



В. И. Арнольд

Вещественная алгебраическая геометрия



Династия

В. И. Арнольд

Вещественная алгебраическая геометрия

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 512.7
ББК 22.147
А84

*Издание подготовлено при поддержке
Фонда Дмитрия Зимина «Династия»*

Арнольд В. И.
А84 Вещественная алгебраическая геометрия. — М.: МЦНМО,
2009. — 88 с.
ISBN 978-5-94057-443-9

Эта брошюра, написанная выдающимся современным математиком академиком РАН В. И. Арнольдом, основана на прочитанных автором популярных лекциях для старшеклассников. В живой и увлекательной форме излагаются основы теории алгебраических кривых в самых разных аспектах: от свойств конических сечений и до шестнадцатой проблемы Гильберта и понятия рода комплексной кривой.

Рекомендуется всем интересующимся математикой, начиная со старшеклассников и студентов младших курсов.

ББК 22.147

ISBN 978-5-94057-443-9

© Арнольд В. И., 2009.
© МЦНМО, 2009.

Введение

В этой книге речь пойдет об одном из самых фундаментальных вопросов математики: о соотношении между алгебраическими формулами и геометрическими образами.

На одном из первых международных математических конгрессов (в Париже в 1900 г.) Д. Гильберт сформулировал один частный случай этого вопроса в виде 16-й проблемы (своего списка из 23 проблем, оставляемых XIX веком в наследство веку XX).

Несмотря на простоту и важность этой проблемы (в том числе и для многочисленных приложений) она до сих пор не решена (хотя открыто много замечательного, как вы сейчас увидите).

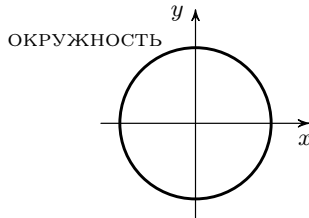
Пусть f — многочлен (с вещественными коэффициентами) степени n от двух переменных x и y . Вопрос Гильберта состоит в том, чтобы исследовать, какое топологическое строение может иметь алгебраическая кривая, заданная на евклидовой плоскости с декартовыми координатами x и y уравнением

$$f(x, y) = 0.$$

Пример. Если $n = 1$, то это уравнение задает прямую, все прямые устроены топологически одинаково.

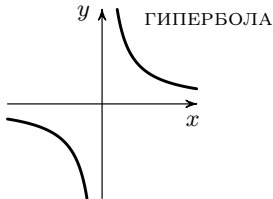
Если $n = 2$, то, как вы знаете, уравнение может задавать, например, окружность

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$



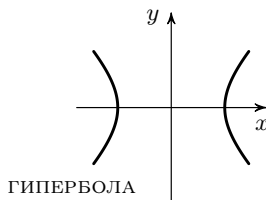
или гиперболу

$$xy - 1 = 0,$$



в другом виде

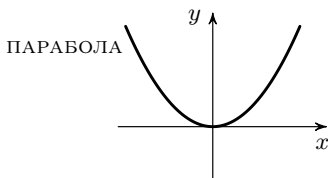
$$x^2 - y^2 - 1 = 0.$$



Эти кривые топологически различны: окружность связна, а гипербола состоит из двух связных компонент (называемых ветвями), уходящих притом на бесконечность (вдоль «асимптот» $\{x = 0\}$ и $\{y = 0\}$ для первой гиперболы и $\{y = x\}$ и $\{y = -x\}$ для второй).

Уравнение второй степени может задавать и параболу

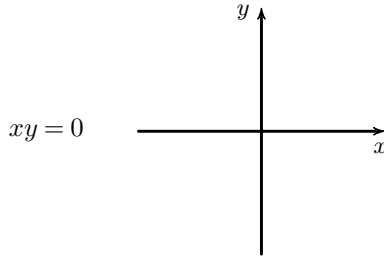
$$y - x^2 = 0$$



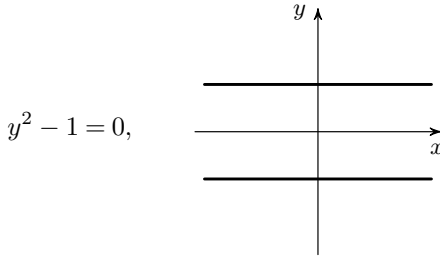
(которая отличается топологически и от окружности, и от гиперболы) — она топологически эквивалентна прямой линии.

Геометрия конических сечений

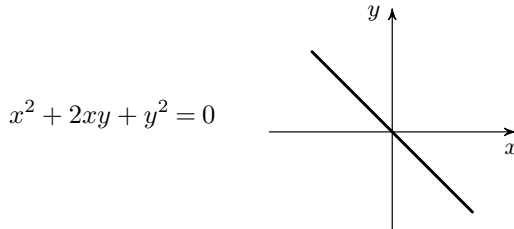
Уже древние хорошо знали, что никаких других гладких кривых, кроме эллипса, гиперболы и параболы, уравнения второй степени задавать не могут, исключая лишь особые случаи пары пересекающихся прямых



и пары параллельных прямых

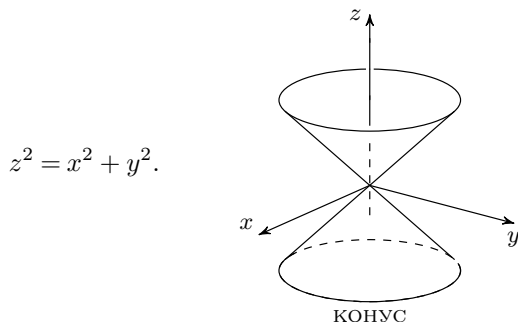


которые в еще более особом случае могут сливаться в одну прямую

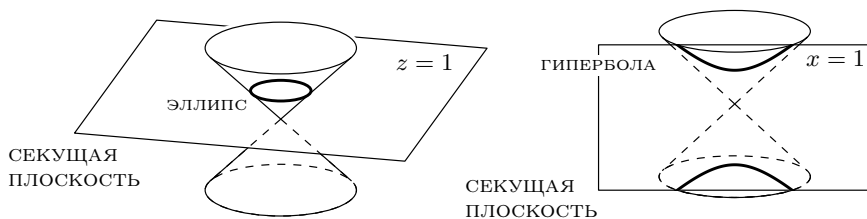


(а в совсем особом случае тождественно равному нулю многочлена f уравнение $f(x, y) = 0$ задает всю плоскость).

Древние называли кривые второй степени коническими сечениями, потому что именно они получаются при пересечении плоскостями конуса



Например, сечение плоскостью $z = 1$ дает окружность, а сечение плоскостью $x = 1$ дает гиперболу:



Задача. Какое сечение конуса плоскостью есть парабола?

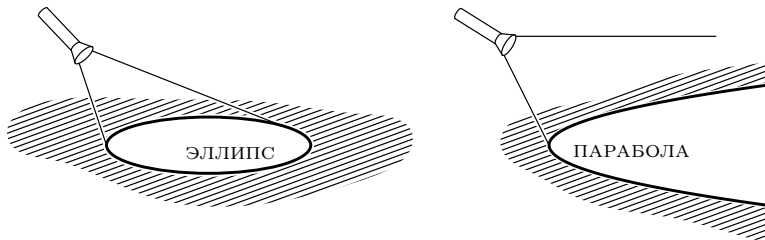
Решение. Будем наклонять горизонтальную плоскость $z = 1$, непрерывно поворачивая ее до вертикального положения плоскости $x = 1$.

Вначале окружность, исказившись, остается замкнутой кривой пересечения. Но, по мере увеличения наклона, она все больше вытягивается. В момент, когда наклоняемая плоскость станет параллельной одной из составляющих конус прямых, линия пересечения уйдет на бесконечность — это и есть парабола.

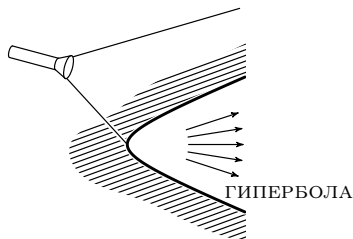
Наклонив плоскость еще немного, мы заметим, что она начала пересекать (где-то очень далеко) и нижнюю половину конуса ($z < 0$), а не только верхнюю: начиная с этого момента параболическости линия пересечения — гипербола (а до него — эллипс).

Все это можно увидеть, освещая землю конусом лучей фонаря. Если он сильно наклонен, то светлое пятно эллиплично. Когда верхний луч конуса становится горизонтальным, освещенный участок ограни-

чен параболой: он уходит на бесконечность (именно по направлению горизонтального луча).

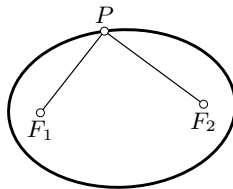


Если же некоторые лучи уходят вверх, то граница светлого пятна гиперболична (в нем умещается целый сектор разных направлений):



Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек P на плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных точек плоскости (называемых фокусами эллипса, F_1 и F_2) постоянна.

$$|PF_1| + |PF_2| = \text{const}$$



Задача. Докажите, что пересечение кругового конуса плоскостью, наклон которой к оси конуса превосходит наклон к ней составляющих конус прямых, есть эллипс.

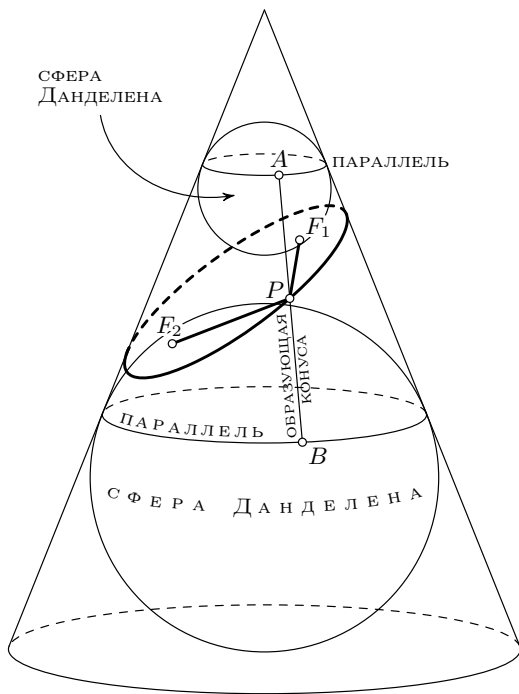
Решение. Впишем в конус два шара: один выше, а другой ниже плоскости. Увеличивая и опуская верхний вписанный шар, мы коснемся им плоскости сечения. Обозначим точку касания через F_1 . Точно так же, уменьшая и поднимая нижний вписанный шар, мы коснемся им плоскости сечения. Обозначим эту точку касания через F_2 .

Две касательные к шару, проведенные из одной точки пространства, имеют одинаковые длины. Поэтому для любой точки P на линии пересечения плоскости с поверхностью конуса выполняются равенства

$$|PF_1| = |PA|, \quad |PF_2| = |PB|,$$

где A и B — точки образующей конуса (прямой, соединяющей P с вершиной конуса), лежащие на параллелях, по которым конус касается верхнего и нижнего шара.

Итак, $|PF_1| + |PF_2| = |PA| + |PB| = |AB|$ представляет собой расстояние между параллелями касания конуса с верхним и нижним шарами, измеряемое вдоль образующей конуса, проходящей через точку P .

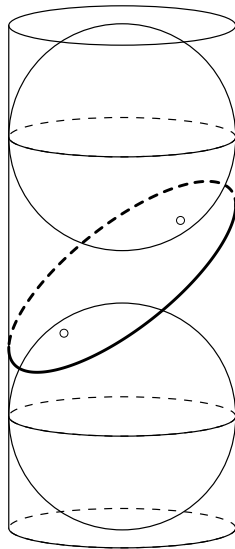


Но это расстояние вдоль любой образующей одинаково, так как при вращении вокруг вертикальной оси конуса и сам конус, и оба касающихся конуса шара переходят сами в себя. Итак, $|PF_1| + |PF_2| = \text{const}$, т. е. линия пересечения конуса плоскостью — эллипс (с фокусами F_1 и F_2).

Сферы, использованные в этом доказательстве, называются *сферами Данделена* (по имени математика, придумавшего описанное выше доказательство).

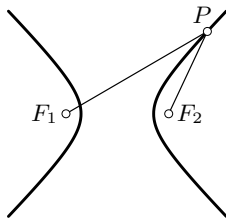
Задача. Докажите, что пересечение цилиндра плоскостью, пересекающей его ось (в одной точке) — эллипс и что все эллипсы можно получить таким образом из цилиндров.

Указание. Рассмотрите сферы Данделена, вписанные в цилиндр.



Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек P на плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости (называемых *фокусами* гиперболы, F_1 и F_2 на рисунке) имеет постоянный модуль:

$$||PF_1| - |PF_2|| = \text{const}$$

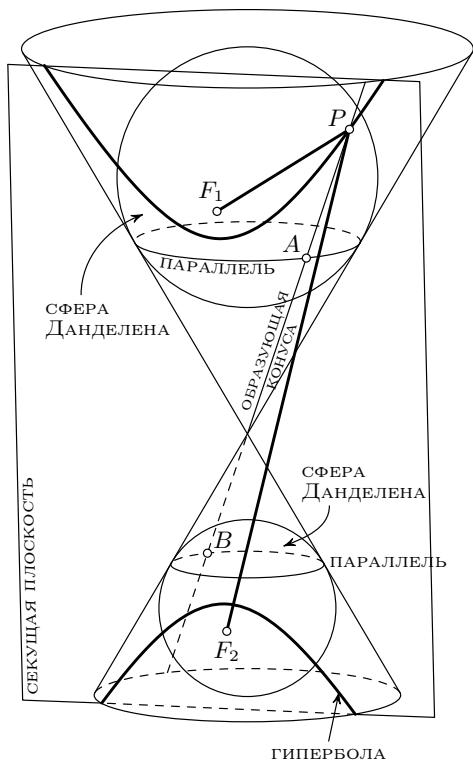


Задача. Докажите, что пересечение поверхности конуса плоскостью, пересекающей обе его половины, — гипербола.

Указание. Постройте соответствующие сферы Данделена — одна касается верхней половины конуса, а другая нижней, вдоль целых параллелей.

Расстояния от точки P до верхней сферы вдоль обеих касательных PF_1 и PA одинаковы. Точно так же равны и длины касательных PF_2 и PB к нижней сфере. Поэтому разность длин касательных к обоим сферам равна расстоянию между точками A и B параллелей касания сфер с конусом вдоль соединяющей эти точки касания образующей PAB конуса (прямой, соединяющей точку P с вершиной конуса).

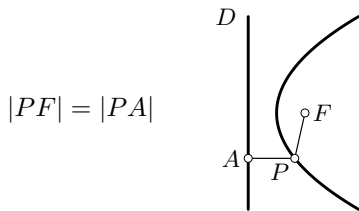
$$\begin{aligned} |PF_1| &= |PA|, \\ |PF_2| &= |PB|, \\ ||PF_1| - |PF_2|| &= |AB| \end{aligned}$$



Но это расстояние AB между соответственными точками на параллелях не зависит от выбора точки P , так как при вращении конуса вокруг его оси обе сферы (и их параллели касания с конусом) переходят в себя, а любая образующая конуса переходит в любую другую (при надлежащем повороте). Итак, линия пересечения конуса с плоскостью — гипербола с фокусами в точках F_1 и F_2 касания плоскости со сферами Данделена.

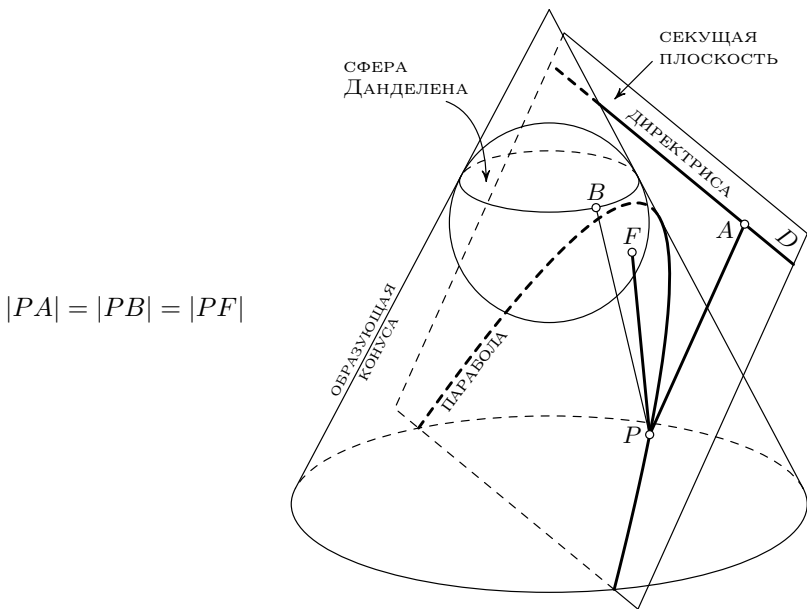
Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от некоторой прямой D (называемой *директрисой параболы*) этой плоскости и от некоторой не лежащей на этой

прямой точки плоскости (называемой *фокусом параболы*, на чертеже F).



Задача. Докажите, что плоскость, параллельная образующей конуса (и не проходящая через его вершину) пересекает конус по параболе.

Указание. Впишите сферу Данделена, касающуюся и плоскости, и конуса, в примыкающую к вершине конуса часть конуса, пересеченную плоскостью.



Обозначим через F точку касания сферы с плоскостью. Для любой точки P линии пересечения плоскости с поверхностью конуса длина PF касательной к сфере равна длине PB касающейся сферы образующей конуса, соединяющей точку P с вершиной конуса.

Точка B лежит на параллели, по которой сфера касается поверхности конуса. (Горизонтальная) плоскость этой параллели пересекает исходную секущую плоскость по (горизонтальной) прямой D .

Длина $|PB|$ (отрезка образующей конуса между точкой P и параллелью касания) равна длине перпендикуляра PA к прямой D , так как эти две наклонные, проведенные к (горизонтальной) плоскости параллели из точки P , одинаково наклонены к этой горизонтальной плоскости (вследствие параллельности исходной плоскости сечения одной из образующих конуса, каковые образующие все одинаково наклонены к горизонтальной плоскости параллели).

Итак, расстояние $|PF|$ от точки P до точки F (касания сферы Данделена с плоскостью сечения) равно расстоянию $|PA|$ от точки P до директрисы D (по которой плоскость параллели пересекает плоскость сечения). Поэтому линия пересечения поверхности конуса с плоскостью, параллельной его образующей, является параболой (с фокусом F и директрисой D).

Замечание. Нетрудно проверить, что в остальных точках секущей плоскости расстояния до F и до D различны, так что парабола с фокусом F и директрисой D не содержит никаких других точек, кроме точек пересечения секущей плоскости с поверхностью конуса.

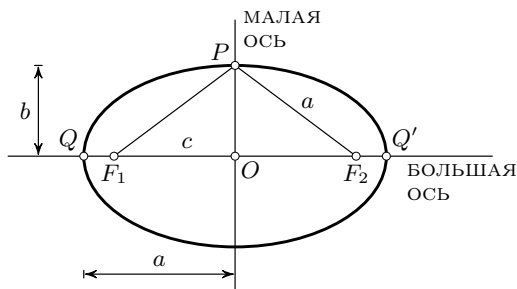
Таким же образом доказывается и то, что ни эллипс (с фокусами F_1 и F_2 в точках касания секущей плоскости со сферами Данделена), ни гипербола (с фокусами F_1 и F_2) не содержат никаких других точек секущей плоскости, кроме точек ее пересечения с поверхностью конуса (принадлежность которых эллипсу и гиперболе мы подробно доказали).

Задача. Найдите оси симметрии эллипса с фокусами F_1 и F_2 (предполагая их различными точками плоскости).

Решение. Прямая, соединяющая фокусы эллипса, очевидно является его осью симметрии.

Является его осью симметрии и перпендикулярная ей прямая, равноудаленная от обоих фокусов.

Первая ось симметрии пересекает эллипс в двух точках, расстояние между которыми больше, чем расстояние между точками пересечения эллипса со второй осью.



Поэтому ось симметрии, проходящая через фокусы, называется *большой осью* эллипса, а перпендикулярная ей ось симметрии — *малой осью* эллипса.

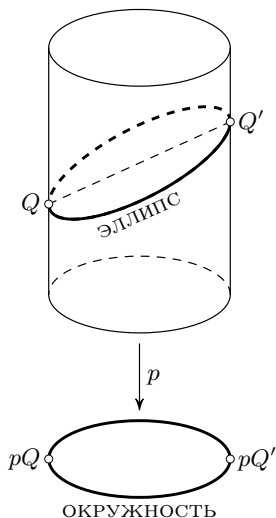
Половину длины большой оси эллипса обозначают обычно буквой a (и называют «большой полуосью», хотя следовало бы называть «длиной большой полуоси»).

Половину длины малой оси эллипса обозначают обычно буквой b (и называют «малой полуосью»).

Задача. Найти сумму расстояний до обоих фокусов для точек эллипса с полуосями a и b .

Решение. Для точки Q пересечения эллипса с большой осью сумма расстояний $|QF_1| + |QF_2| = |QF_2| + |F_2Q'| = 2a$, поэтому сумма расстояний равна длине $2a$ большой оси для любой точки эллипса.

