

В. В. Амелькин

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по математическим специальностям*



МИНСК
БГУ
2012

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6я73
А61

Рецензенты:

кафедра высшей математики БГУИР (заведующий кафедрой
доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Цегельник*);
заведующий кафедрой высшей математики БГЭУ
доктор физико-математических наук, профессор *М. П. Дымков*

Амелькин, В. В.

А61 Дифференциальные уравнения : учеб. пособие / В. В. Амелькин. — Минск : БГУ, 2012. — 288 с. — (Классическое университетское издание).

ISBN 978-985-518-703-6.

В учебном пособии изложены основные разделы классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводятся примеры, поясняющие принципиальные положения теории.

Для студентов, обучающихся по математическим специальностям в учреждениях высшего образования.

УДК 517.91(075.8)
ББК 22.161.6я73

ISBN 978-985-518-703-6

© Амелькин В. В., 2012
© БГУ, 2012

Уважаемые читатели!

Серия «Классическое университетское издание» была основана в 2010 году к 90-летию Белорусского государственного университета. Путь, который прошло наше учебное заведение в своем развитии, свидетельствует о становлении в нем собственной академической и научной традиции. Несомненно, опыт и знания, аккумулированные в стенах БГУ, являются не только предметом нашей гордости, но и достоянием всего белорусского общества. Одна из целей предлагаемой серии – сделать это достояние как можно более открытым и доступным.

Белорусский государственный университет всегда славился академичностью и фундаментальностью в подготовке специалистов. Однако сегодня этого уже недостаточно. От выпускника требуется умение быстро включаться в непосредственную практическую работу, которой свойствен синтез нескольких форм деятельности: собственно производственной, исследовательской, проектно-разработческой. В выигрыше в конечном итоге окажется тот, кто сегодня научится более эффективно создавать и применять знания, оперативно изменять технологии, совершенствовать и радикально трансформировать накопленный опыт. Вот почему совмещение преимуществ фундаментального и прагматического образования стало основой инновационно ориентированной подготовки будущих специалистов в нашем университете.

Серия отражает многолетний опыт научно-педагогической, методической и издательской работы БГУ. Ее цель – предста-

вить модель учебного текста, которая в своей структуре содержит набор программ образовательно-научно-производственной деятельности будущих специалистов. Реализация этой модели позволит обеспечить универсализм выпускника, его способность к эффективному решению важных задач, стоящих перед Республикой Беларусь на национальном и международном уровне.

Классическое университетское издание, являя собой сплав научной и педагогической мысли, призвано формировать особую культуру знания – передового и доступного, теоретического и практического, общекультурного и специализированного. Словом, такого знания, которое будет работать.

Книги этой серии должны стать образцом научно-методического обеспечения современного образовательного процесса в высшей школе, утвердить ведущую роль нашего университета в качестве национального научно-методического центра Республики Беларусь.

Надеемся, что серия «Классическое университетское издание» состоится и как одно из слагаемых особой культурно-образовательной среды БГУ, которая будет способствовать интеллектуальному росту и творческой созидательной деятельности наших студентов.

*Ректор Белорусского
государственного
университета
академик НАН Беларуси,
профессор*

A stylized handwritten signature in black ink, consisting of a large loop followed by a series of connected strokes.

С. В. Абламейко

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время известно много хороших книг по основам теории и приложениям обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). И тем не менее очевидна необходимость в постоянной модернизации курса ОДУ, связанной с последними научными достижениями, новыми задачами и успехами методической мысли.

Цель предлагаемого издания, с одной стороны, дать студенту необходимый минимум знаний по классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений для успешного ее применения в различных областях науки и техники, а с другой — подвести его к пониманию задач современной теории дифференциальных уравнений и методов их решения.

Учебное пособие написано на основе курса лекций, читаемого автором на протяжении многих лет на производственном отделении механико-математического факультета Белорусского государственного университета, и содержит подробное изложение всех вопросов учебной программы дисциплины «Дифференциальные уравнения» для механико-математических и физико-математических специальностей университетов.

Материал пособия доступен для студентов со средним уровнем подготовки. Используются лишь классические понятия математического анализа и основные сведения из линейной алгебры.

Остановимся вкратце на некоторых частных аспектах пособия.

Прежде всего обратим внимание на теорему 3.1 о том, что точка перегиба интегральной кривой скалярного дифференциального уравнения является точкой касания интегральной кривой и изоклины. Этот простой, но полезный факт не приводится в учебниках по дифференциальным уравнениям.

Принципиально различными являются два подхода к понятию интегрирования дифференциальных уравнений: интегрирование в узком и широком смысле (§ 4), понимание которых позволяет избежать различного рода недоразумений, поскольку в учебниках по дифференциальным уравнениям вопрос интегрируемости трактуется по-разному. Следует иметь в виду и две точки зрения на понятие интегрирования в окрестности особой точки.

Отметим теорему 6.2, в которой подчеркивается тот факт, что при выполнении тождества Эйлера на открытом множестве $\mathbb{D}$ дифференциальное уравнение (6.1) будет уравнением в полных дифференциалах, вообще говоря, на некотором открытом подмножестве $\mathbb{D}^* \subset \mathbb{D}$, что и иллюстрируется примером.

При рассмотрении вопроса об особых решениях выделим теорему 11.1, касающуюся достаточного условия существования огибающей — простого и эффективного условия, однако в учебных пособиях по дифференциальным уравнениям практически не упоминающегося.

Несколько неожиданным для студентов является тот факт, что по некоторому набору линейно зависящих скалярных функций и векторов можно строить линейно независимые вектор-функции (§ 29).

Удобной для приложений является теорема 30.6 о необходимом и достаточном условии линейной зависимости скалярных аналитических функций, отсутствующая в учебной литературе по дифференциальным уравнениям.

Отметим краткие доказательства теоремы Коши 43.1 о голоморфном решении дифференциального уравнения и теоремы Пуанкаре 48.1 об аналитической зависимости решений дифференциального уравнения от параметра, основанные на принципе сжимающих отображений.

Обратим внимание и на совершенно новый для учебной литературы подход к исследованию вопросов устойчивости движения автономных дифференциальных уравнений, основанный на применении знакопостоянных функций, что позволяет существенно расширить возможности второго метода Ляпунова (§ 58).

Несколько слов о понятии «*c*-семейство решений» дифференциального уравнения, которым автор заменяет используемое в большинстве учебников понятие «общее решение», поскольку последнее с точки зрения русского языка неверно отражает суть вопроса, так как *не всегда* описывает *все* решения дифференциального уравнения. Есть версия, что термин «общее решение» — это не совсем точный перевод с французского на русский язык термина *general solution*, который следовало бы, по-видимому, перевести как «главное, или генеральное, решение».

В библиографических ссылках и списке литературы указаны названия учебных пособий, в которых затронутые в настоящей работе вопросы излагаются методически иначе и с другим акцентом в выборе материала.

Автор благодарен рецензентам — доктору физико-математических наук, профессору М. П. Дымкову и доктору физико-математических наук, профессору В. В. Цегельнику — за конструктивные замечания по улучшению содержания пособия, а также кандидату физико-математических наук, доценту Б. С. Калитину и кандидату физико-математических наук, доценту Ю. Б. Сыроиду — за полезные обсуждения.

Глава 1

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-го ПОРЯДКА. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В КВАДРАТУРАХ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Теория дифференциальных уравнений (ДУ) является естественным развитием и продолжением дифференциального и интегрального исчислений и представляет собой одну из ветвей математического анализа, которая уже давно выделилась в самостоятельную научную и учебную дисциплину.

ДУ возникли впервые в связи с задачами геометрии и механики, а сам термин «дифференциальное уравнение» ввел в 1676 г. Г. Лейбниц¹.

ДУ — это уравнения для отыскания функций, производные или дифференциалы которых удовлетворяют некоторым наперед заданным условиям. Так, ДУ для нахождения скалярной функции x переменной $t \in \mathbb{R}$ является, например, уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t).$$

В данном случае значение производной разыскиваемой функции x в каждой точке t должно совпадать со значением в соответствующей точке самой функции, что и имеет место, например для функции x , заданной равенством

$$x(t) = e^t.$$

¹ Лейбниц Готфрид Вильгельм (Leibniz G. W., 1646—1716), немецкий математик.

Более того, оказывается, что таких функций существует бесконечно много и они задаются соотношением

$$x(t) = ce^t,$$

где c — произвольная постоянная.

Вместе с тем отметим, что не для каждого ДУ можно указать функцию, ему удовлетворяющую. И не потому, что невозможно найти такую функцию, а потому, что ее просто не существует.

Действительно, рассмотрим, например, скалярное ДУ

$$\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + 1 = 0.$$

Тогда если мы интересуемся вещественными функциями, которые могли бы обращать это уравнение в тождество, то, очевидно, таких функций не существует, поскольку значение производной в данном случае оказывается мнимым.

Рассмотрим теперь ДУ

$$\left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + (x(t))^2 = 0.$$

Этому ДУ удовлетворяет единственная вещественная функция, определяемая соотношением $x(t) \equiv 0$.

Таким образом, уже приведенные примеры подводят к одной из важнейших задач теории ДУ, состоящей в нахождении условий, гарантирующих существование функций, обращающих заданное ДУ в тождество, и дающих ответ на вопрос о количестве таких функций.

На эти и ряд других вопросов мы ответим позже. А сейчас заметим, что с понятием ДУ встречаются в курсе математического анализа при отыскании первообразных. Так, вспоминая, что первообразной для непрерывной на интервале (a, b) функции $f: t \mapsto f(t)$ называется функция $x: t \mapsto x(t)$, которая в любой точке $t \in (a, b)$ дифференцируема, и значение ее производной $\frac{dx(t)}{dt}$ равно $f(t)$, приходим к выводу, что нахождение первообразных функции f сводится к нахождению функций x таких, что

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t).$$

Полученное уравнение называется *простейшим* ДУ.

Из курса математического анализа известно, что все искомые функции определяются соотношением

$$x(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + c, \quad t_0, t \in (a, b),$$

где c — произвольная постоянная.

Вообще к ДУ приходят в том случае, когда при математическом описании или, как еще говорят, при построении математической модели какого-либо явления или процесса удастся установить зависимость между параметрами, характеризующими то или иное состояние процесса или явления, и их производными или дифференциалами.

Так, например, обратимся к следующей задаче.

Задача. Пусть k, α — некоторые положительные постоянные, $\frac{t}{t+k}$ —

часть курса, которую студент, готовясь к экзамену, прорабатывает за t дней, а αt — часть курса, которую он при этом забывает. Сколько дней необходимо студенту на подготовку к экзамену, чтобы он выучил максимальную часть курса?

Рассуждаем следующим образом. Пусть $x(t)$ — та часть курса, которую студент выучил в течение t дней. Тогда

$$x(t) = \frac{t}{t+k} - \alpha t.$$

Задача теперь сводится к нахождению такого значения t , при котором функция x достигает максимума.

Решая эту задачу на максимум, приходим сначала к ДУ

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{k}{(t+k)^2} - \alpha,$$

описывающему закон, по которому студент готовится к экзамену. Подступая далее стандартным образом, находим, что искомое $t = \sqrt{k/\alpha} - k$ (при $k=1, \alpha = \frac{1}{25}$ получаем, что $t=4$, а значит, $x(t) \approx \frac{3}{5}$; при $k=2, \alpha = \frac{1}{18}$ снова $t=4$, но $x(t) = \frac{4}{9}$).

Не останавливаясь более на задачах, которые приводят к ДУ, отметим лишь, что такие уравнения появляются при решении задач из самых различных областей науки и техники. Это физика и астрономия, математика и химия, биология и экономика, экология и медицина, военное дело и энергетика и др. Полезным руководством по составлению ДУ является пособие К. К. Пономарёва [1], где собрано более 300 задач из различных

областей естествознания и техники, из которых около 200 задач даны с подробными решениями. См. также книгу В. В. Амелькина [2].

Говоря о ДУ, следует отметить, что существуют различные типы таких уравнений. Например, обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), ДУ в частных производных, ДУ с отклоняющимся аргументом, функционально-дифференциальные уравнения, стохастические ДУ и т. д.

В настоящем учебном пособии основное внимание уделено ОДУ, теория которых наиболее развита и знание различных аспектов которой необходимо при изучении других типов ДУ.

Определение 1.1. ОДУ 1-го порядка в нормальной форме называется соотношением вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

где $t \in \mathbb{R}$ — независимая переменная, которую в дальнейшем будем называть временем; $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — неизвестная функция, определенная на некотором промежутке $I \subset \mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}^n$; $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — заданное отображение множества $\mathbb{D}^1$ прямого произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$; а точка над x — символ оператора дифференцирования по $t \left(\dot{} = \frac{d}{dt} \right)$.

Часто как в учебной, так и в научной литературе используют и сокращенную запись ДУ (1.1) в виде

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1.1')$$

Если в ДУ (1.1) ((1.1')) правая часть от времени t явно не зависит, т. е. если ДУ принимает вид

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (\dot{x} = f(x)), \quad (1.2)$$

то оно называется *автономным*.

Если же хотя бы одна компонента вектор-функции f явно зависит от t , то ДУ (1.1) называется *неавтономным*.

Частным случаем неавтономного ДУ является введенное ранее простейшее ДУ $\dot{x} = f(t)$.

Обратим здесь внимание на тот факт, что *уравнение $\dot{x}(t) = x(x(t))$ не является ОДУ 1-го порядка в нормальной форме*.

Отметим далее, что множество $\mathbb{D}$, на котором определена функция f , называется *множеством задания (определения) ОДУ (1.1)*.

В случае простейшего ДУ множеством его задания является область $\mathbb{D} = I \times \mathbb{R}$, где $I \subset \mathbb{R}$.

¹ Обычно множеством $\mathbb{D}$ является или область (открытое связное множество), или замкнутый параллелепипед.

Что же касается автономного ДУ (1.2), то его множество задания — это множество $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^n$.

Если в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ ввести базис $v_1, v_2, \dots, v_n$, то подробнее векторное ДУ (1.1) можно записать в координатах в виде дифференциальной системы (ДС)

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.1'')$$

Действительно, поскольку

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_1 v_1 + \dot{x}_2 v_2 + \dots + \dot{x}_n v_n = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) v_1 + \\ &+ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) v_2 + \dots + f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) v_n, \end{aligned}$$

то

$$(\dot{x}_1 - f_1) v_1 + (\dot{x}_2 - f_2) v_2 + \dots + (\dot{x}_n - f_n) v_n = 0,$$

что в силу линейной независимости базисных векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$ и приводит к системе (1.1').

Например, векторное ДУ

$$\dot{x} = f(t, x), \quad \text{где } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f(t, x) = \begin{pmatrix} 4x_1 + x_2 - e^{-2t} \\ x_2 - 2x_1 \end{pmatrix},$$

записывается в виде системы так:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + x_2 - e^{-2t}, \\ \dot{x}_2 = x_2 - 2x_1. \end{cases}$$

Обратим внимание и на следующее обстоятельство. Как уже отмечалось, в общем случае уравнение (1.1) (система (1.1'')) является неавтономным. Но оказывается, что неавтономному ДУ всегда можно поставить в соответствие автономную систему, вводя специальным образом новую переменную. Такая система имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = f(t, x), \\ \frac{dt}{d\tau} = 1. \end{cases}$$

И хотя этот переход принципиально не упрощает исследование ДУ (1.1) (системы (1.1'')) — добавляется еще одно уравнение, он все-таки может быть полезен при рассмотрении конкретных вопросов теории ДУ.

Определение 1.2. Решением (в явном виде) ОДУ (1.1) с непрерывной правой частью $f(t, x)^1$, определенным на промежутке $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, назы-

¹ Здесь и далее непрерывность понимается по совокупности переменных.

вается дифференцируемое на I отображение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ (если I — полуинтервал или отрезок, то в конечной точке существует соответствующая односторонняя производная), график¹ которого лежит в $\mathbb{D}$ и

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I \quad (\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))).$$

З а м е ч а н и е 1.1. Из непрерывности отображения f и определения решения следует, что производная $\dot{\varphi}$ непрерывна на промежутке I .

Особо обратим внимание на то, что решение определяется на связном множестве.

Например, решением скалярного ДУ

$$\dot{x} = 2tx, \tag{1.3}$$

которое определено в области $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, является функция $\varphi: t \mapsto e^{t^2}$.

Эта функция определена и непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, ее график лежит в области $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2$ (рис. 1) и, кроме того,

$$\frac{d}{dt}(e^{t^2}) = e^{t^2} 2t = 2te^{t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

В случае уравнения

$$\dot{x} = 2\sqrt{x}, \tag{1.4}$$

где $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+$ ($\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$), непосредственной проверкой убеждаемся, что решениями здесь являются, например, функции, заданные соотношениями $x(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}_0^+$, и $x(t) \equiv 0$. Графики этих функций указаны на рис. 2, причем в первом случае имеем полупараболу (а не параболу), поскольку из вида ДУ следует, что производная любой функции, удовлетворяющей ДУ, всегда неотрицательна.

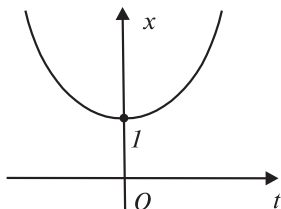


Рис. 1. К ДУ (1.3)

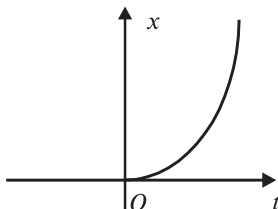


Рис. 2. К ДУ (1.4)

¹ Графиком отображения $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется подмножество прямого произведения $I \times \mathbb{R}^n$, состоящее из точек $(t, \varphi(t))$, где $t \in I$.

Заметим также, что из указанных двух решений последнего ДУ можно сконструировать так называемое *склеенное (составное)* решение. Таким решением является, например, решение, полученное склейкой полуинтервала $(-\infty, 0]$ оси t и полупараболы $x(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}_0^+$.

В теории ДУ склеенные решения, как правило, не рассматриваются.

Нахождение решений ДУ обычно называют *интегрированием*. Исторически первоначально основной задачей теории ДУ была задача об интегрировании ДУ в квадратурах, т. е. задача о представлении решений ДУ аналитическими формулами посредством набора элементарных функций¹ и функций, входящих в ДУ, используя лишь конечные последовательности алгебраических операций и операции взятия неопределенного интеграла (квадратуры).

Но после того как в 1841 г. Ж. Лиувиль² показал, что в квадратурах ДУ интегрируются редко, основной целью теории ДУ стало выяснение свойств решений непосредственно по самому ДУ.

Определение 1.3. Интегральной кривой, или движением, ОДУ (1.1) называется график решения ОДУ (1.1).

Определение 1.4. Фазовой кривой, или траекторией, ОДУ (1.1) называется множество значений $\varphi(t)$, $t \in I$, т. е. множество $\varphi(I) \subset \mathbb{R}^n$, где $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение ОДУ (1.1).

В связи с последними двумя определениями пространство $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ переменных t, x называют *пространством движений*, а пространство $\mathbb{R}^n$ переменной x — *фазовым пространством*.

Очевидно, что траектория — это проекция интегральной кривой на фазовое пространство.

На рис. 3 рассмотрен случай трехмерного пространства движений и двумерного фазового пространства.

Определение 1.5. Решение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ОДУ (1.1) имеет начальные данные t_0, x_0 , если отображение φ удовлетворяет условию

$$\varphi(t_0) = x_0 \quad (x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})), \quad (1.5)$$

которое называется начальным условием.

¹ Напомним, что элементарными функциями называются полиномиальные, степенные, тригонометрические, обратные тригонометрические, показательные, логарифмические функции, а также функции, которые можно получить из них с помощью конечного числа операций, каждая из которых есть одна из арифметических операций либо композиция отображений (сложная функция или суперпозиция отображений).

² *Лиувиль Жозеф* (Liouville J., 1809—1882), французский математик.

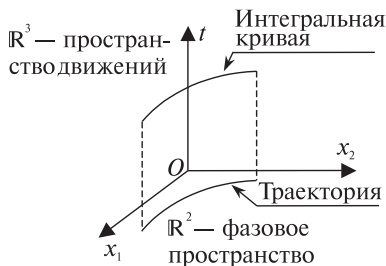


Рис. 3. К определениям 1.3 и 1.4

Определение 1.6. ОДУ (1.1) удовлетворяет условиям существования решений, если для любой точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{D}$ существуют $\delta > 0$ и отображение $\varphi: I_\delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($I_\delta = \{t \mid |t - t_0| < \delta\}$), являющееся решением ОДУ (1.1), удовлетворяющим начальному условию (1.5).

Определение 1.7. ОДУ (1.1) удовлетворяет условию единственности решений, если для любых двух решений $\varphi_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\varphi_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ из равенства $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)$, где $t_1 \in I_1 \cap I_2$, следует, что $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) \quad \forall t \in I_1 \cap I_2$.

Из последнего определения вытекает, в частности, что рассмотренное выше ОДУ (1.4) не удовлетворяет условию единственности решений.

Определение 1.8. Решение ОДУ (1.1), через каждую точку графика которого проходит, по крайней мере, один график другого решения ОДУ (1.1), называется особым решением.

§ 2. ЗАДАЧА КОШИ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ 1-го ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Задача Коши¹, или начальная задача, для ОДУ (1.1) ставится следующим образом. Требуется среди всего множества решений ОДУ (1.1) найти (указать) решение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, имеющее наперед заданные начальные данные t_0, x_0 .

Другими словами, задача Коши состоит в построении отображения $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего двум условиям:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.1)$$

В дальнейшем задачу Коши (начальную задачу) будем записывать в виде (2.1).

¹ Коши Огюстен Луи (Cauchy A. L., 1789—1857), французский математик.

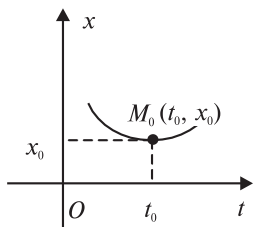


Рис. 4. К задаче Коши

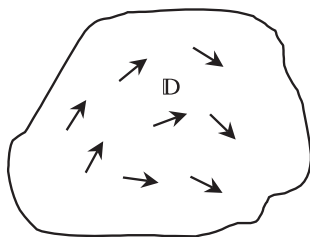


Рис. 5. Поле направлений

Геометрически задача Коши состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданную точку $M_0(t_0, x_0)$ (рис. 4).

Если рассмотреть, например, начальную задачу

$$\dot{x} = f(t), \quad x(t_0) = x_0$$

с непрерывной на некотором интервале (a, b) функцией f , то решением этой задачи, причем единственным, будет функция φ , заданная равенством

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau.$$

Поле направлений. Пусть каждой точке множества задания $\mathbb{D}$ системы (1.1)¹ поставлен в соответствие единичный вектор с началом в этой точке, направляющие косинусы¹ которого равны соответственно 1 и значениям правых частей уравнений системы (1.1)¹ в рассматриваемой точке. Множество построенных таким образом векторов и называется *полем направлений* (рис. 5).

Чтобы выяснить геометрический смысл ОДУ (1.1) запишем систему (1.1)¹, соответствующую векторному ДУ (1.1), в так называемой *симметрической форме*:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

¹ Направляющими косинусами вектора в декартовой системе координат называются косинусы углов, образуемых этим вектором с координатными осями. Если $\alpha_i, i = 1, m$, — углы, которые вектор $\vec{a}(v_1, v_2, \dots, v_m)$ образует в декартовой прямоугольной системе координат с осями $Ov_1, Ov_2, \dots, Ov_m$, то направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ можно найти по формулам $\cos \alpha_i = \frac{v_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m v_i^2}}$. Отсюда, в част-

ности, следует, что если вектор является единичным, то его направляющие косинусы совпадают с соответствующими координатами вектора. Направляющими косинусами прямой называются направляющие косинусы любого ненулевого вектора, параллельного данной прямой.

А тогда если отображение $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \\ x_1(t_0) = x_{10}, \\ x_2(t_0) = x_{20}, \\ \dots\dots\dots \\ x_n(t_0) = x_{n0}, \end{cases}$$

то касательная к графику отображения φ (к интегральной кривой) в точке $(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ задается системой

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\varphi_1}{f_1(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})} = \frac{d\varphi_2}{f_2(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})} = \dots = \frac{d\varphi_n}{f_n(t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})},$$

причем отрезок поля направлений, связанный с указанной точкой, будет, очевидно, отрезком этой касательной.

Таким образом, интегральная кривая уравнения (1.1) (системы (1.1')) обладает тем замечательным свойством, что в каждой ее точке направление касательной совпадает с направлением поля, которое задает уравнение (1.1) (система (1.1')) в соответствующей точке.

Это свойство и определяет *геометрический смысл ОДУ (1.1)*: направление касательной к интегральной кривой ОДУ (1.1) в точке M совпадает с направлением поля, которое задает ОДУ (1.1) в этой же точке M .

§ 3. ИЗОКЛИНЫ, ЛИНИИ ТОЧЕК ПЕРЕГИБА СКАЛЯРНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-го ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим скалярное ОДУ 1-го порядка в нормальной форме

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (3.1)$$

где отображение $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ области $\mathbb{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ такое, что ДУ (3.1) удовлетворяет условиям существования решений.

Определение 3.1. Кривая, в каждой точке которой наклон поля, определяемый ДУ (3.1), один и тот же, называется изоклиной ДУ (3.1).

Семейство изоклин ДУ (3.1) (если таковые существуют) задается уравнением

$$f(t, x) = k,$$

где k — переменный параметр.

Знание изоклин иногда может дать полное представление о поведении интегральных кривых ДУ вида (3.1), даже не интегрируя, если это и возможно, последних (и не интегрируемых вообще).

Например, для ДУ

$$\dot{x} = \sqrt{t^2 + x^2} \quad (3.2)$$

семейством изоклин является семейство кривых, заданных уравнением $\sqrt{t^2 + x^2} = k$ или уравнением $t^2 + x^2 = k^2$. Таким образом, изоклинами для рассматриваемого ДУ являются, при отличных от нуля различных значениях параметра k , концентрические окружности с центром в начале координат $O(0,0)$ (при $k = 0$ изоклиной является точка $O(0,0)$).

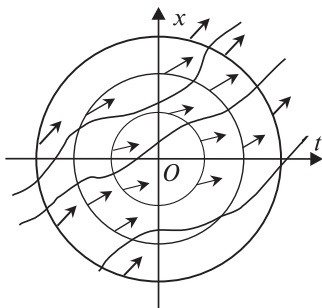


Рис. 6. К ДУ (3.2)

Тогда, замечая, что в данном конкретном случае угловой коэффициент $\dot{x}$ касательной к интегральной кривой равен радиусу соответствующей окружности, легко представить поведение интегральных кривых ДУ (3.2) (рис. 6).

З а м е ч а н и е 3.1. Изоклина может оказаться интегральной кривой ДУ. Например, для ДУ $\dot{x} = x$ изоклина $x = 0$ является интегральной кривой.

Определение 3.2. Кривая, в точках которой интегральные кривые ДУ (3.1) имеют перегиб, называется линией точек перегиба¹.

Теорема 3.1. Пусть точка $(t_0, \varphi(t_0))$ — точка перегиба интегральной кривой, соответствующей решению $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ ДУ (3.1). Тогда если функция f непрерывно дифференцируема, то точка $(t_0, \varphi(t_0))$ является точкой касания интегральной кривой с изоклиной.

Доказательство. Так как $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ — решение ДУ (3.1), то $\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t))$. Отсюда

$$\ddot{\varphi}(t) \equiv \frac{\partial f(t, \varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, \varphi(t))}{\partial \varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

В точке перегиба графика функции φ значение ее второй производной равно нулю, поэтому

$$\frac{\partial f(t_0, \varphi(t_0))}{\partial t} + \frac{\partial f(t_0, \varphi(t_0))}{\partial \varphi(t)} \frac{d\varphi(t_0)}{dt} = 0,$$

¹ Напомним, что если функция $\psi: t \mapsto \psi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале (a, b) и $\ddot{\psi}$ обращается в нуль лишь при $t = t_0$, $t_0 \in (a, b)$, то значение $t = t_0$ будет точкой перегиба для функции ψ тогда и только тогда, когда $\ddot{\psi}$ меняет знак при переходе через $t = t_0$. Точка $(t_0, \psi(t_0))$ — точка перегиба графика функции ψ .

и следовательно,

$$\frac{d\varphi(t_0)}{dt} = - \frac{\partial f(t_0, \varphi(t_0))}{\partial t} \bigg/ \frac{\partial f(t_0, \varphi(t_0))}{\partial \varphi(t)}.$$

С другой стороны, дифференцируя соотношение $f(t, \varphi(t)) = k$ (определяющее семейство изоклин) по t , имеем равенство

$$\frac{\partial f(t, \varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, \varphi(t))}{\partial \varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = 0,$$

из которого получаем уже найденное выше значение для производной $\frac{d\varphi(t_0)}{dt}$, а это и доказывает теорему.

Замечание 3.2. Из вида ДУ (3.1) следует, что

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} f(t, x).$$

Обозначим символом L_p кривую, заданную уравнением

$$\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} f(t, x) = 0.$$

Интересно здесь то, что кривая L_p может оказаться одновременно и интегральной кривой, и изоклиной, и линией точек перегиба. Очевидно, что в этом случае кривая L_p — это график особого решения, что и имеет место, например, для рассматриваемого в § 8 ДУ $\dot{x} = 3x^{\frac{2}{3}}$.

Отметим также, что кривая L_p может быть одновременно интегральной кривой и изоклиной, но не быть при этом линией точек перегиба, что и имеет место для ДУ $\dot{x} = x$ с кривой $L_p : x = 0$.

Геометрический метод Бродецкого (Такео — Вада). Указанный метод позволяет, не решая ДУ (3.1), выяснить характер поведения интегральных кривых указанного уравнения, если удастся построить кривую L_p и кривую I_0 , заданную уравнением $f(t, x) = 0$.

Так, если кривая I_0 не является интегральной кривой, то ее точки — это точки экстремума интегральных кривых. А тогда кривые I_0 и L_p разбивают область определения ДУ (3.1) на такие подобласти, в каждой из которых первая и вторая производные решения имеют определенные знаки. В каждом конкретном случае эти области и необходимо установить. Сделав это, мы сможем получить представление о характере поведения интегральных кривых ДУ.

Например, рассмотрим ДУ

$$\dot{x} = t + x. \quad (3.3)$$

Областью определения уравнения (3.3) является вся плоскость tOx . Кривая I_0 , уравнение которой $x = -t$ (рис. 7), интегральной кривой, очевидно, не является.

Что же касается кривой $L_p: x = -t - 1$, то это интегральная кривая, которая не является линией точек перегиба.

Прямые I_0 и L_p разбивают плоскость tOx на 3 подобласти:

$S_1(\dot{x} > 0, \ddot{x} > 0)$ — справа от I_0 ,

$S_2(\dot{x} < 0, \ddot{x} > 0)$ — между I_0 и L_p ,

$S_3(\dot{x} < 0, \ddot{x} < 0)$ — слева от L_p .

На кривой I_0 расположены точки минимумов интегральных кривых. Справа от I_0 интегральные кривые поднимаются вверх, слева — опускаются вниз, если смотреть слева направо. Точек перегиба нет. Справа от L_p интегральные кривые вогнуты вверх, слева — вогнуты вниз.

Качественная картина поведения интегральных кривых иллюстрируется рис. 7.

Замечание 3.3. В рассмотренном примере интегральная кривая L_p является своего рода «разделительной» кривой — она отделяет одно семейство интегральных кривых от другого.

Такие кривые обычно называют *сепаратрисами*.

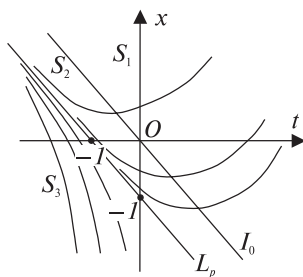


Рис. 7. К уравнению (3.3)

§ 4. РАЗЛИЧНАЯ ЗАПИСЬ СКАЛЯРНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-го ПОРЯДКА

Исследуя скалярное ДУ (3.1), естественно, хотя бы с геометрической точки зрения, наряду с уравнением (3.1) рассматривать «перевернутое» ДУ

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(t, x)}. \quad (4.1)$$

Дело в том, что если ДУ (3.1) и (4.1) таковы, что их правые части определены в каждой точке некоторой области $\mathbb{D}$, то эти уравнения эквивалентны. Эквивалентны они в том смысле, что если отображение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ является решением ДУ (3.1), то обратное отображение φ^{-1} будет решением ДУ (4.1), и следовательно, уравнения (3.1) и (4.1) имеют общие интегральные кривые.

Если же в некоторых точках области $\mathbb{D}(t, x)$ одно из уравнений (3.1) или (4.1) теряет смысл, то в таком случае имеют место *два подхода* к понятию интегрирования ДУ: *интегрирование в широком смысле* и *интегрирование в узком смысле*.

Если говорят об интегрировании ДУ в широком смысле, то в точках неопределенности правой части уравнения его заменяют «перевернутым» ДУ, чьи решения присоединяют к решениям исходного уравнения.

Присоединение указанных решений означает (в геометрической интерпретации), что область $\mathbb{D}$ пополняется направлениями, параллельными оси Ot (Ox). Тем самым область определения ДУ (3.1) ((4.1)) расширяется.

Таким образом, интегрирование в широком смысле означает: рассматривая ДУ (3.1) и его «перевернутое» уравнение (4.1), считается, что рассматривается одно ДУ.

Когда же говорят об интегрировании ДУ (3.1) в узком смысле, то «перевернутое» уравнение не рассматривается и исходное уравнение исследуется только в области определения функции f .

Отметим также, что если интегрирование понимается в широком смысле, то переменные t и x в ДУ равноправны. Этот факт подчеркивают аналитической записью ДУ в так называемой *дифференциальной (симметричной) форме*:

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0 \quad (4.2)$$

(в случае ДУ (3.1) $M(t, x) = f(t, x)$, $N(t, x) = -1$).

При этом точка (t_0, x_0) такая, что $M(t_0, x_0) = N(t_0, x_0) = 0$ называется *особой точкой ДУ* (4.2) и *неособой точкой* в противном случае, т. е. при

$$M^2(t_0, x_0) + N^2(t_0, x_0) \neq 0.$$

Для каждой неособой точки можно указать некоторую ее окрестность S_ε такую, что в этой окрестности либо $M(t, x) \neq 0$, либо $N(t, x) \neq 0$, а значит, интегрирование ДУ (4.2), рассматриваемого в S_ε , эквивалентно интегрированию в широком смысле ДУ

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{M(t, x)}{N(t, x)} \left(\frac{dt}{dx} = -\frac{N(t, x)}{M(t, x)} \right). \quad (4.3)$$

Что же касается интегрирования ДУ (4.2) в окрестности особой точки, то здесь есть две точки зрения. Согласно первой из них уравнение (4.2) рассматривают, о чем уже и шла речь выше, как иную форму записи (дифференциальную или симметричную) уравнения (4.3), интегрируемого в широком смысле. А поскольку в особой точке направление поля дифференциальным уравнением (4.3) не определяется $\left(\frac{dx}{dt} = \frac{0}{0} \right)$, то это свойство приписывают и уравнению (4.2). Другими словами, особая точка в область определения уравнения (4.2) ((4.3)) не включается.

Согласно второй точке зрения¹ ДУ (4.2) не связывают с ДУ (4.3), а рассматривают его как частный случай так называемого уравнения Пфаффа²

$$\sum_{i=1}^n f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i = 0.$$

При таком подходе особая точка уравнения (4.2) уже включается в область определения уравнения, и при этом считается, что ДУ (4.2) задает в этой точке любое направление.

Так, например, рассмотрим ДУ Пфаффа

$$xdt - tdx = 0. \quad (4.4)$$

Областью определения этого уравнения является плоскость $\mathbb{R}^2$. Непосредственно проверяется, что прямые $t = 0$ и $x = 0$ — это интегральные кривые рассматриваемого ДУ. Чтобы найти все множество его интегральных кривых, поступим следующим образом. Разделим обе части ДУ (4.4) на $tx \neq 0$. В результате придем к ДУ

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x},$$

откуда $\ln|t| = \ln|x| + c_1 \quad (c_1 + \ln|t| = \ln|x|),$

или $|t| = e^{c_1} |x| \quad (|x| = e^{c_1} |t|),$

или $t = \pm e^{c_1} x \quad (x = \pm e^{c_1} t),$

где c_1 — произвольная постоянная.

Учитывая теперь, что c_1 — произвольная постоянная, последние формулы можно переписать в виде

$$t = cx \quad (x = ct), \quad (4.5)$$

где c — произвольная, но не равная нулю, постоянная.

Присоединяя к полученному множеству решений (4.5), которое будем называть *c-семейством решений* (в соотношении (4.5) присутствует произвольная постоянная c), найденные ранее *стационарные решения* (x и t — константы) $x \equiv 0$, $t \equiv 0$, получим *полное семейство решений* (т. е. *совокупность всех решений*) рассматриваемого уравнения Пфаффа:

$$\left[\begin{array}{l} t = cx, \\ x \equiv 0 \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} x = ct, \\ t \equiv 0 \end{array} \right], \quad (4.6)$$

где c — произвольная постоянная.

¹ Этой точки зрения придерживаются, например, авторы учебного пособия [3].

² Пфафф Иоганн Фридрих (Pfaff I. F., 1765—1825), немецкий математик.

Таким образом, интегральными кривыми уравнения Пфаффа (4.4) являются прямые (4.6), проходящие через особую точку $O(0,0)$ (рис. 8).

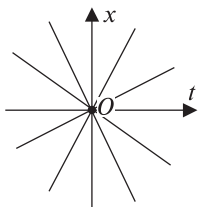


Рис. 8. К уравнению (4.4) Пфаффа

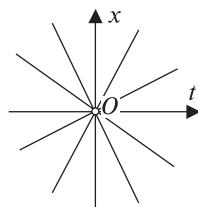


Рис. 9. К уравнению (4.4) в дифференциальной форме

С другой стороны, если уравнение (4.4) рассматривать как уравнение, записанное в дифференциальной форме, то его областью определения будет область $\mathbb{D} = \mathbb{R}^2 \setminus O(0,0)$ и, следовательно, его интегральные кривые — это лучи

$$\begin{cases} t = cx, & x > 0, \\ t = cx, & x < 0, \\ x = 0, & t > 0, \\ x = 0, & t < 0, \end{cases}$$

примыкающие к особой точке $O(0,0)$ (рис. 9).

§ 5. ПРИМЕРЫ СКАЛЯРНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-го ПОРЯДКА, ИНТЕГРИРУЕМЫХ В КВАДРАТУРАХ

Выше отмечалось, что в квадратурах ДУ интегрируются в редких случаях, и поэтому основная задача теории ДУ заключается в выяснении свойств решений по свойствам самих ДУ.

Тем не менее при решении конкретных задач довольно часто возникает необходимость в знании технических приемов решения стандартных типов ДУ, позволяющих упростить исследование или вообще решить поставленную задачу до конца.

Остановимся на методах решения некоторых важных классов скалярных ОДУ 1-го порядка.

Автономные ДУ. Рассмотрим ДУ

$$\dot{x} = f(x) \quad (5.1)$$

в предположении, что функция f непрерывна в полосе $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times J$, где $J =]c, d[$ — промежуток из $\mathbb{R}$.

Если $f(x) = 0$ при $x = x_i, i = 1, 2, \dots$, то функции, определяемые соотношениями $x(t) \equiv x_i, i = 1, 2, \dots$, являются решениями ДУ (5.1), которые обычно называют *стационарными*.

Если $f(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $x \in J$, то в этой окрестности рассматривают «перевернутое» ДУ

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{f(x)}, \quad (5.2)$$

которое является простейшим ДУ относительно неизвестной функции t ($t = t(x)$).

Полное семейство решений ДУ (5.2) (при $f(x) \neq 0$) задается соотношением

$$\int \frac{dx}{f(x)} = t + c,$$

где числовой параметр c принимает значения из некоторого множества $M_c \subseteq \mathbb{R}$.

А тогда, замечая, что в рассматриваемой окрестности точки $x \in J$ непрерывная функция f является функцией строгой монотонности, приходим к выводу, что t , как функция x , имеет непрерывную обратную, а значит, если $F(x)$ — первообразная для $1/f(x)$, то соотношение

$$x(t) = F^{-1}(t + c) \quad (5.3)$$

определяет c -семейство решений ДУ (5.1).

Таким образом, полное семейство решений ДУ (5.1) состоит из c -семейства (5.3) и стационарных решений (если таковые существуют).

З а м е ч а н и е 5.1. Стационарные решения могут входить (но не обязательно!) в c -семейство решений ДУ (5.1).

ДУ с разделяющимися переменными. ДУ с разделяющимися переменными называются ДУ вида

$$M_1(t)N_1(x)dt + M_2(t)N_2(x)dx = 0, \quad (5.4)$$

где функции M_1, M_2 и N_1, N_2 предполагаются непрерывными на некоторых промежутках $I_t =]a, b[$ и $I_x =]c, d[$ соответственно.

Тогда если уравнение (5.4) рассматривать как частный случай уравнения Пфаффа, то при условиях, что $N_1(x) = 0$ при $x = x_i, i = 1, 2, \dots$, а $M_2(t) = 0$ при $t = t_i, i = 1, 2, \dots$, функции, определяемые тождествами

$$x(t) \equiv x_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad t(x) \equiv t_j, \quad j = 1, 2, \dots,$$

являются решениями ДУ (5.4), которые называются *стационарными*.

Чтобы найти нестационарные решения, поступают следующим образом. В области, где $N_1(x)M_2(t) \neq 0$, вместо уравнения (5.4) рассматривают ДУ

$$\frac{M_1(t)}{M_2(t)}dt + \frac{N_2(x)}{N_1(x)}dx = 0,$$

все решения которого описываются соотношением

$$\int \frac{M_1(t)}{M_2(t)}dt + \int \frac{N_2(x)}{N_1(x)}dx = c, \quad (5.5)$$

определяющим *c-семейство решений в неявном виде* (c — числовой параметр, принимающий произвольные значения из некоторого множества $M_c \subset \mathbb{R}$).

Более общо в случае уравнений вида (3.1) или соответственно (4.2) говорят, что соотношение $\varphi(t, x, c)$, где φ — непрерывно дифференцируемая в области $\mathbb{D}^* \subset \mathbb{D}$ функция, производные $\varphi'_t(t, x, c)$ и $\varphi'_x(t, x, c)$ одновременно обращаются в нуль разве лишь в особых точках ДУ (4.2), а c — числовой параметр, принимающий произвольные значения из некоторого множества $M_c \subseteq \mathbb{R}$, определяет *c-семейство решений ДУ (3.1) ((4.2)) в неявном виде*, если

$$\frac{\partial \varphi(t, x, c)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x, c)}{\partial x} f(t, x) = \Phi(\varphi(t, x, c), t, x),$$

где $\Phi(0, t, x) = 0$, или соответственно

$$-\frac{\partial \varphi(t, x, c)}{\partial t} N(t, x) + \frac{\partial \varphi(t, x, c)}{\partial x} M(t, x) = \Phi(\varphi(t, x, c), t, x),$$

где $\Phi(0, t, x) = 0$.

Возвращаясь к ДУ (5.4), отметим, что полное семейство решений рассматриваемого уравнения представляет собой совокупность стационарных решений (если таковые существуют) и c -семейства решений в неявном виде (5.5).

З а м е ч а н и е 5.2. Стационарные решения ДУ (5.4) могут входить в c -семейство решений.

Обратим внимание и на тот факт, что стационарные решения могут оказаться особыми решениями. Так, например, рассмотрим ДУ

$$-2\sqrt{x}dt + dx = 0.$$

Его стационарным решением является $x(t) \equiv 0$. При $x \neq 0$ данное уравнение равносильно ДУ

$$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt,$$

интегрируя которое, находим, что $\sqrt{x} = t + c$ или $x(t) = (t + c)^2$, $t \geq -c$.

Полное семейство решений исходного ДУ определяется тогда совокупностью

$$\begin{cases} x(t) = (t + c)^2, t \geq -c, \\ x(t) \equiv 0. \end{cases}$$

Стационарное решение $x(t) \equiv 0$ здесь является особым решением (рис. 10), поскольку каждая из интегральных кривых c -семейства полу-парабол касается оси Ot .

