В. И. Арнольд

Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2012

УДК 517.9
ББК 22.161.6
А84

Арнольд В. И.
Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
379 с.
ISBN 978-5-4439-2069-6

В книге изложен ряд основных идей и методов, применяемых для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений. Элементарные методы интегрирования рассматриваются с точки зрения общематематических понятий (разрешение особенностей, группы Ли симметрий, диаграммы Ньютона и т. д.).

Теория уравнений с частными производными первого порядка изложена на основе геометрии контактной структуры.

Рассматриваются вопросы качественной теории дифференциальных уравнений (структурная устойчивость, У-системы), асимптотических методов (усреднение, адиабатические инварианты), аналитических методов локальной теории в окрестности особой точки или периодического решения (нормальные формы Пуанкаре), а также теории бифуркаций фазовых портретов при изменении параметров.

Книга рассчитана на широкие круги математиков — от студентов, знакомых лишь с простейшими понятиями анализа и алгебры, до преподавателей, научных работников и всех читателей, применяющих дифференциальные уравнения в физике и естественных науках.

Подготовлено на основе книги: *Арнольд В. И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — 4-е изд. — М.: МЦНМО, 2012. — 384 с.: ил.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–74–83.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2069-6

© В. И. Арнольд, 2012.
© МЦНМО, 2014.

Оглавление

Предисловие 5

Некоторые используемые обозначения 9

Глава 1. **Специальные уравнения** 11
§ 1. Дифференциальные уравнения, инвариантные относительно групп симметрий 11
§ 2. Разрешение особенностей дифференциальных уравнений 19
§ 3. Уравнения, не разрешенные относительно производных 25
§ 4. Нормальная форма уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности регулярной особой точки 36
§ 5. Стационарное уравнение Шрёдингера 43
§ 6. Геометрия дифференциального уравнения второго порядка и геометрия пары полей направлений в трехмерном пространстве 55

Глава 2. **Уравнения с частными производными первого порядка** . 71
§ 7. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка 71
§ 8. Нелинейное уравнение с частными производными первого порядка 80
§ 9. Теорема Фробениуса 98

Глава 3. **Структурная устойчивость** 102
§ 10. Понятие структурной устойчивости 103
§ 11. Дифференциальные уравнения на торе 111
§ 12. Аналитическое приведение к повороту аналитических диффеоморфизмов окружности 128
§ 13. Введение в гиперболическую теорию 135
§ 14. У-системы 142
§ 15. Структурно устойчивые системы не всюду плотны 157

Глава 4. **Теория возмущений** 160
§ 16. Метод усреднения 161
§ 17. Усреднение в одночастотных системах 165
§ 18. Усреднение в многочастотных системах 170
§ 19. Усреднение в гамильтоновых системах 181
§ 20. Адиабатические инварианты 185
§ 21. Усреднение в слоении Зейферта 191

Глава 5. **Нормальные формы** 198
§ 22. Формальное приведение к линейной нормальной форме 198
§ 23. Резонансный случай 202
§ 24. Области Пуанкаре и Зигеля 205
§ 25. Нормальная форма отображения в окрестности неподвижной точки 210
§ 26. Нормальная форма уравнения с периодическими коэффициентами 213
§ 27. Нормальная форма окрестности эллиптической кривой 222
§ 28. Доказательство теоремы Зигеля 235

Глава 6. **Локальная теория бифуркаций** 242
§ 29. Семейства и деформации 242
§ 30. Матрицы, зависящие от параметров, и особенности декремент-диаграмм 260
§ 31. Бифуркации особых точек векторного поля 283
§ 32. Версальные деформации фазовых портретов 289
§ 33. Потеря устойчивости положения равновесия 294
§ 34. Потеря устойчивости автоколебаний 311
§ 35. Версальные деформации эквивариантных векторных полей на плоскости 330
§ 36. Перестройки топологии при резонансах 351
§ 37. Классификация особых точек 367

Образцы экзаменационных задач 373

Предисловие

Основное открытие Ньютона, то, которое он счел нужным засекретить и опубликовал лишь в виде анаграммы, состоит в следующем: «*Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa*». В переводе на современный математический язык это означает: «Полезно решать дифференциальные уравнения».

В настоящее время теория дифференциальных уравнений представляет собой трудно обозримый конгломерат большого количества разнообразных идей и методов, в высшей степени полезный для всевозможных приложений и постоянно стимулирующий теоретические исследования во всех отделах математики.

Большая часть путей, связывающих абстрактные математические теории с естественно-научными приложениями, проходит через дифференциальные уравнения. Многие разделы теории дифференциальных уравнений настолько разрослись, что стали самостоятельными науками; проблемы теории дифференциальных уравнений имели большое значение для возникновения таких наук, как линейная алгебра, теория групп Ли, функциональный анализ, квантовая механика и т. д. Таким образом, дифференциальные уравнения лежат в основе естественно-научного математического мировоззрения.

При отборе материала для настоящей книги автор старался изложить основные идеи и методы, применяемые для изучения дифференциальных уравнений. Особые усилия были приложены к тому, чтобы основные идеи, как правило простые и наглядные, не загромождались техническими деталями. С наибольшей подробностью рассматриваются наиболее фундаментальные и простые вопросы, в то время как изложение более специальных и трудных частей теории носит характер обзора.

Книга начинается с исследования некоторых специальных дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах. При этом основное внимание уделяется не формально-рецептурной стороне элементарной теории интегрирования, а ее связям с общематематическими идеями, методами и понятиями (разрешение особенно-

стей, группы Ли, диаграммы Ньютона), с одной стороны, и естественно-научным приложениям — с другой.

Теория уравнений с частными производными первого порядка рассматривается при помощи естественной контактной структуры в многообразии 1-струй функций. Попутно излагаются необходимые элементы геометрии контактных структур, делающие всю теорию независимой от других источников.

Значительную часть книги занимают методы, обычно называемые качественными. Современное развитие основанной А. Пуанкаре качественной теории дифференциальных уравнений привело к пониманию того, что, подобно тому как явное интегрирование дифференциальных уравнений, вообще говоря, невозможно, невозможным оказывается и качественное исследование сколько-нибудь общих дифференциальных уравнений с многомерным фазовым пространством. В книге обсуждается анализ дифференциальных уравнений с точки зрения структурной устойчивости, т. е. устойчивости качественной картины по отношению к малым изменениям дифференциальных уравнений. Изложены основные результаты, полученные после первых работ А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина в этой области: начала теории структурно устойчивых У-систем Аносова, все траектории которых экспоненциально неустойчивы, и теорема Смейла о неплотности множества структурно устойчивых систем. Обсуждается также вопрос о значении этих математических открытий для приложений (речь идет об описании устойчивых хаотических режимов движения, вроде турбулентных).

К наиболее мощным и часто применяемым методам исследования дифференциальных уравнений относятся различные асимптотические методы. В книге изложены основные идеи метода усреднения, восходящего к работам основоположников небесной механики и широко используемого во всех областях приложений, где нужно отделить медленную эволюцию от быстрых осцилляций (Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский и др.).

Несмотря на обилие исследований по усреднению, в вопросе об эволюции даже для простейших многочастотных систем далеко не все ясно. В книге дается обзор работ о прохождении резонансов и о захвате в резонанс, направленных к выяснению этого вопроса.

Основой метода усреднения является идея уничтожения возмущений посредством подходящего выбора системы координат. Эта же идея лежит в основе теории нормальных форм Пуанкаре. Метод

нормальных форм является основным методом локальной теории дифференциальных уравнений, описывающей поведение фазовых кривых в окрестности особой точки или замкнутой фазовой кривой. В книге изложены основы метода нормальных форм Пуанкаре, включая доказательство фундаментальной теоремы Зигеля о линеаризации голоморфного отображения.

Важные применения метод нормальных форм Пуанкаре находит не только при исследовании отдельного дифференциального уравнения, но и в теории бифуркаций, когда предметом изучения является семейство уравнений, зависящих от параметров.

Теория бифуркаций изучает изменения качественной картины при изменении параметров, от которых зависит система. При общих значениях параметров обычно приходится иметь дело с системами общего положения (все особые точки простые и т. д.). Однако если система зависит от параметров, то при некоторых значениях параметров неизбежно встречаются вырождения (например, слияние двух особых точек векторного поля).

В однопараметрическом семействе общего положения встречаются лишь простейшие вырождения (те, от которых нельзя избавиться малым шевелением семейства). Таким образом возникает иерархия вырождений по коразмерностям соответствующих поверхностей в функциональном пространстве всех изучаемых систем: в однопараметрических семействах общего положения встречаются лишь вырождения, соответствующие поверхностям коразмерности один, и т. д.

В последние годы в теории бифуркаций наблюдается значительный прогресс, связанный с применением идей и методов общей теории особенностей дифференцируемых отображений Х. Уитни.

Книга заканчивается главой о теории бифуркаций, в которой применяются развитые в предыдущих главах методы и описаны результаты, полученные в этой области, начиная с основополагающих работ А. Пуанкаре и А. А. Андронова.

При изложении всех вопросов автор стремился избежать аксиоматически-дедуктивного стиля, характерным признаком которого являются немотивированные определения, скрывающие фундаментальные идеи и методы; подобно притчам, их разъясняют лишь ученикам наедине.

Продолжающаяся, как утверждают, уже более 50 лет аксиоматизация и алгебраизация математики привела к неудобочитаемости

столь большого числа математических текстов, что стала реальностью всегда угрожающая математике угроза полной утраты контакта с физикой и естественными науками. Автор старался вести изложение таким образом, чтобы книгой могли пользоваться не только математики, но все потребители теории дифференциальных уравнений.

У читателя настоящей книги предполагается лишь очень небольшие общематематические представления в объеме примерно первых двух курсов университетской программы; достаточно (но не необходимо), например, знакомство с учебником В. И. Арнольда «Обыкновенные дифференциальные уравнения» (М., 1975*).

Изложение построено таким образом, чтобы читатель мог пропускать места, оказавшиеся для него трудными, без большого ущерба для понимания дальнейшего: были приняты меры к тому, чтобы по возможности избегать ссылок из главы в главу и даже из параграфа в параграф.

Содержание настоящей книги составил материал ряда обязательных и специальных курсов, читавшихся автором на механико-математическом факультете МГУ в 1970—1976 годах для студентов-математиков II—III курсов, для слушателей факультета повышения квалификации и на экспериментальном потоке математиков естественно-научного профиля.

Автор выражает благодарность студентам О. Е. Хадину, А. К. Ковальджи, Е. М. Кагановой и доценту Ю. С. Ильяшенко, чьи конспекты были очень полезными при подготовке этой книги. Составленный Ю. С. Ильяшенко конспект специального курса, а также конспекты лекций на экспериментальном потоке в течение ряда лет находились в библиотеке факультета. Автор благодарен многочисленным читателям и слушателям этих курсов за ряд ценных замечаний, использованных при подготовке книги. Автор благодарен рецензентам Д. В. Аносову и В. А. Плиссу за тщательное рецензирование рукописи, способствовавшее ее улучшению.

Июнь 1977 г. *В. И. Арнольд*

* При изложении нескольких отдельных вопросов используются или упоминаются также самые первоначальные сведения о дифференциальных формах, группах Ли и функциях комплексного переменного. Для понимания большей части книги знакомство с этими сведениями не обязательно.

Некоторые используемые обозначения

$\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел.

$\mathbb{C}$ — множество всех комплексных чисел.

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел.

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное вещественное линейное пространство.

$\exists$ — существует.

$\forall$ — для всякого.

$a \in A$ — элемент a множества A.

$A \subset B$ — подмножество A множества B.

$A \cap B$ — пересечение (общая часть) множеств A и B.

$A \cup B$ — объединение множеств A и B.

$A \setminus B$ — разность множеств A и B (часть A вне B).

$A \times B$ — прямое произведение множеств A и B (множество пар (a, b), $a \in A$, $b \in B$).

$A \oplus B$ — прямая сумма линейных пространств.

$f : A \to B$ — отображение f из A в B.

$x \mapsto y$ или $y = f(x)$ — отображение f переводит элемент x в элемент y.

$\operatorname{Im} f$ или $f(A)$ — образ отображения f (но $\operatorname{Im} z$ — мнимая часть z).

$f^{-1}(y)$ — полный прообраз точки y при отображении f (множество всех x, для которых $f(x) = y$).

$\operatorname{Ker} f$ — ядро линейного оператора f (полный прообраз нуля).

$\dot{f}$ — скорость изменения функции f (производная по времени t).

f', f_*, df/dx, Df/Dx — производная отображения f.

$T_x M$ — касательное пространство к многообразию M в точке x.

$A \Rightarrow B$ — из утверждения A следует B.

$A \Leftrightarrow B$ — утверждения A и B равносильны.

$\omega_1 \wedge \omega_2$ — внешнее произведение дифференциальных форм ω_1 и ω_2.

$f \circ g$ — суперпозиция отображений $((f \circ g)(x) = f(g(x)))$.

$L_v f$ — производная функции f по направлению векторного поля v.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — координатные функции. Вектор v задается тогда своими компонентами $v_1, \ldots, v_n$. Производная по направлению

поля v задается формулой

$$L_v f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

При фиксированной системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$ используются следующие обозначения:

dx_k — функция от вектора, равная его k-й компоненте.

$\frac{\partial}{\partial x_k}$ — векторное поле, k-я компонента которого равна 1, а остальные компоненты равны нулю.

Для дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$ область определения правой части называется *фазовым пространством*, точка x называется *фазовой точкой*, вектор $v(x)$ называется *вектором фазовой скорости*, v называется *векторным полем фазовой скорости*. Если $x = \varphi(t)$ — решение уравнения, то образ отображения φ называется *фазовой кривой*, а график отображения φ — *интегральной кривой*.

Для дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x, t)$ область определения правой части называется *расширенным фазовым пространством*; v задает в расширенном фазовом пространстве поле направлений; если $x = \varphi(t)$ — решение, то график отображения φ называется *интегральной кривой*.

Глава 1

Специальные уравнения

При исследовании дифференциальных уравнений применяются методы всех отделов математики. В настоящей главе обсуждаются отдельные специальные уравнения и типы уравнений. Особое внимание обращается, с одной стороны, на значение рассматриваемых уравнений для приложений, а с другой — на связи методов исследования с различными общематематическими вопросами (разрешение особенностей, диаграммы Ньютона, группы Ли симметрий и т. д.). Глава заканчивается элементарной теорией стационарного одномерного уравнения Шрёдингера и геометрической теорией нелинейного уравнения второго порядка.

§ 1. Дифференциальные уравнения, инвариантные относительно групп симметрий

В этом параграфе изложены общие соображения, на которых основаны методы интегрирования дифференциальных уравнений в явном виде. В качестве примера обсуждается теория подобия, т. е. теория однородных и квазиоднородных уравнений.

А. Группы симметрий дифференциальных уравнений

Рассмотрим векторное поле v в фазовом пространстве U.

Определение. Диффеоморфизм $g\colon U \to U$ называется *симметрией поля* v, если он переводит поле v в себя:

$$v(gx) = g_{*x}v(x).$$

Поле v называется тогда *инвариантным* относительно диффеоморфизма g.

Пример 1. Векторное поле с независящими от x компонентами на плоскости с координатами (x, y) инвариантно относительно сдвигов вдоль оси x (рис. 1).

Пример 2. Векторное поле $x\partial_x + y\partial_y$ на евклидовой плоскости (x, y) инвариантно относительно растяжений $g(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ и относительно поворотов.

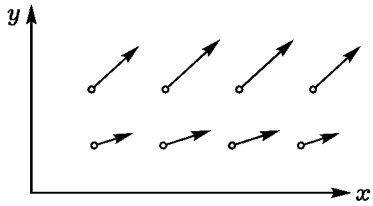


Рис. 1

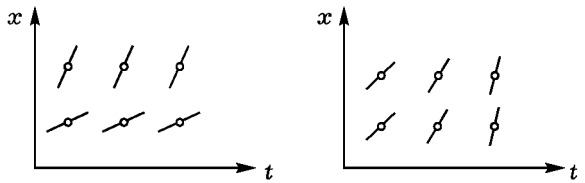
Все симметрии данного поля образуют группу.

Задача. Найти группу симметрии поля $x\partial_x + y\partial_y$ на плоскости с координатами (x, y).

Рассмотрим поле направлений в расширенном фазовом пространстве.

Определение. Диффеоморфизм расширенного фазового пространства называется *симметрией поля направлений*, если он переводит поле в себя. Поле направлений называется тогда *инвариантным* относительно этого диффеоморфизма.

Пример 1. Поле направлений уравнения $\dot{x} = v(x)$ инвариантно относительно сдвигов вдоль оси t (рис. 2*а*).



а) *б*)

Рис. 2

Пример 2. Поле направлений уравнения $\dot{x} = v(t)$ инвариантно относительно сдвигов вдоль оси x (рис. 2*б*).

Определение. Дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$ (соответственно, $\dot{x} = v(x, t)$) называется *инвариантным* относительно диффеоморфизма g фазового пространства (соответственно, расширенного фазового пространства), если векторное поле v (соответственно, поле направлений v) инвариантно относительно этого диффеоморфизма g; диффеоморфизм g называется тогда *симметрией* данного уравнения.

Теорема. *Симметрия уравнения переводит фазовые (интегральные) кривые уравнения в фазовые (интегральные) кривые того же уравнения.*

Доказательство. Пусть $x=\varphi(t)$ — решение уравнения $\dot{x}=v(x)$ и g — симметрия. Тогда $x=g(\varphi(t))$ — тоже решение, поэтому симметрия переводит фазовую кривую в фазовую кривую. Для интегральных кривых доказательство аналогично. □

Пример. Семейство интегральных кривых уравнения $\dot{x}=v(t)$ переходит в себя при сдвигах вдоль оси x, а уравнения $\dot{x}=v(x)$ — при сдвигах вдоль оси t.

Следующие примеры часто встречаются в приложениях под названием «теории подобия», «теории размерностей» или «соображений автомодельности».

Б. Однородные уравнения

Определение. Поле направлений на плоскости без точки O называется *однородным*, если оно инвариантно относительно всех растяжений

$$g^\lambda(x,y)=(e^\lambda x, e^\lambda y), \quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=v(x,y)$$

называется *однородным*, если его поле направлений однородно (рис. 3).

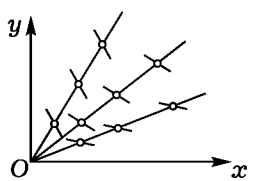


Рис. 3

Иными словами, направления поля во всех точках каждого луча, выходящего из начала координат, должны быть параллельны:

$$v(e^\lambda x, e^\lambda y)\equiv v(x,y).$$

Пример. Функция f называется однородной степени d, если

$$f(e^\lambda x, e^\lambda y)\equiv e^{\lambda d} f(x,y).$$

Примером является любая форма (однородный многочлен) степени d. Пусть P и Q — две формы степени d от x и y. Дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=P, \quad \dot{y}=Q$$

задается векторным полем на плоскости. Соответствующее поле направлений в области $P\neq 0$ является полем направлений однородного уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P} \quad \left(\text{например, } \frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy},\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ и т. п.}\right).$$

Замечание. Областью определения однородного поля не обязательно должна быть вся плоскость без точки O — однородные поля можно рассматривать в любой однородной (= инвариантной относительно растяжений) области, например в угле с вершиной O и т. п.

Теорема. *Интегральная кривая однородного уравнения под действием растяжений g^λ переходит в интегральную кривую того же уравнения.*

Таким образом, для исследования однородного уравнения достаточно исследовать по одной интегральной кривой в каждом секторе плоскости.

Доказательство получается непосредственным применением теоремы п. А.

Задача. Докажите, что фазовые кривые системы $\dot{x} = P$, $\dot{y} = Q$, где P и Q формы степени d, получаются друг из друга при помощи гомотетий (рис. 4).

Если какая-либо из этих кривых замкнута и проходится за время T, то при растяжении g^λ из нее получится замкнутая фазовая кривая с периодом обращения $\frac{T}{e^{\lambda(d-1)}}$.

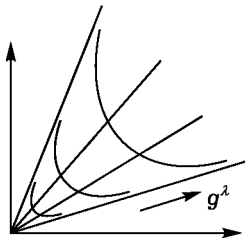


Рис. 4

В. Квазиоднородные уравнения и «соображения размерностей»

Зафиксируем вещественные числа α и β и рассмотрим семейство растяжений в разное число раз по разным направлениям на плоскости

$$g^s(x, y) = (e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y). \qquad (1)$$

Заметим, что формула (1) задает однопараметрическую группу линейных преобразований плоскости (рис. 5).

Определение. Функция f называется *квазиоднородной степени d*, если

$$f(g^s(x, y)) \equiv e^{ds} f(x, y).$$

Пример. Если $\alpha = \beta = 1$, то получаются обычные однородные функции степени d.

Квазиоднородные степени складываются при умножении функций. Они называются также *весами*. Таким образом, x имеет вес α,

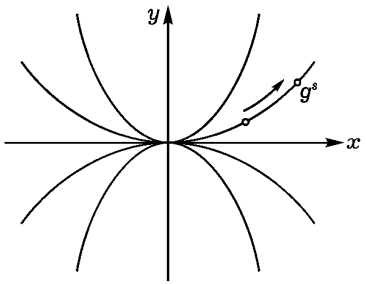


Рис. 5

y — вес β, x^2y — вес $2\alpha+\beta$ и т. д. Все квазиоднородные одночлены фиксированной степени легко увидеть на следующей *диаграмме Ньютона* (рис. 6). Будем изображать одночлен x^py^q точкой (p,q) на квадранте целочисленной решетки. Тогда показатели всех одночленов степени d — это целые точки на отрезке с уравнением $d=\alpha p+\beta q$ на плоскости показателей (p,q).

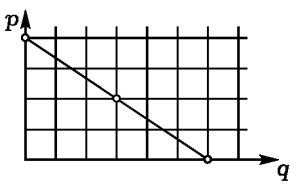


Рис. 6

Задача. Подобрать веса так, чтобы функция x^2+xy^3 была квазиоднородной.

Определение. Дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx}=v(x,y)$ называется *квазиоднородным* (*с весами* α, β), если поле направлений v инвариантно относительно растяжений (1).

Из общей теоремы п. А о симметриях вытекает

Теорема. *Интегральные кривые квазиоднородного уравнения получаются друг из друга под действием растяжений* (1).

Задача. Докажите, что функция $v(x,y)$ задает квазиоднородное дифференциальное уравнение (с весами (α,β)), если и только если она квазиоднородная степени $d=\beta-\alpha$.

Замечание. Приведенные определения и теоремы легко переносятся на случай большего двух числа переменных и на дифференциальные уравнения порядка выше 1. В частности, легко доказывается

Теорема. *Пусть на плоскости* (x,y) *дана кривая* $\gamma\colon y=y(x)$, *и в точке* (x_0,y_0) *имеем* $\dfrac{d^ky}{dx^k}=F$. *Тогда для кривой* $g^s\gamma$ *в соответствую-*

щей точке будет

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{(\beta - k\alpha)s} F.$$

Иными словами, $\frac{d^k y}{dx^k}$ *преобразуется при преобразовании* (1) *как* $\frac{y}{x^k}$, чем и объясняется удобство обозначения $\frac{d^k y}{dx^k}$.

Задача. Докажите, что если частица в силовом поле с однородной степени d силой проходит траекторию Γ за время T, то эта же частица пройдет гомотетичную траекторию $\lambda\Gamma$ за время

$$T' = \lambda^{(1-d)/2} T.$$

Решение. Уравнение Ньютона $\frac{d^2 x}{dt^2} = F(x)$, в котором F однородна степени d, переходит в себя при подходящих преобразованиях (1). Именно, для этого нужно взять веса α (для x) и β (для t) так, чтобы $\alpha - 2\beta = \alpha d$. Итак, $\beta = \frac{1-d}{2}\alpha$. Поэтому растяжению $x' = \lambda x$ соответствует $T' = \lambda^{(1-d)/2} T$.

Задача. Докажите третий закон Кеплера: квадраты времен прохождения подобных траекторий в поле тяготения относятся как кубы линейных размеров.

Решение. Из решения предыдущей задачи при $d = -2$ (закон всемирного тяготения) получаем $T' = \lambda^{3/2} T$.

Задача. Выясните, как зависит от амплитуды период колебаний в случае возвращающей силы, пропорциональной отклонению (линейный осциллятор) и кубу отклонения (мягкая сила).

Ответ. Для линейного маятника период не зависит от амплитуды, а для мягкого обратно пропорционален амплитуде.

Задача. Известно, что волчок с вертикальной осью имеет критическую угловую скорость: если угловая скорость больше критической, волчок стоит вертикально устойчиво, а если меньше — то падает.

Как изменится критическая угловая скорость, если перенести волчок на Луну, где ускорение силы тяжести в шесть раз меньше земного?

Ответ. Уменьшится в $\sqrt{6}$ раз.

Г. Применения однопараметрических групп симметрий к понижению порядка

Теорема. *Если известна однопараметрическая группа симметрий поля направлений в* $\mathbb{R}^n$, *то задача интегрирования соответствующего дифференциального уравнения сводится к задаче интегрирования уравнения в* $\mathbb{R}^{n-1}$.

В частности, если известна однопараметрическая группа симметрий поля направлений на плоскости, то соответствующее уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *интегрируется явно.*

Доказательство. Пусть $\{g^s\}$ — данная группа симметрий. Рассмотрим орбиты $\{g^s x\}$ потока $\{g^s\}$. Можно (по меньшей мере локально) определить $(n-1)$-мерное *пространство орбит* (факторпространство по действию g^s) и отображение p исходного пространства на факторпространство (орбиты потока $\{g^s\}$ p переводит в точки). Оказывается, исходное поле направлений переходит при отображении p в некоторое новое поле направлений в $(n-1)$-мерном пространстве орбит; его только и остается проинтегрировать. □

Точнее говоря, рассмотрим какую-нибудь точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$; мы предполагаем, что проходящая через точку x_0 орбита группы симметрий $\{g^s\}$ является кривой σ. Проведем через точку x_0 какую-либо $(n-1)$-мерную локальную трансверсаль Σ к кривой σ. В окрестности точки x_0 введем локальную систему координат (s, u), где паре $s \in \mathbb{R}$, $u \in \Sigma$ отвечает точка $g^s u$ исходного пространства. Тогда отображение p проектирования на пространство орбит и действие группы симметрий g^s задаются в окрестности точки x_0 формулами

$$p(s, u) = u, \quad g^{s_1}(s_2, u) = (s_1 + s_2, u)$$

(точки поверхности Σ параметризуют локальные орбиты).

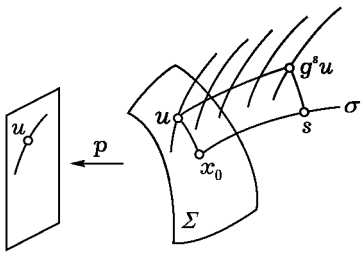


Рис. 7

Заметим, что если группа g^s явно известна, то координаты (s, u) можно явно найти. Запишем в этих координатах наше исходное дифференциальное уравнение. Если наше поле направлений в точке x_0 не касается поверхности Σ (чего всегда можно добиться выбором Σ), то в окрестности этой точки наше уравнение принимает вид

$$\frac{du}{ds} = v(s, u).$$

При этом группа симметрий $\{g^s\}$ имеет вид сдвигов вдоль оси s, поэтому *функция v от s не зависит*. Векторное поле $v(u)$ на Σ определяет на этой $(n-1)$-мерной поверхности поле направлений; зная его интегральные кривые, мы найдем (квадратурой) решения уравнения $\frac{du}{ds}=v(u)$, а значит — интегральные кривые исходного уравнения.

В частном случае $n=2$ выбор координат (s,u) сразу приводит к интегрируемому уравнению $\frac{du}{ds}=v(u)$.

Замечание. Практически часто бывает удобно вместо координаты s использовать подходящую функцию z переменной s. В такой системе координат уравнение, допускающее группу симметрий $\{g^s\}$, будет записываться в виде уравнения

$$\frac{du}{dz}=v(u)f(z)$$

(в случае $n=2$ — в виде уравнения с разделяющимися переменными).

Пример. Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными в полярной системе координат, а также в системе координат $u=y/x$, $z=x$ (рис. 8 *а*).

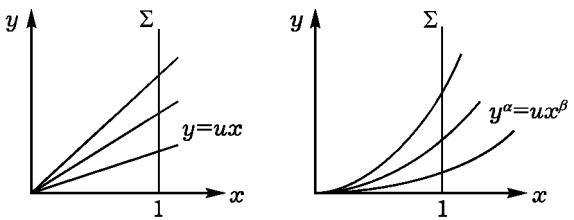
Здесь $\{g^s\}$ — однопараметрическая группа растяжений в e^s раз; Σ для полярной системы — окружность $x^2+y^2=1$, а для второй системы координат — прямая $x=1$; $z=e^s$.

Задача. В каких координатах интегрируется явно квазиоднородное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=v(x,y),$$

где вес x равен α, вес y равен β (так что v — квазиоднородная функция степени $\beta-\alpha$).

Решение. Можно взять $u=\frac{y^\alpha}{x^\beta}$, $z=x$ (в области, где $x\neq 0$). См. рис. 8 *б*.



а) *б*)

Рис. 8

Задача. Выписать явно уравнение с разделяющимися переменными, к которому приводится уравнение предыдущей задачи в координатах (u,z).

Решение. $y^\alpha = ux^\beta$, поэтому $\alpha y^{\alpha-1}\,dy = x^\beta\,du + \beta u x^{\beta-1}\,dx$. Если $dy = v\,dx$, то $\alpha y^{\alpha-1}v\,dx = x^\beta\,du + \beta u x^{\beta-1}\,dx$, т. е.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\alpha y^{\alpha-1}v - \beta u x^{\beta-1}}{x^\beta}.$$

Но $v(x, y) = x^{(\beta/\alpha)-1}w(u)$, поэтому

$$\frac{du}{dx} = \frac{\alpha w(u) - \beta u}{x}.$$

§ 2. Разрешение особенностей дифференциальных уравнений

Здесь коротко описан один важный общематематический прием, называемый разрешением особенностей, раздутием или σ-процессом.

A. σ-процесс

Вблизи неособой точки все векторные поля устроены просто и одинаково.

Для исследования мелких деталей всевозможных математических объектов вблизи особых точек разработан специальный аппарат, имеющий, подобно микроскопу, большую разрешающую силу — т. н. *разрешение особенностей*. С аналитической точки зрения речь идет о выборе таких систем координат вблизи особой точки, в которых малым перемещениям вблизи особенности соответствуют большие изменения координат.

Этим свойством обладает уже полярная система координат, но переход к полярным координатам требует трансцендентных (тригонометрических) функций, поэтому алгебраически часто удобнее другая процедура — так называемый σ-процесс, или раздутие особенности.

Мы начнем с одной вспомогательной конструкции. Пусть p: $\mathbb{R}^2 \setminus O \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ — стандартное расслоение, определяющее проективную прямую. (Проективная прямая — это многообразие, точками которого являются прямые на плоскости, проходящие через начало координат. Отображение p сопоставляет точке плоскости прямую, соединяющую ее с началом координат.)

Рассмотрим *график* Γ отображения p. Этот график представляет собой гладкую поверхность в прямом произведении $(\mathbb{R}^2 \setminus O) \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ (рис. 9). Вкладывая плоскость без точки в плоскость, мы можем рас-

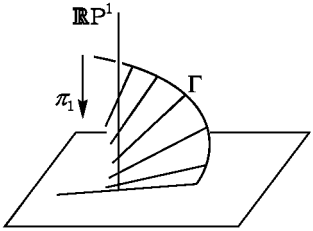


Рис. 9

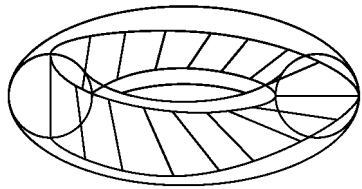


Рис. 10

сматривать график как гладкую поверхность Γ в прямом произведении $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$. Естественная проекция $\pi_1 \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}^2$ диффеоморфно отображает график Γ на проколотую плоскость $\mathbb{R}^2 \setminus O$. (Чтобы яснее представить себе все это, полезно заметить, что Γ локально имеет вид винтовой лестницы; в целом проективная прямая диффеоморфна окружности S^1, а произведение $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ диффеоморфно внутренности баранки.)

Теорема. *Замыкание графика* Γ *отображения* p *в* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ *является гладкой поверхностью* $\Gamma_1 = \Gamma \cup (O \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1)$. *Поверхность* Γ_1 *диффеоморфна листу Мёбиуса* (рис. 10).

Доказательство. Пусть (x, y) — координаты на плоскости, $u = y/x$ — аффинная локальная координата в $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$. Тогда (x, y, u) — локальная система координат в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$. В этой системе координат Γ задается уравнением $y = ux$, $x \neq 0$, поэтому Γ_1 в этой системе координат задается локальным уравнением $y = ux$. Эта поверхность гладкая; она получается добавлением к части Γ, покрытой нашей системой координат, попавшей туда части проективной прямой $O \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$.

Доказательство гладкости Γ_1 завершается рассмотрением второй локальной системы координат (x, y, v), где $x = vy$.

Проекция $\pi_2 \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ расслаивает Γ_1 на прямые. При полном обходе окружности $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ соответствующая прямая на $\mathbb{R}^2$ поворачивается на угол π; отсюда следует, что Γ_1 — лист Мёбиуса. □

Определение. Переход от $\mathbb{R}^2$ к Γ_1 называется *σ-процессом с центром* O, или *раздутием* точки O в прямую $O \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$. Отображение $\pi_1 \colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}^2$ называется *анти-сигма-процессом* или *сжатием* окружности $O \times \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ в точку O.

Отображение $\pi_1 \colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}^2$, суженное на Γ, является диффеоморфизмом на проколотую плоскость. Поэтому всевозможные геомет-

рические объекты на плоскости, имеющие особенность в точке O, переносятся на Γ_1. При этом особенности могут упрощаться или «разрешаться».

Пример. Рассмотрим три прямые, проходящие через точку O. На Γ_1 им соответствуют три прямые, пересекающие $\mathbb{R}P^1$ уже в разных точках (рис. 11).

Задача. Рассмотрим две кривые, имеющие в точке O касание порядка n (например, $y=0$ и $y=x^2$, $n=2$). Доказать, что на Γ_1 им соответствуют две кривые, имеющие в соответствующей точке O_1 касание порядка $n-1$ (рис. 12).

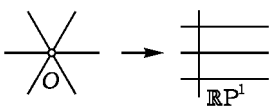


Рис. 11

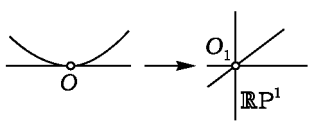


Рис. 12

Если после σ-процесса особенности не сводятся к трансверсальным пересечениям, то можно сделать еще σ-процесс в полученных особых точках, и т. д., пока все не сведется к трансверсальным пересечениям. Можно доказать, что особенности всякой алгебраической кривой могут быть таким образом разрешены (сведены к трансверсальным пересечениям) за конечное число шагов.

Задача. Разрешить особенность кривой $x^2=y^3$.

Ответ. См. рис. 13.

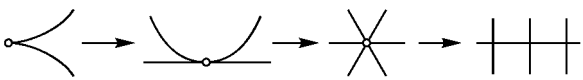


Рис. 13

Б. Формулы разрешения

Практически σ-процесс означает переход от координат (x, y) к координатам $(x, u=y/x)$ там, где $x\neq 0$, и к координатам $(v=x/y, y)$ там, где $y\neq 0$ (рис. 14). Посмотрим, что происходит при этом с дифференциальным уравнением, заданным векторным полем на плоскости (x, y). Мы будем предполагать, что точка O — особая точка нашего векторного поля.

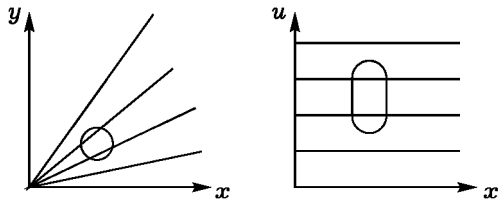


Рис. 14

Теорема. *Гладкое векторное поле w с особой точкой O превращается после σ-процесса в векторное поле на* Γ, *продолжающееся до гладкого поля на* Γ_1.

Доказательство. Пусть w — поле, задающее систему $\dot{x} = P(x, y)$, $\dot{y} = Q(x, y)$. В координатах $(x, u = y/x)$ находим

$$\dot{x} = P(x, ux), \quad \dot{u} = \frac{Q(x, ux) - uP(x, ux)}{x}.$$

Правые части гладкие, так как $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$. Во второй системе координат $(v = x/y, y)$ тоже получится гладкое поле. □

Замечание. Может оказаться, что полученное векторное поле обращается в нуль на всей вклеенной при σ-процессе прямой. В таком случае поле можно поделить на x в области первой системы координат и на y в области второй. Деление не меняет направлений векторов поля. Поэтому на Γ_1 возникает поле направлений с особыми точками, лежащими на вклеенной прямой, но не заполняющими ее целиком. В окрестности каждой особой точки поле направлений задается гладким векторным полем.

Каждому «направлению входа» фазовых кривых исходного поля в O соответствует особая точка полученного поля, лежащая на вклеенной при σ-процессе прямой $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$.

Если эти особые точки O_i устроены недостаточно просто, можно сделать в них σ-процессы. Продолжая таким же образом, можно в конце концов прийти к случаю, когда хотя бы одно из собственных чисел линеаризации поля в каждой особой точке отлично от нуля.

Во многих случаях уже первый σ-процесс позволяет разобраться в поведении фазовых или интегральных кривых вблизи особой точки. Например, интегральные кривые однородного уравнения переходят при наших заменах координат $(x, y) \mapsto (x, u = y/x)$ в интегральные кривые уравнений с разделяющимися переменными.

В. Пример. Исследование маятника с трением

Проиллюстрируем метод на тривиальном примере линейного уравнения. Уравнение маятника с коэффициентом трения k имеет вид $\ddot{x}+k\dot{x}+x=0$. Уравнение эквивалентно системе с фазовой плоскостью (x, y):

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-ky-x.$$

Мы приходим к однородному уравнению

$$\frac{dy}{dx}=-k-\frac{x}{y}.$$

Согласно общей теории, после σ-процесса, т. е. в системе координат $(x, u=y/x)$, переменные должны разделяться. Действительно, $\frac{du}{dx}=-\frac{u^2+ku+1}{ux}$. Вводя еще $\ln|x|=z$, получаем

$$\frac{du}{dz}=-k-\left(u+\frac{1}{u}\right).$$

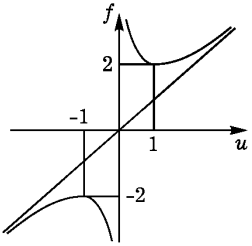


Рис. 15

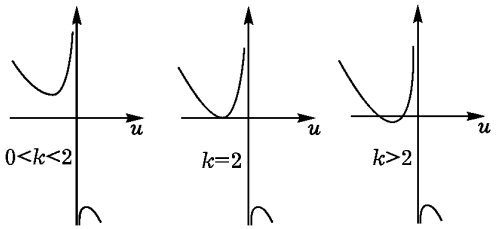


Рис. 16

Исследуем интегральные кривые этого уравнения при различных значениях коэффициента $k>0$. График функции $f=u+\frac{1}{u}$ — гипербола (рис. 15). Следовательно, график функции $-k-f(u)$ имеет вид, изображенный на рис. 16. Соответственно, интегральные кривые уравнения $\frac{du}{dz}=-k-f(u)$ будут иметь вид, изображенный на рис. 17. Возвращаясь на фазовую плоскость (x, y), получаем рис. 18.

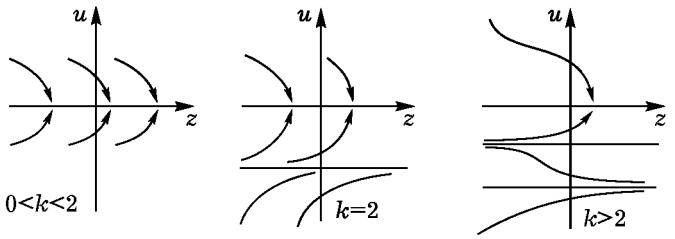


Рис. 17

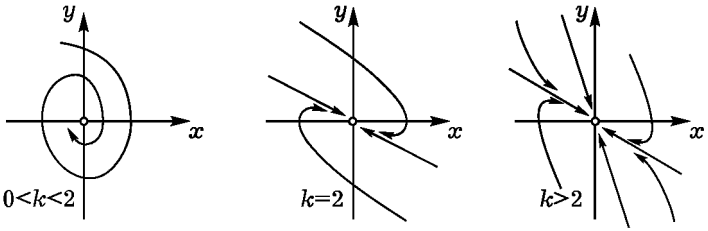


Рис. 18

Итак, при малых значениях коэффициента трения ($0 < k < 2$) маятник совершает бесконечное число колебаний, а при $k \geqslant 2$ направление движения маятника меняется не более одного раза.

Задача. Построить фазовые кривые уравнений $\dot{z} = az^n$ и $\dot{z} = a\bar{z}^n$, $z \in \mathbb{C}$.

Г. Пример. Период малых колебаний

Теорема. *Предположим, что все фазовые кривые, проходящие через близкие к положению равновесия O точки, замкнуты. Тогда предел периода колебаний вблизи O при стремлении амплитуды колебаний к 0 равен периоду колебаний в линеаризованной системе.*

Доказательство. После σ-процесса замкнутые фазовые кривые, обходящие один раз вокруг O, перейдут в кривые на листе Мёбиуса, замыкающиеся после двух оборотов; стремление амплитуды колебаний к 0 соответствует стремлению фазовой кривой на листе Мёбиуса к вклеиваемой при σ-процессе проективной прямой (к средней линии листа Мёбиуса).

По теореме о непрерывной зависимости решения от начального условия предел периода колебаний при стремлении амплитуды к 0 равен удвоенному периоду обращения по вклеенной прямой $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ в системе, полученной при σ-процессе. Но скорости движения по вклеенной прямой для данного поля и для его линеаризации одинаковы (см. уравнение для $\dot{u}$ в п. Б). Легко проверить, что все фазовые кривые линеаризованного уравнения замкнуты. Эти замкнутые кривые в линейной системе проходятся за одинаковое время, так как линейное векторное поле переходит в себя при растяжениях фазовой плоскости. Следовательно, предел периода колебаний в исходной системе равен пределу периода колебаний в линеаризованной системе и, значит, равен просто периоду колебаний в линеаризованной системе. □

Замечание. Предел, о котором шла речь, называется *периодом малых колебаний*.

Задача. Вычислить период малых колебаний маятника $\ddot{x} = -\sin x$ вблизи положения равновесия $x = 0$.

§ 3. Уравнения, не разрешенные относительно производных

В этом параграфе основные понятия теории дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, рассматриваются с точки зрения общей теории особенностей гладких отображений и геометрии пространства струй.

А. Основные определения

Речь идет об уравнении

$$F(x, y, p) = 0, \tag{1}$$

где $p = \dfrac{dy}{dx}$.

Примеры. 1) $p^2 = x$; 2) $p^2 = y$; 3) $y = px + p^2$.

Трехмерное пространство с координатами (x, y, p) называется *пространством* 1*-струй функций* $y(x)$. (Две гладкие функции y_1, y_2 имеют в точке x_0 одинаковую k-струю, если $|y_1(x) - y_2(x)| = o(|x - x_0|^k)$; таким образом, 1-струя функции определяется выбором точки x, выбором значения y функции в этой точке и выбором значения p производной.)

Уравнение (1) задает в пространстве струй поверхность. Оказывается, на этой поверхности возникает поле направлений. Вот как оно строится. Рассмотрим какую-либо точку в пространстве струй. Компоненты вектора ξ, приложенного в этой точке, будем обозначать $dx(\xi)$, $dy(\xi)$, $dp(\xi)$. Таким образом, dx, dy и dp — это не какие-то мистические бесконечно малые величины, а вполне определенные линейные функции от вектора ξ.

В точке (x, y, p) пространства струй рассмотрим плоскость, составленную из векторов ξ, для которых $dy = p\,dx$. Иными словами, вектор ξ, приложенный в точке (x, y, p), попадает в указанную плоскость (рис. 19), если его проекция на евклидову плоскость (x, y) имеет направление с тангенсом угла наклона к оси x, равным p. Построенная плоскость называется *контактной плоскостью*. Таким образом, в каждой точке пространства 1-струй приложена контактная плоскость; все вместе они

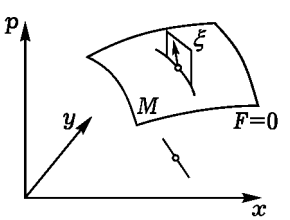


Рис. 19

образуют контактное поле плоскостей (или, как еще говорят, контактную структуру) в пространстве 1-струй.

Задача*. Существуют ли поверхности в пространстве 1-струй, касающиеся в каждой своей точке приложенной в этой точке контактной плоскости?

Ответ. Нет.

Предположим, что поверхность в пространстве 1-струй, заданная уравнением (1), гладкая. (Это — не очень большое ограничение, так как для гладкой (= бесконечно дифференцируемой) функции F общего положения значение 0 не критическое и множество уровня 0 гладкое; если для данной функции это не так, то при почти всяком сколь угодно малом изменении функции F множество уровня 0 становится гладким: например, достаточно прибавить к F малую константу (см. теорему Сарда, § 10 п. Е).)

Рассмотрим какую-либо точку на гладкой поверхности M, заданной уравнением (1), и предположим, что в этой точке касательная плоскость к поверхности не совпадает с контактной плоскостью. Тогда эти две плоскости пересекаются по прямой. Более того, касательные и контактные плоскости во всех близких точках поверхности пересекаются по прямым, так что в окрестности рассматриваемой точки возникает поле направлений на M.

Интегральными кривыми уравнения (1) называются интегральные кривые полученного поля направлений на поверхности M. Решить (или исследовать) уравнение (1) — значит найти (или исследовать) эти кривые. Связь интегральных кривых на M с графиками решений уравнения (1) на плоскости (x, y) обсуждается ниже; подчеркнем, что интегральные кривые на M определяются не в терминах решений уравнения (1), а в терминах контактных плоскостей.

Б. Регулярные точки и дискриминантная кривая

Направление оси p в пространстве струй будем называть *вертикальным направлением*. Пусть M — гладкая поверхность в пространстве струй, заданная уравнением (1). Рассмотрим отображение проектирования вдоль вертикального направления

$$\pi\colon M \to \mathbb{R}^2, \quad \pi(x, y, p) = (x, y).$$

Определение. Точка поверхности M называется *регулярной*, если она не является критической точкой отображения π.

Иными словами, точка поверхности M регулярна, если касательная плоскость в этой точке не вертикальна, или еще — если отображение проектирования на плоскость (x, y) в окрестности этой точки — диффеоморфизм.

Множество критических значений отображения π (т. е. проекция множества критических точек) называется *дискриминантной кривой* уравнения (1).

Пример. Для уравнения $p^2 = x$ дискриминантной кривой является ось y, а для уравнения $p^2 = y$ — ось x (рис. 20).

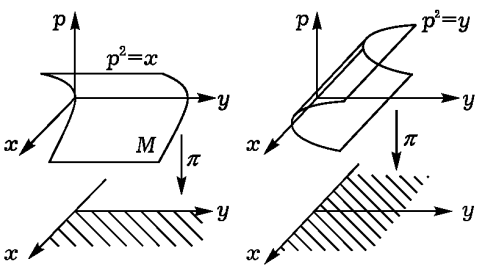


Рис. 20

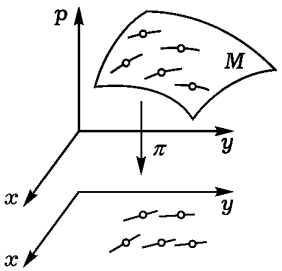


Рис. 21

Рассмотрим регулярную точку поверхности M. По теореме о неявной функции в окрестности этой точки M является графиком гладкой функции $p = v(x, y)$.

Теорема. *Проектирование на плоскость* (x, y) *переводит интегральные кривые уравнения* (1) *на* M *в окрестности регулярной точки в точности в интегральные кривые уравнения*

$$\frac{dy}{dx} = v(x, y) \tag{2}$$

в окрестности проекции этой точки (рис. 21).

Доказательство. По определению контактной плоскости, ее проекция на плоскость (x, y) есть прямая поля направлений (2). Поэтому поле направлений уравнения (1) в окрестности рассматриваемой регулярной точки на M переходит при локальном диффеоморфизме π в поле направлений уравнения (2); значит, переходят друг в друга и интегральные кривые. □

Замечание. В целом проекции интегральных кривых уравнения (1) на плоскость (x, y) не являются, вообще говоря, интегральными кривыми никакого поля направлений. Проекции интеграль-

ных кривых уравнения (1) на плоскость (x, y) имеют на дискриминантной кривой в общем случае точки возврата, но для некоторых уравнений (1) эти проекции остаются гладкими и в точках дискриминантной кривой.

В. Примеры

Пример 1. $p^2 = x$ (рис. 22).

Поверхность M — параболический цилиндр. Дискриминантная кривая — ось y. Чтобы найти интегральные кривые, удобно взять за координаты на M не x и y, а p и y (тем более, что последняя система координат — глобальная).

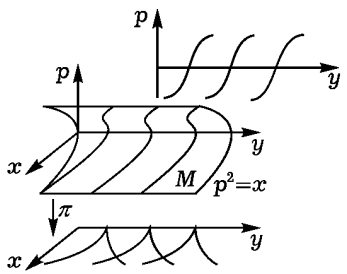


Рис. 22

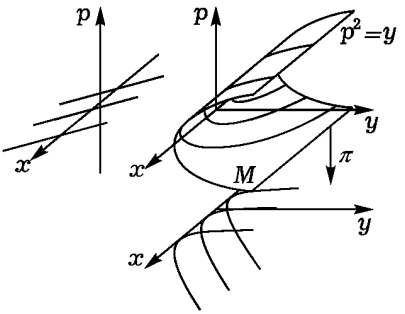


Рис. 23

Запишем условия, наложенные на компоненты dx, dy, dp вектора ξ, приложенного в точке (x, y, p) поверхности M и принадлежащего нашему полю направлений:

$$\begin{cases} p^2 = x & \text{(условие принадлежности } M\text{)}; \\ 2p\,dp = dx & \text{(условие касания } M\text{)}; \\ dy = p\,dx & \text{(условие принадлежности контактной плоскости)}. \end{cases}$$

Следовательно, в координатах (p, y) интегральные кривые определяются из уравнения $dy = 2p^2\,dp$.

Итак, интегральные кривые на M даются соотношениями $y + C = \frac{2}{3}p^3$, $x = p^2$. Их проекции на плоскость (x, y) — полукубические параболы.

Пример 2. $p^2 = y$ (рис. 23).

Поступая как в предыдущем примере, получаем

$$\begin{cases} p^2 = y, \\ 2p\,dp = dy, \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

Выбирая в качестве координат на поверхности M на этот раз x и p, получаем

$$p(dx - 2dp) = 0,$$

откуда либо $p = 0$, $y = 0$, либо

$$x = 2p + C, \quad y = p^2.$$

Проекции этих кривых на плоскость (x, y) — параболы, касающиеся дискриминантной кривой $y = 0$.

Пример 3 (уравнение Клеро). $y = px + f(p)$ (рис. 24).

Поверхность M — линейчатая (ее пересечения с плоскостями $p = \text{const}$ — прямые). За координаты на M удобно взять x и p. Интегральные кривые ищем из соотношений

$$\begin{cases} y = px + f(p), \\ dy = p\,dx + x\,dp + f'\,dp, \\ dy = p\,dx. \end{cases}$$

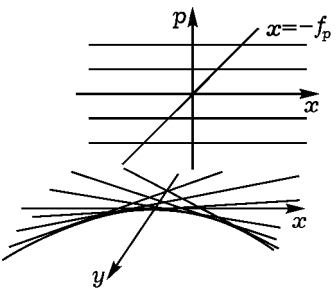


Рис. 24

Находим $(x + f')\,dp = 0$. Точки, где $x + f' = 0$, — критические, а остальные — регулярные. На плоскости с координатами (x, p) интегральные кривые — прямые $p = \text{const} = C$; эти прямые, вообще говоря, пересекают линию критических точек $(x + f' = 0)$.

Проекции интегральных кривых на плоскость (x, y) — прямые $y = Cx + f(C)$, касающиеся дискриминантной кривой. (Строго говоря, точки пересечения с критической линией не входят в интегральные кривые на M, так как для данного уравнения в этих точках поле направлений не определено: контактная плоскость касается M.)

Дискриминантная кривая находится из условий

$$y = px + f(p), \quad x + f' = 0.$$

Например, если $f(p) = -p^2/2$, то дискриминантная кривая — парабола $y = x^2/2$, а проекции интегральных кривых — ее касательные.

Теория уравнения Клеро связана с важными общематематическими понятиями: преобразованием Лежандра и проективной двойственностью.

Г. Преобразование Лежандра

Пусть дана функция f переменной x. *Преобразованием Лежандра** этой функции называется новая функция g новой переменной p, которая определяется следующим образом. Рассмотрим график f на плоскости (x, y). Проведем прямую $y = px$ с тангенсом угла наклона к оси x, равным p. Найдем точку, где график всего дальше от прямой по направлению оси ординат. Рассмотрим разность ординат точек прямой и графика. Эта разность и есть значение функции g в точке p (рис. 25):

$$g(p) = \sup_x (px - f(x)).$$

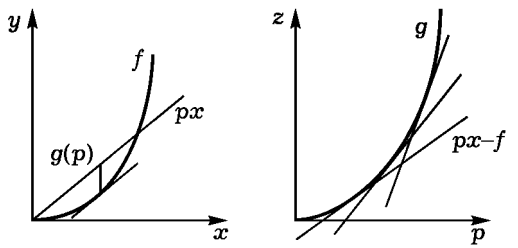


Рис. 25

Пример 1. Пусть $f(x) = x^2/2$. Вычисляя преобразование Лежандра, получаем $g(p) = p^2/2$.

Пример 2. Пусть $f(x) = x^\alpha/\alpha$. Тогда $g(p) = p^\beta/\beta$, где $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$. (Здесь x, p, α и β неотрицательны.)

Если функция f строго выпуклая ($f'' > 0$) и ее производная задает диффеоморфизм прямой на прямую, то функция g также строго выпуклая; при этом верхняя грань достигается в единственной точке x, где $f'(x) = p$. Такие точки x и p называются *соответствующими* друг другу при преобразовании Лежандра.

Теорема. *Имеет место неравенство*

$$f(x) + g(p) \geqslant px.$$

Если f строго выпукла и f' — диффеоморфизм на, то равенство достигается, если и только если точки x и p соответственные.

* В литературе преобразованиями Лежандра называют несколько разных объектов, связываемых также с именами Минковского и Юнга, но мы не будем стремиться к полной педантичности терминологии.

Доказательство. Функция $px - f(x)$ не превосходит своей верхней грани $g(p)$. □

Пример. При любых неотрицательных x, p имеет место неравенство $px \leqslant x^\alpha/\alpha + p^\beta/\beta$.

В формулируемых ниже следствиях предполагается, что рассматриваемые функции f и g строго выпуклы и их производные задают диффеоморфизмы прямой на прямую.

Следствие. *Преобразование Лежандра инволютивно*: *преобразованием Лежандра функции $g(p)$ является* (*при подходящем обозначении координаты*) *функция $f(x)$.*

Доказательство. Действительно, неравенство предыдущей теоремы симметрично относительно f и g. □

Следствие. *Переход от строго выпуклой функции g, задающей уравнение Клеро $y = px - g(p)$, к функции f, задающей огибающую решений по формуле $y = f(x)$, есть преобразование Лежандра.*

Доказательство. График функции f является огибающей своих касательных. □

Замечание. Преобразование Лежандра для функций n переменных определяется совершенно аналогично и обладает теми же свойствами. Если x — точка $\mathbb{R}^n$, то p — точка двойственного линейного пространства (пространства $\mathbb{R}^{n*}$ линейных функций на $\mathbb{R}^n$).

Д. Проективная двойственность

Преобразование Лежандра является частным случаем одной общей конструкции проективной геометрии. Рассмотрим проективное пространство размерности n. Это пространство обозначается через $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

Точка проективного пространства задается ненулевым вектором x из аффинного пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, определенным с точностью до умножения на число, отличное от нуля. Это определение записывается кратко так:

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus O)/(\mathbb{R} \setminus O).$$

Гиперплоскость в проективном пространстве состоит из всех точек проективного пространства, для которых соответствующие точки аффинного пространства принадлежат одной гиперплоскости, проходящей через нуль.

Рассмотрим множество всех гиперплоскостей в n-мерном проективном пространстве. Это множество само естественно является n-мерным проективным пространством.

Действительно, гиперплоскость в проективном пространстве задается однородным уравнением

$$(a, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad a \in \mathbb{R}^{n+1*} \setminus O,$$

где $\mathbb{R}^{n+1*}$ — пространство линейных функций в $\mathbb{R}^{n+1}$ (это пространство само линейно, имеет размерность $n+1$ и называется двойственным или дуальным к исходному линейному пространству $\mathbb{R}^{n+1}$).

Таким образом, гиперплоскости в проективном пространстве соответствует ненулевой вектор в $\mathbb{R}^{n+1*}$, определенный с точностью до умножения на отличное от нуля число. Следовательно, *множество всех гиперплоскостей в* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ *имеет естественную структуру проективного пространства размерности* n:

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^{n*} = (\mathbb{R}^{n+1*} \setminus O)/(\mathbb{R} \setminus O).$$

Проективное пространство гиперплоскостей в данном проективном пространстве $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ называется *двойственным к* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ *пространством* и обозначается через $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n*}$. Например, пространство всех прямых на проективной плоскости само является проективной плоскостью, двойственной исходной.

Заметим, что двойственность является взаимным понятием, т. е. $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n**} = \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Это следует из симметрии a и x в уравнении гиперплоскости $(a, x) = 0$.

Примеры. Все прямые, проходящие через одну точку проективной плоскости, образуют, как нетрудно сообразить, прямую на двойственной плоскости. Все прямые, проходящие через одну точку проективной плоскости внутри угла с вершиной в этой точке образуют, как нетрудно видеть, отрезок на двойственной плоскости.

Все касательные к невырожденной кривой второго порядка на проективной плоскости образуют невырожденную кривую второго порядка на двойственной плоскости. Вообще, все касательные к любой гладкой кривой образуют (не обязательно гладкую) кривую на двойственной плоскости. Эта кривая называется двойственной к исходной.

Теорема. *Графики строго выпуклой функции и ее преобразования Лежандра проективно двойственны друг другу.*

Доказательство. Рассмотрим всевозможные прямые на аффинной плоскости с координатами (x, y), не параллельные оси y. Эти прямые сами образуют плоскость: можно задать прямую уравнением $y = px - z$ и рассматривать (p, z) как аффинные координаты на

новой плоскости. В таком случае преобразование Лежандра сводится к переходу от графика функции f к семейству касательных к этому графику: когда точка на плоскости (x, y) пробегает график функции f, касательная к графику функции f пробегает на плоскости (p, z) кривую, являющуюся графиком преобразования Лежандра, $z = g(p)$. □

Таким образом, *преобразование Лежандра есть не что иное, как переход от кривой к проективно двойственной кривой, записанный в аффинных координатах.*

Пример. Пусть график f — выпуклая (вниз) ломаная. *Опорной прямой* называется прямая, от которой график лежит вверх, но с которой он имеет общую точку*. Рассмотрим все опорные прямые к выпуклой ломаной.

Легко проверить, что они сами образуют выпуклую ломаную на двойственной плоскости. Действительно, опорные прямые в каждой вершине исходной ломаной заполняют угол и, следовательно, образуют отрезок на двойственной плоскости. Точно так же вершины на двойственной плоскости получаются из отрезков исходной ломаной.

Проективная двойственность позволяет рассматривать более общие случаи, чем преобразование Лежандра.

Задача. Построить кривую, проективно двойственную кривой рис. 26.

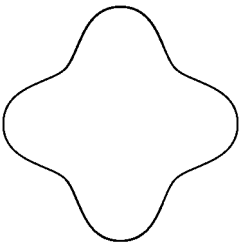


Рис. 26

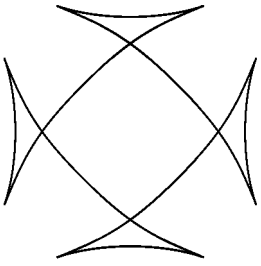


Рис. 27

Указание. Двойным касательным исходной кривой отвечают точки самопересечения двойственной кривой — следовательно, двойственная кривая имеет 4 точки самопересечения.

Точкам перегиба исходной кривой соответствуют точки возврата двойственной кривой. Действительно, если $f = x^3$, то касательная к графику в точке $x = t$ задается координатами $p = 3t^2$, $z = 2t^3$. Эти соотношения определяют на плоскости с координатами (p, z) кривую с точкой возврата. Итак,

* Вообще, *опорная гиперплоскость* к выпуклому телу есть плоскость, имеющая с телом общую точку и такая, что тело лежит в одном из полупространств, на которые плоскость делит пространство.

двойственная кривая имеет 8 точек возврата, по две между каждыми последовательными самопересечениями.

Далее, рассмотрим исходную кривую как пару пересекающихся эллипсов, слегка сглаженных вблизи точек пересечения (части каждого эллипса внутри другого выкинуты).

Двойственная кривая также связана с парой эллипсов. Точкам пересечения исходных эллипсов соответствуют двойные касательные двойственных. Отсюда уже легко сообразить, какой перестройкой двойственная кривая получается из пары пересекающихся эллипсов с их двойными касательными (рис. 27).

E. Преобразование Лежандра и сопряженные нормы

Определение. *Нормой* в $\mathbb{R}^n$ называется вещественная неотрицательная выпуклая положительно однородная четная функция первой степени, равная нулю лишь в начале координат:

$$f \geqslant 0, \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad f(\lambda x) = |\lambda| f(x), \quad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y).$$

Пусть f — норма в $\mathbb{R}^n$. Функция f задается множеством, где она равна единице. Это множество является выпуклой центрально-симметричной относительно нуля гиперповерхностью в $\mathbb{R}^n$. Обратно, каждое компактное выпуклое центрально симметричное относительно нуля тело, содержащее нуль в $\mathbb{R}^n$, определяет единственную норму, равную 1 на его границе. Эта гиперповерхность $f = 1$ называется *единичной сферой нормы* f.

Задача 1. Найти единичные сферы следующих норм в $\mathbb{R}^3$:

а) $f = \sqrt{(x,x)}$, б) $f = \max|x_i|$, в) $f = \sum|x_i|$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{n*}$, сопряженное к $\mathbb{R}^n$.

Определение. *Сопряженная норма* в $\mathbb{R}^{n*}$ определяется как

$$g(p) = \max_{f(x)\leqslant 1} |(p,x)|.$$

Легко проверить, что g действительно норма.

Отношение сопряженности взаимно, так как определяющее неравенство можно переписать в симметричном виде $|(p,x)| \leqslant f(x)g(p)$.

Сопоставим каждой точке p сопряженного пространства гиперплоскость $p = 1$ в исходном пространстве.

Теорема. *Единичная сфера сопряженной нормы есть множество опорных гиперплоскостей единичной сферы исходной нормы.*

Доказательство. Условие $g(p) = 1$ означает, что (p,x) на исходном шаре имеет максимум, равный 1, т. е. что плоскость $p = 1$ опорная для исходной сферы. □

Множество всех гиперплоскостей, опорных к данной выпуклой гиперповерхности, называется *двойственной выпуклой гиперповерхностью*. Таким образом, единичные сферы двойственных норм двойственны.

Задача 2. Найти поверхности в $\mathbb{R}^3$, двойственные а) сфере, б) тетраэдру, в) кубу, г) октаэдру.

Задача 3. Найти нормы, сопряженные нормам задачи 1.

Из всего сказанного выше видно, что переход от выпуклой гиперповерхности к двойственной ей локально задается преобразованием Лежандра.

Ж. Задача об огибающих семейства плоских кривых

Две гладкие функции двух переменных

$$x = x(s,t), \quad y = y(s,t)$$

задают семейство кривых на плоскости, параметризованных параметром t (указывающим точку на кривой) и занумерованных параметром s (указывающим номер кривой).

Задача. Нарисовать семейства кривых, заданных функциями

а) $x=(s+t)^2$, $y=t$,

б) $x=s+st+t^3$, $y=t^2$ (s и t малы)

в) $x=(s+t^2)^2$, $y=t$.

Ответ. См. рис. 28.

а) *б)* *в)*

Рис. 28

Можно показать, что для семейства общего положения огибающая — кривая, единственные особенности которой точки возврата (как у полукубической параболы) и точки самопересечения; при этом в окрестности каждой точки гладкости огибающей семейство приводится к одной из нормальных форм а), б), в) гладкими заменами координат $X(x,y)$, $Y(x,y)$ и параметров $S(s)$, $T(s,t)$.

В то же время в окрестности общей точки дискриминантной кривой уравнение, неразрешенное относительно производной, приводится, вообще говоря, к нормальной форме

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x$$

гладкой заменой координат $X(x,y)$, $Y(x,y)$ (см. § 4).

В этих координатах проекции интегральных кривых на плоскость (X,Y) — полукубические параболы. Таким образом, дискриминантная кривая является огибающей проекций интегральных кривых лишь для исключительных уравнений (например, для уравнения Клеро). В частности, при

небольшом общем изменении уравнения Клеро дискриминантная кривая из огибающей превратится в геометрическое место точек возврата проекций интегральных кривых.

§ 4. Нормальная форма уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности регулярной особой точки

Здесь исследуются особенности семейства интегральных кривых для дифференциального уравнения общего положения, не разрешенного относительно производной.

А. Особые точки

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, p) = 0, \quad \text{где } p = dy/dx, \tag{1}$$

заданное гладкой функцией F в некоторой области.

Мы предположим, что уравнение (1) задает гладкую поверхность в трехмерном пространстве струй с координатами (x, y, p). По теореме о неявной функции для этого достаточно, чтобы в точках, где $F = 0$, не обращался в нуль полный дифференциал функции F, что мы и будем предполагать.

Рассмотрим проекцию поверхности $F = 0$ на координатную плоскость (x, y) параллельно p-направлению.

Определение. Точка поверхности $F = 0$ называется *особой для уравнения* (1), если проектирование $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ поверхности на плоскость в окрестности этой точки не является локальным диффеоморфизмом поверхности на плоскость.

По теореме о неявной функции, особые точки — это те точки поверхности $F = 0$, в которых $\partial F/\partial p = 0$.

Б. Криминанта

Рассмотрим множество всех особых точек уравнения (1). Это множество задается двумя уравнениями $F = 0$, $\partial F/\partial p = 0$ в трехмерном пространстве струй. Поэтому, вообще говоря, особые точки образуют кривую.

Определение. Множество особых точек уравнения $F = 0$ в трехмерном пространстве струй (x, y, p) называется *криминантой* уравнения.

По теореме о неявной функции криминанта является гладкой кривой в трехмерном пространстве струй в окрестности каждой своей точки, в которой ранг производной отображения $(x, y, p) \mapsto (F, \partial F/\partial p)$ трехмерного пространства на плоскость максимален (равен 2).

В. Дискриминантная кривая

Определение. Проекция криминанты на плоскость (x, y) параллельно p-направлению называется *дискриминантной кривой**.

По теореме о неявной функции, окрестность точки криминанты диффеоморфно проектируется на плоскость (x, y) параллельно p-направлению, если криминанта в рассматриваемой точке не касается p-направления.

Замечание. Дискриминантная кривая может в этих условиях все же иметь особенности.

Они происходят оттого, что в одну точку дискриминантной кривой могут проектироваться, вообще говоря, несколько точек криминанты. Эти особенности будут, вообще говоря, точками самопересечения дискриминантной кривой. Для «общего уравнения» в окрестности такой точки дискриминантная кривая состоит из двух ветвей, пересекающихся под ненулевым углом.

Точкам же, где криминанта касается p-направления, соответствуют «в общем случае» точки возврата на дискриминантной кривой.

Все более сложные особенности дискриминантной кривой, кроме точек самопересечения и возврата, устраняются малым шевелением уравнения. Особенности же этих двух типов сохраняются при малой деформации уравнения, лишь немного смещаясь.

Г. Точки касания криминанты с контактной плоскостью

В каждой точке (x, y, p) пространства струй имеется *контактная плоскость* $dy = p\,dx$. В частности, такая плоскость имеется в точках криминанты. Касательная к криминанте в данной точке может лежать в контактной плоскости или пересекать ее.

Определение. Точка криминанты называется *точкой касания с контактной плоскостью*, если касательная к криминанте в этой точке лежит в контактной плоскости.

Заметим, что точки касания криминанты с p-направлением являются точками касания с контактной плоскостью. Действительно, контактная плоскость в каждой точке содержит p-направление.

Д. Регулярные особые точки

Определение. Особая точка уравнения (1) называется *регулярной*, если в этой точке выполнено условие гладкости криминанты**

$$\operatorname{rank}((x, y, p) \mapsto (F, F_p)) = 2$$

и криминанта не касается контактной плоскости.

---

* Это определение — переформулировка определения дискриминантной кривой из § 3.

** Рангом (rank) отображения называется ранг его производной.

Пример. Рассмотрим уравнение $p^2 = x$. Криминанта задается уравнениями $p = 0$, $x = 0$. Это — ось y. Условие гладкости выполнено. Касательный к криминанте вектор $(0, 1, 0)$ не лежит в контактной плоскости $dy = 0\,dx$. Следовательно, каждая особая точка уравнения $p^2 = x$ регулярна.

Замечание. Для уравнения «общего положения» почти все особые точки регулярны: нерегулярные точки лежат на криминанте дискретно. Если для данного уравнения это не так, то во всяком случае этого можно добиться малым шевелением уравнения. (Обоснование этого и предыдущих «соображений общего положения» проводится с помощью теоремы Сарда, § 10.)

Е. Теорема о нормальной форме

Теорема. *Пусть (x_0, y_0, p_0) — регулярная особая точка уравнения $F(x, y, p) = 0$. Тогда существует диффеоморфизм окрестности точки (x_0, y_0) плоскости (x, y) на окрестность точки $(0, 0)$ плоскости (X, Y), приводящий уравнение $F = 0$ к виду $P^2 = X$ (где $P = dY/dX$).*

Пояснение. Уравнение $F = 0$ задает поверхность в трехмерном пространстве линейных элементов на плоскости (x, y). Диффеоморфизм плоскости переводит каждый линейный элемент в новый линейный элемент. Утверждается, что часть поверхности $F = 0$ вблизи регулярной особой точки можно перевести в часть поверхности $P^2 = X$ вблизи точки ($X = 0$, $Y = 0$, $P = 0$).

Следствие. *Семейство интегральных кривых уравнения* (1) *в окрестности регулярной особой точки диффеоморфно как семейство кривых на плоскости (x, y) семейству полукубических парабол $y = x^{3/2} + C$.*

Доказательство. Указанный в теореме диффеоморфизм переводит интегральные кривые уравнения (1) на плоскости (x, y) в интегральные кривые уравнения $P^2 = X$ на плоскости (X, Y). Эти последние интегральные кривые являются полукубическими параболами с острием на дискриминантной кривой:

$$\frac{dY}{dX} = \sqrt{X}, \quad Y = \frac{2}{3}X^{3/2} + C. \qquad \square$$

Ж. Доказательство теоремы о нормальной форме

Доказательство. 1°. *Редукция к случаю, когда криминантой является ось y.*

Пусть (x_0, y_0, p_0) — регулярная особая точка уравнения $F(x, y, p) = 0$. Тогда дискриминантная кривая в окрестности точки (x_0, y_0) гладкая. Рассмотрим проекции контактных плоскостей в точках криминанты на плоскость (x, y). Мы получим в окрестности точки (x_0, y_0) гладкое семейство прямых, не касающихся дискриминантной кривой.

Выберем теперь локальную систему координат на плоскости (x, y) вблизи точки (x_0, y_0) так, чтобы 1) дискриминантная кривая имела уравнение $x = 0$; 2) линии $y = \text{const}$ пересекали дискриминантную кривую по построенным только что направлениям.

Эти координаты мы будем по-прежнему обозначать через (x, y); производная $\dfrac{dy}{dx}$ по-прежнему будет обозначаться через p. Особая точка (x_0, y_0, p_0) получает теперь координаты $(0, 0, 0)$.

2°. *Анализ условий регулярности.*

Криминанта, согласно нашему выбору системы координат, является осью y: на ней $x = 0$, $p = 0$ ($y = \text{const}$). Из этого следует, что для нашего уравнения, записанного в введенных координатах, $F(0, y, 0) = 0$, $F_p(0, y, 0) = 0$. Условие регулярности криминанты имеет теперь вид

$$\det\left(\frac{D(F, F_p)}{D(x, p)}\right) \neq 0, \quad \text{т. е. } \det\begin{pmatrix} F_x & F_{xp} \\ F_p & F_{pp} \end{pmatrix} \neq 0,$$

(так как в точках криминанты $F_y = 0$, $F_{yp} = 0$). Далее, в точках криминанты $F_p = 0$. Следовательно, условие регулярности криминанты запишется в виде

$$F_x(0, y, 0) \neq 0, \quad F_{pp}(0, y, 0) \neq 0.$$

Условие некасания с контактной плоскостью выполнено автоматически.

Разложим F в ряд Тейлора по p с остаточным членом степени 2:

$$F(x, y, p) = A(x, y) + pB(x, y) + p^2C(x, y, p).$$

Из полученных выше соотношений следует, что $A(0, y) = 0$, $B(0, y) = 0$. Поэтому мы можем записать

$$A(x, y) = x\alpha(x, y), \quad B(x, y) = x\beta(x, y),$$

где α и β — гладкие функции.

Условия регулярности криминанты имеют вид $A_x(0, y) \neq 0$, $C(0, y, 0) \neq \neq 0$. Мы можем даже предположить для дальнейшего, что $C > 0$, $A_x < 0$ (если это не так, сменим знаки F и/или x). Итак, $\alpha(0, 0) < 0$, $C(0, 0, 0) > 0$.

3°. *Исследование квадратного уравнения.*

Рассмотрим соотношение $F = 0$ как квадратное уравнение относительно p с коэффициентами C, B, A. Мы получаем

$$p = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} = \frac{-x\beta \pm \sqrt{x\gamma}}{2C},$$

где $\gamma = -4\alpha C + x\beta^2$ есть функция от (x, y, p); при этом

$$\gamma(0, 0, 0) = -4\alpha(0, 0, 0) \times C(0, 0, 0) > 0.$$

Пусть, наконец, $x = \xi^2$. Тогда получаем, оставляя лишь знак «+» в «±»,

$$p = \frac{-\xi^2\beta(\xi^2, y) + \xi\sqrt{\gamma(\xi^2, y, p)}}{2C(\xi^2, y, p)}.$$

Применим к этому уравнению относительно $p(\xi, y)$ теорему о неявной функции. Получим решение $p = \xi\omega(\xi, y)$, где ω гладкая функция, $\omega(0, 0) \neq 0$.

4°. *Дифференциальное уравнение для* $y(\xi)$.

Заметим, что $p = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{2\xi\, d\xi}$. Поэтому мы получили дифференциальное уравнение для $y(\xi)$:

$$\frac{dy}{d\xi} = 2\xi^2\omega(\xi, y), \quad \omega(0, 0) \neq 0. \tag{2}$$

Интегральные кривые на плоскости (ξ, y) пересекают ось $\xi = 0$, имея с линиями $y = \text{const}$ касание второго порядка. Поэтому уравнение имеет первый интеграл вида $I(\xi, y) = y - \xi^3 K(\xi, y)$, где K — гладкая функция, $K(0, 0) \neq \neq 0$ (I — координата точки пересечения с осью $\xi = 0$; $K \neq 0$, так как $\omega \neq 0$).

5°. *Построение нормализующих координат*.

Разложим K на четную и нечетную по ξ части:

$$K(\xi, y) = L(\xi^2, y) + \xi M(\xi^2, y).$$

Здесь L и M — гладкие функции от x и y, $L(0, 0) \neq 0$. В этих обозначениях $I(\xi, y) = y - \xi^4 M(\xi^2, y) - \xi^3 L(\xi^2, y)$. Введем новые переменные Y, Ξ по формулам

$$\Xi = \xi \sqrt[3]{L(\xi^2, y)}, \quad Y = y - \xi^4 M(\xi^2, y).$$

Тогда $I = Y - \Xi^3$.

Рассмотрим еще $X = \Xi^2$. Тогда

$$X = x \sqrt[3]{L^2(x, y)}, \quad Y = y - x^2 M(x, y).$$

Эти формулы задают локальный диффеоморфизм плоскости в окрестности точки $(0, 0)$, так как $L(0, 0) \neq 0$. Первый интеграл принимает вид

$$I = Y - X^{3/2}.$$

Теперь $\left(\dfrac{dY}{dX}\right)^2 = \dfrac{9}{4}X$, и указанная в формулировке теоремы нормальная форма получается растяжением одной из координатных осей. □

3. Замечания

Основным моментом приведенного доказательства является подстановка $x = \xi^2$, т. е. переход к двулистному накрытию плоскости (x, y) с ветвлением вдоль дискриминантной кривой. Из топологических соображений (правда, в комплексной области) заранее ясно, что на этом двулистном накрытии двузначность $p(x, y)$ исчезает и уравнение распадается на два. Возня с квадратным уравнением нужна лишь для обоснования этого обстоятельства в вещественной области. Полученное на накрытии уравнение (2) остается привести к нормальной форме диффеоморфизмом, опускаемым с накрытия на исходную плоскость — что легко достигается разложением первого интеграла на четную и нечетную по ξ составляющие.

Первое доказательство теоремы о нормальной форме было дано Ю. А. Бродским; оно основано на работе Р. Тома, который привел уравнение лишь к виду $p^2 = xE(x, y)$.

Наше доказательство использовало представление четной функции в виде функции от квадрата аргумента. Для аналитических функций (или для формальных рядов) такое представление очевидно. В случае же гладких функций оно нуждается в обосновании.

Действительно, четную бесконечно дифференцируемую функцию можно рассматривать как функцию от квадрата аргумента, заданную на положительной полуоси. Она бесконечно дифференцируема во всех точках этой полуоси, включая нуль. Требуется же представить ее как сужение на положительную полуось функции, бесконечно дифференцируемой на всей оси.

Возможность такого представления означает возможность гладкого продолжения на отрицательную полуось. Она гарантируется теоремой (Э. Бореля) о существовании бесконечно дифференцируемых функций на прямой с любым рядом Тейлора в нуле. На доказательстве этой теоремы (впрочем, несложном) мы не останавливаемся.

Кроме регулярных особых точек, в отдельных точках гладкой дискриминантной кривой уравнения общего положения встречаются точки касания контактной плоскости с поверхностью уравнения. В окрестности такой точки уравнение общего положения диффеоморфизмом плоскости (x, y) приводится к нормальной форме $y = (p + kx)^2$ (*Давыдов А. А.* Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки // Функциональный анализ и его приложения. 1985. Т. 19, вып. 2. С. 1—10; *Пхакадзе А. В.*, *Шестаков А. А.* О классификации особых точек дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной // Матем. сборник. 1959. Т. 49, вып. 1. С. 3—12.)

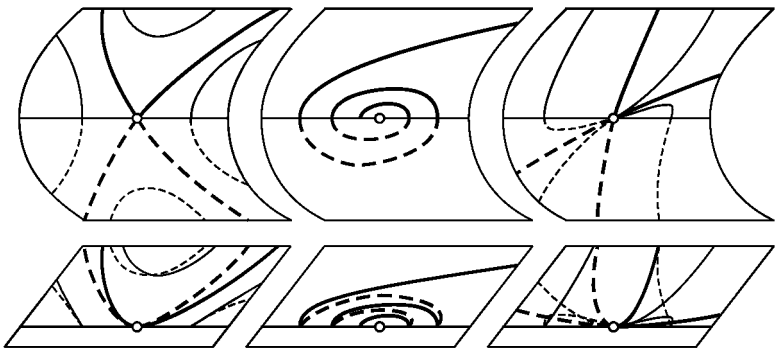


Рис. 29

Поле направлений на поверхности уравнения имеет в соответствующей точке криминанты такую же особенность, как поле направлений векторного поля на плоскости в окрестности обыкновенной особой точки типа седло, фокус или узел. Поэтому возникающие здесь особые точки неявных дифференциальных уравнений называются *сложенным седлом*, *фокусом* или *узлом*; они получаются из обычных при помощи отображения складывания. Интересно, что складывание не вносит новых модулей: параметр k в нормальной форме определяется отношением собственных чисел линеаризации векторного поля, при складывании фазового портрета которого получается сложенная особая точка (рис. 29).

Напротив, особые точки, в которых дискриминантная кривая имеет точку возврата (проекции точек сборки Уитни отображения поверхности уравнения на плоскость (x, y)), имеют функциональные модули относительно не только диффеоморфизмов, но и даже относительно гомеоморфизмов плоскости (x, y) (см. цитированную работу Давыдова). Брюс заметил, что при проекции интегральных кривых на плоскость (x, y) в этом случае можно получить из семейства сечений ласточкиного хвоста $\{(a, b, c)\colon t^4 + at^2 + bt + c$ имеет кратный корень$\}$ плоскостями $a = \text{const}$ (рис. 30) при надлежащем гладком отображении ранга 2 пространства (a, b, c) на плоскость (x, y). (Это следует из описанных перестроек волновых фронтов в статьях *Arnold V. I.* Wave front evolution and equivariant Morse lemma // Comm. Pure and Appl. Math. 1976. V. 29, № 6. P. 557—582; *Bruce J. W.* A note on first-order differential equations of degree greater than one and wavefront evolution // Bull. London Math. Soc. 1984. V. 16. P. 139—144.)

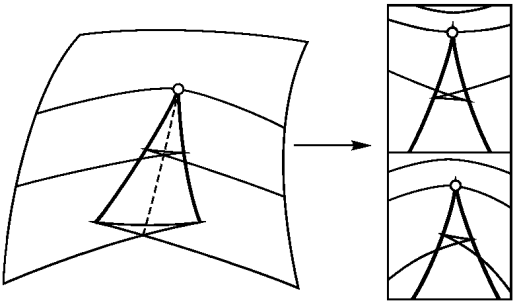


Рис. 30

Нерегулярные особые точки общего положения исследованы подробно А. А. Давыдовым (*Давыдов А. А.* Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки.)

§ 5. Стационарное уравнение Шрёдингера

В этом параграфе изложены простейшие математические основы элементарной квантовой механики. Мы не останавливаемся на физических мотивировках вводимых определений, но используем физическую терминологию для описания свойств решений уравнения.

A. Определения и обозначения

В физике уравнение

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (E - U(x))\Psi = 0 \tag{1}$$

называется *стационарным уравнением Шрёдингера*.

Независимая переменная x называется *декартовой координатой частицы*. Неизвестная функция Ψ, вообще говоря комплексная, называется *волновой функцией частицы*; решения уравнения Шрёдингера называются *состояниями частицы*. Спектральный параметр E называется *энергией частицы*. Известная функция U называется *потенциалом* или *потенциальной энергией частицы*. *Квантовая механика* занимается в основном исследованием свойств уравнения (1) и обобщающих его уравнений и систем уравнений с частными производными.

Пример. Пусть $U = 0$. Тогда частица называется *свободной*. Уравнение Шрёдингера для свободной частицы с энергией $E = k^2$ имеет вид

$$\Psi_{xx} + k^2\Psi = 0. \tag{2}$$

Это уравнение имеет два линейно независимых решения

$$\Psi_+ = e^{ikx}, \quad \Psi_- = e^{-ikx}.$$

Эти два решения называются *частицей, движущейся вправо* (с импульсом $k > 0$), и *частицей, движущейся влево*, соответственно. Таким образом, пространство состояний свободной частицы с энергией E — двумерное комплексное пространство.

Квадрат модуля волновой функции физики называют *плотностью вероятности* того, что частица находится в данном месте. Таким образом, свободная частица с импульсом k «с одинаковой вероятностью находится в любой точке» (этой терминологией можно пользоваться, не заботясь о том, что означают эти слова и как все это связано с теорией вероятностей).

Б. Потенциальные барьеры

Предложим, что потенциал финитен (отличен от нуля лишь в некоторой области). Если $U \geqslant 0$, то говорят, что задан *потенциальный барьер*, а если $U \leqslant 0$ — *потенциальная яма*. Область, где потенциал отличен от нуля, называется *носителем* потенциала (рис. 31).

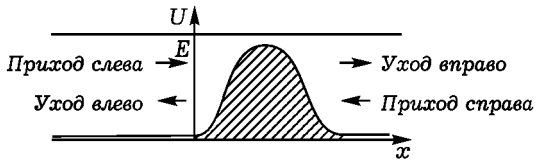


Рис. 31

Предположим, что энергия частицы $E = k^2$ *положительна*. Тогда левее носителя уравнение Шрёдингера (1) совпадает с уравнением свободной частицы (2). Следовательно, уравнение Шрёдингера имеет два решения, которые *левее носителя* совпадают с e^{ikx} и e^{-ikx} соответственно. Эти два решения называются *частицей, приходящей слева*, и *частицей, уходящей влево*, соответственно. Заметим, что решения эти определены при всех x, но совпадают с e^{ikx} и e^{-ikx} лишь левее носителя.

Точно так же существуют два решения, которые совпадают с e^{ikx} и e^{-ikx} *правее носителя*. Эти решения называются *частицей, уходящей вправо*, и *частицей, приходящей справа*, соответственно.

Задача. Может ли частица, пришедшая слева, целиком отразиться влево (т. е. может ли волновая функция справа от барьера быть нулем, а слева нет)? Целиком уйти вправо?

Ответ. Нет, да.

В. Оператор монодромии

Определение. *Оператором монодромии* уравнения Шрёдингера (1) с финитным потенциалом называется линейный оператор, действующий из пространства состояний *свободной* частицы с энергией $E = k^2$ в себя, определенный следующим образом.

Решению уравнения свободной частицы (2) сопоставляется решение уравнения Шрёдингера, совпадающее с ним левее носителя, а этому решению — его значение правее носителя.

Оказывается, оператор монодромии обладает замечательными свойствами $(1,1)$-унитарности. Чтобы их сформулировать, введем следующие

Обозначения. Обозначим через $\mathbb{R}^2$ *пространство вещественных решений уравнения Шрёдингера* (1). *Пространство состояний частицы* (т. е. пространство комплексных решений уравнения), является комплексификацией $\mathbb{R}^2$; мы его обозначим через $\mathbb{C}^2 = {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^2$. Этому пространству принадлежат все четыре состояния приходящей и уходящей влево и вправо частицы.

Пространство вещественных решений уравнения свободной частицы (2) обозначим через $\mathbb{R}^2_0$ (так как для свободной частицы $U=0$). В этом пространстве имеется естественный базис

$$e_1 = \cos kx, \quad e_2 = \sin kx.$$

Пространство состояний свободной частицы мы обозначим через $\mathbb{C}^2_0$; это комплексификация пространства $\mathbb{R}^2_0$. Естественный базис образуют состояния частиц, движущихся вправо и влево соответственно. Мы обозначим их через

$$f_1 = e^{ikx}, \quad f_2 = e^{-ikx}.$$

Заметим, что e_1, e_2 тоже определяют базис в пространстве состояний. Эти два базиса связаны соотношениями

$$f_1 = e_1 + ie_2, \quad f_2 = e_1 - ie_2.$$

Определение. Группа $\mathrm{SU}(1,1)$ $(1,1)$*-унитарных унимодулярных матриц* состоит из всех комплексных матриц второго порядка с определителем 1, сохраняющих эрмитову форму $|z_1|^2 - |z_2|^2$. Иными словами, это матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, для которых

$$|a|^2 - |b|^2 = |c|^2 - |d|^2 = 1, \quad a\bar{c} - b\bar{d} = 0, \quad ad - bc = 1.$$

Теорема. *Матрица оператора монодромии в базисе* (f_1, f_2) *принадлежит группе* $\mathrm{SU}(1,1)$.

Причина, по которой оператор монодромии принадлежит $\mathrm{SU}(1,1)$, состоит в том, что фазовый поток уравнения (1) сохраняет площади. Для доказательства я напомню некоторые сведения о группе $\mathrm{SU}(1,1)$.

Г. Алгебраическое отступление: группа SU(1, 1)

Рассмотрим вещественное линейное пространство $\mathbb{R}^2$ и его комплексификацию $\mathbb{C}^2$. Выберем в $\mathbb{R}^2$ элемент площади и будем обозначать через $[\xi, \eta]$ ориентированную площадь параллелограмма,

натянутого на векторы ξ и η. Кососкалярное произведение $[\ ,\ ]$ называется *симплектической структурой*. Если в $\mathbb{R}^2$ фиксирован базис (e_1, e_2), на котором $[e_1, e_2] = 1$, то $[\xi, \eta]$ равно определителю, составленному из компонент векторов ξ, η в базисе e_1, e_2.

Комплексификация билинейной формы $[\ ,\ ]$ задает симплектическую структуру в $\mathbb{C}^2$; мы будем и ее обозначать теми же скобками.

Заметим, что форма $[\ ,\ ]$ невырождена: если $[\xi, \eta] = 0$ для всех ξ, то $\eta = 0$.

Рассмотрим в $\mathbb{C}^2$ *эрмитову форму* $\langle \xi, \eta \rangle = \frac{i}{2}[\xi, \bar{\eta}]$. Это действительно эрмитова форма: $\langle \lambda\xi, \eta \rangle = \lambda\langle \xi, \eta \rangle$, $\langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}$. Для дальнейшего полезно вычислить эрмитовы произведения векторов $f_1 = e_1 + ie_2$ и $f_2 = e_1 - ie_2$. Легко проверяется

Лемма. *Имеют место соотношения*

$$\langle f_1, f_1 \rangle = 1, \quad \langle f_2, f_2 \rangle = -1, \quad \langle f_1, f_2 \rangle = 0.$$

Доказательство. Например,

$$\langle f_1, f_1 \rangle = \frac{i}{2}[f_1, \bar{f}_1] = \frac{i}{2}[f_1, f_2] = \frac{i}{2}\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = 1. \qquad \square$$

Таким образом, эрмитова форма $\langle\ ,\ \rangle$ имеет «тип $(1, 1)$» (один положительный и один отрицательный квадрат в каноническом виде $\langle z, z \rangle = |z_1|^2 - |z_2|^2$).

Рассмотрим теперь линейные преобразования плоскости $\mathbb{C}^2$, сохраняющие эрмитову, симплектическую и вещественную структуры.

Определение. Группа линейных преобразований плоскости $\mathbb{C}^2$, сохраняющих эрмитову форму $\langle\ ,\ \rangle$, называется $(1, 1)$-*унитарной группой* и обозначается через $\mathrm{U}(1, 1)$.

Группа линейных преобразований плоскости $\mathbb{C}^2$, сохраняющих симплектическую структуру $[\ ,\ ]$, называется *специальной* (*или унимодулярной*) *линейной группой второго порядка* и обозначается через $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

Группа всех вещественных линейных преобразований плоскости $\mathbb{C}^2$ (т. е. группа, элементы которой — комплексификации линейных преобразований в $\mathbb{R}^2$) называется *вещественной линейной группой второго порядка* и обозначается через $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Таким образом мы определили в группе $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ всех линейных преобразований в $\mathbb{C}^2$ три подгруппы: $(1, 1)$-унитарную $\mathrm{U}(1, 1)$, унимодулярную $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ и вещественную $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

При этом эрмитова форма $\langle\ ,\ \rangle$, определяющая унитарную группу, симплектическая структура $[\ ,\ ]$, определяющая унимодулярную группу, и комплексное сопряжение, определяющее вещественную группу, связаны соотношением $\langle a, b\rangle = \frac{i}{2}[a, \bar{b}]$.

Теорема. *Пересечение любых двух из этих трех подгрупп совпадает с пересечением всех трех* (рис. 32).

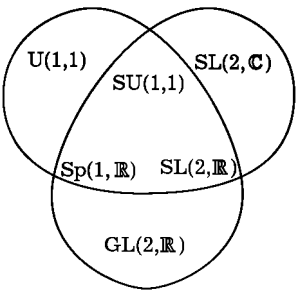


Рис. 32

Это пересечение называется *специальной* $(1, 1)$*-унитарной группой** и обозначается через $\mathrm{SU}(1, 1)$. (Оно также называется вещественной унимодулярной группой и обозначается через $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Оно называется также вещественной симплектической группой второго порядка и обозначается через $\mathrm{Sp}(1, \mathbb{R})$.)

Доказательство. Если преобразование A вещественно и унимодулярно, то $[A\xi, A\eta] = [\xi, \eta]$ и $A\bar{\xi} = \overline{A\xi}$. Поэтому

$$\langle A\xi, A\eta\rangle = \frac{i}{2}[A\xi, \overline{A\eta}] = \frac{i}{2}[A\xi, A\bar{\eta}] = \frac{i}{2}[\xi, \bar{\eta}] = \frac{i}{2}[\xi, \eta] = \langle\xi, \eta\rangle.$$

Если A вещественно и $(1, 1)$-унитарно, то $\langle A\xi, A\eta\rangle = \langle\xi, \eta\rangle$ и $A\xi = \overline{A\xi}$. Поэтому

$$[A\xi, A\eta] = -2i\langle A\xi, \overline{A\eta}\rangle = -2i\langle A\xi, A\bar{\eta}\rangle = -2i\langle\xi, \bar{\eta}\rangle = [\xi, \eta].$$

Если A $(1, 1)$-унитарно и унимодулярно, то $[A\xi, A\eta] = [\xi, \eta]$ и $[A\xi, \overline{A\eta}] = [\xi, \bar{\eta}]$. Поэтому $[A\xi, \overline{A\eta}] = [A\xi, A\bar{\eta}]$ для всех ξ и η. Следовательно $[\xi, \overline{A\eta} - A\bar{\eta}] = 0$ для всех ξ, и значит, $\overline{A\eta} = A\bar{\eta}$ для всех η, т. е. A вещественно. □

Следствие. *Если матрица оператора в вещественном базисе* (e_1, e_2) *вещественная унимодулярная, то матрица этого оператора в комплексно сопряженном базисе* $(f_1 = e_1 + ie_2,\ f_2 = e_1 - ie_2)$ *специальная* $(1, 1)$*-унитарная, и обратно.*

Доказательство. Эрмитов скалярный квадрат вектора $z_1f_1 + z_2f_2$ выражается через координаты (z_1, z_2) в базисе (f_1, f_2) по формуле

* Подчеркнем, что речь идет о группе операторов, а не матриц. Матрицы этих операторов принадлежат группе матриц $\mathrm{SU}(1, 1)$ при специальном выборе базиса, указанном выше.

$\langle z, z\rangle = |z_1|^2 - |z_2|^2$ (см. лемму). Поэтому

(матрица A в базисе (e_1, e_2) вещественна и унимодулярна) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) \Leftrightarrow (A \in \mathrm{SU}(1, 1)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (матрица A в базисе (f_1, f_2) $(1, 1)$-унитарна и унимодулярна). □

Д. Геометрическое отступление: SU(1, 1) и геометрия Лобачевского

Группы матриц $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ и $\mathrm{SU}(1, 1)$ следующим образом связаны с геометрией Лобачевского (рис. 33).

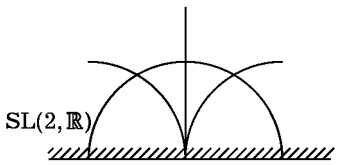


Рис. 33

Вещественная унимодулярная матрица второго порядка определяет дробно-линейное преобразование $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, переводящее в себя верхнюю полуплоскость. Это преобразование является движением плоскости Лобачевского, представленной в виде верхней полуплоскости. Все движения плоскости Лобачевского получаются таким способом. Группа движений плоскости Лобачевского изоморфна $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\pm E$.

Унимодулярная $(1, 1)$-унитарная матрица второго порядка определяет дробно-линейное преобразование, переводящее в себя единичный круг. Действительно, конус $|z_1|^2 < |z_2|^2$ при $(1, 1)$-унитарном унимодулярном преобразовании переходит в себя. При естественном отображении

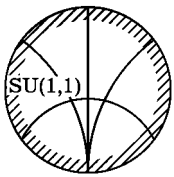


Рис. 34

$$\mathbb{C}^2 \setminus O \to \mathbb{C}\mathrm{P}^1, \quad (z_1, z_2) \mapsto w = z_1/z_2,$$

этот конус переходит в единичный круг $|w| < 1$, а линейные преобразования в $\mathbb{C}^2$ переходят в дробно-линейные преобразования $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ (рис. 34).

Получающиеся из матриц из $\mathrm{SU}(1, 1)$ дробно-линейные преобразования единичного круга в себя являются движениями плоскости

Лобачевского, представленной как внутренность единичного круга. Все движения плоскости Лобачевского поручаются таким способом. Группа движений плоскости Лобачевского изоморфна $\mathrm{SU}(1,1)/\pm E$.

Группы матриц $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ и $\mathrm{SU}(1,1)$ изоморфны: они получаются из одной и той же группы операторов. Матрицы этих операторов в вещественном базисе (e_1, e_2) принадлежат $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, а в комплексно сопряженном базисе (f_1, f_2) принадлежат $\mathrm{SU}(1,1)$. Переход от $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ к $\mathrm{SU}(1,1)$ соответствует переходу от вещественного базиса к комплексно сопряженному и от модели плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости к модели в единичном круге.

Задача. Докажите, что группа $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ гомеоморфна полноторию $S^1 \times D^2$ (внутренности баранки).

Е. Свойства оператора вещественной монодромии

Вернемся к оператору монодромии уравнения Шрёдингера (1). Кроме пространств $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2_0$ решений уравнения (1) и уравнения свободной частицы (2), рассмотрим еще *фазовую плоскость* $\mathbb{R}^2_\Phi$. Точки фазовой плоскости — это пары вещественных чисел (Ψ, Ψ_x).

Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$. Рассмотрим линейный оператор, сопоставляющий каждому (вещественному) решению уравнения (1) его начальное условие в точке x

$$B^x \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2_\Phi, \quad \Psi \mapsto (\Psi(x), \Psi_x(x)).$$

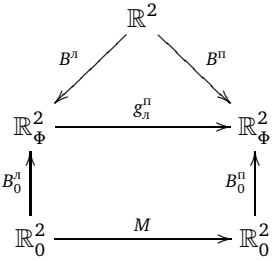
Этот оператор — изоморфизм. Изоморфизм $g^{x_2}_{x_1} = B^{x_2}(B^{x_1})^{-1}$ называется *фазовым преобразованием от* x_1 к x_2.

Для уравнения свободной частицы (2) оператор (решение $\mapsto$ фазовая точка)

$$B^x_0 \colon \mathbb{R}^2_0 \to \mathbb{R}^2_\Phi$$

определяется таким же образом.

В этих обозначениях вещественный оператор монодромии M определяется коммутативной диаграммой изоморфизмов.



Здесь «л» означает точку x левее носителя, а «п» — правее. От выбора этих точек оператор M не зависит.

Теорема. *Определитель оператора монодромии уравнения Шрёдингера равен* 1.

Доказательство. В пространстве вещественных состояний свободной частицы $\mathbb{R}^2_0$ выбран базис $e_1 = \cos kx$, $e_2 = \sin kx$. В вещественном фазовом пространстве $\mathbb{R}^2_\Phi$ выбраны координаты Ψ, Ψ_x и, следовательно, также отмечен базис. Матрица оператора B^x_0 имеет в этом базисе вид

$$(B^x_0) = \begin{pmatrix} \cos kx & \sin kx \\ -k\sin kx & k\cos kx \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\det B^x_0 = k$ не зависит от x. В частности, определители левого и правого вертикальных изоморфизмов в диаграмме одинаковы. Следовательно, $\det M = \det g^{\text{п}}_{\text{л}}$ (диаграмма коммутативна). Но фазовый поток сохраняет площади по теореме Лиувилля (в уравнение Шрёдингера не входит член с Ψ_x). Значит, $\det g^{\text{п}}_{\text{л}} = 1$. Следовательно, $\det M = 1$. □

Ж. Свойства оператора комплексной монодромии

Доказательство теоремы об $(1,1)$-унитарности из п. В.

Комплексный оператор монодромии есть комплексификация вещественного (см. п. В).

Матрица оператора монодромии в вещественном базисе (e_1, e_2) принадлежит $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ (см. п. Е). Следовательно, матрица этого оператора в комплексно сопряженном базисе $(f_1 = e_1 + ie_2,\ f_2 = e_1 - ie_2)$ принадлежит $\mathrm{SU}(1,1)$ (см. п. Г, следствие). □

Задача. Доказать, что у уравнения Шрёдингера (1) не может быть ненулевого решения, совпадающего с ae^{ikx} левее носителя и с be^{-ikx} правее носителя (частица не может приходить, не уходя).

Решение. Оператор монодромии сохраняет $(1,1)$-эрмитов квадрат $|z_1|^2 - |z_2|^2$. Но $\langle ae^{ikx}, ae^{ikx}\rangle = |a|^2$, $\langle be^{-ikx}, be^{-ikx}\rangle = -|b|^2$ (см. лемму п. Г). Следовательно, $|a|^2 = -|b|^2$, т. е. $a = b = 0$.

З. Коэффициенты прохождения и отражения

Определение. Говорят, что частица, пришедшая слева, с импульсом $k > 0$ прошла барьер с *коэффициентом прохождения* $|A|^2$ и *коэффициентом отражения* $|B|^2$, если уравнение Шрёдингера (1), в ко-

тором $E=k^2$, имеет решение Ψ, равное

$e^{ikx}+Be^{-ikx}$ левее барьера,

Ae^{ikx} правее барьера (рис. 35).

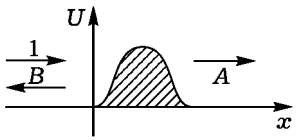


Рис. 35

Лемма. *Решение Ψ и комплексные постоянные A и B, удовлетворяющие описанным условиям, существуют и единственны при любом $k>0$.*

Доказательство. Рассмотрим уходящую вправо частицу (решение, равное e^{ikx} правее барьера). Слева от барьера это решение, как и любое другое, имеет вид линейной комбинации e^{ikx} и e^{-ikx}, причем коэффициент при e^{ikx} отличен от нуля ввиду $(1,1)$-унитарности оператора монодромии (см. задачу в п. Ж).

Разделив на этот отличный от нуля коэффициент, получаем требуемое решение.

Итак, коэффициенты A и B определены однозначно. □

Задача. Доказать, что коэффициент прохождения всегда отличен от нуля.

Решение. Если $\Psi\equiv 0$ справа от барьера, то $\Psi\equiv 0$ и слева.

Теорема. *Сумма коэффициентов прохождения и отражения равна единице.*

Доказательство.

Лемма. *Матрица оператора монодромии в базисе ($f_1=e^{ikx}$, $f_2=e^{-ikx}$) выражается через комплексные коэффициенты A, B по формуле*

$$(M)=\begin{pmatrix} 1/\bar{A} & -\bar{B}/\bar{A} \\ -B/A & 1/A \end{pmatrix}.$$

Доказательство леммы. По определению коэффициентов A и B, оператор монодромии действует так, что $f_1+Bf_2\mapsto Af_1$. Поскольку оператор монодромии вещественный, мы можем найти и образ комплексно сопряженного вектора. Учитывая, что $\bar{f}_1=f_2$, получаем $f_2+\bar{B}f_1\mapsto\bar{A}f_2$. Деля на $A\neq 0$ и $\bar{A}\neq 0$, получаем матрицу обратного к монодромии оператора

$$(M^{-1})=\begin{pmatrix} 1/A & \bar{B}/\bar{A} \\ B/A & 1/\bar{A} \end{pmatrix}.$$

(Чтобы обратить унимодулярную матрицу второго порядка, достаточно поменять местами диагональные элементы и изменить знаки недиагональных:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}.\Big)$$

Лемма доказана. □

Условия $M\in \mathrm{SU}(1,1)$ дают $1/|A|^2-|B|^2/|A|^2=1$. □

Задача. Вычислить коэффициенты прохождения и отражения для потенциала, равного константе U_0 при $0 \leqslant x \leqslant a$ и нулю в остальных местах (рис. 36).

