригонометрии, т. е. тригонометрии Лобачевского, и их приложениям — доказательству геометрических теорем и решению задач. Здесь дается также аналитическое выражение функции Лобачевского.

Идея вывода тригонометрических формул принадлежит Н. И. Лобачевскому и основана на том, что внутренняя геометрия орисферы, как было показано в § 18, является евклидовой планиметрией. Здесь роль точек играют точки орисферы, а роль прямых линий — орициклы, принадлежащие орисфере. Поэтому в настоящей главе мы будем пользоваться определениями и утверждениями, изложенными в главе IV.

§ 19. Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике

1. Орисфера, присоединенная к прямоугольному треугольнику. Пусть ABC — данный треугольник с прямым углом C, гипотенузой $c = AB$, катетами $b = AC$, $a = BC$ и острыми углами $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$ (рис. 35). Элементами этого треугольника называются величины c, a, b, α и β. В геометрии Лобачевского задание любых двух из этих элементов определяет остальные три элемента прямоугольного треугольника. Отметим, однако, что это утверждение неверно для прямоугольного треугольника геометрии Евклида: здесь, например, задание двух острых углов не определяет стороны треугольника. В геометрии Евклида задание любых двух из указанных выше элементов определяет остальные элементы только в том случае, когда хотя бы один из данных элементов является длиной одной из сторон треугольника.

Задача заключается в том, чтобы вывести формулы, позволяющие по любым двум элементам прямоугольного треугольника определить остальные три элемента. Для вывода тригонометрических соотношений между элементами треугольника выполним дополнительные построения и к прямоугольному треугольнику ABC с прямым углом C присоединим некоторую орисферу так, чтобы плоскость ABC была касательной плоскостью этой орисферы в точке A.

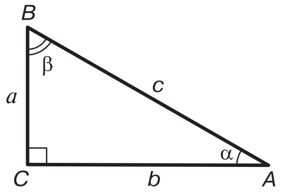


Рис. 35

Проведем луч AA', перпендикулярный к плоскости треугольника, и рассмотрим орисферу γ, заданную лучом AA'. Ее назовем *орисферой, присоединенной* к прямоугольному треугольнику ABC в точке A. Плоскость ABC является касательной плоскостью к этой орисфере. Проведем оси $\overline{BB'}$ и $\overline{CC'}$ орисферы γ (рис. 36). Плоскости ABA', ACC' и BCC' пересекают орисферу γ по орициклам, которые, пересекаясь, образуют орициклический треугольник AB_1C_1. Так как $AA' \perp ABC$, то $ACA' \perp ABC$, поэтому прямая BC, перпендикулярная

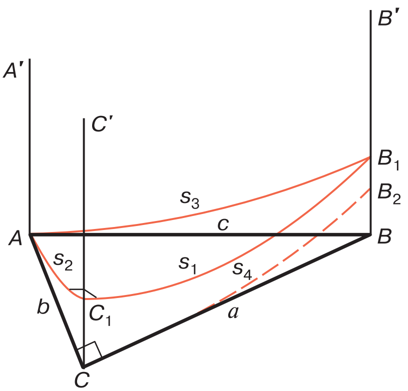


Рис. 36

к прямой AC, перпендикулярна и к плоскости ACA'. Отсюда следует, что $ACC' \perp BCC'$, следовательно, угол C_1 орициклического треугольника AB_1C_1 прямой, т. е. этот треугольник прямоугольный.

Проведем теперь дугу $\smile{CB_2}$ орицикла, концентрическую с дугой $\smile{C_1B_1}$ (см. рис. 36). Так как $\angle BCC'$ прямой, то прямая CB — касательная к этой дуге в точке C. При этом образовались три трехвершинника $\smile{AB_1}\,/B$, $\smile{AC_1}\,/C$ и $\smile{CB_2}\,/B$.

Так как орициклический треугольник AB_1C_1 прямоугольный, то его стороны, т. е. дуги $\smile{AC_1}$, $\smile{C_1B_1}$ и $\smile{AB_1}$, и его углы — угол A, который равен α, и угол B_1 — удовлетворяют обычным тригонометрическим соотношениям прямоугольного треугольника евклидовой плоскости. Пользуясь этим и применив теорему 2 § 17 к трехвершинникам $\smile{AB_1}\,/B$, $\smile{AC_1}\,/C$, $\smile{CB_2}\,/B$, мы выведем все основные тригонометрические соотношения прямоугольного треугольника ABC.

2. Теорема о соотношении между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника. Докажем теорему, в которой устанавливается связь между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника. Она аналогична теореме Пифагора для прямоугольного треугольника евклидовой плоскости и является основной теоремой.

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $c = AB$ и катетами $a = BC$, $b = AC$ выполняется равенство*

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}\,, \qquad (1)$$

где k — радиус кривизны пространства.

□ Присоединим к треугольнику ABC в точке A орисферу и воспользуемся построением, которое выполнено на рис. 36. Дуги $\smile{CB_2}$ и $\smile{C_1B_1}$ — концентрические дуги орициклов и $\angle BCC'$ прямой, так как $ACC' \perp BCC'$. Отсюда следует, что CB — касательная к дуге $\smile{CB_2}$ в точке

C, следовательно, B–B_2–B_1, т. е. $BB_1 = BB_2 + B_2B_1$. По свойству 15.1° $B_2B_1 = CC_1$, поэтому $BB_1 = BB_2 + CC_1$.

Применим формулу (1) теоремы 2 § 17 к трехвершинникам $\overset{\smile}{AB_1}/B$, $\overset{\smile}{AC_1}/C$ и $\overset{\smile}{CB_2}/B$: $e^{\frac{BB_1}{k}} = \operatorname{ch}\frac{c}{k}$, $e^{\frac{CC_1}{k}} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}$, $e^{\frac{BB_2}{k}} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}$. Но $e^{\frac{BB_1}{k}} = e^{\frac{CC_1}{k}+\frac{BB_2}{k}} = e^{\frac{CC_1}{k}} \cdot e^{\frac{B_2B}{k}}$. Подставив сюда значения $e^{\frac{BB_1}{k}}$, $e^{\frac{CC_1}{k}}$, $e^{\frac{B_2B}{k}}$ из предыдущих соотношений, получим равенство (1). ■

3. Теоремы о соотношениях между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Докажем сначала теорему о соотношениях между сторонами и одним из острых углов прямоугольного треугольника.

Теорема 2. *В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $c = AB$, катетами $a = BC$, $b = AC$ и острым углом $\alpha = \overline{A}$ выполняются равенства*

$$\operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{th}\frac{c}{k}\cos\alpha, \tag{2}$$

$$\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\alpha, \tag{3}$$

$$\operatorname{th}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{tg}\alpha, \tag{4}$$

$$\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos\alpha = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{a}{k}, \tag{5}$$

где k — радиус кривизны пространства.

□ Для доказательства этих равенств воспользуемся тем, что на орисфере γ, присоединенной к треугольнику ABC в точке A, имеет место геометрия Евклида, поэтому на рис. 36 в орициклическом треугольнике AB_1C_1 у которого $\angle C_1$ прямой, $\widehat{A} = \alpha$, $\overset{\smile}{AB_1} = s_3$, $\overset{\smile}{AC} = s_2$, $\overset{\smile}{B_1C_1} = s_1$, имеют место обычные тригонометрические соотношения, т. е.

$$s_2 = s_3\cos\alpha, \quad s_1 = s_3\sin\alpha, s_1 = s_2\operatorname{tg}\alpha. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о р а в е н с т в а (2). Применив формулу (2) теоремы 2 § 17 к трехвершинникам $\overset{\smile}{AC_1}/C$

и $\overset{\smile}{AB_1}/B$, получим $s_2 = \sigma \operatorname{th}\frac{b}{k}$, $s_3 = \sigma \operatorname{th}\frac{c}{k}$. Подставив эти значения в первое из равенств (6), получим равенство (2).

Доказательство равенства (3). Так как дуги $s_1 = \overset{\smile}{B_1C_1}$ и $s_4 = \overset{\smile}{CB_2}$ концентрические, то по теореме § 15 $s_4 : s_1 = e^{\frac{CC_1}{k}}$. Далее, по формулам (1) и (2) теоремы 2 § 17 применительно к трехвершинникам $\overset{\smile}{AC_1}/C$ и $\overset{\smile}{CB_2}/B$ имеем: $e^{\frac{CC_1}{k}} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}$, $s_4 = \sigma \operatorname{th}\frac{a}{k}$, поэтому

$$\frac{s_4}{s_1} = \frac{\sigma \operatorname{th}\dfrac{a}{k}}{s_1} = e^{\frac{CC_1}{k}}.$$

Таким образом, $s_1 = \sigma \operatorname{th}\frac{a}{k} : \operatorname{ch}\frac{b}{k} = \dfrac{\sigma \operatorname{sh}\dfrac{a}{k}}{\operatorname{ch}\dfrac{a}{k}\operatorname{ch}\dfrac{b}{k}} = \dfrac{\sigma \operatorname{sh}\dfrac{a}{k}}{\operatorname{ch}\dfrac{c}{k}}$.

Здесь мы воспользовались предыдущей теоремой. По формуле (2) теоремы 2 § 17 применительно к трехвершиннику $\overset{\smile}{AB_1}/B$ получаем $s_3 = \sigma \operatorname{th}\frac{c}{k}$.

Подставив значения s_1 и s_3 во второе из равенств (6), получим равенство (3).

Доказательство равенства (4). Заметим, что при выводе формул (2) и (3) мы установили, что

$$s_2 = \sigma \operatorname{th}\frac{b}{k},\ s_1 = \sigma \frac{\operatorname{sh}\dfrac{a}{k}}{\operatorname{ch}\dfrac{c}{k}}.$$

Подставив эти значения в третье из равенств (6), получим $\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{c}{k}\cdot \operatorname{th}\frac{b}{k}\cdot \operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{th}\frac{a}{k} = \dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{c}{k}}{\operatorname{ch}\dfrac{a}{k}}\cdot\dfrac{\operatorname{sh}\dfrac{b}{k}}{\operatorname{ch}\dfrac{b}{k}}\cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Отсюда, учитывая теорему 1, получаем равенство (4)).

Доказательство равенства (5). Формулу (2) можно записать так: $\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos\alpha$. По теореме 1 $\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}$. Подставив это значение в левую часть предыдущего равенства, получаем искомое соотношение. ■

Следствие. *В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $c = AB$, катетами $a = BC$, $b = AC$ и острым углом $\widehat{B} = \beta$ выполняются равенства*

$$\operatorname{th}\frac{a}{k} = \operatorname{th}\frac{c}{k}\cos\beta, \quad \operatorname{sh}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\beta, \quad \operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{tg}\beta.$$

Эти формулы получаются из равенств (2), (3) и (4), если в них заменить катеты a, b и угол α соответственно через b, a и β.

Докажем теперь теорему о соотношениях между стороной и двумя острыми углами прямоугольного треугольника.

Теорема 3. *В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $c = AB$, катетом $a = BC$ и острыми углами $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$ выполняются равенства*

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta, \tag{7}$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\sin\beta, \tag{8}$$

где k — радиус кривизны пространства.

□ Доказательство равенства (7). Перемножив равенство (4) почленно на третье из равенств следствия из теоремы 2, получим $\operatorname{th}\frac{a}{k}\cdot\operatorname{th}\frac{b}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$. Отсюда, учитывая теорему 1, получаем равенство (7).

Доказательство равенства (8). Перемножим равенство (4) почленно на второе из равенств следствия из теоремы 2. После сокращения соответствующих членов получим $\dfrac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\operatorname{ch}\frac{a}{k}} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\sin\beta$. Отсюда, учитывая равенство (3), приходим к равенству (8). ■

Формулы (1)–(8) являются основными формулами тригонометрии прямоугольного треугольника геометрии

Лобачевского. Соотношение (1) соответствует теореме Пифагора евклидовой геометрии, а соотношения (2) и (3) — известным теоремам обычной тригонометрии: катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы на косинус прилежащего к катету угла и на синус противолежащего к катету угла.

При выводе основных соотношений (1)–(4) мы, следуя Н. И. Лобачевскому, пользовались теоремами стереометрии. При этом существенно воспользовались утверждением о том, что внутренняя геометрия орисферы есть геометрия Евклида (см. § 18, п. 1). Возникает вопрос: можно ли получить тригонометрические соотношения плоскости Лобачевского без применения стереометрии? Было доказано, что такой путь возможен, но он сложный и требует дополнительных исследований. Читателя, интересующегося этим вопросом, отсылаем к книге В. Ф. Кагана [5], где дается вывод тригонометрических формул на основе только теорем планиметрии Лобачевского.

§ 20. Тригонометрические соотношения в произвольном треугольнике

1. Теорема косинусов и синусов. Докажем две основные теоремы для произвольного треугольника.

Теорема 1 (*теорема косинусов*). *В произвольном треугольнике ABC со сторонами $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ и углом $\widehat{A} = \alpha$ выполняется соотношение*

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} - \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos\alpha. \qquad (1)$$

□ При $\alpha = 90^\circ$ это равенство непосредственно следует из теоремы 1 § 19, поэтому докажем теорему, предположив, что $\alpha \neq 90^\circ$.

Проведем высоту CH и введем обозначения: $AH = d$, $CH = h$. Возможны два случая:

а) Точка H принадлежит лучу AB. Если эта точка совпадает с точкой B, то $\widehat{B} = 90^\circ$, поэтому $\triangle ABC$ прямоугольный с гипотенузой $AC = c$. Преобразуем правую часть равенства (1), подставив туда значение $\operatorname{ch}\frac{c}{k}$ из теоремы 1 § 19 и значение $\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos\alpha$ из формулы (5) теоремы 2 § 19: $\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k} - \operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\left(\operatorname{ch}^2\frac{b}{k} - \operatorname{sh}^2\frac{b}{k}\right) = \operatorname{ch}\frac{a}{k}$. Таким образом, если точки B и H совпадают, то равенство (1) выполняется.

Рассмотрим общий случай, когда точки H и B не совпадают. Применим теорему 1 § 19 к треугольнику BCH: $\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{(c-d)}{k}$, если A–H–B (рис. 37, *а*), и $\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{d-c}{k}$, если A–B–H (рис. 37, *б*). Но $\operatorname{ch}\frac{d-c}{k} = \operatorname{ch}\frac{c-d}{k}$ (см. § 16, формула (2)), поэтому второе равенство совпадает с первым. Воспользовавшись второй из формул (3) § 16, первое равенство можно записать так: $\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{d}{k} - \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\operatorname{sh}\frac{d}{k}$. По теореме 1 § 19 $\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{d}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}$, а согласно формуле (5) теоремы 2 § 19 $\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{sh}\frac{d}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos\alpha$. Подставив эти значения в правую часть предыдущего равенства, приходим к соотношению (1).

б) Точка H принадлежит продолжению луча AB (рис. 37, *в*). В этом случае в прямоугольном треугольнике BCH $BH = c + d$, $CH = h$, $BC = a$, поэтому согласно теореме 1 § 19 $\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{c+d}{k}$.

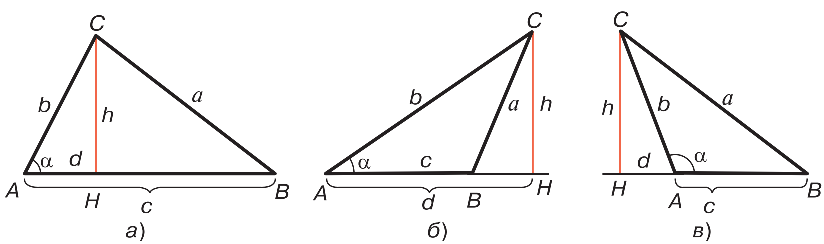


Рис. 37

Воспользовавшись второй из формул (3) § 16, это равенство можно записать так: $\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k}\operatorname{ch}\frac{d}{k} + \operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\operatorname{sh}\frac{d}{k}$.