В заключение заметим, что если ДУ (5.4) рассматривать как симметричную запись ОДУ 1-го порядка в нормальной форме, то интегральные кривые, не проходя через особые точки (если таковые существуют), могут к ним примыкать.

Однородные уравнения. Скалярное ДУ 1-го порядка называется однородным, если его можно записать или в виде $\dot{x} = \Phi\left(\frac{x}{t}\right)$, или в виде (4.2), где

$M(t, x)$ и $N(t, x)$ — однородные одной и той же степени функции¹.

Однородное уравнение приводится к ДУ с разделяющимися переменными подстановкой

$$x = tu, \quad u = u(t).$$

Например, рассмотрим однородное ДУ

$$(x - t)dt - (t + x)dx = 0.$$

В силу указанной замены $dx = udt + tdu$ и данное уравнение принимает в переменных t, u вид

$$(1 + u^2)dt + t(1 + u)du = 0.$$

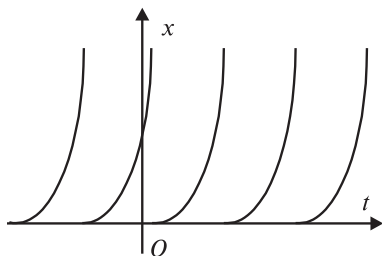


Рис. 10. Особое стационарное решение

¹ Функция $\psi(t, x)$ называется однородной степени k , если для любого $\tau > 0$ и любых t, x имеет место тождество $\psi(\tau t, \tau x) \equiv \tau^k \psi(t, x)$. Если $k \in \mathbb{Z}$, то однородность функции $\psi(t, x)$ определяется при любом $\tau \neq 0$.

Решение $t \equiv 0$ полученного ДУ не является решением исходного уравнения. Разделяя переменные (при $t \neq 0$), приходим к ДУ

$$\frac{dt}{t} + \frac{1+u}{1+u^2} du = 0.$$

Интегрируя его, получаем, что

$$\ln|t| + \arctgu + \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = c_1,$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Отсюда находим

$$|t| \sqrt{1+u^2} e^{\arctgu} = e^{c_1} \quad \text{или} \quad t \sqrt{1+u^2} e^{\arctgu} = \pm e^{c_1},$$

или

$$\sqrt{t^2 + x^2} = \pm e^{c_1} e^{-\arctg \frac{x}{t}}.$$

Но поскольку c_1 — произвольная постоянная, полное семейство решений исходного ДУ можно представить в виде

$$\sqrt{t^2 + x^2} = c e^{-\arctg \frac{x}{t}},$$

где c — произвольная, но не равная нулю постоянная.

Линейные уравнения. ДУ (3.1) называется линейным, если его правая часть линейна по переменной x , т. е. если уравнение имеет вид

$$\dot{x} + p(t)x = q(t). \quad (5.6)$$

В случае $q(t) \equiv 0$ уравнение (5.6) называется *однородным*, если же $q(t) \not\equiv 0$, то такое уравнение называют *неоднородным*.

В дальнейшем линейные уравнения будем рассматривать в предположении, что функции p и q непрерывны на некотором промежутке $|a, b| \subset \mathbb{R}$.

Заметим, что линейное однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (если его записать в дифференциальной форме) и его полное семейство решений находится описанным выше стандартным способом и представляется в виде

$$x(t) = c e^{-\int p(t) dt}, \quad (5.7)$$

где c — произвольная постоянная.

Чтобы проинтегрировать линейное неоднородное уравнение, умножим сначала его левую и правую части на $\exp \int p(t) dt$. В результате получим равносильное ДУ

$$\frac{d}{dt} \left(x(t) e^{\int p(t) dt} \right) = q(t) e^{\int p(t) dt},$$

интегрируя которое, найдем полное семейство решений исходного ДУ, описываемое соотношением

$$x(t) = e^{-\int p(t) dt} c + e^{-\int p(t) dt} \int q(t) e^{\int p(t) dt} dt, \quad (5.8)$$

где c — произвольная постоянная.

Как видно из представления (5.8), оно задает c -параметрическое семейство решений.

Полное семейство решений линейного неоднородного ДУ (5.6) можно записать и в так называемой форме *Коши*:

$$x(t) = e^{-\int_0^t p(\tau) d\tau} x_0 + e^{-\int_0^t p(\tau) d\tau} \int_0^t q(\tau) e^{\int_0^\tau p(v) dv} d\tau.$$

Замечание 5.3. Линейное однородное ДУ

$$\dot{x} + p(t)x = 0 \quad (5.9)$$

обычно называют линейным однородным, соответствующим линейному неоднородному ДУ (5.6).

Отметим некоторые свойства решений неоднородного ДУ (5.6), которые непосредственно следуют из формулы (5.8):

Свойство 5.1. Полное семейство решений неоднородного ДУ (5.6) находится двумя квадратурами.

Свойство 5.2. Полное семейство решений неоднородного ДУ (5.6) представляет собой сумму полного семейства решений соответствующего однородного ДУ и частного решения неоднородного ДУ (5.6).

Свойство 5.3. Если известно какое-либо одно (частное) решение неоднородного ДУ (5.6), то его полное семейство решений находится одной квадратурой.

Действительно, если x_1 — решение неоднородного ДУ (5.6), то

$$\dot{x}_1(t) + p(t)x_1(t) \equiv q(t).$$

Обозначим $x = z + x_1$, где $z = z(t)$. Тогда приходим к ДУ

$$\dot{z} + p(t)z = 0,$$

полное семейство решений которого находится одной квадратурой.

Свойство 5.4. Если известны два решения x_1 и x_2 неоднородного ДУ (5.6), то его полное семейство решений находится без квадратур и определяется соотношением

$$x(t) = x_1(t) + c(x_1(t) - x_2(t)),$$

где c — произвольная постоянная.

В самом деле, так как x_1 и x_2 — решения ДУ (5.6), то разность $x_1 - x_2$ — решение соответствующего однородного ДУ (5.9). А поскольку формула (5.7) определяет полное семейство решений ДУ (5.9), то разность $x_1 - x_2 = x^*$, как решение ДУ (5.9), определяется при некотором значении постоянной $c = c^*$ формулой

$$x^*(t) = c^* e^{-\int p(t) dt}.$$

Таким образом, выражение $c(x_1(t) - x_2(t))$, где c — произвольная постоянная, определяет полное семейство решений однородного ДУ (5.9). Ссылка на свойство 5.2 завершает доказательство свойства 5.4.

Свойство 5.5. Полное семейство решений неоднородного ДУ (5.6) является линейной функцией произвольной постоянной c :

$$x(t) = A(t)c + B(t). \quad (5.10)$$

Справедливо, очевидно, и обратное утверждение.

Свойство 5.6. Скалярное ДУ вида (3.1), имеющее полное семейство решений (5.10), является линейным неоднородным ДУ.

Уравнение Риккати. Уравнение Риккати¹ — это ДУ вида

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \quad (5.11)$$

где функции a , b , c предполагаются непрерывными на некотором промежутке $I \subset \mathbb{R}$. При этом считается, что $a(t) \not\equiv 0$ и $c(t) \not\equiv 0$.

Как показал в 1841 г. Ж. Лиувилль, уравнение Риккати в общем случае в квадратурах не интегрируется. Но поскольку это уравнение играет важную роль как в теории ОДУ, так и в приложениях, то в научной и учебной литературе этому уравнению уделяется достаточно много внимания.

Отметим некоторые свойства уравнения Риккати.

Свойство 5.7. Уравнение Риккати не меняет своего вида при замене независимой переменной $t = \varphi(\tau)$, где φ — дифференцируемая функция.

Действительно, в силу замены $dt = \varphi'(\tau)d\tau$. А тогда уравнение Риккати в переменных x , τ переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= a(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)x^2 + b(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)x + c(\varphi(\tau))\varphi'(\tau) = \\ &= A(\tau)x^2 + B(\tau)x + C(\tau), \end{aligned}$$

т. е. в виде (5.11).

¹ Риккати Якопо Франческо (Riccati J. F., 1676—1754), итальянский математик.

Свойство 5.8. Уравнение Риккати не меняет своего вида при дробно-линейном преобразовании зависимой переменной

$$x = \frac{\alpha(t)\xi + \beta(t)}{\gamma(t)\xi + \delta(t)}, \quad (5.12)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — дифференцируемые на I функции, удовлетворяющие условию $\alpha(t)\delta(t) - \beta(t)\gamma(t) \neq 0$.

В самом деле, в силу замены

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{(\dot{\alpha}\xi + \alpha\dot{\xi} + \dot{\beta})(\gamma\xi + \delta) - (\dot{\gamma}\xi + \gamma\dot{\xi} + \dot{\delta})(\alpha\xi + \beta)}{(\gamma\xi + \delta)^2} = \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)\dot{\xi} + (\dot{\alpha}\gamma - \alpha\dot{\gamma})\xi^2 + (\dot{\alpha}\delta - \alpha\dot{\delta} + \dot{\beta}\gamma - \beta\dot{\gamma})\xi + (\dot{\beta}\delta - \beta\dot{\delta})}{(\gamma\xi + \delta)^2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

С другой стороны, подставляя значение x , определяемое формулой (5.12), в правую часть (5.11), получим дробь с тем же знаменателем, что и в (5.13), и с квадратным многочленом по ξ в числителе. Таким образом, если приравнять значения $\dot{x}$ из (5.11) и (5.13), снова получим уравнение Риккати.

Свойство 5.9. Если функции a и b непрерывно дифференцируемы, то уравнение Риккати заменой

$$x = y - \frac{1}{2} \frac{b(t)}{a(t)}, \quad y = y(t),$$

приводится к уравнению

$$\dot{y} = a(t)y^2 + f(t),$$

где

$$f(t) = \frac{\dot{b}(t)}{2a(t)} - \frac{b(t)\dot{a}(t)}{2a^2(t)} - \frac{b^2(t)}{4a(t)}.$$

Свойство 5.10. Если функция a непрерывно дифференцируема, то уравнение Риккати заменой

$$x = \frac{y}{a(t)}, \quad y = y(t),$$

приводится к уравнению

$$\dot{y} = y^2 + B(t)y + C(t),$$

где

$$B(t) = b(t) + \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad C(t) = a(t)c(t).$$

Справедливость свойств 5.9 и 5.10 доказывается по аналогии с доказательством свойства 5.8.

Следствие 5.1. Если функция b непрерывно дифференцируема, а функция a дважды непрерывно дифференцируема, то уравнение Риккати последовательными заменами

$$x = \frac{y}{a(t)}, \quad y = z - \frac{B(t)}{2}, \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

приводится к каноническому виду

$$\dot{z} = z^2 + F(t),$$

где

$$F(t) = \frac{\dot{B}(t)}{2} - \frac{B^2(t)}{4} + C(t).$$

Свойство 5.11. Если известно какое-либо одно (частное) решение x_0 уравнения Риккати, то заменой

$$x = x_0 + \frac{1}{y}, \quad y = y(t), \tag{5.14}$$

оно приводится к линейному неоднородному ДУ

$$\dot{y} + (b(t) + 2a(t)x_0(t))y = -a(t). \tag{5.15}$$

Следствие 5.2. Если известно какое-либо одно (частное) решение уравнения Риккати, то его полное семейство решений находится двумя квадратурами.

Свойство 5.12. Если известны какие-либо два (частных) решения уравнения Риккати, то его полное семейство решений находится одной квадратурой.

Действительно, если x_1 и x_2 — два частных решения уравнения Риккати, то $y_1 = 1/(x_1 - x_2)$ — частное решение линейного неоднородного ДУ (5.15), которое (см. свойство 5.3 линейного неоднородного ДУ (5.6)) интегрируется одной квадратурой.

Свойство 5.13. Если известны какие-либо три (частных) решения x_1, x_2, x_3 уравнения Риккати, то его полное семейство решений находится без квадратур и определяется соотношением

$$\frac{x(t) - x_2(t)}{x(t) - x_1(t)} = c \frac{x_3(t) - x_2(t)}{x_3(t) - x_1(t)}, \quad (5.16)$$

где c — произвольная постоянная.

В самом деле, так как x_1, x_2, x_3 — решения ДУ (5.11), то $1/(x_2 - x_1)$ и $1/(x_3 - x_1)$ — два частных решения линейного неоднородного ДУ (5.15), полное семейство решений которого находится без квадратур и определяется на основании свойства 5.4 линейного неоднородного ДУ (5.6) соотношением

$$y(t) = \frac{1}{x_2(t) - x_1(t)} + c \left(\frac{1}{x_3(t) - x_1(t)} - \frac{1}{x_2(t) - x_1(t)} \right). \quad (5.17)$$

Но поскольку $y = 1/(x - x_1)$, то после несложных преобразований в (5.17) мы и получим соотношение (5.16).

Свойство 5.14. Если известно какое-либо одно (частное) решение уравнения Риккати, то его полное семейство решений представляется дробно-линейной функцией относительно произвольной постоянной.

Докажем это свойство. Пусть x_0 — решение уравнения Риккати. Тогда полное семейство решений ДУ (5.15), к которому заменой (5.14) приводится уравнение Риккати, представляется в виде

$$y(t) = \psi_1(t)c + \psi_2(t),$$

а значит, в силу замены (5.14) получаем, что

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(t) + \frac{1}{\psi_1(t)c + \psi_2(t)} = \\ &= \frac{x_0(t)\psi_1(t)c + x_0(t)\psi_2(t) + 1}{\psi_1(t)c + \psi_2(t)} = \frac{\varphi_1(t)c + \varphi_2(t)}{\psi_1(t)c + \psi_2(t)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Справедливо и обратное утверждение.

Свойство 5.15. Если полное семейство решений некоторого скалярного ОДУ 1-го порядка представимо дробно-линейной функцией относительно произвольной постоянной, то такое ДУ является уравнением Риккати.

Действительно, пусть соотношение

$$x(t) = \frac{\varphi_1(t)c + \varphi_2(t)}{\psi_1(t)c + \psi_2(t)}, \quad (5.18)$$

где $\varphi_1(t)\psi_2(t) - \psi_1(t)\varphi_2(t) \neq 0$, а c — произвольная постоянная, — полное семейство решений некоторого ДУ. Разрешая равенство (5.18) относительно c , имеем

$$\frac{\varphi_2(t) - x\psi_2(t)}{x\psi_1(t) - \varphi_1(t)} = c. \quad (5.19)$$

Дифференцируя соотношение (5.19) по t , приходим к равенству

$$\begin{aligned} & (\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2)\dot{x} - (\psi_1\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1\psi_2)x^2 + \\ & + (\varphi_1\dot{\psi}_2 - \dot{\varphi}_1\psi_2 + \psi_1\dot{\varphi}_2 - \dot{\psi}_1\varphi_2)x - (\varphi_1\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1\varphi_2) = 0, \end{aligned}$$

которое после деления на коэффициент при $\dot{x}$ приводит к уравнению Риккати.

Рассмотрим теперь так называемое *специальное уравнение Риккати*

$$\dot{x} = ax^2 + bt^\alpha, \quad (5.20)$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$ — постоянные.

В 1724—1725 гг. Д. Бернулли¹ доказал, что уравнение (5.20) интегрируется при всех $\alpha = 4m/(1-2m)$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $\alpha = -2$. Ж. Лиувиль в 1841 г. показал, что, кроме найденных Д. Бернулли случаев, специальное уравнение Риккати в квадратурах не интегрируется.

Заметим, что при $\alpha = -2$ частное решение специального уравнения Риккати

$$\dot{x} = ax^2 + \frac{b}{t^2} \quad (5.21)$$

можно искать в виде $x = c/t$, где c — некоторая постоянная. Тогда нахождение c сводится к решению квадратного уравнения

$$ac^2 + c + b = 0.$$

Если это уравнение имеет вещественные решения, то ДУ (5.21) интегрируется с помощью замены $x = c/t + 1/y$.

Если вещественных решений нет, то делают подстановку $x = 1/z$, которая приводит ДУ (5.21) к однородному ДУ

$$\dot{z} = -a - b\left(\frac{z}{t}\right)^2.$$

¹ Бернулли Даниил (Bernoulli D., 1700—1782), швейцарский математик.

§ 6. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Рассмотрим ДУ

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0 \quad (6.1)$$

в предположении, что функции M и N непрерывны вместе с частными производными $\frac{\partial M(t, x)}{\partial x}$ и $\frac{\partial N(t, x)}{\partial t}$ на некотором открытом множестве $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$.

ДУ (6.1) называют уравнением в полных дифференциалах на открытом множестве $\mathbb{D}^* \subset \mathbb{D}$, если существует скалярная функция $U : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{R}$, имеющая непрерывные частные производные, такая, что в $\mathbb{D}^*$ ее полный дифференциал совпадает с левой частью ДУ (6.1), т. е. если в $\mathbb{D}^*$

$$dU(t, x) \equiv M(t, x)dt + N(t, x)dx$$

и, значит, ДУ (6.1) на множестве $\mathbb{D}^*$ можно переписать в виде $dU(t, x) = 0$.

Таким образом, полное семейство решений уравнения в полных дифференциалах, определенного на открытом множестве $\mathbb{D}^*$, которое или содержит, или не содержит особые точки рассматриваемого уравнения, совпадает с c -семейством решений в неявном виде, определяемым соотношением

$$U(t, x) = c, \quad (6.2)$$

где числовой параметр c принимает такие значения, при которых соотношение (6.2) задает интегральные кривые ДУ (6.1) в $\mathbb{D}^*$.

При этом если окажется, что множество $\mathbb{D}^*$ является подмножеством множества $\mathbb{D}$, то полное семейство решений ДУ (6.1) будет представлять собой совокупность c -семейства (6.2) и решений ДУ (6.1) на множестве $\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}^*$, где уравнение уже не является уравнением в полных дифференциалах.

Теорема 6.1. Если на открытом множестве $\mathbb{D}^* \subseteq \mathbb{D}$ уравнение (6.1) является уравнением в полных дифференциалах, то на множестве $\mathbb{D}^*$ выполняется тождество Эйлера¹

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} \equiv \frac{\partial N(t, x)}{\partial t}. \quad (6.3)$$

¹ *Эйлер Леонард* (Euler L., 1707—1783), выдающийся математик, физик, механик, астроном. Родился в Швейцарии, творческая деятельность проходила в России и Германии.

Доказательство. Так как уравнение (6.1) является на множестве $\mathbb{D}^*$ уравнением в полных дифференциалах, то на $\mathbb{D}^*$ существует непрерывно дифференцируемая функция $U : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$dU(t, x) \equiv M(t, x)dt + N(t, x)dx = \frac{\partial U(t, x)}{\partial t}dt + \frac{\partial U(t, x)}{\partial x}dx \quad (6.4)$$

и, значит, на $\mathbb{D}^*$ справедливы равенства

$$M(t, x) = \frac{\partial U(t, x)}{\partial t}, \quad N(t, x) = \frac{\partial U(t, x)}{\partial x}. \quad (6.5)$$

По предположению, частные производные $\frac{\partial M(t, x)}{\partial x}$ и $\frac{\partial N(t, x)}{\partial t}$ непрерывны на $\mathbb{D}^*$, а следовательно, на $\mathbb{D}^*$ непрерывны и смешанные производные $\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t \partial x}$ и $\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x \partial t}$. Последнее означает, что

$$\frac{\partial M(t, x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t \partial x} \equiv \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial N(t, x)}{\partial t},$$

откуда и следует тождество (6.3).

Теорема 6.2. Если на открытом множестве $\mathbb{D}$ выполняется тождество Эйлера (6.3), то на некотором открытом множестве $\mathbb{D}^* \subset \mathbb{D}$ уравнение (6.1) является уравнением в полных дифференциалах.

Доказательство. По условию тождество (6.3) выполняется на множестве $\mathbb{D}$. Будем искать функцию U такую, чтобы она имела на некотором множестве $\mathbb{D}^* \subset \mathbb{D}$ непрерывные частные производные, удовлетворяющие равенствам (6.5). Для построения такой функции найдем сначала все функции U , удовлетворяющие первому из равенств (6.5), т. е. функции, удовлетворяющие соотношению

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = M(t, x), \quad (6.6)$$

которое является уравнением в частных производных относительно неизвестной функции U (дифференцирование в левой части (6.6) описывает дифференцирование по переменной t при фиксированной переменной x). Таким образом, все функции U , удовлетворяющие уравнению (6.6), задаются формулой

$$U(t, x) = \int M(t, x)dt + \varphi(x), \quad (6.7)$$

где φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция (произвольная постоянная относительно t). Интеграл берется в предположении, что переменная x фиксирована, а множество определения этих функций

будет, вообще говоря, подмножеством множества $\mathbb{D}$, поскольку $\int M(t, x) dt$ может оказаться функцией непрерывной лишь на подмножестве $\mathbb{D}^1$ множества $\mathbb{D}^1$.

Покажем теперь, что функцию φ всегда можно выбрать такой, что будет выполняться равенство

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial x} = N(t, x). \quad (6.8)$$

Действительно, подставляя выражение для U , определяемое формулой (6.7), в (6.8), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \int M(t, x) dt + \frac{d\varphi(x)}{dx} = N(t, x),$$

откуда

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = N(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \int M(t, x) dt. \quad (6.9)$$

А поскольку φ — функция переменной x , то должно выполняться равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(N(t, x) - \frac{\partial}{\partial x} \int M(t, x) dt \right) = 0,$$

которое в действительности и имеет место, так как с учетом тождества (6.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \int M(t, x) dt \right) &= \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} \int M(t, x) dt \right) = \\ &= \frac{\partial N(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial M(t, x)}{\partial x} \equiv 0. \end{aligned}$$

Итак, правая часть уравнения (6.9) зависит только от x и функция φ находится из (6.9) интегрированием. Подставляя найденное выражение для $\varphi(x)$ в (6.7), получим функцию, удовлетворяющую обоим равенствам (6.5), что и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 6.1. Доказательство теоремы 6.2 является конструктивным. Согласно этому доказательству мы имеем алгоритм решения уравнений в полных дифференциалах. Именно, если выполнено тождество Эйлера (6.3), то из первого уравнения (6.5) интегрированием находим функцию U , опреде-

¹ См. пример, следующий за доказательством теоремы.

ляемую соотношением (6.7). Подставляя затем найденное выражение для $U(t, x)$ во второе уравнение (6.5), получим уравнение (6.9) для определения $\varphi(x)$. А тогда, подставляя уже найденное выражение для $\varphi(x)$ в (6.7), мы и получим искомую функцию U .

Таким образом, полное семейство решений уравнения в полных дифференциалах будет определяться в неявном виде соотношением $U(t, x) = c$, где числовой параметр c принимает значения из некоторого множества $M_c \subseteq \mathbb{R}$.

Пример. Рассмотрим ДУ

$$-\frac{x}{t^2 + x^2} dt + \frac{t}{t^2 + x^2} dx = 0,$$

которое определено на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus O(0, 0)$. На этом множестве определены и непрерывны частные производные $\frac{\partial M(t, x)}{\partial x}$ и $\frac{\partial N(t, x)}{\partial t}$, равные $\frac{x^2 - t^2}{(t^2 + x^2)^2}$, и значит, на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus O(0, 0)$ условие (6.3) выполняется.

Следуя теперь алгоритму, находим

$$U(t, x) = \int \frac{-x}{t^2 + x^2} dt + \varphi(x) = -\operatorname{arctg} \frac{t}{x} + \varphi(x),$$

где множеством определения функции U будет множество $\mathbb{D}^* \subset \mathbb{D}$, состоящее из всех точек плоскости tOx , за исключением точек прямой $x = 0$, поскольку выражение $\operatorname{arctg} \frac{t}{x}$ имеет смысл только на множестве $\mathbb{D}^*$.

Далее, решая на множестве $\mathbb{D}^*$ уравнение

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{t}{t^2 + x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\operatorname{arctg} \frac{t}{x} \right) = \frac{t}{t^2 + x^2} - \frac{t}{t^2 + x^2} = 0,$$

находим, что $\varphi(x) = c_1$, где c_1 — произвольная постоянная.

В таком случае полное семейство решений данного ДУ на множестве $\mathbb{D}^*$ задается соотношением $\operatorname{arctg} \frac{t}{x} = c$ или совокупностью

$$\begin{cases} t = cx, & x > 0, \\ t = cx, & x < 0, \end{cases}$$

где c — произвольная постоянная. А полное семейство решений исходного ДУ, определенного на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus O(0, 0)$, задается совокупностью

$$\begin{cases} t = cx, & x > 0, \\ t = cx, & x < 0, \\ x = 0, & t > 0, \\ x = 0, & t < 0, \end{cases}$$

где c — произвольная постоянная.

Приведем еще одно важное утверждение, которое доказывается в курсе математического анализа.

Теорема 6.3. Если множество $\mathbb{D}$ — односвязная область¹, то тождество Эйлера (6.3) является необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (6.1) в области $\mathbb{D}$ было уравнением в полных дифференциалах. При этом

$$U(t, x) = \int_{(t_0, x_0)}^{(t, x)} M(t, x) dt + N(t, x) dx, \quad (6.10)$$

где (t_0, x_0) — произвольная фиксированная точка области $\mathbb{D}$, а интеграл является криволинейным интегралом второго рода по любому пути γ из $\mathbb{D}$, соединяющему в $\mathbb{D}$ точки (t_0, x_0) и (t, x) , причем интеграл не зависит от γ , а есть функция только верхнего предела интегрирования (t, x) .

Замечание 6.2. Выбирая конкретные пути, получим различные формулы для выражения функции U . Так, например, если $\mathbb{D}$ — прямоугольник:

$$\mathbb{D} = \{(t, x) \mid a \leq t \leq b, c \leq x \leq d\},$$

что обычно и предполагается, то интегрируя (6.10) по сторонам прямоугольника с вершинами в точках (t_0, x_0) и (t, x) , имеем (рис. 11)

$$\int_{(t_0, x_0)}^{(t, x_0)} M dt + N dx = \int_{t_0}^t M(\xi, x_0) d\xi, \quad \int_{(t, x_0)}^{(t, x)} M dt + N dx = \int_{x_0}^x N(t, \eta) d\eta$$

и, следовательно,

$$U(t, x) \equiv \int_{(t_0, x_0)}^{(t, x)} M dt + N dx = \int_{t_0}^t M(\xi, x_0) d\xi + \int_{x_0}^x N(t, \eta) d\eta.$$

¹ Односвязная область — область, в которой любой замкнутый путь (контур) может быть непрерывно деформирован (стянут) в точку, оставаясь в $\mathbb{D}$. Другими словами, односвязная область — это область без «дырок».

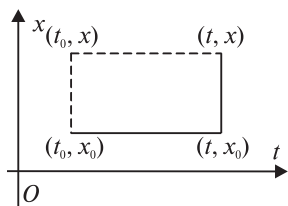


Рис. 11. К замечанию 6.2

Аналогично получаем и такую формулу:

$$U(t, x) \equiv \int_{(t_0, x_0)}^{(t, x)} M dt + N dx = \\ = \int_{t_0}^t M(\xi, x) d\xi + \int_{x_0}^x N(t_0, \eta) d\eta.$$

З а м е ч а н и е 6.3. При интегрировании уравнений в полных дифференциалах часто на практике поступают следующим образом: пытаются переписать данное уравнение в эквивалентной форме так, чтобы в нем можно было выделить выражения, образующие дифференциалы каких-либо других выражений. Если это удастся сделать, то ответ выписывается автоматически.

Так, например, рассмотрим ДУ

$$(2tx - \cos t)dt + (t^2 + 1)dx = 0.$$

Условие (6.3) здесь выполнено, так как $\frac{\partial M}{\partial x} \equiv \frac{\partial N}{\partial t} \equiv 2t$. Перепишем ДУ в виде

$$(2txdt + t^2 dx) - \cos t dt + dx = 0$$

или в виде

$$d(t^2 x) - d(\sin t) + dx = 0,$$

откуда полное семейство решений исходного ДУ задается соотношением

$$t^2 x - \sin t + x = c,$$

где c — произвольная постоянная.

З а м е ч а н и е 6.4. Если область $\mathbb{D}$ многосвязная, то функция U , заданная равенством (6.10), определяется, как и в случае односвязной области, на всем множестве $\mathbb{D}$, но может оказаться функцией многозначной.

Определение 6.1. Скалярная, непрерывная вместе с частными производными и тождественно отличная от нуля функция $\mu: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ называется интегрирующим множителем ДУ (6.1) на некотором открытом множестве $\mathbb{D}^* \subset \mathbb{D}$, если функция μ отлична от нуля на $\mathbb{D}^*$ и если на $\mathbb{D}^*$ уравнение

$$\mu(t, x)M(t, x)dt + \mu(t, x)N(t, x)dx = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах.

Далее (см. § 14) будет показано, что при достаточно общих предположениях относительно функций M и N интегрирующий множитель ДУ (6.1) существует, но найти его, к сожалению, удастся не всегда. Тем не менее в ряде интересных случаев интегрирующий множитель можно найти.

Рассмотрим некоторые такие случаи. Предварительно заметим, что если интегрирующий множитель μ существует, то в силу тождества (6.3) он должен удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t}. \quad (6.11)$$

Таким образом, если мы решим ДУ (6.11), которое является ДУ в частных производных относительно неизвестной функции μ , то мы решим и ДУ (6.1). При этом заметим, что для отыскания целого семейства решений ДУ (6.1) достаточно найти одно решение ДУ (6.11).

Подробнее ДУ (6.11) можно переписать в виде

$$\mu'_x M + \mu M'_x = \mu'_t N + \mu N'_t$$

или

$$(M'_x - N'_t)\mu = \mu'_t N - \mu'_x M. \quad (6.12)$$

Случай $\mu = \mu(t)$. При такой функции μ ДУ (6.12) принимает вид

$$(M'_x - N'_t)\mu(t) = \mu'_t(t)N,$$

откуда

$$\frac{\mu'_t(t)}{\mu(t)} = \frac{M'_x - N'_t}{N} = \varphi(t), \quad (N \neq 0),$$

и значит,

$$\mu(t) = e^{\int \varphi(t) dt}, \quad \text{где } \varphi(t) = \frac{M'_x - N'_t}{N} \quad (N \neq 0).$$

Заметим, что рассмотренное выше линейное уравнение (5.6) как раз и решалось с использованием интегрирующего множителя, определяемого равенством

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt}.$$

Случай $\mu = \mu(x)$. При такой функции μ ДУ (6.12) переписывается в виде

$$(M'_x - N'_t)\mu(x) = -\mu'_x(x)M,$$

откуда

$$\frac{\mu'_x(x)}{\mu(x)} = \frac{M'_x - N'_t}{-M} = \psi(x) \quad (M \neq 0),$$

и следовательно,

$$\mu(x) = e^{\int \psi(x) dx}, \quad \text{где } \psi(x) = (M'_x - N'_t)/-M \quad (M \neq 0).$$

Так, например, рассмотрим ДУ

$$2txdt + 3(1+t^2)dx = 0,$$

которое имеет очевидное стационарное решение $x(t) \equiv 0$. Для этого ДУ

$$(M'_x - N'_t) / -M = \frac{2}{x},$$

где $x \neq 0$. А тогда функция μ , определяемая равенством

$$\mu(x) \equiv e^{\int \frac{2}{x} dx} = x^2,$$

где $x \neq 0$, является на множестве $\mathbb{D}^* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(t, x) | x = 0, t \in \mathbb{R}\}$ интегрирующим множителем данного ДУ.

Домножив обе части исходного ДУ на x^2 ($x \neq 0$), получим на $\mathbb{D}^*$ уравнение в полных дифференциалах

$$2tx^3dt + 3(1+t^2)x^2dx = 0,$$

которое можно переписать в виде

$$(2tx^3dt + 3t^2x^2dx) + 3x^2dx = 0$$

или в виде $d(x^3t^2 + x^3) = 0$, откуда находим, что полное семейство решений уравнения в полных дифференциалах представимо формулой

$$x^3(1+t^2) = c,$$

где c — произвольная, но не равная нулю, постоянная. Полное же семейство решений *исходного* ДУ определяется соотношением

$$x^3(1+t^2) = c,$$

где c — произвольная постоянная.

Случай $\mu = \mu(\omega(t, x))$, где ω — некоторая заданная функция. В данном случае ДУ (6.12) переписывается в виде

$$(M'_x - N'_t)\mu(\omega) = \mu'_\omega(\omega)\omega'_tN - \mu'_\omega\omega'_xM$$

или

$$(M'_x - N'_t)\mu(\omega) = \mu'_\omega(\omega)(\omega'_tN - \omega'_xM), \quad (6.13)$$

откуда

$$\frac{\mu'_\omega(\omega)}{\mu(\omega)} = \frac{M'_x - N'_t}{\omega'_tN - \omega'_xM} = \gamma(\omega) \quad (\omega'_tN - \omega'_xM \neq 0),$$

и таким образом,

$$\mu(\omega) = e^{\int \gamma(\omega) d\omega}, \text{ где } \gamma(\omega) = \frac{M'_x - N'_t}{\omega'_t N - \omega'_x M} \quad (\omega'_t N - \omega'_x M \neq 0).$$

Рассмотрим пример. Пусть дано ДУ

$$dt + (1 + xe^{-t})dx = 0.$$

Будем искать функцию μ в виде $\mu = \mu(t+x)$, т. е. положим $\omega(t+x) = t+x$. В таком случае $(M'_x - N'_t)/(\omega'_t N - \omega'_x M) = 1$. Отсюда $\frac{\mu'_\omega(\omega)}{\mu(\omega)} = 1$, т. е. $\mu(t+x) = e^{t+x}$. После умножения исходного ДУ на e^{t+x} , получим уравнение в полных дифференциалах

$$e^t e^x dt + (e^t + x)e^x dx = 0,$$

решая которое, находим полное семейство решений данного уравнения

$$e^x (e^t + x - 1) = c,$$

где c — произвольная постоянная.

Рассмотрим еще один пример. Пусть ДУ (6.1) — однородное уравнение, где степень однородности функций M и N равна k . Покажем, что такое ДУ имеет интегрирующий множитель, определяемый равенством

$$\mu(t, x) = \frac{1}{tM(t, x) + xN(t, x)} \quad (tM(t, x) + xN(t, x) \neq 0).$$

Действительно, поскольку

$$\mu'_t = -\frac{M + tM'_t + xN'_t}{(tM + xN)^2}, \quad \mu'_x = -\frac{N + tM'_x + xN'_x}{(tM + xN)^2},$$

то, подставляя значения μ и производных μ'_t , μ'_x в соотношение (6.12), получим выражение

$$M(tN'_t + xN'_x) = N(tM'_t + xM'_x),$$

которое становится тождеством, если воспользоваться равенством Эйлера

$$t\psi'_t(t, x) + x\psi'_x(t, x) = k\psi(t, x),$$

для однородной степени k функции двух переменных ψ , означая, что $\mu(t, x)$ — решение уравнения (6.12), а это и доказывает требуемое.

Случай $\mu(t, x) = \frac{1}{M^2(t, x) + N^2(t, x)}$. Покажем, что если

ДУ (6.1) имеет такой интегрирующий множитель, то функции M и N удовлетворяют условию

$$2MN(M'_t - N'_x) = (M^2 - N^2)(M'_x + N'_t). \quad (6.14)$$

Действительно, здесь $\omega(t, x) = M^2(t, x) + N^2(t, x)$, и тогда соотношение (6.13) запишется в виде

$$\frac{M'_x - N'_t}{M^2 + N^2} = - \frac{(2MM'_t + 2NN'_t)N - (2MM'_x + 2NN'_x)M}{(M^2 + N^2)^2}$$

или в виде

$$(M'_x - N'_t)(M^2 + N^2) = 2MN(N'_x - M'_t) + 2M^2M'_x - 2N^2N'_t,$$

откуда очевидным образом приходим к (6.14).

З а м е ч а н и е 6.5. Последний случай интересен, в частности, тем, что соотношение (6.14) имеет место при выполнении условий Коши — Римана (Даламбера — Эйлера)¹:

$$M'_t = N'_x, \quad M'_x = -N'_t,$$

что позволяет проинтегрировать ДУ (6.1) введением комплексной переменной $z = t + ix$ ($\bar{z} = t - ix$).

Так, например, рассмотрим ДУ

$$(t^4 - 6t^2x^2 + x^4)dt + (4t^3x - 4tx^3)dx = 0$$

как уравнение Пфаффа.

Здесь

$$M'_t = 4t^3 - 12tx^2 = N'_x, \quad M'_x = -12t^2x + 4x^3 = -N'_t,$$

а

$$M(t, x) + iN(t, x) = t^4 - 6t^2x^2 + x^4 + i(4t^3x - 4tx^3) = z^4 \equiv F(z).$$

Тогда $F(\bar{z}) = \bar{z}^4$ и исходное ДУ перепишется в виде

$$\bar{z}^4 dz + z^4 d\bar{z} = 0.$$

Решая это уравнение с разделяющимися переменными и возвращаясь затем к переменным t, x , найдем полное семейство решений исходного уравнения:

$$t(t^2 - 3x^2) = c(t^2 + x^2)^3,$$

где c — произвольная постоянная.

Случай $\mu(t, x) = F_1(t)F_2(x)$, где F_1 и F_2 — непрерывные, не обращающиеся в нуль функции.

¹ *Риман Георг Фридрих Бернхард* (Riemann B., 1826—1866), немецкий математик; *Даламбер Жан Лерон* (D'Alembert J. L., 1717—1783), французский математик, философ.

ДУ (6.1) имеет интегрирующий множитель указанного вида, если, как легко проверить, уравнение (6.13) имеет вид

$$M'_x - N'_t = \frac{F'_1(t)}{F_1(t)} N - \frac{F'_2(x)}{F_2(x)} M.$$

Отсюда, в частности, следует, что если имеет место равенство

$$M'_x - N'_t = T(t)N - X(x)M,$$

где T и X — некоторые непрерывные функции, то ДУ (6.1) имеет интегрирующий множитель, определяемый равенством

$$\mu(t, x) = e^{\int T(t) dt + \int X(x) dx}.$$

§ 7. УСЛОВИЕ ЛИПШИЦА

Пусть $F : X \rightarrow Y$ — отображение метрического пространства X (с метрикой ρ_1) в метрическое пространство Y (с метрикой ρ_2), а L — положительное вещественное число.

Определение 7.1. Отображение $F : X \rightarrow Y$ удовлетворяет условию Липшица¹ с постоянной L (пишется $F \in \text{Lip} L$), если оно увеличивает расстояние между любыми двумя точками $x_1, x_2 \in X$ не более чем в L раз (рис. 12), т. е. если

$$\rho_2(F(x_1), F(x_2)) \leq L \rho_1(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Рассмотрим отображение

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

где D — область прямого произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

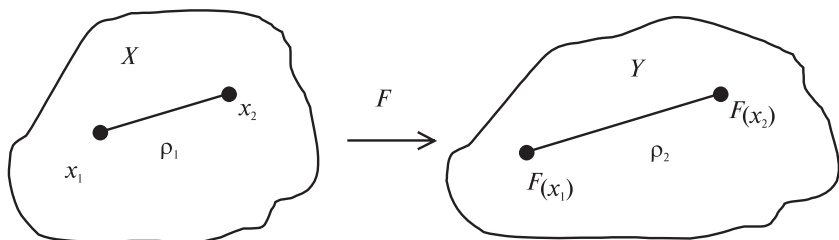


Рис. 12. Условие Липшица

¹ Липшиц Рудольф (Lipshitz R., 1832—1903), немецкий математик.

Пусть расстояние в пространстве $\mathbb{R}^n$ определяется какой-либо нормой, т. е.

$$\rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда из определения 7.1 следует, что $f \in \text{Lip}L$ относительно $x \in \mathbb{R}^n$, если

$$\frac{\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\|}{\|x_1 - x_2\|} \leq L \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in D. \quad (7.1)$$

Условие (7.1) означает, что относительный рост функции f по переменной x ограничен постоянной L . Другими словами, функция f растет по переменной x не быстрее, чем линейная функция.

Заметим, что условие Липшица будет заведомо выполнено для отображения $F: X \rightarrow Y$, имеющего в X ограниченную производную.

В скалярном случае этот факт следует из теоремы Лагранжа¹ о конечных приращениях (см. ссылку на с. 105). В многомерном случае он доказывается с помощью многомерного аналога указанной теоремы (см. замечание 21.1).

Но поскольку условие Липшица не предполагает существования ограниченной производной, то оно является менее ограничительным требованием, чем требование существования ограниченной производной.

Так, например, рассмотрим отображение $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что $F: (t, x) \mapsto |x|$. Пусть расстояние в $\mathbb{R}$ определяется следующим образом:

$$\rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\| = |y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

При заданном отображении производная F'_x не существует в точках оси t (рис. 13), но условие Липшица здесь выполнено. Действительно,

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)| = ||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2|.$$

В данном случае $L=1$.

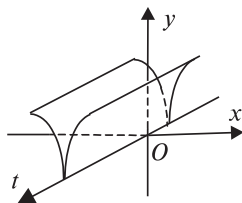
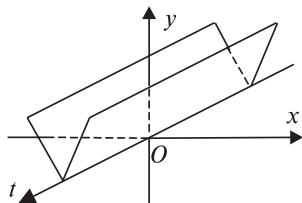


Рис. 13. К примеру $F: (t, x) \mapsto |x|$ Рис. 14. К примеру $F: (t, x) \mapsto \sqrt{|x|}$

¹ Лагранж Жозеф Луи (Lagrange J. L., 1736–1813), французский математик и механик.

С другой стороны, условие Липшица является более ограничительным требованием, чем требование непрерывности функции.

Так, рассмотрим отображение $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что $F: (t, x) \mapsto \sqrt{|x|}$. Пусть расстояние в $\mathbb{R}$ определяется как в предыдущем примере.

Тогда ясно, что функция F непрерывна во всех точках оси t (рис. 14), но она не удовлетворяет в них условию Липшица, так как

$$\frac{|F(t, x) - F(t, 0)|}{|x|} = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \rightarrow \infty \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

§ 8. ТЕОРЕМА ПИКАРА — ЛИНДЕЛЁФА

Из определения решения ОДУ (1.1) следует, что если отображение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение (1.1) на интервале I , то сужение¹ этого решения также является решением ОДУ (1.1).

Определение 8.1. Решение ОДУ (1.1), которое не является сужением никакого другого решения ОДУ (1.1), называется непродолжаемым или продолженным решением ОДУ (1.1).

З а м е ч а н и е 8.1. В дальнейшем под решением ОДУ (1.1) будем понимать непродолжаемое решение².

Рассмотрим начальную задачу

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (8.1)$$

где $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение области $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 8.1. Решение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ начальной задачи (8.1) является решением интегрального уравнения

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \quad (8.2)$$

Любое же непрерывное на I решение интегрального уравнения (8.2) является решением начальной задачи (8.1).

Доказательство. Пусть φ — решение начальной задачи (8.1). Тогда

$$\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t)), \quad \varphi(t_0) = x_0. \quad (8.3)$$

Интегрируя первое тождество в (8.3) в пределах от t_0 до t ($t_0, t \in I$) и принимая во внимание второе (начальное) условие из (8.3), получим тождество

¹ Сужением решения $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ОДУ (1.1) называется отображение $\varphi: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $I_1 \subset I$.

² Доказательство существования непродолжаемых решений приведено в § 10.

$$\varphi(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, \quad (8.4)$$

т. е. φ — решение интегрального уравнения (8.2).

Обратно, пусть для непрерывной на I функции φ справедливо тождество (8.4). Отсюда сразу же получаем, что $\varphi(t_0) = x_0$. Далее, так как правая часть (8.4) дифференцируема по t (в силу непрерывности f), то φ также дифференцируема по t . А тогда, дифференцируя обе части тождества (8.4), получаем, что φ — решение начальной задачи (8.1).

Теорема 8.1 (теорема Пикара — Линделёфа)¹. Если отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ параллелепипеда $D: |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b$ непрерывно и $f \in \text{Lip}L$ относительно x , то начальная задача (8.1) имеет единственное решение φ^* , определенное на промежутке $|t - t_0| \leq h$, где $h < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right)$, $M = \|f\| = \max_D \|f(t, x)\|$.