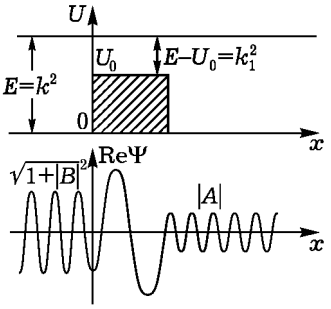


Рис. 36

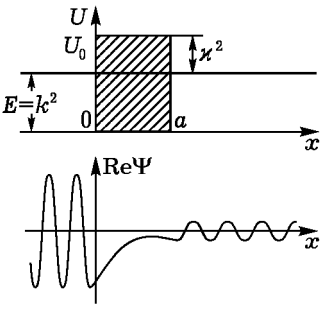


Рис. 37

Ответ.

$$|A|^2 = \frac{1}{1+\dfrac{U_0^2 \sin^2 ak_1}{4E(E-U_0)}},$$

где $E = k^2$, $E - U_0 = k_1^2$ (проходя над барьером, частица замедляется, поэтому плотность вероятности найти ее в пределах барьера больше, чем вне). При больших E коэффициент отражения стремится к 0,

$$|B|^2 \sim \frac{U_0^2}{4E(E-U_0)} \sin^2 ak_1.$$

Если энергия частицы меньше высоты барьера, то коэффициент прохождения экспоненциально мал:

$$|A|^2 = \frac{4k^2\kappa^2}{(k^2+\kappa^2)\operatorname{sh}^2 a\kappa + 4k^2\kappa^2},$$

где $E = k^2$, $U_0 - E = \kappa^2$ (рис. 37). Хотя коэффициент прохождения через высокий и широкий барьер мал, он все же всегда отличен от нуля («туннельный эффект»: квантовая частица «проходит под барьером», непреодолимым для классической).

И. Матрица рассеяния

Наряду с прохождением через барьер слева направо, можно рассматривать прохождение справа налево. Соответствующее решение Ψ_2 равно

$e^{-ikx} + B_2 e^{ikx}$ правее барьера,

$A_2 e^{-ikx}$ левее барьера (рис. 38).

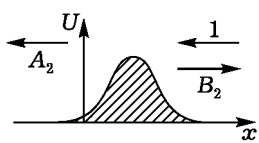


Рис. 38

Определение. *Матрицей рассеяния* (или S-матрицей) называется матрица

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Исходя из стационарного уравнения Шрёдингера, нелегко понять, какой оператор соответствует этой матрице и почему эта матрица обладает замечательными свойствами, которые мы сейчас докажем. Объяснение состоит в том, что S «преобразует приходящие частицы в уходящие» — этим словам можно придать точный смысл, если рассмотреть нестационарное уравнение (чего мы делать не будем).

Теорема. *Матрица рассеяния унитарна, причем коэффициенты прохождения слева направо и справа налево одинаковы*: $A = A_2$.

Доказательство. Оператор монодромии действует так:

$$A_2 f_2 \mapsto f_2 + B_2 f_1, \quad \bar{A}_2 f_1 \mapsto f_1 + \bar{B}_2 f_2.$$

Следовательно,

$$(M) = \begin{pmatrix} 1/\bar{A}_2 & B_2/A_2 \\ \bar{B}_2/\bar{A}_2 & 1/A_2 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая с вычисленной в лемме п. 3 матрицей, получаем

$$A_2 = A, \quad B_2 = -\bar{B}A/\bar{A}.$$

Поскольку $|A|^2 + |B|^2 = |A_2|^2 + |B_2|^2 = 1$ и $A\bar{B}_2 + B\bar{A}_2 = 0$, матрица S унитарна. □

Замечание. Мы рассматривали уравнение Шрёдингера (1) с вещественным значением спектрального параметра $E = k^2$. Очень полезным оказывается также рассмотрение комплексных значений k. При этом оказывается, что свойства унитарности и симметрии матрицы рассеяния имеют место и при комплексных k. Кроме того, S обладает свойством «вещественности», $S(-k) = \overline{S(k)}$, и «аналитичности»: $A(k)$ является предельным значением функции, аналитической в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k > 0$, имеющей конечное число полюсов на мнимой оси.

Поскольку коэффициенты прохождения и отражения можно измерять, возникает т. н. обратная задача теории рассеяния об определении потенциала U по матрице рассеяния $S(k)$.

Потенциал U задается вещественной функцией на вещественной прямой или двумя вещественными функциями на полупрямой. Коэффициенты A и B — это две комплексные функции на полуоси $k > 0$, т. е. четыре вещественные функции на полуоси. Условие унитарности $|A|^2 + |B|^2 = 1$ снижает число вещественных функций на полуоси с четырех до трех.

Поскольку $3 > 2$, можно ожидать, что не всякая пара A, B с условием $|A|^2 + |B|^2 = 1$ соответствует потенциалу; для восстановления потенциала по A и B нужно наложить на эти коэффициенты еще одно условие. Таким условием и оказывается условие аналитичности.

Как это ни удивительно, приведенные здесь грубые эвристические соображения, основанные на подсчете числа произвольных функций, удалось превратить в точно формулируемые и доказанные теоремы (выходящие, однако, за рамки нашего курса).

К. Связанные состояния

Рассмотрим теперь потенциал в виде финитной ямы ($U(x) \leqslant 0$, $U(\infty) = 0$). Говорят, что частица *находится в яме*, если $\Psi \to 0$ при $x \to \pm\infty$ (рис. 39). Ясно, что частица может находиться в яме, лишь если ее энергия E *отрицательна*. Левее и правее ямы решение имеет вид линейной комбинации экспонент $e^{\kappa x}$, $e^{-\kappa x}$, где $\kappa^2 = -E$, $\kappa > 0$. Следовательно, условие нахождения частицы в яме состоит в том, что левее ямы обращается в нуль коэффициент при растущей влево экспоненте, а правее ямы — при растущей вправо. Решение с такими свойствами существует не при всяком отрицательном значении энергии.

Оказывается, если яма достаточно глубока и широка, то существует конечное число отрицательных значений энергии E, при которых частица может стационарно находиться в яме; этих значений тем больше, чем глубже и шире яма.

Соответствующие значения E называются *стационарными уровнями*, а волновые функции Ψ, *затухающие при* $x \to \pm\infty$, называются *связанными состояниями* (в случае если яма не финитна, требуется $\int |\Psi|^2\, dx < \infty$).

Задача. Определить стационарные уровни энергии в прямоугольной яме глубины U_0, расположенной между $x = 0$ и $x = a$ (рис. 40).

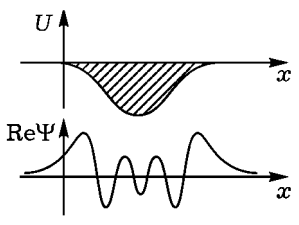


Рис. 39

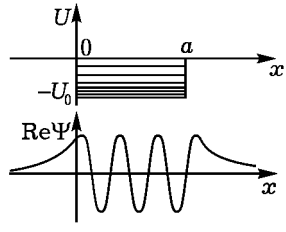


Рис. 40

Ответ. $E=4\xi^2/a^2-U_0$, где ξ — корни уравнений

$$\cos\xi=\pm\gamma\xi,\quad \sin\xi=\pm\gamma\xi\quad (\gamma=\frac{1}{a}\sqrt{4/U_0})$$

($\operatorname{tg}\xi>0$ для первого уравнения, $\operatorname{tg}\xi<0$ для второго).

Задача. Докажите, что волновые функции Ψ_j, соответствующие связанным состояниям с разными уровнями энергии, ортогональны: $\int \Psi_1\bar{\Psi}_2\,dx=0$.

Задача*. Как связаны стационарные уровни энергии связанных состояний и полюса S-матрицы на мнимой оси k?

§ 6. Геометрия дифференциального уравнения второго порядка и геометрия пары полей направлений в трехмерном пространстве

Здесь обсуждаются локальные свойства решений дифференциального уравнения второго порядка, которые являются геометрическими, т. е. инвариантными относительно диффеоморфизмов плоскости зависимой и независимой переменных.

С каждым дифференциальным уравнением второго порядка связана пара полей направлений в трехмерном пространстве. Задача локальной классификации уравнений второго порядка с точностью до диффеоморфизмов плоскости оказывается эквивалентной задаче локальной классификации пар полей направлений общего положения в трехмерном пространстве с точностью до диффеоморфизмов пространства. Ниже рассматриваются инварианты и «нормальные формы» в этих двух эквивалентных задачах.

А. Конфигурационные свойства решений линейных уравнений

Графики решений уравнения $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$ (прямые) удовлетворяют конфигурационным теоремам (Паппа, Дезарга и т. д.) проективной геометрии.

Теорема. *Семейство графиков всех решений любого линейного однородного уравнения второго порядка*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=0$$

локально (в окрестности любой точки $x=x_0$) диффеоморфно семейству графиков всех решений простейшего уравнения* $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$.

Следствие. *Конфигурационные теоремы проективной геометрии выполняются (локально) для графиков решений любого линейного уравнения вто-*

* То есть существует диффеоморфизм окрестности прямой $x=x_0$ на плоскости (x, y), переводящий графики решений в прямые.

рого порядка, например, для семейств кривых $y = A\sin x + B\cos x$ *или* $y = Ae^x + Be^{-x}$.

Доказательство. Рассмотрим решение y_1, не обращающееся в нуль в точке x_0, и другое решение, y_2, обращающееся в 0 в точке x_0, но не равное нулю тождественно. Формулы

$$Y = \frac{y}{y_1}, \quad X = \frac{y_2}{y_1}$$

задают искомый диффеоморфизм. □

Замечание 1. Координаты (X, Y) определены с точностью до дробно-линейного преобразования (которому они подвергаются при замене решений y_1 и y_2 их линейными комбинациями). В частности, координата X задает на оси x структуру локально проективного одномерного многообразия (атлас, в котором функции перехода — проективные преобразования прямой, т. е. дробно-линейные функции).

Точно так же на плоскости (x, y) линейное однородное уравнение второго порядка задает структуру локально проективной плоскости.

Замечание 2. *Эквивалентностью* локально проективных многообразий называется диффеоморфизм, переводящий одну локально проективную структуру в другую.

Задача. Перечислить все различные структуры локально проективного многообразия с точностью до эквивалентности а) на прямой, б) на окружности.

Указание. Все локально проективные структуры на прямой индуцированы отображением в проективную прямую (т. е. в окружность) с не обращающейся в нуль производной; число прообразов точки окружности при этом отображении — инвариант структуры.

Двулистное накрытие проективной прямой задает на окружности структуру локально проективного многообразия, не эквивалентную структуре проективной прямой. Однако не всякая локально проективная структура на окружности индуцируется из структуры проективной прямой. Классификация локально проективных структур на окружности связана с классификацией уравнений Хилла (линейных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами). Уже уравнения с постоянными коэффициентами задают структуры, не индуцируемые с проективной прямой.

Б. Нормальная форма квадратичной части уравнения второго порядка в окрестности данного решения

Рассмотрим теперь произвольное нелинейное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi\Big(x, y, \frac{dy}{dx}\Big).$$

Мы собираемся исследовать геометрию двупараметрического семейства кривых, заданного этим уравнением на плоскости (x, y). В частности, нас

интересует вопрос, выполняются ли в этом семействе конфигурационные теоремы и можно ли это семейство выпрямить (превратить в семейство прямых) подходящим диффеоморфизмом плоскости. Мы увидим, что такое выпрямление возможно не всегда, и укажем инварианты, измеряющие «инфинитезимальную недезарговость» (нарушение конфигурационных теорем).

Теорема. *Всякое дифференциальное уравнение второго порядка в окрестности каждого линейного элемента (x, y, p) плоскости зависимой и независимой переменной может быть приведено локальным диффеоморфизмом этой плоскости к виду*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A(x)y^2 + O(|y|^3 + |p|^3), \quad p = \frac{dy}{dx},$$

в окрестности элемента $(x = 0,\ y = 0,\ p = 0)$.

Доказательство. 1°. *Уничтожение линейных членов.*

Данный линейный элемент определяет единственное решение, график которого можно принять за ось x. Линеаризуем данное уравнение в окрестности этого решения. Полученное линейное уравнение, по теореме п. А, можно локально выпрямить (привести к виду $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$) подходящим выбором* системы координат. В этой системе координат наше уравнение второго порядка имеет правую часть $\Phi(x, y, p)$, которая обращается в нуль при $y = 0$, $p = 0$ вместе с производными по y и по p. Таким образом, в рассматриваемой системе координат разложение Φ в ряд Тейлора по y и p начинается с членов не ниже второй степени:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A(x)y^2 + B(x)yp + C(x)p^2 + O(|y|^3 + |p|^3).$$

2°. *Преобразование независимой переменной.*

Рассмотрим локальный диффеоморфизм плоскости (x, y), заданный подстановкой

$$x = F(X, Y), \quad y = Y$$

(переводящий точку с координатами (x, y) в точку с координатами (X, Y)).

Лемма. *Уравнение*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi(x, y, p), \quad p = \frac{dy}{dx},$$

преобразуется указанной подстановкой в уравнение

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \widehat{\Phi}(X, Y, P), \quad P = \frac{dY}{dX},$$

* Для дальнейшего полезно заметить, что если правая часть Φ была многочленом степени $n \geqslant 1$ по аргументу p, то и в новых координатах, построенных в п. А, будет выполнено то же свойство.

где

$$\widehat{\Phi}(X,Y,P)=\frac{\Delta^3}{F'}\Phi\Big(F,Y,\frac{P}{\Delta}\Big)+\frac{F''+2PF'_Y+P^2F_{YY}}{F'}P;$$

здесь $\Delta=F'+PF_Y$, *штрих обозначает частную производную по* X, *аргументами* F *и производных* F *являются* X *и* Y.

Доказательство. Пусть $y=u(x)$ — решение исходного уравнения, $Y=U(X)$ — его образ. Тогда

$$P=\frac{dU}{dX}=\frac{du}{dx}\Big|_F\cdot(F'+PF_Y),\quad \frac{du}{dx}\Big|_{F(X,U(X))}=\frac{P}{\Delta}.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2U}{dX^2}=\Delta\frac{d}{dX}\frac{du}{dx}\Big|_{F(X,U(X))}+\frac{P}{\Delta}\Big(F''+2F'_YP+F_{YY}P^2+F_Y\frac{d^2U}{dX^2}\Big).$$

Далее,

$$\frac{d}{dX}\frac{du}{dx}\Big|_{F(X,U(X))}=\frac{d^2u}{dx^2}\Big|_F\Delta=\Phi(F(X,\,U(X)),U(X),P/\Delta)\Delta.$$

Итак,

$$\Big(1-\frac{PF_Y}{\Delta}\Big)\frac{d^2U}{dX^2}=\Phi(F,U,P/\Delta)\Delta^2+\frac{P}{\Delta}(F''+2PF'_Y+P^2F_{YY}),$$

откуда и вытекает приведенная выше формула. □

Из доказанной формулы непосредственно вытекает

Следствие 1. *Пусть* $\Phi=0$. *Тогда* $\widehat{\Phi}$ — *многочлен не выше третьей степени относительно* P.

Следствие 2. *Пусть* Φ — *многочлен не выше третьей степени относительно* p. *Тогда* $\widehat{\Phi}$ — *многочлен не выше третьей степени относительно* P.

Замечание. Многочлены степени не выше $n\geqslant 4$ по p при нашем преобразовании $\Phi\mapsto\widehat{\Phi}$ уже не переходят в многочлены относительно P. Действительно, $\Delta^3(P/\Delta)^n$ — не многочлен относительно P при $n>3$.

Следствие 3. *Дифференциальное уравнение второго порядка задает на графике каждого своего решения структуру локальной проективной прямой и на нормальном расслоении к графику — структуру локальной проективной плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение в вариациях вдоль данного решения. Это — линейное однородное уравнение второго порядка, поэтому на плоскости зависимой и независимой переменной возникает структура локально проективной плоскости, а вдоль исходного решения — структура локально проективной прямой (см. п. А).

В обозначениях леммы уравнение в вариациях имеет вид $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\Phi_1$, где $\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\ldots$ — разложение в ряд по степеням y и p.

Рассмотрим теперь нормальное расслоение графика рассматриваемого решения на плоскости. Нормальное пространство подмногообразия в некоторой его точке есть факторпространство касательного пространства к объ-

емлющему многообразию по модулю касательного пространства к подмногообразию в рассматриваемой точке. Нормальное расслоение подмногообразия есть объединение нормальных пространств во всех точках подмногообразия (снабженное естественной проекцией на подмногообразие).

Решение уравнения в вариациях можно считать принимающим значения в нормальном расслоении графика рассматриваемого решения исходного уравнения.

В самом деле, уравнение в вариациях определялось при помощи системы координат (x, y), в которой ось x была графиком рассматриваемого решения. Значение решения уравнения в вариациях в точке — это касательный к объемлющей плоскости вектор y-направления в рассматриваемой точке оси x. Его проекция в нормальное пространство к оси x в этой точке определяет вектор нормального расслоения. Решения уравнения в вариациях определяют, таким образом, кривые в пространстве нормального расслоения. Оказывается, *эти кривые не зависят от того, какая система координат использовалась для их построения*; именно в этом смысле мы и говорим, что уравнение в вариациях можно рассматривать как уравнение в нормальном расслоении.

Доказательство выделенного утверждения легко извлечь, например, из доказанной выше леммы.

В обозначениях леммы доказываемое утверждение означает, что если $F(X, 0) = X$ и Φ_1 — линейный по y и p член разложения Φ в ряд Тейлора по y и p, то

$$\widehat{\Phi}_1(X, Y, P) = \Phi_1(X, Y, P).$$

Последнее равенство легко следует из формул леммы.

Итак, заданная уравнением в вариациях структура локально проективной плоскости задана на нормальном расслоении. □

3°. *Преобразование зависимой переменной.*

Рассмотрим локальный диффеоморфизм плоскости (x, y), заданный подстановкой $y = G(X, Z)$, $x = X$, переводящий точку с координатами (x, y) в точку с координатами (X, Z).

Лемма. *Уравнение*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi(x, y, p), \quad p = \frac{dy}{dx},$$

преобразуется указанной подстановкой в уравнение

$$\frac{d^2Z}{dX^2} = \widetilde{\Phi}(X, Z, \Pi), \quad \Pi = \frac{dZ}{dX},$$

где

$$\widetilde{\Phi}(X, Z, \Pi) = \frac{1}{G_Z}[\Phi(X, G(X, Z), G' + \Pi G_Z) - G'' - 2\Pi G'_Z - \Pi^2 G_{ZZ}];$$

здесь штрих есть частная производная по X, аргументами у G и ее производных всюду являются X и Z.

Доказательство. Пусть $y = v(x)$ — решение исходного уравнения, $Z = V(X)$ — его образ. Тогда

$$\frac{dv}{dx} = G' + V'G_Z$$

(здесь и далее аргументы у G и ее производных — X и $V(X)$). Далее,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = G'' + 2G'_Z V' + G_{ZZ}V'^2 + G_Z V'' = \Phi(X, G, G' + XG_Z).$$

Находя V'' из последнего равенства, получаем формулу, приведенную в лемме. □

Из доказанной леммы непосредственно вытекают

Следствие 1. *Пусть* $\Phi = 0$. *Тогда* $\widetilde{\Phi}$ *— многочлен не выше второй степени относительно* Π.

Следствие 2. *Пусть* Φ *— многочлен не выше* n*-й степени относительно* p, $n \geqslant 2$. *Тогда* $\widetilde{\Phi}$ *— многочлен не выше* n*-й степени относительно* Π.

4°. *Вычисление квадратичных членов.*

Рассмотрим локальный диффеоморфизм плоскости, заданный подстановкой

$$x = F(X, Z) = X + f(X)Z + O(|Z|^2),$$
$$y = G(X, Z) = Z + g(X)Z^2 + O(|Z|^3).$$

Лемма. *Уравнение*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi(x, y, p), \quad p = \frac{dy}{dx}, \quad \Phi = O(|y|^2 + |p|^2),$$

преобразуется указанной подстановкой в уравнение

$$\frac{d^2Z}{dX^2} = \Psi(X, Z, \Pi), \quad \Pi = \frac{dZ}{dX},$$

где

$$\Psi(X, Z, \Pi) = \Phi(X, Z, \Pi) + \Omega(X, Z, \Pi) + O(|Z|^3 + |\Pi|^3),$$
$$\Omega = \alpha Z^2 + \beta Z\Pi + \gamma\Pi^2,$$
$$\alpha = -g'', \quad \beta = -4g' + f'', \quad \gamma = -2g + 2f'$$

(*в качестве аргумента у* f, g *и их производных подставлено* X).

Доказательство получается применением лемм о преобразовании сначала независимой, а затем зависимой переменной. Разлагая правые части полученных там формул в ряд по (Z, Π) и оставляя лишь квадратичные члены, получим в качестве добавки к квадратичным членам Φ указанную выше величину Ω. □

5°. *Приведение квадратичных членов.*

Обозначим квадратичные члены исходной правой части Φ через

$$\Phi_2 = Ay^2 + Byp + Cp^2.$$

Тогда квадратичные члены для преобразованного уравнения будут

$$\Psi_2 = (A - g'')Z^2 + (B - 4g' + f'')Z\Pi + (C - 2g + 2f')\Pi^2$$

(у функций A, B, C, f, g и их производных в качестве аргумента подставлено X, совпадающее, впрочем, с x вдоль рассматриваемого решения). Непосредственно проверяется

Лемма. *Величина*

$$I = 6A - 2B' + C''$$

не меняется при переходе от Φ_2 *к* Ψ_2.

Выбирая произвольные функции f и g, можно аннулировать два из трех коэффициентов A, B, C (сохраняя величину I). В частности, выберем f и g из условий $4g' - f'' = B$, $2g - 2f' = C$. Тогда получим $\Psi_2 = \bar{A}Z^2$, $\bar{A} = I/6$, что и доказывает теорему. □

В. Инфинитезимальная недезарговость

Система координат, в которой дифференциальное уравнение второго порядка записывается вблизи графика фиксированного своего решения в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A(x)y^2 + O(|y|^3 + |p|^3), \quad p = \frac{dy}{dx},$$

определена неоднозначно. Исследуем, в какой мере коэффициент A, препятствующий выпрямлению семейства решений и измеряющий инфинитезимальную недезарговость в данной точке по данному направлению, инвариантен, т. е. не зависит от способа приведения к нормальной форме.

Теорема. *Дифференциальная форма степени* $5/2$ *вдоль графика нулевого решения*

$$\omega = A(x)|dx|^{5/2}$$

определена инвариантно, с точностью до мультипликативной постоянной.

Иными словами, если (X, Y) — другая система координат, в которой уравнение также записывается в нормальной форме, причем решению $Y = 0$ отвечает $y = 0$ и коэффициент $A(x)$ заменен на $\bar{A}(X)$, то

$$\bar{A}(X) = CA(x)\left|\frac{dx}{dX}\right|^{5/2},$$

где C не зависит от x.

Мы будем называть форму ω «*формой недезарговости вдоль данного решения*».

Доказательство. Наиболее общий диффеоморфизм, оставляющий на месте ось $y = 0$, переводит точку (x, y) в точку

$$X = f_0(x) + yf_1(x) + \ldots, \quad Y = yg_1(x) + y^2g_2(x) + \ldots$$

Вектор нормального расслоения, приложенный в точке x и имеющий y-компоненту ξ, переходит при этом в вектор, приложенный в точке $f_0(x)$ и имеющий y-компоненту $g_1(x)\xi$.

Проективная структура нормального расслоения определена инвариантно (см. п. Б), поэтому преобразование

$$(x, \xi) \mapsto (f_0(x), g_1(x)\xi),$$

построенное по диффеоморфизму $(x, y) \mapsto (X, Y)$, переводящему некоторое уравнение в нормальной форме в уравнение в нормальной форме, должно быть проективным. Отсюда мы находим

$$f_0 = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad g_1 = \frac{C}{cx+d}.$$

Всякий диффеоморфизм, оставляющий на месте ось $y=0$ и сохраняющий проективную структуру ее нормального расслоения, можно поэтому представить в виде произведения специального преобразования

$$X = f_0(x), \quad Y = yg_1(x)$$

и диффеоморфизма, сохраняющего нормальное расслоение поточечно:

$$(X, Y) \mapsto (X + Yf_1(X) + \ldots, Y + Y^2 g_2(X) + \ldots).$$

Последний диффеоморфизм можно представить в виде произведения преобразований зависимой и независимой переменной, рассмотренных в п. Б. Поэтому составленный из квадратичных по y и p членов правой части уравнения инвариант I (см. п. Б, 5°) при этом диффеоморфизме не меняется.

Исследуем поведение I при специальном проективном преобразовании.

Всякое проективное преобразование прямой разлагается в произведение сдвигов, растяжений и преобразования $x \mapsto 1/x$.

Величина I инвариантна относительно сдвигов, а при растяжениях x и y лишь умножается на постоянную. Поэтому достаточно рассмотреть ее поведение при замене $x = 1/X$, $y = Y/X$.

Вычисляя производные $P = \frac{dY}{dX}$ и $\frac{dP}{dX} = \frac{d^2Y}{dX^2}$, находим $P = y - px$, $\frac{dP}{dX} = \frac{X^{-3}\,dp}{dx}$ (где $p = \frac{dy}{dx}$). Следовательно,

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = X^{-3}A\Big(\frac{1}{X}\Big)\Big(\frac{Y}{X}\Big)^2 + O(|Y|^3 + |P|^3).$$

Поэтому коэффициент при Y^2 равен $X^{-5}A(x)$. □

Г. Построение скалярных инвариантов

Из определенной выше дифференциальной формы ω можно получить скалярные функции, инвариантно связанные с уравнением.

Прежде всего заметим, что с дифференциальной формой ω (любой степени) на одномерном многообразии инвариантно связано векторное поле (форма степени -1): значение формы на векторе этого поля в каждой точке равно 1.

Например, с формой $A(x)(dx)^{5/2}$ инвариантно связано поле $v(x)\frac{\partial}{\partial x}$, где $v = A^{-2/5}$.

Теорема. *Пусть* $v(x)\dfrac{\partial}{\partial x}$ *— векторное поле на прямой. Тогда следующие скалярные функции связаны с полем инвариантно относительно проективных преобразований прямой*:

$$I_2 = 2v''v - v'^2, \quad I_3 = 2v'''v^2, \quad \ldots, \quad I_n = vI'_{n-1}, \quad \ldots$$

Здесь штрих означает производную по x.

Доказательство. Инвариантность I_2 легко проверить непосредственным вычислением: достаточно рассмотреть замену $x = 1/X$, так как инвариантность относительно сдвигов и растяжений очевидна. Производная функции вдоль заданного поля связана с функцией и полем инвариантно не только относительно проективных преобразований, но и относительно всех диффеоморфизмов прямой. Поэтому инвариантность всех I_n вытекает из инвариантности I_2. □

Замечание 1. Инвариант I_2 построен из следующих соображений. Алгебра Ли проективной группы прямой порождена полями* $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{x\partial}{\partial x}, \dfrac{x^2\partial}{\partial x}$. Поэтому каждое векторное поле в любой точке с точностью до квадратичных членов включительно можно аппроксимировать проективным полем (полем из алгебры Ли проективной группы).

При проективных преобразованиях проективное поле, аппроксимирующее исходное поле в исходной точке, переходит в новое проективное поле, аппроксимирующее преобразованное поле в точке-образе. Действие проективных преобразований прямой на трехмерном пространстве проективных полей есть присоединенное действие проективной группы на своей алгебре Ли. Но такое действие сохраняет квадратичную форму на алгебре. Действительно, если записывать проективные преобразования матрицами второго порядка, а проективные поля — матрицами соответствующих им производящих операторов однопараметрических групп, то действие преобразования g на поле v записывается как произведение матриц gvg^{-1}. Но $\det gvg^{-1} = \det v$. Поэтому определитель матрицы v является квадратичной формой на алгебре Ли проективных полей, инвариантной относительно присоединенного представления. Следовательно, этот же определитель, вычисленный для проективного поля, аппроксимирующего заданное век-

* Соответствующие однопараметрические группы проективных преобразований имеют в аффинных координатах вид $g^t x = x + t$, $g^t x = e^t x$, $g^t x = \dfrac{x}{1 - tx}$ и, следовательно, в однородных координатах задаются унимодулярными матрицами второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \exp(t/2) & 0 \\ 0 & \exp(-t/2) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрицы производящих операторов суть

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

торное поле, является скаляром, связанным с данным полем инвариантно относительно проективных преобразований.

Аппроксимирующее проективное поле имеет в указанном выше базисе алгебры Ли компоненты $(v, v', v''/2)$. Соответствующая полю матрица имеет поэтому вид

$$\begin{pmatrix} v'/2 & v \\ -v''/2 & -v'/2 \end{pmatrix};$$

ее определитель и есть I_2 (с точностью до несущественного множителя).

Замечание 2. По-видимому, всякая функция (многочлен, ряд, ...) от значений v и конечного числа производных v, инвариантно связанная с полем v относительно проективных преобразований, выражается через построенные инварианты I_k.

Замечание 3. Проективные инварианты функции на проективной прямой можно построить так: функции сопоставляется ее дифференциал (1-форма), форме — поле, полю — инварианты I_k. В частности, простейшим инвариантом функции f относительно проективных преобразований независимой переменной является

$$I_2[f] = \frac{2f'f''' - 3f''^2}{f'^4}$$

(эта величина отличается от производной Шварца, инвариантной относительно проективных преобразований оси значений функции, лишним множителем f'^2 в знаменателе).

Замечание 4. Построенные выше инварианты $I_2, I_3 \ldots$ при умножении векторного поля на число λ умножаются на λ^2, λ^3, ... Из них легко составить комбинации, уже нечувствительные к умножению поля на число, например, $J = I_2^3/I_3^2$.

Величина J, соответствующая полю v, построенному по $(5/2)$-форме ω, является скалярной функцией на пространстве линейных элементов плоскости, уже совершенно не зависящей от выбора координат, но лишь от исходного дифференциального уравнения второго порядка.

Д. Уравнения, кубические относительно производной

Обращение в нуль построенной выше формы недезарговости ω вдоль любого решения необходимо для выпрямления уравнения (приведения его к виду $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$), но, как мы сейчас увидим, не достаточно.

Теорема 1. *Предположим, что дифференциальное уравнение*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi(x, y, p) \quad \left(p = \frac{dy}{dx}\right)$$

приводится к виду $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ *диффеоморфизмом плоскости. Тогда* Φ *— многочлен не выше третьей степени относительно* p.

Иными словами, дифференциальное уравнение семейства всех прямых на плоскости, записанное в любой системе криволинейных координат, имеет правой частью многочлен не выше третьей степени относительно первой производной.

Теорема 1 вытекает из следующего (удивительного) факта:

Теорема 2. *Предположим, что правая часть дифференциального уравнения*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi(x, y, p)$$

— многочлен не выше третьей степени относительно p. Тогда после любого диффеоморфизма плоскости уравнение переходит в уравнение такого же вида, т. е. правая часть остается многочленом не выше третьей степени относительно производной.

Теорема 2 вытекает из лемм п. Б о действии замен независимой и зависимой переменной на правую часть уравнения (см. следствия в п. Б), так как любой локальный диффеоморфизм плоскости можно получить, последовательно применяя такие замены.

Теорема 1 вытекает из теоремы 2 и того, что нуль — многочлен не выше третьей степени относительно p.

Задача. Сделать в уравнении

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a_0y'^3 - a_1y'^2 + b_1y' - b_0$$

(где a_i, b_i — функции от x, y) замену $(x, y) \to (y, x)$.

Ответ.

$$\frac{d^2x}{dy^2} = b_0x'^3 - b_1x'^2 + a_1x' - a_0.$$

Замечание. Можно показать, что условия $\omega \equiv 0$ и $\frac{d^4\Phi}{dp^4} \equiv 0$ независимы. Поэтому условие $\omega \equiv 0$ не достаточно для приведения уравнения к виду $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Оба условия $\left\{\omega \equiv 0, \frac{d^4\Phi}{dp^4} \equiv 0\right\}$ вместе уже достаточны для приведения уравнения к виду $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Это можно усмотреть из формул п. Б (после некоторых вычислений).

Задача. Докажите, что каждое уравнение второго порядка локально (в окрестности точки $x=0$ решения $y=0$) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p^2B(x, y, p), \quad p = \frac{dy}{dx}.$$

Е. Геометрия пары полей направлений в трехмерном пространстве

Рассмотрим пару полей направлений в трехмерном пространстве. Оказывается, локальная классификация таких пар общего положения (с точно-

стью до диффеоморфизмов пространства) эквивалентна локальной классификация дифференциальных уравнений второго порядка (с точностью до диффеоморфизмов плоскости зависимой и независимой переменной; локально = вблизи данной точки с направлением).

Прежде всего сопоставим паре полей направлений в трехмерном пространстве двупараметрическое семейство кривых на плоскости.

С этой целью выпрямим первое поле с помощью локального диффеоморфизма пространства, переводящего семейство интегральных кривых первого поля в семейство параллельных вертикальных прямых. После этого спроектируем интегральные кривые второго поля на горизонтальную плоскость вдоль вертикальных прямых. На горизонтальной плоскости (на факторплоскости пространства по интегральным кривым первого поля) получим двупараметрическое семейство кривых.

Теперь построим по двупараметрическому семейству кривых дифференциальное уравнение второго порядка, для которого эти кривые являются графиками решений.

С этой целью заметим, что в общем локальном двупараметрическом семействе кривых на плоскости вблизи каждого линейного элемента (точки и направления) кривой семейства через каждую точку плоскости по каждому направлению проходит кривая семейства и притом одна (для этого должен лишь не обращаться в нуль соответствующий определитель Якоби).

Если семейство — общее в указанном смысле, и (x, y) — координаты на плоскости, то значение $\frac{d^2y}{dx^2}$ на кривой семейства является гладкой функцией от рассматриваемого элемента, т. е. от $(x, y, dy/dx)$. Мы получаем таким образом дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi\Big(x, y, \frac{dy}{dx}\Big).$$

Графики решений этого уравнения являются кривыми семейства (по теореме единственности).

Таким образом, мы сопоставили паре полей направлений в трехмерном пространстве дифференциальное уравнение второго порядка, при некотором условии невырожденности: должен быть отличен от нуля соответствующий определитель Якоби.

Определение. Поле направлений в трехмерном пространстве называется *невырожденным относительно вертикали*, если направление поля нигде не вертикально и при этом горизонтальная проекция направления поля поворачивается с ненулевой скоростью при движении точки приложения вдоль вертикальной прямой.

Пара полей направлений в трехмерном пространстве называется *невырожденной*, если после диффеоморфизма, делающего первое поле вертикальным, второе становится невырожденным по отношению к первому.

Замечание. Нетрудно видеть, что определение корректно: если второе поле становится невырожденным по отношению к первому после некоторого диффеоморфизма, выпрямляющего интегральные кривые первого поля, то оно станет таковым и после любого другого диффеоморфизма, выпрямляющего первое поле. Нетрудно проверить также, что невырожденность пары сохраняется при изменении порядка полей (т. е. что все равно, какое из двух полей выпрямлять).

Выше мы сопоставили каждой невырожденной паре локальных полей направлений в трехмерном пространстве дифференциальное уравнение второго порядка. Действительно, наше условие невырожденности в точности совпадает с отличием от нуля определителя Якоби $\frac{\partial(y, y')}{\partial(u, v)}$, где (u, v) — параметры семейства. Покажем теперь, что это соответствие устанавливает полную эквивалентность задач о локальной классификации пар полей направлений в $\mathbb{R}^3$ и дифференциальных уравнений второго порядка.

Теорема. *Каждое уравнение второго порядка получается описанной выше конструкцией из подходящей невырожденной пары полей направлений в трехмерном пространстве.*

Если две пары полей переводятся одна в другую диффеоморфизмом пространства, то соответствующие уравнения переводятся одно в другое диффеоморфизмом плоскости. Обратно, если два уравнения второго порядка переводятся одно в другое диффеоморфизмом плоскости, то любые две пары полей, отвечающие им, переводятся одна в другую диффеоморфизмом пространства.

Таким образом, пара полей восстанавливается по уравнению однозначно (с точностью до диффеоморфизмов пространства).

Доказательство. Для каждого уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

рассмотрим в трехмерном пространстве 1-струй с координатами (x, y, p) семейство «вертикальных» линий p-направления ($x = \text{const}$, $y = \text{const}$) и семейство интегральных кривых системы $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = \Phi$, эквивалентной уравнению.

При проектировании вдоль вертикального направления получим семейство графиков решений нашего уравнения. Итак, для каждого уравнения мы предъявили пару полей направлений, из которой оно получается.

Диффеоморфизм пространства, переводящий каждую вертикальную прямую в вертикальную, задает диффеоморфизм горизонтальной плоскости. Поэтому из диффеоморфизма двух пар полей в $\mathbb{R}^3$ следует диффеоморфизм соответствующих уравнений.

Обратно, диффеоморфизм горизонтальной плоскости действует на линейные элементы (направления) кривых на плоскости. Поэтому диффео-

морфизм, переводящий первое уравнение во второе, определяет диффеоморфизм трехмерного пространства с первой парой полей направлений во второе. (Точке первого пространства отвечает элемент кривой на плоскости, диффеоморфизм переводит его на новое место, полученный элемент является проекцией направления второго поля второй пары в единственной точке второго пространства — эта точка и сопоставляется исходной.) □

Из доказанной теоремы следует, что все описанные выше результаты о геометрии семейства решений уравнения второго порядка могут быть переформулированы в терминах геометрии невырожденной пары полей направлений в трехмерном пространстве (или, если угодно, в терминах геометрии системы двух уравнений первого порядка, не разрешенной относительно производных, в простейшем случае, когда производные зависят от координат двузначно).

Заметим также, что невырожденная пара полей направлений задает в трехмерном пространстве контактную структуру (вполне неинтегрируемое поле плоскостей, натянутых на данные направления, подробнее см. гл. 2). Интегральные кривые наших полей образуют в смысле этой структуры лежандровы расслоения*. Поэтому мы можем переформулировать предыдущие результаты как результаты о геометрии пары лежандровых расслоений в $\mathbb{R}^3$.

Ж. Двойственность

Выше мы построили для каждой невырожденной пары полей направлений в трехмерном пространстве дифференциальное уравнение второго порядка, выпрямляя первое поле и проектируя интегральные кривые второго. Однако можно было бы поступить наоборот: выпрямлять второе поле, а проектировать интегральные кривые первого. В результате получится, вообще говоря, другое уравнение второго порядка.

Таким образом, для каждого дифференциального уравнения второго порядка имеется двойственное ему уравнение.

В терминах пар полей направлений в трехмерном пространстве переход к двойственному уравнению сводится к тому, что мы меняем местами поля пары. Другое описание двойственного уравнения состоит в следующем. Предположим, что семейство решений уравнений второго порядка для $y(x)$, зависящих от двух параметров (u, v), записано в виде $F(x, y; u, v) = 0$. Будем теперь считать параметрами x и y, а переменными u и v. Тогда это же соотношение определит двупараметрическое семейство функций $v(u)$. Это семейство является семейством решений уравнения второго порядка; это уравнение и есть уравнение, двойственное исходному.

* Лежандровым подмногообразием контактной структуры называется интегральное подмногообразие наибольшей возможной размерности. Лежандрово расслоение — это расслоение с лежандровыми слоями.

Задача. Докажите, что форма недезарговости ω уравнения второго порядка (см. п. Б) равна нулю тогда и только тогда, когда правая часть двойственного уравнения — многочлен не выше третьей степени относительно производной.

Таким образом, условие выпрямляемости уравнений второго порядка можно сформулировать так:

Уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} = \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ *приводится к виду* $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, *если и только если правая часть является многочленом не выше третьей степени относительно производной как для данного уравнения, так и для двойственного уравнения*.

3. Обзор

Геометрия уравнения второго порядка послужила источником ряда математических теорий.

1°. А. Трессе, ученик С. Ли, в диссертации «Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire de second ordre», Leipzig, 1896 (см. также его статью «Sur les invariants différentiels des groupes countinues des transformations» // Acta Mathematica. 1894. V. 18. P. 1—88), построил все «полуинварианты» уравнения.

(Полуинвариантом порядка k называется функция от значения правой части уравнения и ее производных порядка не выше k в данной точке пространства (x, y, p), обращение которой в нуль для данного уравнения в данной точке этого трехмерного пространства элементов влечет за собой ее обращение в нуль для преобразованного диффеоморфизмом плоскости уравнения в преобразованном элементе.)

Оказывается, имеется ровно два функционально независимых полуинварианта четвертого порядка. Один из них $\frac{\partial^4\Phi}{\partial p^4}$. Другой — скалярный инвариант I_2, построенный по форме инфинитезимальной недезарговости (см. п. Г). Для уравнения в нормальной форме $\frac{d^2y}{dx^2} = A(x)y^2 + O(|y|^3 + |p|^3)$

$$I_2 = 2\nu''\nu - \nu'^2, \quad \nu = A^{-2/5};$$

следовательно, полуинвариантом является $5AA'' - 12A'^2$.

Трессе нашел еще три полуинварианта пятого порядка, а при $k > 5$ еще $(k^2 - k - 8)/2$ полуинвариантов порядка k; все прочие полуинварианты — функции от этих. Трессе указывает также, что все полуинварианты «выводятся из трех простейших» дифференцированиями.

2°. Задача о геометрии дифференциального уравнения второго порядка привела Э. Картана к теории многообразий проективной связности (*Cartan E.* Sur les variétés à connexion projective // Bull. Soc. Math. France. 1924. V. 52. P. 205—241; Oeuvres. III. V. 1, № 70. Paris, 1955. P. 825—862).

Проективная связность на многообразии есть сопоставление каждому гладкому пути на многообразии проективного отображения касательного пространства в исходной точке пути в касательное пространство в конечной точке, гладко зависящего от пути*. В частности, замкнутому пути отвечает проективное преобразование исходного касательного пространства, а обходу по «бесконечно малому параллелограмму» отвечает «бесконечно малое проективное преобразование», называемое формой кривизны связности.

Проективная связность называется связностью без кручения, если начало координат касательного пространства остается при обносе по замкнутому пути на месте. Среди всех связностей без кручения Картан выделяет нормальные связности. В двумерном случае нормальность связности означает, что каждая прямая, выходящая из начала координат касательной плоскости, при обносе по замкнутому пути переходит в себя.

Геодезической линией связности называется линия на многообразии, касательная к которой при переносе вдоль этой линии переходит в касательную.

Оказывается, геодезические проективной связности без кручения на плоскости являются графиками решений уравнения второго порядка, правая часть которого — многочлен не выше третьей степени относительно производной. Обратно, всякому уравнению второго порядка с правой частью в виде многочлена не выше третьей степени соответствует в точности одна нормальная проективная связность без кручения, для которой геодезическими являются графики решений.

Что касается общих уравнений второго порядка, то им Картан тоже однозначно сопоставляет нормальную проективную связность без кручения, но перенесение двумерной плоскости определяется уже вдоль путей в трехмерном пространстве элементов (подробности см. в цитированной работе Картана).

3°. Перевод теории Трессе на язык пары полей направлений в пространстве проделан Болем (*Bol G.* Über topologische Invarianten von zwei Kurvenscharen in Raum // Abhandlungen Math. Sem. Univ. Hamburg. 1932. V. 9, № 1. P. 15—47).

В этой теории, по-видимому, остался нерешенным вопрос о пространстве орбит, в частности, вопрос о том, сколькими параметрами нумеруются орбиты k-струи уравнения второго порядка (под действием группы диффеоморфизмов плоскости на пространстве k-струй уравнений) в окрестности точки общего положения пространства k-струй.

* Удовлетворяющее некоторым естественным условиям, которых мы здесь не приводим.

Глава 2

Уравнения с частными производными первого порядка

Уравнения с частными производными изучены гораздо хуже, чем обыкновенные дифференциальные уравнения. Один из результатов этой теории — теорию одного уравнения с частными производными первого порядка — удается свести к изучению специальных обыкновенных дифференциальных уравнений, так называемых уравнений характеристик. Сущность этой связи состоит в том, что сплошная среда из невзаимодействующих частиц может описываться как уравнением в частных производных для поля, так и обыкновенными уравнениями для частиц.

В настоящей главе изложена эта теория (в математическом отношении сводящаяся к геометрии так называемых контактных структур). Рассматривается также вопрос об интегрируемости поля гиперплоскостей (теорема Фробениуса).

§ 7. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка

Интегрирование уравнения с частными производными первого порядка сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений — так называемых уравнений характеристик. В основе этого сведения лежат простые геометрические соображения об образовании поверхностей из семейств кривых. Мы начнем с этих геометрических соображений, а затем применим их к уравнениям с частными производными.

А. Интегральные поверхности поля направлений

Пусть X — гладкое многообразие, V — поле направлений на X.

Определение. Гладкое подмногообразие $Y \subset X$ называется *интегральной поверхностью* поля V, если касательная плоскость к Y в каждой точке содержит направление поля V (рис. 41).

Теорема. *Подмногообразие $Y \subset X$ является интегральной поверхностью поля V тогда и только тогда, когда оно вместе с каждой своей точкой содержит интервал интегральной кривой, проходящей через эту точку.*

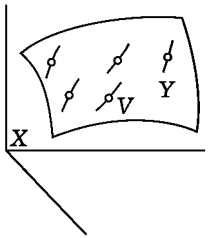


Рис. 41

Доказательство. Утверждение теоремы локально и инвариантно относительно диффеоморфизмов. Поэтому его достаточно доказать для стандартного поля параллельных направлений в линейном пространстве. Но в этом случае утверждение теоремы очевидно (оно сводится к тому, что функция, заданная на интервале, постоянна тогда и только тогда, когда ее производная равна нулю, рис. 42). □

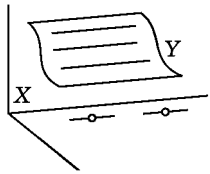


Рис. 42

Пусть Γ — k-мерное подмногообразие в n-мерном многообразии X (рис. 43). Γ называется гиперповерхностью, если $k = n - 1$.

Определение. *Задачей Коши* для поля направлений V с начальным многообразием Γ называется задача об отыскании $(k+1)$-мерного интегрального подмногообразия поля V, содержащего начальное подмногообразие Γ.

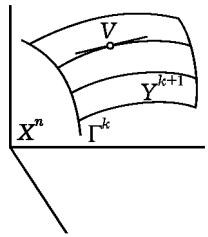


Рис. 43

Заметим, что интегральные кривые, проходящие через Γ, не всегда образуют подмногообразие даже локально, в окрестности начального многообразия Γ, см. рис. 44.

Определение. Точка начального многообразия называется *характеристической* в поле направлений V, если направление поля V в этой точке касается начального многообразия.

Рис. 44

Теорема. *Пусть дана нехарактеристическая в поле направлений V точка k-мерного начального многообразия. Тогда существует $(k+1)$-мерная интегральная поверхность поля, содержащая окрестность этой точки на начальном многообразии. Эта поверхность единственна в том смысле, что любые две интегральные поверхности, содержащие окрестности указанной точки на начальном многообразии, совпадают в некоторой окрестности этой точки.*

Доказательство. Утверждение локально и инвариантно относительно диффеоморфизмов. Поэтому его достаточно доказывать для стандартного поля параллельных направлений в линейном пространстве. В этом же случае утверждение очевидно (почему?). □

Б. Линейное однородное уравнение первого порядка

Определение. *Линейным однородным уравнением первого порядка* называется уравнение

$$L_a u = 0, \tag{1}$$

где a — заданное векторное поле на многообразии M.

Пусть поле a имеет в координатах $(x_1, \ldots, x_n)$ компоненты $(a_1, \ldots, a_n)$; каждая компонента является функцией от координат. Тогда уравнение (1) записывается в виде

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \tag{2}$$

Определение. Поле a называется *характеристическим векторным полем* для уравнения (1), а его фазовые кривые называются *характеристиками*. Уравнение $\dot{x} = a(x)$ называется *уравнением характеристик* для уравнения с частными производными (1).

Теорема. *Функция u является решением линейного уравнения первого порядка тогда и только тогда, когда она является первым интегралом уравнения характеристик.*

Доказательство. Это определение первых интегралов. □

Определение. *Задачей Коши* для уравнения (1) называется задача о нахождении решения u, удовлетворяющего условию $u|_\gamma = \varphi$, где γ — некоторая гладкая гиперповерхность в M, а φ — заданная гладкая функция на этой гиперповерхности.

Гиперповерхность γ называется *начальной гиперповерхностью*, а функция φ — начальным условием.

Заметим, что такая задача не всегда имеет решение. Действительно, вдоль каждой характеристики решение u постоянно. Но характеристика может пересекать начальную поверхность γ несколько раз. Если значения заданной функции φ в этих точках различны, то соответствующая задача Коши не имеет решения ни в какой области, содержащей указанную характеристику (рис. 45).

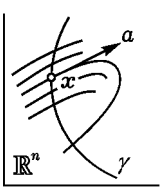


Рис. 45

Определение. Точка x на начальной гиперповерхности γ называется *нехарактеристической*, если характеристика, проходящая

через эту точку, трансверсальна (не касательна) к начальной гиперповерхности.

Теорема. *Пусть x — нехарактеристическая точка на начальной гиперповерхности. Тогда существует такая окрестность точки x, что задача Коши для уравнения* (1) *в этой окрестности имеет решение, и притом только одно.*

Доказательство. По теореме о выпрямлении можно выбрать вблизи x координаты так, что компоненты поля a будут иметь вид $(1, 0, \ldots, 0)$ и уравнение γ примет вид $x_1 = 0$ (рис. 46).

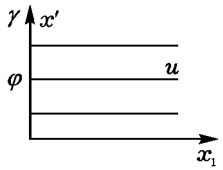


Рис. 46

Задача Коши в этих координатах принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad u|_{x_1=0} = \varphi. \tag{3}$$

Единственное (в выпуклой области) решение: $u(x_1, x') = \varphi(x')$, где $x' = (x_2, \ldots, x_n)$. □

Замечание. Решения любого обыкновенного дифференциального уравнения образуют конечномерное многообразие: каждое решение задается конечным набором начальных условий. Мы видим, что у линейного однородного уравнения первого порядка с частными производными относительно функции от n переменных «столько решений, сколько существует функций $n-1$ переменных».

Мы увидим далее, что аналогичное явление имеет место и для общих уравнений с частными производными первого порядка.

В. Линейное неоднородное уравнение первого порядка

Определение. Линейным неоднородным уравнением первого порядка называется уравнение

$$L_a u = b, \tag{4}$$

где a — заданное векторное поле на многообразии M, а b — заданная функция на M. В координатной записи

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = b, \tag{5}$$

где $a_k = a_k(x_1, \ldots, x_n)$, $b = b(x_1, \ldots, x_n)$.

Задача Коши для уравнения (4) ставится так же, как для однородного уравнения (1).

Теорема. *Задача Коши для уравнения* (4) *в достаточно малой окрестности любой нехарактеристической точки x_0 начальной по-*

верхности γ имеет решение, и притом единственное; оно дается формулой

$$u(g(x,t)) = \varphi(x) + \int_0^t b(g(x,\tau))\,d\tau,$$

где $g(x,t)$ — значение решения уравнения характеристик (с начальным условием $g(x,0)=x$ на начальной поверхности) в момент времени t.

Доказательство. После выпрямления поля a приходим к задаче

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = b, \quad u|_{x_1=0} = \varphi(x').$$

Единственное решение

$$u(x_1, x') = \varphi(x') + \int_0^{x_1} b(\xi, x')\,d\xi. \qquad \square$$

Иными словами: уравнение (4) означает, что производная решения вдоль характеристик — известная функция, b. Стало быть, приращение решения вдоль отрезка характеристики равно интегралу от функции b вдоль этого отрезка (рис. 47).

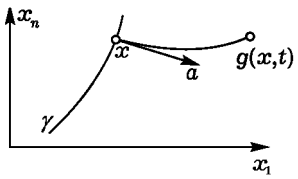


Рис. 47

Г. Квазилинейное уравнение первого порядка

Определение. *Квазилинейным уравнением первого порядка* называется уравнение

$$L_a u = \beta, \tag{6}$$

где $\alpha(x) = a(x, u(x))$, $\beta(x) = b(x, u(x))$. Здесь x — точка многообразия M, u — неизвестная функция на M, a — заданное векторное поле, касательное к M, зависящее как от параметра от точки $u \in \mathbb{R}$, b — заданная функция на $M \times \mathbb{R} = J^0(M, \mathbb{R})$.

В координатах квазилинейное уравнение (6) имеет вид

$$a_1(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+a_n(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=b(x,u). \tag{7}$$

Отличие от линейного уравнения лишь в том, что коэффициенты a_k и b могут зависеть от неизвестной функции.

Пример. Рассмотрим одномерную среду, состоящую из частиц, движущихся по прямой по инерции, так что скорость каждой частицы остается постоянной. Обозначим скорость частицы, находящейся в момент t в точке x через $u(x,t)$. Запишем уравнение Ньютона: ускорение частицы равно нулю. Если $x=\varphi(t)$ — движение частицы, то $\dot\varphi=u(\varphi(t),t)$ и

$$\ddot\varphi=\frac{\partial u}{\partial x}\dot\varphi+\frac{\partial u}{\partial t}=u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}.$$

Следовательно, поле скоростей u среды из невзаимодействующих частиц удовлетворяет квазилинейному уравнению

$$uu_x+u_t=0. \tag{8}$$

Задача. Построить график функции $u(\cdot,t)$, если график функции $u(\cdot,0)$ имеет представленный на рис. 48 вид.

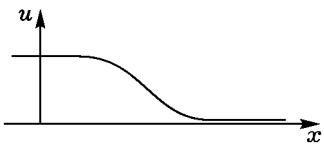


Рис. 48

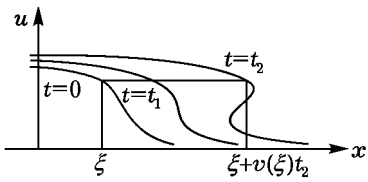


Рис. 49

Ответ. См. рис. 49. При $t\geqslant t_1$ гладкого решения не существует. Начиная с этого момента частицы в среде сталкиваются. (Физическое условие движения по инерции, т. е. отсутствия взаимодействия между частицами,

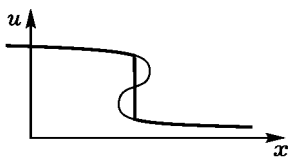


Рис. 50

становится нереалистическим и должно быть заменено другим физическим условием — описанием характера столкновения. Так возникают так называемые ударные волны — функции вида, изображенного на рис. 50, удовлетворяющие уравнению (8) вне разрыва и дополнительным условиям физического происхождения на разрыве.)

Д. Характеристики квазилинейного уравнения первого порядка

Мы только что видели, как полезно перейти от поля скоростей к движению частиц для специального квазилинейного уравнения (8). Нечто подобное можно сделать и в случае общего уравнения (6). При этом роль движения частиц играют некоторые кривые в прямом произведении области определения и области значений неизвестной функции; эти кривые называются характеристиками квазилинейного уравнения.

Квазилинейное уравнение (6) относительно неизвестной функции $u\colon M \to \mathbb{R}$

$$L_{a(x,u(x))}u = b(x, u(x)) \tag{6}$$

означает, что если точка x выходит из x_0 и начинает двигаться по M со скоростью $a(x_0, u_0)$, то значение решения $u = u_0$ начинает меняться со скоростью $b(x_0, u_0)$.

Иными словами, вектор $A(x_0, u_0)$, приложенный в точке (x_0, u_0) пространства $M \times \mathbb{R}$ и имеющий компоненты $a(x_0, u_0)$ вдоль M и $b(x_0, u_0)$ вдоль $\mathbb{R}$, касается графика решения (рис. 51).

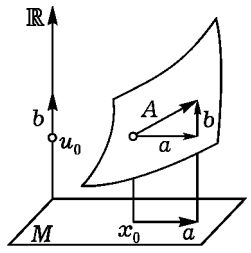


Рис. 51

Определение. Вектор $A(x_0, u_0)$ называется *характеристическим вектором* квазилинейного уравнения (6) в точке (x_0, u_0). Характеристические векторы во всех точках пространства $M \times \mathbb{R}$ образуют *векторное поле* A. Это поле называется *характеристическим векторным полем* квазилинейного уравнения (6). Фазовые кривые характеристического векторного поля называются *характеристиками* квазилинейного уравнения.

Дифференциальное уравнение, заданное полем фазовой скорости A, называется *уравнением характеристик*.

Пример. Пусть M есть $\mathbb{R}^n$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$. Характеристическое поле задается своими компонентами; их значения в точке (x, u) равны

$$a_1(x,u), \ldots, a_n(x,u); \quad b(x,u).$$

Уравнение характеристик имеет вид

$$\dot{x}_1 = a_1(x,u), \quad \ldots, \quad \dot{x}_n = a_n(x,u); \quad \dot{u} = b(x,u).$$

Задача. Найти характеристики уравнения среды из невзаимодействующих частиц $uu_x + u_t = 0$.

Ответ. $\dot{x} = u$, $\dot{t} = 1$, $\dot{u} = 0$. Характеристики — прямые $x = a + bt$, $u = b$.

Замечание. Линейное уравнение является частным случаем квазилинейного, однако характеристики линейного уравнения — не то же самое, что характеристики того же уравнения, рассматриваемого как квазилинейное: характеристики линейного уравнения лежат в M, а квазилинейного — в $M \times \mathbb{R}$. Характеристики линейного уравнения — это проекции характеристик того же уравнения, рассматриваемого как квазилинейное, из $M \times \mathbb{R}$ на M.

Е. Интегрирование квазилинейного уравнения первого порядка

Пусть A — характеристическое векторное поле квазилинейного уравнения (6). Предположим, что это поле нигде не обращается в нуль. Тогда это векторное поле определяет поле направлений.

Определение. Поле направлений характеристического векторного поля квазилинейного уравнения называется *характеристическим полем направлений* этого уравнения.

Характеристики квазилинейного уравнения являются интегральными кривыми характеристического поля направлений.

Пример. Уравнение характеристик в случае $M = \mathbb{R}^n$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ принято записывать в так называемом *симметричном виде*

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{du}{b},$$

означающем коллинеарность касательной к характеристике с характеристическим вектором.

Теорема. *Функция и тогда и только тогда является решением квазилинейного уравнения, когда ее график является интегральной поверхностью для характеристического поля направлений.*

Доказательство. Это очевидно, так как уравнение (6) выражает касание графика с характеристическим вектором. □

Следствие. *Функция и тогда и только тогда является решением квазилинейного уравнения, когда ее график содержит вместе с каждой своей точкой интервал характеристики, проходящей через эту точку.*

Доказательство. См. п. А. □

Таким образом, нахождение решений квазилинейного уравнения сводится к отысканию его характеристик. Если характеристики известны, то остается лишь составить из них поверхность, являющуюся графиком функции: эта функция будет решением квазилинейного уравнения, и все решения получаются таким способом.

Ж. Задача Коши для квазилинейного уравнения первого порядка

Пусть $\gamma \subset M$ — гиперповерхность (подмногообразие коразмерности 1) в многообразии M и пусть $\varphi\colon \gamma \to \mathbb{R}$ — гладкая функция (рис. 52).

Определение. *Задача Коши* для квазилинейного уравнения (6) *с начальным условием* φ *на* γ состоит в том, чтобы отыскать решение u, которое на γ обращается в φ.

Решение этой задачи легко свести к решению задачи Коши для поля характеристических направлений.

Рассмотрим график функции $\varphi\colon \gamma \to \mathbb{R}$. Этот график является гиперповерхностью в прямом произведении $\gamma \times \mathbb{R}$. Поскольку γ вложено в M, мы можем рассматривать график Г функции φ как подмногообразие (коразмерности 2) в $M \times \mathbb{R}$ (рис. 52).

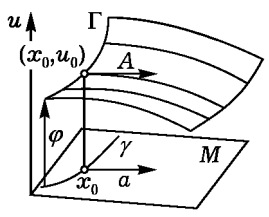


Рис. 52

Определение. *Начальным подмногообразием* для начального условия φ на γ называется подмногообразие $\Gamma \subset M \times \mathbb{R}$, являющееся графиком φ на γ.

Таким образом, начальное многообразие Г задает как гиперповерхность γ в M, так и начальное условие φ на γ.

Определение. Начальное условие (γ, φ) называется *нехарактеристическим для квазилинейного уравнения* (6) *в точке* x_0 *из* γ, если вектор $a(x_0, u_0)$ $(u_0 = \varphi(x_0))$ в этой точке не касается поверхности γ (рис. 52).

Замечание. Если уравнение линейно, то вектор $a(x_0, u_0)$ не зависит от u_0 и поэтому можно определить нехарактеристические точки поверхности γ. Для квазилинейного же уравнения характеристической или нехарактеристической является точка $(x_0, u_0) \in \Gamma$, а о характеристичности точки $x_0 \in \gamma$ говорить не приходится.

Теорема. *Решение квазилинейного уравнения* (6) *с нехарактеристическим в точке* x_0 *начальным условием в окрестности этой точки существует и локально единственно.*

Доказательство. Из нехарактеристичности начального условия в точке x_0 следует, что:

1) Характеристическое поле A не обращается в окрестности точки (x_0, u_0) в нуль. Поэтому в окрестности этой точки определено гладкое поле характеристических направлений.

2) Характеристическое направление не касается начального многообразия Γ в рассматриваемой точке и, следовательно, в ее окрестности. Поэтому существует и единственна локальная интегральная поверхность характеристического поля направлений, содержащая начальное многообразие Γ (см. п. А).

3) Касательная плоскость к интегральной поверхности в точке (x_0, u_0) невертикальна (не содержит оси u). Поэтому интегральная поверхность является графиком функции. Эта функция и есть искомое решение (см. п. Е). □

Замечание. Доказательство содержит также процедуру построения решения задачи Коши для квазилинейного уравнения.

§ 8. Нелинейное уравнение с частными производными первого порядка

Нелинейные уравнения с частными производными первого порядка, как и линейные, интегрируются при помощи характеристик. Но если характеристики линейного уравнения относительно функции на M лежат в M, а квазилинейного — в $M \times \mathbb{R}$, то для общего нелинейного уравнения с частными производными первого порядка характеристики лежат в многообразии 1-струй функций, $J^1(M, \mathbb{R})$.

Многообразие 1-струй функций имеет естественную контактную структуру.

В основе интегрирования нелинейных уравнений с частными производными первого порядка лежат простые факты геометрии контактной структуры, с которых мы и начнем.

А. Контактные многообразия

Контактным многообразием называется многообразие, снабженное полем гиперплоскостей в касательных пространствах, удовлетворяющим условию «максимальной неинтегрируемости».

Поле плоскостей (в отличие от поля одномерных направлений) может не иметь интегральных поверхностей, размерность которых равна размерности плоскостей. Чтобы измерить препятствие к существованию интегральных гиперповерхностей у поля гиперплоскостей, проделаем следующую конструкцию.

Введем в окрестности интересующей нас точки O многообразия координаты так, чтобы плоскость поля в O стала координатной гиперплоскостью; мы будем называть соответствующие координаты *горизонтальными*, а оставшуюся координатную ось назовем *вертикальной*.

Для любого пути в горизонтальной плоскости построим цилиндр над этим путем с вертикальной образующей. След нашего поля плоскостей на поверхности цилиндра есть поле направлений. Интегральные поверхности (если они существуют) пересекают цилиндр по интегральным кривым этого поля направлений (рис. 53).

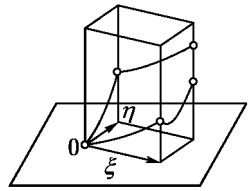


Рис. 53

Таким образом мы можем поднять любой путь с горизонтальной плоскости на искомую поверхность.

Пусть теперь (ξ, η) — два вектора на горизонтальной координатной плоскости в рассматриваемой точке. Рассмотрим параллелограмм, натянутый на (ξ, η). Из рассматриваемой точки в противоположную вершину параллелограмма ведут два пути по сторонам параллелограмма. Поднимая эти пути, мы получим над противоположной вершиной, вообще говоря, две разные точки. Их различие и есть препятствие к построению интегральной гиперповерхности, или, как говорят, к «интегрируемости» поля гиперплоскостей.

Рассмотрим разность вертикальных координат двух полученных точек. Главная билинейная (относительно ξ и η) часть этой разности измеряет степень неинтегрируемости поля. Чтобы дать формальное определение, проделаем следующее построение.

Поле касательных гиперплоскостей на многообразии локально задается дифференциальной 1-формой α, не обращающейся нигде

в нулевую форму и определенной с точностью до умножения на не обращающуюся нигде в нуль функцию: плоскости поля — это нули формы (подпространства касательного пространства, на которых значение формы равно нулю).

Пример. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{2n+1}$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n; u, p_1, \ldots, p_n)$ 1-форму $\alpha = du - p\,dx$ (где $p\,dx = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n$). 1-форма α ни в одной точке в $\mathbb{R}^{2n+1}$ не обращается в нулевую форму и, следовательно, задает поле $2n$-мерных плоскостей $\alpha = 0$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$ (рис. 54).

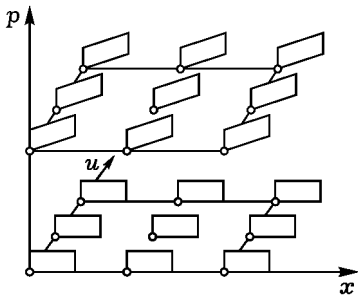


Рис. 54

Определение. Дифференциальная 1-форма α, не обращающаяся нигде в форму 0 на многообразии M, называется *контактной*, если внешняя производная $d\alpha$ формы α определяет в каждой плоскости $\alpha = 0$ невырожденную внешнюю 2-форму.

(Билинейная форма $\omega\colon L \times L \to \mathbb{R}$ невырождена, если $\forall \xi \in L \setminus 0$ $\exists \eta \in L\colon \omega(\xi, \eta) \neq 0$.)

Невырожденная кососимметрическая 2-форма на линейном пространстве называется также *симплектической структурой*.

Пример. Построенная в предыдущем примере форма контактная. Действительно, внешняя производная формы α равна

$$dx_1 \wedge dp_1 + \ldots + dx_n \wedge dp_n.$$

В плоскости $\alpha = 0$ координатами служат $(x_1, \ldots, x_n; p_1, \ldots, p_n)$. Матрица формы $\omega = d\alpha|_{\alpha=0}$ в этих координатах имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$, где E — единичная матрица порядка n. Определитель этой матрицы равен единице. Следовательно, 2-форма ω невырождена.

Замечание. Невырожденные кососимметрические билинейные формы бывают только в *четномерных* пространствах. Поэтому контактные формы бывают только на *нечетномерных* многообразиях.

Теорема. *Пусть α — контактная форма, а f всюду отличная от нуля функция. Тогда $f\alpha$ тоже контактная форма. При этом симплектические структуры*

$$d\alpha|_{\alpha=0}, \quad d(f\alpha)|_{f\alpha=0}$$

на плоскости $\alpha=0$ отличаются на не обращающийся в нуль множитель.

Доказательство. По формуле Лейбница

$$d(f\alpha) = df \wedge \alpha + f\, d\alpha.$$

Но $df \wedge \alpha$ на плоскости $\alpha=0$ есть нулевая 2-форма. Следовательно, 2-формы $d\alpha$ и $d(f\alpha)$ на плоскости $\alpha=0$ отличаются на ненулевой множитель f. В частности, 2-форма $d(f\alpha)|_{\alpha=0} = fd\alpha|_{\alpha=0}$ невырождена, поэтому $f\alpha$ — контактная форма. □

Определение. *Контактной структурой* на многообразии M называется поле касательных гиперплоскостей, локально задаваемое как множество нулей контактной 1-формы. Гиперплоскости поля называются *контактными гиперплоскостями*. Мы будем обозначать контактную гиперплоскость в точке x через Π_x (рис. 55).

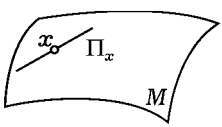


Рис. 55

Замечание 1. Из предыдущей теоремы следует, что свойство 1-формы, задающей поле плоскостей, быть контактной не зависит от выбора формы, но определяется самим полем контактных плоскостей. Действительно, если β — другая форма, задающая то же поле, то (локально) β отличается от α на не обращающийся нигде в нуль множитель; следовательно, формы β и α контактные (или неконтактные) одновременно.

Замечание 2. Контактные структуры бывают только на нечетномерных многообразиях.

Определение. Подмногообразие контактного многообразия называется *интегральным многообразием поля контактных плоскостей*, если касательная плоскость к подмногообразию в каждой точке принадлежит контактной плоскости.

Задача. Докажите, что *размерность интегрального многообразия поля контактных плоскостей на контактном многообразии размерности $2n+1$ не превосходит n.*

Решение. На таком многообразии Y форма $i^*\alpha$ (где $i\colon Y \to M^{2n+1}$ — вложение) равна нулю. Поэтому $i^*d\alpha = di^*\alpha = 0$. Поэто-

му каждые два вектора касательного пространства косоортогональны: $\omega(\xi, \eta) = 0$. Отсюда следует, что размерность касательного пространства не больше n (см. ниже п. Г, задача 2).

Замечание. Интегральные многообразия размерности n контактного поля в M^{2n+1} существуют. Они называются *лежандровыми подмногообразиями*. Как мы сейчас увидим, каждой функции соответствует лежандрово подмногообразие в пространстве 1-струй.

Б. Контактная структура на многообразии 1-струй функций

Пусть V — n-мерное многообразие. Рассмотрим многообразие 1-струй функций на V, $J^1(V, \mathbb{R})$.

1-струя функции f на V определяется точкой $x \in V$, значением $u = f(x)$ функции f в этой точке и первым дифференциалом функции f в точке x. Таким образом, многообразие 1-струй функций на V имеет размерность $2n+1$. Если $(x_1, \ldots, x_n)$ — локальные координаты на V, то 1-струя функции f на V задается набором $2n+1$ чисел $(x_1, \ldots, x_n; u; p_1, \ldots, p_n)$, где $p_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x)$.

Определение. *Стандартной контактной формой* на многообразии 1-струй функций $J^1(V, \mathbb{R})$ называется 1-форма

$$\alpha = du - p\,dx \quad (p\,dx = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n).$$

Выше мы уже видели, что это действительно контактная 1-форма в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Нетрудно видеть, что форма α, определенная с помощью координат, в действительности от выбора $(x_1, \ldots, x_n)$ не зависит и определена в целом.

Определение. 1-*графиком* функции $f\colon V \to \mathbb{R}$ называется подмногообразие, составленное из 1-струй функции f во всех точках из V.

Таким образом, 1-график функции n переменных является n-мерной поверхностью в $(2n+1)$-мерном пространстве.

Теорема. *Стандартная контактная форма на многообразии* 1-*струй функции* n *переменных обращается в нуль на всех касательных плоскостях к* 1-*графикам функций. Замыкание объединения касательных плоскостей ко всем* 1-*графикам функций совпадает с нулевым подпространством этой формы* (*в каждой точке пространства струй*).

Доказательство. Первая часть вытекает из определения полного дифференциала функции, $du = p\,dx$. Вторая следует из существования функции с любыми частными производными в точке. □

Из доказанной теоремы следует, что поле плоскостей, заданное стандартной контактной формой в пространстве 1-струй, не зависит от выбора системы координат, участвовавшей в определении стандартной контактной формы. Это позволяет ввести следующее

Определение. *Стандартной контактной структурой* на многообразии 1-струй функций на V называется поле гиперплоскостей, являющихся объединениями касательных плоскостей к графикам функций на V.

Задача. Группы диффеоморфизмов пространств V и $\mathbb{R}$ естественно действуют на многообразии 1-струй функций $J^1(V, \mathbb{R})$. Докажите, что *стандартная контактная структура пространства* 1*-струй инвариантна относительно этого действия*.

Кроме того, стандартная контактная 1-форма α инвариантна относительно действия группы диффеоморфизмов пространства V, а при действии диффеоморфизмов прямой $\mathbb{R}$ умножается на функцию, не обращающуюся в нуль.

В. Геометрия на гиперповерхности в контактном многообразии

Вернемся к общему контактному многообразию M^{2n+1}. Пусть E^{2n} — гладкая гиперповерхность в M^{2n+1} (рис. 56).

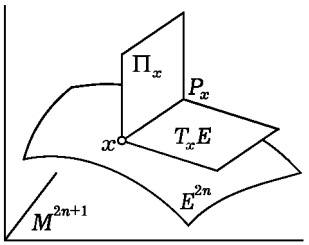


Рис. 56

Определение. Поверхность E^{2n} в контактном многообразии M^{2n+1} называется *нехарактеристической*, если ее касательная плоскость и контактная плоскость в каждой точке x трансверсальны (т. е. в сумме дают все касательное пространство к M^{2n+1}, или, что то же, пересекаются по $(2n-1)$-мерному пространству).

Определение. Пересечение касательной плоскости к нехарактеристической гиперповерхности с контактной плоскостью в точке гиперповерхности в контактном многообразии называется *характеристической плоскостью* в этой точке: $P_x = T_x E \cap \Pi_x$.

Таким образом, характеристические плоскости на гиперповерхности в M^{2n+1} образуют поле $(2n-1)$-мерных плоскостей на $2n$-мерном многообразии: это поле плоскостей, высекаемых на касательных пространствах гиперповерхности контактными плоскостями.

Оказывается, контактная структура определяет в каждой из этих $(2n-1)$-мерных плоскостей еще избранную прямую — так называемое *характеристическое направление*.

Г. Косоортогональные дополнения

Чтобы определить характеристическое направление, напомним, что в линейном пространстве с невырожденной билинейной формой определены ортогональные дополнения (ортогональность пары векторов определяется как равенство нулю значения формы на этой паре).

Пример 1. Пусть (L, ω) — евклидово пространство, т. е. L — линейное пространство, а ω — скалярное произведение. Каждому вектору ξ соответствует 1-форма $\omega(\xi, \cdot)$ — скалярное произведение с вектором ξ. Значение этой 1-формы на векторе η равно $\omega(\xi, \eta)$.

Например, grad f — это вектор, соответствующий 1-форме df.

Прямой в L соответствует ортогональное дополнение к этой прямой (= плоскость нулей 1-формы, соответствующей вектору прямой). Каждая плоскость коразмерности 1 в L является ортогональным дополнением к прямой (рис. 57).

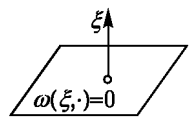


Рис. 57

Заметим, что при умножении ω на отличное от нуля число ортогональность векторов сохраняется. Поэтому соответствие между прямыми и их ортогональными дополнениями не меняется при умножении скалярного произведения ω на отличное от нуля число.

Пример 2. Пусть (L, ω) — симплектическое пространство, т. е. L — линейное пространство, а ω — кососкалярное произведение (билинейная кососимметрическая невырожденная форма).

Каждому вектору ξ соответствует 1-форма $\omega(\xi, \cdot)$ — скалярное произведение с вектором ξ. Значение этой 1-формы на векторе η равно $\omega(\xi, \eta)$ (рис. 58).

Например, гамильтоново поле с функцией Гамильтона H — это поле, соответствующее 1-форме dH.

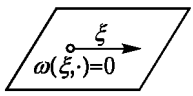


Рис. 58

Прямой в L соответствует *косоортогональное дополнение* к этой прямой (= плоскость нулей 1-формы, соответствующей вектору прямой). Каждая плоскость коразмерности 1 в L является косоортогональным дополнением к единственной прямой.

Заметим, что при умножении ω на отличное от 0 число ортогональность сохраняется. Поэтому соответствие между прямыми и их косоортогональными дополнениями не меняется при умножении симплектической структуры ω на отличное от 0 число.

Задача 1. Докажите, что *каждая прямая лежит в своем косоортогональном дополнении*.

Решение. $\omega(\xi, \xi) = -\omega(\xi, \xi) = 0$.

Задача 2. Докажите, что *если все векторы подпространства $2n$-мерного симплектического пространства попарно косоортогональны друг другу, то размерность этого подпространства не превосходит n*.

Решение. Косоортогональное дополнение к k-мерному подпространству имеет размерность $2n - k$ (действительно, выберем базис $(e_1, \ldots, e_k)$; тогда уравнения $\omega(e_1, \xi) = 0, \ldots, \omega(e_k, \xi) = 0$ образуют k независимых уравнений относительно ξ, так как из зависимости между уравнениями вытекала бы зависимость между векторами e_i, ввиду невырожденности формы ω).

Если $k > n$, то размерность ортогонального дополнения меньше n и пространство не может быть косоортогональным самому себе.

Замечание. Косоортогональные себе подпространства размерности n в $2n$-мерном симплектическом пространстве существуют. Они называются *лагранжевыми подпространствами*.

Д. Характеристики на гиперповерхности в контактном пространстве

Вернемся к геометрии на нехарактеристической гиперповерхности в контактном многообразии M^{2n+1}.

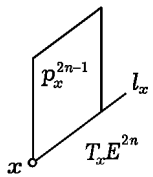


Рис. 59

В каждой точке этой гиперповерхности E^{2n} мы определили характеристическую $(2n-1)$-мерную плоскость P: пересечение контактной плоскости и касательной плоскости к E^{2n} (рис. 59).

Определение. *Характеристическим направлением* в нехарактеристической точке x на гиперповерхности в контактном простран-

стве называется косоортогональное дополнение к характеристической плоскости в контактной плоскости (кососкалярное произведение определяется как $d\alpha|_{\alpha=0}$):

$$l_x = \text{косоортогональное дополнение в } \Pi_x^{2n} \text{ к } P_x^{2n-1} = T_x E^{2n} \cap \Pi_x^{2n}.$$

Заметим, что характеристическое направление лежит в характеристической плоскости (см. п. Г); в случае $n=1$ характеристическое направление просто совпадает с характеристической плоскостью.

В общем случае характеристические направления во всех точках нехарактеристической гладкой гиперповерхности в контактном пространстве образуют гладкое поле направлений на этой гиперповерхности; характеристическое направление в каждой точке принадлежит также контактной гиперплоскости в этой точке (рис. 60).

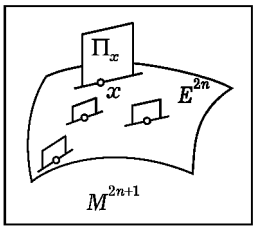


Рис. 60

Определение. Интегральные кривые поля характеристических направлений на нехарактеристической гиперповерхности E в контактном многообразии называются *характеристиками гиперповерхности* E.

Пусть N^k — k-мерное интегральное многообразие поля контактных плоскостей, лежащее в E^{2n}.

Определение. Точка $x \in N^k$ называется *нехарактеристической*, если касательная плоскость к N в этой точке не содержит характеристического направления (рис. 61).

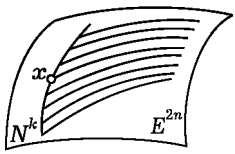


Рис. 61

Задача. Докажите, что если x — нехарактеристическая точка многообразия N^k, то $k \leqslant n-1$, и приведите пример n-мерных интегральных поверхностей контактного поля плоскостей в M^{2n+1}, лежащих в E^{2n}.

Оказывается, характеристики, проходящие через точки интегрального нехарактеристического многообразия N^k, сами образуют (локально) *интегральное* $(k+1)$-мерное подмногообразие поля контактных плоскостей, лежащее на гиперповерхности E^{2n}. Чтобы это доказать, нам потребуется одна простая общая лемма об инвариантности поля плоскостей относительно однопараметрической группы диффеоморфизмов.

E. Отступление: условие инвариантности поля плоскостей

Пусть a — дифференциальная 1-форма, не обращающаяся в 0. Такая форма задает поле гиперплоскостей. Пусть v — векторное поле, не обращающееся в 0. Такое поле задает поле направлений (т. е. поле прямых).

Мы *предположим, что направление поля v в каждой точке принадлежит гиперплоскости нулей формы a в этой точке*:

$$a(v) \equiv 0.$$

Лемма. *Для того чтобы поле нулей формы a было инвариантно относительно фазового потока поля v, необходимо и достаточно, чтобы $da(v, \xi) = 0$ для всех ξ из плоскости поля, $a(\xi) = 0$.*

Доказательство. Утверждение леммы локально и инвариантно относительно диффеоморфизмов, поэтому его достаточно доказать для стандартного поля $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$ в евклидовом пространстве с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ (по теореме о выпрямлении векторного поля). Пусть

$$a = a_1\,dx_1 + \ldots + a_n\,dx_n.$$

Тогда по условию $a_1 \equiv 0$ (так как $a(v) \equiv 0$).

Задача. Докажите, что значение внешней производной формы a на паре (v, ξ) (где $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $a(v) \equiv 0$, ξ — любой вектор) совпадает со значением частной производной $\frac{\partial a}{\partial x_1}$ на векторе ξ.

Решение.

$$\left(da = \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\,dx_j \wedge dx_i\right) \Rightarrow \left(da(v, \xi) = \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_1}\xi_i - \sum \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\xi_j\right).$$

Но $a_1 \equiv 0$.

(Другое, быть может более понятное, решение получается при применении формулы Стокса к параллелограммам со сторонами v, ξ.)

Условие инвариантности поля нулей формы a относительно сдвигов вдоль оси x_1 состоит в том, что частная производная $\frac{\partial a}{\partial x_1}$ должна обращаться в нуль на плоскости поля, $a = 0$.

Зная, что $\frac{\partial a}{\partial x_1}(\xi) = da(v, \xi)$, мы видим, что условие инвариантности имеет вид

$$(a(\xi) = 0) \Rightarrow (da(v, \xi) = 0). \qquad \square$$

Ж. Задача Коши для поля характеристических направлений

Вернемся к нехарактеристической гиперповерхности E^{2n} в контактном многообразии M^{2n+1}. Пусть N^k — интегральное подмногообразие поля контактных плоскостей, лежащее в E^{2n}.

Определение. *Задача Коши* для гиперповерхности E^{2n} в контактном многообразии M^{2n+1} с начальным многообразием N^{n-1} состоит в отыскании интегрального многообразия Y^n поля контактных плоскостей, лежащего в E^{2n} и содержащего начальное многообразие N^{n-1} (рис. 62).

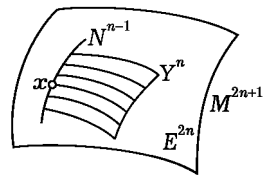


Рис. 62

Теорема. *Пусть x — нехарактеристическая* точка начального многообразия N^{n-1}. Тогда существует такая окрестность U точки x, что решение задачи Коши для $E^{2n} \cap U$ с начальным условием $N^{n-1} \cap U$ существует и локально единственно* (т. е. любые два решения с общим начальным условием совпадают в некоторой окрестности точки x).

Многообразие Y^n состоит из характеристик, проходящих через точки начального многообразия N^{n-1}.

Доказательство. Семейство характеристик, проведенных через точки начального многообразия, образует в окрестности точки x гладкое подмногообразие Y^n размерности n в E^{2n}. Докажем, что это многообразие является интегральным для поля контактных гиперплоскостей.

Рассмотрим контактную 1-форму α, задающую в окрестности точки x контактное поле гиперплоскостей. Обозначим через a сужение формы α на окрестность точки x в гиперповерхности E^{2n}.

Форма a не обращается в 0, так как гиперповерхность E^{2n} нехарактеристическая (см. п. В). Эта форма определяет на E^{2n} поле касательных гиперплоскостей (это следы контактных гиперплоскостей на E^{2n}). Поле характеристических направлений на E^{2n} лежит в поле нулевых плоскостей формы a (см. п. Д).

Рассмотрим в окрестности точки x на E^{2n} какое-либо векторное поле v, направление вектора которого в каждой точке характеристическое. Обозначим через $\{g^t\}$ определенную полем v локальную

* Определение нехарактеристических точек дано в п. Д.

однопараметрическую группу диффеоморфизмов на E^{2n} (g^t определено в окрестности точки x при t, близких к 0), рис. 63.

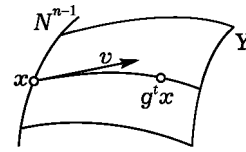


Рис. 63

Каждую точку многообразия Y^n можно получить из некоторой точки начального многообразия посредством подходящего диффеоморфизма g^t.

Лемма А. *Форма a равна нулю на касательной плоскости к Y в точках начального многообразия.*

Лемма Б. *Диффеоморфизмы g^t переводят нулевые плоскости формы a в нулевые.*

А. Доказательство. На векторах, касательных к N^{n-1}, форма a равна 0, так как многообразие N интегральное. На векторе v форма a равна нулю, так как характеристическое направление лежит в контактной гиперплоскости. Значит, форма a равна 0 на сумме $T_xN + \mathbb{R}v$. □

Б. Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь вектор ξ, на котором форма a обращается в 0 (приложенный не обязательно в точке начального многообразия). Вычислим значение da на паре (v, ξ) в этой точке. По определению формы $a = \alpha|_E$, это значение равно значению производной контактной формы $d\alpha(v, \xi)$. По определению характеристического направления, последнее число равно 0 для любого вектора ξ в контактной плоскости. По лемме п. Е, $a = 0$ инвариантно относительно $\{g^t\}$. □

Из лемм А и Б вытекает, что форма a обращается в 0 на всех касательных векторах к Y^n. Следовательно, многообразие Y^n интегральное.

Итак, мы построили интегральное подмногообразие $Y^n \subset E^{2n}$ поля контактных гиперплоскостей, проходящее через начальное многообразие N^{n-1}.

3. Доказательство единственности

Лемма. *Касательная плоскость к любому n-мерному интегральному многообразию поля контактных плоскостей, лежащему в E^{2n}, содержит характеристическое направление.*

Доказательство. Сужение контактной 1-формы α на любое свое интегральное многообразие равно 0. Сужение 2-формы $d\alpha$ на это многообразие равно производной сужения формы α, т. е. нулю. Следовательно, любые два касательных вектора к интегральному мно-

гообразию косоортогональны (в смысле кососкалярного произведения $d\alpha|_{\alpha=0}$).

Вектор характеристического направления на E^{2n} косоортогонален всем векторам из E^{2n}, лежащим в плоскости $\alpha = 0$. Предположим, что он не принадлежит касательной плоскости к интегральному n-мерному многообразию поля контактных плоскостей, лежащему в E^{2n}. Натянутое на этот вектор и на эту касательную плоскость подпространство имеет тогда размерность $n+1$. Но все векторы построенного подпространства попарно ортогональны. Согласно задаче 2 п. Г, размерность такого подпространства не превосходит n. □

Из леммы следует, что всякое интегральное n-мерное многообразие поля контактных плоскостей, лежащее в E^{2n}, содержит вместе с каждой своей точкой интервал характеристики, проходящей через эту точку. Отсюда следует единственность интегрального многообразия, содержащего данное начальное многообразие. □

И. Применение к нелинейному уравнению с частными производными первого порядка

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение с частными производными первого порядка относительно функции $u\colon V^n \to \mathbb{R}$ как гиперповерхность E^{2n} в многообразии 1-струй $M^{2n+1} = J^1(V^n, \mathbb{R})$, снабженном стандартной контактной структурой.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — локальные координаты на V^n, u — на $\mathbb{R}$; обозначим через $(x_1, \ldots, x_n; u; p_1, \ldots, p_n)$ соответствующие локальные координаты в пространстве 1-струй. Тогда дифференциальное уравнение (локально) записывается в виде

$$\Phi(x, u, p) = 0. \tag{1}$$

Отыскание решений этого уравнения сводится к отысканию интегральных поверхностей поля контактных плоскостей, лежащих в E^{2n} и являющихся 1-графиками функций (см. пункт Б).

Наши общие теоремы сводят отыскание решений этого уравнения к построению характеристик на E^{2n}, для чего нужно найти интегральные кривые поля направлений на E^{2n} (т. е. решить систему $2n-1$ обыкновенных дифференциальных уравнений).

Теорема. *Решения уравнения* (1) *— это функции*, 1*-графики которых состоят из характеристик на* E^{2n}.

Доказательство. См. п. Б, Ж, И. □

К. Задача Коши для нелинейного уравнения с частными производными первого порядка

Пусть $\gamma^{n-1} \subset V^n$ — $(n-1)$-мерное подмногообразие многообразия V^n, $\varphi : \gamma^{n-1} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $E^{2n} \subset J^1(V^n, \mathbb{R})$ — гладкая нехарактеристическая гиперповерхность, заданная уравнением (1).

Определение. *Задачей Коши* для уравнения (1) называется задача отыскания решения $u : V \to \mathbb{R}$, которое на γ обращается в φ.

Определение. *Начальным многообразием* N, построенным по начальному условию (γ, φ), называется множество, состоящее из всех 1-струй функций на V^n, удовлетворяющих следующим условиям (рис. 64):

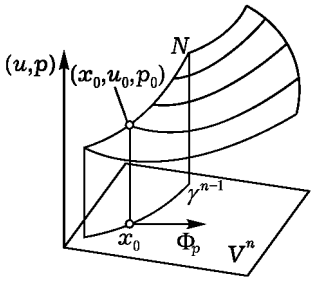


Рис. 64

1) Точка приложения струи лежит на γ^{n-1}.

2) Значение функции в этой точке равно значению φ.

3) Значение полного дифференциала функции в этой точке таково, что его сужение на касательную плоскость к γ^{n-1} равно полному дифференциалу начального условия φ.

4) Струя принадлежит E^{2n}.

Определение. Точка начального многообразия называется *нехарактеристической* для уравнения (1), если проекция характеристического направления в этой точке на V трансверсальна к γ. (Это определение отличается от данного в п. Д.)

Замечание. Говорят, что «производные искомой функции по $n-1$ направлению вдоль γ определяются начальным условием, а производная по последнему направлению (трансверсальному γ) определяется из уравнения (1)».

Пример. Пусть γ задано уравнением $x_1 = 0$ в пространстве с координатами (x_1, x'). Тогда N задается условиями

$$x_1 = 0, \quad u = \varphi(x'), \quad p' = \frac{\partial \varphi}{\partial x'};$$

p_1 определяется из уравнения $\Phi(x, u, p) = 0$.

Теорема. *Предположим, что точка (x_0, u_0, p_0) пространства 1-струй является нехарактеристической точкой начального многообразия N. Тогда решение уравнения* (1) *с начальным условием N в некоторой окрестности U начальной точки x_0 существует и локально единственно* (*в том смысле, что всякие два решения уравне-*

ния, удовлетворяющие начальному условию $u|_{U\cap\gamma}=\varphi|_{U\cap\gamma}$, $u(x_0)=u_0$, $du(x_0)=p_0$, *совпадают в некоторой окрестности точки* x_0).

Доказательство. Это вытекает из теоремы п. Ж, которая дает также и способ построения решения. □

Л. Вычислительные формулы

Задача. Выписать явно дифференциальное уравнение характеристик для уравнения $\Phi(x, u, p)=0$.

Ответ. $\dot{x}=\Phi_p$, $\dot{p}=-\Phi_x-p\Phi_u$, $\dot{u}=p\Phi_p$.

Решение. Рассмотрим вектор, касательный к многообразию $\Phi=0$. Для такого вектора с компонентами (X, U, P)

$$\Phi_x X+\Phi_u U+\Phi_p P=0.$$

Этот вектор лежит в контактной плоскости, если на нем обращается в нуль форма $du-p\,dx$, т. е. если $U=pX$.

Итак, условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вектор (X, pX, P) лежал в пересечении контактной плоскости с касательной к многообразию $\Phi=0$, есть

$$(\Phi_x+\Phi_u p)X+\Phi_p P=0. \tag{2}$$

Характеристический вектор $(\dot{x},\ \dot{u}=p\dot{x},\ \dot{p})$ определяется условием равенства нулю кососкалярного произведения со всеми векторами (X, pX, P), удовлетворяющими предыдущему равенству.

Но это кососкалярное произведение равно значению $d\alpha=dx\wedge dp$ на паре векторов $(\dot{x},\ \dot{u}=p\dot{x},\ \dot{p})$, $(X, U=pX, P)$, т. е. равно $\dot{x}P-\dot{p}X$.

Итак, уравнение (2) относительно X и P должно быть эквивалентно уравнению

$$\dot{x}P-\dot{p}X=0. \tag{3}$$

Следовательно, коэффициенты при X и при P в уравнениях (2) и (3) пропорциональны. Это и дает приведенный ответ, ввиду равенства $\dot{u}=p\dot{x}$.

М. Условия нехарактеристичности

Задача. Выписать явно условия на γ, φ и Φ, при которых точка (x_0, u_0, p_0) является нехарактеристической для уравнения $\Phi(x, u, p)=0$ с начальным условием φ на γ.

Ответ. $\Phi_p(x_0, u_0, p_0)$ не касается γ в x_0 (рис. 64 на с. 93).

Решение. Спроектируем касательную плоскость к поверхности, образованной характеристиками, проходящими через начальное многообразие, на x-пространство. Если поверхность — 1-график решения и точка (x_0, u_0, p_0) нехарактеристическая, то касательная плоскость порождена касательной к N и характеристическим направлением, а проектируется изоморфно. Следовательно, x-компонента характеристического вектора должна быть трансверсальна к γ в точке x_0. Но эта компонента есть Φ_p (см. п. Л).

Обратно, пусть Φ_p, не касается γ в точке x_0. Тогда

1) *Гиперповерхность* $\Phi = 0$ *в окрестности точки* (x_0, u_0, p_0) *гладкая*. Действительно, $\Phi_p \neq 0$ и, следовательно, $d\Phi|_{(x_0,u_0,p_0)} \neq 0$.

2) *Уравнение* $\Phi = 0$ *в точке* (x_0, u_0, p_0) *нехарактеристическое*. Действительно, вектор $(0, 0, \Phi_p)$ лежит в контактной плоскости и не касается поверхности $\Phi = 0$ в точке (x_0, u_0, p_0), так как $\Phi_p(x_0, u_0, p_0) \neq 0$.

3) *Начальное многообразие* N *вблизи точки* (x_0, u_0, p_0) *гладкое*.

Действительно, выберем координаты $(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, x')$ так, чтобы локальное уравнение γ приняло вид $x_1 = 0$. Тогда условие разрешимости уравнения относительно $p_1(x')$

$$\Phi\Big(0, x', \varphi(x'), p_1, \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\Big) = 0$$

принимает вид $\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_1}\Big|_{(x_0,u_0,p_0)} \neq 0$; условие некасания вектора Φ_p с γ имеет тот же вид.

4) *Точка* (x_0, u_0, p_0) *начального многообразия нехарактеристическая*.

Действительно, если бы характеристический вектор касался начального многообразия N, то его проекция Φ_p касалась бы проекции γ многообразия N на x-пространство.

5) *Характеристики, пересекающие начальное многообразие в окрестности точки* (x_0, u_0, p_0), *образуют в этой окрестности гладкое многообразие, диффеоморфно проектирующееся на* x*-пространство* (*и, стало быть, являющееся* 1*-графиком функции*).

Действительно, образ касательной плоскости к этому многообразию в точке (x_0, u_0, p_0) при проектировании на x-пространство содержит касательную плоскость к γ и трансверсальный ей вектор. Следовательно, производная изучаемого отображения в точке (x_0, u_0, p_0) является изоморфизмом, а само отображение проектирования — локальным диффеоморфизмом (по теореме об обратной функции).

Таким образом, все пять условий нехарактеристичности выполнены в точке (x_0, u_0, p_0), если в этой точке Φ_p не касается γ.

Н. Уравнение Гамильтона — Якоби

Определение. Уравнением Гамильтона—Якоби называется уравнение

$$H(x, u_x) = 0. \tag{4}$$

Отличие от общего уравнения с частными производными первого порядка состоит в том, что значение неизвестной функции не входит явно в уравнение.

Пример. Пусть γ — гладкая гиперповерхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $u(x)$ — расстояние от точки x до γ (рис. 65). Тогда функция u (в точках гладкости этой функции) удовлетворяет уравне-

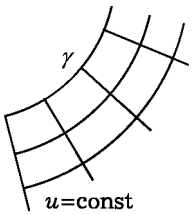


Рис. 65

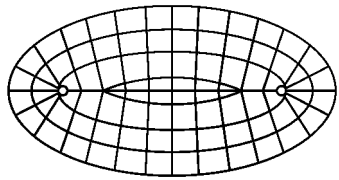


Рис. 66

нию Гамильтона — Якоби

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 = 1. \tag{5}$$

Действительно, модуль градиента этой функции равен модулю производной расстояния до γ по нормали к γ, т. е. 1.

В целом функция u может не быть гладкой. Например, пусть γ — эллипс на плоскости. Тогда особенности u образуют внутри эллипса отрезок (рис. 66).

Задача. Докажите, что всякое решение уравнения Гамильтона — Якоби (5) локально является суммой расстояния до гиперповерхности и константы.

При рассмотрении уравнения Гамильтона — Якоби полезно вместо многообразия 1-струй $J^1(V^n, \mathbb{R})$ функций на V^n рассматривать *кокасательное расслоение* T^*V^n. Пространство T^*V^n называется в механике *фазовым пространством* для конфигурационного пространства V^n. *Кокасательный вектор* к V^n в x есть, по определению, линейная однородная функция на касательном пространстве к V^n в x. Все кокасательные векторы к V^n в x образуют линейное пространство, называемое *кокасательным пространством* к V^n в x и обозначаемое $T_x^*V^n$. Кокасательные векторы к V^n во всех точках образуют гладкое многообразие размерности $2n$. Оно называется *пространством кокасательного расслоения* к V^n (или короче кокасательным расслоением) и обозначается через T^*V^n.

Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — локальные координаты на V^n. Тогда кокасательный вектор к V^n в x задается набором n чисел $(p_1, \ldots, p_n)$. А именно, набору чисел $\{p_k\}$ соответствует 1-форма $p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n$ на касательном пространстве к V^n в x. Набор $2n$ чисел $(p_1, \ldots, p_n; x_1, \ldots, x_n)$ образует систему локальных координат в кокасательном расслоении к V^n.

Имеется естественная проекция π пространства 1-струй функций $J^1(V^n, \mathbb{R})$ на кокасательное расслоение к V^n

$$\pi\colon J^1(V^n, \mathbb{R}) \to T^*V^n.$$

Отображение π состоит в «забывании значения функции», в координатах оно задается так:

$$(x_1, \ldots, x_n; u; p_1, \ldots, p_n) \mapsto (p_1, \ldots, p_n; x_1, \ldots, x_n).$$

Определение. *Характеристиками уравнения Гамильтона — Якоби* (4) называются проекции характеристик уравнения с частными производными первого порядка (4) в кокасательное расслоение.

Задача. Найти дифференциальное уравнение характеристик уравнения Гамильтона — Якоби (4).

Ответ. $\dot{x} = H_p$, $\dot{p} = -H_x$.

Замечание. Эта система дифференциальных уравнений называется *системой канонических уравнений Гамильтона*. Соответствующее векторное поле определено не только на поверхности $H = 0$, но и на всем фазовом пространстве.

Задача. Найти характеристики уравнения Гамильтона — Якоби (5).

Ответ. $x = 2at + b$, $p = a$ (a и b — постоянные векторы, $a^2 = 1$).

Таким образом, проекции характеристик на V^n — прямые линии.

В геометрической оптике уравнение Гамильтона — Якоби (5) называются *уравнением эйконала*; проекции характеристик на V^n называются *лучами*. Функция u называется *оптической длиной пути*, ее поверхности уровня называются *фронтами*. Кроме этих объектов в геометрической оптике очень существенную роль играют *каустики*. Рассмотрим, например, стену, освещенную лучами, отраженными от вогнутой поверхности (например, от внутренности чашки). На стене видны более яркие линии с особыми точками — это и есть каустики.

Определение каустик состоит в следующем. Рассмотрим задачу Коши для уравнения с частными производными первого порядка. Даже если соответствующие характеристики неограниченно продолжаются и не пересекаются, так что образуется глобальное интегральное многообразие, проекция этого многообразия на V^n, вообще говоря, не является диффеоморфизмом.

Множество критических значений проектирования интегрального многообразия на V^n и называется *каустикой*.

В частном случае уравнения Гамильтона — Якоби (5) с начальным условием $u = 0$ на γ каустика есть геометрическое место *фокальных точек* или *центров кривизны* гиперповерхности γ.

Задача 1. Нарисовать геометрическое место центров кривизны эллипса на плоскости.

Задача 2. На каждой внутренней нормали к эллипсу отложен отрезок длины t. Нарисовать полученную кривую и исследовать ее изменение с ростом t.

Ответы. См. рис. 67.

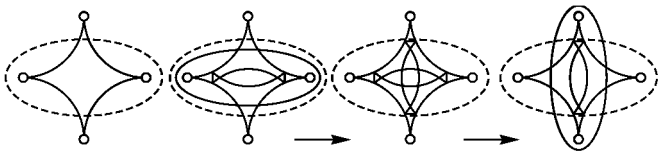


Рис. 67

§ 9. Теорема Фробениуса

Поле направлений на плоскости всегда определяет семейство интегральных кривых и локально выпрямляемо (диффеоморфизмом приводится к полю параллельных плоскостей). Начиная с трехмерного пространства это уже не так: поле плоскостей в $\mathbb{R}^3$ может вообще не иметь интегральных поверхностей.

В этом параграфе выясняются условия локальной выпрямляемости поля гиперплоскостей, т. е. условия, при которых поле является полем касательных к семейству гладких гиперповерхностей.

A. Вполне интегрируемое поле гиперплоскостей

Пусть M^n — гладкое многообразие, на котором задано поле касательных гиперплоскостей.

В окрестности точки такое поле задается дифференциальной 1-формой α, не обращающейся в нулевую форму и определенной с точностью до умножения на функцию, не обращающуюся нигде в нуль.

Определение. Поле гиперплоскостей называется *вполне интегрируемым*, если форма $d\alpha$ в плоскости поля тождественно равна нулю.

Замечание. Свойство полной интегрируемости поля не зависит от выбора локально задающей его формы α, так как форма $d\alpha|_{\alpha=0}$ при умножении α на отличную от нуля функцию умножается на эту функцию (см. § 8, п. А).

Предложение. *Чтобы поле гиперплоскостей $\alpha = 0$ было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно равенство*

$$\alpha \wedge d\alpha \equiv 0.$$

Доказательство. Выберем в касательном пространстве к M^n в рассматриваемой точке базис (рис. 68) из $n-1$ «горизонтального» вектора $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ в плоскости $\alpha = 0$ и еще одного «вертикального» вектора f. Значение 3-формы $\alpha \wedge d\alpha$ на трех горизонтальных векторах равно нулю, так как $\alpha = 0$. Далее, $(d\alpha \wedge \alpha)(e_i, e_j, f) = 0$ как сумма, в которой каждое слагаемое содержит в виде сомножителя либо $\alpha(e_i)$, либо $d\alpha(e_i, e_j)$, эти же величины равны нулю.

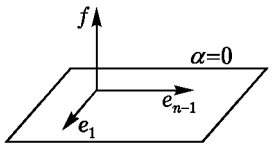


Рис. 68

Обратно, если $\alpha \wedge d\alpha = 0$, то $d\alpha(e_i, e_j) = 0$. Действительно, единственное слагаемое в $(\alpha \wedge d\alpha)(e_i, e_j, f)$, не содержащее множителем $\alpha(e_i)$ или $\alpha(e_j)$, есть $d\alpha(e_i, e_j) \cdot \alpha(f)$; но $\alpha(f) \neq 0$. □

Замечание. Условие $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$ называется *условием интегрируемости Фробениуса*. Из доказанного предложения следует, что это — условие на поле плоскостей: оно выполнено или не выполнено для всех форм α, задающих поле, одновременно.