Аналогично предыдущему имеем равенство $\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{ch}\frac{d}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}$, $\operatorname{ch}\frac{h}{k}\operatorname{sh}\frac{d}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos(180^\circ - \alpha)$.

Подставив эти значения в правую часть предыдущего равенства, приходим к соотношению (1). ■

Теорема 2 (*теорема синусов*). *В произвольном треугольнике ABC со сторонами $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ и углами $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$ выполняются соотношения*

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\sin\gamma}. \tag{2}$$

□ Докажем первое из этих равенств. Рассмотрим сначала случай, когда один из углов — A или B, например $\angle B$, прямой. Тогда $\beta = 90^\circ$. По формуле (3) теоремы 2 § 19 $\operatorname{sh}\frac{a}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\sin\alpha$. Но $\sin\beta = 1$, поэтому $\dfrac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin\beta}$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha \neq 90^\circ$ и $\beta \neq 90^\circ$. Проведем высоту $CH = h$ треугольника ABC и применим формулу (3) теоремы 2 § 19 к двум треугольникам AHC и BHC (см. рис. 37, *а*, *б*, *в*): $\operatorname{sh}\frac{h}{k} = \operatorname{sh}\frac{b}{k}\sin\alpha$, $\operatorname{sh}\frac{h}{k} = \operatorname{sh}\frac{a}{k}\sin\beta$. Отсюда, исключив $\operatorname{sh}\frac{h}{k}$, получим искомое равенство.

Второе равенство $\dfrac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\sin\beta} = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}{\sin\gamma}$ доказывается аналогично. ■

2. Тригонометрические соотношения между сторонами и углами треугольника. Докажем еще одну теорему, которая, вместе с теоремами косинусов и синусов, позволяет решить произвольный треугольник.

Теорема 3. *В произвольном треугольнике ABC со сторонами $BC = a$, $CA = b$ и углами $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$ выполняются соотношения*

$$\operatorname{cth}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k}\cos\gamma + \operatorname{ctg}\alpha\sin\gamma, \tag{3}$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\sin\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma. \tag{4}$$

□ Доказательство равенства **(3).** По теореме косинусов $\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos\gamma$. По теореме синусов $\operatorname{sh}\frac{c}{k} = \operatorname{sh}\frac{a}{k}\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Подставим эти значения в равенство (1). После группировки членов с учетом первого из тождеств (1) § 16, получим

$$-\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{sh}^2\frac{b}{k} = -\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\cos\gamma - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{ctg}\alpha\sin\gamma.$$

Разделив это равенство на $-\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{a}{k}$, получим соотношение (3).

Соотношение (4) предлагаем читателю доказать самостоятельно (см. задачу 7 в конце главы). ■

3. Тригонометрические соотношения в абсолютной единице длин отрезков. Напомним, что отрезок, длина которого равна длине абсолютной дуги орицикла, называется радиусом кривизны пространства Лобачевского. Если радиус кривизны пространства принят за единицу измерения отрезков, то его называют *абсолютной единицей длин отрезков*. При таком выборе единицы измерения отрезков согласно теореме 3 § 17 $k = 1$, и поэтому все формулы тригонометрии Лобачевского упрощаются и принимают следующий вид:

Тригонометрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с гипотенузой $c = AB$, катетами $a = BC$, $b = AC$ и острыми углами $\alpha = \widehat{A}$,

$\beta = \widehat{B}$. Тогда согласно теоремам 1, 2, 3 § 19.

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b, \tag{5}$$

$$\operatorname{th} b = \operatorname{th} c \cos\alpha, \tag{6}$$

$$\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin\alpha, \tag{7}$$

$$\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg}\alpha, \tag{8}$$

$$\operatorname{sh} c \cos\alpha = \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a, \tag{9}$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta, \tag{10}$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta. \tag{11}$$

Тригонометрические соотношения в произвольном треугольнике. Пусть ABC — произвольный треугольник: $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$, $\gamma = \widehat{C}$. Тогда согласно теоремам 1 (косинусов) и 2 (синусов)

$$\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha, \tag{12}$$

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}. \tag{13}$$

Согласно теореме 3

$$\operatorname{cth} a \operatorname{sh} b = \operatorname{ch} b \cos\gamma + \operatorname{ctg}\alpha \sin\gamma, \tag{14}$$

$$\cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma. \tag{15}$$

Мы уже отмечали, что в евклидовой геометрии нет абсолютной единицы длин отрезков, т. е. нельзя чисто геометрическим путем выделить какой-нибудь отрезок и принять его за единицу измерения отрезков. Поэтому в евклидовой геометрии в качестве единицы измерения отрезков может быть выбран произвольный отрезок. На практике в качестве такого отрезка принимают метр. Что такое метр? В энциклопедическом словаре читаем: «Метр, основная единица измерения длины, равная приблизительно 1/40 000 000 парижского географического меридиана. Государственным эталоном метра является платиново-иридиевая мера со знаком 28, представляющим собой копию международного прототипа метра».

Итак, метр с геометрической точки зрения — произвольно выбранный отрезок, на практике условно принятый за единицу измерения отрезков.

4. Решение треугольников. *Решением треугольника* называется нахождение всех его шести элементов, т. е. трех сторон и трех углов, по каким-нибудь трем данным элементам, определяющим треугольник. В § 19 мы отметили, что для прямоугольного треугольника любые два его элемента, отличные от прямого угла, определяют остальные три элемента. Формулы (1)–(5) и (7)–(8) § 19 позволяют решить прямоугольный треугольник по каким-то двум элементам. Рассмотрим пример.

Задача 1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$.

Даны $c = \frac{1}{2}k$, $\alpha = 45^\circ$. Найти b, c и β.

Решение. Для упрощения промежуточных вычислений будем считать, что за единицу измерения отрезков принята абсолютная единица длин отрезков. Тогда $c = \frac{1}{2}$.

По формуле (7) $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh}\frac{1}{2}\sin 45^\circ$. По таблицам тригонометрических функций находим $\operatorname{sh}\frac{1}{2} = 0{,}521$, $\sin 45^\circ = 0{,}707$, поэтому $\operatorname{sh} a \approx 0{,}368$. По таблицам гиперболических функций находим $a \approx 0{,}36$.

Аналогично по формуле (6) $\operatorname{th} b = \operatorname{th}\frac{1}{2}\cos 45^\circ \approx 0{,}327$, поэтому $b \approx 0{,}34$. Для определения β запишем формулу (7) в виде $\operatorname{sh} b = \operatorname{sh} c \sin\beta$. Отсюда находим: $\sin\beta = \frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{sh} c} = \frac{\operatorname{sh} 0{,}34}{\operatorname{sh} 0{,}5} = \frac{0{,}347}{0{,}521} \approx 0{,}666$.

По таблицам тригонометрических функций определяем: $\beta : \beta = 41^\circ 49'$.

Итак, в произвольной единице измерения имеем $a = 0{,}36k$, $b = 0{,}34k$, $\beta = 41^\circ 49'$.

Мы видим, что решение прямоугольного треугольника в геометрии Лобачевского, по существу, проводится по той же схеме, что и в евклидовой геометрии, однако здесь больше приходится пользоваться таблицами. Задача также осложняется тем, что сумма острых углов прямоугольного треугольника в геометрии Лобачевского не равна 90°. В приведенном выше примере $\widehat{A} + \widehat{B} = 45^\circ + 41^\circ 49' = 86^\circ 49'$.

Задача 2. В произвольном треугольнике ABC $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$, $\gamma = \widehat{C}$. Даны $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 80^\circ$. Найти a, b и c.

Решение. По формуле (15)

$$\cos 45^\circ = \operatorname{ch} a \sin 30^\circ \sin 80^\circ - \cos 30^\circ \cos 80^\circ.$$

По таблицам определяем соответствующие значения тригонометрических функций $\cos 45^\circ \approx 0{,}707$, $\sin 30^\circ = 0{,}5$, $\sin 80^\circ \approx 0{,}989$, $\cos 80^\circ \approx 0{,}176$, $\cos 30^\circ \approx 0{,}866$. Подставив эти значения в предыдущее равенство, получим $\operatorname{ch} a \approx \dfrac{0{,}707 + 0{,}866 \cdot 0{,}176}{0{,}5 \cdot 0{,}989} \approx \dfrac{0{,}859}{0{,}495} \approx 1{,}735$. По таблицам находим a : $a \approx 1{,}32$.

По теореме синусов (см. формулу (13)) $\operatorname{sh} b = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha} \operatorname{sh} a \approx \dfrac{0{,}5}{0{,}707} \cdot 1{,}735 \approx \dfrac{0{,}868}{0{,}707} \approx 1{,}228$. Отсюда находим b : $b \approx 1{,}03$.

Аналогично находим c : $\operatorname{sh} c = \dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \operatorname{sh} a \approx \dfrac{0{,}989}{0{,}707} \cdot 1{,}735 \approx \dfrac{1{,}716}{0{,}707} \approx 2{,}427$, $c \approx 1{,}65$.

Итак, в абсолютной единице длин отрезков $a \approx 1{,}32$, $b \approx 1{,}03$, $c \approx 1{,}65$.

§ 21. Аналитическое выражение функции Лобачевского

1. Аналитическое выражение функции Лобачевского. Используя тригонометрические соотношения прямоугольного треугольника, при помощи предельного перехода легко получить аналитическое выражение функции Лобачевского. Докажем следующую теорему:

Теорема 1. *Значения тригонометрических функций для функции Лобачевского выражаются формулами*

$$\sin \Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x}{k}}, \tag{1}$$

$$\cos \Pi(x) = \operatorname{th} \frac{x}{k}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg} \Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{x}{k}}, \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg} \Pi(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{k}. \tag{4}$$

□ Докажем сначала равенство (1). Для этого рассмотрим вырожденный прямоугольный треугольник ACU_∞ с прямым углом C, $\widehat{A} = \varphi$, $AC = x$ и отметим на луче CU_∞ произвольную точку B (рис. 38). В п. 3 § 5 было показано, что $\varphi = \Pi(x)$. Пусть в треугольнике ABC $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$. Согласно формуле (8) § 20 $\cos\beta = \operatorname{ch}\frac{x}{k}\sin\alpha$. Предположим, что B — переменная точка на луче CU_∞ и что $CB \to \infty$. Тогда, очевидно, $\alpha \to \varphi$, $\beta \to 0$, $\cos\beta \to 1$, поэтому из предыдущего равенства имеем $1 = \operatorname{ch}\frac{x}{k}\sin\varphi$, т. е. $\sin \Pi(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}\frac{x}{k}}$.

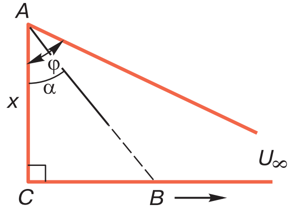


Рис. 38

Для доказательства равенства (2) воспользуемся тождеством $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$. Подставив сюда значение $\sin\varphi$ из равенства (1), получим $\cos^2\varphi = 1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{k}} = \dfrac{\operatorname{ch}^2\frac{x}{k} - 1}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{k}} =$

$= \dfrac{\operatorname{sh}^2\frac{x}{k}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{k}} = \operatorname{th}^2\frac{x}{k}.$

Полученное равенство эквивалентно равенству (2). Разделив почленно равенство (1) на равенство (2), получим равенство (3). Соотношение (4) является непосредственным следствием равенства (3). ■

Докажем еще одну теорему, которой часто пользуются в геометрии Лобачевского.

Теорема 2. *Функция* $\Pi(x)$ *Лобачевского удовлетворяет равенству*

$$\operatorname{tg}\frac{\Pi(x)}{2} = e^{-\frac{x}{k}}. \tag{5}$$

□ Воспользуемся тригонометрическим соотношением $\operatorname{tg}\dfrac{\Pi(x)}{2} = \dfrac{1-\cos\Pi(x)}{\sin\Pi(x)}$. Подставив в правую часть значения $\cos\Pi(x)$ и $\sin\Pi(x)$ из формул (2) и (1), получим $\operatorname{tg}\dfrac{\Pi(x)}{2} = \left(1 - \operatorname{th}\dfrac{x}{k}\right)\operatorname{ch}\dfrac{x}{k} = \operatorname{ch}\dfrac{x}{k} - \operatorname{sh}\dfrac{x}{k}$. Подставив сюда значения $\operatorname{ch}\dfrac{x}{k}$ и $\operatorname{sh}\dfrac{x}{k}$ из тождеств $\operatorname{ch}\dfrac{x}{k} = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right)$, $\operatorname{sh}\dfrac{x}{k} = \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}\right)$, приходим к равенству (5). ■

Соотношение (5) является основной формулой Н. И. Лобачевского для угла параллельности. Оно было получено самим Н. И. Лобачевским и опубликовано им в 1829 году в мемуарах «О началах геометрии». Это соотношение встречается практически во всех учебных пособиях, где излагаются основы геометрии Лобачевского (см., например, [4], § 73).

Из равенства (5) следует, что $\Pi(x)$ — монотонно убывающая непрерывная функция и пробегает все значения от $\frac{\pi}{2}$ до 0.

2. Тригонометрические соотношения в треугольнике, выраженные через функцию Лобачевского. В своих трудах Н. И. Лобачевский не пользуется гиперболическими функциями. Он использует только обычные тригонометрические функции. В частности, у Н. И. Лобачевского тригонометрические соотношения в треугольнике содержат значения обычных тригонометрических функций для углов α, β, γ треугольника и углов $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$, где a, b и C — стороны треугольника. Доказанные нами теоремы в § 19 и 20, а также теорема 1 настоящего параграфа позволяет легко получить соответствующие формулы Лобачевского. В качестве примеров рассмотрим некоторые из них.

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой $AB = c$, катетами $AC = b$, $BC = a$ и острыми углами $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$.

а) По теореме 1 § 19 $\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}$. По формуле (1) $\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \frac{1}{\sin\Pi(c)}$, $\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \frac{1}{\sin\Pi(a)}$, $\operatorname{ch}\frac{b}{k} = \frac{1}{\sin\Pi(b)}$. Подставив эти значения в предыдущее равенство, получим

$$\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\cdot\sin\Pi(b). \tag{6}$$

б) Аналогично предыдущему из формул (2)–(4) теоремы 2 § 19, используя равенства (1)–(4), получаем

$$\cos\Pi(b) = \cos\Pi(c)\cdot\cos\alpha, \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}\Pi(a) = \operatorname{ctg}\Pi(c)\cdot\sin\alpha, \tag{8}$$

$$\cos\Pi(a) = \operatorname{ctg}\Pi(b)\cdot\operatorname{tg}\alpha. \tag{9}$$

в) Из формул (7)–(8) теоремы 3 § 19, используя равенство (1), получаем

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta = \sin\Pi(c). \tag{10}$$

$$\sin\beta = \sin\Pi(a)\cos\alpha. \tag{11}$$

Предлагаем читателю самостоятельно вывести формулы (7)–(11).

Выведем теперь формулы, соответствующие теоремам косинусов и синусов. Пусть ABC — произвольный треугольник, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$.

Теорема косинусов. Подставив в равенство (1) теоремы 1 § 20 значения $\operatorname{ch}\frac{a}{k}$, $\operatorname{ch}\frac{b}{k}$, $\operatorname{ch}\frac{c}{k}$, $\operatorname{sh}\frac{b}{k}$, $\operatorname{sh}\frac{c}{k}$, $\cos\alpha$ из равенств (1) и (4), получим

$$\frac{1}{\sin\Pi(a)} = \frac{1}{\sin\Pi(b)} \cdot \frac{1}{\sin\Pi(c)} - \operatorname{ctg}\Pi(b) \cdot \operatorname{ctg}\Pi(c)\cos\alpha.$$

Отсюда после элементарных преобразований получаем

$$\sin\Pi(a) = \frac{\sin\Pi(b)\cdot\sin\Pi(c)}{1 - \cos\Pi(b)\cdot\cos\Pi(c)\cos\alpha}. \tag{12}$$

Таким образом, в теореме 1 (косинусов) § 20 формулу (1) можно заменить формулой (12).