Доказательство. Введем в рассмотрение пространство C_n , точками которого являются непрерывные вектор-функции $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, определенные на промежутке $|t - t_0| \leq h$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, и такие, что их графики лежат в D . Тогда если за расстояние между двумя точками z^1 и z^2 в этом пространстве взять, например,

$$\rho(z^1, z^2) = \|z^1 - z^2\| = \max_{|t-t_0| \leq h} \|z^1(t) - z^2(t)\| = \max_{|t-t_0| \leq h} \left(\max_{i=1, n} |z_i^1(t) - z_i^2(t)| \right),$$

то пространство C_n будет на основании критерия Коши полным метрическим пространством.

Далее, так как согласно леммы (8.1) для доказательства теоремы достаточно доказать существование единственного на промежутке $|t - t_0| \leq h$ непрерывного решения интегрального уравнения (8.2), дальнейшие рассуждения свяжем с решением последней задачи.

Запишем интегральное уравнение (8.2) в операторной форме

$$\varphi(t) = A(\varphi(t)), \quad (8.5)$$

где оператор A определяется правой частью уравнения (8.2):

$$A(\varphi(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau. \quad (8.6)$$

¹ Пикар Шарль Эмиль (Picard C. E., 1856—1941), французский математик; Линделёф Эрнст Леонард (Lindelöf E. L., 1870—1946), финский математик.

² Пространство C_n с введенной таким образом метрикой иногда называют пространством равномерной сходимости.

Доказательство существования единственного решения операторного уравнения (8.5) проведем, основываясь на принципе сжимающих отображений¹.

Итак, покажем, что оператор A является сжатием пространства C_n в себя. Для этого прежде всего докажем, что оператор A переводит пространство C_n в себя.

Действительно, пусть $\varphi \in C_n$. Тогда, учитывая, что определенный интеграл в правой части (8.6) есть непрерывная на промежутке $|t - t_0| \leq h$ функция верхнего предела, то отсюда следует непрерывность функции $A(\varphi)$, значения которой принадлежат параллелепипеду D , что показывает следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} \rho(A(\varphi), x_0) &= \|A(\varphi) - x_0\| = \max_{|t-t_0| \leq h} \|A(\varphi(t)) - x_0\| = \max_{|t-t_0| \leq h} \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \max_{|t-t_0| \leq h} \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, \varphi(\tau))\| d\tau \right| = M |t - t_0| \leq Mh \leq b. \end{aligned}$$

Пусть теперь φ_1 и φ_2 — произвольные точки пространства C_n . Тогда

$$\begin{aligned} \rho(A(\varphi_1), A(\varphi_2)) &= \|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)\| = \max_{|t-t_0| \leq h} \|A(\varphi_1(t)) - A(\varphi_2(t))\| = \\ &= \max_{|t-t_0| \leq h} \left\| \int_{t_0}^t [f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_2(\tau))] d\tau \right\| \leq \\ &\leq \max_{|t-t_0| \leq h} \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_2(\tau))\| d\tau \right| \leq \\ &\leq L \max_{|t-t_0| \leq h} \left| \int_{t_0}^t \|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)\| d\tau \right| = \\ &= L\rho(\varphi_1, \varphi_2) |t - t_0| \leq Lh\rho(\varphi_1, \varphi_2) < \lambda\rho(\varphi_1, \varphi_2), \end{aligned}$$

где $\lambda < 1$.

¹ Принцип сжимающих отображений: сжатие полного метрического пространства в себя имеет единственную неподвижную точку (которая находится методом последовательных приближений). Напомним, что отображение $F: X \rightarrow X$ метрического пространства X в себя называется сжатием, если существует такая положительная постоянная $L < 1$, что для любой пары элементов x_1 и x_2 из X имеет место неравенство $\rho(F(x_1), F(x_2)) \leq L\rho(x_1, x_2)$. Точка a называется неподвижной точкой отображения F , если $F(a) = a$.

Итак, отображение $A : C_n \rightarrow C_n$ — сжатие. Но в таком случае, согласно принципу сжимающих отображений, уравнение $\varphi = A(\varphi)$ имеет единственное решение φ^* , непрерывное на отрезке $|t - t_0| \leq h$. Но тождество $\varphi^* \equiv A(\varphi^*)$, по определению оператора A , эквивалентно тождеству

$$\varphi^*(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi^*(\tau)) d\tau,$$

которое и означает, что φ^* — единственное решение интегрального уравнения (8.2), а значит, и начальной задачи (8.1). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 8.2. Теорема 8.1, кроме названия «теорема Пикара — Линделёфа», имеет в литературе, как никакая другая теорема теории ОДУ, и другие названия. Например, теорема Коши, Пикара, Коши — Пикара, Коши — Липшица, Липшица — Пикара.

Приближения и ряд Пикара. Из принципа сжимающих отображений следует, что решение начальной задачи (8.1) может быть получено методом последовательных приближений, где за начальное (нулевое) приближение можно взять постоянное отображение $\varphi_0 : [t_0 - h, t_0 + h] \rightarrow x_0$, а остальные приближения задаются рекуррентным соотношением

$$\varphi_k(t) \equiv A(\varphi_{k-1}(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi_{k-1}(\tau)) d\tau, \quad (8.7)$$

где $k = 1, 2, \dots, |t - t_0| \leq h$.

Приближения $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots$ обычно называют *приближениями Пикара*.

Если рассмотреть кривые $K_0, K_1, K_2, \dots, K_k, \dots$, которые являются графиками соответствующих приближений Пикара, то, как это следует из соотношений (8.7), геометрически переход от кривой K_{k-1} к кривой

K_k означает построение по кривой K_{k-1} такой кривой K_k , направление касательной к которой при каждом фиксированном t совпадает с направлением поля на кривой K_{k-1} при соответствующем значении t (рис. 15).

Заметим, что если бы на некоторой кривой K_m направление касательной совпадало бы при каждом фиксированном t с направлением поля на самой кривой, то кривая K_m была бы интегральной.

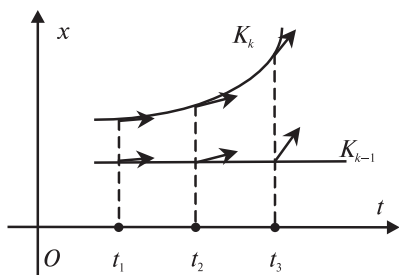


Рис. 15. Приближения Пикара

Далее из принципа сжимающих отображений также следует, что последовательность приближений Пикара равномерно сходится к непрерывной функции $\varphi^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k$, которую, очевидно, можно представить в виде ряда

$$\varphi^* = \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + (\varphi_k - \varphi_{k-1}) + \dots,$$

который называют *рядом Пикара*.

Частичная сумма ряда Пикара совпадает с соответствующим приближением Пикара, и поэтому ряд Пикара равномерно сходится к решению начальной задачи (8.1). Последнее означает, что ряд Пикара позволяет получить на промежутке $|t - t_0| \leq h$ сколь угодно точное приближение к решению начальной задачи.

При этом, используя неравенство треугольника и учитывая, что A — сжимающий оператор, можно оценить точность приближения φ_k к решению φ^* начальной задачи (8.1) через расстояние между точками φ_k и $A(\varphi_k) = \varphi_{k+1}$ по формуле

$$\rho(\varphi_k, \varphi^*) \leq \frac{1}{1-\lambda} \rho(\varphi_k, \varphi_{k+1}), \quad \lambda < 1. \quad (8.8)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_k, \varphi^*) &\leq \rho(\varphi_k, \varphi_{k+1}) + \rho(\varphi_{k+1}, \varphi^*) = \\ &= \rho(\varphi_k, \varphi_{k+1}) + \rho(A(\varphi_k), A(\varphi^*)) \leq \rho(\varphi_k, \varphi_{k+1}) + \lambda \rho(\varphi_k, \varphi^*), \end{aligned}$$

откуда и следует формула (8.8).

На рис. 16 дана геометрическая интерпретация оценки точности приближения φ_k к неподвижной точке φ^* .

Проиллюстрируем на конкретном примере, как начальная задача решается с помощью приближений и ряда Пикара.

Рассмотрим скалярную начальную задачу

$$\dot{x} = t + x, \quad x(0) = 0,$$

где $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

Сводя начальную задачу к соответствующему интегральному уравнению, получаем

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t (\tau + \varphi(\tau)) d\tau$$

и, значит,

$$\varphi_k(t) = \int_0^t (\tau + \varphi_{k-1}(\tau)) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots$$

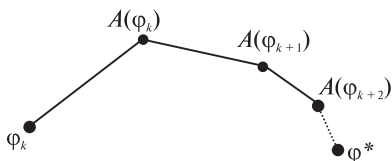


Рис. 16. К оценке (8.8)

Последовательные приближения дают следующие равенства:

$$\varphi_0(t) = x_0 = 0, \quad \varphi_1(t) = \int_0^t \tau d\tau = \frac{1}{2!} t^2,$$

$$\varphi_2(t) = \int_0^t \left(\tau + \frac{1}{2!} \tau^2 \right) d\tau = \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3, \dots,$$

$$\varphi_k(t) = \int_0^t \left(\tau + \frac{1}{2!} \tau^2 + \dots + \frac{1}{k!} \tau^k \right) d\tau = \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 + \dots + \frac{1}{(k+1)!} t^{k+1}, \dots$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & \varphi_0(t) + (\varphi_1(t) - \varphi_0(t)) + (\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) + \dots + \\ & \quad + (\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)) + \dots = \\ & = \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 + \dots + \frac{1}{(k+1)!} t^{k+1} + \dots = e^t - t - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, отображение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что $\varphi: t \mapsto e^t - t - 1$, является решением данной начальной задачи.

Отметим далее следующее. Доказанная выше теорема Пикара — Линделёфа носит локальный характер, поскольку существование (единственного) решения гарантируется лишь на отрезке $|t - t_0| \leq h$, где h , вообще говоря, меньше a (см. формулировку теоремы). Этот факт не зависит от метода доказательства, а отражает существо вопроса.

Так, например, рассмотрим скалярную начальную задачу

$$\dot{x} = x^2 + 1, \quad x(0) = 0, \quad (8.9)$$

где $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$.

Решение этой задачи — функция

$$\varphi: t \mapsto \operatorname{tg} t, \quad \text{где } |t| < \frac{\pi}{2}.$$

График решения иллюстрируется рис. 17. Таким образом, хотя правая часть данного ДУ определена по независимой переменной на всей числовой оси, решение тем не менее определено лишь на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Вместе с тем теорема Пикара — Линделёфа не отрицает факт существования ДУ, решения которых определены

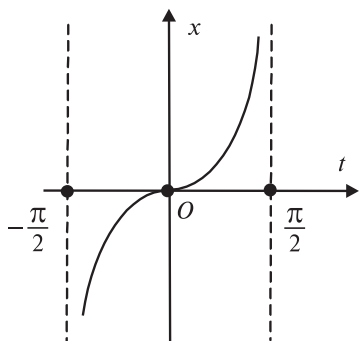


Рис. 17. К начальной задаче (8.9)

на всем промежутке задания функции f (правой части ДУ (1.1)) по переменной t , т. е. на промежутке $|t - t_0| \leq a$.

Такие ДУ действительно существуют, и к ним относятся, в частности, так называемые линейные ОДУ, имеющие важное значение как для теории ОДУ, так и для приложений.

§ 9. ТЕОРЕМА ПИКАРА — ЛИНДЕЛЁФА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ТЕОРЕМА ПЕАНО

Определение 9.1. Дифференциальная система (1.1") называется линейной ДС, если она имеет вид

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + g_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

или в более краткой записи

$$\dot{x} = A(t)x + g(t), \quad (9.1)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \dots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Определение 9.2. ОДУ (9.1) называется линейным однородным ДУ, если $g(t) \equiv 0$, и линейным неоднородным ДУ, если $g(t) \not\equiv 0$.

Рассмотрим начальную задачу

$$\dot{x} = A(t)x + g(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (9.2)$$

Теорема 9.1 (теорема Пикара — Линделёфа для линейных ОДУ). Если матрица A и вектор-функция g непрерывны на отрезке $|t - t_0| \leq a$, то для любого x_0 начальная задача (9.2) имеет единственное решение φ^* , определенное на всем промежутке $|t - t_0| \leq a$.

Доказательство. Введем в рассмотрение пространство C_n , точками которого являются непрерывные на отрезке $|t - t_0| \leq a$ вектор-функции $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$, графики которых лежат в «полосе» $|t - t_0| \leq a$.

Если за расстояние между любыми двумя точками z^1, z^2 этого пространства взять

$$\begin{aligned}\rho(z^1, z^2) &= \|z^1 - z^2\| = \max_{|t-t_0| \leq a} \|z^1(t) - z^2(t)\| = \\ &= \max_{|t-t_0| \leq a} \left(\max_{i=1, n} |z_i^1(t) - z_i^2(t)| \right),\end{aligned}$$

то оно окажется полным метрическим пространством.

Рассмотрим далее последовательность приближений Пикара $\{\varphi_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, которые определяются равенствами

$$\varphi_0(t) = x_0, \quad (9.3)$$

$$\varphi_k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(\tau) \varphi_{k-1}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots$$

Приближения Пикара (9.3) будут функциями непрерывными на отрезке $|t - t_0| \leq a$, поскольку непрерывными на этом промежутке являются матрица A и вектор-функция g .

Таким образом, все приближения Пикара являются элементами пространства C_n .

Покажем, что последовательность $\{\varphi_k\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, сходится в пространстве C_n . Для доказательства этого факта рассмотрим ряд Пикара

$$\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + (\varphi_k - \varphi_{k-1}) + \dots, \quad (9.4)$$

любая частичная сумма которого совпадает с соответствующим приближением Пикара.

Тогда если ввести обозначения:

$$\gamma = \max_{|t-t_0| \leq a} \|A(t)\|, \quad \sigma = \|\varphi_1 - \varphi_0\| = \max_{|t-t_0| \leq a} \|\varphi_1(t) - x_0\|,$$

то относительно элемента $(\varphi_2 - \varphi_1)$ ряда (9.4) имеем следующую цепочку оценок:

$$\begin{aligned}\|\varphi_2 - \varphi_1\| &= \max_{|t-t_0| \leq a} \|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| = \max_{|t-t_0| \leq a} \left\| \int_{t_0}^t A(\tau) (\varphi_1(\tau) - x_0) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \max_{|t-t_0| \leq a} \left\| \int_{t_0}^t A(\tau) (\varphi_1(\tau) - x_0) d\tau \right\| \leq \max_{|t-t_0| \leq a} \left\| \int_{t_0}^t A(\tau) \|\varphi_1(\tau) - x_0\| d\tau \right\| = \\ &= \gamma \left\| \int_{t_0}^t \|\varphi_1(\tau) - x_0\| d\tau \right\| \leq \gamma \sigma |t - t_0|.\end{aligned}$$

Далее докажем по индукции, что для любого $k \geq 2$ справедливо неравенство

$$\|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| \leq \sigma \frac{\gamma^{k-1} |t - t_0|^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (9.5)$$

Действительно, при $k = 2$ справедливость неравенства (9.5) доказана. Предполагая тогда, что неравенство (9.5) имеет место для произвольного $(k-1)$, имеем:

$$\begin{aligned} \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| &= \max_{|t-t_0| \leq a} \|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)\| = \max_{|t-t_0| \leq a} \left\| \int_{t_0}^t A(\tau) (\varphi_{k-1}(\tau) - \varphi_{k-2}(\tau)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \max_{|t-t_0| \leq a} \left| \int_{t_0}^t A(\tau) \|\varphi_{k-1}(\tau) - \varphi_{k-2}(\tau)\| d\tau \right| = \gamma \left| \int_{t_0}^t \|\varphi_{k-1}(\tau) - \varphi_{k-2}(\tau)\| d\tau \right| \leq \\ &\leq \gamma \sigma \frac{\gamma^{k-2}}{(k-2)!} \left| \int_{t_0}^t |\tau - t_0|^{k-2} d\tau \right| \leq \sigma \frac{\gamma^{k-1} |t - t_0|^{k-1}}{(k-1)!}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Таким образом,

$$\begin{aligned} &\|\varphi_0\| + \|\varphi_1 - \varphi_0\| + \|\varphi_2 - \varphi_1\| + \dots + \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| + \dots \leq \\ &\leq \|x_0\| + \sigma + \sigma \frac{\gamma |t - t_0|}{1!} + \dots + \sigma \frac{\gamma^{k-1} |t - t_0|^{k-1}}{(k-1)!} + \dots = \\ &= \|x_0\| + \sigma \left(1 + \frac{\gamma |t - t_0|}{1!} + \dots + \frac{\gamma^{k-1} |t - t_0|^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right) \leq \\ &\leq \|x_0\| + \sigma \left(1 + \frac{\gamma a}{1!} + \dots + \frac{\gamma^{k-1} a^{k-1}}{(k-1)!} + \dots \right) = \|x_0\| + \sigma e^{\gamma a} \leq \chi + \sigma e^{\gamma a} < \infty, \end{aligned}$$

где $\chi = \|x_0\| = \max_{i=1, n} |x_{i0}|$.

Поэтому согласно критерию Вейерштрасса¹ ряд Пикара (9.4) сходится на промежутке $|t - t_0| \leq a$, причем равномерно. А тогда предельная функция φ^* , определяемая соотношением

$$\varphi^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(t) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} \left(x_0 + \int_{t_0}^t A(\tau) \varphi_{k-1}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right),$$

¹ Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (Weierstrass K. T. W., 1815—1897), немецкий математик.

будет принадлежать пространству C_n и являться решением на промежутке $|t - t_0| \leq a$ интегрального уравнения

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(\tau) \varphi(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau.$$

Последнее и доказывает существование решения начальной задачи (9.2) на всем промежутке $|t - t_0| \leq a$.

Единственность такого решения вытекает из общей теоремы 8.1.

З а м е ч а н и е 9.1. Если интересоваться только вопросом существования решения начальной задачи (8.1), то оказывается, что требовать выполнения условия Липшица в теореме 8.1 не обязательно. Для существования решения начальной задачи (8.1) достаточно непрерывности функции f . Этот факт составляет содержание теоремы 9.2, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 9.2 (теорема Пеано¹). Если отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ области D из $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ непрерывно, то для любой точки $(t_0, x_0) \in D$ существует, по крайней мере, одно решение начальной задачи (8.1).

З а м е ч а н и е 9.2. Интересным является тот факт, что при непрерывной функции f каждая точка области D может оказаться точкой неединственности для решений.

§ 10. ПРОДОЛЖИМОСТЬ РЕШЕНИЙ

Из теоремы Пикара — Линделёфа следует существование единственного решения начальной задачи (8.1) на отрезке $|t - t_0| \leq h$ (рис. 18), где в общем случае $h < a$.

Если на рис. 18 выбрать точку M_1 за начальную, то можно продолжить решение (интегральную кривую) вправо на некоторый отрезок длины l , если, конечно, в окрестности новой начальной точки M_1 выполнены условия теоремы Пикара — Линделёфа. Продолжая этот процесс, можно в некоторых случаях продолжить решение на всю полуось $t \geq t_0$ или даже на всю ось t , если рассматривать и $t \leq t_0$.

Вместе с тем, как мы знаем, возможны случаи, когда решение начальной задачи не может быть продолжено за некоторый промежуток.

Не вдаваясь в подробности, отметим лишь только то, что возможность продолжения решения ДУ (1.1) связана с оценкой роста функции f по переменной x .

Докажем существование определенного в § 8 непродолжаемого решения.

¹ Пеано Джузеппе (Peano D., 1858—1932), итальянский математик.

Теорема 10.1. Если ДУ (1.1) удовлетворяет в параллелепипеде $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ условиям теоремы Пикара — Линделёфа, то для любой точки $(t_0, x_0) \in D$ существует непродолжаемое решение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ДУ (1.1) с начальными данными t_0, x_0 .

Доказательство. Пусть (t_0, x_0) — произвольная точка параллелепипеда D . Обозначим через $\{\varphi^i\}$ множество всех решений ДУ (1.1), имеющих начальными данными t_0 и x_0 . Тогда каждому решению из множества $\{\varphi^i\}$ соответствует свой интервал определения. Множество всех правых концов этих интервалов обозначим через $\{t_2^i\}$, а множество всех их левых концов — через $\{t_1^i\}$ (рис. 19). Пусть далее

$$m_1 = \inf \{t_1^i\}, \quad m_2 = \sup \{t_2^i\}, \quad I = \{t \mid m_1 < t < m_2\}.$$

В частности, может оказаться, что $m_1 = -\infty$, $m_2 = +\infty$. Пусть t^* — произвольная точка интервала I . Допустим для определенности, что $t_0 \leq t^*$. Тогда так как m_2 — это точная верхняя грань множества $\{t_2^i\}$, то существует решение $x = \varphi(t)$ ДУ (1.1) с начальными данными t_0, x_0 , интервал определения которого содержит точку t^* .

Очевидно, что для некоторого $i = j$ имеет место равенство

$$\varphi^j(t^*) = \varphi(t^*),$$

причем значение $\varphi^j(t^*)$ не зависит от выбранного решения φ в силу единственности решений.

Таким образом, функция φ^j однозначно определена на всем интервале I , она является решением ДУ (1.1) с начальными данными t_0, x_0 , поскольку вблизи каждой точки $t^* \in I$ функция φ^j совпадает по построению с некоторым решением ДУ (1.1) и, следовательно, будет продолжением любого решения ДУ (1.1) $x = \varphi(t)$ с начальными данными t_0, x_0 и промежуток определения, содержащемся в I .

Тот факт, что отображение $\varphi^j: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ является непродолжаемым решением, вытекает из следующих соображений. Если бы φ^j являлось сужением какого-либо другого решения ψ , определенного

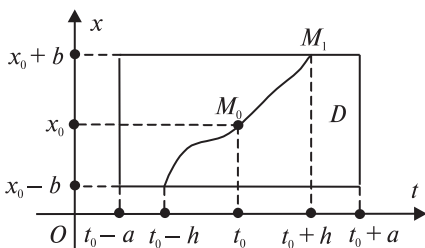


Рис. 18. К продолжимости решений

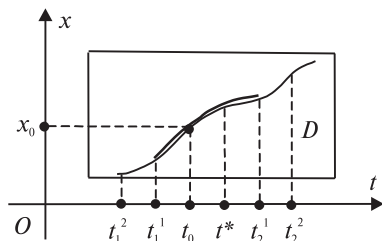


Рис. 19. К теореме 10.1

на интервале $\tilde{I} \supset I$, то нашлось бы $\tilde{t} \in \tilde{I}$, $\tilde{t} \notin I$ такое, что либо $\tilde{t} > m_2$, либо $\tilde{t} < m_1$. А это противоречит выбору m_1 и m_2 . Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 10.1. Теорема 10.1 показывает, что каждое решение ДУ (1.1) может быть продолжено до решения, далее непродолжаемого. В этом смысле непродолжаемые решения исчерпывают совокупность всех решений.

Теорема 10.2. Если ДУ (1.1) удовлетворяет в параллелепипеде $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ условиям теоремы Пикара — Линделёфа, φ и ψ — решения начальной задачи (8.1), где φ — непродолжаемое решение, то φ — продолжение решения ψ .

Доказательство. Так как $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $I = (t_1, t_2)$, $J = (t_3, t_4)$ — решения начальной задачи (8.1), то эти решения совпадают на пересечении $I \cap J$. Если теперь предположить, что $t_4 > t_2$, то функция χ такая, что

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } t_1 < t \leq t_0, \\ \psi(t), & \text{если } t_0 \leq t \leq t_4, \end{cases}$$

будет продолжением решения φ , отличным от φ , чего, разумеется, быть не может, поскольку φ — непродолжаемое решение. Отсюда следует, что $t_4 \leq t_2$.

Аналогично доказывается, что $t_1 \leq t_3$. Таким образом, решение φ действительно является продолжением решения ψ .

Теорема 10.3. Если ДУ (1.1) удовлетворяет в параллелепипеде $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ условиям теоремы Пикара — Линделёфа, φ и ψ — непродолжаемые решения начальной задачи (8.1), то они определены на одном и том же интервале и совпадают на нем.

Доказательство. Пусть φ и ψ — непродолжаемые решения начальной задачи (8.1), определенные соответственно на интервалах (t_1, t_2) и (t_3, t_4) . По теореме 10.2 решение φ является продолжением решения ψ , где $t_1 \leq t_3$, $t_4 \leq t_2$ и $\varphi(t) = \psi(t)$ для любого $t \in (t_3, t_4)$. С другой стороны, по той же теореме 10.2 решение ψ — продолжение решения φ , где уже $t_3 \leq t_1$, а $t_2 \leq t_4$. Таким образом, $t_1 = t_3$, $t_2 = t_4$ и $\varphi(t) = \psi(t)$ для любого $t \in (t_1, t_2)$, что и доказывает теорему.

§ 11. ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим скалярную начальную задачу

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (11.1)$$

Ранее были приведены достаточные условия (теорема Пикара — Линделёфа), при выполнении которых начальная задача (11.1) имеет единственное решение. При нарушении условий теоремы Пикара — Линде-

лѣфа *может* оказаться, что решение начальной задачи или вообще не существует, или задача (11.1) имеет несколько решений.

Определение 11.1. Точка (t_0, x_0) называется точкой ветвления решений начальной задачи (11.1), если через нее проходит несколько интегральных кривых ДУ (11.1).

Напомним здесь и приводимую выше теорему Пеано, согласно которой при непрерывной в некоторой области D функции f начальная задача (11.1), по крайней мере, одно решение всегда имеет.

Таким образом, если функция f непрерывна, но условию Липшица по переменной x не удовлетворяет, то для начальной задачи (11.1) *возможно* наличие точек ветвления. В частности, это может быть тогда, когда производная $\partial f / \partial x$ не существует или является неограниченной. Другими словами, если в некоторой точке $(t_0, x_0) \in D$ производная $\partial f / \partial x$ не существует или неограничена, то такая точка будет подозрительной на ветвление.

В силу непрерывности (однозначной) функции f последняя в каждой точке $(t_0, x_0) \in D$ будет иметь определенное значение, и поэтому в точках ветвления (если таковые существуют) интегральные кривые касаются друг друга.

Пример 11.1. Решить начальную задачу

$$\dot{x} = x^{1/3}, \quad x(0) = 0.$$

Очевидным стационарным решением данной начальной задачи здесь является тривиальное решение $x(t) \equiv 0$.

Чтобы выяснить вопрос о возможных других решениях начальной задачи, заметим, что в данном случае $f(t, x) \equiv x^{\frac{1}{3}}$, а значит, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$ и, таким образом, в точке $O(0, 0)$ возможно ветвление решений. Покажем, что точка $O(0, 0)$ действительно является точкой ветвления. Именно, интегрируя исходное автономное ДУ, находим, что его c -семейство решений определяется соотношением

$$x(t) = \pm \left(\frac{2}{3} t + c \right)^{\frac{3}{2}},$$

где c — произвольная постоянная.

Начальное условие означает, что $c = 0$, и следовательно, решения данной начальной задачи задаются совокупностью

$$\begin{cases} x(t) = \pm \left(\frac{2}{3} t \right)^{\frac{3}{2}}, \\ x(t) \equiv 0. \end{cases}$$

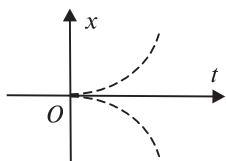


Рис. 20. К примеру 11.1

Отсюда, в частности, и следует, что точка $O(0,0)$ — точка ветвления решений начальной задачи (рис. 20).

Пример 11.2. Найти точки ветвления решений (если таковые существуют) ДУ

$$\dot{x} = (x-t)^{\frac{2}{3}} + 1.$$

Правая часть ДУ $f(t, x) = (x-t)^{\frac{2}{3}} + 1$, следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3}(x-t)^{-\frac{1}{3}}$.

Отсюда вытекает, что точки прямой $x = t$ могут быть точками ветвления решений данного ДУ. Оказывается, что эти точки действительно являются точками ветвления.

В самом деле, непосредственной проверкой убеждаемся, что прямая $x = t$ — интегральная прямая ДУ. Последующее интегрирование ДУ (заменой $z = x - t$) дает c -семейство решений, которое задается соотношением

$$x(t) = t + \frac{(t+c)^3}{27},$$

откуда уже и следует (рис. 21), что через каждую точку интегральной кривой $x = t$ проходит (ее касаясь) еще одна интегральная кривая заданного ДУ.

Пример 11.3. Найти точки ветвления решений (если таковые существуют) ДУ

$$\dot{x} = (x-t)^{\frac{2}{3}} + a,$$

где a — некоторое, не равное единице вещественное число.

Как и в предыдущем примере, точки прямой $x = t$ являются подозрительными на ветвление. Но в действительности ветвления в данном случае не будет уже потому, что прямая $x = t$ не интегральная кривая заданного ДУ.

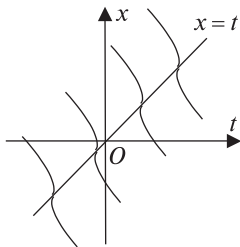


Рис. 21. К примеру 11.2

Обратимся теперь к понятию огибающего решения.

Пусть равенство

$$\Phi(t, x, c) = 0, \quad (11.2)$$

где c — вещественный параметр, Φ — непрерывно дифференцируемая функция, определяет семейство непересекающихся кривых, сплошь заполняющих некоторую область $D(t, x)$ и являющихся интегральными кривыми скалярного ДУ (11.1).

Тогда при каждом допустимом значении c через каждую точку области D проходит кривая, определяемая ДУ (11.1), и в каждой такой точке направление касательной к кривой совпадает с направлением поля, задаваемым ДУ (11.1).

Предположим, что семейство кривых, определяемых соотношением (11.2), имеет *огигающую* F , т. е. такую кривую, которая во всех своих точках касается кривых семейства (11.2). Тогда с учетом предыдущего ясно, что кривая F будет интегральной кривой ДУ (11.1).

Определение 11.2. Решение ДУ (11.1), графиком которого является огигающая, называется *огигающим решением*.

Очевидно, что огигающее решение является особым решением.

Таким образом, если известно c -семейство решений ДУ (11.1) вида (11.2), то можно построить новые решения ДУ (11.1), если найти огигающие c -семейства (11.2).

В дифференциальной геометрии доказывается, что если c -семейство кривых, определяемое соотношением (11.2), имеет огигающую, то ее уравнение может быть получено из системы

$$\begin{cases} \Phi(t, x, c) = 0, \\ \Phi'_c(t, x, c) = 0 \end{cases} \quad (11.3)$$

исключением параметра c .

Однако следует иметь в виду, что кривая F , которая задана уравнением

$$\mathcal{F}(t, x) = 0, \quad (11.4)$$

и находится из системы (11.3) исключением параметра c , не обязательно является огигающей.

Определение 11.3. Кривая F , уравнение которой (11.4) находится из системы (11.3) исключением параметра c , называется c -дискриминантной кривой семейства (11.2).

Для c -дискриминантной кривой часто используют обозначение $\text{Disct}_c : \mathcal{F}(t, x) = 0$.

Оказывается, что в одних случаях препятствием к тому, чтобы c -дискриминантная кривая была огигающей, является наличие у кривой особых точек. В других же случаях c -дискриминантная кривая может состоять из особых точек кривых и быть огигающей. В связи со сказанным знание геометрического места особых точек указывает на возможность существования огигающей.

Имея это в виду, напомним некоторые факты из теории особых точек кривых, рассматриваемые в дифференциальной геометрии.

Прежде всего это названия различных типов особых точек кривых: *узловые*, или *кратные*, *особые точки*; *точки возврата*, или *точки заострения*; *изолированные особые точки* (рис. 22).



Рис. 22. Типы особых точек кривых:

a — узловая (кратная); b — возврата (заострения); v — изолированная

Далее, если некоторая кривая, в частности c -дискриминантная кривая $\mathcal{F}$, имеет особые точки, то их координаты должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{cases} \mathcal{F}(t, x) = 0, \\ \mathcal{F}'_t(t, x) = 0, \\ \mathcal{F}'_x(t, x) = 0. \end{cases}$$

Если речь идет о семействе кривых, определяемых равенством (11.2), то в случае, когда каждая кривая этого семейства имеет особую точку, координаты этих точек оказываются решениями системы

$$\begin{cases} \Phi(t, x, c) = 0, \\ \Phi'_t(t, x, c) = 0, \\ \Phi'_x(t, x, c) = 0, \end{cases} \quad (11.5)$$

где c — вещественный параметр. Таким образом, если геометрическое место особых точек семейства (11.2) образует некоторую кривую, то координаты каждой точки этой кривой оказываются решениями системы (11.5).

Наоборот, если из каких-либо двух уравнений системы (11.5) (например, из первых двух) исключить параметр c , то получим равенство

$$\mathcal{F}^*(t, x) = 0, \quad (11.6)$$

определяющее геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют и последнему уравнению системы. Вместе с тем последнее вовсе не означает, что точки кривой, определяемой равенством (11.6), будут особыми точками. Они лишь *могут* оказаться таковыми.

Возвращаясь теперь к c -дискриминантным кривым, докажем следующее полезное утверждение.

Теорема 11.1. Условие

$$(\Phi'_t)^2 + (\Phi'_x)^2 \neq 0 \quad (11.7)$$

является достаточным для того, чтобы c -дискриминантная кривая была огибающей для c -семейства кривых (11.2).

Доказательство. Из дифференциальной геометрии известно, что если семейство кривых, определяемое равенством (11.2), имеет c -дискриминантную кривую, то координаты ее точек удовлетворяют уравнению (11.3). Уравнения (11.3) — это параметрические уравнения c -дискриминантной кривой, для которой c является параметром, поскольку с изменением c изменяются и координаты t и x , т. е. $t = \varphi(c)$, $x = \psi(c)$, где φ и ψ — непрерывно дифференцируемые функции такие, что

$$\Phi(\varphi(c), \psi(c), c) \equiv 0.$$

Дифференцируя последнее тождество по c и учитывая, что в любой точке c -дискриминантной кривой имеет место второе равенство в (11.3), получим, что

$$\Phi'_t(\varphi, \psi, c)\varphi'_c + \Phi'_x(\varphi, \psi, c)\psi'_c = 0.$$

Имея теперь в виду условие (11.7), предположим для определенности, что $\Phi'_x \neq 0$. Тогда последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{\psi'_c}{\varphi'_c} = -\frac{\Phi'_t}{\Phi'_x}.$$

Но поскольку $\psi'_c / \varphi'_c = \dot{x}$, то угловой коэффициент касательной к c -дискриминантной кривой — это

$$\dot{x} = -\frac{\Phi'_t(t, x, c)}{\Phi'_x(t, x, c)}. \quad (11.8)$$

Вычислим теперь угловой коэффициент касательной к кривой семейства (11.2). Равенство (11.2) определяет x как неявную функцию t . Поэтому

$$\Phi'_t + \Phi'_x \dot{x} = 0,$$

откуда

$$\dot{x} = -\frac{\Phi'_t(t, x, c)}{\Phi'_x(t, x, c)}. \quad (11.9)$$

Из формул (11.8) и (11.9) следует, что угловые коэффициенты касательных к c -дискриминантной кривой и кривой семейства (11.2) в некоторой точке (t, x) одни и те же. А поскольку значение параметра c можно выбрать любым (из области допустимых значений), то c -дискриминантная кривая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства (11.2), а значит, является огибающей. Теорема доказана.

Пример 11.4. Найти огибающую (если она существует) семейства кривых, заданного равенством $x^2 - (t+c)^3 = 0$, где c — вещественный параметр.

Решение. Прежде всего заметим, что в соответствии с приведенным выше алгоритмом $\text{Disct}_c : x = 0$.

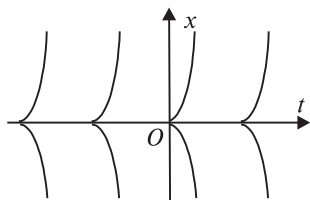


Рис. 23. К примеру 11.4

Геометрическое место возможных особых точек семейства задается системой

$$\begin{cases} x^2 - (t+c)^3 = 0, \\ -3(t+c)^2 = 0, \\ 2x = 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что c -дискриминантная кривая сплошь состоит из особых точек семейства, которыми оказываются точки заострения (рис. 23), и является при этом огибающей.

Данное семейство кривых определяет, как нетрудно проверить, c -семейство решений ДУ

$$\dot{x} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{3}},$$

c -дискриминантная кривая которого — особое решение.

Пример 11.5. Найти огибающую (если она существует) семейства кривых, заданного равенством $x^2(1-x) - (t-c)^2 = 0$, где c — вещественный параметр.

Решение. В данном случае, как легко проверить,

$$\text{Disc}_c : x = 0, x = 1,$$

т. е. c -дискриминантная кривая распадается на две прямые.

Геометрическое место возможных особых точек семейства определяется системой

$$\begin{cases} x^2(1-x) - (t-c)^2 = 0, \\ -2(t-c) = 0, \\ 2x(1-x) - x^2 = 0 \end{cases}$$

или системой

$$\begin{cases} x^2(1-x) - (t-c)^2 = 0, \\ t-c = 0, \\ x(2-3x) = 0, \end{cases}$$

которая равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2(1-x) - (t-c)^2 = 0, \\ t-c = 0, \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^2(1-x) - (t-c)^2 = 0, \\ t-c = 0, \\ 2-3x = 0. \end{cases}$$

Первая из систем определяет геометрическое место возможных особых точек, а вторая — нет. При этом c -дискриминантная кривая $x = 1$ оказывается огибающей рассматриваемого семейства (рис. 24), а c -дискриминантная кривая $x = 0$, являясь геометрическим местом узловых точек, уже не будет огибающей (рис. 24).

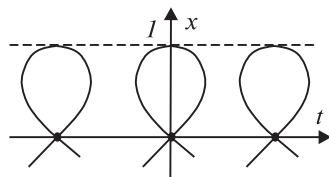


Рис. 24. К примеру 11.5

§ 12. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим векторное ДУ

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (12.1)$$

где отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, будем считать непрерывным.

Определение 12.1. Непрерывное непостоянное отображение $U : D^* \rightarrow \mathbb{R}$, $D^* \subset D$, называется первым интегралом ДУ (12.1), если оно постоянно вдоль любой интегральной кривой ДУ (12.1) из области D^* , т. е. если $U(t, \varphi(t)) \equiv \text{const}$, где $\varphi : I^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение ДУ (12.1).

Другими словами, непрерывное непостоянное отображение $U : D^* \rightarrow \mathbb{R}$, $D^* \subset D$, — первый интеграл ДУ (12.1), если в области D^* график каждого решения $\varphi : I^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ ДУ (12.1) лежит на одной из поверхностей уровня отображения U .

Напомним, что поверхностью уровня c отображения $U : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ называется полный прообраз $U^{-1}c \subset D^*$ точки $c \in \mathbb{R}$. Таким образом, поверхность уровня c — это n -мерная поверхность, лежащая в области D^* пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

На рис. 25 приведен пример отображения $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, являющегося первым интегралом для скалярного ДУ $\dot{x} = -t/x$, интегрируемого в широком смысле, интегральными кривыми которого являются концентрические окружности $t^2 + x^2 = c$ ($c > 0$), лежащие в плоскости $\mathbb{R}^2$ изменения переменных t, x .

Рассмотрим теперь случай автономного ДУ

$$\dot{x} = g(x), \quad (12.2)$$

где отображение $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, непрерывно.

Определение 12.2. Непрерывное непостоянное, не зависящее от t отображение $U : G^* \rightarrow \mathbb{R}$, $G^* \subset G$, называется первым интегралом ДУ (12.2), если оно постоянно вдоль любой траектории ДУ (12.2) из области G^* , т. е. если $U(\varphi(t)) \equiv \text{const}$, где $\varphi : I^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение ДУ (12.2).

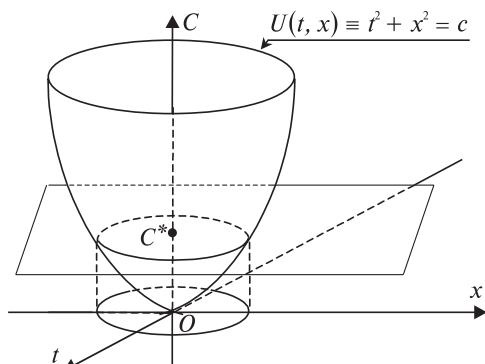


Рис. 25. К определению первого интеграла

Отметим, что не всякое ДУ имеет первые интегралы. Так, например, рассмотрим автономную дифференциальную систему

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = y, \quad (12.3)$$

траекториями которой в проколотой плоскости $\mathbb{R}^2 \setminus O(0,0)$ являются, очевидно, лучи, выходящие из начала координат $O(0,0)$.

Тогда если предположить, что ДС (12.3) имеет первый интеграл U , то отображение U должно быть непостоянным и непрерывным на всей фазовой плоскости отображением, принимающим постоянное значение на каждом луче (выходящем из точки $O(0,0)$). Но в силу непрерывности отображения U постоянное значение будет равно $U(0,0)$ в любой точке фазовой плоскости, а это противоречит определению первого интеграла.

Теорема 12.1 (аналитический критерий первого интеграла). Для того чтобы непрерывно дифференцируемое отображение $U : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ было первым интегралом ДУ (12.1), необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $(t, x) \in D^*$ выполнялось равенство

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} f(t, x) = 0. \quad (12.4)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть непрерывно дифференцируемое отображение $U : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ является для ДУ (12.1) первым интегралом. Это означает, что $U(t, x) \equiv \text{const}$, где $x = \varphi(t)$ — решение ДУ (12.1). Дифференцируя последнее соотношение по t в силу ДУ (12.1), получим, что

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \equiv \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} f(t, x) = 0,$$

т. е. имеем (12.4).

Достаточность. Пусть имеет место равенство (12.4). Тогда вдоль интегральных кривых ДУ (12.1) справедливо равенство

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} \frac{dx}{dt} \equiv \frac{dU(t, x)}{dt} = 0,$$

которое равносильно равенству $U(t, x) = \text{const}$, где $x = \varphi(t)$ — интегральная кривая ДУ (12.1), а это и означает, что U — первый интеграл ДУ (12.1).

Теорема 12.2 (теорема о неединственности первого интеграла). Если $U_1, U_2, \dots, U_k$ — первые интегралы ДУ (12.1), то любая непрерывная без участков постоянства функция U от этих интегралов также есть первый интеграл ДУ (12.1).

Доказательство. Так как каждое из отображений $U_1, U_2, \dots, U_k$ постоянно на интегральных кривых ДУ (12.1), то и отображение U также будет постоянным на тех же интегральных кривых. А это и доказывает теорему.

Теорема 12.3 (теорема об общем виде первого интеграла). Если $U_i : D^* \rightarrow \mathbb{R}, i = \overline{1, n}$, — непрерывно дифференцируемые первые интегралы ДУ (12.1) такие, что определитель $\frac{D(U_1, U_2, \dots, U_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0$ в некоторой

окрестности точки $(t^*, x^*) \in D^*$, то для любого непрерывно дифференцируемого первого интеграла U ДУ (12.1) существует непрерывно дифференцируемая функция Φ такая, что

$$U(t, x) = \Phi(U_1, U_2, \dots, U_n)$$

при всех (t, x) , достаточно близких к точке (t^*, x^*) .

Доказательство. При фиксированном значении t вектор-функция $\Psi = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ имеет в силу условий теоремы обратную функцию F . Обозначим

$$\Phi(t, y) = U(t, F(t, y)),$$

тогда

$$U(t, x) = \Phi(t, \Psi(t, x)).$$

Остается доказать, что отображение Φ не зависит от t , т. е. что $\frac{d\Phi}{dt} = 0$. Итак, дифференцируя тождество

$$\Psi(t, F(t, y)) \equiv y$$

по t , получим, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dF}{dt} = 0,$$

а в силу аналитического критерия первого интеграла —

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} f = 0.$$

Из последних двух равенств следует равенство

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \left(\frac{dF}{dt} - f \right) = 0,$$

которое с учетом невырожденности матрицы $\partial \Psi / \partial x$ равносильно равенству $dF/dt = f$. Но в таком случае

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dF}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} f = 0,$$

так как U — первый интеграл ДУ (12.1). Теорема доказана.

Определение 12.3. Интегрируемой комбинацией системы (1.1") называется интегрируемое ДУ, составленное из данной системы.

Важность интегрируемых комбинаций при изучении ДУ заключается, например, в том, что они существенно облегчают нахождение полного семейства решений ДУ (12.1).