Б. Существование интегральных многообразий

Теорема. *Для того чтобы поле гиперплоскостей $\alpha = 0$ было полем касательных к семейству гиперповерхностей, необходимо и достаточно, чтобы это поле удовлетворяло условию интегрируемости Фробениуса $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$.*

Доказательство. На поверхностях семейства $\alpha = 0$, поэтому $d\alpha = 0$. Обратно, пусть $d\alpha = 0$ в плоскостях $\alpha = 0$. Тогда мы построим семейство интегральных поверхностей в окрестности точки x следующим образом. Пусть v — какое-либо векторное поле, для которого $\alpha(v) \equiv 0$ (т. е. вектор поля в каждой точке лежит в плоскости поля плоскостей). Пусть Γ^k — какое-либо интегральное подмногообразие

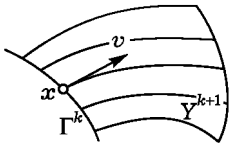


Рис. 69

поля плоскостей (рис. 69), и пусть $v(x)$ не лежит в касательной плоскости к Γ^k в точке x.

Лемма. *Фазовые кривые поля v, проходящие через точки интегрального многообразия Γ^k, вблизи x образуют гладкое интегральное многообразие Y^{k+1} вполне интегрируемого поля плоскостей $\alpha = 0$.*

Доказательство. Обозначим через $\{g^t\}$ локальный фазовый поток поля v. Тогда а) *диффеоморфизмы g^t переводят плоскости нашего поля $\alpha = 0$ в плоскости поля.*

Действительно, $d\alpha(\xi) = 0$ для всякого вектора ξ плоскости поля, поэтому поле плоскостей инвариантно относительно диффеоморфизмов g^t по лемме п. Е § 8.

Далее, б) *касательное пространство к Y^{k+1} в точках начального многообразия Γ^k лежит в плоскости поля*.

Действительно, и касательная плоскость к интегральному многообразию Γ^k, и вектор v принадлежат плоскости поля, а касательное пространство к Y^{k+1} в x порождено $v(x)$ и $T_x\Gamma^k$.

Из а) и б) следует, что многообразие Y^{k+1} — интегральное для поля плоскостей $\alpha = 0$. □

Теперь интегральные многообразия размерности $n-1$ строятся последовательным увеличением размерности.

Рассмотрим локальную систему координат $(x_1, \ldots, x_{n-1}; y)$, в которой координатная плоскость $y = 0$ в точке нуль принадлежит полю плоскостей $\alpha = 0$.

Проекция вдоль оси y из плоскости поля на координатную плоскость $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ в окрестности точки нуль является изоморфизмом (рис. 70).

Рассмотрим базисные векторные поля в координатной плоскости, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)$. Их прообразы в плоскостях поля образуют в окрестности точки O гладкие векторные поля. Обозначим эти поля через $(v_1, \ldots, v_{n-1})$.

В качестве начального (нульмерного) интегрального многообразия Γ^0 возьмем точку y_0 оси y (рис. 71).

Применяя лемму к Γ^0 и v_1, получим одномерное интегральное многообразие Y^1. На Y^1 имеем $x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0$, поэтому $v_2 \notin T_0 Y^1$.

Применяя лемму к Y^1 и v_2, получим двумерное интегральное многообразие Y^2. Двигаясь дальше таким же образом, мы начинаем с интегрального многообразия Y^k, на котором $x_{k+1} = \ldots = x_{n-1} = 0$,

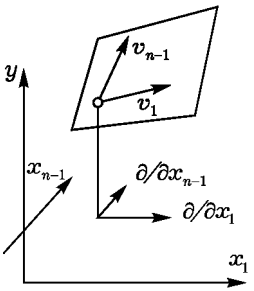


Рис. 70

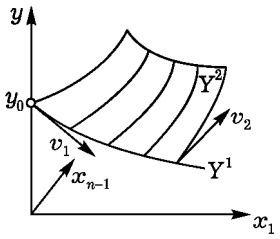


Рис. 71

действуем потоком поля v_{k+1} и получаем интегральное многообразие Y^{k+1}, на котором $x_{k+2} = \ldots = x_{n-1} = 0$.

Процесс заканчивается построением искомого многообразия Y^{n-1}. □

Глава 3

Структурная устойчивость

При использовании любой математической модели возникает вопрос о корректности применения математических результатов о поведении модели к реальной действительности. В самом деле, предположим, что результат сильно чувствителен к малейшему изменению модели. В таком случае сколь угодно малое изменение модели (скажем, малое изменение векторного поля, задающего дифференциальное уравнение) приводит к модели с совершенно другими свойствами. Такие результаты опасно распространять на исследуемый реальный процесс, ибо при построении модели всегда проводится некоторая идеализация, параметры определяются лишь приближенно и т. д. Таким образом возникает вопрос об отборе тех свойств модели процесса, которые мало чувствительны к небольшому изменению модели и, следовательно, могут восприниматься как свойства реального процесса.

Одна из попыток выбора таких свойств привела к понятию грубости, или структурной устойчивости (А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин, 1937). Значительные успехи теории структурной устойчивости в случае малой размерности фазового пространства (1 и 2) породили оптимистические надежды, разбитые лишь в 1960-х годах после работ С. Смейла: Смейл показал, что при большей размерности фазового пространства существуют системы, в окрестности которых нет ни одной структурно устойчивой системы. Этот результат имеет для качественной теории дифференциальных уравнений примерно такое же значение, как теорема Лиувилля о неразрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах — для теории интегрирования дифференциальных уравнений. Он показывает, что задача полной топологической классификации дифференциальных уравнений с многомерным фазовым пространством безнадежна, даже если ограничиваться уравнениями общего положения и пренебрегать всеми вырожденными случаями.

В этой главе приведен краткий обзор основных понятий, методов и результатов теории структурной устойчивости.

§ 10. Понятие структурной устойчивости

В этом параграфе определяется структурная устойчивость и исследуются структурно устойчивые векторные поля на одномерном фазовом пространстве.

A. Наивное определение структурной устойчивости

Мы будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M.$$

заданное векторным полем v на многообразии M. Мы будем также говорить, что поле v задает *динамическую систему* (или, короче, систему). Мы будем предполагать (как правило), что решения уравнения продолжаются неограниченно; это всегда так, если M компактно.

Пример. Уравнение маятника с трением (рис. 72):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2.$$

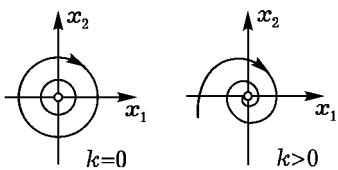


Рис. 72

Если $k = 0$, то все фазовые кривые замкнуты. Если $k > 0$, то они наматываются на особую точку O типа фокус. Следовательно, небольшое изменение коэффициента трения качественно меняет поведение фазовых кривых, если до изменения он был равен нулю, и не меняет качественной картины, если коэффициент трения был положителен.

Приведенное ниже определение структурной устойчивости формализует это различие: маятник без трения оказывается структурно неустойчивой системой, а маятник с трением — структурно устойчивой.

Определение. Система называется *структурно устойчивой*, если при всяком достаточно малом изменении векторного поля полученная система эквивалентна исходной.

Чтобы придать этому определению смысл, нужно определить, что такое малое изменение поля и какие системы считаются эквивалентными.

Б. Топологическая эквивалентность

Наиболее тонкая классификация дифференциальных уравнений основана на понятии диффеоморфизма. Две системы (M_1, v_1) и (M_2, v_2) называются *диффеоморфными*, если существует диффеоморфизм $h\colon M_1 \to M_2$, переводящий векторное поле v_1 в векторное поле v_2.

Диффеоморфные системы совершенно неразличимы с точки зрения геометрии гладких многообразий. Следующий пример показывает, что классификация с точностью до диффеоморфизма является слишком тонкой (слишком многие системы оказываются неэквивалентными).

Пример. Рассмотрим уравнения с одномерным фазовым пространством $\dot{x} = x$ и $\dot{x} = 2x$.

В обоих случаях 0 — единственное и притом отталкивающее положение равновесия. Однако эти две системы не диффеоморфны.

Доказательство. Если диффеоморфизм переводит особую точку одного векторного поля в особую точку другого векторного поля, то производная этого диффеоморфизма переводит оператор линейной части первого поля в особой точке в оператор линейной части второго поля в его особой точке. Следовательно, эти два линейных оператора подобны и, в частности, имеют одинаковые собственные числа. Таким образом, собственные числа линеаризации векторного поля в особой точке являются непрерывно меняющимися с полем инвариантами относительно диффеоморфизмов. Такие инварианты называют *модулями*. Существование модулей приводит к тому, что разбиение множества векторных полей на классы диффеоморфных оказывается не дискретным, а непрерывным (рис. 73).

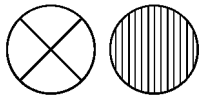


Рис. 73

В частности, два указанных выше поля не диффеоморфны, так как $1 \neq 2$. □

Чтобы не различать эти два поля, вводится более грубое отношение эквивалентности — так называемая топологическая эквивалентность. Заметим, что гомеоморфизмы (взаимно однозначные и взаимно непрерывные преобразования) не действуют на векторные

поля. Поэтому топологическая эквивалентность векторных полей определяется следующим образом.

Рассмотрим фазовые потоки, определяемые данными векторными полями. Фазовый поток поля v на M состоит из преобразований $g^t: M \to M$, переводящих каждое начальное условие x_0 уравнения $\dot{x} = v(x)$ в момент 0 в значение $g^t x_0$ этого решения в момент t; очевидно, $g^{t+s} = g^t g^s$, $g^0 = 1$. Если M компактно, то $g^t x$ определены при всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in M$.

Определение. Две системы *топологически эквивалентны*, если существует гомеоморфизм фазового пространства первой системы на фазовое пространство второй, переводящий фазовый поток первой в фазовый поток второй:

$$h g_1^t x \equiv g_2^t h x.$$

Иными словами, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{g_1^t} & M_1 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ M_2 & \xrightarrow{g_2^t} & M_2 \end{array}$$

коммутативна.

Например, системы $\dot{x} = x$ и $\dot{x} = 2x$ топологически эквивалентны.

Замечание. Применения гомеоморфизмов для изгнания модулей, подобные проведенному выше, явились основной причиной создания понятия гомеоморфизма и непрерывной (не дифференциальной) топологии.

В. Орбитальная эквивалентность

К сожалению, понятие топологической эквивалентности систем не спасает от модулей.

Пример. Рассмотрим векторное поле, имеющее замкнутую фазовую кривую, скажем — предельный цикл. Тогда всякая топологически эквивалентная система тоже имеет предельный цикл, причем с тем же периодом. При малом изменении поля период может немного измениться. Следовательно, период движения по циклу является непрерывно меняющимся инвариантом (модулем) и относительно топологической эквивалентности. Чтобы избавиться от этого модуля, вводится еще более грубая, чем с точностью до гомеоморфизма, классификация систем.

Определение. Две системы называются *топологически орбитально эквивалентными*, если существует гомеоморфизм фазового пространства первой системы на фазовое пространство второй, переводящий ориентированные фазовые кривые первой системы в ориентированные фазовые кривые второй. При этом не требуется никакого согласования движений по соответственным фазовым кривым.

Гипотеза структурной устойчивости состоит в том, что разбиение систем на классы орбитальной эквивалентности уже не имеет модулей (дискретно), по меньшей мере если ограничиться случаями «общего положения» и пренебречь вырождениями.

Г. Окончательное определение структурной устойчивости

Пусть M — компактное гладкое многообразие (класса C^{r+1}, $r \geqslant 1$). Пусть v — векторное поле класса C^r (если M имеет край, то предполагается, что v не касается края).

Система (M, v) называется *структурно устойчивой*, если существует такая окрестность поля v в пространстве C^1, что всякое векторное поле из этой окрестности задает систему, топологически орбитально эквивалентную исходной, причем гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность, близок к тождеству.

Д. Одномерный случай

Пусть M — окружность. Векторное поле на окружности задается периодической функцией. Особые точки поля соответствуют нулям этой функции. Особая точка называется *невырожденной*, если в этой точке производная функции отлична от нуля.

Теорема. *Векторное поле на окружности задает структурно устойчивую систему тогда и только тогда, когда оно имеет лишь невырожденные особые точки.*

Два векторных поля с невырожденными особыми точками на окружности топологически орбитально эквивалентны тогда и только тогда, когда числа особых точек у них одинаковы.

Структурно устойчивые векторные поля образуют в пространстве всех векторных полей на окружности открытое всюду плотное множество.

Доказательство. Пусть все особые точки поля невырождены. Тогда их конечное число и они попеременно устойчивы и неустой-

чивы. Всякое непостоянное решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ стремится к устойчивому положению равновесия при $t \to +\infty$ и к неустойчивому при $t \to -\infty$. Отсюда легко вытекают все утверждения теоремы, кроме одного: остается доказать, что все особые точки поля можно сделать невырожденными посредством сколь угодно малого шевеления поля.

Доказательство этого последнего утверждения удобно провести с помощью так называемой леммы Сарда.

Лемма. *Мера множества критических значений гладкой функции на отрезке* $[0, 1]$ *равна нулю.*

Доказательство. Разобьем отрезок на N равных частей и отметим те из них, которые содержат критические точки. Если N достаточно велико, то производная функции на каждой из отмеченных частей не превосходит C/N (C — некоторая не зависящая от N постоянная). Поэтому длина образа каждой из отмеченных частей не превосходит C/N^2. Покроем этот образ интервалом длины $2C/N^2$. Мы получили покрытие множества критических значений интервалами суммарной длины не более $2C/N$. □

Рассмотрим семейство векторных полей с параметром ε на окружности, заданное формулой $v(x, \varepsilon) = v(x) - \varepsilon$. Тогда точка x — вырожденная особая точка поля, соответствующего значению ε параметра, если и только если ε — критическое значение функции v в точке x.

Но все критические значения образуют множество меры нуль, поэтому существуют сколь угодно малые некритические значения. Зафиксируем некритическое значение ε. Все особые точки поля, соответствующего этому значению параметра, невырождены. □

Е. Отступление: теорема Сарда

Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразий любой размерности. Точку пространства-прообраза назовем *критической*, если размерность образа дифференциала отображения в этой точке меньше размерности пространства образа. Значение отображения в критической точке называется *критическим значением*.

Теорема. *Мера множества критических значений всякого достаточно гладкого отображения равна нулю.*

Доказательство. 1°. Если размерность пространства-прообраза равна нулю, то теорема очевидна; если эта размерность 1, то она уже доказана выше. Предположим, что теорема доказана во всех случаях, когда размерность пространства-прообраза равна $m - 1$ и докажем ее для размерности пространства-прообраза, равной m.

2°. Разобьем множество K критических точек отображения на части. Точка пространства-прообраза называется *точкой уплощения порядка* r, если в ней равны нулю все частные производные порядков $1, \ldots, r$. Обозначим через K_r множество точек уплощения порядка r.

3°. Рассмотрим вначале множество критических точек $K \setminus K_1$. Докажем, что *мера соответствующего множества критических значений* (т. е. мера множества $f(K \setminus K_1)$) *равна нулю*.

В каждой точке из $K \setminus K_1$ отлична от нуля одна из частных производных, скажем, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}$ в координатной записи. В окрестности такой точки можно принять функцию f_1 за локальную координату в прообразе вместо x_1, сохранив $x_2, \ldots, x_m$. В построенных координатах f записывается как однопараметрическое семейство гладких отображений $(m-1)$-мерных пространств в $(n-1)$-мерные

$$(f_1; x_2, \ldots, x_m) \mapsto (f_1; f_2, \ldots, f_n).$$

Зафиксируем значение c параметра f_1. Отображение f индуцирует отображение f_c плоскости $f_1 = c$ размерности $m-1$ в прообразе в плоскость $f_1 = c$ размерности $n-1$ в образе.

Множество критических значений отображения f_c имеет в плоскости $f_1 = c$ в образе $(n-1)$-мерную меру нуль по предположению индукции (теорема доказана для $(m-1)$-мерных прообразов). По теореме Фубини n-мерная мера объединения множеств критических значений отображений f_c по c равна нулю.

Но образ множества критических точек из $K \setminus K_1$, лежащих в окрестности рассматриваемой точки, содержится в этом объединении. Отсюда следует, что мера $f(K \setminus K_1)$ равна нулю.

4°. Рассмотрим множество точек r-уплощения, $K_r \setminus K_{r+1}$. Докажем, что *мера соответствующего множества критических значений* $f(K_r \setminus K_{r+1})$ *равна нулю*.

В каждой точке множества $K_r \setminus K_{r+1}$ отлична от нуля одна из частных производных порядка $r+1$, скажем, $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}$, где g — одна из частных производных f_1 порядка r (в подходящих локальных координатах).

В окрестности такой точки множество $K_r \setminus K_{r+1}$ содержится в гладкой $(m-1)$-мерной гиперповерхности $g = 0$. Точки множества $K_r \setminus K_{r+1}$ являются критическими для сужения f на эту гиперповерхность, так как $df = 0$ на K_r. По предположению, мера образа множества критических значений сужения f на эту гиперповерхность равна нулю. Следовательно, мера $f(K_r \setminus K_{r+1})$ равна нулю.

5°. Наконец, рассмотрим множество K_r r-плоских критических точек при достаточно большом r. Докажем, что *мера соответствующего множества критических значений* $f(K_r)$ *равна нулю, если* r *достаточно велико*.

С этой целью разделим каждую сторону m-мерного куба в пространстве-прообразе (выбрав локальные координаты) на N равных частей, разделим куб на N^m равных маленьких кубиков и отметим те из них, в которых есть точки из K_r. Диаметр образа отмеченного куба не превосходит тогда $c(1/N)^{r+1}$ (где постоянная c не зависит от N). Поэтому все образы отмеченных кубов покрываются открытыми кубами суммарной меры не более

$$c_1 N^m \left(\frac{1}{N}\right)^{n(r+1)},$$

даже если все N^m кубиков отмечены.

Это число при $N \to \infty$ стремится к нулю, поэтому $\operatorname{mes} f(K_r) = 0$ при $r > m/n - 1$.

Представим все множество K критических точек как объединение множеств $K \setminus K_1$, $K_i \setminus K_{i+1}$ и K_r. Мы доказали, что мера образа каждого из этих множеств равна нулю. Поэтому мера всего множества критических значений равна нулю. □

Ж. Структурно устойчивые системы на двумерной сфере

Переходя к системам с фазовым пространством размерности больше единицы, мы сталкиваемся прежде всего с особыми точками и замкнутыми фазовыми кривыми.

Определение. Особая точка векторного поля называется *вырожденной*, если нуль является собственным числом линеаризации поля в этой точке.

Замечание. Невырожденная особая точка поля не исчезает при малом шевелении поля, а лишь слегка сдвигается (по теореме о неявной функции). Напротив, вырожденная особая точка при малом шевелении нуля, вообще говоря, бифурцирует (делится на несколько невырожденных) или исчезает. Поэтому у структурно устойчивой системы все особые точки невырождены.

Определение. Замкнутая фазовая кривая (цикл) векторного поля называется *вырожденной*, если 1 является собственным числом линеаризации функции последования. (Функция последования — это отображение трансверсали к циклу в себя, сопоставляющее каждой точке трансверсали, близкой к циклу, следующую точку пересечения фазовой кривой, выходящей из этой точки трансверсали, с трансверсалью, см. рис. 74.)

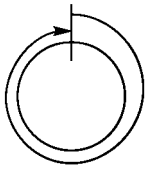


Рис. 74

Замечание. Невырожденный цикл не исчезает при малом шевелении поля, а лишь слегка сдвигает-

ся (по теореме о неявной функции). Напротив, вырожденный цикл при малом шевелении поля, вообще говоря, бифурцирует (делится на несколько невырожденных) или исчезает. Поэтому у структурно устойчивой системы все циклы невырождены.

Рассмотрим векторное поле на двумерной поверхности. В двумерном случае невырожденные особые точки топологически либо седла, либо узлы. Фазовая кривая, стремящаяся к седлу при $t \to +\infty$ называется входящей сепаратрисой седла, а при $t \to -\infty$ — выходящей (рис. 75).

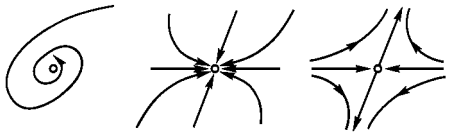


Рис. 75

Теорема. *Векторное поле на двумерной сфере задает структурно устойчивую систему тогда и только тогда, когда выполнены все следующие условия*:

1) *Поле имеет конечное число особых точек.*

2) *Все особые точки поля невырождены.*

3) *Ни одна выходящая сепаратриса седла не является входящей.*

4) *Поле имеет конечное число замкнутых фазовых кривых.*

5) *Все замкнутые фазовые кривые — невырожденные циклы.*

Замечание. Доказательство структурной неустойчивости системы в случае, когда нарушено хотя бы одно из условий 1—5 несложно (см. рис. 76). Доказательство того, что из условий 1—5 вытекает структурная устойчивость, сложнее; оно подробно проведено Баггисом (см. *De Baggis H. F.* Dynamical systems with stable structures // Contrib. Theory Nonlinear Oscillations.

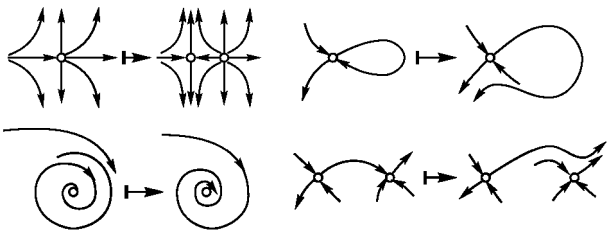


Рис. 76

1952. V. 2. P. 37—59; *Peixoto M. M.* Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology. 1962. V. 1. P. 101—120; 1963. V. 2. P. 179—180).

О структурно устойчивых системах на плоскости см. также: *Баггис Г. Ф.* Грубые системы двух дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1955. Т. 10, № 4. С. 101—126; *Peixoto M. C., Peixoto M. M.* Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions // Anais da Acad. Brasileira de Ciências. 1959. V. 31, № 2. P. 135—160.

Теорема. *Структурно устойчивые векторные поля образуют в пространстве всех векторных полей на двумерной сфере открытое всюду плотное множество.*

Доказательство. Эта теорема вытекает из предыдущей. □

Замечание. Аналогичные результаты справедливы для векторных полей на круге, которые не касаются граничной окружности.

§ 11. Дифференциальные уравнения на торе

В этом параграфе изложена принадлежащая А. Пуанкаре и А. Данжуа теория векторных полей без особых точек на двумерном торе, в частности описаны все структурно устойчивые поля.

A. Двумерный тор

Тором размерности n называется прямое произведение n окружностей. Двумерный тор $T^2 = S^1 \times S^1$ можно представлять себе как квадрат

$$\{x, y : 0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\pi\}$$

со склеенными противоположными сторонами (отождествляются точки $(0, y)$ и $(2\pi, y)$, а также $(x, 0)$ и $(x, 2\pi)$, см. рис. 77).

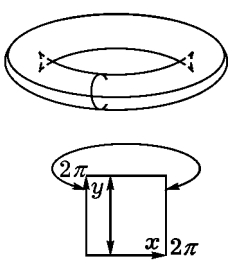


Рис. 77

Тор можно также рассматривать как множество классов смежности группы $\mathbb{R}^2$ по подгруппе $2\pi\mathbb{Z}^2$ целочисленных векторов, умноженных на 2π:

$$T^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mod 2\pi\}.$$

Таким образом, плоскость $\mathbb{R}^2$ локально диффеоморфно накрывает тор. Накрытие $\mathbb{R}^2 \to T^2$ (рис. 78) позволяет переносить каждую картину с тора на плоскость (где она бесконечно размножается). Гладкие функции на торе соответствуют гладким 2π-периодическим функциям на плоскости.

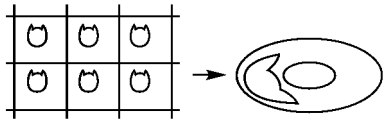


Рис. 78

Каждой замкнутой кривой на плоскости соответствует на торе замкнутая кривая. Обратное неверно: замкнутые кривые на торе соответствуют не только замкнутым кривым на плоскости, но и отображениям $\varphi\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2$, для которых $\varphi(0)=\varphi(1) \mod 2\pi$.

При этом если координаты $\varphi(1)-\varphi(0)$ равны $(2\pi p, 2\pi q)$, то говорят, что кривая на торе *замыкается после p оборотов по параллели и q оборотов по меридиану*.

Б. Векторные поля на торе

Всякое векторное поле на торе определяет на плоскости поле, периодическое с периодом 2π по обеим координатам. Обратно, всякому полю, 2π-периодическому по обеим координатам на плоскости, соответствует векторное поле на торе.

Пример. Уравнение $\dot{x}=\alpha$, $\dot{y}=\beta$, где α и β — постоянные, определяет на торе векторное поле без особых точек.

Теорема. *Если отношение $\lambda=\beta/\alpha$ рационально, то все фазовые кривые уравнения на торе замкнуты, а если иррационально — то всюду плотны.*

Доказательство. 1) Пусть $\lambda=p/q$. Фазовая кривая, проходящая через точку (x_0, y_0), имеет уравнение $y-y_0=\dfrac{(x-x_0)p}{q}$. Если $x-x_0=2\pi q$, то $y-y_0=2\pi p$, следовательно, $(x,y)=(x_0,y_0) \mod 2\pi$, т. е. фазовая кривая замкнута.

2) Мы докажем далее, что фазовая кривая (в случае, когда λ иррационально) равномерно распределена на торе, т. е. проводит в каждой части тора* время, пропорциональное площади этой части. Из этого следует, в частности, что достаточно длинный отрезок фазовой кривой побывает в сколь угодно малой окрестности любой точки тора, т. е. что фазовая кривая всюду плотна. □

* Под частью тора здесь понимается измеримая по Жордану область, например — область с кусочно гладкой границей.

B. Равномерное распределение

Общее определение равномерного распределения состоит в следующем.

Пусть v — векторное поле на компактном гладком многообразии M с фиксированным элементом объема (например, поле на торе с элементом площади $dx\,dy$). Будем обозначать объем (площадь) области D через $\mu(D)$.

Рассмотрим решение φ уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием z. Обозначим через $\tau(D, T, z)$ меру множества тех значений времени, $t \in [0, T]$, для которых $\varphi(t)$ принадлежит области D.

Определение. Решения уравнения $\dot{x} = v(x)$ *равномерно распределены*, если для всякой области D с кусочно гладкой границей

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\tau(D, T, z)}{T} = \frac{\mu(D)}{\mu(M)}.$$

Теорема. *При иррациональном β/α решения уравнения $\dot{x} = \alpha$, $\dot{y} = \beta$ равномерно распределены на торе.*

Равномерная распределенность может быть также определена в терминах *временных средних* функций.

Пусть f — функция на M (вообще говоря, комплекснозначная).

Определение. Предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(g^t z)\, dt = f(z)$$

называется временным средним функции f (здесь g^t — фазовый поток).

Замечание. Разумеется, такой предел существует не всегда, а если и существует, то зависит, вообще говоря, от начальной точки.

Теорема о равномерном распределении на торе вытекает из следующей теоремы.

Теорема (о совпадении средних). *При иррациональных $\lambda = \dfrac{\beta}{\alpha}$ временное среднее любой непрерывной (или хотя бы интегрируемой по Риману) функции $f\colon T^2 \to \mathbb{C}$ вдоль решений уравнения на торе $\dot{x} = \alpha$, $\dot{y} = \beta$ существует, не зависит от начальной точки и совпадает с пространственным средним*:

$$f_0 = \frac{1}{4\pi^2} \iint f\, dx\, dy.$$

Чтобы получить из этой теоремы теорему о равномерном распределении, достаточно взять в качестве f характеристическую функцию множества D (равную единице на D и нулю вне D).

Г. Доказательство теоремы о совпадении средних

Обозначим вектор с компонентами (α, β) через ω. Тогда решение с начальным условием z принимает вид $z + \omega t$. Утверждение теоремы гласит:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(z+\omega t)\, dt = \frac{1}{4\pi^2} \iint f(z)\, dx\, dy.$$

Доказательство. Заметим, что среди функций на торе имеются гармоники — функции вида $e^{i(k,z)}$, где k — целочисленный вектор. Для гармоник теорема проверяется непосредственным вычислением интеграла. Пусть $k \neq 0$, тогда

$$\int_0^T e^{i(k,z+\omega t)}\, dt = e^{ikz} \int_0^T e^{i(k,\omega)t}\, dt = \frac{e^{i(k,z)}}{i(k,\,\omega)} [e^{i(k,\omega)T} - 1].$$

Функция в квадратных скобках ограничена, поэтому временное среднее гармоники с ненулевым номером k равно нулю. Пространственное среднее также равно нулю. При $k = 0$ гармоника равна единице. Оба средних единицы равны единице. Совпадение средних для гармоник доказано.

Из совпадения средних для гармоник следует их совпадение для тригонометрических многочленов: среднее от линейной комбинации равно линейной комбинации средних с теми же коэффициентами. В частности, теорема доказана для $f = \cos(k, z)$ и $\sin(k, z)$.

Теперь докажем теорему для вещественных функций; тогда (ввиду линейности средних) она будет доказана и для комплексных. Приблизим данную функцию f сверху и снизу непрерывными функциями P и Q так, что $P < f < Q$, $\iint (Q - P) \frac{dx\, dy}{4\pi^2} < \varepsilon$ (возможность такого приближения при любом $\varepsilon > 0$ характеризует функции, интегрируемые по Риману). Приблизим затем функции P и Q тригонометрическими многочленами p и q так, чтобы $|p - P| < \varepsilon$, $|q - Q| < \varepsilon$.

Обозначим через p_0 и q_0 свободные члены этих многочленов. Числа p_0 и q_0 являются как пространственными, так и временными

средними многочленов p и q (так как для тригонометрических многочленов временные средние совпадают с пространственными). Таким образом, пространственное среднее f_0 функции f зажато между p_0 и q_0:

$$p_0 < f_0 < q_0, \quad q_0 - p_0 < \varepsilon.$$

Обозначим через p_T, f_T и q_T средние p, f и q за время T:

$$p_T(z) = \frac{1}{T}\int_0^T p(z+\omega t)\,dt \quad \text{и т. д.}$$

Тогда $p_T(z) < f_T(z) < q_T(z)$ при любом T, и при достаточно больших T

$$|p_T(z) - p_0| < \varepsilon, \quad |q_T(z) - q_0| < \varepsilon.$$

Следовательно, при достаточно больших T

$$|f_T(z) - f_0| < 2\varepsilon. \qquad \square$$

Д. Некоторые следствия

1°. Двумерность тора во всем предыдущем не играла роли. Рассмотрим уравнение $\dot{z} = \omega$, $z \in T^n$ на n-мерном торе. Вектор частот ω называется *резонансным*, если существует целочисленный не нулевой вектор k такой, что $(\omega, k) = 0$.

Если вектор ω нерезонансный, то временные и пространственные средние непрерывных (или хотя бы интегрируемых по Риману) функций совпадают, и решения равномерно распределены.

2°. Из теоремы о равномерном распределении следует, что первая цифра числа 2^n чаще равна семи, чем восьми. Точнее, обозначим через $N_k(n)$ число натуральных значений $m \leqslant n$, для которых 2^m начинается с цифры k. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_7(n)}{N_8(n)} = \frac{\lg 8 - \lg 7}{\lg 9 - \lg 8}.$$

3°. Поводом к открытию теорем о равномерном распределении послужила следующая задача Лагранжа: найти $\gamma = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \arg f(t)$, где $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e^{i\omega_k t}$.

Приведем ответ для нерезонансного вектора $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Пусть $n = 3$. Тогда если из трех отрезков (a_1, a_2, a_3) можно составить треугольник, то $\gamma = \sum \frac{\alpha_k \omega_k}{\pi}$, где α_k — угол против стороны a_k.

При произвольном n ответ также имеет вид взвешенного среднего частот ω_k: $\gamma = \sum W_k \omega_k$. Веса W_k вычисляются следующим образом. Обозначим через $W(a_1, \ldots, a_s; b)$ вероятность того, что расстояние от начала до конца плоской ломаной из s звеньев длин $a_1, \ldots, a_s$ со случайными направлениями меньше b. Тогда $W_k = W(\hat{a}_k; a_k)$ ($\hat{a}_k$ — набор из всех чисел a_i, кроме a_k).

Доказательство см., например, в статье: *Вейль Г.* Среднее движение // УМН. 1976. Т. 31, № 4. С. 213—219.

Лагранж пришел к сформулированной выше задаче (называемой задачей о среднем движении) следующим образом. Рассмотрим вектор, соединяющий Солнце с центром эллипса, по которому движется планета (он называется вектором Лапласа). В первом приближении теории возмущений эволюция вектора Лапласа под влиянием взаимного тяготения планет имеет вид движения суммы равномерно вращающихся векторов (их число равно числу планет).

Если для планет Солнечной системы подсчитать частоты ω_k и амплитуды a_k, то окажется, что для всех планет, кроме Земли и Венеры, одна из амплитуд a_k больше суммы всех других. Поэтому Лагранж сумел найти среднее движение перигелиев всех планет, кроме Земли и Венеры. В случае же Земли и Венеры несколько слагаемых имеют примерно одинаковую амплитуду. Проблема была решена только в двадцатом веке в работах Боля, Серпинского и Г. Вейля.

Е. Функция последования и угловая функция

Рассмотрим общее дифференциальное уравнение на торе

$$\dot{z} = \omega(z), \quad z \in T^2.$$

Предположим, что поле ω не имеет особых точек и, более того, что $\omega_1 \neq 0$. (Если особых точек и циклов нет, то в подходящей системе координат первая компонента поля всюду отлична от нуля (см. *Siegel C. L.* Note on differential equations on the torus // Ann. Math. 1945. V. 46, № 3. P. 423—428); нетрудно построить поле без особых точек, но с циклами, не допускающее такой системы координат.)

Мы приходим теперь к изучению интегральных кривых неавтономного уравнения с двоякопериодической правой частью

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y), \quad \lambda = \omega_2/\omega_1.$$

Все решения этого уравнения продолжаются неограниченно, так как правая часть ограничена.

Определение. *Функцией последования* для рассматриваемого уравнения на торе называется отображение A оси y в себя, сопоставляющее каждой начальной точке $(0, y_0)$ значение решения с этим начальным условием при $x = 2\pi$ (рис. 79).

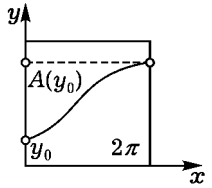


Рис. 79

Функция последования дифференцируема (по теореме о дифференцируемости решения по начальным условиям) и обладает свойством периодичности $A(y + 2\pi) = A(y) + 2\pi$; обратное отображение A^{-1} также дифференцируемо. Таким образом, A определяет диффеоморфизм окружности на себя. Можно представлять себе функцию последования как диффеоморфизм меридиана тора в себя, переводящий каждую точку меридиана в следующую точку пересечения интегральной кривой, проходящей через эту точку, с тем же меридианом.

Изучение свойств интегральных кривых на торе сводится таким образом к изучению свойств диффеоморфизмов окружности. Например, предположим, что диффеоморфизм окружности имеет неподвижную точку. Тогда на торе имеется замкнутая интегральная кривая. Обратное неверно (пример — поворот окружности на угол π). Для того чтобы интегральная кривая, проходящая через данную точку меридиана тора, была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была периодической точкой диффеоморфизма, т. е. чтобы она переходила в себя после нескольких применений диффеоморфизма.

Функция последования задает сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности, поэтому ее можно записать в виде

$$Ay = y + a(y), \quad \text{где } a(y + 2\pi) = a(y),\ a'(y) > -1.$$

Функцию a мы будем называть *угловой функцией*.

Ж. Число вращения

Число вращения характеризует средний наклон интегральных кривых уравнения на торе; для простейшего уравнения с постоянной правой частью $\frac{dy}{dx} = \lambda$ число вращения есть λ.

Определение. *Числом вращения* уравнения $\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y)$ на торе называется

$$\mu = \lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x},$$

где φ — решение соответствующего уравнения на плоскости. Число вращения выражается через угловую функцию:

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \lim_{k\to\infty} \frac{a(y)+a(Ay)+\ldots+a(A^{k-1}y)}{k}.$$

В таком виде определение переносится на любой диффеоморфизм окружности, сохраняющий ориентацию.

Теорема. *Предел в определении числа вращения существует и не зависит от начальной точки; он рационален тогда и только тогда, когда некоторая степень диффеоморфизма имеет неподвижную точку (т. е. когда дифференциальное уравнение имеет замкнутую фазовую кривую).*

Доказательство. 1°. Рассмотрим угол поворота точки y при k-кратном применении диффеоморфизма. Обозначим его через

$$a_k(y) = a(y)+a(Ay)+a(A^2y)+\ldots+a(A^{k-1}y).$$

Для любых двух точек y_1 и y_2 имеем $|a_k(y_1)-a_k(y_2)|<2\pi$.

Действительно, неравенство имеет место при $|y_1-y_2|<2\pi$, так как преобразования прямой A и A^k переводят отрезки длины 2π в отрезки длины 2π. Но функция a_k 2π-периодична, поэтому y_2 можно изменить на целое кратное 2π так, что $a_k(y_2)$ не изменится, а расстояние y_1 до y_2 станет меньше 2π.

2°. Обозначим через m_k целое число, такое что

$$2\pi m_k \leqslant a_k(0) < 2\pi(m_k+1).$$

Докажем, что *при любом y и при любом целом l*

$$\left|\frac{a_{kl}(y)}{2\pi kl} - \frac{m_k}{k}\right| < \frac{2}{k}.$$

Действительно, $|a_k(y)-2\pi m_k|<4\pi$ при любом y согласно 1°, поэтому

$$\left|\frac{a_k(y)}{2\pi k} - \frac{m_k}{k}\right| < \frac{2}{k}.$$

Но $\frac{a_{kl}(y)}{2\pi kl}$ есть среднее арифметическое l величин $\frac{a_k(y_i)}{2\pi k}$, где $y_i = A^i y$, $i=0,\ldots,l-1$.

3°. Обозначим отрезок $\left[\frac{m_k-2}{k}, \frac{m_k+2}{k}\right]$ через σ_k. Мы доказали, что *при всех l* $\frac{a_{kl}(y)}{2\pi kl}$ *принадлежит* σ_k. Докажем, что *отрезки σ_k с разными k пересекаются*.

Действительно, $\frac{a_{kl}(y)}{2\pi kl}$ принадлежит как σ_k, так и σ_l.

4°. Итак, *отрезки σ_k имеют стремящиеся к 0 длины и попарно пересекаются*. Следовательно, они имеют единственную точку пересечения: она и есть число вращения. Мы доказали, что предел, определяющий число вращения, существует и не зависит от начальной точки.

5°. Пусть на окружности A^q имеет неподвижную точку y; тогда на прямой соответствующая точка при q-кратном отображении сдвигается на целое кратное 2π, т. е. $a_q(y)=2\pi p$. В этом случае при любом l $a_{ql}(y)=2\pi pl$, поэтому *число вращения $\mu=p/q$ рационально*.

6°. Пусть $\mu=p/q$. Если при всех y будет $a_q(y)>2\pi p$, то при некотором $\varepsilon>0$ будет $a_q(y)>2\pi p+\varepsilon$ для всех y.

Но тогда $\mu>p/q$. Если бы было $a_q(y)<2\pi p$ для всех y, то было бы $\mu<p/q$. Итак, $a_q-2\pi p$ меняет знак. Следовательно, существует такое y, что $a_q(y)=2\pi p$. □

Замечание. Если число вращения μ иррационально, то порядок точек $(y, Ay, A^2y, \ldots, A^Ny)$ на окружности при любом y такой же, как в случае поворота на угол $2\pi\mu$. Действительно, $a_q(y)>2\pi p$ тогда и только тогда, когда $\mu>p/q$.

Заметим еще, что число вращения уравнения на торе *зависит* от выбора окружности, трансверсальной фазовым кривым (оси y в наших обозначениях).

3. Структурно устойчивые уравнения на торе

Простейшее уравнение на торе $\dot z=\omega$ структурно неустойчиво как при резонансном, так и при нерезонансном значении ω.

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение на торе $\dfrac{dy}{dx}=\lambda(x, y)$ структурно устойчиво тогда и только тогда, когда число вращения рационально и все периодические решения невырождены*.*

Доказательство. Эта теорема вытекает из доказанного ниже аналогичного предложения о диффеоморфизмах окружности, сохраняющих ориентацию. □

Определение. *Циклом порядка q* диффеоморфизма $A\colon M\to M$ называется множество из q точек $(y, Ay, \ldots, A^{q-1}y)$ в случае, когда они все различны и $A^qy=y$. Цикл называется *невырожденным*, если его точка y является невырожденной неподвижной точкой отоб-

* *Майер А. Г.* Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки ГГУ. 1939. Т. 12. С. 215—229; *Плисс В. А.* О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе // Вестник ЛГУ, сер. мат. 1960. Т. 13, № 3. С. 15—23.

ражения A^q (т. е. 1 не является собственным числом производной отображения A^q в точке y).

Замечание. Производные отображения A^q в разных точках одного цикла подобны, поэтому все точки одного цикла вырождены или невырождены одновременно.

Теорема 2. *Сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности структурно устойчив, если и только если число вращения рационально и все циклы невырождены. Структурно устойчивые диффеоморфизмы образуют открытое всюду плотное множество в пространстве C^2 всех дважды дифференцируемых сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности.*

Таким образом, диффеоморфизмы общего положения с рациональным числом вращения устроены достаточно просто: топологический тип отображения определяется числом циклов, которое должно быть четным (ввиду чередования точек устойчивых и неустойчивых циклов). Порядок всех циклов равен q, если число вращения $\mu = p/q$. Порядок точек одного цикла на окружности такой же, как для отображения поворота на угол $2\pi\mu$.

Теорема 2 доказана ниже в п. К. Доказательство несложно по модулю следующей нетривиальной теоремы Данжуа (1932).

Теорема 3. *Если сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности класса C^2 имеет иррациональное число вращения μ, то он топологически эквивалентен повороту окружности на угол $2\pi\mu$.*

Предыдущая теория принадлежит Пуанкаре (1885); теорему Данжуа Пуанкаре высказал в виде гипотезы (для уравнений, правая часть которых тригонометрический многочлен). Данжуа привел также примеры, показывающие, что C^2 нельзя заменить на C^1.

И. Доказательство теоремы Данжуа

Доказательство. 1°. Точки $\ldots, A^{-1}y, y, Ay, A^2y, \ldots$ орбиты отображения A на окружности идут в том же порядке, что и точки орбиты поворота на угол $2\pi\mu$ (см. п. Ж). Поэтому *для доказательства теоремы достаточно установить, что орбита отображения A всюду плотна на окружности*. Действительно, мы получим гомеоморфизм окружности, переводящий A в поворот, продолжая по непрерывности отображение, которое переводит точки орбиты $\ldots$, $A^{-1}y, y, Ay, \ldots$ в соответственные точки орбиты поворота.

2°. *Если на окружности есть дуга, свободная от точек орбиты A, то все образы этой дуги при применении степеней диффеоморфиз-*

ма A попарно не пересекаются. Действительно, рассмотрим максимальную дугу, содержащую данную и свободную от точек орбиты. Все ее образы — тоже максимальные дуги. Концы максимальной дуги принадлежат замыканию орбиты. Поэтому концы максимальных дуг не могут лежать в максимальных дугах. Значит, любые две пересекающиеся максимальные дуги обязательно совпадают. Но если максимальная дуга совпадает со своим образом, то ее граничная точка принадлежит циклу, вопреки иррациональности μ.

3°. Сумма длин образов максимальной дуги ограничена. Поэтому длины последовательных образов такой дуги под действием как A^N, так и A^{-N} стремятся к нулю при $N \to \infty$. Следовательно, *интегралы якобианов как положительных, так и отрицательных итераций A по максимальной дуге стремятся к нулю*: *если обозначить*

$$u_N = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{dA}{dy}(A^i y), \quad v_N = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{dA^{-1}}{dy}(A^{-i} y),$$

то при $N \to \infty$

$$\int u_N \, dy \to 0, \quad \int v_N \, dy \to 0$$

(интегралы по максимальной дуге).

4°. Рассмотрим последовательность точек орбиты поворота на угол $2\pi\mu$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. *Предположим, что α_q — ближайшая к α_0 среди точек $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$. Тогда точки $\alpha_q, \ldots, \alpha_{2q-1}$ перемежаются с точками $\alpha_0, \ldots, \alpha_{q-1}$.*

Действительно, рассмотрим дугу (α_s, α_{q+s}), $s < q$, длины δ, равной расстоянию от α_0 до α_q. Предположим, что на этой дуге лежит α_r. Если $r < s$, то на дуге $(\alpha_{s-r}, \alpha_{s-r+q})$ лежит α_0, поэтому расстояние от α_{s-r} до α_0 меньше δ, вопреки выбору α_q. Если $r > s$, то на дуге (α_0, α_q) лежит α_{r-s}, поэтому $r - s > q$. Но тогда расстояние от α_0 до α_{r-s-q} меньше δ. Итак, на дуге (α_s, α_{q+s}) нет точек α_r, $r < 2q$, что и требовалось доказать.

5°. Рассмотрим точки $(y, Ay, \ldots, A^{q-1}y)$ и $(A^{-1}y, \ldots, A^{-q}y)$. Эти два множества точек перемежаются (4°). Поэтому для любой функции f ограниченной вариации на окружности, для любой точки y и для любого q, определенного в 4°, *величина*

$$\sum f(A^i y) - \sum f(A^{-j} y), \quad 0 \leqslant i < q, \quad 0 < j \leqslant q,$$

ограничена сверху и снизу не зависящими от y и q постоянными.

6°. Рассмотрим в качестве f функцию $\ln\left(\frac{dA}{dy}\right)$. Это функция ограниченной вариации, так как A класса C^2. Следовательно, *величина*

$$\prod_{i=0}^{q-1}\frac{dA}{dy}(A^i y)\Big/\prod_{j=1}^{q}\frac{dA}{dy}(A^{-j}y)=u_q v_q$$

ограничена сверху и снизу не зависящими от y и q положительными постоянными (если q выбирается как в 4°).

7°. Противоречие с 3° завершает доказательство теоремы: применяя неравенство Шварца к $\sqrt{u_q}$, $\sqrt{v_q}$, получаем

$$\left(\int\sqrt{u_q v_q}\,dy\right)^2\leqslant\int u_q\,dy\int v_q\,dy.$$ □

К. Доказательство теоремы о структурно устойчивых диффеоморфизмах окружности

Доказательство. 1°. *Для любых двух сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности с одинаковыми рациональными числами вращения и одинаковым числом циклов, если все циклы невырождены, то существует гомеоморфизм, переводящий первый диффеоморфизм во второй.*

Для доказательства нужно сначала сопоставить точкам одного устойчивого цикла первого диффеоморфизма точку какого-либо устойчивого цикла второго, затем соседнего неустойчивого и т. д. для всех циклов (порядок точек цикла на окружности такой же, как у поворота). Это сопоставление можно затем продолжить на смежные интервалы, пользуясь следующей легко доказываемой леммой:

Любые два гомеоморфизма интервала на себя, не имеющие неподвижных точек, топологически сопряжены.

2°. Если число вращения рационально и все циклы невырождены, то при малом шевелении число вращения, число циклов и невырожденность циклов сохранятся (по теореме о неявной функции). Следовательно, *диффеоморфизм с рациональным числом вращения, все циклы которого невырождены, структурно устойчив* (см. 1°).

3°. Если диффеоморфизм имеет вырожденный цикл, то малым шевелением диффеоморфизма в окрестности точек этого цикла можно изменить число циклов. Поэтому *диффеоморфизм с вырожденным циклом структурно неустойчив.*

4°. *Если число вращения иррационально, то его можно изменить сколь угодно малым изменением диффеоморфизма.* Действительно,

рассмотрим возмущенный диффеоморфизм $y \mapsto A(y) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. По теореме Данжуа в некоторой системе координат (не гладкой) $z \mapsto$ $\mapsto z + 2\pi\mu + \varphi(z)$, $\varphi > 0$. Поэтому число вращения возмущенного диффеоморфизма больше μ. Итак, *всякий диффеоморфизм с иррациональным числом вращения структурно неустойчив*.

5°. *Число вращения — непрерывная функция от диффеоморфизма*. Действительно, $\mu < p/q$, если и только если при q-кратном применении диффеоморфизма все точки сдвигаются меньше чем на $2\pi p$. Это свойство сохраняется при достаточно малом изменении диффеоморфизма.

6°. *Диффеоморфизмы с рациональными числами вращения образуют плотное множество*. Это вытекает из 4°, 5° и плотности множества рациональных чисел.

7°. *Все циклы диффеоморфизма с рациональным числом вращения можно сделать невырожденными, сколь угодно мало изменив диффеоморфизм*.

Действительно, сколь угодно малым шевелением в окрестности одного цикла можно сделать этот цикл невырожденным. Пусть γ — одна из дуг, на которые один невырожденный цикл делит окружность. Определим гладкую функцию φ, равную 1 на γ вне малой окрестности концов γ и равную 0 вне γ. Положим $A_\varepsilon(y) = A(y) + + \varepsilon\varphi(y)$. Число вращения этого диффеоморфизма прежнее, так как цикл сохранился. Пусть q — порядок цикла. Тогда $A_\varepsilon^q(y)$ на дуге $A\gamma$ совпадает с $A^q(y) + \varepsilon$ вне окрестности концов дуги $A\gamma$.

Применим к функции $A^q(y) - y$ на $A\gamma$ лемму Сарда. Мы убеждаемся, что при почти всех ε все неподвижные точки A_ε^q на $A\gamma$ невырождены. Но каждый цикл отображения A_ε имеет представителя на дуге $A\gamma$. Следовательно, все циклы отображения A_ε невырождены. □

Л. Обсуждение

1°. Предыдущие теоремы создают впечатление, что «общий» диффеоморфизм окружности имеет рациональное число вращения, а диффеоморфизмы с иррациональным числом вращения являются исключением. Численные эксперименты однако, обычно приводят к всюду плотным (по меньшей мере на вид) орбитам. Чтобы объяснить это явление, рассмотрим, например, семейство диффеоморфизмов

$$A_{a,\varepsilon}\colon y \mapsto y + \alpha + \varepsilon \sin y, \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad \varepsilon \in [0, 1).$$

Будем изображать каждый диффеоморфизм точкой на плоскости (α, ε). Множество диффеоморфизмов с числом вращения $\mu = \frac{p}{q}$ ограничено (как нетрудно сосчитать) парой гладких кривых и подходит к оси $\varepsilon = 0$ тем более узким языком, чем больше q. Объединение всех этих множеств всюду плотно. Однако оказывается, что мера множества точек плоскости параметров, для которых число вращения рационально, в области $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ мала по сравнению с мерой этой области (рис. 80).

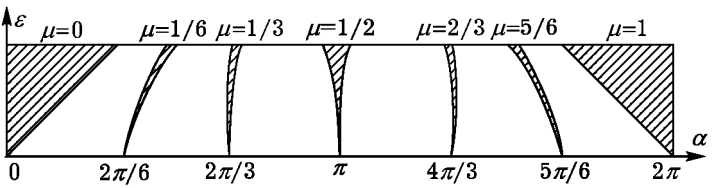


Рис. 80

Таким образом, наугад взятый диффеоморфизм нашего семейства с малым ε с подавляющей вероятностью имеет иррациональное число вращения.

Более того, аналогичный результат имеет место для любого аналитического или достаточно гладкого семейства диффеоморфизмов, близких к поворотам, например, для семейства $y \mapsto y + \alpha + \varepsilon a(y)$ с любой аналитической функцией a: при малых ε орбиты с подавляющей вероятностью всюду плотны на окружности, и число вращения иррационально.

Таким образом, точка зрения структурной устойчивости не является единственным подходом к понятию системы общего положения. Метрический подход, указанный выше, в ряде случаев лучше подходит для описания реально наблюдаемого поведения системы.

2°. Согласно теореме Данжуа, гладкое отображение с иррациональным числом вращения топологически эквивалентно повороту. Возникает вопрос, будет ли это отображение *гладко* эквивалентно повороту.

Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным в случае, когда число вращения ненормально быстро аппроксимируется рациональными числами (А. Финци). Вопрос о гладкой эквивалентности повороту сводится к вопросу о гладкости инвариантной меры преобразования. Если число вращения рационально, то инвариант-

ная мера сосредоточена в отдельных точках. Если же число вращения очень быстро аппроксимируется рациональными числами с не слишком большими знаменателями, то инвариантная мера столь быстро аппроксимируется мерами, сосредоточенными в отдельных точках, что она не может быть даже абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Поэтому гомеоморфизмы в теореме Данжуа нельзя заменить диффеоморфизмами.

3°. С метрической точки зрения наугад взятое число μ с вероятностью 1 иррационально и, более того, не допускает слишком быстрой аппроксимации рациональными числами с небольшими знаменателями. Например, при любом $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 существует $C > 0$ такое, что

$$\left|\mu - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^{2+\varepsilon}}$$

для любых целых $p, q > 0$. Поэтому возникает предположение, что явление 2° встречается лишь с вероятностью 0. Сформулируем два результата в этом направлении.

Теорема. *Для почти всякого числа вращения μ достаточно гладкий (класса C^3 или выше) диффеоморфизм окружности с числом вращения μ гладко эквивалентен повороту на угол $2\pi\mu$* (М. Эрман, 1976).

Здесь «почти всякий» означает, что мера Лебега исключаемого множества чисел вращения равна нулю.

Теореме Эрмана предшествовали аналогичная теорема для отображений близких к повороту и следующий результат (доказанный в аналитическом случае в 1959 г., а в гладком Ю. Мозером в 1962 г.).

Теорема. *В достаточно гладком семействе $y \mapsto y + \alpha + \varepsilon a(y)$ мера множества пар (α, ε) в области $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, для которых диффеоморфизм не приводится к повороту гладким диффеоморфизмом, стремится к нулю вместе с ε_0.*

Эта теорема справедлива и для отображений n-мерного тора.

Доказательство этих результатов выходит за рамки настоящего курса, однако мы рассмотрим в следующем параграфе принадлежащую А. Н. Колмогорову технику доказательства теорем этого рода в простейшем случае аналитического диффеоморфизма.

М. Приближения иррациональных чисел рациональными

Теорема. *Для любого иррационального числа μ существуют сколь угодно точные рациональные приближения, ошибка которых*

меньше обратной величины квадрата знаменателя:

$$\left|\mu - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Например, число π можно приблизить с ошибкой порядка одной миллионной рациональной дробью с трехзначными числителем и знаменателем, $\pi \approx 355/113$.

Прежде чем доказывать теорему, укажем геометрический способ нахождения бесконечной последовательности таких приближений (называемый алгоритмом цепных дробей, или алгоритмом вытягивания носов, или попросту алгоритмом Евклида).

Рассмотрим плоскость с координатами (x, y) (рис. 81).

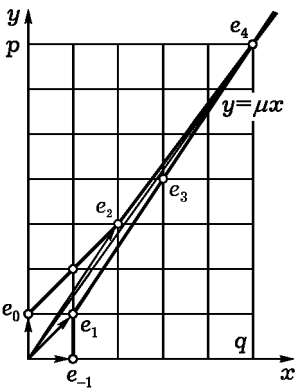


Рис. 81

Проведем прямую $y = \mu x$. Для определенности будем считать $\mu > 0$. Отметим в первом квадранте все точки с целыми координатами. Они, за исключением точки O, не лежат на нашей прямой, так как μ иррационально. Рассмотрим выпуклые оболочки целых точек квадранта, лежащих по одну сторону от нашей прямой («ниже» ее) и по другую («выше»). (Чтобы построить эти выпуклые оболочки, можно представить себе нить, закрепленную в бесконечности и лежащую на нашей прямой. Представим себе, что в каждой отличной от O целой точке нашего квадранта вбит гвоздь. Потянем нить за свободный конец O вниз (соответственно вверх). Тогда нить натянется, наткнувшись на некоторые гвозди, образуя границу нижней (соответственно верхней) выпуклой оболочки.) Вершины построенных выпуклых ломаных определяют приближения к иррациональному числу μ, о которых шла речь. Если целые числа (q, p) — координаты вершины, то дробь p/q, отвечающая вершине, называется *подходящей дробью* для μ. Оказывается, для любой подходящей дроби

$$\left|\mu - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

Для доказательства этого неравенства опишем построение наших выпуклых ломаных другим способом. Обозначим через e_{-1} базисный вектор $(1, 0)$ и через e_0 — вектор $(0, 1)$. Эти векторы лежат

по разные стороны от прямой $y = \mu x$. Будем строить последовательность векторов $e_1, e_2, \ldots$ по следующему правилу. Пусть e_{k-1} и e_k уже построены и лежат по разные стороны от нашей прямой. Будем прибавлять к вектору e_{k-1} вектор e_k столько раз, сколько можно, чтобы сумма лежала по ту же сторону от прямой $y = \mu x$, что и e_{k-1}.

Таким образом, получаем последовательность натуральных чисел a_k и последовательность целочисленных векторов

$$e_1 = e_{-1} + a_0 e_0, \quad \ldots, \quad e_{k+1} = e_{k-1} + a_k e_k, \quad \ldots$$

Векторы e_k и являются вершинами наших двух выпуклых оболочек (попеременно — верхней при четных k и нижней при нечетных).

Лемма. *Площадь параллелограмма, натянутого на векторы* (e_{k+1}, e_k) *равна* (*с учетом ориентации*) $(-1)^k$.

Для исходного параллелограмма (e_0, e_{-1}) это очевидно. А каждый следующий параллелограмм имеет с предыдущим общую сторону и равную высоту, и задает противоположную ориентацию плоскости.

Следствие. *Обозначим координаты точки* e_k *через* q_k *и* p_k. *Тогда разность двух последовательных подходящих дробей равна*

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}.$$

Доказательство. При приведении дробей к общему знаменателю числителем оказывается определитель из компонент e_{k+1} и e_k, равный ориентированной площади параллелограмма. □

Доказательство теоремы. Векторы e_k лежат попеременно то по одну, то по другую сторону от прямой $y = \mu x$.

Поэтому подходящие дроби попеременно то больше, то меньше чем μ. Следовательно, разность между μ и подходящей дробью меньше модуля разности между этой подходящей дробью и следующей. По следствию эта разность по модулю равна $\dfrac{1}{q_k q_{k+1}}$, что не больше $\dfrac{1}{q_k^2}$, так как $q_{k+1} \geqslant q_k$ при $k \geqslant 0$. □

Замечание. Числа a_k называются *неполными частными*. Подходящие дроби выражаются через неполные частные так:

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{a_{k-1}}}.$$

Выражение $a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dots}$ называется *бесконечной цепной дробью*. Число μ *разлагается в бесконечную цепную дробь* в том смысле, что $\lim \dfrac{p_k}{q_k} = \mu$.

§ 12. Аналитическое приведение к повороту аналитических диффеоморфизмов окружности

В этом параграфе при помощи принадлежащей А. Н. Колмогорову модификации метода Ньютона доказывается теорема об аналитических диффеоморфизмах окружности, близких к повороту и имеющих почти любое число вращения.

А. Формулировка теоремы

Обозначим через Π_ρ полосу $|\operatorname{Im} y| < \rho$. Для голоморфной функции a, ограниченной в этой полосе, будем обозначать

$$\|a\|_\rho = \sup |a(y)|, \quad y \in \Pi_\rho.$$

Пусть μ — иррациональное число, $K > 0$, $\sigma > 0$. Мы скажем, что μ *число типа* (K, σ), если для любых целых p и $q \neq 0$

$$\left|\mu - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{K}{|q|^{2+\sigma}}.$$

Теорема. *Существует такое $\varepsilon > 0$, зависящее только от K, ρ, σ, что если a — 2π-периодическая аналитическая вещественная на вещественной оси функция с $\|a\|_\rho < \varepsilon$ такая, что преобразование*

$$y \mapsto y + 2\pi\mu + a(y)$$

задает диффеоморфизм окружности с числом вращения μ типа (K, σ), то этот диффеоморфизм аналитически эквивалентен повороту на угол $2\pi\mu$.

Б. Гомологическое уравнение

Обозначим через $\mathfrak{A}$ поворот на угол $2\pi\mu$ и через H искомый диффеоморфизм, превращающий поворот в A: коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{A} & S^1 \\ \uparrow{\scriptstyle H} & & \uparrow{\scriptstyle H} \\ S^1 & \xrightarrow{\mathfrak{A}} & S^1 \end{array} \qquad \text{т. е.} \quad H \circ \mathfrak{A} = A \circ H.$$

Запишем H в виде $Hz = z + h(z)$, $h(z + 2\pi) = h(z)$. Тогда для h получаем функциональное уравнение

$$h(z + 2\pi\mu) - h(z) = a(z + h(z)).$$

Если A мало отличается от поворота, то a мало. Естественно ожидать, что и h — того же порядка малости. Тогда $a(z+h(z))$ отличается от $a(z)$ на величину более высокого порядка малости, чем a. Поэтому «в первом приближении» мы получаем для h уравнение

$$h(z+2\pi\mu)-h(z)=a(z).$$

Это линейное уравнение называется *гомологическим уравнением*.

Замечание. Мы можем рассматривать совокупность всех диффеоморфизмов A как «бесконечномерное многообразие», на котором действует «бесконечномерная группа» диффеоморфизмов H. При этом функцию a можно интерпретировать как касательный вектор к многообразию диффеоморфизмов в точке $\mathfrak{A}$, а функцию h — как касательный вектор к группе в единице.

В этих терминах гомологическое уравнение имеет следующий смысл: a принадлежит касательному пространству к орбите точки $\mathfrak{A}$ под действием группы, если и только если гомологическое уравнение относительно h разрешимо.

В. Формальное решение гомологического уравнения

Разложим известную функцию a и неизвестную h в ряды Фурье:

$$a(z)=\sum a_k e^{ikz},\quad h=\sum h_k e^{ikz}.$$

Сравнивая коэффициенты при e^{ikz}, находим

$$h_k=\frac{a_k}{e^{2\pi ik\mu}-1}.$$

Для разрешимости уравнения необходимо, чтобы знаменатели обращались в нуль лишь одновременно с числителями. В частности, гомологическое уравнение неразрешимо, если $a_0\neq 0$. Если $a_0=0$ и число вращения μ иррационально, то предыдущие формулы дают решение гомологического уравнения в классе формальных рядов Фурье. Чтобы получить настоящее решение, необходимо исследование сходимости этого ряда.

Г. Поведение коэффициентов Фурье аналитических функций

Лемма 1. *Если f — 2π-периодическая функция, аналитическая в полосе Π_ρ, непрерывная в замыкании этой полосы, и $\|f\|_\rho\leqslant M$, то ее коэффициенты Фурье убывают в геометрической прогрессии*

$$|f_k|\leqslant Me^{-|k|\rho}.$$

Доказательство. Как известно, $f_k=\frac{1}{2\pi}\oint f(z)e^{-ikz}\,dz$. Пусть $k>0$. Сдвинем путь интегрирования вниз (на $-i\rho$). Интеграл не изменится, так как интегралы по вертикальным сторонам полученного прямоугольника рав-

ны. Итак,

$$f_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-i\rho)e^{-ikx-k\rho}\,dx, \quad |f_k| \leqslant Me^{-k\rho}.$$

При $k<0$ путь нужно сдвинуть вверх (на $i\rho$). □

Лемма 2. *Если $|f_k| \leqslant Me^{-|k|\rho}$, то функция $f=\sum f_k e^{ikz}$ аналитична в полосе Π_ρ, причем*

$$\|f\|_{\rho-\delta} \leqslant \frac{M}{\delta} \quad \textit{при } \delta<\rho,\ \delta<1.$$

Доказательство.

$$\|f\|_{\rho-\delta} \leqslant \sum |f_k||e^{ikz}| \leqslant M\sum e^{-|k|\rho}e^{|k|(\rho-\delta)} = M\sum e^{-|k|\delta} \leqslant \frac{2M}{1-e^{-\delta}} \leqslant \frac{4M}{\delta}.$$ □

Замечание. В случае функций n переменных лемма 1 сохраняется, а в лемме 2 оценка $\frac{4M}{\delta}$ заменяется на $\frac{CM}{\delta^n}$, где $C=C(n)$ — не зависящая от δ и f постоянная.

Д. Малые знаменатели

При решении гомологического уравнения коэффициенты Фурье правой части приходится делить на числа $e^{2\pi ik\mu}-1$. Если число μ иррационально, то при $k\neq 0$ эти числа отличны от 0. Однако некоторые из них очень близки к 0. Действительно, каждое число μ допускает рациональные приближения $\frac{p}{q}$ с ошибкой $\left|\mu-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$ при сколь угодно большом q. При $k=q$ знаменатель $e^{2\pi ik\mu}-1$ будет очень мал.

Оказывается, с вероятностью 1 все эти малые знаменатели допускают степенную по k оценку снизу.

Лемма 3. *Пусть $\sigma>0$. Тогда для почти каждого вещественного μ существует $K=K(\mu,\sigma)>0$ такое, что*

$$\left|\mu-\frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{K}{|q|^{2+\sigma}}$$

для всех целых p и $q\neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ те числа μ, для которых приведенное неравенство (с фиксированными p,q,K,σ) нарушается. Эти числа образуют отрезок длины не больше $\frac{2K}{|q|^{2+\sigma}}$. Объединение таких отрезков для всех p (при фиксированных $q>0, K, \sigma$) имеет суммарную длину не более $\frac{2K}{q^{1+\sigma}}$. Суммируя по q, получаем множество меры не большей CK, где $C=2\sum q^{-(1+\sigma)}<\infty$. Следовательно, множество чисел $\mu\in[0,1]$, для которых требуемое в лемме K не существует, покрывается множествами сколь угодно малой меры. Значит, это множество имеет меру нуль (на отрезке $[0,1]$ и, следовательно, на всей прямой). □

Замечание. Числа μ, удовлетворяющие указанному выше неравенству, названы в п. А числами типа (K, σ).

Для числа μ типа (K, σ) малый знаменатель допускает следующую оценку снизу:

$$|e^{2\pi i k\mu} - 1| \geqslant \frac{K}{2|k|^{1+\sigma}} \quad (|k| > 0).$$

Доказательство. Действительно, расстояние от $k\mu$ до ближайшего целого числа оценивается снизу числом $\frac{K}{|k|^{1+\sigma}}$, а хорда единичной окружности не короче, чем длина меньшей из стягиваемых ею дуг, поделенная на π. □

Е. Исследование гомологического уравнения

Пусть a — 2π-периодическая аналитическая функция со средним значением 0.

Лемма 4. *Для почти всех μ гомологическое уравнение имеет 2π-периодическое аналитическое решение (вещественное, если a вещественная функция). Существует такая постоянная $\nu = \nu(K, \sigma) > 0$, что если μ типа (K, σ), то для любого $\delta > 0$, меньшего ρ, и для любого $\rho < 1/2$*

$$\|h\|_{\rho-\delta} \leqslant \|a\|_\rho \delta^{-\nu}.$$

Замечание. Таким образом, переход от a к h ухудшает свойства функции не сильнее, чем ν-кратное дифференцирование. (Полезно отметить, что $\left\|\frac{d^\nu f}{dz^\nu}\right\|_{\rho-\delta} \leqslant C\|f\|_\rho \delta^{-\nu}$, согласно оценке Коши коэффициентов Тейлора.) Если пренебречь ухудшением функции, вызванным ν-кратным дифференцированием, то можно сказать, что решение h гомологического уравнения того же порядка малости, что и его правая часть a.

Доказательство. 1°. По лемме 1, $|a_k| \leqslant Me^{-|k|\rho}$, если $\|a\|_\rho \leqslant M$.

2°. Поскольку μ типа (K, σ), $|h_k| \leqslant \frac{2Me^{-|k|\rho}|k|^{1+\sigma}}{K}$.

3°. Функция $x^m e^{-\alpha x}$, $x \geqslant 0$, имеет максимум в точке $x = m/\alpha$. Поэтому $x^m e^{-\alpha x} \leqslant C\alpha^{-m}$, $C = \left(\frac{m}{e}\right)^m$, при любых $\alpha > 0$, $x > 0$. Следовательно, для любого $\alpha > 0$

$$|k|^{1+\sigma} e^{-\alpha|k|} \leqslant C\alpha^{-m}, \quad m = 1 + \sigma.$$

4°. Итак, $|h_k| \leqslant Me^{-|k|(\rho-\alpha)} 2CK^{-1}\alpha^{-m}$. По лемме 2, $\|h\|_{\rho-\delta} \leqslant DM$, где $D = \frac{8C}{K\alpha^m(\delta-\alpha)}$. Возьмем $\alpha = \frac{\delta}{2}$. Число D не превосходит $\delta^{-\nu}$, если ν достаточно велико (ибо $\delta < 1/2$). □

Ж. Построение последовательных приближений

Решим гомологическое уравнение с правой частью $\widetilde{a} = a - a_0$ (a_0 — среднее значение функции a). Обозначим решение через h^0. Определим отобра-

жение H_0 формулой $H_0 z = z + h^0(z)$. Построим отображение $A_1 = H_0^{-1} \circ A \circ H_0$. Определим функцию a^1 соотношением $A_1 z = z + 2\pi\mu + a^1(z)$.

Иными словами, мы ввели на окружности новую координату z_1 (где $z = H_0(z_1)$) и записали отображение A через новую координату. Получилось отображение $z_1 \mapsto A_1 z_1$, отличающееся от поворота на угол $2\pi\mu$ на «невязку» a^1.

Следующее приближение строится точно таким же образом, отправляясь от A_1 вместо A. Мы строим h^1 и замену H_1, превращающую A_1 в $A_2 = H_1^{-1} \circ A_1 \circ H_1$.

Возникает последовательность замен H_n. Рассмотрим замену $\mathscr{H}_n = H_0 \circ H_1 \circ \ldots \circ H_{n-1}$. Имеем $A_n = \mathscr{H}_n^{-1} \circ A \circ \mathscr{H}_n$.

Оказывается, *последовательность $\mathscr{H}_n$ сходится, если μ — число типа (K, σ) и если $\|a\|_\rho$ достаточно мала*. Предельная замена $\mathscr{H}$ превращает исходное отображение в $\mathscr{H}^{-1} \circ A \circ \mathscr{H} = \lim A_n =$ поворот на угол $2\pi\mu$.

3. Оценка невязки после одного приближения

Лемма 5. *Существуют постоянные $\kappa, \lambda > 0$, зависящие лишь от K и σ, такие что для любого δ из интервала $(0, \rho)$, где $\rho < 1/2$,*

$$\|a\|_\rho \leqslant \delta^\kappa \Rightarrow \|a^1\|_{\rho-\delta} \leqslant \|a\|_\rho^2 \delta^{-\lambda}.$$

Замечание. Это означает, что оставшаяся после первой замены переменной невязка a^1 имеет второй порядок малости по сравнению с исходным отличием от поворота, a (с точностью до ухудшения типа λ-кратного дифференцирования функции). Таким образом, в приведенной схеме последовательных приближений ошибка каждого следующего приближения порядка квадрата ошибки предыдущего. После n приближений получим ошибку порядка ε^{2^n}, где ε — ошибка исходного, нулевого приближения.

Такая сходимость, характерная для ньютоновского метода касательных (рис. 82), позволяет парализовать влияние появляющихся на каждом шагу малых знаменателей (т. е. влияние ухудшающего множителя $\delta^{-\lambda}$); этот метод борьбы с малыми знаменателями изобретен А. Н. Колмогоровым (1954).

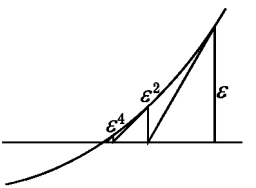


Рис. 82

Доказательство.

1°. Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ (или $\mathbb{R}^n$), $h\colon \Omega \to \mathbb{C}^n$ (соответственно $\mathbb{R}^n$) — гладкое отображение, причем $\|h_*\| = \sup_{x \in \Omega} \|h_*(x)\| < 1$. Тогда *отображение H, переводящее x в $x + h(x)$, является диффеоморфизмом Ω на $H\Omega$.*

▷ Собственные числа $H_*(x)$ отличны от 0, поэтому H локальный диффеоморфизм. Ввиду условия $|h_*| < q < 1$ и ввиду выпуклости Ω, отображение

h сжимающее. Следовательно, разность между сдвигами любых двух разных точек при отображении H меньше расстояния между этими точками, поэтому их образы различны, т. е. H взаимно однозначно. ◁

2°. Покажем, что *если x достаточно велико, то отображение A_1 аналитично в полосе* $\Pi_{\rho-\delta}$.

▷ Пусть $\|a\|_\rho \leqslant M = \delta^\kappa$. Тогда $|a_0| \leqslant M$, $\|\widetilde{a}\|_\rho \leqslant 2M$. По теореме п. Е, $\|h^0\|_{\rho-\alpha} \leqslant 2M\alpha^{-\nu}$. Следовательно, $\left\|\frac{dh^0}{dz}\right\|_{\rho-2\alpha} \leqslant 2M\alpha^{-(\nu+1)}$.

Выберем $\alpha = \frac{\delta}{8}$. Тогда, если κ достаточно велико, мы получим из предыдущих неравенств $\|a\|_\rho < \alpha$, $\|h^0\|_{\rho-\alpha} < \alpha$, $\left\|\frac{dh^0}{dz}\right\|_{\rho-2\alpha} < \alpha$.

Следовательно, согласно 1°, H_1 — диффеоморфизм полосы $\Pi_{\rho-2\alpha}$, и образ содержит полосу $\Pi_{\rho-3\alpha}$.

Теперь $H_0\Pi_{\rho-\delta} \subset \Pi_{\rho-\delta+\alpha}$, $A \circ H_0\Pi_{\rho-\delta} \subset \Pi_{\rho-\delta+2\alpha} \subset \Pi_{\rho-3\alpha}$. Следовательно, диффеоморфизм H_0^{-1} определен на $A \circ H_0\Pi_{\rho-\delta}$. Значит, отображение $A_1 = H_0^{-1} \circ A \circ H_0$ аналитично в $\Pi_{\rho-\delta}$ и является там диффеоморфизмом. ◁

3°. *Оценим невязку a^1.*

▷ Коммутативная диаграмма, определяющая a^1, дает

$$z + 2\pi\mu + a^1(z) + h^0(z + 2\pi\mu + a^1(z)) \equiv z + h^0(z) + 2\pi\mu + a(z + h^0(z)).$$

Учитывая гомологическое уравнение, получаем

$$a^1(z) = [a(z + h^0(z)) - a(z)] - [h^0(z + 2\pi\mu + a^1(z)) - h^0(z + 2\pi\mu)] + a_0.$$

Первая квадратная скобка оценивается по теореме о среднем и неравенству Коши. На основании 2° получаем

$$\|a(z + h^0(z)) - a(z)\|_{\rho-\delta} \leqslant \frac{M}{\delta}\|h^0\|_{\rho-\delta} \leqslant M^2\delta^{-u},$$

где постоянная u зависит лишь от ν, т. е. лишь от K и σ. Вторая квадратная скобка оценивается аналогично:

$$\|[\quad]\|_{\rho-\delta} \leqslant 2M\alpha^{-(\nu+1)}\|a^1\|_{\rho-\delta} \leqslant M\delta^{-u_1}\|a^1\|_{\rho-\delta}.$$

Итак,

$$\|a^1\|_{\rho-\delta}(1 - M\delta^{-u_1}) \leqslant |a_0| + M^2\delta^{-u}. \quad ◁$$

4°. *Оценим теперь величину $|a_0|$*, пользуясь тем, что число вращения преобразования A, а значит и A_1, равно $2\pi\mu$.

▷ Из этого следует, что a^1 обращается в нуль в некоторой вещественной точке z_0. Подставим в формулу для $a^1(z)$ значение z_0. Мы получим

$$a_0 = a(z_0) - a(z_0 + h^0(z_0))$$

и, следовательно, $|a_0| \leqslant M^2\delta^{-u}$ (см. 3°). ◁

5°. Из оценок 3° и 4° следует, что $\|a^1\|_{\rho-\delta} \leqslant 4M^2\delta^{-u}$. □

И. Сходимость системы приближений

1°. Построенное на n-м шагу отображение A_n мы будем рассматривать в полосе радиуса ρ_n, уменьшающегося с каждым приближением: $\rho_0 = \rho$, $\rho_n = \rho_{n-1} - \delta_{n-1}$.

Последовательность чисел δ_n мы выберем убывающей следующим образом:

$$\delta_n = \delta_{n-1}^{3/2}, \quad \delta_0 < \frac{1}{2}.$$

Тогда при достаточно малом δ_0 будет $\sum \delta_n < \frac{\rho}{2}$.

2°. Образуем последовательность чисел M_n, полагая

$$M_n = \delta_n^N.$$

Достаточно большое число N (зависящее лишь от K и σ) будет окончательно выбрано ниже. Заметим, что $M_n = M_{n-1}^{3/2}$.

3°. *Предположим, что* $\|a\|_\rho \leqslant M_0$. *Докажем, что* $\|a^n\|_{\rho_n} \leqslant M_n$.

Доказательство. Согласно предложению 3, если $N > \kappa$, то

$$\|a^1\|_{\rho_1} \leqslant M_0^2 \delta_0^{-\lambda} = \delta_0^{2N-\lambda}.$$

Но $\delta_0^{2N-\lambda} < \delta_1^N = \delta_0^{3N/2}$, если $N > 2\lambda$. Выберем N, большее чем 2λ и κ. Тогда получим

$$\|a^1\|_{\rho_1} \leqslant \delta_1^N = M_1.$$

Переход от a^{n-1} к a^n аналогичен. □

4°. *Докажем сходимость произведений* $\mathscr{H}_n = H_0 \circ \ldots \circ H_{n-1}$ в $\Pi_{\rho/2}$.

Диффеоморфизм H_0 аналитичен в Π_{ρ_1} и удовлетворяет неравенствам $\|h^0\|_{\rho_1} \leqslant \delta_0$, $\left\|\frac{dh^0}{dz}\right\|_{\rho_1} \leqslant \delta_0$ (см. 2° п. 3).

Точно также для H_{n-1} получается $\|h^{n-1}\|_{\rho_n} \leqslant \delta_{n-1}$, $\left\|\frac{dh^{n-1}}{dz}\right\|_{\rho_n} \leqslant \delta_{n-1}$. Следовательно, $\mathscr{H}_n$ аналитично в Π_{ρ_n} и имеет производную, ограниченную сверху и снизу величинами $C = \prod(1+\delta_k)$, $c = \prod(1-\delta_k)$.

Отсюда следует, что $\mathscr{H}_n$ диффеоморфизм Π_{ρ_n} и что в $\Pi_{\rho/2}$ последовательность $\mathscr{H}_n$ сходится. Действительно,

$$\|\mathscr{H}_n - \mathscr{H}_{n+1}\|_{\rho/2} \leqslant C\|h^n\|_{\rho/2} \leqslant C\delta_n.$$

Обозначим через H предел последовательности $\mathscr{H}_n$. Переходя к пределу в соотношении $A \circ \mathscr{H}_n = \mathscr{H}_n \circ A_n$, получаем $A \circ \mathscr{H} = \mathscr{H} \circ \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — поворот на угол $2\pi\mu$. Теорема доказана. □

К. Замечания

1°. Ю. Мозер заметил, что, комбинируя описанные приближения со сглаживанием Нэша, можно доказать аналогичную теорему в случае конечной

гладкости (см. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения // УМН. 1968. Т. 23, № 4. С. 179—238).

В первых работах Мозера требовались сотни производных. В дальнейшем усилиями Мозера и Рюссмана число производных было снижено (*Rüssmann H.* Kleine Nenner II: Bemerkungen zur Newtonischen Methode // Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Klasse. 1972. Bd. 1. S. 1—10).

2°. В многомерном случае число вращения не определено. Тем не менее в семействе отображений $y \mapsto y + \alpha + a(y)$ с малым a, $y \in T^n$, для большинства α отображение гладко эквивалентно сдвигу $y \mapsto y + 2\pi\mu$. В частности, для аналитического семейства $y \mapsto y + \alpha + \varepsilon a_1(y) + \varepsilon^2 a_2(y) + \ldots$ при почти каждом μ существует аналитическая функция $\alpha(\varepsilon) = 2\pi\mu + \varepsilon\mu_1 + \ldots$, такая что отображение $y \mapsto y + \alpha(\varepsilon) + \varepsilon a_1(y) + \ldots$ превращается в $y \mapsto y + 2\pi\mu$ после аналитической замены $y = z + \varepsilon h_1(z) + \ldots$

Коэффициенты $h_1, \ldots$ можно найти, приравнивая члены с одинаковой степенью ε. Однако доказать сходимость так полученных рядов по ε удается лишь косвенно, с помощью ньютоновских приближений.

3°. Кажется правдоподобным, что аналитический диффеоморфизм окружности аналитически эквивалентен иррациональному повороту тогда и только тогда, когда неподвижные точки степеней диффеоморфизма не накапливаются к вещественной оси. Можно также думать, что для некоторых иррациональных μ, ненормально хорошо приближаемых рациональными, функция $\alpha(\varepsilon)$, описанная в 2°, не является даже гладкой (даже в одномерном случае).

§ 13. Введение в гиперболическую теорию

В этом параграфе доказывается теорема Аносова о структурной устойчивости автоморфизма тора и теорема Гробмана — Хартмана о структурной устойчивости седла.

А. Простейший пример: линейный автоморфизм тора

Дифференциальные уравнения с многомерными фазовыми пространствами определяют большой класс структурно устойчивых си-

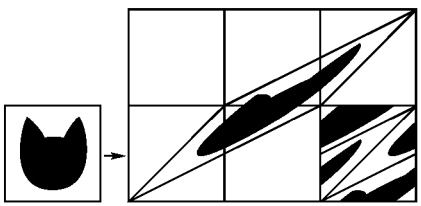


Рис. 83

стем, в которых каждая фазовая кривая расположена среди соседних таким же образом, как положение равновесия типа седло среди соседних гипербол. Начнем с простейшего примера (рис. 83).

Рассмотрим автоморфизм A тора T^2, который задается целочисленным унимодулярным (имеющим определитель 1) линейным преобразованием $\widehat{A}$ плоскости с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решетка $2\pi\mathbb{Z}^2$ переходит под действием $\widehat{A}$ в себя. Поэтому эквивалентные (сравнимые по модулю 2π) точки плоскости $\widehat{A}$ переводит в эквивалентные. Следовательно, $\widehat{A}$ определяет отображение A тора на себя. Обратная матрица $\widehat{A}^{-1}$ тоже целочисленная, так как $\det\widehat{A}=1$. Поэтому A является диффеоморфизмом тора на себя. Кроме того, A является автоморфизмом группы $T^2=\mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$.

Б. Свойства автоморфизма тора

Конечное множество точек называется *циклом отображения* A, если A переставляет их циклически.

Теорема 4. *Автоморфизм тора A имеет счетное число циклов. Все точки, обе координаты которых — рациональные кратные 2π, и только они, являются точками циклов автоморфизма A.*

Доказательство. 1°. Зафиксируем целое число N, тогда точки тора, координаты которых — рациональные кратные 2π со знаменателем N, образуют конечное множество. Преобразование A переводит это множество в себя. Следовательно, все точки этого множества принадлежат циклам.

2°. Пусть $2\pi\xi$ — точка цикла порядка $n>1$. Тогда $\widehat{A}^n\xi=\xi+m$, где m — целочисленный вектор. Полученное линейное уравнение относительно ξ имеет отличный от нуля определитель. Поэтому компоненты ξ рациональны. □

Теорема 5. *Итерации автоморфизма A равномерно размазывают по тору произвольную область F: для любой области G*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{mes}(A^nF)\cap G}{\operatorname{mes}F}=\frac{\operatorname{mes}G}{\operatorname{mes}T^2}.$$

Это свойство автоморфизма A называется *перемешиванием*; оно имеет место для любых измеримых множеств F, G.

Доказательство. В терминах функций на торе это соотношение можно переписать в виде

$$\lim_{n\to\infty}(A^{n*}f, g) = \frac{(f,1)(1,g)}{(1,1)},$$

где $(u,v)=\int u(x)\bar{v}(x)\,dx$, $(A^{n*}f)(x)=f(A^n x)$.

Пусть теперь f — экспонента: $f=e^{i(p,x)}$. Тогда $A^{n*}f$ также экспонента с волновым вектором $p'=\widehat{A}^{n'}p$. Если $p\neq 0$, то орбита точки p под действием операторов $\widehat{A}^{n'}$ бесконечна. Поэтому для любой экспоненты $g=e^{i(q,x)}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}(A^{n*}f, g)=0$. Аппроксимируя f и g в среднем квадратичном суммами экспонент, получаем требуемое. □

Более поучительное (хотя и более сложное при аккуратном проведении) доказательство перемешивания получается следующим образом.

Теорема 6. *На торе существуют два поля направлений, инвариантных относительно автоморфизма A. Интегральные кривые каждого из этих полей направлений всюду плотны на торе. Автоморфизм A переводит интегральные кривые первого поля в интегральные кривые того же поля с растяжением в $\lambda>1$ раз, а второго — со сжатием в λ раз* (рис. 84).

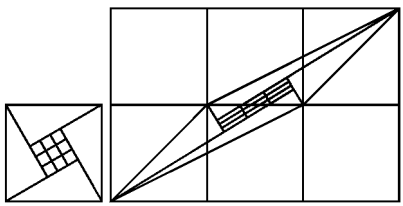


Рис. 84

Доказательство. Рассмотрим собственные числа преобразования $\widehat{A}$, $\lambda_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Очевидно, $\lambda_1>1>\lambda_2$ и числа λ_1, λ_2 иррациональны. Рассмотрим на плоскости семейство всех прямых, параллельных первому собственному вектору преобразования $\widehat{A}$. Поскольку λ_1 иррационально, компоненты собственного вектора несоизмеримы. Поэтому на торе прямые семейства определяют всюду плотные обмотки. Преобразование плоскости $\widehat{A}$ переводит это се-

мейство прямых в себя, с растяжением в $\lambda_1 > 1$ раз. Поэтому преобразование тора A переводит в себя семейство обмоток, с таким же растяжением. Это семейство называется *расширяющимся слоением* преобразования A.

Второе собственное направление определяет, таким же образом, *сжимающееся слоение*. □

Рассмотрим теперь образ плоской области $\widehat{F}$ под действием преобразования плоскости A^n. Это преобразование представляет собой гиперболический поворот: растяжение в λ_1^n раз по первому собственному направлению и сжатие в λ_1^n раз по второму. Поэтому образ области $\widehat{F}$ представляет собой при больших n узкую длинную полосу, вытянутую вдоль первого собственного направления. Следовательно, на торе образ области F под действием преобразования A^n представляет собой длинную узкую полосу, близкую к длинному отрезку фазовой кривой уравнения $\dot{x} = \omega$ с нерезонансным вектором ω. Но эта кривая равномерно распределена по тору. Отсюда вытекает, что при увеличении n образы $A^n F$ пересекут любую область G на торе; немного потрудившись, можно вывести из этих соображений и свойство перемешивания.

В. Структурная устойчивость автоморфизма тора

Удивительный факт, открытый в начале 60-х годов и явившийся одним из важнейших достижений в теории дифференциальных уравнений за последние десятилетия, состоит в том, что рассматривавшийся выше автоморфизм тора структурно устойчив в классе всех диффеоморфизмов тора. В частности, всякий диффеоморфизм, достаточно близкий к A, имеет счетное число циклов и всюду плотное множество периодических точек.

Теорема (Аносов)**.** *Автоморфизм тора* $A\colon T^2 \to T^2$, *заданный матрицей* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *структурно устойчив в* C^1 *топологии. Иными словами, каждый диффеоморфизм* B, *достаточно близкий к* A *вместе с производной, сопряжен с* A *при помощи некоторого гомеоморфизма* H; $B = H^{-1} \circ A \circ H$.

Замечание. Гомеоморфизм H можно выбрать сколь угодно близким к тождественному преобразованию, если B достаточно близко к A, но нельзя, вообще говоря, сделать гладким.

Теорема Аносова показывает, что в случае систем с многомерным фазовым пространством возможно и сохраняется при малых

шевелениях поведение фазовых кривых, не сводящееся к притяжению к устойчивым положениям равновесия и циклам, как это было в случае векторных полей на двумерной сфере или торе. Физический смысл такого, более сложного, чем автоколебания, поведения динамических систем мы обсудим позже. Доказательство теоремы Аносова дано в следующих пунктах Г—Ж.

Г. Гомологическое уравнение

Мы ищем гомеоморфизм H, $H(x)=x+h(x)$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow{\scriptstyle H} & & \uparrow{\scriptstyle H} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2, \end{array}$$

где $B(x)=Ax+f(x)$; функции f и h имеют по x период 2π.

Из диаграммы получаем нелинейное функциональное уравнение относительно h:

$$h(Ax)-Ah(x)=f(x+h(x)).$$

Мы считаем функцию f малой, предполагаем, что h окажется малой того же порядка и поэтому заменяем правую часть на $f(x)$, отбрасывая «малую второго порядка». Получаем линеаризованное уравнение

$$h(Ax)-Ah(x)=f(x).$$

Это уравнение называется *гомологическим уравнением*.

Д. Решение гомологического уравнения

Левая часть гомологического уравнения линейно зависит от h. Обозначим линейный оператор, переводящий h в левую часть гомологического уравнения, через L. Решение гомологического уравнения имеет вид $h=L^{-1}f$. Нужно лишь доказать, что оператор L обратим.

Лемма 1. *Пространство векторных полей на торе распадается в прямую сумму двух подпространств, инвариантных относительно оператора L.*

Доказательство. Пространства векторных полей, параллельных первому и второму собственному направлению оператора A, инвариантны относительно преобразования, и каждое векторное поле

единственным образом представляется в виде суммы двух полей, направленных вдоль собственных направлений. □

Пусть $f = f_1 e_1 + f_2 e_2$, $h = h_1 e_1 + h_2 e_2$ — разложения полей f и h. Тогда гомологическое уравнение принимает вид системы

$$h_1(Ax) - \lambda_1 h_1(x) = f_1(x),$$
$$h_2(Ax) - \lambda_2 h_2(x) = f_2(x).$$

Здесь $\lambda_1 = \lambda_2^{-1} > 1 > \lambda_2 = \lambda$ — собственные числа.

Рассмотрим оператор сдвига аргумента на A в пространстве непрерывных функций на торе. Обозначим его через S. Имеем

$$(Sg)(x) = g(Ax), \quad \|S\| = 1, \quad \|S^{-1}\| = 1.$$

Гомологическое уравнение записывается теперь в виде

$$(S - \lambda_i E)h_i = f_i, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $i = 1$. Тогда

$$(S - \lambda_1 E)^{-1} = -\lambda(E + \lambda S + \lambda^2 S^2 + \ldots).$$

Поскольку $\lambda < 1$ и $\|S\| = 1$, обратный оператор существует и

$$\|(S - \lambda_1 E)^{-1}\| \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Аналогично

$$(S - \lambda_2 E)^{-1} = S^{-1}(E - \lambda S^{-1})^{-1} = S^{-1}(E + \lambda S^{-1} + \lambda^2 S^{-2} + \ldots),$$
$$\|(S - \lambda_2 E)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\lambda}.$$

Таким образом, оператор L^{-1} существует, причем $\|L^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\lambda}$. Гомологическое уравнение решено.

Е. Построение отображения H

Нелинейное функциональное уравнение из пункта Г решается теперь простейшим методом сжатых отображений. Положим

$$\Phi[h](x) = f(x + h(x)) - f(x).$$

Наше функциональное уравнение имеет вид

$$Lh = \Phi h + f, \quad h = L^{-1}\Phi h + L^{-1} f.$$

Лемма 2. *Если норма f в C^1 достаточно мала, то оператор $L^{-1}\Phi$ в пространстве C^0 сжимающий.*

Доказательство. Достаточно проверить, что нелинейный оператор Φ удовлетворяет условию Липшица с малой константой. Действительно, согласно Д,

$$\|L^{-1}\Phi h^1 - L^{-1}\Phi h^2\| \leqslant \frac{\|\Phi h^1 - \Phi h^2\|}{1-\lambda}.$$

Но $\|\Phi h^1 - \Phi h^2\| = \max|f(x+h^1(x)) - f(x+h^2(x))| \leqslant \|f\|_{C^1}\|h^1 - h^2\|$.

Итак, оператор $L^{-1}\Phi$ сжимающий, если $\|f\|_{C^1} < 1-\lambda$. □

При этом условии наше уравнение решено и H построено.

Ж. Свойства отображения H

Докажем, что H — гомеоморфизм тора.

Доказательство. Если h мало в метрике C^1, то отображение $H = E + h$ — гомеоморфизм. Мы знаем лишь, что h мало в метрике C^0. Тем не менее, из $H(x) = H(y)$, ввиду гиперболических свойств преобразования плоскости $\widehat{A}$, следует, что $x = y$.

Действительно, на плоскости $\widehat{B}\widehat{H} = \widehat{H}A$. Поэтому $\widehat{H}\widehat{A}\hat{x} = \widehat{H}\widehat{A}\hat{y}$, и вообще $\widehat{H}\widehat{A}^n\hat{x} = \widehat{H}\widehat{A}^n\hat{y}$. Но ввиду гиперболичности $\widehat{A}$, расстояние между точками $\widehat{A}^n\hat{x}$ и $\widehat{A}^n\hat{y}$ стремится к ∞ либо при $n \to +\infty$, либо при $n \to -\infty$. Это противоречит ограниченности h. Стало быть, $\hat{x} = \hat{y}$ и, значит, на торе $x = y$.

Докажем, что образ отображения H есть весь тор. Действительно, образ круга достаточно большого радиуса на плоскости под действием $\widehat{H}$ содержит круг радиуса 2π (так как h ограничено). Поэтому $HT^2 = T^2$. Итак, H — гомеоморфизм тора. При этом $BH = HA$. □

Теорема п. В доказана.

З. Теорема о структурной устойчивости седла

Предыдущие рассуждения доказывают также следующее предложение.

Теорема (Гробмана — Хартмана). *Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное преобразование без собственных чисел, равных 1 по модулю. Тогда всякий локальный диффеоморфизм $B\colon (\mathbb{R}^n, O) \to (\mathbb{R}^n, O)$ с линейной частью A в неподвижной точке O топологически эквивалентен A в достаточно малой окрестности точки O.*

Доказательство. Локальный диффеоморфизм B совпадает в окрестности точки O с глобальным диффеоморфизмом $C\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенным так: пусть φ — гладкая функция, равная 0 вне 1-окрестности точки O и равная 1 в малой окрестности точки O. Тогда

C совпадает с A вне ε-окрестности, где φ_ε отлично от O, а внутри этой окрестности $C = A + \varphi_\varepsilon \cdot (B - A)$; здесь $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Предыдущее доказательство теоремы Аносова доказывает, что всякий C^1-близкий к A диффеоморфизм $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ топологически эквивалентен A. Но C^1-малости разности $C - A$ можно добиться подходящим выбором $\varepsilon > 0$, ибо в ε-окрестности нуля

$$|B - A| \leqslant c\varepsilon^2, \quad |(B - A)'| \leqslant c\varepsilon.$$

Итак, C топологически эквивалентно A.

Но C, как и A, имеет лишь одну неподвижную точку O. Следовательно, гомеоморфизм, переводящий A в C, оставляет O на месте. □

§ 14. У-системы

В этом параграфе определяются У-диффеоморфизмы и У-потоки и обсуждаются их применения в теории геодезических потоков на многообразиях отрицательной кривизны и в других вопросах.

А. Определение У-диффеоморфизма

Анализ рассмотренного выше автоморфизма тора показывает, что существенны для предыдущих рассуждений только сжимающееся и расширяющееся слоение; поэтому можно ввести общее определение гиперболического диффеоморфизма, не предполагая более, что M — тор.

Пусть $A\colon M \to M$ — диффеоморфизм компактного многообразия. Предположим, что

1) касательное пространство к M в каждой точке разложено в прямую сумму двух подпространств:

$$T_x M = X_x \oplus Y_x;$$

2) поля плоскостей $X = \{X_x\}$ и $Y = \{Y_x\}$ непрерывны и инвариантны относительно диффеоморфизма A;

3) для некоторой римановой метрики диффеоморфизм A сжимает плоскости первого поля и растягивает плоскости второго: существует число $\lambda < 1$, такое что для любой точки x из M

$$\|A_*\xi\| \leqslant \lambda\|\xi\| \quad \forall \xi \in X_x, \quad \|A_*\eta\| \geqslant \lambda^{-1}\|\eta\| \quad \forall \eta \in Y_x.$$

Тогда говорят, что A есть У-*система*.

Пример. Пусть $M = T^2$ — тор,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

— его автоморфизм. Тогда A есть У-система.

Действительно, собственные направления соответствующего автоморфизма плоскости определяют на торе инвариантные поля направлений: сжимающееся и растягивающееся.

Замечание 1. Вместо выписанных неравенств можно требовать на вид более слабого условия

$$\|A_*^n|_X\| \leqslant c\lambda^n, \quad n > 0; \quad \|A_*^n|_Y\| \leqslant c\lambda^{-n}, \quad n < 0.$$

Если это условие выполнено для одной метрики, то оно (возможно, с другим c) выполняется и для любой другой. Из этого условия вытекают и приведенные выше неравенства (возможно, для измененной метрики).

2. В определении не требуется *гладкости* полей плоскостей X и Y. Диффеоморфизм тора, близкий к автоморфизму

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

является всегда У-системой, однако его сжимающееся и растягивающееся поле направлений могут не принадлежать классу C^2 даже в случае, когда диффеоморфизм аналитический (в многомерном случае поля плоскостей могут не принадлежать даже классу C^1).

3. Определение и термин У-система предложены Д. В. Аносовым. Название происходит от первой буквы слова *условие*. Аносов назвал условия 1—3 условиями У и предлагал, чтобы по-английски их называли conditions C; он предложил также называть У-диффеоморфизмы У-каскадами. Смейл ввел для них же термин «диффеоморфизмы Аносова».

Б. Свойства У-диффеоморфизмов

Теорема (Аносов). *Каждый У-диффеоморфизм структурно устойчив.*

Доказательство проводится тем же методом, как в § 13 для автоморфизмов тора; детали можно найти, например, в статье Дж. Мазера (*Мазер Д.* Диффеоморфизмы Аносова // Математика. 1969. Т. 13, № 2. С. 142—144).

Первоначальное доказательство было связано со следующим свойством У-диффеоморфизмов.

Теорема. *Сжимающееся и расширяющееся поля плоскостей У-диффеоморфизма вполне интегрируемы.*

Иными словами, существуют сжимающееся и расширяющееся слоения*, касательные плоскости к которым образуют сжимающееся и расширяющееся поля плоскостей. Заметим, что здесь нельзя пользоваться теоремой Фробениуса, так как наши поля негладкие.

Доказательство основано на том, что при применении У-диффеоморфизма угол между плоскостями, не слишком далекими от плоскостей расширяющегося поля, уменьшается: расширяющееся поле является притягивающей неподвижной точкой в функциональном пространстве полей плоскостей при действии У-диффеоморфизма на это пространство.

Чтобы построить расширяющееся слоение, можно разбить многообразие на достаточно малые области и взять в каждой из них произвольное слоение, слои которого имеют размерность плоскостей расширяющегося поля и образуют с этими плоскостями не слишком большой угол. Применим к этим слоениям У-диффеоморфизм и его итерации. Оказывается, полученная последовательность кусочных слоений сходится к настоящему расширяющемуся слоению.

Замечание. Частным случаем этой конструкции является построение входящего и выходящего инвариантных многообразий неподвижной точки диффеоморфизма в случае, когда модули всех собственных чисел линейной части диффеоморфизма отличны от единицы. Для построения выходящего многообразия можно применять итерации диффеоморфизма к любому многообразию, касающемуся выходящего инвариантного подпространства линейной части диффеоморфизма.

Описанная конструкция позволяет построить сжимающееся и расширяющееся слоения не только для данного У-диффеоморфизма, но сразу и для близких к нему У-диффеоморфизмов. Таким образом, свойство быть У-диффеоморфизмом сохраняется при малом (с производными) шевелении диффеоморфизма. Кроме того, из конструк-

* Слоением на n-мерном многообразии называется его разбиение на подмногообразия (слои) одинаковой размерности k, удовлетворяющее следующему условию: у каждой точки многообразия существует окрестность, разбиение которой на связные компоненты слоев диффеоморфно разбиению n-мерного куба на параллельные k-мерные плоскости.

ции видно, что сжимающееся и расширяющееся слоения (или лучше поля плоскостей) непрерывно зависят от диффеоморфизма.

После того как сжимающееся и расширяющееся слоение для исходного и для возмущенного диффеоморфизмов построены, доказательство теоремы Аносова уже не сложно.

Действительно, рассмотрим какую-либо фазовую точку и последовательность ее образов при исходном диффеоморфизме. Рассмотрим систему ε-окрестностей точек-образов. Число ε выбирается малым и по нему подбирается расстояние от возмущенного диффеоморфизма до невозмущенного. Если это расстояние достаточно мало, то каждая из ε-окрестностей расслоена на связные компоненты слоев сжимающегося расслоения как для исходного, так и для возмущенного диффеоморфизма.

Мы будем называть эти компоненты вертикальными *дисками*. Рассмотрим вертикальный диск исходного слоения, проходящий через исходную точку, и его образы под действием положительных степеней исходного У-диффеоморфизма.

Существует единственный вертикальный диск возмущенного слоения такой, что его образы под действием положительных степеней возмущенного диффеоморфизма остаются внутри описанных выше ε-окрестностей.

Действительно, исходный У-диффеоморфизм растягивает в горизонтальном направлении. Поэтому возмущенный диффеоморфизм также растягивает в горизонтальном направлении.

Обозначим описанные выше окрестности через U_n, их расслоения на возмущенные вертикальные диски через $U_n \to B_n$, возмущенный диффеоморфизм — через A. Поскольку в горизонтальном направлении A растягивает, отображение A^{-1} индуцирует *сжимающие* отображения $a_n : B_n \to B_{n-1}$. Искомая точка $b_0 \in B_0$ определяется теперь как

$$b_0 = \bigcap_{n\to\infty} a_1 a_2 \ldots a_n B_n.$$

Точно так же существует единственный горизонтальный возмущенный диск, образы которого при применении отрицательных степеней нашего диффеоморфизма не выходят из окрестностей с отрицательными номерами.

Пересечение построенных возмущенных дисков — горизонтального и вертикального — определяет ту точку, которую сопрягающий гомеоморфизм сопоставляет исходной фазовой точке.

Проверка того, что описанная конструкция действительно определяет гомеоморфизм, сопрягающий невозмущенный У-диффеоморфизм с возмущенным, не представляет особых трудностей после всего, сказанного выше.

У-диффеоморфизмы с инвариантной мерой, заданной положительной плотностью, имеют всюду плотное множество периодических точек (циклов). Весьма полное исследование эргодических свойств У-диффеоморфизмов с инвариантной мерой (перемешивание и т. д.) проведено Д. В. Аносовым и Я. Г. Синаем (см. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1967. Т. 90. С. 3—209).

В. У-потоки

При переходе к однопараметрическим группам диффеоморфизмов определение гиперболичности следует несколько изменить, так как вдоль фазовых кривых не происходит ни сжатия, ни растяжения.