Теорема синусов. Подставив в равенство (2) теоремы 2 § 20 значения $\operatorname{sh}\frac{a}{k}$, $\operatorname{sh}\frac{b}{k}$, $\operatorname{sh}\frac{c}{k}$ из равенства (4), получим

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(a)}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(b)}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(c)}{\sin\gamma}. \tag{13}$$

Итак, в теореме 2 (синусов) § 20 формулу (2) можно заменить формулой (13).

§ 22. Теорема Чевы, свойства биссектрис и медиан треугольника

Изложенная выше теория имеет приложения к доказательству теорем и решению задач геометрии Лобачевского.

1. Теорема Чевы. Докажем сначала лемму:

Лемма. *Если точка M лежит внутри треугольника ABC, то имеет место равенство*

$$\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 = \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \sin\gamma_2, \tag{1}$$

где $\alpha_1 = \widehat{MAB}$, $\beta_1 = \widehat{MBC}$, $\gamma_1 = \widehat{MCA}$, $\beta_2 = \widehat{MBA}$, $\alpha_2 = \widehat{MAC}$, $\gamma_2 = \widehat{MCB}$ (рис. 39).

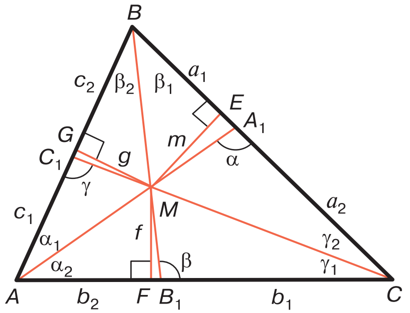


Рис. 39

□ Проведем перпендикуляры ME, MF и MG к прямым BC, CA и AB и обозначим их длины через m, f и g (см. рис. 39). По формуле (4) § 21 $\operatorname{ctg}\Pi(m) = \operatorname{sh}\frac{m}{k}$, $\operatorname{ctg}\Pi(g) = \operatorname{sh}\frac{g}{k}$, поэтому $\dfrac{\operatorname{ctg}\Pi(m)}{\operatorname{ctg}\Pi(g)} = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{m}{k}}{\operatorname{sh}\frac{g}{k}}$. Обозначим общую гипотенузу прямоугольных треугольников BME и BMG через l. Согласно формуле (3) теоремы 2 § 19 $\operatorname{sh}\frac{m}{k} = \operatorname{sh}\frac{l}{k}\sin\beta_1$, $\operatorname{sh}\frac{g}{k} = \operatorname{sh}\frac{l}{k}\sin\beta_2$, следовательно, $\dfrac{\operatorname{ctg}\Pi(m)}{\operatorname{ctg}\Pi(g)} = \dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$.

Аналогично, рассматривая пары прямоугольных треугольников AMG, AMF и CME, CMF, получаем $\dfrac{\operatorname{ctg}\Pi(g)}{\operatorname{ctg}\Pi(f)} = \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$, $\dfrac{\operatorname{ctg}\Pi(f)}{\operatorname{ctg}\Pi(m)} = \dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$.

Перемножив полученные три равенства, приходим к равенству (1). ■

Докажем теперь теорему Чевы для треугольников плоскости Лобачевского, которая является аналогом теоремы Чевы на евклидовой плоскости (см. [2], § 42).

Теорема 1. *Если точки A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC, то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются* *в одной точке тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(AC_1)}{\operatorname{ctg}\Pi(C_1B)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\Pi(BA_1)}{\operatorname{ctg}\Pi(A_1C)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\Pi(CB_1)}{\operatorname{ctg}\Pi(B_1A)}=1. \tag{2}$$

□ Докажем сначала, что если отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в некоторой точке M, то выполняется равенство (2).

Проведем перпендикуляры ME, MF и MG к прямым BC, CA и AB и обозначим их длины через m, f и g (см. рис. 39). Далее введем следующие обозначения для длин отрезков: $c = AB$, $a = BC$, $b = CA$, $BA_1 = a_1$, $A_1C = a_2$, $CB_1 = b_1$, $B_1A = b_2$, $AC_1 = c_1$, $C_1B = c_2$ и воспользуемся обозначениями углов на рис. 39

Применим формулы (13) § 21 (теорему синусов) к треугольникам ABA_1 и ACA_1 :

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(a_1)}{\sin\alpha_1}=\frac{\operatorname{ctg}\Pi(c)}{\sin\alpha},\quad \frac{\operatorname{ctg}\Pi(a_2)}{\sin\alpha_2}=\frac{\operatorname{ctg}\Pi(b)}{\sin\alpha}. \tag{3}$$

Аналогично, применив формулы (13) § 21 к треугольникам BCB_1 и BAB_1, а также к треугольникам CAC_1 и CBC_1, получим

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(b_1)}{\sin\beta_1}=\frac{\operatorname{ctg}\Pi(a)}{\sin\beta},\quad \frac{\operatorname{ctg}\Pi(b_2)}{\sin\beta_2}=\frac{\operatorname{ctg}\Pi(c)}{\sin\beta}, \tag{4}$$

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(c_1)}{\sin\gamma_1}=\frac{\operatorname{ctg}\Pi(b)}{\sin\gamma},\quad \frac{\operatorname{ctg}\Pi(c_2)}{\sin\gamma_2}=\frac{\operatorname{ctg}\Pi(a)}{\sin\gamma}. \tag{5}$$

Перемножив первые три из равенств (3), (4), (5), получим

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(a_1)\operatorname{ctg}\Pi(b_1)\operatorname{ctg}\Pi(c_1)}{\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1}=\frac{\operatorname{ctg}\Pi(b)\operatorname{ctg}\Pi(c)\operatorname{ctg}\Pi(a)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Перемножив вторые три из равенств (3), (4), (5), получим

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(a_2)\operatorname{ctg}\Pi(b_2)\operatorname{ctg}\Pi(c_2)}{\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2}=\frac{\operatorname{ctg}\Pi(b)\operatorname{ctg}\Pi(c)\operatorname{ctg}\Pi(a)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Правые части последних двух равенств совпадают, поэтому их левые части равны друг другу. Отсюда, учитывая предыдущую лемму, приходим к искомому равенству (2).

Обратно: пусть выполняется равенство (2). Обозначим через M точку пересечения отрезков BB_1 и CC_1 а через A_2 точку пересечения луча AM с отрезком BC. По доказанному

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(AC_1)}{\operatorname{ctg}\Pi(C_1B)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\Pi(BA_2)}{\operatorname{ctg}\Pi(A_2C)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\Pi(CB_1)}{\operatorname{ctg}\Pi(B_1A)} = 1.$$

Сравнивая это равенство с равенством (2), получаем

$$\frac{\operatorname{ctg}\Pi(BA_1)}{\operatorname{ctg}\Pi(A_1C)} = \frac{\operatorname{ctg}\Pi(BA_2)}{\operatorname{ctg}\Pi(A_2C)} \quad \text{или} \quad \frac{\operatorname{tg}\Pi(CA_1)}{\operatorname{tg}\Pi(A_1B)} = \frac{\operatorname{tg}\Pi(CA_2)}{\operatorname{tg}\Pi(A_2B)}.$$

Отсюда следует, что точки A_1 и A_2 совпадают. Предлагаем читателю, воспользовавшись указанием к задаче 14 в конце главы, самостоятельно доказать это утверждение. Таким образом, точка M лежит также на отрезке AA_1. ■

2. Теоремы о точках пересечения биссектрис и медиан треугольника. Теорема о точке пересечения биссектрис треугольника, как было отмечено в § 26 части I, является теоремой абсолютной геометрии и в рамках этой геометрии «синтетически» доказана в § 17 книги [2]. Здесь мы приводим более простое доказательство с помощью тригонометрических формул.

Теорема 2. *Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

□ Пусть AA_1 и BB_1 — две биссектрисы данного треугольника ABC. Очевидно, отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в некоторой точке M. Докажем, что луч CM — биссектриса угла C треугольника ABC. Очевидно, M лежит внутри треугольника ABC, поэтому согласно лемме 2 § 22 $\sin\alpha_1 \sin\beta_1 \sin\gamma_1 = \sin\alpha_2 \sin\beta_2 \times$ $\times \sin\gamma_2$ (обозначения углов см. на рис. 40). Так как AA_1 и BB_1 — биссектрисы треугольника ABC, то $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$, поэтому $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2$, $\sin\beta_1 = \sin\beta_2$. Из предыдущего равенства следует, что $\sin\gamma_1 = \sin\gamma_2$, поэтому $\gamma_1 = \gamma_2$, т. е. CM — биссектриса угла C. Она пересекает сторону AB в некоторой точке

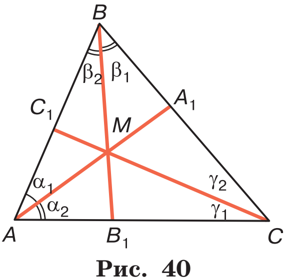


Рис. 40

C_1. Итак, биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. ■

В отличие от теоремы 2, в евклидовой геометрии при доказательстве теоремы о точке пересечения медиан треугольника существенно используется аксиома параллельности и теория подобия треугольников (см. [2], § 42). Однако сама теорема, как мы сейчас покажем, верна и в геометрии Лобачевского.

Теорема 3. *На плоскости Лобачевского медианы треугольника пересекаются в одной точке.*

□ Пусть AA_1 и BB_1 — две медианы данного треугольника ABC (рис. 41). Луч AA_1 проходит внутри угла BAB_1 поэтому он пересекает отрезок BB_1. Аналогично луч BB_1 пересекает отрезок AA_1. Отсюда следует, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в некоторой точке M. Луч CM — внутренний луч угла BCA, поэтому он пересекает отрезок AB в некоторой точке C_2 и C–M–C_2.

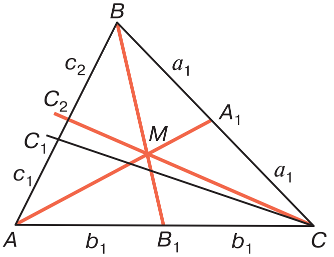


Рис. 41

Так как AA_1 и BB_1 — медианы треугольника ABC, то $BA_1 = A_1C = a_1$, $CB_1 = B_1A = b_1$. Введем такие обозначения: $AC_2 = c_1$, $C_2B = c_2$. По теореме Чевы $\operatorname{ctg}\Pi(a_1)\operatorname{ctg}\Pi(b_1)\operatorname{ctg}\Pi(c_1) = \operatorname{ctg}\Pi(a_1)\operatorname{ctg}\Pi(b_1)\operatorname{ctg}\Pi(c_2)$. Отсюда следует, что $\operatorname{ctg}\Pi(c_1) = \operatorname{ctg}\Pi(C_2)$, поэтому $\Pi(c_1) = \Pi(c_2)$, следовательно, точки C_1 и C_2 совпадают. Таким образом, точка C_2 — середина отрезка AB, т. е. CC_2 — медиана треугольника ABC. Итак, все три медианы AA_1, BB_1 и CC_1 этого треугольника пересекаются в точке M. ■

Задачи к главе 5

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC даны углы $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$. Найти стороны треугольника.
2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC даны углы $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$. Найти высоты треугольника.
3. Пользуясь теоремой синусов, доказать утверждение: а) две стороны треугольника равны тогда и только тогда, когда противолежащие углы равны; б) против большей стороны треугольника лежит больший угол и обратно: против большего угла лежит большая сторона.
4. В трипрямоугольнике $ABCD$ с острым углом C $AC = m$, $AD = c$, $BD = d$. Доказать, что $\cos \Pi(c) = \sin \Pi(m) \operatorname{ctg} \Pi(d)$.
5. В трипрямоугольнике $ABCD$ с острым углом C $a = AB$, $c = AD$, $b = CD$, $d = BC$. Доказать, что $\cos \Pi(c) = \cos \Pi(d) \sin \Pi(a)$, $\cos \Pi(a) = \cos \Pi(b) \sin \Pi(c)$.
6. В произвольном треугольнике ABC $BC = a$, $CA = b$, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$. Доказать, что $\operatorname{ch} \frac{a}{k} \sin\beta = \operatorname{ch} \frac{b}{k} \sin\alpha \cos\gamma + \cos\alpha \sin\gamma$.
7. В произвольном треугольнике ABC $BC = a$, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$, $\widehat{C} = \gamma$. Доказать, что $\cos\alpha = \operatorname{ch} \frac{a}{k} \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma$.
8. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$. Даны:

   а) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Найти a, b, c;

   б) $a = \frac{1}{2} k$, $b = \frac{1}{3} k$. Найти c, α, β.

9. В треугольнике ABC $BC = \frac{1}{2} k$, $AC = \frac{2}{3} k$, $AB = \frac{1}{3} k$. Найти $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$, $\gamma = \widehat{C}$.

10. Доказать, что в прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = c$, катетами $a = BC$, $b = CA$ и углом $\alpha = \widehat{A}$ выполняются равенства (7)–(9) § 21.
11. Доказать, что в прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = c$, катетом $BC = a$ и углами $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$ выполняются равенства (10)–(11) § 21.
12. На отрезке BC даны точки A_1 и A_2. Доказать, что если $\dfrac{\operatorname{tg}\Pi(CA_1)}{\operatorname{tg}\Pi(A_1B)} = \dfrac{\operatorname{tg}\Pi(CA_2)}{\operatorname{tg}\Pi(A_2B)}$, то точки A_1 и A_2 совпадают.
13. Найти сторону правильного треугольника, если его угол равен α. Доказать, что не существует правильного треугольника, для которого $\alpha = 60^\circ$.
14. На стороне k угла hk с вершиной O отмечена точка A и проведен луч AB, параллельный лучу h. Доказать, что на луче k существует: а) бесконечное множество точек A, для каждой из которых угол OAB: острый; тупой; б) одна точка, для которой $\angle OAB = 90^\circ$.

Глава 6

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И РЕАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО

§ 23. Интерпретация Кэли—Клейна системы аксиом трехмерной геометрии Лобачевского

1. Понятие об интерпретации. Непротиворечивость системы аксиом. Требование непротиворечивости системы аксиом является одним из основных требований к любой системе аксиом, в частности к аксиоматике Лобачевского. В предыдущих разделах курса мы на основе определенной аксиоматики (см. приложение, с. 445) построили геометрию Лобачевского, т. е. ввели новые понятия и доказали целый ряд теорем и утверждений. Но, строго говоря, мы не гарантированы от того, что в следствиях этой аксиоматики не существует противоречивых предложений, т. е. что любые два следствия из аксиоматики Лобачевского не противоречат друг другу.

Вопрос о непротиворечивости системы аксиом решается подбором какой-нибудь интерпретации данной системы (см. [4], гл. X). *Интерпретацией*, т. е. истолкованием системы аксиом, называется совокупность определенных конкретных объектов с определенными отношениями между ними, для которых выполнены все аксиомы данной системы.

Поясним это на примере аксиоматики пространства Лобачевского. При аксиоматическом изложении этой геометрии мы исходим из того, что имеются основные понятия, т. е. основные объекты — точки, прямые, плоскости и основные отношения между ними — принадлежность, «лежать между», наложение, которые удовлетворяют данной системе аксиом. Мы считаем, что основные объекты являются неопределяемыми объектами, конкретная природа которых нас не интересует, но которым присущи определенные отношения, удовлетворяющие аксиомам стереометрии Лобачевского. Под интерпретацией же понимаем конкретный подбор объектов с конкретными отношениями, которые удовлетворяют этой системе аксиом. Обычно в качестве таких объектов рассматриваются математические объекты, т. е. объекты из какой-то хорошо известной математической теории. Таким образом, интерпретация системы аксиом есть, по существу, конкретная «модель» той логической схемы, которая определяется этой системой аксиом.