Теорема 12.4 (теорема об интегрируемой комбинации). Если $\varphi(x)dx$ — дифференциал отображения $U : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$, и $\varphi(x)f(t, x) = 0$ для любой точки $(t, x) \in G$, где $f(t, x)$ — правая часть ДУ (12.1), то U — первый интеграл ДУ (12.1), не зависящий от t .

Доказательство. Так как $\varphi(x)dx$ — дифференциал отображения U , то $\partial U / \partial x = \varphi(x)$. А тогда

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} f(t, x) \equiv \varphi(x)f(t, x) = 0$$

для любой точки $(t, x) \in G$, что и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 12.1. Первые интегралы, определенные во всей области существования функции f — правой части ДУ (12.1), в общем случае не существуют, и именно это обстоятельство определяет основную трудность изучения ДУ. Вместе с тем можно привести примеры уравнений, имеющих первые интегралы, определенные во всей области существования ДУ. К таким ДУ относятся, в частности, так называемые ДС Гамильтона, или канонические ДС:

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12.5)$$

где H — дважды непрерывно дифференцируемая функция $2n$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Теорема 12.5 (закон сохранения энергии). Отображение $H : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^{2n}$, является первым интегралом ДС (12.5).

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0,$$

Определение 12.4. Непрерывно дифференцируемые отображения $F_1, F_2, \dots, F_m : G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^s (s \geq m)$, называются функционально независимыми (или независимыми) в окрестности $\mathcal{O}$ точки $z \in G$, если ранг производной $\frac{dF}{dz}$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, равен m .

$$\frac{D(U_1, U_2, \dots, U_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0 \quad (12.6)$$

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим матрицу Якоби отображений $U_1, U_2, \dots, U_n$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial t} & \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial U_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial U_2}{\partial t} & \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial U_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial U_n}{\partial t} & \frac{\partial U_n}{\partial x_1} & \frac{\partial U_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial U_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (12.7)$$

Действительно, поскольку $U_1, U_2, \dots, U_n$ — непрерывно дифференцируемые первые интегралы, то справедливы равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial U_1}{\partial x_n} f_n = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial U_n}{\partial t} + \frac{\partial U_n}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial U_n}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial U_n}{\partial x_n} f_n = 0, \end{array} \right.$$

Достаточность. Если имеет место неравенство (12.6), то ранг производной отображения $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ равен n , а это и означает функциональную независимость первых интегралов $U_1, U_2, \dots, U_n$.

Доказательство. Пусть известны, например, $(n + 1)$ первых интегралов ДУ (12.1) $U_1, U_2, \dots, U_{n+1}$, из которых первые n функционально независимы. Тогда в соответствии с теоремой 12.1 имеем равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial U_1}{\partial x_n} f_n = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial U_{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial U_{n+1}}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial U_{n+1}}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial U_{n+1}}{\partial x_n} f_n = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial t}\psi_0 + \frac{\partial U_1}{\partial x_1}\psi_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\psi_2 + \dots + \frac{\partial U_1}{\partial x_n}\psi_n = 0, \\ \vdots \\ \frac{\partial U_{n+1}}{\partial t}\psi_0 + \frac{\partial U_{n+1}}{\partial x_1}\psi_1 + \frac{\partial U_{n+1}}{\partial x_2}\psi_2 + \dots + \frac{\partial U_{n+1}}{\partial x_n}\psi_n = 0 \end{array} \right.$$
$$\frac{D(U_1, U_2, \dots, U_{n+1})}{D(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0,$$

Определение 12.5. Совокупность n первых функционально независимых интегралов ДУ (12.1) называется базисом первых интегралов ДУ (12.1).

Теорема 12.8. Если $U_1, U_2, \dots, U_n : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ — базис первых интегралов ДУ (12.1), определенных в некоторой окрестности точки $(t_0, x_0) \in D^*$, то уравнение

$$U(t, x) = U(t_0, x_0), U = (U_1, U_2, \dots, U_n), \quad (12.8)$$

имеет единственное решение $x = \varphi(t)$, являющееся решением ДУ (12.1) с начальными данными t_0, x_0 .

Доказательство. Так как вектор-функция U определяет базис первых интегралов ДУ (12.1), то

$$\det \frac{\partial U(t_0, x_0)}{\partial x} \neq 0$$

и, значит, по теореме о неявной функции уравнение (12.8) имеет единственное решение $x = \varphi(t)$ такое, что $x_0 = \varphi(t_0)$.

С другой стороны, согласно определению первого интеграла решение $x = \tilde{\varphi}(t)$ ДУ (12.1) с начальными данными t_0, x_0 также удовлетворяет уравнению (12.8). Но в таком случае $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$ в некоторой окрестности точки t_0 , что и доказывает теорему.

Определение 12.6. Если $U_1, U_2, \dots, U_n : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ — базис первых интегралов ДУ (12.1), то будем говорить, что равенство

$$U(t, x) = c, U = (U_1, U_2, \dots, U_n),$$

определяет в неявном виде базисное c -семейство решений ДУ (12.1) (c — это n -мерный параметр).

§ 13. РЕДУКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Знание одного первого непрерывно дифференцируемого интеграла $U_1 : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ векторного ДУ (12.1) позволяет редуцировать это уравнение, т. е. свести задачу интегрирования ДУ к интегрированию уравнения меньшей размерности, поскольку из соотношения $U_1(t, x) = c_1$ одну из компонент искомой функции можно выразить через остальные.

Покажем, что если известны m функционально независимых первых интегралов, где $1 \leq m < n$, то порядок векторного ДУ можно понизить на m единиц.

Итак, пусть $U_1, U_2, \dots, U_m : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ — функционально независимые первые интегралы ДУ (12.1). В этом случае хотя бы один из определителей m -го порядка, составленный из элементов матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial U_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial U_m}{\partial x_1} & \frac{\partial U_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial U_m}{\partial x_n} \end{pmatrix},$$

отличен от нуля.

$$\frac{D(U_1, U_2, \dots, U_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)}.$$
[illegible]
$$x_k = \tilde{U}_k(t, x_{m+1}, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m), \quad (13.1)$$

Тогда, подставив значения x_k , выраженные формулой (13.1), в последние $(n - m)$ уравнений ДС, соответствующей ДУ (12.1), получим ДС $(n - m)$ ДУ с $(n - m)$ неизвестными $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$:

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j(t, \tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_m, x_{m+1}, \dots, x_n), \quad j = \overline{m+1, n}. \quad (13.2)$$

А в таком случае, если мы найдем из системы (13.2)

$$x_j(t) = \varphi_j(t, c_1, c_2, \dots, c_n), j = \overline{m+1, n}, \quad (13.3)$$

то, подставив в соотношения (13.1) значения $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, выраженные формулой (13.3), получим

$$x_k(t) = \varphi_k(t, c_1, c_2, \dots, c_n), \quad k = \overline{1, m}. \quad (13.4)$$

Отсюда следует, что равенства (13.4) вместе с равенствами (13.3) будут определять s -семейство решений исходного векторного ДУ (12.1).

§ 14. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИНТЕГРИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ

Рассмотрим скалярное ОДУ в дифференциальной форме

$$M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0, \quad (14.1)$$

где функции M и N определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial M}{\partial x}$ и $\frac{\partial N}{\partial t}$ на некотором открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^2$.

Теорема 14.1 (теорема о существовании интегрирующего множителя). Если $U : D^* \rightarrow \mathbb{R}$, $D^* \subset D$, — дважды непрерывно дифференцируемый первый интеграл ДУ (14.1), а $M(t, x)$ и $N(t, x)$ не обращаются в нуль в любой точке $(t, x) \in D^*$, то ДУ (14.1) имеет в D^* интегрирующий множитель.

Доказательство. Так как U — непрерывно дифференцируемый первый интеграл ДУ (14.1), то в силу (14.1) имеет место тождество

$$dU(t, x) = \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} dx \equiv 0. \quad (14.2)$$

Приравняв значения $\frac{dx}{dt}$ из соотношений (14.1) и (14.2), получим равенство

$$\frac{M(t, x)}{N(t, x)} = \frac{U'_t(t, x)}{U'_x(t, x)},$$

откуда

$$\frac{U'_x(t, x)}{N(t, x)} = \frac{U'_t(t, x)}{M(t, x)} = \mu(t, x). \quad (14.3)$$

Таким образом,

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = \mu(t, x) M(t, x), \quad \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} = \mu(t, x) N(t, x)$$

и, значит,

$$dU(t, x) = \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} dt + \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} dx \equiv \mu(t, x) M(t, x) dt + \mu(t, x) N(t, x) dx,$$

что и доказывает требуемое.

З а м е ч а н и е 14.1. Формула (14.3) позволяет находить интегрирующие множители ДУ (14.1) по известным первым интегралам ДУ.

Теорема 14.2 (теорема о неединственности интегрирующего множителя). Если $\mu_0 : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемый интегрирующий множитель ДУ (14.1), а $U_0 : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ — соответствующий ему первый интеграл ДУ (14.1), т. е. если

$$\mu_0(t, x) [M(t, x) dt + N(t, x) dx] = dU_0(t, x),$$

то функция $\mu : G \rightarrow \mathbb{R}$ ($G \subset D^*$ — множество, не содержащее особых точек уравнения $dU_0(t, x) = 0$), определяемая равенством

$$\mu(t, x) = \mu_0(t, x) \Psi(U_0(t, x)), \quad (14.4)$$

где Ψ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция одной переменной, также является непрерывно дифференцируемым интегрирующим множителем ДУ (14.1).

Доказательство. Умножая левую часть ДУ (14.1) на выражение $\mu_0(t, x) \Psi(U_0(t, x))$, получаем

$$\begin{aligned} & \mu_0(t, x) \Psi(U_0(t, x)) [M(t, x)dt + N(t, x)dx] = \\ & = \Psi(U_0(t, x)) dU_0(t, x) = d \int \Psi(U_0(t, x)) dU_0(t, x) = dU(t, x), \end{aligned}$$

что и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 14.2. Как следует из формулы (14.4), ДУ (14.1) имеет бесконечно много интегрирующих множителей, порождаемых интегрирующим множителем μ_0 и соответствующим ему первым интегралом. Возникает вопрос: *все ли интегрирующие множители ДУ (14.1) определяются формулой (14.4)?*

Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 14.3 (теорема об общем виде интегрирующего множителя). Если $\mu_0 : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемый интегрирующий множитель ДУ (14.1), а $U_0 : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ — соответствующий ему первый интеграл ДУ (14.1), то любой другой непрерывно дифференцируемый интегрирующий множитель ДУ (14.1) определяется равенством (14.4) при условии, что множество $G \subset D^*$ не содержит особых точек уравнений $dU_0(t, x) = 0$ и $dU(t, x) = 0$.

Доказательство. Пусть $\mu : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ — какой-либо непрерывно дифференцируемый интегрирующий множитель ДУ (14.1), отличный от интегрирующего множителя μ_0 , а $U : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ — соответствующий ему первый интеграл ДУ (14.1). Тогда

$$\begin{aligned} & \mu_0(t, x) [M(t, x)dt + N(t, x)dx] = dU_0(t, x), \\ & \mu(t, x) [M(t, x)dt + N(t, x)dx] = dU(t, x). \end{aligned} \quad (14.5)$$

Равенства (14.5) приводят к соотношению

$$\frac{\mu(t, x)}{\mu_0(t, x)} = \frac{dU(t, x)}{dU_0(t, x)},$$

которое с учетом того, что $U(t, x) = \Phi(U_0(t, x))$ для любой точки $(t, x) \in G$, означает справедливость цепочки равенств:

$$\begin{aligned}\frac{\mu(t, x)}{\mu_0(t, x)} &= \frac{d(\Phi(U_0(t, x)))}{dU_0(t, x)} = \frac{\Phi'_{U_0}(U_0(t, x))dU_0(t, x)}{dU_0(t, x)} = \\ &= \Phi'_{U_0}(U_0(t, x)) \equiv \Psi(U_0(t, x)),\end{aligned}$$

откуда и следует представление (14.4).

Следствие 14.1. Если $\mu_1 : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ и $\mu_2 : D^* \rightarrow \mathbb{R}$ — два интегрирующих множителя ДУ (14.1), отличных от нуля на множестве D^* , и отношение $\frac{\mu_2(t, x)}{\mu_1(t, x)} = U(t, x)$ отлично от постоянной, то отображение U — первый интеграл ДУ (14.1).

З а м е ч а н и е 14.3. Теорема 14.3 дает возможность указать прием нахождения интегрирующего множителя, который напоминает непосредственное отыскание μ .

Суть этого приема состоит в следующем. Разбивают ДУ (14.1) на несколько групп, скажем для простоты, на две. Каждую группу рассматривают как отдельное ДУ. Затем для каждого из полученных ДУ находят интегрирующие множители μ_1 и μ_2 , а также соответствующие им первые интегралы U_1 и U_2 .

Все интегрирующие множители каждого из двух ДУ определяются соответственно равенствами

$$\mu_1^*(t, x) = \mu_1(t, x)\Psi_1(U_1(t, x)), \quad \mu_2^*(t, x) = \mu_2(t, x)\Psi_2(U_2(t, x)).$$

Функции Ψ_1 и Ψ_2 — это произвольные (непрерывно дифференцируемые) функции, поэтому, подобрав их так, чтобы

$$\mu_1^*(t, x) = \mu_2^*(t, x) = \mu(t, x),$$

получают интегрирующий множитель исходного ДУ.

Проиллюстрируем этот прием на примере.

Пример 14.1. Проинтегрировать ДУ

$$\left(\frac{x}{t} + 3t^2\right)dt + \left(1 + \frac{t^3}{x}\right)dx = 0.$$

Решение. Перепишем ДУ в виде

$$\left(\frac{x}{t}dt + dx\right) + \left(3t^2dt + \frac{t^3}{x}dx\right) = 0$$

и рассмотрим два ДУ:

$$\frac{x}{t}dt + dx = 0 \quad \text{и} \quad 3t^2dt + \frac{t^3}{x}dx = 0.$$

Для первого ДУ $\mu_1(t, x) = t$, а $U_1(t, x) = tx$. Для второго ДУ $\mu_2(t, x) = x$, а $U_2(t, x) = t^3x$. В таком случае

$$\mu_1^*(t, x) = t\Psi_1(tx), \quad \mu_2^*(t, x) = x\Psi_2(t^3x).$$

Тогда, полагая $\Psi_1(U_1) = U_1^2$, $\Psi_2(U_2) = U_2$, находим, что $t(tx)^2 = x(t^3x) = t^3x^2$, т. е. интегрирующий множитель данного ДУ определяется равенством $\mu(t, x) = t^3x^2$.

Чтобы проинтегрировать исходное ДУ, умножим его на $\mu(t, x)$, в результате получим уравнение в полных дифференциалах:

$$(t^2x^3 + 3t^5x^2)dt + (t^3x^2 + t^6x)dx = 0,$$

откуда

$$U(t, x) = \int_0^t (\tau^2x^3 + 3\tau^5x^2)d\tau + \int_0^x (0)d\xi = \frac{(tx)^3}{3} + \frac{(t^3x)^2}{2}.$$

Таким образом, полное семейство решений данного ДУ определяется в неявном виде равенством $2(tx)^3 + 3(t^3x)^2 = c$, где c — произвольная постоянная.

§ 15. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-го ПОРЯДКА В СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Системой ОДУ 1-го порядка в симметрической форме называется ДС вида

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}. \quad (15.1)$$

В ДС (15.1) переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ играют равноправную роль в отличие от ДС в нормальной форме

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (15.2)$$

где переменные t и $x_1, x_2, \dots, x_n$ не равноправны: переменная t — независимая, а переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ рассматриваются как искомые функции.

Но ДС (15.2) можно поставить в соответствие ДС в симметрической форме

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} &= \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \\ &= \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dt}{1}, \end{aligned} \quad (15.3)$$

где все переменные $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ уже играют равноправную роль.

Переход от ДС в нормальной форме (15.2) к соответствующей ДС в симметрической форме (15.3) часто бывает полезным как при рассмотрении теоретических вопросов, так и вопросов, связанных с приложениями.

В частности, такой переход применяется при нахождении интегрируемых комбинаций, которые позволяют построить первые интегралы ДС (15.2). При этом используется следующее *свойство ряда равных отношений (свойство производной пропорции)*:

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \dots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{\varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \dots + \varphi_n dx_n}{\varphi_1 f_1 + \varphi_2 f_2 + \dots + \varphi_n f_n}.$$

Обратим здесь внимание на то, что *записанный ряд отношений — это не дроби, а пропорции, а значит, этот ряд отношений имеет смысл и в том случае, когда некоторые из знаменателей обращаются в нуль.*

Покажем теперь, что при некоторых предположениях относительно функций $X_1, X_2, \dots, X_n$ дифференциальной системе в симметрической форме (15.1) можно поставить в соответствие определенную ДС в нормальной форме.

Именно, пусть функции $X_1, X_2, \dots, X_n$ определены и непрерывны вместе с первыми частными производными в некоторой окрестности точки $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, причем ни в одной точке выбранной окрестности эти функции не обращаются одновременно в нуль (т. е. точки не являются особыми). Предположим для определенности, что

$$X_n(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \neq 0.$$

Тогда, принимая x_n за независимую переменную, ДС в симметрической форме (15.1) можно переписать в виде следующей нормальной неавтономной ДС $(n - 1)$ уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)}. \end{array} \right. \quad (15.4)$$

Решение, первый интеграл, c -семейство решений ДС (15.4) обычно называют соответственно решением, первым интегралом, c -семейством решений ДС (15.1).

Отметим два факта, основанных на связи ДС вида (15.1) с нормальными автономными ДС n уравнений

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = \overline{1, n}. \quad (15.5)$$

Теорема 15.1. ДС (15.5) не может иметь более $(n - 1)$ функционально независимых первых интегралов, не зависящих явно от t ¹.

Доказательство. ДС в симметрической форме, соответствующая дифференциальной системе (15.5), имеет вид

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dt}{1}. \quad (15.6)$$

Но тогда первые интегралы ДС (15.5), не зависящие явно от t , будут, очевидно, первыми интегралами ДС (15.1). А поскольку ДС (15.1) можно переписать в виде нормальной ДС (15.4), допускающей не более $(n - 1)$ функционально независимых первых интегралов (теорема 12.7), то и ДС (15.5) может иметь не более $(n - 1)$ функционально независимых первых интегралов, не зависящих явно от t .

Теорема 15.2. Если известны $(n - 1)$ функционально независимых первых стационарных интегралов ДС (15.5), то всегда можно построить s -семейство решений ДС (15.1), представимое в параметрическом виде (параметром является переменная t).

Доказательство. Введем в системе (15.1) переменную t , приравняв в ДС (15.1) равные отношения дифференциалу t . В результате придем к ДС (15.6), равносильной ДС (15.5), относительно которой известно, что она имеет $(n - 1)$ функционально независимых первых стационарных интегралов

$$U_1(x_1, x_2, \dots, x_n), U_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, U_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Но в таком случае, разрешая систему

$$U_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i, \quad i = \overline{1, n-1},$$

где $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ — произвольные постоянные, например, относительно $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, найдем

$$x_i = \tilde{\Phi}_i(x_n, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (15.7)$$

Подставляя теперь полученные значения x_i , определяемые формулами (15.7), в последнее уравнение ДС (15.5), получим ДУ

$$\frac{dx_n}{dt} = f(x_n, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}),$$

откуда

$$\int \frac{dx_n}{f(x_n, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})} = t + c_n.$$

¹ Не зависящие явно от t первые интегралы ДС (15.5) часто называют стационарными первыми интегралами.

Если разрешить последнее уравнение относительно x_n , т. е. найти

$$x_n = \varphi_n(t + c_n, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}), \quad (15.8)$$

то, подставив значение x_n из (15.8) в формулу (15.7), получим, что

$$x_i = \varphi_i(t + c_n, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (15.9)$$

Формулы (15.9) и (15.8) и определяют c -семейство решений ДС (15.1) в параметрическом виде.

З а м е ч а н и е 15.1. В параметрическом представлении c -семейства решений ДС (15.1), определяемого формулами (15.9) и (15.8), формально присутствуют n произвольных постоянных, но существенными из них являются только постоянные $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$. Произвольная постоянная c_n указывает только на начало отсчета параметра t . Исключив из уравнений (15.9) и (15.8) параметр t (а значит, и постоянную c_n), получим c -семейство решений ДС (15.1) в виде (15.7), где в формулах присутствуют только постоянные $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$.

Переходя к примерам, еще раз акцентируем внимание на том, что приведение системы ОДУ к симметрической форме часто оказывается полезным для нахождения первых интегралов. При этом используются упоминавшиеся выше интегрируемые комбинации. Это или комбинации уравнений системы, содержащие только две переменные и представляющие собой ДУ, которые можно решить, или такие комбинации членов равенств (15.1), которые являются линейными относительно дифференциалов и левая часть которых представляет полный дифференциал, а правая — нуль. Интегрируя этот полный дифференциал, получаем первый интеграл. Если таким путем найдено $(n - 1)$ функционально независимых первых интегралов, то получаем в неявном виде базисное c -семейство решений.

Пример 15.1. Найти базисное c -семейство решений ДС в симметрической форме

$$\frac{dx}{x-z} = \frac{dy}{y-z} = \frac{dz}{2z}. \quad (15.10)$$

Решение. В соответствии с общей теорией для нахождения в неявном виде базисного c -семейства решений ДС (15.10) требуется построить два первых функционально независимых интеграла ДС (15.10). Эти первые интегралы легко находятся из следующих двух интегрируемых комбинаций:

$$\frac{dz}{2z} = \frac{d(x-y)}{x-y} \quad \text{и} \quad \frac{dz}{2z} = \frac{d(x+y+2z)}{x+y+2z},$$

которые выписываются на основании свойства ряда равных отношений.

Из первой и второй интегрируемых комбинаций соответственно находим

$$U_1(x, y, z) = \frac{(x-y)^2}{z} \quad \text{и} \quad U_2(x, y, z) = \frac{(x+y+2z)^2}{z}.$$

Таким образом, базисное c -семейство решений ДС (15.10) определяется равенствами:

$$\frac{(x-y)^2}{z} = c_1, \quad \frac{(x+y+2z)^2}{z} = c_2,$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Пример 15.2. Найти в неявном виде базисное c -семейство решений ДС в нормальной форме

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-z}{z-y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{y-x}{z-y}. \quad (15.11)$$

Решение. ДС в симметрической форме, соответствующая ДС (15.11), имеет вид

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\frac{x-z}{z-y}} = \frac{dz}{\frac{y-x}{z-y}}.$$

Умножив все знаменатели полученной системы на $z-y$, придем к системе

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \quad (15.12)$$

В соответствии со свойством ряда равных отношений находим, что

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{d(x+y+z)}{0}.$$

Но в таком случае $d(x+y+z) = 0$ и, значит, $U_1(x, y, z) = x+y+z$ есть первый интеграл ДС (15.11). Чтобы найти другой первый интеграл ДС (15.11), умножим числители и знаменатели отношений (15.12) соответственно на $2x$, $2y$, $2z$ и затем сложим числители и знаменатели полученных отношений. В результате придем к цепочке равенств

$$\frac{2xdx}{2x(z-y)} = \frac{2ydy}{2y(x-z)} = \frac{2zdz}{2z(y-x)} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0}.$$

Следовательно, $U_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ еще один первый интеграл ДС (15.11). Замечая теперь, что интегралы U_1 и U_2 функционально неза-

висимы, приходим к выводу, что базисное c -семейство решений задается в неявном виде совокупностью уравнений:

$$\begin{aligned}x + y + z &= c_1, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= c_2,\end{aligned}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Пример 15.3. Проинтегрировать систему

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}. \quad (15.13)$$

Решение. Запишем ДС в симметрической форме, соответствующую ДС (15.13):

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{dz}{\frac{1}{y-x}}.$$

Отсюда

$$\frac{dx}{1} = \frac{zdy}{z-1} = \frac{(y-x)dz}{1}.$$

С другой стороны, из уравнений (15.13) следует, что

$$z(dy - dx) = -dx, \quad (y-x)dz = dx.$$

Поэтому

$$\frac{z(dy - dx)}{-1} = \frac{dx}{1} = \frac{(y-x)dz}{1}.$$

В таком случае

$$\frac{z(dy - dx)}{-1} = (y-x)dz \quad \text{или} \quad \frac{d(y-x)}{y-x} + \frac{dz}{z} = 0.$$

Интегрируя, находим, что $(y-x)z = c_1$, откуда

$$z = \frac{c_1}{y-x}.$$

Подставив полученное значение z в первое уравнение ДС (15.13), приходим к ДУ

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y-x}{c_1} \quad \text{или к ДУ} \quad \frac{d(y-x)}{y-x} + \frac{dx}{c_1} = 0,$$

интегрируя которое, находим, что

$$(y-x)e^{\frac{x}{c_1}} = c_2.$$

Таким образом, данная ДС имеет базисное c -семейство решений, заданное в неявном виде равенствами

$$(y-x)z = c_1,$$

$$(y-x)e^{\frac{x}{(y-x)z}} = c_2,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

§ 16. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 1-го ПОРЯДКА

Линейным однородным уравнением в частных производных (с частными производными) 1-го порядка относительно неизвестной функции $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется уравнение вида

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \\ + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \end{aligned} \quad (16.1)$$

где $X_i, i = \overline{1, n}$, — заданные функции, непрерывно дифференцируемые в некоторой (выпуклой)¹ области G переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Решением уравнения (16.1) называется непрерывно дифференцируемая в (выпуклой) области $G^* \subset G$ функция $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, обращающая уравнение (16.1) в тождество.

Уравнение (16.1) имеет *очевидные решения* вида $u = \text{const}$. В теории линейных однородных уравнений обычно исследуют непостоянные решения, т. е. неочевидные решения.

График решения — поверхность $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в пространстве $(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ — называется *интегральной поверхностью* уравнения (16.1).

Пусть Ω — достаточно малая окрестность точки $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in G^*$. В дальнейшем будем считать (как и в § 15), что ни в одной точке выбранной окрестности функции $X_i, i = \overline{1, n}$, не обращаются одновременно в нуль.

Теорема 16.1. Любой первый непрерывно дифференцируемый интеграл ДС (15.1) является (неочевидным) решением уравнения (16.1).

Доказательство. Пусть $U = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — первый непрерывно дифференцируемый интеграл ДС (15.1), определенный в окрестности Ω точ-

¹ Множество G называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками $x, y \in G$, этому множеству принадлежит отрезок, соединяющий эти точки.

ки $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$. Тогда полный дифференциал функции U тождественно равен нулю в силу ДС (15.1) или ДС (15.4), т. е.

$$\begin{aligned} dU &\equiv \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n \equiv \\ &\equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{X_2}{X_n} + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} \frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial U}{\partial x_n} \right) dx_n \equiv 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} X_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} X_{n-1} + \frac{\partial U}{\partial x_n} X_n \equiv 0, \quad (16.2)$$

что и доказывает теорему.

Теорема 16.2. Любое (неочевидное) решение уравнения (16.1) является первым непрерывно дифференцируемым интегралом ДС (15.1).

Доказательство. Пусть $u = U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — неочевидное решение уравнения (16.1). Тогда по определению решения имеет место тождество (16.2). Вычисляя полный дифференциал функции U в силу ДС (15.4), имеем

$$\begin{aligned} dU|_{(15.1)} &\equiv \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_n} dx_n \right) \Big|_{(15.4)} = \\ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} \frac{X_1}{X_n} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \frac{X_2}{X_n} + \dots + \frac{\partial U}{\partial x_{n-1}} \frac{X_{n-1}}{X_n} + \frac{\partial U}{\partial x_n} \right) dx_n = \\ &= \left(X_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial U}{\partial x_n} \right) \frac{1}{X_n} dx_n, \end{aligned}$$

откуда, вследствие тождества (16.2), будет иметь место тождество $dU|_{(15.1)} \equiv 0$, т. е. U — первый интеграл ДС (15.1).

Теорема 16.3. В окрестности Ω любой неособой точки системы (15.1) ((15.4)) существуют $n - 1$ функционально независимых первых интегралов $U_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n-1}$, системы (15.1) ((15.4)).

Доказательство. Пусть в точке $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ функции X_i , $i = \overline{1, n}$, одновременно не обращаются в нуль. Предположим для определенности, что $X_n(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \neq 0$. Тогда $X_n \neq 0$ и в окрестности Ω этой точки. Принимая x_n за независимую переменную, перепишем ДС (15.1) в виде (15.4). По теореме Пикара — Линделёфа для указанной начальной точки существует единственное решение ДС (15.4):

$$x_i = \varphi_i(x_n, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n-10}), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (16.3)$$

где по теореме 22.2 функции φ_i непрерывно дифференцируемы. При этом очевидно, что

$$\varphi_i(x_{n0}, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n-10}) = x_{i0}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (16.4)$$

Имея в виду (16.4), приходим к выводу, что при $x_n = x_{n0}$ матрица

$$\left(\frac{\partial \varphi_i(x_n, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n-10})}{\partial x_{j0}} \right), \quad i, j = \overline{1, n-1},$$

оказывается единичной, а значит, ее определитель равен 1. Но в таком случае систему (16.3) можно разрешить относительно x_{i0} в окрестности Ω , т. е. можно получить равенства

$$U_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_{i0}, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (16.5)$$

Покажем, что функции U_i — функционально независимые первые интегралы ДС (15.4).

Действительно, по теореме о неявных функциях функции U_i непрерывно дифференцируемы. Числа $x_{i0}, i = \overline{1, n-1}$, являются одними и теми же для всех точек интегральной кривой, проходящей через точку $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$. Таким образом, функции U_i постоянны вдоль интегральных кривых в Ω и, следовательно, являются первыми интегралами.

Далее при любом фиксированном значении x_n , достаточно близком к x_{n0} , системы функций (16.3) и (16.5) взаимно обратны, а значит, произведение их якобианов $\Delta_1 \Delta_2 = 1$, где

$$\Delta_1 = \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{j0}} \right), \quad \Delta_2 = \det \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right), \quad i, j = \overline{1, n-1}.$$

Отсюда следует, что $\Delta_2 \neq 0$ и, таким образом, ранг матрицы $\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)$ равен $(n-1)$, т. е. первые интегралы $U_i, i = \overline{1, n-1}$, — функционально независимы.

Теорема 16.4. Если функции $U_1(x_1, x_2, \dots, x_n), U_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, U_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — функционально независимые первые интегралы ДС (15.1), то

$$u = \Phi(U_1(x), U_2(x), \dots, U_{n-1}(x)), \quad (16.6)$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, является решением уравнения (16.1).

Доказательство. Подставляя функцию (16.6) в уравнение (16.1) и принимая во внимание, что функции $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ являются решениями уравнения (16.1), имеем следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} & X_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = \\ &= X_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial U_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_1} + X_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial U_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial U_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_n} = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \Phi}{\partial U_i} \left(X_1 \frac{\partial U_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial U_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial U_i}{\partial x_n} \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Полученное тождество и означает, что функция (16.6) — решение уравнения (16.1).

Теорема 16.5. Любое решение уравнения (16.1) определяется формулой (16.6) при соответствующем выборе функции Φ .

Доказательство. Пусть $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольное решение уравнения (16.1), тогда

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} \equiv 0. \quad (16.7)$$

По теореме 16.1 первые интегралы $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ ДС (15.1) являются решениями уравнения (16.1), поэтому и

$$X_1 \frac{\partial U_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial U_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial U_i}{\partial x_n} \equiv 0, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (16.8)$$

Соотношения (16.7) и (16.8) можно рассматривать как однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $X_1, X_2, \dots, X_n$. Так как эта система имеет нетривиальное решение, то

$$\frac{D(u, U_1, U_2, \dots, U_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv 0,$$

а значит, в области Ω функции $u, U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ зависимы, т. е. имеет место равенство

$$F(u, U_1, U_2, \dots, U_{n-1}) = 0. \quad (16.9)$$

Замечая теперь, что первые интегралы $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ ДС (15.1) функционально независимы в Ω , можно считать (с точностью до перенумеровки переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$), что в области Ω выполняется неравенство

$$\frac{D(U_1, U_2, \dots, U_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})} \neq 0.$$

Отсюда следует, что уравнение (16.9) можно разрешить относительно функции u , т. е. из (16.9) можно найти функцию u , определяемую равенством (16.6). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 16.1. Подчеркнем, что в соответствии с теоремой 16.5 задача нахождения всех решений уравнения (16.1) равносильна задаче нахождения базиса первых стационарных интегралов ДС (15.1). Теорема 16.5 является основанием к тому, чтобы *формулу (16.6) называть формулой полного семейства решений (в классе непрерывно дифференцируемых функций) уравнения (16.1) с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами X_i , $i = \overline{1, n}$* . Следует, однако, иметь в виду, что полное семейство решений уравнения (16.1) существует лишь в некоторой окрестности каждой неособой точки.

Обратим внимание также на то, что в отличие от линейного ОДУ полное семейство решений линейного однородного уравнения в частных производных (16.1), описываемое формулой (16.6), содержит не произвольные постоянные, а произвольную функцию.

Задача Коши. В теории линейных уравнений в частных производных обычно рассматривают два типа задач Коши.

Один из вариантов является аналогом задачи Коши для ОДУ и состоит в следующем.

Требуется среди всех решений уравнения (16.1) найти такое решение $u = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$, которое при $x_n = x_{n0}$ удовлетворяет условию $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, т. е.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

где φ — заданная непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n-10})$ функция.

З а м е ч а н и е 16.2. В случае когда искомая функция в уравнении (16.1) зависит только от двух независимых переменных, т. е. когда уравнение (16.1) принимает вид

$$X(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + Y(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (16.10)$$

задача Коши состоит в нахождении решения

$$u = f(x, y) \quad (16.11)$$

такого, что при $x = x_0$

$$u = \varphi(y), \quad (16.12)$$

где φ — заданная непрерывно дифференцируемая функция переменной y .

Геометрически это означает, что среди всех интегральных поверхностей, определяемых уравнением (16.10), ищется интегральная поверхность, определяемая уравнением (16.11), которая проходила бы через заданную кривую, определяемую уравнением (16.12), лежащую в плоскости $x = x_0$, параллельной плоскости uOy .

Возвращаясь к общему случаю, решение задачи Коши будем искать в предположении, что точка $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ не является особой точкой ДС (15.1) и что $X_n(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \neq 0$.

Итак, пусть $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ — базис первых стационарных интегралов ДС (15.1). Тогда, имея в виду формулу (16.6) полного семейства решений уравнения (16.1), искомое решение $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будет построено, если удастся подобрать функцию Φ такую, что

$$\Phi(U_1, U_2, \dots, U_{n-1})|_{x_n = x_{n0}} = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \quad (16.13)$$

Далее рассуждаем следующим образом. Обозначим

$$U_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \tilde{U}_i, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (16.14)$$

При таких обозначениях равенство (16.13) можно переписать в виде

$$\Phi(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_{n-1}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (16.15)$$

а значит, если разрешить систему (16.14) относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, т. е. найти

$$x_i = \omega_i(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_{n-1}), \quad i = \overline{1, n-1},$$

и в качестве функции Φ выбрать функцию, определяемую равенством

$$\begin{aligned} & \Phi(U_1, U_2, \dots, U_{n-1}) = \\ & = \varphi(\omega_1(U_1, U_2, \dots, U_{n-1}), \omega_2(U_1, U_2, \dots, U_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(U_1, U_2, \dots, U_{n-1})), \end{aligned}$$

то условие (16.15) будет выполняться.

Действительно,

$$\begin{aligned} & \Phi(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_{n-1}) = \\ & = \varphi(\omega_1(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_{n-1}), \omega_2(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_{n-1})) = \\ & = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, функция u , заданная равенством

$$u = \varphi(\omega_1(U_1, U_2, \dots, U_{n-1}), \omega_2(U_1, U_2, \dots, U_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(U_1, U_2, \dots, U_{n-1})),$$

есть искомое решение задачи Коши.

Пример 16.1. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\ u = y^2 \text{ при } x = 0. \end{cases} \quad (16.16)$$

Решение. ДС в симметрической форме, соответствующая уравнению (16.16), имеет вид $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$, и ее первый интеграл U определяется равенством $U(x, y) = x^2 + y^2$. А в таком случае система (16.14), которая здесь вырождается в одно уравнение, записывается в виде $U(0, y) \equiv y^2 = \tilde{U}$. Таким образом, в соответствии с указанной выше процедурой искомым решением будет функция u , определяемая равенством $u = x^2 + y^2$.

Обратимся теперь к *общей* или *обобщенной задаче Коши*. Пусть уравнение

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (16.17)$$

определяет в области Ω гладкую $(n - 1)$ -мерную поверхность γ (гиперповерхность γ). Последнее означает, в частности, что функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема и $\text{grad } g(x) \neq 0$ для любой точки $x \in \Omega$.

Далее, пусть на поверхности γ задана некоторая непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Тогда *обобщенная задача Коши* формулируется следующим образом: требуется среди всех решений уравнения (16.1) найти такое решение $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, которое при $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \gamma$ удовлетворяет условию

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (16.18)$$

В случае уравнения (16.10) обобщенная задача Коши имеет следующую геометрическую интерпретацию. Уравнение (16.17) определяет в области Ω плоскости xOy гладкую кривую γ , а условие (16.18) определяет в трехмерном пространстве (x, y, u) пространственную гладкую кривую Γ . Отсюда обобщенная задача Коши означает нахождение такой интегральной поверхности уравнения (16.10), которая проходила бы через заданную кривую Γ , чьей проекцией на плоскости xOy является кривая γ (рис. 26).

Не останавливаясь на вопросах разрешимости обобщенной задачи Коши, отметим лишь, что решение конкретной задачи Коши может и не существовать, но может быть и неединственным.

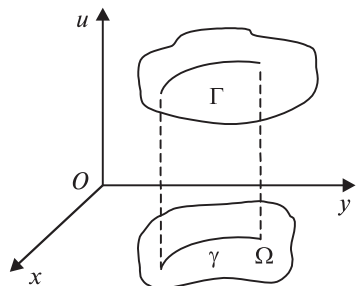


Рис. 26. Обобщенная задача Коши

В заключение параграфа отметим, что автономная ДС (15.5) (равносильная ДС в симметрической форме (15.1)) называется *характеристической системой* уравнения в частных производных (16.1), а ее траектории называются *характеристиками* уравнения (16.1).

Связь между характеристиками и интегральными поверхностями уравнения (16.1) особенно проста в случае

двух независимых переменных x, y (см. уравнение (16.10)): *пересечение плоскости $u = \text{const}$ с интегральной поверхностью $u = u(x, y)$ является характеристикой*, что следует из определения первого интеграла ДС (15.5).

§ 17. ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ 1-го ПОРЯДКА

Линейным неоднородным (квазилинейным) уравнением в частных производных 1-го порядка называется уравнение вида

$$X_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \\ + X_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \quad (17.1)$$

где $X_i, i = \overline{1, n}$, R — заданные функции, а u — неизвестная функция n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

К линейным неоднородным уравнениям в частных производных относят также и уравнения вида (17.1), у которых $R \equiv 0$, но хотя бы одна из функций $X_i, i = \overline{1, n}$, зависит явно от u .

В дальнейшем относительно функций $X_i, i = \overline{1, n}$, и R будем предполагать, что они непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности заданной точки $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0)$, причем

$$X_n(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0) \neq 0. \quad (17.2)$$

Решение неоднородного уравнения (17.1) определяется точно так же, как и в случае линейного однородного уравнения (16.1).

Покажем, что нахождение решений уравнения (17.1) можно свести к нахождению решений линейного однородного уравнения

$$\sum_{i=1}^n X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_i} + R(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial u} = 0, \quad (17.3)$$

если неизвестную функцию $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (решение уравнения (17.1)) искать в неявном виде

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0. \quad (17.4)$$

Будем искать непрерывно дифференцируемую функцию $V(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ такую, что если функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — решение уравнения (17.1), то

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u(x_1, x_2, \dots, x_n)) \equiv 0. \quad (17.5)$$

Уравнение (17.3) относительно неизвестной функции V строится следующим образом. Продифференцируем соотношение (17.4) по независимой переменной $x_k, k = \overline{1, n}$, которая входит в уравнение (17.4) явно и неявно через u . В результате получим равенства

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = - \frac{\frac{\partial V}{\partial x_k}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (17.6)$$

Подставляя найденные выражения для $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ из (17.6) в уравнение (17.1), мы и приходим к указанному выше линейному однородному уравнению (17.3) в частных производных 1-го порядка относительно функции V .

Таким образом, если потребовать, чтобы функция V удовлетворяла уравнению (17.3) тождественно по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n, u$, то задача нахождения решений линейного неоднородного уравнения (17.1) сведется к нахождению решений линейного однородного уравнения (17.3).

Следует, однако, иметь в виду, что при нахождении решения $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ уравнения (17.1) в неявном виде (17.4) мы требуем несколько меньше, а именно, чтобы равенство (17.4) обращалось в тождество (17.5) лишь по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$ (вместо переменной u в (17.4) подставлено $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$).

В связи с этим мы не можем утверждать, что, решив линейное однородное уравнение (17.3), найдем в неявном виде (17.4) все решения исходного уравнения (17.1).

Тем не менее можно указать условия, при выполнении которых, решив уравнение (17.3), можно найти в неявном виде все решения уравнения (17.1).

Но прежде, чем указать эти условия, заметим, что, как и в случае уравнения (16.1), с уравнением (17.1) также связывают так называемую характеристическую систему. *Характеристической системой уравнения (17.1)* называют автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u), & i = \overline{1, n}, \\ \dot{u} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \end{cases} \quad (17.7)$$

(равносильную ДС в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{X_1(x, u)} = \frac{dx_2}{X_2(x, u)} = \dots = \frac{dx_n}{X_n(x, u)} = \frac{du}{R(x, u)}.$$

Траектории системы (17.7) называют *характеристиками* уравнения (17.1).

З а м е ч а н и е 17.1. В отличие от линейного однородного уравнения (16.1) в случае линейного неоднородного уравнения (17.1) характеристики лежат не в пространстве переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, а в пространстве переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, u$, и поэтому их геометрический смысл здесь иной. Можно показать, что если интегральная поверхность $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ уравнения (17.1) содержит точку $M(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0)$, то эта поверхность содержит и характеристику, проходящую через точку M .

Другими словами, любая интегральная поверхность уравнения (17.1) целиком состоит из его характеристик.

Вернемся к вопросу о нахождении решений уравнения (17.1).

Лемма 17.1. Если имеет место неравенство (17.2) и функции $U_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n-1}$, являются в области D функционально независимыми первыми стационарными интегралами автономной системы (15.5), то эта система сводится к неавтономной системе (15.4), для которой те же функции $U_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, n-1}$, будут функционально независимыми первыми нестационарными интегралами.

Доказательство. То, что ДС (15.5) сводится к ДС (15.4), следует из § 15. А далее рассуждаем так. Поскольку функции U_i — первые интегралы системы (15.5), то они постоянны вдоль траекторий системы (15.5) или интегральных кривых системы (15.4). В соответствии с аналитическим критерием первого интеграла (теорема 12.1) первые интегралы системы (15.5) удовлетворяют системе

$$X_1(x) \frac{\partial U_i}{\partial x_1} + X_2(x) \frac{\partial U_i}{\partial x_2} + \dots + X_n(x) \frac{\partial U_i}{\partial x_n} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (17.8)$$

Те же первые интегралы системы (15.4) удовлетворяют системе

$$\frac{X_1(x)}{X_n(x)} \frac{\partial U_i}{\partial x_1} + \frac{X_2(x)}{X_n(x)} \frac{\partial U_i}{\partial x_2} + \dots + \frac{X_{n-1}(x)}{X_n(x)} \frac{\partial U_i}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial U_i}{\partial x_n} = 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial U_1}{\partial x_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial U_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial U_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial U_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Первые интегралы U_i , $i = \overline{1, n-1}$, системы (15.4) функционально независимы, если ранг матрицы A равен $n-1$. Что же касается тех же первых интегралов, но уже системы (15.5), то поскольку $X_n \neq 0$ в области D , то на основании формулы (17.8) последний столбец в матрице A_1 будет линейной комбинацией столбцов матрицы A , а значит, ранги матриц A и A_1 совпадают, поэтому из функциональной независимости первых интегралов U_i , $i = \overline{1, n-1}$, системы (15.5) следует их функциональная независимость и для системы (15.4).