Рассмотрим интегральные кривые в случае седла $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = y$ (рис. 85). Ось t является пересечением двух плоскостей, составленных из интегральных кривых, приближающихся к ней при $t \to +\infty$ (плоскость (x, t)) и при $t \to -\infty$ (плоскость (y, t)); остальные интегральные кривые удаляются от оси как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

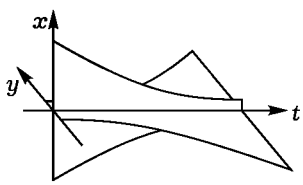


Рис. 85

Однопараметрическая группа диффеоморфизмов называется У-*потоком*, если фазовые кривые вблизи любой данной фазовой кривой расположены так, как интегральные кривые в приведенном выше примере. Формальное определение состоит в следующем.

Определение. Пусть M — компактное гладкое многообразие, v — векторное поле без особых точек на M, $\{g^t\}$ — соответствующий фазовый поток. Предположим, что

1) касательное пространство к M в каждой точке представлено в виде прямой суммы трех подпространств

$$T_x M = X_x \oplus Y_x \oplus Z_x;$$

2) поля плоскостей X, Y, Z непрерывны и инвариантны относительно фазового потока;

3) поле Z порождено полем фазовой скорости;

4) для некоторых положительных констант c, λ и некоторой римановой метрики на M

$$\|g_*^t|_X\| \leqslant ce^{-\lambda t} \quad \text{при } t > 0, \quad \|g_*^t|_Y\| \leqslant ce^{\lambda t} \quad \text{при } t < 0.$$

Тогда фазовый поток называется У-*потоком*, а уравнение $\dot{x} = v(x)$ — У-*системой*.

Пример. Рассмотрим трехмерное многообразие M, которое получается из прямого произведения тора на отрезок $[0, 1]$ склейкой торцевых торов по У-автоморфизму: $(x, 1)$ склеивается с $(Ax, 0)$, где $x \in T^2$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим векторное поле, направленное вдоль сомножителя $[0, 1]$ в прямом произведении $T^2 \times [0, 1]$. Это поле после склейки M из прямого произведения превращается в гладкое (почему?) поле v на M.

Полученное поле v определяет У-поток на M.

Теорема. *Всякий У-поток структурно устойчив.*

Доказывается таким же методом, как для У-диффеоморфизмов (см. цитированные выше работы). □

Всякий У-поток имеет бесконечное множество замкнутых фазовых кривых. Таким образом, даже ограничиваясь структурно устойчивыми векторными полями, нельзя надеяться получить в многомерном случае такую же простую картину с конечным числом положений равновесия и циклов, как в случае систем на двумерной сфере.

В 1961 г. С. Смейл построил первые примеры структурно устойчивых систем с бесконечным числом циклов. В этих примерах экспоненциальное разбегание имело место не на всем фазовом пространстве, а на некотором замкнутом его подмножестве. Такие множества теперь называют гиперболическими. Общая теория гиперболических множеств была построена позже и под влиянием теории У-систем.

Появление подобных примеров привело к резкому изменению представлений о поведении фазовых кривых многомерных систем. Некоторые специалисты поспешили объявить эти результаты не имеющими реального значения, так как подобные системы, хотя и структурно устойчивы, «не могут описывать никаких реальных,

физических процессов» ввиду неустойчивости отдельных траекторий. Однако имеются весьма важные реальные случаи, когда, повидимому, именно системы с экспоненциальным разбиением траекторий лучше всего описывают действительность. Речь идет о математическом описании явлений типа турбулентности и о движении соударяющихся частиц (скажем, в моделях газа из твердых сфер). Более простой, но вполне реальной, является задача о движении по геодезическим на многообразиях отрицательной кривизны. Мы разберем сейчас самый простой вариант этой задачи — задачу о геодезических на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Для этого нам потребуются некоторые сведения из геометрии Лобачевского.

Г. Плоскость Лобачевского

Плоскостью Лобачевского называется верхняя полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ с метрикой*

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \quad \text{где } z = x + iy.$$

Прямая $y = 0$ называется *абсолютом*. Заметим, что углы в этой метрике совпадают с евклидовыми углами и что расстояние до абсолюта бесконечно.

Теорема. Геодезическими плоскости Лобачевского являются все окружности и прямые, ортогональные абсолюту, и только они (рис. 86).

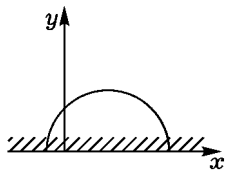


Рис. 86

Доказательство. Метрика инвариантна относительно

1) переносов вдоль абсолюта;

2) растяжений от начала координат;

3) симметрии $z \mapsto -\bar{z}$ (это очевидно).

Нетрудно проверить, что

4) метрика инвариантна также и относительно инверсии $z \mapsto 1/\bar{z}$.

Из 1)—4) вытекает инвариантность метрики относительно всех дробно-линейных преобразований верхней полуплоскости в себя. Кроме того, из 3) следует, что ось y геодезическая. Но дробно-линейным вещественным преобразованием можно перевести ось y

* А также любое риманово многообразие, изометричное указанному.

в любую окружность или прямую, ортогональную абсолюту. Следовательно, все они — геодезические.

Обратно, через каждую точку по каждому направлению проходит окружность или прямая, ортогональная абсолюту. Следовательно, других геодезических нет. □

Замечание. Одновременно доказано, что движения (сохраняющие метрику и ориентацию) плоскости Лобачевского — это дробно-линейные преобразования верхней полуплоскости в себя.

Теорема. *Окружностями на плоскости Лобачевского являются все евклидовы окружности, не пересекающие абсолют, и только они.*

Доказательство. Рассмотрим единичный круг. Дробно-линейным преобразованием можно перевести верхнюю полуплоскость в единичный круг (ср. гл. I, § 5, п. Д). Поэтому внутренность единичного круга можно также рассматривать как модель плоскости Лобачевского (рис. 34).

Дробно-линейные преобразования, сохраняющие верхнюю полуплоскость, переходят при этом в дробно-линейные преобразования, сохраняющие единичный круг. Поэтому метрика плоскости Лобачевского в модели на круге инвариантна относительно всех дробно-линейных преобразований, сохраняющих круг.

Но среди этих преобразований есть повороты вокруг центра. Следовательно, все точки евклидовой окружности, имеющей с единичным кругом общий центр, равноудалены от этого центра в смысле метрики Лобачевского. Итак, евклидова окружность является окружностью Лобачевского, если ее центр — в центре круга.

Но любая евклидова окружность, не пересекающая абсолюта, может быть движением плоскости Лобачевского превращена в евклидову окружность с центром в начале координат. Следовательно, всякая евклидова окружность, не пересекающая абсолюта, является окружностью в смысле метрики Лобачевского (как в модели на круге, так и в модели на полуплоскости). Отсюда следует, что и обратно, всякая окружность Лобачевского является евклидовой окружностью. □

Определение. Предел последовательности касающихся в одной точке окружностей растущего радиуса на плоскости Лобачевского называется *орициклом*.

Теорема. *Орициклами на плоскости Лобачевского являются евклидовы окружности или прямые, касающиеся абсолюта, и только они.*

Доказательство. Рассмотрим полугеодезическую, выходящую из некоторой точки плоскости Лобачевского (рис. 87). Выберем на этой полугеодезической точку на расстоянии t от исходной точки. Тогда окружность радиуса t с центром в построенной точке проходит через исходную точку перпендикулярно геодезической. Пусть теперь t стремится к плюс бесконечности. Тогда в евклидовом смысле построенная окружность стремится к окружности, перпендикулярной рассматриваемой геодезической и проходящей через ее точку на абсолюте. Эта евклидова окружность касается абсолюта. □

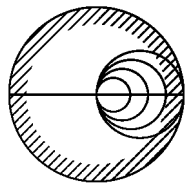


Рис. 87

Замечание 1. Таким же предельным переходом при $t \to \infty$ можно строить орициклы на поверхностях отрицательной кривизны и орисферы на многообразиях отрицательной кривизны.

Замечание 2. Через каждую точку плоскости Лобачевского проходят два орицикла с общей касательной; они получаются из предыдущей конструкции при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$.

Д. Геодезические потоки на поверхностях отрицательной кривизны

Пусть M — риманово многообразие. Мы будем предполагать, что M полно как метрическое пространство. Например, любое компактное многообразие полно; плоскость Лобачевского полна, так как расстояние до абсолюта бесконечно.

Рассмотрим множество всех касательных векторов к многообразию M, имеющих длину 1. Это множество является многообразием размерности $2n-1$, если M имеет размерность n. Оно обозначается через T_1M.

Определение. *Геодезическим потоком* на M называется однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия касательных векторов длины 1, определенная следующим образом: каждый вектор за время t сдвигается вперед вдоль касающейся его геодезической на расстояние t, оставаясь касательным к этой геодезической.

Теорема. *Геодезический поток на плоскости Лобачевского удовлетворяет условиям* 1—4 *определения У-потока.*

Доказательство. 1°. Построим сжимающееся и расширяющееся слоения. С этой целью для каждого вектора построим ортого-

нальный ему орицикл, являющийся пределом окружностей, центры которых расположены впереди точки приложения этого вектора. Снабдим этот орицикл в каждой точке нормальным ему единичным вектором, так, чтобы получилось непрерывное поле нормальных векторов (рис. 88).

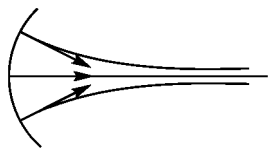


Рис. 88

Заметим, что если бы мы начали с любого из этих векторов, то мы получили бы тот же самый орицикл с тем же полем. Этот орицикл с полем можно рассматривать как кривую в трехмерном пространстве T_1M единичных касательных векторов плоскости Лобачевского. Таким образом, мы построили одномерное слоение в T_1M — разбиение пространства единичных касательных векторов на кривые. Это разбиение есть сжимающееся слоение.

Расширяющееся слоение строится таким же образом, начиная от окружностей, центры которых расположены сзади точки приложения вектора.

2°. Условия 2, 3 выражают инвариантность геодезических и орициклов относительно геодезического потока и проверяются непосредственно. Действительно, семейство геодезических, перпендикулярных одному орициклу, пересекает абсолют в точке касания абсолюта с орициклом, а всякий орицикл, касающийся абсолюта в этой точке, ортогонален всем геодезическим семейства (рис. 89).

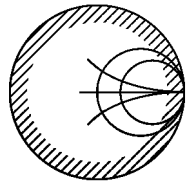


Рис. 89

Поэтому геодезический поток переводит каждый орицикл (оснащенный полем нормалей) в орицикл, касающийся абсолюта в той же точке (и также оснащенный полем нормалей).

3°. Условие 1 означает, что касательные векторы к геодезической, оснащенной касательным полем, и к обоим орициклам, оснащенным нормальными полями, линейно независимы. Оно проверяется непосредственно: важно лишь, что касание обоих орициклов — первого, а не более высокого порядка.

4°. Докажем, что отрезки сжимающегося орицикла под действием фазового потока экспоненциально сжимаются. Предположим, что начальный орицикл — прямая $y = 1$ на верхней полуплоскости. Геодезические — прямые $x = \text{const}$, геодезический поток за время t превращает прямую $y = 1$ в прямую $y = e^t$ (расстояние вдоль оси

y от точки 1 до точки y равно $\ln y$). Следовательно, каждый отрезок орицикла переходит в отрезок, длина которого в e^t раз меньше. Отсюда следует, что фазовый поток сжимает слои сжимающегося слоения (в смысле естественной метрики на T_1M).

Проверка условия 4 определения У-системы заканчивается аналогичным рассуждением для расширяющихся орициклов. □

Следствие. *Геодезический поток на компактной поверхности постоянной отрицательной кривизны является У-потоком.*

Доказательство. Заменой времени можно свести все к случаю кривизны -1. Для поверхности постоянной отрицательной кривизны -1 универсальной накрывающей является плоскость Лобачевского; поверхность получается из плоскости Лобачевского отождествлением точек, переходящих друг в друга под действием некоторой дискретной группы движений плоскости Лобачевского (рис. 90).

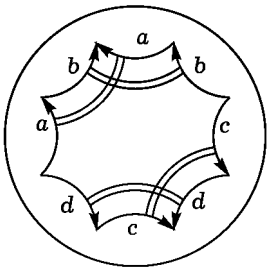


Рис. 90

При этом отождествлении геодезические, окружности, орициклы плоскости Лобачевского проектируются в геодезические, окружности, орициклы поверхности; геодезический поток на поверхности и его сжимающееся и растягивающееся слоения проектируются в такие же слоения для поверхности. □

В частности, отсюда следует, что *геодезический поток на компактной поверхности постоянной отрицательной кривизны структурно устойчив и имеет всюду плотное множество замкнутых геодезических.*

Замечание. Для многомерного многообразия отрицательной кривизны (не обязательно постоянной) геодезический поток также является У-потоком. Доказательство близко к приведенному выше для простейшего случая: немного сложнее лишь доказательство существования орициклов (орисфер). См. цитированную выше книгу Д. В. Аносова.

Е. Бильярдные системы

Рассмотрим геодезический поток на поверхности эллипсоида. Предположим, что малая ось эллипсоида уменьшается до нуля, так что эллипсоид уплощается и превращается в эллипс. Геодезический

поток в пределе переходит в так называемую бильярдную систему в области, ограниченной эллипсом: точка движется по прямой внутри области, а от границы отражается по закону «угол падения равен углу отражения» (рис. 91).

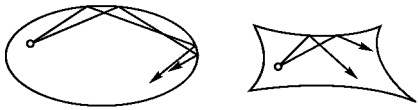


Рис. 91

Бильярдная траектория внутри эллипса никогда не бывает всюду плотной. Но для областей, ограниченных другими кривыми (например, негладкими кривыми, обращенными выпуклостью внутрь области) бильярдное движение обладает почти такими же свойствами экспоненциальной неустойчивости траекторий и перемешивания, как У-потоки.

Рассмотрим, в частности, бильярдную систему на торе с дыркой. Эту систему можно рассматривать как предел геодезических потоков на поверхности кренделя (крендель вырождается в двусторонний тор с дыркой так же, как эллипсоид в двусторонний эллипс). Более того, двусторонний тор с плоской метрикой и с дыркой можно считать предельным случаем кренделя отрицательной кривизны (при вырождении вся кривизна собралась вдоль края дыры). Поэтому неудивительно, что эта бильярдная система обладает свойствами У-потока.

Имеется надежда, что соображения, близкие к гиперболической теории позволят доказать эргодичность системы твердых шаров в ящике, со времени Больцмана постулируемую в статистической механике. (Эргодичность означает, что каждое инвариантное подмножество фазового пространства имеет меру нуль, либо полную меру; она влечет совпадение почти всюду временных и пространственных средних. В данном случае под фазовым пространством понимается множество уровня энергии.) В плоском случае доказательство опубликовано Я. Г. Синаем (*Синай Я. Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // УМН. 1970. Т. 25, № 2. С. 141—192). О бильярдных системах см. также *Бунимович Л. А.* О бильярдах, близких к рассеивающим // Матем. сборник. 1974. Т. 94, № 1. С. 49—73.

Ж. У-системы и прогонка

Гиперболическая ситуация возникает в задачах вычислительной математики, решаемых методом прогонки. Предположим, для примера, что мы хотим решить краевую задачу для уравнения второго порядка $\ddot{x} = x$ (т. е. для системы $\dot{x} = p$, $\dot{p} = x$) на отрезке $[0, T]$. Предположим, что заданы неоднородные граничные условия: начальная точка $\varphi(0)$ с координатами $(x(0), p(0))$ лежит на заданной прямой l_0 фазовой плоскости (x, p), а конечная точка $\varphi(T)$ — на заданной прямой l_T.

Если бы начальная точка $\varphi(0)$ была известна, то при попытке решить задачу Коши с начальным условием $\varphi(0)$ мы столкнулись бы с потерей точности, экспоненциально растущей с длиной T отрезка интегрирования. Действительно, решения с начальным условием, пропорциональным растягивающемуся вектору $(1, 1)$, экспоненциально растут. Таким образом, при переходе от плоскости $t = 0$ к плоскости $t = T$ происходит растяжение в направлении вектора $(1, 1)$ (в дальнейшем это направление называется горизонтальным) и сжатие в направлении вектора $(1, -1)$ (называемого вертикальным, см. рис. 92).

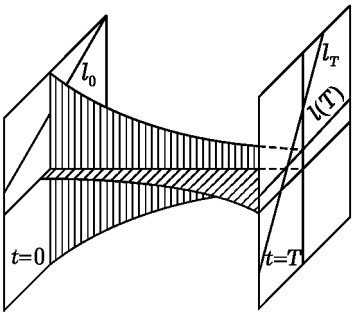


Рис. 92

Рассмотрим теперь образ прямой l_0 под действием нашего преобразования. Хотя образ каждой точки прямой находится с экспоненциально большой потерей точности, образ самой прямой определяется, вообще говоря, весьма точно.

Действительно, направление этого образа близко, вообще говоря, к горизонтальному направлению.

Поэтому ошибка в вычислении точки на этой почти горизонтальной прямой мало влияет на положение прямой: у ошибки мо-

жет быть велика как раз горизонтальная компонента, а вертикальная мала.

Точку $\varphi(T)$ мы находим как пересечение прямой l_T и образа прямой l_0. Теперь для окончательного определения решения нужно решать задачу Коши назад. При этом ошибка по горизонтали не растет, а вертикальная компонента точки $\varphi(T)$ фиксирована тем, что эта точка лежит на уже найденной прямой $l(t) = g^t l_0$. Таким образом, сначала мы, переходя от 0 к T, находим прямые $l(t)$, а потом, возвращаясь от T к 0, выбираем на каждой из них по точке — и все это без экспоненциальной потери точности.

3. О применениях У-систем

У-системы и родственные им объекты находятся сейчас в таком же положении, в каком находились предельные циклы во времена Пуанкаре. Весь математический аппарат исследования предельных циклов был создан, но инженерное серьезное применение предельных циклов началось лишь спустя несколько десятков лет, когда развитие радиотехники сделало теорию нелинейных колебаний прикладной областью математики.

С начала 1960-х годов известна гипотеза, что естественной областью применения У-потоков является теория турбулентного движения жидкости. Представим себе замкнутый сосуд, заполненный несжимаемой вязкой жидкостью, приводимой в движение какой-либо внешней силой (мешалкой). Мешалка нужна, чтобы вязкость не погасила со временем всякое движение.

Гидродинамические уравнения Навье — Стокса задают динамическую систему* в функциональном пространстве (точками этого бесконечномерного фазового пространства являются бездивергентные векторные поля, поля скоростей жидкости).

Положения равновесия этой динамической системы — это стационарные поля скоростей, т. е. такие движения жидкости, для которых скорость в каждой точке пространства не меняется со временем. Циклам этой системы отвечают периодические движения жидкости, в которых скорость в каждой точке пространства меняется периодически. Такое движение можно иногда наблюдать, открывая водопроводный кран.

* По правде говоря, теория уравнений с частными производными до сих пор не может справиться с проблемой существования и единственности решений для трехмерного уравнения Навье — Стокса, но мы пренебрежем этим обстоятельством.

Гипотеза о математическом описании турбулентности состоит в том, что дело в сущности сводится к конечномерной динамической системе, так как вязкость быстро гасит высокие гармоники. Иными словами, предполагается, что в бесконечномерном фазовом пространстве имеется конечномерное многообразие или множество, к которому притягиваются все фазовые кривые; на самом же этом множестве фазовый поток представляет собой У-систему или обладает близкими свойствами экспоненциальной неустойчивости траекторий и перемешивания.

В таком случае наблюдаемые свойства движения жидкости должны быть такими: при любом начальном условии движение довольно быстро выходит на определенный режим; однако этот режим не является ни стационарным, ни периодическим; хотя предельное движение и определяется конечным числом параметров («фаз» предельного режима), сами эти параметры крайне неустойчивы (предельные течения с близкими начальными фазами экспоненциально расходятся); впрочем, статистические характеристики течения от этих неустойчивых фаз не зависят.

В этом направлении пока сделано следующее. Если вязкость достаточно велика, система Навье — Стокса имеет единственную неподвижную точку, к которой притягиваются все фазовые кривые. Это — так называемое ламинарное движение. Всякое другое течение под воздействием вязкости со временем стремится превратиться в ламинарное. С уменьшением вязкости ламинарное течение может терять устойчивость, причем возникает устойчивый предельный цикл (см. гл. 6). При дальнейшем уменьшении вязкости может терять устойчивость и цикл, причем из цикла может рождаться более сложное, непериодическое, притягивающее соседей движение. Ожидается, что это движение будет, вообще говоря, обладать свойством экспоненциальной неустойчивости фазовых кривых на притягивающем множестве. Хотя этому вопросу за последние годы посвящено много как теоретических, так и экспериментальных исследований (см., например, обзор *McLaughlin J. B., Martin P. C.* Transition to turbulence in a statically stressed fluid system // Phys. Rev. A. 1975. V. 12. P. 186—203), указанная выше гипотеза еще далека от теоремы.

Следует, впрочем, заметить, что появление притягивающего множества с экспоненциально неустойчивыми траекториями на нем не обязательно связано с потерей устойчивости ламинарного течения: это множество может возникнуть вдали от положения равновесия

и даже при таких значениях вязкости, при которых ламинарное течение еще устойчиво.

§ 15. Структурно устойчивые системы не всюду плотны

В этом параграфе предъявляется свободная от структурно устойчивых систем область в функциональном пространстве гладких динамических систем класса C^1.

А. Пример Смейла

В 1965 г. С. Смейл построил пример диффеоморфизма трехмерного тора, в окрестности которого нет ни одного структурно устойчивого диффеоморфизма.

Следовательно, на некотором четырехмерном многообразии имеется векторное поле, которое нельзя сделать структурно устойчивыми посредством малого шевеления.

Позже поля с этим свойством были построены и на трехмерных многообразиях (см. *Newhouse S.* Nondensity of Axiom $A(a)$ on S^2 // Global Analysis Proc. AMS, 1971. (Simp. Pure Math.; V. 14). P. 191—202).

В этом параграфе излагается конструкция Смейла.

Б. Описание примера

Введем на T^3 координаты $(x, y, z \bmod 2\pi)$. Диффеоморфизм A: $T^3 \to T^3$ мы определим в окрестностях тора T^2: $z = 0$ и некоторого интервала оси z (вид диффеоморфизма A в остальной части трехмерного тора нам не важен).

В окрестности U тора T^2 отображение A задается формулой

$$A(x, y, z) = \left(2x + y, x + y; \frac{z}{2}\right).$$

В окрестности точки O с координатами $(0, 0, \pi)$ отображение A задается формулой

$$A(x, y, \pi + u) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}; \pi + 2u\right).$$

Таким образом, точка O является седловой, причем выходящее инвариантное многообразие — это кривая γ, содержащая интервал $(\pi, \pi - \varepsilon)$ оси z.

Кривая γ инвариантна относительно A и растягивается под действием A; таким образом, итерируя A, мы получим из указанно-

го интервала половину инвариантного многообразия, которая либо заканчивается в неподвижной точке преобразования A, либо имеет бесконечную длину.

Мы потребуем, чтобы кривая эта входила в область U, указанную выше, и там имела неограниченную длину. Нетрудно видеть, что диффеоморфизмы тора с указанными свойствами существуют.

В. Устойчивые свойства диффеоморфизма A

1°. *Сужение A на достаточно малую окрестность тора T^2 структурно устойчиво.*

Доказательство. Действительно, это можно доказать с помощью того же приема, которым мы доказали теорему Гробмана — Хартмана. Заменим диффеоморфизм $A\colon T^3 \to T^3$ преобразованием $A'\colon T^2 \times \mathbb{R} \to T^2 \times \mathbb{R}$, заданным всюду той же формулой, которая определяет $\widehat{A}$ в области U. Близкий к A диффеоморфизм $\widehat{A}$ можно заменить преобразованием $\widehat{A}'\colon T^2 \times \mathbb{R} \to T^2 \times \mathbb{R}$, согласованным с $\widehat{A}$ в окрестности тора $T^2 \times O$ так, что разность $\widehat{A}' - A'$ имеет компактный носитель и мала в C^1. Теперь мы можем применить теорему Аносова (или, точнее, ее доказательство); получаем топологическую эквивалентность $\widehat{A}'$ с A' и, значит, $\widehat{A}$ с A в окрестности тора T^2. □

2°. Из доказанного следует, что диффеоморфизм $\widehat{A}$ имеет инвариантное многообразие $\widehat{T}^2$, близкое к тору T^2, и на нем — счетное всюду плотное множество периодических точек. Через каждую точку окрестности $\widehat{U}$ тора $\widehat{T}^2$ проходит однозначно определенный и непрерывно зависящий от точки гладкий слой двумерного сжимающегося слоения диффеоморфизма $\widehat{A}$ (он состоит из точек, сближающихся при итерациях диффеоморфизма).

3°. *Преобразование $\widehat{A}$ имеет неподвижную точку $\widehat{O}$, близкую к неподвижной точке O преобразования A.*

Доказательство. Это следует из теоремы о неявной функции, так как точка O невырожденная и диффеоморфизм $\widehat{A}$ близок к A. □

Собственные числа линеаризации $\widehat{A}$ в этой точке $\widehat{O}$ близки к собственным числам A в O.

По теореме Гробмана — Хартмана, точка $\widehat{O}$, как и O, является седловой и имеет одномерное выходящее инвариантное многообразие $\hat{\gamma}$, близкое, как легко видеть, к γ. В частности, $\hat{\gamma}$ входит в окрестность $\widehat{U}$ тора $\widehat{T}^2$.

4°. Сколь угодно малым шевелением отображения A вдали от $\widehat{U}$ можно изменить кривую γ так, что она будет «иметь носик»: локаль-

но будет лежать по одну сторону от одного из слоев сжимающегося расслоения для A, содержащего одну точку кривой γ, причем касание γ с этим слоем будет первого порядка. Обозначим так определенное отображение через A_1.

Г. Структурная неустойчивость

Докажем, что диффеоморфизм A_1, вместе со всеми близкими к нему диффеоморфизмами, структурно неустойчив.

Доказательство. Включим отображение A_1 в однопараметрическое семейство диффеоморфизмов A_s, отличающихся лишь малым изменением в окрестности прообраза точки носика при отображении A_1. Каждое из отображений A_s, достаточно близких к A_1, обладает перечисленными выше свойствами A_1: инвариантным тором, двумерными сжимающимися слоями, седловой точкой с выходящим инвариантным многообразием и с носиком на нем. Мы предположим, что с изменением s носик движется поперек слоев сжимающегося слоения.

Рассмотрим теперь сжимающийся слой, содержащий носик. Этот слой может содержать или не содержать периодическую точку на торе. Поскольку периодические точки всюду плотны на торе, сколь угодно малым изменением A_1 в нашем семействе можно поместить носик как на слой, содержащий, так и на слой, не содержащий периодическую точку.

Но свойство слоя содержать или не содержать периодическую точку топологически инвариантно, поэтому топологический тип A_1 меняется при сколь угодно малом изменении этого отображения. Следовательно, отображение A_1 структурно неустойчиво.

Пусть теперь $\widehat{A}_1$ — любой диффеоморфизм, достаточно близкий к A_1. Тогда, согласно сказанному в п. В, для $\widehat{A}_1$ можно повторить все построение, только что проведенное для A_1. Следовательно, $\widehat{A}_1$ — структурно неустойчивый диффеоморфизм. □

Глава 4

Теория возмущений

Большинство дифференциальных уравнений не допускает ни точного аналитического решения, ни сколько-нибудь полного качественного исследования. Теория возмущений представляет собой в высшей степени полезный набор методов исследования уравнений, близких к уравнениям специального вида. Эти уравнения специального вида называются невозмущенными, и их решения предполагаются известными. Теория возмущений учитывает влияние небольших изменений дифференциальных уравнений на поведение решений.

Если величина возмущения характеризуется малым параметром ε, то влияние возмущений на временах порядка 1 приводит к изменению решения на величину порядка ε. Эту величину можно приближенно получить, решая уравнения в вариациях вдоль невозмущенного решения.

Однако если нас интересует поведение решения в течение большого отрезка времени, скажем, порядка $1/\varepsilon$, то возникает гораздо более сложная задача, составляющая предмет так называемых асимптотических методов исследования теории возмущений. Важнейшим из этих методов является метод усреднения, который и рассматривается в настоящей главе.

Метод усреднения используется в небесной механике со времени Лагранжа и Лапласа для определения эволюции планетных орбит под влиянием взаимных возмущений планет друг другом. Гаусс формулировал его так: для определения эволюции следует размазать массу каждой планеты по орбите пропорционально времени, проводимому в каждой части орбиты, и заменить притяжение планет притяжением полученных колец.

Однако обоснование метода усреднения — задача и сейчас далеко не до конца решенная.

§16. Метод усреднения

В этом параграфе описывается рецептура метода усреднения в его простейшем варианте. Вопросы обоснования этого метода обсуждаются в следующих параграфах.

А. Невозмущенная и возмущенная системы

Рассмотрим гладкое расслоение $\pi\colon M \to B$. Векторное поле v на многообразии M называется *вертикальным*, если оно касается каждого слоя (рис. 93). В приложениях слои обычно бывают торами.

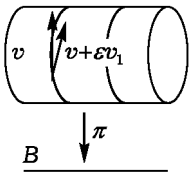


Рис. 93

Функции на базе B расслоения π определяют первые интегралы уравнения $\dot{x} = v(x)$ на M. Векторное вертикальное поле v называется *невозмущенным*. *Возмущенным полем* называется близкое к v поле $v + \varepsilon v_1$. Рассмотрим возмущенное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x) + \varepsilon v_1(x).$$

Каждая фазовая кривая невозмущенного уравнения проектируется при отображении π в одну точку базы. Движение по фазовым кривым возмущенного уравнения проектируется на базу в виде медленного движения, скорость которого порядка ε. Заметное передвижение проекции по базе происходит за время порядка $1/\varepsilon$. Метод усреднения предназначен для описания этого медленного движения по базе при помощи векторного поля на базе. Это медленное движение описывается в методе усреднения как комбинация малых осцилляций в систематической эволюции или дрейфа (рис. 94).

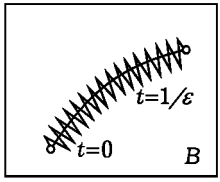


Рис. 94

Пример. Рассмотрим планетную систему. Невозмущенные уравнения учитывают только взаимодействие Солнца и планет. В невозмущенном движении планеты движутся по кеплеровским орбитам. Роль возмущения играет взаимное притяжение планет. Роль ε играет отношение массы планет к массе Солнца; это — величина порядка $1/1000$. Характерная единица времени — период обращения вокруг Солнца, т. е. величина порядка года или десятка лет, характерная единица длины — радиус планетной орбиты.

В этом примере M — фазовое пространство, база B — пространство наборов кеплеровых эллипсов, слои — торы, размерность которых равна числу планет (каждый набор кеплеровых эллипсов определяет тор, точка которого задается указанием положений планет на эллипсах). Сдвиг по базе на величину порядка 1 соответствует, таким образом, изменению радиуса орбиты, скажем, вдвое. Время порядка $1/\varepsilon$ — это время порядка тысячи или десятка тысяч лет.

Таким образом, систематическое медленное движение (дрейф) по базе со скоростью ε в этом примере за время порядка тысячелетий могло бы изменить радиус орбиты Земли вдвое, что было бы гибельным для нашей цивилизации, которая своим существованием обязана тому, что этот дрейф фактически не происходит (во всяком случае, в направлении изменения радиусов орбит; изменение эксцентриситетов происходит и, по-видимому, влияет на ледниковые периоды).

Б. Процедура усреднения

Для описания усреднения введем несколько обозначений. Мы будем предполагать, что слои нашего расслоения являются n-мерными торами. Расслоение в окрестности каждой точки базы является прямым произведением. Мы ограничимся такой окрестностью и будем задавать точку из пространства расслоения M парой (φ, I), где I — точка базы, а φ — точка n-мерного тора F.

Обозначение I выбрано потому, что координаты $(I_1, \ldots, I_k)$ точки I определяют на M первые интегралы невозмущенной системы. Точка φ тора F задается набором n угловых координат $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ $\operatorname{mod} 2\pi$. (В приложениях обычно координаты φ_k определены существом дела однозначно, с точностью до выбора начала отсчета на каждом торе и с точностью до целочисленных унимодулярных линейных преобразований. Мы фиксируем систему координат (φ, I).)

Определение. *Невозмущенным уравнением* метода усреднения называется уравнение

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega(I), \\ \dot{I} = 0, \end{cases}$$

где ω — вертикальное векторное поле, заданное зависящим от точки базы I вектором частот $(\omega_1(I), \ldots, \omega_n(I))$.

Определение. *Возмущенным уравнением* метода усреднения называется уравнение

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \\ \dot{I} = \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), \end{cases}$$

где f и g имеют по φ период 2π, $\varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Угловые координаты φ_i называются *быстрыми переменными*, а координаты на базе I_j — *медленными переменными*.

Определение. *Усредненным уравнением* называется уравнение

$$\dot{J} = \varepsilon G(J),$$

где $G(J) = \dfrac{\oint g(J, \varphi, 0)\, d\varphi}{\oint d\varphi}$ — среднее значение функции g по слою.

Решения усредненного уравнения называются *усредненными движениями*.

Пример. Рассмотрим возмущенное уравнение

$$\dot{\varphi} = \omega, \quad \dot{I} = \varepsilon(a + b\cos\varphi).$$

Усредненное уравнение имеет вид

$$\dot{J} = \varepsilon a.$$

Таким образом, при переходе к усредненному уравнению мы отбрасываем в правой части уравнения для I величины такого же порядка, как оставляемые. На временах порядка 1 как отбрасываемые, так и оставляемые величины дают одинаковый эффект (порядка ε). Однако их влияние на временах порядка $1/\varepsilon$ совершенно различно: оставленные члены приводят к систематическому дрейфу, а отброшенные — лишь к малому дрожанию.

Доказательство. Решение возмущенного уравнения дает (скажем, для $\varphi_0 = 0$)

$$I(t) = I_0 + \varepsilon a t + \frac{\varepsilon b}{\omega} \sin \omega t,$$

что лишь осциллирующей малой добавкой отличается от решения усредненного уравнения (рис. 95) $J(t) = I_0 + \varepsilon a t$. □

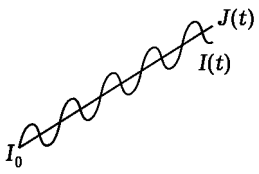


Рис. 95

В. Пространственное и временно́е средние

Рассмотрим отрезок времени T, большой по сравнению с 1, но малый по сравнению с $1/\varepsilon$. За такое время траектория возмущенного движения не успевает заметно сместиться с начального слоя.

Вычислим перемещение проекции возмущенной траектории на базу за время T. Это перемещение — величина порядка $\varepsilon T \ll 1$. Скорость перемещения равна $\varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon)$. В первом приближении можно считать здесь I постоянным, ε равным нулю и φ меняющимся в соответствии с невозмущенным уравнением. Тогда для величины перемещения за время T мы получим приближенное выражение

$$\Delta I = \varepsilon T \left[\frac{1}{T} \int_0^T g(I, \varphi(t), 0)\, dt \right] + o(\varepsilon T).$$

Наше время $T \gg 1$ велико, поэтому величина, стоящая в квадратной скобке, близка к временному среднему функции g.

Введем медленное время $\tau = \varepsilon t$. Изменению t от 0 до $1/\varepsilon$ соответствует изменение τ от 0 до 1. Будем обозначать скорости движений по отношению к медленному времени штрихом. Тогда предыдущее равенство принимает вид

$$\frac{\Delta I}{\Delta \tau} \approx \text{ временное среднее } g, \quad I' = \text{ временно́е среднее } g.$$

Заменим временное среднее пространственным. Тогда получится усредненное уравнение

$$J' = G(J), \quad G = \text{ пространственное среднее } g.$$

Таким образом, переход к усредненному уравнению соответствует замене временных средних вдоль невозмущенного движения пространственными.

Г. Обсуждение

Применения метода усреднения состоят в том, что возмущенное уравнение заменяется гораздо более простым усредненным уравнением. Решения усредненного уравнения исследуются на отрезках времени порядка $1/\varepsilon$ (т. е. на отрезках медленного времени порядка 1). Затем делаются выводы о поведении возмущенного движения в течение времени порядка $1/\varepsilon$ (обычно — выводы о том, что I-компонента решения возмущенного уравнения близка к решению усредненного уравнения в течение времени $1/\varepsilon$).

Это заключение не вытекает из предыдущих рассуждений и нуждается в обосновании. Действительно, при выводе усредненного уравнения мы заменяли временные средние пространственными. Эта замена разумна, если траектория невозмущенного движения

равномерно распределена на торе размерности n, т. е. когда частоты несоизмеримы. Однако при резонансах траектория невозмущенного движения всюду плотно заполняет не n-мерный тор, а тор меньшей размерности. Поэтому замена временного среднего пространственным средним по n-мерному тору вблизи резонансов явно незаконна.

И действительно, существуют примеры, которые показывают, что различие между проекцией возмущенной траектории на базу и решением усредненного уравнения за время $1/\varepsilon$ достигает величины порядка 1: усредненный дрейф и проекция истинного движения направлены в разные стороны.

Практически единственный до конца изученный случай — это случай одночастотных систем, когда слои — одномерные торы, т. е. окружности.

§ 17. Усреднение в одночастотных системах

Здесь формулируется и доказывается теорема, обосновывающая метод усреднения для одночастотных систем.

А. Формулировка теоремы

Рассмотрим фазовое пространство M, являющееся прямым произведением области B евклидова пространства $\mathbb{R}^k$ и окружности S^1. Угловая координата на окружности обозначается через $\varphi \bmod 2\pi$, а точка из B обозначается через I.

Возмущенное уравнение

$$\dot\varphi = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), \quad \dot I = \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon)$$

с 2π-периодическими по φ функциями f и g дает усредненное уравнение

$$\dot J = \varepsilon G(J), \quad G(J) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(I, \varphi, 0)\, d\varphi.$$

Рассмотрим начальную точку I_0 из B и предположим, что решение $J(t)$ усредненного уравнения с начальным условием $J(0) = I_0$ остается в области B в течение времени $t = T/\varepsilon$ (т. е. что в течение медленного времени $\tau = T$ решение уравнения $\frac{dJ}{d\tau} = G(J)$ с начальным условием I_0 не покидает B).

Теорема. *Предположим, что частота ω не обращается в нуль в области B. Тогда расстояние между значением решения усреднен-*

ного уравнения $J(t)$ и I-компонентой решения возмущенного уравнения $I(t)$ с $I(0)=J(0)$ остается малым в течение времени $t\in\left[0,\frac{T}{\varepsilon}\right]$, если ε достаточно мало:

$$|I(t)-J(t)|\leqslant C\varepsilon,$$

где постоянная C не зависит от ε.

Б. Основная конструкция

Основная идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы постараться уничтожить возмущение при помощи подходящей замены переменных. Эта идея имеет много приложений (см., например, предыдущую и следующую главы) и является основой всего формального аппарата теории возмущений.

Выберем вместо I новую координату $P=I+\varepsilon R(I,\varphi)$ так, чтобы P-компонента решения перестала осциллировать. Для этого в правой части уравнения для P мы хотим уничтожить члены порядка ε, зависящие от φ.

Иными словами, мы постараемся построить диффеоморфизм многообразия M, $(I,\varphi)\mapsto(P,\varphi)$ так, чтобы возмущенное поле перешло в поле, имеющее на каждом слое почти постоянную (с точностью до ошибки порядка ε^2) проекцию на базу.

Дифференцируя $P=I+\varepsilon h(I,\varphi)$ по времени и собирая члены первого порядка по ε, мы получаем

$$\dot P=\varepsilon\left[g+\omega\frac{\partial h}{\partial\varphi}\right]+r,$$

где аргумент ε у функции g заменен нулем; остаток r (как мы ниже проверим) есть величина второго порядка малости относительно ε.

Постараемся выбрать h так, чтобы уничтожить члены первого порядка по ε, т. е. чтобы квадратная скобка обратилась в нуль. Мы получаем формально

$$h(I,\varphi)=-\frac{1}{\omega(I)}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}g(I,\psi,0)\,d\psi.$$

(Здесь используется условие теоремы $\omega\neq0$.) В действительности такой способ решения уравнения $g+\omega\frac{\partial h}{\partial\varphi}=0$ незаконен, так как функция h должна быть 2π-периодической по φ, чтобы отображение $(I,\varphi)\mapsto(P,\varphi)$ было определено на M.

Предыдущая формула определяет функцию h на окружности (а не на накрывающей ее прямой), лишь если среднее значение функции g по окружности равно нулю.

Таким образом, выбор h позволяет уничтожить не все возмущение g, а лишь его осциллирующую часть

$$\widetilde{g}(I, \varphi, 0) = g(I, \varphi, 0) - G(I).$$

Среднее по периоду функции $\widetilde{g}$ уже равно нулю, и мы можем определить периодическую функцию h формулой

$$h(I, \varphi) = -\frac{1}{\omega(I)} \int_0^{\varphi} \widetilde{g}(I, \psi, 0)\, d\psi. \tag{1}$$

Теперь для P получается уравнение

$$\dot{P} = \varepsilon G(P) + \varepsilon R.$$

Это уравнение малой величиной εR порядка ε^2 отличается от усредненного уравнения

$$\dot{J} = \varepsilon G(J).$$

Поэтому решения расходятся со скоростью порядка ε^2 и, следовательно, за время $1/\varepsilon$ разойдутся на расстояние порядка ε. Отличие P от I есть также величина порядка ε. Поэтому и расстояние между $I(t)$ и $J(t)$ остается величиной порядка ε в течение времени порядка $1/\varepsilon$.

Доказательство этого утверждения требует еще проведения (простых) оценок отброшенных выше членов.

В. Оценки

1°. *Обозначения*. Пусть $K \subset B$ — компактная выпуклая область, содержащая точку I_0. Мы предполагаем, что $J(t)$ не выходит на границу K в течение времени T/ε. Будем обозначать через $|\cdot|_0$ и $|\cdot|_1$ нормы в пространствах C^0 и C^1 (максимум модуля функции и максимум модулей функции и ее первой производной). Обозначим через c_1 такую постоянную, что для I из K

$$|f|_1 \leqslant c_1, \quad |g|_1 \leqslant c_1, \quad |\omega^{-1}|_1 \leqslant c_1.$$

2°. *Докажем, что отображение* $A\colon (I, \varphi) \mapsto (P, \varphi)$ *— диффеоморфизм* $K \times S^1$ *при достаточно малых* ε.

Доказательство. Из определения h (формула (1)) следует, что $h \in C^1$. Значит, $|\varepsilon h|_1 < 1$ при достаточно малых ε. Если бы две точки при отображении A перешли в одну, разность значений εh в этих точках была бы равна

разности значений I; это противоречит неравенству $|\varepsilon h|_1 < 1$, так как область K выпуклая. Из $|\varepsilon h|_1 < 1$ вытекает также, что A локальный диффеоморфизм. Итак, A — диффеоморфизм. □

3°. *Оценка величины R.* Имеем

$$R(P(I,\varphi,\varepsilon),\varphi,\varepsilon) = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5,$$

$$R_1 = g(I,\varphi,0) - g(P(I,\varphi,\varepsilon),\varphi,0), \quad R_2 = g(I,\varphi,\varepsilon) - g(I,\varphi,0),$$

$$R_3 = h(I,\varphi) - h(P(I,\varphi,\varepsilon),\varphi), \qquad R_4 = \varepsilon g(I,\varphi,\varepsilon)\frac{\partial h}{\partial I},$$

$$R_5 = \varepsilon f(I,\varphi,\varepsilon)\frac{\partial h}{\partial \varphi}.$$

Предположим, что I и $P(I,\varphi,\varepsilon)$ принадлежат K. Тогда, поскольку

$$P = I + \varepsilon h(I,\varphi),$$

$$|R_1| \leqslant \varepsilon |g|_1 |h|_0, \quad |R_2| \leqslant \varepsilon |g|_1, \quad |R_3| \leqslant \varepsilon |h|_1 |h|_0,$$

$$|R_4| \leqslant \varepsilon |h|_1 |g|_0, \quad |R_5| \leqslant \varepsilon |h|_1 |f|_0.$$

Входящие сюда нормы f, g и h оцениваются через c_1. Окончательно, если I и $P(I,\varphi,\varepsilon)$ принадлежат K, то

$$|R(P(I,\varphi,\varepsilon),\varphi,\varepsilon)| \leqslant c_2\varepsilon,$$

где $c_2(c_1) > 0$ — не зависящая от I, φ, ε постоянная.

4°. *Оценка $P(t) - J(t)$.*

Обозначая штрихом производную по медленному времени $\tau = \varepsilon t$, мы получаем, что P и J удовлетворяют соотношениям

$$P' = G(P) + \varepsilon R(P,\varphi(t),\varepsilon),$$

$$J' = G(J).$$

Следовательно, $P - J = Z$ удовлетворяет неравенству

$$|Z|' \leqslant a|Z| + b,$$

где $a = |G|_1$, $b = c_2\varepsilon$, до тех пор пока P, I и J остаются в области K.

Обозначим $|Z(0)| = c$. Решая уравнение $z' = az + b$ с начальным условием c, получаем оценку

$$|Z(\tau)| \leqslant (c + b\tau)e^{a\tau},$$

пока P, I, J остаются в области K.

5°. *Окончание доказательства теоремы п. А.*

Доказательство. Обозначим через c_3 величину $|h|_0$. Тогда $|P(I,\varphi,\varepsilon) - I| \leqslant c_3\varepsilon$.

В то же время доказанная выше оценка дает

$$|P(t) - J(t)| \leqslant c_4\varepsilon, \quad c_4 = (c_3 + c_2 T)e^{aT}$$

при $\varepsilon t \leqslant T$, пока $I(t)$, $P(t) = P(I(t),\varphi(t),\varepsilon)$ и $J(t)$ остаются в K.

Обозначим через ρ расстояние от траектории усредненного движения $\{J(t), \varepsilon t \leqslant T\}$ до границы K. Если $(c_3 + c_4)\varepsilon < \rho$, то, согласно предыдущим

оценкам, $I(t)$, $P(t)$ и $J(t)$ не могут выйти на границу K при $\varepsilon t \leqslant T$. Но тогда в течение всего этого времени

$$|I(t)-J(t)| \leqslant |I(t)-P(t)|+|P(t)-J(t)| \leqslant c_3\varepsilon + c_4\varepsilon. \qquad \square$$

Г. Пример

Уравнением ван дер Поля называется уравнение

$$\ddot{x} = -x + \varepsilon(1-x^2)\dot{x}.$$

Это уравнение маятника, в котором добавлено нелинейное «трение», положительное при больших амплитудах и отрицательное при малых.

Невозмущенное уравнение $\ddot{x} = -x$ можно записать в стандартном виде $\dot{\varphi} = -1$, $\dot{I} = 0$, где $\varphi = \arg(x + i\dot{x})$, $2I = x^2 + \dot{x}^2$.

Уравнение для $\dot{I}$ в возмущенном движении имеет вид

$$\dot{I} = \varepsilon(1-x^2)\dot{x}^2 = 2\varepsilon I(1-2I\cos^2\varphi)\sin^2\varphi.$$

Усредненное уравнение, следовательно, есть

$$\dot{J} = \varepsilon\Big(J - \frac{J^2}{2}\Big).$$

Это уравнение имеет отталкивающее положение равновесия $J = 0$ и притягивающее $J = 2$.

Положения равновесия уравнения для J соответствуют циклам возмущенной системы. Доказанная выше теорема позволяет утверждать, что изменение I в возмущенной системе близко к изменению J в усредненной системе в течение времени порядка $1/\varepsilon$. Но если усредненная система имеет невырожденное (например, устойчивое по первому приближению) положение равновесия, то возмущенная система (при достаточно малых ε) будет иметь невырожденный (например, устойчивый по первому приближению) цикл; это легко следует из теоремы о неявной функции.

В частности, уравнение ван дер Поля при малых ε имеет устойчивый предельный цикл, близкий к окружности $x^2 + \dot{x}^2 = 4$ (рис. 96).

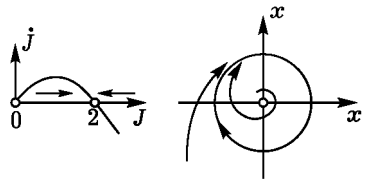


Рис. 96

§ 18. Усреднение в многочастотных системах

Многочастотный случай изучен гораздо хуже, чем одночастотный. В этом параграфе содержится обзор основных результатов в этой области.

А. Резонансные поверхности

Рассмотрим обычную возмущенную систему метода усреднения

$$\begin{cases} \dot\varphi = \omega(I) + \varepsilon f(I, \varphi, \varepsilon), & \varphi \in T^n, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \omega \neq 0, \\ \dot I = \varepsilon g(I, \varphi, \varepsilon), & I \in B \subset \mathbb{R}^k. \end{cases}$$

Вектор частот $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ называется *резонансным*, если существует целочисленный ненулевой вектор $m = (m_1, \ldots, m_n)$, для которого $(m, \omega) = 0$.

Целочисленный вектор m называется *номером резонанса*.

Точка I из базы B называется *резонансной*, если вектор $\omega(I)$ резонансный. Все резонансные точки I, соответствующие одному резонансу с номером m, образуют в базе B нашего расслоения гиперповерхность

$$\Gamma_m = \{I \in B \colon (m, \omega(I)) = 0\}.$$

Эта поверхность называется *резонансной поверхностью*.

В общем случае как резонансные, так и нерезонансные точки лежат в B всюду плотно (если число частот $n > 1$).

Пример 1. Рассмотрим невозмущенную двухчастотную систему

$$\dot\varphi_1 = I_1, \quad \dot\varphi_2 = I_2, \quad \dot I = 0.$$

Здесь B — плоскость с координатами I_1, I_2 (без нуля, так как мы предполагаем, что $\omega \neq 0$); резонансные поверхности — это все прямые, проходящие через 0 с рациональным тангенсом угла наклона к оси I_1.

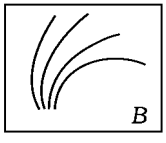


Рис. 97

Как и в этом примере, в общем случае двухчастотной системы резонансные поверхности образуют, вообще говоря, семейство непересекающихся гиперповерхностей (рис. 97; вообще говоря = если ранг $\dfrac{\partial\omega}{\partial I}$ максимален). В этом случае при движении точки I по базе эта точка, вообще говоря, трансверсально пересекает резонансные поверхности.

Совершенно по-другому расположены резонансные поверхности в случае, когда число частот 3 или больше.

Пример 2. Рассмотрим невозмущенную трехчастотную систему

$$\dot\varphi_1 = I_1, \quad \dot\varphi_2 = I_2, \quad \dot\varphi_3 = 1, \quad \dot I = 0.$$

Здесь B — плоскость с координатами I_1, I_2; резонансные поверхности — это все прямые с рациональными уравнениями.

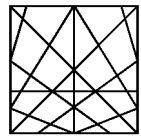


Рис. 98

В этом случае при движении точки I по плоскости эта точка, если и пересекает трансверсально все резонансные кривые, то, во всяком случае, многие из них пересекает под малыми углами, ибо сколь угодно близко к любому линейному элементу имеется линейный элемент резонансной кривой (рис. 98).

Замечание. Сказанное станет, быть может, понятнее, если рассмотреть отображение базы в проективное $(n-1)$-мерное пространство

$$\Omega\colon B \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}, \quad \Omega(I) = (\omega_1(I) : \ldots : \omega_n(I)).$$

Резонансные поверхности — это прообразы рациональных гиперплоскостей в $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$. В двухчастотном случае $n=2$ и резонансам соответствуют рациональные точки на проективной прямой.

Если же число частот $n>2$, то рациональные гиперплоскости образуют связное всюду плотное множество, так что от окрестности любой точки до окрестности любой другой можно добраться по резонансам.

В соответствии со сказанным, в двухчастотных системах основным эффектом является прохождение через резонансы, а при большем числе частот обязательно нужно учитывать также касания с резонансами.

Б. Влияние отдельного резонанса

Чтобы представить себе возможный эффект одного резонанса, рассмотрим простейшие примеры.

Пример 1. Возмущенная система:

$$\dot\varphi_1 = I_1, \quad \dot\varphi_2 = 1, \quad \dot I_1 = \varepsilon, \quad \dot I_2 = \varepsilon\cos\varphi_1.$$

Рассмотрим резонанс $\omega_1 = 0$. Резонансная кривая $I_1 = 0$ пересекается в усредненном движении с ненулевой скоростью. Изменение I_2 в точном решении за время от $-\infty$ до $+\infty$, как нетрудно сосчитать,

дается интегралом Френеля

$$\Delta I_2 = \varepsilon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos\Big(\varphi_0 + \varepsilon \frac{t^2}{2}\Big)\, dt = c(\varphi_0)\sqrt{\varepsilon}.$$

В усредненной системе J_2 не меняется со временем.

Заметим, что основной вклад в интеграл дает окрестность резонанса шириной порядка $\sqrt{\varepsilon}$; интеграл сам имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$ и зависит от начальной фазы φ_0.

Таким образом, в этом простейшем примере пересечение резонанса приводит к рассеянию решений возмущенного уравнения, имеющих общее начальное значение I, на расстояние порядка $\sqrt{\varepsilon}$ друг от друга, причем это рассеяние происходит в окрестности резонансной поверхности ширины порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

Появление величин порядка $\sqrt{\varepsilon}$ характерно для всех задач, связанных с прохождением резонанса.

В то время как в первом примере прохождение резонанса приводит лишь к небольшому рассеянию проекций траекторий возмущенной системы на базу по отношению к траекториям усредненной системы, в следующем примере возмущенное и усредненное движения совершенно различны.

Пример 2. Рассмотрим возмущенную систему

$$\dot\varphi_1 = I_1, \quad \dot\varphi_2 = I_2, \quad \dot I_1 = \varepsilon, \quad \dot I_2 = \varepsilon \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Усредненная система:

$$\dot J_1 = \varepsilon, \quad \dot J_2 = 0.$$

Усредненное движение с начальным условием $J_1(0) = 1$, $J_2(0) = 1$ при $t = 1/\varepsilon$ дает $J_1(t) = 2$, $J_2(t) = 1$.

Возмущенное движение с начальным условием $I_1(0) = 1$, $I_2(0) = 1$, $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$ приводит при $t = 1/\varepsilon$ к $I_1(t) = 2$, $I_2(t) = 2$.

Таким образом, проекция возмущенного движения на базу систематически движется совсем не в ту сторону, что траектория усредненного движения. За время $t = 1/\varepsilon$ эти две траектории на базе расходятся на большое расстояние (порядка 1).

Причина, по которой усредненное уравнение непригодно для описания рассмотренного возмущенного движения, состоит в том, что эта возмущенная траектория все время остается на резонанс-

ной поверхности, а вблизи резонанса усреднение явно неприменимо, так как временное среднее не близко к пространственному среднему по всему n-мерному тору.

Захватывание части траекторий на резонансные режимы характерно для систем с числом частот больше 1.

Пример 3 (А. И. Нейштадт). Рассмотрим систему*

$$\dot\varphi_1 = I, \quad \dot\varphi_2 = 1, \quad \dot I = \varepsilon(a + \sin\varphi_1 - I).$$

Для исследования этой системы рассмотрим уравнения маятника с крутящим моментом и трением $\ddot\varphi = \varepsilon(a + \sin\varphi - \dot\varphi)$, к которому она легко сводится. Введем медленное время $\tau = \sqrt{\varepsilon}t$ (интервалу $t \sim 1/\varepsilon$ соответствует $\tau \sim 1/\sqrt{\varepsilon}$). Обозначая штрихом производные по медленному времени, получаем уравнение

$$\varphi'' = a + \sin\varphi - \sqrt{\varepsilon}\varphi'.$$

Фазовые портреты при $\varepsilon = 0$ изображены на рис. 99 (U — потенциальная энергия).

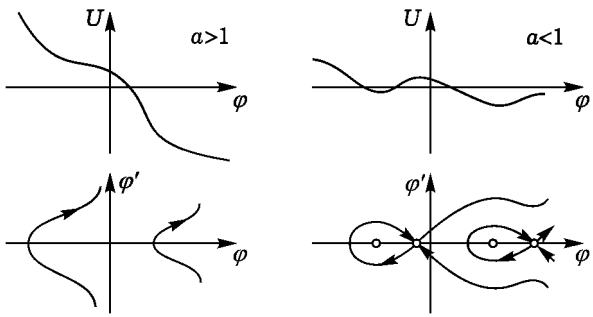


Рис. 99

Мы будем предполагать, что $a > 0$. В зависимости от величины крутящего момента a возможны два случая. Если $a > 1$ (крутящий момент велик по сравнению с колебательным), то член $\sin\varphi$ не играет существенной роли: I меняется монотонно. Прохождению через резонанс $I = 0$ отвечает изменение направления вращения маятника.

* Полученную дописыванием тривиального уравнения $\dot\varphi_2 = 1$ из одночастотной системы; резонанс в полученной системе соответствует обращению в 0 частоты в одночастотной.

Если $a<1$, то возможен колебательный режим движения маятника (петля внутри сепаратрисы на фазовом портрете). Этот колебательный режим соответствует траекториям, постоянно остающимся вблизи резонанса.

Эффект малого трения $\sqrt{\varepsilon}\varphi'$ состоит в основном в разрушении петли сепаратрисы. Вместо нее на плоскости (φ, φ') появляется узкая (ширины порядка $\sqrt{\varepsilon}$) полоса вдоль неограниченной части сепаратрисы, состоящая из захватываемых притягивающим положением равновесия фазовых точек; вся область внутри сепаратрисы также захватывается (рис. 100).

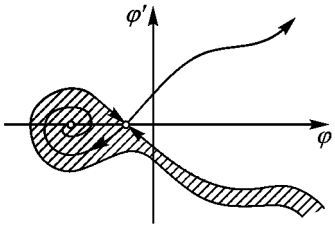


Рис. 100

Возвращаясь к исходной системе, мы обнаруживаем, что при $a<1$ происходит захватывание в резонанс. При этом в резонанс захватывается малая доля всех траекторий (мера множества начальных условий, (I, φ), захватываемых за время $1/\varepsilon$, порядка $\sqrt{\varepsilon}$). Для этих захватываемых начальных условий различие между изменением медленной переменной I и изменением решения усредненного уравнения J за время $1/\varepsilon$ достигает величины порядка 1.

Для остальных же начальных условий (т. е. для всех начальных условий, кроме множества меры порядка $\sqrt{\varepsilon}$) различие между I и J за время $1/\varepsilon$ остается малым (порядка $\sqrt{\varepsilon}\ln\varepsilon$, как можно сосчитать).

Если же $a>1$, то захват в резонанс вообще не происходит.

В. Прохождение через резонансы в двухчастотной системе

Рассмотрим двухчастотную систему с частотами $\omega_1(I)$, $\omega_2(I)$:

$$\dot\varphi_1=\omega_1+\varepsilon f_1,\quad \dot\varphi_2=\omega_2+\varepsilon f_2,$$
$$\dot I_1=\varepsilon g_1,\qquad \dot I_2=\varepsilon g_2.$$

Определение. Система *удовлетворяет условию A*, если скорость изменения отношения частот ω_1/ω_2 вдоль траекторий возмущенной системы

всюду отлична от нуля:

$$\omega_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial I} g \neq \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial I} g.$$

Система *удовлетворяет условию* $\bar{A}$, если всюду отлична от нуля скорость изменения отношения частот $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ вдоль траекторий усредненной системы:

$$\omega_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial I} G \neq \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial I} G.$$

Мы будем предполагать, что все рассматриваемые системы — аналитические.

Теорема. *Если система удовлетворяет условию A, то различие между медленным движением $I(t)$ в возмущенной системе и $J(t)$ в усредненной остается малым в течение времени $t = 1/\varepsilon$:*

$$|I(t) - J(t)| \leqslant c\sqrt{\varepsilon}, \quad \text{если} \quad I(0) = J(0), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon.$$

Доказательство основано на том, что выделяется конечное число резонансов с небольшими номерами (большое при малых ε), и вне малых окрестностей выделенных резонансных поверхностей используются обычные замены переменных (см. §17).

Прохождение окрестностей выделенных резонансов приводит к рассеянию порядка $\sqrt{\varepsilon}$ (как в примерах выше).

Суммируя результаты рассеяния вблизи выделенных резонансов и дрейфа в промежутках между ними, получаем приведенную выше оценку. □

Подробности см. *Арнольд В. И.* Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонансы // ДАН СССР. 1965. Т. 161, №1; *Нейштадт А. И.* О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче // ДАН СССР. 1975. Т. 221, №2; диссертация *Нейштадта А. И.* «О некоторых резонансных задачах в нелинейных системах». МГУ, 1975, содержит доказательство приведенной выше оценки с $\sqrt{\varepsilon}$, взамен первоначальной оценки $\sqrt{\varepsilon}\ln^2\varepsilon$ в первой из цитированных работ.

Теорема (А. И. Нейштадт). *Если система удовлетворяет условию $\bar{A}$ и еще некоторому условию B (выполненному почти всегда), то для всех начальных точек (I_0, φ_0), кроме множества меры, не превосходящей $c_1\sqrt{\varepsilon}$, различие между медленным движением $I(t)$ в возмущенной системе и движением $J(t)$ в усредненной остается малым в течение времени $1/\varepsilon$:*

$$|I(t) - J(t)| \leqslant c_2\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|, \quad \text{если} \quad I(0) = J(0).$$

Доказательство основано на том, что выделяется конечное число резонансов с небольшими номерами и вне малых окрестностей выделенных резонансных поверхностей используются обычные замены переменных.

При исследовании выделенных резонансов используется усреднение по окружностям, являющимся траекториями невозмущенного, движения при резонансе.

С этой целью зафиксируем номер резонанса (m_1, m_2), где m_1 и m_2 взаимно просты, и выберем на торе вместо угловых координат (φ_1, φ_2) новые угловые координаты (γ, δ), где $\gamma = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2$. Скорость изменения угловой координаты γ в невозмущенном движении при резонансе обращается в нуль, так как $m_1\omega_1 + m_2\omega_2 = 0$.

На базе также введем специальную координату $\rho = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$. Уравнение резонансной поверхности имеет теперь вид $\rho = 0$, так что величина ρ характеризует уклонение от резонанса. Точку резонансной поверхности будем обозначать через σ. В окрестности этой поверхности можно характеризовать точку базы значением расстояния до резонанса, ρ, и проекцией на резонансную поверхность, σ.

Во введенных координатах возмущенная система принимает вид

$$\dot\gamma = \rho + \varepsilon F_1, \quad \dot\delta = \alpha(I) + \varepsilon F_2, \quad \dot\rho = \varepsilon F_3, \quad \dot\sigma = \varepsilon F_4,$$

где функции F_k имеют по γ и δ период 2π.

Усреднение по траекториям резонансного движения сводится к усреднению по δ. Усредненная система имеет вид

$$\dot\gamma = \rho + \varepsilon G_1, \quad \dot\rho = \varepsilon G_3, \quad \dot\sigma = \varepsilon G_4.$$

Функции G_k имеют период 2π по γ и зависят также от ρ и ε.

Введем медленнее время $\tau = \sqrt{\varepsilon}t$ и нормированное расстояние от резонанса $r = \dfrac{\rho}{\sqrt{\varepsilon}}$. Тогда, обозначая производные по τ штрихом, запишем усредненное уравнение в виде

$$\gamma' = r + \sqrt{\varepsilon}G_1, \quad r' = G_3, \quad \sigma' = \sqrt{\varepsilon}G_4.$$

Аргументами у функций G_k являются γ, $\sqrt{\varepsilon}r$, σ и ε.

Полагая в этом уравнении $\varepsilon = 0$, получаем в качестве первого приближения уравнение

$$\gamma' = r, \quad r' = u(\gamma, \sigma), \quad \sigma' = 0.$$

Таким образом, в первом приближении получается уравнение маятника с крутящим моментом, зависящее от параметра σ. Гамильтоновость полученного уравнения первого приближения — удивительный факт, обнаружившийся в результате вычислений и отнюдь не очевидный заранее.

Рассмотрим фазовый портрет уравнения первого приближения на плоскости (γ, r). Он выглядит как в примере 3 п. Б при $a < 1$ или при $a > 1$, в зависимости от того, меняет ли знак функция u.

Оказывается, петли сепаратрисы возникают лишь для небольшого числа резонансов с не слишком большими номерами (здесь используется условие $\bar A$). Действительно, из условия $\bar A$ вытекает, что среднее значение функции u по γ отлично от нуля. Для резонансов с большими номерами в уравнении первого приближения получается функция u, мало отличающаяся от своего среднего значения (так как усреднение по δ близко в этом случае к усреднению по тору) и поэтому всюду отличная от нуля. Это соответствует

маятнику с крутящим моментом, который велик по отношению к качающему моменту. В этом случае уравнение первого приближения не имеет ни положений равновесия, ни колебательной области.

При переходе от уравнения первого приближения к полному уравнению из петли сепаратрисы возникает зона захвата* в резонанс, как в примере 3 п. Б. Мера множества захватываемых точек фазового пространства оценивается величиной порядка $\sqrt{\varepsilon}$, если все положения равновесия уравнения первого приближения простые (т. е. если нули функции u простые: $u=0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \gamma} \neq 0$). Это ограничение простоты и есть условие B теоремы Нейштадта. Заметим, что условие накладывается на уравнения первого приближения, соответствующие конечному числу резонансов (поскольку при условии $\bar{A}$ только для конечного числа резонансов уравнения первого приближения имеют положения равновесия).

Доказательство теоремы завершается соединением оценок изменения величин I в нерезонансных промежутках и вблизи резонансов — в незахватываемой части фазового пространства. Подробности см. в цитированной выше диссертации Нейштадта. □

Замечание. Для двухчастотных систем остался неисследованным случай, когда условие $\bar{A}$ нарушается, т. е когда отношение частот быстрого движения в усредненном движении меняется немонотонно. Такое поведение невозможно в случае одномерной базы, но если число медленных переменных I два или больше, то поворот отношения частот вспять есть явление общего положения, неустранимое шевелением системы.

Г. Многочастотные системы

Случай, когда число частот больше двух, изучен гораздо слабее, чем двухчастотный. Для систем общего положения частоты быстрого движения несоизмеримы для почти всех значений медленных переменных. Поэтому естественно ожидать, что для большинства начальных условий метод усреднения правильно списывает эволюцию медленных переменных на отрезках времени порядка $1/\varepsilon$.

Первые общие теоремы в этом направлении принадлежат Аносову (*Аносов Д. В.* Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями // Изв. АН СССР, сер. матем. 1960. Т. 24, № 5. С. 721—742) и Т. Касуге (*Kasuga T.* On the adiabatic theorem for the hamiltonian system of differential equations in the classical mechanics, I, II, III // Proc. Japan Acad. 1961. V. 37, № 7).

* В отличие от примера п. Б, в общем случае «захваченные» траектории не обязаны навсегда оставаться вблизи резонанса.

Теорема Аносова утверждает, что для любого положительного числа ρ мера множества начальных условий (из компакта в фазовом пространстве), для которых

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon} |I(t)-J(t)| > \rho \quad \text{при } I(0)=J(0),$$

стремится к нулю при ε, стремящемся к нулю (здесь, как обычно, I — проекция возмущенного движения, а J — усредненное движение; предполагается, что частоты независимы, в том смысле, что ранг производной частот по медленным переменным $\dfrac{\partial\omega}{\partial I}$ равен числу быстрых переменных).

Эта теорема доказана в действительности при более общих предположениях: условная периодичность быстрых движений не предполагается, а предполагается эргодичность быстрого движения на почти всех торах; как обычно, предполагается, что решение усредненного уравнения J продолжается на время $1/\varepsilon$.

Множество малой вместе с ε меры, где возможны большие уклонения от усредненного движения за время $1/\varepsilon$, соответствует всем траекториям, захватываемым в резонанс или блуждающим вдоль резонансных поверхностей, переходя с одной на другую, что также возможно, если число частот больше двух.

Представляет интерес реалистическая оценка меры этого множества. Например, для двухчастотных систем из результатов Нейштадта (см. п. В) следует оценка $|I(t)-J(t)|\leqslant c_2\sqrt{\varepsilon}|\ln\varepsilon|$ вне множества меры не более $c_1\sqrt{\varepsilon}$ (при небольших ограничениях на систему).

Предположим, что частоты независимы, т. е. что ранг $\dfrac{\partial\omega}{\partial I}$ равен числу частот.

Теорема (А. И. Нейштадт). *Для системы с независимыми частотами вне множества малой меры κ погрешность метода усреднения*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1/\varepsilon} |I(t)-J(t)| \quad \textit{при } I(0)=J(0)$$

оценивается сверху величиной $c_3\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{\kappa}$.

Эквивалентная формулировка: обозначим через $E(\varepsilon,\rho)$ множество начальных условий в пределах фиксированного компакта, для которых погрешность достигает величины ρ или большей величины при указанном значении ε.

Тогда

$$\operatorname{mes} E(\varepsilon,\rho)\leqslant c_4\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho}.$$

Доказательство см. в статье *Нейштадт А. И.* Об осреднении в многочастотных системах, II // ДАН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1295—1298. Это доказательство использует идею цитированной выше работы Т. Касуги: замена переменных метода усреднения модифицируется (сглаживается) таким образом, чтобы она задавалась гладкими функциями не только вне окрестностей резонансов, но всюду.

Результат А. И. Нейштадта можно истолковать как указание на статистическую независимость приращений отклонения I от J на последовательных отрезках времени длины 1. Действительно, приращение $I - J$ за время T порядка 1 имеет величину порядка ε, а число интервалов длины T в интервале $1/\varepsilon$ имеет порядок $1/\varepsilon$. Если бы приращения на каждом интервале длины T были независимы, ожидаемое приращение за время $1/\varepsilon$ оказалось бы, по законам теории вероятности, пропорциональным произведению приращения за время T на корень из числа испытаний, т. е. оказалось бы величиной порядка $\varepsilon\sqrt{1/\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon}$.

Теорема Нейштадта дает такой же порядок величины приращения, однако не для всех начальных условий: приходится исключить множество начальных условий меры порядка $\sqrt{\varepsilon}$, на котором наблюдаются захват в резонанс и большие уклонения, не соответствующие схеме с независимыми приращениями.

Представление о независимости приращений отклонения I от J, по-видимому, может быть обосновано гораздо более полным образом в ситуации, когда быстрое движение является не условно-периодическим, а У-системой. На это указывает, в частности, центральная предельная теорема для функций на фазовом пространстве (*Синай Я. Г.* Центральная предельная теорема для геодезических потоков на многообразиях постоянной отрицательной кривизны // ДАН СССР. 1960. Т. 133, № 6. С. 1303—1306; *Ратнер М. Е.* Центральная предельная теорема для У-потоков на трехмерных многообразиях // ДАН СССР. 1969. Т. 186, № 3. С. 519—521). Эта теорема обосновывает сформулированные выше представления для специального случая, когда как медленное, так и быстрое движение не зависит от медленных переменных:

$$\dot{I} = \varepsilon g(\varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega(\varphi).$$

Вероятностные соображения становятся особенно интересными в том случае, когда нас интересует поведение системы на временах, больших по сравнению с $1/\varepsilon$ (скажем, порядка $\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$ или $\frac{1}{\varepsilon^2}$). Если за время $1/\varepsilon$ происходит захват в резонанс $\sqrt{\varepsilon}$-й доли всех траекторий, и если на следующих отрезках времени длины $1/\varepsilon$ будут таким же образом захватываться все

новые траектории, то через время порядка $\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}$ большинство траекторий окажется захваченным резонансами и через время $1/\varepsilon^2$ будут наблюдаться лишь резонансные движения. Но, разумеется, независимость захватов на разных отрезках длины $1/\varepsilon$ является сильным дополнительным предположением, а наряду с захватом в резонанс происходит и обратный процесс.

Имеющееся в теореме Нейштадта ограничение — независимость частот — существенно сужает область ее применимости. Условие

$$\text{ранг } \frac{\partial\omega}{\partial I} = \text{ числу частот}$$

можно заменить условием независимости отношений частот:

$$\text{ранг отображения } I \mapsto (\omega_1(I) : \ldots : \omega_n(I)) \text{ равен } n-1.$$

Однако в случае, когда число медленных переменных мало (меньше, чем число частот без единицы) не может выполняться и это условие.

Распространение теоремы Нейштадта на случай, когда число медленных переменных существенно меньше числа частот, требует, в частности, исследования диофантовых приближений на подмногообразиях евклидова пространства.

Для отображений

$$\omega\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, \quad k < n.$$

удовлетворяющих условиям невырожденности (отличия от нуля некоторых определителей) ожидается такая же оценка снизу

$$|(m, \omega(I))| \geqslant C|m|^{-\nu}, \quad m \in \mathbb{Z}^n \setminus 0,$$

для почти всех I из $\mathbb{R}^k$, какая имеет место для почти всех точек из $\mathbb{R}^n$.

Результаты этого рода получены для специальных кривых ($\omega_s = I^s$); см. книгу *Спринджук В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967; относительно общего случая см. работу *Пятецкий-Шапиро И. И.* Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства // Функциональный анализ и его приложения. 1969. Т. 3, № 4. С. 59—62.

Заметим, что этими работами не решается ни обсуждаемый вопрос об обобщении теоремы Нейштадта, ни арифметический вопрос о точной оценке ν (не имеющий, впрочем, большого значения для нашей задачи, в которой изменение значения ν будет менять лишь необходимую гладкость уравнений).

В системах общего положения с любым числом быстрых и медленных переменных с достаточно большим числом параметров при почти любом значении параметра мера множества начальных условий, для которых отклонение больше ρ при некотором t на $\left(0, \frac{1}{\varepsilon}\right)$, не превосходит $C\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho}$ и интеграл от отклонения по множеству остальных начальных условий (фазовое

пространство предполагается ограниченным) не превосходит $C\sqrt{\varepsilon}$ (имеется в виду максимум отклонения переменных $I(t)$ от $J(t)$ при $t \in \left[0, \frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Если отображение ω не принадлежит некоторому исключительному множеству коразмерности N в функциональном пространстве, то в предыдущих оценках $\sqrt{\varepsilon}$ можно заменить на $\varepsilon^{\frac{1}{p+1}}$, где $n \leqslant C_{k+p}^{p} - k - N + 1$, n — число быстрых, а k — медленных переменных, причем константа C зависит от отображения, но оценка выполняется для всех, а не для почти всех систем (параметр привлекать не нужно).

Сформулированные теоремы В. И. Бахтина (Об усреднении в многочастотных системах // УМН. 1985. Т. 40, № 5. С. 304—305; Функциональный анализ и его приложения. 1986. Т. 20, № 2. С. 1—7; см. также обзор: *Арнольд В. И.*, *Козлов В. В.*, *Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 3—304, см. с. 181) основаны на том, что почти всегда

$$|(m, \omega(I))| + \left|\frac{\partial (m, \omega(J))}{\partial I}\right| \geqslant C_I |m|^{-\nu}, \quad \nu > n - 1, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^n \setminus 0.$$

Отсюда выводится, что средняя по начальным условиям погрешность метода усреднения оценивается сверху для систем общего положения величиной порядка $\varepsilon^{\frac{1}{p+1}}$ при $n \leqslant C_{k+p}^{p} - k$.

Между прочим, эти оценки доставляют новую информацию и в тех размерностях, где теорема Нейштадта применима, но определитель обращается (нетождественно) в 0. Ибо в условиях теоремы Нейштадта оценивается отклонение в течение времени C/ε, где C зависит от начального условия (чтобы усредненная траектория не успела дойти до поверхности вырождения якобиана), а в теореме Бахтина множество, заметенное выходящими на поверхность вырождения траекториями, включено в выкидываемое множество малой меры.

§ 19. Усреднение в гамильтоновых системах

В этом параграфе кратко описаны особенности усреднения в случае, когда как невозмущенная, так и возмущенная системы гамильтоновы.

A. Вычисление усредненной системы

Предположим, что в невозмущенной системе введены переменные действие — угол, т. е. такие канонически сопряженные* пере-

* Координаты (I, φ) называются *канонически сопряженными*, если симплектическая структура фазового пространства записывается в виде $\omega = \sum dI_k \wedge d\varphi_k$.

менные $(I_1, \ldots, I_n; \varphi_1, \ldots, \varphi_n \mod 2\pi)$, что невозмущенная функция Гамильтона H_0 зависит лишь от переменных действия I. Канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I}, \quad \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi},$$

т. е. при $H = H_0(I)$

$$\dot{\varphi} = \omega(I), \quad \dot{I} = 0,$$

где вектор частот $\omega(I)$ равен $\dfrac{\partial H_0}{\partial I}$.

Возмущенная система задается функцией Гамильтона $H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon)$, где функция H_1 имеет по угловым переменным φ период 2π. Следовательно, уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\dot{\varphi} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I}, \quad \dot{I} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}.$$

Теорема. *В гамильтоновой системе с n степенями свободы и n частотами эволюции медленных переменных не происходит в том смысле, что усредненная система имеет вид* $\dot{J} = 0$.

Доказательство. При вычислении интеграла от $\dfrac{\partial H_1}{\partial \varphi_s}$ по n-мерному тору можно сначала проинтегрировать по переменной φ_s. Этот однократный интеграл равен приращению периодической функции H_1 на периоде, т. е. нулю. □

Эта простая теорема показывает, что эволюция медленных переменных в гамильтоновой системе резко отличается от явлений в общих, негамильтоновых системах.

Б. Теорема Колмогорова

Предположим, что частоты независимы в том смысле, что производная частот по переменным действиям $\dfrac{\partial \omega}{\partial I}$ невырождена. В таком случае, как установил А. Н. Колмогоров (*Колмогоров А. Н.* О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1954. Т. 98, № 4. С. 527—530) при малом гамильтоновом возмущении бóльшая часть инвариантных торов $I = \text{const}$ лишь немного деформируется, не исчезая: фазовые кривые для большинства начальных условий в возмущенной системе, как и в невозмущенной, заполняют всюду плотно инвариантные торы.

Если отличен от нуля якобиан отображения $(n-1)$-мерной поверхности $H_0(I)=h$ в $(n-1)$-мерное проективное пространство, заданного формулой $I \mapsto \left(\frac{\partial H_0}{\partial I_1} : \ldots : \frac{\partial H_0}{\partial I_n}\right)$, то инвариантные торы возмущенной системы заполняют с точностью до остатка малой меры всё $(2n-1)$-мерное многообразие уровня функции Гамильтона $H(I, \varphi)=h$.

В частности, если число частот $n=2$, то эти двумерные торы делят трехмерное многообразие уровня. Поэтому даже и для тех фазовых кривых, которые не лежат на торах, переменные действия мало меняются в течение бесконечного интервала времени: фазовая кривая, начавшаяся в щели между двумя инвариантными торами, не может из нее выйти.

Если же число частот больше двух, то торы не делят многообразие уровня функции Гамильтона, и некоторые фазовые кривые (образующие множество малой меры) могут, блуждая вблизи резонансных поверхностей между инвариантными торами, уходить далеко от исходных значений переменных действия.

Существуют примеры (*Арнольд В. И.* О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // ДАН СССР. 1964. Т. 156, № 1. С. 9—12), в которых такой уход действительно происходит. Средняя скорость ухода в примерах этого рода экспоненциально малая (порядка $e^{-\sqrt{\varepsilon^{-1}}}$).

В. Теорема Нехорошева

Оказывается, средняя скорость ухода переменных действия от их начальных значений в любых гамильтоновых системах общего положения настолько мала, что она не улавливается никаким приближением теории возмущений (т. е. не проявляется в виде заметного ухода за время порядка $\frac{1}{\varepsilon^N}$ ни при каком N, где ε — параметр возмущения).

Точнее, Н. Н. Нехорошев (*Нехорошев Н. Н.* О поведении гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // Функциональный анализ и его приложения. 1971. Т. 5, № 4. С. 82—83; *Нехорошев Н. Н.* Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем, близких к интегрируемым // УМН. 1977. Т. 32, № 6. С. 5—66; см. также его диссертацию, МГУ, 1973) доказал, что для почти всякой невозмущенной функции Гамильтона $H_0(I)$ существуют поло-

жительные числа a и b, такие что средняя скорость изменения переменных действия I в возмущенной системе за время $T = e^{\varepsilon^{-a}}$ не превосходит ε^b.

Заметим, что T растет при $\varepsilon \to 0$ быстрее любой степени $1/\varepsilon$, так что изменение I за время $1/\varepsilon^N$ мало при любом N.

Постоянные a и b зависят от геометрических свойств невозмущенной функции Гамильтона H_0. Например, если функция H_0 строго выпукла (положительно определена матрица $\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}$, то можно взять $a = \dfrac{2}{6n^2 - 3n + 14}$, $b = \dfrac{3a}{2}$, где n — число частот.

Теорема доказана для почти всех H_0 в том смысле, что исключаются лишь функции H_0, удовлетворяющие бесконечному набору явно выписываемых алгебраических уравнений на коэффициенты Тейлора. Н. Н. Нехорошев называет исключительные функции *некрутыми*. Для некрутых H_0 уход возможен уже за время порядка $1/\varepsilon$. В примерах экспоненциально медленного ухода (см. п. Б) функция H_0 крутая.

Доказательство теоремы Нехорошева основано на следующем простом свойстве усреднения в гамильтоновой системе.

Предположим, что при некоторых значениях медленных переменных I в гамильтоновой n-частотной системе имеет место резонанс $(m, \omega) = 0$. Тогда вблизи соответствующей резонансной поверхности естественно проводить усреднение не по n-мерным торам, а по резонансным торам меньшей размерности. Размерность резонансного тора равна $n - 1$, если резонанс однократный, т. е. если направление целочисленного вектора m определено однозначно. Если уравнение $(m, \omega) = 0$ относительно m имеет k рационально независимых решений, то траектории быстрого движения всюду плотно заполняют резонансные торы размерности $n - k$, по которым и следует усреднять.

Теорема. *При усреднении по резонансным торам, соответствующим резонансу $(m, \omega) = 0$, направление эволюции переменных действия I в усредненной системе лежит в плоскости, натянутой* на резонансные векторы m (в случае однократного резонанса направле-*

* Заметим, что аффинная структура в пространстве переменных действия определена однозначно, и отождествление векторов пространства, двойственного к пространству частот, с векторами в пространстве переменных действия также однозначно определено.

ние эволюции определено однозначно: *это направление прямой, несущей вектор* m).

Доказательство. Рассмотрим для простоты случай однократного резонанса. Обозначим через γ угловую координату, не меняющуюся при резонансе: $\gamma = (m, \varphi)$. Для усреднения возмущенной системы достаточно усреднить функцию Гамильтона по быстрым переменным. В результате получим усредненную функцию Гамильтона $H_0 + \varepsilon \bar{H}_1$, где $\bar{H}_1$ зависит от переменных действия и от одной угловой переменной γ.

Уравнения усредненного движения дают теперь

$$\dot{I} = \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \varphi}.$$

Но $\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \varphi} = \left(\frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \gamma}\right)\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}\right)$ имеет направление вектора $\frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} = m$. □

Теорема Нехорошева выводится из доказанной теоремы на основании следующих соображений. Быстрая эволюция (со скоростью порядка ε) возможна лишь при резонансе и лишь в направлениях, порожденных резонансными векторами. Но условия крутизны, наложенные на H_0 (например, достаточна строгая выпуклость функции H_0) гарантируют нам, что такая эволюция происходит в направлении, выводящем из резонансной поверхности. Следовательно, резонанс нарушается, и эволюция идет лишь короткое время, вследствие чего и получается экспоненциально малая оценка средней скорости эволюции сверху.

Если же условия крутизны нарушаются, то на резонансной поверхности можно найти кривую, касательная к которой во всех точках принадлежит плоскости, натянутой на резонансные векторы. Вдоль такой кривой эволюция может идти со средней скоростью порядка ε, что приводит к уходу переменных действия от их начальных значений за время порядка $1/\varepsilon$.

§ 20. Адиабатические инварианты

Здесь дается обзор основных результатов теории адиабатических инвариантов в гамильтоновых системах с медленно меняющимися параметрами.

A. Понятие адиабатического инварианта

При рассмотрении гамильтоновых систем с медленно меняющимися параметрами возникает своеобразное явление: величины, во-

обще независимые, становятся асимптотически (при стремлении к нулю скорости изменения параметров) функциями друг друга.

Например, рассмотрим маятник переменной длины. Длина маятника и амплитуда колебаний, вообще говоря, независимы: если менять, длину качающегося маятника, то при возвращении длины маятника к исходному значению амплитуда колебаний, вообще говоря, может измениться произвольным образом, в зависимости от того, как именно менялась длина.

Оказывается, однако, что если изменение длины маятника производить достаточно медленно, то амплитуда колебаний при возвращении длины к прежнему значению почти не изменится. Более того, отношение энергии маятника к частоте будет оставаться почти неизменным в течение всего процесса, хотя как энергия, так и частота при изменении длины маятника меняются.

Величины, асимптотически сохраняющиеся при достаточно медленном изменении параметров гамильтоновой системы, называются адиабатическими инвариантами.

Точнее, рассмотрим систему дифференциальных уравнений Гамильтона $\dot{x} = v(x, \lambda)$, λ — параметр.

Функция I от фазовой точки x и параметра λ называется *адиабатическим инвариантом*, если для любой гладкой (дифференцируемой достаточное число раз) функции $\lambda(\tau)$ медленного времени $\tau = \varepsilon t$ вдоль решения уравнения $\dot{x} = v(x, \lambda(\varepsilon t))$ изменение величины $I(x(t), \lambda(\varepsilon t))$ остается малым на интервале времени $0 \leqslant t \leqslant 1/\varepsilon$, если ε достаточно мало.

Б. Построение адиабатического инварианта системы с одной степенью свободы

Предположим, что функция Гамильтона $H(p, q; \lambda)$ имеет при каждом значении параметра λ замкнутые фазовые кривые $H(p, q; \lambda) = h$ (скажем — окружающие положение равновесия, в котором частота малых колебаний отлична от нуля).

Обозначим через $I(p, q; \lambda)$ площадь, ограниченную фазовой кривой, проходящей через точку с координатами (p, q) при фиксированном значении λ, поделенную (по традиции) на 2π. Величина I называется *переменной действия*.

Пример. Для маятника $H = \frac{ap^2}{2} + \frac{bq^2}{2}$; фазовая кривая $H = h$ — эллипс площади $\pi\sqrt{\frac{2h}{a}}\sqrt{\frac{2h}{b}} = \frac{2\pi h}{\sqrt{ab}}$. Частота колебаний $\omega = \sqrt{ab}$. Та-

ким образом, для маятника

$$I = \frac{H}{\omega}.$$

Здесь роль параметра λ играет пара (a, b).

Теорема. *Переменная действия I является адиабатическим инвариантом гамильтоновой системы с одной степенью свободы.*

В. Доказательство адиабатической инвариантности действия

В основе доказательства лежит метод усреднения. Обозначим через φ угловую координату на замкнутых фазовых кривых, выбранную так, чтобы φ менялось вдоль каждой кривой пропорционально времени движения по кривой и вырастало на 2π за каждый оборот (разумеется, угловая координата φ, как и переменная действия I, зависит не только от фазовых координат (p, q), но и от параметра λ).

Тогда уравнение нашей системы при каждом фиксированном значении λ можно записать в виде стандартной невозмущенной системы метода усреднения:

$$\dot\varphi = \omega(I, \lambda(\tau)), \quad \dot I = 0, \quad \dot\tau = 0.$$

Если теперь λ медленно меняется, то вместо невозмущенной системы получится возмущенная

$$\dot\varphi = \omega + \varepsilon f, \quad \dot I = \varepsilon g, \quad \dot\tau = \varepsilon,$$

где функции f и g периодичны по φ с периодом 2π.

Составим усредненную систему.

Лемма. *Переменная действия является первым интегралом усредненной системы* (*т. е. среднее g по φ равно нулю*).

Доказательство. Рассмотрим область, ограниченную замкнутой фазовой кривой $I = I_0$ при начальном значении параметра. Согласно теореме об усреднении, образ этой области через любое время t из отрезка $\left[0, \frac{1}{\varepsilon}\right]$ есть, с ошибкой порядка ε, область, ограниченная некоторой замкнутой фазовой кривой $I = I_t$ при значении параметра $\lambda = \lambda(\varepsilon t)$.

Но уравнения движения гамильтоновы (хотя и неавтономные). По теореме Лиувилля площадь образа равна площади прообраза. Отсюда следует $I_t = I_0$. □

Следствие. *Отношение энергии маятника к частоте есть адиабатический инвариант.*

Задача. Шарик движется горизонтально между двумя вертикальными абсолютно упругими стенками, расстояние между которыми медленно меняется. Докажите, что произведение скорости шарика на расстояние между стенками — адиабатический инвариант.

Задача. Заряженная частица движется в магнитном поле, которое мало меняется на протяжении одного ларморовского витка частицы вокруг магнитной силовой линии. Доказать, что адиабатическим инвариантом является отношение квадрата компоненты скорости частицы по нормали к силовой линии к величине напряженности магнитного поля, $v_\perp^2/H$ (см., например, *Арцимович Л. А.* Управляемые термоядерные реакции. М.: Физматгиз, 1961).

Г. Адиабатические инварианты многочастотных гамильтоновых систем

Рассмотрим многочастотную систему уравнений Гамильтона $\dot p = -H_q$, $\dot q = H_p$, зависящую от параметра λ и допускающую при фиксированном λ переменные действие — угол: $\dot\varphi = \omega(I,\lambda)$, $\dot I = 0$ (где $\omega = \frac{\partial H_0}{\partial I}$) с функцией Гамильтона $H_0(I,\lambda)$, зависящей от n переменных действия невырожденным образом, так что

$$\det\Big(\frac{\partial\omega}{\partial I}\Big) = \det\Big(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}\Big) \neq 0.$$

Предположим, как и выше, что параметр λ начинает медленно меняться. Изменение p и q описывается уравнениями Гамильтона с переменной функцией H, а поведение переменных I описывается возмущенной системой (мы предполагаем, что $\lambda = \varepsilon t$, где ε — малый параметр).

Лемма. *Возмущенная система является гамильтоновой, с однозначной функцией Гамильтона* $H = H_0(I,\lambda) + \varepsilon H_1(I,\varphi,\lambda,\varepsilon)$.

Доказательство этой леммы требует либо некоторого проникновения в симплектическую геометрию или гамильтонов формализм (см., например, *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974), либо громоздких вычислений, которые мы опустим.

Следствие. *Переменные действия I являются первыми интегралами усредненной системы.*

Доказательство. Действительно, усредняемая функция — правая часть уравнения $\dot I = -\varepsilon\dfrac{\partial H_1}{\partial\varphi}$ — является производной периодиче-

ской функции и потому имеет среднее значение нуль (ср. теорему п. А § 19). □

Соединяя доказанное следствие с теоремой Нейштадта (см. п. Г § 18), мы приходим к следующему выводу:

Изменение переменных действия I в гамильтоновой многочастотной системе с медленно меняющимися параметрами остается меньшим ρ в течение времени $1/\varepsilon$, если пренебречь множеством начальных условий меры не более $c\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho}$ в исходном фазовом пространстве (*фазовое пространство предполагается здесь компактным, а производная $\frac{\partial \omega}{\partial I}$ предполагается невырожденной*).

Определение. Функция F от фазовой точки гамильтоновой системы и параметра называется *почти адиабатическим инвариантом*, если для любого $\rho > 0$ мера множества начальных условий в компактном фазовом пространстве, для которых изменение функции F вдоль решения уравнений Гамильтона с медленно меняющимся параметром превосходит ρ за время $1/\varepsilon$, стремится к нулю при ε, стремящемся к нулю.

Таким образом, *переменные действия* $(I_1, \ldots, I_n)$ *являются почти адиабатическими инвариантами невырожденной многочастотной гамильтоновой системы*.

Д. Поведение адиабатических инвариантов при $t \gg 1/\varepsilon$

Хотя адиабатический инвариант мало меняется за время $1/\varepsilon$, нет оснований предполагать, что его изменение останется малым за большие отрезки времени (скажем, порядка $1/\varepsilon^2$) или тем более за бесконечный отрезок времени.

Пример. Рассмотрим маятник с медленно периодически меняющимся параметром

$$\ddot{x} = -\omega^2(1 + a\cos\varepsilon t)x.$$

При сколь угодно малых ε (т. е. при сколь угодно медленном изменении параметра) возможен параметрический резонанс, при котором положение равновесия $x = 0$ становится неустойчивым. Ясно, что при параметрическом резонансе адиабатический инвариант линейного маятника меняется неограниченно (в течение бесконечно большого промежутка времени).

Оказывается, такое поведение адиабатического инварианта в системе с *периодически* медленно меняющимся параметром связано

именно с линейностью системы, точнее с независимостью периода колебаний от амплитуды. Если же в гамильтоновой системе с периодически медленно меняющимся параметром производная частоты быстрого движения по переменной действия отлична от нуля, то переменная действия мало меняется в течение бесконечного промежутка времени (см. *Арнольд В. И.* О поведении адиабатического инварианта при медленном периодическом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. 1962. Т. 142, № 4. С. 758—761).

Доказательство основано на том, что в этой ситуации существуют инвариантные торы, как в теореме Колмогорова (см. п. Б § 19).

Другим интересным случаем является случай, когда параметр меняется таким образом, что при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$ он имеет определенные пределы. В этом случае имеет смысл говорить о значении адиабатического инварианта на минус бесконечности, его значении на плюс бесконечности и о приращении адиабатического инварианта за бесконечно большое время,

$$\Delta I = I(+\infty) - I(-\infty).$$

Для линейного уравнения

$$\ddot{x} = -\omega^2(\varepsilon t)x, \quad \omega(-\infty) = \omega_-, \quad \omega(+\infty) = \omega_+,$$

можно доказать, что приращение адиабатического инварианта за бесконечное время — экспоненциально малая по ε величина (в предположении аналитичности функции ω, которая не должна менять знака и должна разумно вести себя на бесконечности). Более того, можно указать явно главный член асимптотики приращения адиабатического инварианта при $\varepsilon \to 0$ (см. *Дыхне А. М.* Квантовые переходы в адиабатическом приближении // ЖЭТФ. 1960. Т. 38, № 2. С. 570—578). Аналогичные результаты получены и для многомерных линейных систем. Аккуратные формулировки и доказательства имеются в статье *Федорюк М. В.* Адиабатический инвариант системы линейных осцилляторов и теория рассеяния // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, № 6. С. 1012—1018 (в которой, однако, опущены ссылки на предшествовавшие физические работы).

Вопрос о приращении адиабатического инварианта для одномерной нелинейной системы также исследовался физиками: здесь доказана малость приращения по сравнению с ε^N, т. е. отсутствие изменений адиабатического инварианта во всех порядках теории возмущений (*Lenard A.* Adiabatic invariance to all orders // Ann. of Physics.

1959. V. 6. P. 261—276). А. И. Нейштадт в аналитическом случае получил и экспоненциальную оценку.

Что касается нелинейных систем с несколькими степенями свободы, то для них адиабатическая инвариантность переменных действия, вопреки утверждениям в физической литературе, вообще говоря, не имеет места: эти величины являются лишь почти адиабатическими инвариантами, т. е. мало меняются для большинства начальных условий.

§ 21. Усреднение в слоении Зейферта

При исследовании окрестности замкнутой фазовой кривой встречается случай, когда близкие фазовые кривые в первом приближении также замыкаются, но при этом, прежде чем замкнуться, делают несколько оборотов вдоль исходной замкнутой фазовой кривой (так называемый случай резонанса). Изучение поведения системы вблизи резонансного или близкого к резонансу периодического движения приводит к своеобразному варианту метода усреднения: усреднению в слоении Зейферта.

А. Слоение Зейферта

Слоение Зейферта представляет собой разбиение прямого произведения $\mathbb{R}^2 \times S^1$ на окружности, которое строится следующим образом. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве цилиндр с горизонтальными основаниями и вертикальной осью. Разобьем внутренность цилиндра на вертикальные отрезки. Отождествим верхнее и нижнее основания цилиндра, предварительно повернув верхнее основание на угол $\frac{2\pi p}{q}$ (мы склеиваем точку $(z, 0)$ нижнего основания с точкой $(Az, 1)$ верхнего, где A — поворот на угол $\frac{2\pi p}{q}$, p и q взаимно простые целые числа).

Определение. *Слоением Зейферта* типа (p, q) называется трехмерное многообразие $\mathbb{R}^2 \times S^1$ вместе с его разбиением на окружности, полученным из разбиения внутренности цилиндра на отрезки, параллельные оси, при склейке оснований с поворотом на угол $\frac{2\pi p}{q}$.

Таким образом, каждая из окружностей слоения Зейферта получается склейкой q отрезков, за исключением одной, центральной окружности, полученной из оси цилиндра.

Рассмотрим q-листное накрытие пространства $\mathbb{R}^2 \times S^1$ слоения Зейферта типа (p, q). Накрывающее пространство само диффеоморфно $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Слоение Зейферта в исходном многообразии индуцирует на накрывающем многообразии разбиение на окружности. Это разбиение можно рассматривать как слоение Зейферта типа $(p, 1)$. (Склейка производится теперь с поворотом на угол $2\pi p$.)

Слоение Зейферта типа $(p, 1)$ является уже расслоением на окружности, и притом — прямым произведением. При накрытии каждая окружность исходного слоения Зейферта диффеоморфно накрывается q окружностями, кроме одной, центральной окружности, накрываемой q-листно (рис. 101).

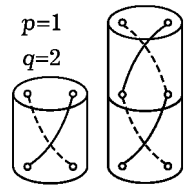


Рис. 101

Б. Определение усреднения в слоении Зейферта

Предположим, что в пространстве $\mathbb{R}^2 \times S^1$ слоения Зейферта дано векторное поле. Тогда в накрывающем расслоении также определяется векторное поле. Каждый вектор поля можно спроектировать на базу $\mathbb{R}^2$ накрывающего расслоения. Усредним полученный вектор на базе вдоль слоя накрывающего расслоения. Мы получим в каждой точке базы определенный вектор. Таким образом мы определили на базе векторное поле. Описанная операция построения из поля в пространстве слоения Зейферта поля на плоскости называется *усреднением исходного поля вдоль слоения Зейферта*.

Иными словами, усреднение вдоль слоения Зейферта типа (p, q) определяется как обычное усреднение в накрывающем его q-листном расслоении.

В. Свойства усредненного поля

При усреднении в обычном расслоении на базе может получиться любое векторное поле. При усреднении в слоении Зейферта на базе получается векторное поле со специальными свойствами: например, в центральной точке вектор усредненного поля обязательно обращается в нуль, если $q > 1$.

Теорема. *В результате усреднения в слоении Зейферта типа* (p, q) *получается поле, инвариантное относительно поворота плоскости на угол* $\dfrac{2\pi}{q}$.

Доказательство. Реализуем базу как одно из оснований исходного цилиндра. Тогда усреднение в слоении Зейферта превращается в усреднение по q отрезкам, параллельным оси цилиндра. При повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$ эти q отрезков переходят друг в друга. Теперь легко видеть, что усреднение коммутирует с поворотом на угол $\frac{2\pi}{q}$ (после поворота приходится усреднять по тем же отрезкам, лишь в другом порядке). □

Г. Пример

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = i\omega z + \varepsilon f(z,t), \quad \text{где } z \in \mathbb{C},$$

f — комплексная (не обязательно голоморфная) функция, имеющая период 2π по вещественному времени t, ε — малый параметр. Уравнение, отвечающее $\varepsilon = 0$, будем называть *невозмущенным*.

Предположим, что частота невозмущенного движения ω рациональна или близка к рациональному числу (p,q).

Интегральные кривые невозмущенного уравнения с $\omega = p/q$ образуют в $\mathbb{C} \times S^1 = \{z, t \bmod 2\pi\}$ слоение Зейферта типа (p,q).

После усреднения вдоль этого слоения получается усредненное уравнение

$$\dot{z} = \varepsilon F(z),$$

где векторное поле F переходит в себя при повороте плоскости переменной z на угол $\frac{2\pi}{q}$.

Д. Коэффициенты Тейлора симметричного поля

Будем задавать векторное поле на плоскости одной комплексной переменной z комплексной (не обязательно голоморфной) функцией F. Ряд Тейлора комплексной функции F по переменным x, y (где $z = x + iy$) можно записать в виде ряда Тейлора по переменным $z, \bar{z}$. Запишем этот ряд в виде

$$\sum F_{k,l} z^k \bar{z}^l.$$

Предложение. *Если поле F инвариантно относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{q}$, то из коэффициентов $F_{k,l}$ отличны от нуля лишь те, для которых $k - l$ сравнимо с 1 по модулю q.*

Доказательство. Ряд Тейлора единствен. Поэтому каждый член ряда определяет векторное поле, инвариантное относительно поворота. Вектор $z^k\bar{z}^l$ при повороте z на угол $\frac{2\pi}{q}$ поворачивается на угол $\frac{(k-l)2\pi}{q}$. Этот поворот есть поворот на угол $\frac{2\pi}{q}$, если и только если $k-l$ сравнимо с 1 по модулю q. □

Рассмотрим квадрант решетки целых неотрицательных точек (k,l). Отметим те из них, для которых $k-l$ сравнимо с 1 по модулю q. Среди отмеченных точек всегда будет точка $(1,0)$ и все целые точки на прямой, выходящей из этой точки параллельно биссектрисе квадранта. Эти точки соответствуют полям $z\Phi(|z|^2)$, инвариантным относительно поворота на любой угол.

Среди отмеченных точек всегда будет точка $(0,q-1)$. Эта точка соответствует полю $\bar{z}^{q-1}$, инвариантному относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{q}$. Все отмеченные точки образуют серию лучей, параллельных биссектрисе, начинающихся в точках $(0,mq-1)$ и $(mq+1,0)$ на сторонах квадранта.

Е. Случай симметрии порядка 3

Рассмотрим векторные поля, инвариантные относительно группы симметрий 3-го порядка (т. е. рассмотрим случай $q=3$).

Мономы наименьшей степени в ряду Тейлора поля, симметричного относительно поворота на 120°, даются отмеченными точками плоскости (k,l) с наименьшими $k+l$. Два первых монома — это z и $\bar{z}^2$. Таким образом, каждое поле на плоскости, инвариантное относительно поворота на угол $2\pi/3$, имеет вид

$$F(z)=az+b\bar{z}^2+O(|z|^3).$$

Отбрасывая последнее слагаемое, мы получаем простейшее дифференциальное уравнение с симметрией порядка 3

$$\dot{z}=az+b\bar{z}^2.$$

Здесь коэффициенты a, b и фазовая координата z комплексны.

Предположим, что $a\neq 0$, $b\neq 0$, умножая z на число и меняя единицу времени, можно добиться $b=1$, $|a|=1$. Изменение фазового портрета при $a=e^{i\varphi}$, $b=1$ показано на рис. 102. При любых a имеется 4 положения равновесия в вершинах равностороннего треугольника и в его центре. При чисто мнимых a система гамильтонова. Чтобы исследовать систему при любых a, достаточно заметить, что

она всегда получается из этой гамильтоновой системы формальным умножением переменных z и t на комплексные числа (т. е. поворотом и растяжением плоскости z и поворотом гамильтонова поля на постоянный угол).

Ж. Учет отброшенных членов

Попытаемся теперь учесть отброшенные члены $O(|z|^3)$. Предположим, что $|a|$ мал (это соответствует тому, что в исходной системе дифференциальных уравнений почти имел место резонанс третьего порядка). Тогда радиус треугольника особых точек также мал (имеет порядок $|a|$). Рассмотрим наше симметричное векторное поле в окрестности точки $z=0$, которая велика по сравнению с $|a|$, но все же мала (по сравнению с 1).