Задача. Докажите, что при сжатии окружности вдоль одной из координатных осей окружность превращается в эллипс.



Решение. Проекция p цилиндра на его круговое основание равномерно сжимает плоскость сечения цилиндра (вдоль направления прямой QQ' , наиболее наклоненной к основанию).

Следствие 1. В системе декартовых координат на плоскости эллипса, с началом координат в точке пересечения осей симметрии эллипса, с осью x , направленной вдоль большой оси, и осью y вдоль малой, уравнение эллипса имеет вид

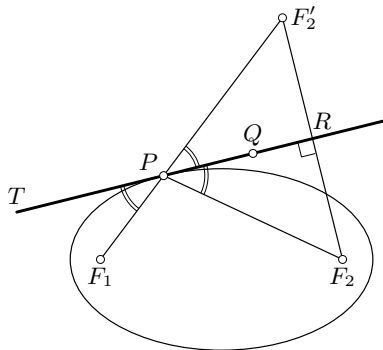
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Действительно, уравнение окружности радиуса 1 на плоскости с декартовыми координатами $X = \frac{x}{a}$, $Y = \frac{y}{b}$ имеет вид $X^2 + Y^2 = 1$.

Следствие 2. Точка евклидовой плоскости с декартовыми координатами $(x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi)$ пробегает при изменении угла φ от 0 до 2π эллипс с полуосями a и b .

Действительно, точка $(X = \cos \varphi, Y = \sin \varphi)$ пробегает при этом окружность радиуса 1.

Задача. Докажите, что касательная к эллипсу образует равные углы с обеими прямыми, соединяющими точку касания с фокусами.



Решение. Отразим фокус F_2 относительно касательной TP к эллипсу в точке P . Отраженную точку F'_2 соединим с точкой P . Тогда $|F_2P| = |F'_2P|$, поэтому ломаная $F_1PF'_2$ имеет длину $|F_1P| + |F_2P| = 2a$.

Для любой другой точки Q прямой T сумма расстояний до фокусов $|QF_1| + |QF_2|$ больше $2a$, так как эта точка лежит вне ограниченной эллипсом области.

Поэтому ломаная $F_1PF'_2$ короче ломаной $F_1QF'_2$, а следовательно, эта первая ломаная доставляет кратчайший путь из F_1 в F'_2 .

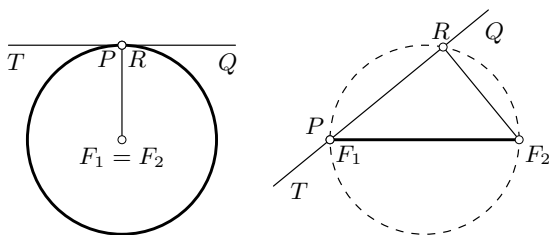
Значит, она прямолинейна, и (вертикальные) углы TPF_1 и QPF'_2 равны. Но углы QPF'_2 и QPF_2 равны как симметричные, так что углы TPF_1 и QPF_2 равны, что и требовалось доказать.

Задача. Найти геометрическое место оснований R перпендикуляров, опущенных из фокуса эллипса F_2 на (всевозможные) касательные к эллипсу.

Решение. Если $F_1 = F_2$ (т.е. $a = b$ и эллипс есть окружность), то эта окружность и будет геометрическим местом оснований R .

Если $2a = |F_1F_2|$, так что эллипс вырождается в отрезок, соединяющий фокусы, то роль касательных TQ играют все прямые, проходящие через фокус F_1 .

Основание перпендикуляра F_2R является тогда вершиной прямоугольного треугольника с гипотенузой F_1F_2 . Такая вершина лежит на окружности, для которой отрезок F_1F_2 является диаметром. Так что и в этом (особом) случае геометрическое место оснований перпендикуляров оказывается окружностью.

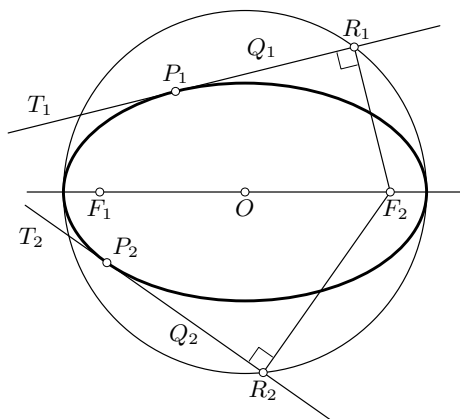


Рассмотрим теперь общий случай. Найдём сперва геометрическое место отраженных фокусов F'_2 решения предыдущей задачи.

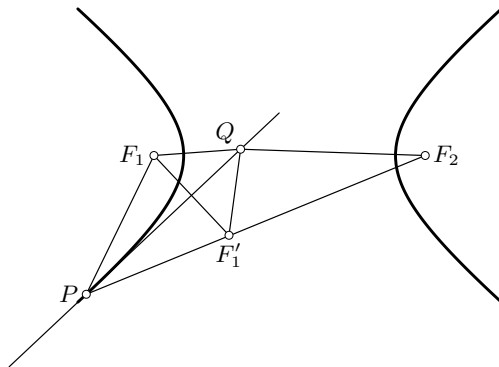
Поскольку $|F_1F'_2| = |F_1P| + |PF_2| = 2a$, это геометрическое место точек F'_2 и представляет собой окружность (с центром в фокусе F_1 и радиусом длины $2a$).

Основание перпендикуляра R получается из точки F'_2 как середина отрезка, соединяющего точку F'_2 с фокусом F_2 . Поэтому геометрическое место точек R получается из (являющегося окружностью) геометрического места точек F'_2 сжатием (вдвое) к точке F_2 .

При таком сжатии окружность превращается во вдвое меньшую окружность (радиуса a с центром в точке O , делящей пополам отрезок F_1F_2 , т. е. в центре исходного эллипса). Эта окружность касается его в концах большой оси (что и следовало ожидать с самого начала).



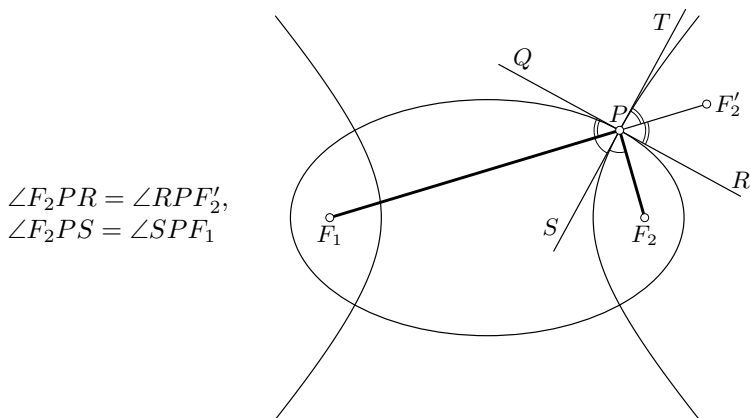
Задача. Докажите, что касательная к гиперболе образует равные углы с прямыми, соединяющими точку касания P с обоими фокусами F_1 и F_2 этой гиперболы.



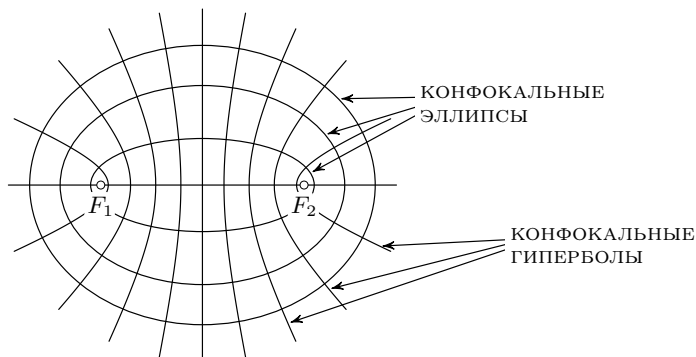
Указание. Отразив один из фокусов (F_1) в касательной, мы получим точку (F'_1), лежащую на соединяющей точку касания P с другим фокусом прямой, иначе разность расстояний от точки гиперболы P до фокусов была бы (по модулю) меньше расстояния $|F'_1F_2|$, так как разность длин двух сторон треугольника по модулю меньше длины третьей его стороны, если треугольник не вырождается: $||QF_1| - |QF_2|| = ||QF'_1| - |QF_2|| < |F'_1F_2|$, если $Q \neq P$.

Задача. Докажите, что эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы F_1 и F_2 , ортогональны (в их точках пересечения).

Указание. Биссектрисы смежных углов перпендикулярны.



Определение. Два конических сечения (эллипсы или гиперболы) называются *конфокальными*, если их фокусы совпадают:



Задача. Докажите, что конфокальные эллипсы и гиперболы ортогональны (в каждой точке их трансверсального пересечения).

Задача. Рассмотрим отображение Жуковского $f: (\mathbb{C} \setminus 0) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus 0)$, отправляющее каждую точку $z = x + iy \neq 0$ в точку $w = z + \frac{1}{z}$.

Докажите, что окружности $|z| = r$ на плоскости $\{z\}$ переходят в (конфокальные) эллипсы (на плоскости $\{w\}$).

Указание. Если модуль комплексного числа z равен r , а аргумент равен φ , то

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad 1/z = r^{-1}(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Поэтому в точках окружности, где $|z| = r$, имеем

$$w = \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \varphi + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \varphi,$$

так что комплексное число $w = u + iv$ имеет вид

$$u = a \cos \varphi, \quad v = b \sin \varphi,$$

где $a = r + \frac{1}{r}$, $b = r - \frac{1}{r}$.

Значит, точка $w(\varphi)$ пробегает при изменении φ от 0 до 2π эллипс с направленной вдоль оси u большой полуосью a , с малой полуосью b и с центром $w = 0$.

Расстояние от центра до фокусов, из прямоугольного треугольника на с. 12, есть $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, согласно теореме Пифагора. Но $a^2 - b^2 = \left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 = 4$, так что $c = 2$ не зависит от r . Поэтому эллипсы, соответствующие разным значениям r , конфокальны: их фокусы $w = \pm 2$ не зависят от r .

Задача. Докажите, что семейство конфокальных эллипсов можно задать (в декартовых координатах x и y на евклидовой плоскости) уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1, \quad (1)$$

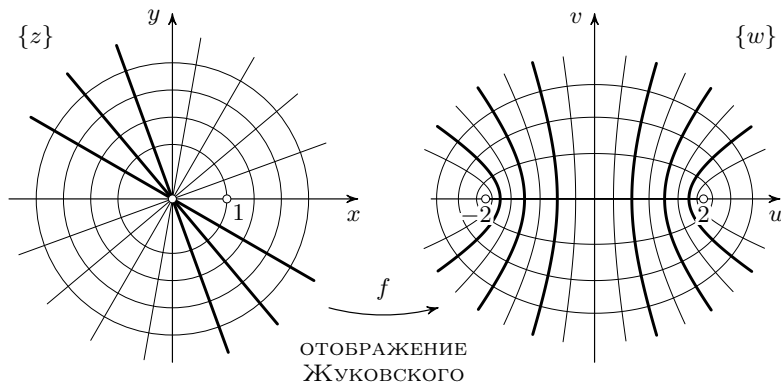
где параметр λ определяет, какое именно коническое сечение из семейства конфокальных эллипсов (и гипербол) задается этим уравнением.

Задача. Докажите, что проходящие через 0 прямые $\arg \varphi = \text{const}$ на плоскости $\{z\}$ переходят при отображении Жуковского, переводящем z в $w = f(z)$, в гиперболы на плоскости w , конфокальные эллипсам, в которые переходят при этом отображении окружности $|z| = \text{const}$.

Решение. Умножение на комплексное число, отличное от 0, сохраняет углы. Поэтому две кривые, образующие в точке своего пересечения на плоскости z угол α , переходят при отображении $z \mapsto f(z)$ в две кривые, пересекающиеся под таким же углом.

Прямые $\arg z = \text{const}$ ортогональны окружностям $|z| = \text{const}$. Поэтому образы этих прямых ортогональны конфокальным эллипсам, в которые отображение переводит окружности.

Но конфокальные этим эллипсам гиперболы ортогональны им, как мы видели выше. Значит, образы прямых $|z| = \text{const}$ и есть эти гиперболы.



При этом окружность $|z| = 1$ переходит в отрезок, соединяющий фокальные точки ± 2 , покрывая его дважды, а внешнее по отношению к этой окружности на плоскости $\{z\}$ кольцо, как и внутреннее, отображается взаимно однозначно (и гладко) на дополнение в плоскости $\{w\}$ к соединяющему фокусы отрезку.

Через каждую точку (x, y) плоскости проходят эллипс и гипербола конфокального семейства. Поэтому квадратное уравнение (1) относи-

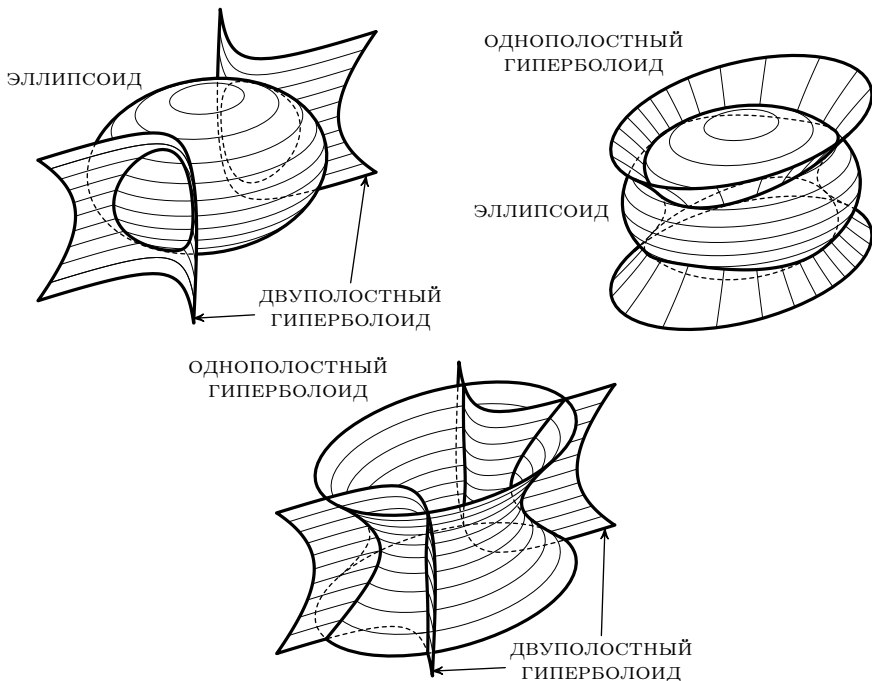
тельно переменной λ (где $a^2 \neq b^2$) имеет при каждом (x, y) два вещественных корня λ_1 и λ_2 . Функции $\lambda_1(x, y)$ и $\lambda_2(x, y)$ образуют систему (ортогональных) *эллиптических координат* на плоскости (x, y) .

Задача. Исследовать систему эллиптических координат $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ в трехмерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами (x, y, z) , заданных уравнением

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$$

(где $a^2 < b^2 < c^2$). Доказать, что из трех поверхностей $\lambda_1(x, y, z) = \text{const}$, $\lambda_2(x, y, z) = \text{const}$, $\lambda_3(x, y, z) = \text{const}$ одна — эллипсоид, другая — однополостный гиперболоид, третья — двуполостный гиперболоид.

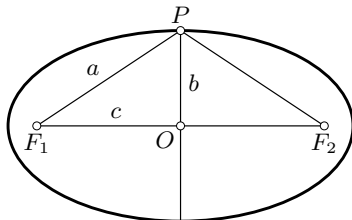
Доказать, что поверхности этих трех видов пересекаются попарно ортогонально (в каждой точке евклидова пространства с декартовыми координатами x, y, z).



Нарисуйте линии системы эллиптических координат на поверхностях эллипсоида и однополостного гиперболоида. Докажите ортогональность этих координатных кривых и исследуйте особенности этой системы координат.

Определение. Для эллипса с полуосями $a > b$ расстояние от фокусов до центра эллипса (точки пересечения осей) обозначается через c , и отношение c/a называется *эксцентриситетом*.

Задача. Найти длину малой полуоси эллипса с длиной большой полуоси $a = 1$ м и эксцентриситетом $e = 0,1$ (фокусы которого удалены от центра на 10 см).



Решение. В прямоугольном треугольнике F_1OP имеем $|F_1P| = a$, $|OP| = b$, $|OF_1| = c$.

По теореме Пифагора

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad \text{так что} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Из формулы $(1 + t)^2 = 1 + 2t + t^2$ видно, что при малых t имеет место приближенное равенство

$$(1 + t)^2 \approx 1 + 2t \quad (\text{с погрешностью } t^2),$$

откуда при малых u имеем

$$\sqrt{1 + u} \approx 1 + \frac{u}{2} \quad (\text{с погрешностью порядка } u^2).$$

Итак, малая полуось нашего эллипса имеет длину

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \approx a\left(1 - \frac{e^2}{2}\right) = (1 \text{ м})\left(1 - \frac{0,1^2}{2}\right),$$

так что малая полуось короче большой примерно на $1/200$ ее длины (т. е. примерно на полсантиметра).

Стало быть, эллипс с эксцентриситетом $e = 0,1$ практически неотличим от окружности (хотя его фокусы значительно удалены от центра O).

Физика конических сечений и эллипсоидов

Кеплер открыл законы движения планет, исследуя многолетние наблюдения планеты Марс своего учителя Тихо Браге.

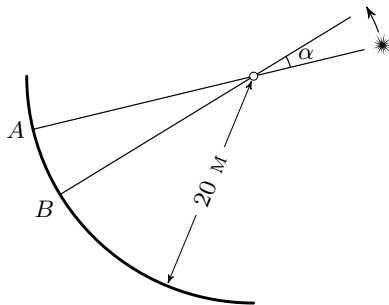
Эксцентриситет этой эллиптической орбиты составляет $e \approx 0,1$. Поэтому Кеплер вначале пришел к такому выводу: Марс движется по окружности, смещенной относительно Солнца так, что оно находится от центра окружности на одну десятую ее радиуса.

Лишь позже, используя огромную точность наблюдений Тихо Браге, Кеплер заметил, что орбита не совсем круговая (и пришел к выводу о ее эллиптичности).

Таким образом, закон движения планет по эллипсам («первый закон Кеплера») был обнаружен Кеплером лишь благодаря хорошему пониманию им геометрии конических сечений, включающему решение последней задачи предыдущей главы:

$$a - b \approx \frac{e^2}{2} a. \quad (2)$$

Интересно, что обсерватория Тихо Браге производила все использованные Кеплером наблюдения безо всяких телескопов. Звезды и планеты наблюдались через малое отверстие из точек дуги радиусом около 20 м с центром в этом отверстии. Перемещение светила на угол α в один градус соответствует при этом сдвигу AB точки наблюдения на три с половиной сантиметра, так что измерения углов с точностью в одну дуговую минуту ($1^\circ/60$) вполне реальны.

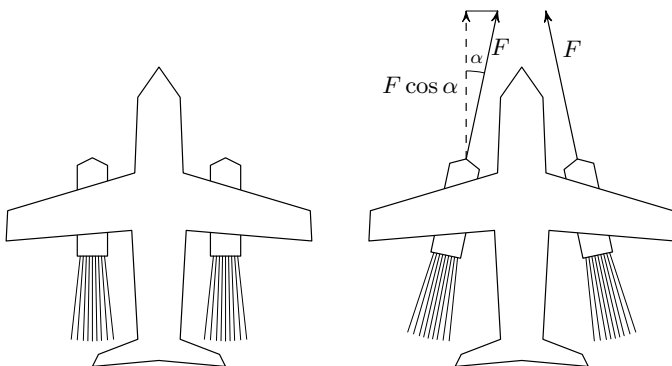


Только столь высокая точность наблюдений позволила Кеплеру открыть свои законы.

Сотней лет позже Ньютон послал своего ученика Галлея в обсерваторию Тихо Браге с заданием доказать там практически, что и телескопические измерения можно производить со столь же высокой точностью: астрономы обсерватории Тихо Браге в это не верили, так как длины телескопов тех времен едва достигали одного метра, так что соответствующее углу α в 1° перемещение AB окуляра телескопа составляло меньше пары миллиметров.

Решение этой технической задачи точного измерения углов потребовало значительных усилий, и я не буду здесь рассказывать о системах винтовых нониусов, при помощи которых она была решена (и без которых были бы невозможны ни телескопические измерения, ни запуски ракет).

Вот еще одно техническое приложение той же идеи, которая приводит к формуле (2). При строительстве первых реактивных самолетов горячая струя двигателя сжигала хвостовое оперение самолета. Конструкторы предложили слегка повернуть двигатели, чтобы отодвинуть горячую струю от корпуса самолета.



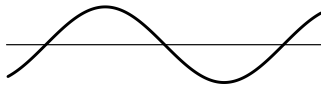
Поворот на угол α отклоняет струю на расстояние, пропорциональное α . Но сила тяги F , слегка изменив направление, тянет самолет вперед только своей продольной компонентой $F \cos \alpha$.