Лемма 17.2. Если $U(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ — непрерывно дифференцируемый первый стационарный интеграл характеристической системы (17.7), определенный в окрестности D точки $M(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0)$, причем

$$U(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0) = c, \quad \frac{\partial U(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0)}{\partial u} \neq 0,$$

то в области D равенство $U(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = c$ определяет неявную функцию $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, являющуюся решением уравнения (17.1).

Доказательство. По теореме 12.1 в области D справедливо тождество

$$\begin{aligned} \left. \frac{dU}{dt} \right|_{(17.7)} &= X_1(x, u) \frac{\partial U}{\partial x_1} + X_2(x, u) \frac{\partial U}{\partial x_2} + \dots + X_n(x, u) \frac{\partial U}{\partial x_n} + \\ &+ R(x, u) \frac{\partial U}{\partial u} \equiv 0. \end{aligned} \quad (17.9)$$

С другой стороны, для неявной функции $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в области D справедливы равенства (см. (17.6))

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = - \frac{\frac{\partial U}{\partial x_k}}{\frac{\partial U}{\partial u}}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Но в таком случае, разделив тождество (17.9) на $-\frac{\partial U}{\partial u}$, получим, что

$$X_1(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + X_n(x, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} \equiv R(x, u),$$

т. е. функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ действительно является решением уравнения (17.1).

Теорема 17.1. Пусть функции $U_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$, $i = \overline{1, n}$, — функционально независимые первые стационарные интегралы характеристической системы (17.7). Тогда чтобы функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ была в окрестности точки $M(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u_0)$ своего графика решением уравнения (17.1), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла равенству

$$\Phi(U_1(x, u), U_2(x, u), \dots, U_n(x, u)) = 0, \quad (17.10)$$

где Φ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что

$$\begin{aligned} \Phi(U_1(M), U_2(M), \dots, U_n(M)) &= 0, \\ \frac{\partial \Phi(U_1(M), U_2(M), \dots, U_n(M))}{\partial u} &\neq 0. \end{aligned} \quad (17.11)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в окрестности точки M своего графика является произвольным решением уравнения (17.1). Покажем, что это решение определяется формулой (17.10) при соответствующем выборе функции Φ .

Действительно, поскольку имеет место неравенство (17.2), то в окрестности точки M характеристики уравнения (17.1) удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dx_n} = \frac{X_i(x_n, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u)}{X_n(x_n, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u)}, & i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{du}{dx_n} = \frac{R(x_n, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u)}{X_n(x_n, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u)}, \end{cases} \quad (17.12)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \eta), & i = \overline{1, n-1}, \\ u &= \varphi_n(x_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \eta) — \end{aligned} \quad (17.13)$$

решение системы (17.12), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} x_i(x_{n0}) &= \xi_i, & i = \overline{1, n-1}, \\ u(x_{n0}) &= u(x_{n0}, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) + \eta. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Если положить в (17.13) $x_n = x_{n0}$, $\xi_i = x_{i0}$, $i = \overline{1, n-1}$, $\eta = 0$, то получим точку M . В этой точке якобиан

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \eta)} = 1 \quad \text{в силу (17.14).}$$

Но в таком случае по теореме о неявных функциях систему (17.13) можно разрешить в некоторой окрестности точки M относительно $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \eta$, т. е. можно найти

$$\xi_i = \omega_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \eta = \omega_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \quad (17.15)$$

Функции $\omega_j, j = \overline{1, n}$, — первые интегралы системы (17.12) (это доказывается по аналогии с доказательством теоремы 16.3). При этом поверхность, заданная уравнением $\omega_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$, совпадает с данной поверхностью, уравнение которой $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, поскольку они обе состоят из характеристик — решений системы (17.2) с начальными условиями (17.14), где $\eta = 0$.

По теореме 12.3 найдется непрерывно дифференцируемая функция Φ такая, что

$$\omega_n = \Phi(U_1, U_2, \dots, U_n),$$

где $U_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u), i = \overline{1, n}$, — функционально независимые первые интегралы системы (17.12) ((17.7)). Покажем, что $\partial \omega_n / \partial u \neq 0$ в точке M . В самом деле, в точке M имеем $x_i = x_{i0}, i = \overline{1, n}$, а тогда в силу равенств (17.15) и (17.14) получаем, что

$$\omega_n(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, u) = \eta = u - u(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}),$$

откуда следует, что в точке M производная $\partial \omega_n / \partial u = 1 \neq 0$. Последнее означает, что функция u определяется формулой (17.10).

Достаточность. Любая непрерывно дифференцируемая функция Φ , фигурирующая в левой части соотношения (17.10), постоянна вдоль траекторий системы (17.7) ($U_i, i = \overline{1, n}$, — первые интегралы системы (17.7)) и, значит, является первым интегралом системы (17.7). При выполнении неравенства (17.11) равенство (17.10) определяет в окрестности точки M неявную функцию $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, являющуюся в соответствии с леммой 17.2 решением уравнения (17.1).

З а м е ч а н и е 17.2. Если переменная u входит только в один из первых интегралов $U_i, i = \overline{1, n}$, например в U_n , то соотношение (17.10) можно переписать в виде

$$U_n(x, u) = H(U_1(x), U_2(x), \dots, U_{n-1}(x)), \quad (17.16)$$

где H — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Если уравнение (17.16) можно разрешить относительно u , то тем самым будет получено явное представление решений уравнения (17.1).

З а м е ч а н и е 17.3. Формулу (17.10) называют формулой полного семейства решений уравнения (17.1) в неявном виде.

Пример 17.1. Найти полное семейство решений уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y + u.$$

Решение. Составляем ДС в симметрической форме

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y} = \frac{du}{x^2 y + u}.$$

Решая уравнение $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2y}$, находим, что $\frac{y}{x^2} = c_1$ и, значит, $U_1(x, y) = y/x^2$ — первый интеграл характеристической системы. Подставляя тогда $y = c_1 x^2$ в уравнение $\frac{dx}{x} = \frac{du}{x^2 y + u}$, получим линейное относительно u уравнение $u' - \frac{1}{x}u = c_1 x^3$, решая которое, имеем: $\frac{u}{x} - \frac{xy}{3} = c_2$, а значит, $U_2(x, y, u) = \frac{3u}{x} - xy$ — первый интеграл характеристической системы.

Таким образом, полное семейство решений исходного уравнения определяется в неявном виде формулой

$$\Phi(y/x^2, 3u/x - xy) = 0,$$

где Φ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Пример 17.2. Найти полное семейство решений уравнения

$$(1 + \sqrt{u - x - y}) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2.$$

Решение. В соответствии с алгоритмом составляем ДС в симметрической форме:

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{u - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{2}.$$

Один из первых интегралов здесь очевиден: $U_1(y, u) = u - 2y$. Другой первый интеграл находится из интегрируемой комбинации

$$\frac{d(u - x - y)}{\sqrt{u - x - y}} = \frac{dy}{1}: U_2(x, y, u) = y + 2\sqrt{u - x - y}.$$

В данном примере формула

$$\Phi(u - 2y, y + 2\sqrt{u - x - y}) = 0 \quad (17.17)$$

не определяет все решения исходного уравнения.

Действительно, последняя формула не содержит решение $u = x + y$ (в связи с чем его называют специальным решением), и объясняется это

тем, что коэффициент при du/dx в уравнении не является функцией непрерывно дифференцируемой в точках специального решения, а значит, данное уравнение не удовлетворяет всем тем условиям, при которых исследовалось линейное неоднородное уравнение (17.1).

Обратим внимание на то, что хотя специальное решение и не обращает функцию Φ в (17.17) в тождество по x и y , оно задает функцию $V(x, y, u) = u - x - y$, которая определяет в неявном виде $V(x, y, u) = 0$ решение линейного однородного уравнения (уравнения (17.3))

$$(1 + \sqrt{u - x - y}) \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + 2 \frac{\partial V}{\partial u} = 0.$$

Задача Коши. Как и в случае линейных однородных уравнений в частных производных 1-го порядка, так и для линейных неоднородных уравнений также рассматривают два типа задачи Коши.

Рассмотрим сначала вариант, являющийся аналогом задачи Коши для ОДУ. В этом случае задача ставится так же, как и для однородного уравнения (16.1): требуется среди всех решений уравнения (17.1) найти такое решение $u = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$, которое при $x_n = x_{n0}$ удовлетворяет условию $u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, т. е.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

где φ — заданная непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n-10})$ функция.

Покажем, как найти решение задачи Коши, если известно полное семейство решений уравнения (17.1), определяемое формулой (17.10).

В данном случае, как и в случае однородного уравнения, процесс нахождения решений сводится к определению вида функции Φ . Переписывая начальные условия в виде

$$u - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = 0 \quad \text{при} \quad x_n = x_{n0}$$

и сравнивая эти условия с уравнением (17.10), приходим к выводу, что функцию Φ следует выбрать так, чтобы

$$\Phi(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_n) = u - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (17.18)$$

где под $\tilde{U}_i, i = \overline{1, n}$, понимаются функции, получающиеся из функционально независимых первых интегралов системы (17.7) заменой x_n начальным значением x_{n0} , т. е.

$$U_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = \tilde{U}_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (17.19)$$

Разрешая систему (17.19) относительно $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u$, получаем

$$x_j = \omega_j(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_n), \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$u = \omega(\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_n).$$

Если теперь в качестве функции Φ выбрать

$$\begin{aligned} \Phi(U_1, U_2, \dots, U_n) = & \omega(U_1, U_2, \dots, U_n) - \\ & - \phi(\omega_1(U_1, U_2, \dots, U_n), \omega_2(U_1, U_2, \dots, U_n), \dots, \omega_{n-1}(U_1, U_2, \dots, U_n)), \end{aligned}$$

то условие (17.18) будет, очевидно, выполняться.

Следовательно, формула

$$\begin{aligned} \omega(U_1, U_2, \dots, U_n) - \phi(\omega_1(U_1, U_2, \dots, U_n), \omega_2(U_1, U_2, \dots, U_n), \dots, \\ \omega_{n-1}(U_1, U_2, \dots, U_n)) = 0 \end{aligned} \quad (17.20)$$

определяет искомое решение задачи Коши в неявном виде.

Разрешив равенство (17.20) относительно переменной u , получим решение задачи Коши в явном виде.

Пример 17.3. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2, \\ u = x^2 \text{ при } y = 1. \end{cases}$$

Решение. Записываем ДС в симметрической форме:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{du}{x^2 + y^2}.$$

Из уравнения $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y}$ находим первый интеграл $U_1(x, y) = x^2 y$ характеристической системы. Другой первый интеграл находится из ряда равных отношений

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{du}{x^2 + y^2} = \frac{d(2x^2 - y^2 - 4u)}{0}.$$

Это

$$U_2(x, y, u) = 2x^2 - y^2 - 4u.$$

Далее составляем систему

$$\begin{cases} x^2 = \tilde{U}_1, \\ 2x^2 - 1 - 4u = \tilde{U}_2, \end{cases}$$

откуда $u = \frac{1}{4}(2\tilde{U}_1 - 1 - \tilde{U}_2)$ и, таким образом, решение задачи Коши определяется из соотношения $\frac{1}{4}(2U_1 - 1 - U_2) = U_1$, если вместо U_1 и U_2

подставить полученные выше их значения. В результате подстановки приходим к соотношению

$$2x^2y + 2x^2 - y^2 - 4u + 1 = 0,$$

откуда решение задачи Коши в явном виде определяется равенством

$$u = \frac{1}{4}(2x^2y + 2x^2 - y^2 + 1).$$

В заключение параграфа отметим, что как в случае линейных однородных уравнений в частных производных, так и в случае линейных неоднородных уравнений также рассматривают общую или обобщенную задачу Коши, не останавливаясь на вопросах разрешимости которой, заметим лишь, что она формулируется точно так же, как и в случае линейных однородных уравнений.

§ 18. ОЦЕНКА РАСХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЙ

Лемма 18.1 (лемма Гронволла¹). Пусть задано непрерывное отображение $U : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что для $t \geq t_0$ имеет место интегральное неравенство

$$0 \leq U(t) \leq \delta + \int_{t_0}^t (\eta + LU(\tau)) d\tau, \quad (18.1)$$

где δ, η, L — постоянные такие, что $\delta \geq 0, \eta \geq 0, L > 0$. Тогда имеет место экспоненциальное неравенство

$$U(t) \leq \delta e^{L(t-t_0)} + \frac{\eta}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1). \quad (18.2)$$

Доказательство. Обозначим правую часть интегрального неравенства (18.1) через $\mathbb{V}(t)$, т. е. положим

$$\mathbb{V}(t) = \delta + \int_{t_0}^t (\eta + LU(\tau)) d\tau. \quad (18.3)$$

Дифференцируя соотношение (18.3) по t , получим, что

$$\dot{\mathbb{V}}(t) = \eta + LU(t) \leq \eta + L\mathbb{V}(t),$$

т. е.

$$\dot{\mathbb{V}}(t) - L\mathbb{V}(t) \leq \eta. \quad (18.4)$$

¹ Гронволл Томас (Gronwall T., 1877—1932), американский математик.

Умножая левую и правую части неравенства (18.4) на $e^{-L(t-t_0)}$, получим, что

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{V}(t)e^{-L(t-t_0)}) \leq \eta e^{-L(t-t_0)}.$$

А тогда, интегрируя последнее неравенство в пределах от t_0 до t и учитывая, что $\mathbb{V}(t_0) = \delta$, придем к неравенству

$$\mathbb{V}(t) \leq \delta e^{L(t-t_0)} + \frac{\eta}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1),$$

которое с учетом того, что $U(t) \leq \mathbb{V}(t)$, и дает неравенство (18.2).

Рассмотрим теперь две начальные задачи

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (18.5)$$

и

$$\dot{y} = f(t, y) + g(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (18.6)$$

где отображения f и g непрерывны в некоторой области $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и принимают значения в $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что в области D при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ выполняется неравенство

$$\|g(t, y)\| \leq \eta. \quad (18.7)$$

Пусть далее $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $I \supset [t_0, t_0 + T]$, — решения начальных задач (18.5) и (18.6) соответственно такие, что

$$\|y_0 - x_0\| \leq \delta. \quad (18.8)$$

Пусть, наконец, в параллелепипеде $G \subset D$ отображение f удовлетворяет условию Липшица относительно второй векторной переменной, т. е.

$$\|f(t, y) - f(t, x)\| \leq L\|y - x\|. \quad (18.9)$$

Теорема 18.1 (теорема об оценке расхождения решений). Если выполняются условия (18.7)–(18.9), то при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ для решений начальных задач (18.5) и (18.6) имеет место оценка

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \delta e^{L(t-t_0)} + \frac{\eta}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1). \quad (18.10)$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы Пикара — Линделёфа, рассмотрим вместо исходных начальных задач равносильные им интегральные уравнения

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$$

и

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t (f(\tau, y(\tau)) + g(\tau, y(\tau))) d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|y(t) - x(t)\| &\leq \|y_0 - x_0\| + \\ &+ \int_{t_0}^t (\|f(\tau, y(\tau)) - f(\tau, x(\tau))\| + \|g(\tau, y(\tau))\|) d\tau \end{aligned}$$

или, используя условия (18.7)—(18.9),

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \delta + \int_{t_0}^t (\eta + L\|y(\tau) - x(\tau)\|) d\tau.$$

Завершает доказательство теоремы ссылка на лемму Гронволла.

§ 19. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Решение ДУ (1.1) можно рассматривать не только как функцию времени t , но и как функцию координат точки, через которую проходит график решения. Так, например, скалярное ОДУ 1-го порядка

$$\dot{x} = x$$

имеет решение, заданное равенством $x(t) = x_0 e^{t-t_0}$, такое, что соответствующая интегральная кривая проходит через точку (t_0, x_0) . Последнее условие определяет x как функцию переменных t, t_0, x_0 , что аналитически подчеркивается записью

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 e^{t-t_0}.$$

Знание же о том, каким образом решение ОДУ зависит от совокупности переменных t, t_0, x_0 , имеет важное значение не только для теории, но и для приложений. Дело в том, что решая практические задачи, при построении математической модели начальные данные обычно находятся в результате тех или иных измерений, а поскольку любое измерение не может быть проведено с абсолютной точностью, то и возникает задача о том, насколько малые погрешности в измерении начальных данных влияют на поведение решений.

Определение 19.1. Решение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ начальной задачи (18.5) непрерывно зависит от начальных данных t_0, x_0 на промежутке $[t_0, t_0 + h] \subset I$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, h) > 0$ такое, что для решения $\psi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ любой другой начальной задачи $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0^*) = x_0^*$ из неравенств $|t_0^* - t_0| < \delta$, $\|x_0^* - x_0\| < \delta$ следует $\forall t \in [t_0, t_0 + h]$ неравенство $\|\psi(t, t_0^*, x_0^*) - \varphi(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$.

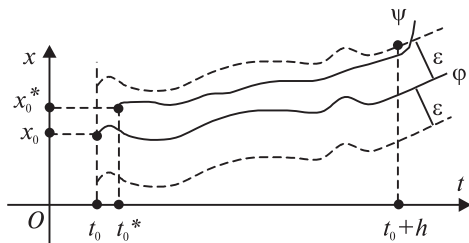


Рис. 27. К определению 19.1

Иными словами, решение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ начальной задачи (18.5) непрерывно зависит от начальных данных t_0, x_0 на промежутке $[t_0, t_0 + h]$, если малому изменению начальных данных соответствует на промежутке $[t_0, t_0 + h]$ малое изменение решения (рис. 27).

Иногда такое свойство называют интегральной непрерывностью или устойчивостью на конечном промежутке изменения времени.

Отметим также, что с увеличением h число $\delta(\epsilon, h)$, вообще говоря, уменьшается и при $h \rightarrow +\infty$ оно может стремиться к нулю. Другими словами, не всегда решения, близкие по начальным данным, остаются близкими при сколь угодно больших значениях аргумента t .

Теорема 19.1. Если начальная задача (18.5) удовлетворяет условиям теоремы Пикара — Линделёфа, то ее решение непрерывно зависит не только от времени t , но и от начальных данных t_0, x_0 .

Доказательство. Полагая в неравенстве (18.10) $\eta = 0$, получим оценку расхождения между решениями одного и того же уравнения, но с разными начальными данными. Эта оценка примет вид

$$\|\psi(t, t_0^*, x_0^*) - \varphi(t, t_0, x_0)\| \leq \delta e^{L(t-t_0)}. \quad (19.1)$$

Из неравенства (19.1) следует, что если по заданному $\epsilon > 0$ выбрать $\delta < \epsilon e^{-Lh}$, то для любого $t \in [t_0, t_0 + h]$ будет выполняться неравенство

$$\|\psi(t, t_0^*, x_0^*) - \varphi(t, t_0, x_0)\| < \epsilon,$$

а это и доказывает теорему.

Пример 19.1. Рассмотрим скалярную начальную задачу

$$\dot{x} = 1, \quad x(t_0) = x_0.$$

Решение этой начальной задачи определяется равенством

$$\varphi(t, t_0, x_0) = t - t_0 + x_0.$$

Чтобы выяснить вопрос о непрерывной зависимости решения φ от начальных данных t_0, x_0 , рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \left| \psi(t, t_0^*, x_0^*) - \varphi(t, t_0, x_0) \right| &= |t - t_0^* + x_0^* - t + t_0 - x_0| \leq \\ &\leq |t_0^* - t_0| + |x_0^* - x_0|. \end{aligned}$$

Мы видим, что если по заданному $\varepsilon > 0$ выбрать $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, то для любого $t \in [t_0, +\infty]$ будет выполняться неравенство

$$\left| \psi(t, t_0^*, x_0^*) - \varphi(t, t_0, x_0) \right| < \varepsilon,$$

что и означает непрерывную зависимость решения φ от начальных данных на промежутке $[t_0, +\infty]$.

§ 20. НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ ПАРАМЕТРА

Постановка задачи здесь следующая. Если правая часть ДУ зависит не только от t и x , но еще и от какого-то параметра, то возникает вопрос: как этот параметр влияет на поведение решений?

Дело в том, что параметры, входящие в правые части дифференциальных уравнений (дифференциальных моделей) характеризуют физическую природу изучаемой системы. Такими параметрами могут быть, например, массы, заряды, упругость и т. д. Эти параметры, как и начальные данные, не могут быть измерены абсолютно точно, и поэтому здесь также возникает вопрос о том, как малое изменение параметров влияет на поведение решений.

Переходя к строгим формулировкам, рассмотрим начальную задачу (а точнее, семейство начальных задач)

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0) = x_0, \quad (20.1)$$

где отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ параллелепипеда D из прямого произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ непрерывно в D и удовлетворяет по x условию Липшица

$$\|f(t, y, \mu) - f(t, x, \mu)\| \leq L\|y - x\|$$

с постоянной $L > 0$, не зависящей от числового параметра μ .

Тогда из теоремы Пикара — Линделёфа следует, что при некотором фиксированном $\mu = \mu^*$ из области $Q \subset \mathbb{R}^m$ начальная задача

$$\dot{x} = f(t, x, \mu^*), \quad x(t_0) = x_0$$

имеет единственное решение $\varphi(t, \mu^*)$, определенное на некотором промежутке I_{μ^*} .

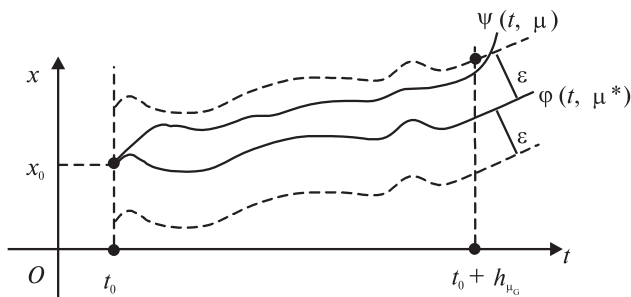


Рис. 28. К определению 20.1

Обозначим через $I_{\mu_G} \subset I_{\mu^*}$ промежуток $[t_0, t_0 + h_{\mu_G}]$, на котором определены решения семейства начальных задач (20.1) для всех $\mu \in G \subset Q$.

Определение 20.1. Решение $\varphi(t, \mu^*)$ начальной задачи (20.1) непрерывно зависит от параметра μ на промежутке I_{μ_G} , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \sigma(\varepsilon, h_{\mu_G}) > 0$ такое, что $\forall \mu \in G$ и удовлетворяющего условию $\|\mu - \mu^*\| < \sigma$, для любого другого решения $\psi(t, \mu)$ семейства начальных задач (20.1) следует $\forall t \in [t_0, t_0 + h_{\mu_G}]$ неравенство (рис. 28)

$$\|\psi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)\| < \varepsilon.$$

Теорема 20.1. Решение $\varphi(t, \mu^*)$ начальной задачи (20.1) непрерывно зависит на промежутке I_{μ_G} не только от времени t , но и от параметра μ .

Доказательство. Полагая в неравенстве (18.10) $\delta = 0$, получим оценку расхождения между решениями различных ДУ с одними и теми же начальными данными (это случай так называемых постоянно действующих возмущений). В этом случае оценка принимает вид

$$\|\psi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)\| \leq \frac{\eta}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1).$$

Тогда если по заданному $\varepsilon > 0$ выбрать $\eta < \varepsilon \frac{L}{e^{Lh_{\mu_G}} - 1}$, то для любого $t \in I_{\mu_G}$ будет выполняться неравенство

$$\|\psi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)\| < \varepsilon.$$

Замечая теперь, что, по предположению, функция $f(t, x, \mu)$ непрерывно зависит от параметра μ , из полученных оценок и следует непрерывная зависимость решения $\varphi(t, \mu^*)$ начальной задачи (20.1) от параметра μ .

§ 21. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ. ЛЕММА АДАМАРА

Рассмотрим ДУ

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (21.1)$$

Теорема 21.1. Если отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ области $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ имеет непрерывные производные по обеим переменным до порядка $p \geq 1$ включительно, то любое решение уравнения (21.1) имеет непрерывные производные до порядка $p+1$ включительно.

Доказательство проведем для случая скалярного ДУ. В общем случае доказательство аналогично. Итак, пусть $p=1$. Тогда произвольное решение $\varphi(t)$ уравнения (21.1) непрерывно дифференцируемо и

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \equiv f(t, \varphi(t)). \quad (21.2)$$

Так как функция $f(t, x)$ непрерывно дифференцируема по совокупности переменных, то функция $f(t, \varphi(t))$, как функция одной переменной, непрерывно дифференцируема (по теореме о дифференцируемости сложной функции).

Таким образом, правая часть тождества (21.2) непрерывно дифференцируема, а значит, существует непрерывная производная $d^2\varphi/dt^2$.

Пусть $p=2$. Продифференцировав тождество (21.2) по t , получим тождество

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \equiv \frac{\partial f(t, \varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial f(t, \varphi(t))}{\partial \varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

Применив к этому соотношению те же рассуждения, что и выше, приходим к выводу, что существует непрерывная производная $d^3\varphi/dt^3$.

Продолжая этот процесс необходимое количество шагов, мы убедимся в справедливости теоремы.

Лемма 21.1. Если отображение $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ открытого выпуклого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в G и если точки $x, y \in G$, то

$$g(y) - g(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g(z(t_0))}{\partial z_k} (y_k - x_k), \quad (21.3)$$

где $z(t) = x + t(y - x)$, $0 \leq t \leq 1$, — точка отрезка I , соединяющего точки x и y .

Доказательство. Функция $g(x)$, рассматриваемая на отрезке I , является функцией одной переменной t , т. е. $g(z(t)) = \tilde{g}(t)$, $0 \leq t \leq 1$. По формуле конечных приращений Лагранжа¹

$$\tilde{g}(1) - \tilde{g}(0) = \tilde{g}'(t_0), \quad 0 < t_0 < 1. \quad (21.4)$$

Замечая теперь, что $\tilde{g}(0) = g(x)$, $\tilde{g}(1) = g(y)$, а

$$\frac{d}{dt}(g(z(t))) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g(z(t))}{\partial z_k} (y_k - x_k), \quad (21.5)$$

то на основании (21.4) и получаем (21.3).

Приведем и другую формулировку и иное доказательство леммы 21.1.

Лемма 21.2. Если отображение $g: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ открытого выпуклого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в G и если точки $x, y \in G$, то

$$g(y) - g(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x, y)(y_k - x_k), \quad (21.6)$$

где функции φ_k непрерывны по совокупности переменных.

Доказательство. На основании равенства (21.5) получаем, что

$$\begin{aligned} g(y) - g(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}(g(z(t))) dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial g(z(t))}{\partial z_k} (y_k - x_k) dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial g(z(t))}{\partial z_k} dt \right) (y_k - x_k) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x, y)(y_k - x_k), \end{aligned}$$

где

$$\varphi_k(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial g(z(t))}{\partial z_k} dt. \quad (21.7)$$

Из представления функций φ_k в виде (21.7) и следует, что эти функции непрерывны по совокупности переменных.

Теорема 21.2. Если отображение $g: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ замкнутого ограниченно-выпуклого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в G , то для любых точек $x, y \in G$ имеет место неравенство

$$\|g(y) - g(x)\| \leq nK \|y - x\|,$$

¹ Формула конечных приращений Лагранжа: если функция $g(x)$ одной переменной непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема внутри него, то найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $g(b) - g(a) = g'(\xi)(b - a)$.

где

$$K = \max_{1 \leq i, j \leq n} \max_{x \in G} \left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right|. \quad (21.8)$$

Доказательство. Применяя формулу (21.3) к компоненте $g_i(x)$ в (21.8) и замечая, что $|y_j - x_j| \leq \|y - x\|$, где $\|x\| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |g_i(y) - g_i(x)| &\leq \sum_{j=1}^n |y_j - x_j| \left| \frac{\partial g_i(\xi^i)}{\partial x_j} \right| \leq \\ &\leq K \sum_{j=1}^n |y_j - x_j| \leq nK \|y - x\|, \end{aligned}$$

где K определяется формулой (21.8). Из полученной оценки и определения нормы вектора и следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 21.1. Теорема 21.2 позволяет получить многомерный аналог формулы конечных приращений Лагранжа. Именно, если отображение $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ замкнутого ограниченного выпуклого множества $G \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо в G , то для любых точек $x, y \in G$ справедлива формула

$$g(y) - g(x) = \Phi(x, y)(y - x),$$

где $\Phi(x, y)$ — непрерывная по совокупности переменных $(n \times n)$ -матрица с элементами $\Phi_{ij}(x, y) = \frac{\partial g_i(\xi^i)}{\partial x_j}$, точки ξ^i которых лежат на отрезке, соединяющем точки x и y .

Теорема 21.3 (лемма Адамара¹). Если отображение $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ выпуклой по переменной x области $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ изменения переменных x, z имеет в D непрерывные производные до порядка $p \geq 1$ включительно, то существуют функции $\varphi_k(x, y, z)$, $y \in \mathbb{R}^n$, имеющие непрерывные производные по x, y, z до порядка $p - 1$ включительно, такие, что

$$F(y, z) - F(x, z) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x, y, z)(y_k - x_k).$$

Доказательство. Справедливость утверждения следует из равенств (21.6) и (21.7) с функцией

$$\varphi_k(x, y, z) = \int_0^1 F_k(x + t(y - x), z) dt,$$

где F_k — производная отображения F по переменной $x_k + t(y_k - x_k)$.

¹ Адамар Жак Соломон (Hadamard J. S., 1865—1963), французский математик.

§ 22. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ПО ПАРАМЕТРАМ И НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Рассмотрим семейство начальных задач

$$\dot{x} = f(t, x, \mu), \quad x(t_0, \mu) = x_0, \quad (22.1)$$

где μ — параметр.

Теорема 22.1. Если отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ области D прямого произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ имеет по переменным t, x, μ непрерывные производные до порядка $p \geq 1$ включительно, то решения $x(t, \mu)$ начальных задач (22.1) имеют p непрерывных производных не только по времени t , но и по параметру μ .

Доказательство проведем для случая $n = m = 1$. В общем случае доказательство аналогично. Итак, пусть сначала $p = 1$, а функции $x = \varphi(t, \mu)$ — решения скалярных начальных задач вида (22.1). Тогда функции $x = \varphi(t, \mu + \Delta\mu)$ — решения начальных задач

$$\dot{x} = f(t, x, \mu + \Delta\mu), \quad x(t_0, \mu) = x_0,$$

а значит, разность

$$\varphi(t, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t, \mu) = \Delta\varphi$$

удовлетворяет ДУ

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt} = f(t, \varphi(t, \mu + \Delta\mu), \mu + \Delta\mu) - f(t, \varphi(t, \mu), \mu). \quad (22.2)$$

По лемме Адамара правую часть уравнения (22.2) можно переписать в виде

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt} = \Phi_1(t, \mu, \Delta\mu)\Delta\varphi + \Phi_2(t, \mu, \Delta\mu)\Delta\mu, \quad (22.3)$$

где Φ_1 и Φ_2 — непрерывные функции.

При $\Delta\mu \neq 0$ соотношение (22.3) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} \right) = \Phi_1(t, \mu, \Delta\mu) \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} + \Phi_2(t, \mu, \Delta\mu), \quad (22.4)$$

т. е. относительно функции $\Delta\varphi/\Delta\mu$ имеем линейное ОДУ.

Пусть $\psi(t, \mu, \Delta\mu)$ — решение ДУ (22.4), удовлетворяющее начальному условию $\psi(t_0, \mu, \Delta\mu) = 0$. Тогда так как

$$\left. \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} \right|_{t=t_0} = \frac{\varphi(t_0, \mu + \Delta\mu) - \varphi(t_0, \mu)}{\Delta\mu} = \frac{x_0 - x_0}{\Delta\mu} = 0,$$

то в силу теоремы единственности при $\Delta\mu \neq 0$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = \psi(t, \mu, \Delta\mu).$$

Переходя в полученном равенстве к пределу при $\Delta\mu \rightarrow 0$, находим, что

$$\frac{\partial\varphi(t, \mu)}{\partial\mu} = \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu} = \lim_{\Delta\mu \rightarrow 0} \psi(t, \mu, \Delta\mu) = \psi(t, \mu, 0),$$

и значит, производная $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ существует и непрерывна, поскольку непрерывна функция $\psi(t, \mu, 0)$.

Итак, если $p=1$, то теорема доказана. Если же правая часть $f(t, x, \mu)$ уравнения (22.1) имеет непрерывные производные до порядка $p=2$ включительно, то замечая, что в силу леммы Адамара

$$\Phi_1 \rightarrow \frac{\partial f(t, x, \mu)}{\partial x}, \quad \Phi_2 \rightarrow \frac{\partial f(t, x, \mu)}{\partial \mu}$$

при $\Delta\mu \rightarrow 0$, а следовательно, производная $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ удовлетворяет ДУ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right) = \frac{\partial f(t, x, \mu)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f(t, x, \mu)}{\partial \mu} \quad (22.5)$$

и начальному условию $\frac{\partial x}{\partial \mu} \Big|_{t=t_0} = 0$, можно, применяя к ДУ (22.5) те же рассуждения, что и выше, доказать существование и непрерывность производных $\frac{\partial^2 x}{\partial \mu^2}$ и $\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial \mu}$. Продолжая эти рассуждения далее, получим доказательство теоремы в общем случае.

З а м е ч а н и е 22.1. Уравнение (22.5) называется *уравнением в вариациях* для уравнения (22.1). Если известно решение $x = \varphi(t, \mu)$ начальной задачи (22.1), то уравнение в вариациях является относительно $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ линейным ОДУ 1-го порядка. Уравнения для нахождения высших производных $\left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)^k x$ также будут линейными. При этом обратим внимание на то, что если при некотором значении $\mu = \mu_0$ известно решение $x = \varphi(t)$ начальной задачи (22.1), то, используя уравнения в вариациях, можно вычислить все производные $\left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)^k x \Big|_{\mu=\mu_0}$.

Действительно, при $\mu = \mu_0$ имеем линейное уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right) = \frac{\partial f(t, \varphi(t), \mu_0)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mu} + \frac{\partial f(t, \varphi(t), \mu_0)}{\partial \mu}$$

с начальным условием $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{t=t_0} = 0$. Проинтегрировав полученное линейное

уравнение, найдем $\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu_0}$. Производные высших порядков вычисляются аналогично.

Пример 22.1. Найти производную по параметру $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ при $\mu = 0$ от решения начальной задачи

$$\dot{x} = x + \mu x^2 + \mu t, \quad x(0) = 1. \quad (22.6)$$

Решение. При $\mu = 0$ начальная задача (22.6) принимает вид

$$\dot{x} = x, \quad x(0) = 1$$

и ее решение определяется равенством $x(t) = e^t$. Уравнение в вариациях в данном случае — это уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right) = \frac{\partial x}{\partial \mu} + t + e^{2t},$$

где $\frac{\partial x(0)}{\partial \mu} = 0$. Решая полученное уравнение с указанным начальным условием, находим, что

$$\left. \frac{\partial x}{\partial \mu} \right|_{\mu=0} = e^{2t} - t - 1.$$

Теорема 22.2. Если отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ области $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ имеет по переменным t, x непрерывные производные до порядка $p \geq 1$ включительно, то решение $x(t, t_0, x_0)$ начальной задачи (18.5) имеет непрерывные производные до порядка $p \geq 1$ включительно по совокупности переменных t, t_0, x_0 .

Справедливость теоремы 22.2 следует из теоремы 22.1, так как начальные данные t_0, x_0 можно рассматривать как параметры, поскольку, сделав замену

$$t - t_0 = \tau, \quad x(t) - x_0 = \xi,$$

получаем вместо начальной задачи (18.5) начальную задачу

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \bar{f}(\tau, \xi), \quad \xi(0) = 0,$$

где правая часть $\bar{f}(\tau, \xi) = f(\tau + t_0, \xi + x_0)$ зависит от начальных данных как от параметров, а начальные данные $\tau_0 = 0, \xi_0 = 0$ от параметров не зависят.

Пример 22.2. Найти производную $\left. \frac{\partial x}{\partial x_0} \right|_{x_0=0}$ от решения начальной задачи

$$\dot{x} = x + x^2 + tx^3, \quad x(2) = x_0.$$

Решение. При $x_0 = 0$ данная начальная задача имеет тривиальное решение $x(t) \equiv 0$. Уравнением вариации в данном случае будет уравнение

ние $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right) = \frac{\partial x}{\partial x_0}$ с начальным условием $\frac{\partial x(0)}{\partial x_0} = 1$. Отсюда находим, что

$$\left. \frac{\partial x}{\partial x_0} \right|_{x_0=0} = e^{t-2}.$$

§ 23. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СКАЛЯРНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-го ПОРЯДКА В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

До сих пор изучались ОДУ 1-го порядка в нормальной форме, т. е. ОДУ, разрешенные относительно производной. Обратимся теперь к скалярным ОДУ 1-го порядка в общей форме

$$\mathcal{F}(t, x, \dot{x}) = 0, \quad (23.1)$$

где $\mathcal{F}$ — заданное отображение.

Пусть (t_0, x_0) — точка подмножества плоскости tOx из области задания уравнения (23.1). Рассмотрим уравнение относительно p :

$$\mathcal{F}(t_0, x_0, p) = 0 \quad (\dot{x} = p). \quad (23.2)$$

Уравнение (23.2) определяет в общем случае несколько значений p (их может быть и бесконечно много). Таким образом, в отличие от ДУ в нормальной форме ДУ в общей форме определяют в каждой точке (t, x) подмножества плоскости tOx из области задания уравнения (23.1) не одно, а несколько направлений, и поэтому через точку (t, x) будут проходить несколько интегральных кривых.

Пример 23.1. Уравнение

$$\dot{x}^2 - 4t^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$\dot{x}_1 = 2t, \quad \dot{x}_2 = -2t.$$

Полные семейства решений этих двух ДУ определяются соответственно равенствами

$$x_1(t) = t^2 + c_1 \quad \text{и} \quad x_2(t) = -t^2 + c_2,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Качественную картину поведения интегральных кривых в данном случае иллюстрирует рис. 29.

Приведенный пример показывает, что интегральные кривые различных семейств могут пересекаться как трансверсально (не касаясь), например в точке A , так и касаясь, например в точке B .

Точку касания интегральных кривых называют *точкой неединственности* решений, точка же трансверсального пересечения интегральных кривых различных семейств называется *точкой единственности*.

Теорема 23.1. Если функция $\mathcal{F}(t, x, \dot{x})$ непрерывна вместе с частными производными первого порядка в некотором параллелепипеде с центром в точке $(t_0, x_0, \dot{x}_0)$, где $\dot{x}_0$ — один из действительных корней уравнения (23.2),

и $\frac{d\mathcal{F}(t_0, x_0, \dot{x}_0)}{d\dot{x}} \neq 0$, то существует единственное на интервале $(t_0 - h, t_0 + h)$,

где h — достаточно мало, решение $x = x(t)$ дифференциального уравнения (23.1), удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$, для которого $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.

Доказательство. По теореме о неявной функции уравнение (23.1) определяет в некотором параллелепипеде $\mathbb{D}$ с центром в точке $(t_0, x_0, \dot{x}_0)$ производную $\dot{x}$ как однозначную функцию переменных t и x , т. е.

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{23.3}$$

где f — непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные первого порядка, и такая, что

$$f(t_0, x_0) = \dot{x}_0.$$

Поэтому функция f непрерывна в $\mathbb{D}$ и удовлетворяет по переменной x условию Липшица. Но тогда в соответствии с теоремой Пикара — Линделёфа существует единственное на интервале $(t_0 - h, t_0 + h)$, где h — достаточно мало, решение $x = x(t)$ ДУ (23.3), а следовательно, и ДУ (23.1) такое, что $x(t_0) = x_0$.

Покажем теперь, что $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$. Действительно, так как $x = x(t)$ — решение ДУ (23.3), причем $x(t_0) = x_0$, то при $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$ имеем тождество $\dot{x}(t) \equiv f(t, x(t))$.

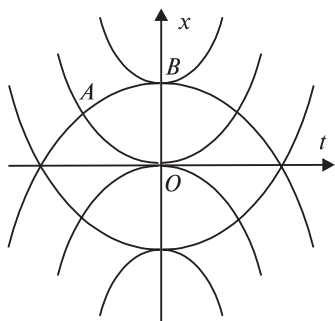


Рис. 29. К примеру 23.1

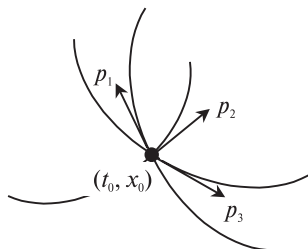


Рис. 30. К следствию 23.1

Полагая здесь $t = t_0$, получаем, что

$$\dot{x}(t_0) = f(t_0, x(t_0)) = f(t_0, x_0) = \dot{x}_0,$$

т. е. $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, что и требовалось доказать.

Следствие 23.1. Если уравнение (23.2) имеет m различных действительных значений $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_m$ и в каждой точке $(t_0, x_0, \dot{x}_i)$, $i = \overline{1, m}$, выполняются условия теоремы 23.1, то через точку (t_0, x_0) по m разным направлениям проходит m и только m интегральных кривых ДУ (23.1) (рис. 30).

Итак, теорема 23.1 утверждает, что при выполнении соответствующих условий, одним из которых является условие

$$\frac{\partial \mathcal{F}(t_0, x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}} \neq 0,$$

через точку (t_0, x_0) по направлению p_0 будет проходить единственная интегральная кривая.

Если же окажется, что

$$\frac{\partial \mathcal{F}(t_0, x_0, p_0)}{\partial p} = 0,$$

то вдоль направления p_0 возможно ветвление интегральных кривых.

Таким образом, точки ветвления решений ДУ (23.1) могут быть расположены на кривой, определяемой из системы

$$\begin{cases} \mathcal{F}(t, x, p) = 0, \\ \mathcal{F}'_p(t, x, p) = 0 \end{cases} \quad (23.4)$$

исключением p , которая называется p -дискриминантной кривой и обозначается так:

$$\text{Disct}_p : F(t, x) = 0.$$

Такие кривые могут оказаться особыми интегральными кривыми для ДУ (23.1). Поэтому для нахождения особых решений ДУ (23.1) можно поступать следующим образом:

- 1) найти p -дискриминантные кривые;
- 2) проверить, являются ли p -дискриминантные кривые интегральными кривыми данного ДУ;
- 3) проверить, нарушается ли свойство единственности в точках p -дискриминантных кривых.

Если перечисленные три пункта имеют место, то p -дискриминантные кривые являются особыми интегральными кривыми для ДУ (23.1).

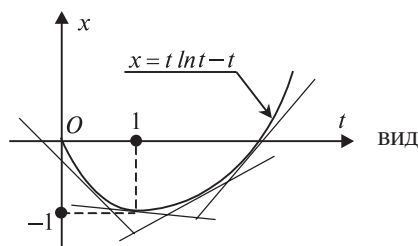


Рис. 31. К примеру 23.2

Пример 23.2. Рассмотрим ДУ

$$x - tx' + e^x = 0, \quad \text{где } t > 0.$$

Система (23.4) в данном случае имеет

вид

$$\begin{cases} x - tp + e^p = 0, \\ -t + e^p = 0. \end{cases}$$

Отсюда, исключая p , получаем уравнение p -дискриминантной кривой:

$$\text{Disct}_p : x = t \ln t - t. \quad (23.5)$$

Проверкой убеждаемся, что кривая, заданная уравнением (23.5), является интегральной кривой данного ДУ.

А тогда, замечая, что c -семейство решений ДУ имеет вид $x(t) = ct - e^c$ (это семейство прямых), убеждаемся, что через каждую точку p -дискриминантной кривой проходит еще и прямая, определяемая c -семейством решений, и значит, p -дискриминантная кривая является особой интегральной кривой (рис. 31).

Пример 23.3. Рассмотрим ДУ

$$\dot{x}^3 - 4tx\dot{x} + 8x^2 = 0.$$

Для данного ДУ c -семейство решений определяет однопараметрическое семейство парабол, заданных равенством $x = c(t - c)^2$ (рис. 32).