В такой окрестности отброшенные члены $O(|z|^3)$ малы по сравнению с оставленными. Из этого нетрудно вывести, что их учет не изменит в существенном вида фазового портрета, если он был структурно устойчивым. В нашем случае фазовый портрет структурно не устойчив лишь при чисто мнимых a, когда система гамильтонова. Гамильтоновость не сохраняется при учете отброшенных членов.

Для всякого луча плоскости комплексной переменной a, не идущего по мнимой оси, при достаточно малых $|a| \neq 0$ вид фазового портрета полной системы (при условии $b \neq 0$) в окрестности начала координат, малой по сравнению с 1 и большой по сравнению с $|a|$, будет таков, как указано на рис. 102, $\varphi \neq \pm\pi/2$.

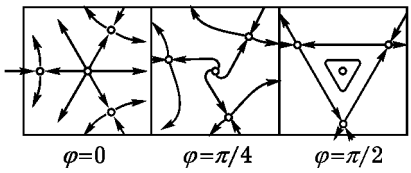


Рис. 102

Исследование перестройки фазового портрета при прохождении точки a через мнимую ось составляет специальную задачу, к которой мы вернемся в главе 6. В случае общего положения перестройка определяется еще одним членом ряда Тейлора: все происходит так же, как для уравнения

$$\dot{z} = az + b\bar{z}^2 + cz|z|^2,$$

где $\operatorname{Re} c \neq 0$.

3. Применение к исходному уравнению

Проведенный анализ усредненного уравнения дает значительную информацию об исходной системе в случае, когда параметр ε достаточно мал. Не останавливаясь на обосновании, приведем лишь перевод полученных результатов на язык фазовых кривых исходного уравнения.

Три положения равновесия в вершинах равностороннего треугольника соответствуют одной замкнутой интегральной кривой исходного уравнения. При стремлении к нулю разницы между частотой невозмущенного движения ω и резонансной частотой $p/q = 1/3$ эта замкнутая кривая сливается с исходной замкнутой кривой, трижды обойдя вдоль нее.

Устойчивость положений равновесия усредненной системы интерпретируется как устойчивость периодических решений возмущенной, и т. д. Существенная разница возникает лишь в одном месте, а именно в случае, когда усредненная система имеет сепаратрису, идущую из седла в седло.

В возмущенной системе седлам соответствует замкнутая кривая, а входящей и выходящей сепаратрисам — притягивающееся и отталкивающееся инвариантные многообразия этой замкнутой кривой. Но если в усредненной системе сепаратрисы при пересечении сливаются, то в возмущенной системе это, вообще говоря, не так. Чтобы представить себе, как пересекаются инвариантные многообразия в трехмерном пространстве возмущенной системы, рассмотрим сечение этого пространства плоскостью $t = 0$.

Эту плоскость наше решение пересекает в трех точках, являющихся неподвижными точками куба отображения последования. Каждая из трех неподвижных точек имеет входящее и выходящее инвариантное многообразие (кривую). Но эти кривые, пересекаясь, не обязаны совпадать (в отличие от фазовых кривых уравнения на плоскости, которые, единожды пересекшись, обязаны совпадать на всем своем протяжении).

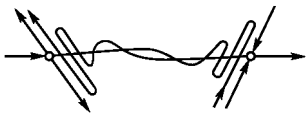


Рис. 103

При итерациях отображения последования из пересекающихся дуг инвариантных многообразий образуется сложная сеть, называемая гомоклинической картиной* (рис. 103).

И. Резонансы других порядков

Для резонансов порядка q выше 3 в качестве усредненной системы первого нетривиального приближения получается таким же образом система

$$\dot{z} = az + zA(|z|^2) + \bar{z}^{q-1}.$$

В частности, для резонанса порядка 4 получается система

$$\dot{z} = az + zA|z|^2 + \bar{z}^3.$$

Эти системы, а также система, соответствующая резонансу порядка 2, подробно рассматриваются в гл. 6.

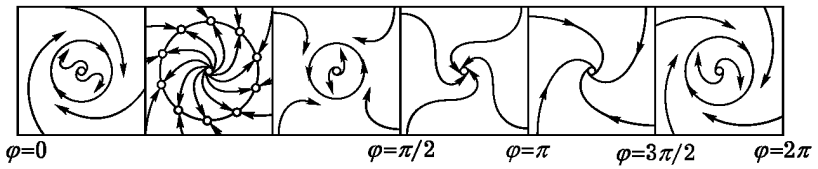


Рис. 104

На рис. 104 изображена перестройка фазовых портретов в усредненной системе, соответствующей резонансу пятого порядка

$$\dot{z} = az + Az|z|^2 + \bar{z}^4$$

при $\operatorname{Re} A < 0$, $\operatorname{Im} A < 0$, $a = \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varepsilon \ll 1$.

* Неподвижная точка диффеоморфизма плоскости называется гомоклинической, если входящая и выходящая инвариантные кривые пересекаются, не совпадая.

Глава 5

Нормальные формы

Очень плодотворный метод при работе с дифференциальными уравнениями состоит в том, чтобы их не решать, а преобразовывать к возможно более простому виду. Принадлежащая Пуанкаре теория нормальных форм указывает такие наиболее простые формы, к которым можно привести дифференциальное уравнение в окрестности положения равновесия или периодического движения.

Приведение к нормальным формам осуществляется при помощи рядов по степеням отклонения от равновесия или периодического движения. Эти ряды не всегда сходятся. Но даже в случаях, когда ряды расходятся, метод нормальных форм оказывается весьма мощным орудием исследования дифференциальных уравнений: несколько первых членов ряда часто дают значительную информацию о поведении решений, достаточную для построения фазового портрета. Метод нормальных форм является также основным орудием исследования в теории бифуркаций, где он применяется к семействам уравнений, зависящих от параметров.

В настоящей главе изложены простейшие основные положения метода нормальных форм.

§ 22. Формальное приведение к линейной нормальной форме

Теорема Пуанкаре утверждает, что в классе формальных степенных рядов «нерезонансное» векторное поле может быть приведено к своей линейной части в особой точке формальным диффеоморфизмом. Сформулируем условие нерезонансности, о котором идет речь.

A. Резонансы

Вместо векторного поля рассмотрим формальный векторный степенной ряд $v(x) = Ax + \dots$ от n переменных с комплексными ко-

эффициентами. Предполагается, что собственные числа матрицы A различны.

Определение. Набор собственных чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ называется *резонансным*, если между собственными числами существует целочисленное соотношение вида

$$\lambda_s = (m, \lambda),$$

где $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_k \geqslant 0$, $\sum m_k \geqslant 2$. Это соотношение называется *резонансом*. Число $|m| = \sum m_k$ называется *порядком* резонанса.

Пример. Соотношение $\lambda_1 = 2\lambda_2$ — резонанс порядка 2, $2\lambda_1 = 3\lambda_2$ — не резонанс, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ — резонанс порядка 3 (точнее, из этого соотношения следует резонанс $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$).

Б. Теорема Пуанкаре

Следующая теорема является основным результатом диссертации Пуанкаре.

Теорема. *Если собственные числа матрицы A нерезонансны, то уравнение*

$$\dot{x} = Ax + \ldots$$

формальной заменой переменной $x = y + \ldots$ приводится к линейному уравнению

$$\dot{y} = Ay$$

(*многоточия означают ряды, начинающиеся с членов выше первой степени*).

Доказательство теоремы Пуанкаре состоит в последовательном уничтожении членов второй, третьей и т. д. степеней в правой части. Каждый шаг основан на решении линейного гомологического уравнения, с вывода которого мы и начнем.

В. Вывод гомологического уравнения

Пусть h — векторный многочлен* от y порядка $r \geqslant 2$ и $h(0) = h'(0) = 0$.

Лемма. *Дифференциальное уравнение $\dot{y} = Ay$ при замене $x = y + h(y)$ превращается в*

$$\dot{x} = Ax + v(x) + \ldots,$$

* То есть векторное поле, компоненты которого — многочлены. Вектор-многочлен (полином) является суммой *вектор-одночленов* (*вектор-мономов*); последние представляют собой поля, у которых одна компонента одночлен (моном), а остальные компоненты — нули. *Порядок* многочлена есть степень низшего члена.

где $v(x) = \frac{\partial h}{\partial x}Ax - Ah(x)$, *а многоточие означает члены порядка выше* r.

Доказательство.

$$\dot{x} = \Big(E + \frac{\partial h}{\partial y}\Big)Ay = \Big(E + \frac{\partial h}{\partial y}\Big)A(x - h(x) + \ldots) =$$

$$= Ax + \Big[\frac{\partial h}{\partial x}Ax - Ah(x)\Big] + \ldots \quad \square$$

Замечание. В квадратных скобках стоит скобка Пуассона векторных полей Ax и $h(x)$.

Мы будем обозначать через L_A оператор, переводящий любое поле в скобку Пуассона линейного поля Ax с данным полем:

$$L_A h = \frac{\partial h}{\partial x}Ax - Ah(x).$$

Определение. *Гомологическим уравнением, связанным с линейным оператором* A, называется уравнение

$$L_A h = v,$$

где h — неизвестное, а v — известное векторное поле.

Г. Решение гомологического уравнения

Линейный оператор L_A действует из пространства формальных векторных полей в себя. Он оставляет инвариантными пространства однородных вектор-полиномов любой степени.

Вычислим собственные числа и собственные векторы оператора L_A. Обозначим через e_i собственный вектор оператора A с собственным числом λ_i. Будем обозначать через $(x_1, \ldots, x_n)$ координаты в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Как обычно, x^m будет обозначать $x_1^{m_1}\ldots x_n^{m_n}$.

Лемма. *Если оператор* A *диагональный, то и оператор* L_A *на пространстве однородных вектор-многочленов диагональный. Собственными векторами оператора* L_A *являются вектор-одночлены* $x^m e_s$. *Собственные числа оператора* L_A *линейно зависят от собственных чисел оператора* A, *а именно*

$$L_A x^m e_s = [(m, \lambda) - \lambda_s]x^m e_s.$$

Доказательство. Пусть $h = x^m e_s$. Тогда у вектора $\frac{\partial h}{\partial x}Ax$ отлична от нуля только s-я компонента, и она равна

$$\frac{\partial x^m}{\partial x}Ax = \sum \frac{m_i}{x_i}x^m \lambda_i x_i = (m, \lambda)x^m.$$

Но $Ah(x) = \lambda_s h(x)$. $\square$

Если все собственные числа оператора L_A отличны от нуля, то он обратим.

Следствие. *Если набор собственных чисел оператора A нерезонансный, то гомологическое уравнение $L_A h = v$ разрешимо в классе формальных степенных рядов h для любого формального векторного поля v без свободного члена и линейной части в нуле.*

Если отсутствуют резонансы порядка k, то гомологическое уравнение $L_A h = v$ разрешимо для любого однородного вектор-многочлена v степени k в классе однородных вектор-многочленов степени k (*здесь $k \geqslant 2$*).

Замечание. Если оператор A недиагональный (имеет жордановы клетки), то и оператор L_A имеет жордановы клетки, но собственные числа, как легко видеть, даются той же формулой, что и в диагональном случае. Поэтому для нерезонансных (хотя бы и кратных) собственных чисел оператор L_A на пространстве однородных вектор-многочленов обратим. Итак, приведенное выше следствие справедливо и в случае кратных собственных чисел.

Д. Доказательство теоремы Пуанкаре

Доказательство. Пусть исходное уравнение имело вид $\dot{x} = Ax + v_r(x) + \ldots$, где v_r — члены степени r $(r \geqslant 2)$.

Решим гомологическое уравнение $L_A h_r = v_r$ (на основании следствия п. Г). Сделаем подстановку $x = y + h_r(y)$.

Исходное уравнение примет вид $\dot{y} = Ay + w_{r+1}(y) + \ldots$ (используем лемму п. В). Таким образом мы убили члены степени r в правой части исходного уравнения.

Убивая последовательно члены степени $2, 3, \ldots$, мы строим последовательность подстановок. Произведение этих подстановок стабилизируется в классе формальных рядов, т. е. члены любой фиксированной степени, начиная с некоторого шага, не меняются. Предельная подстановка превращает наше формальное уравнение в $\dot{y} = Ay$. □

Замечание 1. Хотя сходимость рядов и не доказана, сходящейся заменой возмущение можно в нерезонансном случае отодвинуть как угодно далеко: мы доказали, что для любого N настоящей (даже полиномиальной) заменой переменной исходное уравнение может быть приведено к виду $\dot{y} = Ay + o(|y|^N)$.

Замечание 2. Если возмущение $v = v_r + v_{r+1} + \ldots$ имеет порядок r, то, решая гомологическое уравнение $L_A h = v$, мы получаем после

подстановки $x = y + h$ уравнение с возмущением порядка $2r - 1$ — обстоятельство, связанное со сверхсходимостью полученных повторением этой процедуры приближений (ср. § 12).

Замечание 3. Доказательство теоремы Пуанкаре сохраняет силу и в случае кратных собственных чисел (см. замечание в конце п. Г), лишь бы они были нерезонансными.

Замечание 4. Если исходное уравнение было вещественным, а собственные числа нет, то собственный базис можно выбрать из комплексно сопряженных векторов. В этом случае все замены в теореме Пуанкаре можно выбирать вещественными, т. е. переводящими комплексно сопряженные векторы в комплексно сопряженные.

§ 23. Резонансный случай

В резонансном случае теорема Пуанкаре — Дюлака утверждает, что формальной заменой переменных можно убить все нерезонансные члены в уравнении.

А. Резонансные мономы

Пусть набор собственных чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ оператора A резонансный. Пусть e_s — вектор собственного базиса, x_i — координаты в базисе e_i, $x^m = x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$ — моном (одночлен) от координат x_i.

Определение. Вектор-моном $x^m e_s$ называется *резонансным*, если $\lambda_s = (m, \lambda)$, $|m| \geqslant 2$.

Пример. Для резонанса $\lambda_1 = 2\lambda_2$ единственным резонансным мономом является $x_2^2 e_1$. Для резонанса $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ резонансными являются все мономы $(x_1 x_2)^k x_s e_s$.

Б. Теорема Пуанкаре — Дюлака

Рассмотрим дифференциальное уравнение, заданное формальным рядом $v(x) = Ax + \ldots$,

$$\dot{x} = Ax + \ldots$$

Теорема. *При помощи формальной замены переменных $x = y + \ldots$ уравнение можно привести к каноническому виду*

$$\dot{y} = Ay + w(y),$$

где все мономы ряда w резонансные.

Доказательство. Начнем убивать нелинейные члены ряда v. Через несколько шагов мы можем столкнуться с неразрешимым гомологическим уравнением

$$L_A h = v$$

относительно однородного вектор-многочлена h степени r, равной порядку резонанса. В этом случае мы не можем уничтожить все члены степени r возмущения v подходящей подстановкой. Вместо этого мы убьем лишь те из них, какие можно. Иными словами, мы представим v и h в виде суммы вектор-одночленов

$$v = \sum v_{m,s} x^m e_s, \quad h = \sum h_{m,s} x^m e_s$$

и положим

$$h_{m,s} = \frac{v_{m,s}}{(m, \lambda) - \lambda_s}$$

для тех m и s, для которых знаменатель отличен от нуля. Тем самым мы определим поле h.

Выполним обычную подстановку доказательства теоремы Пуанкаре, $x = y + h(y)$. Тогда в исходном уравнении исчезнут все члены степени r, кроме резонансных, которые не изменятся. Уравнение примет вид

$$\dot{y} = Ay + w_r(y) + \ldots,$$

где w_r состоит лишь из резонансных членов.

Следующие шаги проводятся таким же образом. Оставшиеся резонансные члены w_r не влияют на гомологическое уравнение, которое мы решаем, и не меняются при следующих заменах. Действительно, при подстановке $y = z + g_s(z)$ уравнение

$$\dot{y} = Ay + w_2(y) + \ldots + w_s(y) + \ldots$$

превращается в

$$\dot{z} = Az + w_2(z) + \ldots + w_{s-1}(z) + [w_s(z) - (L_A g_s)(z)] + \ldots;$$

скобка Пуассона w_2 с g_s имеет уже степень $s+1$.

Таким образом, все нерезонансные члены степени s убиваются выбором g_s и доказательство заканчивается так же, как и в нерезонансном случае. □

В. Примеры

Практически теорема Пуанкаре — Дюлака используется обычно для того, чтобы выделить резонансные члены невысокого порядка и отодвинуть

возмущение до членов некоторого конечного порядка, т. е. чтобы привести уравнение к виду

$$\dot{x} = Ax + w(x) + o(|x|^N),$$

(где w — многочлен из резонансных мономов) уже не формальной, а настоящей заменой переменных (если угодно, полиномиальной).

Пример 1. Рассмотрим векторное поле на плоскости с особой точкой типа узел с резонансом $\lambda_1 = 2\lambda_2$. Теорема Пуанкаре — Дюлака позволяет (формально) привести уравнение к нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + c x_2^2, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2. \end{cases}$$

В этом случае нормальная форма полиномиальная, так как резонансных членов конечное число (всего 1).

Пример 2. Рассмотрим векторное поле на плоскости $\mathbb{R}^2$ с особой точкой с чисто мнимыми собственными числами $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ (центр по линейному приближению).

Перейдем к собственному базису. Собственные векторы можно взять комплексно сопряженными. Координаты на $\mathbb{C}^2$ в базисе из комплексно сопряженных векторов принято обозначать через z, $\bar{z}$ (эти числа действительно сопряжены лишь на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$).

Наше дифференциальное уравнение на $\mathbb{R}^2$ задает на $\mathbb{C}^2$ уравнение, которое можно записать в виде

$$\dot{z} = \lambda z + \ldots, \quad \dot{\bar{z}} = \bar{\lambda}\bar{z} + \overline{\ldots}$$

(многоточие означает ряд по степеням z и $\bar{z}$). Поскольку второе уравнение получается из первого сопряжением, его можно не писать.

Имеется резонанс $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. По теореме Пуанкаре — Дюлака, наше уравнение приводится к виду

$$\dot{\zeta} = \lambda\zeta + c\zeta|\zeta|^2 + O(|\zeta|^5)$$

вещественной заменой переменной (см. замечание 4 в п. Д § 22). Следовательно, $r^2 = |\zeta|^2$ — гладкая вещественная функция на $\mathbb{R}^2$. Для нее

$$(r^2)^{\cdot} = \dot{\zeta}\overline{\zeta} + \zeta\dot{\overline{\zeta}} = (2\operatorname{Re} c)r^4 + O(r^6).$$

Если вещественная часть c отрицательна (соответственно положительна), то положение равновесия устойчиво (соответственно неустойчиво).

Таким образом, первые несколько шагов метода Пуанкаре дают метод решения вопроса об устойчивости особой точки, нейтральной в линейном приближении. При этом совершенно несущественно, можно ли продолжать построение дальше и сходится ли вся процедура в целом, важно лишь, чтобы величина «нелинейного декремента» $\operatorname{Re} c$ была отлична от нуля.

Замечание. Обобщением теоремы Пуанкаре является одна общая теорема теории алгебр Ли — так называемая теорема Э. Картана о репликах, обобщающая также теорему о жордановой нормальной форме.

Рассмотрим конечномерную алгебру Ли. Пусть u — элемент этой алгебры Ли. Коммутирование с этим элементом определяет линейный оператор из пространства алгебры Ли в себя, $v \mapsto [u, v]$. Элемент u называется *полупростым*, если оператор коммутирования с u диагонализуем (имеет собственный базис). Элемент u называется *нильпотентным*, если оператор коммутирования с u нильпотентен (т. е. все собственные числа этого оператора равны нулю).

Теорема о репликах утверждает, что каждый элемент алгебры разлагается (и притом единственным образом) в сумму полупростого элемента S и коммутирующего с ним нильпотентного элемента N:

$$u = S + N, \quad SN = NS.$$

Элементы S и N называются *репликами* элемента u.

(В теории жордановой нормальной формы S — оператор с диагональной матрицей, а N — сумма нильпотентных жордановых клеток.)

В алгебре Ли струй векторных полей с особой точкой 0 полупростые поля — это поля, которые в подходящей системе координат линейны и задаются диагональной матрицей. Нильпотентное поле состоит из нильпотентной линейной части и членов высшей степени. Условие коммутирования S и N означает как раз, что в нелинейной части поля в указанной системе координат могут присутствовать только резонансные члены.

Теорему Пуанкаре — Дюлака можно было бы вывести из указанной общей теоремы о репликах (которую нужно применять к конечномерным алгебрам Ли струй векторных полей в нуле).

§ 24. Области Пуанкаре и Зигеля

При исследовании сходимости рядов Пуанкаре, построенных в предыдущих параграфах, в зависимости от расположения собственных чисел на плоскости комплексного переменного существенно различаются два случая.

А. Резонансные плоскости

Рассмотрим комплексное n-мерное пространство всевозможных наборов собственных чисел $\mathbb{C}^n = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\}$.

Определение. Гиперплоскость в $\mathbb{C}^n$, заданная целочисленным уравнением

$$\lambda_s = (m, \lambda), \quad m_k \geqslant 0, \quad \sum m_k \geqslant 2,$$

называется *резонансной плоскостью*.

Изменяя целочисленный вектор m и номер s, мы получим счетное число резонансных плоскостей. Посмотрим, как расположено все множество резонансных плоскостей в пространстве собствен-

ных чисел $\mathbb{C}^n$. Оказывается, в одной части $\mathbb{C}^n$ резонансные плоскости лежат дискретно, а в другой — всюду плотно.

Определение. Набор собственных чисел λ принадлежит *области Пуанкаре*, если выпуклая оболочка n точек $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ на плоскости одного комплексного переменного не содержит нуля.

Набор собственных чисел λ принадлежит *области Зигеля*, если нуль лежит внутри выпуклой оболочки n точек $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Замечание. При $n > 2$ области Пуанкаре и Зигеля открыты и разделены конусом. При $n = 2$ область Зигеля имеет вещественную коразмерность 1 в $\mathbb{C}^2$.

Б. Резонансы в области Пуанкаре

Предположим, что набор собственных чисел λ принадлежит области Пуанкаре.

Теорема 1. *Каждая точка области Пуанкаре удовлетворяет не более чем конечному числу резонансных соотношений* $\lambda_s = (m, \lambda)$, $|m| \geqslant 2$, $m_i \geqslant 0$, *и имеет окрестность, не пересекающуюся с другими резонансными плоскостями.*

Иными словами, резонансные плоскости лежат в области Пуанкаре дискретно.

Доказательство. Согласно определению, на плоскости комплексных чисел существует вещественная прямая, отделяющая набор собственных чисел от нуля. Рассмотрим ортогональные проекции собственных чисел на нормаль к этой прямой, направленную от нуля. Все эти проекции не меньше, чем расстояние отделяющей прямой от нуля.

Но коэффициенты m_i резонансного соотношения неотрицательны. Следовательно, при достаточно большом $|m|$ проекция (m, λ) на нормаль будет больше наибольшей проекции собственного числа на нормаль к отделяющей прямой. □

Теорема 2. *Если собственные числа* λ *линейной части поля* v *в* O *лежат в области Пуанкаре, то даже в резонансном случае поле формальной заменой переменных приводится к полиномиальной нормальной форме.*

Доказательство. Согласно теореме 1, число резонансных членов конечно, так что теорема 2 вытекает из теоремы 1 и теоремы Пуанкаре — Дюлака. □

Замечание. В области Пуанкаре резонанс возможен только в случае, если одно из собственных чисел с неотрицательными ко-

эффициентами выражается через остальные, *не считая его самого*, т. е. если $\lambda_s = (m, \lambda)$, то $m_s = 0$. Действительно, если $m_s > 0$, то $0 = (m, \lambda) - \lambda_s$ имеет положительную проекцию на нормаль к отделяющей прямой.

В. Резонансы в области Зигеля

Предположим теперь, что набор собственных чисел λ принадлежит области Зигеля.

Теорема 3. *В области Зигеля резонансные плоскости лежат всюду плотно.*

Доказательство. Точка 0 лежит либо внутри некоторого треугольника с вершинами $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, либо на отрезке (λ_1, λ_2). В первом случае рассмотрим угол с вершиной 0, образованный линейными комбинациями чисел λ_1 и λ_2 с вещественными неотрицательными коэффициентами.

Отрицательные кратные числа λ_3 лежат в этом угле. Разобьем угол на параллелограммы с вершинами в целочисленных линейных комбинациях чисел λ_1 и λ_2. Пусть d — диаметр такого параллелограмма. Для любого натурального числа N число $-N\lambda_3$ лежит в одном из наших параллелограммов. Следовательно, оно лежит не далее d от одной из вершин, так что

$$|N\lambda_3 + m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2| \leqslant d.$$

Из этого неравенства следует, что расстояние от нашей точки λ до резонансной плоскости $\lambda_3 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + (N+1)\lambda_3$ не превосходит d/N. Итак, теорема доказана, если нуль лежит в треугольнике.

В случае когда 0 лежит на отрезке между λ_1 и λ_2, существуют сколь угодно большие целые p_1 и p_2 с $|p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2| \leqslant d$.

Это дает резонансную плоскость на расстоянии меньше $d/|p|$ от λ. □

Определение. Точка $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ называется *точкой типа* (C, ν), если при любом s

$$|\lambda_s - (m, \lambda)| \geqslant \frac{C}{|m|^\nu}$$

для всех целочисленных векторов m с неотрицательными компонентами m_i, $\sum m_i = |m| \geqslant 2$.

Теорема 4. *Мера множества точек, не являющихся ни при каком $C > 0$ точками типа (C, ν), равна нулю, если $\nu > \frac{n-2}{2}$.*

Доказательство. Зафиксируем шар в $\mathbb{C}^n$ и оценим меру не (C,ν)-точек в нем. Неравенство, входящее в определение, определяет окрестность резонансной плоскости ширины не более $\frac{C_1 C}{|m|^{\nu+1}}$. Поэтому мера части этой окрестности, попавшей в шар, не превосходит $\frac{C_2 C^2}{|m|^{2\nu+2}}$. Суммируя по m с фиксированным $|m|$, получаем не более $|m|^{n-1}\frac{C_3 C^2}{|m|^{2\nu+2}}$. Суммируя по $|m|$, получаем $C_4(\nu)C^2<\infty$, если $\nu>\frac{n-2}{2}$. Следовательно, множество не (C,ν)-точек в шаре покрывается множествами сколь угодно малой меры. □

В вещественном случае в теореме 4 требуется $\nu>n-1$.

Г. Теоремы Пуанкаре и Зигеля

Предположим теперь, что векторное поле задано не формальным, а сходящимся рядом, т. е. что мы рассматриваем дифференциальное уравнение с голоморфной правой частью.

Теорема (Пуанкаре)**.** *Если собственные числа линейной части голоморфного векторного поля в особой точке принадлежат области Пуанкаре и нерезонансны, то поле в окрестности особой точки биголоморфно эквивалентно своей линейной части.*

Иными словами, ряды Пуанкаре, построенные в предыдущих параграфах, сходятся, если собственные числа принадлежат области Пуанкаре.

Теорема (Зигеля)**.** *Если собственные числа линейной части голоморфного векторного поля в особой точке образуют вектор типа (C,ν), то поле в окрестности особой точки биголоморфно эквивалентно своей линейной части.*

Иными словами, ряды Пуанкаре сходятся при почти всех (в смысле теории меры) линейных частях поля в особой точке.

Замечание. Все нерезонансные векторы области Пуанкаре являются векторами типа (C,ν) при некоторых $C>0$. Напротив, в области Зигеля всюду плотное множество образуют как векторы типа (C,ν), так и резонансные векторы, равно как и векторы нерезонансные, но не являющиеся векторами типа (C,ν) ни при каких C и ν.

Для наборов собственных чисел последнего типа, хотя и несоизмеримых, но слишком близких к соизмеримости, ряды Пуанкаре могут расходиться, так что поле может быть формально эквивалентным своей линейной части, но биголоморфно неэквивалентным.

Доказательства теорем Пуанкаре и Зигеля получаются посредством некоторых упрощений из доказательств аналогичных теорем для отображений, приведенных в § 28.

Д. Теорема Пуанкаре — Дюлака

Рассмотрим теперь случай резонансных собственных чисел.

Теорема. *Если собственные числа линейной части голоморфного векторного поля в особой точке принадлежат области Пуанкаре, то поле в окрестности особой точки биголоморфно эквивалентно полиномиальному, в котором все вектор-мономы с коэффициентами степени выше первой резонансные.*

Иными словами, ряды Пуанкаре сходятся, если собственные числа лежат в области Пуанкаре, даже в случае резонанса.

Замечание. Напротив, если собственные числа лежат в области Зигеля, то ряды, приводящие к формальным нормальным формам при наличии резонансов, часто расходятся. Первый пример этого рода построил еще Эйлер (*Euler L.* De seriebus divergenti bus // Opera omnia. Ser. 1. Leipzig; Berlin, 1924. V. 14. P. 247, 585—617; см. с. 601).

В примере Эйлера

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

начало координат является особой точкой типа седло-узел. Несмотря на аналитичность правой части, сепаратриса, разделяющая обе половины полуплоскости $x < 0$, не аналитична, а лишь бесконечно дифференцируема: $y = \sum (k-1)!\, x^k$.

Много примеров расходимости рядов Пуанкаре построил Брюно (*Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Труды ММО. 1971. Т. 25. С. 119—262; в этой работе доказана также сходимость рядов в некоторых случаях, выходящих за рамки теоремы Зигеля).

Е. Вещественный и неаналитический случаи

Теоремы Пуанкаре и Пуанкаре — Дюлака переносятся на вещественно-аналитический случай и на случай бесконечно дифференцируемых векторных полей или даже на случай полей конечной (достаточно большой) гладкости.

В случае Зигеля такое обобщение также возможно (см., например, *Sternberg S.* On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space // Amer. J. Math. 1958. V. 80, № 3. P. 623—631; 1959. V. 81, № 3. P. 578—604).

Следует, однако, заметить, что ситуации, в которых применимы эти теоремы, топологически тривиальны. Действительно, случай Пуанкаре для вещественного поля может встретиться, лишь когда собственные числа лежат либо все в левой полуплоскости, либо все в правой. В этом случае (независимо от резонансов) система в окрестности неподвижной точки в вещественном пространстве топологически эквивалентна стандартной системе $\dot{x} = -x$ (либо $\dot{x} = +x$). Все фазовые кривые входят в асимптотически устойчивое положение равновесия при $t \to +\infty$ (либо выходят из равновесия при $t \to -\infty$).

В ситуации теоремы Зигеля в вещественной области применима теорема Гробмана — Хартмана (система топологически эквивалентна стандартному седлу). Действительно, если хотя бы одно из ненулевых собственных чисел линейной части лежит на мнимой оси, то на мнимой оси лежит и комплексно сопряженное собственное число; пара $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ приводит к резонансу $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Нулевое собственное число всегда резонансное. Таким образом, теорема Зигеля применима в вещественном случае лишь к системам без собственных чисел на мнимой оси, а такие системы локально топологически эквивалентны своей линейной части (теорема Гробмана — Хартмана, § 13).

В отличие от *теорем* Пуанкаре и Зигеля, *метод* Пуанкаре применим к исследованию топологически сложных случаев, когда имеются собственные числа на мнимой оси. А именно, метод применяется для нормализации конечного числа членов ряда Тейлора. После этого доказывается, что члены более высокого порядка уже не изменят качественной картины.

Простейший пример этого рода разобран выше в п. В § 23. Особенно полезен этот метод в теории бифуркаций (см. гл. 6).

§ 25. Нормальная форма отображения в окрестности неподвижной точки

Построение подходящей системы координат для отображения пространства в себя вблизи неподвижной точки параллельно теории нормальных форм дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия. В этом параграфе указано, какой вид принимают основные положения теории нормальных форм в этом случае.

А. Резонансы. Области Пуанкаре и Зигеля

Рассмотрим формальное отображение $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, заданное формальным степенным рядом $F(x) = Ax + \dots$ Пусть $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — соб-

ственные числа линейного оператора A. *Резонансом* называется соотношение

$$\lambda_s = \lambda^m, \quad \text{где } \lambda^m = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n},\ m_k \geqslant 0,\ \sum m_k \geqslant 2.$$

Пример. При $n=1$ резонансными собственными числами являются 0 и все корни любой целой степени из единицы, а все остальные числа λ не резонансные.

Определение. Набор собственных чисел *принадлежит области Пуанкаре*, если модули собственных чисел все меньше единицы или все больше единицы.

Таким образом, отображение F с собственными числами линейной части, принадлежащими области Пуанкаре, является в окрестности начала координат сжатым (если $|\lambda|<1$), или же (если $|\lambda|>1$) сжатым является обратное отображение.

Определение. Дополнение к области Пуанкаре составляет *область Зигеля*. При $n=1$ область Зигеля сводится к единичной окружности $|\lambda|=1$. Уравнение резонанса $\lambda_s=\lambda^m$ определяет в пространстве собственных чисел $\mathbb{C}^n$ комплексную гиперповерхность. Она называется *резонансной поверхностью*. В области Пуанкаре резонансные поверхности лежат дискретно. В области Зигеля как резонансные, так и нерезонансные точки всюду плотны.

Б. Формальная линеаризация

Рассмотрим прежде всего вопрос о формальной нормальной форме отображения в неподвижной точке.

Теорема. *Если набор собственных чисел отображения F в неподвижной точке нерезонансный, то отображение $x \mapsto F(x)$ приводится к своей линейной части $x \mapsto Ax$ формальной заменой переменных $x = \mathscr{H}(y) = y + \dots$:*

$$F \circ \mathscr{H} = \mathscr{H} \circ A.$$

Доказательство. Пусть $H(y) = y + h(y)$, где h — однородный вектор-многочлен степени $r \geqslant 2$. Тогда

$$H \circ A \circ H^{-1}(x) = Ax + [h(Ax) - Ah(x)] + \dots,$$

где точками обозначены члены степени выше r. Выражение в квадратных скобках является однородным вектор-многочленом степени r. Этот многочлен линейно зависит от h. Линейный оператор

$$M_A \colon h(x) \mapsto [h(Ax) - Ah(x)]$$

на пространстве однородных вектор-многочленов имеет собственные числа $\lambda^m - \lambda_s$ и собственные векторы $h(x) = x^m e_s$ (здесь, как обычно, векторы e_k образуют собственный базис оператора A, $x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, x_k — координаты в базисе $\{e_k\}$; собственные числа оператора A для простоты предположены различными).

Таким образом мы приходим к гомологическому уравнению относительно h

$$M_A h = v,$$

для решения которого приходится делить коэффициенты разложения v на числа $\lambda^m - \lambda_s$. Итак, условие резонанса в нашей задаче имеет вид $\lambda_s = \lambda^m$.

Дальнейшее доказательство теоремы не отличается от проведенного в § 22 для случая дифференциальных уравнений. □

B. Вопросы сходимости

Теоремы Пуанкаре и Зигеля переносятся на рассматриваемый случай дискретного времени следующим образом.

Теорема (Пуанкаре). *Если все собственные числа голоморфного диффеоморфизма в неподвижной точке по модулю меньше единицы (или если все больше) и резонансы отсутствуют, то отображение превращается в свою линейную часть биголоморфным локальным диффеоморфизмом в окрестности неподвижной точки.*

Теорема (Зигеля). *Для почти всех (в смысле меры Лебега) наборов собственных чисел линейной части голоморфного диффеоморфизма в неподвижной точке диффеоморфизм биголоморфно эквивалентен своей линейной части в неподвижной точке.*

А именно, для эквивалентности диффеоморфизма его линейной части достаточно, чтобы собственные числа удовлетворяли неравенствам

$$|\lambda_s - \lambda^m| \geqslant C|m|^{-\nu}$$

для всех $s = 1, \dots, n$, $|m| = \sum m_k \geqslant 2$, $m_k \geqslant 0$. Наборы собственных чисел, удовлетворяющих этому неравенству, называются наборами мультипликативного типа (C, ν). Множество наборов собственных чисел λ, не являющихся наборами мультипликативного типа (C, ν) ни при каком C, имеет меру нуль, если $\nu > \dfrac{n-1}{2}$.

Доказательство теорем Пуанкаре и Зигеля проводится почти таким же образом, как для дифференциальных уравнений. Хотя теорема Зигеля известна уже более 30 лет, ее доказательство до сих пор, кажется, не было опубликовано. Это доказательство приведено в § 28.

Г. Резонансный случай

Каждому резонансу $\lambda_s = \lambda^m$ соответствует резонансный вектор-моном $x^m e_s$ (где e_s — вектор собственного базиса, $x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, x_k — координаты в собственном базисе).

Теорема (Пуанкаре — Дюлака)**.** *Формальное отображение $x \mapsto \mapsto Ax + \dots$, где матрица оператора A диагональна, формальной заменой $x = y + \dots$ приводится к нормальной форме $y \mapsto Ay + w(y)$, где ряд w состоит из одних резонансных мономов. Если собственные числа линейной части оператора A по модулю все меньше (все больше) единицы, то голоморфное отображение $x \mapsto Ax + \dots$ биголоморфной заменой приводится к полиномиальной нормальной форме из одних резонансных членов.*

В резонансном случае метод Пуанкаре обычно используется для приведения к нормальной форме конечного числа членов ряда Тейлора отображения в неподвижной точке.

Пример. Рассмотрим отображение $\mathbb{C}^1$ в себя с неподвижной точкой O, с собственным числом λ, являющимся корнем степени n из единицы. Такое отображение приводится подходящим выбором координаты к виду

$$x \mapsto \lambda x + cx^{n+1} + O(|x|^{2n+1}).$$

Например, если $\lambda = -1$, то отображение приводится к виду

$$x \mapsto -x + cx^3 + O(|x|^5).$$

Эта формула позволяет исследовать устойчивость неподвижной точки вещественного отображения. Действительно, квадрат отображения имеет вид

$$x \mapsto x - 2cx^3 + O(|x|^5).$$

Следовательно, если $c > 0$, то неподвижная точка O нашего отображения устойчива.

Таким образом, первые несколько шагов метода Пуанкаре позволяют исследовать устойчивость неподвижной точки в сомнительном по линейному приближению случае.

§ 26. Нормальная форма уравнения с периодическими коэффициентами

Одним из вариантов метода нормальных форм Пуанкаре является редукция к простейшему виду уравнения с периодическими коэффициентами.

А. Нормальная форма линейного уравнения с периодическими коэффициентами

Рассмотрим линейное уравнение с комплексным фазовым пространством

$$\dot{x} = A(t)x,$$

где комплексный линейный оператор $A(t)\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ зависит от t 2π-периодически.

Оператором монодромии называется линейный оператор $M\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, переводящий начальное условие при $t=0$ в значение решения с этим начальным условием при $t=2\pi$ (отображение монодромии определено не только для линейных уравнений, но для любых уравнений с периодическими коэффициентами; в этом более общем случае отображение монодромии обычно называется *отображением* (или *функцией*) *последования* Пуанкаре, или просто *отображением Пуанкаре*).

Теорема (Флоке). *Если оператор монодромии диагонален и $\mu_s = e^{2\pi\lambda_s}$ — его собственные числа, то исходное линейное уравнение с периодическими коэффициентами приводится к уравнению с постоянными коэффициентами*

$$\dot{y} = \Lambda y,$$

где Λ — диагональный оператор с собственными числами λ_s, посредством линейной 2π-периодической замены $x = B(t)y$.

Доказательство. Рассмотрим линейный оператор, переводящий начальное условие исходного уравнения при $t=0$ в значение решения с этим начальным условием в момент t. Обозначим этот оператор через $g^t\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Через $f^t\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ обозначим аналогичный оператор для уравнения $\dot{y} = \Lambda y$. Тогда $g^0 = f^0 = E$, $g^{2\pi} = f^{2\pi} = M$ — оператор монодромии (ввиду выбора Λ). Положим $B(t) = g^t(f^t)^{-1}$. Оператор $B(t)$ определяет искомую замену. □

Замечание. Доказательство теоремы Флоке использовало только представление оператора монодромии в виде $M = e^{2\pi\Lambda}$. Поэтому периодической заменой переменных приводится к уравнению с постоянными коэффициентами не только комплексное уравнение с диагональным оператором монодромии, но всякое уравнение, для которого оператор монодромии имеет логарифм.

Всякий невырожденный комплексный линейный оператор имеет логарифм (в этом легко убедиться, записав матрицу оператора в жордановой форме).

Следствие 1. *Всякое комплексное линейное уравнение с 2π-периодическими коэффициентами приводится к уравнению с постоянными коэффициентами 2π-периодической линейной заменой переменных.*

Вещественный линейный оператор не всегда имеет вещественный логарифм, даже если его определитель положителен (определитель оператора монодромии всегда положителен). Действительно, рассмотрим, например, линейный оператор на плоскости с собственными числами $(-1, -2)$. Если этот оператор является экспонентой другого линейного оператора, то собственные числа этого последнего — комплексные, но не комплексно сопряженные числа. Поэтому наш оператор на вещественной плоскости не имеет вещественного логарифма.

С другой стороны, нетрудно проверить, что квадрат вещественного линейного оператора всегда имеет вещественный логарифм. Отсюда вытекает

Следствие 2. *Всякое вещественное линейное уравнение с 2π-периодическими коэффициентами приводится к уравнению с постоянными коэффициентами 4π-периодической линейной заменой переменных.*

Обычно удобнее пользоваться комплексной приводимостью, чем вещественной с удвоенным периодом.

Б. Вывод гомологического уравнения

Рассмотрим линейное уравнение с постоянными коэффициентами $\dot{y} = \Lambda y$. Сделаем в этом уравнении 2π-периодическую по времени t нелинейную замену координат

$$x = y + h(y, t),$$

где h — вектор-функция (или формальный ряд по степеням y) с 2π-периодическими коэффициентами.

Лемма. *Если $h = O(|y|^r)$ (или ряд h начинается с членов степени не ниже r), $r \geqslant 2$, то*

$$\dot{x} = \Lambda x + \left[\frac{\partial h}{\partial x}\Lambda x - \Lambda h + \frac{\partial h}{\partial t}\right] + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены степени выше r относительно x.

Доказательство.

$$\dot{x} = (E + h_y)\Lambda y + h_t = (E + h_y)\Lambda(x - h(x,t)) + h_t + \ldots =$$
$$= \Lambda x + [h_x \Lambda x - \Lambda h(x,t) + h_t] + \ldots \quad \square$$

Определение. *Гомологическим уравнением*, связанным с уравнением с 2π-периодическими коэффициентами $\dot{y} = \Lambda y$, называется уравнение относительно 2π-периодического по t векторного поля h

$$L_\Lambda h + h_t = v,$$

где v — заданное 2π-периодическое векторное поле,

$$(L_\Lambda h)(x,t) = \frac{\partial h}{\partial x}\Lambda x - \Lambda h(x,t).$$

Мы будем также рассматривать случай, когда h и v формальные ряды с 2π-периодическими по t коэффициентами.

В. Решение гомологического уравнения

Пусть сперва v и h — ряды Тейлора — Фурье

$$v(x,t) = \sum v_{m,k,s} x^m e^{ikt} e_s, \quad h = \sum h_{m,k,s} x^m e^{ikt} e_s.$$

Формальное решение гомологического уравнения дается формулой

$$h_{m,k,s} = \frac{v_{m,k,s}}{ik + (m,\lambda) - \lambda_s},$$

где λ_j — собственные числа оператора Λ.

Условие резонанса:

$$\lambda_s = (m,\lambda) + ik,$$
$$m_j \geqslant 0, \quad \sum m_j \geqslant 2, \quad -\infty < k < +\infty, \quad 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Если для данных m, s резонанса нет, то ряд Фурье $\sum h_{m,k,s} e^{ikt}$ и его производная по t сходятся. Поэтому в отсутствие резонансов гомологическое уравнение разрешимо в классе однородных многочленов с 2π-периодическими по t коэффициентами, а значит, и в классе формальных степенных рядов с 2π-периодическими по t коэффициентами.

Если же резонанс имеет место, то гомологическое уравнение формально разрешимо в случае, когда ряд Тейлора — Фурье для v не содержит резонансных членов, т. е. когда обращаются в нуль коэффициенты $v_{m,k,s}$ для тех членов ряда, для которых выполнено условие резонанса $\lambda_s = ik + (m,\lambda)$.

Г. Формальная нормальная форма

Действуя обычным способом, мы в нерезонансном случае приводим уравнение с 2π-периодическими формальными коэффициентами к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\dot{y} =$

$= \Lambda y$ посредством замены переменной, имеющей вид формального ряда по y с 2π-периодическими по t коэффициентами.

В резонансном случае мы приводим уравнение к виду

$$\dot{y} = \Lambda y + w(y, t),$$

где w — формальный ряд по степеням y с 2π-периодическими по t коэффициентами, состоящий из одних лишь резонансных членов (заметим, что резонансные члены любого фиксированного порядка по y содержат лишь конечное число гармоник Фурье, так как условие резонанса $\lambda_s = (m, \lambda) + ik$ однозначно определяет k).

Практически используется обычно лишь нормализация членов невысокого порядка.

Пример. Рассмотрим уравнение с 2π-периодическими коэффициентами. Предположим, что размерность фазового пространства n равна 2 и что оба собственных числа оператора монодромии комплексны и равны по модулю единице.

Линеаризованное комплексифицированное уравнение в подходящей системе координат имеет вид

$$\dot{z} = i\omega z$$

(как обычно, уравнение для $\bar{z}$, как сопряженное с выписанным, опускается). Собственные числа: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Резонансные члены в уравнении для $\dot{z}$ определяются из условия

$$ik + (m_1 - m_2 - 1)i\omega = 0.$$

Если вещественное число ω иррационально, то $k = 0$, $m_1 = m_2 + 1$. Следовательно, уравнение приводится к не зависящей от времени формальной нормальной форме

$$\dot{z} = i\omega z + c_1 z|z|^2 + c_2 z|z|^4 + \ldots$$

Настоящей (не формальной) заменой переменной можно привести уравнение, например, к виду

$$\dot{z} = i\omega z + c_1 z|z|^2 + \ldots,$$

где (2π-периодическая) зависимость от t сохранилась лишь в членах 5 порядка малости по z, обозначенных многоточием.

Заметим, что в этом случае каждый шаг метода Пуанкаре сводится к усреднению по t и $\arg z$ и что полученное уравнение инвариантно относительно сдвигов t и поворотов z.

Д. Случай соизмеримости

Предположим теперь, что в предыдущем примере число ω рационально, $\omega = p/q$. В этом случае из уравнения для резонансных членов получаем

$$k = pr, \quad m_1 = m_2 + 1 - qr.$$

Для исследования нормальной формы удобно рассмотреть q-листное накрытие вдоль оси времени. Заметим, что интегральные кривые линейной части нашего уравнения образуют слоение Зейферта типа (p, q) (ср. § 21). На пространстве q-листного накрытия интегральные кривые образуют тривиальное расслоение, и мы можем ввести координаты прямого произведения. Координату вдоль слоя мы будем обозначать через $t \pmod{2\pi q}$. Координата на базе, ζ, определяется из условия

$$z = e^{i\omega t}\zeta.$$

В этих обозначениях линейная часть нашего уравнения принимает вид $\dot\zeta = 0$, а нормальная форма — вид не зависящего от t формального ряда

$$\dot\zeta = \sum w_{k,l}\zeta^k\overline{\zeta}^l,$$

где $k - l \equiv 1 \bmod q$.

Иными словами, на базе q-листного накрытия получается (формальное) уравнение, инвариантное относительно вращений на угол $2\pi/q$.

Если вместо полного формального приведения ограничиться нормализацией нескольких первых членов ряда, то мы получим для ζ уравнение с $2\pi q$-периодическим по времени остаточным членом порядка $q+1$:

$$\dot\zeta = \zeta a(|\zeta|^2) + b\overline{\zeta}^{q-1} + \dots$$

В этом случае каждый шаг метода Пуанкаре сводится к усреднению вдоль слоения Зейферта, поэтому полученное уравнение инвариантно относительно сдвигов t и поворотов ζ на углы, кратные $2\pi/q$.

Исследование получившихся уравнений проведено в гл. 6.

E. Обсуждение сходимости

Область Пуанкаре для уравнения с периодическими коэффициентами $\dot x = \Lambda x + \dots$ определяется условием: все собственные числа линеаризованного уравнения лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (либо все в правой).

В этой области

1) резонансные плоскости $\{\lambda\colon \lambda_s = (m, \lambda) + ik\}$ лежат дискретно;

2) нормальная форма при резонансе содержит лишь конечное число членов;

3) ряды Пуанкаре сходятся.

Дополнение к области Пуанкаре образует область Зигеля. В области Зигеля

1) резонансные плоскости образуют всюду плотное множество;

2) нормальные формы могут содержать бесконечное число членов;

3) ряды Пуанкаре могут расходиться.

Однако *для почти всех* (*в смысле меры Лебега*) *наборов собственных чисел* λ *оператора* Λ *голоморфное* 2π*-периодическое по* t *дифференциальное уравнение* $\dot{x} = \Lambda x + \ldots$ *в окрестности нулевого решения приводится к автономной нормальной форме* $\dot{x} = \Lambda x$ *биголоморфным* 2π*-периодическим по* t *преобразованием* (*теорема Зигеля* для случая периодических коэффициентов).

Доказательство обычное, см. § 28.

Ж. Окрестность замкнутой фазовой кривой

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$, имеющее периодическое решение и, следовательно, замкнутую фазовую кривую. Все сказанное выше об окрестности нулевого решения уравнения с периодическими коэффициентами непосредственно переносится на этот случай.

Действительно, в окрестности замкнутой фазовой кривой можно выбрать координаты так, что поле направлений, заданное векторным полем v, будет полем направлений уравнения с периодическими коэффициентами, причем размерность фазового пространства уменьшится на единицу (координата, меняющаяся вдоль фазовой кривой, станет называться временем).

Замечание. Если фазовое пространство — многообразие, то окрестность замкнутой фазовой кривой может оказаться не диффеоморфной прямому произведению окружности на трансверсальный диск.

Пример. Фазовое пространство — лист Мёбиуса, фазовая кривая — его осевая окружность.

Вообще, окрестность окружности в многообразии не будет прямым произведением, если и только если многообразие не ориентируемо и окружность — его дезориентирующий путь. В этом случае для перехода к уравнению с периодическими коэффициентами приходится прибегать к двулистному накрытию исходной окружности.

3. Связь с функциями последования

Теорию нормальных форм уравнений с периодическими коэффициентами можно было бы вывести из теории нормальных форм их отображений последования, т. е. нормальных форм диффеоморфизмов в окрестности неподвижной точки. Обратно, изучение диффеоморфизма в окрестности неподвижной точки можно свести к исследованию уравнения с периодическими

коэффициентами, для которого этот диффеоморфизм является функцией последования.

В случае конечной и даже бесконечной вещественной гладкости построение дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами* по данному отображению последования не представляет больших трудностей. В аналитической или голоморфной ситуации положение более сложно. Этот вопрос эквивалентен вопросу об аналитической (голоморфной) тривиальности аналитических (голоморфных) расслоений над круговым кольцом, в предположении топологической тривиальности. Хотя в сущности положительный ответ и следует из теории пучков и многообразий Штейна, доказательство, насколько мне известно, не опубликовано (я благодарен В. П. Паламодову и Ю. С. Ильяшенко за разъяснения по этому поводу). Мы не будем вдаваться в эту теорию, тем более, что все необходимые для изучения дифференциальных уравнений и диффеоморфизмов результаты можно не выводить одни из других, а получать независимо, используя тот же метод доказательства.

И. Случай условно-периодических коэффициентов

Метод Пуанкаре допускает непосредственное обобщение на случай условно-периодических коэффициентов. Речь идет об уравнении

$$\dot{x} = \Lambda x + v(x, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega,$$

где φ — точка r-мерного тора, ω — постоянный вектор, $\Lambda\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ линейный оператор (не зависящий от φ), v — векторное поле, линейная часть которого в точке $x = 0$ равна нулю.

На компоненты вектора частот ω накладываются обычные условия нормальной несоизмеримости. Условия резонанса имеют в этой ситуации вид

$$\lambda_s = i(k, \omega) + (m, \lambda),$$

где k пробегает решетку целых точек r-мерного пространства, а m удовлетворяет обычным условиям $m_p \geqslant 0$, $\sum m_p \geqslant 2$.

Функция v предполагается аналитической (голоморфной) по x и φ, периода 2π по $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$. Доказывается приводимость системы к виду

$$\dot{y} = \Lambda y, \quad \dot{\varphi} = \omega$$

аналитической (голоморфной) заменой $x = y + h(y, \varphi)$, 2π-перио-

* Включить данное отображение в фазовый поток автономного уравнения, вообще говоря, нельзя (пример — диффеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения, дифференцируемо не эквивалентный повороту, см. § 11).

дической по φ (*Белага Э. Г.* О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности условно-периодического движения // ДАН СССР. 1962. Т. 143, № 2. С. 255—258.)

Недостатком этой теории является несовершенство теории линейных уравнений с условно-периодическими коэффициентами: в то время как для уравнений с периодическими коэффициентами постоянства линейной части можно было добиться подходящим периодическим линейным преобразованием координат, для уравнений с условно-периодическими коэффициентами предположение о независимости Λ от φ является существенным ограничением.

К. Проблема приводимости линейных уравнений с условно-периодическими коэффициентами

Под линейным уравнением с условно-периодическими коэффициентами ниже понимается система

$$\dot{x} = A(\varphi)x, \quad \dot{\varphi} = \omega,$$

где $x \in \mathbb{C}^n$, $\varphi \in T^r$, ω — вектор с целочисленно независимыми компонентами, $A(\varphi)$ — линейный оператор в $\mathbb{C}^n$.

Таким образом, уравнение задается парой (A, ω), где A есть гладкая функция на торе с операторными (если угодно, матричными) значениями, а ω — вектор на торе.

Определение. Линейное уравнение с условно-периодическими коэффициентами *приводимо*, если существует такая (гладкая) операторная функция на торе B, что замена $x = B(\varphi)y$ превращает исходное уравнение в уравнение с постоянными коэффициентами $\dot{y} = Cy$.

Проблема приводимости состоит в том, *приводимо ли линейное уравнение общего положения*.

Неизвестно даже, *не существует ли в функциональном пространстве аналитических пар* (A, ω) *области, свободной от приводимых систем*.

Вопрос о приводимости линейных (и нелинейных) уравнений с условно-периодическими коэффициентами естественно возникает при исследовании окрестности инвариантного тора автономного уравнения, несущего условно-периодические движения. Сам этот тор обычно отыскивается при помощи последовательных приближений, которые в случаях общего положения, как правило, можно модифицировать так, чтобы одновременно как получить инва-

риантный тор, так и привести к нормальной форме уравнения в вариациях вдоль него, обойдя таким образом нерешенную проблему приводимости (по существу используется приводимость для некоторой «невозмущенной» задачи).

§ 27. Нормальная форма окрестности эллиптической кривой

Теория Пуанкаре нормальных форм дифференциальных уравнений в окрестности особой точки имеет близким аналогом теорию нормальных форм окрестностей эллиптических кривых на комплексных поверхностях. В настоящем параграфе коротко рассматривается эта теория, являющаяся приложением методов теории дифференциальных уравнений к аналитической геометрии и сама имеющая приложения в теории дифференциальных уравнений (см. § 36).

А. Эллиптические кривые

Эллиптической кривой называется одномерное комплексное многообразие, гомеоморфное тору.

Пример. Рассмотрим плоскость комплексного переменного $\mathbb{C}$ и два комплексных числа (ω_1, ω_2), отношение которых невещественно. Отождествим каждую точку φ из $\mathbb{C}$ с точкой, полученной из нее сдвигами на ω_1 и на ω_2 (а следовательно, и со всеми точками $\varphi + k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, где k_1, k_2 — целые числа). После такого отождествления плоскость $\mathbb{C}$ превратится в эллиптическую кривую

$$\Gamma = \mathbb{C}/\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}.$$

Таким образом, эллиптическую кривую Γ можно представить себе как параллелограмм со сторонами (ω_1, ω_2), в котором отождествлены соответственные точки на противоположных сторонах.

Можно доказать, что конструкцией описанного примера получаются (с точностью до биголоморфной эквивалентности) все эллиптические кривые. Этот факт — отнюдь не очевидная теорема.

Рассмотрим, например, полосу $0 \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \tau$ и склеим все точки φ, $\varphi + 2\pi$, а также склеим точки краев полосы, отождествляя точку φ с $\varphi + i\tau + \sigma + {}$ $+ 0{,}5\sin\varphi$ при вещественных φ. Полученное многообразие биголоморфно отображается на фактормногообразие $\mathbb{C}/\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$, но доказать это не легко. При $\tau \to 0$, вероятно, ω_1/ω_2 стремится к числу вращения при обычных диофантовых условиях.

Числа ω_1 и ω_2 называются периодами кривой. Если умножить оба периода на одно и то же комплексное число, то получатся новые периоды, которые задают эллиптическую кривую, биголоморфно эквивалентную исходной. Поэтому периоды всегда можно выбрать так, чтобы $\omega_1 = 2\pi$.

В таком случае мы будем обозначать второй период через ω. Всегда можно считать, что $\operatorname{Im}\omega > 0$. Разным ω соответствуют, вообще говоря, биголоморфно неэквивалентные эллиптические кривые (точнее, кривые биголоморфно неэквивалентны, если соответствующие решетки $\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}$ не переводятся друг в друга умножением на комплексное число).

Задача*. Докажите, что фазовые кривые одномерного уравнения Ньютона с потенциальной энергией 3-й или 4-й степени — эллиптические кривые (если их рассматривать в комплексной области).

Указание. Роль координаты φ на накрывающей эллиптическую кривую плоскости играет время t движения по фазовой кривой, определенное соотношением $dt = dx/y$ (время называется также эллиптическим интегралом *первого рода*).

Задача. Пусть потенциальная энергия — многочлен 4-й степени с двумя минимумами. Докажите, что периоды колебаний (не обязательно малых) с одинаковой полной энергией в обеих ямах совпадают.

Указание. Интегралы первого рода вдоль любых двух меридианов тора одинаковы.

Задача. Пусть потенциальная энергия — многочлен третьей степени с локальными максимумом и минимумом. Докажите, что период колебаний в яме равен периоду движения из бесконечности в бесконечность по некомпактной фазовой кривой с тем же значением полной энергии.

Замечание. Подбирая потенциальную энергию третьей или четвертой степени, можно получить любую эллиптическую кривую. Поэтому из результатов предыдущих задач следует, что эллиптическая кривая является алгебраическим многообразием.

Б. Простейшие расслоения над эллиптической кривой

Простейшей поверхностью, содержащей эллиптическую кривую, является прямое произведение эллиптической кривой на комплексную прямую. Подобно тому, как над окружностью кроме прямого произведения окружности на прямую есть нетривиальное расслоение со слоем прямая (лист Мёбиуса), над эллиптической кривой, кроме прямого произведения, существуют другие расслоения со слоем $\mathbb{C}$.

Рассмотрим расслоение плоскости двух комплексных переменных на комплексные прямые. Мы будем называть слои этого расслоения *вертикальными* прямыми.

Координаты в $\mathbb{C}^2$ мы будем обозначать (r, φ), причем координата r будет считаться вертикальной, а φ горизонтальной. Наше расслоение $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ сопоставляет точке (r, φ) точку φ горизонтальной комплексной прямой.

* Решение этой и следующих задач основано на элементарных сведениях о топологии римановых поверхностей, имеющихся в любом курсе теории функций комплексного переменного.

Пусть Γ — эллиптическая кривая, накрываемая горизонтальной прямой. Кривая Γ получается из горизонтальной оси φ отождествлением точек, различающихся на целые кратные периодов (ω_1, ω_2).

Отождествим на плоскости $\mathbb{C}^2$ вертикальные прямые, проекции которых на горизонталь различаются на целые кратные периодов. Такое отождествление превратит $\mathbb{C}^2$ в расслоение над эллиптической кривой Γ. Но само отождествление вертикальных прямых можно провести разными способами (подобно тому, как при склеивании расслоения над окружностью из прямоугольника можно получать либо цилиндр, либо лист Мёбиуса, в зависимости от того, как склеиваются вертикальные прямые).

Простейший способ склейки состоит в том, что мы отождествляем точку (r, φ) с точками $(r, \varphi + \omega_1)$ и $(r, \varphi + \omega_2)$. При этом получается прямое произведение. Следующий по сложности способ склейки включает подкручивание склеиваемых вертикальных прямых.

Пример. Пусть λ — комплексное число, отличное от нуля, и пусть Γ — эллиптическая кривая с периодами $(2\pi, \omega)$. Отождествим на плоскости $\mathbb{C}^2$ с координатами (r, φ) точки

$$(r, \varphi), \quad (r, \varphi + 2\pi), \quad (\lambda r, \varphi + \omega).$$

После такого отождествления $\mathbb{C}^2$ превращается в гладкую комплексную поверхность Σ, а расслоение $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(r, \varphi) \mapsto \varphi$, превращается в расслоение $\Sigma \to \Gamma$, базой которого является эллиптическая кривая Γ, а слоем $\mathbb{C}$. Уравнение $r = 0$ задает вложение Γ в Σ.

Поверхность Σ можно представить себе следующим образом (в случае вещественного λ). Рассмотрим вещественное трехмерное пространство с горизонтальной плоскостью $\{\varphi \in \mathbb{C}\}$, расслоенное на вертикальные прямые. Рассмотрим полосу $0 \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \operatorname{Im}\omega$. Склеим вертикальные плоскости, ограничивающие эту полосу, отождествляя точку (r, φ) на вертикальной плоскости $\operatorname{Im}\varphi = 0$ (r — координата по вертикали) с точкой $(\lambda r, \varphi + \omega)$ на плоскости $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\omega$. Кроме того, склеим точки, различающиеся лишь на 2π по координате φ. Получится расслоение над эллиптической кривой, слоем которого является прямая.

Чтобы представить себе комплексную поверхность Σ, остается заменить вещественные вертикальные прямые комплексными.

Топологически построенное расслоение является прямым произведением. Однако с голоморфной точки зрения это расслоение, вообще говоря, нетривиально.

B. Тривиальные и нетривиальные расслоения

Теорема. *Пусть $\lambda \neq e^{ik\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда никакая окрестность эллиптической кривой Γ в описанной выше поверхности Σ не отображается биголоморфно на окрестность этой кривой Γ в прямом произведении.*

Доказательство. В прямом произведении кривую Γ можно деформировать: для любого ε уравнение $r=\varepsilon$ определяет эллиптическую кривую в прямом произведении. Пусть Γ_1 — эллиптическая кривая в пространстве расслоения Σ, близкая к кривой Γ, являющейся нулевым сечением расслоения (уравнение Γ имеет вид $r=0$). Тогда кривая Γ_1 задается уравнением $r=f(\varphi)$, где $f(\varphi+2\pi)\equiv f(\varphi)$, $f(\varphi+\omega)\equiv\lambda f(\varphi)$. Разлагая f в ряд Фурье $f=\sum f_k e^{ik\varphi}$, находим $f_k e^{ik\omega}=\lambda f_k$. Следовательно, $f_k=0$ и Γ_1 совпадает с Γ. Итак, наша эллиптическая кривая в расслоении с $\lambda\neq e^{ik\omega}$ не деформируема. □

Задача. Доказать, что при $\lambda=e^{ik\omega}$ расслоение $\Sigma\to\Gamma$ является прямым произведением (голоморфно тривиально).

Задача. Доказать, что расслоения $\Sigma_1\to\Gamma$, $\Sigma_2\to\Gamma$, заданные комплексными числами λ_1, λ_2, биголоморфно эквивалентны, если и только если $\lambda_1=\lambda_2 e^{ik\omega}$ для некоторого целого k.

Замечание. Классы биголоморфной эквивалентности расслоений описанного вида над фиксированной эллиптической кривой Γ образуют группу (умножение состоит в перемножении чисел λ).

Из результатов предыдущих задач следует, что эта группа естественно отождествляется с факторгруппой мультипликативной группы комплексных чисел по подгруппе чисел вида $e^{ik\omega}$. Факторгруппа $\mathbb{C}^*/\{e^{ik\omega}\}$ сама биголоморфно отображается на исходную эллиптическую кривую. Эта группа называется также *группой Пикара* или *многообразием Якоби* кривой Γ (эти понятия определяются не только для эллиптических кривых, но для произвольных алгебраических многообразий, и в общей ситуации не совпадают с исходным многообразием).

Задача. Рассмотрим расслоение над эллиптической кривой, заданное отождествлениями

$$(r,\varphi)\sim(\lambda_1 r,\varphi+\omega_1)\sim(\lambda_2 r,\varphi+\omega_2).$$

Докажите, что это расслоение биголоморфно эквивалентно расслоению с $\omega_1=2\pi$, $\lambda_1=1$.

Замечание. Можно доказать, что все топологически тривиальные одномерные векторные расслоения над эллиптической кривой биголоморфно эквивалентны описанным выше расслоениям $\Sigma\to\Gamma$.

Г. Топологически нетривиальные расслоения над эллиптической кривой

Топологически все описанные выше расслоения тривиальны (гомеоморфны прямому произведению). Инвариантом, позволяющим различать топологически неэквивалентные расслоения, является индекс самопересечения нулевого сечения.

Пусть M_1, M_2 — гладкие ориентированные компактные подмногообразия ориентированного вещественного гладкого многообразия M (речь идет

о многообразиях без края). Предположим, что размерность многообразия M равна сумме размерностей многообразий M_1 и M_2. Предположим, что M_1 и M_2 пересекаются трансверсально (т. е. в каждой точке пересечения касательное пространство к первому и второму подмногообразиям в сумме дают касательное пространство к объемлющему многообразию M).

Индексом пересечения M_1 и M_2 в M называется число точек пересечения с учетом ориентации (точка пересечения считается со знаком плюс, если положительно ориентирующий M_1 репер вместе со следующим за ним положительно ориентирующим M_2 репером определяют репер, положительно ориентирующий M).

Пусть M_1 — ориентированное гладкое компактное подмногообразие половинной размерности в M. *Индекс самопересечения* M_1 в M определяется как индекс пересечения M_1 с многообразием M_2, полученным из M_1 малой деформацией и пересекающим M_1 трансверсально. Например, индекс самопересечения меридиана тора равен нулю, так как соседние меридианы не пересекаются.

Можно доказать, что индекс самопересечения M_1 в M не зависит от выбора многообразия M_2, лишь бы оно получалось из M_1 малой деформацией.

Задача. Найти индекс самопересечения сферы S^2 в пространстве ее касательного расслоения.

Ответ. $+2$. Вообще, индекс самопересечения многообразия в своем касательном расслоении равен эйлеровой характеристике многообразия.

Рассмотрим теперь одномерное векторное расслоение $\Sigma \to \Gamma$ над эллиптической кривой, полученное из расслоения $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ склейкой вертикальных прямых (вертикальная координата обозначена через r) по правилу

$$(r, \varphi) \sim (r, \varphi + 2\pi) \sim (\lambda e^{ip\varphi} r, \varphi + \omega),$$

где p — целое число, λ — комплексное число, отличное от нуля.

Задача. Найти индекс самопересечения нулевого сечения ($r = 0$) в пространстве полученного расслоения, считая, что Σ ориентирована как комплексное многообразие (ориентации комплексных многообразий определяются так, что индекс пересечения комплексных плоскостей всегда положителен: пространство с комплексными координатами $(z_1, \ldots, z_n)$ ориентируется координатами $(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \ldots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$.

Ответ. $-p$, если $\operatorname{Im} \omega > 0$.

Замечание. Полученными расслоениями исчерпываются, с точностью до биголоморфной эквивалентности, все одномерные векторные расслоения над эллиптической кривой.

Д. Окрестность эллиптической кривой на комплексной поверхности

Рассмотрим эллиптическую кривую на комплексной поверхности. Окрестность кривой на поверхности определяет одномерное векторное рас-

слоение над этой кривой — ее *нормальное расслоение*. Слоем нормального расслоения в точке кривой является факторпространство касательного пространства к поверхности в этой точке по подпространству, касательному к кривой.

Пространство нормального расслоения само является комплексной поверхностью. Исходная эллиптическая кривая вложена в эту поверхность (как нулевое сечение расслоения).

Возникает вопрос, будет ли достаточно малая окрестность кривой на исходной поверхности биголоморфно отображаться на ее окрестность в нормальном расслоении. Оказывается, этот вопрос весьма близок к вопросу о приводимости дифференциального уравнения (или гладкого отображения) в окрестности неподвижной точки к линейной нормальной форме и решается теми же методами.

Покажем прежде всего, что окрестность эллиптической кривой на поверхности может вообще не расслаиваться голоморфно над этой кривой.

Пример. Рассмотрим семейство эллиптических кривых, такое что соседние кривые семейства биголоморфно не эквивалентны друг другу. Такое семейство можно получить, например, отождествляя на плоскости двух комплексных переменных (φ, ω) точки (φ, ω), $(\varphi + 2\pi, \omega)$, $(\varphi + \omega, \omega)$. Область $\operatorname{Im}\omega > 0$ превращается после отождествлений в объединение эллиптических кривых $\omega = \text{const}$. Никакая окрестность ни одной из этих кривых не отображается голоморфно на эту кривую так, чтобы сама кривая оставалась на месте.

Действительно, если бы такое отображение было возможным, мы получили бы близкое к тождеству биголоморфное отображение эллиптических кривых с близкими разными ω друг на друга, что невозможно.

Оказывается, рассмотренный пример является в некотором смысле исключительным: окрестность эллиптической кривой, вложенной в комплексную поверхность с нулевым индексом самопересечения, «вообще говоря» биголоморфно эквивалентна окрестности кривой в нормальном расслоении (в том же смысле, в котором дифференциальное уравнение в окрестности особой точки, вообще говоря, эквивалентно линейному). Исключительность рассмотренного примера связана с тем, что нормальное расслоение каждой из эллиптических кривых е построенном семействе тривиально (является прямым произведением).

Е. Предварительная нормальная форма

Эллиптическую кривую можно получить из кругового кольца голоморфным склеиванием граничных окружностей. Точно так же окрестность эллиптической кривой на поверхности можно получить из окрестности кругового кольца на поверхности голоморфной склейкой граничных много-

образий. Эти граничные многообразия имеют вещественную размерность три; склейка продолжается голоморфно на окрестность границы.

Оказывается, достаточно малая окрестность биголоморфного образа замкнутого кругового кольца на комплексной поверхности всегда биголоморфно отображается на окрестность кругового кольца, вложенного в комплексную прямую $\mathbb{C}$ в прямом произведении $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.

Подобно упомянутым выше результатам о голоморфной классификации одномерных векторных расслоений над эллиптической кривой, сформулированный выше результат об окрестности кольца доказывается непросто: требуется некоторая техника теории функций нескольких комплексных переменных (пучки, эллиптические уравнения с частными производными или что-нибудь их заменяющее).

Мы не будем доказывать это, а прямо предположим, что наша поверхность, содержащая эллиптическую кривую, получается склейкой из окрестности кругового кольца в прямом произведении.

Таким образом, мы рассматриваем поверхность, точки которой получаются из точек (r,φ) плоскости двух комплексных переменных склейками

$$\begin{pmatrix} r\\ \varphi\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} r\\ \varphi+2\pi\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} rA(r,\varphi)\\ \varphi+\omega+rB(r,\varphi)\end{pmatrix},$$

где 2π-периодические по φ функции A и B голоморфны в окрестности вещественной оси φ.

Здесь круговое кольцо получается из полосы $0\leqslant\operatorname{Im}\varphi\leqslant\operatorname{Im}\omega$ на комплексной оси φ при склейке точек $(0,\varphi)\sim(0,\varphi+2\pi)$; r и φ — координаты в прямом произведении.

Пара функций (A,B), задающих склейку, определяет окрестность. Подходящим выбором координат (r,φ) можно изменять вид функций A и B. Постараемся выбрать эти координаты так, чтобы сделать функции A и B возможно проще.

Рассмотрим вначале линейную замену координат $r_{\text{новое}}=C(\varphi)r$, где функция C голоморфна в полосе $0\leqslant\operatorname{Im}\varphi\leqslant\operatorname{Im}\omega$ оси φ, имеет период 2π и нигде не обращается в этой полосе в нуль.

Теорема. *Функцию C, определяющую линейную замену вертикальной координаты, можно выбрать так, что при записи склейки в новых координатах функция $A(0,\varphi)$ примет вид $\lambda e^{ip\varphi}$ (p — целое число, равное минус индексу самопересечения эллиптической кривой $r=0$ в рассматриваемой поверхности).*

Доказательство. Функция $A(0,\varphi)$ определяет нормальное расслоение кривой $r=0$ в нашей поверхности. Это расслоение биголоморфно эквивалентно расслоению, получаемому склейкой

$$(r,\varphi)\sim(r,\varphi+2\pi)\sim(\lambda e^{ip\varphi}r,\varphi+\omega),$$

(см. замечание в п. Д). Линейная замена переменной r, приводящая склейку нормального расслоения к этому каноническому виду, приводит к указанному выше виду функцию $A(0,\varphi)$. □

Определение. *Предварительной нормальной формой* окрестности эллиптической кривой на поверхности, где кривая имеет нулевой индекс самопересечения, называется склейка

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r\lambda(1+ra(r,\varphi)) \\ \varphi+\omega+rb(r,\varphi) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r \\ \varphi+2\pi \end{pmatrix},$$

где a и b — голоморфные в окрестности вещественной оси φ 2π-периодические по φ функции, λ — отличное от нуля комплексное число.

В дальнейшем мы не будем каждый раз указывать отождествления точек, отличающихся лишь на 2π по координате φ, имея в виду, что встречающиеся функции по φ 2π-периодичны и координату φ можно считать принадлежащей цилиндру $\mathbb{C} \bmod 2\pi$.

Ж. Формальная нормальная форма

Определение. Пара чисел (λ,ω) называется *резонансной*, если $\lambda^n = e^{ik\omega}$ при некоторых целых n и k, не равных вместе нулю.

Теорема. *Резонансные пары образуют всюду плотное множество в пространстве всех пар комплексных чисел.*

Доказательство. Это следует из всюду плотности множества точек вида $i\left(\frac{k}{n}\omega+\frac{m}{n}2\pi\right)$ (k и m целые, n натуральные) на комплексной прямой. □

Теорема. *Пара (λ,ω) резонансная, если и только если соответствующее склейке $(r,\varphi)\sim(r,\varphi+2\pi)\sim(\lambda r,\varphi+\omega)$ расслоение тривиально над некоторым циклическим n-листным накрытием исходной эллиптической кривой.*

Доказательство. Если $\lambda^n = e^{ik\varphi}$, то $(r,\varphi)\sim(e^{ik\omega}r,\varphi+n\omega)$ и, следовательно, расслоение над $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z}+n\omega\mathbb{Z}$ тривиально (см. п. В). Обратное доказывается аналогично. □

Определение. *Формальной склейкой* называется «отображение»

$$f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rA(r,\varphi) \\ \varphi+\omega+rB(r,\varphi) \end{pmatrix},$$

где A и B — формальные степенные ряды по r с аналитическими на вещественной оси φ 2π-периодическими по φ коэффициентами, $A(0,\varphi)\neq 0$.

Формальной заменой переменных называется «отображение»

$$g\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rC(r,\varphi) \\ \varphi+rD(r,\varphi) \end{pmatrix},$$

где C и D — формальные степенные ряды по r с аналитическими в полосе $0\leqslant \operatorname{Im}\varphi\leqslant \operatorname{Im}\omega$ комплексной оси φ 2π-периодическими по φ коэффициентами, $C(0,\varphi)\neq 0$.

Формальная замена переменных g действует на формальную склейку f по формуле $f \mapsto g \circ f \circ g^{-1}$ (правая часть определяется естественной подстановкой степенных рядов и сама является формальной склейкой).

Теорема. *Если пара (λ, ω) нерезонансная, то всякая формальная склейка*

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\lambda(1+ra(r,\varphi)) \\ \varphi+\omega+rb(r,\varphi) \end{pmatrix}$$

формальной заменой переменных приводится к линейной нормальной форме

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda r \\ \varphi+\omega \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Будем последовательно уничтожать члены степени $1, 2, \ldots$ по r в ra и rb. Для этого нам потребуется, как обычно, решать линейное гомологическое уравнение. Выпишем уравнение для нормализации членов степени n.

Лемма. *Рассмотрим уравнение относительно u*

$$\lambda^n u(\varphi+\omega) - u(\varphi) = v(\varphi),$$

где $v - 2\pi$-периодическая функция, аналитическая в полосе $\alpha \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \beta$. Если $\tau = \operatorname{Im}\omega > 0$, $\lambda \neq 0$ и $\lambda^n \neq e^{ik\omega}$ при целых k, то уравнение имеет 2π-периодическое решение u, аналитическое в полосе $\alpha \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \beta+\tau$.

Доказательство леммы. Пусть

$$u(\varphi) = \sum u_k e^{ik\varphi}, \quad v(\varphi) = \sum v_k e^{ik\varphi}.$$

Тогда $u_k = \dfrac{v_k}{\lambda^n e^{ik\omega} - 1}$.

При $k \to +\infty$ $|v_k|$ оценивается сверху величиной порядка $e^{k(\alpha-\varepsilon)}$, а $e^{ik\omega}$ стремится к нулю. Поэтому $|u_k|$ оценивается сверху величиной порядка $e^{k(\alpha-\varepsilon)}$.

При $k \to -\infty$ $|v_k|$ оценивается сверху величиной порядка $e^{-|k|(\beta+\varepsilon)}$, а $|e^{ik\omega}|$ растет как $e^{|k|\tau}$ ($\tau = \operatorname{Im}\omega > 0$). Следовательно, $|u_k|$ оценивается сверху величиной $e^{-|k|(\beta+\tau+\varepsilon)}$. Отсюда вытекает сходимость ряда Фурье для u в окрестности полосы $\alpha \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \beta+\tau$. □

Пусть $ra = r^n a_n(\varphi) + \ldots$, $rb = r^n b_n(\varphi) + \ldots$, где точки означают члены порядка выше n.

Сделаем формальную замену переменных, в которой

$$C(r,\varphi) = 1 + r^n C_n(\varphi), \quad rD(r,\varphi) = r^n D_n(\varphi).$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что коэффициенты при r^n в ra и в rb после замены имеют вид

$$\widetilde{a}_n(\varphi) = a_n(\varphi) + \lambda^n C_n(\varphi+\omega) - C_n(\varphi),$$
$$\widetilde{b}_n(\varphi) = b_n(\varphi) + \lambda^n D_n(\varphi+\omega) - D_n(\varphi).$$

Найдем C_n и D_n из уравнений $\widetilde{a}_n = 0$, $\widetilde{b}_n = 0$. По лемме эти уравнения имеют аналитические в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \tau$ решения. Мы построили формальную

замену, после которой степень членов низшего порядка в ra, rb увеличивается. Повторяя это построение при $n=1, 2, \ldots$, получаем формальную замену переменных, после которой ra и rb исчезают полностью. □

3. Аналитическая нормальная форма

Определение. Пара комплексных чисел (λ, ω), где $\operatorname{Im}\omega \neq 0$, $\lambda \neq 0$, называется *нормальной,* если существуют постоянные $C>0$, $\nu>0$, такие что

$$|\lambda^n e^{ik\omega} - 1| > C(|n|+|k|)^{-\nu}$$

для всех целых k и n $(n \neq 0)$.

Легко доказывается

Теорема. *Ненормальные пары образуют всюду плотное множество лебеговой меры* 0 *при каждом фиксированном* ω.

Теорема. *Если* (λ, ω) *— нормальная пара, то всякая голоморфная склейка*

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\lambda(1+ra(r,\varphi)) \\ \varphi+\omega+rb(r,\varphi) \end{pmatrix}$$

приводится к линейной нормальной форме $(r, \varphi) \mapsto (r\lambda, \varphi+\omega)$ *голоморфной заменой переменных.*

Доказательство аналогично приведенному в § 28 доказательству теоремы Зигеля. □

Переведем эту теорему на язык вложений эллиптических кривых.

Определение. Голоморфное векторное расслоение ξ называется *жестким*, если для всякого вложения его базы в комплексное многообразие, такого что нормальное расслоение есть ξ, достаточно малая окрестность базы, вложенной в многообразие, биголоморфно отображается на окрестность нулевого сечения расслоения ξ.

В этих терминах наша теорема формулируется так.

Следствие. *Почти все* (*в смысле меры Лебега*) *одномерные векторные расслоения степени* 0 *над эллиптической кривой жесткие.*

Замечание. Для некоторых нерезонансных расслоений, в которых пары (λ, ω) ненормальные, формальные ряды, приводящие склейку к нормальной форме, могут расходиться. Такие ненормальные пары (λ, ω) образуют всюду плотное множество меры нуль. Этот вопрос обсуждается подробнее в § 36.

И. Отрицательные окрестности

Рассмотрим случай, когда индекс самопересечения эллиптической кривой на поверхности отличен от нуля. Если этот индекс отрицателен, то кривая недеформируема в классе голоморфных кривых. Действительно, в противном случае продеформированная кривая пересекалась бы с исходной с положительным индексом пересечения (так как обе кривые комплексные).

Таким образом, кривая с отрицательным индексом самопересечения лежит на поверхности изолированно. Такая кривая называется *исключительной кривой*, а ее окрестность — *отрицательной окрестностью*.

Теорема (Грауерта). *Нормальное расслоение исключительной кривой всегда жесткое, т. е. окрестность кривой с отрицательным индексом самопересечения на комплексной поверхности определяется* (*с точностью до голоморфной эквивалентности*) *нормальным расслоением этой кривой.*

Наметим здесь простое доказательство этой теоремы для случая эллиптической кривой.

Доказательство. Мы начинаем с предварительной нормальной формы склейки

$$f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\lambda e^{ip\varphi}(1+ra(r,\varphi)) \\ \varphi+\omega+rb(r,\varphi) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что члены степени меньше n по r в ra и в rb уже убиты, т. е. что $ra = r^n a_n(\varphi) + \ldots$, $rb = r^n b_n(\varphi) + \ldots$ Делаем формальную замену переменных $g(r,\varphi) = (r(1+r^n C_n(\varphi)), \varphi + r^n D_n(\varphi))$. Коэффициенты при r^n в ra и в rb после замены (т. е. для склейки $g \circ f \circ g^{-1}$) имеют вид

$$\widetilde{a}_n(\varphi) = a_n(\varphi) + \lambda^n e^{ipn\varphi} C_n(\varphi+\omega) - C_n(\varphi) - ipD_n(\varphi),$$

$$\widetilde{b}_n(\varphi) = b_n(\varphi) + \lambda^n e^{ipn\varphi} D_n(\varphi+\omega) - D_n(\varphi).$$

Обратим $\widetilde{b}_n$ и $\widetilde{a}_n$ в нуль. С этой целью мы сперва находим D_n из второго уравнения, а затем C_n из первого. В обоих случаях приходится решать гомологическое уравнение вида

$$\lambda^n e^{ipn\varphi} u(\varphi+\omega) - u(\varphi) = v(\varphi)$$

относительно неизвестной 2π-периодической функции u с известной 2π-периодической функцией v.

К. Исследование гомологического уравнения

Рассмотрим разложения неизвестной и известной функций в ряды Фурье

$$u = \sum u_k e^{ik\varphi}, \quad v = \sum v_k e^{ik\varphi}.$$

Для коэффициентов Фурье получаются уравнения

$$\lambda^n e^{i(k-pn)\omega} u_{k-pn} - u_k = v_k.$$

Эти уравнения позволяют в принципе последовательно вычислить все неизвестные коэффициенты u_k по первым pn из них. Однако получаемые формальные ряды Фурье не всегда сходятся. Оказывается, отрицательность индекса самопересечения исходной эллиптической кривой на поверхности (т. е. положительность числа p) гарантирует сходимость.

Действительно, рассмотрим вначале однородное уравнение, т. е. будем считать, что все v_k равны нулю.

Наше уравнение связывает между собой значения u_k с k на арифметической прогрессии с шагом pn. Вычислим все значения u_k с k из этой прогрессии через одно из них. Нам придется последовательно умножать числа вида $\lambda^n e^{i(k-pn)\omega}$, где k принадлежит нашей прогрессии. Логарифмы этих чисел образуют арифметическую прогрессию с разностью $ipn\omega$. Следовательно, суммы логарифмов образуют последовательность вида

$$\alpha s^2+\beta s+\gamma,$$

где s — номер члена последовательности, $2\alpha = ipn\omega$.

Если $p>0$, $\operatorname{Im}\omega>0$, то $\operatorname{Re}\alpha<0$. В этом случае последовательность $|e^{\alpha s^2+\beta s+\gamma}|$ быстро стремится к нулю при $s\to+\infty$ и при $s\to-\infty$. Отсюда следует, что однородное гомологическое уравнение при $p>0$ имеет pn линейно независимых решений, быстро убывающих при $|k|\to\infty$.

Будем теперь решать неоднородное уравнение. Вначале предположим, что отличен от 0 только один из коэффициентов Фурье известной функции, v_m. Левее m мы положим $u_k=0$, а при $k\geqslant m$ определим u_k из уравнения. Таким образом, правее m u_k будет совпадать с одним из решений однородного уравнения и, следовательно, будет убывать как $|e^{\alpha s^2}|$.

Решение однородного уравнения в общем случае строится как линейная комбинация построенных решений с коэффициентами v_k. Сходимость обеспечивается условием $\operatorname{Re}\alpha<0$, т. е. отрицательностью индекса самопересечения исходной эллиптической кривой на поверхности.

Проводя подробно намеченные здесь оценки, мы убеждаемся в разрешимости гомологического уравнения для случая отрицательного индекса самопересечения (т. е. для случая положительных p). Тем самым доказывается формальная жесткость отрицательного нормального расслоения эллиптической кривой на поверхности. Более внимательный анализ нашего построения доказывает и аналитическую жесткость (т. е. теорему Грауерта): доказательство сходимости здесь настолько же проще, чем в случае $p=0$, исследованном в п. Ж, 3, насколько теорема Пуанкаре проще теоремы Зигеля (§ 28). □

Л. Положительные окрестности

Предположим, что индекс самопересечения эллиптической кривой на поверхности положителен. В этом случае гомологическое уравнение, изученное в предыдущем пункте, вообще говоря, неразрешимо, так как $|e^{\alpha s^2+\beta s+\gamma}|$ растет при $|s|\to\infty$. Это значит, что окрестность эллиптической кривой с положительным индексом самопересечения на общей комплексной поверхности не только не отображается биголоморфно на окрестность этой кривой в нормальном расслоении, но такое отображение невозможно уже на уровне 2-струй (т. е. с пренебрежением членами 3-го порядка по отношению к расстоянию от кривой). Окрестность эллиптической кривой с положительным индексом самопересечения называется *положительной*.

Положительная окрестность эллиптической кривой, согласно сказанному выше, должна иметь модули, и более того, функциональные модули: «нормальная форма» окрестности должна содержать произвольные функции (и даже, по-видимому, функции двух переменных или ростки функций двух переменных в нескольких точках).

В то время как кривая с отрицательным индексом самопересечения лежит на поверхности изолировано, эллиптическую кривую с положительным индексом самопересечения всегда можно деформировать.

Теорема (частный случай теоремы Римана — Роха)**.** *Если индекс самопересечения эллиптической кривой на поверхности равен p, то нормальное расслоение имеет p линейно независимых сечений.*

Доказательство. Вопрос сводится к однородному гомологическому уравнению вида

$$u(\varphi+\omega)=\lambda e^{ip\varphi}u(\varphi),$$

имеющему, как мы видели в п. К, p линейно независимых решений. □

Переходя к членам высшего порядка относительно расстояния до эллиптической кривой, можно убедиться, что существует p-параметрическая деформация кривой в ее окрестности.

Отсюда следует, между прочим, что окрестность эллиптической кривой на поверхности, где кривая имеет положительный индекс самопересечения, как правило, не допускает структуры расслоения над этой кривой. Действительно, комплексная структура эллиптической кривой при деформации, вообще говоря, меняется. Поэтому среди близких продеформированных кривых будут встречаться, в общем случае, кривые, не допускающие биголоморфного отображения на исходную кривую.

При изучении прохождения дифференциальных уравнений через резонанс встречаются лишь окрестности эллиптических кривых на таких поверхностях, где они имеют индекс самопересечения нуль.

М. Эллиптическая кривая в пространстве

Многое из того, что сказано выше об окрестности эллиптической кривой на поверхности, переносится на случай эллиптической кривой в многомерном пространстве. Для этого в приведенных выше формулах следует считать переменную r многомерной.

Векторные расслоения произвольной размерности над эллиптической кривой описываются склейками $(r,\varphi)\sim(r,\varphi+2\pi)\sim(\Lambda(\varphi)r,\varphi+\omega)$, где $\Lambda(\varphi)$ — линейный оператор в жордановой нормальной форме с собственными числами вида $\lambda e^{ip\varphi}$.

Расслоение называется *отрицательным* (*неположительным, нулевым*), если все числа p положительные (неотрицательные, нулевые).

Предположим, что нормальное расслоение эллиптической кривой отрицательно. Тогда окрестность кривой в многообразии биголоморфно отоб-

ражается на ее окрестность в нормальном расслоении (теорема Грауерта), т е. нормальное расслоение жестко. В классе нулевых нормальных расслоений жесткость нарушается лишь с вероятностью нуль. Условие резонанса имеет вид $\lambda_s = \lambda^n e^{ik\omega}$, где k целое число, $\lambda^n = \lambda_1^{n_1} \dots \lambda_m^{n_m}$, $m = \dim\{r\}$, $n_j \geqslant 0$, $\sum n_j \geqslant 2$.

Нерезонансное расслоение формально-жесткое. Для настоящей голоморфной жесткости достаточно обычного неравенства (C, ν)-нормальности:

$$|\lambda^n e^{ik\omega} - \lambda_s| \geqslant C(|n| + |k|)^{-\nu}, \quad |n| = n_1 + \dots + n_m,$$

для всех $n_i \geqslant 0$, $\sum n_i \geqslant 2$ и целых k. Мера множества векторов λ, которые ни при каких $(C, \nu) > 0$ не (C, ν)-нормальны, равна нулю.

Жесткость с вероятностью 1 имеет (по-видимому) место также и для неположительных расслоений.

Вопрос о строении окрестностей кривых рода больше единицы изучен весьма мало, исключая случай, когда нормальное расслоение отрицательно и, следовательно, жесткое по теореме Грауерта.

§ 28. Доказательство теоремы Зигеля

В этом параграфе доказывается теорема о голоморфной локальной эквивалентности отображения и его линейной части в неподвижной точке.

А. Формулировка теоремы

Определение. Набор $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ имеет *мультипликативный тип* (C, ν), если

$$|\lambda_s - \lambda^k| \geqslant C|k|^{-\nu} \quad (|k| = k_1 + \dots + k_n,\ \lambda^k = \lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n})$$

для любого s и для любого целочисленного вектора k с неотрицательными компонентами по модулю большего единицы ($C > 0$, $\nu > 0$).

Теорема. *Предположим, что набор собственных чисел линейной части голоморфного отображения в окрестности неподвижной точки O в $\mathbb{C}^n$ имеет мультипликативный тип (C, ν). Тогда в некоторой окрестности точки O отображение биголоморфно эквивалентно своей линейной части.*

Пусть A — заданное в окрестности точки $O \in \mathbb{C}^n$ биголоморфное отображение, оставляющее O на месте, и пусть линейный оператор Λ — линейная часть A в O. Утверждается, что существует оставляющий O на месте биголоморфный в окрестности точки O диффеоморфизм H, такой что $H \circ A \circ H^{-1} = \Lambda$ в некоторой окрестности точки O.

Мы будем доказывать эту теорему в случае, когда все собственные числа λ_s оператора Λ различны. В этом случае можно выбрать систему координат так, чтобы матрица оператора Λ была диагональной. Зафиксируем такую систему координат.

Б. Построение замены координат H

Запишем данное отображение A и замену H в виде

$$A(z) = \Lambda z + a(z), \quad H(z) = z + h(z),$$

где ряды Тейлора a и h в нуле не содержат членов степени 0 и 1. Запишем отображение $H \circ A \circ H^{-1}$, вычисляя члены нулевой и первой степеней относительно h и a. Мы получаем

$$(H \circ A \circ H^{-1})(z) = \Lambda z + [a(z) - \Lambda h(z) + h(\Lambda z)] + R([a], [h])(z),$$

где остаточный член R имеет относительно a и h второй порядок малости в смысле, который будет точно определен далее. Мы заключили аргументы у R в квадратные скобки, чтобы подчеркнуть, что этот оператор действует на функции, а не на их значения в точке z.

Рассмотрим гомологическое уравнение относительно h

$$\Lambda h(z) - h(\Lambda z) = a(z).$$

Здесь ряды Тейлора известной вектор-функции a и неизвестной h не имеют свободных и линейных членов. В классе таких рядов уравнение однозначно разрешимо, так как набор собственных чисел нерезонансный.

Мы докажем в п. В, что полученные ряды сходятся, если набор собственных чисел имеет мультипликативный тип (C, ν) при каких-нибудь положительных C и ν. Обозначим через U оператор, переводящий правую часть a гомологического уравнения в его решение $h = U([a])$.

Определим по индукции функции a_s, h_s формулами

$$h_s = U([a_s]), \quad a_{s+1} = R([a_s], [h_s]),$$

начиная с $a_0 = a$.

Построим отображения $H_0, H_1, \ldots$, определенные формулами

$$H_s(z) = z + h_s(z).$$

Искомая замена координат дается, как мы докажем, формулой

$$H = \lim_{s \to \infty} H_s \circ \ldots \circ H_1 \circ H_0.$$

В. Исследование гомологического уравнения

Мы предполагаем, что ряды Тейлора правой части и решения гомологического уравнения

$$\Lambda h(z) - h(\Lambda z) = a(z)$$

не имеют свободных и линейных членов. Через $|z|$ мы будем обозначать $\max |z_j|$.

Лемма 1. *Пусть набор собственных чисел диагонального линейного оператора Λ имеет мультипликативный тип (C, ν). Предположим, что правая часть a гомологического уравнения непрерывна в полицилиндре $|z_j| \leqslant r$ и голоморфна внутри этого полицилиндра.*

Тогда гомологическое уравнение имеет решение h, голоморфное внутри полицилиндра, причем для любого δ, такого что $0<\delta<1/2$, выполняется неравенство

$$\max_{|z|\leqslant re^{-\delta}}|h(z)|\leqslant\max_{|z|\leqslant r}\frac{|a(z)|}{\delta^{\alpha}},$$

где положительная постоянная $\alpha=\alpha(\Lambda)$ не зависит ни от δ, ни от a, ни от r.

Доказательство. Разложим a и h в ряды Тейлора и обозначим коэффициенты при $z^k e_s$ через a_k^s и h_k^s соответственно. Тогда $h_k^s=\dfrac{a_k^s}{\lambda_s-\lambda^k}$. Оценим числители при помощи неравенств Коши для коэффициентов Тейлора, а знаменатели — исходя из того, что $\{\lambda_s\}$ типа (C,ν).

Обозначим $\max\limits_{|z|\leqslant r}|a(z)|$ через M. Согласно неравенству Коши, $|a_k^s|\leqslant\dfrac{M}{r^{|k|}}$. Следовательно, $|h_k^s|\leqslant MC^{-1}\dfrac{|k|^{\nu}}{r^{|k|}}$.

Оценим сумму Тейлора $\sum h_k^s z^k$. Рассмотрим члены степени $|k|=p$. Их число не превосходит $c_1(n)p^{n-1}$, поэтому $\Big|\sum\limits_{|k|=p}h_k^s z^k\Big|\leqslant Mc_2p^m\Big|\Big(\dfrac{z}{r}\Big)^k\Big|$, где $c_2=\dfrac{c_1}{C}$ и $m=\nu+n-1$.

Функция $x^m e^{-x}$ имеет максимум $\Big(\dfrac{m}{e}\Big)^m$, поэтому $p^m e^{-\frac{\delta p}{2}}\leqslant c_3\delta^{-m}$, где $c_3=\Big(\dfrac{2m}{e}\Big)^m$. Следовательно, при $|z|\leqslant re^{-\delta}$ имеем

$$|h|\leqslant Mc_3\delta^{-m}\sum_{p=2}^{\infty}e^{-\frac{p\delta}{2}}=\frac{Mc_3\delta^{-m}}{e^{\delta}-e^{\delta/2}},\quad |h|\leqslant Mc_4\delta^{-(m+1)},$$

где $c_4=4c_2c_3$ не зависит от a, r, δ. □

В дальнейшем нам потребуется кроме оценки функции h еще оценка функции $h\circ\Lambda$, определяемой условием $(h\circ\Lambda)(z)=h(\Lambda z)$.

Лемма 2. *В условиях леммы* 1

$$\max_{|z|\leqslant re^{-\delta}}|h(\Lambda z)|\leqslant\max_{|z|\leqslant r}\frac{|a(z)|}{\delta^{\alpha_0}},$$

где положительная постоянная $\alpha_0=\alpha_0(\Lambda)$ не зависит от δ, a, r.

Доказательство. Начнем со следующего замечания.

Пусть $\{\lambda\}$ имеет мультипликативный тип (C,ν). Тогда существует такая не зависящая от k постоянная C_0, что

$$|\lambda_s-\lambda^k|\geqslant C_0|k|^{-\nu}|\lambda^k|$$

для всех $s=1,\dots,n$ и для всех целочисленных векторов k с неотрицательными компонентами, сумма которых $|k|$ не меньше 2.

Доказательство. Обозначим $\max|\lambda_s|$ через μ. При $|\lambda^k|\leqslant 2\mu$ можно взять $C_0=\dfrac{C}{2\mu}$. При $|\lambda^k|>2\mu$ можно взять $C_0=\dfrac{1}{2}$. □

Оценивая ряд Тейлора, получаем на основании доказанного предложения

$$|h(\Lambda z)| \leqslant \sum MC_0^{-1}|k|^{\nu}|\lambda^k|^{-1}\Big|\frac{\lambda^k z^k}{r^k}\Big|.$$

Дальнейшие оценки — как в доказательстве леммы 1. □

Г. Порядок операторов

Для проведения дальнейших оценок удобно ввести следующие обозначения. Пусть f — функция, непрерывная в полицилиндре $|z| \leqslant r$, голоморфная во внутренних точках и обращающаяся в нуль в центре полицилиндра.

Мы введем для таких функций норму

$$\|f\|_r = \sup_{0<|z|\leqslant r} \frac{|f(z)|}{|z|}.$$

Пример. Функция $f(z) = \varepsilon z$ имеет норму $|\varepsilon|$ независимо от радиуса полицилиндра.

Замечание. Удобство введенной нормы состоит в ее инвариантности относительно изменений масштаба: для всякого коэффициента растяжения κ

$$\|\kappa f \circ \kappa^{-1}\|_{\kappa r} = \|f\|_r.$$

Значения функции f могут быть не числами, а элементами нормированного пространства, например векторами, матрицами и т. д.

Пусть Φ — оператор, действующий на функции описанного выше класса*. Пусть d, α, β — положительные числа, и пусть $0 < r < 1$.

Определение. Оператор Φ *имеет порядок* $(d; \alpha \,|\, \beta)$, если для любого δ из интервала $(0, 1/2)$ и для любого r из $(0, 1)$

$$\|\Phi([f])\|_{re^{-\delta}} \leqslant \|f\|_r^d \delta^{-\alpha},$$

как только $\|f\|_r \leqslant \delta^{\beta}$.

Мы будем записывать это соотношение в виде $\Phi([f]) \prec f^d(\alpha \,|\, \beta)$, или, короче, $\Phi([f]) \prec f^d$.

Оператор *имеет порядок* d, если существуют такие постоянные α и β, что он имеет порядок $(d; \alpha \,|\, \beta)$ (существенно, что α и β не зависят от f, от $r \in (0, 1)$ и от $\delta \in (0, 1/2)$).

Пример 1. Рассмотрим оператор, переводящий правую часть a гомологического уравнения в его решение h. *Этот оператор имеет порядок* 1, *ес-*

* Мы будем обозначать одной буквой операторы, действующие на функции из классов с разными r, при условии, что они совпадают как операторы на пространстве ростков функций, подобно тому как в обычном анализе не меняют обозначения синуса, меняя область определения.

ли $\{\lambda_s\}$ *типа* (C, ν). Действительно, нужное неравенство доставляется леммой 1.

Точно так же из леммы 2 следует, что *оператор, переводящий правую часть а гомологического уравнения в функцию* $h \circ \Lambda$, *имеет порядок* 1: $h \prec a$, $h \circ \Lambda \prec a$.

Пример 2. Рассмотрим локальный диффеоморфизм H, $H(z) = z + h(z)$. Обратный диффеоморфизм запишем в виде $H^{-1}(z) = z - g(z)$.

Рассмотрим оператор G, переводящий h в g.

Оператор G *имеет порядок* 1, *т. е.* $g \prec h$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что из оценки Коши вытекает следующее неравенство: при $|z| \leqslant re^{-\delta/2}$

$$\left|\frac{\partial h_i}{\partial z_j}\right| \leqslant \frac{\|h\|_r}{1 - e^{-\delta/2}}. \tag{1}$$

Если $\|h\|_r \leqslant \delta^\beta$ и β достаточно велико, то правая часть последнего неравенства сколь угодно мала. Теперь g строится как предел итераций:

$$g_{s+1}(z) = h(z - g_s(z)), \quad g_0 = 0.$$

Сходимость при $|z| \leqslant re^{-\delta}$ и оценка $g \prec h$ легко следуют теперь из теорем о сжатых отображениях. □

Пример 3. В обозначениях примера 2

$$h - g \prec h^2.$$

Доказательство. Действительно, по определению функции g,

$$h(z) - g(z) = h(z) - h(z - g(z)).$$

Пользуясь неравенством (1) и полученной выше оценкой

$$\|g\|_{re^{-\delta}} \leqslant \|h\|_r \delta^{-\alpha},$$

получаем при $|z| \leqslant re^{-\delta}$

$$|h(z) - g(z)| \leqslant C\|h\|_r (1 - e^{-\delta/2})^{-1} r \|h\|_r \delta^{-\alpha}.$$ □

Заметим, что в наших обозначениях $2f \prec f$, $f^2 \prec f$; если $f_1 \prec f_2$ и $f_2 \prec f_3$, то $f_1 \prec f_3$.

Распространим введенные выше обозначения на операторы от нескольких функций. Пусть оператор Ξ переводит пару функций η, ζ в функцию ξ. Пусть φ — многочлен. Мы будем писать

$$\xi \prec \varphi(\eta, \zeta),$$

если существуют такие положительные постоянные $(\alpha; \beta_1, \beta_2)$, что для любого δ из интервала $(0, 1/2)$ и для любого r из $(0, 1)$ выполняется неравенство

$$\|\Xi([\eta], [\zeta])\|_{re^{-\delta}} \leqslant \varphi(\|\eta\|_r, \|\zeta\|_r)\delta^{-\alpha},$$

как только $\|\eta\|_r \leqslant \delta^{\beta_1}$, $\|\zeta\|_r \leqslant \delta^{\beta_2}$. Здесь постоянные α и β не должны зависеть от η, ζ, от $r \in (0, 1)$ и $\delta \in (0, 1/2)$. Если $\eta \prec \psi(\sigma, \tau)$, то $\xi \prec \overline{\psi}(\psi(\sigma, \tau), \zeta)$.

Пример 4. Определим оператор Ξ формулой

$$\xi(z) = \eta(z - \zeta(z)) - \eta(z).$$

Тогда $\xi \prec \eta\zeta$.