Потеря в силе тяги составляет, по теореме Пифагора,

$$F(1 - \cos \alpha) \approx F \frac{\alpha^2}{2}.$$

Например, для угла в 3° (что уже сильно отклоняет струю) потеря составляет $F(1/20)^2/2$, т. е. теряется всего примерно одна восьмисотая часть силы тяги!

Задача. Мистер N возвращается домой, вместо прямого пути, по синусоиде. Насколько пройденный им путь больше прямого расстояния до дома?

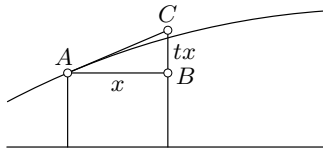


Большинство думает, что синусоида длиннее прямой если и не вдвое, то по меньшей мере в полтора раза. Но в действительности она длиннее всего лишь на 20% (примерно).

Это объясняется той же формулой

$$\sqrt{1+t^2} \approx 1 + \frac{t^2}{2}$$

(с ошибкой порядка t^4) при малых t . Здесь t — тангенс угла между кривой и прямой траекториями.



По теореме Пифагора гипотенуза (маленького при малых x) прямоугольного треугольника ABC с малым углом при вершине A , имеющим тангенс t , составляет $\sqrt{x^2 + t^2 x^2} = x\sqrt{1+t^2} \approx x(1+t^2/2)$.

Например, для $t = 1/3$ (что соответствует углу порядка 20° при вершине A) гипотенуза AC длиннее катета AB примерно на $(1/3)^2/2$, т. е. всего примерно на 5%.

Угол синусоиды с прямой мистера N нигде не превосходит 45° , на большей части пути он значительно меньше — от этого и получается столь малое превышение длины синусоидального пути над длиной прямого пути.

Задача. Вычислите приближенно (с четырьмя верными десятичными знаками) квадратный корень из числа 0,996.

Ответ. 0,9980.

Задача. Вычислите приближенно (с погрешностью порядка u^2) величину $\sqrt[3]{1+u}$, где u мало.

Ответ. $1 + u/3$.

Задача. Вычислите приближенно (с погрешностью порядка u^2) величину $(1+u)^n$, где u мало.

Например, для $n = 3, 1/5, -1$ получаются важнейшие формулы

$$(1+u)^3 \approx 1 + 3u, \quad \sqrt[5]{1+u} \approx 1 + u/5, \quad \frac{1}{1+u} \approx 1 - u.$$

Общая формула, верная при малых $|u|$ с ошибкой порядка u^2 ,

$$(1 + u)^n \approx 1 + nu$$

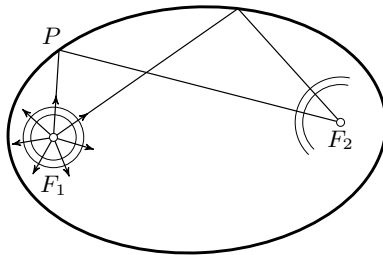
вместе с ее уточнениями

$$(1 + u)^n = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2!}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^3 + \dots$$

называется формулой бинома Ньютона (потому, что она была известна до него, как для целых положительных показателей n , так и в других случаях).

Вернемся к исследованию эллипсов малых эксцентриситетов.

Еще один пример применения поразительной близости эллипса небольшого эксцентриситета к окружности доставляет теория распространения волн в эллиптической области.



Рассмотрим эллиптическую чашку с водой и капнем каплю воды в один из фокусов, F_1 . От этого по поверхности воды начнут расходиться из точки F_1 круговые волны. Дойдя до края, волны отразятся от него и будут распространяться далее вдоль лучей, ортогональных фронтам волн. В момент отражения луч сменит направление по закону «угол падения равен углу отражения». Согласно задаче на с. 14, отраженный луч проходит через второй фокус эллипса, F_2 .

Поэтому все отраженные лучи собираются во втором фокусе. Отраженные волны дойдут до второго фокуса вдоль этих лучей одновременно, так как все ломаные лучи F_1PF_2 имеют одинаковую (равную $2a$) длину.

Итак, когда вышедшие из F_1 волны доберутся до второго фокуса, их фронты будут иметь вид окружностей с центром F_2 , и мы заметим в этот момент всплеск в точке F_2 .

Предположим теперь, что эллипс имел малый эксцентриситет e . Тогда он практически неотличим от окружности ($a - b \sim ae^2/2$), хотя фокус заметно отличается от центра ($c \sim ae$).

Из этого следует, что описанный выше опыт с эллиптической чашкой можно осуществить и в обычной круглой чашке, в которой поверхность воды ограничена окружностью.

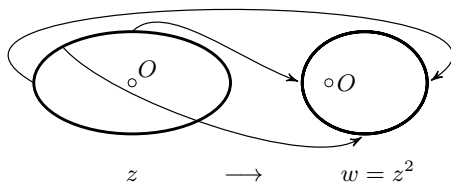
А именно, капнув каплю воды на поверхность воды, скажем, на расстоянии в треть радиуса от центра, мы увидим, как сферические волны, отразившись от края чашки, соберутся снова вместе, создав заметный всплеск в точке F_2 , симметричной исходной точке F_1 , где были возбуждены волны, относительно центра чашки.

Таким образом, каждый может легко продемонстрировать исследованные выше свойства эллипса, капнув каплю чая в обычную круглую чашку. Всплеск в симметричной точке хорошо заметен (только, конечно, чай в это время не следует мешать, напротив, начальные скорости его частиц должны быть нулевыми).

Задача. Рассмотрим на плоскости комплексной переменной z эллипс с центром в точке $z = 0$ и отображим каждую точку z в точку $w = z^2$.

Каким будет образ исходного эллипса на плоскости комплексной переменной w ?

Решение. Образ будет эллипсом с фокусом в точке $w = 0$.



Для доказательства воспользуемся задачей на с. 17. С этой целью рассмотрим новую комплексную переменную t и сопоставим числу t значение «функции Жуковского»

$$z = t + \frac{1}{t}.$$

Согласно задаче на с. 17, исходный эллипс на плоскости переменной z можно получить из подходящей окружности $|t| = r$ на плоскости переменной t (если его фокусы находятся в точках $z = \pm 2$).

Теперь мы находим

$$w = z^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2.$$

Точка $t^2 + \frac{1}{t^2}$ принадлежит эллипсу с фокусами ± 2 (поскольку $|t^2| = r^2$). Прибавление двойки сдвигает фокус -2 в точку $w = 0$, что и до-

казывает сделанное утверждение (для исходного эллипса с фокусами $z = \pm 2$).

Если фокусы исходного эллипса находятся в другом месте, $\pm F$, то утверждение об эллипсе-образе на плоскости переменной w остается верным. От комплексной координаты z можно перейти к координате $z' = kz$ (с комплексным коэффициентом k), выбрав коэффициент k так, чтобы $z = 2$ соответствовало $z' = F$ (т. е. выбрав $k = F/2$). Применяя доказанное утверждение к эллипсу с фокусами $z = \pm 2$, мы получим его и для эллипса с фокусами $z' = \pm F$.

Закон Гука (движения под действием сил упругости) состоит в том, что сила, действующая на отклоненную точку, пропорциональна отклонению, но действует в обратном отклонению направлении:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -c\vec{x}.$$

Легко видеть, что такая точка совершает гармонические колебания около точки $\vec{x} = 0$:

$$\vec{x}(t) = \vec{A} \cos(\omega t) + \vec{B} \sin(\omega t) \quad (\text{где } \omega^2 = c).$$

Орбитой такого движения является эллипс с центром в точке 0.

Решение предыдущей задачи показывает, что если считать плоскость колебаний вектора $\vec{x}$ комплексной прямой и возвести комплексное число $z = \vec{x}$ в квадрат, то получится орбита ($w = z^2$) движения в поле всемирного тяготения (или в электростатическом поле Кулона), сила которого, направленная к притягивающему центру, обратно пропорциональна по величине квадрату расстояния до притягивающего центра.

Этот факт можно прямо вывести из геометрии конических сечений, связанных преобразованием $w = z^2$. Этот вывод доставляет простейшее доказательство важнейшего факта математической физики: орбиты в поле всемирного тяготения (или кулоновском) являются коническими сечениями с фокусом в притягивающей точке.

Я не останавливаюсь здесь на подробном доказательстве этой теоремы, предоставляя его читателям. Замечу лишь, что преобразование $z \mapsto (z^2 = w)$ не переводит *движение* под действием силы Гука в движение под действием сил Ньютона или Кулона, а переводит друг в друга лишь орбиты этих движений, но не времена движений вдоль соответствующих (гуковских и ньютоновских или кулоновских) эллипсов.

Интересно отметить, что для всевозможных законов притяжения к центру с силой, величина которой зависит лишь от расстояния до притягивающего центра, замкнутые орбиты (для целой области начальных условий) получаются только в двух рассмотренных выше случаях:

когда сила либо прямо пропорциональна первой степени расстояния, либо обратно пропорциональна второй степени расстояния до центра.

Орбиты в полях притяжения с силами, пропорциональными расстояниям в степени α и в степени β , переводятся друг в друга преобразованиями вида $z \mapsto (w = z^\gamma)$, если и только если

$$(\alpha + 3)(\beta + 3) = 4,$$

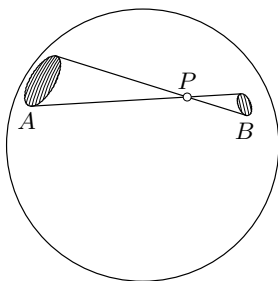
причем эта странная двойственность сохраняется даже для квантово-механических частиц. Эти утверждения можно проверить прямыми (хотя и длинными) вычислениями. Но существует и геометрическое доказательство, основанное на анализе вариационных «принципов наименьшего действия», заменяющих дифференциальные уравнения движения. Некоторые математики считают, будто «геометрией называется метод не делать ошибок в длинных вычислениях». Я с ними не согласен, хотя Жан-Жак Руссо мудро объяснил в своей «Исповеди», что в детстве долго не мог поверить в правильно самостоятельно открытую им путем раскрытия скобок алгебраическую формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и что «настоящее доказательство» доставила ему только геометрическая картинка.

ba	b^2
a^2	ab

Конфокальные семейства алгебраических поверхностей второй степени появляются удивительным образом в теории гравитационного притяжения. Первым результатом этого направления была здесь следующая

Теорема Ньютона. *Однородная сфера притягивает точки вне ограниченного ею шара с такой же силой, как если бы вся ее масса была сосредоточена в центре. Внутри же этого шара результирующая сил притяжения всеми точками сферы равна нулю.*

Доказательство второго утверждения основано на том, что каждая прямая пересекает сферу под одинаковыми углами в обеих точках своего пересечения со сферой.



Из этого следует, что площади противоположных участков сферы, отсекаемых на ней узким конусом с вершиной во внутренней точке P около точек A и B сферы, прямо пропорциональны квадратам расстояний $|PA|$, $|PB|$.

Но сила притяжения обратно пропорциональна квадрату расстояния. Значит, силы притяжения точки P противоположными участками, направленными в противоположные стороны от точки P , равны по величине, а следовательно, уравнивают друг друга (имеют нулевую результирующую силу).

Первое утверждение тоже имеет простое геометрическое доказательство. Его проще всего объяснить в гидродинамических терминах: векторное поле притяжения к точке, обратно пропорциональное квадрату расстояния до нее (в трехмерном евклидовом пространстве) является полем скоростей несжимаемой жидкости (в дополнении к притягивающей точке).

Это следует из того, что мощность «источников» такого поля скоростей, как и само это поле, сферически симметрична. В то же время поток этого поля через поверхность любой сферы с центром в притягивающей точке («количество жидкости, протекающей через эту поверхность за единицу времени») одинаково для любой сферы (так как скорость обратно пропорциональна квадрату радиуса сферы, а площадь сферы прямо пропорциональна этому квадрату).

Значит, слой между двумя концентрическими сферами имеет нулевую суммарную мощность всех находящихся в нем источников нашей «жидкости». Следовательно, эта мощность источников равна нулю в каждой точке сферы, так что текущая «жидкость» несжимаема.

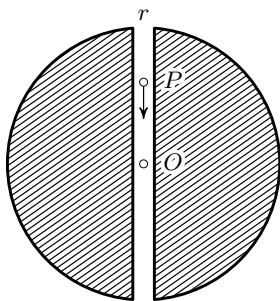
Из этого замечательного свойства гравитационного поля точки вытекает такая же несжимаемость поля притяжения любым телом во всех точках вне этого тела (так как эти поля получаются сложением полей, созданных отдельными частицами тела, а мощность источников суммы полей есть сумма мощностей источников складываемых полей).

Остается заметить, что при перенесении частицы шара в его центр поток поля притяжения этой частицей через сферу с центром в центре шара, радиус которой больше радиуса шара, не меняется.

Перенеся в центр все точки шара, мы получим векторное поле притяжения, которое будет столь же сферически симметричным, как и исходное векторное поле, и будет иметь такой же поток, как и оно, через поверхность любой сферы с центром в центре шара.

Значит, эти два векторных поля совпадают, что и доказывает первую часть теоремы Ньютона.

Задача. В однородном шаре пробита шахта (вдоль диаметра, соединяющего две противоположные точки сферы), и материальная точка P начинает падать внутрь этой шахты (с нулевой начальной скоростью). Исследовать движение этой точки под действием сил притяжения частями шара.



Решение. Точка P будет совершать гармонические колебания: ее расстояние до центра O шара радиуса r станет меняться со временем t как $x = r \cos(\omega t)$. Вычисление частоты ω этих колебаний — интересная дополнительная задача, период колебаний точки P связан с полуторачасовым периодом обращения вокруг Земли близкого спутника с «первой космической скоростью», составляющей около 8 км/сек.

Доказательство. Части шара, удаленные от центра больше, чем падающая точка P , не притягивают ее (по второй части теоремы Ньютона). Масса m части шара, удаленной от центра O на расстояние, меньшее чем $x = |OP|$, пропорциональна кубу расстояния точки P до центра шара, $m = \text{const} \cdot x^3$.

Суммарная сила притяжения этой частью прямо пропорциональна ее массе и обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра, $F = \text{const} \cdot m/x^2 = -cx$.

Следовательно, поле тяготения внутри шахты — поле закона Гука, притягивающая к центру сила прямо пропорциональна расстоянию до центра.

Поскольку колебания, вызванные законом Гука, гармонические, мы находим $x = r \cos(\omega t)$ (из уравнения движения Ньютона $\frac{d^2x}{dt^2} = -cx$).

Обратимся теперь к притяжению несферических тел. Земля, например, близка к эллипсоиду, малая ось которого меньше большой примерно на $1/300$.

Теоремы Ньютона о притяжении однородными сферами и шарами принимают в этом случае следующий вид (называемый обычно «теоремой Айвори»).

Теорема. *Однородный эллипсоид притягивает расположенные вне его точки так же, как и любой конфокальный с ним эллипсоид, расположенный внутри него.*

Однородный слой между двумя конфокальными эллипсоидами во все не притягивает точки внутри меньшего ограничивающего слой эллипсоида.

Доказательство этой теоремы прямыми вычислениями возможно, но довольно длинно. Геометрическое доказательство (по образцу приведенного выше доказательства для сферического случая) тоже возможно. Отмечу лишь следующее дополнение к приведенной теореме (облегчающее и ее понимание, и ее доказательство).

Теорема. *Сила притяжения однородным эллипсоидом направлена вдоль ортогональных ему линий системы эллиптических координат (и ортогональна поверхностям конфокальных с ним эллипсоидов) вне исходного эллипсоида.*

Поверхности постоянной потенциальной энергии (для этого силового поля притяжения эллипсоида) являются поверхностями конфокальных с ними эллипсоидов.

Поскольку кулоновское электростатическое поле совпадает (с точностью до знака) с гравитационным, эти результаты доставляют также описание распределения зарядов на проводящем эллипсоиде и описание поля (притяжения или отталкивания) этими зарядами вне эллипсоида (внутри него поле нулевое: «проводник экранирует поле», как говорят физики).

А именно, весь заряд собирается на поверхности эллипсоида, и его плотность выше там, где кривизна эллипсоида больше: она определяется толщиной слоя между исходным эллипсоидом и близким к нему конфокальным эллипсоидом.

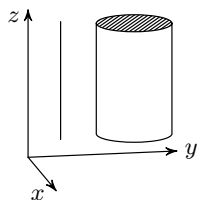
Силовые линии созданного вне эллипсоида электрического поля представляют собой линии эллиптической системы координат, включающей исходный эллипсоид в качестве поверхности постоянства одной из эллиптических координат, причем эти линии перпендикулярны этой поверхности.

Все описанные результаты об эллиптических координатах в $\mathbb{R}^3$ переносятся и на случай евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Только величина «гравитационного поля точки» в $\mathbb{R}^n$ ведет себя не как r^{-2} (из законов тяготения и Кулона), а как $r^{-(n-1)}$ (для несжимаемости величина поля на сфере радиуса r должна быть обратно пропорциональна $(n-1)$ -мерному объему этой $(n-1)$ -мерной сферы).

Например, при $n=2$ «гравитационное» поле точки убывает обратно пропорционально расстоянию до притягивающей точки.

Физически это можно истолковать, например, так. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве с декартовыми координатами (x, y, z) распределение масс, однородное вдоль вертикальной оси z (т.е. переходящее в себя при сдвигах пространства вдоль оси z).

Например, мы допускаем однородные вертикальные стержни (бесконечной длины), бесконечные однородные вертикальные цилиндры, вертикальные однородные плоскости и т.п.

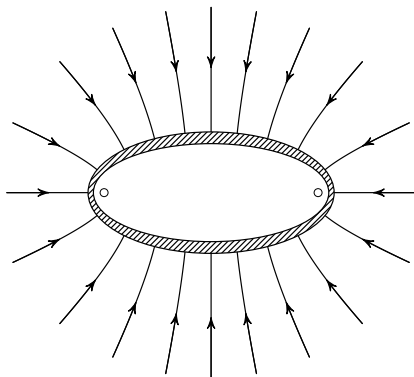


Сила притяжения, созданная такими вертикально стоящими массами, инвариантна относительно сдвигов вдоль вертикальной оси z (а также относительно отражения в горизонтальном зеркале, переводящего точку (x, y, z) в $(x, y, -z)$). Поэтому такая сила направлена горизонтально, так что мы получаем силовое поле в горизонтальной плоскости (x, y) .

Вычисления показывают, что величина силы притяжения, созданной вертикальным однородным стержнем, обратно пропорциональна первой степени расстояния от притягиваемой точки до этого стержня.

Таким образом, в евклидовой горизонтальной плоскости получается именно то силовое поле, которое мы назвали выше «гравитационным полем в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ ».

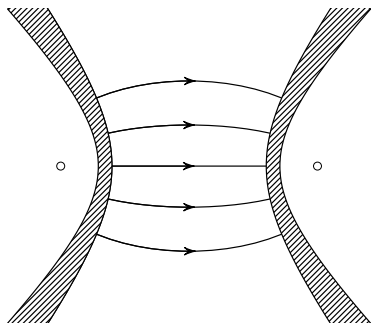
Следствие. *Гравитационное поле однородного слоя между двумя конфокальными эллипсами на евклидовой плоскости равно нулю внутри меньшего граничного эллипса, а вне большего граничного эллипса направлено вдоль гипербол, конфокальных этим эллипсам.*



Задача. Докажите, что эквипотенциальные кривые этого поля (соединяющие точки, в которых потенциальная энергия поля одинакова)

представляют собой эллипсы, конфокальные эллипсам, ограничивающим исходный слой.

Замечание. Аналогичное описание можно дать и для двумерного кулоновского поля, созданного однородным распределением зарядов между двумя конфокальными гиперболами, только в этом случае вдоль одной ветви следует расположить положительные заряды, а вдоль другой — такие же отрицательные заряды.



Это поле равно нулю в выпуклых частях плоскости, ограниченных дугами гиперболы.

В этом случае силовые линии поля — части конфокальных исходным гиперболам эллипсов, расположенные в области между обоими заряженными слоями. Эквипотенциальные кривые в этом случае — гиперболы, конфокальные исходным (и расположенные между обоими заряженными слоями).

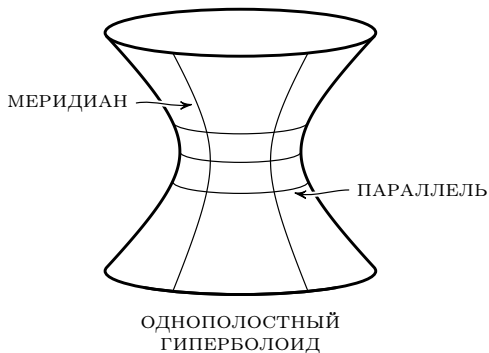
Все сказанное обобщается и на евклидовы пространства других размерностей n . Например, при $n = 3$ можно зарядить противоположными зарядами две полы двуполостного гиперboloида, расширенного до слоя между ним и близким конфокальным ему гиперboloидом.

Обычное кулоновское поле такого распределения зарядов направлено в области между обоими полами гиперboloида вдоль ортогональных этому гиперboloиду линий эллиптической системы координат (по которым пересекаются эллипсоиды и однополостные гиперboloиды семейства).