Найдем p -дискриминантную кривую. Для этого составляем систему

$$\begin{cases} p^3 - 4txp + 8x^2 = 0, \\ 3p^2 - 4tx = 0. \end{cases}$$

С учетом второго уравнения первое уравнение системы можно переписать в виде

$$p^3 - 3p^2 + 8x^2 = 0$$

или в виде $p^3 = 4x^2$. Но тогда $p^2 = 4^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}$ и, значит, второе уравнение системы можно записать в виде

$$3 \cdot 4^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - 4tx = 0.$$

Таким образом,

$$\text{Disct}_p : x \left(3 \cdot 4^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}} - 4t \right) = 0,$$

а следовательно, p -дискриминантная кривая распадается на кривые

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = \frac{4}{27}t^3,$$

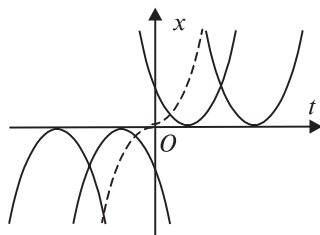


Рис. 32. К примеру 23.3

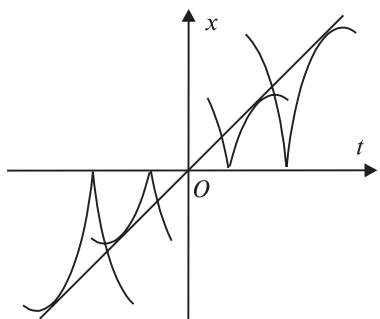


Рис. 33. К примеру 23.4

которые обе оказываются огибающими, являясь при этом и c -дискриминантными. То, что эти кривые — огибающие, следует из условия существования огибающих ($\Phi'_x(t, x, c) = 1 \neq 0$) (см. теорему 11.1).

Примечательно при этом то, что огибающая $x = 0$, являясь особым решением, входит в состав c -семейства решений (при $c = 0$).

Пример 23.4. Рассмотрим ДУ

$$x\dot{x}^3 - 3t\dot{x} + 2x = 0.$$

Для этого уравнения c -семейство решений определяется равенством

$$4x^3 = c(3t - c)^2.$$

Качественная картина поведения интегральных кривых в данном случае иллюстрируется рис. 33.

Найдем p -дискриминантную кривую. Для этого составляем систему

$$\begin{cases} xp^3 - 3tp + 2x = 0, \\ 3xp^2 - 3t = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим, что $xp^3 = tp$. С учетом этого равенства первое уравнение системы перепишем в виде

$$tp = x, \quad \text{откуда} \quad p = x/t.$$

Подставляя полученное значение p в первое уравнение системы, находим, что

$$x \frac{x^3}{t^3} - 3t \frac{x}{t} + 2x = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x^4}{t^3} - x = 0.$$

Таким образом,

$$\text{Disct}_p : x(x^3 - t^3) = 0,$$

а следовательно, p -дискриминантная кривая распадается на кривые $x = 0$ и $x = t$, которые, как показывает проверка, являются интегральными кривыми. При этом кривая $x = 0$ соответствует частному решению из состава c -семейства решений (при $c = 0$), а прямая $x = t$ оказывается огибающей, т. е. особой интегральной прямой.

§ 24. НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СКАЛЯРНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-го ПОРЯДКА В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

Рассмотрим случаи, когда уравнение (23.1) может быть разрешено относительно $\dot{x}$ или x , или t .

Итак, если ДУ (23.1) можно разрешить относительно $\dot{x}$, т. е. если можно получить одно или несколько уравнений вида $\dot{x} = f(t, x)$, то интегрирование ДУ (23.1) сводится к интегрированию ДУ в нормальной форме.

Предположим теперь, что ДУ (23.1) удастся разрешить относительно x , т. е. можно записать ДУ в виде

$$x = f(t, \dot{x}).$$

В таком случае c -семейство решений ДУ можно найти в параметрическом виде. Действительно, выберем в качестве параметра производную $\dot{x}$ (т. е. обозначим $\dot{x} = p$). Тогда последнее уравнение примет вид

$$x = f(t, p). \quad (24.1)$$

Отсюда

$$dx = f'_t dt + f'_p dp,$$

а поскольку, с другой стороны, $dx = p dt$, то приходим к ДУ

$$f'_t dt + f'_p dp = p dt \quad \text{или} \quad (f'_t - p) dt + f'_p dp = 0.$$

Полученное уравнение можно разрешить относительно dt/dp или относительно dp/dt . Таким образом, если мы найдем решение последнего ДУ в виде $t = \varphi(p, c)$, где c -произвольная постоянная, то с учетом (24.1) найдем и c -семейство решений ДУ (23.1) в параметрическом виде:

$$t = \varphi(p, c), \quad x = f(\varphi(p, c), p),$$

где c -произвольная постоянная.

Подобным образом решаются и ДУ вида

$$t = f(x, \dot{x}).$$

Пример 24.1 (уравнение Лагранжа (Монжа¹)). Уравнением Лагранжа (Монжа) называется ДУ вида

$$x = t\varphi(\dot{x}) + \psi(\dot{x}),$$

где φ и ψ — непрерывно дифференцируемые функции. Полагая $\dot{x} = p$, перепишем данное уравнение в виде

$$x = t\varphi(p) + \psi(p).$$

¹ Монж Гаспар (Monge G., 1746—1818), французский математик.

Следуя тогда указанной выше схеме, получаем, что

$$dx = \varphi(p)dt + (t\varphi'_p(p) + \psi'_p(p))dp,$$

а поскольку, с другой стороны, $dx = p dt$, то приходим к ДУ

$$(\varphi(p) - p)dt + (t\varphi'_p(p) + \psi'_p(p))dp = 0.$$

Если здесь $\varphi(p) - p \neq 0$, то получаем линейное относительно t ОДУ 1-го порядка

$$\frac{dt}{dp} + \frac{\varphi'_p(p)}{\varphi(p) - p}t = \frac{\psi'_p(p)}{p - \varphi(p)}$$

с непрерывными коэффициентами.

Интегрируя это ДУ, найдем

$$t = A(p)c + B(p),$$

где $A(p), B(p)$ — известные функции p , а c — произвольная постоянная. Следовательно, c -семейство решений уравнения Лагранжа (Монжа) представимо в параметрическом виде (параметром является p) соотношениями

$$t = A(p)c + B(p), \quad x = A_1(p)c + B_1(p).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\varphi(p) - p = 0$. Здесь возможны два подслучая. В первом из них существуют значения $p = p_i$, $i = \overline{1, m}$, такие, что $\varphi(p_i) - p_i = 0$, $i = \overline{1, m}$, а второй подслучай — это тождество $\varphi(p) - p \equiv 0$.

В первом подслучае уравнение Лагранжа (Монжа) имеет решения вида

$$x = tp_i + \psi(p_i), \quad i = \overline{1, m}.$$

Эти решения могут оказаться особыми решениями.

Во втором подслучае $\varphi(p) \equiv p = \dot{x}$, и мы приходим к частному случаю уравнения Лагранжа (Монжа), к так называемому уравнению Клеро¹

$$x = t\dot{x} + \psi(\dot{x}).$$

Полагая здесь $\dot{x} = p$, имеем

$$x = tp + \psi(p),$$

откуда

$$dx = p dt + (t + \psi'_p(p))dp.$$

С другой стороны, $dx = p dt$, таким образом, получаем совокупность

$$\begin{cases} dp = 0, \\ t + \psi'_p(p) = 0. \end{cases}$$

¹ Клеро Алексис Клод (Clairaut A. C., 1713—1765), французский математик и механик.

Решая первое уравнение совокупности, находим, что $p = c = \text{const}$. Следовательно, c -семейство решений уравнения Клеро определяется равенством

$$x = tc + \psi(c),$$

где c — произвольная постоянная.

Отсюда, в частности, следует, что c -семейство решений уравнения Клеро определяет однопараметрическое семейство непараллельных прямых, которые в случае линейной функции ψ проходят через одну точку.

Рассмотрим теперь второе уравнение совокупности. Это уравнение в случае линейной функции ψ , т. е. когда $\psi'_p(p) = \text{const}$, дает частное решение, которое входит в c -семейство решений уравнения Клеро при $c = 0$.

В самом деле, в указанном случае $\psi(p) = ap + b$, где a и b — постоянные, и уравнение Клеро принимает вид

$$x = t\dot{x} + ax + b,$$

откуда

$$\dot{x} = \frac{x-b}{t+a} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{x-b} = \frac{dt}{t+a}.$$

Полученное ДУ определяет не особое решение, а особую точку $t = -a$, $x = b$.

Предположим теперь, что функция ψ нелинейна, дважды непрерывно дифференцируема, причем $\psi''_p(p) \neq 0$.

В этом случае, разрешая второе уравнение совокупности относительно p , получим, что $p = \omega(t)$ и функция x , определяемая равенством

$$x = t\omega(t) + \psi(\omega(t)),$$

будет решением, причем особым решением уравнения Клеро.

Действительно, последнее соотношение определяет, как легко видеть, $p(c)$ -дискриминантную кривую, а поскольку в данном случае $\Phi'_x(t, x, p(c)) = 1 \neq 0$ (см. теорему 11.1), то данная $p(c)$ -дискриминантная кривая и будет особой интегральной кривой.

Не останавливаясь на других вариантах метода введения параметра, отметим лишь, что вводить параметр можно самым произвольным образом, но так, чтобы ДУ допускало параметризацию, т. е. допускало существование функций

$$t = \varphi(p), \quad x = \psi(p), \quad \dot{x} = \sigma(p)$$

таких, что

$$\mathcal{F}(\varphi(p), \psi(p), \sigma(p)) \equiv 0.$$

При этом функции φ , ψ и σ могут зависеть и от двух параметров.

Пример 24.2. Рассмотрим ДУ

$$t^3 \dot{x}^3 - (1 - \dot{x})^3 = 0.$$

Это ДУ допускает параметризацию

$$\dot{x} = p^3, \quad t = \frac{1 - p^3}{p}.$$

Тогда $dx = p^3 dt = -(2p^4 + p)dp$ и, значит,

$$x = -\frac{2}{5}p^5 - \frac{1}{2}p^2 + c.$$

Таким образом, исходное ДУ имеет c -семейство решений в параметрическом виде:

$$t = \frac{1 - p^3}{p}, \quad x = -\frac{2}{5}p^5 - \frac{1}{2}p^2 + c,$$

где c — произвольная постоянная.

Пример 24.3. Рассмотрим ДУ

$$t^3 - \dot{x}^3 = t\dot{x}.$$

Введем параметр следующим образом: $p = \frac{\dot{x}}{t}$. Тогда поскольку из вида

ДУ следует, что $1 - \left(\frac{\dot{x}}{t}\right)^3 = \frac{1}{t} \left(\frac{\dot{x}}{t}\right)$, то находим $t = \frac{p}{1 - p^3}$ и, следовательно,

$\dot{x} = pt = \frac{p^2}{1 - p^3}$. Другими словами, исходное ДУ допускает параметризацию

$$t = \frac{p}{1 - p^3}, \quad \dot{x} = \frac{p^2}{1 - p^3}.$$

Поступая далее по аналогии с решением предыдущего примера, получим c -семейство решений заданного ДУ в параметрическом виде:

$$t = \frac{p}{1 - p^3}, \quad x = \frac{4p^3 - 1}{6(1 - p^3)^2} + c,$$

где c — произвольная постоянная.

§ 25. ЗАДАЧА О ТРАЕКТОРИЯХ

Задача о траекториях имеет многочисленные геометрические приложения. В частности, в дифференциальной геометрии при рассмотрении, например, линий кривизны и асимптотических линий.

Итак, пусть уравнение

$$\Phi(t, x, c) = 0, \quad (25.1)$$

где c — числовой параметр, задает на плоскости tOx семейство гладких кривых.

Определение 25.1. Кривая, пересекающая все кривые семейства (25.1) под одним и тем же постоянным углом α^1 , называется изогональной траекторией семейства кривых (25.1). При

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ изогональная траектория называется ортогональной.

Выведем ДУ семейства изогональных (ортогональных) траекторий. Для этого установим сначала зависимость между угловыми коэффициентами касательных к кривой семейства (25.1) и к изогональной траектории в точке их пересечения.

Пусть $M(t_1, x_1)$ — произвольная точка изогональной траектории K (рис. 34). Обозначим углы, образованные осью Ot с касательной MT_1 к кривой K_1 семейства (25.1), проходящей через точку M , и с касательной MT к траектории K в точке M , через φ и φ_1 соответственно. Тогда в любой точке траектории K имеет место равенство $\varphi + \alpha = \varphi_1 = \text{const}$, причем

$$\text{tg} \varphi_1 = \frac{dx_1}{dt_1}, \text{tg} \varphi = \frac{dx}{dt}, \text{tg} \alpha = k \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} \right).$$

С учетом принятых обозначений

$$\text{tg} \varphi = \frac{\text{tg} \varphi_1 - \text{tg} \alpha}{1 + \text{tg} \alpha \text{tg} \varphi_1}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx_1}{dt_1} - k}{1 + k \frac{dx_1}{dt_1}}. \quad (25.2)$$

Составим теперь ДУ семейства кривых (25.1). Это уравнение выводится исключением параметра c из уравнений

$$\Phi(t, x, c) = 0 \quad \text{и} \quad \Phi'_t + \Phi'_x \frac{dx}{dt} = 0.$$

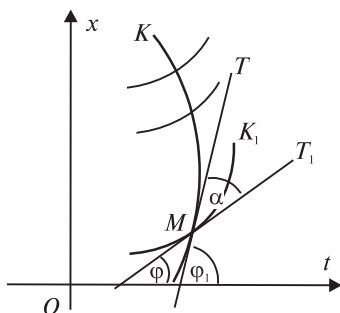


Рис. 34. Изогональные траектории

¹ Углом α между двумя кривыми K_1 и K_2 в точке их пересечения называется угол между касательными к ним в этой точке.

Результатом такой операции будет ДУ вида

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0. \quad (25.3)$$

Подставляя в ДУ (25.3) выражение для $\frac{dx}{dt}$ из (25.2), получим ДУ изогональных траекторий семейства (25.1)

$$F\left(t_1, x_1, \frac{\frac{dx_1}{dt_1} - k}{1 + k \frac{dx_1}{dt_1}}\right) = 0.$$

Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = -\operatorname{ctg} \varphi_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi_1}$, а значит, вместо равенства (25.2) будет иметь место равенство

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\frac{dx_1}{dt_1}}$$

и, таким образом, ДУ семейства ортогональных траекторий имеет вид

$$F\left(t_1, x_1, -\frac{1}{\frac{dx_1}{dt_1}}\right) = 0.$$

З а м е ч а н и е 25.1. ДУ семейства изогональных (ортогональных) траекторий можно переписать, опуская индексы. В результате приходим к следующему правилу построения ДУ семейства изогональных (ортогональных) траекторий:

1) составить ДУ данного семейства;

2) заменить в полученном ДУ производную $\frac{dx}{dt}$ на $\frac{\frac{dx}{dt} - k}{1 + k \frac{dx}{dt}}$, если $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ ($k = \operatorname{tg} \alpha$), и на $-\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$, если $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Глава 2

СКАЛЯРНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 26. СКАЛЯРНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n -го ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Определение 26.1. Скалярным ОДУ n -го порядка в нормальной форме называется соотношение вида

$$D^n x(t) = f(t, x(t), Dx(t), D^2 x(t), \dots, D^{n-1} x(t)), \quad (26.1)$$

где $t \in \mathbb{R}$ — независимая переменная, которую обычно называют временем, $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ — неизвестная функция, определенная на некотором промежутке $I \subset \mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ — заданное отображение

некоторой области $\mathbb{D}$ прямого произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$, а $D^k = \frac{d^k}{dt^k}$ — символ оператора дифференцирования k раз по t .

Часто используют и сокращенную запись ДУ (26.1) в виде

$$D^n x = f(t, x, Dx, D^2 x, \dots, D^{n-1} x).$$

Определение 26.2. Решением (в явном виде) ОДУ (26.1) с непрерывной правой частью f , определенным на интервале $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, называется n раз дифференцируемое на I отображение $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ такое, что $\forall t \in I$ точка

$$(t, \varphi(t), D\varphi(t), D^2\varphi(t), \dots, D^{n-1}\varphi(t))$$

лежит в $\mathbb{D}$ и $\forall t \in I$ справедливо равенство

$$D^n \varphi(t) = f(t, \varphi(t), D\varphi(t), D^2\varphi(t), \dots, D^{n-1}\varphi(t)).$$

Так, например, как легко проверить, для ОДУ 2-го порядка

$$D^2x = 4e^t - x + 2Dx,$$

где $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, одним из решений является функция $t \mapsto 2t^2 e^t$, определенная на $\mathbb{R}$.

Задача Коши (начальная задача) для ОДУ (26.1) ставится следующим образом: требуется найти решение φ ОДУ (26.1) такое, чтобы при заданном значении независимой переменной $t = t_0$ и заданным $x_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0$ выполнялись равенства

$$\varphi(t_0) = x_0, D\varphi(t_0) = x_1^0, D^2\varphi(t_0) = x_2^0, \dots, D^{n-1}\varphi(t_0) = x_{n-1}^0.$$

Другими словами, задача Коши для ОДУ (26.1) состоит в построении отображения $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющего $n + 1$ условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} D^n x = f(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^{n-1}x), \\ x(t_0) = x_0, \\ Dx(t_0) = x_1^0, \\ D^2x(t_0) = x_2^0, \\ \dots\dots\dots \\ D^{n-1}x(t_0) = x_{n-1}^0. \end{array} \right. \quad (26.2)$$

Определение 26.3. График решения ОДУ (26.1) на плоскости tOx называется интегральной кривой ОДУ (26.1).

Отметим далее, что, как и в случае ДУ 1-го порядка, ДУ n -го порядка (26.1) также имеют определенный геометрический смысл.

Так, в частности, если дано ОДУ 2-го порядка

$$D^2x = f(t, x, Dx), \quad (26.3)$$

некоторая интегральная кривая которого задается уравнением $x = \varphi(t)$, $t \in I$, то в каждой точке $t_0 \in I$ определена кривизна интегральной кривой

$$K(t_0) = \frac{|D^2\varphi(t_0)|}{\sqrt{(1 + (D\varphi(t_0))^2)^3}} = \frac{|f(t_0, \varphi(t_0), D\varphi(t_0))|}{\sqrt{(1 + (D\varphi(t_0))^2)^3}}.$$

ОДУ (26.3) в любой точке его задания определяет некоторое значение D^2x и, значит, некоторое значение кривизны

$$K = |f(t, x, Dx)| (1 + (Dx)^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, ОДУ (26.3) задает связь между кривизной и углом наклона искомых интегральных кривых уравнения. Кривая на плоскости

переменных t, x может быть интегральной кривой ДУ (26.3) только тогда, когда в каждой ее точке кривизна и угол наклона связаны указанной формулой.

Покажем теперь, какая существует связь между скалярным ОДУ n -го порядка (26.1) и векторным ОДУ 1-го порядка (1.1).

Итак, пусть дано скалярное ОДУ n -го порядка (26.1). Положим $x = y_1$ и введем следующие обозначения:

$$Dx = Dy_1 = y_2, D^2x = Dy_2 = y_3, \dots, D^{n-1}x = Dy_{n-1} = y_n.$$

Тогда в новых обозначениях ОДУ (26.1) запишется в виде системы

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dots\dots\dots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ \dot{y}_n = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

или, что то же самое, в виде векторного ОДУ

$$\dot{y} = F(t, y), \quad (26.4)$$

где

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad F(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \\ f(t, y) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, скалярное ОДУ n -го порядка (26.1) всегда может быть приведено к векторному ОДУ 1-го порядка (26.4).

При этом очевидно, что если мы найдем решение ОДУ (26.4), то тем самым найдем и решение ОДУ (26.1). Справедливо и обратное.

З а м е ч а н и е 26.1. Пространство изменения переменных $x, Dx, D^2x, \dots, D^{n-1}x$ обычно называют *фазовым пространством скалярного ОДУ n -го порядка* (26.1).

Рассмотрим теперь вопрос о возможности приведения нормальной ДС (1.1") к скалярному ОДУ n -го порядка (26.1).

Сразу же отметим, что такое приведение возможно не всегда.

Итак, пусть дана ДС

$$Dx_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1.1'')$$

где все функции f_i имеют непрерывные частные производные до $(n-1)$ -го порядка включительно по всем аргументам.

Тогда

$$D^2 x_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} D x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} D x_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} D x_n.$$

Если теперь в правую часть полученного уравнения подставить вместо $D x_i, i = \overline{1, n}$, их значения из (1.1"), то придем к уравнению вида

$$D^2 x_1 = \tilde{f}_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (26.5)$$

исходя из которого можно получить аналогичные соотношения

$$\begin{cases} D^3 x_1 = \tilde{f}_3(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ D^n x_1 = \tilde{f}_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (26.6)$$

Предположим, что якобиан $\frac{D(f_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots, x_n)} \neq 0$. Тогда из системы

$$\begin{cases} D x_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ D^2 x_1 = \tilde{f}_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots \\ D^{n-1} x_1 = \tilde{f}_{n-1}(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

можно найти

$$x_j = h_j(t, x_1, D x_1, D^2 x_1, \dots, D^{n-1} x_1), j = \overline{2, n}. \quad (26.7)$$

Но в таком случае, подставляя значения x_j , выраженные посредством (26.7), в последнее уравнение системы (26.6), получим ОДУ n -го порядка

$$D^n x_1 = f(t, x_1, D x_1, D^2 x_1, \dots, D^{n-1} x_1).$$

Однако может случиться, что нельзя найти (26.7). Например, так будет в том случае, когда из первого уравнения системы (1.1") и уравнения (26.5) уже исключаются переменные $x_2, x_3, \dots, x_n$ или просто уравнение (26.5) не содержит $x_2, x_3, \dots, x_n$. Тогда получим несколько ДУ с одной неизвестной для некоторых x_k .

Таким образом, дифференциальной системе (1.1") можно поставить в соответствие или одно ОДУ n -го порядка, или несколько ОДУ, сумма порядков которых равна n .

З а м е ч а н и е 26.2. Иногда можно получить и такие ДУ, сумма порядков которых будет больше n . В таком случае компоненты $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ произвольного решения φ будут формально содержать произвольных постоянных больше чем n . Однако, подставляя найденные компоненты в исходную ДС (1.1"), получим соотношения между постоянными

$c_1, c_2, \dots, c_m$ ($m > n$) такие, которые дадут именно n произвольных постоянных.

Так, например, рассмотрим ДС

$$Dx_1 = x_2, \quad Dx_2 = x_1.$$

Тогда $D^2x_1 = Dx_2 = x_1$ или $D^2x_1 - x_1 = 0$. Непосредственно проверяется, что функция φ_1 , определяемая соотношением $\varphi_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, является решением полученного ДУ 2-го порядка.

Таким же образом получаем, что функция φ_2 , определяемая соотношением

$$\varphi_2(t) = c_3 e^t + c_4 e^{-t},$$

является решением ДУ

$$D^2x_2 - x_2 = 0.$$

Если подставить теперь найденные $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в исходную ДС, получим, что $c_1 = c_3$, $c_2 = -c_4$. Поэтому окончательно имеем

$$\varphi_1(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad \varphi_2(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}.$$

Теорема 26.1. Если отображение $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно в некотором прямоугольнике $\mathbb{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $f \in \text{Lip}L$ относительно $x, Dx, D^2x, \dots, D^{n-1}x$, то начальная задача (26.2) имеет в окрестности $t = t_0$ единственное решение.

Справедливость теоремы вытекает из возможности приведения ДУ (26.1) к ДУ (26.4) и применения затем к последнему теоремы Пикара — Линделёфа.

§ 27. ПРОСТЕЙШЕЕ СКАЛЯРНОЕ ОБЫКНОВЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ n -ГО ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ И ФОРМУЛА КОШИ

Простейшим скалярным ОДУ n -го порядка в нормальной форме называется уравнение вида

$$D^n x = f(t). \quad (27.1)$$

Будем предполагать, что функция f непрерывна на некотором интервале (a, b) . Переписав ДУ (27.1) в виде

$$d(D^{n-1}x) = f(t)dt$$

и интегрируя полученное соотношение, имеем ДУ

$$D^{n-1}x = \int_{t_0}^t f(t)dt + c_1,$$

где c_1 — произвольная постоянная, а t_0 — любое фиксированное число из интервала (a, b) .

Повторяя эту операцию еще раз, находим, что

$$D^{n-2}x = \iint_{t_0 t_0}^t f(t) dt dt + c_1(t - t_0) + c_2,$$

где c_2 — произвольная постоянная.

Повторение указанной операции n раз приводит к формуле

$$x = \iint_{t_0 t_0}^t \dots \iint_{t_0}^t f(t) dt dt \dots dt + c_1 \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + c_2 \frac{(t - t_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots \\ \dots + c_{n-1}(t - t_0) + c_n,$$

где $c_i, i = \overline{1, n}$, — произвольные постоянные.

Полученная формула определяет все решения ДУ (27.1), она позволяет найти решение с произвольным набором чисел $x_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_{n-1}^0$ таким, что $x(t_0) = x_0, Dx(t_0) = x_1^0, D^2x(t_0) = x_2^0, \dots, D^{n-1}x(t_0) = x_{n-1}^0$.

Последнее означает, что

$$x_{n-1}^0 = c_1, x_{n-2}^0 = c_2, \dots, x_1^0 = c_{n-1}, x_0 = c_n.$$

Отметим, что формула

$$K(t) = \iint_{t_0 t_0}^t \dots \iint_{t_0}^t f(t) dt dt \dots dt$$

содержит n квадратур. Однако, как оказывается, их можно заменить одной квадратурой, т. е. можно показать, что имеет место следующая *формула Коши*:

$$K(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t f(\tau) (t - \tau)^{n-1} d\tau. \quad (27.2)$$

Действительно, мы можем рассматривать интеграл

$$\iint_{t_0 t_0}^t f(t) dt dt = \int_{t_0}^t du \int_{t_0}^u f(\tau) d\tau$$

как повторный, равный соответствующему двойному интегралу по области, ограниченной прямыми $u = t, \tau = t_0, \tau = u$ и представляющей собой треугольник в плоскости $uO\tau$ (рис. 35).

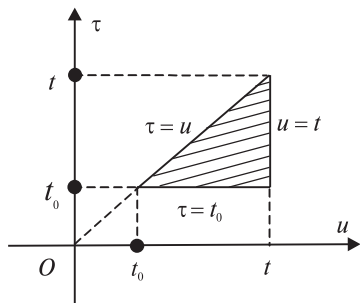


Рис. 35. К формуле Коши

Если теперь в последнем интеграле поменять порядок интегрирования, взяв пределы по u от τ до t , а по τ от t_0 до t (формула Дирихле¹), то получим, что

$$\int_{t_0}^t du \int_{t_0}^u f(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \int_{\tau}^t du = \int_{t_0}^t f(\tau)(t-\tau) d\tau.$$

Поэтому

$$\iint_{t_0 t_0}^t f(t) dt dt = \int_{t_0}^t f(\tau)(t-\tau) d\tau.$$

Аналогично находим:

$$\begin{aligned} \iiint_{t_0 t_0 t_0}^t f(t) dt dt dt &= \int_{t_0}^t du \int_{t_0}^u f(\tau)(u-\tau) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \int_{\tau}^t (u-\tau) du = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t f(\tau)(t-\tau)^2 d\tau, \\ \iiint \iiint_{t_0 t_0 t_0 t_0}^t f(t) dt dt dt dt &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t du \int_{t_0}^u f(\tau)(u-\tau)^2 d\tau = \\ &= \frac{1}{3!} \int_{t_0}^t f(\tau)(t-\tau)^3 d\tau. \end{aligned}$$

Последовательно продолжая этот процесс и далее, мы и получим формулу (27.2).

З а м е ч а н и е 27.1. Если $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ — решение ДУ (27.1), то формула (27.2) определяет функцию $x(K(t) \equiv x(t))$ через ее производную n -го порядка. Этот факт позволяет обобщить стандартное понятие производной.

Обобщение основывается на формуле, описывающей так называемую гамма-функцию (обозначается Γ), где по определению $\Gamma(n) = n!$, $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$, а

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Имея в виду записанное представление, можно функции f и действительному числу α поставить в соответствие отображение z , определяемое равенством

$$z(t, \alpha) = \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau$$

¹ Дирихле Лежен Петер Густав (Dirichlet L. P. G., 1805—1859), немецкий математик.

(если, конечно, интеграл существует), которое и приводит к следующему обобщению производной. Если для данной функции z существуют функция f и вещественное число α такие, что справедливо равенство

$$z(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau,$$

то f называется производной функции z порядка $(\alpha + 1)$. Если же считать заданными вещественное число α и функцию f , то функция z называется $(\alpha + 1)$ -кратным интегралом функции f .

Приведенные определения производной порядка α и $(\alpha + 1)$ -кратного интеграла широко используются в самых различных областях современной математики.

§ 28. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ В НОРМАЛЬНОЙ И ОБЩЕЙ ФОРМАХ

Прежде всего заметим, что скалярным ОДУ n -го порядка в общей форме называется соотношение вида

$$F(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^n x) = 0,$$

где n — заданное натуральное число; $t \in \mathbb{R}$ — независимая переменная, которую называют временем; $x: I \rightarrow \mathbb{R}$ — неизвестная функция, определенная на некотором промежутке $I \subset \mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$; $F: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ — заданное (непрерывное) отображение некоторой области $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ в $\mathbb{R}$; $D^k = d^k / dt^k$ — символ оператора дифференцирования k раз по t .

Решение скалярного ОДУ высшего порядка в общей форме определяется аналогично случаю скалярного ОДУ высшего порядка в нормальной форме.

Отметим также, что один из интегрируемых типов скалярных ОДУ n -го порядка, а именно простейшее уравнение, рассмотрен в § 27.

Обратимся к рассмотрению других типов нелинейных ОДУ высших порядков.

Уравнения вида $F(t, D^n x) = 0$

Рассмотрим случай, когда уравнение указанного типа неразрешимо (в элементарных функциях) относительно $D^n x$. Тогда c -семейство решений обычно строят в параметрическом виде. Это тот случай, когда ДУ допускает параметризацию, т. е. существование функций

$$t = \varphi(p), \quad D^n x = \psi(p)$$

таких, что

$$F(\varphi(p), \psi(p)) \equiv 0.$$

Построение c -семейства решений основывается на использовании соотношения

$$d(D^{n-1}x) = (D^n x) dt.$$

Отсюда $d(D^{n-1}x) = \psi(p)\varphi'_p(p)dp$, а значит,

$$D^{n-1}x = \int \psi(p)\varphi'_p(p)dp \equiv \psi_1(p, c_1),$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Далее

$$d(D^{n-2}x) = (D^{n-1}x) dt = \psi_1(p, c_1)\varphi'_p(p)dp,$$

откуда

$$D^{n-2}x = \int \psi_1(p, c_1)\varphi'_p(p)dp \equiv \psi_2(p, c_1, c_2),$$

где c_2 — произвольная постоянная.

Продолжая эти рассуждения необходимое число шагов, найдем

$$x = \psi_n(p, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — произвольные постоянные.

Таким образом, c -семейство решений рассматриваемого ДУ определяется в виде

$$t = \varphi(p), \quad x = \psi_n(p, c_1, c_2, \dots, c_n),$$

где p — параметр, а $c_i, i = \overline{1, n}$, — произвольные постоянные.

Пример 28.1. Проинтегрировать уравнение

$$t = e^{D^2 x} + D^2 x.$$

Решение. Положим $D^2 x = p$, тогда $t = e^p + p$, а следовательно,

$$d(Dx) = p dt = p(e^p + 1)dp$$

и

$$Dx = \int p(e^p + 1)dp + c_1 = (p-1)e^p + \frac{1}{2}p^2 + c_1.$$

Далее

$$dx = \left((p-1)e^p + \frac{1}{2}p^2 + c_1 \right) dt = \left((p-1)e^p + \frac{1}{2}p^2 + c_1 \right) (e^p + 1) dp$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} x &= \int \left((p-1)e^p + \frac{1}{2}p^2 + c_1 \right) (e^p + 1) dp + c_2 = \\ &= \left(\frac{p}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{2p} + \left(\frac{p^2}{2} + c_1 - 1 \right) e^p + \frac{p^3}{6} + c_1 p + c_2. \end{aligned}$$

Итак, c -семейство решений данного ДУ задается в виде

$$t = e^p + p, \quad x = \left(\frac{p}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{2p} + \left(\frac{p^2}{2} + c_1 - 1 \right) e^p + \frac{p^3}{6} + c_1 p + c_2,$$

где p — параметр, а c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Уравнения вида $F(t, D^k x, D^{k+1} x, \dots, D^n x) = 0, 1 \leq k \leq n$

ДУ указанного вида допускают понижение порядка на k единиц, если воспользоваться заменой $D^k x = z, z = z(t)$.

Пример 28.2. Проинтегрировать уравнение

$$4Dx + (D^2x)^2 = 4tD^2x.$$

Решение. Положим $Dx = z$. Тогда относительно неизвестной функции z получим ДУ 1-го порядка

$$4z + (Dz)^2 = 4tDz.$$

Перепишем его в виде

$$z = tDz - \frac{(Dz)^2}{4},$$

c -семейство решений этого уравнения Клеро представляется в виде

$$z = tc - \frac{c^2}{4},$$

где c — произвольная постоянная. Отсюда приходим к ДУ

$$\frac{dx}{dt} = tc - \frac{c^2}{4},$$

решая которое, находим, что

$$x = c_1 t (t - c_1) + c_2,$$

где $c_1 = \frac{c}{2}$.

Особым решением полученного выше уравнения Клеро является решение, определяемое равенством $z = t^2$, а значит, формула

$$x = \frac{t^3}{3} + c_3$$

определяет особые решения исходного ДУ. Таким образом, полное семейство решений данного уравнения задается совокупностью

$$\begin{cases} x = c_1 t(t - c_1) + c_2, \\ x = \frac{t^3}{3} + c_3, \end{cases}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Отметим два частных подслучая ДУ высших порядков, не содержащих искомой функции и последовательных первых производных.

Уравнения вида $F(D^{n-1}x, D^n x) = 0$

Сначала предположим, что данное уравнение разрешимо относительно старшей производной, т. е. рассмотрим ДУ

$$D^n x = f(D^{n-1}x).$$

Полагая $D^{n-1}x = z$, $z = z(t)$, приходим к автономному ДУ 1-го порядка

$$Dz = f(z),$$

решая которое и возвращаясь к переменной x , придем к простейшему ДУ $(n-1)$ -го порядка.

Предположим теперь, что в рассматриваемом подслучае ДУ допускает параметризацию

$$D^{n-1}x = \varphi(p), \quad D^n x = \psi(p).$$

Здесь, воспользовавшись соотношением

$$d(D^{n-1}x) = D^n x dt,$$

находим

$$dt = \frac{d(\varphi(p))}{\psi(p)} = \frac{\varphi'_p(p) dp}{\psi(p)},$$

откуда

$$t = \int \frac{\varphi'_p(p) dp}{\psi(p)} + c_1,$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Что же касается ДУ $D^{n-1}x = \varphi(p)$, то это уравнение типа $F(t, D^n x) = 0$, которое рассматривалось ранее. Решив его, найдем c -семейство решений данного уравнения в параметрическом виде.

Пример 28.3. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{(Dx)^3}{a - Dx} = (D^2x)^2.$$

Решение. Данное уравнение допускает параметризацию

$$Dx = a \sin^2 p, \quad D^2x = atg p \sin^2 p.$$

Тогда, поскольку $d(Dx) = (D^2x)dt$, находим

$$dt = \frac{d(Dx)}{D^2x} = \frac{2a \sin p \cos p dp}{atg p \sin^2 p} = 2ctg^2 p dp,$$

откуда

$$t = -2(p + ctg p) + c_1,$$

а значит,

$$dx = (Dx)dt = a \sin^2 p (2ctg^2 p dp) = 2a \cos^2 p dp$$

и

$$x = a \left(p + \frac{\sin 2p}{2} \right) + c_2.$$

Таким образом, c -семейство решений данного уравнения в параметрическом виде задается соотношениями

$$t = -2(p + ctg p) + c_1, \quad x = a \left(p + \frac{\sin 2p}{2} \right) + c_2,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Уравнения вида $F(D^{n-2}x, D^n x) = 0$

Предположим сначала, что ДУ можно разрешить относительно $D^n x$, т. е. получить одно или несколько ДУ вида

$$D^n x = f(D^{n-2}x).$$

Обозначим $D^{n-2}x = z$, $z = z(t)$. Тогда последнее ДУ перепишется в виде

$$D^2 z = f(z).$$

Умножим обе части полученного ДУ на $2Dz dt$:

$$2Dz D^2 z dt = 2f(z) Dz dt.$$

Отсюда

$$d(Dz)^2 = 2f(z) dz$$

или, интегрируя,

$$(Dz)^2 = 2 \int f(z) dz + c_1,$$

откуда

$$Dz = \pm \sqrt{2 \int f(z) dz + c_1}$$

или

$$\frac{dz}{\pm \sqrt{2 \int f(z) dz + c_1}} = dt.$$

Решив полученное ДУ, т. е. найдя $z = \varphi(t, c_1, c_2)$, задача интегрирования исходного ДУ сводится к интегрированию уже рассмотренного выше ДУ вида

$$D^{n-2}x = \varphi(t, c_1, c_2),$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Предположим теперь, что рассматриваемое ДУ неразрешимо относительно $D^n x$, но допускает параметризацию

$$D^{n-2}x = \varphi(p), \quad D^n x = \psi(p).$$

Тогда, замечая, что

$$d(D^{n-1}x) = D^n x dt, \quad d(D^{n-2}x) = D^{n-1}x dt,$$

умножим обе части первого соотношения на $D^{n-1}x$ и воспользуемся вторым равенством. В результате получаем

$$D^{n-1}x d(D^{n-1}x) = D^{n-1}x D^n x dt = D^n x D^{n-1}x dt = D^n x d(D^{n-2}x),$$

т. е.

$$d(D^{n-1}x)^2 = 2\psi(p)\varphi'_p(p)dp,$$

и, таким образом, интегрируя последнее равенство, находим

$$D^{n-1}x = \pm \sqrt{2 \int \psi(p)\varphi'_p(p) dp + c_1} \equiv \psi_1(p, c_1),$$

что приводит к параметризации

$$D^{n-1}x = \psi_1(p, c_1), \quad D^{n-2}x = \varphi(p),$$

рассмотренной ранее.

Уравнения вида $F(x, Dx, D^2x, \dots, D^n x) = 0$

Уравнения такого вида допускают понижение порядка введением замены переменных

$$Dx = z, \quad z = z(x).$$

Обратим здесь внимание на то, что при выбранной замене переменных за независимую переменную принимается x .

Выразим D^2x , D^3x , ..., $D^n x$ через функцию z и ее производные по x . Имеем:

$$\begin{aligned} D^2x &= \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dx} z, \quad D^3x = \frac{d}{dt}(D^2x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dx} z\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx} z\right) \frac{dx}{dt} = \\ &= \left(\frac{d^2z}{dx^2} z + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right) z, \quad \dots, \quad D^n x = \omega\left(z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемое ДУ примет вид

$$F\left(x, z, \frac{dz}{dx} z, \dots, \omega\left(z, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right)\right) = 0.$$

Полученное ДУ — это ДУ $(n-1)$ -го порядка относительно неизвестной функции z .

Пример 28.4. Проинтегрировать уравнение

$$(1+x^2)x D^2x = (3x^2-1)(Dx)^2.$$

Решение. Очевидно, что данное уравнение допускает однопараметрическое семейство решений вида $x = c^*$, где c^* — числовой параметр.

Найдем другие решения. Для этого, замечая, что $Dx = z(x)$, $D^2x = \frac{dz}{dx} z$, перепишем ДУ в виде

$$(1+x^2)x \frac{dz}{dx} z = (3x^2-1)z^2$$

или

$$(1+x^2)x \frac{dz}{dx} = (3x^2-1)z.$$

Разделяя переменные в полученном уравнении, приходим к ДУ

$$\frac{dz}{z} = \frac{3x^2-1}{x(1+x^2)} dx,$$

интегрируя которое, получаем, что

$$\frac{zx}{(1+x^2)^2} = c_1.$$

Таким образом, имеем ДУ

$$\frac{x Dx}{(1+x^2)^2} = c_1,$$

решая которое, находим c -семейство решений исходного ДУ:

$$\frac{1}{1+x^2} = -2c_1 t + c_2.$$

Полное же семейство решений данного ДУ определяется совокупностью

$$\begin{cases} \frac{1}{1+x^2} = -2c_1 t + c_2, \\ x = c^*, \end{cases}$$

где c_1, c_2, c^* — произвольные постоянные.

Уравнения вида $F(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^n x) = 0$
 $(F(t, sx, sDx, sD^2x, \dots, sD^n x) = s^m F(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^n x))$

Уравнения такого вида называют ДУ, однородными относительно искомой функции и ее производных. Такие уравнения допускают понижение порядка на 1, если ввести новую неизвестную функцию z , положив

$$\frac{Dx}{x} = z, \quad z = z(t).$$

Действительно, поскольку $Dx = xz$, а значит,

$$D^2x = Dxz + xDz = xz^2 + xDz = x(z^2 + Dz),$$

$$D^3x = x(z^3 + 3zDz + D^2z), \dots, \quad D^n x = x\omega(z, Dz, D^2z, \dots, D^{n-1}z),$$

то исходное ДУ можно переписать в виде

$$F(t, x, xz, x(z^2 + Dz), \dots, x\omega(z, Dz, D^2z, \dots, D^{n-1}z)) = 0.$$

Если теперь воспользоваться свойством однородности функции F по соответствующим переменным (замечая, что роль s в данном случае играет x), то последнее ДУ можно записать так:

$$x^m F(t, 1, z, z^2 + Dz, \dots, \omega(z, Dz, D^2z, \dots, D^{n-1}z)) = 0.$$

Итак, нахождение c -семейства решений данного ДУ сводится к интегрированию ДУ $(n-1)$ -го порядка:

$$F(t, 1, z, z^2 + Dz, \dots, \omega(z, Dz, D^2z, \dots, D^{n-1}z)) = 0.$$

Пример 28.5. Проинтегрировать уравнение

$$txD^2x + t(Dx)^2 - xDx = 0.$$

Решение. Как и в предыдущем примере, данное уравнение имеет однопараметрическое семейство решений вида $x = c^*$, где c^* — числовой параметр.

Для нахождения других решений воспользуемся (в соответствии с вышеизложенным) соотношениями $Dx = xz$, $D^2x = x(z^2 + Dz)$, которые позволяют переписать исходное ДУ в виде

$$tx^2(z^2 + Dz) + tx^2z - x^2z = 0$$

или, после сокращения на x^2 , в виде

$$2tz^2 + tDz - z = 0.$$

Полученное ДУ делением на $t (\neq 0)$ приводится к ДУ Бернулли, интегрируя которое, находим, что

$$z = \frac{t}{t^2 + c_1}.$$

Возвращаясь к переменной x , приходим к интегрированию ДУ

$$\frac{Dx}{x} = \frac{t}{t^2 + c_1},$$

решая которое, получаем, что $x = c_2 \sqrt{t^2 + c_1}$, где c_1, c_2 — произвольные постоянные, является c -семейством решений исходного ДУ. Полное же семейство решений данного ДУ определяется совокупностью

$$\begin{cases} x = c_2 \sqrt{t^2 + c_1}, \\ x = c^*, \end{cases}$$

где c_1, c_2, c^* — произвольные постоянные.

Обобщенные однородные уравнения

ДУ вида

$$F(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^n x) = 0$$

называется обобщенным однородным ДУ, если существует такое число k , при котором левая часть ДУ становится однородной функцией некоторой степени m относительно всех аргументов в предположении, что $t, x, Dx, D^2x, \dots, D^n x$ считаются переменными соответственно $1, k, k-1, \dots, (k-n)$ -й степеней однородности, т. е.

$$\begin{aligned} F(st, s^k x, s^{k-1} Dx, s^{k-2} D^2x, \dots, s^{k-n} D^n x) &= \\ &= s^m F(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^n x). \end{aligned}$$

Покажем, что если в области задания обобщенного однородного ДУ $t > 0$ ($t < 0$), то с помощью замены

$$t = e^\tau \quad (t = -e^\tau), \quad x = ze^{k\tau}, \quad (28.1)$$

где τ и z — соответственно новая независимая переменная и новая иско-
мая функция, оно приводится к ДУ, не содержащему независимой пере-
менной.