Чтобы доказать непротиворечивость той или иной системы аксиом, в частности системы аксиом Лобачевского, достаточно построить какую-нибудь интерпретацию этой системы. При этом мы должны использовать достаточно надежные математические понятия, относительно которых у нас есть уверенность, что их система внутренне непротиворечива.

Наличие интерпретации данной системы аксиом означает, что эта система аксиом непротиворечива. В самом деле, если рассматриваемая система аксиом может быть реализована каким-либо способом на модели и если мы уверены в том, что система тех объектов и отношений между ними, которые были использованы при построении этой модели, непротиворечива, то ясно, что из данных аксиом нельзя правильными рассуждениями вывести два предложения, логически исключающие друг друга, т. е. из которых одно является отрицанием другого. В самом деле, если предположить, что это возможно, то существовали бы соответствующие предложения и для объектов построенной интерпретации, что невозможно.

2. Интерпретация Кэли—Клейна системы аксиом трехмерной геометрии Лобачевского. Рассмотрим одну из наиболее распространенных интерпретаций трехмерной геометрии Лобачевского — интерпретацию Кэли—Клейна на базе обычного трехмерного евклидова пространства. Предполагается, что евклидова геометрия построена и что система аксиом, на основе которой построена евклидова геометрия, непротиворечива. Возьмем в евклидовом пространстве произвольную сферу со с центром O и радиусом, равным единице, и назовем ее *абсолютом*. Обозначим через Ω шар с границей ω, а через $\mathring{\Omega}$ множество внутренних точек этого шара (рис. 42).

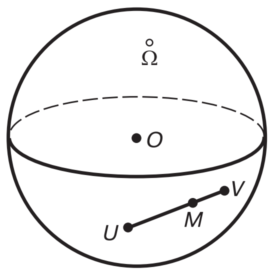


Рис. 42

Введем соглашения о выборе основных понятий геометрии Лобачевского. *Неевклидовой точкой* назовем любую евклидову точку из множества $\mathring{\Omega}$, а *неевклидовой прямой* — любую хорду (без концов) шара Ω. *Неевклидовой плоскостью* назовем любой открытый круг (т. е. круг без границы), который является сечением шара Ω какой-нибудь плоскостью евклидова пространства. Отношения принадлежности неевклидовой точки неевклидовой прямой или неевклидовой плоскости понимаем в обычном смысле, т. е. если евклидова точка M множества $\mathring{\Omega}$ лежит на хорде UV или принадлежит кругу γ, то будем считать, что неевклидова точка M лежит на неевклидовой прямой UV (см. рис. 42) и в неевклидовой плоскости γ. Аналогично отношение «лежать между» понимаем в обычном смысле, т. е. считаем, что неевклидова точка B лежит между неевклидовыми точками A и C (A–B–C), если евклидова точка B лежит между евклидовыми точками A и C.

Для упрощения дальнейшего изложения введем следующие соглашения. Множества $\mathring{\Omega}$, а также фигуры, которые состоят из этих точек, будем называть просто точками и фигурами, точки множества Ω, а также фигуры, которые состоят из этих точек, — Λ-точками и Λ-фигурами, а объекты всего трехмерного евклидова пространства — евклидовыми объектами. Например, если UV — хорда абсолюта ω, то интервал (UV) — прямая, сама хорда (UV) — Λ-прямая, или евклидов отрезок.

3. Проверка аксиом групп I–II в интерпретации Кэли—Клейна. Легко убедиться в том, что в построенной нами интерпретации выполняются все аксиомы групп I–II. В самом деле, так как аксиомы I_1–I_7 выполняются в трехмерном евклидовом пространстве, то, очевидно, при наших соглашениях они будут выполнены и для объектов нашей интерпретации. Проверим, например, аксиому I_5. Пусть две точки A и B лежат в плоскости γ. Тогда в евклидовом пространстве хорда UV шара Ω, проходящая через евклидовы точки A и B, лежит в евклидовой плоскости открытого круга γ, поэтому все точки, лежащие на хорде UV, принадлежат открытому кругу γ. Предлагаем читателю аналогично убедиться в том, что все другие аксиомы группы I будут выполнены для точек, прямых и плоскостей нашей интерпретации.

Аксиомы II_1–II_5 выполняются в трехмерном евклидовом пространстве, поэтому аксиомы II_1–II_2 при наших соглашениях будут выполнены и для точек и прямых нашей интерпретации. Проверим, например, выполнение аксиомы II_3. Пусть UV — прямая, а M — произвольная ее точка. Рассмотрим интервалы MU и MV, т. е. полухорды хорды UV. Очевидно, для подмножеств точек этих интервалов выполняется аксиома II_3. Аналогично проверяется выполнение аксиомы II_4. Рассмотрим плоскость γ и прямую UV, лежащую в этой плоскости. Евклидова хорда UV разделяет сечение γ шара Ω на два круговых сегмента с общей границей UV. Очевидно, для подмножеств внутренних точек этих сегментов выполняется аксиома II_4 (рис. 43).

Проверим теперь выполнение аксиомы II_5. Каждая плоскость γ является сечением шара некоторой евклидовой плоскостью, поэтому γ разделяет множество $\mathring{\Omega}$ на два открытых шаровых сегмента с общей границей γ. Для подмножества точек этих открытых шаровых сегментов выполняется аксиома II_5 (рис. 44).

Таким образом, в нашей интерпретации луч прямой UV есть полухорда евклидовой хорды UV, полуплоскость плоскости γ с границей UV — фигура, состоящая

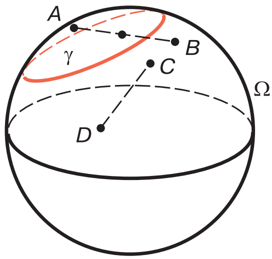


Рис. 43

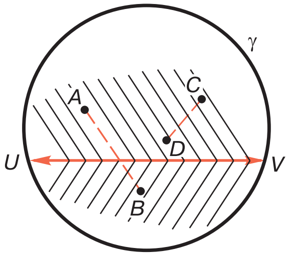


Рис. 44

из всех внутренних точек сегмента, стягивающегося хордой UV (см. рис. 44), полупространство с границей γ — фигура, состоящая из внутренних точек шарового сегмента евклидова шара Ω, отсекаемого плоскостью γ (см. рис. 44). Отсюда мы заключаем, что в этой интерпретации отрезок есть любой евклидов отрезок, концы которого принадлежат множеству $\mathring{\Omega}$, угол — фигура, состоящая из двух полухорд евклидова шара Ω, исходящих из некоторой внутренней точки этого шара, n-угольник — любой евклидов n-угольник, вершины которого принадлежат множеству $\mathring{\Omega}$.

Так как в построенной интерпретации выполняются все аксиомы II_{1-7}, II_{1-5}, то, очевидно, выполняются также и все следствия из этих аксиом.

§ 24. Наложения в интерпретации Кэли—Клейна

1. Λ-преобразования. В построенной нами интерпретации наиболее сложным является введение понятия наложения и проверка аксиом группы III. Введем сначала понятие Λ-преобразований и рассмотрим их простейшие свойства. Для этого напомним, что *сложным отношением четырех точек* A, B, C, D, лежащих на евклидовой прямой, называется число

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}},$$

где (AB, C) и (AB, D) — простые отношения соответствующих точек. Так как простое отношение трех точек есть инвариант движений, то при любом движении сложное отношение четырех точек не меняется. Преобразование множества всех Λ-точек множества всех точек шара Ω, назовем Λ-*преобразованием*, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

а) Точки абсолюта ω переходят в точки абсолюта, а точки множества $\overset{\circ}{\Omega}$ — в точки того же множества.

б) Любое сечение шара Ω переходит в некоторое сечение того же шара.

в) Любая хорда абсолюта переходит в некоторую хорду абсолюта, при этом сохраняется сложное отношение четырех точек.

Ясно, что любое движение евклидова пространства, при котором центр O шара Ω переходит в себя, во множестве точек шара Ω индуцирует Λ-преобразование. В частности, Λ-преобразованиями являются следующие преобразования точек множества Ω:

– тождественное преобразование точек этого множества;
– отражение точек этого множества от любой плоскости, проходящей через точку O;
– преобразование, которое индуцируется во множестве точек шара Ω поворотом евклидовой плоскости вокруг прямой, проходящей через точку O, на произвольный угол.

При каждом из этих преобразований центр O шара Ω переходит в себя. Докажем теорему, из которой следует, что существуют Λ-преобразования, при которых точка O переходит в любую точку шара Ω, отличную от его границы.

Теорема 1. *Отображение евклидовой плоскости, заданное в прямоугольной системе координат $O\ \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ с началом в центре O шара Ω формулами*

$$x' = \frac{a - x}{1 - ax}, \quad y' = \frac{y\sqrt{1 - a^2}}{1 - ax}, \quad z' = \frac{z\sqrt{1 - a^2}}{1 - ax}, \qquad (1)$$

где $0 \leqslant a \leqslant 1$, *индуцирует во множестве точек шара* Ω Λ*-преобразование, при котором точка* O *переходит в точку* $(a, 0, 0)$, *а точка* $(a, 0, 0)$ — *в точку* O.

Это отображение будем называть $\{a\}$*-отображением.*

□ Докажем сначала, что $\{a\}$-отображение есть преобразование точек шара Ω. Заметим, что для каждой точки (x, y, z) шара Ω выполняется неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, \tag{2}$$

поэтому $|x| \leqslant 1$ и $1 - ax \neq 0$. Отсюда мы заключаем, что при $\{a\}$-отображении каждая точка шара Ω имеет образ. Докажем, что этот образ принадлежит шару.

Из равенств (1) легко получить

$$1 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = \frac{1 - a^2}{(1 - ax)^2}\,(1 - x^2 - y^2 - z^2), \tag{3}$$

$$x = \frac{a - x'}{1 - ax'}, \quad y = \frac{-y'\sqrt{1 - a^2}}{1 - ax'}, \quad z = \frac{z'\sqrt{1 - a^2}}{1 - ax'}. \tag{4}$$

Если $(x, y, z) \in \Omega$, то из соотношений (2) и (3) следует, что $(x', y', z') \in \Omega$, где (x', y', z') — образ точки $(x,\ y,\ z)$. Таким образом, при $\{a\}$-отображении Λ-точки переходят в Λ-точки.

Из равенств (4) следует, что различные точки шара Ω переходят в различные точки и каждая точка этого шара имеет прообраз, принадлежащий шару. Итак, $\{a\}$-отображение есть преобразование множества всех Λ-точек.

Докажем, что $\{a\}$-отображение есть Λ-преобразование, т. е. выполняются условия а), б) и в), сформулированные выше.

а) Из равенства (3) следует, что точки окружности ω переходят в точки этой же окружности, а точки множества $\mathring{\Omega}$ — в точки того же множества.

б) Докажем, что при $\{a\}$-отображении любое сечение шара переходит в сечение шара. Пусть γ — сечение шара Ω евклидовой плоскостью α, которая задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Образ $(x'y'z')$ точки $(x,\ y,\ z)$ этой плоскости удовлетворяет равенству $A\dfrac{a-x'}{1-ax'} - B\dfrac{y'\sqrt{1-a^2}}{1-ax'} + C\dfrac{z'\sqrt{1-a^2}}{1-ax'} + D = 0$ или $Aa - Ax' - B\sqrt{1-a^2}y' + C\sqrt{1-a^2}z' + (1-ax')D = 0$.

Это уравнение получено из предыдущего с помощью равенств (4). Запишем его в виде

$$-(A+aD)x' - B\sqrt{1-a^2}y' + C\sqrt{1-a^2}z' + Aa + D = 0.$$

Этим уравнением определяется плоскость, поэтому образы всех точек сечения γ принадлежат некоторому сечению γ'. Пользуясь соотношениями (1), точно так же можно показать, что прообразы точек сечения γ' принадлежат сечению γ, поэтому при $\{a\}$-отображении образом сечения γ шара Ω является сечение γ'.

в) Учитывая, что каждую хорду абсолюта можно задать двумя пересекающимися сечениями, мы заключаем, что при $\{a\}$-отображении каждая хорда шара Ω переходит в некоторую хорду того же шара. Пользуясь равенствами (1), легко доказать, что при $\{a\}$-отображении сохраняется сложное отношение четырех точек.

Второе утверждение теоремы следует из равенств (1). ■

2. Наложения. При любом Λ-преобразовании точки множества $\mathring{\Omega}$ переходят в точки того же множества и прообраз любой точки этого множества принадлежит тому же множеству. Отсюда следует, что каждое Λ-преобразование индуцирует во множестве $\mathring{\Omega}$ точек некоторое преобразование, которое назовем *наложением*. Если f — данное наложение, то Λ-преобразование, которое индуцирует это наложение, будем обозначать через f_Λ. Докажем следующую теорему:

Теорема 2. *Множество всех наложений образует транзитивную группу преобразований множества точек* $\mathring{\Omega}$.

□ Пусть f и g — два наложения, которые индуцируются Λ-преобразованиями f_Λ и g_Λ. Тогда ясно, что преобразование $g_\Lambda f_\Lambda$ индуцирует преобразование fg. Так как $g_\Lambda f_\Lambda$ — Λ-преобразование, то fg — наложение. Итак, композиция любых двух наложений есть наложение.

Точно так же можно показать, что преобразование, обратное наложению, есть наложение. Таким образом, множество всех наложений образует группу.

Докажем, что эта группа является транзитивной, т. е. каковы бы ни были точки A и B множества $\overset{\circ}{\Omega}$, всегда существует наложение, которое точку A переводит в точку B. Если A и B совпадают с точкой O, то это утверждение очевидно. Пусть точка A не совпадает с точкой O, а точка B совпадает с этой точкой. Систему координат $O\,\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ возьмем так, чтобы точка A имела координаты $A(a, 0, 0)$. Тогда при преобразовании, заданном соотношениями **(1)**, $A \to B$. При этом $B \to A$.

Пусть теперь A и B — произвольные точки множества $\overset{\circ}{\Omega}$. Рассмотрим наложения f_1 и f_2, при которых $A \to O$, $O \to B$. Тогда ясно, что при наложении $f_2 f_1$ имеем $A \to B$. ■

Рассмотрим некоторые свойства наложений.

1°. При любом наложении сохраняется отношение «лежать между».

□ Пусть при наложении f точки A, B и C, где A–B–C, переходят в точки A', B' и C'. Докажем, что A'–B'–C'. Так как наложение f индуцируется некоторым Λ-преобразованием, то по определению Λ-преобразования точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

Обозначим через U одну из точек пересечения евклидовой прямой AC с абсолютом ω и предположим, что $U' = f_\Lambda(U)$. Так как A–B–C, то $(AC, UB) = \dfrac{\overline{AU}}{\overline{UC}} : \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < 0$, поэтому $(A'C', U'B') = \dfrac{\overline{A'U'}}{\overline{U'C'}} : \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} < 0$.

Но $\dfrac{\overline{A'U'}}{\overline{U'C'}} < 0$, поэтому $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} > 0$, т. е. A'–B'–C'. ■

2°. При любом наложении f отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$, а луч AU — в луч $A'U'$, где $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $U' = f_\Lambda(U)$.

□ Пусть M — произвольная точка отрезка AB, а $M' = f(M)$. По свойству 1° A'–M'–B', т. е. каждая точка отрезка AB переходит в точку отрезка $A'B'$. Пусть теперь N' — произвольная точка отрезка $A'B'$, а N — прообраз этой точки. Ясно, что точка N лежит на хорде круга Ω, проходящей через точки A и B. Если предположить, что $\overline{N}AB$, то по свойству 1° $\overline{N'}A'B'$, что противоречит условию A'–N'–B'. Итак, при наложении f: $[AB] \to [A'B']$.