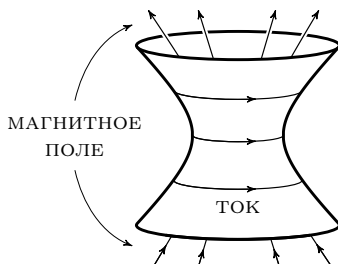
Интересно, что если начать с однополостного гиперboloида в трехмерном пространстве, то аналогичные конструкции доставляют не электростатические поля в дополнительных областях, а магнитные.

А именно, линии системы эллиптических координат на однополостном гиперboloиде делятся на два класса: замкнутые «параллели», по которым этот гиперboloид пересекается с конфокальными ему эллип-

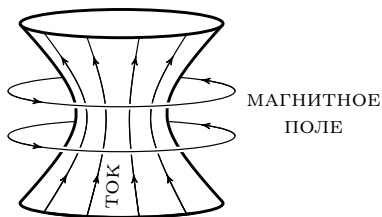
соидами, и ортогональные этим параллелям «меридианы», идущие из бесконечности в бесконечность.



Оказывается, по поверхности однополостного гиперboloида можно пустить, вдоль параллелей, такой ток, что созданное этим «соленоидом» магнитное поле будет исчезать в большой внешней кольцевой области гиперboloида, в то время как внутри трубы, ограниченной гиперboloидом, это магнитное поле будет направлено вдоль меридианов расположенных там однополостных гиперboloидов, конфокальных исходному.



Вдоль меридианов исходного однополостного гиперboloида можно пустить ток так, что созданное этим током магнитное поле будет исчезать внутри трубы, ограниченной гиперboloидом.



В большой внешней кольцевой области, дополнительной к этой трубе, линии магнитного поля будут при этом замкнутыми кривыми — это параллели на поверхностях однополостных гиперboloидов, конфокальных исходному и расположенных во внешней кольцевой области (по которым эти гиперboloиды пересекают конфокальные им эллипсоиды).

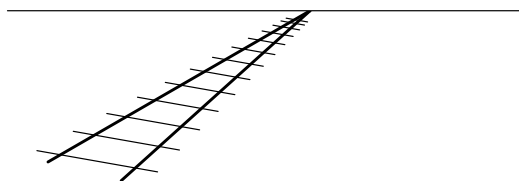
Все эти утверждения (и их многомерные обобщения) можно доказать прямыми (хотя и длинными) вычислениями, но эти простые геометрические и физические факты долго оставались незамеченными ни математиками, ни физиками, так как их понимание требует одновременного владения и геометрией эллиптических координат (заложившей основы современной теории «вполне интегрируемых гамильтоновых систем»), и математической физикой уравнений Максвелла теории электромагнитного поля, и топологией «теоремы де Рама» многообразий.

Трудная часть возникающей здесь теории объяснена выше, но технические детали вычислений оставляются читателям.

Глава 3

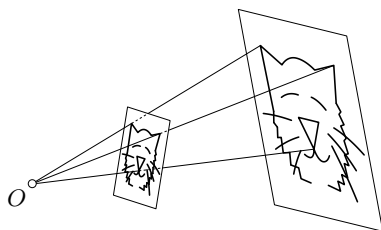
Проективная геометрия

Каждому ясно, что ветви гиперболы «уходят на бесконечность», но точный смысл эти слова приобретают лишь в проективной геометрии — науке, возникшей при математическом анализе «сходящихся» вдали рельсов изображения железной дороги, прямо уходящей к горизонту.



Перспективы этого рода давно использовались художниками. Например, Вазари рассказывает в жизнеописании Паоло Уччелло, что этот художник (времен Рафаэля) так увлекался рисованием своих перспектив, что, когда жена к полночи звала его из мастерской спать, ответил ей: «Сейчас приду — какая прекрасная перспектива!» (имея в виду заканчиваемый им архитектурный рисунок уходящего вдаль города).

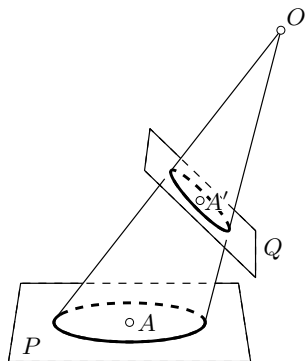
Наименование «проективная геометрия» происходит от проектирования друг на друга двух плоскостей, производимого лучами, проходящими через одну «точку наблюдения» O :



Вот пример совершенно нетривиального факта проективной геометрии.

Теорема. *Центр заданной на плоскости окружности невозможно построить одной линейкой, не располагая циркулем (с помощью которого построить центр нетрудно).*

Доказательство. Рассмотрим над плоскостью «косой конус», в основании которого лежит заданная окружность, а вершина которого, O , ортогонально проектируется на плоскость в точку, отличную от центра заданной окружности.



Нетрудно видеть, что этот косой конус пересекается по окружностям не только плоскостью P исходной окружности (и параллельными ей плоскостями), но также еще другой плоскостью Q (наклоненной по отношению к центральной оси конуса, по которой пересекаются две его плоскости симметрии, в противоположную сторону по отношению к плоскости P).

Если бы существовал алгоритм построения линейкой центра окружности на плоскости P , то некоторая система прямых на этой плоскости (построенных при помощи заданной окружности) определяла бы центр этой окружности как точку пересечения определенных двух прямых этой системы.

Спроектируем всю эту систему прямых на плоскость Q из центра O . Тогда спроектированные прямые доставляли бы такую же систему прямых на плоскости Q , построенную по спроектированной туда исходной окружности, и поэтому проекции двух заключавших построение центра прямых системы пересекались бы в центре спроектированной окружности.

Однако простое рассуждение показывает, что центр A исходной окружности плоскости P проектируется из O на плоскость Q вовсе не в центр A' спроектированной туда окружности: точки A , A' и O не лежат на одной прямой.

Это доказывает невозможность построения центра одной линейкой, без помощи циркуля.

Описанная выше в гл. I теория конических сечений показывает, что проектированием окружности из точки трехмерного пространства на подходящую плоскость можно получить и эллипсы, и гиперболы, и параболы.

Задача. Докажите, что проектирования эллипсов, гипербол и парабол (из различных центров на различные плоскости) снова приводят только к эллипсам, гиперболам и параболом.

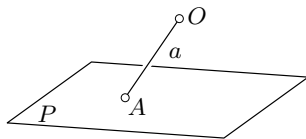
Указание. Исследуйте, является ли произведение (последовательное выполнение) двух проектирований снова проектированием: если это так, то, скажем, проекцию эллипса (из какого-либо центра на какую-либо плоскость) можно получить как проекцию той окружности, проекцией которой является этот эллипс.

Математический аппарат проективной геометрии использует *проективную плоскость*, получающуюся из обычной плоскости добавлением к ней так называемых бесконечно удаленных точек. Вот как она определяется.¹

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве какую-либо точку O и все прямые, проходящие через эту точку.

Эти прямые объявляются точками проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Чтобы описать множество всех этих прямых (т. е. множество всех точек вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$), можно поступить следующим образом.

Зафиксируем в нашем пространстве какую-либо плоскость P , не проходящую через выбранную точку O .

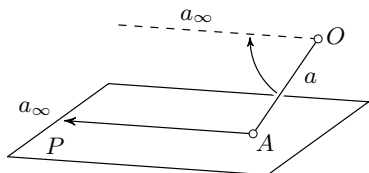


Каждой точке A плоскости P соответствует прямая $a = AO$, проходящая через точку O . Таким образом, мы получим почти все точки a проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ из точек A обычной евклидовой плоскости P .

Предположим теперь, что точка A движется по плоскости P , уходя по какому-нибудь направлению в бесконечность.

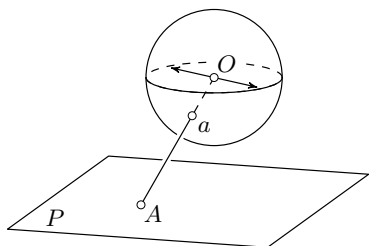
¹Гёте говорил по этому поводу: если ты хочешь понять стремление к бесконечности, нужно просто выходить из точки в конечной области по всевозможным направлениям.

Соответствующая прямая $a = OA$ будет тогда поворачиваться вокруг точки O , и в пределе (при $A \rightarrow \infty$) будет стремиться ко вполне определенной прямой a_∞ (параллельной плоскости P , но проходящей через точку O).



Вещественная проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ получается из изоморфной плоскости P «аффинной части» (состоящей из непараллельных плоскости P прямых вида $a = OA$) и еще множества всех «бесконечно удаленных» точек (вроде a_∞), представляющих собой все проходящие через точку O параллельно плоскости P прямые.

Чтобы яснее это себе представить, рассмотрим сферу радиуса 1 с центром в точке O . Лучи вида OA проектируют плоскость P на «южное» (обращенное к плоскости P) полушарие этой сферы, «южнее экватора».



Все точки проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ изображаются на этой сфере замкнутым южным полушарием с добавлением экватора, соответствующего прямым, параллельным плоскости P (и называемым «бесконечно удаленными точками» проективной плоскости).

Но каждая такая прямая пересекает экватор не в одной точке, а в двух диаметрально противоположных точках. Поэтому, чтобы перечислить все точки проективной плоскости, следовало бы добавить к южному полушарию сферы не весь экватор, а лишь его половину (взяв, например, точки с долготами $0 \leq \varphi < \pi$).

Удобнее, однако, поступить иначе и использовать не только южное полушарие сферы, но и всю сферу, только нужно отождествить на ней каждую точку с диаметрально противоположной точкой.

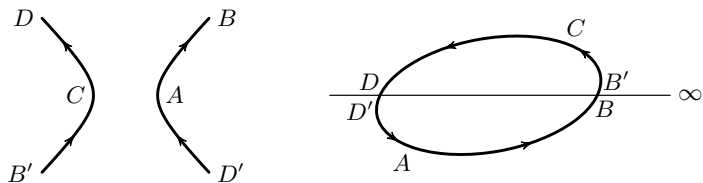
Положение здесь не так уж необычно (для географических изображений). Например, полуостров Камчатка на некоторых (старинных) картах полушарий изображался два раза: и в Западном, и в Восточном полушарии.

Совершенно таким же образом, для исследования окрестности бесконечно удаленных точек на проективной плоскости удобно использовать в качестве карты всю поверхность нашей сферы (в окрестности экватора).

Дело в том, что, подобно тому как Земля устроена совершенно одинаково и на разделяющем Западное и Восточное полушария меридиане, и в других местах, проективная плоскость в окрестности бесконечно удаленных точек обладает совершенно такими же свойствами, как и в окрестности «конечных» точек своей аффинной части (изоморфной исходной плоскости P).

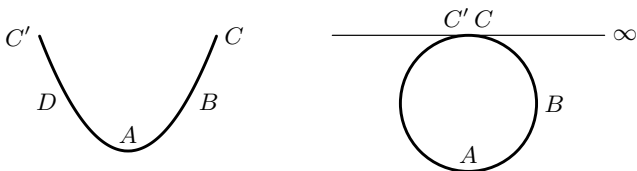
Задача. Проверьте, что гипербола превращается на проективной плоскости в замкнутую связную кривую (топологически — эллипс или окружность).

Действительно, гипербола пополняется при переходе к проективной плоскости двумя бесконечно удаленными точками $B = B'$ и $D = D'$:



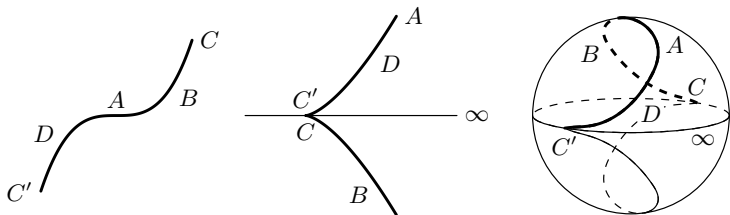
Задача. Как выглядит парабола на проективной плоскости?

Ответ. Единственная бесконечно удаленная точка $C = C'$ параболы дополняет ее до замкнутой гладкой кривой, касающейся прямой бесконечно удаленных точек в этой своей бесконечно удаленной точке:

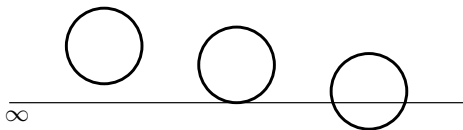


Задача. Нарисовать в окрестности ее бесконечно удаленной точки кубическую параболу, заданную в декартовых координатах евклидовой плоскости формулой $y = x^3$.

Ответ. Кубическая парабола дополняется своей единственной бесконечно удаленной точкой $C = C'$ до негладкой замкнутой кривой (с полукубической точкой возврата):



Пример эллипса, гиперболы и параболы, становящихся на проективной плоскости топологически неразличимыми, подсказывает, что топологическую классификацию алгебраических кривых степени n разумнее начинать с исследования их пополнений на проективной плоскости, где классов меньше и ответы проще.



Сейчас я опишу, что сегодня известно об этих классификациях, хотя общий ответ (для любой степени n) неизвестен и представляется сейчас одним из центральных фундаментальных вопросов математики, остающимся открытым, несмотря на долгие усилия многих замечательных математиков.

Можно было бы подумать, что этот вопрос относится к алгебраической геометрии. Но вклад алгебраических геометров в эту проблему на сегодня несоразмерно мал (главным образом потому, что они неспособны решать реальные задачи, т.е. задачи, относящиеся к действительным [real] числам, а предпочитают задачи сложные, комплексные, или относящиеся к уравнениям над алгебраически замкнутыми полями).

С другой стороны, можно рассматривать вопрос об исследовании топологических свойств кривых, заданных полиномиальными уравнениями вида $f(x, y) = 0$, как относящийся к компьютерной математике.

Но и здесь успехи ничтожны: я постараюсь описать ниже то новое, что удалось узнать только путем компьютерных вычислений в этой области. Существует, правда, замечательная общая теорема (Тарского—Зайденберга), утверждающая, что для решения любого такого вопроса о многочленах существует конечный алгоритм.

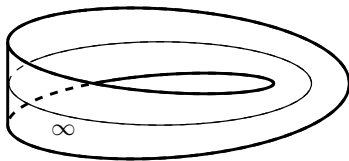
Беда заключается, однако, в том, что объем вычислений, необходимых для решения задач о топологической классификации всех алгебраических кривых данной (вполне умеренной) степени n столь велик, что самые лучшие компьютеры не смогли бы справиться с этими вычислениями даже за все время существования Вселенной.

Напротив, математики получили здесь ряд совершенно замечательных (хотя и не доставляющих полного решения задачи) результатов.

Я начну их изложение с очень простого вопроса, поставленного одним из первых исследователей проективной геометрии.

Задача. Выколем из проективной плоскости одну точку, или даже целую круговую окрестность этой точки. Оставшаяся часть этой проективной плоскости представляет собой гладкую поверхность с краем. Что это за поверхность?

Ответ. Это — лист Мёбиуса, односторонняя (неориентируемая) поверхность, которая и была открыта Мёбиусом при решении указанной задачи.¹



А именно, Мёбиус исследовал окрестность бесконечно удаленной прямой, состоящей из добавляемых к аффинной плоскости бесконечно удаленных точек.

На сфере, дважды покрывающей проективную плоскость, эта бесконечно удаленная прямая изображается экватором. Поэтому речь идет об

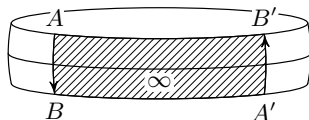
¹Современный (мехматский) поэт, Н. Ю. Иванова-Филиппова, так описывает эту поверхность (Мы — математики с Ленинских Гор, ч. 3. М.: «Книжник», 2007. С. 140—141):

Лист Мёбиуса — символ математики,
 Что служит высшей мудрости венцом...
 Он полон неосознанной романтики:
 В нем бесконечность свернута кольцом.
 (...)
 Покажется, что распростерлась Вечность,
 Что взломан Мироздания пароль.
 И вдруг твое стремление в бесконечность
 Тебя вернет к исходной точке: в ноль.
 Как о порог, об этот ноль споткнешься.
 Но как бы ни был прежний путь тернист,
 Вновь выбирай (и ты не ошибешься!)
 Путь в бесконечность — Мёбиуса лист!

окрестности экватора на поверхности сферы, только чтобы перейти от сферы к проективной плоскости, надо отождествить в этой окрестности диаметрально противоположные точки.

Обе параллели (скажем, 10° северной широты и 10° южной широты), ограничивающие окрестность, склеиваются при таком отождествлении в одну окружность, так что из (цилиндрической) окрестности получается после склеивания не цилиндр.

Как именно производить склеивание, ясно из рисунка: достаточно ограничиться частью окрестности экватора с восточными долготами от 0° до 180° , а склеивать друг с другом только граничные меридианы AB и $A'B'$ (где точки A и A' на сфере диаметрально противоположны).



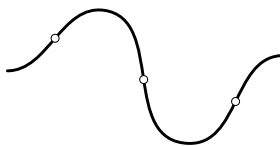
Получается обычное склеивание листа Мёбиуса из прямоугольного листа бумаги $ABA'B'$: именно так Мёбиус его и изобрел.

Видно, что «бесконечность свернута кольцом», и что «стремление в бесконечность (вдоль проективной прямой этого кольца) тебя вернет к исходной точке: в ноль».

Задача (Мёбиус). Рассмотрим на проективной плоскости какую-либо прямую (например, бесконечно удаленную или просто ось x обычной плоскости с координатами (x, y) , пополненную своей бесконечно удаленной точкой).

Возмутим эту прямую так, чтобы получилась гладкая на проективной плоскости несамопересекающаяся кривая. Может ли на такой кривой быть меньше трех точек перегиба?

Что ровно три точки перегиба бывает, показывает нарисованное ниже возмущение гиперболы. Заметим, что понятие точки перегиба — проективное, точки перегиба можно определить безо всякой метрики, не как точки, где кривизна кривой обращается в нуль, а как точки, где кривая необычно близко касается прямой.



Если отличие возмущенной кривой не слишком велико, то утверждение Мёбиуса о трех точках перегиба доказано (хотя это доказательство и не просто).

Задача. Покажите, что если разрешать возмущенной кривой самопересекаться, то точка перегиба может (при достаточно большом возмущении) остаться всего одна.

Что число (невыврожденных) точек перегиба нечетно, Мёбиус вывел из неориентируемости листа Мёбиуса, и доказательство этой его теоремы — хорошая задача.

Из скольких компонент связности может состоять алгебраическая кривая степени n на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$?

Этот вопрос сегодня решен следующей теоремой Харнака (доказанной еще в XIX веке):

Число компонент не превосходит числа $g + 1$, где g — род римановой поверхности кривой.

Что такое род и риманова поверхность, мы сейчас обсудим, доказывая следующую формулу Римана—Гурвица:

Род римановой поверхности гладкой алгебраической кривой степени n на комплексной проективной плоскости равен

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Прежде чем обсуждать две сформулированные теоремы, применим их для подсчета максимальных чисел компонент M алгебраических кривых степени n на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Предыдущие теоремы доставляют значения

n	1	2	3	4	5	6	7	8
g	0	0	1	3	6	10	15	21
M	1	1	2	4	7	11	16	22

Например, прямая имеет одну компоненту (при $n = 1$ имеем $M = 1$).

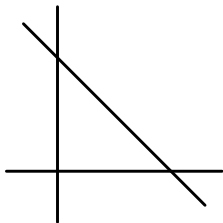
В случае $n = 2$ мы указали $M = 1$, и действительно, и эллипс, и гипербола, и парабола на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ состоят из одной компоненты.

Задача. Придумать гладкую алгебраическую кривую степени 3 на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, имеющую $M = 2$ связных компоненты.

Решение. Кривая степени 3, заданная на плоскости с декартовыми координатами x и y уравнением

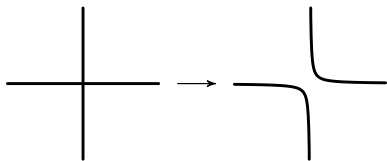
$$xy(1 - (x + y)) = 0,$$

состоит из трех прямых, образующих треугольник, и потому не является гладкой.

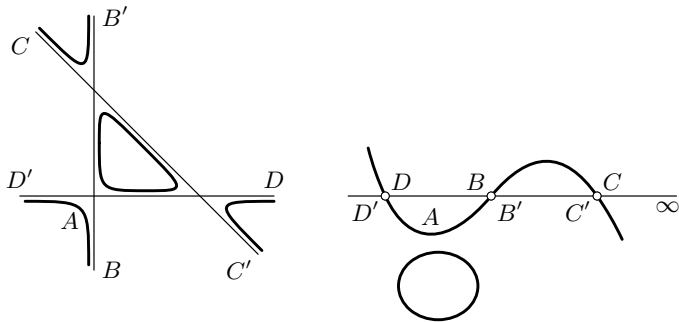


Если мы заменим 0 в правой части уравнения на малое положительное число (например, на $1/100$), то кривая станет гладкой.

Она изменится около точек пересечения своих ветвей примерно так, как изменяется крестообразная кривая $xy = 0$ при переходе к гиперболе $xy = 1/100$:



В результате мы получим на плоскости с координатами (x, y) такую возмущенную кривую:



с тремя бесконечно удаленными точками B, C, D . Она состоит из двух компонент связности: одна из них представлена замкнутым овалом на исходной аффинной плоскости с координатами (x, y) , а другую составляют вместе три неограниченных ветви аффинной кривой $ABB'CC'DD'$.