Действительно, пусть $t > 0$ (в случае $t < 0$ доказательство аналогич-
но). Тогда

$$\begin{aligned} Dx &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{1}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{dx}{d\tau} e^{-\tau} = \left(\frac{dz}{d\tau} + kz \right) e^{k\tau} e^{-\tau} = \\ &= \left(\frac{dz}{d\tau} + kz \right) e^{(k-1)\tau}, \end{aligned}$$

т. е.

$$Dx = \left(\frac{dz}{d\tau} + kz \right) e^{(k-1)\tau}.$$

Далее находим, что

$$\begin{aligned} D^2x &= \left(\frac{d^2z}{d\tau^2} + (2k-1) \frac{dz}{d\tau} + k(k-1)z \right) e^{(k-2)\tau}, \dots, \\ D^n x &= \omega \left(z, \frac{dz}{d\tau}, \dots, \frac{d^n z}{d\tau^n} \right) e^{(k-n)\tau}. \end{aligned}$$

Подставив теперь полученные значения $Dx, D^2x, \dots, D^n x$ и значения t, x , определяемые формулами (28.1), в рассматриваемое ДУ, воспользо-
вавшись свойством однородности, после сокращения на множитель $e^{m\tau}$,
мы и придем к искомому ДУ, не содержащему независимой переменной τ .

Покажем на конкретном примере, как находится число k в замене
(28.1) и как строится ДУ, не содержащее независимой переменной τ .

Так, рассмотрим ДУ

$$t^3 D^2x + 2txDx - t^2 (Dx)^2 - x^2 = 0.$$

Для нахождения числа k в замене (28.1) имеем следующую цепочку
равенств:

$$3 + k - 2 = 1 + k + k - 1 = 2 + 2(k - 1) = 2k.$$

Очевидно, что $k = 1$. В таком случае замена имеет вид

$$t = e^\tau, \quad x = ze^\tau, \tag{28.2}$$

а значит,

$$Dx = \frac{dz}{d\tau} + z, \quad D^2x = \left(\frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{dz}{d\tau} \right) e^{-\tau}.$$

После подстановки полученных значений Dx , D^2x и t , x , определяемых формулами (28.2), в исходное ДУ получим ДУ

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{dz}{d\tau} - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = 0,$$

не содержащее независимой переменной τ .

Уравнения в точных производных

ДУ вида

$$F(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^n x) = 0$$

называется ДУ в точных производных, если

$$F(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^n x) = \frac{d}{dt} \Phi(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^{n-1}x).$$

Последнее равенство означает, что функция Φ является для рассматриваемого ДУ первым интегралом, а значит, порядок ДУ можно понизить на единицу.

Пример 28.6. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{D^3x}{D^2x} - \frac{3DxD^2x}{1+(Dx)^2} = 0.$$

Решение. В данном случае

$$\frac{D^3x}{D^2x} - \frac{3DxD^2x}{1+(Dx)^2} = \frac{d}{dt} \left\{ \ln |D^2x| - \frac{3}{2} \ln(1+(Dx)^2) \right\},$$

и, таким образом, исходное ДУ — это уравнение в точных производных. С учетом последнего равенства приходим к ДУ

$$\ln |D^2x| - \frac{3}{2} \ln(1+(Dx)^2) = \ln |c_1|$$

или к ДУ

$$\frac{D^2x}{(1+(Dx)^2)^{\frac{3}{2}}} - c_1 = 0,$$

для которого

$$\frac{D^2x}{(1+(Dx)^2)^{\frac{3}{2}}} - c_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{Dx}{\sqrt{1+(Dx)^2}} - c_1 x \right).$$

Следовательно,

$$\frac{Dx}{\sqrt{1+(Dx)^2}} - c_1 x = c_2.$$

Интегрируя это ДУ, получим c -семейство решений исходного ДУ, определяемое соотношением

$$(t-a)^2 + (x-b)^2 = R^2,$$

где $a = -\frac{c_2}{c_1}$, $b = \frac{c_3}{c_1}$, $R = \frac{1}{c_1}$.

Уравнения, для которых можно указать интегрирующий множитель

Если левая часть ДУ

$$F(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^n x) = 0$$

не является ДУ в точных производных, в некоторых случаях удается найти функцию

$$\mu = \mu(t, x, Dx, D^2x, \dots, D^{n-1}x),$$

после умножения ДУ на которую левая часть полученного уравнения оказывается точной производной. Такая функция и называется *интегрирующим множителем*.

Пример 28.7. Проинтегрировать уравнение

$$xD^2x + 2x^2(Dx)^2 + (Dx)^2 - \frac{2xDx}{t} = 0.$$

Решение. Умножив уравнение на функцию $\mu = \frac{1}{xDx}$, получим ДУ в точных производных

$$\frac{D^2x}{Dx} + 2xDx + \frac{Dx}{x} - \frac{2}{t} = \frac{d}{dt}(\ln|Dx| + x^2 + \ln|x| - 2\ln|t|) = 0,$$

откуда находим, что

$$\ln|Dx| + x^2 + \ln|x| - 2\ln|t| = \ln|c_1|$$

или

$$e^{x^2} x Dx - c_1 t^2 = 0.$$

А поскольку

$$e^{x^2} x Dx - c_1 t^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{c_1}{3} t^3 \right),$$

то равенство

$$\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{c_1}{3}t^3 = c_2,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, определяет c -семейство решений исходного уравнения.

§ 29. ТРИ ВИДА ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

Определение 29.1. Скалярные функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, определенные на промежутке $|a, b|$, называются линейно зависимыми на $|a, b|$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + \dots + \alpha_m\varphi_m(t) = 0 \quad \forall t \in |a, b|. \quad (29.1)$$

З а м е ч а н и е 29.1. Из определения 29.1 следует, в частности, что:

- 1) две функции φ_1 и φ_2 линейно зависимы на промежутке $|a, b|$, если $\frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} = c$, где c — константа, одна и та же для всего промежутка $|a, b|$;
- 2) если хотя бы одна из функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ тождественно равна нулю на промежутке $|a, b|$, то эти функции линейно зависимы на $|a, b|$.

Определение 29.2. Скалярные функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, определенные на промежутке $|a, b|$, называются линейно независимыми на $|a, b|$, если из тождества (29.1) следует, что все $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, m}$.

Определение 29.3. Векторы $h_1, h_2, \dots, h_m$ с одним и тем же числом компонент называются линейно зависимыми, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \dots + \alpha_m h_m \equiv \mathbf{O},$$

где $\mathbf{O}$ — нулевой вектор.

Линейная независимость векторов $h_1, h_2, \dots, h_m$ определяется по аналогии с определением 29.2.

Определение 29.4. Вектор-функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ с одним и тем же числом компонент, определенные на промежутке $|a, b|$, называются линейно зависимыми на $|a, b|$, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + \dots + \alpha_m\varphi_m(t) = \mathbf{O} \quad \forall t \in |a, b|. \quad (29.2)$$

Линейная независимость вектор-функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ определяется по аналогии с определением 29.2.

Выясним теперь связь между понятиями линейной зависимости скалярных функций, векторов и вектор-функций.

Прежде всего заметим, что если тождество (29.2) переписать в виде

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \\ \varphi_{21}(t) \\ \dots \\ \varphi_{n1}(t) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \varphi_{12}(t) \\ \varphi_{22}(t) \\ \dots \\ \varphi_{n2}(t) \end{pmatrix} + \dots + \alpha_m \begin{pmatrix} \varphi_{1m}(t) \\ \varphi_{2m}(t) \\ \dots \\ \varphi_{nm}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \forall t \in [a, b].$$

то последнее тождество равносильно системе тождеств:

$$\alpha_1 \varphi_{i1}(t) + \alpha_2 \varphi_{i2}(t) + \dots + \alpha_m \varphi_{im}(t) \equiv 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (29.3)$$

на $[a, b]$, означающих линейную зависимость i -х компонент в смысле определения 29.1.

Поэтому говорят, что линейная зависимость вектор-функций влечет их *покомпонентную линейную зависимость*.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Так, например, рассмотрим две вектор-функции φ_1 и φ_2 , определяемые равенствами

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Первые компоненты этих вектор-функций совпадают — значит, они линейно зависимы.

Вторые компоненты пропорциональны, и таким образом, они также линейно зависимы. Но если мы попытаемся составить линейную комбинацию из $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, тождественно равную нулю, то из соотношения

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

придем к системе

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, а следовательно, вектор-функции φ_1 и φ_2 линейно независимы.

Таким образом, можно по некоторому набору линейно зависимых скалярных функций строить линейно независимые вектор-функции. Такие линейно независимые вектор-функции можно построить в том случае, когда пропорции между коэффициентами в n тождествах (29.3), участвующих в определении покомпонентной линейной зависимости, оказываются различными.

Но если окажется, что для всех компонент вектор-функций пропорция между коэффициентами будет одна и та же, то из покомпонентной линейной зависимости будет следовать и полная линейная зависимость всех вектор-функций.

Покажем теперь, какая существует связь между линейной зависимостью вектор-функций и линейной зависимостью векторов.

Очевидно, что из линейной зависимости вектор-функций следует, что для каждого фиксированного t^* векторы $\varphi_1(t^*)$, $\varphi_2(t^*)$, ..., $\varphi_m(t^*)$ будут линейно зависимыми. Обратное утверждение, вообще говоря, места не имеет: *из линейной зависимости вектор-функций при каждом фиксированном t^* (т. е. векторов) не следует линейная зависимость вектор-функций.*

Так, например, рассмотрим две вектор-функции φ_1 и φ_2 , определяемые равенствами

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}.$$

В данном случае, например при $t=1$, $t=2$, $t=3$, получаем три пары векторов

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

соответственно. Векторы каждой из этих пар являются линейно зависимыми, поскольку они пропорциональны (с коэффициентами пропорциональности 1, 2, 3 соответственно).

Вместе с тем вектор-функции φ_1 и φ_2 , рассматриваемые на любом интервале (α, β) , линейно независимы, поскольку если попытаться составить линейную комбинацию из $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, тождественно равную нулю, то из соотношения

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

придем к тождеству

$$\alpha_1 + \alpha_2 t \equiv 0,$$

которое имеет место лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Объяснение этого факта состоит в том, что в случае линейной зависимости вектор-функций один и тот же набор констант α_i , $i = \overline{1, m}$, обслуживает все значения t , а в последнем примере для каждого значения t требуется своя пропорция между константами.

Отсюда следует, что понятие линейной зависимости вектор-функций отличается от понятия линейной зависимости векторов.

З а м е ч а н и е 29.2. Обратим внимание и на тот факт, что из линейной зависимости функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ следует их функциональная зависимость (тогда строки матрицы Якоби линейно зависимы и ее ранг меньше m). Обратное же неверно. Например, функции, заданные равенствами $\varphi_1(t, x) = t - x$ и $\varphi_2(t, x) = (t - x)^2$, линейно независимы в любой области, а функционально они зависимы.

Приведем теперь несколько конкретных примеров функций, к рассмотрению которых сводится решение ряда вопросов теории рассматриваемых ниже линейных ОДУ высших порядков.

Пример 29.1. Скалярные функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, заданные равенствами

$$\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = t, \varphi_2(t) = t^2, \dots, \varphi_n(t) = t^n,$$

линейно независимы на любом промежутке.

Доказательство. Предположим, что указанные функции линейно зависимы. Тогда должны существовать постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что на некотором промежутке $|a, b|$ имеет место тождество

$$\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n \equiv 0.$$

Но это невозможно, поскольку полином степени n не может иметь более n различных корней на любом промежутке. Полученное противоречие и доказывает требуемое.

Пример 29.2. Скалярные функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, заданные равенствами

$$\varphi_k(t) = e^{\lambda_k t}, \quad k = \overline{1, n},$$

где постоянные $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, линейно независимы на любом промежутке.

Доказательство проведем, основываясь на методе математической индукции. Итак, при $k=1$ утверждение очевидно. Предполагая тогда, что оно справедливо для $k=n-1$, допустим, что уже n функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно зависимы на некотором промежутке $|a, b|$. В таком случае для любого $t \in |a, b|$ должно выполняться равенство

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha_{n-1} e^{\lambda_{n-1} t} + \alpha_n e^{\lambda_n t} \equiv 0,$$

где не все постоянные $\alpha_i, i = \overline{1, n}$, равны нулю.

Разделив теперь обе части последнего тождества на $e^{\lambda_n t}$ и продифференцировав полученное соотношение по t , получим, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) e^{(\lambda_1 - \lambda_n)t} + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_n) e^{(\lambda_2 - \lambda_n)t} + \dots + \\ + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)t} = 0 \end{aligned}$$

для любого $t \in |a, b|$.

Но в таком случае на промежутке $|a, b|$ справедливо и тождество

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_n)e^{\lambda_1 t} + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_n)e^{\lambda_2 t} + \dots + \\ + \alpha_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)e^{\lambda_{n-1} t} \equiv 0.$$

В силу условий, налагаемых на λ_k , $k = \overline{1, n}$, и предположения о линейной независимости функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$, приходим к выводу, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, а значит, и $\alpha_n = 0$, что противоречит предположению о линейной зависимости функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Полученное противоречие и доказывает сформулированное утверждение.

Пример 29.3. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — произвольные числа, $h_1, h_2, \dots, h_n$ — линейно независимые векторы с $m \geq n$ компонентами каждый. Тогда вектор-функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, определяемые соотношениями

$$\varphi_k(t) = e^{\lambda_k t} h_k, \quad k = \overline{1, n},$$

линейно независимы на любом промежутке.

Доказательство. Предположим, что указанные вектор-функции линейно зависимы на некотором промежутке $|a, b|$. Тогда должны существовать постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} h_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} h_n = 0 \quad \forall t \in |a, b|.$$

Выберем некоторое $t = t_0 \in |a, b|$. В этом случае в силу линейной независимости векторов $h_1, h_2, \dots, h_n$ придем к совокупности равенств

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t_0} = 0, \quad \alpha_2 e^{\lambda_2 t_0} = 0, \quad \dots, \quad \alpha_n e^{\lambda_n t_0} = 0,$$

откуда следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, т. е. получили противоречие с предположением о линейной зависимости рассматриваемых функций. Это противоречие и доказывает требуемое.

Пример 29.4. Скалярные функции, определяемые формулами

$$\varphi_1^0(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \varphi_1^1(t) = t e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad \varphi_1^{n_1}(t) = t^{n_1} e^{\lambda_1 t};$$

$$\varphi_2^0(t) = e^{\lambda_2 t}, \quad \varphi_2^1(t) = t e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad \varphi_2^{n_2}(t) = t^{n_2} e^{\lambda_2 t};$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_p^0(t) = e^{\lambda_p t}, \quad \varphi_p^1(t) = t e^{\lambda_p t}, \quad \dots, \quad \varphi_p^{n_p}(t) = t^{n_p} e^{\lambda_p t},$$

где постоянные $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, линейно независимы на любом промежутке.

Доказательство. Предположим, как и в предыдущем примере, что указанные функции линейно зависимы на некотором промежутке $|a, b|$. Тогда должны существовать постоянные

$$\alpha_1^0, \alpha_1^1, \dots, \alpha_1^{n_1}; \quad \alpha_2^0, \alpha_2^1, \dots, \alpha_2^{n_2}; \quad \dots; \quad \alpha_p^0, \alpha_p^1, \dots, \alpha_p^{n_p},$$

не все равные нулю, такие, что

$$P_{n_1}(t)e^{\lambda_1 t} + P_{n_2}(t)e^{\lambda_2 t} + \dots + P_{n_p}(t)e^{\lambda_p t} = 0 \quad \forall t \in [a, b],$$

где

$$P_{n_i}(t) = \alpha_i^0 + \alpha_i^1 t + \dots + \alpha_i^{n_i} t^{n_i}, \quad i = \overline{1, p},$$

причем хотя бы один из полиномов $P_{n_i} \not\equiv 0$. Пусть (для определенности) $P_{n_p}(t) \not\equiv 0$. Тогда, разделив обе части последнего тождества на $e^{\lambda_1 t}$ и продифференцировав полученное соотношение $(n_1 + 1)$ раз по t придем к тождеству вида

$$Q_{n_2}(t)e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + Q_{n_3}(t)e^{(\lambda_3 - \lambda_1)t} + \dots + Q_{n_p}(t)e^{(\lambda_p - \lambda_1)t} \equiv 0,$$

где существенным является тот факт, что степени полиномов Q_{n_i} и P_{n_i} , $i = \overline{2, p}$, как нетрудно проверить, совпадают. Продолжая указанную процедуру $n_p - 1$ раз, получим тождество

$$R_{n_p}(t)e^{(\lambda_p - \lambda_{p-1})t} = 0 \quad \forall t \in [a, b],$$

которое (в силу того, что степень полинома $R_{n_p}(t)$ равна степени полинома $P_{n_p}(t)$) противоречит тому, что полином $R_{n_p}(t)$ не может тождественно обращаться в нуль на промежутке $[a, b]$ (пример 29.1). Полученное противоречие и доказывает требуемое.

§ 30. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n -ГО ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВРОНСКОГО

Определение 30.1. Линейным скалярным ОДУ n -го порядка в нормальной форме называется уравнение вида

$$D^n x + a_1(t) D^{n-1} x + a_2(t) D^{n-2} x + \dots + a_{n-1}(t) Dx + a_n(t) x = g(t). \quad (30.1)$$

Уравнение (30.1) называется неоднородным, если $g(t) \not\equiv 0$, и однородным, если $g(t) \equiv 0$.

Таким образом, линейное скалярное однородное ОДУ n -го порядка в нормальной форме — это уравнение

$$D^n x + a_1(t) D^{n-1} x + a_2(t) D^{n-2} x + \dots + a_{n-1}(t) Dx + a_n(t) x = 0. \quad (30.2)$$

В дальнейшем будем предполагать, что скалярные функции a_i , $i = \overline{1, n}$, и g определены и непрерывны на некотором сегменте $[a, b]$.

В этом случае, основываясь на теореме Пикара — Линделёфа для линейных систем, заключаем, что для любых заданных $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ начальная задача

$$\begin{cases} D^n x + a_1(t) D^{n-1} x + a_2(t) D^{n-2} x + \dots + a_{n-1}(t) Dx + a_n(t) x = g(t), \\ x(t_0) = 0, \\ Dx(t_0) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ D^{n-1} x(t_0) = 0 \quad (t_0 \in [a, b]) \end{cases}$$

всегда имеет единственное решение, определенное на отрезке $[a, b]$.

Предложение 30.1. Единственным решением начальной задачи

$$\begin{cases} D^n x + a_1(t) D^{n-1} x + a_2(t) D^{n-2} x + \dots + a_{n-1}(t) Dx + a_n(t) x = 0, \\ x(t_0) = 0, \\ Dx(t_0) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ D^{n-1} x(t_0) = 0 \end{cases}$$

является тривиальное решение $x(t) \equiv 0$.

Действительно, то, что $x(t) \equiv 0$ — решение, проверяется непосредственно. Единственность же следует из теоремы Пикара — Линделёфа.

Предложение 30.2 (принцип суперпозиции). Если $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — решения ДУ (30.2), а $c_1, c_2, \dots, c_n$ — вещественные постоянные, то функция φ такая, что

$$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_n \varphi_n(t),$$

также является решением ДУ (30.2).

Предложение 30.3. Если функция $\varphi: t \mapsto U(t) + iV(t)$, где $i = \sqrt{-1}$, — комплексное решение ДУ (30.2) при вещественных функциях U и V , то U и V — вещественные решения ДУ (30.2).

Справедливость двух последних утверждений устанавливается непосредственной проверкой.

Определение 30.2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — скалярные функции, определенные и $(n-1)$ раз непрерывно дифференцируемые на промежутке $[a, b]$. Определителем Вронского¹ (или вронскианом) функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ называется определитель

¹ Вронский (Гене) Юзеф Мария (Wróński (Hoene) H. J. M., 1776—1853), польский математик и философ.

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ D\varphi_1(t) & D\varphi_2(t) & \dots & D\varphi_n(t) \\ D^2\varphi_1(t) & D^2\varphi_2(t) & \dots & D^2\varphi_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-1}\varphi_1(t) & D^{n-1}\varphi_2(t) & \dots & D^{n-1}\varphi_n(t) \end{vmatrix}.$$

Теорема 30.1 (необходимое условие линейной зависимости скалярных функций). Если скалярные функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно зависимы на промежутке $|a, b|$, то $W(t) \equiv 0$ на этом промежутке.

Доказательство. В силу условий теоремы на промежутке $|a, b|$ имеет место тождество

$$\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t) + \dots + \alpha_n\varphi_n(t) \equiv 0,$$

где не все $\alpha_i, i = \overline{1, n}$, равны нулю. Дифференцируя полученное тождество $(n-1)$ раз по t , имеем

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ D\varphi_1(t) \\ D^2\varphi_1(t) \\ \dots \\ D^{n-1}\varphi_1(t) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ D\varphi_2(t) \\ D^2\varphi_2(t) \\ \dots \\ D^{n-1}\varphi_2(t) \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ D\varphi_n(t) \\ D^2\varphi_n(t) \\ \dots \\ D^{n-1}\varphi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Последнее означает, что векторы

$$\begin{pmatrix} \varphi_i(t) \\ D\varphi_i(t) \\ D^2\varphi_i(t) \\ \dots \\ D^{n-1}\varphi_i(t) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n},$$

линейно зависимы, а значит, $W(t) \equiv 0$.

З а м е ч а н и е 30.1. Условие $W(t) = 0 \quad \forall t \in |a, b|$ не является в общем случае достаточным для линейной зависимости на $|a, b|$ скалярных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Так, например, для скалярных функций φ_1 и φ_2 , заданных на интервале $(-1, 1)$ равенствами

$$\varphi_1(t) = t^2, \quad \varphi_2(t) = t|t|,$$

определитель Вронского тождественно равен нулю, но указанные функции линейно независимы, поскольку не существует постоянной α та-

Теорема 30.2 (теорема об определителе Вронского). Следующие утверждения эквивалентны:

$$2) W(t) \equiv 0 \text{ на } |a, b|;$$

3) существует точка $t_0 \in [a, b]$ такая, что $W(t_0) = 0$.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ D\varphi_1(t_0) \\ D^2\varphi_1(t_0) \\ \dots \\ D^{n-1}\varphi_1(t_0) \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \varphi_2(t_0) \\ D\varphi_2(t_0) \\ D^2\varphi_2(t_0) \\ \dots \\ D^{n-1}\varphi_2(t_0) \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} \varphi_n(t_0) \\ D\varphi_n(t_0) \\ D^2\varphi_n(t_0) \\ \dots \\ D^{n-1}\varphi_n(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$
[illegible]
$$\varphi(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t)$$

$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n - \text{решения ДУ (30.2)}).$

¹ Обратим внимание на тот факт, что в общей ситуации из высказывания: $\forall t \in M : A(t)$ совсем не следует, что $\exists t \in M : A(t)$. Так, например, из высказывания: $\forall t \in M : t \in \emptyset$ не следует, что $\exists t \in M : t \in \emptyset$.

В соответствии с принципом суперпозиции функция φ будет решением ДУ (30.2), которое на основании равенств (30.3) удовлетворяет начальным условиям $\varphi(t_0) = D\varphi(t_0) = \dots = D^{n-1}\varphi(t_0) = 0$. Последнее означает, что φ — тривиальное решение (предложение 30.1), а значит, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — линейно зависимые на $|a, b|$ решения ДУ (30.2).

З а м е ч а н и е 30.2. Если число рассматриваемых решений ДУ (30.2) меньше порядка уравнения, то из равенства $W(t_0) = 0$ не следует линейная зависимость решений.

Так, например, для решений ДУ $D^3x = 0$, определяемых равенствами $\varphi_1(t) = t$, $\varphi_2(t) = t^2$, определитель Вронского $W(t) = t^2$, и он обращается в нуль при $t = 0$. Тем не менее указанные решения линейно независимы, поскольку $W(t) \neq 0$ на любом интервале.

Следствие из теоремы 30.2. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) решения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ДУ (30.2) линейно независимы на промежутке $|a, b|$;
- 2) $\forall t \in |a, b| : W(t) \neq 0$;
- 3) $\exists t_0 \in |a, b| : W(t_0) \neq 0$.

Определение 30.3. Базисом (или фундаментальной системой) решений линейного скалярного однородного ОДУ n -го порядка (30.2) на промежутке $|a, b|$ называется совокупность n решений ДУ (30.2), определенных и линейно независимых на $|a, b|$.

Теорема 30.3. Базис решений ДУ (30.2) всегда существует.

Доказательство. Рассмотрим постоянную матрицу

$$\begin{pmatrix} x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_{n-1}^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_{n-1}^n \end{pmatrix}$$

такую, что ее определитель отличен от нуля. По теореме Пикара — Линделёфа для линейных систем существуют решения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ДУ (30.2) такие, что

$$\varphi_i(t_0) = x_0^i, D\varphi_i(t_0) = x_1^i, D^2\varphi_i(t_0) = x_2^i, \dots, D^{n-1}\varphi_i(t_0) = x_{n-1}^i, i = \overline{1, n}.$$

Но в таком случае выбранные решения и будут образовывать базис решений ДУ (30.2).

З а м е ч а н и е 30.3. Из доказательства теоремы 30.3 следует, что ДУ (30.2) имеет бесконечно много базисов решений.

Теорема 30.4 (теорема о полном семействе решений). Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — базис решений ДУ (30.2). Тогда любое решение ДУ (30.2), отличное от базисного, определяется равенством

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t), \quad (30.4)$$

где $c_i, i = \overline{1, n}$, — некоторые вещественные постоянные.

$$\varphi^*(t_0) = x_0^*, D\varphi^*(t_0) = x_1^*, D^2\varphi^*(t_0) = x_2^*, \dots, D^{n-1}\varphi^*(t_0) = x_{n-1}^*.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \dots + c_n\varphi_n(t_0) = x_0^*, \\ c_1D\varphi_1(t_0) + c_2D\varphi_2(t_0) + \dots + c_nD\varphi_n(t_0) = x_1^*, \\ \dots\dots\dots \\ c_1D^{n-1}\varphi_1(t_0) + c_2D^{n-1}\varphi_2(t_0) + \dots + c_nD^{n-1}\varphi_n(t_0) = x_{n-1}^*, \end{array} \right.$$

Таким образом, возможно построить решение вида (30.4), удовлетворяющее тем же начальным условиям, что и решение Φ^* . По теореме существования и единственности эти два решения совпадают, что и означает представимость Φ^* в виде (30.4).

З а м е ч а н и е 30.4. Как указывалось ранее, ДУ (30.2) имеет бесконечно много базисов решений. Тем не менее оказывается, что независимо от выбора базиса решений формула (30.4) описывает, хотя и по-разному, одно и то же множество решений. Подобная ситуация имеет место в линейной алгебре: пространство одно и то же, а базис в нем можно выбирать по-разному.

Следствие из теоремы 30.4. Любые m ($m > n$) решений $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots, \varphi_m$ ДУ (30.2) линейно зависимы.

Доказательство. Предположим, что указанные решения линейно независимы. Тогда тождество

$$\alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t) + \alpha_{n+1} \varphi_{n+1}(t) + \dots + \alpha_m \varphi_m(t) \equiv 0$$

имеет место лишь при

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha_{n+1} = \dots = \alpha_m = 0.$$

Но в таком случае линейно независимыми будут и функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Последнее означает, что, например, решение φ_{n+1} определяется через решения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ посредством формулы (30.4), что противоречит предположению о линейной независимости решений. Полученное противоречие и доказывает следствие.

Покажем теперь как можно построить линейное скалярное однородное ОДУ n -го порядка вида (30.2), если известны n линейно независимых скалярных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Предварительно обозначим через

$$W(x, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

определитель квадратной $(n+1) \times (n+1)$ матрицы, первая строка которой содержит элементы $x, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$, а каждая последующая содержит последовательно производные первой строки до порядка n включительно, т. е. i -я $(2 \leq i \leq n+1)$ строка — это $(i-1)$ -я производная первой строки.

Теорема 30.5. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — скалярные функции, имеющие на промежутке $|a, b|$ непрерывные производные до порядка n включительно, и пусть $W(t) \neq 0$ на $|a, b|$. Тогда существует единственное линейное скалярное однородное ОДУ n -го порядка

$$(-1)^n \frac{W(x, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))}{W(t)} \equiv D^n x + a_1(t) D^{n-1} x + \dots + a_n(t) x = 0, \quad (30.5)$$

одним из базисов которого являются функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$W(\varphi_i(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

так как в рассматриваемом определителе всегда будут два одинаковых столбца. Разложение определителя $W(x, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ по элементам первого столбца как раз и определяет ДУ (30.2). При этом поскольку $W(t) \neq 0$, то функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ образуют базис решений построенного ДУ.

Единственность построенного ДУ вытекает из следующих соображений. Так как функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ оказываются решениями ДУ (30.5), то коэффициенты $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$ должны удовлетворять системе

[illegible]

которую можно рассматривать как линейную неоднородную систему n алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_1, a_2, \dots, a_n$. Эта система всегда имеет относительно указанных неизвестных единственное решение, так как по условию $W(t) \neq 0$, а это и доказывает теорему.

Теорема 30.6. Для того чтобы скалярные аналитические на промежутке $|a, b|$ функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы $W(t) \equiv 0$ на $|a, b|$.

Доказательство. *Необходимость* следует из теоремы (30.1) и без предположения об аналитичности функций.

Достаточность. Прежде всего заметим, что поскольку при $n = 1$ теорема очевидна, то будем предполагать, что $n \geq 2$. Тогда с учетом пункта б) замечания 29.1 можно считать, что при некотором k , по крайней мере, один из определителей Вронского, составленный из k функций ($1 \leq k \leq n - 1$) функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, тождественно отличен от нуля на промежутке $|a, b|$, а все определители Вронского порядка выше k уже тождественно обращаются в нуль на $|a, b|$. В таком случае упорядочив (перенумеровав) соответствующим образом указанные k функций, можем считать, что на промежутке $|a, b|$

$$W(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t)) \neq 0.$$

Отсюда следует, что существует непустой интервал $(c, d) \subset |a, b|$ такой, что для любого $t \in (c, d)$ имеет место неравенство

$$W(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t)) \neq 0.$$

Это неравенство означает (в соответствии с теоремой 30.5) что существует единственное линейное скалярное однородное ОДУ k -го порядка

$$(-1)^k \frac{W(x, \varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t))}{W(\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t))} \equiv D^k x + a_1(t) D^{k-1} x + \dots + a_k(t) x = 0 \quad (30.6)$$

с непрерывными на (c, d) коэффициентами, одним из базисов решений которого являются функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$. По следствию из теоремы 30.4 уравнение (30.6) не может иметь более k линейно независимых на интервале (c, d) решений. Поэтому, замечая, что (в силу предположений) каждая из функций $\varphi_{k+1}, \dots, \varphi_n$ является решением ДУ (30.6), приходим к выводу, что $(k + 1)$ различных функций линейно зависимы на (c, d) . Таким образом, существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$, не все равные нулю, такие, что

$$\varphi(t) \equiv \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \dots + \alpha_{k+1} \varphi_{k+1}(t) = 0 \quad \forall t \in (c, d).$$

Ссылаясь теперь на тот факт, что обращение аналитической функции в тождественный нуль на интервале (c, d) означает обращение в тождественный нуль функции φ и на всем промежутке $|a, b|$, получаем, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k+1}$ линейно зависимы на промежутке $|a, b|$. А тогда линейно зависимыми на $|a, b|$ будут и все функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

З а м е ч а н и е 30.5. Из доказательства теоремы 30.6 следует, что если $W(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \equiv 0$ на $|a, b|$, а $W(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_k(t)) \neq 0$ для любого $t \in |a, b|$, то теорема справедлива и без требования об аналитичности функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$.

§ 31. ФОРМУЛА АБЕЛЯ – ЛИУВИЛЛЯ – ОСТРОГРАДСКОГО

Формула Абеля – Лиувилля – Остроградского¹ — это формула для определителя Вронского решений однородного ДУ (30.2).

Для ее вывода понадобится формула дифференцирования функционального определителя:

$$D \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Da_{11}(t) & Da_{12}(t) & \dots & Da_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ Da_{21}(t) & Da_{22}(t) & \dots & Da_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Da_{n1}(t) & Da_{n2}(t) & \dots & Da_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

т. е. производная функционального определителя n -го порядка представляет собой сумму n определителей, из которых i -й является исходным определителем с продифференцированной одной i -й строкой.

Теорема 31.1. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — решения ДУ (30.2), а $W(t)$ — вронскиан этих решений. Тогда имеет место формула

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau}, \quad (31.1)$$

где $t = t_0$ — любая точка интервала (a, b) , называемая формулой Абеля – Лиувилля – Остроградского.

Доказательство. Запишем определитель Вронского:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ D\varphi_1(t) & D\varphi_2(t) & \dots & D\varphi_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-1}\varphi_1(t) & D^{n-1}\varphi_2(t) & \dots & D^{n-1}\varphi_n(t) \end{vmatrix}.$$

¹ *Абель Нильс Хенрик* (Abel N. H., 1802—1829), норвежский математик; *Остроградский Михаил Васильевич* (1801—1862), российский математик.

Дифференцируя этот определитель, получаем, что

$$DW(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ D\varphi_1(t) & D\varphi_2(t) & \dots & D\varphi_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-2}\varphi_1(t) & D^{n-2}\varphi_2(t) & \dots & D^{n-2}\varphi_n(t) \\ D^n\varphi_1(t) & D^n\varphi_2(t) & \dots & D^n\varphi_n(t) \end{vmatrix}.$$

Умножая элементы первых $(n-1)$ строк определителя соответственно на $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_2(t)$ и прибавляя полученные выражения к элементам последней строки, в силу ДУ (30.2) получим, что

$$DW(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ D\varphi_1(t) & D\varphi_2(t) & \dots & D\varphi_n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{n-2}\varphi_1(t) & D^{n-2}\varphi_2(t) & \dots & D^{n-2}\varphi_n(t) \\ -a_1(t)D^{n-1}\varphi_1(t) & -a_1(t)D^{n-1}\varphi_2(t) & \dots & -a_1(t)D^{n-1}\varphi_n(t) \end{vmatrix} =$$

$$= -a_1(t)W(t)$$

или

$$DW(t) + a_1(t)W(t) = 0. \quad (31.2)$$

Уравнение (31.2) — линейное ДУ 1-го порядка относительно W .

Предположим теперь, что решения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ДУ (30.2) линейно зависимы на интервале (a, b) , тогда формула (31.1) очевидна. Если эти решения линейно независимы, то $W(t) \neq 0$ на (a, b) , и уравнение (31.2) эквивалентно ДУ

$$\frac{dW(t)}{W(t)} = -a_1(t)dt,$$

интегрируя которое в пределах от t_0 до t , приходим к формуле (31.1).

З а м е ч а н и е 31.1. Из формулы (31.1) ясно, почему определитель Вронского либо всегда равен нулю, либо всегда отличен от нуля. Просто он является обычной экспонентой с коэффициентом, который либо равен нулю, либо отличен от нуля.

Покажем теперь, как можно с помощью формулы (31.1) построить полное семейство решений ДУ 2-го порядка

$$D^2x + a_1(t)Dx + a_2(t)x = 0, \quad (31.3)$$

если известно хотя бы одно нетривиальное решение φ_1 ДУ (31.3).

Пусть φ — произвольное решение ДУ (31.3) такое, что $\varphi \neq \varphi_1$. Тогда на основании формулы (31.1) можем записать, что

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi(t) \\ D\varphi_1(t) & D\varphi(t) \end{vmatrix} = c_1 e^{-\int a_1(t) dt}$$

или

$$\varphi_1(t) D\varphi(t) - D\varphi_1(t) \varphi(t) = c_1 e^{-\int a_1(t) dt}.$$

Разделив обе части полученного равенства на $\varphi_1^2(t)$, находим, что

$$D\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)}\right) = \frac{1}{\varphi_1^2(t)} c_1 e^{-\int a_1(t) dt},$$

откуда $\varphi(t)$ определяется следующим образом:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) \left(\int \frac{c_1 e^{-\int a_1(t) dt}}{\varphi_1^2(t)} dt + c_2 \right), \quad (31.4)$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

Итак, если известно нетривиальное решение φ_1 ДУ (31.3), то полное семейство решений ДУ (31.3) задается формулой (31.4), т. е. находится квадратурами.

Следующий вопрос — это понижение порядка линейного однородного ДУ по известному частному решению.

Оказывается, что если φ_1 — частное решение ДУ (30.2) такое, что $\varphi_1(t) \neq 0$, $t \in (a, b)$, то интегрирование ДУ (30.2) можно свести к интегрированию линейного однородного ДУ порядка $n - 1$.

Действительно, сделаем замену искомой функции $x = \varphi_1 z$. Тогда по формуле Ньютона — Лейбница¹ производные $D^k x$, $k = \overline{1, n}$, выражаются в виде

$$D^k x = D^k(\varphi_1 z) = c_k^0 \varphi_1 D^k z + c_k^1 D\varphi_1 D^{k-1} z + \dots + c_k^k D^k \varphi_1 z, \quad k = \overline{1, n},$$

и после подстановки их значений в ДУ (30.2) придем к ДУ вида

$$D^n z + b_1(t) D^{n-1} z + \dots + b_{n-1}(t) Dz + b_n(t) z = 0. \quad (31.5)$$

При выбранной замене решение φ_1 ДУ (30.2) переходит в решение $z \equiv 1$ ДУ (31.5). Отсюда вытекает, что $b_n(t) \equiv 0$. В этом случае подстановка

$$u = Dz = D\left(\frac{x}{\varphi_1}\right) \quad \left(x = \varphi_1 \int u dt\right)$$

¹ *Ньютон Исаак* (Newton I., 1643—1727), английский математик, физик, механик.

приводит ДУ (31.5) (при $b_n(t) \equiv 0$) к ДУ $(n-1)$ -го порядка

$$D^{n-1}u + b_1(t)D^{n-2}u + \dots + b_{n-1}(t)u = 0. \quad (31.6)$$

З а м е ч а н и е 31.2. Отметим, что если ДУ (30.2) имеет k линейно независимых решений $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$, то в соответствии с заменой $x = \varphi_1 z$ для u получаем (как показано выше) ДУ (31.6). Что же касается ДУ (31.6), то оно будет иметь $k-1$ линейно независимых решений

$$u_2 = D\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right), u_3 = D\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\right), \dots, u_k = D\left(\frac{\varphi_k}{\varphi_1}\right),$$

и, как можно показать, порядок ДУ (30.2) можно понизить на k единиц. В самом деле, введем новую функцию

$$v = D\left(\frac{u}{u_2}\right) \left(u = u_2 \int v dt\right).$$

Тогда по предыдущему для v получим ДУ $(n-2)$ -го порядка, для которого известны $(k-2)$ линейно независимых решений

$$v_3 = D\left(\frac{u_3}{u_2}\right), v_4 = D\left(\frac{u_4}{u_2}\right), \dots, v_k = D\left(\frac{u_k}{u_2}\right).$$

Продолжая этот процесс дальше, в конце концов мы и получим однородное линейное уравнение $(n-k)$ -го порядка.

§ 32. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n -ГО ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Далее будем рассматривать скалярные ОДУ n -го порядка вида

$$L_n(x) \equiv D^n x + a_1(t)D^{n-1}x + a_2(t)D^{n-2}x + \dots + a_n(t)x = g(t), \quad (32.1)$$

предполагая, что коэффициенты $a_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, и неоднородность $g(t)$ непрерывны на промежутке $|a, b|$.

Предложение 32.1. Если x — решение неоднородного ДУ (32.1), а y — решение соответствующего однородного ДУ (30.2), то сумма $x + y$ будет решением неоднородного ДУ (32.1).

Доказательство. Так как x — решение ДУ (32.1), а y — решение ДУ (30.2), то имеют место тождества

$$D^n x(t) + a_1(t)D^{n-1}x(t) + a_2(t)D^{n-2}x(t) + \dots + a_n(t)x(t) \equiv g(t)$$

и

$$D^n y(t) + a_1(t) D^{n-1} y(t) + a_2(t) D^{n-2} y(t) + \dots + a_n(t) y(t) \equiv 0.$$

А в таком случае

$$D^n (x(t) + y(t)) + a_1(t) D^{n-1} (x(t) + y(t)) + a_2(t) D^{n-2} (x(t) + y(t)) + \dots + a_n(t) (x(t) + y(t)) \equiv g(t),$$

что и доказывает требуемое.

Аналогичным образом доказывается и следующее предложение.

Предложение 32.2. Если x и y — два решения неоднородного ДУ (32.1), то их разность $x - y$ будет решением однородного ДУ (30.2).

Теорема 32.1 (теорема о полном семействе решений). Полное семейство решений φ неоднородного ДУ (32.1) представляет собой сумму полного семейства решений φ_0 соответствующего однородного ДУ (30.2) и какого-либо частного решения φ^* неоднородного ДУ (32.1), т. е.

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi^*(t). \quad (32.2)$$

З а м е ч а н и е 32.1. Обратим внимание на то, что формула (32.2) дает равенство не функций, а множеств, поскольку как полное семейство решений однородного ДУ (30.2), так и полное семейство решений неоднородного ДУ (32.1) — это множества решений ДУ. Поэтому для доказательства равенства (32.2) необходимо пользоваться методами теории множеств: сначала показать, что любой элемент первого множества принадлежит второму множеству, а потом доказать обратное.

Доказательство теоремы 32.1. Докажем сначала справедливость включения $\varphi(t) \supset \varphi_0(t) + \varphi^*(t)$.

Итак, пусть $\tilde{\varphi}_0(t)$ — произвольное решение однородного ДУ (30.2). Тогда на основании предложения 32.1 сумма $(\tilde{\varphi}_0 + \varphi^*)$ — решение неоднородного ДУ (32.1) и, значит, искомое включение действительно имеет место.

Докажем теперь справедливость обратного включения $\varphi(t) \subset \varphi_0(t) + \varphi^*(t)$. Пусть $\tilde{\varphi}(t)$ — произвольное решение неоднородного ДУ (32.1). Тогда по предложению 32.2 разность $\tilde{\varphi} - \varphi^* = \tilde{\varphi}_0$ будет решением однородного ДУ (30.2). Но в таком случае произвольно взятое решение $\tilde{\varphi}$ неоднородного ДУ (32.1) оказывается равным сумме $\tilde{\varphi}_0 + \varphi^*$, откуда и следует требуемое.

§ 33. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ. МЕТОД КОШИ

Метод вариации произвольных постоянных. Этот метод позволяет найти с помощью квадратур полное семейство решений неоднородного ДУ (32.1), если известен базис решений соответствующего однородного

ДУ (30.2). Полное семейство решений неоднородного ДУ (32.1) ищется, исходя из соотношения

$$\varphi(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t) + \dots + c_n(t)\varphi_n(t), \quad (33.1)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — базис решений однородного ДУ (30.2), $c_1, c_2, \dots, c_n$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции.

Для упрощения процесса нахождения полного семейства решений неоднородного ДУ (32.1) функции c_i , $i = \overline{1, n}$, будем выбирать такими, чтобы

$$\begin{pmatrix} D\varphi(t) \\ D^2\varphi(t) \\ \dots \\ D^{n-1}\varphi(t) \end{pmatrix} = c_1(t) \begin{pmatrix} D\varphi_1(t) \\ D^2\varphi_1(t) \\ \dots \\ D^{n-1}\varphi_1(t) \end{pmatrix} + \dots + c_n(t) \begin{pmatrix} D\varphi_n(t) \\ D^2\varphi_n(t) \\ \dots \\ D^{n-1}\varphi_n(t) \end{pmatrix}, \quad (33.2)$$

т. е. чтобы при многократном дифференцировании функции φ функции c_i , $i = \overline{1, n}$, вели себя как постоянные.