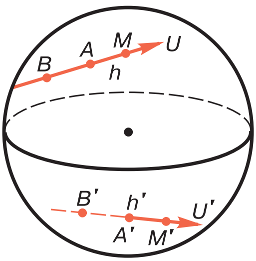


Рис. 45

Докажем теперь, что при наложении f луч $h = AU$ переходит в луч $h' = A'U'$, где $A' = f(A)$, $U' = f_\Lambda(U)$. Для этого возьмем на продолжении луча h точку B и обозначим через B' образ этой точки: $B' = f(B)$ (рис. 45). Если M — произвольная точка луча h, то B–A–M, поэтому B'–A'–M', где $M' = f(M)$. Отсюда следует, что $M' \in h'$. Обратно: если $N' \in h'$, а $N' = f(N)$, то B'–A'–N', поэтому B–A–N, т. е. $N \in h$. ■

Предлагаем читателю, используя это свойство, аналогично самостоятельно доказать утверждение:

3°. При любом наложении угол переходит в угол, полуплоскость — в полуплоскость, а репер — в репер. Напомним, что *репером* называется фигура (A, h, λ), состоящая из точки A, луча, исходящего из этой точки, и полуплоскости λ, границе которой принадлежит луч h.

4°. Если при данном наложении f луч h переходит в себя (т. е. образ каждой точки луча h принадлежит этому лучу), то все точки Λ-прямой UV, содержащей луч h, являются неподвижными точками Λ-преобразования f_Λ, а следовательно, и все точки луча h — неподвижные точки наложения f.

□ Достаточно доказать, что при Λ-преобразовании f_Λ, которое индуцирует f, каждая точка прямой UV переходит в себя.

Пусть $h = AU$ — данный луч. Так как $h = f(h)$, то $A = f_\Lambda(A)$, $U = f_\Lambda(U)$ и $V = f_\Lambda(V)$. Таким образом, на хорде UV имеются три неподвижные точки U, A, V Λ-преобразования f_Λ. Пусть M — произвольная точка хорды UV, а $M' = f_\Lambda(M)$. Так как $(UA, VM) = (UA, VM')$, то точки M и M' совпадают. ■

5°. Если h и h' — произвольные лучи, исходящие из точек A и A', то существует наложение f, такое, что $A' = f(A)$, $h' = f(h)$.

□ Так как множество всех наложений образует транзитивную группу преобразований множества $\overset{\circ}{\Omega}$ точек, то существуют наложения f_1 и f_2, такие, что $O = f_1(A)$, $O = f_2(A')$. Если $h_1 = f_1(h)$, $h'_2 = f_2(h')$, то лучи h_1 и h'_2 имеют общее начало O, поэтому существует наложение f_3, такое, что $h'_2 = f_3(h_1)$, например поворот вокруг некоторой прямой OM, перпендикулярной к лучам h'_2 и h_1. Тогда при наложении $f = f_2^{-1} f_3 f_1$ имеем $h' = f(h)$. ■

6°. Если (A, h, λ) и (A', h', λ') — два произвольных репера, то существует наложение f, при котором репер (A, h, λ) переходит в репер (A', h', λ').

□ Пусть h_0 — какой-нибудь луч, исходящий из центра O шара Ω. Согласно свойству 5° существуют наложения f_1 и f_2 такие, что $f_1(h) = h_0$, $f_2(h') = h_0$. По свойству 3° реперы (A, h, λ) и (A', h', λ') при этих наложениях переходят в какие-то реперы (O, h_0, λ_0) и (O, h_0, λ'_0). Рассмотрим теперь наложение f_3, которое индуцируется поворотом вокруг прямой $\overline{h_0}$, при котором полуплоскость λ_0 переходит в полуплоскость λ'_0. Тогда, очевидно, при наложении $f_2^{-1} f_3 f_1$ репер (A, h, λ) переходит в репер (A', h', λ'). ■

Рассмотрим теперь следующее важное свойство:

7°. Если при наложении f репер (A, h, λ) переходит в себя, то при этом наложении каждая точка плоскости $\overline{\lambda}$, которой принадлежит репер, является неподвижной точкой.

□ Пусть f_λ — Λ-преобразование, которое индуцирует наложение f. Достаточно доказать, что при наложении f_λ все точки сечения $\overline{\lambda}$ шара Ω являются неподвижными точками.

Сначала рассмотрим частный случай, когда точка A совпадает с центром O сферы, т. е. когда данным репером является репер (O, h, λ). Пусть UV — диаметр шара Ω, которому принадлежит луч $h = OU$, а AB — диаметр сечения $\overline{\lambda}$, перпендикулярный к UV, причем B — точка границы полуплоскости λ. Докажем, что B — неподвижная точка преобразования f_Λ. Пусть это не так, т. е. точка $B' = f_\Lambda(B)$ отлична от точки B. Ясно, что B' — точка границы полуплоскости λ и что при преобразовании f_λ диаметр AB переходит в диаметр $A'B'$ и $A' = f_\Lambda(A)$ (рис. 46). Обозначим через OC Λ-биссектрису угла BOB'. На одном из радиусов OU или OV, который составляет с отрезком OC острый угол (на рис. 46 радиус OV), отметим произвольную точку K и через эту точку проведем хорду PQ шара, перпендикулярную к OC, которая пересечет радиусы OB и OB' в точках S и T (см. рис. 46). Так как $OS = OT$, то $(AB, OS) = (A'B', OT)$, поэтому $T = f_\Lambda(S)$. Но $K = f_\Lambda(K)$, значит, при преобразовании f_Λ хорда PQ переходит в себя. Отсюда следует, что $P = f_\Lambda(P)$, $Q = f_\Lambda(Q)$, поэтому при преобразовании f_Λ каждая точка хорды PQ переходит в себя. Мы пришли к противоречию, следовательно, точки B и B' совпадают, т. е. B — неподвижная точка преобразования f_Λ. Отсюда следует, что $A = f_\Lambda(A)$, поэтому все точки диаметра AB являются неподвижными точками.

Пользуясь этим утверждением, легко доказать, что каждая точка M сечения $\overline{\lambda}$ — неподвижная точка Λ-движения f_Λ (рис. 47). В самом деле, пусть, например, $M,\ B \div UV$. Проведем через точку M хорду BD сечения $\overline{\lambda}$. Так как $B = f_\Lambda(B)$, $C = f_\Lambda(C)$, где C — пересечение хорды BD и диаметра UV, $D = f_\Lambda(D)$, то любая точка хорды BD — неподвижная точка преобразования f_Λ, т. е. M — неподвижная точка.

Перейдем теперь к общему случаю, т. е. допустим, что при преобразовании f_Λ произвольный репер (A, h, λ) сечения $\overline{\lambda}$ переходит в себя. Возьмем какой-нибудь репер (O, h_0, λ_0) и рассмотрим Λ-преобразование g_Λ, которое этот репер переводит в репер (A, h, λ) (см. свойство 6°). Возьмем произвольную точку M сечения $\overline{\lambda}$ и рассмотрим точку $M' = f_\Lambda(M)$. Обозначим через M_0 и M'_0 прообразы точек M и M' при преобразовании g_Λ, т. е. $M_0 = g_\Lambda(M)$,

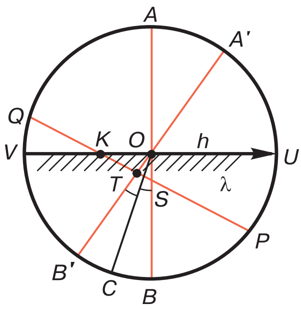


Рис. 46

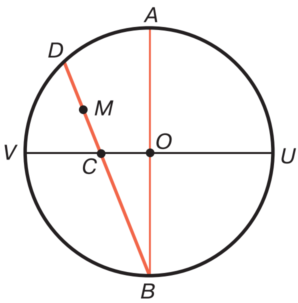


Рис. 47

$M_0' = g_\Lambda(M_0)$. При Λ-преобразовании $m_\Lambda = g_\Lambda^{-1} f_\Lambda g_\Lambda$ репер (O, h_0, λ_0) переходит в себя, поэтому по доказанному каждая точка сечения $\overline{\lambda}$ переходит в себя. Так как $m_\Lambda(M_0) = g_\Lambda^{-1} f_\Lambda(M_0') = g_\Lambda^{-1}(M') = M_0'$, то точки M_0 и M_0' совпадают, следовательно, и точки M и M' совпадают. ■

§ 25. Проверка выполнения аксиом групп III–V в интерпретации Кэли—Клейна

1. Проверка аксиом наложений. Докажем, что наложения удовлетворяют всем семи аксиомам группы III, которые сформулированы в приложении.

Согласно теореме 2 § 24 множество всех наложений образует транзитивную группу, поэтому, очевидно, выполняются аксиомы III$_1$, III$_2$ и III$_3$. В самом деле, так как тождественное преобразование множества точек $\overset{\circ}{\Omega}$ является наложением, а при тождественном преобразовании каждая фигура переходит в себя, то каждая фигура равна самой себе, т. е. аксиома III$_1$ выполняется. Аналогично проверяется выполнение аксиом III$_2$–III$_3$.

Проверим теперь выполнение аксиом III$_4$–III$_7$ в интерпретации Кэли—Клейна.

III$_4$. Пусть при данном наложении концы A и B отрезка AB переходят соответственно в концы A' и B'

отрезка $A'B'$. По свойству 2° § 24 при этом наложении отрезок AB переходит в отрезок $A'B'$.

III$_5$. Дан луч h с началом C и отрезок AB. Докажем, что на луче h существует единственная точка D, такая, что $AB = CD$.

По свойству 5° § 24 существует наложение f, при котором луч AB переходит в луч h. Если $D = f(B)$, то, очевидно, $AB = CD$. Докажем теперь, что D — единственная точка луча h, удовлетворяющая условию $AB = CD$. Пусть это не так, т. е. существует какая-то точка D' луча h, отличная от точки D и такая, что $AB = CD'$. Тогда согласно аксиоме III$_3$ $CD = CD'$, поэтому существует наложение, при котором $C \to C$, $D \to D'$ (см. задачу 8). Следовательно, при этом наложении $h \to h$. По свойству 4° точки D и D' совпадают.

III$_6$. Пусть $\angle hk = \angle h'k'$ и P, P' — полупространства, границами которых являются плоскости данных углов. Докажем сначала, что существует наложение f, такое, что $h \to h'$, $k \to k'$. Так как $\angle hk = \angle h'k'$, то существует наложение f, такое, что $h \to h'$, $k \to k'$ или $h \to k'$, $k \to h'$. В первом случае f — искомое наложение, поэтому рассмотрим только второй случай.

Пусть C — вершина угла hk, а O — центр шара Ω. По теореме 1 § 24 существует Λ-преобразование, а следовательно, наложение f_1, такое, что $C \to O$, $O \to C$. Пусть $h_0 = f(h)$, $k_0 = f(k)$. При симметрии g относительно прямой, содержащей биссектрису угла h_0k_0, $h_0 \to k_0$, $k_0 \to h_0$. Следовательно, при наложении ff_1gf_1 имеем $h \to h'$, $k \to k'$.

Докажем, что существует наложение, при котором $h \to h'$, $k \to k'$, $P \to P^1$. По доказанному существует наложение m, такое, что $h \to h'$, $k \to k'$. При этом возможны два случая: а) $P \to P'$; б) $P \to P'_1$, где P'_1 и P' — полупространства с общей границей γ', где γ' — плоскость угла $h'k'$. В первом случае m — искомое наложение. Во втором случае рассмотрим наложение f_1, при котором $C \to O$, $O \to C$, где C — вершина угла hk. Пусть $h_0 = f_1(h)$, $k_0 = f_1(k)$. Рассмотрим далее симметрию f_2 относительно плоскости угла h_0k_0. Тогда, очевидно, $mf_1^{-1}f_2f_1$ — искомое наложение, при котором $h \to h'$, $k \to k'$, $P \to P'$.

III$_7$. Дан репер $R_1 = (C, h, \lambda)$ и угол mn. Докажем, что существует единственный луч k полуплоскости λ, исходящий из точки C, такой, что $\angle hk = \angle mn$.

Рассмотрим репер $R_2 = (D, m, \mu)$, где D — вершина угла mn, а μ — полуплоскость с границей m, содержащая луч n (рис. 48). По свойству 6° § 24 существует наложение f, такое, что $R_1 = f(R_2)$. Если $k = f(n)$, то, очевидно, $\angle hk = \angle mn$.

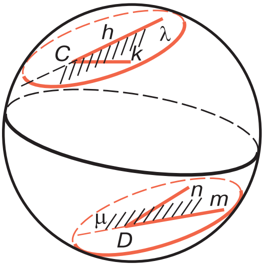


Рис. 48

Допустим, что для некоторого луча k', исходящего из точки C и принадлежащего полуплоскости λ, выполняется условие $\angle mn = \angle hk'$. Тогда $\angle hk = \angle hk'$, т. е. существует наложение f_1, такое, что угол hk переходит в угол hk'. Используя аксиому III$_6$, легко показать, что существует наложение f_2, такое, что $h = f_2(h)$, $k' = f_2(k)$ (см. задачу 9). При этом ясно, что $R_1 = f_1(R_1)$. Тогда при наложении $f_3 = f_2^{-1}f_1$ имеем $R_1 = f_3(R_1)$.

По свойству 7° при наложении f_3 все точки плоскости, содержащей репер R_1, являются неподвижными, поэтому лучи k и k' совпадают.

Итак, мы убедились в том, что в нашей интерпретации выполняются все аксиомы группы III.

2. Проверка аксиом непрерывности и аксиомы Лобачевского. В § 3 (см. ч. I, п. 2) было отмечено, что аксиомы IV$_1$–IV$_2$ эквивалентны предложению Дедекинда, а в п. 3 § 23 мы отметили, что в нашей интерпретации выполняется теорема Дедекинда. Отсюда мы заключаем, что в нашей интерпретации выполняются аксиомы IV$_1$–IV$_2$. Остается убедиться в том, что в интерпретации Кэли—Клейна выполняется аксиома V Лобачевского.

Пусть UV — произвольная прямая, а M — точка, не лежащая на ней. Рассмотрим плоскость, проходящую через точку M и содержащую эту прямую. В этой

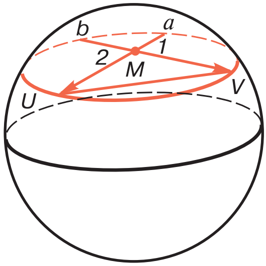


Рис. 49

плоскости две прямые a и b, изображенные на рис. 49, проходят через точку M и не имеют общих точек с прямой UV. Очевидно, кроме этих прямых, любая прямая, проходящая внутри вертикальных углов 1 и 2, также не пересекает прямую UV.

Таким образом, нами доказана следующая фундаментальная теорема: *если стереометрия Евклида непротиворечива, то стереометрия Лобачевского также непротиворечива.*

§ 26. Открытие геометрии Лобачевского

Изложенная нами теория в ч. I, а также в предыдущих параграфах настоящей книги посвящена теоретическим вопросам геометрии Лобачевского. В предыдущих параграфах мы доказали, что если аксиоматика геометрии Евклида непротиворечива, то аксиоматика геометрии Лобачевского также непротиворечива, поэтому в принципе как геометрия Евклида, так и геометрия Лобачевского могут быть использованы в изучении свойств реального пространства. Далее мы постараемся ответить на следующий фундаментальный вопрос, какая из этих геометрий наиболее полно отражает геометрические свойства реального пространства.