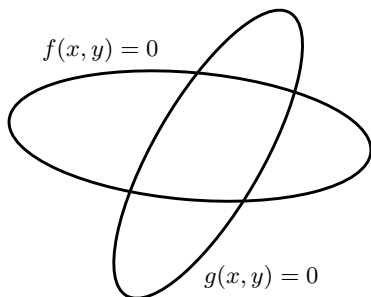
Полное исследование топологических типов всевозможных кривых степеней 3 и 4 произвели Ньютон и Декарт.

Задача. Построить гладкую кривую степени 4, состоящую на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ из четырех компонент связности.

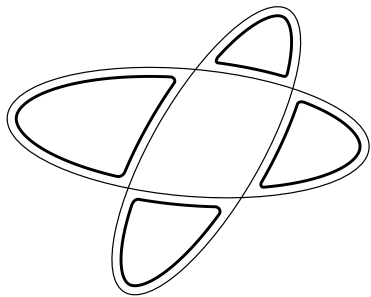
Решение. Перемножив уравнения второй степени двух эллипсов, $f(x, y) = 0$ и $g(x, y) = 0$, мы получим уравнение степени 4

$$fg = 0,$$

определяющее негладкую кривую на плоскости с координатами (x, y) , если эллипсы пересекались:



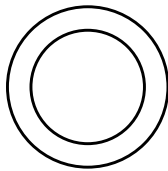
Заменяя нуль в правой части выписанного уравнения степени 4 малой положительной константой, мы возмущим негладкую в 4 точках кривую так, что она сгладится в окрестности этих точек. В итоге такого сглаживания мы получим гладкую кривую степени 4 из 4 компонент связности:



Эта кривая решает поставленную задачу. Каждая из четырех компонент связности ограничивает на плоскости диск, не содержащий других компонент связности внутри себя.

Диск, ограниченный одной из компонент гладкой кривой степени 4, может содержать внутри себя другие компоненты, как показывает при-

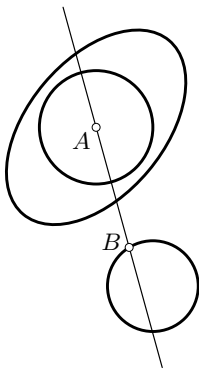
мер кривой $(x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0$:



Задача. Может ли такая ситуация встретиться для кривой четвертой степени, состоящей из четырех (или трех) замкнутых компонент связности?

Решение. Ограничение многочлена от двух переменных степени 4 на прямую имеет степень не более 4, а потому любая прямая пересекает такую кривую не более чем в четырех точках.

Если бы диск, ограниченный одной из компонент, содержал внутри себя другую компоненту (и следовательно, ограниченный ею диск), то прямая, соединяющая точку A этого меньшего диска с точкой B третьей компоненты, пересекала бы кривую больше четырех раз, что невозможно.



Поэтому третьей компоненты быть не может.

Итак, алгебраическая кривая четвертой степени на вещественной проективной плоскости, состоящая из четырех компонент связности, топологически стандартна: ее четыре компоненты ограничивают 4 непересекающихся диска, как в построенном выше примере, а никакие другие расположения четырех компонент связности невозможны.

По некоторым причинам исследование кривых четных степеней проще, чем нечетных, так что мы рассмотрим в качестве следующего примера случай кривых степени $n = 6$.

В своей формулировке 16-й проблемы (о топологическом строении алгебраических кривых заданной степени на вещественной проективной плоскости) Гильберт объявил, что он полностью исследовал все возможные расположения одиннадцати компонент связности такой кривой (в предположении, что число компонент достигает наибольшего значения $M = 11$, возможного для кривых степени $n = 6$ по теореме Харнака).

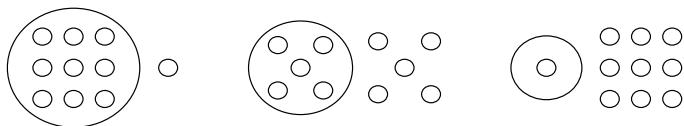
А именно, сформулированная Гильбертом теорема утверждала, что таких расположений бывает только два.

Он не опубликовал доказательства своей теоремы, но лет через 70 такое доказательство опубликовал Дмитрий Андреевич Гудков, математик из Нижнего Новгорода, бывший учеником замечательного физика А. А. Андропова, занимавшегося теорией колебаний и теорией бифуркаций, также приводящей к необходимости исследования подобных топологических вопросов (хотя и не только для многочленов).

Вскоре после этого И. Г. Петровский, получивший еще в 30-е годы замечательные достижения по 16-й проблеме Гильберта, попросил меня написать отзыв на докторскую диссертацию Гудкова, который опроверг и теорему Гильберта, и свое доказательство ее.

Поразительный результат Гудкова состоял в том, что число возможных конфигураций равно не двум, как утверждал Гильберт, а трем.

Вот эти три конфигурации 11 овалов алгебраической кривой шестой степени на вещественной проективной плоскости:



Иными словами, из всех 11 овалов (каждый из которых делит $\mathbb{R}P^2$ на топологический диск и топологический лист Мёбиуса), только один овал содержит другие овалы внутри ограниченного им диска, причем число этих внутренних овалов бывает равным только 9, 5 или 1 (а все эти 3 случая реализуются).

Гильберт утверждал, что случай пяти внутренних овалов невозможен, но он ошибался.

Общее число возможных топологически различных расположений 11 замкнутых и не пересекающих друг друга гладких кривых на вещественной плоскости измеряется многими миллиардами.

Поразительный результат Гудкова исключал эти миллиарды возможностей не только в задаче о кривых степени 6. В его диссертации я нашел сотни результатов о невозможности ряда конфигураций овалов кривых больших степеней.

Рассматривая эти примеры, я обнаружил, что в них часто играет особую роль число 8; например, в нарисованных выше кривых Гудкова возможные числа внутренних овалов (9, 5 и 1) следуют через 4, а эйлеровы характеристики¹ множества F точек (x, y) , где $f(x, y) \leq 0$ (когда задающий кривую многочлен f степени 6 положителен при больших x и y), равны соответственно -7 , $+1$ и $+9$.

Общая формулировка для положительного на бесконечности многочлена f степени $2k$ с числом овалов $M = g + 1$ такова:

$$\left(\begin{array}{l} \text{эйлерова характеристика} \\ \text{множества } F, \text{ где } f \leq 0 \end{array} \right) \equiv k^2 \pmod{8}.$$

Это сравнение, доказанное Гудковым для многих кривых, я назвал в своем отзыве на его диссертацию гипотезой Гудкова (хотя он и убеждал меня, что это сравнение выполняется не всегда).

Но я знал, что сравнения по модулю 8 играют особую роль в топологии четырехмерных гладких многообразий, и стал искать такое многообразие в задаче Гильберта об алгебраических (одномерных) кривых.

После длительных усилий я обнаружил, что нужное многообразие является комплексификацией описанной выше поверхности F , где $f(x, y) \leq 0$, краем которой является алгебраическая кривая, заданная уравнением $f(x, y) = 0$.

Чтобы комплексифицировать определяющее поверхность F условие $f(x, y) \leq 0$, я записал его в виде $f(x, y) + z^2 = 0$. Это уравнение определяет (при комплексных x , y и z) двулистное накрытие дополнения к комплексной алгебраической кривой, заданной уравнением $f(x, y) = 0$ на комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$, разветвленное с многообразием ветвления в виде указанной алгебраической кривой.

Применив результаты топологии четырехмерных многообразий к этому комплексифицирующему поверхность F многообразию, я доказал гипотезу о сравнении Гудкова, но лишь по модулю 4, а не 8.

Используя мое доказательство, В. А. Рохлин закончил и полное доказательство гипотезы Гудкова по модулю 8, так что сегодня это один из центральных результатов в направлении исследования 16-й проблемы Гильберта.

К такому продвижению вперед вещественной алгебраической геометрии привело исследование вопроса Гильберта о топологическом строении плоских алгебраических кривых шестой степени.

¹Эйлерова характеристика диска равна 1, а для диска с a дырами она равна $1 - a$. Эйлерова характеристика объединения нескольких не связанных друг с другом областей равна сумме эйлеровых характеристик слагаемых. Эйлерова характеристика написанного печатными буквами слова «да» равна нулю, а слова «нет» равна двум.

Для кривых степени 8 эти результаты тоже дали много ограничений, сократив число возможных расположений их 22 овалов до меньшего сотни числа — сейчас это число сократилось до примерно 80 расположений.

Но реализовать алгебраическими кривыми на вещественной проективной плоскости удалось лишь примерно 70 топологически разных расположений. Остается около дюжины случаев, когда ни одно из известных ограничений (включая сравнение Гудкова и числа точек пересечения с прямыми) не исключает существования алгебраической кривой степени 8 на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ с таким расположением двадцати двух овалов, но ни одного примера такой кривой не построено.

Это — одна из тех проблем математики, которые относятся к ее самым основам и нужны для огромного числа приложений (законы природы часто описываются уравнениями вида $f(x, y) = 0$, и расположение ветвей подобных многообразий доставляет качественные выводы об описываемых этими законами явлениях природы).

Описанные результаты связали эту проблему не только с современной топологией гладких многообразий, но и с такими областями математики и физики, как симплектическая и контактная топология, квантовая теория поля и возникающие в ней новые инварианты гладких многообразий, узлов и других объектов.

Теория инвариантов узлов была предложена Кельвином для объяснения таблицы Менделеева микроскопическими, но устойчивыми топологическими различиями тонкой структуры атомов. Сегодняшние топологические методы квантовой теории поля и теории элементарных частиц являются своеобразным развитием этой идеи, причем возникающие дискретные и топологические инварианты различных объектов математической физики и алгебраической геометрии (из которых вещественные алгебраические кривые на проективной плоскости — лишь простейшая модель) приводят к быстрому продвижению во многих областях фундаментальной математики.

Вопрос 16-й проблемы Гильберта об алгебраических кривых — не единственная естественная задача вещественной алгебраической геометрии. Например, столь же естественен (и даже более необходим для приложений математики) вопрос о топологической классификации функций f (например, задающих кривые $f(x, y) = 0$).¹

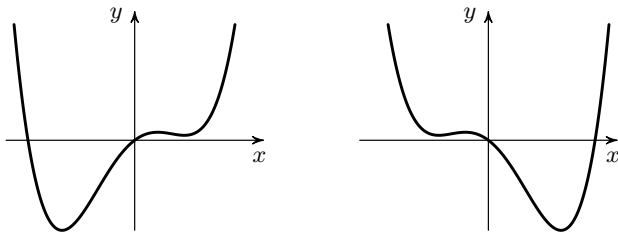
Будем считать две функции $f_0: M \rightarrow \mathbb{R}$ и $f_1: M \rightarrow \mathbb{R}$ на многообразии M топологически одинаковыми, если одну из них можно пре-

¹Обзор недавних исследований в этом направлении: *V. I. Arnold. Topological classification of Morse functions and generalizations of Hilbert's 16-th problem // Math. Phys. Anal. Geom.* 2007. V. 10, № 3. P. 227—236.

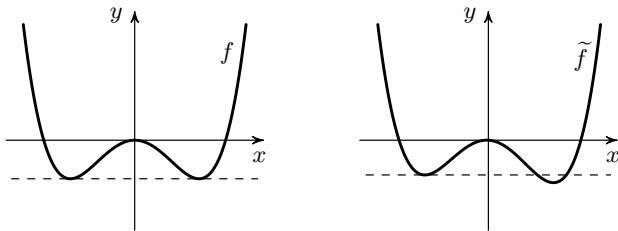
вратить в другую непрерывной деформацией $\{f_t\}$, $0 \leq t \leq 1$, в процессе которой все промежуточные функции f_t переводятся друг в друга непрерывно меняющимися гладкими заменами независимых переменных ($g_t: M \rightarrow M$) и зависимых переменных ($h_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), так что

$$f_t(x) = h_t(f_0(g_t(x))) \quad \text{при всех } t \text{ от } 0 \text{ до } 1.$$

Пример. Многочлены $f(x) = x^4 - 2x^2 + Ax$ и $f(x) = x^4 - 2x^2 - Ax$ с $A > 0$ могут быть топологически различными, хотя оба имеют по 3 критических точки (где $df/dx = 0$) и оба остаются эквивалентными себе при малом изменении коэффициентов многочлена четвертой степени x .



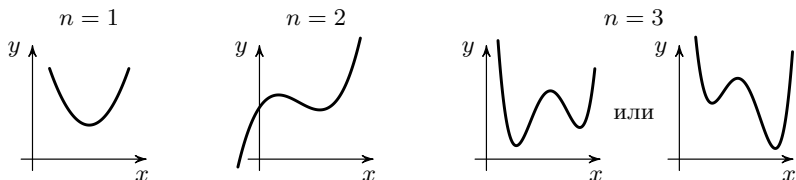
В случае $A = 0$ получается не эквивалентный топологически ни одному из них многочлен тоже с тремя критическими точками, меняющий вдобавок свой топологический тип при некоторых малых изменениях коэффициентов (так как имеющее место при $A = 0$ совпадение значений в двух критических точках может нарушиться при сколь угодно малом возмущении $\tilde{f}$).



Задача. Сколько существует топологически разных многочленов $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ степени $n + 1$ с n критическими точками? (Больше n критических точек непостоянный многочлен степени $n + 1$ иметь не может.)

Указание. Нарисуем графики таких многочленов со старшим членом x^{n+1} и n различными вещественными критическими точками с n

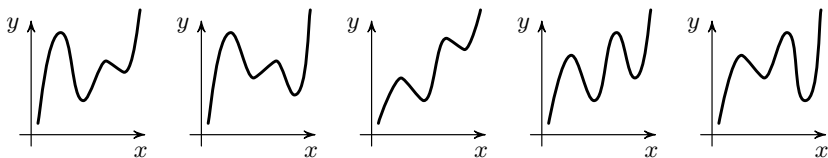
разными критическими значениями при малых n :



Числа $K(n)$ топологически разных многочленов этого вида получаются равными

$$K(1) = 1, \quad K(2) = 1, \quad K(3) = 2.$$

Продолжая рисование графиков для многочленов бóльших степеней, мы находим, например, при $n = 4$ следующие $K(4) = 5$ топологически различные возможности для многочленов степени 5 со старшим членом x^5 и четырьмя критическими точками:



Продолжая подобное рисование, легко сосчитать, что $K(5) = 16$, $K(6) = 61$, $K(7) = 272$.

Эти числа можно вычислять при помощи следующего *треугольника Эйлера—Бернулли*:

									$K(1) = 1$
								1	$K(2) = 1$
							0	1	$K(3) = 2$
						1	1	0	$K(4) = 5$
				0	1	2	2		$K(5) = 16$
		5	5	4	2	0			$K(6) = 61$
	0	5	10	14	16	16			$K(7) = 272$
61	61	56	46	32	16	0			
0	61	122	178	224	256	272	272		

Этот треугольник заполняется так: в каждой строчке четного ряда (второго, четвертого и т. д.) слева пишется 0, а затем, двигаясь направо, пишем в каждом месте сумму левее находящихся чисел предыдущего ряда (для четвертого ряда получаем последовательно $\{0, 1, 1 + 1 = 2, 1 + 1 + 0 = 3\}$).

Нечетные ряды заполняются таким же образом, но начиная с нуля, поставленного справа, двигаемся налево и ставим в каждом месте сумму

правее находящихся чисел предыдущего ряда (в третьем ряду получаем последовательно $\{0, 2, 2 + 2 = 4, 2 + 2 + 1 = 5, 2 + 2 + 1 + 0 = 5\}$).

Нетрудно доказать, что сумма поставленных в n -м ряду чисел составляет число $K(n)$ топологически разных многочленов $x^{n+1} + \dots$ с n различными критическими точками и n различными критическими значениями.

С другой стороны, треугольник Эйлера—Бернулли доставляет замечательную формулу для чисел $K(n)$.

Теорема. *Сумма степенного ряда*¹

$$H(t) = \sum_{n=0} K(n) \frac{t^n}{n!}$$

есть $H(t) = \sec t + \operatorname{tg} t$.

Таким образом, левая сторона треугольника Эйлера—Бернулли доставляет числа 1, 1, 5, 61, ..., определяющие коэффициенты разложения в степенной ряд функции

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} = 1 + 1 \cdot \frac{t^2}{2!} + 5 \frac{t^4}{4!} + 61 \frac{t^6}{6!} + \dots$$

Числа 1, 1, 5, 61, ... называются *числами Эйлера*. Эта последовательность целых чисел легко узнается по числу 61, редко встречаемому в других последовательностях (а начало 1, 1, 5, ... не так уж редко встречается).

Правая сторона треугольника Эйлера—Бернулли доставляет числа 1, 2, 16, 272, ..., определяющие коэффициенты разложения в степенной ряд функции

$$\operatorname{tg} t = t + 2 \frac{t^3}{3!} + 16 \frac{t^5}{5!} + \dots$$

Делением синуса на косинус легко убедиться, что степенной ряд для тангенса и правда начинается со слагаемых

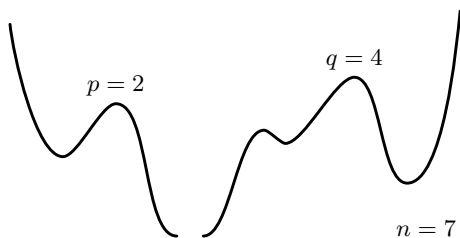
$$\operatorname{tg} t = t + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{15} + \dots$$

(где $1/3 = 2/3! = 2/6$, $2/15 = 16/5! = (16)/(120)$ и т. д.).

Доказательство предыдущей теоремы проще всего получить, разорвав график многочлена $x^{2m} + \dots$ с $n = 2m - 1$ критической точкой

¹Ряды такого вида называются *экспоненциальными производящими функциями* последовательностей $K(0), K(1), \dots$, потому что при $K(n) \equiv 1$ получается ряд для e^t .

(с разными критическими значениями) в точке абсолютного минимума.



Рассматривая затем топологические типы обоих полученных графиков как топологические типы функций с p и q критическими точками (где $p + q + 1 = n$) и выразив число разных топологических типов исходной функции через числа топологических типов обеих частей (следует ведь учитывать расположения критических значений в критических точках левой части среди критических значений в критических точках правой части), можно доказать¹ соотношение между числом $K(n)$ и произведениями $K(p)K(q)$, где $p + q = n - 1$.

Это соотношение выражается через экспоненциальную производящую функцию H в виде дифференциального уравнения, решение которого (с начальным условием $H(0) = 1$) и дает формулу для H :

$$2 \frac{dH}{dt} = H^2 + 1.$$

Для многочленов от нескольких переменных дело обстоит сложнее. Например, многочлены четвертой степени от двух вещественных переменных имеют не более 9 критических точек.

Такие многочлены с девятью критическими точками (притом с разными критическими значениями), ведущие себя на бесконечности как $x^4 + y^4$, можно расклассифицировать по 17 746 классам топологически различных функций.

Все эти классы реализуются гладкими функциями с таким числом критических точек. Но в то время как для случая функций одной переменной все топологически разные типы реализуются многочленами нужной степени, для функций двух переменных это не так.

Сколько имеется топологически различных многочленов четвертой степени от двух переменных с 9 критическими точками на $\mathbb{R}^2$ (ведущих себя как $x^4 + y^4$ на бесконечности), я не знаю. Думаю, что число их топологических типов составляет меньше одной тысячи.

¹Обзор исследований возникающей здесь теории опубликован в: В. И. Арнольд. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера // Успехи матем. наук. 1992. Т. 47, № 1. С. 1–51.

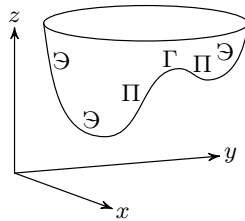
Число топологических типов гладких функций с n критическими точками на $\mathbb{R}^2$ растёт при росте n как величина порядка n^{4n} . Но как растёт число классов, реализуемых многочленами, неизвестно — не исключен даже всего лишь степенной, а не экспоненциальный рост типа n^{const} .¹

Все эти вопросы, как и близкий вопрос о числе областей, на которые пространство многочленов степени d от m переменных делится многообразием вырождений (образованным множеством всех многочленов степени d в $\mathbb{R}^m$, имеющих меньше чем $(d-1)^m$ различных критических значений), остается открытым уже при $m=2$ и $d=4$.

Я упоминаю здесь эти вопросы потому, что они в принципе доступны школьникам, особенно при их взаимодействии с компьютерами, так что я надеюсь получить в будущем информацию о решениях этих вопросов от слушателей моих лекций для школьников.

Вот еще один из подобных вопросов, в котором недавнее продвижение произошло именно благодаря компьютерным вычислениям.

Рассмотрим график функции $\{z = f(x, y)\}$ как поверхность в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$.



В окрестностях некоторых точек эта поверхность локально выпукла. Такие точки называются эллиптическими. Пример — поверхность эллипсоида.