Доказательство. Доказывается с помощью того же неравенства (1), которое мы использовали в примерах 2 и 3 выше. □

Д. Оценка остаточного члена

Выпишем явно остаточный член R, определенный в п. Б. Мы будем пользоваться обозначениями

$$H(z) = z + h(z), \quad H^{-1}(z) = z - g(z).$$

По определению

$$R(z) = (H \circ A \circ H^{-1})(z) - \Lambda z - [a(z) - \Lambda h(z) + h(\Lambda z)].$$

Представим R в виде $R = R_1 + R_2 + R_3$, где

$$R_1(z) = \Lambda(h(z) - g(z)), \quad R_2(z) = a(z - g(z)) - a(z),$$
$$R_3(z) = h(\Lambda z - \Lambda g(z) + a(z - g(z))) - h(\Lambda z).$$

Для удобства дальнейших оценок представим R в виде оператора от *трех* аргументов a, h и $u = h \circ \Lambda$.

Введем операторы

$$G,\ G([h]) = g, \quad \Xi,\ \Xi([\alpha], [g])(z) = a(z - g(z)) - a(z).$$

В этих обозначениях

$$R_1([h]) = \Lambda(h - G([h])),$$
$$R_2([a], [h]) = \Xi([a], G([h])),$$
$$R_3([u], [a], [h]) = \Xi([u], [v]),$$

где $v(z) = g(z) - \Lambda^{-1} a(z - g(z))$.

При подстановке $u = h \circ \Lambda$ оператор $R_1 + R_2 + R_3$ превращается в интересующий нас остаточный член $R([a], [h])$. Пусть $h \prec \mathrm{id}$ ($\mathrm{id} =$ тождество; условие означает, что производная h мала).

Оценка 1. *Имеют место оценки*

$$R_1([h]) \prec h^2, \quad R_2([a], [h]) \prec ah, \quad R_3([u], [a], [h]) \prec u(h + a).$$

Доказательство. Оценка $R_1([h]) \prec h^2$ доказана в примере 3 п. Г, неравенство $\Xi([a], [g]) \prec ag$ — в примере 4. Согласно примеру 2, $G([R]) \prec h$, поэтому $R_2([a], [h]) \prec ah$.

Для введенной выше величины v из уже полученных оценок $g \prec h$ получаем $v \prec h + a$. Следовательно, согласно оценке оператора Ξ из примера 4, получаем $R_3 \prec u(h + a)$. □

Оценка 2. *Пусть U — оператор, решающий гомологическое уравнение. Тогда оператор Φ, заданный формулой $\Phi([a]) = R([a], U([a]))$, имеет порядок* 2.

Доказательство. По леммам 1, 2 и 3 п. В имеем $h \prec a$, $h \circ \Lambda \prec a$, где $h = U([a])$.

Сопоставляя это с оценкой 1, получаем

$$R_1(U([a])) \prec a^2, \quad R_2([a], U([a])) \prec a^2,$$
$$R_3(U([a]) \circ \Lambda, [a], U([a])) \prec a^2. \qquad \square$$

Е. Сходимость приближений

Окончание доказательства теоремы Зигеля в точности такое же, как оценки § 12.

Доказательство. Мы выбираем последовательности чисел

$$\delta_0, \quad \delta_1 = \delta_0^{3/2}, \quad \delta_2 = \delta_1^{3/2}, \quad \ldots;$$
$$M_0 = \delta_0^N, \quad M_1 = M_0^{3/2}, \quad \ldots, \quad M_s = M_{s-1}^{3/2} = \delta_s^N, \quad \ldots;$$
$$r_0, \quad r_1 = e^{-\delta_0} r_0, \quad r_2 = e^{-\delta_1} r_1, \quad \ldots$$

Эти последовательности определяются выбором δ_0, N и r_0.

Число δ_0 выбирается столь малым, чтобы все r_s были больше $r_0/2$. Опишем выбор числа N.

Согласно оценке 2, существуют постоянные α и β такие, что

$$\|R([a], U([a]))\|_{re^{-\delta}} \leqslant \|a\|_r^2 \delta^{-\alpha},$$

как только $\|a\|_r \leqslant \delta^\beta$.

Определим $a_{s+1} = R([a_s], U([a_s]))$. Предположим, что $\|a_s\|_{r_s} \leqslant M_s = \delta_s^N$. Тогда при $N > \beta$ применимо предыдущее неравенство с $\delta = \delta_s$, и мы получаем

$$\|a_{s+1}\|_{r_{s+1}} \leqslant M_s^2 \delta^{-\alpha} = \delta_s^{2N-\alpha}.$$

Если $N > 2\alpha$, то правая часть не превосходит $M_{s+1} = \delta_s^{3N/2}$. Поэтому мы фиксируем $N > (\beta, 2\alpha)$. Тогда если $\|a_0\|_{r_0} \leqslant M_0 = \delta_0^N$, то при всех s будет $\|a_s\|_{r_s} \leqslant M_s = \delta_s^N$.

Наконец, выбираем r_0. По условию, начальная функция $a_0 = a$ имеет в начале координат нуль не менее второго порядка. Следовательно, в некоторой окрестности точки $z = 0$

$$|a(z)| \leqslant K|z|^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|a_0\|_{r_0} \leqslant K r_0.$$

Значит, при достаточно малом r_0 условие $\|a_0\|_{r_0} \leqslant \delta_0^N$ выполнено. Зафиксируем такое r_0. Теперь все числа δ_s, M_s, r_s определены. При всех s выполнены неравенства $\|a_s\|_{r_s} \leqslant M_s$. Из них следуют оценки для h_s. Поэтому произведения $H_s \circ \ldots \circ H_1$ определены при $|z| \leqslant \dfrac{r_0}{2}$ и при $s \to \infty$ сходятся к пределу H. Нетрудно проверить, что для предельного диффеоморфизма $H \circ A \circ H^{-1} = \Lambda$. $\square$

Глава 6

Локальная теория бифуркаций

Слово бифуркация означает раздвоение и употребляется в широком смысле для обозначения всякой качественной, топологической перестройки картины при изменении параметров, от которых зависит изучаемый объект. Объекты могут быть самые разнообразные: например, вещественные или комплексные кривые или поверхности, функции или отображения, многообразия или расслоения, векторные поля или уравнения, дифференциальные или интегральные.

Если объект зависит от параметров, то говорят, что задано семейство. Если мы интересуемся семейством локально, при малом изменении параметров в окрестности фиксированных значений, то говорят о деформации объекта, соответствующего этим значениям параметров.

Оказывается, во многих случаях изучение всевозможных деформаций сводится к исследованию одной единственной, из которой получаются все остальные. Такая деформация, в некотором смысле самая богатая, должна давать все возможные бифуркации данного объекта; она называется версальной деформацией.

В настоящей главе рассматриваются главным образом бифуркации и версальные деформации фазовых портретов динамических систем в окрестности положений равновесия и замкнутых траекторий.

§ 29. Семейства и деформации

В этом параграфе обсуждаются общие «эвристические» соображения, на которых основана теория бифуркаций. Эти общие соображения принадлежат в основном А. Пуанкаре.

А. Случаи общего положения и особые случаи малой коразмерности

При исследовании всякого рода аналитических объектов (например, дифференциальных уравнений, или краевых задач, или задач оптимизации) обычно можно выделить случаи общего положения.

Например, из особых точек векторного поля на плоскости точками общего положения являются узлы, фокусы и седла, в то время как, скажем, центры разрушаются сколь угодно малым шевелением поля.

Изучение случаев общего положения является всегда первоочередной задачей при анализе явлений и процессов, описываемых данной математической моделью. Действительно, сколь угодно малым изменением модели случай не общего положения превращается в случай общего положения, а параметры модели обычно определяются приближенно.

Однако встречаются ситуации, в которых естественно возникает необходимость исследования случаев не общего положения. А именно, предположим, что мы изучаем не индивидуальный объект (скажем, векторное поле), а целое семейство, объекты которого зависят от некоторого числа параметров.

Чтобы лучше представить себе ситуацию, рассмотрим функциональное пространство, точкой которого являются наши объекты (скажем, пространство всех векторных полей). Случаи не общего положения соответствуют некоторым гиперповерхностям коразмерности 1 в этом пространстве. Сколь угодно малым сдвигом точка может быть сдвинута с гиперповерхности в область случаев общего положения. Гиперповерхности особых случаев образуют границы областей случаев общего положения (рис. 105).

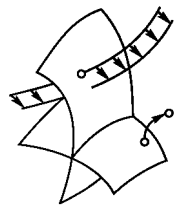


Рис. 105

Семейство с k параметрами изображается k-мерным многообразием в нашем функциональном пространстве. Например, однопараметрическое семейство — это кривая в функциональном пространстве.

Кривая в нашем функциональном пространстве может пересекать гиперповерхность особых случаев. Если это пересечение происходит «под ненулевым углом» (трансверсально), то оно сохраняется при малом шевелении семейства: всякая близкая кривая пересекает гиперповерхность особых случаев в некоторой близкой точке.

Таким образом, хотя каждый индивидуальный член семейства может быть приведен в общее положение сколь угодно малым шевелением, нельзя добиться того, чтобы все члены семейства сразу были общего положения: при деформации семейства можно из-

бежать случая не общего положения для каждого фиксированного значения параметра, но при некотором близком значении параметра этот случай не общего положения все равно возникнет.

На гиперповерхностях особых случаев в нашем функциональном пространстве, вообще говоря, есть свои особенности (например, там, где одна из гиперповерхностей пересекает другую, что соответствует одновременному появлению двух вырождений (см. рис. 105)). При исследовании общих однопараметрических семейств этими особенностями гиперповерхностей особых случаев можно пренебрегать. Действительно, множество всех этих особенностей имеет в функциональном пространстве коразмерность не менее 2. Поэтому кривую в функциональном пространстве сколь угодно малым шевелением можно снять с этих особенностей, так что она будет пересекать гиперповерхности особых случаев лишь в точках общего положения. Итак, в однопараметрическом семействе общего положения встречаются как неустранимые лишь простейшие вырождения, соответствующие неособым точкам гиперповерхности особых случаев. Эти вырождения называются вырождениями коразмерности 1. Изучение вырождений коразмерности 1 позволяет непрерывно перейти от любой общей точки функционального пространства к любой другой общей точке, так как делят функциональное пространство только множества, коразмерность которых не больше единицы.

Во время перехода мы, вообще говоря, должны пересекать поверхности вырождений коразмерности один. Изучение особенностей коразмерности один позволяет описывать бифуркации, происходящие при пересечениях этих поверхностей.

При исследовании k-параметрических семейств общего положения неустранимыми будут лишь вырождения, коразмерность которых не превосходит k. Все прочие вырожденные объекты образуют в функциональном пространстве множество коразмерности больше k, и от них можно избавиться сколь угодно малой деформацией k-параметрического семейства.

Чем больше коразмерность вырождения, тем труднее исследовать это вырождение и тем (как правило) меньше пользы от такого исследования. Изучение особенностей большой коразмерности k разумно проводить лишь в том случае, когда мы интересуемся не индивидуальным объектом, а k-параметрическим семейством. Но тогда естественным объектом изучения является не индивидуальный объект (скажем, векторное поле со сложной особой точкой),

а столь большое семейство, что особенность рассматриваемого типа при малой деформации семейства не исчезает.

Это простое соображение Пуанкаре показывает тщетность столь большого числа исследований в теории дифференциальных уравнений и в других областях анализа, что его всегда несколько опасно упоминать. В сущности, всякое исследование вырожденного случая должно сопровождаться вычислением соответствующей коразмерности и указанием бифуркаций в семействе, для которого рассматриваемое вырождение неустранимо.

С этой точки зрения, основанной на изучении k-параметрических семейств, можно вовсе пренебречь исследованием вырождений бесконечной коразмерности, так как от них можно избавиться малым шевелением любого k-параметрического семейства при любом конечном k. Разумеется, вырожденные случаи могут быть полезны в качестве легко исследуемых первых приближений теории возмущений.

Б. Отступление о случаях бесконечной коразмерности

Иногда приходится исследовать и вырождения бесконечной коразмерности. Например, гамильтоновы системы или системы с какой-либо группой симметрий образуют подмногообразие коразмерности бесконечность в пространстве всех динамических систем. В таких случаях часто удается заранее сузить функциональное пространство так, чтобы коразмерности изучаемых вырождений стали конечными (например, ограничиться только гамильтоновыми системами и их гамильтоновыми деформациями).

Впрочем, такое сужение функционального пространства не всегда легко сделать. Рассмотрим, например, краевые задачи для уравнений с частными производными. Речь идет о пересечении двух подмногообразий в функциональном пространстве: пространства решений и пространства функций, удовлетворяющих граничным условиям. Оба эти многообразия имеют бесконечную размерность и бесконечную коразмерность. Анализ этой ситуации требует умения различать разные бесконечные размерности и коразмерности: условие обращения в нуль функции одного переменного, построенной по данному объекту, выделяет в функциональном пространстве «многообразие меньшей (бесконечной) коразмерности», чем условие обращения в нуль функции двух переменных.

Одной из простейших задач, где требуется такое исчисление бесконечных коразмерностей, соответственно ядрам и коядрам, состоящим из функций на многообразиях разного числа измерений, является задача с косой производной. В этой задаче на сфере, ограничивающей n-мерный шар, задано векторное поле, касательное к n-мерному объемлющему пространст-

ву. Требуется определить гармоническую в шаре функцию, производная которой по направлению этого поля равна заданной граничной функции.

Рассмотрим, например, случай $n=3$. В этом случае поле общего положения касается сферы на некоторой гладкой кривой. На этой кривой имеются еще особые точки, где поле касается самой кривой. Строение поля в окрестности каждой из этих особых точек стандартное: можно доказать, что при любом n для поля общего положения* в окрестности каждой точки границы поле задается в надлежащей системе координат одной из формул вида

$$x_2\partial_1 + x_3\partial_2 + \ldots + x_k\partial_{k-1} + \partial_k, \quad k \leqslant n,$$

где $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ и на границе $x_1 = 0$ (см. *Вишик С. М.* О задаче с косой производной // Вестник МГУ, сер. матем. 1972. Т. 1. С. 21—28).

Задача с косой производной должна, по-видимому, ставиться по такой схеме. Многообразия касания поля с границей, многообразия касания поля с многообразиями касания и т. д. делят границу на части разной размерности. На некоторых из этих частей границы следует задавать граничные условия, на других же, напротив, граничная функция сама должна удовлетворять определенным условиям для существования классического решения задачи.

Несмотря на обилие исследований по задаче с косой производной (особенно полно задача исследована в работах В. Г. Мазьи, которым предшествовали работы М. Б. Малютова и Ю. В. Егорова с В. А. Кондратьевым), описанная выше программа реализована лишь в двумерном случае (когда граница — окружность).

В. Пространства струй

Исследование бифуркаций в k-параметрических семействах общего положения есть в сущности исследование функционального пространства, разбитого на части, соответствующие разным вырождениям, с пренебрежением вырождениями коразмерности большей, чем k.

Чтобы избавиться от бесконечномерности самого функционального пространства, разработан специальный аппарат конечномерных аппроксимаций: многообразия k-струй (термин *jet* введен Эресманом).

Ниже фиксируются термины и обозначения, которыми мы будем пользоваться. Все утверждения этого и следующего пунктов совершенно очевидны.

* То есть для всякого поля из некоторого открытого всюду плотного в функциональном пространстве гладких полей множества.

Пусть $f\colon M^m \to N^n$ — гладкое отображение гладких многообразий (можно считать, что M и N — области в евклидовых пространствах соответствующего числа измерений).

Определение. Два таких отображения f_1, f_2 называются касающимися порядка k или *k-касающимися в точке x* из M, если (рис. 106)

$$\rho_N(f_1(y), f_2(y)) = o(\rho_M^k(x, y)) \quad \text{при } y \to x.$$

Здесь ρ означает какую-либо риманову метрику; легко видеть, что свойство k-касания от выбора метрик ρ_M и ρ_N не зависит.

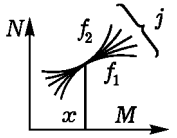


Рис. 106

Два отображения 0-касаются в точке x, если их значения в точке x совпадают. Касание порядка k является отношением эквивалентности ($f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1$, $f_1 \sim f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3$, $f_1 \sim f_1$).

Определение. *k-струей* гладкого отображения f в точке x называется класс k-касающихся в x отображений.

Обозначение.

$$j_x^k(f) = \{f_1 \colon f_1 \ k\text{-касается } f \text{ в точке } x\}.$$

Точка x называется *истоком*, а точка $f(x)$ *устьем* этой струи.

Выберем координаты на M и на N в окрестностях точек x и $f(x)$ соответственно. Тогда k-струя любого отображения, близкого к f, в любой точке, близкой к x, задается набором коэффициентов отрезка ряда Тейлора степени k. Таким образом, при фиксированных координатных системах струю порядка k можно отождествить с набором коэффициентов отрезка ряда Тейлора степени k.

Пример. 0-струя отображения f оси x в ось y в точке x задается парой чисел (x, y), где $y = f(x)$. 1-струя задается тройкой чисел (x, y, p), где $p = \dfrac{df}{dx}$.

Кроме касания порядка k есть еще одно отношение эквивалентности, приводящее вместо струй к *росткам* отображений.

Определение. Два отображения, заданные в двух окрестностях одной и той же точки, *имеют общий росток* в этой точке, если они совпадают в некоторой третьей окрестности этой точки (третья окрестность может быть меньше пересечения первых двух).

Ростком отображения в точке называется класс эквивалентности по введенному отношению эквивалентности.

Для ростка, как и для отображения, можно определить его 0-струю в точке, 1-струю и т. д.

Рассмотрим множество всех k-струй ростков* гладких отображений из M в N во всевозможных точках из M.

Определение. Множество всех k-струй ростков отображений из M в N называется *пространством k-струй отображений из M в N* и обозначается через

$$J^k(M,N) = \text{ пространство } k\text{-струй отображений из } M \text{ в } N.$$

Пример. $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ есть трехмерное пространство с координатами (x,y,p) (ср. § 3).

Множество $J^k(M,N)$ имеет естественную структуру гладкого многообразия. Действительно, выберем системы координат в окрестности точки из M и в окрестности образа этой точки в N при некотором отображении f. Тогда k-струя отображения f и все близкие струи задаются координатами точки-прообраза и наборами коэффициентов отрезка ряда Тейлора отображения в этой точке. Тем самым мы построили карту многообразия струй $J^k(M,N)$ в окрестности той его точки, которой является k-струя отображения f.

Размерность многообразия струй легко сосчитать. Например,

$$J^0(M,N) = M\times N, \quad \dim J^0(M,N) = \dim M + \dim N,$$
$$\dim J^1(M,N) = \dim M + \dim N + \dim M \dim N.$$

Имеется естественное отображение

$$J^{k+1}(M,N) \to J^k(M,N)$$

($(k+1)$-струя определяет k-струю, так как из $(k+1)$-касания вытекает k-касание). Это гладкое отображение является расслоением. Мы получаем цепочку расслоений

$$\dots \to J^k \to J^{k-1} \to \dots \to J^1 \to J^0 = M\times N.$$

Слой каждого из этих расслоений диффеоморфен линейному пространству, но не имеет (при $k>1$) естественной линейной структуры («неинвариантность высших дифференциалов»).

Многообразия J^k являются своего рода конечномерными аппроксимациями бесконечномерного функционального пространства гладких отображений из M в N.

* В вещественно-гладком случае все равно, рассматривать ли здесь струя ростков, или струи отображений всего M, так как каждый росток является ростком глобального отображения. В комплексной же ситуации глобальное гладкое отображение с заданной струей может и не существовать.

Г. Группы струй локальных диффеоморфизмов и пространства струй векторных полей

Рассмотрим пространство струй $J^k(M, M)$. В этом многообразии лежит подмногообразие k-струй диффеоморфизмов. Это подмногообразие — не группа, так как струи можно умножать, только если устье одной струи есть исток другой.

Зафиксируем некоторую точку на M и рассмотрим все ростки диффеоморфизмов M, оставляющих эту точку на месте. Их k-струи уже образуют группу.

Определение. Группа k-струй ростков диффеоморфизмов M, оставляющих на месте точку x, называется *группой k-струй локальных диффеоморфизмов многообразия M в точке x* и обозначается через $J^k_x(M)$.

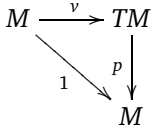
Пример. Группа 1-струй локальных диффеоморфизмов изоморфна линейной группе $J^1_x(M^m) = \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$.

При $k > 1$ получается более сложная группа Ли. Поскольку k-струя определяет $(k-1)$-струю, получаем цепочку отображений

$$\to J^k_x(M) \to \ldots \to J^1_x(M) = \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m).$$

Легко видеть, что *эти отображения* (отображения забывания членов степени k в многочлене Тейлора) — *гомоморфизмы, а их ядра — коммутативные группы*. Пусть, например, $m=1$. Тогда если $f(x)=x+ax^k \pmod{x^{k+1}}$ и $g(x)=x+bx^k \pmod{x^{k+1}}$, то $(f\circ g)(x)=x+ax^k+bx^k \pmod{x^{k+1}}$.

Векторное поле на многообразии M — это сечение касательного расслоения $p: TM \to M$, т. е. такое гладкое отображение $v: M \to TM$, что коммутативна диаграмма



Определения ростков, струй и пространств струй векторных полей повторяют предыдущие определения.

Группа диффеоморфизмов многообразия M действует на пространстве всех векторных полей на M, а также на пространствах k-струй векторных полей на M.

Группа k-струй локальных диффеоморфизмов многообразия M в точке действует на пространстве $(k-1)$-струй векторных полей на M в этой точке; это действие линейно.

Пример. Пусть $y = a_1x + a_2x^2 + \ldots$ — 2-струя локального диффеоморфизма в нуле. Образ 1-струи поля $v(x) = v_0 + v_1x + \ldots$ дается формулой $w(x) = w_0 + w_1x + \ldots$, где $w_0 = a_1v_0$, $w_1 = a_1v_1a_1^{-1} + 2a_2a_1^{-1}v_0$.

Доказательство. Эта формула получается при записи уравнения $\dot{x} = v(x)$ в координатах y. □

Д. Слабая теорема трансверсальности

Доказательства возможности приведения в общее положение часто удается заменить ссылкой на некоторые стандартные (и очевидные) теоремы трансверсальности. Ниже приведены формулировки и наброски доказательств наиболее употребительных теорем трансверсальности. Ссылки на теоремы трансверсальности служат в основном для экономии места: в каждом конкретном случае соответствующее конкретное утверждение легко доказать непосредственно.

Определение. Два линейных подпространства X и Y линейного пространства L называются *трансверсальными*, если их сумма есть все пространство:

$$L = X + Y.$$

Например, две пересекающиеся под ненулевым углом плоскости в трехмерном пространстве трансверсальны, а две прямые — нет.

Пусть A и B — гладкие многообразия, и пусть C — гладкое подмногообразие в B (здесь и далее слово многообразие означает многообразие без края).

Определение. Отображение $f: A \to B$ называется *трансверсальным к C в точке a из A*, если либо $f(a)$ не принадлежит C, либо касательная плоскость к C в точке $f(a)$ и образ касательной плоскости к A в точке a трансверсальны (рис. 107):

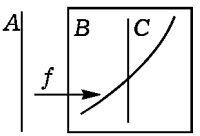


Рис. 107

$$f_*T_aA + T_{f(a)}C = T_{f(a)}B.$$

Определение. Отображение $f: A \to B$ *трансверсально к C*, если оно трансверсально к C в любой точке многообразия-прообраза.

Например, вложение прямой в трехмерное пространство трансверсально другой прямой в этом пространстве, если и только если прямые не пересекаются.

Замечание. Отображение прямой на плоскость может не быть трансверсальным лежащей на плоскости прямой даже и в том случае, когда образом этого отображения является нормаль к данной

прямой (образ касательного пространства и касательное пространство к образу — не одно и то же).

Отметим также, что если $f\colon A \to B$ трансверсально к C, то прообраз C в A есть гладкое подмногообразие, и его коразмерность в A равна коразмерности C в B.

Часто встречается ситуация, когда C — не гладкое подмногообразие, а подмногообразие с особенностями.

Определение. *Стратифицированным подмногообразием* гладкого многообразия называется конечное объединение попарно непересекающихся гладких многообразий (стратов), удовлетворяющее следующему условию: замыкание каждого страта состоит из него самого и конечного объединения стратов меньших размерностей.

Отображение называется *трансверсальным стратифицированному подмногообразию*, если оно трансверсально каждому страту.

Пример. Пусть C — объединение двух пересекающихся по прямой плоскостей в трехмерном пространстве, стратификация — разбиение на прямую пересечения и четыре полуплоскости. Трансверсальность к C означает трансверсальность к каждой из плоскостей и трансверсальность к прямой пересечения. Например, кривая, трансверсальная к стратифицированному многообразию C, не пересекается с прямой особенностей C.

Теорема. *Пусть A — компактное многообразие, и C — компактное подмногообразие в многообразии B. Тогда отображения $f\colon A \to B$, трансверсальные к C, образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех достаточно гладких отображений $A \to B$* (близость отображений f определяется как близость функций, задающих f, и их производных до достаточно большого порядка r).

Эта теорема называется слабой теоремой трансверсальности. Ее утверждение означает, что малым шевелением можно превратить отображение, не трансверсальное фиксированному подмногообразию, в трансверсальное (рис. 108). Если же трансверсальность имеет место, то она сохраняется при малых шевелениях.

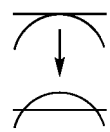


Рис. 108

Доказательство. Рассмотрим частный случай, когда B есть линейное пространство, $B = \mathbb{R}^n$, а C — его подпространство $\mathbb{R}^{n-k}$.

Представим B в виде суммы $B = C + D$ двух подпространств дополнительней размерности, $C = \mathbb{R}^{n-k}$ и $D = \mathbb{R}^k$. Спроектируем B на D вдоль C; обозначим эту проекцию через π. Рассмотрим отображение $\pi \circ f\colon A \to D$.

Точка 0 является критическим значением для этого отображения тогда и только тогда, когда отображение $f\colon A\to B$ не трансверсально подмногообразию $C\subset B$. По лемме Сарда (§ 10) почти все точки из D не являются критическими значениями для отображения $\pi\circ f$. Пусть ε — точка из D, не являющаяся критическим значением для $\pi\circ f$. Построим отображение $f_\varepsilon\colon A\to B$, положив $f_\varepsilon(a)=f(a)-\varepsilon$. Тогда отображение f_ε трансверсально к C. Поскольку ε можно было взять сколь угодно малым, всюду плотность трансверсальных отображений в нашем частном случае доказана. Открытость следует из теоремы о неявной функции. Общий случай легко сводится к рассмотренному. □

Замечание. Если C не компактно, то «открытое» нужно, вообще говоря, заменить на «пересечение счетного множества открытых».

Пример 1. B — тор, C — его обмотка, A — окружность.

Пример 2. B — плоскость, A — вложенная в плоскость окружность, C — касательная к ней (без самой точки касания). Вложение трансверсально к C, но существуют сколь угодно близкие не трансверсальные к C отображения.

Для того чтобы трансверсальные к C отображения компактного A в B образовывали *открытое* всюду плотное множество, достаточно вместо компактности C потребовать, чтобы у каждой точки из B нашлась такая окрестность, что пара (окрестность, ее пересечение с C) диффеоморфна паре $(\mathbb{R}^b,\mathbb{R}^c)$ либо паре $(\mathbb{R}^b$, пустое множество).

Если A не компактно, то пространство отображений удобно снабжать «тонкой топологией». В этой топологии окрестность отображения $f\colon A\to B$ определяется следующим образом. Фиксируем открытое множество G в пространстве струй $J^k(A,B)$ при каком-либо k. Множество C^∞-отображений $f\colon A\to B$, k-струи которых в каждой точке принадлежат G, открыто в тонкой топологии. Такие непустые открытые множества берутся в качестве базиса окрестностей, задающих тонкую топологию в пространстве бесконечно дифференцируемых отображений.

Таким образом, близость двух отображений в тонкой топологии означает сколь угодно быстрое сближение этих отображений (с любым числом производных) «на бесконечности»; в частности, график достаточно близкого к f отображения лежит в сколь угодно быстро утончающейся «на бесконечности» окрестности графика отображения f.

Отсюда следует, что сходимость последовательности в тонкой топологии влечет полное совпадение вне некоторого компактного множества всех членов последовательности, начиная с некоторого. Тем не менее, любая окрестность данного отображения в тонкой топологии содержит отображения, нигде не совпадающие с данным.

Если открытость и всюду плотность понимать в смысле тонкой топологии, то теорема трансверсальности верна и для некомпактных A (для открытости C должно быть компактным или удовлетворять сформулированному выше условию).

Теорема трансверсальности очевидным образом распространяется на случай стратифицированного подмногообразия C. Однако в этом случае теорема гарантирует, что трансверсальные отображения образуют не открытое всюду плотное множество, а лишь всюду плотное пересечение счетного числа открытых множеств.

Чтобы трансверсальные к стратифицированному многообразию отображения образовывали открытое всюду плотное множество, достаточно, чтобы стратификация удовлетворяла следующему дополнительному условию: всякое вложение, трансверсальное к страту меньшей размерности, трансверсально ко всем примыкающим стратам большей размерности в некоторой окрестности этого страта меньшей размерности.

Пример 1. Пусть C — конечное объединение плоскостей в линейном пространстве, стратифицированное естественным образом (например, пара пересекающихся плоскостей в $\mathbb{R}^3$). Из трансверсальности к $\mathbb{R}^k$ следует трансверсальность к объемлющему $\mathbb{R}^l$, поэтому наше условие выполнено.

Пример 2. Пусть C — конус $x^2=y^2+z^2$ в $\mathbb{R}^3$, стратификация — разбиение на точку 0 и две полы. Наше условие, как нетрудно проверить, выполнено.

Пример 3. Пусть C — зонтик Уитни, заданный уравнением* $y^2=zx^2$ в $\mathbb{R}^3$ (рис. 109). (Часть $z\geqslant 0$ этого стратифицированного многообразия является образом отображения $\varphi\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, заданного формулами $x=u$, $z=v^2$, $y=uv$. Уитни доказал, что 1) при малом шевелении отображения φ сохраняется особенность такого же (с точностью до диффеоморфизмов $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$) типа; 2) это единственная особенность отображений двумерных многообразий в трехмерные, сохраняющаяся при малых шевелениях (кроме линий самопересечения), все прочие особенности при малом шевелении распадаются на особенности этого типа.)

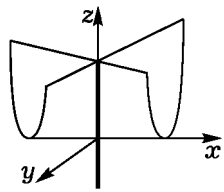


Рис. 109

Из трансверсальности к особой прямой $x=y=0$ не следует трансверсальность к многообразию близких к этой прямой регулярных точек поверхности (плоскость $z=0$ трансверсальна прямой и не трансверсальна поверхности).

* Зонтик включает ручку, изображенную на рис. 109 жирной линией.

Если условие на стратификацию C

трансверсальность к меньшему $\Rightarrow$ трансверсальность к большему

выполнено, то трансверсальность ко всей стратификации достигается так.

1) Страты минимальной размерности гладкие, к ним применима обычная теорема.

2) В окрестности стратов минимальной размерности трансверсальность достигнута на всех стратах.

3) Выкидываем из объемлющего многообразия замыкание окрестности стратов минимальной размерности и переходим к стратам следующей размерности.

Пример. Пусть B — пространство линейных операторов $b\colon \mathbb{R}^m \to \to \mathbb{R}^n$, C — множество операторов не максимального ранга. Операторы ранга r образуют гладкое подмногообразие, коразмерность которого в пространстве B равна $(m-r)(n-r)$. Разбиение на многообразия операторов различных рангов задает стратификацию на C.

Отображение $f\colon A \to B$ — это семейство линейных операторов из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, гладко зависящих как от параметра от точки многообразия A. Многообразие A называется *базой* семейства. Из теоремы трансверсальности сразу вытекает

Следствие. *В пространстве гладких семейств матриц порядка $m \times n$ всюду плотное множество образуют семейства, трансверсальные стратифицированному многообразию C матриц не максимального ранга.*

В частности, значения параметра, которым соответствуют матрицы ранга r, образуют, вообще говоря (для семейств из всюду плотного пересечения открытых множеств в пространстве семейств), гладкое подмногообразие коразмерности $(m-r)(n-r)$ в базе семейства.

Например, в пятипараметрическом семействе общего положения матриц порядка 2×3 ранг падает до 1 на трехмерном гладком подмногообразии пространства параметров и не равен 0 ни в одной точке пространства параметров; если для данного семейства это не так, то сколь угодно малой деформацией семейства можно добиться того, что семейство станет семейством общего положения.

E. Теорема трансверсальности Тома

Теорема трансверсальности Тома является обобщением слабой теоремы трансверсальности, в котором роль подмногообразия C играет подмногообразие пространства струй.

С каждым гладким отображением $f: M \to N$ связано его «k-струйное расширение»

$$\hat{f}: M \to J^k(M,N), \quad \hat{f}(x) = j^k_x(f)$$

(точке x из M сопоставляется k-струя отображения f в точке x).

Теорема. *Пусть C — подмногообразие пространства струй $J^k(M,N)$. Тогда множество отображений $f: M \to N$, k-струйные расширения которых трансверсальны к C, — всюду плотное счетное пересечение открытых множеств в пространстве всех гладких отображений из M в N.*

Эта теорема означает, что малым шевелением гладкого отображения можно привести его в общее положение не только по отношению к любому гладкому подмногообразию в пространстве-образе, но и по отношению к любому условию, наложенному на производные любого конечного порядка.

Замечание. Слабая теорема трансверсальности получается из сформулированной при $k=0$. Сильная же из слабой непосредственно не вытекает по следующей причине. Можно было бы применить слабую теорему к отображению $\hat{f}: M \to J^k$ и получить близкое к $\hat{f}$ трансверсальное к C отображение. Однако это близкое отображение, вообще говоря, не будет k-струйным расширением никакого гладкого отображения из M в N.

Теорема трансверсальности Тома утверждает, что трансверсализирующую деформацию можно выбрать в более узком классе деформаций: достаточно ограничиться деформацией k-струйного расширения в пространстве k-струйных расширений, а не в пространстве всех сечений $M \to J^k$. Таким образом, теорема означает, что условия интегрируемости (выполнение которых отличает k-струйные расширения отображений из M в N от произвольных сечений $M \to J^k$) не мешают достигнуть трансверсальности.

Доказательство. Сущность доказательства состоит в такой же редукции к лемме Сарда, как и для слабой теоремы трансверсальности. Основное отличие состоит в том, что трансверсализирующая деформация ищется не в классе отображений $f_\varepsilon = f - \varepsilon$, а в более широком классе полиномиальных деформаций $f_\varepsilon = f + \varepsilon_1 e_1 + \ldots$ $\ldots + \varepsilon_s e_s$, где e_i — всевозможные вектор-мономы степени не выше k.

Лемма 1. *Рассмотрим гладкое отображение $F: A \times E \to B$ прямого произведения гладких многообразий A и E в гладкое многообразие B.*

Будем рассматривать F как семейство отображений F_ε многообразия A в B, зависящих от точки ε многообразия E как от параметра. Тогда если отображение F трансверсально к подмногообразию C многообразия B, то почти каждый член $F_\varepsilon\colon A \to B$ соответствующего F семейства трансверсален к C.

Доказательство. Рассмотрим $F^{-1}(C)$. По теореме о неявной функции, это — гладкое подмногообразие в $A \times E$. Рассмотрим проекцию этого подмногообразия на E вдоль A. По лемме Сарда почти все значения — не критические. Пусть ε — не критическое значение. Тогда $F_\varepsilon\colon A \to B$ трансверсально к C (ибо F трансверсально к C, а $A \times \varepsilon$ трансверсально к $F^{-1}(C)$). □

Лемма 2. *Пусть f — гладкое отображение из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем в $\mathbb{R}^m$ и в $\mathbb{R}^n$ системы координат и рассмотрим гладкое отображение прямого произведения пространства $\mathbb{R}^m$ на пространство $\mathbb{R}^s$ в пространство k-струй отображений $J^k(M, N)$, определенное формулой*

$$(x, \varepsilon) \mapsto (j^k_x f_\varepsilon),$$

где $f_\varepsilon = f + \varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_s e_s$ ($e_1, \ldots, e_s$ — всевозможные произведения мономов степени не выше k от координат точки x из $\mathbb{R}^m$ на базисные векторы в $\mathbb{R}^n$).

Утверждается, что построенное отображение не имеет критических значений (и, следовательно, трансверсально любому подмногообразию пространства k-струй).

Доказательство. Координатами в пространстве J^k являются координаты точки x из $\mathbb{R}^m$ и коэффициенты Тейлора струи в этой точке до степени k включительно. При подходящем выборе коэффициентов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ вектор-многочлен $\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_s e_s$ будет иметь в любой наперед заданной точке x любой наперед заданный набор коэффициентов Тейлора до членов степени k включительно. Отсюда непосредственно вытекает утверждение леммы. □

Пусть C — гладкое подмногообразие в $B = J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Применим к отображению леммы 2 лемму 1 (в которой $A = \mathbb{R}^m$, $E = \mathbb{R}^s$; $F(x, \varepsilon) = j^k_x f_\varepsilon$). По лемме 1 для почти всех ε отображение $F_\varepsilon = F(\,\cdot\,, \varepsilon)$ трансверсально к C. Выбрав ε достаточно малым, мы получим сколь угодно близкое к f (в любой конечной части $\mathbb{R}^m$) отображение $f_\varepsilon\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, k-струйное расширение которого трансверсально к C. Переход от этой локальной конструкции к глобальной (замена $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ на M, N) не представляет затруднений. □

Ж. Пример: распадение сложных особых точек векторного поля

В качестве приложения теорем трансверсальности рассмотрим вопрос о том, какие особые точки имеет векторное поле общего положения.

Определение. Особая точка x векторного поля v называется *невырожденной*, если оператор линейной части поля в особой точке невырожден.

Из теорем трансверсальности вытекает

Следствие. *В функциональном пространстве гладких векторных полей на компактном многообразии открытое всюду плотное множество образуют поля, все особые точки которых невырождены,* (*и, следовательно, изолированы*).

Доказательство. Особые точки — это прообразы гладкого многообразия (нулевого сечения) в пространстве 0-струй векторных полей. Невырожденность особой точки есть трансверсальность 0-струйного расширения поля к этому многообразию. □

Итак, вырожденная особая точка распадается на невырожденные при сколь угодно малом шевелении поля.

Пример. Рассмотрим особую точку типа «седло-узел»:

$$\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y.$$

При шевелении $\dot{x} = x^2 - \varepsilon$, $\dot{y} = -y$ седло-узел распадается на две особых точки: седло и узел.

Возникает вопрос, на сколько особых точек распадается данная сложная особая точка при малых шевелениях. Как это обычно бывает (скажем, в теории алгебраических уравнений), вопрос наиболее естественно решается в комплексной области.

Определение. Число невырожденных (комплексных) особых точек, на которые распадается сложная особая точка при малом шевелении, называется *кратностью* особой точки.

Замечание. Строго говоря, кратность определяется следующим образом:

1) фиксируется достаточно малая окрестность особой точки в комплексном пространстве;

2) по выбранной окрестности выбирается малость шевеления;

3) для пошевеленного поля считается число особых точек в окрестности данной точки.

Ниже будет указана формула для кратности особой точки в терминах диаграмм Ньютона (А. Г. Кушниренко, Д. Н. Бернштейн, А. Г. Хованский).

Пусть $f = \sum f_m x^m$ — числовой формальный ряд по степеням переменных $x_1, \ldots, x_n$ ($x^m = x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$). Рассмотрим октант решетки целых точек m с неотрицательными координатами m_k.

Обозначим этот октант через $\mathbb{Z}^n_+$.

Определение. *Носителем* ряда f называется множество точек m из октанта $\mathbb{Z}^n_+$, для которых $f_m \neq 0$. Обозначение:

$$\operatorname{supp} f = \{m \in \mathbb{Z}^n_+ : f_m \neq 0\}.$$

Определение. *Многогранником Ньютона* ряда f называется выпуклая оболочка объединения параллельных $\mathbb{Z}^n_+$ октантов с вершинами в точках носителя в октанте $\mathbb{R}^n_+$ вещественного линейного пространства. Обозначение:

$$\Gamma_f = \text{ выпуклая оболочка объединения } m + \mathbb{Z}^n_+, \quad m \in \operatorname{supp} f.$$

Многогранник Ньютона называется *удобным*, если он пересекает все координатные оси.

Теорема. *Пусть даны n удобных многогранников Ньютона* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$.

Рассмотрим векторное поле $v_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + v_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}$, *где многогранники Ньютона для компонент* $v_1, \ldots, v_n$ *суть* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$. *Тогда кратность* μ *особой точки нуль нашего векторного поля не меньше, чем определяемое ниже число Ньютона* $\nu(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ *и совпадает с ним для почти всех полей с данными многогранниками Ньютона компонент* (*для всех полей, исключая гиперповерхность в пространстве полей с данными многогранниками*).

Замечание. Условие удобности многогранников не является ограничением, так как можно доказать, что его выполнения можно добиться добавлением членов сколь угодно высокой степени, не меняющих кратности (если только она конечна).

Для определения числа Ньютона системы удобных многогранников нам потребуется понятие смешанного объема.

Пусть Γ — удобный многогранник Ньютона. Под *объемом* $V(\Gamma)$ мы будем понимать объем (невыпуклой) области между нулем и границей многогранника Γ в положительном октанте $\mathbb{R}^n_+$.

Пусть Γ_1, Γ_2 — два удобных многогранника Ньютона. Суммой $\Gamma_1 + \Gamma_2$ называется арифметическая сумма, т. е. множество всевозможных сумм векторов из Γ_1 и из Γ_2. Сумма также является удобным многогранником Ньютона.

Таким образом, удобные многогранники Ньютона образуют коммутативную полугруппу. Из этой полугруппы обычным методом строится группа (она называется группой Гротендика): элементом группы является формальная разность двух многогранников Ньютона $\Gamma_1 - \Gamma_2$, причем по определению $\Gamma_1 - \Gamma_2 = \Gamma_3 - \Gamma_4$, если и только если $\Gamma_1 + \Gamma_4 = \Gamma_2 + \Gamma_3$.

Построенная группа определяет также линейное пространство над полем вещественных чисел: если λ положительное число, то $\lambda\Gamma$ означает многогранник, полученный из Γ гомотетией с центром в 0 с коэффициентом λ. Объем $V(\Gamma)$ однозначно продолжается на это линейное пространство в качестве формы степени n (доказательство этого не совсем очевидного факта оставляется любознательному читателю в виде упражнения).

Каждая форма степени n единственным образом представляется в виде значения симметричной n-линейной формы при совпадающих аргументах; например,

$$a^2 = ab \mid a = b, \quad ab = \frac{((a+b)^2 - a^2 - b^2)}{2}.$$

Определение. *Смешанным объемом* (Минковского) системы многогранников $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ называется значение на наборе $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ той единственной симметричной n-линейной формы, которая совпадает с объемом $V(\Gamma)$ при $\Gamma_1 = \ldots = \Gamma_n = \Gamma$. Обозначение: $V(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$.

Пример. В плоском случае $n = 2$ и смешанный объем пары (Γ_1, Γ_2) есть $V(\Gamma_1, \Gamma_2) = \dfrac{V(\Gamma_1 + \Gamma_2) - V(\Gamma_1) - V(\Gamma_2)}{2}$.

Определение. *Число Ньютона* $\nu(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n)$ определяется следующим образом:

$$\nu(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n) = n!\, V(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n).$$

Пример. В двумерном случае пусть Γ_1, Γ_2 ограничены прямыми, пересекающими оси координат в точках (a_1, b_1) для Γ_1 и (a_2, b_2) для Γ_2. Тогда $\nu(\Gamma_1, \Gamma_2)$ равно $\min(a_1 b_2, a_2 b_1)$. Следовательно, почти всегда кратность особой точки равна

$$\mu = \min(a_1 b_2, a_2 b_1).$$

§ 30. Матрицы, зависящие от параметров, и особенности декремент-диаграмм

В качестве подготовки к исследованию бифуркаций особых точек векторных полей мы рассмотрим здесь задачу о нормальной форме семейств эндоморфизмов линейного пространства.

А. Задача о нормальной форме матриц, зависящих от параметров

Приведение матрицы к жордановой нормальной форме — не устойчивая операция, если среди собственных чисел есть кратные. Действительно, сколь угодно малое изменение матрицы может при наличии кратных собственных чисел совершенно изменить жорданову форму. Поэтому если матрица известна лишь приближенно, то приведение ее к жордановой нормальной форме в случае кратных собственных чисел практически невозможно. Оно и не нужно, так как матрица общего вида не имеет кратных собственных чисел.

Кратные собственные числа возникают неустранимым малым шевелением образом в случае, когда мы интересуемся не отдельной матрицей, а семейством матриц, зависящих от параметров. В этом случае, хотя мы и можем привести к жордановой нормальной форме каждую индивидуальную матрицу семейства, как эта нормальная форма, так и приводящее к ней преобразование будут, вообще говоря, разрывно зависеть от параметра. Таким образом, возникает вопрос о том, к какому простейшему виду можно привести семейство матриц, гладко (для определенности, голоморфно) зависящих от параметров, при помощи гладко (голоморфно) зависящих от параметров замен координат.

Рассмотрим множество всех квадратных комплексных матриц порядка n как линейное пространство размерности n^2. Отношение подобия матриц разбивает все пространство $\mathbb{C}^{n^2}$ на многообразия (орбиты линейной группы): две матрицы лежат в одной орбите, если у них совпадают собственные числа и размеры жордановых клеток. Из-за собственных чисел это разбиение континуально. В качестве грубой модели можно представлять себе разбиение трехмерного пространства на страты многообразий $x^2+y^2-z^2=C$ (рис. 110).

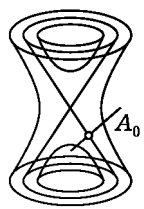


Рис. 110

Семейство матриц задается отображением пространства параметров семейства в пространство матриц $\mathbb{C}^{n^2}$. Оказывается, среди всех семейств матриц можно выделить такие семейства, что приведение к ним осуществляется уже гладко зависящей от параметров заменой базиса (и гладкой заменой параметра). Такие семейства называются версальными деформациями (точное определение см. ниже). Версальные деформации с минимальным возможным числом параметров называются миниверсальными.

Таким образом, миниверсальные деформации — это нормальные формы с наименьшим возможным числом параметров, при приведении к которым можно сохранить гладкую зависимость от параметров.

Пример. Если все собственные числа диагональной матрицы различны, то в качестве ее миниверсальной деформации можно взять семейство всех диагональных матриц (параметры — собственные числа).

Мы укажем ниже миниверсальные деформации произвольных матриц.

Б. Версальные деформации

Определение. *Семейством матриц* мы будем называть голоморфное отображение $A\colon \Lambda \to \mathbb{C}^{n^2}$, где Λ — окрестность начала координат в некотором пространстве параметров $\mathbb{C}^l$. Росток семейства A в точке 0 мы будем называть *деформацией* матрицы $A(0)$.

Деформация A' матрицы $A(0)$ называется *эквивалентной* деформации A, если существует такая деформация единицы C, что

$$A'(\lambda) = C(\lambda)A(\lambda)(C(\lambda))^{-1}.$$

Пусть $\varphi\colon (M,0) \to (\Lambda,0)$ — голоморфное отображение ($M \subset \mathbb{C}^m$, $\Lambda \subset \mathbb{C}^l$).

Определение. Семейством, *индуцированным из A при отображении φ*, называется семейство φ^*A:

$$(\varphi^*A)(\mu) = A(\varphi(\mu)), \quad \mu \in M.$$

Индуцированная деформация φ^*A матрицы $A(0)$ определяется такой же формулой.

Определение. Деформация A матрицы A_0 называется *версальной*, если любая деформация A' матрицы A_0 эквивалентна деформации, индуцированной из A. Версальная деформация называется

универсальной, если это индуцирующее отображение φ определяется деформацией A' однозначно. Версальная деформация называется *миниверсальной*, если размерность пространства параметров — наименьшая возможная для версальной деформации.

Пример. Семейство диагональных матриц с диагональными элементами $(\alpha_i + \lambda_i)$, где все α_i различны, а λ_i — параметры деформации, является версальной, универсальной и миниверсальной деформацией матрицы (α_i).

Семейство всех матриц $\mathbb{C}^{n^2}$ определяет n^2-параметрическую версальную деформацию любой своей матрицы. Однако эта деформация не является, вообще говоря, ни универсальной, ни миниверсальной.

Размерность миниверсальной деформации произвольной матрицы дается следующей теоремой. Обозначим через α_i собственные числа матрицы A_0 и пусть $n_1(\alpha_i) \geqslant n_2(\alpha_i) \geqslant \ldots$ — размеры принадлежащих α_i жордановых клеток, упорядоченных, начиная с наибольшей.

Теорема 1. *Наименьшее число параметров версальной деформации матрицы A_0 равно*

$$\sum_i [n_1(\alpha_i) + 3n_2(\alpha_i) + 5n_3(\alpha_i) + \ldots].$$

Сами миниверсальные деформации можно выбирать по-разному. В частности, три нормальные формы, описанные в следующей теореме, являются версальными деформациями матрицы, приведенной к верхнетреугольной жордановой нормальной форме.

Теорема 2. *Пусть A — голоморфно зависящее от параметра $\lambda \in \in \mathbb{C}^l$ семейство линейных операторов из $\mathbb{C}^n$ в себя, и пусть при некотором значении λ_0 параметра λ оператор $A(\lambda_0)$ имеет собственные числа α_i и жордановы клетки порядков*

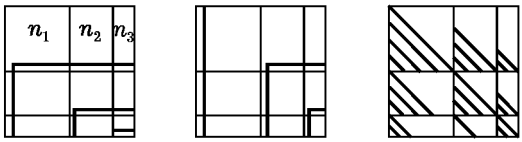
$$n_1(\alpha_i) \geqslant n_2(\alpha_i) \geqslant \ldots$$

Тогда существует базис в $\mathbb{C}^n$, голоморфно зависящий от параметра λ, меняющегося в некоторой окрестности точки λ_0, и такой, что матрица оператора $A(\lambda)$ имеет в этом базисе блочно-диагональный вид

$$A_0 + B(\lambda),$$

где A_0 — жорданова верхнетреугольная матрица оператора $A(\lambda_0)$, а $B(\lambda)$ — блочно-диагональная матрица, блоки которой соответствуют собственным числам матрицы A_0.

Блок B_i, соответствующий собственному числу α_i, заполнен нулями, за исключением мест, отмеченных на рис. 111; *на этих местах стоят голоморфные функции от λ.*



а) *б*) *в*)

Рис. 111

На рис. 111 представлены три нормальные формы. В первых двух число ненулевых элементов в B_i равно $n_1(\alpha_i) + 3n_2(\alpha_i) + \ldots$; в третьей все элементы на каждом косом отрезке равны. Миниверсальные деформации матрицы A_0 получатся, если считать отмеченные элементы матриц B_i независимыми переменными; их число во всех трех случаях равно $\sum[n_1(\alpha_i) + 3n_2(\alpha_i) + \ldots]$. Преимуществом первых двух нормальных форм является то, что в них число ненулевых элементов матрицы — наименьшее возможное. Преимуществом третьей формы является ортогональность версальной деформации к соответствующей орбите (в смысле поэлементного скалярного умножения матриц).

В. Доказательство версальности

Пусть $A\colon \Lambda \to \mathbb{C}^{n^2}$ — деформация матрицы $A_0 = A(0)$ с параметром $\lambda \in \Lambda$, такая что отображение A трансверсально к орбите C матрицы A_0 под действием группы линейных замен координат. Предположим, что число параметров деформации минимально (т. е. равно коразмерности орбиты в пространстве $\mathbb{C}^{n^2}$ всех матриц). Такая деформация называется минитрансверсальной.

Лемма 1. *Минитрансверсальная деформация A миниверсальна.*

Для доказательства леммы нам потребуется следующее

Определение. *Централизатором* матрицы u называется множество всех матриц, коммутирующих с u. Обозначение:

$$Z_u = \{v\colon [u, v] = 0\}, \quad [u, v] = uv - vu.$$

Централизатор любой матрицы порядка n является линейным подпространством пространства $\mathbb{C}^{n^2}$ всех матриц порядка n.

Пусть Z — централизатор матрицы A_0. Проведем через единицу e в пространстве невырожденных матриц гладкую поверхность, трансверсальную к $e+Z$, размерность которой равна коразмерности централизатора (т. е. имеет минимальное возможное значение).

Обозначим эту поверхность через P и рассмотрим отображение

$$\Phi\colon P\times\Lambda\to\mathbb{C}^{n^2},\quad \Phi(p,\lambda)=pA(\lambda)p^{-1}.$$

Лемма 2. *Отображение* Φ *в окрестности точки* $(e,0)$ *— локальный диффеоморфизм на* $(\mathbb{C}^{n^2},A_0)$.

Для доказательства леммы 2 рассмотрим отображение ψ группы невырожденных матриц в пространство $\mathbb{C}^{n^2}$ всех матриц, заданное формулой $\psi(b)=bA_0b^{-1}$.

1°. *Производная отображения* ψ *в единице есть оператор коммутирования с* A_0:

$$\psi_*\colon\mathbb{C}^{n^2}\to\mathbb{C}^{n^2},\quad \psi_*u=[u,A_0].$$

▷ $(e+\varepsilon u)A_0(e+\varepsilon u)^{-1}=A_0+\varepsilon[u,A_0]+\ldots$ ◁

Из 1° вытекает

2°. *Размерность централизатора матрицы* A_0 *равна коразмерности орбиты, а размерность трансверсали к централизатору — размерности орбиты*:

$$\dim Z=\dim\Lambda,\quad \dim P=\dim C.$$

Введем в пространстве $\mathbb{C}^{n^2}$ эрмитово скалярное произведение $\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}(AB^*)$, где B^* — матрица, полученная из B транспонированием и комплексным сопряжением. Соответствующий скалярный квадрат — это просто сумма квадратов модулей элементов матрицы.

Лемма 3. *Вектор* B *из касательного пространства к* $\mathbb{C}^{n^2}$ *в точке* A_0 *перпендикулярен к орбите матрицы* A_0, *если и только если* $[B^*,A_0]=0$.

Доказательство. Касательные векторы к орбите — это матрицы, представленные в виде $[X,A_0]$. Ортогональность B к орбите означает, что при любом X имеем $\langle[X,A_0],B\rangle=0$. Иначе говоря, при любом X

$$0=\operatorname{tr}([X,A_0],B^*)=\operatorname{tr}(XA_0B^*-A_0XB^*)=$$
$$=\operatorname{tr}([A_0,B^*],X)=\langle[A_0,B^*],X^*\rangle.$$

Ввиду произвольности X это условие эквивалентно $[A_0,B^*]=0$.

Итак, лемма доказана: ортогональное дополнение к орбите матрицы получается из ее централизатора транспонированием и сопряжением. □

Централизаторы матриц, приведенных к жордановой нормальной форме, выписать нетрудно. Предположим вначале, что матрица имеет только одно собственное число и ряд верхне-жордановых клеток порядков $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots$

Лемма 4. *С матрицей A_0 коммутируют матрицы, изображенные на рис.* 112, *и только они.*

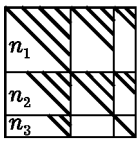


Рис. 112

На рис. 112 каждый косой отрезок означает ряд одинаковых чисел, а в незаполненных местах подразумеваются нули. Таким образом, число отрезков равно размерности централизатора.

Лемма 4 доказывается непосредственным вычислением коммутатора (см., например, *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. С. 199—207).

Из леммы 4 следует, что размерность централизатора матрицы A_0 (равная коразмерности орбиты и минимальной возможной размерности версальной деформации) дается формулой $d = n_1 + 3n_2 + + 5n_3 + \ldots$

Если жорданова матрица A_0 имеет несколько собственных чисел, разобьем ее на блоки, соответствующие собственным числам. Тогда матрицы, коммутирующие с A_0, будут блочно-диагональными, причем каждому собственному числу соответствует блок описанного на рис. 112 вида. Поэтому формула для размерности централизатора (коразмерности орбиты, размерности миниверсальной деформации) получается из предыдущей суммированием по всем различным собственным числам.

Действительно, ψ_* есть линейное отображение пространств одинаковой размерности, поэтому размерность ядра равна коразмерности образа.

Доказательство леммы 2. Производная Ф по p в $(e, 0)$ есть ψ_*, а производная по λ есть A_*. Эти операторы, по доказанному выше, изоморфно отображают касательные пространства к P в e и к Λ в 0 на трансверсальные пространства тех же размерностей (касательное к орбите C в A_0 для P и трансверсальное к ней для Λ). Следовательно, производная Ф в точке $(e, 0)$ есть изоморфизм линейных пространств размерности n^2. По теореме об обратной функции Ф есть локальный диффеоморфизм. □

Доказательство леммы 1. Будем рассматривать p и λ как координаты точки $\Phi(p, \lambda)$. Пусть $A'\colon (M, 0) \to (\mathbb{C}^{n^2}, A_0)$ — любая деформация матрицы A_0. Пусть $\mu \in M$ — параметр деформации. Определим $\lambda = \varphi(\mu)$ формулой $\varphi(\mu) = \lambda(A'(\mu))$ и положим $B(\mu) = p(A'(\mu))$. Тогда $A'(\mu) = B(\mu)A(\varphi(\mu))B^{-1}(\mu)$, что и доказывает версальность деформации A.

Минимальность размерности базы этой деформации очевидна. □

В качестве трансверсальной деформации матрицы A_0 можно взять семейство матриц вида $A_0 + B$, где матрица B принадлежит описанному выше ортогональному дополнению к орбите матрицы A_0. Мы получаем таким образом миниверсальную деформацию матрицы A_0.

В случае когда матрица A_0 имеет только одно собственное число, матрица B имеет вид, изображенный на рис. 111 *в*. Здесь на каждом косом отрезке стоит ряд равных чисел; число параметров равно числу отрезков и дается указанной выше формулой.

Матрица B имеет много ненулевых элементов. Можно построить миниверсальные деформации $A_0 + B$, в которых, число ненулевых элементов матрицы B минимальное возможное (равно числу параметров). С этой целью выберем в централизаторе базис: сопоставим каждому косому отрезку на рис. 111 *в* матрицу из нулей и единиц, у которой единицы стоят на этом косом отрезке.

Систему независимых уравнений касательной плоскости к орбите составляют следующие уравнения: для каждого косого отрезка рис. 111 сумма соответствующих элементов матрицы равна нулю (леммы 3 и 4). Таким образом, чтобы получить трансверсальное к орбите семейство $A_0 + B$, достаточно в качестве семейства матриц B брать матрицы, у которых на каждом косом отрезке рис. 111 *в* в одном месте стоит независимый параметр, а в остальных местах стоят нули. Выбирать ненулевой элемент на каждом косом отрезке можно в любом месте. Например, годится выбор, указанный в теореме 2 п. Б.

Г. Примеры

Будем обозначать верхнетреугольную жорданову матрицу произведением определителей ее клеток. Например, α^2 означает жорданову клетку порядка 2, а $\alpha\alpha$ — матрицу второго порядка, кратную единичной.

Первая нормальная форма теоремы п. Б приводит к следующим миниверсальным деформациям:

а) Версальная (и универсальная) двупараметрическая деформация жордановой клетки α^2 порядка 2:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

б) Версальная (но не универсальная) четырехпараметрическая деформация скалярной матрицы $\alpha\alpha$ порядка 2:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

в) Версальная и универсальная трехпараметрическая деформация жордановой клетки α^3:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

г) Версальная пятипараметрическая деформация матрицы $\alpha^2\alpha$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}.$$

Например, всякое голоморфное семейства матриц, содержащее при нулевом значении параметра жорданову клетку α^2, приводится при близких значениях параметра к нормальной форме (1), где λ_1, λ_2 — голоморфные функции параметров.

Построенные нормальные формы позволяют при исследовании многих вопросов, относящихся к поведению операторов, зависящих от параметров, ограничиваться специальными семействами — миниверсальными деформациями. Одним из таких вопросов является вопрос о строении бифуркационных диаграмм.

Д. Бифуркационные диаграммы

Бифуркационной диаграммой семейства матриц мы будем называть разбиение пространства параметров Λ по жордановым типам матриц. Семейство — это отображение $A\colon \Lambda \to \mathbb{C}^{n^2}$ пространства па-

раметров в пространство матриц, поэтому для изучения бифуркационных диаграмм следует изучить разбиение пространства всех матриц на матрицы с жордановыми формами разных типов. При этом разбиении мы объединяем вместе матрицы с одинаковыми размерами жордановых клеток, различающиеся лишь величиной собственных чисел. Поэтому получающееся разбиение является конечной стратификацией пространства матриц.

Каждый страт этой стратификации определяется совокупностью наборов $n_1(i) \geqslant n_2(i) \geqslant \ldots$ размеров жордановых клеток, соответствующих ν различным собственным числам ($1 \leqslant i \leqslant \nu$). Коразмерность c такого страта в пространстве $\mathbb{C}^{n^2}$ меньше коразмерности d соответствующей орбиты на количество различных собственных чисел, т. е. на ν:

$$c = d - \nu = \sum_{i=1}^{\nu} [n_1(i) + 3n_2(i) + \ldots - 1].$$

Заметим, что простые собственные числа дают в эту сумму нулевой вклад. Применяя слабую теорему трансверсальности, мы приходим к следующему выводу.

Теорема. *В пространстве семейств матриц порядка n всюду плотное множество образуют семейства, трансверсальные стратификации по жордановым типам.*

Эта теорема вместе с формулами версальных деформаций п. Г позволяет описать бифуркационные диаграммы семейств общего положения. В частности, для семейств с небольшим числом параметров мы приходим к следующим результатам.

1°. *Однопараметрические семейства*. Из $c = 1$ следует, что матрица имеет лишь одно двукратное собственное число и ему соответствует жорданова клетка порядка 2. Такой страт мы будем обозначать α^2.

Следствие. *В однопараметрическом семействе матриц общего вида встречаются лишь матрицы с простыми собственными числами, и при отдельных, изолированных значениях параметров — матрицы типа α^2 (с одной жордановой клеткой порядка 2). Если в семействе имеются матрицы более сложной жордановой структуры, то от них можно избавиться сколь угодно малым шевелением семейства.*

2°. *Двупараметрические семейства*. Существует ровно два жордановых типа с $c = 2$: α^3 (одна жорданова клетка порядка 3) и $\alpha^2\beta^2$ (две клетки порядка 2 с разными собственными числами).

Следствие. *Бифуркационная диаграмма общего двупараметрического семейства матриц имеет вид кривой, единственные особенности которой — точки возврата и точки самопересечения* (рис. 113). *Точкам возврата соответствуют матрицы типа α^3 с одной жордановой клеткой порядка 3, точкам самопересечения — типа $\alpha^2\beta^2$ с двумя жордановыми клетками порядка 2 при разных собственных числах, точкам кривой — с одной жордановой клеткой порядка 2. Точкам вне кривой отвечают матрицы с простыми собственными числами.*

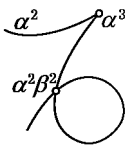


Рис. 113

Если в семействе имеются матрицы более сложных типов или бифуркационная диаграмма имеет более сложные особенности, то от них можно избавиться сколь угодно малым шевелением семейства.

3°. *Трехпараметрические семейства*. Имеются четыре страта с $c=3$: $\alpha^2\beta^2\gamma^2$ (три 2-клетки), $\alpha\alpha$ (две клетки порядка 1 с одинаковым собственным числом), $\alpha^2\beta^3$ (2 клетки второго и третьего порядка) и α^4 (4-клетка).

Следовательно, точечные особенности бифуркационных диаграмм общих трех параметрических семейств имеют вид, изображенный на рис. 114. Особенность α^4 называется ласточкиным хвостом: эта поверхность задается уравнением $\Delta(a,b,c)=0$, где Δ — дискриминант многочлена z^4+az^2+bz+c. Строго говоря, все сказанное выше относится к комплексному случаю, так что изображенные на рис. 114 поверхности следует рассматривать как комплексные.

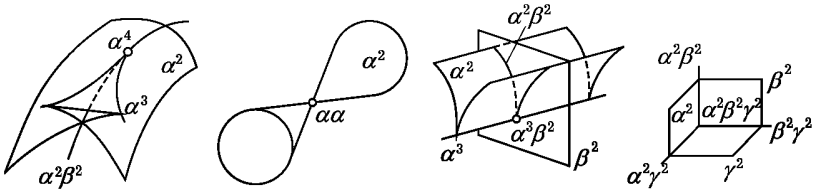


Рис. 114

Версальные деформации вещественных матриц построены Д. М. Галиным (*Галин Д. М.* О вещественных матрицах, зависящих от параметров // УМН. 1972. Т. 27, № 1. С. 241—242). Построение производится следующим образом. Пусть вначале вещественный опе-

ратор в $\mathbb{R}^{2n}$, для которого ищется версальная деформация, имеет единственную пару комплексно сопряженных собственных чисел $x \pm iy$ $(y \neq 0)$ с жордановыми клетками размеров $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots$, так что $n_1 + n_2 + \ldots = n$. Тогда в некотором вещественном базисе в $\mathbb{R}^{2n}$ матрица оператора имеет такой же вид, как матрица овеществления комплексного жорданового оператора $\widehat{A}_0 \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ с единственным собственным числом $x + iy$ и жордановыми клетками размеров $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots$, т. е. вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} X & -yE \\ yE & X \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где X — верхнетреугольная жорданова вещественная матрица с собственным числом x и клетками размеров $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots$, а E — единичная матрица порядка n.

Оказывается, *в качестве минимальной версальной деформации вещественной матрицы A_0 можно взять овеществление минимальной комплексной версальной деформации комплексной матрицы $\widehat{A}_0$.*

Например, в качестве минимальной версальной деформации вещественной матрицы четвертого порядка с двумя жордановыми клетками второго порядка и с собственными числами $x \pm iy$ можно взять четырехпараметрическую деформацию, которая получается при овеществлении комплексной версальной деформации

$$\begin{pmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

т. е. деформацию с параметрами ρ_1, ρ_2, τ_1, τ_2:

$$\begin{pmatrix} x & 1 & -y & 0 \\ 0 & x & 0 & -y \\ y & 0 & x & 1 \\ 0 & y & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \rho_2 & -\tau_1 & -\tau_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1 & \tau_2 & \rho_1 & \rho_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} z &= x + iy, \\ \lambda_k &= \rho_k + i\tau_k. \end{aligned}$$

Каждая вещественная матрица подобием над полем вещественных чисел приводится к блочно-диагональному виду, в котором каждому вещественному собственному числу отвечает вещественная жорданова матрица, а каждой паре комплексно сопряженных собственных чисел — блок вида (2).

Версальная вещественная деформация приведенной к такому виду матрицы (с наименьшим возможным числом параметров) получится, если заменить каждый блок его минимальной версальной деформацией. Минимальное число параметров вещественной вер-

сальной деформации дается, таким образом, формулой

$$d = \sum_{\lambda} [n_1(\lambda) + 3n_2(\lambda) + 5n_3(\lambda) + \ldots],$$

где суммирование распространяется на все ν собственных чисел — как вещественных, так и комплексных.

Явные формулы версальных деформаций и таблицы бифуркационных диаграмм вещественных матриц приведены в работе Галина для $d - \nu \leqslant 3$. Для приложений в механике составлены таблицы версальных деформаций симплектических и гамильтоновых (инфинитезимально симплектических) матриц (имеются в виду деформации, сохраняющие симплектичность): *Галин Д. М.* Версальные деформации линейных гамильтоновых систем // Труды семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 1. С. 63—74.

Одно из применений полученных бифуркационных диаграмм состоит в следующем. Предположим, что при изучении какого-либо явления получилась бифуркационная диаграмма иной структуры, чем перечисленные здесь. Тогда, вероятно, произошло одно из двух: либо при идеализации явления пропущено что-то существенное, что может качественно изменить структуру диаграммы, либо имеются какие-нибудь специальные причины для дополнительной кратности спектра или для нетрансверсальности к жордановой стратификации (например, симметрия или гамильтоновость задачи).

Е. Задача о классификации особенностей декремент-диаграмм

В качестве одного из приложений версальных деформаций матриц мы рассмотрим здесь решение следующей задачи. Пусть дано семейство линейных однородных автономных дифференциальных уравнений. Как известно, асимптотика решений при $t \to +\infty$ определяется тем собственным числом оператора, задающего уравнение, которое имеет наибольшую вещественную часть. Спрашивается, как эта вещественная часть зависит от параметров?

Указанная вещественная часть (со знаком минус) в технике называется декрементом. Таким образом, наша задача состоит в исследовании поведения декремента при изменении параметров системы.

Поведение декремента при изменении параметров удобно описывать, указывая на плоскости (в пространстве, ...) параметров линии (поверхности, ...) уровня декремента. Семейство линий уровня декремента на плоскости значений параметров мы будем называть декремент-диаграммой.

Вид декремент-диаграммы сильно меняется от семейства к семейству; в некоторых случаях декремент-диаграмма может иметь весьма сложные

особенности. Оказывается, однако, что в семействах общего положения могут встречаться только некоторые простейшие особенности декремент-диаграмм: все более сложные особенности распадаются при малом шевелении семейства.

В настоящем параграфе описаны все особенности декремент-диаграмм двупараметрических семейств общего положения.

Классификация особенностей декремент-диаграмм общего положения может оказывать при исследовании зависимости систем от параметров такие же услуги, какие классификация особых точек общего положения оказывает при исследовании фазовых портретов.

Появление на декремент-диаграмме особенности не общего положения должно вызывать тревогу: оно может объясняться специальной симметрией семейства или может свидетельствовать о неадекватной идеализации («некорректности»), при которой неучтенные в уравнениях малые эффекты (например, «паразитные связи» в радиотехнике) способны качественно менять картину.

Классификация особенностей двупараметрических декремент-диаграмм общего положения содержит, в частности, исследование особенностей границы области устойчивости в трехпараметрических семействах линейных уравнений общего положения (поверхности нулевых декрементов).

Полученные результаты можно применять и к нелинейным системам, имеющим стационарные точки, гладко зависящие от параметров: декремент линеаризации нелинейной системы в такой точке будет, как функция параметров, иметь лишь простейшие особенности (в случае семейства общего положения).

При применении полученных результатов к нелинейным системам нужно, однако, исключить часть границы области устойчивости, соответствующую нулевым корням, так как на ней теряется гладкая зависимость стационарной точки от параметров. Таким образом, описание особенностей границы области устойчивости для нелинейных систем общего положения (и описание декремент-диаграмм в окрестности точек этой границы) требует дополнительного исследования. Мы вернемся к этому вопросу в следующих параграфах.

При изучении итераций отображений, а также уравнений с периодическими коэффициентами или движений в окрестности периодической траектории, роль декремента играет наибольший из модулей собственных чисел. Если этот модуль отличен от единицы, то его особенности (как функции от параметров в семействе общего положения) такие же, как у декремента семейства общего положения. Поэтому далее рассматривается только декремент.

При исследовании модулей собственных чисел в нелинейных задачах указанных только что типов результаты настоящего параграфа применимы

вне границы устойчивости, и в тех точках границы, для которых единица — не собственное число.

Ж. Декремент-диаграммы

Рассмотрим семейство линейных операторов A в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, гладко зависящих как от параметра от точки λ пространства параметров Λ, $A(\lambda)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Определение. *Инкрементом** семейства назовем функцию f от параметра, значение которой в точке λ равно наибольшей вещественной части собственных чисел оператора $A(\lambda)$:

$$f(\lambda) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \|a^{A(\lambda)t}\|.$$

Функция f непрерывна, но не обязательно дифференцируема. Наша задача — изучение особенностей функции f для двупараметрических семейств общего положения. Таким образом, пространством параметров Λ можно считать плоскость $\mathbb{R}^2$ или область на плоскости.

Семейство линий уровня функции f на плоскости Λ мы будем называть декремент-диаграммой. Черточка поперек линии уровня («бергштрих» топографов) будет указывать направление ската, т. е. направление, по которому f уменьшается. Иными словами, черточка направлена в сторону повышения устойчивости.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{z} = xz + y\dot{z},$$

зависящее от двух параметров, (x, y). Матрица соответствующей системы имеет вид

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}.$$

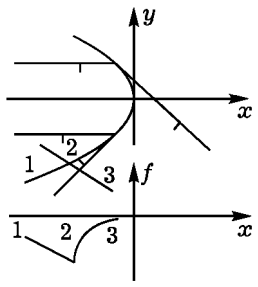


Рис. 115

Декремент-диаграмма изображена на рис. 115. Парабола $4x + y^2 = 0$ делит плоскость (x, y) на две части. В каждой из них инкремент — гладкая функция. Слева от параболы собственные числа комплексные и $f = y/2$. Справа собственные числа вещественные, $f = \dfrac{y \pm \sqrt{4x+y^2}}{2}$. Линии уровня инкремента — касательные к параболе лучи.

Все точки параболы являются особыми точками декремент-диаграммы. Им соответствуют матрицы A с жордановой клеткой порядка 2. При пересечении параболы слева направо линейное изменение инкремента сменяется коренным.

* В технике величина $|f|$ называется декрементом при $f<0$ и инкрементом при $f>0$.

Ясно, что указанная здесь особенность неустранима малым шевелением семейства. Существуют и другие неустранимые особенности; наша цель — их полное перечисление.

3. Страты коразмерности один и два в пространстве матриц

Если максимальную вещественную часть имеет одно вещественное собственное число матрицы $A(\lambda_0)$ или одна пара комплексно сопряженных собственных чисел*, то инкремент — гладкая функция в окрестности рассматриваемого значения параметра λ_0.

Гладкость теряется лишь в случае, когда собственное число с максимальной вещественной частью не единственно. Матрицы, у которых максимальную вещественную часть имеют несколько собственных чисел сразу, образуют замкнутое полуалгебраическое** подмногообразие F в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$ всех матриц порядка n. Коразмерность этого многообразия равна единице, а его дополнение состоит из двух открытых компонент:

D_1. *Страт* (α). Максимальную вещественную часть имеет ровно одно вещественное собственное число.

D_2. *Страт* $(\alpha \pm i\omega)$. Максимальную вещественную часть имеет ровно одна комплексно сопряженная пара.

Многообразие F легко стратифицировать. Страты максимальной размерности (коразмерности 1) исчерпываются следующим списком:

F_1. *Страт* (α^2). Максимальную вещественную часть имеют ровно два совпадающих собственных числа; они вещественны и им отвечает жорданова клетка порядка 2.

F_2. *Страт* $(\alpha, \alpha \pm i\omega)$. Максимальную вещественную часть имеют ровно три собственных числа: одно вещественное и одна комплексно сопряженная пара.

F_3. *Страт* $(\alpha \pm i\omega_1, \alpha \pm i\omega_2)$. Максимальную вещественную часть имеют ровно две разные комплексно сопряженные пары.

Ясно, что страты F_1, F_2, F_3 — гладкие регулярные незамкнутые непересекающиеся подмногообразия коразмерности один в пространстве всех матриц $\mathbb{R}^{n^2}$. Остаток $F \setminus (F_1 \cup F_2 \cup F_3)$ многообразия F (многообразия матриц с неединственным собственным числом с максимальной вещественной частью) является замкнутым полуалгебраическим подмногообразием коразмерности два в пространстве всех матриц $\mathbb{R}^{n^2}$. Страты максимальной размерности многообразия $F \setminus (F_1 \cup F_2 \cup F_3)$ имеют коразмерность 2 в $\mathbb{R}^{n^2}$. Их легко перечислить:

---

* Здесь и дальше считается, что числа комплексно сопряженной пары не вещественны.

** Полуалгебраическим подмногообразием линейного пространства называется конечное объединение множеств, заданных конечными системами полиномиальных уравнений и неравенств.

G_1. *Страт* (α^3). Максимальную вещественную часть имеют ровно три собственных числа; они вещественны и им отвечает жорданова клетка порядка 3.

G_2. *Страт* $((\alpha \pm i\omega)^2)$. Максимальную вещественную часть имеют ровно две совпадающие пары комплексно собственных чисел; им отвечают жордановы клетки порядка 2.

G_3. *Страт* $(\alpha^2, \alpha \pm i\omega)$. Максимальную вещественную часть имеют ровно четыре собственных числа; двум вещественным отвечает жорданова клетка порядка 2, а два комплексных образуют комплексно сопряженную пару.

G_4. *Страт* $(\alpha, \alpha \pm i\omega_1, \alpha \pm i\omega_2)$. Максимальную вещественную часть имеют ровно пять собственных чисел: одно вещественное и две разные комплексно сопряженные пары.

G_5. *Страт* $(\alpha \pm i\omega_1, \alpha \pm i\omega_2, \alpha \pm i\omega_3)$. Максимальную вещественную часть имеют ровно три разные комплексно сопряженные пары.

Страты G_1—G_5 являются регулярными незамкнутыми непересекающимися подмногообразиями* коразмерности 2 в пространстве всех матриц $\mathbb{R}^{n^2}$. Остаток $F \setminus \bigcup F_i \setminus \bigcup G_i$ является замкнутым полуалгебраическим подмногообразием коразмерности 3 в $\mathbb{R}^{n^2}$.

Из слабой теоремы трансверсальности (§ 29) вытекает

Следствие. *В двупараметрических семействах матриц общего положения не встречаются матрицы, имеющие наборы собственных чисел с максимальной вещественной частью, отличные от перечисленных выше* (D_i, F_i, G_i); *эти же наборы встречаются лишь трансверсально.*

Таким образом, в семействе общего положения наборы собственных чисел коразмерности 1 (F_i) встречаются на гладких кривых в плоскости параметров, имеющих особые точки лишь в тех точках плоскости параметров, где появляются наборы коразмерности 2 (G_i). Последнее обстоятельство может иметь место лишь в изолированных точках плоскости параметров.

Отрезки F_1 и F_2, если присоединить к ним их особые точки G_i, образуют кривые, которые делят плоскость параметров на части двух типов: D_1 и D_2. Нетрудно сообразить, что все отрезки F_3 лежат в части D_2.

Далее,

точки $G_1(\alpha^3)$ лежат на стыке $F_1(\alpha^2)$ и $F_2(\alpha, \alpha \pm i\omega)$,

$G_2((\alpha \pm i\omega)^2)$ примыкают к $F_3(\alpha \pm i\omega_1, \alpha \pm i\omega_2)$,

$G_3(\alpha^2, \alpha \pm i\omega)$ — на стыке $F_1(\alpha^2)$, $F_2(\alpha, \alpha \pm i\omega)$, $F_3(\alpha \pm i\omega_{1,2})$,

$G_4(\alpha, \alpha \pm i\omega_{1,2})$ — на стыке $F_2(\alpha, \alpha \pm i\omega)$ и $F_3(\alpha \pm i\omega_{1,2})$,

$G_5(\alpha \pm i\omega_{1,2,3})$ примыкают к $F_3(\alpha \pm i\omega_{1,2})$.

* Все многообразия D_i, F_i, G_i связны при достаточно больших n. Исключения: D_2 и F_1 при $n = 2$, F_3, G_2, G_3 при $n = 4$, G_5 при $n = 6$ имеют по две компоненты.

На рис. 116 изображен (гипотетический) пример конфигурации, которую могут образовывать эти линии на плоскости параметров в семействе общего положения.

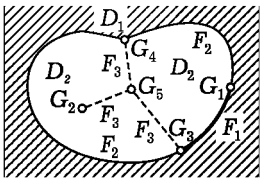


Рис. 116

И. Строение декремент-диаграмм вблизи точек стратов коразмерности 0 и 1

На дополнении к множеству особенностей F инкремент f — гладкая функция параметров. Однако у декремент-диаграмм в некоторых точках этого дополнения могут быть особенности: это — критические точки функции f.

Вне F инкремент семейства общего положения имеет лишь простые критические точки, т. е. точки следующих трех типов, превращающихся в 6, если различать случаи вещественных корней (D_1) и комплексных (D_2):

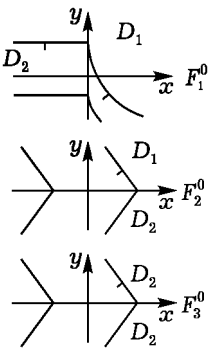


Рис. 117

D_i^0. *Минимум*. В окрестности рассматриваемой точки плоскости параметров можно выбрать гладкие координаты (x, y) так, что инкремент будет иметь вид $f = \text{const} + x^2 + y^2$.

D_i^1. *Седло*. В подходящих координатах $f = \text{const} + x^2 - y^2$.

D_i^2. *Максимум*. $f = \text{const} - x^2 - y^2$.

Изучим теперь поведение функции f вблизи неособых точек множества F, т. е. вблизи внутренних точек кривых F_i плоскости параметров. Здесь следует различать два случая: точка кривой F_i может быть некритической для инкремента, рассматриваемого как гладкая функция на этой кривой, но может быть и критической.

Из теоремы трансверсальности вытекает, что в семействах общего положения критические точки сужений инкремента на кривые F_i могут быть только невырожденными максимумами или минимумами.

Соединяя эту информацию с явными формулами версальных семейств матриц из п. Б, мы без труда приходим к следующим нормальным формам инкремента вблизи точек стратов коразмерности один.

Теорема. *В окрестности некритической точки сужения инкремента семейства общего положения на кривую F_i можно выбрать гладкие координаты (x, y) на плоскости параметров так, что инкремент f примет один из следующих трех видов* (рис. 117):

Случай F_1^0 (жорданова клетка):

$$f = \text{const} + y + \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Случай F_2^0 и F_3^0 (простой обгон):

$$f = \text{const} + x + |y|.$$

Кривые F_1^0 и F_2^0 разделяют области вещественных и комплексных корней D_1 и D_2. Линии уровня инкремента подходят к кривой F_1 со стороны вещественных корней с касанием, а со стороны комплексных — трансверсально. К кривым F_2 и F_3 линии уровня декремента подходят в точках F_2^0, F_3^0 трансверсально с обеих сторон. Угол линий уровня, меньший 180°, образующийся на линиях излома F_i, во всех случаях содержит направление уменьшения f вдоль линии.

Теорема. *В окрестности критической точки сужения инкремента семейства общего положения можно выбрать координаты* (x, y) *так, что инкремент примет один из ниже перечисленных* 12 *видов* (рис. 118).

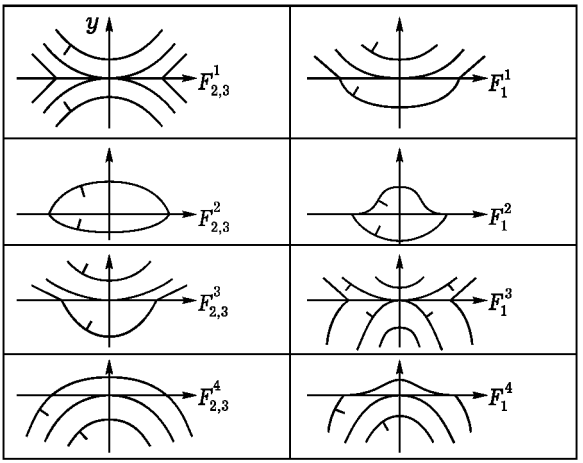


Рис. 118

Случаи F_2^k и F_3^k, $k = 1, \ldots, 4$ (условный экстремум при обгоне):

$$f = \text{const} + \varepsilon x^2 + \varphi(y) + |y|, \quad \varepsilon = (-1)^k,$$

где $\varphi(y) = ay + \ldots$ — гладкая функция, $a > 0$, $a \neq 1$.

Четыре значения k получаются при комбинации двух знаков ε и двух возможностей для a:

k	1, 2	3, 4
a	(0, 1)	(1, +∞)

Нечетные k соответствуют условному максимуму, а четные — минимуму. Чтобы получить ясное представление о виде декремент-диаграммы, доста-

точно рассмотреть случай $\varphi(y)=ay$: в этом случае линии уровня f состоят из кусков двух парабол, сдвигаемых вдоль оси y.

Случаи F_1^k, $k=1,\ldots,4$ (условный экстремум с жордановой клеткой α^2):

$$f=\text{const}+\varepsilon x^2+\varphi(y)+\begin{cases}\sqrt{y}, & \text{если } y\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } y\leqslant 0.\end{cases}$$

Здесь $\varepsilon=\pm1$, $\varphi(y)=ay+\ldots$ — гладкая функция, $a\neq 0$.

Четыре значения k получаются при комбинациях знаков ε и a:

k	1	2	3	4
знак ε, знак a	$--$	$-+$	$+-$	$++$

Нечетные k соответствуют условному максимуму, а четные — минимуму. Чтобы получить ясное представление о виде декремент-диаграммы, достаточно рассмотреть случаи $\varphi(y)=\pm y$.

Наша теорема утверждает, что никаких других особенностей во внутренних точках кривых F, кроме особенностей перечисленных 15 видов F_i^k $(15=3+12)$, инкремент двупараметрического семейства общего положения не имеет: если в некотором семействе есть другие особенности, то от них можно избавиться сколь угодно малым шевелением семейства. Особенности же F_i^k, очевидно, неустранимы.

К. Строение декремент-диаграмм вблизи стратов коразмерности 2

При исследовании особенностей стратов коразмерности 2 в двупараметрических семействах общего положения можно рассматривать только «самые невырожденные» случаи, так как любое вырождение повышает коразмерность, и особенность становится устранимой.

Комбинируя теорему трансверсальности и явные формулы для версальных семейств матриц из п. Б, мы приходим к следующим нормальным формам инкремента вблизи точек стратов коразмерности 2.

Теорема. *В окрестности точки каждого страта коразмерности* 2 (G_i *в обозначениях п.* 3) *на плоскости параметров семейства общего положения можно выбрать гладкие координаты* (x, y) *так, что инкремент* f *примет один из нижеперечисленных* 18 *видов* (рис. 119).

Случаи $G_1^{\pm}$ (жорданова клетка порядка 3):

$$f=\varphi(x,y)+\lambda(x,y),$$

где λ — наибольшая из вещественных частей корней кубического уравнения $\lambda^3=x\lambda+y$, а φ — гладкая функция, такая что $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)=a\neq 0$.

Вид декремент-диаграммы определяется знаком числа a.

Знак «+» или «−» в $G_1^{\pm}$ отвечает $a>0$ и $a<0$ соответственно. Чтобы составить себе ясное представление о виде декремент-диаграммы, достаточ-

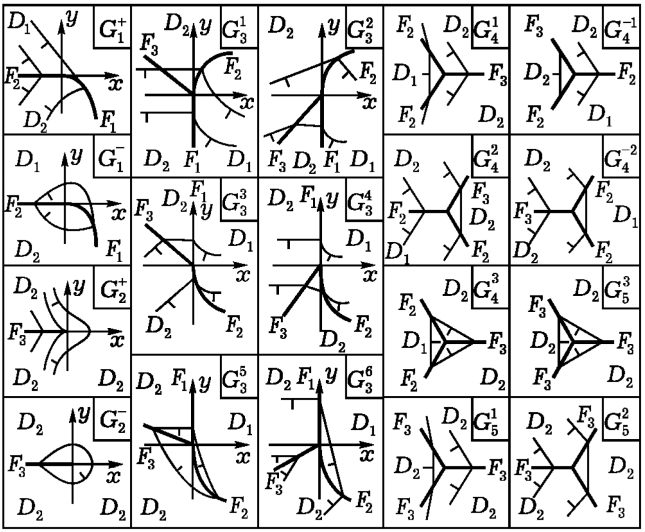


Рис. 119

но рассмотреть случаи $\varphi = \pm x$. К точке $x = y = 0$ подходит две касающиеся в ней особые кривые: луч F_2 ($y = 0$, $x < 0$) и половина полукубической параболы F_1 ($4x^3 = 27y^2$, $y < 0$). Эти две кривые отделяют область комплексно сопряженных корней D_2 (выпуклую) от области вещественных корней D_1. При движении вдоль границы областей D_1 и D_2 инкремент f в случае $a > 0$ меняется монотонно, а в случае $a < 0$ имеет в точке G_1^- минимум. Со стороны D_1 линии уровня f касаются полукубической параболы F_1.

Случаи $G_2^\pm$ (комплексная пара жордановых 2-клеток):

$$f = \varphi(x, y) + |\operatorname{Re}\sqrt{x + iy}|.$$

Здесь Re — вещественная часть, φ — гладкая функция, такая что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = a \neq 0.$$

Вид декремент-диаграммы определяется знаком числа a.

Знаки «+» и «−» в $G_2^\pm$ отвечают $a > 0$ и $a < 0$ соответственно. Чтобы составить себе ясное представление о виде декремент-диаграммы, достаточно рассмотреть случаи $\varphi = \pm x$. К точке $x = y = 0$ подходит (и кончается в ней) луч F_3 ($y = 0$, $x < 0$). В случае $a < 0$ функция f имеет в точке G_2^- ($x = y = 0$) минимум. В случае $a > 0$ точка G_2^+ ($x = y = 0$) — топологически неособая для функции f. Проходящая через эту точку линия уровня функции f имеет особенность полукубического типа.

Случаи G_3^k ($k=1,\dots,6$; столкновение комплексной пары с жордановой клеткой):

$$f = \text{const} + y + \max\begin{cases}\sqrt{x},\ \varphi(x,y), & \text{если } x \geqslant 0,\\ 0,\ \varphi(x,y), & \text{если } x \leqslant 0.\end{cases}$$

Здесь $\varphi(x,y) = ax + by + \dots$ — гладкая функция, $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $b \neq -1$.

Шесть значений k получаются при комбинировании двух возможностей для знака a и трех интервалов изменения b:

k	1	2	3	4	5	6
знак a	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
интервал b	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(-1,0)$	$(-1,0)$	$(-\infty,-1)$	$(-\infty,-1)$

Чтобы составить себе ясное представление о виде декремент-диаграммы, достаточно взять функцию φ линейной. К точке подходят три гладких луча F_1, F_2, F_3, причем F_1 и F_2 идут навстречу друг другу (с касанием первого порядка), а F_3 подходит трансверсально со стороны комплексных корней, D_2. В случае G_3^5 (т. е. когда $a<0$, $b<-1$) инкремент имеет в точке $x=y=0$ минимум; в остальных случаях точка G_3^k ($k \neq 5$) — топологически неособая точка функции f.

Случаи G_5^k ($k=1,2,3$) (двойной обгон):

$$f = \text{const} + x + \max(|y|, \varphi(x,y)),$$

где $\varphi(x,y) = ax + by + \dots$ — гладкая функция, $a<0$, $b>0$, $a+1 \neq \pm b$.

Три значения k для G_5^k соответствуют интервалам изменения a:

k	1	2	3
условие на a	$b-1<a$	$-b-1<a<b-1$	$a<-b-1$

Чтобы составить себе ясное представление о виде декремент-диаграммы, достаточно взять функцию φ линейной.

В каждом из трех случаев ($k=1,2,3$) в точке G_5^k сходятся трансверсально три гладкие ветви кривой F_3. В последнем случае эта точка — минимум инкремента, в первом и втором — топологически неособая точка. При подходе к точке G_5^k по k из трех лучей инкремент убывает, а по остальным растет.

Случаи G_4^k ($k=\pm1,\pm2,3$) (двойной обгон с участием вещественного корня). Инкремент дается той же формулой, что в случаях G_5^k, но приходится различать больше вариантов в зависимости от того, какому из векторов соответствует вещественный корень.

Отрицательным k соответствуют случаи, в которых на линии F_3 (на которой сталкиваются комплексные пары) при подходе к точке G_4^k декремент растет. Два других луча — ветви кривой F_2.

Л. Обсуждение

Рассматривая перечисленные выше нормальные формы, можно прийти к ряду выводов общего характера о строении декремент-диаграмм как в малом, так и в целом. Прежде всего из наших теорем вытекает

Следствие. *Инкремент $f\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ двупараметрического семейства общего положения топологически эквивалентен гладкой функции, имеющей лишь простые критические точки.*

А именно, точки минимума — это точки типов D_i^0, F_i^2, $G_{1,2}^-$, G_3^5, $G_{4,5}^3$.

Топологически эквивалентны седлу точки D_i^1 и F_i^3. В окрестности точек максимума (D_i^2) инкремент — гладкая функция. Точки всех остальных типов топологически неособые.

Из сформулированного следствия вытекают, очевидно, неравенства для чисел особых точек разных типов. В частности, *если какая-либо замкнутая линия уровня инкремента ограничивает односвязную область, то суммарное число точек типов $D_i^{0,2}$, F_i^2, $G_{1,2}^-$, G_3^5, $G_{4,5}^3$ внутри этой области на единицу больше числа точек D_i^1, F_i^3*. Неизвестно, переносится ли утверждение* следствия на l-параметрические семейства с $l > 2$.

Из того, что отрезки F_1 и F_2 вместе образуют замкнутые кривые и из описания особенностей на концах отрезков F_3 вытекает

Следствие. *Если пространство параметров Λ — замкнутое двумерное многообразие, то числа точек типов G_1 и G_3 одинаковой четности и суммарное число точек типов G_2, G_3, G_4, G_5 четно.*

Если рассматривать в качестве пространства параметров Λ компактную область с краем, трансверсально пересекающим F_i и не проходящим через точки G_i, то результат изменится следующим образом: суммарное число точек типов G_1 и G_3 одинаковой четности с суммарным числом точек пересечения края с F_1 и F_2, а суммарное число точек типов G_2, G_3, G_4, G_5 — с числом точек пересечения края с F_3.

Проведенное исследование инкремента позволяет, в частности, изучить особенности границы устойчивости (т. е. линии нулевых инкрементов) на плоскости параметров двупараметрических систем общего положения. Из наших теорем вытекает

Следствие. *Граница устойчивости общего двупараметрического семейства матриц состоит из гладких дуг, пересекающихся трансверсально в своих концевых точках.*

Заметим, что точки излома границы устойчивости могут быть, по классификации пунктов И и К, типов F_1^0 («жорданова 2-клетка») или F_2^0, F_3^0

* Заметим, что в случае $l = 2$ особенности инкремента общего семейства такие же, как особенности наибольшей вещественной части корня алгебраического уравнения, коэффициенты которого — функции общего положения от l параметров. При $l \geqslant 3$ это уже не так: инкремент может иметь более сложные особенности.

(«простой обгон»). Каждая из дуг границы устойчивости продолжается поэтому за свои концевые точки без потери гладкости. При этом суммарное число точек излома типов F_1^0 и F_2^0 на каждой замкнутой компоненте границы устойчивости всегда четно.

Заметим также, что проведенный анализ особенностей инкремента двупараметрических семейств достаточен для исследования границы устойчивости в трехпараметрических семействах.

В самом деле, особые точки стратов коразмерности 3, а также критические точки сужений инкремента на страты коразмерности 0, 1 и 2 по теореме трансверсальности можно удалить с границы устойчивости малым шевелением семейства. Таким образом, граница устойчивости общего семейства состоит из гладких поверхностей, а ее особенности лежат на кривых, по которым граница устойчивости пересекается с поверхностями типов F_i, и в точках пересечения границы устойчивости со стратами G_i (последние в общих трехпараметрических семействах проявляются в виде кривых).

Двигаясь вдоль такой кривой G_i, мы можем рассматривать наше трехпараметрическое семейство как однопараметрическое семейство двупараметрических (два параметра — координаты в трансверсальной к G_i площадке, один — координата t вдоль G_i). Рассматривая нормальные формы пп. И и К, мы должны теперь считать все постоянные const и произвольные функции φ гладко зависящими от параметра t. Более того, в случае общего положения мы можем принять за параметр z сами эти функции $\varphi(x, y, t)$. Мы приходим, таким образом, к следующему выводу.

Следствие. *Особенности границы устойчивости общего трехпараметрического семейства матриц такие же, как особенности графиков инкрементов общих двупараметрических семейств*. Эти особенности, с точностью до диффеоморфизма**, исчерпываются следующим списком* (рис. 120):

Двугранный угол (F_i): $|y| + z = 0$.

Трехгранный угол ($G_{3,4,5}$): $z + \max(x, |y|) = 0$.

Тупик на ребре (G_2): $z + |\operatorname{Re}\sqrt{x + iy}| = 0$.

(*Эта поверхность в* $\mathbb{R}^3$ *диффеоморфна** поверхности, заданной уравнением* $XY^2 = Z^2$, *где* $X \geqslant 0$, $Y \geqslant 0$).

Излом ребра (G_1): $z + \lambda(x, y) = 0$, *где* λ *— наибольшая из вещественных частей корней уравнения* $\lambda^3 = x\lambda + y$. (*Эта поверхность в* $\mathbb{R}^3$ *диффеоморфна** поверхности, заданной уравнением* $X^2Y^2 = Z^2$, *где* $X \geqslant 0$, $Y \geqslant 0$.)

Углы границы устойчивости направлены всегда наружу, вклиниваясь в область неустойчивости. По-видимому, это — проявление весьма общего принципа, согласно которому все хорошее хрупко.

---

* Точно так же особенности границы устойчивости $(n+1)$-параметрических семейств — такие же, как у графиков инкрементов n-параметрических.

** Речь идет об отображении, продолжаемом до диффеоморфизма окрестности поверхности.

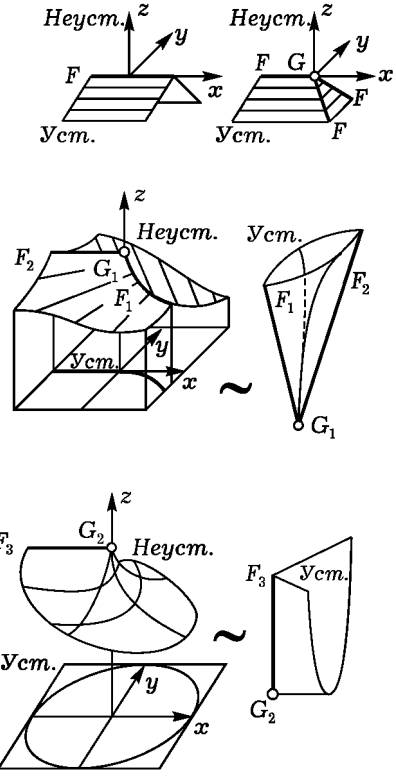


Рис. 120

Из сказанного вытекают также некоторые глобальные свойства границы устойчивости. Например, если эта граница замкнута, то суммарное число вершин типов (G_i, $i > 1$) четно, равно как и число вершин типов G_1 и G_3 вместе.

Доказательства приведенных теорем можно найти в статье: *Арнольд В. И.* Лекции о бифуркациях и версальных семействах // УМН. 1972. Т. 27, вып. 5. С. 119—184.

§ 31. Бифуркации особых точек векторного поля

В этом параграфе рассматриваются однопараметрические семейства дифференциальных уравнений. Исследуются бифуркации особых точек для семейств общего положения.

А. Кривая особых точек

Рассмотрим векторное поле, гладко зависящее от параметра. Предположим, что при некотором значении параметра поле имеет особую точку. Поставим себе вопрос: что будет происходить с особой точкой при изменении параметра?

Теорема. *Особая точка векторного поля, гладко зависящего от параметра, сама гладко зависит от параметра, пока все собственные числа линейной части поля в особой точке отличны от нуля.*

Доказательство. В окрестности изучаемой точки и изучаемого значения параметра семейство полей в n-мерном фазовом пространстве задается n функциями от $n+1$ переменной (от n фазовых координат и от параметра ε). Особые точки задаются системой n уравнений относительно $n+1$ переменной, $v(x,\varepsilon)=0$. По теореме о неявной функции, эти уравнения локально определяют гладкую кривую $x=\gamma(\varepsilon)$, если в рассматриваемой начальной точке определитель $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ отличен от нуля. Но этот определитель равен произведению собственных чисел линеаризации поля в особой точке. Он отличен от 0 по предположению. □

Замечание. Особые точки, в которых все собственные числа линеаризованного поля отличны от нуля, называются *невырожденными*. Таким образом, если поле гладко зависит от параметра, то его особые точки гладко зависят от параметра, пока они остаются невырожденными. Проведенное выше доказательство сохраняет силу при любой размерности пространства параметров.

У поля общего положения все особые точки невырождены. Однако, если рассматривается семейство векторных полей, то при некоторых значениях параметра могут возникать вырождения, неустранимые малым шевелением семейства.

Исследуем вырождения в однопараметрических семействах общего положения векторных полей в n-мерном пространстве.

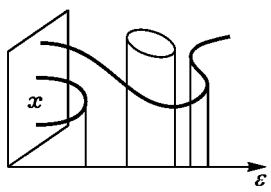


Рис. 121

Рассмотрим $(n+1)$-мерное пространство, являющееся прямым произведением фазового пространства и оси значений параметра ε. Будем обозначать точку фазового пространства буквой x. Наше семейство задает семейство дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=v(x,\varepsilon).$$

Рассмотрим в нашем $(n+1)$-мерном пространстве множество, образованное особыми точками уравнений семейства при всех значениях параметра (рис. 121):

$$\Gamma = \{x, \varepsilon : v(x, \varepsilon) = 0\}.$$

Теорема. *Для семейства общего положения множество особых точек является гладкой кривой.*

Здесь и далее слова «семейства общего положения» означает «семейства из некоторого всюду плотного множества в пространстве всех семейств»; всюду плотное множество, о котором идет речь, открытое, если область определения семейства компактна или если семейства рассматриваются в тонкой топологии (см. § 29); во всяком случае это всюду плотное множество является пересечением счетного количества открытых множеств.

Доказательство. Теорема вытекает из теоремы трансверсальности (§ 29) или из леммы Сарда (§ 10).

Действительно, по теореме о неявной функции, Γ — локально гладкая кривая, если 0 — не критическое значение локального отображения $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $(x, \varepsilon) \mapsto v(x, \varepsilon)$. Но для отображения общего положения значение 0 не критическое. □

Замечание. В этой теореме размерность пространства параметров также несущественна.

Доказанная теорема сразу исключает некоторые бифуркации особых точек.

Рассмотрим, например, бифуркации, изображенные на рис. 122 слева. Из теоремы следует, что при малом шевелении семейства такие бифуркации не сохранятся. Действительно, легко видеть, что, вообще говоря, эти бифуркации распадаются при малом шевелении одним из указанных на рис. 122 справа способов. Если в какой-либо задаче появляются бифуркации вида, указанного на рис. 122 слева, то это свидетельствует о том, что рассматриваемое семейство не общего положения. Это может быть связано с какой-либо особой симметрией ситуации или же может свидетельствовать о неадекватной идеализации, при которой мы пренебрегли каким-либо малым эффектом, способным, однако, качественно изменить поведение особых точек в зависимости от параметра. Чтобы указать, какой именно из случаев имеет

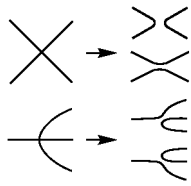


Рис. 122

место в реальной системе, при идеализации которой возникла не общая бифуркация, нужно вычислить некоторые из отброшенных при идеализации членов дифференциального уравнения. Формулы следующих разделов подсказывают, какие именно члены нужно вычислять.

Б. Бифуркационные значения параметра

Предположим, что множество особых точек семейства является гладкой кривой ($\operatorname{rank} \frac{\partial v}{\partial(x, \varepsilon)} = n$). Рассмотрим отображение проектирования этой гладкой кривой на ось значений параметра. Точки, в которых кривая плохо проектируется на ось ε — это как раз вырожденные особые точки. Действительно, по теореме о неявной функции в окрестности невырожденной особой точки кривая особых точек является графиком гладкой функции от параметра.

Определение. Значение параметра, которому соответствует вырожденная особая точка, называется *бифуркационным значением параметра*, а сама вырожденная особая точка в прямом произведении фазового пространства на ось значений параметра — *бифуркационной точкой*.