1. Краткие исторические сведения. До начала XIX века у математиков не возникало никакого сомнения в том, что аксиома параллельных прямых необходима для построения геометрии окружающего нас мира, т. е. что геометрия Евклида наиболее полно отражает геометрические свойства реального пространства. Возникал только вопрос: не является ли аксиома параллельных прямых логическим следствием аксиом абсолютной геометрии? Впервые вопрос о существовании геометрии Лобачевского был поставлен в первые десятилетия XIX века великим немецким математиком Гауссом.

Свои исследования в этой области он нигде не публиковал, но в его личных записях, которые впоследствии были опубликованы, он, по существу, доказал многие теоремы этой геометрии. Следует, однако, отметить, что неевклидову геометрию Гаусс изучал с помощью методов дифференциальной геометрии, т. е. на основе дифференциального исчисления, что затрудняло понимание сути его открытия. Синтетические методы, которыми мы пользуемся в элементарной геометрии, значительно больше соответствуют характеру этой геометрии. В этом, по-видимому, кроется одна из причин того, что Гауссу не удалось сделать достоянием научной общественности свои открытия в этой области.

Между тем два молодых математика — русский математик Николай Иванович Лобачевский (1793–1856) и венгерский математик Янош Больяи (1802–1860) — в своих работах синтетическим методом достаточно глубоко развили неевклидову геометрию и, по существу, доказали все основные теоремы этой геометрии.

Николай Иванович Лобачевский был профессором Казанского университета и опубликовал свою первую работу «О принципах, лежащих в основе геометрии» в 1829–1830 годах в ряде научных журналов в Казани.

Больяи проводил исследования независимо от Н. И. Лобачевского и в 1832 году опубликовал свои исследования в статье, озаглавленной «Приложение, излагающее абсолютно верное учение о пространстве, независимое от правильности или ложности XI аксиомы Евклида» (имеется в виду V постулат Евклида).

Таким образом, приоритет в открытии неевклидовой геометрии, безусловно, принадлежит Н. И. Лобачевскому, поэтому эту геометрию назвали *геометрией Лобачевского*.

К сожалению, ни работы Лобачевского, ни работа Больяи не были оценены в должной мере, когда они появились. Работы были полностью игнорированы. И Лобачевский, и Больяи были разочарованы, но среагировали по-разному. Больяи прекратил заниматься геометрией, а Лобачевский как истинный профессор университета продолжал упорно работать, получая все новые и новые результаты и публикуя их в течение 25 лет. Последнюю свою работу «Пангеометрия» он диктовал, будучи больным и почти слепым.

Читателю, который пожелает более подробно ознакомиться с историей открытия неевклидовой геометрии и с жизнью и деятельностью самого Н. И. Лобачевского, можно рекомендовать книгу [6] В. Ф. Кагана, где очень подробно изложены все эти вопросы.

В 60–70-х годах XIX века после смерти Лобачевского его геометрия получила всеобщее признание. В это время появились работы Штаута о принципах проективной геометрии и знаменитая лекция Римана «О гипотезах, лежащих в основе геометрии». Эти работы сыграли существенную роль в признании неевклидовой геометрии. Многие математики, в частности Бельтрами, Клейн, Ли и др., стали заниматься этой проблемой. Основную роль сыграла указанная выше лекция Римана, в которой он фактически обосновал существование более общей науки — римановой геометрии, частными случаями которой являются евклидова геометрия и геометрия Лобачевского.

2. Эксперименты по определению дефекта треугольника в реальном пространстве. Впервые вопрос о применимости геометрии Лобачевского к изучению свойств реального пространства был поставлен в первые десятилетия XIX века Гауссом. Он пытался ответить на вопрос: имеет ли место в реальном пространстве аксиома параллельности Евклида, т. е. удовлетворяют ли этой аксиоме реальные точки и прямые линии? Так как практически трудно проверить аксиому параллельных прямых, то Гаусс решил экспериментально проверить не саму аксиому, а одно из предложений, эквивалентных этой аксиоме. В § 8 ч. I было доказано, что предложение $Л_2$ «Сумма мер углов хотя бы одного треугольника меньше $2d$» эквивалентно аксиоме Лобачевского. Отсюда и из теоремы Лежандра о сумме углов треугольника «В абсолютной геометрии сумма мер углов треугольника не больше $2d$» (см. ч. I, § 3, теорема 5) непосредственно следует, что аксиома параллельных прямых эквивалентна предложению «Существует хотя бы один треугольник, сумма мер углов которого равна $2d$».

Таким образом, поставленный выше вопрос сводится к следующему: существует ли в реальном пространстве хотя бы один треугольник, сумма углов которого равна $180°$? Для того чтобы ответить на этот вопрос, Гаусс в окрестностях города Гёттингена рассмотрел треугольник со сторонами, равными примерно 50 км, и вершинами в вершинах трех гор и постарался весьма точно измерить градусные меры углов этого треугольника и найти сумму его углов. Однако ему не удалось получить ощутимых результатов. Дело в том, что при измерении углов на местности нельзя получить абсолютно точный результат. Отклонение от $180°$ полученной Гауссом суммы углов треугольника лежало в пределах точности измерений. Таким образом, Гауссу не удалось ни доказать, ни опровергнуть гипотезу о том, что аксиома параллельных прямых имеет место в реальном пространстве.

3. Дефект треугольника в реальном пространстве. Покажем, что неудача Гаусса не является случайной. Для этого напомним, что согласно свойству 42.1° ч. I, если треугольник ABC разложен на треугольники $\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_n$, то $\delta(ABC) = \delta(\triangle_1) + \delta(\triangle_2) + \ldots + \delta(\triangle_n)$, где $\delta(ABC)$, $\delta(\triangle_1), \ldots \delta(\triangle_n)$ — дефекты соответствующих треугольников (рис. 50). Допустим, что мы рассматриваем треугольник ABC, вершины которого помещены на Земле, на Марсе и на Солнце, и что дефект этого треугольника равен $1°$. Мысленно разложим треугольник ABC на треугольники, стороны которых примерно равны сторонам треугольника, использованного Гауссом в своем эксперименте. Расстояния между Солнцем, Землей и Марсом равны сотням миллионов километров, и легко подсчитать, что число треугольников, на которые разложен треугольник ABC, превышает 10^{12}. Таким образом, дефект каждого из

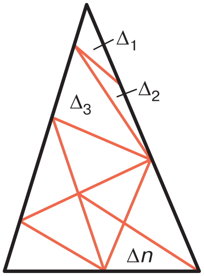


Рис. 50

этих треугольников равен примерно $\dfrac{1}{10^{12}}$ части градуса. Очевидно, не существует таких инструментов, которые могли бы обнаружить такие углы. Отсюда мы заключаем, что, рассматривая треугольник, вершины которого расположены на Земле, практически невозможно обнаружить, что дефект такого треугольника положителен. Другими словами, фактически дефект любого треугольника, вершины которого лежат на Земле, равен нулю, и, следовательно, сумма углов каждого такого треугольника практически равна 180°. Следовательно, в пределах земной поверхности фактически имеет место аксиома параллельных прямых, т. е. геометрия Евклида.

§ 27. Геометрия Лобачевского и реальное пространство

1. Геометрия достаточно малой области пространства Лобачевского. Основные тригонометрические формулы (1)–(8) § 19 прямоугольного треугольника плоскости Лобачевского существенно отличаются от соответствующих тригонометрических формул прямоугольного треугольника ABC плоскости Евклида:

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad b = c\cos\alpha, \quad a = c\sin\alpha, \tag{1}$$

где $c = AB$ — гипотенуза треугольника ABC, $b = AC$, $c = BC$ — его катеты, а $\alpha = \widehat{A}$. Однако мы сейчас покажем, что в достаточно малой области пространства Лобачевского формулы (1)–(8) § 19 дают результаты, несущественно отличающиеся от формул (1). Точнее, мы покажем, что если $\dfrac{a}{k}$, $\dfrac{b}{k}$, $\dfrac{c}{k}$ достаточно малые величины, т. е. стороны a, b и c треугольника ABC достаточно малы по отношению к k, то соответствующие формулы прямоугольных треугольников в геометриях Евклида и Лобачевского практически совпадают.

Рассмотрим формулы

$$\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k} \quad \text{и} \quad c^2 = a^2 + b^2 \tag{2}$$

и предположим, что $\frac{c}{k}$, $\frac{a}{k}$ и $\frac{b}{k}$ достаточно малые величины. Согласно формуле (5) § 16 $\operatorname{ch} x \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$. Используя это равенство, первую из формул (2) можно записать так:

$$1 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{k}\right)^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{k}\right)^2\right)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^2\right) \approx$$
$$\approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{k}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \frac{1}{4}\,\frac{a^2b^2}{k^4}\,.$$

Отсюда, разделив на $2k^2$, имеем $c^2 - a^2 - b^2 \approx \frac{1}{2}\,\frac{a^2b^2}{k^2}$. Если, например, $\frac{a}{k} < \frac{1}{10^5}$, $b < 1$, то ясно, что $c^2 - a^2 - b^2 < \frac{1}{2\cdot 10^{10}}$. Таким образом, разность $c^2 - a^2 - b^2$ близка к нулю, т. е. в достаточно малых областях пространства Лобачевского теорема Пифагора дает практически тот же результат, что и формула (1) § 19.

Аналогично можно показать, что вторая и третья из формулы (1) дают практически тот же результат, что и формулы (2) и (3) § 19.

Рассмотрим теперь дефекты треугольников в достаточно малой области пространства Лобачевского. Для этого сначала докажем теорему.

Теорема. *Дефект δ прямоугольного треугольника с катетами a и b вычисляется по формуле*

$$\sin\delta = \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{1 + \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}}\,. \qquad (3)$$

□ Пусть ABC — данный треугольник с прямым углом C, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{B} = \beta$. Тогда $\delta = 90^\circ - \alpha - \beta$, поэтому $\sin\delta = \sin(90^\circ - \alpha - \beta) = \cos(\alpha + \beta)$ или

$$\sin\delta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Подставив в правую часть этого равенства значения из следующих формул (см. (3) и (2) § 19):

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}}, \quad \cos\alpha = \frac{\operatorname{th}\frac{b}{k}}{\operatorname{th}\frac{c}{k}}, \quad \sin\beta = \frac{\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\operatorname{sh}\frac{c}{k}},$$

$$\cos\beta = \frac{\operatorname{th}\frac{a}{k}}{\operatorname{th}\frac{c}{k}},$$

получим

$$\sin\delta = \frac{\operatorname{th}\frac{b}{k}\operatorname{th}\frac{a}{k}}{\operatorname{th}^2\frac{c}{k}} - \frac{\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}}{\operatorname{sh}^2\frac{c}{k}} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{c}{k}}\left(\operatorname{th}\frac{b}{k}\operatorname{th}\frac{a}{k}\operatorname{ch}^2\frac{c}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{c}{k}}\left(\operatorname{sh}\frac{b}{k}\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{c}{k}}\left[\operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{b}{k}\left(\operatorname{ch}\frac{c}{k} - 1\right)\right].$$

Так как $\operatorname{sh}^2\frac{c}{2} = \operatorname{ch}^2\frac{c}{k} - 1 = \left(\operatorname{ch}\frac{c}{k} - 1\right)\left(\operatorname{ch}\frac{c}{k} + 1\right)$, $\operatorname{ch}\frac{c}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{b}{k}$, то, подставив эти значения в предыдущее выражение, получаем формулу (3). ■

Напомним приближенные значения для $\operatorname{ch}\frac{a}{k}$, $\operatorname{sh}\frac{a}{k}$: $\operatorname{ch}\frac{a}{k} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{k}\right)^2$, $\operatorname{sh}\frac{a}{k} \approx \frac{a}{k} + \frac{1}{6}\left(\frac{a}{k}^3\right)$. Подставим эти значения в формулу (3) и отбросим члены, содержащие коэффициент k^4 в знаменателе: $\sin\delta \approx \dfrac{\frac{a}{k}\cdot\frac{b}{k}}{1+1\cdot 1} = \dfrac{ab}{2k^2}$. Так как $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\sin\delta}{\delta} = 1$, то для достаточно малой области пространства Лобачевского $\sin\delta$ можно заменить через δ, и мы приходим к формуле

$$\delta = \frac{ab}{2k^2}\,. \tag{4}$$

Более точно $\lim\limits_{\substack{a\to 0\\ b\to 0}} \dfrac{\delta}{ab} = \dfrac{1}{2k^2}$.

Если, например, $\dfrac{a}{k} < 0{,}0001$, $\dfrac{b}{k} < 0{,}0001$, то $\delta < \dfrac{1}{200\,000\,000}$, т. е. δ меньше чем $0{,}001''$.

Ясно, что практически такие углы не могут быть обнаружены. Таким образом, *в достаточно малой области пространства Лобачевского можно пользоваться соответствующими формулами геометрии Евклида.*

Выясним теперь вопрос о вычислении площади треугольника в достаточно малой области пространства Лобачевского.

В § 44 ч. I было показано, что площадь S многоугольника в геометрии Лобачевского вычисляется по формуле $S = \lambda\delta$, где δ — дефект многоугольника, а λ — некоторая постоянная величина. Для прямоугольного треугольника с катетами a и b по формуле (4) имеем

$$\frac{S}{\frac{1}{2}\,ab} = \lambda\,\frac{\delta}{\frac{1}{2}\,ab} = \lambda\,\frac{1}{k^2}\,.$$

Выше было отмечено, что для достаточно малой области пространства Лобачевского имеет место геометрия Евклида, поэтому $S = \dfrac{1}{2}\,ab$, следовательно, $\lambda = k^2$. Таким образом, *площадь S прямоугольного треугольника в достаточно малой области пространства Лобачевского равна произведению дефекта треугольника на k^2.*

2. Геометрия Лобачевского и реальное пространство. Из того обстоятельства, что до сих пор не удалось практически обнаружить треугольники, дефекты которых положительны, нельзя заключить, что в реальном пространстве геометрия Евклида более полно отражает геометрические свойства пространства. Может быть, это связано с тем, что константа k слишком велика по сравнению с размерами астрономических фигур. Ученые считают, что вопрос о том, какая из геометрий, Евклида или Лобачевского, наиболее полно отражает геометрические свойства реального пространства, необязательно должен быть решен с помощью метрических измерений в рамках самой геометрии. Не исключена возможность, что когда-нибудь этот вопрос будет решен другим методом.

В теории относительности считается, что изучение геометрии реального пространства нельзя отделить от массы, которой она заполнена, и геометрические свойства пространства существенно зависят от количества сосредоточенной в нем массы. Более того, утверждается, что константа k зависит от того, каково количество массы, сосредоточенной в той или иной области пространства. Таким образом, согласно этой теории существование единой константы k во всем пространстве является упрощенной картиной реального пространства.

Эти идеи в какой-то форме были высказаны еще Риманом в его знаменитой лекции, отмеченной выше. Они были также четко сформулированы Эйнштейном. Отсюда следует, что геометрию нельзя рассматривать в отрыве от физики: она является как бы частью физики.

Кант считал, что невозможно представить себе материю без пространства, но возможно без трудностей представить себе пространство пустое, т. е. без материи. Но современные физические теории против концепции пустого пространства. Интересно отметить, что Гаусс в этих вопросах придерживался современных позиций. Он не мог представить себе пространство, где нет объектов.

В современных физических теориях утверждается, что геометрические свойства пространства зависят от распределения материи в нем, т. е. зависят от того, насколько в данной области густо или, наоборот, редко распределена материя. Можно предположить, что в областях скопления больших масс материи геометрия Лобачевского применима с большей точностью. Согласно этой теории значения k различны в зависимости от скопления масс в различных областях пространства. Другими словами, геометрия реального пространства моделирована материей, которой она заполнена. Согласно этой теории евклидова геометрия, так же как и неевклидова геометрия Лобачевского с постоянным k во всем пространстве, является упрощенной картиной реального пространства. Однако такая гипотеза достаточна для большинства практических приложений.