В окрестности других точек поверхность пересекает свои касательные плоскости по парам пересекающихся кривых (и локально невыпукла). Такие точки называются гиперболическими (пример — поверхность однополостного гиперболоида, все ее точки гиперболически).

Области эллиптических и гиперболических точек поверхности разделяются *кривой параболических точек*.

Уравнение этой кривой имеет вид $H(x, y) = 0$, где функция H (называемая *гесссианом* функции f) есть определитель, составленный из

¹См. по этому поводу статьи: V. I. Arnold. Smooth functions statistics // Funct. Anal. Other Math. 2006. V. 1, № 2. P. 111–118; L. Nicolaescu. Morse functions statistics // Funct. Anal. Other Math. 2006. V. 1, № 1. P. 85–91.

вторых частных производных функции f :

$$H = \begin{vmatrix} \partial^2 f / (\partial x)^2 & \partial^2 f / \partial x \partial y \\ \partial^2 f / \partial y \partial x & \partial^2 f / (\partial y)^2 \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2.$$

Если f — многочлен степени n , то H — многочлен степени $2n - 4$ (для $n = 4$ степень гессиана тоже равна 4, так что параболическая кривая задается на плоскости с декартовыми координатами x и y алгебраическим уравнением степени 4).

Задача. Сколько компонент связности может иметь параболическая кривая, если f — многочлен степени n (например, при $n = 4$)?

Естественно, параболическую кривую можно пополнить бесконечно удаленными точками, считая плоскость $\mathbb{R}^2$ с координатами x и y аффинной частью проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Так что имеется два вопроса о числе компонент: можно считать компоненты в аффинной плоскости (где у гиперболы их 2), а можно в проективной (где гипербола связна).

Из теоремы Харнака следует, что число компонент связности параболической кривой графика многочлена f степени $n = 4$ (на проективной плоскости) не может превосходить 4.

Пример с тремя компонентами построить можно (оставляю это построение читателям в виде задачи). Но достигается ли случай четырех компонент связности для какого-либо многочлена f степени $n = 4$, узнать трудно.

Моя мексиканская ученица А. Ортиц-Родригес (А. Ortiz-Rodriguez) доказала недавно в своей диссертации, защищенной в университете Paris VI, что максимальное число M компонент связности параболической кривой для многочлена степени n от двух переменных (считая компоненты в проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$) удовлетворяет неравенствам

$$An^2 \leq M(n) \leq Bn^2.$$

Здесь постоянная B в несколько раз больше, чем A , так что даже настоящая асимптотика числа $M(n)$ при $n \rightarrow \infty$ точно не известна.

В случае $n = 4$ А. Ортиц-Родригес исследовала за год непрерывной работы компьютера в Мехико пятьдесят миллионов ($5 \cdot 10^7$) различных многочленов четвертой степени.

Среди них оказалось три многочлена, каждый из которых имел на своем графике параболическую кривую с четырьмя компонентами связности.

Когда компьютер уже выдал значения коэффициентов этих многочленов, проверка числа их компонент связности занимает считанные минуты, даже без дальнейшей помощи компьютера.

Таким образом А.Ортиц-Родригес получила строгое математическое доказательство соотношения $M(4) = 4$, формально не использующее компьютера.

Но найти это доказательство без компьютера долго не удавалось (и вдобавок четыре компоненты связности встретились лишь в трех случаях из пятидесяти миллионов).

Я упомянул здесь об этом, пока уникальном, использовании компьютера в вещественной алгебраической геометрии (теория параболических кривых относится также к симплектической геометрии) потому, что надеюсь на продвижение слушателей и читателей в исследовании поведения числа компонент $M(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Для гладких алгебраических поверхностей степени n в проективном пространстве $\mathbb{R}P^3$ (задаваемых в декартовых координатах аффинной части проективного пространства уравнениями вида $f(x, y, z) = 0$, где f — многочлен степени n) оценки сверху и снизу числа $P(n)$ компонент связности параболических кривых, полученные в диссертации А.Ортиц-Родригес, имеют вид

$$Cn^3 \leq P(n) \leq Dn^3$$

(поверхности степени n с не менее чем Cn^3 замкнутыми связными параболическими кривыми существуют, поверхностей степени n с более чем Dn^3 замкнутыми связными параболическими кривыми не существует).

Отношение D/C в доказанной теореме — число порядка 20. Вопрос о настоящей асимптотике максимального числа компонент связности параболической кривой гладкой алгебраической поверхности степени n в $\mathbb{R}P^3$ открыт: вероятно, это число растёт как En^3 , но для постоянной E нет не только точной гипотезы, но нет и эмпирического компьютерного исследования, основанного на вычислениях $P(n)$, скажем, при $n \leq 100$. Этот вопрос я также оставляю слушателям и читателям.

Комплексные алгебраические кривые

Уравнение $f(x, y) = 0$, где x и y — комплексные переменные, а f — многочлен (вообще говоря, с комплексными коэффициентами), определяет в комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ с координатами x и y некоторое подмножество размерности два, так как вещественная размерность двумерной комплексной плоскости равна 4, а равенство нулю комплексного числа $f(x, y)$ означает равенство нулю как его вещественной, так и его мнимой части, т.е. представляет собой два уравнения относительно четырех вещественных переменных $(\operatorname{Re} x, \operatorname{Im} x, \operatorname{Re} y, \operatorname{Im} y)$.

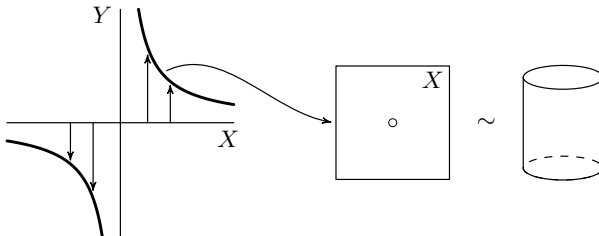
Пример. «Комплексная окружность» задается в $\mathbb{C}^2$ уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

Задача. Исследовать топологическое строение этого двумерного (в вещественном смысле) подмножества четырехмерного (в вещественном смысле) пространства $\mathbb{C}^2$.

Решение. Умножая координату y на i , мы приводим уравнение окружности к виду уравнения гиперболы $x^2 - z^2 = 1$. Таким образом, с точки зрения комплексной геометрии окружность и гипербола — одна и та же кривая, различаются лишь координаты на комплексной плоскости, в которых записывается уравнение этой кривой.

Еще одной заменой координат ($X = x + z$, $Y = x - z$) мы приведем уравнение гиперболы к другой стандартной нормальной форме, $XY = 1$, т.е. $Y = 1/X$.

Из этого уравнения видно, что комплексная окружность топологически эквивалентна плоскости комплексной переменной X без начала координат, то есть цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$.



При приближении X к нулю Y стремится к бесконечности, а при приближении X к бесконечности Y стремится к нулю.

Из этого нетрудно вывести, что в комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ комплексная окружность или гипербола (как и вещественная гипербола в $\mathbb{RP}^2$) пополняется двумя бесконечно удаленными точками (одна из которых удалена в направлении оси X плоскости с координатами (X, Y) , а другая — в направлении оси Y).

Отсюда видно, что комплексная окружность (или гипербола) топологически эквивалентна (гомеоморфна и даже вещественно диффеоморфна) двумерной вещественной сфере:

$$\left(\text{цилиндр} + \begin{matrix} \{Y=0\} \\ \{X=0\} \end{matrix} \right) = \text{сфера} \subset \mathbb{CP}^2$$

Подобно тому как на вещественной гиперболе в $\mathbb{RP}^2$ точки ее пересечения с бесконечно удаленной прямой (т.е. асимптотические направления гиперболы на аффинной плоскости) ничем не хуже обычных точек, комплексная окружность (или гипербола) в окрестности каждой из своих двух бесконечно удаленных точек столь же хороша, как и в окрестности любой своей точки из плоскости с координатами (X, Y) : с вещественной точки зрения она представляет собой гладкую двумерную поверхность в четырехмерном вещественном пространстве.

Задача. Докажите, что все вещественные окружности, будучи продолженными своими комплексными и бесконечно удаленными точками до кривых в $\mathbb{CP}^2$, имеют две общие для всех таких алгебраических кривых точки.

Решение. Вычислим бесконечно удаленные точки на комплексификации окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

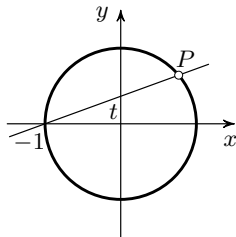
Это — асимптотические направления $(z = \pm x)$ гиперболы $x^2 - z^2 = 1$, т.е. те бесконечно удаленные точки комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$, куда стремятся точки комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ с координатами $(x = t, y = it)$ и $(x = t, y = -it)$ при стремлении t к бесконечности.

Для любой другой окружности (имеющей ведь всегда уравнение вида $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$) асимптотические направления такие же. Поэтому комплексные бесконечно удаленные точки всех окружностей одинаковы.

Другое описание комплексной окружности доставляет ее рациональная параметризация.

Проведем на плоскости с декартовыми координатами (x, y) через точку $(x = -1, y = 0)$, принадлежащую окружности $x^2 + y^2 = 1$, пря-

мую $y = t(x + 1)$ (с тангенсом угла наклона к оси x , равным t).



Вторая точка пересечения P этой прямой с окружностью определяется из уравнения $x^2 + t^2(x + 1)^2 = 1$, то есть

$$(1 + t^2)x^2 + 2t^2x + (t^2 - 1) = 0.$$

Один из корней этого квадратного уравнения нам известен: это $x = -1$ (так как прямая проведена через точку $(-1, 0)$). По теореме Виета находим второй корень

$$x = 1 - \frac{2t^2}{1 + t^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$y = t(x + 1) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Полученная параметризация

$$x = p(t), \quad y = q(t) \quad \left(\text{где } p = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad q = \frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между комплексной проективной окружностью (пополненной ее двумя бесконечно удаленными точками) и комплексной проективной прямой с осью t (пополненной одной бесконечно удаленной точкой).

Это соответствие устанавливает не только топологическую эквивалентность (гомеоморфизм) комплексной проективной окружности и комплексной проективной прямой (являющейся, как мы сейчас увидим, двумерной сферой с вещественной точки зрения). Этот гомеоморфизм является на самом деле диффеоморфизмом (т.е. отображение гладко вместе со своим обратным), причем не только в вещественном, но и в комплексном смысле.

Задача. Исследовать топологические свойства комплексной прямой, пополненной своими бесконечно удаленными точками при дополнении плоскости $\mathbb{C}^2$ до комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$.

Решение. В комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ аффинная комплексная прямая представляет собой в вещественном смысле двумерную плоскость четырехмерного вещественного пространства (как это ясно, например, для комплексной оси x плоскости $\mathbb{C}^2$ с комплексными координатами x и y).

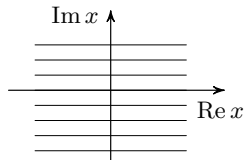
При добавлении к аффинной комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$ ее бесконечно удаленных точек аффинная комплексная прямая пополняется одной бесконечно удаленной точкой. Эта операция пополнения превращает ее в двумерную сферу

$$\mathbb{C} + \{\infty\} = \bigcirc_{\mathbb{C}P^1}^{\infty} \sim S^2.$$

Алгебраические кривые, гомеоморфные сфере («имеющие род ноль»), называются «рациональными кривыми», так как их можно задавать параметрически уравнениями вида $\{x = p(t), y = q(t)\}$, где p и q — рациональные функции. Например, для окружности $x^2 + y^2 = 1$ годится введенная выше параметризация $x = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, y = \frac{2uv}{u^2 + v^2}$ (где $t = \frac{v}{u}$). Она доставляет при целых (u, v) рациональные точки окружности, например, при $u=1, v=2$ получается «египетский» треугольник $\left(x = \frac{3}{5}; y = \frac{4}{5}\right)$.

Замечание. Бесконечно удаленная точка на комплексной проективной прямой ничем не отличается от остальных ее точек. В качестве локальной координаты на $\mathbb{C}P^1$ в окрестности бесконечно удаленной точки « $x = \infty$ » можно выбрать координату $y = 1/x$ (в окрестности точки 0).

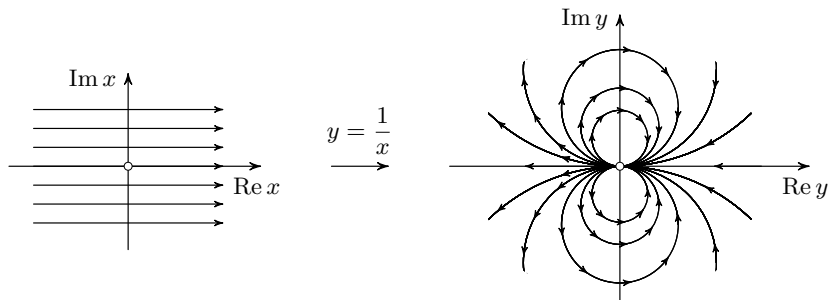
Задача. Рассмотрим разбиение аффинной комплексной оси x на вещественные «горизонтальные» прямые, вдоль которых мнимая часть x постоянна:



Нарисуйте это семейство вещественных линий в окрестности точки $y = 0$, где y — локальная координата в окрестности этой точки, равная $1/x$ вне этой точки (и вне точки $x = 0$).

Решение. Преобразование $x \mapsto 1/x$ заменяет модуль комплексного числа x на обратное вещественное число, меняя знак аргумента числа x . Поэтому это преобразование является произведением инверсии в окружности радиуса 1 с центром в точке $x = 0$ и отражения плоскости переменной y в прямую $\text{Im } y = 0$.

При инверсии прямые, параллельные горизонтальной прямой $\text{Im } x = 0$, переходят в окружности, проходящие через точку $y = 0$ и касающиеся в ней прямой $\text{Im } y = 0$. Поэтому все семейство горизонтальных прямых на плоскости комплексной переменной x превращается на плоскости комплексной переменной $y = 1/x$ в семейство касающихся друг друга в нуле окружностей:

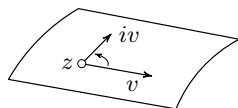


Как и в рассмотренных выше примерах, алгебраические кривые, заданные на комплексной аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$ с комплексными координатами (x, y) алгебраическими уравнениями вида $f(x, y) = 0$, где f — многочлен (вообще говоря, с комплексными коэффициентами), представляют собой с вещественной точки зрения двумерные поверхности в четырехмерном вещественном пространстве, уходящие на бесконечность по некоторым направлениям.

При дополнении комплексной аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$ (комплексными) бесконечно удаленными точками до комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ эти двумерные поверхности дополняются своими бесконечно удаленными точками, так что получаются замкнутые двумерные поверхности. Эти поверхности, как и пополненная кубическая парабола в вещественном случае, могут иметь особенности.

Мы, однако, будем рассматривать ниже в основном случай, когда особенностей нет. В этом случае описанная поверхность связна и замкнута. Она называется римановой поверхностью (так как такие поверхности, с их нетривиальной топологией, рассматривал уже Ньютон [в лемме 28 своих «Математических начал натуральной философии»]).

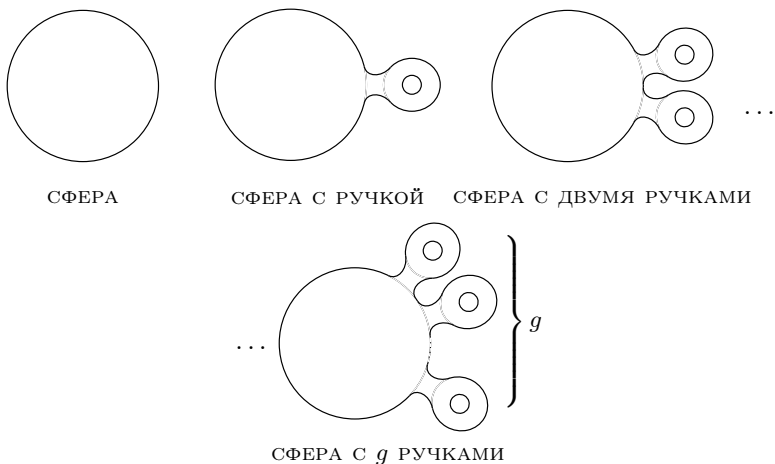
Заметим прежде всего, что все эти гладкие вещественно-двумерные поверхности ориентируемы. А именно, если (ненулевой) вектор v касается такой поверхности в точке z , то вектор iv тоже касается этой поверхности в той же точке, поэтому пара векторов (v, iv) задает опре-



деленную ориентацию поверхности (в точке z и в ее достаточно малой окрестности).

Эти ориентации (в окрестностях разных точек) согласованы, так как операция умножения касательных векторов на i непрерывно зависит от точки касания z (это верно не только в точках аффинной комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$, но и для бесконечно удаленных точек, добавляемых при переходе к комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, так как умножение касательных векторов на комплексное число i определено и там).

В топологии все двумерные связные замкнутые ориентируемые поверхности расклассифицированы следующим образом: каждая из таких поверхностей диффеоморфна одной (и ровно одной) поверхности из следующего списка:



Пример. Поверхность тора (автомобильной шины) топологически эквивалентна сфере с одной ручкой:



Пример. Вещественная проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$ топологически не эквивалентна ни одной из перечисленных поверхностей: все они ориентируемы, а проективная плоскость неориентируема (так как она содержит лист Мёбиуса).

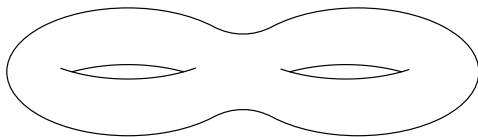
Задача. Ориентируемо ли вещественное проективное пространство размерности n ,

$$\mathbb{R}P^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0}{\mathbb{R} \setminus 0} = \frac{S^n}{\{+1, -1\}},$$

получающееся из n -мерной сферы S^n отождествлением каждой ее точки с диаметрально противоположной ей точкой?

Ответ. Пространства $\mathbb{R}P^1$, $\mathbb{R}P^3$, $\mathbb{R}P^{2k-1}$ (нечетных размерностей) ориентируемы, а пространства $\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{R}P^4$, $\mathbb{R}P^{2k}$ (четных размерностей) не ориентируемы.

Число g называется *родом* поверхности сферы с g ручками. Например, род сферы равен нулю, род тора равен единице, род поверхности кренделя равен двум.



Теорема (Римана—Гурвица). Гладкая плоская алгебраическая кривая степени n на комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ имеет риманову поверхность рода

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad (3)$$

Замечание. Мы уже видели выше, что комплексные проективные кривые степеней 1 и 2 (прямые и окружности) с топологической точки зрения представляют собой сферы (имеют род ноль).

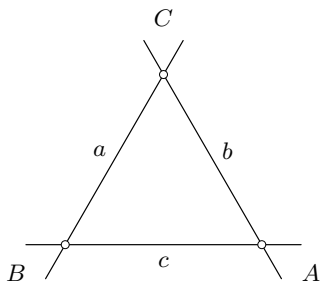
Это обстоятельство позволяет легко вспомнить формулу (3), особенно если использовать еще простое геометрическое решение следующей задачи.

Задача. Найти род римановой поверхности гладкой плоской алгебраической кривой степени 3 на комплексной проективной плоскости, заданной в аффинных координатах (x, y) на аффинной плоскости $\mathbb{C}^2$ уравнением $xy(1 - (x + y)) = 1/100$.

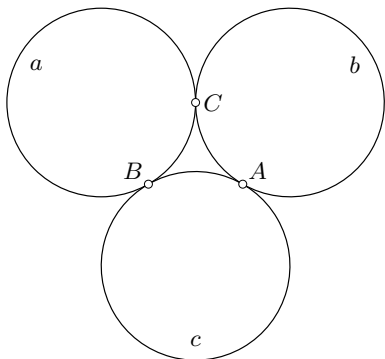
Решение. Если бы в правой части уравнения вместо одной сотой стоял ноль, то уравнение задавало бы три стороны треугольника.

Каждая из сторон представляет собой (в комплексной проективной плоскости) комплексную проективную прямую, т.е. топологически — двумерную сферу.

Но весь комплексный треугольник — не гладкая двумерная поверхность, так как три сферы (a, b, c) , образующие его стороны, попарно пересекаются (в вершинах A, B, C):



ВЕЩЕСТВЕННЫЙ
ТРЕУГОЛЬНИК

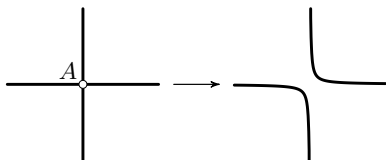


КОМПЛЕКСНЫЙ
ТРЕУГОЛЬНИК

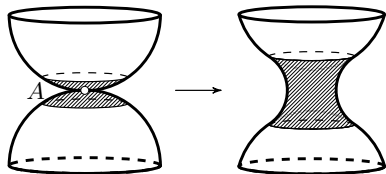
При замене правой части 0 на $1/100$ наша алгебраическая кривая испытает лишь малое возмущение (везде, кроме окрестностей особых точек A, B, C).

В каждой из особых точек с особой кривой, две ветви которой пересекаются в этой точке, произойдет такая же перестройка, которая происходит с парой пересекающихся прямых, заданной уравнением $xy = 0$, при переходе к гиперболе $xy = 1/100$.