Рассмотрим значение параметра ε как функцию на кривой особых точек. *Бифуркационные значения параметра — это критические значения этой функции, а бифуркационные точки — это критические точки функции* (точки, где дифференциал функции равен 0).

Критическая точка функции называется *невырожденной*, если второй дифференциал функции в этой точке невырожден (в данном случае речь идет о функциях одной переменной, так что невырожденность второго дифференциала означает его отличие от нуля). Соответствующая бифуркационная точка называется тогда *невырожденной бифуркационной точкой*.

Определение. Бифуркационное значение параметра называется *регулярным*, если ему соответствует ровно одна бифуркационная точка, и притом невырожденная.

Теорема. *Для однопараметрических семейств общего положения все бифуркационные значения параметра регулярны. Если фазовое пространство компактно, то бифуркационные значения параметра изолированы.*

Доказательство. Утверждение легко выводится из теоремы трансверсальности, детали представляются читателю. □

Замечание. Теорема означает, что по мере изменения параметра особые точки семейства общего положения могут лишь попарно съедать друг друга или рождаться парами, когда параметр проходит через бифуркационные значения (рис. 121). Бифуркации этого вида устойчивы (сохраняются при малом шевелении семейства). Все более сложные бифуркации при малом шевелении общего вида распадаются на несколько бифуркаций описанного типа (рис. 123).

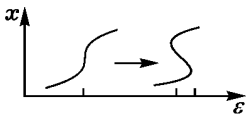


Рис. 123

В. Пример: векторные поля на прямой

Рассмотрим однопараметрическое семейство векторных полей на прямой, задающее дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \pm x^2 + \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

При $\varepsilon = 0$ это векторное поле имеет простейшую вырожденную особую точку ($x = 0$). При переходе параметра через регулярное бифуркационное значение $\varepsilon = 0$ происходит, в зависимости от знака перед x^2, либо взаимное уничтожение двух особых точек — устойчивой и неустойчивой, либо рождение пары особых точек, которые сразу же разбегаются (с асимптотикой $\sqrt{|\varepsilon|}$).

Нетрудно проверить, что бифуркация в этом примере является единственной бифуркацией, неустранимой в однопараметрических семействах общего положения векторных полей на прямой.

Определение. Пусть даны два семейства векторных полей, зависящих от параметра. Семейства называются *топологически эквивалентными*, если существуют гомеоморфизм пространств параметров и непрерывно зависящее от параметра семейство гомеоморфизмов фазового пространства, переводящие семейство ориентированных фазовых кривых первого семейства при каждом значении параметра в семейство ориентированных фазовых кривых второго семейства при соответствующем значении параметра.

Заметим, что гомеоморфизмы, о которых идет речь в этом определении, определяют гомеоморфизм прямых произведений фазовых пространств на пространства значений параметров, $(x, \varepsilon) \mapsto \mapsto (h(x, \varepsilon), \varphi(\varepsilon))$, переводящий фазовые кривые системы $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$, $\dot{\varepsilon} = 0$ в фазовые кривые второй системы такого же вида.

Аналогичным образом определяется эквивалентность ростков семейств в точке. Если пара (x_0, ε_0) — точка фазового пространства

и точка пространства параметров, то гомеоморфизмы, осуществляющие эквивалентность, должны определять гомеоморфизм $(x, \varepsilon) \mapsto \mapsto (h(x, \varepsilon), \varphi(\varepsilon))$ некоторой окрестности точки (x_0, ε_0) в прямом произведении.

Теорема. *В окрестности невырожденной бифуркационной точки однопараметрическое семейство векторных полей на прямой эквивалентно ростку семейства, задающего уравнение* $\dot{x} = x^2 + \varepsilon$ *в точке* $x = 0$, $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Функция $v(x, \varepsilon)$, задающая поле, меняет знак на кривой Г. Выберем начало координат (x, ε) в бифуркационной точке. Ввиду невырожденности этой точки, уравнение кривой Г имеет вид $\varepsilon = Cx^2 + O(|x|^3)$, $C \neq 0$. Отсюда непосредственно вытекает доказываемое утверждение. □

Доказанная теорема вместе с теоремой п. Б доставляют полное топологическое описание бифуркаций особых точек векторных полей на прямой в семействах общего положения с одним параметром.

Г. Бифуркации периодических решений

Совершенно таким же образом исследуются бифуркации неподвижных точек гладких отображений, а также бифуркации периодических решений дифференциальных уравнений (бифуркации замкнутых фазовых или интегральных кривых). Условие невырожденности неподвижной точки отображения состоит в том, что все собственные числа линеаризации отличны от единицы. В случае периодических решений не должны обращаться в единицу собственные числа линеаризации функции последования (т. е. собственные числа оператора монодромии, определенного уравнением в нормальных вариациях вдоль рассматриваемого решения).

В частности, если уравнение $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ имеет периодическое решение $x = \varphi(t)$ с периодом T и выполнено указанное выше условие невырожденности, то при малых ε существует и единственно периодическое решение $x = \Phi(t, \varepsilon)$ с периодом $T(\varepsilon)$, обращающееся в φ при $\varepsilon = 0$ (единственной является, конечно, фазовая кривая: начало отсчета времени можно менять).

Замечание. Поиск периодического решения Φ в виде ряда по ε называется *методом малого параметра* Пуанкаре; решение φ называется *порождающим решением*. Аналогичный метод применим в неавтономном случае, когда v имеет по t период $T(\varepsilon)$ и ищутся $T(\varepsilon)$-периодические решения.

Задача. Найти с ошибкой порядка ε^2 2π-периодическое решение уравнения $\ddot{x} = \sin x + \varepsilon \cos t$, обращающееся в $x \equiv 0$ при $\varepsilon = 0$.

§ 32. Версальные деформации фазовых портретов

В этом параграфе определяются топологически версальные деформации фазовых портретов и указывается их явный вид для простейших вырожденных особых точек.

А. Теория локальных бифуркаций и локальная качественная теория

Как уже указывалось выше, вырожденные особые точки встречаются неустранимым образом в том случае, когда мы интересуемся не индивидуальным векторным полем, а семейством полей, зависящих от параметра. При этом в семействах общего положения встречаются лишь простейшие вырождения.

К исследованию строения векторного поля вблизи вырожденной особой точки можно применить обычные методы качественной теории дифференциальных уравнений (см. гл. 3). Эти методы для простейших вырождений позволяют провести достаточно полное топологическое исследование фазового портрета. Таким образом, мы в состоянии изучить локальный фазовый портрет как при общих значениях параметра, так и при особых значениях. В этом состоит обычный подход к задачам о семействах дифференциальных уравнений.

Рассмотрение простейших бифуркаций показывает, что при таком подходе теряется самая сущность явлений, происходящих вблизи критического значения параметра. Дело в том, что окрестность невырожденной особой точки, в которой фазовый портрет дается локальной теорией, стягивается к нулю при подходе к особому значению параметра (рис. 124), а при особом значении параметра скачком вырастает снова. В результате перестройка фазового портрета (скажем, подход соседней особой точки) остается вне области применимости локальной теории.

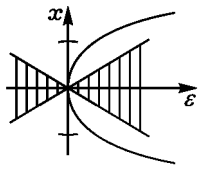


Рис. 124

Таким образом, локальная теория пропускает наиболее существенное явление, происходящее при особом значении параметра — явление бифуркации.

Итак, мы приходим к выводу, это *изучение вырожденных особых точек представляет реальный интерес лишь в том случае, когда оно сопровождается исследованием семейств, в которых рассматриваемый тип вырождения неустраним, и притом — в окрестности вырожденной особой точки в прямом произведении фазового пространства и пространства параметра*. Иными словами, окрестность особой точки в фазовом пространстве, в которой следует исследовать фазовый портрет, не должна зависеть от параметра (не должна стягиваться к нулю при подходе параметра к особому значению).

Совершенно такие же рассуждения показывают, насколько опасно неверное определение числа параметров, существенных для исследования изучаемой бифуркации. Например, при изучении существенно двупараметрического явления с однопараметрической точки зрения обычным будет следующее явление (рис. 125). При каждом значении неучтенного параметра удается изучить бифуркации в однопараметрическом семействе уравнений, зависящих от второго параметра. Но интервал значений второго параметра вблизи особого значения, в котором удается провести исследование, будет стягиваться к нулю при подходе неучтенного параметра к особым значениям. Рассмотрение задачи как двупараметрической (т. е. в не зависящей от величины второго параметра окрестности особого значения первого параметра) позволяет исследовать локальными методами бифуркации, которые с однопараметрической точки зрения кажутся глобальными.

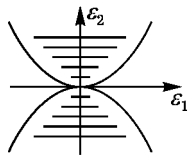


Рис. 125

Примером такой двупараметрической задачи, которая кажется на первый взгляд однопараметрической, является задача о потере устойчивости замкнутой фазовой кривой. Здесь естественным параметром является модуль собственного числа оператора монодромии; второй параметр, обычно упускаемый из виду, — это аргумент собственного числа, переходящего через единичную окружность. Мы вернемся к этому примеру в § 34.

Б. Топологически версальные деформации

Рассмотрим семейство дифференциальных уравнений $\dot{x}=v(x, \varepsilon)$.

Локальным семейством $(v; x_0, \varepsilon_0)$ мы будем называть росток отображения v в точке (x_0, ε_0) прямого произведения фазового пространства и пространства параметров. Таким образом, каждый предста-

витель этого ростка задан в окрестности точки (x_0, ε_0) в прямом произведении (а не в окрестности точки x_0 в фазовом пространстве).

Эквивалентностью локальных семейств

$$(1)\ (v; x_0, \varepsilon_0) \quad \text{и} \quad (2)\ (w; y_0, \varepsilon_0)$$

называется росток (в точке (x_0, ε_0)) непрерывного отображения h, $y = h(x, \varepsilon)$, для представителей которого $h(\cdot, \varepsilon)$ при каждом ε — гомеоморфизм, переводящий фазовые кривые системы (1) (в области определения h) в фазовые кривые системы (2), с сохранением направления движения, причем $h(x_0, \varepsilon_0) = y_0$. Заметим, что при $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ точка x_0 не обязана переводиться отображением $h(\cdot, \varepsilon)$ в y_0.

Локальное семейство (3) $(u; x_0, \mu_0)$ *индуцируется* из семейства (1) с помощью ростка в точке μ_0 непрерывного отображения φ, $\varepsilon = \varphi(\mu)$, где $\varphi(\mu_0) = \varepsilon_0$, если $u(x, \mu) = v(x, \varphi(\mu))$.

Локальное семейство $(v; x_0, \varepsilon_0)$ называется *топологически орбитально версальной* (короче, просто *версальной*) *деформацией ростка поля* $v_0 = v(\cdot, \varepsilon_0)$ *в точке* x_0, если всякое другое локальное семейство, содержащее тот же росток, эквивалентно индуцированному из данного.

Мы будем в дальнейшем иногда говорить о деформациях, эквивалентностях, индуцированных и версальных деформациях дифференциальных уравнений, имея в виду соответствующие понятия для векторных полей, задающих эти уравнения.

Следует подчеркнуть, что существование топологически версальной деформации данного ростка векторного поля отнюдь не очевидно; легко привести примеры полей, не допускающих такой деформации с конечным числом параметров (например, нулевое поле). Однако в тех случаях, когда версальная деформация существует, найдена и изучена, получаемая информация весьма велика. Указание и исследование версальной деформации является способом концентрированного представления результатов очень полного исследования бифуркаций фазовых портретов.

Пример. Деформация $\dot{x} = \pm x^2 + \varepsilon$ дифференциального уравнения $\dot{x} = \pm x^2$ версальна.

Доказательство. См. предыдущий параграф. □

В. Теорема сведения Шошитайшвили

Бифуркация предыдущего примера (рождение или уничтожение пары особых точек) исчерпывает бифуркации в семействах общего положения векторных полей на прямой (см. § 31). В многомерном

случае рождение или уничтожение пары особых точек — также случай общего положения. Что происходит при этом с фазовыми портретами?

Оказывается, топологически версальная деформация общей вырожденной особой точки в $\mathbb{R}^n$ в случае одного нулевого характеристического числа получается из уравнения предыдущего примера простой надстройкой:

$$\begin{cases} \dot{x} = \pm x^2 + \varepsilon, & x \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} = -y, & y \in \mathbb{R}^{n_-}, \\ \dot{z} = z, & z \in \mathbb{R}^{n_+}, \end{cases} \tag{1}$$

где n_- и n_+ — числа корней характеристического уравнения в левой и правой полуплоскостях. Например, при $n = 2$ эта система описывает слияние узла и седла (рис. 126). При $\varepsilon = 0$ получается так называемый седло-узел.

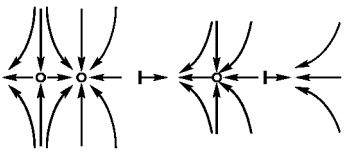


Рис. 126

В § 31 мы назвали бифуркационными точками точки в прямом произведении фазового пространства на пространство значений параметра, для которых характеристическое уравнение имеет нулевой корень.

Теорема. *В пространстве однопараметрических семейств векторных полей всюду плотное* множество образуют семейства общего положения, которые в окрестности каждой бифуркационной точки топологически эквивалентны семейству* (1) *в окрестности начала координат.*

Доказательство этой теоремы удобно провести путем редукции к случаю $n = 1$, в котором теорема очевидна (и доказана выше). Такое сведение, позволяющее уменьшать число фазовых координат до необходимого минимума, можно провести раз навсегда в самой общей ситуации.

Рассмотрим локальное семейство векторных полей, зависящих от конечномерного параметра $(v; x_0, \varepsilon_0)$. Для сокращения записи будем считать, что $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_0 = 0 \in \mathbb{R}^k$.

* Как обычно, множество семейств общего положения является пересечением счетного числа открытых множеств и открыто в предположении компактности области определения семейства или при использовании тонкой топологии.

Предположим, что поле $v(\cdot, 0)$ имеет особую точку $x = 0$ и что соответствующее характеристическое уравнение имеет n_- (соответственно, n_+, n_0) корней в левой полуплоскости (соответственно в правой полуплоскости, на мнимой оси).

Теорема. *При сделанных предположениях семейство топологически эквивалентно надстройке над семейством с фазовым пространством размерности* n_0

$$\begin{cases} \dot\xi = w(\xi, \varepsilon), & \xi \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^k, \\ \dot y = -y, & y \in \mathbb{R}^{n_-}, \\ \dot z = z, & z \in \mathbb{R}^{n_+}. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы имеется в статье *Шошитайшвили А. Н.* Бифуркации топологического типа векторного поля вблизи особой точки // Труды семинара им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 1975. Вып. 1. С. 279—309 (см. также «Функциональный анализ и его приложения». 1972. Т. 6, № 2. С. 97—98, где теорема впервые сформулирована).

Доказательство проводится по той же схеме, что доказательство теоремы Аносова об У-системах: основную часть доказательства составляет построение пяти слоений (сжимающегося, растягивающегося, нейтрального, несжимающегося, нерастягивающегося) в прямом произведении фазового пространства на пространство параметров. (Параметры можно трактовать как дополнительные фазовые переменные, которым соответствует уравнение $\dot\varepsilon = 0$, но при этом надо следить, чтобы при рассматриваемых заменах плоскости $\varepsilon = \text{const}$ переходили в такие же плоскости.) □

Существование пяти слоений было, независимо от нужд теории бифуркаций, доказано также Э. А. Тихоновой (*Тихонова Э. А.* Аналогия и гомеоморфизм возмущенной и невозмущенной систем с блочно-треугольной матрицей // Дифференциальные уравнения. 1970. Т. 6, № 7. С. 1221—1229), а также Хиршем, Пью и Шубом (*Hirsch M. W.*, *Pugh C. C.*, *Shub M.* Invariant manifolds // BAMS. 1970. V. 76, № 5. P. 1015—1019). Случай $n_+ = 0$ ранее рассматривался Плиссом (*Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР, сер. матем. 1964. Т. 28, № 6. С. 1297—1324).

Дифференциальное уравнение редуцированной системы $\dot\xi = w(\xi, \varepsilon)$ реализуется в исходной системе на некотором гладком и гладко зависящем от ε *нейтральном подмногообразии* размерности n_0 в фазовом пространстве. Гладкость нейтрального подмногообра-

зия конечна (растет при $\varepsilon \to 0$), и это подмногообразие определяется неоднозначно (как показывают простейшие примеры).

Тем не менее, поведение фазовых кривых, включая всю картину бифуркаций, для полного уравнения определяется тем, что происходит на указанном нейтральном подмногообразии (и, в частности, не зависит от выбора нейтрального многообразия).

А. Н. Шошитайшвили доказал также, что версальность исходной деформации эквивалентна версальности редуцированной деформации (т. е. версальности исходной деформации на нейтральном многообразии).

Таким образом, при топологическом исследовании локальных вырождений фазовых портретов вблизи особых точек, включая исследования всевозможных бифуркаций, можно ограничиться случаем, когда все корни характеристического уравнения лежат на мнимой оси. Переход к общему случаю совершается простой надстройкой (прямым умножением на стандартное седло $\dot{y} = -y$, $\dot{z} = z$).

Пример. Из сказанного выше вытекает, в частности, что при рождении пары особых точек в однопараметрическом семействе векторных полей общего положения из одной из родившихся особых точек в другую ведет одна (и только одна) фазовая кривая (для значений параметра, близких к бифуркационным).

§ 33. Потеря устойчивости положения равновесия

Здесь исследуются бифуркации фазового портрета дифференциального уравнения при переходе пары корней характеристического уравнения через мнимую ось.

А. Пример: мягкая и жесткая потеря устойчивости

Начнем с восходящего к Пуанкаре и Андронову примера однопараметрического семейства векторных полей на плоскости. Мы запишем его в комплексной форме

$$\dot{z} = z(i\omega + \varepsilon + cz\bar{z}), \tag{1}$$

где $z = x + iy$ — комплексная координата на плоскости $\mathbb{R}^2$, рассматриваемой как плоскость комплексной переменной z.

В предыдущей формуле ω и c — вещественные ненулевые постоянные, которые можно при желании считать равными ± 1; ε — вещественный параметр.

При всех ε точка $z=0$ — положение равновесия типа фокус. Этот фокус устойчив при $\varepsilon<0$ и неустойчив при $\varepsilon>0$. При $\varepsilon=0$ линейное приближение дает центр; характер особой точки при $\varepsilon=0$ определяется знаком c: $c<0$ соответствует устойчивости, $c>0$ — неустойчивости.

При проведенном локальном по z анализе особых точек мы замечаем, что в момент $\varepsilon=0$ особая точка теряет устойчивость, но пропускаем важное обстоятельство, связанное с этой потерей устойчивости — рождение предельного цикла (ср. рис. 129). Чтобы не делать такой ошибки, нужно рассматривать окрестность нуля в (z,ε)-пространстве, а не в z-пространстве при фиксированном ε.

Исследование окрестности нуля в (z,ε)-пространстве удобно провести следующим образом. Рассмотрим функцию $\rho(z)=z\bar{z}$. Из (1) находим уравнение для ρ:

$$\dot{\rho}=2\rho(\varepsilon+c\rho),\quad \rho\geqslant 0.$$

Полученное семейство уравнений на луче $\rho\geqslant 0$ легко исследовать. Кроме присутствующей при каждом ε особой точки $\rho=0$ имеется еще (если ε и c разных знаков) особая точка $\rho=-\varepsilon/c$. При $c>0$ векторное поле $\dot{\rho}$ имеет, в зависимости от знака ε, один из указанных на рис. 127 видов.

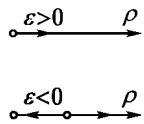


Рис. 127

Точке $\rho=0$ на плоскости z отвечает начало координат, а точке $\rho=-\varepsilon/c$ — предельный цикл (вещественный лишь когда знак ε противоположен знаку c).

Чтобы лучше понять ситуацию, будем откладывать по одной оси ε, а по другой в обе стороны $|z|$. Тогда поведение цикла при изменении параметра изобразится, в зависимости от знака c, одной из двух диаграмм рис. 128. Радиус цикла пропорционален, таким образом, $\sqrt{|\varepsilon|}$.

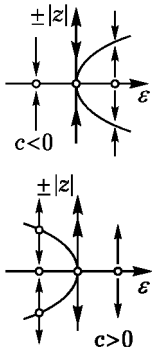


Рис. 128

Рассмотрим сначала случай $c<0$. При переходе ε через 0 фокус в начале координат теряет устойчивость. При $\varepsilon=0$ в начале координат также устойчивый фокус, но негрубый: фазовые кривые приближаются к 0 не экспоненциально (рис. 129).

При $\varepsilon>0$ фазовые кривые, отойдя от фокуса на расстояние, пропорциональное $\sqrt{\varepsilon}$, наматываются на устойчивый предельный цикл.

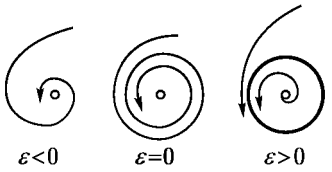


Рис. 129

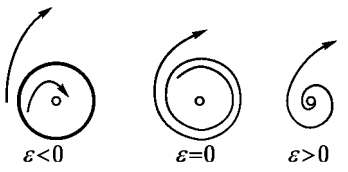


Рис. 130

Таким образом, потеря устойчивости при переходе ε через 0 в случае $c<0$ происходит с рождением устойчивого предельного цикла, радиус которого растет как $\sqrt{\varepsilon}$.

Иными словами, стационарное состояние теряет устойчивость и возникает устойчивый периодический режим, амплитуда которого пропорциональна квадратному корню из отклонения параметра от критического значения. Физики говорят в этой ситуации о *мягком возбуждении автоколебаний*.

В случае $c>0$ (рис. 130) предельный цикл имеется при $\varepsilon<0$, и он неустойчив. Когда ε стремится к нулю, цикл садится на положение равновесия, бывшее при $\varepsilon<0$ устойчивым фокусом. При $\varepsilon=0$ фокус становится неустойчивым (неустойчивость — слабая, не экспоненциальная). При положительных ε фокус неустойчив уже в линейном приближении.

Этот случай потери устойчивости называется *жестким возбуждением* по следующей причине.

Представим себе, что система находится вблизи устойчивого положения равновесия, и что при изменении параметра это положение равновесия теряет устойчивость. В случае $c>0$ при подходе ε к 0 с отрицательной стороны (или даже несколько раньше) всегда имеющиеся возмущения выкинут систему из окрестности положения равновесия, и она разом перескочит на какой-либо другой режим (например, к далекому положению равновесия, предельному циклу или более сложному притягивающему множеству). Таким образом, при непрерывном изменении параметра режим движения меняется скачком, жестко.

В случае $c<0$ амплитуда родившихся автоколебаний зависит от параметра хотя и не гладко (коренная особенность), но все же непрерывно; в этом смысле режим движения меняется плавно, мягко.

При исследовании уравнения (1) мы существенно использовали «версальную» точку зрения: если бы вместо окрестности в (z,ε)-пространстве мы рассматривали окрестность в z-пространстве при

фиксированном ε, то мы пропустили бы предельные циклы. Это согласуется с тем, что вырождение коразмерности k следует изучать в k-параметрическом семействе: наш случай коразмерности 1 включен в однопараметрическое семейство.

Рассмотренный пример в действительности исчерпывает бифуркации фазового портрета в однопараметрических семействах общего вида, происходящие при потере устойчивости положения равновесия на плоскости и, более общим образом, при прохождении пары корней характеристического уравнения через мнимую ось.

Б. Теорема Пуанкаре — Андронова

Рассмотрим однопараметрическое семейство векторных полей.

Предположим, что при нулевом значении параметра поле имеет особую точку 0 такую, что корни характеристического уравнения чисто мнимые (размерность фазового пространства равна 2).

Теорема. *Локальное семейство общего положения* (*среди семейств с указанными свойствами*) *топологически эквивалентно семейству предыдущего примера.*

Доказательство. Будем применять метод Пуанкаре для приведения уравнения к нормальной форме. При нулевом значении параметра имеется резонанс, отсутствующий при близких ненулевых значениях параметра. Соответствующие резонансные члены при нулевом значении параметра убить нельзя, а при близких значениях параметра можно. Если мы будем при близких к нулю нерезонансных значениях параметра убивать члены, становящиеся резонансными при нулевом значении параметра, то наша замена будет разрывно зависеть от параметра, а радиус окрестности, в которой мы изучим фазовый портрет, будет стягиваться до нуля при подходе параметра к резонансному значению.

Поэтому мы не станем убивать члены, становящиеся резонансными при $\varepsilon = 0$, не только при нулевом значении параметра, но и при близких значениях параметра. В результате мы получим замену, гладко зависящую от параметра, после которой в системе останутся одни лишь члены, становящиеся резонансными при нулевом значении параметра, плюс остаток сколь угодно высокого порядка по отношению к расстоянию до особой точки. Мы собираемся изучить бифуркации в полученном семействе, отбросив остаток, а затем убедиться в том, что он не влияет на топологию перестроек (или учесть его влияние).

Описанная выше программа является общей для многих задач о бифуркациях. Посмотрим, к чему она приводит в нашем конкретном случае прохождения пары корней характеристического уравнения через мнимую ось. Резонанс имеет вид $\lambda_1+\lambda_2=0$ ($\lambda_{1,2}=\pm i\omega$). Следовательно, в собственных координатах на комплексифицированной плоскости $\mathbb{C}^2$ нормальная форма запишется в виде (см. § 23)

$$\dot z_1 = \lambda_1(\varepsilon)z_1 + a_1(\varepsilon)z_1^2z_2 + \dots,$$
$$\dot z_2 = \lambda_2(\varepsilon)z_2 + b_1(\varepsilon)z_1z_2^2 + \dots$$

Заметим, что, ввиду вещественности исходного уравнения, собственный базис можно выбрать из комплексно сопряженных векторов, а нормализующие замены можно выбирать вещественными. В таком случае второе уравнение получается из первого сопряжением. Далее, на вещественной плоскости $z_2=\bar z_1$, поэтому мы можем писать одно первое уравнение, обозначая в нем z_1 через z, а z_2 через $\bar z$. Это уравнение можно считать записью исходной системы на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$ в виде (неголоморфного) уравнения на комплексной прямой $\mathbb{C}^1$ с координатой z

$$\dot z = \lambda_1(\varepsilon)z + a_1(\varepsilon)z^2\bar z + \dots;$$

точками обозначен остаток пятого порядка относительно $|z|$.

Итак, мы приходим к исследованию семейства

$$\dot z = \lambda_1(\varepsilon)z + a_1(\varepsilon)z^2\bar z.$$

Это исследование проводится таким же образом, как в рассмотренном в п. А специальном примере. Соответствие между обозначениями:

пример п. А	$i\omega$	ε	c
общее семейство	$\lambda_1(0)$	$\operatorname{Re}\lambda_1(\varepsilon)$	$\operatorname{Re}a_1(0)$

В семействах общего положения

$$\lambda_1(0)\neq 0, \quad \frac{d}{d\varepsilon}\operatorname{Re}\lambda_1(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}\neq 0, \quad \operatorname{Re}a_1(0)\neq 0.$$

Бифуркация состоит в рождении или уничтожении предельного цикла (рождение — в случае когда $\operatorname{Re}a_1(0)$) и $\operatorname{Re}\frac{d\lambda_1}{d\varepsilon}\Big|_0$ разных знаков).

Если указанные выше три величины, вообще говоря, отличны от нуля, действительно не обращаются в нуль, то учет отброшенного остаточного члена не меняет полученной картины бифуркаций. Это

легко доказать, рассматривая производную функции $\rho = |z|^2$ вдоль нашего векторного поля:

$$\dot{\rho} = 2\rho(\operatorname{Re}\lambda_1(\varepsilon) + \rho \operatorname{Re} a_1(\varepsilon) + O(\rho^2)).$$

Из этой формулы легко усмотреть, что $O(\rho^2)$ не влияет на бифуркации фазового портрета в некоторой (не зависящей от ε) окрестности начала координат. □

Рассмотренная выше теорема в сущности была известна Пуанкаре; явная формулировка и доказательство даны А. А. Андроновым (*Андронов А. А.* Применение теории Пуанкаре о «точках бифуркации» и «смене устойчивости» к простейшим автоколебательным системам // C. R. Ac. Sci. Paris. 1929. V. 189, № 15. P. 559—561; *Андронов А. А.*, *Леонтович-Андронова Е. А.* Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Уч. записки ГГУ. 1939. Вып. 6. С. 3 (сочинения А. А. Андронова, с. 188—216)). Р. Том, которого я обучил этой теории в 1965 г., стал широко пропагандировать ее под именем «бифуркации Э. Хопфа» (см., например, учебник С. Смейла и М. Хирша*).

В. Многомерный случай

Соединяя теорему Пуанкаре — Андронова с теоремой сведения (§ 32), мы приходим к следующему выводу.

Теорема. *Топологически версальная деформация особой точки векторного поля общего положения в $\mathbb{R}^n$ с одной парой чисто мнимых корней характеристического уравнения получается простой надстройкой из системы Пуанкаре — Андронова*:

$$\begin{cases} \dot{z} = z(i + \varepsilon \pm z\bar{z}), & z \in \mathbb{C}^1, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}; \\ \dot{u} = -u, & u \in \mathbb{R}^{n_-}, \\ \dot{v} = v, & v \in \mathbb{R}^{n_+}, \quad n = n_- + n_+ + 2. \end{cases}$$

Исследование выписанной системы не представляет теперь никаких трудностей.

Пример. Пусть $n = 3$, $n_+ = 0$, знак перед $\bar{z}$ есть $-$. В таком случае теорема утверждает, что в не зависящей от ε окрестности начала координат при прохождении пары собственных чисел через мнимую ось происходит рождение инвариантного цилиндра радиуса $\sqrt{\varepsilon}$, притягивающего соседние траектории. На самом цилиндре имеется устойчивый цикл, на который в конце концов и наматываются

* *Hirsch M.*, *Smale S.* Differential equations, Dynamical systems and Linear Algebra. New York: A. P., 1974.

все траектории. Таким образом, этот случай соответствует мягкой потере устойчивости с возникновением автоколебаний.

Рассматриваемое вырождение изучалось многими авторами, в частности, Э. Хопф исследовал рождение цикла в многомерном случае (*Hopf E.* Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential systems // Ber. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig: Math. Phys., 1942. Kl. 94, № 19. S. 15—25). Дальнейшие результаты были получены Ю. И. Неймарком и Н. Н. Брушлинской.

Однако общая теорема, сформулированная выше, дающая полное исследование бифуркаций фазового портрета (а не только бифуркаций цикла) была доказана лишь в цитированной выше работе А. Н. Шошитайшвили о сведении при помощи двумерных результатов Андронова — Пуанкаре.

Г. Применение к теории гидродинамической устойчивости

Разобранные выше явления часто встречаются в разнообразных конкретных ситуациях: механические, физические, химические, биологические и экономические системы теряют устойчивость на каждом шагу. Здесь мы рассмотрим в качестве примера одну специальную задачу такого рода — вопрос о потере устойчивости стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости.

Пусть D — заполненная жидкостью область, и v — поле скоростей жидкости. Движение описывается уравнениями Навье — Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla)v = \mu\Delta v - \operatorname{grad} p + f, \quad \operatorname{div} v = 0,$$

где коэффициент μ означает вязкость, f — поле массовых, непотенциальных сил; давление p определяется из условия несжимаемости. На границе области D ставятся, скажем, условия прилипания $(v|_{\partial D} = 0)$.

Предполагается, что начальное поле скоростей определяет все дальнейшее движение, так что уравнение определяет динамическую систему в бесконечномерном пространстве бездивергентных векторных полей, равных 0 на границе области D. (В действительности это доказано только в двумерном случае. Вопросам о существовании, единственности и свойствах решений уравнений Навье — Стокса посвящена обширная литература, однако основные проблемы остаются открытыми.)

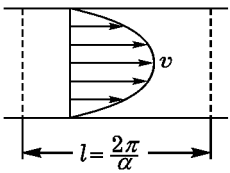


Рис. 131

Рассмотрим, например, течение Пуазейля (с параболическим профилем скоростей; рис. 131) в плоском канале. Течение Пуазей-

ля является стационарной точкой нашей динамической системы в функциональном пространстве при любом значении вязкости ν. Это положение равновесия устойчиво при достаточно большой вязкости, однако при уменьшении вязкости оно теряет устойчивость. Мы можем исследовать, что при этом происходит, пользуясь теоремой п. В.

Разумеется, следует принять особые предосторожности в связи с бесконечномерностью задачи. Имеется надежда, что бесконечномерность не очень опасна из-за того, что вязкость быстро гасит высокие гармоники, так что фактически при любом ненулевом значении коэффициента вязкости система сваливается к конечномерной. Другая трудность в том, что мы не можем быть уверенными, что наша система — действительно общего положения: это нужно проверять вычислениями. Кажется естественным, что система Навье — Стокса окажется системой общего положения в области «общего вида» и при общих массовых силах f, однако течение Пуазейля весьма специально, например, здесь есть большая группа симметрий.

Ограничимся возмущениями, поле скоростей которых вдоль потока повторяется периодически с длиной волны l. Чтобы нормировать скорость основного течения, будем менять внешние силы пропорционально вязкости так, чтобы расход жидкости Q был постоянен ($f = \text{const} \cdot Q\nu$). В таком случае мы получим двупараметрическое семейство с параметрами l и ν. Обычно принято рассматривать в качестве параметров обратные величины $\alpha = \frac{2\pi}{l}$ (волновое число), $\mathrm{R} = \text{const} \cdot Q/\nu$ (число Рейнольдса). Таким образом, уменьшение вязкости, вызывающее неустойчивость, соответствует увеличению числа Рейнольдса.

Вычисления (которые практически невыполнимы без машины) показывают, что при возрастании числа Рейнольдса при некотором критическом значении числа Рейнольдса $\mathrm{R}_0 = \mathrm{R}_0(\alpha)$ пара комплексных корней переходит через мнимую ось из устойчивой полуплоскости в неустойчивую. Следовательно, мы встречаемся здесь с тем случаем потери устойчивости, при котором рождается или умирает предельный цикл.

Знак коэффициента c, определяющего жесткое или мягкое возбуждение колебаний, также вычислен. Для описания результата удобно нарисовать границу устойчивости на плоскости (α, R). Оказывается, она имеет вид изображенного на рис. 132 «языка»; самая левая точка этого языка особенно важна: ее R-координата соот-

ветствует первой потере устойчивости, а α-координата определяет самую опасную на неустойчивость длину волны.

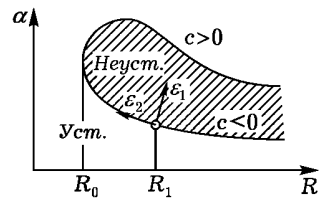


Рис. 132

Оказывается, для всей левой и верхней части языка границы устойчивости коэффициент c положителен, т. е. имеет место *жесткое* возбуждение. Следовательно, еще до того, как число Рейнольдса перейдет через критическое значение R_0, где-то в фазовом пространстве, в стороне от стационарной точки (т. е. от течения Пуазейля), возникнет какой-то колебательный режим*, на который систему и выбросят малые возмущения при подходе числа Рейнольдса к R_0. Этот новый режим может быть устойчивой стационарной точкой (т. е. в гидродинамических терминах — стационарным течением, отличным от течения Пуазейля), или предельным циклом (в гидродинамических терминах — периодическим течением), но может иметь и более сложную структуру, например, он может оказаться условно-периодическим движением по тору. Более того, возникающий при жестком возбуждении режим может оказаться У-системой или системой гиперболического характера, т. е. притягивающим множеством с весьма нерегулярными, неустойчивыми траекториями на нем. Спектр соответствующей динамической системы может оказаться непрерывным даже несмотря на конечность числа степеней свободы (т. е. конечность размерности притягивающего множества). Экспериментаторы назвали бы такой режим течения турбулентным.

В 1963 г. появилась работа Лоренца (*Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodic flow // J. Atmos. Sci. 1963. V. 20. P. 130—141), который первым наблюдал нетривиальный притягивающий режим в системе с трехмерным фазовым пространством, моделирующей гидродинамическую теорию конвекции.

Система Лоренца имеет вид

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = -xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz; \quad \sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = \frac{8}{3}.$$

Кажется, все модели, в которых пока удалось найти гиперболические притягивающие множества, содержат члены типа накачки или отрицательной

* Другой возможностью в системах произвольного вида является уход на бесконечность; в нашем случае, по-видимому, этого не произойдет, так как на бесконечности фазовая скорость направлена назад к началу координат ввиду демпфирующего действия вязкости.

вязкости, отсутствующие в уравнении Навье — Стокса. Во всяком случае, когда я в 1964 г. пытался найти гиперболическое притягивающее множество в шестимерном фазовом пространстве галеркинского приближения к уравнению Навье — Стокса на двумерном торе с синусоидальной внешней силой (используя вычислительную машину, запрограммированную Н. Д. Введенской), то притягивающее множество оказалось, по-видимому, трехмерным тором (быть может, из-за слишком малого числа Рейнольдса). Насколько мне известно, гиперболические притягивающие множества для уравнений Навье — Стокса или их галеркинских аппроксимаций не найдены до сих пор. Зато описанный выше численный эксперимент послужил отправной точкой ряда работ о применении геодезических потоков на группах диффеоморфизмов к гидродинамике (*Arnold V. I.* Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1966. V. 16, № 1. P. 319—361; *Ebin D. G.*, *Marsden J.* Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid // Ann. of Math. 1970. V. 92. P. 102—163).

Очень простая модель с неустойчивыми траекториями на притягивающем множестве предложена М. Эноном (*Hénon M.* A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor // Comm. Math. Phys. 1976. V. 50, № 1. P. 69—77). Энон рассматривает квадратичное «преобразование Кремона» на плоскости, имеющее вид $T = T_1 T_2 T_3$, где

$$T_1(x, y) = (y, x), \quad T_2(x, y) = (bx, y), \quad T_3(x, y) = (x, y + 1 - ax^2).$$

Интересно отметить, что наблюдаемое в численном эксперименте при $a = 1{,}4$, $b = 0{,}3$ притяжение к множеству, имеющему локально вид произведения канторова множества на отрезок, не удается описать в рамках существующих определений гиперболичности (не исключено даже, что в это множество вкраплены области притяжения длинных циклов). Таким образом, математики не признают притягивающее множество Энона гиперболическим. В то же время с точки зрения экспериментатора движение фазовой точки под действием итераций преобразования T имеет явно выраженный стохастический, турбулентный характер (еще один пример опасности фетишизирования аксиом).

Примеры настоящих гиперболических притягивающих множеств на плоскости построены Р. В. Плыкиным (*Плыкин Р. В.* Источники и стоки A-диффеоморфизмов поверхностей // Математический сборник. 1974. Т. 94, № 2. С. 243—264). Плыкин строит диффеоморфизм замкнутой области с тремя дырами, изображенной на рис. 133 наверху, на ее закрашенную (на рис. 133 внизу) часть, обладающий следующим свойством: пересечение образов области при всех итерациях диффеоморфизма является притягивающим множеством (расстояние образов итераций любой точки до него стремится к нулю), это пересечение локально является произведением канто-

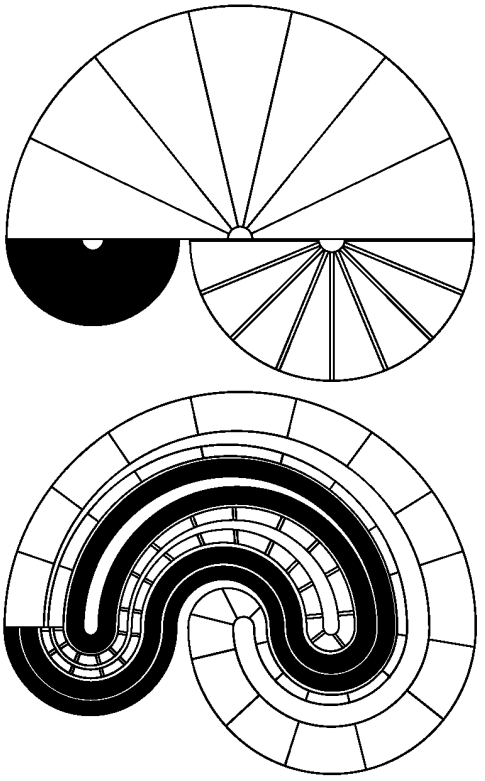


Рис. 133

рова множества на отрезок, и расстояние между близкими точками на каждом отрезке растет при итерациях преобразования.

Обширная библиография работ по теории бифуркаций и ее приложениям имеется в книге Марсдена и Мак-Кракен «Бифуркация Хопфа и ее приложения»* (более 350 названий).

Определение того, на какой режим выходит динамическая система на самом деле при потере устойчивости течением Пуазейля, лежит, по мнению специалистов, на грани возможностей современных машин.

В этой ситуации не следует, вероятно, пренебрегать качественными предсказаниями, которые можно сделать совсем без вычис-

* *Marsden J. E., McCracken M.* The Hopf Bifurcation and its Applications. Springer, 1976. [Рус. перев.: Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.]

лений, опираясь на изложенную выше общую теорию бифуркаций. В рассматриваемой задаче имеется два параметра, α и R. Следовательно, кроме особенностей коразмерности 1 могут встречаться также и особенности коразмерности 2. Обратим внимание на одну из них, а именно на ту, которая связана с изменением знака c.

Вычисления показывают, что при достаточно большом числе Рейнольдса R жесткое возбуждение на нижней стороне языка потери устойчивости сменяется мягким. Чтобы понять, что происходит в этот момент, нужно построить двупараметрическое версальное семейство для такого двукратного вырождения. Это семейство легко построить, оно имеет вид:

$$\dot z = z(i\omega + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z\bar z + c_2 z^2\bar z^2), \quad z \in \mathbb{C}$$

(остальные координаты в фазовом пространстве отвечают устойчивым собственным числам и не выписаны). Смысл параметров ε_1 и ε_2 ясен из рис. 132; характер перестройки в точке $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ определяется знаком величины c_2.

Полагая, как и выше, $\rho = z\bar z$, получаем для ρ уравнение

$$\dot\rho = 2\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\rho + c_2\rho^2), \quad \rho \geqslant 0.$$

В зависимости от знаков ε и c возможны следующие случаи:

1°. $c_2 < 0$, $\varepsilon_2 < 0$. При переходе ε_1 от отрицательных значений к положительным система мягко выходит на периодический устойчивый автоколебательный режим (рис. 134).

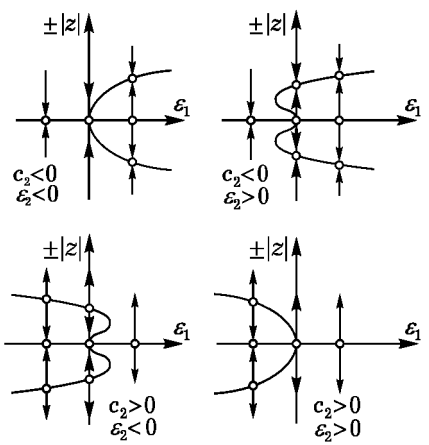


Рис. 134

2°. $c_2 < 0$, $\varepsilon_2 > 0$. При переходе ε_1 от отрицательных значений к положительным система жестко выходит на устойчивый периодический автоколебательный режим, родившийся еще до потери устойчивости положением равновесия вместе с неустойчивым колебательным режимом, садящимся на положение равновесия в момент потери устойчивости.

Указанный выше устойчивый предельный цикл мы смогли исследовать вблизи точки смены жесткого режима мягким, так как при этом он близок к положению равновесия. Однако аналитическое продолжение этого цикла может существовать (вдали от положения равновесия) и при других значениях параметров (α, R); мы видим, что его можно искать аналитическим продолжением неустойчивого цикла, садящегося на положение равновесия при жесткой потере устойчивости. Указанный устойчивый цикл — один из кандидатов на роль устанавливающегося при потере устойчивости режима.

3°. $c_2 > 0$, $\varepsilon_2 < 0$. Потеря устойчивости мягкая, но рождающийся предельный цикл быстро умирает, слившись с пришедшим издали неустойчивым, после чего в системе жестко возбуждается новый режим.

4°. $c_2 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Обычное жесткое возбуждение.

Таким образом, каков бы ни был знак c_2, при надлежащем знаке ε_2 наш анализ позволяет установить качественно новое по сравнению с однопараметрическим анализом явление: при $c_2 < 0$ мы находим явно установившийся при жестком возбуждении режим, а при $c_2 > 0$ мы обнаруживаем недолговечность мягко возбудившегося режима. Чтобы узнать, какой из двух случаев ($c_2 < 0$ или $c_2 > 0$) имеет место в действительности, нужно провести весьма громоздкие вычисления.

В теории гидродинамической устойчивости встречаются разнообразные особенности границы устойчивости и декремент-диаграмм, так что здесь могут найти применение результаты § 30. Для применений общей теории бифуркаций в теории гидродинамической устойчивости было бы важно исследовать случаи общего положения в задачах с различными группами симметрий, так как во многих гидродинамических задачах область течения D выдерживает ту или иную группу симметрий (пример — группа сдвигов в задаче о течении Пуазейля; представления этой группы участвуют в исследовании в виде параметра α).

Поведение жидкости после потери устойчивости стационарного течения обсуждается во многих работах (см., например, учебник *Ландау Л. Д.*,

Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953; § 27 (Возникновение турбулентности), основан на работе Л. Д. Ландау 1943 г.). При этом обычно предполагается мягкий режим возникновения автоколебаний и исследуется потеря устойчивости предельным циклом. Ландау предположил, что при этом будут возникать условно-периодические движения со все большим числом частот; несомненно, это объясняется тем, что другие динамические системы не были ему известны.

В 1965 году я рассказывал об изложенной выше теории на семинаре Тома в Институте высших исследований в Бюре. В появившихся пятью годами позже работах Рюэль и Такенс (*Ruelle D.*, *Takens F.* On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. V. 20. P. 167—192; 1971. V. 23) построили примеры потери устойчивости цикла с возникновением более сложного режима, чем условно-периодический; однако их пример носит экзотический характер, так как соответствует очень тощей метрически (хотя и открытой) части пространства параметров деформации. Обзор дальнейших экспериментальных работ см. в *McLaughlin J. B.*, *Martin P. C.* Transition to turbulence of a statically stressed fluid system // Phys. Rev Letters. 1974. V. 33; Phys. Rev. A. 1975. V. 12. P. 186—203.

Следует отметить, что для применимости результатов указанных работ нужно, чтобы потеря устойчивости происходила в мягком режиме, тогда как режим потери устойчивости течения Пуазейля оказался жестким.

Д. Вырождения коразмерности 2

Разобранными выше случаями (рождение и уничтожение пары особых точек, рождение или уничтожение предельного цикла из особой точки) исчерпываются бифуркации фазовых портретов в окрестности особой точки для общих однопараметрических семейств векторных полей.

В двупараметрических семействах эти особенности будут встречаться на линиях плоскости параметров, но кроме них будут (в отдельных точках плоскости параметров) наблюдаться более сложные вырождения. Среди этих более сложных вырождений неустранимы малым шевелением двупараметрического семейства следующие 5 вырождений.

1°. *Один нулевой корень с дополнительным вырождением*. Пример:

$$\dot{x} = \pm x^3 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2, \quad x \in \mathbb{R}$$

(рис. 135). Легко проверить, что выписанная деформация (топологически) версальна; в многомерном случае версальная деформация получится надстройкой седла.

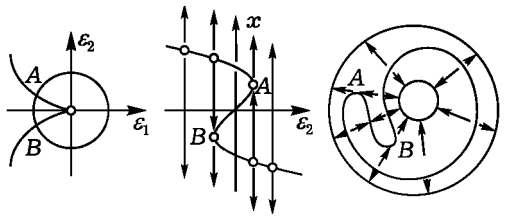


Рис. 135

Бифуркационная диаграмма (для случая $+x^3$) изображена на рис. 135 слева. Полукубическая парабола делит плоскость параметров на две части. В меньшей части система имеет вблизи $x=0$ три положения равновесия, в большей — одно. Перестройки фазового портрета при обходе параметра вокруг точки $\varepsilon=0$ по малой окружности показаны на рис. 135 справа. Прямое произведение этой окружности на (одномерное) фазовое пространство есть круговое кольцо, положения равновесия образуют в этом кольце замкнутую кривую, а поведение векторов поля ясно из рис. 135.

2°. *Одна мнимая пара с дополнительным вырождением*. Пример:

$$\dot z = z(i\omega + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z\bar z \pm z^2\bar z^2), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Бифуркационная диаграмма состоит из прямой $\varepsilon_1=0$ и касающейся ее в нуле половины параболы; она изображена на рис. 136 для случая, когда в формуле стоит $+z^2\bar z^2$.

Перестройки фазового портрета при обходе вокруг 0 по малой окружности показаны на рис. 136 справа. Изображенное на этом рисунке кольцо — прямое произведение окружности на плоскости параметров и прямой, на которой откладывается $\pm|z|$. Окружность на этом рисунке соответствует положению равновесия $z=0$, а каждый предельный цикл изображается двумя точками пересечения радиуса с линией $\varepsilon_1+\varepsilon_2|z|^2+|z|^4=0$.

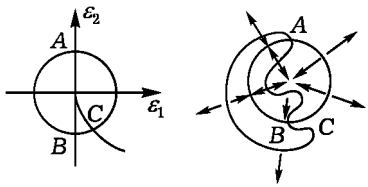


Рис. 136

Бифуркационная диаграмма и семейство над окружностью для случая, когда в формуле стоит $-z^2\bar{z}^2$, аналогичны.

3°. *Две мнимые пары*.

4°. *Мнимая пара и еще один нулевой корень*.

Исследование этих случаев не доведено еще до той полноты, при которой можно выписывать версальные семейства; более того, неясно, имеется ли в случае двух мнимых пар двупараметрическое (или хотя бы конечнопараметрическое) топологически версальное семейство (даже в предположении нормальной несоизмеримости отношения частот при одновременном их переходе из одной полуплоскости в другую).

После усреднения по быстрому вращению или после перехода к нормальным формам Пуанкаре (в членах ряда Тейлора ограниченной степени) эти задачи приводят к задачам о бифуркациях фазовых портретов векторных полей на плоскости, имеющих в случае одной мнимой пары одну инвариантную прямую, а в случае двух — две:

$$\dot{x} = xA(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = yB(x, y, \varepsilon). \tag{1}$$

Системы такого же вида возникают при исследовании взаимодействий хищника и жертвы или конкурирующих видов в экологии (модель Лотка — Вольтерра; заметим только, что здесь необходимо учитывать квадратичные члены функций A, B, иначе бифуркации необщие). В терминах исходной системы x, y имеют смысл квадратов амплитуд собственных колебаний. Положение равновесия в плоской системе отвечает положению равновесия в исходной многомерной, если оно лежит на пересечении инвариантных прямых, циклу — если на одной из них, и тору — если оно лежит внутри положительного квадранта плоскости. (Частоты собственных колебаний предполагаются несоизмеримыми или по меньшей мере не связанными резонансами низких порядков.)

Обоснование перехода от усредненной, плоской системы к исходной можно отделить от исследования бифуркаций в системе на плоскости, которое весьма нетривиально и послужило предметом нескольких неверных работ (Гукенхеймер, Холмс и др.). Правильный ответ обнаружен В. И. Швецовым в 1979 году при помощи компьютера: число рождающихся предельных циклов в плоской системе не превосходит единицы. Математическое обоснование (описание версальных деформаций в классе систем (1)) получено лишь в 1985 г. Х. Жолондеком, который ранее получил аналогичный ре-

зультат для случая мнимой пары и нулевого корня: *Жолондек Х.* О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости // Математический сборник. 1983. Т. 120, вып. 4. С. 473—499. Здесь также рождается не более одного цикла.

Наконец, остается последний случай коразмерности 2:

5°. *Два нулевых корня*. Пример — семейство уравнений на плоскости

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_1 + x_1^2 \pm x_1 x_2 \end{cases}$$

с параметрами $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Бифуркационная диаграмма разбивает плоскость ε на четыре части, обозначенные A, B, C, D на рис. 137, соответствующем выбору $+x_1x_2$ в формуле.

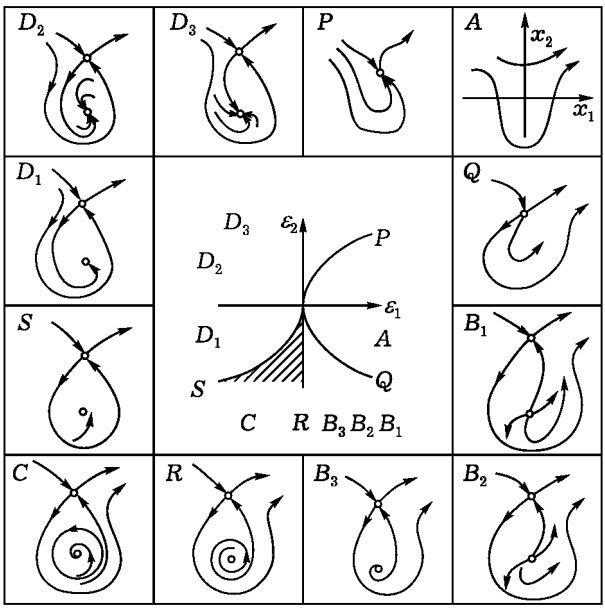


Рис. 137

Фазовые портреты, соответствующие каждой из четырех частей плоскости ε, показаны на рис. 137. Ветвям бифуркационной диаграммы соответствуют системы с вырождениями коразмерности один, изображенные на рис. 137 (P, Q, R, S).

Заметим, что бифуркация на ветви S — рождение цикла из петли сепаратрисы — не входит в нашу классификацию особенностей коразмерности 1, так как она является не локальным (вблизи особой точки), а глобальным явлением. Мы видим, таким образом, что с увеличением числа параметров семейства при локальном исследовании бифуркаций особых точек начинают играть роль глобальные бифуркации меньших коразмерностей. Отсюда следует, что при достаточном числе параметров мы столкнемся в локальной задаче с теми же трудностями не всюду плотности структурно устойчивых систем, которые были обнаружены Смейлом в глобальной задаче о векторных полях на многообразии (см. § 15).

Бифуркации в случае, соответствующем выбору знака «−» в формуле, сводятся к предыдущим изменениям знаков t и x_2.

Теорема. *Векторные поля общего положения с двумя нулевыми корнями характеристического уравнения в особой точке на фазовой плоскости имеют топологически версальную деформацию с двумя параметрами, эквивалентную одной из двух деформаций, рассмотренных выше.*

Иными словами, *общее двупараметрическое семейство дифференциальных уравнений на плоскости, имеющих при некотором значении параметра особую точку с двумя нулевыми корнями характеристического уравнения, непрерывной заменой параметров и непрерывно зависящей от параметров непрерывной заменой фазовых координат приводится к указанному выше виду.*

Эта теорема, доказанная Р. И. Богдановым в 1971 году, была впервые опубликована в обзоре *Арнольд В. И.* Лекции о бифуркациях и версальных семействах // УМН. 1972. Т. 27, вып. 5. С. 119—184. Такенс анонсировал аналогичный результат в 1974 г. Доказательство версальности не просто; главную трудность представляет исследование единственности предельного цикла. Р. И. Богданов преодолевает эту трудность при помощи нетривиальных соображений о поведении эллиптических интегралов в зависимости от параметра. См. *Богданов Р. И.* Бифуркации предельного цикла одного семейства векторных полей на плоскости // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1976. Вып. 2. С. 23—36; Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел, там же, с. 37—65.

§ 34. Потеря устойчивости автоколебаний

Следующей по сложности задачей теории бифуркаций (после задачи о перестройке фазовых портретов в окрестности положений

равновесия) является задача о перестройках семейства фазовых кривых в окрестности замкнутой фазовой кривой. Эта задача полностью не решена и, по-видимому, в некотором смысле неразрешима. Тем не менее общие методы теории бифуркаций позволяют получить существенную информацию об этих перестройках; в настоящем параграфе дается краткий обзор основных результатов в этом направлении.

А. Монодромия и мультипликаторы

Рассмотрим замкнутую фазовую кривую системы дифференциальных уравнений. Нас интересуют перестройки расположения фазовых кривых в окрестности данной кривой при малом изменении уравнения.

Для расположения фазовых кривых в окрестности замкнутой фазовой кривой общего положения имеется (с точностью до гомеоморфизма окрестности) конечное число возможностей. Чтобы описать их, выберем на замкнутой фазовой кривой точку O. Проведем через эту точку трансверсальную к замкнутой фазовой кривой площадку (коразмерности один в фазовом пространстве). Фазовые кривые, выходящие из точек площадки, достаточно близких к точке O, вновь пересекают площадку, сделав оборот вдоль кривой. Возникает отображение окрестности точки O на трансверсальной площадке в эту площадку. Это отображение называется *функцией* (или *отображением*) *последования Пуанкаре* (рис. 138) (или просто *отображением Пуанкаре*).

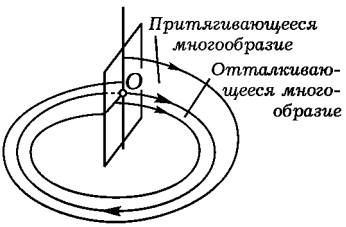


Рис. 138

Точка O является неподвижной точкой функции последования. Рассмотрим линеаризацию функции последования в точке O. Этот линейный оператор называется *оператором монодромии*.

Собственные числа оператора монодромии называются *мультипликаторами* исходной замкнутой фазовой кривой. Оператор мо-

нодромии можно найти, решая линейное уравнение с периодическими коэффициентами (уравнение в нормальных вариациях вдоль нашей фазовой кривой).

Предположим, что все мультипликаторы по модулю меньше единицы. Тогда можно доказать, что все соседние фазовые кривые при продолжении вперед притягиваются к нашей замкнутой фазовой кривой. Если хотя бы один из мультипликаторов по модулю больше единицы, то существуют фазовые кривые, удаляющиеся от замкнутой (приближающиеся к ней при $t \to -\infty$).

В общем случае несколько собственных чисел лежит внутри единичной окружности, а несколько — снаружи. В этом случае фазовые кривые, притягивающиеся к данной, образуют, как можно доказать, *притягивающееся многообразие*, пересечение которого с нашей трансверсалью имеет такую размерность, сколько мультипликаторов лежит внутри единичной окружности. Точно так же фазовые кривые, асимптотические к замкнутой при $t \to -\infty$, образуют *отталкивающееся многообразие*. Размерность его пересечения с трансверсалью равна числу неустойчивых мультипликаторов (мультипликаторов вне единичной окружности).

В окрестности нашей замкнутой фазовой кривой имеет место гиперболическая ситуация (см. § 14): все прочие фазовые кривые удаляются от замкнутой как при $t \to +\infty$ (удаление происходит вдоль отталкивающегося многообразия), так и при $t \to -\infty$ (вдоль притягивающегося). Топологический тип семейства фазовых кривых в окрестности замкнутой фазовой кривой, не имеющей мультипликаторов на единичной окружности, однозначно определяется числами устойчивых и неустойчивых мультипликаторов и тем, сколько среди тех и других отрицательных: четное или нечетное число.

Посмотрим, что изменится в этой картине при малом изменении системы.

Б. Простейшие вырождения

Замкнутая фазовая кривая называется *невырожденной*, если единица не является мультипликатором. Невырожденная замкнутая фазовая кривая при малой деформации системы не исчезает, а лишь немного деформируется (по теореме о неявной функции, примененной к уравнению $f(x) = x$, где f — функция последования). При деформации невырожденной замкнутой фазовой кривой мультипликаторы также лишь немного деформируются. Следовательно, как

число устойчивых, так и число неустойчивых мультипликаторов не меняется при деформации, если ни один из мультипликаторов исходной фазовой кривой не лежал на единичной окружности.

Мультипликаторы замкнутой фазовой кривой общего положения не лежат на единичной окружности. Таким образом, расположение фазовых кривых в окрестности замкнутой фазовой кривой общего положения структурно устойчиво.

Но если мы рассматриваем не индивидуальную систему, а семейство систем, зависящих от параметра, то при отдельных значениях параметра мультипликаторы могут попадать на единичную окружность, и возникает вопрос о бифуркациях.

Как обычно, начнем с простейших вырождений, т. е. вырождений, неустранимых в однопараметрических семействах. Таких вырождений коразмерности 1 в нашем случае имеется три. Действительно, характеристическое уравнение оператора монодромии вещественно, поэтому каждый невещественный мультипликатор имеет комплексно сопряженный. Следовательно, на единичную окружность выходят либо 2 комплексно сопряженных мультипликатора, либо один вещественный, равный либо 1, либо -1. Все три случая (комплексная пара, $+1$, -1) соответствуют многообразиям коразмерности 1 в функциональном пространстве.

Рассмотрим, например, границу области устойчивости замкнутой фазовой кривой в функциональном пространстве. Эта граница является гиперповерхностью в функциональном пространстве. Она состоит из трех компонент коразмерности 1. Первая компонента соответствует фазовым кривым с одной парой комплексно сопряженных мультипликаторов с модулем 1, вторая — с мультипликатором $+1$, третья — с мультипликатором -1; все остальные мультипликаторы лежат внутри единичной окружности (рис. 139).

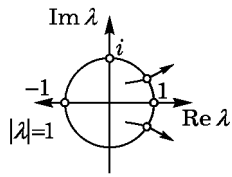


Рис. 139

Эти три гиперповерхности коразмерности 1 пересекаются по поверхностям коразмерности 2 и имеют дальнейшие особенности. Например, самопересечения первой поверхности отвечают двум парам мультипликаторов с модулем 1 и т. д.

Задача о потере устойчивости замкнутой фазовой кривой является, таким образом, задачей о вырождении коразмерности 1, и мы должны, на первый взгляд, рассматривать однопараметрические се-

мейства общего положения, чтобы разобраться в бифуркациях. В действительности дело обстоит не так просто: мы увидим, что в задаче о потере устойчивости при прохождении пары мультипликаторов через единичную окружность имеется *два* существенных параметра. Но вначале посмотрим, к каким выводам приводит однопараметрическая точка зрения.

Начнем со случая, когда один из мультипликаторов равен 1. Этот случай в сущности не отличается от задачи о бифуркации положений равновесия в однопараметрических семействах. Ситуация общего положения — это рождение или смерть пары замкнутых фазовых кривых. У функции последования при этом рождаются или умирают две неподвижные точки.

Пример 1. Рассмотрим отображение оси x в себя, заданное формулой $x \mapsto x + x^2$. Точка $x = 0$ неподвижна, и ее мультипликатор равен 1. Рассмотрим однопараметрическую деформацию с параметром ε, близким к нулю:

$$f_\varepsilon(x) = x + x^2 + \varepsilon.$$

Эта деформация топологически версальна. Рассмотрим любое отображение прямой в себя, имеющее неподвижную точку с мультипликатором 1. Мы назовем эту (вырожденную) неподвижную точку *регулярной*, если вторая производная отображения в неподвижной точке (в какой-нибудь и тогда любой системе координат) отлична от нуля.

Если вырожденная неподвижная точка регулярна, то существует однопараметрическая топологически версальная деформация отображения. При этом как само отображение, так и его версальная деформация локально топологически эквивалентны указанной выше деформации f_ε специального отображения f_0 в окрестности точки 0.

Чтобы перейти к многомерному случаю, нужно определить надстройку над построенной деформацией.

Пример 2. Рассмотрим отображение линейного пространства в себя, заданное формулой

$$(y, z, u, v) \mapsto \left(2y, -2z, \frac{u}{2}, -\frac{v}{2}\right),$$

где y, z, u, v — точки четырех подпространств, прямым произведением которых является наше пространство. Мы будем называть такое отображение *стандартным седлом* (размерности пространств, которым принадлежат y и u, — любые, а z и v — нуль или едини-

ца). Рассмотрим любое гладкое отображение, имеющее неподвижную точку. Предположим, что ни один из мультипликаторов не лежит на единичной окружности. Тогда в окрестности неподвижной точки отображение топологически эквивалентно стандартному седлу (это легко следует из теоремы Гробмана — Хартмана, § 13).

Пример 3. Рассмотрим прямое произведение деформации отображения прямой примера 1 на стандартное седло. Мы получим однопараметрическое семейство отображений с параметром ε и фазовыми координатами, меняющимися в окрестности нуля:

$$(x; y, z, u, v) \mapsto \left(x + x^2 + \varepsilon, 2y, -2z, \frac{u}{2}, -\frac{v}{2}\right).$$

Эта деформация называется *надстройкой* над деформацией примера 1. Она топологически версальна.

Теорема. *Однопараметрические семейства отображений общего положения топологически эквивалентны выписанному выше в окрестности каждой неподвижной точки с мультипликатором* 1 *при значениях параметра, близких к тому, для которого мультипликатор становится равным* 1.

Доказательство в одномерном случае легко. Многомерный случай сводится к одномерному при помощи теоремы Шошитайшвили (§ 32), которая верна не только для дифференциальных уравнений, но и для отображений. □

В. Случай мультипликатора -1

При появлении мультипликатора -1 замкнутая фазовая кривая гладко зависит от параметра и сама не буфурцирует. Но при этом от нее ответвляется дважды наматывающаяся на нее замкнутая фазовая кривая. Чтобы понять, как это происходит, обратимся опять к функции последования.

Пример 1. Рассмотрим отображение прямой в себя

$$f_0(x) = -x \pm x^3.$$

Мультипликатор неподвижной точки 0 равен -1.

Включим f_0 в семейство:

$$f_\varepsilon(x) = (\varepsilon - 1)x \pm x^3.$$

Теорема. *Деформация f_ε отображения f_0 версальна. Однопараметрическое семейство общего положения в окрестности неподвижной точки с мультипликатором* -1 *при значениях параметра, близ-*

ких к тому, при котором мультипликатор равен -1, *топологически эквивалентно выписанному.*

Доказательство. Рассмотрим любое однопараметрическое семейство отображений прямой, в котором мультипликатор неподвижной точки обращается в -1 при некотором значении параметра.

Неподвижная точка гладко зависит от параметра (по теореме о неявной функции). Гладко зависящей от параметра заменой координат можно перенести неподвижную точку в нуль.

Будем теперь делать замены Пуанкаре (см. § 25), последовательно убивающие нерезонансные члены. Эти замены будут гладко зависеть от параметра, если мы будем оставлять члены, становящиеся резонансными при критическом значении параметра, не только при этом значении параметра (когда их и нельзя убить), но также при соседних значениях.

В нашем случае резонансные члены — это все члены нечетной степени. Следовательно, семейство можно привести к виду

$$x \mapsto \lambda x + ax^3 + O(|x|^5),$$

где λ, a и O гладко зависят от параметра.

В семействе общего положения производная λ по параметру при $\lambda = -1$ отлична от нуля. В таком случае за параметр можно принять $\varepsilon = 1 + \lambda$. Теперь деформация имеет вид

$$x \mapsto (\varepsilon - 1)x + a(\varepsilon)x^3 + O(|x|^5).$$

В семействе общего положения $a(0) \neq 0$. Гладко зависящим от параметра растяжением координат добиваемся $a(\varepsilon) = \pm 1$.

Теперь остается проверить, что член O не влияет на топологический тип семейства. Рассмотрим квадрат нашего отображения:

$$x \mapsto (\varepsilon - 1)^2 x + (\varepsilon - 1)ax^3 + a(\varepsilon - 1)^3 x^3 + O(|x|^5).$$

Каждая точка x сдвигается на

$$h = -2\varepsilon(1 + \ldots)x - (2a + \ldots)x^3 + O(|x|^5),$$

где … означает $O(\varepsilon)$.

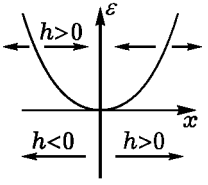


Рис. 140

Нулевую линию уровня функции h на плоскости (x, ε) легко исследовать (рис. 140). Рис. 140 определяет топологический тип семейства. □

Таким образом, в общем однопараметрическом семействе отображений прямой на прямую мультипликатор неподвижной точки

становится равным -1 в момент трансверсального прохождения через единичную окружность (в отличие от обращения мультипликатора в 1, при котором мультипликатор, вообще говоря, через окружность не проходит). В момент прохождения мультипликатора через -1 изнутри наружу неподвижная точка теряет устойчивость. При этом, в зависимости от знака коэффициента при x^3, возможно два случая. Либо рядом с потерявшей устойчивость точкой (на расстоянии порядка квадратного корня из отличия параметра от критического значения) возникает устойчивый цикл периода 2 (две неподвижных точки квадрата отображения) — это случай мягкой потери устойчивости. Либо область притяжения стягивается до 0 из-за подхода цикла порядка два еще до потери устойчивости (жесткая потеря устойчивости).

Многомерная картина получается надстраиванием седла, как это описано выше.

Применяя все сказанное об отображениях к функции последования замкнутой фазовой кривой, получаем в случае мягкой потери устойчивости картину, изображенную на рис. 141: исходный цикл теряет устойчивость, но появляется устойчивый цикл с примерно вдвое большим периодом.

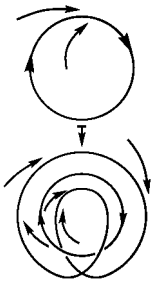


Рис. 141

Описанные здесь явления хорошо наблюдаются в экспериментах. Следующий пример заимствован из доклада Г. И. Баренблата на семинаре И. Г. Петровского. Рассматривается полимерная пленка, медленно растягиваемая грузом. При малых растяжениях процесс квазистационарен (время можно считать параметром, фазовая точка находится в устойчивом положении равновесия, все наблюдаемые величины при каждом значении параметра постоянны, т. е. фактически с изменением времени медленно меняются). Однако при некотором значении параметра (т. е. при достаточном растяжении пленки) картина меняется, и вид различных физических параметров (скажем, длины x пленки) как функции времени становится таким, как изображено на рис. 142 (каждое колебание на этом рисунке можно рассматривать как происходящее при фиксированном значении параметра, но при следующем колебании параметр немного меняется).

Истолкование этого поведения фазовых переменных со временем следующее: точка 1 соответствует мягкой потере устойчивости равновесия с образованием автоколебаний; видно, что их амплитуда растет как корень квадратный из закритичности. Точка 2 соответствует мягкой потере устойчивости цикла с прохождением мультипликатора через -1.

Действительно, предположим, что в фазовом пространстве происходят перестройки, указанные на рис. 141.

Каждая физическая наблюдаемая величина является функцией на фазовом пространстве. Пока фазовая точка находится в положении равновесия, величина постоянна. Когда фазовая точка движется по циклу, величина x становится периодической функцией времени t (амплитуда колебаний растет с циклом). Удвоению цикла, изображенному на рис. 141, отвечает именно такое удвоение периода зависимости измеряемой величины от времени, которое наблюдалось в эксперименте (рис. 142).

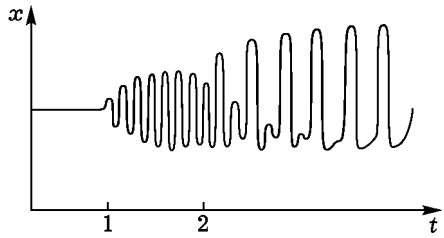


Рис. 142

В связи с этим заметим, что вообще при изучении автоколебаний обычно регистрируют временные зависимости измеряемых величин (скажем, на электрокардиограмме). Во многих случаях более ясное представление о характере явлений можно получить из вида фазовой кривой или ее проекции на какую-либо плоскость. Этим методом давно пользуются для диагностики отказов таких механических автоколебательных систем, как насосы. Предложения применять этот метод в электрокардиографии уже высказывались медиками.

Одним из наиболее поразительных открытий теории бифуркаций явилось обнаружение в конце 70-х годов бесконечных каскадов удвоений — так называемая универсальность Фейгенбаума. Сущность этого открытия состоит в следующем. При изменении параметра бифуркация удвоения цикла повторяется, так что возникает цикл с примерно в четыре раза большим периодом, затем еще раз повторяется, так что период увосьмеряется, и т. д., так что на конечном интервале изменения параметра происходят удвоения, разделенные промежутками, убывающими в геометрической прогрессии: их отношения стремятся к постоянному числу.

Это постоянное число не зависит от конкретного вида системы и является мировой постоянной, вроде π или e: она называется кон-

стантой Фейгенбаума и составляет, если делить предыдущее расстояние на следующее (меньшее), 4,6692…

Универсальность проявляется не только в независимости этой постоянной от вида системы, но и в ряде деталей процесса удвоения, которые все, с точностью до масштабного преобразования, становятся все более и более стандартными по мере приближения параметра к предельному значению, соответствующему бесконечному числу удвоений.

Удвоение легче всего исследовать для неподвижных точек и циклов отображений прямой в себя. В качестве типичного примера можно взять отображения, рассматривающиеся в экологии как модели размножения с учетом конкуренции: $x \mapsto Axe^{-x}$ (множитель e^{-x} описывает влияние конкуренции, уменьшающее коэффициент размножения A).

При малых значениях A неподвижная точка 0 устойчива (вымирание), затем появляется положительная устойчивая неподвижная точка (рис. 143), которая при некотором значении A_1 параметра A

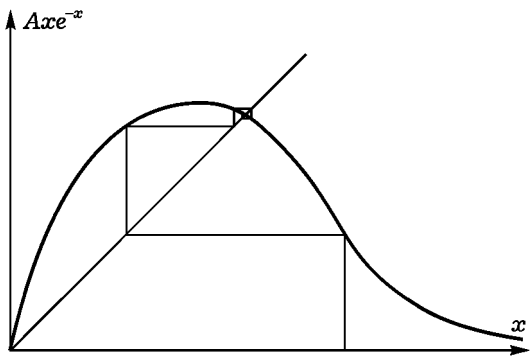


Рис. 143

теряет устойчивость, причем собственное число проходит через -1 (отображение, конечно, необратимо) с рождением цикла периода 2*, начинающего каскад удвоений (рис. 144). Эти удвоения были сразу же замечены экологами, как только динамика описанного выше преобразования и сходных с ним моделей были исследованы при помощи вычислительных машин (*Шапиро А. П.* Математические

* По-видимому, объясняющего данное явление: годы, когда горбуши приходит на нерест много, чередуются с годами меньшего «урожая».

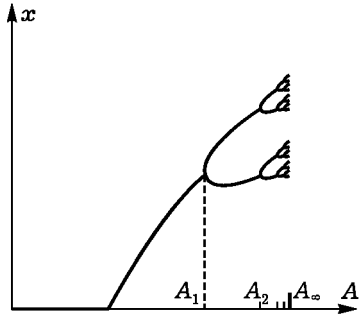


Рис. 144

модели конкуренции // Управление и информация. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1974. Т. 10. С. 5—75; *May R. M.* Biological populations obeying difference equations; stable points, stable cycles and chaos // J. Theor. Biol. 1975. V. 51. P. 511—524; Simple mathematical models with very complicated dynamics // Nature. 1976. V. 261. P. 459—466). Анализируя эти данные, М. Фейгенбаум и обнаружил удивительный факт устойчивости бесконечного каскада удвоений, а также и еще более удивительную универсальность этого явления.

Рассмотрим отображение прямой в себя $x \mapsto f(x)$ вблизи точки максимума функции f. Легко сообразить, что график квадрата отображения будет иметь два максимума и минимум (рис. 145).

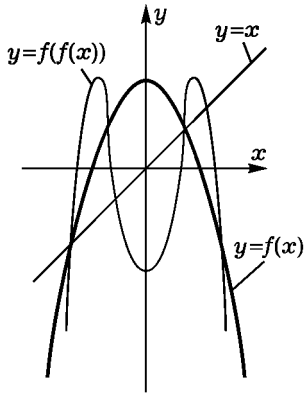


Рис. 145

В окрестности точки минимума после надлежащей нормировки (растяжения) координат функция, с точностью до знака, похожа на исходную. При возведении отображения в квадрат это сходство все время возрастает, как показывает вычислительный эксперимент. Это приводит к мысли искать неподвижную точку оператора J удвоения (возведения в квадрат) с перенормировкой, определенной ниже. Такая неподвижная точка, оказывается, существует, а именно, таковой является аналитическая четная функция

$$\Phi(x) = 1 - 1{,}52763x^2 + 0{,}104815x^4 - 0{,}0267057x^6 + \ldots,$$

для которой $J\Phi = \Phi$, где $(Jf)(x) = -\frac{1}{a} f(f(-ax))$. Константа перенормировки для Φ $a_\Phi = -\Phi(1) = 0{,}3995$ (все числовые коэффициенты, естественно, округлены).

Функция Φ является неподвижной точкой оператора J, определенного на четных C^1-отображениях

$$f : [-1, 1] \to [-1, 1]$$

с одним максимумом, удовлетворяющих условиям (рис. 146)

$$f'(0) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = -a < 0, \quad b = f(a) > a,$$
$$f(b) = f(f(a)) < a$$

для каких-либо a и b, $a = a_f$.

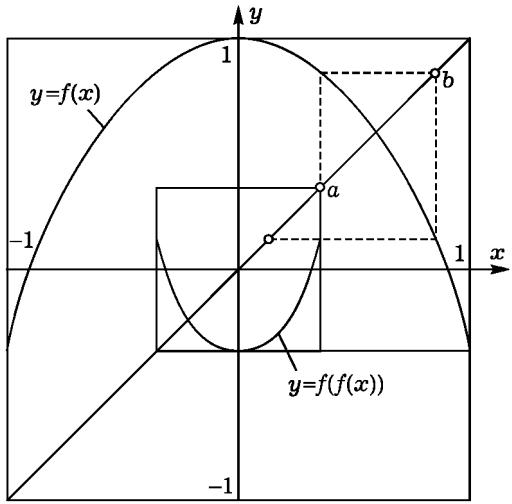


Рис. 146

Оператор J в функциональном пространстве гиперболический, он имеет одномерное растягивающее пространство и коодномерное сжимающееся. Собственное число в растягивающемся пространстве — это и есть постоянная Фейгенбаума 4,6692…

Универсальность каскада удвоений объясняется этой картиной следующим образом. Однопараметрическое семейство отображений изображается кривой γ в функциональном пространстве (рис. 147). Если эта кривая проходит недалеко от неподвижной точки Φ, то при повторении преобразования удвоения J она будет вытягиваться

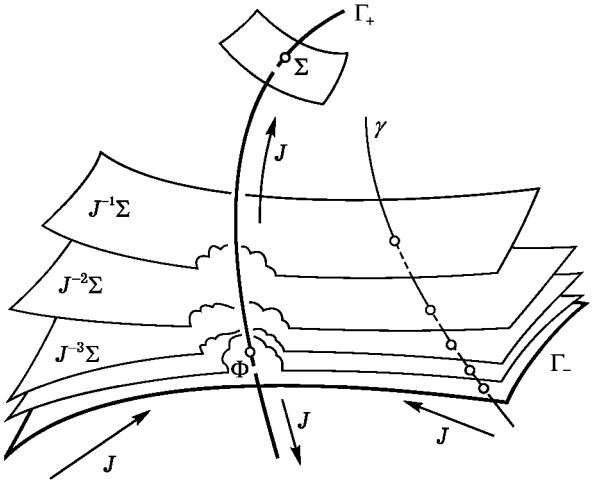


Рис. 147

вдоль растягивающегося одномерного инвариантного многообразия Γ_+ отображения J, одновременно приближаясь к нему. С другой стороны, рассмотрим в функциональном пространстве бифуркационную поверхность Σ, образованную отображениями с собственным числом -1 в неподвижной точке.

Оказывается, инвариантная кривая Γ_+, о которой шла речь выше, трансверсально пересекает эту бифуркационную поверхность Σ коразмерности 1. Следовательно, прообразы бифуркационной поверхности Σ при отображении удвоения и при его итерациях образуют последовательность поверхностей коразмерности 1 в функциональном пространстве, приближающихся при возрастании числа итераций к сжимающемуся многообразию Γ_- неподвижной точки (рис. 147). Точки пересечения этих поверхностей с изображающей наше семейство кривой γ определяют те значения параметра, при которых происходит удвоение цикла. Это объясняет и появление геометрической прогрессии, и универсальность ее знаменателя: он определяется последовательностью построенных выше поверхностей и не зависит от специального выбора трансверсальной кривой*.

* Доказательства и библиография приведены в: *Collet P., Eckmann J.-P.* Iterated maps on the interval as dynamical system. Boston: Birkhäuser, 1980. 248 p.

При переходе от отображений к диффеоморфизмам плоскости или к системам дифференциальных уравнений картина остается в общем такой же, с той же универсальной постоянной, хотя некоторые детали меняются. Для того чтобы удвоившийся цикл претерпел новое удвоение, мультипликатор (собственное число отображения) должен пройти от 1 к -1. Действительно, удваивающийся цикл имел мультипликатором (в момент рождения) число -1. Значит удвоившийся цикл в момент рождения имеет мультипликатор $(-1)^2 = 1$. Перейти от 1 к -1 на вещественной оси мультипликатор не может ни для дифференциального уравнения, ни для диффеоморфизма, так как обратимость диффеоморфизма не позволяет ему обратиться в нуль.

Поэтому в явлении обязательно участвует еще один мультипликатор, который должен столкнуться с двигающимся из 1 в -1 по вещественной оси мультипликатором, после чего оба сойдут в комплексную область и обойдут вокруг нуля с разных сторон, а затем снова разойдутся — один к -1, другой — на свое место. Кривая, по которой обходится нуль, почти окружность, и для нее тоже есть почти универсальная асимптотика при повторении удвоений (М. В. Якобсон, 1985).

Универсальные удвоения имеют аналоги, соответствующие другим резонансам. Рассмотрим, например, резонанс 1 : 3, когда собственное число (мультипликатор) покидает единичный круг через кубический корень из единицы. Для реализации такого явления в семействе общего положения нужно как минимум два параметра. На плоскости параметров моменты утроения изображаются отдельными точками. Эти точки и в случае утроения, как и для удвоения, встречаются бесконечными сериями. Асимптотически их разности образуют геометрические прогрессии со стандартным, универсальным (независимым от семейства) знаменателем. Однако этот знаменатель оказывается не вещественным, как в случае удвоений, а комплексным числом, так что точки утроения образуют на плоскости параметров своеобразные дискретные спирали.

Аналогичные удвоениям Фейгенбаума явления происходят и в гамильтоновых системах. В этом случае мультипликатор -1 встречается обязательно четное число раз, в системе общего положения его кратность равна 2. После удвоения рождается цикл с двукратным мультипликатором, равным (в момент рождения) 1. До следующего удвоения эта пара единиц движется к -1 по единичной

окружности (сверху и снизу). Соответствующая константа Фейгенбаума в этом случае значительно больше, чем для обычных удвоений (примерно 8). Заметим, что по дороге мультипликаторы проходят через все корни из единицы. Поэтому, также универсальным образом, между двумя последовательными удвоениями происходят другие события: рождение циклов, периоды которых равны разнообразным кратным порождающего цикла (в момент рождения).

Новорожденный цикл большего периода снова имеет мультипликатор 1 кратности 2, который достаточно часто (грубо говоря, с вероятностью половина) при изменении параметра будет двигаться по единичной окружности. Таким образом, в принципе возникает ветвящаяся схема бифуркационных значений параметра, занумерованных всеми конечными последовательностями рациональных чисел. Обычная последовательность удвоений отвечает натуральному ряду. Последовательность удвоений утроившегося цикла — $\frac{1}{3}$, 1, 2, … Можно рассматривать и последовательности вроде $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, … (каскад утроений) или $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, …, приводящие, вероятно, к новым универсальным константам.

Сопровождающие эти бифуркации явления давно наблюдались в численных экспериментах. Например, инвариантные кривые («острова»), напоминающие шляпу (рис. 148), возникают при учетверении цикла и встречались уже в ранних работах Хенона с Хейлесом и Чирикова*, но, кажется, не получили тогда надлежащего объяснения.

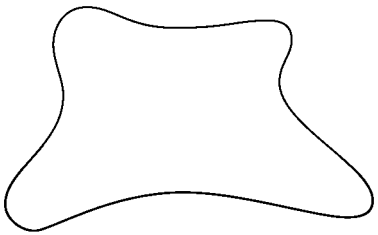


Рис. 148

* *Hénon M., Heiles C.* The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments // Astron. J. 1964. V. 69. P. 73; *Чириков В. В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Новосибирск: Изв. СО АН СССР, 1969. Препринт № 267.

Г. Прохождение пары мультипликаторов через единичную окружность

Этот случай изучен гораздо хуже обоих предыдущих. Топологически версальные деформации не выписаны и, быть может, не существуют. Тем не менее метод Пуанкаре позволяет получить существенную информацию. Начнем со случая, когда аргумент мультипликатора, попавшего на единичную окружность, несоизмерим с 2π (этот случай можно считать общим, так как мера множества рациональных чисел равна нулю).

Мы будем считать, что размерность отображаемого пространства равна 2. В этом случае после подходящей гладкой и гладко зависящей от параметра замены координат наше семейство отображений приводится к виду

$$z \mapsto \lambda(\varepsilon)z(1+a(\varepsilon)|z|^2+O(|z|^4)),$$

где вещественное число ε — параметр семейства, $\lambda(0)=e^{i\alpha}$, $\alpha \neq \frac{2\pi p}{q}$. Для семейства общего положения $\frac{d|\lambda|}{d\varepsilon}\Big|_0 \neq 0$, так что за параметр можно взять $|\lambda|-1$.

Предположим, что член $O(|z|^4)$ отсутствует. В этом случае отображение легко исследовать. Действительно, модуль точки-образа определяется модулем точки прообраза, так что возникает вещественное отображение

$$r \mapsto r|\lambda||1+ar^2|.$$

При $|\lambda|=1+\varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$, $r \ll 1$, имеем

$$|\lambda||1+ar^2| \approx 1+\varepsilon+\operatorname{Re} ar^2+\ldots$$

Для семейства общего положения $\operatorname{Re} a \neq 0$. В этом случае при прохождении параметром ε значения нуль из теряющей устойчивость неподвижной точки рождается (или в этой точке умирает) инвариантная относительно отображения окружность, радиус которой пропорционален $\sqrt{|\varepsilon|}$. В первом случае (рождения окружности) она устойчива, во втором неустойчива. На самой окружности отображение сводится к повороту.

Вернемся теперь к отброшенным членам и посмотрим, повлияют ли они на сделанные выводы.

Можно показать, что инвариантная замкнутая кривая радиусом порядка $\sqrt{|\varepsilon|}$ действительно существует у полного отображения (см.

Sacker R. J. On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations. New York University, Report IMM—NYU 333. 1964; A new approach to the perturbation theory of invariant surfaces // Comm. Pure Appl. Math. 1965. V. 18, № 4. P. 717—732).

Устойчивость этой замкнутой кривой также сохраняется при возмущении. Однако устройство отображения на самой кривой для полного отображения отличается от такового для отображения с отброшенным остаточным членом. Действительно, полное отображение на инвариантной кривой может иметь как иррациональное, так и рациональное число вращения. Возникающее отображение окружности отнюдь не обязано быть топологически эквивалентным повороту. В случае рационального числа вращения оно будет, вообще говоря, иметь конечное число периодических точек, попеременно устойчивых и неустойчивых. Эти периодические точки для исходного отображения плоскости на себя будут, соответственно, седлами и узлами. Таким образом, наша инвариантная кривая состоит в случае рационального числа вращения из цепочки сепаратрис седел, сходящихся в узлах (рис. 149).

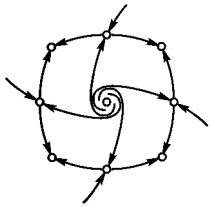


Рис. 149

Заметим, что сепаратрисы седел гладкие. Но при подходе к узлу с двух сторон две сепаратрисы образуют вместе, вообще говоря, кривую лишь конечной гладкости. Таким образом, возникающая инвариантная кривая, вообще говоря, имеет лишь конечную гладкость. При приближении к значению параметра, соответствующему переходу мультипликаторов через окружность, гладкость инвариантной кривой растет до бесконечности (как нетрудно сообразить).

Если наше отображение было отображением последования для дифференциального уравнения, то в фазовом трехмерном пространстве инвариантная кривая отображения последования определяет инвариантный тор, сплошь состоящий из фазовых кривых. Наша инвариантная кривая — это сечение указанного тора трансверсалью. Тор имеет конечную гладкость, тем большую, чем ближе момент рождения тора из цикла. При изменении параметра в семействе число вращения на торе, вообще говоря, меняется, так что оно принимает то иррациональные, то рациональные значения.

Из описанной картины бифуркаций при переходе пары мультипликаторов через единичную окружность следует также, что в однопараметрических семействах общего положения не встречаются

ответвления от данного периодического режима периодических режимов кратности, отличной от двух. Действительно, последнее могло бы происходить, лишь если бы мультипликатор переходил единичную окружность в точке с рациональным аргументом, а это — явление исключительное.

Чтобы разобраться, как возникают периодические движения с большими периодами, необходимо рассматривать семейства с двумя параметрами.

Действительно, обращение мультипликатора в корень из единицы (отличный от 1 и -1) встречается неустранимо лишь в вещественно двупараметрических семействах. Двупараметрическое рассмотрение потери устойчивости неподвижной точки в резонансном случае, т. е. когда мультипликатор близок к корню из единицы, позволяет также лучше понять бифуркации в однопараметрических семействах при пересечении мультипликаторами единичной окружности. А именно, как мы увидим, некоторые перестройки, кажущиеся нелокальными при однопараметрическом подходе, поддаются исследованию локальными методами, если рассматривать задачу как двупараметрическую. В частности, на этом пути можно исследовать некоторые случаи жесткой потери устойчивости и указать, на какой режим перескочит система после жесткой потери устойчивости цикла.

Д. Резонанс при потере устойчивости цикла

Рассмотрим отображение плоскости в себя в окрестности неподвижной точки с мультипликатором, равным корню степени $q > 2$ из единицы. В соответствии с общим методом Пуанкаре (гл. 5), мы можем записать семейство в подходящей системе координат в виде

$$z \mapsto z[\lambda + A(|z|^2) + B\bar{z}^{q-1} + O(|z|^{q+1})],$$

где λ, A, B и O гладко зависят от ε.

Вместо того, чтобы исследовать это отображение, мы можем поступить по-другому. Каждый шаг метода Пуанкаре в случае резонанса сводится к усреднению вдоль соответствующего слоения Зейферта (см. § 21). Поэтому вместо приведения к нормальной форме функции последования можно записать исходное уравнение фазовых кривых в окрестности цикла как неавтономное уравнение с 2π-периодическими коэффициентами и затем приводить его к нормальной форме $2\pi q$-периодическими по времени заменами координат (ср. § 26).

В результате этой процедуры мы получим в новых координатах (гладко зависящих от параметра) уравнение с $2\pi q$-периодическими по t коэффициентами

$$\dot{\zeta} = \varepsilon\zeta + \zeta A(|\zeta|^2) + B\bar{\zeta}^{q-1} + O(|\zeta|^{q+1}).$$

Здесь ε — комплексный параметр, A и B голоморфно зависят от ε, значение $\varepsilon = 0$ соответствует резонансу (т. е. обращению мультипликатора исходного уравнения в корень степени q из 1).

Замечание 1. Из приведенных рассуждений следует, в частности, что:

1) Функция последования с точностью до членов степени $q+1$ (и даже с точностью до членов сколь угодно высокой степени) совпадает с преобразованием фазового потока векторного поля на плоскости.

2) Указанное векторное поле инвариантно относительно циклической группы диффеоморфизмов плоскости (порядка q).

3) Выводы 1 и 2 имеют место не только для индивидуальной функции последования, но и для семейства, гладко зависящего от параметров, причем как группа, так и инвариантное относительно нее поле, получаются гладко зависящими от параметров.

Замечание 2. Точная функция последования, вообще говоря, не является преобразованием фазового потока никакого векторного поля и не коммутирует ни с какой конечной группой диффеоморфизмов.

Из сказанного выше видно, что с точностью до членов сколь угодно высокой степени относительно расстояния до замкнутой фазовой кривой задача о бифуркациях при потере устойчивости вблизи резонанса порядка $q > 2$ сводится к исследованию перестроек фазовых портретов в двупараметрических семействах общего положения векторных полей на плоскости, инвариантных относительно вращений на угол $2\pi/q$. Резонанс называется *сильным*, если $q \leqslant 4$.

Случаи резонансов порядка 2 и 1 также можно включить в эту схему. А именно, потеря устойчивости цикла при прохождении пары мультипликаторов через единичную окружность соответствует гиперповерхности коразмерности один в функциональном пространстве. Эта гиперповерхность подходит к гиперповерхностям, соответствующим мультипликаторам 1 и -1, по поверхностям коразмерности 2. Точки общего положения на этих поверхностях коразмерности 2 соответствуют таким замкнутым фазовым кривым, для которых функция последования имеет двукратное собственное число 1 (соответственно -1) с жордановой клеткой порядка 2.

Поэтому исследование граничных случаев прохождения мультипликаторов через единичную окружность сводится, с точностью до членов сколь угодно высокой степени, к изучению перестроек фазовых портретов в общих двупараметрических семействах векторных полей на плоскости, инвариантных относительно поворотов на угол $2\pi q$ $(q = 1, 2)$ и имеющих при некотором значении параметра особую точку с линейной частью в виде нильпотентной жордановой клетки; соответствующее линейное уравнение приводится к виду

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 0.$$

Окончательно, задача о перестройках при потере устойчивости вблизи резонансов приводит к изучению бифуркаций фазовых портретов в двупараметрических семействах эквивариантных векторных полей на плоскости; этой последней задачей мы теперь и займемся.

§ 35. Версальные деформации эквивариантных векторных полей на плоскости

Перестройки фазовых портретов векторных полей, инвариантных относительно какой-либо группы симметрий, естественно возникают при исследовании различных явлений, в которых симметрия присутствует в самой постановке задачи.

Более удивительным является тот факт, что задачи о перестройках симметричных фазовых портретов возникают сами собой в несимметричной a priori ситуации, при исследовании бифуркаций вблизи резонансов (ср. § 21 и 34). В настоящем параграфе рассматриваются именно те бифуркации симметричных фазовых портретов, которые нужны для изучения резонансов.

A. Эквивариантные векторные поля на плоскости

Пусть F — векторное поле на плоскости комплексной переменной z. Мы будем рассматривать F как комплекснозначную (не обязательно голоморфную) функцию на $\mathbb{C}$. Ряд Тейлора этой функции в нуле можно записать в виде $\sum F_{k,l} z^k \bar{z}^l$.

Предложение. *Пусть поле F переходит в себя при повороте плоскости переменной z на угол $2\pi/q$. Тогда коэффициенты $F_{k,l}$ отличны от нуля лишь при $k - l$, сравнимых с 1 по модулю q.*

Доказательство. Ряд Тейлора единственен, поэтому каждый его член должен повернуться на угол $2\pi/q$, когда z поворачивается на

угол $2\pi/q$. Точка комплексной плоскости $z^k\bar{z}^l$ поворачивается на угол $\dfrac{2\pi(k-l)}{q}$. Этот поворот совпадает с поворотом на угол $2\pi/q$ в точности при указанном выше условии. □

Следствие. *Дифференциальные уравнения, инвариантные относительно поворотов на угол* $\dfrac{2\pi}{q}$, *имеют следующий вид*:

$$\dot{z} = zA(|z|^2) + B\bar{z}^{q-1} + O(|z|^{q+1}) \quad (q > 2).$$

Доказательство. Рассмотрим на плоскости (k, l) целые точки, удовлетворяющие сравнению $k - l \equiv 1 \pmod q$. Эти точки расположены на лучах, параллельных биссектрисе положительного квадранта и начинающихся в точках, отвечающих мономам z, z^{q+1}, z^{2q+1}, … …, $\bar{z}^{q-1}$, $\bar{z}^{2q-1}$, … Будем искать среди перечисленных мономов мономы наименьшей степени (рис. 150).

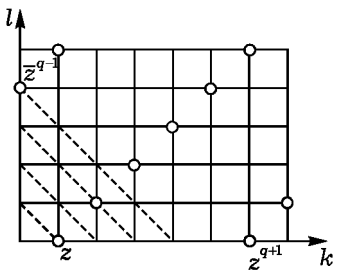


Рис. 150

Мы получим последовательно сперва несколько мономов на луче, начинающемся в z (т. е. мономов вида $z|z|^{2k}$), затем моном $\bar{z}^{q-1}$; все прочие мономы имеют степень не ниже $q+1$ (рис. 150). □

Определение. *Главным уравнением*, инвариантным относительно поворота на угол $\dfrac{2\pi}{q}$, называется предыдущее уравнение, в котором откинут член O. Правая часть главного уравнения называется *главным q-эквивариантным полем*.

Пример. Главные уравнения, инвариантные относительно групп вращений порядков 3 и 4 имеют, соответственно, вид

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^2, \quad \dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^3.$$

Для формулировки результатов исследования перестроек фазовых портретов эквивариантных векторных полей, зависящих от параметров, удобно ввести следующие определения.

Б. Эквивариантные версальные деформации

Рассмотрим семейство v_λ векторных полей, инвариантных относительно действия группы G на фазовом пространстве и зависящих от параметра λ, принадлежащего окрестности точки 0 простран-

ства $\mathbb{R}^k$ (называемого *базой* семейства). Размерность базы называется *числом параметров* семейства.

Росток семейства в точке $\lambda = 0$ называется *эквивариантной деформацией* поля v_0.

Определение. Эквивариантная деформация v_λ называется *эквивариантно топологически орбитально версальной* (короче *версальной*) деформацией поля v_0, если для любой другой эквивариантной деформации w_μ того же поля существует непрерывное отображение φ баз деформаций и такое непрерывно зависящее от μ семейство гомеоморфизмов h_μ фазового пространства, коммутирующих с действием G, что h_μ переводит фазовые кривые поля w_μ в фазовые кривые поля $v_{\varphi(\mu)}$ с сохранением направления движения.

Иными словами, *эквивариантная деформация версальна, если всякая другая эквивариантная деформация топологически орбитально эквивалентна деформации, индуцированной из версальной*.

Аналогичные определения даются для ростков векторных полей, а также для деформаций в классе полей со специальными свойствами (например, с фиксированной линейной частью в особой точке). Теперь мы переходим к построению версальных деформаций.

В. Главные деформации

Рассмотрим векторное поле на плоскости, инвариантное относительно поворота на угол $2\pi/q$, $q > 2$.

Определение. Поле называется *особым*, если линейная часть поля в нуле равна нулю.

Определение. *Главной деформацией q-эквивариантного* главного особого поля v_0 ($q > 2$) называется двупараметрическое семейство $v_\varepsilon = \varepsilon z + v_0$, где параметрами являются вещественная и мнимая части комплексного числа ε.

Пример. Главные деформации в случаях $q = 3, 4$ задаются уравнениями

$$\dot z = \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar z^2, \quad \dot z = \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar z^3,$$

в которых ε рассматривается как параметр, а комплексные коэффициенты A и B фиксированы.

Замечание. Определенные выше объекты возникают при исследовании потери устойчивости цикла при переходе пары комплексно сопряженных мультипликаторов через единичную окружность. В функциональном пространстве всех систем системы с таким пере-

ходом образуют гиперповерхность. Эта гиперповерхность является одной из трех гиперповерхностей, ограничивающих область устойчивости. Другие две гиперповерхности соответствуют переходу одного мультипликатора через единичную окружность в точке 1 и в точке -1 соответственно.

Граница гиперповерхности, соответствующей переходу комплексной пары мультипликаторов, состоит из двух частей (двух поверхностей коразмерности два в функциональном пространстве всех систем). Одна из этих поверхностей коразмерности два отвечает паре мультипликаторов, равных 1, образующих жорданову клетку порядка 2, другая — такой же клетке с двумя собственными числами -1.

Изучение потери устойчивости в окрестности этих граничных поверхностей коразмерности 2 приводит к исследованию бифуркаций в двупараметрических семействах векторных полей на плоскости, имеющих линейной частью нильпотентную жорданову клетку порядка 2 и симметричных относительно вращений на угол $2\pi/q$, $q=2$ (для мультипликаторов -1) или $q=1$ (мультипликаторы 1). Чтобы включить рассмотрение этих случаев в общую схему, удобно дать следующие определения.

Г. Случаи $q=1$ и $q=2$

Определение. Поле, инвариантное относительно поворота плоскости на угол $2\pi/q$, $q=1$ или 2, называется *особым*, если его линейная часть в нуле есть нильпотентная жорданова клетка второго порядка.

Иными словами, при $q=1$ или 2 особое поле — это поле, линейная часть которого есть поле фазовой скорости уравнения $\ddot{x}=0$ на фазовой плоскости $(x, y=\dot{x})$.

Легко доказывается

Теорема. *Особое поле, инвариантное относительно поворота плоскости на угол $2\pi/q$, $q=1$ или 2, приводится диффеоморфизмом, коммутирующим с поворотом, к полю фазовой скорости уравнения*

$$\ddot{x}=ax^3+bx^2y+O(|x|^5,|y|^5) \quad (q=2),$$
$$\ddot{x}=ax^2+bxy+O(|x|^3,|y|^3) \quad (q=1)$$

на фазовой плоскости $(x, y=\dot{x})$.

Доказательство. Линейная часть нашего поля имеет вид $y\dfrac{\partial}{\partial x}$. Составим гомологическое уравнение, соответствующее этому ли-

нейному полю. Для этого вычислим скобку Пуассона нашего линейного поля $\Lambda = y\frac{\partial}{\partial x}$ с произвольным векторным полем $h = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}$.

Мы находим последовательно

$$\left[\frac{y\partial}{\partial x}, \frac{P\partial}{\partial x}\right] = y\frac{P_x\partial}{\partial x}, \quad \left[\frac{y\partial}{\partial x}, \frac{Q\partial}{\partial y}\right] = y\frac{Q_x\partial}{\partial y} - \frac{Q\partial}{\partial x},$$

$$[\Lambda, h] = (yP_x - Q)\frac{\partial}{\partial x} + yQ_x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Итак, гомологическое уравнение относительно неизвестных функций (P, Q) имеет вид системы

$$yP_x - Q + u = 0, \quad yQ_x + v = 0.$$

Здесь u и v — известные функции, а именно компоненты векторного поля $w = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$, которое мы хотим убить заменой переменных.

Исследуем полученную систему. Исключая Q из первого уравнения и подставляя во второе, получаем

$$y^2P_{xx} = -yu_x - v.$$

Чтобы добиться делимости правой части на y^2, достаточно изменить у функции v члены нулевой и первой степени по y. Таким образом, изменяя v на $v_0(x) + yv_1(x)$, можно добиться разрешимости последнего уравнения относительно P.

Следовательно, гомологическое уравнение при произвольных (u, v) неразрешимо, но становится разрешимым, если изменить v на подходящую линейную неоднородную по y функцию. Иными словами, уравнение

$$[\Lambda, h] + w = (v_0(x) + yv_1(x))\frac{\partial}{\partial y}$$

с подходящими (v_0, v_1), зависящими от w, разрешимо относительно неизвестного поля h.

Окончательно, метод Пуанкаре позволяет уничтожать в членах каждой степени векторного поля $\Lambda + \dots$ все вектор-мономы, кроме вектор-мономов вида $x^k\frac{\partial}{\partial y}$ и $yx^k\frac{\partial}{\partial y}$. Таким образом, в классе формальных степенных рядов наше уравнение приводится к виду

$$\ddot{x} = a(x) + yb(x).$$

Если исходная система выдерживала поворот на угол π (т. е. была нечетной), то компоненты исходного векторного поля были не-

четными функциями. В этом случае замены метода Пуанкаре можно также выбирать нечетными (коммутирующими с поворотом), так как в предыдущих формулах степени (P, Q) и (u, v) одинаковы. Тогда и ряды (a, b) в формальной нормальной форме будут состоять лишь из членов нечетной степени.