В заключение еще раз подчеркнем, что для треугольников «космических размеров» суммы их углов могут быть меньше чем 180°, поэтому изучение геометрии Лобачевского является весьма актуальной задачей.

Задачи к главе 6

1. Проверить выполнение аксиом I_1–I_4, I_6–I_7 в интерпретации Кэли—Клейна.
2. Доказать, что если $(AB, CD_1) = (AB, CD_2)$, то точки D_1 и D_2 совпадают.
3. На прямой введена система координат и четыре точки заданы своими координатами $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$, $M_4(x_4)$, причем ни одна из них не совпадает с началом координат. Доказать, что $(M_1M_2, M_3M_4) = \frac{(x_1 - x_3)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_1 - x_4)}$.
4. Пользуясь равенствами (1) § 24, доказать, что при $\{a\}$-отображении сохраняется сложное отношение четырех точек.
5. Доказать, что в интерпретации Кэли—Клейна преобразование, обратное наложению, есть наложение.
6. Доказать, что в интерпретации Кэли—Клейна при любом наложении: а) угол переходит в угол; б) полуплоскость переходит в полуплоскость; в) репер переходит в репер.
7. Проверить выполнение аксиом III_2–III_3 в интерпретации Кэли—Клейна.
8. В интерпретации Кэли—Клейна отрезок AB равен отрезку CD. Доказать, что существует наложение, при котором точка A переходит в точку C, а точка B — в точку D.
9. В интерпретации Кэли—Клейна угол hk переходит в угол lm. Доказать, что существует наложение, при котором луч h переходит в луч l, а луч k — в луч m.
10. Пользуясь интерпретацией Кэли—Клейна, доказать теорему 1 § 8.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Аксиомы абсолютной геометрии

Группа I. **Аксиомы принадлежности**

I_1. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки.

I_2. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_3. Через любые две точки проходит прямая, притом только одна.

Группа II. **Аксиомы порядка**

II_1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C — три различные точки некоторой прямой и точка B лежит также между точкой C и точкой A.

II_2. Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

II_3. Каждая точка O, лежащая на прямой, разделяет множество остальных точек этой прямой на два непустых подмножества так, что точка O лежит между любыми двумя точками различных подмножеств и не лежит между любыми двумя точками одного и того же подмножества.

II_4. Каждая прямая a разделяет множество всех точек плоскости, не лежащих на этой прямой, на два подмножества так, что любые две точки разных подмножеств лежат по разные стороны от прямой a, а любые две точки одного и того же подмножества лежат по одну сторону от прямой a.

Группа III. **Аксиомы наложения**

III$_1$. Каждая фигура равна самой себе.

III$_2$. Если фигура Φ равна фигуре Φ', то фигура Φ' равна фигуре Φ.

III$_3$. Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3.

III$_4$. Если при наложении концы отрезка AB отображаются в концы отрезка $A'B'$, то отрезок AB отображается на отрезок $A'B'$.

III$_5$. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

III$_6$. Если hk — неразвернутый угол и $\angle hk = \angle h'k'$ то существует наложение, при котором луч h переходит в луч h', а луч k — в луч k'.

III$_7$. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

Группа IV. **Аксиомы непрерывности**

IV$_1$. При произвольно выбранном единичном отрезке каждый отрезок имеет определенную длину.

IV$_2$. Для любого вещественного положительного числа a существует отрезок, длина которого при выбранном единичном отрезке равна a.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Аксиомы стереометрии Лобачевского

Основными понятиями в стереометрии Лобачевского, так же как и в стереометрии Евклида, являются точки, прямые, плоскости (основные объекты) и отношения «точка лежит на прямой», «точка лежит на плоскости», «точка лежит между двумя точками», «наложение» (основные отношения).

Аксиомы стереометрии Лобачевского состоят из аксиом абсолютной геометрии трехмерного пространства, т. е. из аксиом принадлежности, порядка, наложения и непрерывности (см. [3], гл. I), а также из аксиомы параллельности Лобачевского. Ниже перечислены все аксиомы стереометрии Лобачевского.

Группа I. **Аксиомы принадлежности**

I_1. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки, а в каждой плоскости — три точки, не лежащие на одной прямой.

I_2. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

I_3. Через любые две точки проходит прямая, и притом только одна.

I_4. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

I_5. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

I_6. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

I_7. Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

Группа II. **Аксиомы порядка**

II_1. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C — три различные точки некоторой прямой и точка B лежит также между точкой C и точкой A.

II_2. Из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

II_3. Каждая точка O, лежащая на прямой, разделяет множество остальных точек этой прямой на два непустых подмножества так, что точка O лежит между любыми двумя точками разных подмножеств и не лежит между любыми двумя точками одного и того же подмножества.

II_4. Каждая прямая a, лежащая в плоскости α, разделяет множество всех точек плоскости α, не лежащих на прямой a, на два подмножества так, что отрезок, соединяющий любые две точки разных подмножеств, имеет с прямой a только одну общую внутреннюю точку, а отрезок, соединяющий любые две точки одного и того же подмножества, не имеет общих точек с прямой a.

II_5. Каждая плоскость α разделяет множество всех точек пространства, не лежащих в этой плоскости, на два подмножества так, что отрезок, соединяющий любые две точки разных подмножеств, имеет с плоскостью α только одну общую точку, а отрезок, соединяющий любые две точки одного и того же подмножества, не имеет общих точек с плоскостью α.

Группа III. **Аксиомы наложения**

Фигура Φ называется равной фигуре Φ', если существует наложение, при котором фигура Φ переходит в фигуру Φ'.

III_1. Каждая фигура равна самой себе.

III_2. Если фигура Φ равна фигуре Φ', то фигура Φ' равна фигуре Φ.

III_3. Если фигура Φ_1 равна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 равна фигуре Φ_3, то фигура Φ_1 равна фигуре Φ_3.

III_4. Если при наложении концы отрезка AB отображаются в концы отрезка $A'B'$, то отрезок AB отображается на отрезок $A'B'$.

III_5. На любом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

III_6. Если плоскости неразвернутых углов hk и $h'k'$ являются соответственно границами полупространств P и P' и $\angle hk = \angle h'k'$, то существует наложение, при котором луч h переходит в луч h', луч k — в луч k', полупространство P — в полупространство P'.

III_7. От любого луча в данную полуплоскость можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

Группа IV. **Аксиомы непрерывности**

IV_1. При произвольно выбранном единичном отрезке каждый отрезок имеет определенную длину.

IV_2. Для любого вещественного положительного числа a существует отрезок, длина которого при выбранном единичном отрезке равна a.

Группа V. **Аксиома параллельности Лобачевского**

V_1. Через точку, не лежащую на данной прямой, в плоскости, проходящей через точку и прямую, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную прямую.

УКАЗАНИЯ И ОТВЕТЫ

Часть I. Планиметрия

Глава 1

1. См. [1], § 3, теорема 2. **2.** См. [1], § 4, теорема 1. **3.** См. [1], свойства 1° и 2°, теорема § 5. **4.** См. [1], § 6, лемма. **6.** См. [1], теорема § 8. **8.** Пусть в треугольниках ABC и $A'B'C'$ $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle A > \angle A'$. Рассмотреть треугольник ABD, равный треугольнику $A'B'C'$ и расположенный так, что C, $D \doteq AB$. Затем провести биссектрису угла CAD и воспользоваться неравенством треугольника. **9.** Воспользоваться задачей 8. **10.** Пусть в треугольнике ABC а) высоты AA_1 и BB_1 равны. Доказать, что $\angle A$ и $\angle B$ равные острые углы; б) медианы AM и BN равны. Сначала доказать, что $\angle AMN = \angle BNM$. **11.** См. [1], § 17, теорема 1. **12.** См. [1], § 17, теорема 3. **13.** б) Для доказательства существования точки M воспользоваться теоремой 2 § 3. **15.** Доказать методом от противного. **17.** Воспользоваться леммой § 5. **18.** а) Воспользоваться леммой § 5. **19.** Воспользоваться задачей 18 и теоремой § 5.

Глава 2

1. Воспользоваться свойством 6.2°. **5.** Воспользоваться теоремой 5 § 2 и теоремой 1 § 6. **6.** Сначала доказать, что $\triangle ACD = \triangle A_1C_1D_1$, где $AB = BD$, $A{-}B{-}D$ и $A_1D_1 = B_1D_1$, $A_1{-}B_1{-}D_1$. **8.** Воспользоваться теоремой о внешнем угле треугольника. **9.** в) Провести биссектрису данного угла и воспользоваться предложением $Л_4$. **12.** Рассмотреть направленные прямые $\overline{h}$ и $\overline{k}$, содержащие лучи $\overline{h}$ и $\overline{k}$, и к прямым $\overline{h}$, $\overline{k}$, $\overline{a}$ применить теорему 3 § 10. **13.** Рассмотреть два случая в зависимости от того, лежат ли прямые U_1V_1 и U_2V_2 по разные стороны от прямой U_0V_0 или по одну сторону от нее. **15.** Воспользоваться теоремой 1 § 11. **17.** Провести перпендикуляр AH из точки A прямой a к прямой b и рассмотреть симметрию относительно прямой b. **19.** Рассмотреть серединные перпендикуляры к отрезкам AB, BC и AC и воспользоваться теоремой 3 § 11. **20.** Через точку A провести две прямые, параллельные прямой BC. **23.** в) Доказать методом от противного, воспользовавшись теоремой 4 § 2 и теоремой 4 § 10. **25.** а) Пусть лучи AA_1 и BB_1 перпендикулярны к прямой AB и расположены по одну сторону от прямой AB, а A_1H — перпендикуляр к прямой BB_1. Тогда AA_1HB — искомый четырехугольник; б) аналогично случаю а) доказать существование искомого четырехугольника. **26.** Провести сначала луч BC', параллельный лучу AA'.

Глава 3

2. а) Провести перпендикуляр CH к прямой AD и к двупрямоугольнику $ABCD$ применить теорему 2 § 13; б), в) воспользоваться свойством 13.2°. **4.** Воспользоваться задачей 2а. **6.** а) Провести луч AC, параллельный лучу k; б) пусть прямая l пересекает луч h под прямым углом в точке M. Сначала доказать, что прямая l проходит внутри угла BMN, где N — точка луча h, такая, что $A–M–N$. **7.** Воспользоваться теоремой 2 § 14. **8.** Воспользовавшись аксиомой III_6, рассмотреть наложение, при котором $h_1 \mapsto h_2$, а л$A_1B_1 \mapsto$ лA_2B_2. **10.** Воспользоваться свойством 14.3°. **12.** Пусть PQ — общий перпендикуляр расходящихся прямых PP_1 и QQ_1, $M \in PP_1$, $N \in QQ_1$, $M \neq P$. Провести перпендикуляр MH к прямой QQ_1 и воспользоваться задачей 4. **13.** Воспользоваться осью симметрии данных прямых. **15.** Ответ: существует, если $\widetilde{\varphi} < \Pi\left(\frac{\widetilde{p}}{2}\right)$; не существует, если $\widetilde{\varphi} \geqslant \Pi\left(\frac{\widetilde{p}}{2}\right)$. **17.** Воспользовавшись леммой § 11, доказать методом от противного. **19.** Доказать методом от противного. **20.** а) Доказать методом от противного; б) ответ: прямые, проходящие через середину общего перпендикуляра расходящихся прямых a, b и параллельные этим прямым. **23.** Через концы данного отрезка провести прямые, перпендикулярные к данной прямой. **24.** Ответ: а) луч; б) точка или интервал.

Глава 4

1. Рассмотреть шесть возможных случаев в зависимости от типов пучков. **3.** Ответ: а), б) одна и только одна прямая;

в) если прямая l и база пучка — расходящиеся прямые, то одна и только одна прямая; в других случаях такой прямой не существует. **4.** Ответ: не более чем две общие точки. **5.** Воспользоваться теоремой 2 § 19. **8.** См. § 20, п. 2. Воспользоваться теоремой 6 § 2. **9.** Пусть точки A_1 и B_1 симметричны относительно точки K. К четырехугольнику A_1B_1CD применить теорему о сумме углов четырехугольника. **11.** Воспользоваться теоремой 2 § 18. **12.** Сначала доказать, что сторона, противоположная прямому или тупому углу, не является диаметром. Затем воспользоваться теоремой 6 § 2. **13.** Воспользоваться теоремой 1 § 21. **16.** Воспользоваться теоремой 2 § 21. **17.** См. [1], § 45, теорема 1. **18.** См. [1], § 45, теорема 1. **19.** Воспользоваться теоремой 4 § 21. **20.** Воспользоваться теоремой 3 § 21. **21.** См. [1], § 45, теорема 1. **22.** Воспользоваться леммой 1 § 14. **26.** Построить сначала вырожденный прямоугольный треугольник: а) сторона которого равна половине данного отрезка; б) острый угол которого равен данному углу. **27.** Воспользоваться теоремой 3 § 23. **28.** Воспользоваться идеей доказательства леммы 1 § 21. **29.** Построить сначала вырожденный треугольник со стороной AB, у которого $\angle A = \angle B$. **30.** Пусть AA_1 и AA_2 — лучи данных предельных линий. Использовать биссектрису угла A_1AA_2. **31.** Воспользоваться свойствами 19.4° и 19.3°.

Глава 5

1. а) Использовать рис. 83 текста; б) воспользоваться задачей 2а гл. 3 и задачей 1. **2.** а) Воспользоваться теоремой 3 § 22; б) воспользовавшись задачей а), рассмотреть $\triangle ABC$, где $\angle C$ прямой, $\angle A = h_1k_1$, $\Pi(BC) = \overline{h_2k_2}$. **4.** Воспользоваться теоремой 2 § 25. **5.** Рассмотреть серединный перпендикуляр к отрезку AB. **6.** Воспользоваться теоремой 5 § 25. **10.** Воспользовавшись теоремой 4 § 26, использовать идею доказательства теоремы 2 § 18. **11.** Воспользоваться следствием 1 теоремы § 27. **12.** Рассмотреть наложение, при котором луч BA переходит в луч B_1A_1, а луч BC — в луч B_1C_1. Сначала доказать, что луч AD переходит в луч A_1D_1, а затем методом от противного доказать, что $C \mapsto C_1$. **13.** См. указание к задаче 12. **14.** Воспользоваться задачей 13. **15.** Пусть в трипрямоугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ углы A, B, C, A_1, B_1, C_1 прямые. Рассмотреть четырехугольники $AA'D'D$

и $A_1A_1'D_1'D_1$, где точки A и A', D и D' симметричны относительно прямой BC, а A_1 и A', D_1 и D_1' симметричны относительно прямой B_1C_1. **16.** Воспользоваться задачей 12. **17.** Пусть AOB — данный угол. Сначала провести прямую l, пересекающую луч OB под прямым углом и расходящуюся с прямой OA. **18.** Воспользоваться задачей 17. **19.** Воспользоваться свойством 28.2°. **21.** Воспользоваться свойством 28.3°. **22.** Воспользоваться задачей 2а § 25. **23.** Воспользоваться задачей 22. **24.** Воспользоваться задачей 2 б.