Это изменение состоит в том, что на каждой из двух пересекающихся ветвей выкидывается малая окрестность точки пересечения, а затем обе эти окрестности заменяются цилиндром, соединяющим края выкинутых окрестностей (как мы это видели для гиперболы на с. 57):



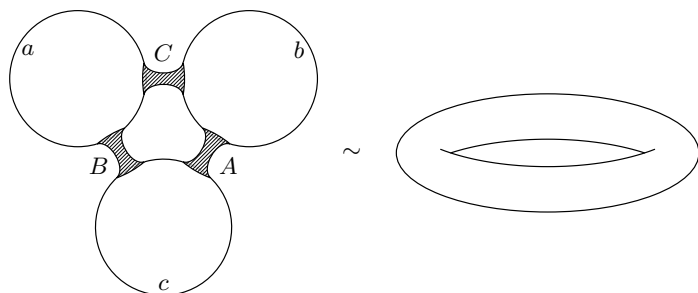
ВЕЩЕСТВЕННАЯ
ПЕРЕСТРОЙКА



КОМПЛЕКСНАЯ
ПЕРЕСТРОЙКА

Проделав такую перестройку у каждой из трех вершин нашего комплексного треугольника ABC , мы получим из него следующую гладкую поверхность (в которой окрестности трех вершин A, B, C заменены

малыми цилиндрами, соединяющими пересекающиеся в этих вершинах сферы):



Как видно, полученная поверхность имеет род $g = 1$ — топологически она эквивалентна тору (или сфере с одной ручкой). Алгебраические кривые рода 1 называются эллиптическими кривыми (так как они связаны с «эллиптическими интегралами» вдоль них, выражающими длины эллипсов).

Зная, что $g(3) = 1$, мы восстанавливаем знаменатель 2 в формуле Римана—Гурвица (3): в случае степени $n = 3$ произведение $(n - 1)(n - 2)$ равно 2, так что его нужно разделить на 2, чтобы получить род $g = 1$ для нашего сглаженного треугольника.

Доказательство формулы (3) в общем случае следует тому же методу, но я предпошлю ему одно замечание общего характера.

Математика, как и вообще все науки, интернациональна, и не существует ни специфически немецкой математики, о которой мечтали нацисты, ни специфически французской или русской (хотя многие считают, что любая задача допускает две крайних версии: русская версия есть та, которую никто не сможет упростить, не сделав вопрос тривиальным, а французская — та, которую никто не сможет обобщить еще более).

Но в алгебраической геометрии давно сложился один общий принцип, традиционно называемый итальянским (потому что им систематически пользовались замечательные итальянские алгебраические геометры XIX века).

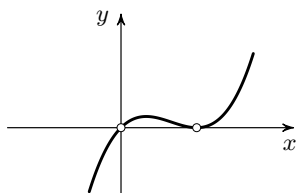
Вот как формулируется этот «итальянский принцип». Предположим, что мы рассматриваем какое-либо семейство комплексных объектов (например, многообразие $\mathbb{C}^n$ всех комплексных многочленов степени n вида

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

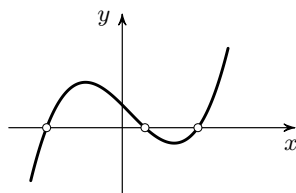
или многообразие всех плоских алгебраических кривых степени n в комплексной проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$).

Некоторые объекты семейства будут тогда невырожденными (например, многочлены без кратных корней или алгебраические кривые без особых точек).

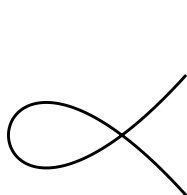
Другие же объекты вырождаются:



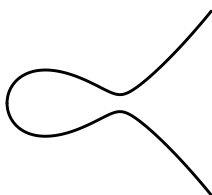
ВЫРОЖДЕННЫЙ МНОГОЧЛЕН
СТЕПЕНИ 3



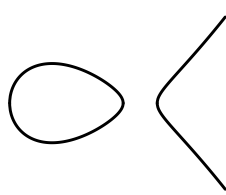
НЕВЫРОЖДЕННЫЙ МНОГОЧЛЕН
СТЕПЕНИ 3



ВЫРОЖДЕННАЯ КРИВАЯ
СТЕПЕНИ 3



НЕВЫРОЖДЕННЫЕ КРИВЫЕ
СТЕПЕНИ 3



«Итальянский принцип» состоит в следующем: *все невырожденные объекты в семействе комплексных объектов имеют одинаковое топологическое строение* (например, все невырожденные многочлены степени n имеют одинаковое число корней и все гладкие алгебраические кривые степени n на комплексной проективной плоскости имеют одинаковый род g).

Строго говоря, чтобы превратить этот принцип в теорему, следовало бы точно определить, что означают слова «семейство», «невырожденность» и «одинаковое топологическое строение». Это можно было бы сделать, но пришлось бы исписать для этого много страниц. Поэтому я предпочту объяснить причину описываемого явления, оставляя подробности любознательным читателям.

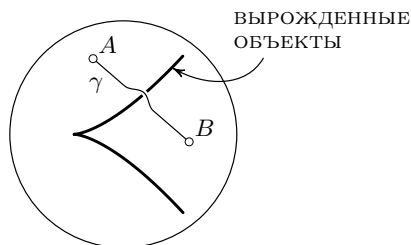
Основное наблюдение состоит в том, что вырожденность выражается обращением в ноль некоторого комплексного многочлена от значений параметров объектов изучаемого семейства.

Например, многочлен имеет кратные корни, если и только если его дискриминант (полиномиально выражаемый через коэффициенты изучаемого многочлена) равен нулю. Точно так же алгебраическая кривая,

заданная на комплексной проективной плоскости уравнением $f(x, y) = 0$, где f — многочлен степени n , имеет особые точки, если и только если обращается в нуль некоторый многочлен от коэффициентов многочлена f .

Обращение в нуль комплексного многочлена от параметров изучаемых объектов означает, что обращаются в нуль и вещественная, и мнимая части этого многочлена. Поэтому одно такое комплексное условие вырожденности выделяет в пространстве всех изучаемых объектов подмножество вырожденных объектов, имеющее коразмерность 2, а не 1 (как точки на плоскости или кривые в пространстве).

Множество вырожденных объектов, имея (вещественную) коразмерность 2, не делит на части все пространство изучаемых комплексных объектов: любые две невырожденные точки A и B этого пространства можно соединить непрерывным путем γ , не пересекающим множество вырожденных объектов (а обходящим это множество коразмерности два).



При движении вдоль такого невырожденного пути изучаемые топологические характеристики объекта (число корней многочлена, род кривой и т. д.) не меняются.

Вследствие этого, для вычисления этих общих характеристик всех невырожденных объектов изучаемого семейства достаточно изучить один пример невырожденного объекта: его характеристики доставят информацию обо всех невырожденных объектах семейства.

Пример. Многочлен степени n

$$(x - 1)(x - 2) \dots (x - n)$$

имеет n различных корней и невырожден.

Следовательно, любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами, не имеющий кратных корней, имеет ровно n комплексных корней.

Тем самым мы доказали «основную теорему алгебры» (из доказанного свойства многочленов без кратных корней вытекает, что и многочлены степени n с кратными корнями имеют не больше n комплексных

корней, так как иначе можно было бы предъявить рядом с уравнением с большим n числом корней, некоторые из которых кратны, уравнение с большим n числом не кратных корней).

Применяя «итальянский принцип» к доказательству формулы Римана—Гурвица (3), мы построим пример гладкой алгебраической кривой степени n в $\mathbb{C}P^2$, для которой род удастся явно вычислить: $g = (n-1)(n-2)/2$.

В соответствии с «принципом» все остальные невырожденные (не имеющие особых точек) алгебраические кривые степени n в $\mathbb{C}P^2$ имеют такой же род, что и доказывает формулу (3).

Чтобы построить пример, мы начнем с набора n различных прямых в $\mathbb{C}P^2$. Выберем их так, чтобы никакие три из них не проходили через одну точку. Тогда общее число точек пересечения будет

$$N = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Объединение наших n прямых будет алгебраической кривой степени n с N особыми точками (в каждой из которых пересекаются две не касающиеся ветви).

Теперь мы сгладим эту особую кривую степени n , заменяя ее уравнение

$$f_1 f_2 \dots f_n = 0 \tag{4}$$

(где $f_k(x, y) = 0$ — уравнение первой степени, задающее k -ю из наших n прямых) на подобное же уравнение степени n с достаточно малой, но не нулевой правой частью ε (сохранив левую часть уравнения (4)).

Топологическое описание этого сглаживания — такое же, как в разобранном выше примере сглаживания комплексного треугольника. Остается только сосчитать, каков род у поверхности, получающейся из объединения n двумерных сфер, попарно пересекающихся в N точках, при замене окрестности каждой точки пересечения тонкой маленькой трубочкой, соединяющей пересекавшиеся до перестройки в этом месте сферы.

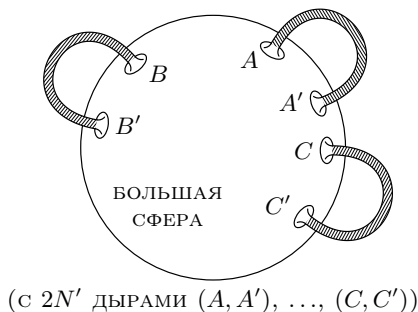
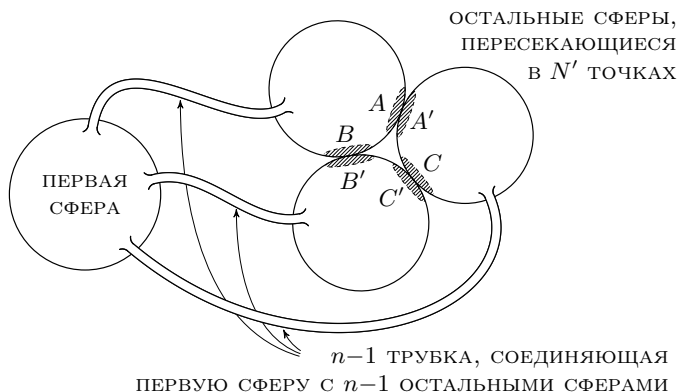
Чтобы вычислить этот род, выполним сначала сглаживания пересечений первой сферы со всеми остальными.

После каждого такого сглаживания одна из остальных сфер соединяется с первой в единую большую сферу так, что в конце концов получится единая большая сфера, которая, однако, будет еще пересекать себя во всех точках, где «остальные» сферы пересекались друг с другом.

Число таких точек пересечения (не затрагивающих первую сферу) есть

$$N' = (n-2) + (n-3) + \dots + 1 = \frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Заменяя каждую из этих точек пересечения соединяющей пересекавшиеся ветви трубочкой, мы приклеим к исходной большой сфере N' ручек. Поэтому результат всех сглаживаний есть поверхность рода $g = N'$, что и доказывает формулу Римана—Гурвица (3) для нашей гладкой алгебраической кривой степени n на комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ (а следовательно, согласно «итальянскому принципу», и для всех гладких алгебраических кривых степени n на $\mathbb{C}P^2$).



Таким образом, мы доказали формулу Римана—Гурвица (3): род гладкой алгебраической кривой степени n на комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ равен

$$g = N' = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

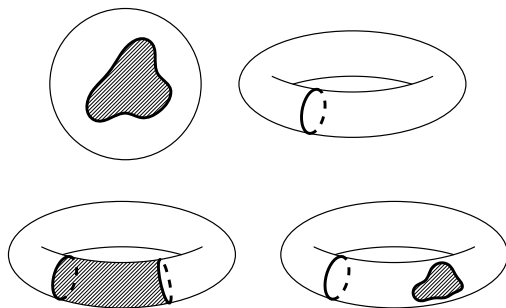
Род g римановой поверхности гладкой алгебраической кривой в $\mathbb{C}P^2$, полученной добавлением комплексных точек к вещественной алгебраической кривой в $\mathbb{R}P^2$, оценивает число компонент связности веществен-

ной кривой теоремой Харнака:

$$\text{число компонент} \leq g + 1.$$

Доказательство этой теоремы основано на следующем топологическом свойстве поверхностей рода g : на такой поверхности имеется g (непересекающихся попарно) замкнутых кривых, не делящих ее на части все вместе (так что дополнительная к этим кривым область связна), но нет большего числа таких кривых.

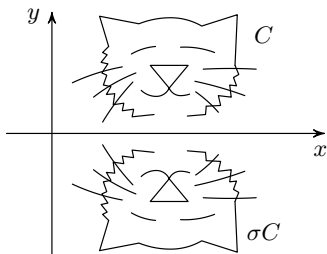
Например, сферу делит на части уже одна кривая, а тор не делится на части меридианом, но любые две непересекающиеся замкнутые кривые на торе обязательно делят его:



Более того, поверхность рода g делится любым набором из $g + k$ непересекающихся замкнутых кривых не меньше, чем на $k + 1$ часть (сфера делится k кривыми на $k + 1$ часть, а тор на k частей).

Выведем из этого топологического анализа поверхностей рода g теорему Харнака о вещественных алгебраических кривых.

Рассмотрим для этого отображение σ «комплексного сопряжения», переводящее каждое комплексное число $z = x + iy$ в комплексное число $\sigma(z) = x - iy$:



Каждую фигуру C на плоскости $\mathbb{C}$ комплексной переменной z симметрия σ отражает относительно вещественной оси x , причем $\sigma^2 = 1$, т. е. $\sigma(\sigma z) = z$, $\sigma(\sigma C) = C$.

Совершенно такое же сопряжение $\sigma: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ (отражающее комплексное n -мерное пространство в вещественном n -мерном подпространстве) задается такой же формулой

$$\sigma(x + iy) = x - iy \quad (\text{для любых } x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n).$$

На комплексном проективном пространстве сопряжение $\sigma: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$ действует таким же образом. Например, можно продолжить его с аффинного подпространства на «бесконечно удаленную гиперплоскость» $\mathbb{C}P^{n-1}$ по непрерывности. Можно также действовать на проходящие через точку 0 комплексные прямые аффинного пространства $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$\mathbb{C}P^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} \setminus 0}{\mathbb{C} \setminus 0},$$

и действие σ на числитель определяет его действие на дробь.

Получающееся действие σ на пространстве $\mathbb{C}P^n$ непрерывно, а на его аффинной части $\mathbb{C}^n$ стандартно. Поэтому определение при помощи дроби дает то же продолжение операции $\sigma: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ на бесконечно удаленные комплексные точки, что и продолжение по непрерывности.

Алгебраические кривые степени m на проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ переходят под действием операции комплексного сопряжения $\sigma: \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ в алгебраические кривые степени m , но каждая такая кривая переходит, вообще говоря, в другую, симметричную исходной, кривую.

Но если исходная кривая задавалась в аффинных координатах вещественным уравнением $f(x, y) = 0$, где многочлен f имеет вещественные коэффициенты, то операция комплексного сопряжения переведет такую кривую в себя.

Действительно, $\sigma(uv) = \sigma(u)\sigma(v)$, поэтому

$$\sigma(f(x, y)) = (\sigma(f))(\sigma(x), \sigma(y)).$$

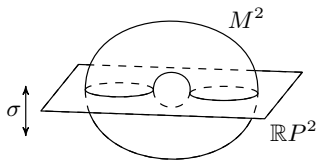
Если коэффициенты многочлена f вещественны, то $\sigma(f) = f$, а если в точке (x, y) f обращается в ноль, то

$$f(\sigma(x), \sigma(y)) = (\sigma(f))(\sigma(x), \sigma(y)) = \sigma(f(x, y)) = \sigma(0) = 0,$$

т. е. отраженная сопряжением точка $(\sigma(x), \sigma(y))$ принадлежит исходной алгебраической кривой.

Точки вещественной алгебраической кривой, лежащие на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, остаются при симметрии сопряжения

$\sigma: \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ на месте. Другие точки кривой на месте не остаются.

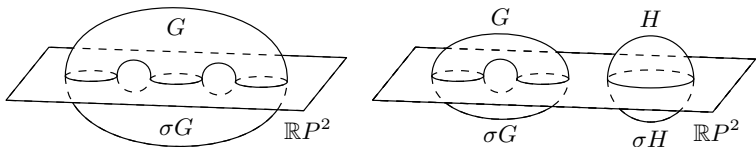


Поэтому компоненты связности вещественной алгебраической кривой на вещественной проективной плоскости являются компонентами связности множества неподвижных точек действия симметрии комплексного сопряжения σ на римановой поверхности M^2 нашей кривой.

Эти замкнутые вещественные кривые делят поверхность M^2 рода g на части, являющиеся поверхностями с краями, состоящими из компонент связности вещественной кривой.

Каждую такую часть симметрия σ переводит в другую часть того же разбиения, имеющую такую же границу.

Если число частей больше двух, то кроме двух частей G и σG есть еще другие части H и σH . Объединения G с σG и H с σH являются замкнутыми непересекающимися поверхностями: $M = (G \cup (\sigma G)) \amalg (H \cup (\sigma H))$.



Но вещественная гладкая алгебраическая кривая в комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ имеет связную риманову поверхность (это следует, например, из «итальянского принципа», так как мы проверили это для примера с возмущением объединения прямых).

Следовательно, число частей, на которые неподвижные кривые симметрии сопряжения σ делят риманову поверхность M^2 рода g , не может превосходить 2.

Из приведенного на с. 70 топологического свойства поверхностей рода g следует, что число компонент связности множества неподвижных кривых не может быть большим: если число компонент равно $g + k$, то число частей меньше или равно $k + 1$, поэтому оно не превосходит 2 только при $k \leq 1$, когда число компонент $g + k \leq g + 1$.

Стало быть, число вещественных компонент гладкой кривой рода g на вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ не превосходит значения $g + 1$.

Замечание. Теорема Харнака переносится на вещественные алгебраические многообразия больших размерностей в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$, только вместо рода g комплексной кривой и числа компонент связности вещественной кривой нужно рассматривать их многомерные обобщения, называемые «числами Бетти неориентированных многообразий».

Не определяя этих топологических инвариантов теории гомологий, являющихся для m -мерного многообразия целыми неотрицательными числами $(b_0, b_1, \dots, b_m)$, замечу лишь, что для двумерной ($m = 2$) поверхности рода g имеем

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2g, \quad b_2 = 1$$

(число b_k считает независимые циклы размерности k).

Для окружности размерность m есть 1, а числа Бетти одной окружности суть

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1.$$

Для объединения r (непересекающихся попарно) окружностей числа Бетти суть

$$b_0 = r, \quad b_1 = r.$$

Обобщающее неравенство Харнака многомерное неравенство Смита утверждает, что

$$\sum_{k=0}^m b_k(\mathbb{R}M^m) \leq \sum_{l=0}^{2m} b_l(\mathbb{C}M^m)$$

для любого гладкого m -мерного алгебраического многообразия, заданного уравнениями с вещественными коэффициентами в проективном пространстве

$$\mathbb{R}M^m \subset \mathbb{R}P^n, \quad \mathbb{C}M^m \subset \mathbb{C}P^n.$$

Числа Бетти b_k и b_l в приведенной формуле Смита обозначают «числа Бетти» неориентированной теории гомологий, с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$.

Пример. Для плоских кривых с римановой поверхностью рода g ($m = 1, n = 2$) неравенство Смита принимает вид

$$r + r \leq 1 + 2g + 1,$$

т. е. число компонент связности r вещественной кривой оценивается как

$$r \leq g + 1.$$

В этом случае неравенство Смита превращается в неравенство Харнака.

Рассматривавшийся выше род алгебраических кривых имеет много других приложений, кроме описанных выше приложений к анализу числа компонент вещественной проективной кривой.

Вот один из примеров. Пусть M — рациональная алгебраическая кривая на плоскости с координатами x и y , R — рациональная функция от x и y , т. е. отношение двух многочленов,

$$R(x, y) = \frac{a(x, y)}{b(x, y)}.$$

Тогда «абелев интеграл»

$$I(X) = \int_{X_0}^X R(x, y) dx$$

вдоль рациональной кривой M явно вычисляется в виде элементарной функции от координаты верхнего предела X (как комбинация рациональных функций, корней, экспонент, логарифмов, тригонометрических и обратных тригонометрических функций).

Чтобы это доказать, достаточно просто перейти в интеграле к независимой переменной t (вместо x).

Все кривые второй степени рациональны, поэтому интегралы от всех рациональных выражений, включающих $\sqrt{x^2 + ux + v}$, вычисляются в элементарных функциях (подобно $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \arcsin x$).

Пример. Для уравнения Ньютона в поле с силой $F(x)$ в точке x

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

выполняется «закон сохранения энергии»

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{y^2}{2} + U(x) \right) = 0,$$

где $y = \frac{dx}{dt}$, а потенциальная энергия U имеет производной в каждой точке x взятую со знаком минус силу поля в этой точке:

$$\frac{dU}{dx} = -F.$$

Если поле зависит от координаты точки x линейно (как в законе Гука, например), то его потенциальная энергия U является многочленом второй степени. На фазовой плоскости $\{(x, y)\}$ движение в нашем поле происходит по алгебраической кривой M второй степени:

$$\frac{y^2}{2} + U(x) = \text{const.}$$

Время движения вдоль этой алгебраической кривой выражается абелевым интегралом:

$$y = \frac{dx}{dt}, \quad \text{поэтому} \quad dt = \frac{dx}{y};$$

$$t = \int_M \frac{dx}{y} = \int_{X_0}^X \frac{dx}{\sqrt{2(E - U(x))}}, \quad (5)$$

где E — полная энергия (постоянная закона сохранения энергии).