Ограничиваясь в методе Пуанкаре несколькими первыми приближениями, мы получаем сформулированное выше предложение. □

Определение. *Главными особыми уравнениями и полями* при $q = 2$ и 1 называются, соответственно, уравнения

$$\ddot{x} = ax^3 + bx^2 y \quad (q = 2), \quad \ddot{x} = ax^2 + bxy \quad (q = 1)$$

и задающие их векторные поля на фазовой плоскости $(x, y = \dot{x})$.

Определение. *Главной деформацией* главного особого поля при $q = 2$ и 1 называется, соответственно, деформация, состоящая в прибавлении к правой части уравнения второго порядка слагаемого $\alpha x + \beta y$ $(q = 2)$ и $\alpha + \beta x$ $(q = 1)$.

Список главных деформаций q-эквивариантных полей в случаях сильного резонанса, т. е. для $q \leqslant 4$, следующий:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^3, && q = 4,\\
\dot{z} &= \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^2, && q = 3,\\
\ddot{x} &= \alpha x + \beta y + ax^3 + bx^2 y, && q = 2,\\
\ddot{x} &= \alpha + \beta x + ax^2 + bxy, && q = 1.
\end{aligned}$$

Здесь переменные z, ε, A, B — комплексные; x, y, α, β, a, b — вещественные; параметры деформации обозначены греческими буквами; $y = \dot{x}$.

Д. Версальность главных деформаций

«Теорема». *Все главные особые поля при каждом q можно разделить на вырожденные и невырожденные так, что*

1) *вырожденные поля образуют объединение конечного числа подмногообразий в пространстве главных особых полей*;

2) *невырожденные поля образуют объединение конечного числа открытых связных областей*;

3) *главная деформация ростка невырожденного поля в нуле версальна*;

4) *главные деформации ростков невырожденных полей в каждой компоненте связности топологически эквивалентны.*

Слово «теорема» заключено здесь в кавычки потому, что при $q=4$ теорема не доказана.

За исключением случая $q=4$, условия невырожденности можно выписать явно:

$$a \neq 0, \quad b \neq 0 \quad \text{при } q = 1, 2;$$
$$\operatorname{Re} A(0) \neq 0, \quad B \neq 0 \quad \text{при } q \geqslant 3.$$

При $q=4$ к этим условиям следует добавить по меньшей мере условия (на с. 375, 3), 4), указаны, по-видимому, все остальные).

$$|A|^2 \neq |B|^2, \quad |\operatorname{Re} A| \neq |B|,$$
$$|\operatorname{Im} A| \neq \frac{|B|^2 + \operatorname{Re}^2 A}{\sqrt{|B|^2 - \operatorname{Re}^2 A}}.$$

Из теоремы легко выводится

Следствие. *В функциональном пространстве двупараметрических семейств векторных полей, инвариантных относительно группы вращений на углы, кратные* $\frac{2\pi}{q}$, *открытое* всюду плотное множество образуют семейства, для которых поля особы лишь при отдельных изолированных значениях параметров и в окрестности этих значений семейство топологически эквивалентно версальной деформации невырожденного главного особого поля.*

Иными словами: пусть собственные числа линеаризации векторного поля на плоскости, инвариантного относительно вращений на углы, кратные $\frac{2\pi}{q}$, равны нулю. Рассмотрим поле общего положения с указанными свойствами. Образуем его двупараметрическую деформацию общего положения в классе полей с той же симметрией.

Утверждается, что существует такая не зависящая от параметров окрестность точки 0, что построенная деформация приводится непрерывно зависящим от параметров гомеоморфизмом с такой же симметрией к нормальной форме, указанной в п. В и Г. Точнее, гомеоморфизмы приводят к нормальной форме фазовые портреты соответствующих систем.

Таким образом, сформулированная теорема сводит описание всех бифуркаций к описанию бифуркаций в главных деформациях невырожденных особых полей.

* С обычными оговорками, если база некомпактна.

Е. Описание бифуркаций

В случае $q=1$ сформулированная выше теорема доказана Р. И. Богдановым в 1971 г. (см. § 33, где приведено и описание бифуркаций).

В случае $q=2$ заменами времени добиваемся $b<0$. Бифуркационная диаграмма («циферблат») на плоскости (α, β) и перестройка фазового портрета для случаев $a>0$ и $a<0$ приведены на рис. 151.

В случае $q=3$ заменами времени добиваемся $\operatorname{Re} A<0$. Бифуркационная диаграмма и перестройки приведены на рис. 152.

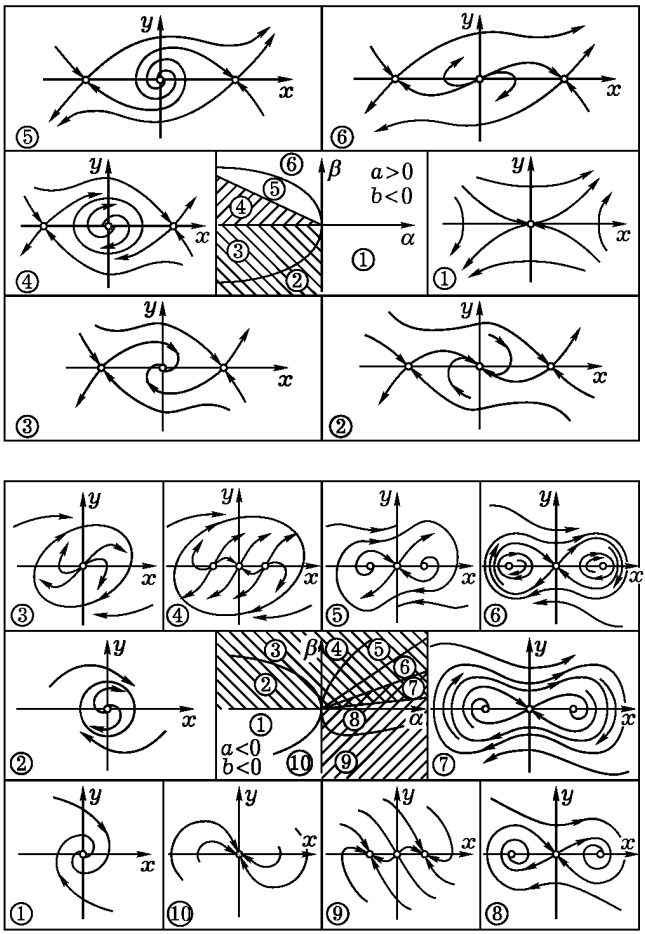


Рис. 151

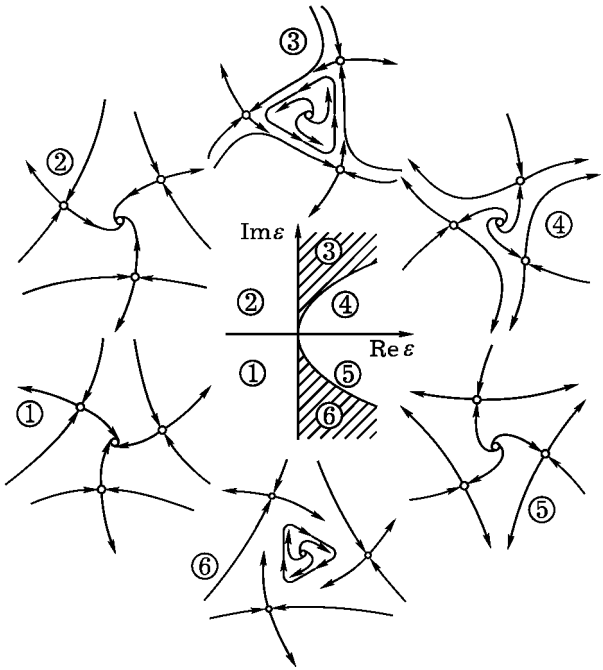


Рис. 152

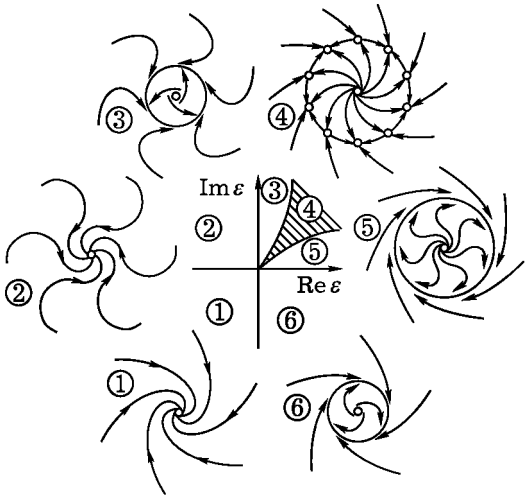


Рис. 153

При $q \geqslant 5$ заменами времени добиваемся $\operatorname{Re} A < 0$; бифуркационная диаграмма и перестройки изображены на рис. 153. Заметим, что зона существования неподвижных точек подходит к мнимой оси ε узким языком, края которого имеют общую касательную:

$$\operatorname{Im}\varepsilon \approx f(\operatorname{Re}\varepsilon) \pm c|\operatorname{Re}\varepsilon|^{(q-2)/2}, \quad q \geqslant 5.$$

Доказательства теоремы и приведенных выше утверждений в случае $q \geqslant 5$ просты, в случае $q = 1$ содержатся в цитированных в § 33 работах Богданова, в случае $q = 4$ неизвестны, а в случаях $q = 2, 3$ намечены ниже. Некоторые варианты перестроек для $q = 4$ изображены ниже (на рис. 157, 158, 160). См. также с. 375, 1), 2), 3), 4).

Ж. Случай симметрии порядка 3

1°. Пусть $A = 0$, в этом случае система получается из некоторой гамильтоновой поворотом поля. А именно, рассмотрим равносторонний треугольник, образованный особыми точками (седлами). Стороны этого треугольника определяют 3 линейные неоднородные функции. Произведение этих трех функций и есть нужная функция Гамильтона.

Знак производной этой функции в силу нашей системы $\dot{z} = \varepsilon z + B\bar{z}^2$ определяется знаком вещественной части параметра ε. Это позволяет использовать указанную функцию в качестве функции Ляпунова. Таким образом, при $A = 0$ главная деформация исследуется без труда.

2°. В общем случае заменами $t = \dfrac{T}{|\varepsilon|}$, $z = Z|\varepsilon|$ приводим систему к виду

$$\frac{dZ}{dT} = EZ + \bar{Z}^2 + |\varepsilon| AZ|Z|^2, \quad E = \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}.$$

В области, в которой $|Z|$ мал по сравнению с $1/\varepsilon$, третье слагаемое можно рассматривать как малое возмущение. В области, где аргумент E не близок к $\pm\pi/2$, это возмущение не меняет картину, полученную в 1°. Если же вещественная часть E мала по сравнению с комплексной, то систему можно рассматривать как маловозмущенную систему Гамильтона $\dfrac{dZ}{dT} = \pm iZ + \bar{Z}^2$.

Невозмущенная функция Гамильтона H описана в 1°.

3°. Вычислим скорость изменения H вдоль решений системы. Интегрируя по линии уровня $H = h$, получаем условие рождения цикла на этой линии в виде $\oint \mu r^2 + \lambda r^4 \, d\varphi = 0$, где $\mu = -\sigma/\tau$, $\lambda = a\tau$, $\varepsilon = \sigma + i\tau$, $A = -a + ib$; r и φ — полярные координаты на плоскости.

Обозначим через ρ радиус инерции области, ограниченной эллиптической кривой $H = h$. Тогда условие рождения цикла именно из линии $H = h$ при прохождении $|\varepsilon|$ через нуль можно записать в виде $\sigma = \rho^2\tau^2 a$.

Наибольшее возможное значение ρ соответствует треугольнику, образованному сепаратрисами седел. Функция $\rho(h)$ монотонна (ср. п. И).

4°. Дальнейшее обоснование версальности главного семейства и вида бифуркационных диаграмм и фазовых портретов проводится как в случае $q=1$.

3. Случай симметрии порядка 2

1°. Растяжениями x и заменами времени, а также параметров, семейство можно привести к виду

$$\ddot{x} = \alpha x + 2\beta y + ax^3 + bx^2 y, \quad a = \pm 1, \quad b = -2.$$

Это семейство с параметрами (α, β) мы и будем исследовать.

2°. Если $|\beta| \leqslant \sqrt{\alpha}$, то делаем замену $x = \sqrt{\frac{|\alpha|}{|a|}}x'$, $t = \frac{t'}{\sqrt{|\alpha|}}$, приводящую $|\alpha|$ и $|a|$ к 1. Получаем почти гамильтонову систему. Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{y^2}{2} - \operatorname{sgn}\alpha\frac{x^2}{2} - \operatorname{sgn} a\frac{x^4}{4}.$$

Диссипативные члены имеют вид

$$2\beta' y + b' x^2 y, \quad \beta' = \frac{\beta}{\sqrt{|\alpha|}}, \quad b' = \frac{\sqrt{|\alpha|}b}{|a|}.$$

3°. Интегрируя скорость изменения H вдоль линии уровня $H=h$, получаем условие рождения цикла из этой именно линии при прохождении α и $\beta = u\alpha$ через нуль: $u = r^2$, где

$$r^2 = \frac{\iint x^2\,dx\,dy}{\iint dx\,dy}$$

— квадрат радиуса инерции относительно оси y области, ограниченной линией $H=h$.

4°. Если $|\alpha| \ll |\beta|$, то делаем замену $x = \lambda x'$, $t = \kappa t'$, приводящую $|a|$ к 1 и $|b|$ к $|\beta|$:

$$\lambda = \sqrt{\left|\frac{\beta}{b}\right|}, \quad \kappa = \sqrt{\left|\frac{b}{\beta}\right|}.$$

Получаем $\alpha' = \left|\frac{b}{\beta}\right|\alpha$, $b' = \sqrt{\left|\frac{\beta}{b}\right|}b$, $\beta' = \sqrt{\left|\frac{b}{\beta}\right|}\beta$, $a' = a$;

$$\ddot{x} = ax^3 + \beta' 2y(1 \pm x^2) + \alpha' x.$$

Здесь оба параметра $\beta' \sim \sqrt{|\beta|}$ и $\alpha' \sim \frac{\alpha}{\beta}$ малы. При $\beta' = 0$ получаем систему Гамильтона,

$$H = \frac{y^2}{2} - \frac{\alpha' x^2}{2} - \frac{ax^4}{4}.$$

Дальнейшее исследование проводится обычным образом.

И. Нули эллиптических интегралов

Выше показано, что исследование поведения циклов в наших семействах сводится к решению специальных случаев следующей «ослабленной 16-й проблемы Гильберта»:

Пусть H — вещественный многочлен степени n, P — вещественный многочлен степени m от переменных (x, y). Сколько вещественных нулей может иметь функция

$$I(h) = \int\int_{H \ll h} P\,dx\,dy?$$

Для исследования симметрий порядка 2 нужен случай

$$P = \mu + \lambda x^2, \quad H = \frac{y^2}{2} - \frac{\alpha x^2}{2} - \frac{a x^4}{4}.$$

При $P = \mu + \lambda x^2$ вопрос сводится к исследованию монотонности функции $r(h)$, где r — радиус инерции относительно оси y области, ограниченной циклом.

Лемма. *Функция r на интервалах между критическими значениями H ведет себя следующим образом*:

Значения α и a	$-1,\ +1$	$+1,\ -1$	$+1,\ -1$	$-1,\ -1$
Интервал h	$0,\ 1/4$	$-1/4,\ 0$	$0,\ +\infty$	$0,\ +\infty$
Поведение r	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow\ \uparrow$	$\uparrow$

(*в третьем случае r сперва убывает, а потом растет*).

Аналогичная (но более слабая) лемма об эллиптических интегралах использовалась уже в работах Р. И. Богданова. Доказательство Р. И. Богданова связано с длинными вычислениями. Ю. С. Ильяшенко нашел доказательства как приведенной здесь леммы, так и леммы Богданова, основанные не на вычислениях, а на комплексных топологических соображениях (монодромия и формула Пикара — Лефшеца). (См. *Ильяшенко Ю. С.* О нулях специальных абелевых интегралов в вещественной области // Функциональный анализ и его приложения. 1977. Т. 11, № 4. С. 78—79).

К. Случай резонанса порядка 4

Исходное уравнение: $\dot z = \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar z^3$.

Предположим, что $B \neq 0$. Тогда растяжениями и поворотами z и растяжением времени приводим уравнение к виду

$$\dot z = \varepsilon z + Az|z|^2 + \bar z^3.$$

Заменой знака времени и заменой z на $\bar z$ можно также добиться того, что $\operatorname{Re} A \leqslant 0$, $\operatorname{Im} A \leqslant 0$.

Исследуем сначала особые точки, отличные от нуля.

1°. *Бифуркации особых точек*. Для исследования бифуркаций особых точек при изменении ε полезно следующее вспомогательное построение. Пусть $z = re^{i\varphi}$ — особая точка. Тогда

$$-\frac{\varepsilon}{r^2} = A + N, \quad \text{где } N = e^{-4i\varphi}.$$

Поэтому рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в A (рис. 154). Значение ε, при котором точка z особая, лежит на луче, противоположном лучу, соединяющему нуль с точкой $A+N$ нашей окружности. При этом чем ближе точка окружности к нулю, тем больше модуль ε.

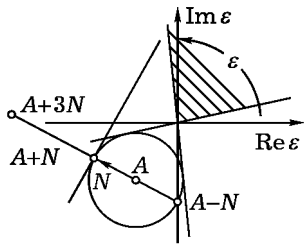


Рис. 154

Из сказанного видно, что резко различаются случаи, когда $|A|$ меньше и больше единицы. Если $|A| < 1$, то нуль лежит внутри окружности. В этом случае для любого ε (кроме нуля) уравнение имеет 4 особых точки в вершинах квадрата. Когда ε обходит вокруг нуля, поворачиваясь на 360°, квадрат из особых точек поворачивается на 90° в обратную сторону.

Если же $|A| > 1$, то на плоскости переменной ε имеется угол, ограниченный продолжениями касательных к нашей окружности. Для ε внутри этого угла особых точек 8, а вне — нуль. Когда ε поворачивается от одной стороны угла до другой, рождаются четыре особых точки в вершинах квадрата: этот квадрат сразу же делится на 2. Затем близкие особые точки начинают расходиться. Когда ε подходит к другой стороне угла, каждая особая точка первого квадрата умирает, сталкиваясь с точкой второго квадрата, первоначально отстоявшей от нее на 90° (так что один квадрат особых точек поворачивается на 90° относительно другого).

2°. *Типы особых точек линейного уравнения*. Мы начнем с леммы, позволяющей легко исследовать типы особых точек векторного поля на плоскости, записанного в комплексной форме

$$\dot{\xi} = P\xi + Q\bar{\xi}.$$

Лемма. *Тип особой точки* 0 *не зависит от аргумента* Q. *Эта точка — седло при* $|P| < |Q|$, *фокус при* $|\operatorname{Im} P| > |Q|$ *и узел при* $|\operatorname{Im} P| < |Q| < |P|$; *фокус устойчив при* $\operatorname{Re} P < 0$ *и неустойчив при* $\operatorname{Re} P > 0$ (рис. 155).

Доказательство. При умножении ξ на комплексное число λ коэффициент P не изменится, а коэффициент Q умножится на $\bar{\lambda}/\lambda$. Выбором λ можно сделать аргумент Q любым; этим доказано первое утверждение леммы. Для доказательства второго утверждения рассмотрим случай $Q = 1$. Пусть $P = \alpha + i\beta$. Запишем матрицу уравнения в базисе $(1, i)$. Эта матрица

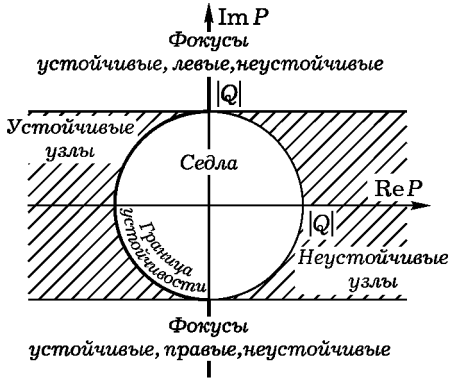


Рис. 155

имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} \alpha+1 & -\beta \\ \beta & \alpha-1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} M = 2\alpha, \quad \det M = \alpha^2+\beta^2-1.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{1-\beta^2}.$$

Условие их вещественности $|\beta|<1$. Корни имеют разные знаки при $\alpha^2+\beta^2>1$. Лемма доказана при $Q=1$. Условия седла, узла и фокуса для любого $|Q|$ следуют теперь из соображений подобия: при заменах времени P и Q умножаются на одно и то же вещественное число. □

Рис. 155, ясно показывающий взаимное расположение узлов, фокусов и седел в функциональном пространстве, полезно иметь в виду при всех исследованиях бифуркаций особых точек на плоскости.

3°. *Исследование седел*. Вернемся к исходному нелинейному уравнению. Пусть $z_0 = re^{i\varphi}$ — особая точка. Линеаризуем уравнение в этой точке. Пусть $z = z_0 + \xi$. Тогда, сохраняя в правой части члены первой степени по ξ, $\overline{\xi}$ получаем

$$\dot{\xi} = P\xi + Q\overline{\xi}, \quad P = r^2(A-N), \quad |Q| = r^2(A+3N).$$

Лемма. *Если $|A|<1$, то все особые точки — седла. Если $|A|>1$, то при каждом ε особая точка с меньшим модулем — седло, а с большим — не седло.*

Доказательство. Условие седла имеет по лемме 2° вид $|A-N|<|A+3N|$. Рассмотрим точки $A-N$ и $A+3N$ (рис. 154). Эти точки симметричны относительно $A+N$, причем соединяющая их прямая проходит через A. Какая из этих точек ближе к нулю, определяется тем, по какую сторону от касательной к нашей окружности, проведенной через точку $A+N$, лежит точка нуль.

Если $|A|<1$, то нуль всегда лежит с одной стороны от касательной (с той же, где $A-N$). Если же $|A|>1$, то ответ зависит от того, на какой из двух дуг, ограниченных касательными к окружности из нуля, лежит $A+N$. Дальняя от нуля дуга отвечает седлам и ближним особым точкам (см. 1°). □

4°. *Устойчивость особых точек*. Особые точки, соответствующие обращенной к нулю части нашей окружности, могут быть узлами и фокусами. Часть дуги, непосредственно примыкающая к касательной из нуля, соответствует узлу, но при движении по дуге узел может стать фокусом, а фокус может менять устойчивость. Выясним, при каком условии происходит эта смена устойчивости фокуса.

Из леммы п. 2° и формулы п. 3° следует, что смена устойчивости происходит, когда точка $A-N$ (диаметрально противоположная точке $A+N$ нашей окружности) пересекает мнимую ось, в то время как точка $A+N$ лежит на ближней к нулю дуге. Граница, отделяющая точки A, для которых такое явление происходит, определяется условием: диаметр, проведенный через точку пересечения нашей окружности с мнимой осью, перпендикулярен касательной из нуля. Уравнение границы имеет, как легко сосчитать, вид

$$|\operatorname{Im} A| = \frac{1+\operatorname{Re}^2 A}{\sqrt{1-\operatorname{Re}^2 A}}.$$

Соответствующая линия на плоскости переменной A касается окружности $|A|=1$ в точках $A=\pm i$ и имеет асимптотами прямые $|\operatorname{Re} A|=1$ (рис. 156).

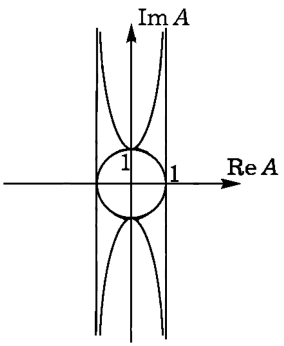


Рис. 156

5°. *Поведение на бесконечности*. При больших z слагаемым εz можно «пренебречь». Полагая $w=z^2$ и заменяя время, получаем линейное уравнение

$$\dot{w} = 2Aw + 2\bar{w}.$$

Для исследования этого уравнения остается применить лемму 2°. Таким образом, при $|A|<1$ особая точка на плоскости w седло, а при $|A|>1$ все траектории из бесконечности притягиваются в конечную область, если $\operatorname{Re} A<0$.

6°. *Бифуркации фазового портрета*. Если $|A|<1$, то картина (рис. 157), по-видимому, такая же, как для резонансов третьего порядка (см. выше п. Ж). Если $|\operatorname{Re} A|>1$, то, по-видимому, происходит то же, что для резонансов порядка 5 и выше (рис. 158, 153); впрочем, особые точки могут в этом случае рождаться и не на цикле. Ср. с. 373, задачи 1), 2), 3).

Наибольшие трудности представляет случай $|\operatorname{Re} A|<1$, $|A|>1$.

7°. *Новые нормировки и обозначения*. Для исследования случая $|\operatorname{Re} A|<1$ полезно рассмотреть асимптотику при $|\operatorname{Im} A|\to\infty$. Вместо того, чтобы уст-

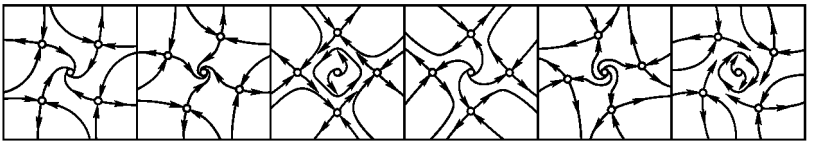


Рис. 157

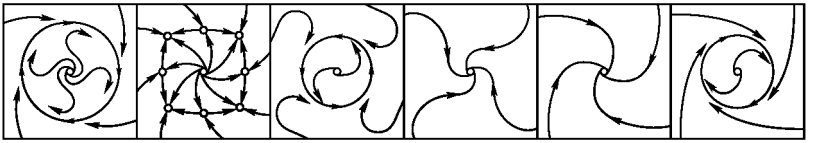


Рис. 158

ремлять A к бесконечности, можно в исходном уравнении устремлять B к нулю. Чтобы исследовать этот случай, мы введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = \sigma + i\tau, \quad A = -i\alpha - \gamma, \quad B = \beta,$$

и будем считать малыми параметрами одного порядка величины β, $\sigma = u\beta$, $\gamma = v\beta$ $(\beta \to 0,\ u \sim v \sim 1)$.

Нормирующие растяжение координат и времени множители выберем так, чтобы $\alpha = 1$, $\tau = 1$.

Введем симплектические полярные координаты $\rho = \dfrac{|z|^2}{2}$, $\varphi = \arg z$.

Исходное уравнение принимает вид системы

$$\begin{cases} \dot\rho = 2\rho(\sigma - 2\gamma\rho + 2\beta\rho\cos 4\varphi), \\ \dot\varphi = \tau - 2\alpha\rho - 2\beta\rho\sin 4\varphi. \end{cases}$$

Введем еще гамильтониан $H = \tau\rho - \alpha\rho^2 - \beta\rho^2\sin 4\varphi$ и потенциал $\Pi = \sigma\rho^2 - \dfrac{4\gamma\rho^4}{3}$. Тогда

$$\dot\rho = -H_\varphi + \Pi_\rho, \quad \dot\varphi = H_\rho.$$

В интересующем нас случае $\tau = \alpha = 1$, $\sigma = u\beta$, $\gamma = v\beta$ имеем

$$H = H_0 + \beta H_1, \quad \Pi = \beta\Pi_1, \quad H_0 = \rho - \rho^2.$$

При $\beta = 0$ получаем невозмущенное движение (вращение с частотой H_ρ). В области, где $H_\rho \neq 0$ (т. е. когда ρ не близко к $1/2$) основной возмущающий эффект дает диссипативный член $\beta\Pi_1$, а при $\rho \approx 1/2$ нужно учитывать и βH_1.

8°. *Лемма об эффекте малой диссипации*. Рассмотрим на фазовой плоскости уравнение $\dot x = v + \varepsilon w$, где v — гамильтоново поле с функцией Гамиль-

тона H, а w — потенциальное поле, $w = \nabla\Pi$ (имеется в виду метрика, заданная симплектическими координатами p, q).

Лемма. *Производная по малому параметру ε от приращения H за оборот вокруг замкнутой фазовой кривой $H = h$ равна при $\varepsilon = 0$*

$$\frac{d}{d\varepsilon}\delta H = \iint\limits_{G(h)} \Delta\Pi\, dp\, dq,$$

где $G(h)$ — область, ограниченная кривой.

Доказательство.

$$\delta H \approx \oint \dot{H}\, dt = \oint H_p(-H_q + \varepsilon\Pi_p) + H_q(H_p + \varepsilon\Pi_q)\, dt =$$

$$= \varepsilon \oint \Pi_p\, dq - \Pi_q\, dp = \varepsilon \iint \Delta\Pi\, dp\, dq. \quad \square$$

Применяя лемму к нашему уравнению, находим

$$\delta H_0 = 2\rho(\sigma - 2\gamma\rho) = 2\beta\rho(u - 2v\rho).$$

Таким образом, в первом приближении цикл дается формулой

$$\rho = \frac{u}{2v} = \frac{\sigma}{2\gamma}.$$

Этот метод позволяет исследовать нашу систему вне кольца, в котором ρ близко к $1/2$. Следовательно, случай σ, близкого к γ, нужно рассмотреть отдельно.

9°. *Исследование случая $\rho \approx \frac{1}{2}$.* Делаем замену $\rho = \frac{1}{2} + \sqrt{\beta}P$, $\frac{t}{\sqrt{\beta}} = T$. *После* замены полагаем $\beta = 0$. Получаем в качестве приближенного уравнения систему Гамильтона

$$\frac{dP}{dT} = w + \cos 4\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dT} = -2P$$

с функцией Гамильтона

$$H_{00} = P^2 + w\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}$$

(маятник с крутящим моментом). Здесь $w = u - v = \dfrac{\sigma - \gamma}{\beta}$.

Потенциальная яма существует при $|w| < 1$.

С точки зрения обозначений 7°, мы перебросили из потенциальной части в гамильтонову поле $(\sigma - \gamma)\dfrac{\partial}{\partial\rho}$. Таким образом, новые гамильтониан и потенциал имеют вид

$$H = \rho - \rho^2 - \beta\rho^2 \sin 4\varphi - \beta w\varphi,$$

$$\Pi = \sigma\rho^2 - \frac{4\gamma\rho^3}{3} - (\sigma - \gamma)\rho.$$

Применяя лемму 8°, мы находим

$$\delta H = \iint (2\sigma - 8\gamma\rho)\, dp\, d\varphi \text{ внутри ямы} = 2S(\sigma - 4\gamma\rho_0),$$

где S — площадь внутри ямы на плоскости (ρ, φ), а ρ_0 — координата центра тяжести ямы.

Условие рождения цикла $\sigma = 4\gamma\rho_0$. Следовательно, нужно вычислить ρ_0. Но $\rho_0 = \frac{1}{2} + \sqrt{\beta}\rho_1 + \ldots$ Значит, условие рождения цикла имеет вид $\sigma = 2\gamma + 4\gamma\sqrt{\beta}\rho_1 + \ldots$, $w = \frac{\gamma}{\beta} + 4\gamma\rho_1 + \ldots$

Вычислим величину ρ_1. Точное уравнение замкнутой фазовой кривой $H = \text{const}$ имеет в координатах P, φ вид

$$P^2 + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\beta}P\right)^2 \sin 4\varphi + w\varphi = h.$$

Каждому значению φ в яме отвечают два значения P, причем

$$P_1 + P_2 = -\frac{\sqrt{\beta}\sin 4\varphi}{1 - \beta\sin 4\varphi}.$$

Из этой формулы следует, что поправочный член, который мы выше обозначили через ρ_1, равен

$$\rho_1 = -\frac{1}{2}\overline{\sin 4\varphi}$$

(черта означает «усреднение» по невозмущенной фазовой кривой при $\beta = 0$).

Рассматривая расположение ямы по отношению к максимуму и минимуму синуса 4φ и его изменение при изменении величины w (рис. 159), мы получаем информацию о поведении ρ_1, на которой и основаны картины перестроек (рис. 160).

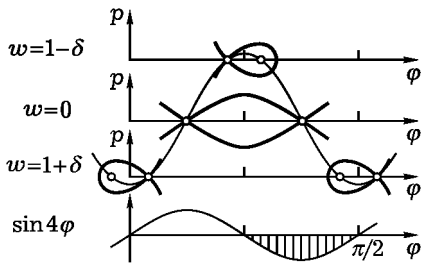


Рис. 159

Изображенная на рис. 160 система перестроек реализуется при больших по сравнению с $|B|$ величинах $|\operatorname{Im} A|$ при $0 < |\operatorname{Re} A| < |B|$.

Разумеется, изложенные выше соображения не заменяют собой доказательств и являются лишь первыми шагами исследования бифуркаций в главном семействе 4-симметричных уравнений.

Результаты о случаях симметрии порядка $q \neq 4$, по-видимому, известны специалистам довольно давно; в частности, Ф. Такенс анонсировал их

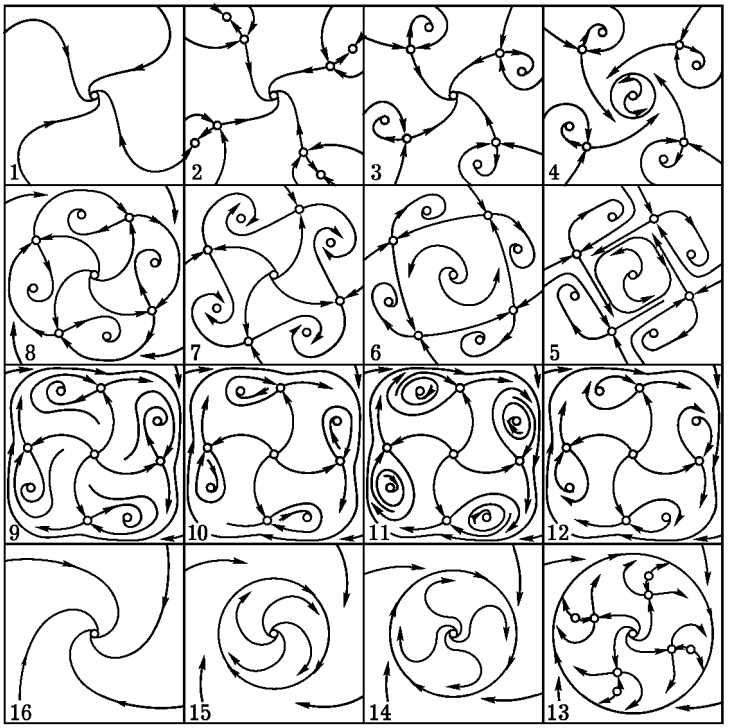


Рис. 160

в неопубликованном препринте 1974 г. Наше изложение основано на статье автора в «Функциональном анализе и его приложениях» (1977. № 2); подробные доказательства проведены Э. Хорозовым.

Л. Функция последования

Применения наших построений к исследованию потери устойчивости цикла основаны на следующем.

Лемма 4. *Рассмотрим отображение* $f\colon (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, *имеющее неподвижную точку* 0 *с собственными числами* $e^{\pm 2\pi i p/q}$ (*и с жордановой клеткой порядка* 2, *если* $q = 1$ *или* $q = 2$). *Тогда итерацию* f^q *можно при любом* N *представить в достаточно малой окрестности точки* 0 *в виде суммы* $f^q = g + h$, *где* $h(z) = O(|z|^N)$, *а* g — *преобразование фазового потока векторного поля, инвариантного относительно конечной циклической группы диффеоморфизмов* γ, *порядка* q.

Заметим, что, в частности, g коммутирует с поворотом на угол $2\pi/q$. Само отображение f^q, вообще говоря, не коммутирует с действием никакой конечной группы и не включается в поток. Лемма 1 показывает, однако, что на уровне формальных рядов f^q включается в поток и коммутирует с конечной группой.

Доказательство леммы проводится по обычной схеме построения нормальных форм Пуанкаре — Дюлака — Биркгофа (см. гл. 5). □

Лемма 5. *Рассмотрим деформацию f_λ отображения $f_0 = f$, удовлетворяющего условиям леммы* 1. *Тогда итерацию f_λ^q можно при любом N представить в достаточно малой окрестности точки* 0 *в виде суммы $f_\lambda^q = g_\lambda + h_\lambda$, где $h_\lambda(z) = O(|z|^N)$, а g_λ — преобразование фазового потока векторного поля v_λ, инвариантного относительно конечной циклической группы диффеоморфизмов, γ_λ. Здесь f_λ, g_λ, h_λ, v_λ и γ_λ гладко зависят от параметра λ, меняющегося в окрестности нуля.*

Доказательство основано на том, что приведение к нормальной форме членов степени не выше N с оставлением резонансных членов осуществляется гладко зависящим от параметров диффеоморфизмом. □

Соединяя лемму 2 с описанием бифуркаций фазовых потоков из предыдущих параграфов, мы получаем информацию о потере устойчивости неподвижной точки 0 отображения f (или периодического движения, для которого f есть функция последования).

Замечание. Можно также непосредственно приводить к нормальной форме семейство дифференциальных уравнений в окрестности (p, q)-резонансного периодического решения в пространстве q-листного накрытия. Применение стандартного метода Пуанкаре — Дюлака — Биркгофа в этой ситуации приведет семейство векторных полей, 2π-периодическое по времени, к сумме q-симметричного поля, не зависящего от времени, и остатка $O(|z|^N)$ периода $2\pi q$.

М. Обсуждение

1°. Для перевода полученных результатов на язык бифуркаций периодических решений нужно найденные неподвижные точки на плоскости заменить замкнутыми траекториями в пространстве, сепаратрисы точек — инвариантными притягивающими и отталкивающими поверхностями этих замкнутых траекторий, предельные циклы на плоскости — инвариантными торами. Существенная раз-

ница будет лишь в перестройках сепаратрис: в то время как на плоскости сепаратрисы при бифуркациях мгновенно проходят друг через друга, в пространстве этот процесс растягивается с образованием гомоклинической (или гетероклинической*) картины (рис. 103).

Инвариантные торы в пространстве разрушаются раньше, чем на плоскости цикл доходит до петли сепаратрис — однако все эти чисто трехмерные эффекты слабы (происходят от членов сколь угодно большой степени в нормальных формах) по сравнению с рассмотренными выше двумерными.

2°. Рассмотрение потери устойчивости как двупараметрического, а не однопараметрического явления позволяет легко понять некоторые обстоятельства, кажущиеся иначе удивительными.

Рассмотрим двупараметрическое семейство, в котором в качестве параметра взят сам мультипликатор. Нарисуем на плоскости значений параметра области существования периодических решений, замыкающихся при q оборотах вдоль основного решения, сделав p оборотов поперек него. Эта область выходит на единичную окружность в точке $e^{2\pi ip/q}$ узким (при $q > 4$) языком (ширина его на расстоянии σ от окружности порядка $\sigma^{(q-2)/2}$, см. п. Е). Поэтому кривая общего положения на плоскости мультипликатора пересекает вблизи единичной окружности бесконечное число языков (рис. 161).

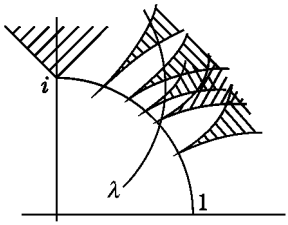


Рис. 161

Следовательно, в общем однопараметрическом семействе, в котором цикл теряет устойчивость без сильного резонанса, вблизи момента потери устойчивости рождаются и умирают в бесконечном количестве длиннопериодические циклы.

Доказательство этого факта, не зависящего от того, имеется ли слабый резонанс в момент потери устойчивости, было дано В. С. Козякиным (*Козякин В. С.* Субфуркация периодических колебаний // ДАН СССР. 1977. Т. 232, №1. С. 25—27).

3°. Рассматривая кривые общего положения на бифуркационных диаграммах сильных резонансов, приведенных в п. Е, можно описывать последовательности перестроек, которые являются универ-

* Гомоклинической (гетероклинической) картиной называется сеть, образованная на секущей плоскости пересекающимися следами притягивающегося и отталкивающегося инвариантных многообразий одной (двух) замкнутых траекторий.

сальными, но кажутся с однопараметрической точки зрения нелокальными.

Например, в случае $q = 2$ одной из возможностей является такая последовательность событий: устойчивый цикл мягко теряет устойчивость с образованием тора, на котором быстро образуется перетяжка, так что форма меридиана тора приближается к восьмерке; при подходе к центру восьмерки (где находится неустойчивый цикл) притягивающее множество, оставаясь близким к тору с почти стянувшимся в восьмерку меридианом, разрушается вблизи гомоклинической сепаратрисы (Ю. И. Неймарк).

В этом случае фазовая траектория совершает витки вокруг то одной, то другой половины разрушенного тора, перескакивая с одной стороны на другую случайным на вид образом.

Это описание похоже на явления, наблюдавшиеся в численном эксперименте Герценштейна и Шмидта (*Герценштейн С. Я.*, *Шмидт В. М.* Нелинейное развитие и взаимодействие возмущений конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя // ДАН СССР. 1975. Т. 225, №1. С. 59—62).

§ 36. Перестройки топологии при резонансах

Резонансы между собственными числами линейной части векторного поля в стационарной точке мешают выбрать координаты так, чтобы сделать поле линейным. Даже если резонансов нет, но собственные числа близки к резонансным, ряды Пуанкаре могут расходиться и система тогда не может быть превращена в линейную аналитической заменой координат.

В то же время топологический тип фазового портрета в вещественной окрестности стационарной точки при резонансах, вообще говоря, не меняется. Например, если вещественные части всех собственных чисел отрицательны, то стационарная точка притягивающая, и, независимо от резонансов, система топологически эквивалентна стандартной линейной системе.

Оказывается, перестройка топологии при резонансе происходит, но, вообще говоря, в комплексной области.

Система общего положения нерезонансная. Резонансы встречаются неустранимо в однопараметрических семействах. Поэтому при исследовании влияния резонансов на перестройки топологии мы должны рассматривать однопараметрические семейства векторных

полей. В соответствии со сказанным выше, мы будем считать как фазовые переменные и время, так и параметр комплексными числами.

А. Резонансы в области Пуанкаре

Рассмотрим комплексные фазовые кривые в окрестности особой точки O. Эти кривые образуют слоение с вещественно двумерными слоями, с особенностью в нуле. Чтобы разобраться в строении этой особенности, пересечем слоение сферой малого радиуса с центром в начале координат.

Предположим, что линейная часть нашей системы в координатах $(z_1, \ldots, z_n)$ диагональна: $\dot{z}_j = \lambda_j z_j + \ldots$, $j = 1, \ldots, n$.

Теорема. *Если набор собственных чисел $\{\lambda_j\}$ принадлежит области Пуанкаре, то каждая сфера $|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = r^2$ достаточно малого радиуса пересекается со слоением трансверсально.*

Доказательство. Рассмотрим вначале линейную систему. Имеем

$$dr^2 = \sum \bar{z}_j\, dz_j + z_j\, d\bar{z}_j = A\, dt + \bar{A}\, \overline{dt}, \quad A = \sum |z_j|^2 \lambda_j.$$

Условие трансверсальности со сферой состоит в том, что 1-форма dr^2 не должна обращаться в 0 на касательной плоскости к слою.

Но форма $A\, dt + \bar{A}\, \overline{dt}$ нулевая только при $A = 0$. Соотношение $A = 0$ не выполняется в случае Пуанкаре (и только в случае Пуанкаре) ни при каком $z \neq 0$. Итак, в линейном случае теорема доказана: слои пересекают сферу под ненулевым углом $\alpha(z)$.

Рассмотрим минимум α_0 угла $\alpha(z)$ на сфере $|z| = r$. Величина α_0 не зависит от r (так как $\alpha(cz) = \alpha(z)$). Итак, $\alpha(z) \geqslant \alpha_0 > 0$ при всех $z \neq 0$.

Обратимся теперь к нелинейной системе. Угол между полями направлений нелинейной системы и ее линейной части мал вместе с $|z|$. Поэтому в достаточно малой окрестности нуля он меньше α_0 и фазовые кривые нелинейной системы пересекают сферу трансверсально. □

Следствие. *Пересечения комплексных фазовых кривых со сферой достаточно малого радиуса образуют одномерное слоение без особых точек на этой сфере. Слоения, полученные на всех сферах достаточно малых радиусов, диффеоморфны. Дифференцируемый тип слоения на сфере не меняется при деформациях сферы, пока она остается трансверсальной комплексным фазовым кривым.*

Таким образом, изучаемое двумерное слоение в окрестности особой точки гомеоморфно конусу над одномерным слоением на сфере. Это слоение на сфере является разбиением на фазовые кривые векторного поля на сфере (так как сфера и комплексное слоение ориентируемы).

Замечание. В нерезонансном случае, согласно теореме Пуанкаре, система в надлежаще выбранной системе координат в достаточно малой окрестности особой точки линейна. Отсюда вытекает, что дифференцируемый тип слоения на сфере в нерезонансном случае такой же, как у линейной системы.

Мы заключаем, что дифференцируемый тип слоения на сфере остается таким же, как у линейной части системы, не только в той окрестности начала координат, где сходятся ряды Пуанкаре, но и далеко за ее пределами.

Действительно, при приближении к резонансу область сходимости рядов Пуанкаре стягивается до нуля, тогда как радиус области трансверсальности остается ограниченным снизу. Следовательно, мы можем следить за прохождением резонанса в комплексной системе по изменению одномерного слоения на сфере фиксированного (не зависящего от параметра) малого радиуса.

Б. Резонанс $\lambda_1 = 2\lambda_2$

В качестве примера рассмотрим изменение топологии слоения на S^3 при прохождении резонанса $\lambda_1 = 2\lambda_2$ в системе

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + \ldots, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + \ldots$$

Мы находимся в области Пуанкаре, если отношение $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ не является вещественным отрицательным числом. Рассмотрим сперва слоение на S^3, отвечающее линейной части системы.

Сепаратрисы $z_1 = 0$, $z_2 = 0$ пересекаются со сферой по большим кругам, являющимся циклами системы на S^3. Их коэффициент зацепления равен 1.

Если λ — не вещественное число (случай «фокуса»), то все остальные кривые слоения на сфере сматываются с одного цикла и наматываются на другой. Изучим функции последования циклов.

Заметим, что эти функции можно считать голоморфными. Действительно, они вещественно дифференцируемо эквивалентны комплексным функциям последования, отображающим голоморфную трансверсаль к сепаратрисе в себя. Следовательно, они становятся голоморфными при подходящем выборе комплексной структуры на вещественно двумерной трансверсали к циклу в S^3. Из этих соображений следует также, что мультипликаторы наших циклов равны $e^{\pm 2\pi i\lambda}$, $e^{\pm 2\pi i\lambda^{-1}}$ соответственно.

Слоения на S^3, соответствующие всем фокусам, гомеоморфны друг другу, но не диффеоморфны: $\lambda^2+\lambda^{-2}$ — инвариант диффеоморфизма.

Если λ вещественное положительное (случай узла), то мы также находимся в области Пуанкаре. В этом случае часть S^3 между двумя зацепленными циклами расслоена на двумерные торы, заполненные обмотками с числом вращения λ, одинаковым на всех торах.

Рассмотрим теперь нелинейную систему. В случае фокуса резонанс невозможен, поэтому слоение на сфере в нелинейном случае диффеоморфно описанному выше слоению, построенному по линейной системе. То же верно для нерезонансного узла, т. е. для всех $\lambda>0$, исключая случаи, когда λ или λ^{-1} — целое число.

Рассмотрим, например, резонанс $\lambda=2$. В этом случае нормальная форма Пуанкаре имеет вид

$$\dot z_1=\lambda_1 z_1+cz_2^2,\quad \dot z_2=\lambda_2 z_2.$$

Эта система имеет при $c\neq 0$ лишь одну сепаратрису, а слоение на S^3 имеет лишь один цикл. Заменим λ близким к 2 невещественным значением. Полученная система на S^3, с одной стороны, близка к резонансной системе с одним циклом, а с другой стороны она диффеоморфна изученной ранее системе, построенной по линейному фокусу и, следовательно, имеет два цикла с коэффициентом зацепления единица. Можно показать, что один их этих циклов, C_1, близок к единственному циклу C резонансной системы. Другой же цикл, C_2, лежит на тонком торе с осевой линией C_1 и замыкается после двух обходов вокруг C_1, сделав один оборот по меридиану (так что коэффициент зацепления C_2 и C_1 равен 1). Итак, перестройка системы на S^3 вблизи резонанса $\lambda=2$ состоит в бифуркации двукратной периодической траектории от периодической траектории с собственными числами $(-1,-1)$.

Замечание. Предыдущее изложение следует заметке автора «Замечания об особенностях конечной коразмерности в комплексных динамических системах» (Функциональный анализ и его приложения. 1969. Т. 3, №1. С. 1—6). Результаты этой заметки были в дальнейшем обобщены Дж. Гукенхеймером, Н. Кейпером, Н. Н. Ладисом, Ю. С. Ильяшенко и др. Наиболее законченный характер имеют результаты о топологическом типе слоения, заданного в окрестности особой точки в комплексном пространстве линейной системой.

Рассмотрим, в частности, случай, когда фазовое пространство трехмерно и треугольник из собственных чисел содержит нуль строго внутри. Оказывается, топологический тип слоения в комплексном пространстве определяется тройкой обратных величин собственных чисел, рассматриваемой как тройка векторов на вещественной плоскости (т. е. рассматриваемой с точностью до вещественных линейных преобразований овеществленной

плоскости одного комплексного переменного). В многомерном случае вещественный тип набора обратных величин собственных чисел взаимно однозначно определяет топологический тип комплексного слоения в окрестности особой точки линейной системы, если нуль принадлежит выпуклой оболочке собственных чисел, а их попарные отношения невещественны (см. *Camacho C., Kuiper N., Palis J.* C. R. Acad. Sci. Paris. 1976. V. 282. P. 959—961; *Ладис Н. Н.* Топологические инварианты комплексных линейных потоков // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, № 12. — С. 2159—2169; *Ильяшенко Ю. С.* Замечания о топологии особых точек аналитических дифференциальных уравнений в комплексной, области и теорема Ладиса // Функциональный анализ и его приложения. 1977. Т. 11, № 2. С. 28—38).

В. Версальные деформации в случае Пуанкаре

Рассмотрим аналитическое (гладкое) векторное поле с особой точкой O. Предположим, что эта особая точка — типа Пуанкаре, т. е. что выпуклая оболочка набора собственных чисел не содержит точку 0.

Теорема. *Росток аналитического* (*соответственно*, *голоморфного*, *гладкого*) *векторного поля в особой точке типа Пуанкаре имеет конечно-параметрическую аналитически* (*соответственно*, *голоморфно*, *гладко*) *версальную деформацию, состоящую из полиномиальных векторных полей.*

Иными словами:

Локальное семейство аналитических (*соответственно*, *голоморфных*, *гладких*) *векторных полей с особой точкой O типа Пуанкаре аналитически* (*соответственно*, *голоморфно*, *гладко*) *эквивалентно в окрестности точки O семейству, составленному из достаточно длинных отрезков рядов Тейлора этих полей в точке O.*

Доказательство. По условию особая точка невырождена и, следовательно, гладко зависит от параметров. Поэтому гладкой и гладко зависящей от параметров заменой переменных можно перенести особую точку в начало координат. Предположим, что собственные числа просты. Тогда собственный базис можно выбрать гладко зависящим от параметров. В полученной системе координат семейство дифференциальных уравнений, отвечающее нашему семейству полей, принимает вид

$$\dot{x}_k = \lambda_k(\varepsilon)x_k + \ldots, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Применяя метод Пуанкаре (гл. 5), мы будем убивать только те члены, которые остаются нерезонансными при $\varepsilon = 0$. Тогда замены гладко зависят от параметра. Поскольку собственные числа принад-

лежат области Пуанкаре, резонансов конечное число, и сходимость всей процедуры доказывается без труда.

Мы получаем систему координат, в которой правые части всех уравнений семейства — многочлены. □

Случай конечно (или бесконечно) дифференцируемых правых частей также исследуется без труда. Подробности см. в статье Н. Н. Брушлинской (*Брушлинская Н. Н.* Теорема конечности для семейств векторных полей в окрестности особой точки типа Пуанкаре // Функциональный анализ и его приложения. 1971. Т. 5, № 3. С. 10—15), где рассмотрен также и случай кратных собственных чисел.

Г. Материализация резонансов

В области Зигеля при приведении к нормальной форме возникают трудности, связанные с малыми знаменателями. В то же время топологическая картина может быть простой. Например, обыкновенное седло устроено топологически одинаково как при рациональном, так и при иррациональном отношении собственных чисел. Такое же явление бывает и в области Пуанкаре: резонансы могут не влиять на топологию фазового портрета.

Естественно возникает вопрос, почему резонанс, не проявляющийся топологически, мешает аналитическому (даже конечногладкому) приведению к нормальной форме. Здесь полезно иметь в виду поведение резонансов в теории возмущений условно-периодических движений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение на n-мерном торе T^n

$$\dot\theta = \omega + \varepsilon\ldots, \quad \theta \mod 2\pi \in T^n, \quad \omega \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \ll 1. \qquad (*)$$

Резонансу $(\omega, k) = 0$ отвечает (по меньшей мере в отсутствие возмущения, т. е. при $\varepsilon = 0$) изменение топологических свойств системы: фазовые кривые заполняют всюду плотно не n-мерный тор, как в нерезонансном случае, а $(n-1)$-мерный. Например, при $n = 2$ при резонансе обычно возникают грубые периодические режимы (устойчивые и неустойчивые предельные циклы на торе). Ясно, что существование таких циклов препятствует приведению уравнений к нормальной форме $\dot\theta = \omega$, обычной для нерезонансного случая.

Близкое соображение лежит в основе данного Пуанкаре доказательства несуществования первых интегралов в задаче трех тел.

Можно предположить, что влияние резонансов на расходимость в локальной задаче, которой мы занимались выше, также имеет ана-

логичную природу, но связано с изменениями топологии слоения, образованного фазовыми кривыми не в вещественной, а в комплексной области. Такое изменение, даже если оно совершенно не сказывается на вещественной части фазового пространства, заведомо препятствует аналитическому приведению и может мешать C^r-гладкому.

Заметим, что система $\dot{x}_k = \lambda_k x_k + \ldots$ заменой $x = e^{i\theta}$ приводится к виду $(*)$ (вещественные ω соответствуют чисто мнимым λ). Обычные методы разыскания предельных циклов для системы $(*)$ приводят к рассмотрению первого интеграла $\rho = e^{i(\theta,k)}$ невозмущенной системы; в обозначениях исходной системы возникает величина $\rho = x^k$. Уравнение первого приближения для инвариантного многообразия, соответствующего резонансу, получается из соотношения

$$\dot{\rho} = \rho[(k,\lambda) + (k,c)\rho + \ldots].$$

Мы находим формально

$$\rho \approx -\frac{(k,\lambda(\varepsilon))}{(k,c(\varepsilon))}.$$

Однако наши ряды, вообще говоря, расходятся, и вывод нуждается в обосновании.

При $n = 2$ наши рассуждения можно подкрепить строгим доказательством существования комплексного предельного цикла, который вблизи резонанса имеет указанную асимптотику (*Пяртли А. С.* Рождение комплексных инвариантных многообразий вблизи особой точки векторного поля, зависящего от параметра // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6, № 4. С. 95—96).

В момент резонанса, когда $(k, \lambda) = 0$, цикл (комплексная неодносвязная фазовая кривая) приближается к комплексным сепаратрисам особой точки. Нестягиваемый путь, который имеется на этом цикле, при резонансе исчезает, сливаясь с положением равновесия. Частным случаем является рождение (или гибель) цикла из положения равновесия при потере устойчивости (см. § 33). В этом случае $k = (1, 1, 0, \ldots)$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, и все явление наблюдаемо в вещественной области (см. рис. 129). В других случаях (даже при том же резонансе, например, в случае седла) топология вещественных фазовых кривых может не изменяться при резонансе.

Различие топологии комплексных фазовых кривых уравнения (или семейства) и его нормальной формы является препятствием к аналитическому приведению к нормальной форме. Более того, если это различие (как это обычно бывает) определяется по струе ко-

нечного порядка, то оно препятствует не только аналитическому приведению к нормальной форме, но и конечно-гладкому. Например, расходимость приводящих рядов в случае, когда отношение собственных чисел хорошо приближается рациональными числами, может объясняться существованием в любой окрестности стационарной точки комплексных предельных циклов, происшедших от близких резонансов высоких порядков: у системы в нормальной форме таких циклов нет, поэтому преобразование к нормальной форме обязано быть расходящимся.

Исследование вопроса о расходимости рядов Пуанкаре далеко от завершенности. Предшествовавшие работе Пяртли доказательства расходимости (Пуанкаре, Зигель, Брюно) основаны на подсчете роста коэффициентов и не выясняют причины расходимости в таком же смысле, в каком подсчет коэффициентов ряда $\operatorname{arctg} z$ доказывает расходимость при $|z|>1$, но не выявляет причины — особенности при $z=\pm i$.

А. С. Пяртли установил следующие результаты.

1°. При прохождении резонанса $k_1\lambda_1+k_2\lambda_2=0$ в $\mathbb{C}^2$ в общем случае происходит ответвление от сепаратрис особой точки инвариантного многообразия, уравнение которого имеет в первом приближении вид $z_1^{k_1}z_2^{k_2}=\varepsilon$, где ε характеризует отклонение от резонанса, а z_1, z_2 — фазовые координаты.

2°. Аналогичный результат для того же резонанса получен в $\mathbb{C}^n$ при ограничительных условиях на остальные собственные числа.

3°. Для «ненормально соизмеримых» λ_1 и λ_2 общим случаем является существование бесконечного числа инвариантных многообразий, соответствующих равным резонансам, в любой окрестности особой точки, что влечет расходимость рядов Пуанкаре.

Работа А. С. Пяртли основана на методе Э. Хопфа. Другие доказательства и обобщения первых двух результатов А. С. Пяртли предложил А. Д. Брюно (*Брюно А. Д.* Нормальная форма дифференциальных уравнений с малым параметром // Математ. заметки. 1974. Т. 16, № 3. С. 407—414; Аналитические инвариантные многообразия // ДАН СССР. 1974. Т. 216, № 2. С. 253—256; Интегральные аналитические множества // ДАН СССР. 1975. Т. 220, № 6. С. 1255—1258).

Д. Резонанс между тремя собственными числами

Следующий по сложности резонанс

$$k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_3=0,$$

где треугольник с вершинами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ содержит 0, также исследовался А. С. Пяртли и А. Д. Брюно. Здесь также доказано ответвление от сепаратрис особой точки инвариантного многообразия при $n=3$. Пусть (z_1, z_2, z_3) — фазовые координаты, а ε — параметр деформации (резонанс соответствует $\varepsilon=0$). Тогда инвариантные многообразия заполняют в пространстве с координатами (z, ε) голоморфную гиперповерхность, уравнение которой имеет в первом приближении вид $z_1^{k_1} z_2^{k_2} z_3^{k_3} = \varepsilon$ в подходящей системе координат.

А. С. Пяртли доказал, что для «ненормально соизмеримых» (λ_1, λ_2, λ_3), образующих треугольник Зигеля, в общем случае в любой окрестности положения равновесия $0 \in \mathbb{C}^3$ имеется бесконечно много инвариантных многообразий описанного вида, соответствующих различным резонансам.

Из дальнейшего будет видно, что наличие в окрестности нерезонансной точки $0 \in \mathbb{C}^3$ достаточно большого куска резонансного инвариантного многообразия препятствует сходимости рядов Пуанкаре — Зигеля в этой окрестности. Поэтому из цитированного результата Пяртли вытекает, что при «ненормально соизмеримых» (λ_1, λ_2, λ_3) общим случаем является расходимость указанных рядов в любой окрестности начала координат.

Е. Случай дискретного времени

Рассмотрим локальный автодиффеоморфизм $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ в окрестности неподвижной точки 0. Обозначим через $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ собственные числа линеаризации A в 0.

Предыдущая теория переносится на этот случай со следующими изменениями.

Резонансы: $\lambda_k = \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_n^{m_n}$ $(m_i \geqslant 0, \sum m_i \geqslant 2)$.

Область Пуанкаре: все $|\lambda_s| > 1$ или все $|\lambda_s| < 1$.

Область Зигеля: существуют $|\lambda_i| \geqslant 1$ и $|\lambda_j| \leqslant 1$.

Замечание. Линейному векторному полю в $\mathbb{C}^n$ соответствует линейное преобразование в $\mathbb{C}^{n-1}$ («функция последования Пуанкаре»). А именно, пусть поле задает дифференциальное уравнение

$$\dot{z}_1 = \alpha_1 z_1, \quad \ldots, \quad \dot{z}_n = \alpha_n z_n,$$

где $\alpha_n \neq 0$. Рассмотрим решения с начальными условиями при $t=0$ на плоскости $z_n = 1$. Значение решения при $t = 2\pi i/\alpha_n$ принадлежит той же плоскости $\mathbb{C}^{n-1}$. Полученное отображение $A\colon \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^{n-1}$ имеет собственные числа $\lambda_s = e^{2\pi i \alpha_s/\alpha_n}$ $(s = 1, \ldots, n-1)$.

Аналогичная конструкция функции последования имеется (при небольших дополнительных предположениях) и в нелинейном случае. Поэтому результаты об инвариантных многообразиях и бифуркациях для отображений влекут соответствующие результаты для векторных полей.

Впрочем, в большинстве случаев отмеченную связь между уравнениями и отображениями лучше использовать как эвристическое средство для угадывания результатов в одной области по имеющимся результатам в другой, доказательства же удобнее проводить независимо в обеих ситуациях.

Ж. Бифуркация инвариантных многообразий диффеоморфизма

Резонанс между тремя собственными числами векторного поля

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$$

соответствует в дискретном случае резонансу вида

$$\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2} = 1,$$

причем в области Зигеля $m_1 > 0$, $m_2 > 0$, $|\lambda_1| \neq 1 \neq |\lambda_2|$. Мы предположим, что λ_1 по модулю больше 1, а λ_2 меньше 1.

Результаты Пяртли и Брюно в этом случае означают существование инвариантных многообразий, заполняющих в пространстве с координатами (ε, z_1, z_2) поверхность, уравнение которой начинается с членов вида $\varepsilon = z_1^{m_1} z_2^{m_2}$. Здесь ε — отклонение от резонанса, а (z_1, z_2) — подходящие (гладко зависящие от ε) фазовые координаты. При фиксированном $\varepsilon \neq 0$ построенное инвариантное многообразие гомеоморфно цилиндру. Коэффициенты зацепления направляющей окружности этого цилиндра с координатными осями в $\mathbb{C}^2$ равны m_1 и m_2.

Мы покажем, что существование достаточно большого куска такого резонансного инвариантного многообразия в окрестности нерезонансной неподвижной точки диффеоморфизма препятствует линеаризации диффеоморфизма в этой окрестности. Следовательно, в случае когда резонансные многообразия имеются в любой окрестности неподвижной точки, линеаризующие ряды всюду расходятся.

Топологически все отображения $\mathbb{C}^2$ с $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$ эквивалентны друг другу. В частности, все они линеаризуются и имеют много инвариантных цилиндров. Однако аналитические инвариантные цилиндры являются, как мы увидим, большой редкостью.

3. Локальные сдвиги

Мы собираемся связать с резонансным инвариантным многообразием отображения $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ эллиптическую кривую, вложенную в голоморфную поверхность. Эта поверхность — многообразие орбит нашего отображения (или многообразие фазовых кривых исходного дифференциального уравнения в $\mathbb{C}^3$). Чтобы точно определить многообразие орбит, введем следующую терминологию.

Рассмотрим цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$. *Стандартным сдвигом* цилиндра называется прибавление 1 ко второй координате. Пусть D_0 — область на цилиндре, содержащая $S^1 \times [0, 1]$. Сужение стандартного сдвига на D_0 задает диффеоморфизм $t\colon D_0 \to D_1 = t(D_0)$. Заметим, что пересечение $D_0 \cap D_1$ содержит окружность $S^1 \times 1$. Обозначим через D объединение $D_0 \cup D_1$.

Пусть M — двумерное многообразие, M_0 и M_1 — его области, $f\colon M_0 \to M_1$ — гомеоморфизм.

Определение. Гомеоморфизм f называется *локальным сдвигом*, если существует гомеоморфизм $h\colon M \to D$, переводящий M_0 в D_0, M_1 в D_1 и f в t.

Пусть M — комплексная кривая, и $f\colon M_0 \to M_1$ — голоморфный локальный сдвиг. Тогда склеивание каждой точки $z \in M_0$ с ее образом $f(z) \in M_1$ определяет компактную комплексную кривую, гомеоморфную тору, т. е. эллиптическую кривую $\Gamma = M/f$.

Доказательство очевидно. □

Рассмотрим теперь прямое произведение цилиндра на плоскость $\Pi = (S^1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$. Пусть $T\colon \Pi \to \Pi$ — сдвиг на 1 вдоль $\mathbb{R}$, E_0 — окрестность $D_0 \times 0$, $E_1 = TE_0$, $E = E_0 \cup E_1$.

Пусть N — гладкое вещественное четырехмерное многообразие, $M \subset N$ — двумерное подмногообразие, N_1 и N_2 — области в $N = N_1 \cup \cup N_2$, $F\colon N_1 \to N_2$ — гомеоморфизм.

Определение. Гомеоморфизм F называется *локальным сдвигом N вдоль M*, если существует гомеоморфизм $H\colon N \to E$, переводящий N_0 в E_0, N_1 в E_1, F в T и M в D.

Пусть N — комплексная поверхность, $M \subset N$ — комплексная кривая, $F\colon N_0 \to N_1$ — голоморфный локальный сдвиг вдоль M. Тогда склеивание каждой точки $z \in N_0$ с ее образом $F(z) \in N_1$ определяет голоморфную комплексную поверхность $\Sigma = N/F$, являющуюся окрестностью эллиптической кривой $\Gamma = M/f$.

Доказательство очевидно. □

И. Построение эллиптической кривой по резонансному инвариантному многообразию линейного преобразования

Пусть $A\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ — линейное преобразование с собственными числами λ_1, λ_2, $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$. Предположим, что собственные числа удовлетворяют резонансному соотношению $\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2} = 1$, где m_1 и m_2 взаимно просты. Тогда цилиндр с уравнением $z_1^{m_1}z_2^{m_2} = 1$ (где z_1, z_2 — координаты в собственном базисе) инвариантен относительно A.

Сужение A на этот цилиндр задает голоморфный сдвиг. Действительно, униформизуем кривую $\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2} = 1$ параметром $\Lambda \neq 0$ по формуле $\lambda_1 = \Lambda^{m_2}$, $\lambda_2 = \Lambda^{-m_1}$; на цилиндре введем параметр $Z \neq 0$ по формуле $z_1 = Z^{m_2}$, $z_2 = Z^{-m_1}$. Тогда действие A на цилиндре принимает вид $Z \mapsto \Lambda Z$. Это преобразование является голоморфным сдвигом, так как $|\Lambda| > 1$. Соответствующая эллиптическая кривая есть

$$\mathbb{C}^*/\{\Lambda\} \cong \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}), \quad \text{где } \Lambda = e^{i\omega}.$$

Заметим, что линейное преобразование имеет в случае резонанса целое однопараметрическое семейство голоморфных инвариантных цилиндров $z_1^{m_1}z_2^{m_2} = c$, $c \neq 0$. Эллиптические кривые, построенные по всем этим цилиндрам, изоморфны.

Подходящая окрестность любого такого цилиндра (или его достаточно большого конечного куска) превращается при факторизации по действию A в окрестность эллиптической кривой на комплексной поверхности. Эта поверхность — прямое произведение эллиптической кривой на $\mathbb{C}$. Действительно, гомотетии $z \mapsto kz$ определяют проекцию на эллиптическую кривую, а отображение $z \mapsto$ $\mapsto z_1^{m_1}z_2^{m_2}$ — проекцию на второй сомножитель.

В частности, индекс самопересечения эллиптической кривой в построенной поверхности равен нулю.

К. Построение эллиптической кривой по резонансному инвариантному многообразию нелинейного преобразования

Пусть $A(\varepsilon)\colon U \to \mathbb{C}^2$ — биголоморфное отображение области $U \subset$ $\subset \mathbb{C}^2$ в $\mathbb{C}^2$, голоморфно зависящее от параметра ε. Мы предполагаем, что ε меняется в окрестности нуля в $\mathbb{C}$ и что все отображения $A(\varepsilon)$ оставляют на месте начало координат в $\mathbb{C}^2$.

Обозначим через λ_1, λ_2 собственные числа линеаризации отображения $A(0)$ в 0. Мы предполагаем, что $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$ и что $\lambda_1^{m_1} =$ $= \lambda_2^{-m_2}$, где m_1 и m_2 взаимно просты.

Для семейства A общего положения при прохождении при $\varepsilon = 0$ резонанса от сепаратрис неподвижной точки ответвляется инвариантный голоморфный резонансный цилиндр (см. п. Ж). Зафиксируем достаточно малое ε и рассмотрим сужение $A(\varepsilon)$ на этот цилиндр. Можно проверить, что $A(\varepsilon)$ индуцирует на соответствующей части цилиндра локальный голоморфный сдвиг. (Это следует из того, что 1) цилиндр имеет в первом приближении уравнение $z_1^{m_1} z_2^{m_2} = c(\varepsilon)$; 2) $A(\varepsilon)$ близко к линеаризации $A(0)$ в 0; 3) линеаризация $A(0)$ в 0 действует на цилиндре $z_1^{m_1} z_2^{m_2} = c$ как локальный сдвиг (см. п. И).)

Итак, при достаточно малых $|\varepsilon|$ отображение $A(\varepsilon)$ определяет эллиптическую кривую $\Gamma(\varepsilon)$, вложенную в поверхность $\Sigma(\varepsilon)$. В гомологиях кривой $\Gamma(\varepsilon)$ имеется отмеченная окружность (образ направляющей окружности цилиндра). Кривую $\Gamma(\varepsilon)$ можно представить в виде

$$\Gamma(\varepsilon) \approx \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \omega(\varepsilon)\mathbb{Z}),$$

где 2π соответствует отмеченной окружности. Функция $\omega(\varepsilon)$ имеет при $\varepsilon \to 0$ предел ω_0. Из формул п. И следует, что $\lambda_1 = e^{i\omega_0 m_2}$, $\lambda_2 = e^{-i\omega_0 m_1}$.

Индекс самопересечения кривой Γ в поверхности Σ равен нулю. Поэтому топологически Σ является прямым произведением Γ на диск. Однако аналитически Σ — не обязательно прямое произведение. Более того,

1) Σ может не быть голоморфным расслоением над Γ; окрестность Γ в Σ может не допускать голоморфных отображений на Γ тождественных на Γ. Так будет, например, в случае когда рядом с Γ в Σ есть семейство эллиптических кривых с разными значениями модуля ω.

2) Γ может не допускать в Σ деформаций, отличных от сдвигов Γ по себе. Так будет, например, в случае когда нормальное расслоение Γ в Σ аналитически нетривиально.

Положительные результаты о строении Σ приведены в § 27.

Л. Нелинеаризуемость отображения в области, содержащей резонансный цилиндр

Теорема. *Если эллиптическая кривая* Γ *недеформируема в своей окрестности* Σ*, то отображение* A *не линеаризуется биголоморфной заменой переменных в окрестности точки* 0*, содержащей часть голоморфного инвариантного цилиндра, нужную для построения кривой* Γ.

Доказательство. Действительно, голоморфный инвариантный цилиндр линейного отображения всегда можно продеформировать посредством малой гомотетии. □

Таким образом, мы получаем оценку радиуса сходимости рядов Пуанкаре — Зигеля сверху через голоморфный инвариантный цилиндр с нетривиальным нормальным расслоением соответствующей эллиптической кривой.

Теорема (Ю. С. Ильяшенко). *Если линейное отображение имеет голоморфный инвариантный цилиндр, направляющая окружность которого имеет с собственными осями коэффициенты зацепления* (m_1, m_2), *а соответствующая эллиптическая кривая есть* $\mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z})$ (*причем* 2π *соответствует направляющей цилиндра*), *то собственные числа равны* $\lambda_1 = e^{i\omega m_2}$, $\lambda_2 = e^{-i\omega m_1}$ *и, следовательно, имеет место резонанс* $\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2} = 1$.

Доказательство. Пусть (z_1, z_2) — собственные координаты. Дифференциальные формы dz_k/z_k на цилиндре голоморфны и инвариантны относительно отображения, следовательно, определяют голоморфные формы на эллиптической кривой.

Вычислим интегралы этих форм по образующим группы гомологий тора. Одна из образующих соответствует направляющей окружности γ на цилиндре. Для нее

$$\oint \frac{dz_1}{z_1} = 2\pi i m_2, \quad \oint \frac{dz_2}{z_2} = -2\pi i m_1,$$

так как коэффициент зацепления γ с осью $z_1 = 0$ равен m_2, а с осью $z_2 = 0$ равен m_1. Вторая образующая соответствует отрезку δ, соединяющему точку z с ее образом Az на поверхности цилиндра. Для нее $\int \frac{dz_1}{z_1} = \ln\lambda_1$, $\int \frac{dz_2}{z_2} = \ln\lambda_2$ (эти соотношения определяют ветви логарифмов). Но все голоморфные формы на эллиптической кривой пропорциональны. Итак,

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\ln\lambda_1}{2\pi i m_2} = -\frac{\ln\lambda_2}{2\pi i m_1}.$$ □

Следствие. *Пусть* A — *локальный диффеоморфизм с неподвижной точкой* 0, $\lambda_{1,2}$ — *собственные числа. Предположим, что в некоторой окрестности* U *неподвижной точки имеется голоморфный цилиндр. Пусть* A — *голоморфный сдвиг вдоль этого цилиндра и пусть* ω — *период соответствующей эллиптической кривой. Тогда, если* λ *и* ω *не связаны соотношением* $\lambda_1 = e^{i\omega m_2}$, $\lambda_2 = e^{-i\omega m_1}$ (*где*

m_1, m_2 — коэффициенты зацепления с сепаратрисами особой точки), то диффеоморфизм A в области U аналитически не эквивалентен линейному.

М. Расходимость рядов Пуанкаре

Из полученных результатов вытекает

Теорема. *Если в сколь угодно малой окрестности нерезонансной неподвижной точки 0 локального диффеоморфизма $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ имеются голоморфные цилиндры, на которых диффеоморфизм действует как локальный сдвиг, то этот диффеоморфизм аналитически не эквивалентен линейному ни в какой окрестности неподвижной точки 0 (и, следовательно, ряды Пуанкаре всюду расходятся).*

А. С. Пяртли установил, что такое накопление инвариантных цилиндров к особой точке является общим случаем для отображений, собственные числа которых «ненормально хорошо аппроксимируются резонансными». Следовательно, для таких собственных чисел расходимость рядов Пуанкаре всюду также является общим случаем.

Результаты этого параграфа легко переносятся на векторные поля в $\mathbb{C}^3$ вблизи особой точки типа Зигеля. Материализацией резонанса $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 = 0$ является эллиптическая кривая. Точки этой кривой — фазовые кривые поля, лежащие на инвариантной резонансной поверхности $z_1^{m_1} z_2^{m_2} z_3^{m_3} = c\varepsilon + \ldots$

Н. Бифуркации эллиптических кривых на комплексных поверхностях

Изложенная выше теория бифуркаций инвариантных многообразий дифференциальных уравнений имеет близким аналогом теорию бифуркаций эллиптических кривых с нулевым индексом самопересечения на комплексных поверхностях.

Эллиптическая кривая и ее нормальное расслоение на поверхности задаются парой комплексных чисел (ω, λ) (см. § 27): они получаются из комплексной оси φ и из плоскости двух комплексных переменных (r, φ) при склейках

$$(r, \varphi) \sim (r, \varphi + 2\pi) \sim (\lambda r, \varphi + \omega).$$

Расслоение называется *резонансным*, если оно становится аналитически тривиальным после перехода к некоторому конечнолистному циклическому накрытию.

Резонансные расслоения соответствуют в пространстве пар (λ, ω) гиперповерхностям $\lambda^n = e^{ik\omega}$. Оказывается, при общем непрерывном изменении пары (эллиптическая кривая, поверхность), в момент прохождения че-

рез резонанс к эллиптической кривой приближается другая эллиптическая кривая, топологически ее накрывающая. Таким образом материализацией резонанса является бифуркация кратной эллиптической кривой.

Рассмотрим однопараметрическое семейство пар $\Gamma(\varepsilon) \subset \Sigma(\varepsilon)$. Предположим, что $\varepsilon = 0$ отвечает резонанс $\lambda^n = e^{ik\omega}$. Оказывается, уравнение ответвляющейся кривой имеет вид $r^n e^{ik\varphi} = \varepsilon$ (после выбора подходящего параметра семейства ε и после подходящей замены координат (r, φ), зависящей от ε; мы считаем, что резонанс соответствует $\varepsilon = 0$ и что отсутствуют резонансы меньшего порядка: $\lambda^m e^{il\varphi} \neq 1$ при $0 < m < n$).

Приведем здесь вывод уравнения ответвляющейся кривой на уровне формальных рядов. Рассуждая, как в § 27, мы приведем склейку к виду

$$\begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \mapsto \begin{cases} r\lambda(1 + \alpha\varepsilon + aw + A), \\ \varphi + \omega + \beta\varepsilon + bw + B, \end{cases}$$

где α, β, a, b — константы, $w = r^n e^{ik\varphi}$, A и B — ряды по степеням ε и w, начинающиеся с членов степени 2. Такая подстановка переводит w в $w(1 + \gamma\varepsilon + cw + C)$, где $\gamma = n\alpha + ik\beta$, $c = na + ikb$, C — члены второй и более высоких степеней по ε и w.

Уравнение $\gamma\varepsilon + cw + C = 0$ определяет ответвляющуюся кривую. Для семейства общего положения $\gamma \neq 0$, $c \neq 0$. После подходящей замены координат ε и r это уравнение принимает вид $r^n e^{ik\varphi} = \varepsilon$.

Сходимость исследуется так же, как в цитированных работах Пяртли и Брюно.

Замечание. Нетрудно проверить, что условие $\lambda^n e^{ik\omega} = 1$ означает в точности, что нормальное расслоение аналитически тривиально над некоторым конечнолистным циклическим накрытием эллиптической кривой.

Топологически все рассматривавшиеся расслоения тривиальны. В частности, ответившаяся при резонансе эллиптическая кривая проектируется (неголоморфно) на кривую $\Gamma(\varepsilon)$ «вдоль r-направления». Эта проекция является топологическим конечнолистным циклическим накрытием тора. Это — то самое накрытие, над которым нормальное расслоение становится тривиальным в момент прохождения резонанса.

В случае когда $(n, k) = d > 1$ (но нет резонансов меньших порядков, $\lambda^m e^{il\omega} \neq 1$ при $0 < m < n$), ответвляющаяся кривая несвязна. В этом случае она состоит из d компонент, каждая из которых n/d-листно топологически накрывает исходный тор.

О. Расходимость линеаризации

Для некоторых нерезонансных расслоений (т. е. пар λ, ω) ряды, приводящие склейку к нормальной форме, расходятся.

Ответвление материализующих резонанс кривых позволяет «объяснить» расходимость линеаризующих склейку рядов следующим образом. Предпо-

ложим, что пара (λ, ω) нерезонансная, но очень близка к резонансу. Тогда в малой окрестности исходной эллиптической кривой имеется, вообще говоря, еще одна эллиптическая кривая, а именно, кривая, материализующая резонанс. Если пара (λ, ω) достаточно близка к бесконечному числу резонансов, то в произвольно малой окрестности исходной эллиптической кривой есть бесконечное число кривых, материализующих различные резонансы и циклически накрывающих исходную кривую.

Между тем нормальное расслоение исходной кривой нерезонансное. Нерезонансные нормальные расслоения степени 0 не имеют сечений ни над каким циклическим конечнолистным накрытием эллиптической кривой. Поэтому в нормальном расслоении исходной эллиптической кривой нет эллиптических кривых, циклически накрывающих исходную кривую. Следовательно, никакая окрестность исходной кривой на поверхности не отображается биголоморфно на окрестность нулевого сечения нормального расслоения; поэтому ряды расходятся для склеек общего положения, если пара (λ, ω) слишком хорошо аппроксимируется резонансными парами.

Замечание. Существует аналогия между компактными комплексными подмногообразиями аналитических многообразий и предельными циклами дифференциальных уравнений; подобно тому, как предельный цикл может исчезнуть при малой деформации нуля, лишь если оператор монодромии имеет собственное число 1, эллиптическая кривая на поверхности, имеющая нулевой индекс самопересечения, не исчезает при малых деформациях объемлющей поверхности, если нормальное расслоение аналитически нетривиально. Ф. А. Богомолов указал следующую общую формулировку: компактное подмногообразие комплексного многообразия не исчезает при малой деформации объемлющего многообразия, если тривиальны одномерные когомологии нормального пучка. (Определение когомологий см., например, в книге: *Уэллс Р.* Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976. С. 76.)

§ 37. Классификация особых точек

В этом параграфе мы отказываемся от «универсальной» точки зрения и рассматриваем не семейства, а индивидуальные системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки векторного поля, причем допускаем вырождения сколь угодно большой коразмерности. Исследование таких сложных особенностей с общей точки зрения имеет весьма ограниченную ценность, так как сложные вырождения имеют большую коразмерность и встречаются редко.

Однако знание общих, принципиальных черт произвольных особенностей представляет интерес даже и в тех сложных случаях, до-

браться до которых не позволяют наши сегодняшние вычислительные возможности.

В частности, знать, какого рода патология может встретиться в случаях большой коразмерности, полезно хотя бы для того, чтобы не тратить сил на поиски несуществующих вещей. Такими несуществующими объектами, на поиск которых потрачено много усилий, оказались, например, алгебраические критерии устойчивости по Ляпунову или асимптотической, а также алгебраические критерии в проблеме центр-фокус (при нулевых корнях характеристического уравнения).

Чтобы показать, о каких принципиальных вопросах идет речь, мы рассмотрим вначале очень простой и легко исследуемый до конца пример.

А. Особые точки функций на прямой

Пусть f — вещественная гладкая в окрестности точки $x = 0 \in \mathbb{R}$ функция. Если точка 0 не критическая, то функция гладко эквивалентна в ее окрестности линейной $(f(x) = x + c)$.

Как обстоит дело в критическом случае, тоже хорошо известно: если $f'(0) = 0$, то поведение функции определяется знаком $f''(0)$ и т. д.

Рассмотрим для определенности задачу об условиях минимума функции в точке 0. Ответ можно представить в следующем виде: пространство J^k k-струй функций в 0 разбивается на три части,

$$J^k = \mathrm{I} \cup \mathrm{II} \cup \mathrm{III};$$

I — струи, гарантирующие минимум,

II — струи, гарантирующие отсутствие минимума,

III — струи, по которым нельзя решить, есть ли минимум.

Струи типов I и II называют *достаточными*, а типа III — *восприимчивыми*.

Множества I, II, III в нашей задаче обладают следующими двумя свойствами.

1°. *Полуалгебраичность*. Каждое из множеств I, II, III является полуалгебраическим подмногообразием пространства струй J^k.

Полуалгебраическое множество в $\mathbb{R}^N$ определяется как конечное объединение подмножеств, каждое из которых задается конечной системой полиномиальных уравнений и неравенств.

Если неравенства не нужны, то множество называется алгебраическим. Полезным свойством полуалгебраических множеств является следующая теорема (доказательства см. в *Seidenberg A.* A new decision method for elementary algebra // Ann. of Math. Ser. 2. 1954. V. 60. P. 365—374; *Горин Е. А.* Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных // УМН. 1961. Т. 16, вып. 1. С. 91—118).

Принцип Тарского — Зайденберга. *Образ полуалгебраического множества при полиномиальном отображении полуалгебраичен.*

Более слабая по форме, но эквивалентная формулировка:

Проекция полуалгебраического множества на подпространство является полуалгебраическим множеством.

Заметим, что уже проекция алгебраического множества может быть не алгебраическим, а лишь полуалгебраическим множеством (пример — проекция сферы на плоскость).

2°. *Почти конечная определенность.* При $k \to \infty$ коразмерность множества восприимчивых струй $\mathrm{III} \subset J^k$ стремится к бесконечности.

Иными словами, восприимчивые струи в J^k определяются растущим вместе с k числом условий. В результате оказывается, что множество функций, для которых задача о выяснении того, есть ли 0 точка локального минимума, неразрешима ни при каком числе членов ряда Тейлора, очень тощее: оно имеет коразмерность бесконечность в функциональном пространстве.

Б. Другие примеры

Аналогичная задача для функций нескольких переменных уже не имеет простого алгоритма: если второй дифференциал вырождается, то к исследованию приходится привлекать следующие, и мы приходим к задачам типа классификации алгебраических кривых, поверхностей и т. п. Тем не менее и здесь разбиения $J^k = \mathrm{I} \cup \mathrm{II} \cup \mathrm{III}$ пространства k-струй функций в $\mathbb{R}^n$ обладают свойствами полуалгебраичности и почти конечной определенности, хотя явно выписать уравнения и неравенства на коэффициенты Тейлора при сколько-нибудь больших n и k безнадежно. Существование этих уравнений и неравенств можно вывести из теоремы Тарского — Зайденберга, доказательство которой содержит также и алгоритм для выписывания этих уравнений и неравенств (обобщающий теорию Штурма).

Начальный отрезок классификации вычислен явно и оказался связанным (довольно таинственным образом) с классификацией правильных многогранников, с группами Коксетера, Вейля и Ли серий A_k, D_k, E_k, с автоморфными функциями, треугольниками на плоскости Лобачевского, с особенностями каустик, волновых фронтов и осциллирующих интегралов метода стационарной фазы (см. обзор: *Арнольд В. И.* Критические точки гладких функций и их нормальные формы // УМН. 1975. Т. 30, вып. 5. С. 3—65 и список литературы в нем; *Васильев В. А.* Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума // Функциональный анализ и его приложения. 1977. Т. 11, № 3. С. 1—11.

Следующий пример — задача о топологической классификации ростков гладких отображений. В 1964 году Р. Том анонсировал теорему о полуалгебраичности и почти конечной определенности в этой задаче; доказательство дал А. Н. Варченко (*Варченко А. Н.* Локальные топологические свойства дифференцируемых отображений // Известия АН СССР, сер. матем. 1974. Т. 38, № 5. С. 1037—1090).

В. Особые точки векторных полей

Вернемся к задаче о топологической классификации особых точек векторных полей. Вначале ситуация кажется столь же простой, как и в случае функций. Невырожденные особые точки классифицируются по количеству собственных чисел в левой полуплоскости. Пространство 1-струй разбивается на конечное число частей, соответственно числу корней в левой полуплоскости. Каждая из этих частей — полуалгебраическое множество в пространстве струй; задающие его полиномиальные неравенства можно выписать даже явно (условия Рауса — Гурвица, см., например, *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967).

Восприимчивые 1-струи образуют полуалгебраическое подмногообразие коразмерности 1, разделяющее области, соответствующие разному числу корней в левой полуплоскости. В предыдущих параграфах мы рассмотрели ряд примеров исследования того, что происходит в этих вырожденных случаях при переходе к 2-струям, и т. д. Таким образом, возникает впечатление, что и здесь можно идти сколь угодно далеко, и только сложность вычислений и обилие вариантов не позволяют дать алгебраическую классификацию в случаях произвольно большой коразмерности. Оказывается, однако, что дело обстоит не так (*Арнольд В. И.* Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и проблемы топо-

логической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений // Функциональный анализ и его приложения. 1970. Т. 4, № 3. С. 1—9).

Свойство полуалгебраичности теряется уже в такой простой задаче, как задача различения центра и фокуса при нулевых корнях характеристического уравнения (А. Д. Брюно и Ю. С. Ильяшенко, см. *Ильяшенко Ю. С.* Алгебраическая неразрешимость и почти алгебраическая разрешимость проблемы центр-фокус // Функциональный анализ и его приложения. 1972. Т. 6, № 3. С. 30—37). Таким образом, для проблем устойчивости и топологической классификации не может существовать алгебраический алгоритм*.

Остается еще некоторая надежда на существование неалгебраического алгоритма, т. е. на то, что свойство почти конечной определенности все же имеет место: множество ростков, топологический тип (или устойчивость) которых не определяется ни по какому конечному отрезку ряда Тейлора, имеет, быть может, коразмерность бесконечность. Вопрос, так ли это, представляется весьма трудным; постановку его следует еще уточнить, указав точный смысл слова коразмерность: множества в пространстве k-струй, коразмерность которых нужно определить, неалгебраические, и возможны теоретико-множественные затруднения. Р. Том высказал гипотезу, что ответ на поставленный вопрос отрицателен.

Г. Строение множеств восприимчивости

Вопрос о почти конечной определенности относится к поведению множеств восприимчивых струй в пространстве k-струй J^k при k, стремящемся к бесконечности. Вопросы о строении множеств восприимчивости при фиксированном k кажутся более поддающимися исследованию. Зафиксируем восприимчивую $(k-1)$-струю векторного поля в 0 и рассмотрим пространство J всевозможных k-струй с данной $(k-1)$-струей. Для определенности будем рассматривать задачу об асимптотической устойчивости. Тогда пространство J делится на две (быть может, пустые) части: I (устойчивые по k-струе) и II (неустойчивые по k-струе) и остаток III из восприимчивых струй (в случае задачи о топологической классификации частей больше).

* В самое последнее время Л. Хазин и Э. Шноль установили алгебраическую неразрешимость проблемы устойчивости в случае двух пар чисто мнимых собственных чисел с резонансом 3 : 1. Этот случай соответствует подмногообразию коразмерности 3 в функциональном пространстве.

Разумная постановка вопроса о критерии устойчивости состоит в том, чтобы выяснить, какими свойствами обладают части I, II и граница между ними. Например, трансцендентность границы означает несуществование алгебраического критерия устойчивости. Спрашивается, насколько сложно может быть устроена указанная граница? Например, может ли у нее (и у открытых частей областей I, II) быть бесконечное число компонент связности? И могут ли точки частей I и II перемежаться подобно рациональным и иррациональным числам?

Примеры такого рода неизвестны, однако можно опасаться, что именно так будет обстоять дело в особых случаях достаточно большой коразмерности в многомерном пространстве.

Существует тесная связь между локальной задачей о поведении фазовых кривых вблизи особой точки в $\mathbb{R}^n$ и глобальной задачей о дифференциальных уравнениях, заданных полиномиальной системой в проективном пространстве $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ на единицу меньшей размерности. В цитированной выше работе об алгебраической неразрешимости эта связь использовалась для того, чтобы вывести трансцендентность границы устойчивости в пространстве струй локальной задачи из трансцендентности поверхности рождения предельных циклов в пространстве коэффициентов полиномиальной системы на проективной плоскости. Но в многомерной глобальной ситуации возможны гораздо более сложные явления, чем предельные циклы, например, системы на торе с перемежающейся соизмеримостью и несоизмеримостью чисел вращения или области в функциональном пространстве, свободные от структурно устойчивых систем. Все эти явления реализуются в полиномиальных системах в проективном пространстве, и каждое из них может давать свой вклад в запутывание границы устойчивости в пространстве J.

Образцы экзаменационных задач

На письменном экзамене продолжительностью 4 часа дается 15 связанных друг с другом вопросов. В квадратных скобках указано число очков за каждый вопрос. Эти числа заранее сообщаются экзаменуемым.

Вариант 1

$$\ddot{x} = -\sin x + \varepsilon \cos t. \tag{1}$$

I. Пусть $\varepsilon = 0$.

1) Линеаризовать в точке $x = \pi$, $\dot{x} = 0$. [1]

2) Устойчиво ли это положение равновесия? [1]

3) Найти матрицу Якоби преобразования фазового потока за время $t = 2\pi$ в точке $x = \pi$, $\dot{x} = 0$. [3]

4) Найти производную решения с начальным условием $x = \pi$, $\dot{x} = 0$ по параметру ε при $\varepsilon = 0$. [5]

5) Нарисовать графики решения и его производной по t при начальном условии $x = 0$, $\dot{x} = 2$. [3]

6) Найти это решение. [3]

II. Пусть (2) — уравнение в вариациях вдоль указанного в п. 5 решения.

7) Имеет ли уравнение (2) неограниченные решения? [8]

8) Имеет ли уравнение (2) ненулевые ограниченные решения? [8]

9) Найти определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (2), зная, что $W(0) = 1$. [5]

10) Выписать явно уравнение (2) и решить его. [10]

11) Найти собственные числа и векторы оператора монодромии для уравнения в вариациях вдоль решения с начальным условием $x = \frac{\pi}{2}$, $\dot{x} = 0$. [16]

12) Доказать, что уравнение (1) имеет 2π-периодическое решение, гладко зависящее от ε и обращающееся в $x = \pi$ при $\varepsilon = 0$. [6]

13) Найти производную этого решения по ε при $\varepsilon = 0$. [6]

III. Рассмотрим уравнение $u_t + uu_x = -\sin x$.

14) Написать уравнение характеристик. [2]

15) Найти наибольшее значение t, при котором решение задачи Коши с $u|_{t=0} = 0$ продолжается на $[0, t)$. [8]

Вариант 2

I. Пусть векторное поле в трехмерном пространстве имеет особую точку нуль, причем одно из собственных чисел особой точки равно нулю, а два другие чисто мнимы.

1) Привести к нормальной форме члены степени 1 разложения компонент поля в ряд Тейлора в нуле. [1]

2) То же для членов степени 2. [3]

3) То же для членов любой степени. [8]

4) Усреднить систему по быстрому вращению, заданному линейной частью поля. [12]

II. Пусть дано семейство полей, зависящих от параметра, и содержащее поле п. I при нулевом значении параметра.

5) Гладко зависящим от параметров, меняющихся в окрестности нуля, диффеоморфизмом привести к возможно простому виду отрезок ряда Тейлора полей семейства в нуле. [10]

6) Применить к тому же семейству усреднение по быстрому вращению, заданному линейной частью исходного поля. [20]

III. В пространстве 1-струй векторных полей в трехмерном пространстве выделим многообразие струй в особых точках с одним нулевым и двумя чисто мнимыми собственными числами.

7) Найти коразмерность указанного многообразия. [2]

8) Выписать условие трансверсальности семейства, записанного в найденном в задаче 5 виде, к указанному многообразию. [8]

9) Исследовать бифуркации особых точек в двупараметрических семействах общего положения, трансверсальных к указанному многообразию. [10]

10) Исследовать бифуркации циклов из этих особых точек. [15]

11) Исследовать существование и гладкость фазовой кривой, соединяющей эти особые точки. [15]

IV. Пусть на плоскости отмечена прямая, проходящая через нуль. Диффеоморфизм плоскости называется отмеченным, если он переводит отмеченную прямую в себя. Векторное поле называется отмеченным, если оно касается отмеченной прямой во всех ее точках. Пусть дано отмеченное поле, имеющее в нуле особую точку с двумя нулевыми собственными числами.

12) Привести отрезок ряда Тейлора поля в нуле к возможно простому виду посредством допустимого диффеоморфизма. [12]

13) Привести семейство допустимых полей, являющееся деформацией данного поля, к формальной нормальной форме посредством допустимых формальных диффеоморфизмов, формально гладко зависящих от параметров, меняющихся в окрестности нуля. [16]

14) Исследовать бифуркации особых точек в семействах общего положения, полученных из нормальных форм задачи 13 отбрасыванием членов высокой степени. [18]

15) Применить результаты задач 12—14 к исследованию бифуркаций фазового портрета поля с одним нулевым и двумя чисто мнимыми собственными числами. [25]

Дополнительные задачи

Вариант 1

1) $\dot z = \varepsilon z + Az|z|^2 + \bar z^3$. Доказать, что при $|\operatorname{Re} A| > 1$ предельных циклов $\leqslant 1$.

Указание. Разделить поле на $z\bar z$; $\operatorname{div} P(z,\bar z) = 2\operatorname{Re}\left(\dfrac{\partial P}{\partial z}\right)$.

2) Пусть $A = \dfrac{3+i}{\sqrt{2}}$. Доказать, что если $\arg\varepsilon = \dfrac{5\pi}{4}$, то особая сепаратриса каждого седло-узла совпадает с неособой следующего.

Указание. При слиянии седла с узлом уравнение приводится к

$$\dot w = e^{i\theta}[Rw(|w|^2-1) + i(\bar w^2 - w^2)], \quad A = (R-i)e^{i\theta}.$$

Если $R=2$, $\theta = \pi/4$, то сепаратрисы — прямые.

3) Исследовать кривые, разделяющие области значений A, где особые точки при изменении $\arg\varepsilon$ сливаются на цикле, внутри и вне.

Указание. Изменение θ поворачивает поле. Кривые расположены примерно как четыре параболы

$$a^2 = 2(\pm b \pm 1), \quad A = a + ib.$$

4) Доказать, что при малых $|\operatorname{Re} A|$ и $1 < |\operatorname{Im} A| < c \approx 4{,}35$ уравнение 1) с подходящим ε имеет два предельных цикла, внутри которых лежат 9 особых точек, а при $|\operatorname{Im} A| > c$ — один (А. И. Нейштадт). Граница напоминает эллипс с осями 3,11 и 2.

5) Доказать, что в системе

$$\begin{cases} \dot x = x(\alpha + ax + by), \\ \dot y = y(\beta + cx + dy) \end{cases}$$

нет предельных циклов.

Замечание. При потере устойчивости фокусом система имеет первый интеграл: произведение степеней трех линейных функций (Н. Н. Баутин).

Вариант 2

1) Найти образ поля направлений $dy = 0$ под действием преобразования фазового потока системы

$$\begin{cases} \dot x = x, \\ \dot y = x + y \end{cases}$$

за время t.

2) Исследовать зависимость периода колебаний от амплитуды (x) для системы

$$\begin{cases} \dot x = 2y + x^2, \\ \dot y = -4x^3 - 2xy. \end{cases}$$

3) Имеет ли задача Коши

$$(2y+x^2)\frac{\partial u}{\partial x}-(4x^3+2xy)\frac{\partial u}{\partial y}=1,\quad u|_{x=1}=0$$

решение в окрестности точки $(1, y_0)$ и единственно ли оно?

4) Найти все первые интегралы системы

$$\begin{cases}\dot{x}=x-y,\\ \dot{y}=x+y+z,\\ \dot{z}=z-y,\end{cases}$$

непрерывные в окрестности точки $x=y=z=0$.

Вариант 3

1) Найти образ вектора $(1, 0)$, приложенного в точке $(\pi, 0)$, под действием преобразования за время $t=1$ фазового потока системы

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=\sin x.\end{cases}$$

2) В каких координатах разделяются переменные в уравнении

$$\frac{dy}{dx}=xy^2+x^3y^3?$$

3) Имеет ли задача Коши

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+(x^3-x)\frac{\partial u}{\partial y}=y^2,\quad u|_{x=0}=0,$$

решение в окрестности точки $(x_0=0,\ y=y_0)$ и единственно ли оно?

4) Выяснить, устойчиво ли по Ляпунову решение системы

$$\begin{cases}\dot{x}=yz,\\ \dot{y}=-xz,\\ \dot{z}=0\end{cases}$$

с начальным условием (x_0,y_0,z_0).

5*) Сколько неподвижных точек имеет отображение A^{10}, где

$$A\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad A(x,y)=(5y+\cos x, 5x-\cos y).$$

Вариант 4

1) Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.

2) Все ли решения системы продолжаются неограниченно?

3) Сколько ненулевых решений, для которых $y(0)=x(1)=0$, имеет система?

4) Найти производную решения с начальными условиями $x(0)=y(0)=\varepsilon$ по ε при $\varepsilon=0$.

Варианты системы:

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-x^2,\end{cases}\quad \begin{cases}\dot{x}=y^3,\\ \dot{y}=-x,\end{cases}\quad \begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=x^4,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=-y^2,\\ \dot{y}=x^2,\end{cases}\quad \begin{cases}\dot{x}=y^4,\\ \dot{y}=-x,\end{cases}\quad \begin{cases}\dot{x}=y^2,\\ \dot{y}=x^2.\end{cases}$$

Вариант 5

1) Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.

2) Все ли решения системы продолжаются неограниченно?

3) Найти диффеоморфизм плоскости, выпрямляющий поле направлений фазовых кривых в окрестности точки $(1, 1)$.

4) Найти все непрерывные на всей плоскости первые интегралы, совпадающие с y на оси y.

$$\begin{cases}\dot{x}=x^2y,\\ \dot{y}=-xy^2,\end{cases}\quad \begin{cases}\dot{x}=-x^2y^2,\\ \dot{y}=xy^3,\end{cases}\quad \begin{cases}\dot{x}=x^2y^3,\\ \dot{y}=xy^4,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=-xy^2,\\ \dot{y}=x^2y,\end{cases}\quad \begin{cases}\dot{x}=xy^3,\\ \dot{y}=-x^2y^2,\end{cases}\quad \begin{cases}\dot{x}=-xy^4,\\ \dot{y}=x^2y^3.\end{cases}$$

Вариант 6

1) Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.

2) Найти все начальные условия, для которых решения продолжаются неограниченно вперед.

3) Найти образ вектора $(1, 0)$, приложенного в точке 0, под действием преобразования фазового потока за время t.

4) Найти все первые интегралы, непрерывные в окрестности точки $z=1$ и равные 1 на вещественной оси.

$$\dot{z}=iz^2,\quad \dot{z}=\bar{z}^2,\quad \dot{z}=iz^2\bar{z},\quad \dot{z}=z\bar{z}^2,\quad \dot{z}=iz\bar{z}^2,\quad \dot{z}=i\bar{z}^2.$$

Вариант 7

1) Имеет ли задача определенное на всей плоскости неограниченное решение?

2) Ограничена ли величина u на характеристиках уравнения?

3) Все ли характеристики уравнения пересекают поверхность $y=x+u^2$?

4) Имеет ли уравнение характеристик первый интеграл, производная которого в начале координат равна 1? Найти производную этой производ-

ной по u вдоль характеристического вектора.

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} - (1+x^4+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 2u, \\ u|_{x=0} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (2+x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u, \\ u|_{y=0} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + (1+2u^4+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3u, \\ u|_{x=0} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x^2+u^4+4)\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3u - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = (1+x^2+y^4)\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ u|_{y=0} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2u - x\dfrac{\partial u}{\partial x} = (2+u^2+y^4)\dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ u|_{x=0} = 0. \end{cases}$$

Вариант 8

1) Продолжается ли решение с начальным условием $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$ на всю ось t?

2) Ограничена ли третья производная по a при $a=0$ решения с начальными условиями $x(0)=a$, $\dot{x}(0)=0$?

3) Вычислить значение этой производной при $t=2\pi$.

4) Вычислить десятую производную решения с начальными условиями $x(0)=a$, $\dot{x}(0)=0$ по a при $a=0$.

$$\ddot{x}+x = \operatorname{sh}^3 x, \qquad \ddot{x}+\sin x = x^3, \qquad \ddot{x}+x = 2x^3,$$

$$\ddot{x}+x = \frac{1}{2}\operatorname{sh}^3 x, \quad \ddot{x}+\sin x = \frac{x^3}{2}, \quad \ddot{x}+x = \frac{x^3}{2}.$$

Вариант 9

1) Найти третью производную решения с начальным условием $x(0)=0$ в нуле.

2) Продолжается ли это решение на всю ось t?

3) Имеет ли уравнение неограниченные решения?

4) Найти число асимптотически устойчивых периодических решений уравнения

$$\dot{x} = x^2 - \sin^2 t, \quad \dot{x} = x^2 - \cos^2 t, \qquad \dot{x} = \sin^2 t - x^2,$$

$$\dot{x} = \cos^2 t - x^2, \quad \dot{x} = \operatorname{sh}^2 x - \sin^2 t, \quad \dot{x} = \operatorname{sh}^2 x - \cos^2 t.$$