Глава 6

2. Рассмотреть отражение от прямой CM. **4.** Рассмотреть поворот вокруг точки A на угол C_1AB. **5.** Рассмотреть поворот вокруг точки B на угол ABE. **6.** Рассмотреть отражение от точки M. **7.** Воспользоваться теоремой 3 § 30. Ответ: а) центральная и осевая симметрии; б) поворот и осевая симметрия. **8.** Пусть f не является тождественным преобразованием. Тогда существует точка M, такая, что $M' = f(M) \neq M$. Доказать, что MM' — инвариантная прямая, а середина отрезка MM' — инвариантная точка. **10.** Пусть $g_1g_2 = f$. Доказать, что $gf = e$. **11.** Учесть, что при указанных движениях каждая вершина треугольника переходит в вершину треугольника. Ответ: тождественное преобразование, три осевые симметрии и два вращения. **12.** Ответ: тождественное преобразование, две осевые симметрии и центральная симметрия. **13.** Воспользоваться теоремой 3 § 30. Ответ: осевая симметрия и перенос вдоль прямой AB. **15.** Воспользоваться свойством 31.3°. **16.** Пусть f_1 и f_2 — данные центральные симметрии. Доказать, что f_1f_2 не имеет инвариантных точек и имеет одну инвариантную прямую. **17.** Воспользоваться теоремой 3 § 30. **18.** См. указание к задаче 17. **21.** Воспользоваться задачами 18 и 20. **22.** Сначала доказать, что существует скользящая симметрия и перенос вдоль прямой, при которых луч AA_1 переходит в луч BB_1. Затем воспользоваться теоремой 3 § 30. **23.** Воспользоваться задачей 22, доказать методом от противного. **24.** Воспользоваться теоремой 2 § 32, задачей 23 и теоремой 2 § 23. **25.** Воспользоваться теоремой 3 § 19, задачей 23 и теоремой 2 § 23. **26.** а) Воспользоваться задачей 14 главы I и аксиомой III_5; б) воспользоваться задачей а). **27.** Доказать методом от противного. При этом воспользоваться задачей 26а и аксиомой

III_5. **28.** Воспользоваться теоремой 3 § 30 и задачей 27. **29.** Воспользоваться задачами 26 б и 28.

Глава 7

3. Доказать методом от противного. **6.** Воспользоваться теоремой 1 § 37. **7.** Воспользоваться теоремой 2 § 36 и ее следствием. **8.** При доказательстве теоремы 1 § 11 воспользоваться отображением Ω_{Ar}, где A — данная в теореме точка. **10.** Воспользоваться соглашениями о понятии «лежать между» для точек расширенной прямой. **11.** Ответ: заградительной прямой неразвернутого угла называется прямая, проходящая через несобственные точки сторон угла. Аналогично определяются заградительные прямые двух пересекающихся прямых. **12.** См. ответ к задаче 11. **13.** См. ответ к задаче 11. **14.** Воспользоваться задачей 7. **15.** Воспользоваться задачей 7. **17.** Пусть $\widetilde{\alpha}$ — острый угол. Сначала доказать, что существует треугольник ACU_∞, такой, что $\angle A = \widetilde{\alpha}$, $\angle C$ — прямой. **22.** Рассмотреть три случая в зависимости от того, являются ли точки A и B собственными или несобственными. **23.** Рассмотреть два случая в зависимости от того, является ли точка C собственной или несобственной. **24.** Воспользоваться задачей 23 и леммой § 40. **25.** Пусть O — точка пересечения двух высот треугольника. Применить теорему § 27 к треугольнику ABO. **26.** Пусть $\angle B$ острый и V_∞ — общая точка прямых AA_1 и BB_1. Применить теорему 5 § 40 к треугольнику $BU_\infty V_\infty$. **29.** Воспользоваться теоремой 2 § 31. **30.** Воспользоваться задачей 29. Ответ: нет.

Глава 8

1. Ответ: $3\alpha - 150^\circ$. **2.** Воспользоваться формулой (1) § 42. **3.** Воспользоваться формулой (1) § 42. **4.** $\delta(F_2) = \delta(F) + \delta(F_1)$ или $\delta(F_1) = \delta(F) + \delta(F_2)$. **5.** Воспользоваться теоремой 4 § 25. **6.** Провести перпендикуляры CC_1 и DD_1 к прямой AB. **7.** Воспользоваться свойствами 28.3° и 28.4°. **8.** См. [11], теорема 113. **10.** Воспользоваться теоремой 2 § 43. Ответ: нет. **12.** Воспользоваться теоремой 1 § 25. **13.** Воспользоваться свойствами 28.3° и 28.6°. Ответ: а) $S(ABC) = S(ADC)$; б) $S(ABD) > S(CBD)$. **14.** Воспользоваться теоремой 5 § 25. **15.** Ответ: а) $\frac{\pi}{2} - \alpha$; б) $2(\pi - \alpha - \beta)$; в) $\pi - 2\alpha$. **16.** $\pi(n-2) - n\alpha$. **17.** Ответ: $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$,

$\frac{1}{3}\pi$. **18.** Ответ: $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$. **19.** Воспользоваться теоремой 6 § 40. Ответ: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$. **20.** Учесть, что прямая $U_\infty W_\infty$ разлагает четырехугольник $U_\infty V_\infty W_\infty T_\infty$ на два треугольника $U_\infty V_\infty W_\infty$ и $U_\infty T_\infty W_\infty$. Ответ: 2π.

Часть II. Стереометрия

Глава 2

1. Воспользоваться аксиомой III_6 и теоремой § 7 ч. I. **2.** Учесть, что в плоскости ACD выполняются все аксиомы и теоремы планиметрии, и воспользоваться теоремой 2 § 10 ч. I. **3.** а) Воспользовавшись аксиомой III_6^*, сначала доказать, что существует наложение, при котором $A \mapsto A$, л$AU_\infty \mapsto$ лA_1V_∞ и $B \mapsto B_1$, а затем воспользоваться свойством 5.1°; б) методом от противного доказать, что $AB = A_1B_1$, и воспользоваться задачей а). **4.** Воспользоваться утверждением: в вырожденном треугольнике внешний угол больше угла этого треугольника, не смежного с ним. **5.** Воспользоваться свойством 5.1°. **6.** Доказать методом от противного: пусть a и b — инвариантные прямые движения. Рассмотреть возможные случаи в зависимости от взаимного расположения прямых a и b. **7.** Воспользоваться теоремой 3 § 6. **8.** Воспользоваться теоремой 3 § 6. **9.** а) Доказать методом от противного; б) воспользоваться леммой § 6. **10.** Ответ: нет. Воспользоваться заградительной прямой данного угла. **11.** Доказать методом от противного, воспользовавшись теоремой 2 § 7. **12.** Доказать методом от противного, воспользовавшись свойством 7.1°. **14.** См. указание к задаче 12. **16.** Воспользоваться теоремой 3 § 7. **17.** Воспользоваться леммой § 8. **18.** Воспользоваться теоремой 2 § 8 и ее следствием. **19.** Воспользоваться свойством 9.5°. **20.** На одной из данных прямых отметить точку и сначала через эту точку провести две прямые, параллельные другой прямой. **22.** а) Воспользоваться задачей 5; б) воспользоваться задачей а). **23.** Воспользовавшись теоремой 1 § 8 и свойством 7.2°, через прямую, лежащую в одной из плоскостей и параллельную другой, провести плоскость, перпендикулярную к другой. Затем воспользоваться леммой 2 § 17 ч. I. **24.** Ответ: нет. **25.** Через прямую a провести плоскость, перпендикулярную к плоскости α, и воспользоваться теоремой 3 § 17 ч. I. **26.** Воспользоваться задачей 23 и теоремой 2 § 8.

Глава 4

1. Воспользовавшись следствием теоремы 1 § 15, рассмотреть движение, при котором $A \mapsto C$, а полуорицикл AB/γ_1 переходит в полуорицикл AB/γ_2, и воспользоваться идеей доказательства теоремы 1 § 6 [2]. **2.** Рассмотреть движение, при котором одна дуга орицикла переходит в другую. **3.** Сначала решить задачу для случая, когда орициклы γ_1 и γ_2 совпадают и дуга $\smile AB/\gamma$ является частью дуги $\smile AC/\gamma$. Учесть, что в треугольнике ABC $\angle B > \angle C$. **4.** Воспользоваться идеей доказательства теоремы 3 § 14 [2]. **5.** Воспользоваться определением $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ и первой формулой (1) § 16. **6.** См. указание к задаче 5. **7.** Преобразовать правую часть формул, воспользовавшись определениями $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} y$, $\operatorname{ch} y$ (см. § 16, п. 1). **8.** Преобразовать правую часть формул, воспользовавшись определениями $\operatorname{th} x$, $\operatorname{th} y$, $\operatorname{cth} x$, $\operatorname{cth} y$ и формулами (3) § 16. **9.** Сначала доказать, что данные формулы эквивалентны формуле $\operatorname{sh}^2 \frac{1}{2} x + \operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} x = \operatorname{ch} x$, затем воспользоваться второй формулой (3). **10.** См. указание к задаче 9. **11.** Воспользоваться теоремой 4 § 10 ч. I. **12.** а) Рассмотреть движение, при котором $\smile A_1B_1 \mapsto \smile A_2B_2$; б), в) доказать методом от противного, что $\smile A_1B_1 =\smile A_2B_2$. **13.** Пусть $\smile AB/C$ — произвольный трехвершинник, а $\smile A_1B_1/U_\infty$ — вырожденный трехвершинник. Воспользовавшись следствием теоремы 1 § 14, рассмотреть движение, при котором полуорицикл, который исходит из точки A и содержит дугу AB, переходит в полуорицикл, который исходит из точки A_1 и содержит дугу A_1B_1. **14.** Рассмотреть дуги $\smile AB'$ и $\smile A_1B_1'$, симметричные дугам AB и A_1B_1 относительно соответственно осей AA' и A_1A_1', и воспользоваться свойством 14.1°. **16.** Воспользоваться следствием теоремы 1 § 14.

Глава 5

1. Воспользоваться формулами (7) и (8) § 19. Ответ: $\operatorname{ch} \frac{AB}{k} = \operatorname{ch} \frac{AC}{k} = \operatorname{ctg}\beta \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ch} \frac{BC}{2k} = \dfrac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\beta}$. **2.** Воспользоваться формулами (8) и (3) § 19. Ответ: пусть AH, $BM = CN$ — высоты треугольника ABC. $\operatorname{ch} \frac{AH}{k} = \dfrac{\cos\beta}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, $\operatorname{ch} \frac{BM}{k} = \operatorname{sh} \frac{CN}{k} = \sin\alpha \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$. **4.** Применить формулы (8) и (7) § 21 к треугольникам ABC и ACD. **5.** Воспользоваться задачей 4 и формулами (7) и (6) § 21. **6.** Воспользоваться формулой (3) § 20 и теоремой синусов. **7.** Воспользоваться задачей 6. **8.** а) Воспользоваться теоремой 3 § 19; б) воспользоваться теоремами 1 и 2 § 19. Ответ: а) $\operatorname{ch}\frac{c}{k} = 3$, $\operatorname{ch}\frac{a}{k} = \operatorname{ch}\frac{b}{k} = \sqrt{3}$; б) $\operatorname{ch}\frac{c}{k} = 2{,}18$, $\alpha = 16^\circ$, $\beta = 10^\circ$. **9.** Воспользоваться формулой (1) § 20 и теоремой 2 § 20. Ответ: $\alpha = 38^\circ$, $\beta = 47^\circ$, $\gamma = 24^\circ$. **10.** Доказать соотношение (7) с помощью формул (2) § 21 и (2) § 19; (8) — с помощью формул (4) § 21 и (3) § 19; (9) — с помощью формул (7) и (8) § 19. **11.** Воспользоваться формулами (7) и (8) § 19. **12.** Доказать методом от противного. При этом учесть, что углы $\Pi(CA_1)$, $\Pi(A_1B)$, $\Pi(CA_2)$, $\Pi(A_2B)$ острые и функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастающая при изменении аргумента x от 0 до $\frac{\pi}{2}$. **13.** Если a — длина стороны правильного треугольника, то имеем $\operatorname{ch}\frac{a}{2k} = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}$. Если $\alpha = 60^\circ$, то $\operatorname{ch}\frac{a}{2k} = 1$, т. е. $a = 0$, что невозможно. **14.** На луче k отложить отрезок OA_0, которому соответствует угол hk как угол параллельности.

Глава 6

1. Воспользоваться соответствующими аксиомами евклидова пространства (см. [3], § 1). **2.** Воспользоваться тем, что если $(AB_1D_1) = (AB_1D_2)$, то точки D_1 и D_2 совпадают. **3.** Сначала доказать, что $(M_1M_2, M_3) = \frac{x_1 - x_3}{x_3 - x_2}$, $(M_1M_2, M_4) = \frac{x_1 - x_4}{x_4 - x_2}$. **4.** Воспользоваться задачей 3. **6.** Воспользоваться свойством 2° (см. § 24, п. 2) и теоремой 2 § 24. **7.** Воспользоваться теоремой 2 § 24. **8.** Так как $AB = CD$, то существует наложение f, при котором либо $C = f(A)$, $D = f(B)$, либо $D = f(A)$, $C = f(B)$. Во втором случае рассмотреть наложение, при котором $A \mapsto O$, где O — центр шара Ω, и воспользоваться теоремой 1 § 24. **9.** Если при данном наложении $h \mapsto m$, $k \mapsto l$, то рассмотреть наложение, при котором вершина угла hk переходит в центр шара Ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Атанасян Л. С., Денисов Н. С., Силаев Е. В.* Курс элементарной геометрии. Часть I. Планиметрия. — М.: Синтаксис-Пресс, 1997.
2. *Атанасян Л. С.* Основания школьного курса планиметрии. — М.: Прометей МГПИ им. В. И. Ленина, 1989.
3. *Атанасян Л. С., Базылев В. Т.* Геометрия. Часть I. — М.: Просвещение, 1986; часть II. — М.: Просвещение, 1987.
4. *Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф.* и др. Геометрия: Учебник для 7–9 классов средней школы. — М.: Просвещение, 1990 (и последующие издания).
5. *Каган В. Ф.* Основания геометрии. Часть I. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.
6. *Каган В. Ф.* Н. И. Лобачевский. — М.; Л., 1944, 1948.
7. *Каган В. Ф.* Очерки по геометрии // Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч.— М.; Л.: ГИТТЛ, 1946–1951. — Т. I–V.
8. *Котельников Л. П., Фок В. А.* Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике.— М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
9. *Кутузов Б. В.* Геометрия Лобачевского и элементы основания геометрии. — М.: Учпедгиз, 1950.
10. *Норден А. П.* Элементарное введение в геометрию Лобачевского. — М.: ГИТТЛ, 1953.
11. *Перепелкин Д. И.* Курс элементарной геометрии. Часть I. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.
12. *Широков П. А., Каган В. Ф.* Строение неевклидовой геометрии. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть II. Стереометрия

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для операционных систем Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Атанасян Левон Сергеевич

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Редактор *А. С. Попов*
Художник *Н. А. Новак*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Корректор *Е. Н. Клитина*
Оригинал-макет подготовлен *Е. Г. Ивлевой* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано к использованию 09.09.14.

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: binom@Lbz.ru, http://www.Lbz.ru

Атанасян Левон Сергеевич (1921 – 1998) родился в Ереване в семье учителей. После окончания школы в 1939 г. поступил на физико-математический факультет Московского государственного педагогического института им. К. Либкнехта. В 1949 г. им была защищена кандидатская диссертация на кафедре геометрии Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина.

Вся его преподавательская деятельность прошла в стенах МГПИ им. Ленина. Он занимал должности декана физико-математического факультета, проректора по учебной работе. С 1955 г. до своей смерти заведовал кафедрой геометрии этого учебного заведения. С 1969 по 1977 гг. работал в Департаменте высшего образования ЮНЕСКО в Париже.

Левон Сергеевич приступил к работе над школьными учебниками по геометрии в 1978 г. Он автор более 40 книг, учебников по геометрии для школьников и студентов педвузов, научных и научно-методических статей. В настоящее время комплекты учебников по геометрии для основной и старшей школы возглавляемых им авторских коллективов являются самыми распространенными и востребованными в России. Левон Сергеевич является Почетным профессором Московского педагогического государственного университета, он пользовался большим уважением и любовью коллег по работе, студентов и своих учеников.