Поскольку кривые второй степени рациональны, этот абелев интеграл берется в элементарных функциях, если сила в поле линейно зависит от положения движущейся точки.

Например, в случае закона Гука, вычисляя этот абелев интеграл при помощи арксинусов, мы приходим к гармоническим колебаниям

$$x = C_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

с зависящими от начальных условий постоянными C_0 и φ_0 и зависящей от коэффициента в законе Гука частотой ω .

Если же силовое поле задается многочленом F более высокой степени, чем первая, от координаты x , то абелев интеграл (5) нужно вычислять вдоль алгебраической кривой M :

$$\frac{y^2}{2} + U(x) = E$$

бóльшего рода g (он равен 1 для многочленов U степени 3 или 4, 2 для многочленов U степени 5 или 6, и так далее).

Например, для кубического многочлена, когда

$$2(E - U) = x^3 + g_2x + g_3,$$

абелев интеграл (5) вдоль эллиптической кривой M рода 1 принимает вид

$$t = \int^X \frac{dx}{\sqrt{x^3 + g_2x + g_3}}$$

(с постоянными коэффициентами g_2 и g_3), называемый «нормальной формой Вейерштрасса для эллиптических интегралов».

Обратная к $t(X)$ функция $X(t)$ называется *эллиптической функцией*. Она доставляет замечательное обобщение обычных тригонометрических функций, получаемых в случае потенциала степени два.

К. Г. Якоби отметил как удивительное свойство математики то, что в ней «одна и та же функция описывает и истинный закон колебаний

маятника, и число представлений целого числа суммой квадратов», имея в виду именно эту эллиптическую функцию.

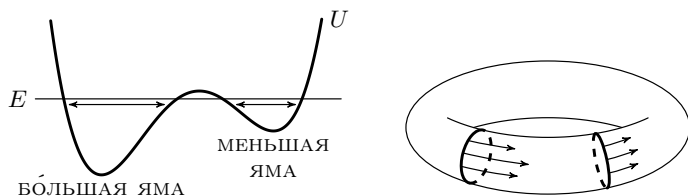
Эллиптическая функция X двоякопериодична на вещественной плоскости комплексной переменной t : существуют два комплексных числа α и β с не вещественным отношением, такие, что

$$X(t + \alpha) = X(t), \quad X(t + \beta) = X(t)$$

для любого $t \in \mathbb{C}$.

Задача. Материальная точка движется по прямой в поле, потенциальная энергия которого является многочленом степени 4 с двумя точками локального минимума.

В какой из этих двух потенциальных ям период колебаний (при одинаковой полной энергии E) больше: в большей или в меньшей?



Указание. Эти периоды равны, потому что потоки несжимаемой жидкости через любые два меридиана тора, по которому жидкость течет, одинаковы: сколько жидкости входит через один меридиан в область между ними, столько же вытекает через другой меридиан за единицу времени.

Тор, к которому это надо применить, — комплексная алгебраическая кривая рода $g = 1$, доставляемая законом сохранения энергии (в случае потенциала U степени 4 эта кривая — эллиптическая).

Общая теория абелевых интегралов вдоль кривых рода g приводит к такому выводу: если род алгебраической кривой M больше нуля (т.е. ее риманова поверхность — не сфера), то существует такая рациональная функция R , что соответствующий абелев интеграл вдоль M не берется в элементарных функциях. Этим свойством обладает даже большинство рациональных функций, хотя есть и исключения (например, $R = 0$).

Вероятно, первым рассматривал эту топологию абелевых интегралов вдоль алгебраических кривых при помощи их римановых поверхностей Ньютон, рассмотревший (в связи с законом площадей Кеплера в теории движения планет) следующий вопрос.

Существует ли такая гладкая замкнутая кривая на вещественной евклидовой плоскости, что площадь сегмента, отсекаемого от ограни-

ченной ею области любой прямой, является алгебраической функцией (от коэффициентов уравнения этой прямой)?

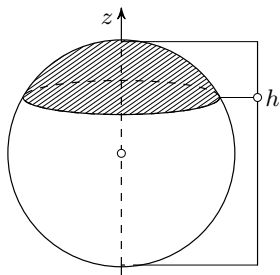
Ньютон предполагал, что если бы такая кривая нашлась, то Богу следовало бы именно ее, а не эллипс, выбрать для планетных орбит (чтобы облегчить астрономам решение «уравнения Кеплера», определяющее положение планеты на ее орбите в функции от момента времени: для эллиптических орбит это уравнение не алгебраическое, а трансцендентное).

Ньютон доказал, используя топологию римановых поверхностей, что таких кривых (с алгебраической зависимостью площади от секущей) не бывает.

Лейбниц, читая Ньютона, сделал пометку на полях его книги: «ERROR», считая контрпримером к утверждению Ньютона треугольник.

Но доказательство Ньютона было правильным: дело в том, что треугольник — не гладкая кривая, его комплексификация (а Ньютон использовал комплексную топологию римановых поверхностей в своем доказательстве) приводит не к связной римановой поверхности, как в рассматриваемом Ньютоном случае, а к «приводимой алгебраической кривой» из трех компонент, не образующих единой гладкой поверхности.

Замечу еще, что аналог вопроса Ньютона в трехмерном пространстве (когда исследуются объемы сегментов, отсекаемых плоскостями от ограниченного гладкой поверхностью тела) имеет совершенно другой ответ (найденный Архимедом): площадь, отсекаемая от сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ плоскостью (а следовательно, и объем сегмента шара) алгебраически зависит от плоскости. А именно, площадь области, где $z > h$, пропорциональна высоте $1 - h$ соответствующего сегмента.



Разумеется, эллипсоиды (и другие поверхности второй степени) в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ также обладают подобным свойством алгебраичности объема. Но бывают ли иные гладкие поверхности с этим свойством, неизвестно.

Задача Ньютона об объемах сегментов в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^n$ четной размерности n приводит, как и в случае плоскости ($n = 2$), к выводу об отсутствии случаев алгебраичности (вследствие топологии соответствующих римановых поверхностей). В случае нечетной размерности n , как и в трехмерном случае, интегрируемость встречается (для эллипсоидов). Но не доказано, что она встречается только для них.

Задача. Исследовать комплексификацию двумерной сферы.

Речь идет об алгебраической поверхности, заданной в аффинном пространстве $\mathbb{R}^3$ уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Если считать числа x , y и z комплексными, то это уравнение задает в пространстве $\mathbb{C}^3$ двумерное комплексное многообразие $M^4 \subset \mathbb{C}^3$ (вещественной размерности 4). Добавляя к M^4 бесконечно удаленные точки, мы получаем (гладкое) комплексное алгебраическое многообразие $X^4 \subset \mathbb{C}P^3$.

Задача состоит в (топологическом) исследовании этого компактного четырехмерного многообразия.

Ответ. $X^4 \approx S^2 \times S^2$ (причем диффеоморфизм $\approx$ можно даже считать голоморфным).

Задача для школьников

В заключение я хочу сформулировать топологическую задачу вещественной проективной алгебраической геометрии, доступную дошкольникам.¹

Рассмотрим n прямых на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$. Эти прямые делят плоскость на некоторое число выпуклых областей.

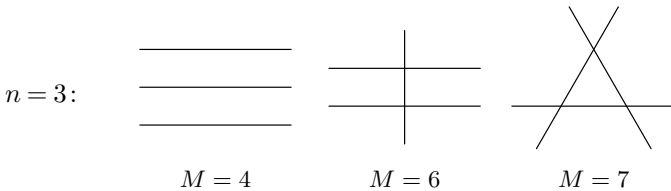
Задача. На сколько частей могут делить плоскость n прямых?

Пример. Одна прямая делит плоскость на 2 части. Две параллельные прямые делят плоскость на 3 части, а две непараллельные — на четыре.

При бóльших значениях n также легко построить примеры деления на M частей, где M имеет следующие значения:

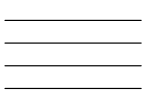
n	1	2	3	4	6	7	8
M	2	3	4	5	7	8	9
		4	6	8	12	14	16
			7	9	15	18	22
				10	16	19	?
				11	17	$\vdots$	24
					$\vdots$	29	$\vdots$
					22		37

Вот простейшие примеры:

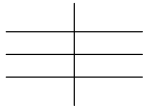


¹Замечу, впрочем, что близкие к этой задаче другие вопросы вещественной алгебраической геометрии могут оказаться алгоритмически неразрешимыми — это относится, например, к описанию триангуляций торов (и даже двумерного тора), доставляемых теорией многомерных периодических цепных дробей. Простейшей кубической иррациональности соответствует триангуляция , но описания всех триангуляций, соответствующих другим кубическим иррациональностям, нет — вопрос о том, реализуема ли данная триангуляция, может оказаться неразрешимым.

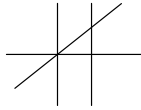
$n = 4$:



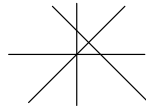
$M = 5$



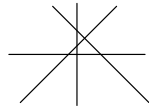
$M = 8$



$M = 9$



$M = 10$



$M = 11$

Совершенно ясно, что число областей M , на которые делят плоскость n прямых, не может быть меньшим, чем $n + 1$, достигает максимального значения $1 + (1 + 2 + \dots + n) = 1 + n(n + 1)/2$ и не может его превосходить.

Но достигаются ли все промежуточные значения M , $n + 1 < M < 1 + n(n + 1)/2$?

Как мы сейчас докажем, достигаются не все промежуточные значения. Например, три прямые не могут делить плоскость на 5 частей, а четыре — ни на 6, ни на 7 частей.

Теорема. *Плоскость нельзя разбить на M частей n (различными) прямыми, если*

$$n + 1 < M < 2n,$$

а также если

$$2n < M < 3n - 3.$$

Для доказательства введем следующие обозначения.

Обозначим через k наибольшее число параллельных друг другу прямых в рассматриваемой конфигурации n прямых.

Обозначим через x наибольшее число прямых в рассматриваемой конфигурации, проходящих через одну точку.

Утверждение 1. *Если $k = n$, то число областей $M = n + 1$ (это очевидно, см. первые рисунки для $n = 3$ и 4 выше).*

Утверждение 2. *Если $k = n - 1$, то число областей $M = 2n$.*

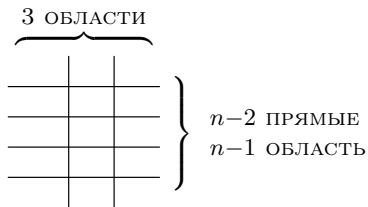
Это тоже ясно из приведенных выше рисунков (вторых в обоих случаях $n = 3$ и $n = 4$).

Утверждение 3. *Если $k = n - 2$, то число областей либо $M = 3n - 2$, либо $M = 3n - 3$.*

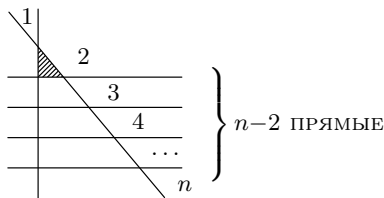
Доказательство утверждения 3. Система из $n - 2$ параллельных прямых и одной непараллельной им делит плоскость на $2(n - 1)$ частей (по утверждению 2).

Оставшаяся прямая пересекает наши $n - 2$ параллельные прямые в $n - 2$ различных точках. Если она параллельна первой (непараллель-

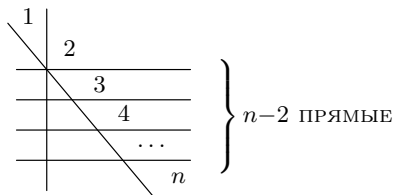
ной остальным) прямой, то $M = 3(n - 1)$:



Если она не параллельна первой и пересекает ее вне наших $n - 2$ параллельных прямых, то $M = 2(n - 1) + n = 3n - 2$: добавление этой последней прямой добавляет n областей к имевшимся до ее проведения $2(n - 1)$ областям.

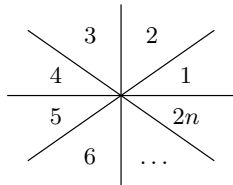


Если же последняя прямая пересекает первую непараллельную остальным прямую в одной из точек ее пересечения с параллельными прямыми, то областей на 1 меньше, $M = 3n - 3$ (исчез заштрихованный на предыдущем рисунке треугольник).



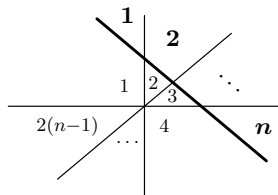
Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. Если $x = n$, то число областей $M = 2n$ (эти n прямых делят плоскость на $2n$ углов):

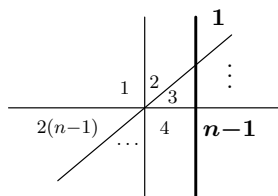


Утверждение 5. Если $x = n - 1$, то число областей $M = 3n - 2$ или $M = 3n - 3$.

Доказательство утверждения 5. Если прямая, не проходящая через точку пересечения остальных, не параллельна ни одной из них, то она делится $n - 1$ точкой своего пересечения с ними на n частей и добавляет поэтому n областей к имевшимся до ее проведения $2(n - 1)$:

$$M = 2(n - 1) + n = 3n - 2.$$


Если же прямая, не проходящая через точку пересечения остальных $n - 1$ прямых, параллельна одной из них, то число ее точек пересечения с ними равно $n - 2$, и эти точки делят ее на $n - 1$ часть, так что она добавляет не n частей к имевшимся до ее проведения $2(n - 1)$ частям, а только $n - 1$ часть:

$$M = 2(n - 1) + (n - 1) = 3n - 3.$$


Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. Если

$$k < n - 2, \quad 3 < x < n - 1,$$

то число областей удовлетворяет неравенству

$$M \geq 4n - 8,$$

а если только

$$k < n - 2, \quad 2 < x < n - 1,$$

то $M \geq 3n - 3$.

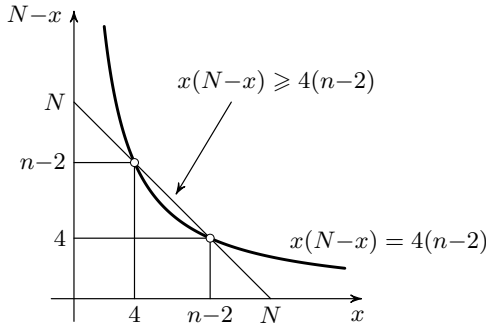
Доказательство утверждения 6. В точке пересечения x прямых рассмотрим $2x$ образовавшихся углов. Каждая из $n - x$ оставшихся прямых пересекает не менее чем $x - 1$ прямую, проходящую через выбранную точку, и делится ими не менее чем на x частей. Добавление этой прямой добавляет поэтому к числу областей не менее чем x новых частей.

Добавляя по одной все $n - x$ оставшихся прямых, мы добавим не меньше чем $x(n - x)$ новых областей к имевшимся $2x$ углам, так что общее число областей будет

$$M \geq 2x + x(n - x) = x(N - x), \quad \text{где } N = n + 2.$$

Если, как предполагалось в утверждении 6, выполнены неравенства $4 \leq x \leq n - 2$, то выполнены также неравенства $4 \leq N - x \leq n - 2$, так что мы получаем для числа областей неравенство

$$M \geq 4(n - 2) = 4n - 8.$$



Тем самым доказана первая часть утверждения 6.

Если условие $4 \leq x \leq n - 2$ заменить на $3 \leq x \leq n - 2$, то пара $(x, N - x)$ сможет принимать еще одно значение, $x = 3$, $N - x = n + 2 - 3 = n - 1$, так что мы найдем из тех же рассуждений оценку числа областей

$$M \geq 3(n - 1).$$

Утверждение 7. Если $x = 2$ (т. е. никакие три прямых конфигурации не проходят через одну точку), а $2 \leq k \leq n - 3$, то число областей удовлетворяет неравенству $M \geq 3(n - 1)$.

Доказательство утверждения 7.

Рассмотрим набор k параллельных прямых из нашей системы n прямых. Каждая из $n - k$ остальных прямых делится этими k параллельными прямыми на $k + 1$ часть. Поэтому $k + 1$ части, на которые делят плоскость наши k параллельных прямых, при проведении остальных $n - k$ прямых добавляется не менее чем $(n - k)(k + 1)$ частей.

Итого мы получаем для общего числа частей M оценку

$$M \geq (k + 1) + (n - k)(k + 1) = (k + 1)(N - (k + 1)),$$

где $N = n + 2$.

В условиях утверждения 7 имеем

$$3 \leq k + 1 \leq n - 2, \quad 4 \leq N - (k + 1) \leq N - 3 = n - 1.$$

Следовательно (как в доказательстве утверждения 6) имеет место неравенство

$$M \geq (k + 1)(N - (k + 1)) \geq 3(n - 1),$$

доказывающее утверждение 7.

Утверждение 8. Если $x = 2$ и $k = 1$ (так что среди наших n прямых нет ни пары параллельных прямых, ни тройки прямых, проходящих через одну точку), то число областей M — максимально возможное при данном n ,

$$M = 1 + \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Доказательство утверждения 8. Каждая добавляемая прямая добавляет к областям, на которые делят плоскость m уже проведенных прямых, еще $m + 1$ часть (поскольку делится m точками своего пересечения с m уже проведенными прямыми на $m + 1$ часть).

Суммируя добавляемые части, мы получаем

$$M = 1 + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 1 + \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Сформулированная выше (на с. 80) теорема вытекает из доказанных утверждений 1–8 следующим образом.

Если $k \geq n - 2$, то утверждения теоремы следуют из доказанных выше утверждений 1, 2 и 3.

При $x > n - 2$ утверждения теоремы следуют из доказанных выше утверждений 4 и 5.

Если $k \leq n - 3$, причем $3 < x < n - 1$, то первая часть утверждения 6 доставляет неравенство $M \geq 4n - 8$. Это число больше или равно $3n - 3$, если $n > 5$, так что утверждение теоремы доказано и в этом случае (для $n \geq 5$).

Для $n < 5$ оно тоже верно (и доказывается, в сущности, приведенными выше рисунками систем 3 и 4 прямых).

Если $k \leq n - 3$, причем $x = 3$, то вторая часть доказанного утверждения 6 доставляет утверждение теоремы.

Если $x = 2$, то при

$$2 \leq k \leq n - 3$$

утверждение теоремы следует из доказанного выше утверждения 7.

В (единственном оставшемся неразобранном) случае $x = 2$, $k = 1$ доказанное утверждение 8 доставляет значение

$$M = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Это значение больше или равно $3n - 2$ при $n \geq 3$, так что неравенство теоремы доказано и в этом случае.

Вероятно, за интервалами

$$n + 1 < M < 2n, \quad 2n < M < 3n - 3,$$

недостижимыми числом областей, на которые делят плоскость n прямых, следуют и другие подобные интервалы (вроде, возможно, $3n - 2 < M < 4n - 8$?), но это не доказано.

Я рассказал здесь об этой элементарной задаче именно в расчете на помощь школьников в ее решении. Надеюсь, что читатели опубликуют это решение.

Недавно А. Б. Гивенталь перевел на английский (или американский) язык замечательный учебник «Геометрия» Киселёва.

Читая в Беркли в апреле 2007 года перевод этой хорошо известной мне книги, я обнаружил, что не в силах решить одну из задач (хотя в детстве и перерешал их все).

При сравнении оказалось, что в переводимой книге Киселёва этой задачи не было: ее добавил переводчик. Формулировка его задачи была такой:

Сколько нужно взять прямых, чтобы разделить ими плоскость ровно на 5 частей?

Естественно, я (приехав в Беркли из Франции) сразу обобщил эту задачу, рассматривая любые числа n прямых и M частей.

Так возникла теорема настоящей главы, открывающая, мне кажется, целое поле деятельности для школьников, любящих математику.

Добавлю еще одно странное обстоятельство, открытое вследствие этого перевода: Гивенталь сравнил учебник «Геометрии» Киселёва со всеми другими и обнаружил в мировой литературе только один столь же хороший учебник: книгу Адамара. Возникла гипотеза, что Киселёв так хорош благодаря тому, что он использовал учебник великого французского математика, Адамара. Но более внимательный анализ показал, что это не так: книга Киселёва опубликована десятилетием раньше книги Адамара. При этом гимназические учителя, пользовавшиеся книгой Адамара, исправили имевшиеся в ней вначале многочисленные ошибки. Я надеюсь, что и настоящий элементарный учебник будет исправлен тем же путем (и даже школьниками, а не учителями).

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Геометрия конических сечений	5
Глава 2. Физика конических сечений и эллипсоидов	21
Глава 3. Проективная геометрия	35
Глава 4. Комплексные алгебраические кривые	57
Глава 5. Задача для школьников	79

Владимир Игоревич Арнольд

ВЕЩЕСТВЕННАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

Подписано в печать 02.03.2009 г. Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 5,5. Тираж 1000. Заказ .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85. E-mail: biblio@mcsme.ru