Другими словами, функции c_i , $i = \overline{1, n}$, выбираем такими, чтобы

$$Dc_1(t) \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ D\varphi_1(t) \\ D^2\varphi_1(t) \\ \dots \\ D^{n-2}\varphi_1(t) \end{pmatrix} + \dots + Dc_n(t) \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ D\varphi_n(t) \\ D^2\varphi_n(t) \\ \dots \\ D^{n-2}\varphi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (33.3)$$

А тогда, дифференцируя последнюю строку в векторном равенстве (33.2), получаем, что

$$\begin{aligned} D^n\varphi(t) &= (c_1(t)D^n\varphi_1(t) + \dots + c_n(t)D^n\varphi_n(t)) + \\ &+ (Dc_1(t)D^{n-1}\varphi_1(t) + \dots + Dc_n(t)D^{n-1}\varphi_n(t)). \end{aligned} \quad (33.4)$$

Если теперь подставить выражения для $\varphi(t)$, $D\varphi(t)$, $D^2\varphi(t)$, ..., $D^{n-1}\varphi(t)$ и $D^n\varphi(t)$, определяемые формулами (33.1), (33.2) и (33.4), в неоднородное ДУ (32.1) и учесть, что $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — решения однородного ДУ (30.2), то приходим к равенству

$$Dc_1(t)D^{n-1}\varphi_1(t) + \dots + Dc_n(t)D^{n-1}\varphi_n(t) = g(t). \quad (33.5)$$

Таким образом, с учетом формул (33.3) и (33.5) имеем следующую линейную неоднородную систему n алгебраических уравнений относительно неизвестных $Dc_i(t)$, $i = \overline{1, n}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} Dc_1(t)\varphi_1(t) + \dots + Dc_n(t)\varphi_n(t) = 0, \\ Dc_1(t)D\varphi_1(t) + \dots + Dc_n(t)D\varphi_n(t) = 0, \\ Dc_1(t)D^2\varphi_1(t) + \dots + Dc_n(t)D^2\varphi_n(t) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ Dc_1(t)D^{n-2}\varphi_1(t) + \dots + Dc_n(t)D^{n-2}\varphi_n(t) = 0, \\ Dc_1(t)D^{n-1}\varphi_1(t) + \dots + Dc_n(t)D^{n-1}\varphi_n(t) = g(t). \end{array} \right. \quad (33.6)$$

Определитель системы (33.6) — это определитель Вронского, поэтому, решая систему по правилу Крамера¹, можем найти

$$Dc_i(t) = \psi_i(t), \quad i = \overline{1, n},$$

и следовательно, функции $c_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, находятся квадратурами:

$$c_i(t) = \int \psi_i(t) dt + c_i^0, \quad i = \overline{1, n},$$

где c_i^0 — произвольные постоянные.

Таким образом, полное семейство решений неоднородного ДУ (32.1) задается формулой

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) \int \psi_1(t) dt + \dots + \varphi_n(t) \int \psi_n(t) dt + \sum_{i=1}^n c_i^0 \varphi_i(t),$$

где c_i^0 — произвольные постоянные.

Пример 33.1. Найти полное семейство решений ДУ

$$D^2x + x = \frac{1}{\cos t}.$$

Решение. Непосредственно можно проверить, что полное семейство решений соответствующего однородного ДУ

$$D^2x + x = 0$$

задается формулой

$$\varphi_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, и тогда система (33.6) в данном случае имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} Dc_1(t) \cos t + Dc_2(t) \sin t = 0, \\ -Dc_1(t) \sin t + Dc_2(t) \cos t = \frac{1}{\cos t}. \end{array} \right.$$

¹ Крамер Габриель (Cramer G., 1704—1752), швейцарский математик.

Отсюда находим, что $Dc_1(t) = -\sin t / \cos t$, а $Dc_2(t) = 1$. После интегрирования имеем

$$c_1(t) = \ln|\cos t| + c_1^0, \quad c_2(t) = t + c_2^0$$

и, значит, полное семейство решений заданного ДУ определяется соотношением

$$\varphi(t) = (\ln|\cos t| + c_1^0)\cos t + (t + c_2^0)\sin t.$$

Метод Коши. Метод Коши применяют для нахождения частного решения линейного неоднородного ДУ (32.1). Перейдем к его изложению.

Из теоремы Пикара — Линделёфа, относящейся к линейным ДУ, следует, что для таких уравнений можно решать любую начальную задачу. В частности, если $g(t) \equiv 0$, то всегда существует решение K начальной задачи

$$\begin{cases} D^n x + a_1(t)D^{n-1}x + \dots + a_{n-1}(t)Dx + a_n(t)x = 0, \\ x(s) = 0, \\ Dx(s) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ D^{n-2}x(s) = 0, \\ D^{n-1}x(s) = 1 \quad (s = t_0). \end{cases} \quad (33.7)$$

Далее, замечая, что решение K начальной задачи (33.7) является функцией не только t , но и зависит от начальной точки s , то этот факт подчеркнем записью $K = K(t, s)$.

В теории ДУ функцию K обычно называют *функцией Коши*. Из построения функции Коши следует, что эта функция определена для всех $a \leq t, s \leq b$, причем при каждом фиксированном значении s функция K удовлетворяет однородному ДУ (30.2), т. е.

$$D^n K(t, s) + a_1(t)D^{n-1}K(t, s) + \dots + a_n(t)K(t, s) \equiv 0, \quad (33.8)$$

и при этом

$$\begin{aligned} K(s, s) = DK(s, s) = D^2 K(s, s) = \dots = D^{n-2} K(s, s) = 0, \\ D^{n-1} K(s, s) = 1. \end{aligned} \quad (33.9)$$

Теорема 33.1. Функция φ^* , определяемая равенством

$$\varphi^*(t) = \int_{t_0}^t K(t, s)g(s)ds, \quad (33.10)$$

является решением неоднородного ДУ (32.1) с начальными условиями

$$\varphi^*(t_0) = D\varphi^*(t_0) = D^2\varphi^*(t_0) = \dots = D^{n-1}\varphi^*(t_0) = 0.$$

$$D \int_{t_0}^t \psi(t, s) ds = \int_{t_0}^t D\psi(t, s) ds + \psi(t, t),$$
$$\begin{aligned} D\varphi^*(t) &= \int_{t_0}^t DK(t,s)g(s)ds, \\ D^2\varphi^*(t) &= \int_{t_0}^t D^2K(t,s)g(s)ds, \\ . &\dots\dots\dots(33.11) \\ {}^{n-1}\varphi^*(t) &= \int_{t_0}^t D^{n-1}K(t,s)g(s)ds, \\ \psi^*(t) &= \int_{t_0}^t D^n K(t,s)g(s)ds + g(t). \end{aligned}$$
$$\int_{t_0}^t L_n(K(t, s))g(s)ds + g(t) \equiv g(t)$$

З а м е ч а н и е 33.1. Формулу (33.10) обычно называют *формулой Коши*.

$$D^2x + a^2x = t,$$
$$D^2x + a^2x = 0$$
$$\varphi_0(t) = c_1 \cos at + c_2 \sin at,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. А тогда условия (33.9) приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}c_1 \cos as + c_2 \sin as &= 0, \\ -ac_1 \sin as + ac_2 \cos as &= 1.\end{aligned}$$

Отсюда находим, что $c_1 = -\frac{1}{a} \sin as$, $c_2 = \frac{1}{a} \cos as$. Таким образом,

$$K(t, s) = \frac{1}{a} \sin(t - s).$$

Выбрав теперь, например, $t_0 = 0$, частное решение φ^* заданного ДУ тогда определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi^*(t) &= \frac{1}{a} \int_0^t s \sin a(t-s) ds = \frac{1}{a^2} \int_0^t s d(\cos a(t-s)) = \\ &= \frac{1}{a^2} \left(s \cos a(t-s) \Big|_0^t - \int_0^t \cos a(t-s) ds \right) = \\ &= \frac{t}{a^2} + \frac{1}{a^3} \sin a(t-s) \Big|_0^t = \frac{t}{a^2} + \frac{1}{a^3} \sin at.\end{aligned}$$

Итак, $\varphi^*(t) = \frac{t}{a^2} + \frac{1}{a^3} \sin at$.

§ 34. ЛИНЕЙНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n -го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Далее рассмотрим ОДУ вида

$$D^n x + a_1 D^{n-1} x + a_2 D^{n-2} x + \dots + a_{n-1} D x + a_n x = 0, \quad (34.1)$$

где $a_i, i = \overline{1, n}$, — вещественные постоянные.

Если ввести в рассмотрение линейный дифференциальный оператор

$$L_n(D) \equiv D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1} D + a_n,$$

т. е. многочлен от символа операции дифференцирования по t , то ДУ (34.1) можно переписать в виде

$$L_n(D)x = 0. \quad (34.2)$$

Отметим два свойства оператора $L_n(D)$:

1) $L_n(D)e^{\lambda t} = e^{\lambda t} L_n(\lambda)$, где $L_n(\lambda)$ — многочлен n -й степени относительно константы λ , т. е.

$$L_n(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n.$$

Этот многочлен называют *характеристическим многочленом ДУ* (34.2), а уравнение

$$L_n(\lambda) = 0 \quad (34.3)$$

характеристическим уравнением ДУ (34.2).

2) $L_n(D)(e^{\lambda t} x) = e^{\lambda t} L_n(D + \lambda)x$ (формула сдвига).

Справедливость свойства 1) очевидна.

Докажем свойство 2). В соответствии с формулой Ньютона — Лейбница для k -й производной от произведения двух функций имеем

$$D^k(e^{\lambda t} x) = \sum_{j=0}^k c_k^j D^j e^{\lambda t} D^{k-j} x = e^{\lambda t} \left(\sum_{j=0}^k c_k^j \lambda^j D^{k-j} \right) x = e^{\lambda t} (D + \lambda)^k x.$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_n(D)(e^{\lambda t} x) &= e^{\lambda t} \left((D + \lambda)^n x + a_1 (D + \lambda)^{n-1} x + \dots + \right. \\ &\quad \left. + a_{n-1} (D + \lambda)x + a_n x \right) = e^{\lambda t} L_n(D + \lambda)x. \end{aligned}$$

Определение 34.1. Пусть $L(\lambda)$ — некоторый многочлен от λ , а λ_0 — его нуль. Говорят, что λ_0 является k -кратным нулем многочлена $L(\lambda)$, если $L_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k L^*(\lambda)$, где $L^*(\lambda)$ — многочлен такой, что $L^*(\lambda_0) \neq 0$.

Лемма 34.1. Если λ_0 — корень характеристического уравнения (34.3), то функция $\varphi: t \mapsto e^{\lambda_0 t}$ — решение ДУ (34.2).

Доказательство. По условию $L_n(\lambda_0) = 0$. А в таком случае

$$L_n(D)e^{\lambda_0 t} = e^{\lambda_0 t} L_n(\lambda_0) = 0.$$

Лемма 34.2. Если λ_0 — корень характеристического уравнения (34.3) кратности k , то функции

$$\varphi_m: t \mapsto t^m e^{\lambda_0 t}, \quad m = \overline{1, k-1},$$

решения ДУ (34.2).

Доказательство. Прежде всего заметим, что, не ограничивая общности рассуждений, можно считать $\lambda_0 = 0$, поскольку при $\lambda_0 \neq 0$ замена

$$x = e^{\lambda_0 t} y$$

приводит (с учетом формулы сдвига) исходное ДУ к уравнению

$$L_n(D + \lambda_0)y = 0,$$

для которого характеристическое уравнение примет вид

$$L_n(\lambda + \lambda_0) = 0. \quad (34.4)$$

А так как λ_0 является k -кратным корнем уравнения (34.3), то $\lambda = 0$ — это k -кратный корень уравнения (34.4).

Итак, пусть $\lambda_0 = 0$ — k -кратный корень уравнения (34.3). Это означает, что

$$L_n(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-k} \lambda^k,$$

и таким образом, ДУ (34.2) принимает вид

$$D^n x + a_1 D^{n-1} x + a_2 D^{n-2} x + \dots + a_{n-k} D^k x = 0.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что функции, определяемые соотношениями

$$\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = t, \varphi_2(t) = t^2, \dots, \varphi_{k-1}(t) = t^{k-1},$$

являются решениями последнего ДУ, а это и доказывает лемму.

Теорема 34.1. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — различные корни характеристического уравнения (34.3), то полное семейство решений ДУ (34.1) определяется равенством

$$\varphi_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}, \quad (34.5)$$

где $c_i, i = \overline{1, n}$, — произвольные постоянные.

Доказательство. В соответствии с леммой 34.1 каждая из функций $\varphi_i : t \mapsto e^{\lambda_i t}$, $i = \overline{1, n}$, является решением ДУ (34.1), причем эти функции линейно независимы на любом промежутке $|a, b|$ (см. пример 29.2). Завершает доказательство теоремы ссылка на теорему 30.4.

Замечание 34.1. Если все числа λ_i , $i = \overline{1, n}$, вещественные, то формула (34.5) дает полное семейство вещественных решений ДУ (34.1). Если же среди корней λ_i характеристического уравнения (34.3) есть комплексные и, например, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$, — корень характеристического уравнения (34.3), то и $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ — также является корнем данного уравнения. Этим корням соответствуют комплексные решения:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{(\alpha + \beta i)t} = u_1(t) + i u_2(t), \\ x_2(t) &= e^{(\alpha - \beta i)t} = u_1(t) - i u_2(t), \end{aligned} \quad (34.6)$$

где $u_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$, $u_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$.

В соответствии с предложением 30.3 функции u_1 и u_2 — вещественные решения ДУ (34.1).

Теорема 34.2. Пусть среди базисных решений $e^{\lambda_i t}$, $i = \overline{1, n}$, ДУ (34.1) имеются комплексные решения. Тогда если каждую пару комплексно со-

пряженных решений x_1 и x_2 вида (34.6) заменить парой вещественных решений вида u_1 и u_2 , а вещественные решения, определяемые равенствами $x_j(t) = e^{\lambda_j t}$, переобозначить как u_j , то вещественные решения $u_1, u_2, \dots, u_n$ линейно независимы на любом промежутке $|a, b|$.

Доказательство. Пусть искомые функции линейно зависимы на некотором промежутке $|a, b|$. Тогда существуют постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$ (вещественные или комплексные), не все равные нулю, такие, что

$$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t) = 0 \quad \forall t \in |a, b|$$

$$\left(u_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), u_2 = \frac{1}{2i}(x_1 - x_2) \right).$$

Выразим $u_1, u_2, \dots, u_n$ через $x_1, x_2, \dots, x_n$. Имеем

$$d_1 x_1(t) + d_2 x_2(t) + \dots + d_n x_n(t) = 0 \quad \forall t \in |a, b|,$$

где

$$d_1 = (c_1 - ic_2)/2, \quad d_2 = (c_1 + ic_2)/2,$$

и аналогично для коэффициентов d_{2p-1}, d_{2p} всех комплексных пар-решений x_{2p-1}, x_{2p} . Для вещественных решений x_r имеем $u_r(t) = x_r(t)$, $d_r = c_r$.

А в таком случае если хотя бы одна константа $c_j \neq 0$, то найдется константа $d_k \neq 0$, и значит, функции $x_1, x_2, \dots, x_n$ будут линейно зависимыми, что вступит в противоречие с доказанным ранее. Следовательно, все $c_j = 0$, а значит, решения $u_1, u_2, \dots, u_n$ ДУ (34.1) линейно независимы на $|a, b|$. Теорема доказана.

Вывод. В случае различных корней характеристического уравнения (34.3) существует базис решений, состоящий из функций $e^{\lambda_j t}$ для каждого вещественного λ_j и функций $e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t$ для каждой пары комплексных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i, \beta \neq 0$.

Пример 34.1. Построить полное семейство решений ДУ

$$D^3 x + 3D^2 x + 9Dx - 13x = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = -2 \pm 3i$. Корню λ_1 соответствует решение x_1 , определяемое равенством $x_1(t) = e^t$, а паре комплексно сопряженных корней $\lambda_{2,3} = -2 \pm 3i$ соответствуют вещественные решения x_2, x_3 , определяемые равенствами

$$x_2(t) = e^{-2t} \cos 3t, x_3(t) = e^{-2t} \sin 3t.$$

Полное семейство решений тогда задается равенством

$$x_0(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \cos 3t + c_3 e^{-2t} \sin 3t,$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Теорема 34.3. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — различные корни характеристического уравнения (34.3) кратностей $k_1, k_2, \dots, k_m$ ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$) соответственно, то полное семейство решений ДУ (34.1) определяется равенством

$$\varphi_0(t) = (c_0^1 + c_1^1 t + \dots + c_{k_1-1}^1 t^{k_1-1}) e^{\lambda_1 t} + \dots + \\ + (c_0^m + c_1^m t + \dots + c_{k_m-1}^m t^{k_m-1}) e^{\lambda_m t},$$

где c_k^j , $k = \overline{0, k_m-1}$, $j = \overline{1, m}$, — произвольные постоянные.

Доказательство. Из леммы 34.2 следует, что функции

$$\varphi_0^1 : t \mapsto e^{\lambda_1 t}, \varphi_1^1 : t \mapsto t e^{\lambda_1 t}, \dots, \varphi_{k_1-1}^1 : t \mapsto t^{k_1-1} e^{\lambda_1 t}, \dots, \\ \varphi_0^m : t \mapsto e^{\lambda_m t}, \varphi_1^m : t \mapsto t e^{\lambda_m t}, \dots, \varphi_{k_m-1}^m : t \mapsto t^{k_m-1} e^{\lambda_m t}$$

являются решениями ДУ (34.1), причем эти функции линейно независимы на любом промежутке $|a, b|$ (см. пример 29.4) и их число равно n . Тогда из теоремы 30.4 и следует справедливость сформулированного утверждения.

З а м е ч а н и е 34.2. Если характеристическое уравнение (34.3) имеет комплексный корень $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$, то у него есть и сопряженный корень $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, при этом оба эти корня имеют одну и ту же кратность k_1 . А тогда, как и в случае простых корней характеристического уравнения, каждые два комплексно сопряженных решения

$$t^s e^{(\alpha+\beta i)t}, t^s e^{(\alpha-\beta i)t} \quad (0 \leq s \leq k_1 - 1)$$

можно заменить вещественными решениями

$$t^s e^{\alpha t} \cos \beta t, t^s e^{\alpha t} \sin \beta t \quad (0 \leq s \leq k_1 - 1).$$

Все решения такого вида вместе с решениями вида $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$ для вещественных корней λ характеристического уравнения образуют базис решений ДУ (34.1).

Пример 34.2. Проинтегрировать ДУ

$$D^3 x + 2D^2 x - 4Dx - 8x = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda - 8 \equiv (\lambda + 2)(\lambda^2 - 4) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -2$. Базис решений здесь — это функции, определяемые равенствами

$$x_1(t) = e^{2t}, x_2(t) = e^{-2t}, x_3(t) = t e^{-2t}.$$

В таком случае полное семейство решений данного ДУ определяется соотношением

$$\varphi_0(t) = c_1 e^{2t} + (c_2 + c_3 t) e^{-2t},$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Пример 34.3. Проинтегрировать ДУ

$$D^6 x - 16D^3 x + 64x = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^6 - 16\lambda^3 + 64 \equiv (\lambda^3 - 8)^2 \equiv (\lambda - 2)^2 (\lambda^2 + 2\lambda + 4)^2 = 0$$

имеет корни $\lambda_{1,2} = 2, \lambda_{3,4} = -1 + i\sqrt{3}, \lambda_{5,6} = -1 - i\sqrt{3}$.

Полное семейство решений исходного ДУ определяется равенством

$$x_0(t) = (c_1 + c_2 t) e^{2t} + (c_3 + c_4 t) e^{-t} \cos \sqrt{3}t + (c_5 + c_6 t) e^{-t} \sin \sqrt{3}t,$$

где $c_1, \dots, c_6$ — произвольные постоянные.

§ 35. УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Уравнением Эйлера называется уравнение вида

$$t^n D^n x + a_1 t^{n-1} D^{n-1} x + \dots + a_{n-1} t D x + a_n x = f(t), \quad (35.1)$$

где $a_i, i = \overline{1, n}$, — вещественные постоянные, а f — непрерывная на промежутке $|a, b|$ функция.

Уравнение Эйлера называется *неоднородным*, если $f(t) \not\equiv 0$, и *однородным*, если $f(t) \equiv 0$.

Уравнение Эйлера сводится к линейному ДУ с постоянными коэффициентами заменой независимой переменной

$$t = e^\tau, \text{ если } t > 0, \text{ или } t = -e^\tau, \text{ если } t < 0.$$

Действительно, при $t > 0$ (если $t < 0$, то рассуждения аналогичны) имеем следующие равенства:

$$Dx = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = x'_\tau \tau'_t = \frac{x'_\tau}{t'_\tau} = \frac{x'_\tau}{e^\tau} = e^{-\tau} x'_\tau \equiv A,$$

$$D^2 x = DA = \frac{dA}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{A'_\tau}{e^\tau} = \frac{-e^{-\tau} x'_\tau + e^{-\tau} x''_\tau}{e^\tau} = e^{-2\tau} (x''_\tau - x'_\tau) \equiv B,$$

$$\begin{aligned} D^3 x = DB &= \frac{B'_\tau}{e^\tau} = e^{-\tau} (-2e^{-2\tau} (x''_\tau - x'_\tau) + e^{-2\tau} (x'''_\tau - x''_\tau)) = \\ &= e^{-3\tau} (x'''_\tau - 3x''_\tau + 2x'_\tau). \end{aligned}$$

Если теперь $D_\tau^s = \frac{d^s}{d\tau^s}$ — символ оператора дифференцирования s раз по τ , а

$$\mathcal{L}_m(D_\tau)x = D_\tau^m x + a_{m,1}D_\tau^{m-1}x + a_{m,2}D_\tau^{m-2}x + \dots + a_{m,m-1}D_\tau x,$$

где $a_{i,j}$ — вещественные постоянные, то по индукции можно показать, что

$$D^k x = e^{-k\tau} \mathcal{L}_k(D_\tau)x. \quad (35.2)$$

В самом деле, предположим, что формула (35.2) верна для некоторого k . Тогда если обозначить $e^{-k\tau} \mathcal{L}_k(D_\tau)x \equiv c$, то

$$\begin{aligned} D^{k+1}x &= \frac{dc}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{c'_\tau}{e^\tau} = e^{-\tau} \left(-k e^{-k\tau} \mathcal{L}_k(D_\tau)x + e^{-k\tau} D_\tau \mathcal{L}_k(D_\tau)x \right) = \\ &= e^{-(k+1)\tau} \mathcal{L}_{k+1}(D_\tau)x, \end{aligned}$$

что и доказывает требуемое.

Подставляя значения производных $D^k x$, определяемых формулами (35.2) при $k = 1, 2, \dots, n$ в ДУ (35.1), мы и получим линейное ДУ с постоянными коэффициентами

$$D_\tau^n x + b_1 D_\tau^{n-1} x + b_2 D_\tau^{n-2} x + \dots + b_{n-1} D_\tau x + b_n x = f^*(\tau). \quad (35.3)$$

З а м е ч а н и е 35.1. Для однородного ДУ (35.3) ($f^*(\tau) \equiv 0$) характеристическое уравнение можно написать, не пересчитывая производные.

Действительно, так как характеристическое уравнение для ДУ (35.3) при $f^*(\tau) \equiv 0$ получается подстановкой в ДУ (35.3) $x = e^{\lambda\tau}$ и сокращением затем на общий множитель $e^{\lambda\tau}$, то в соответствии с заменой $t = e^\tau$ имеем $e^{\lambda\tau} = t^\lambda$, откуда следует, что $x = t^\lambda$.

Поэтому для получения искомого характеристического уравнения надо подставить $x = t^\lambda$ в ДУ (35.1) (при $f(t) \equiv 0$) и сократить на t^λ . В результате получим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1) + a_1\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2) + \dots + \\ + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \end{aligned} \quad (35.4)$$

Таким образом, при построении уравнения (35.4) каждое произведение $t^k D^k x$ в ДУ (35.1) заменяется на произведение k убывающих на 1 чисел: $\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)$.

Тогда ясно, что если λ_0 — корень уравнения (35.4), то $x = t^{\lambda_0}$ — решение однородного ДУ (35.1) ($x = e^{\lambda_0\tau}$ — решение однородного ДУ (35.3)). Если же λ_0 — корень уравнения (35.4) кратности k , то функции

$$\psi_0 : \tau \mapsto e^{\lambda_0 \tau}, \psi_1 : \tau \mapsto \tau e^{\lambda_0 \tau}, \dots, \psi_{k-1} : \tau \mapsto \tau^{k-1} e^{\lambda_0 \tau} —$$

решения однородного ДУ (35.3), и поэтому, учитывая, что $\tau = \ln t$, приходим к выводу, что функции

$$\varphi_0 : t \mapsto t^{\lambda_0}, \varphi_1 : t \mapsto (\ln t) t^{\lambda_0}, \varphi_2 : t \mapsto (\ln t)^2 t^{\lambda_0}, \dots, \\ \varphi_{k-1} : t \mapsto (\ln t)^{k-1} t^{\lambda_0},$$

где $t > 0$, — решения однородного ДУ Эйлера (35.1).

Таким образом, на основании теорем 34.1 и 34.3 имеют место два следующих утверждения.

Теорема 35.1. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — различные корни характеристического уравнения (35.4), то полное семейство решений однородного ДУ (35.1) определяется равенством

$$\varphi(t) = c_1 t^{\lambda_1} + c_2 t^{\lambda_2} + \dots + c_n t^{\lambda_n},$$

где $c_i, i = \overline{1, n}$, — произвольные постоянные.

Теорема 35.2. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — различные корни характеристического уравнения (35.4) кратностей $k_1, k_2, \dots, k_m$ ($k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$) соответственно, то полное семейство решений однородного ДУ (35.1) определяется равенством

$$\varphi(t) = \left(c_0^1 + c_1^1 \ln t + \dots + c_{k_1-1}^1 (\ln t)^{k_1-1} \right) t^{\lambda_1} + \dots + \\ + \left(c_0^m + c_1^m \ln t + \dots + c_{k_m-1}^m (\ln t)^{k_m-1} \right) t^{\lambda_m},$$

где $c_k^j, k = \overline{0, k_m-1}, j = \overline{1, m}$, — произвольные постоянные.

З а м е ч а н и е 35.2. В случае комплексных корней характеристического уравнения (35.4) для получения вещественных решений поступают так же, как и в случае линейных ДУ.

Пример 35.1. Проинтегрировать ДУ

$$t^3 D^3 x - t^2 D^2 x + 2t D x - 2x = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) - \lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0.$$

Его корни — это $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Таким образом, полное семейство решений определяется равенством

$$\varphi(t) = c_1 t^2 + (c_2 + c_3 \ln t) t,$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

§ 36. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТНОГО РЕШЕНИЯ СКАЛЯРНОГО НЕОДНОРОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ n -ГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Определение 36.1. Квазиполиномом называется функция

$$Q : t \mapsto \sum_{j=1}^m P_j(t) e^{\lambda_j t},$$

где λ_j — постоянные (вообще говоря, комплексные), а $P_j(t)$ — полином степени j относительно t .

Рассмотрим ДУ

$$L_n(D)x = Q(t), \quad (36.1)$$

где Q — квазиполином.

ДУ (36.1) является частным случаем ДУ вида

$$L_n(D)x = g(t), \quad (36.2)$$

где g — произвольная непрерывная функция, но его выделяют среди уравнений вида (36.2) потому, что частное решение такого ДУ всегда может быть найдено методом неопределенных коэффициентов.

Для простоты изложения метода построения частного решения в рассматриваемом случае дальнейшие рассуждения проведем для ДУ

$$L_n(D)x = P_m(t) e^{\alpha t}, \quad (36.3)$$

где α — некоторая постоянная (вообще говоря, комплексная), а $P_m(t)$ — полином степени m относительно t .

Теорема 36.1. Если α не является корнем характеристического уравнения $L_n(\lambda) = 0$, то частное решение φ^* ДУ (36.3) задается равенством

$$\varphi^*(t) = Q_m(t) e^{\alpha t},$$

где $Q_m(t)$ — полином степени m относительно t .

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 34.2, можно считать, что $\alpha = 0$. В этом предположении, полагая

$$P_m(t) = c_0 t^m + c_1 t^{m-1} + \dots + c_{m-1} t + c_m,$$

решение φ^* ДУ (36.3) будем искать в виде

$$\varphi^*(t) = b_0 t^m + b_1 t^{m-1} + \dots + b_{m-1} t + b_m.$$

Подставляя тогда значение φ^* , выраженное последней формулой, а также значения соответствующих производных функции φ^* в ДУ (36.3) и приравнявая затем коэффициенты при одинаковых степенях t , получим

$$D^{k-1}x = \int_0^t R_m(\tau) d\tau + c = tR_m^{(1)}(t) + c,$$

где $R_m^{(1)}(t)$ — полином степени m относительно t .

Полагая в последнем соотношении $c = 0$ и интегрируя ДУ

$$D^{k-1}x = tR_m^{(1)}(t)$$

$(k-1)$ раз в пределах от 0 до t , считая каждый раз соответствующие постоянные равными нулю, мы и получим, что

$$x(t) = t^k Q_m(t),$$

где $Q_m(t)$ — полином степени m относительно t .

Замечание 36.1. Случай, когда правая часть уравнения (36.2) имеет вид

$$f(t) = e^{\alpha t} (P_m(t) \cos \beta t + Q_l(t) \sin \beta t), \quad (36.6)$$

где $P_m(t)$ и $Q_l(t)$ — полиномы степени m и l соответственно, α и β — вещественные числа, сводится к случаю уравнения вида (36.3).

Действительно, воспользовавшись формулами

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

получим, что

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\alpha t} \left(P_m(t) \frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} + Q_l(t) \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i} \right) = \\ &= \frac{1}{2} e^{(\alpha+i\beta)t} (P_m(t) - iQ_l(t)) + \frac{1}{2} e^{(\alpha-i\beta)t} (P_m(t) + iQ_l(t)) = \\ &= e^{\mu t} R_s(t) + e^{\bar{\mu} t} \bar{R}_s(t), \end{aligned}$$

где через μ обозначено комплексное число $\alpha + i\beta$, а через $R_s(t)$ — полином $\frac{1}{2}(P_m(t) - iQ_l(t))$, имеющий степень s — максимальную из степеней полиномов $P_m(t)$ и $Q_l(t)$.

При этом примечательно то, что слагаемые в получившейся сумме комплексно сопряжены друг с другом, и поэтому, если будет найдено решение z ДУ с правой частью $h(t) = e^{\mu t} R_s(t)$, то для ДУ с правой частью $\bar{h}(t) = e^{\bar{\mu} t} \bar{R}_s(t)$ решением будет функция $\bar{z}(t)$, а для правой части $f(t)$ — функция $x = z + \bar{z}$, и таким образом, достаточно найти решение для правой части $h(t)$.

Отметим и следующее. При интегрировании конкретных ДУ не обязательно в случае правой части вида (36.6) преобразовывать ее к сумме двух комплексно сопряженных слагаемых, поскольку из замечания 36.1 и теоремы 36.1 и 36.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 36.3. Если число $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения $L_n(\lambda) = 0$ кратности k (включая случай $k = 0$), то ДУ $L_n(D)x = f(t)$, где функция f задана в виде (36.6), имеет единственное решение вида

$$\varphi^*(t) = t^k e^{\alpha t} (P_s(t) \cos \beta t + Q_s(t) \sin \beta t), \quad (36.7)$$

где $P_s(t)$ и $Q_s(t)$ — полиномы степени s ($s = \max\{m, l\}$).

З а м е ч а н и е 36.2. Обратим внимание на то, что если в формуле (36.6) одна из функций P_m или Q_l тождественно обращается в нуль, частное решение φ^* ДУ $L_n(D)x = f(t)$ ищется тем не менее в виде (36.7).

З а м е ч а н и е 36.3. В литературе случай, который описывается теоремой 36.1, называют нерезонансным, а тот, что описывается теоремой 36.2 — резонансным.

§ 37. НУЛИ ГРАФИКОВ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА

Далее рассмотрим ДУ вида

$$D^2x + a_1(t)Dx + a_2(t)x = 0 \quad (37.1)$$

в предположении, что функции a_1 , Da_1 , a_2 непрерывны на сегменте $[a, b]$.

Интересуясь только вещественными решениями, выясним вопрос о распределении на временной оси нулей графиков таких решений, т. е. значений t , при которых $\varphi(t) = 0$, где φ — решение ДУ (37.1).

Предварительно заметим, что, не ограничивая общности рассуждений, вместо ДУ (37.1) можно рассматривать ДУ

$$D^2x + G(t)x = 0, \quad (37.2)$$

где функция G непрерывна на $[a, b]$.

Действительно, при сделанных предположениях относительно ДУ (37.1) от него всегда можно перейти к ДУ вида (37.2), если сделать замену переменных

$$x(t) = z(t) \exp\left(-\frac{1}{2} \int a_1(t) dt\right).$$

В результате подстановки окажется, что

$$G(t) = -\frac{1}{4}a_1^2(t) - \frac{1}{2}Da_1(t) + a_2(t).$$

Ясно также, что нули графиков функций x и z совпадают, и поэтому вместо ДУ (37.1) можно рассматривать двучленное ДУ (37.2).

Лемма 37.1. Если φ — нетривиальное решение ДУ (37.1) такое, что $\varphi(t_0) = 0$, то $D\varphi(t_0) \neq 0$.

Доказательство. Если бы оказалось, что $\varphi(t_0) = D\varphi(t_0) = 0$, то в соответствии с предложением 30.1 решение φ было бы тривиальным, что противоречило бы условию леммы. Полученное противоречие и доказывает сформулированное утверждение.

Теорема 37.1. График любого нетривиального решения φ ДУ (37.2) может иметь на промежутке $[a, b]$ только конечное число нулей.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна, т. е. существует некоторое нетривиальное решение φ такое, что его график имеет на отрезке $[a, b]$ бесконечно много нулей. Выберем из них сходящуюся последовательность $\{t_k\}$, и пусть t_0 — предельная точка этой последовательности. По лемме Больцано — Вейерштрасса¹ точка $t_0 \in [a, b]$. Далее, поскольку $\varphi(t_k) = 0$, где $k = 1, 2, \dots$, то из непрерывности решения φ следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = \varphi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} t_k\right) = \varphi(t_0) = 0.$$

С другой стороны, так как решение φ имеет производную $D\varphi$, то существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_0)}{t_k - t_0} = D\varphi(t_0).$$

Но числитель дроби равен нулю, значит $D\varphi(t_0) = 0$. Полученное равенство противоречит лемме 37.1. Это противоречие и доказывает теорему.

Теорема 37.2 (теорема Штурма² о сравнении). Пусть

$$D^2x + G_1(t)x = 0 \tag{37.3}$$

и

$$D^2x + G_2(t)x = 0 \quad — \tag{37.4}$$

ДУ, для которых на промежутке $[a, b]$ функции G_1 и G_2 непрерывны и

$$G_1(t) \leq G_2(t) \quad \forall t \in [a, b]. \tag{37.5}$$

¹ Больцано *Бернард* (Bolzano B., 1781—1848), чешский математик.

² Штурм *Жак Шарль Франсуа* (Sturm J. Ch. F., 1803—1855), французский математик.

Тогда между каждыми двумя последовательными нулями t_1 и t_2 ($a \leq t_1 < t_2 \leq b$) графика нетривиального решения φ_1 ДУ (37.3) имеется, по крайней мере, один нуль графика любого нетривиального решения φ_2 ДУ (37.4), если $\varphi_2(t)$ не обращается в нуль при $t = t_1$ и $t = t_2$.

Доказательство. Так как φ_1 и φ_2 — решения соответствующих ДУ, то справедливы тождества

$$D^2\varphi_1(t) + G_1(t)\varphi_1(t) \equiv 0, \quad D^2\varphi_2(t) + G_2(t)\varphi_2(t) \equiv 0.$$

Если умножить теперь первое тождество на $\varphi_2(t)$, а второе — на $\varphi_1(t)$ и из первого полученного соотношения вычесть второе, то придем к тождеству

$$D^2\varphi_1(t)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)D^2\varphi_2(t) \equiv (G_2(t) - G_1(t))\varphi_1(t)\varphi_2(t). \quad (37.6)$$

Учитывая, что

$$D^2\varphi_1(t)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)D^2\varphi_2(t) = D(D\varphi_1(t)\varphi_2(t) - \varphi_1(t)D\varphi_2(t)),$$

а $\varphi_1(t_1) = \varphi_1(t_2) = 0$, в результате интегрирования соотношения (37.6) в пределах от t_1 до t_2 имеем

$$\begin{aligned} D\varphi_1(t_2)\varphi_2(t_2) - D\varphi_1(t_1)\varphi_2(t_1) &= \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (G_2(t) - G_1(t))\varphi_1(t)\varphi_2(t)dt. \end{aligned} \quad (37.7)$$

Далее, так как t_1 и t_2 — последовательные нули графика решения φ_1 , то, не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi_1(t) > 0$ для любого $t \in (t_1, t_2)$ (рис. 36). При этом, учитывая, что $D\varphi_1(t_1)$ и $D\varphi_1(t_2)$ не могут быть равными нулю (лемма 37.1), приходим к выводу, что $D\varphi_1(t_1) > 0$, а $D\varphi_1(t_2) < 0$ (справедливость двух последних неравенств следует из рассмотрения отношений

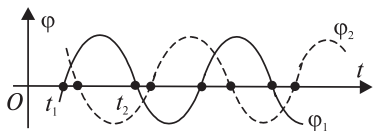
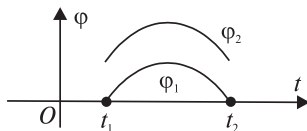
$$\frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_1)}{t - t_1} \quad \text{и} \quad \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(t_2)}{t - t_2},$$

если учесть, что для $t \in (t_1, t_2)$ имеем

$$\varphi_1(t) - \varphi_1(t_1) = \varphi_1(t) > 0, \quad t - t_1 > 0,$$

$$\varphi_1(t) - \varphi_1(t_2) = \varphi_1(t) > 0, \quad t - t_2 < 0).$$

Теперь, если бы теорема была неверна, то существовало бы решение φ_2 , график которого не имел бы нулей на интервале (t_1, t_2) . Не умаляя общности, можно считать, что $\varphi_2(t) > 0$ для любого $t \in [t_1, t_2]$ (рис. 37). Но в таком случае левая часть равенства (37.7) была бы отрицательной, а правая часть, в силу условия (37.5), — неотрицательной.

Рис. 36. К предположению $\varphi_1(t) > 0$ Рис. 37. К предположению $\varphi_2(t) > 0$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 37.3. Если $G(t) \leq 0$ на сегменте $[a, b]$, то график любого нетривиального решения ДУ (37.2) имеет на интервале (a, b) не более одного нуля.

Доказательство. В качестве ДУ сравнения выберем ДУ

$$D^2x = 0. \quad (37.8)$$

Тогда если предположить, что график некоторого нетривиального решения φ ДУ (37.2) имеет на интервале (a, b) , например, два нуля t_1 и t_2 , то из предыдущей теоремы следует, что на промежутке $[t_1, t_2]$ обязан быть, по крайней мере, один нуль графика любого решения ψ ДУ (37.8), что неверно для решения, определяемого равенством $\psi(t) = \text{const} (\neq 0)$. Это противоречие и доказывает теорему.

Теорема 37.4 (теорема о чередовании корней). Пусть φ_1 и φ_2 — два линейно независимых решения ДУ (37.2). Тогда между двумя последовательными нулями t_1 и t_2 графика первого решения лежит ровно один нуль графика второго решения.

Доказательство. В качестве ДУ сравнения выберем само ДУ (37.2). Тогда $G(t) \equiv G_1(t) \equiv G_2(t)$ и условие (37.5) выполнено. Далее, замечая, что нули графиков решений φ_1 и φ_2 не могут совпадать (если бы существовало t_0 такое, что $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = 0$, то

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ D\varphi_1(t_0) & D\varphi_2(t_0) \end{vmatrix} = 0,$$

что противоречило бы предположению о линейной независимости решений φ_1 и φ_2), предположим, что t_1 и t_2 — последовательные нули графика решения φ_1 . Тогда по теореме Штурма о сравнении между нулями t_1 и t_2 должен находиться лишь только один нуль t_0 графика решения φ_2 , ибо в противном случае на интервале (t_1, t_2) существовал бы еще один нуль графика решения φ_1 , что противоречило бы тому, что t_1 и t_2 — последовательные нули. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 37.5. Если на отрезке $[a, b]$ имеет место цепочка неравенств

$$0 < m^2 \leq G(t) \leq M^2,$$

то расстояние между двумя последовательными нулями t_1 и t_2 графика нетривиального решения φ ДУ (37.2) удовлетворяет оценке

$$\frac{\pi}{M} \leq t_2 - t_1 \leq \frac{\pi}{m}. \quad (37.9)$$

Доказательство. Сравним данное ДУ (37.2) с уравнением

$$D^2 z + M^2 z = 0, \quad (37.10)$$

полное семейство решений которого определяется соотношением

$$z(t) = c_1 \cos Mt + c_2 \sin Mt = d_1 \sin M(t + d_2), \quad (37.11)$$

где c_1, c_2, d_1, d_2 — произвольные постоянные.

Из (37.11) следует, что нетривиальным решением ДУ (37.10), обращающимся в нуль при $t = t_1$, является решение, определяемое равенством

$$z(t) = d_1 \sin M(t - t_1). \quad (37.12)$$

Из теоремы 37.2 тогда вытекает, что следующий последовательный нуль t_3 графика решения (37.12) лежит на полуинтервале $(t_1, t_2]$. А так как в силу (37.12) $t_3 = t_1 + \pi/M$, то

$$t_2 - t_1 \geq t_3 - t_1 = \frac{\pi}{M}.$$

Сравним теперь исходное ДУ (37.2) с уравнением

$$D^2 z + m^2 z = 0, \quad (37.13)$$

полное семейство решений которого задается соотношением

$$z(t) = c_3 \cos mt + c_4 \sin mt = d_3 \sin m(t + d_4),$$

где c_3, c_4, d_3, d_4 — произвольные постоянные.

В данном случае нетривиальное решение ДУ (37.13), обращающееся в нуль при t_1 , задается равенством

$$z(t) = d_3 \sin m(t - t_1), \quad (37.14)$$

а значит, последующим за t_1 нулем графика решения (37.14) будет

$t_4 = t_1 + \frac{\pi}{m}$. Теперь поскольку $G(t) \geq m^2$, то из теоремы 37.2 следует, что нуль t_2 графика решения φ лежит на полуинтервале $(t_1, t_4]$ (рис. 38).

В таком случае $t_2 - t_1 \leq \frac{\pi}{m}$, откуда и следует оценка (37.9).

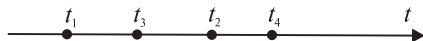


Рис. 38. К доказательству оценки (37.9)

§ 38. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА

Рассмотрим линейное скалярное неоднородное ДУ

$$D^n x + a_1(t) D^{n-1} x + \dots + a_{n-1}(t) Dx + a_n(t) x = g(t), \quad (38.1)$$

где функции a_i , $i = \overline{1, n}$, и g непрерывны на промежутке $[a, b]$.

Пусть φ^* — какое-либо частное решение этого ДУ, а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — базис решений соответствующего однородного ДУ. Тогда, как известно, полное семейство решений φ ДУ (38.1) задается формулой

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) + \varphi^*(t), \quad (38.2)$$

где c_i , $i = \overline{1, n}$, — произвольные постоянные.

Таким образом, формула (38.2), описывающая полное семейство решений ДУ (38.1), содержит n параметров — n произвольных постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$. Для выделения частных решений рассматриваемого ДУ нужно знать дополнительные условия, из которых и определяются постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$. В качестве дополнительных условий можно выбрать, например, значения функции φ и ее производных $D\varphi, D^2\varphi, \dots, D^{n-1}\varphi$ в некоторой точке $t = t_0$. Тогда приходим к начальной задаче (задаче Коши), которая, как мы знаем, всегда разрешима.

Но в качестве дополнительных условий можно выбрать значение функции и ее производных или комбинаций этих величин не в одной точке $t = t_0$, а в нескольких точках. В этом случае и приходят к так называемым *краевым задачам*. Они бывают двухточечные, трехточечные и т. д.

Пример 38.1. Найти решение (если оно существует) краевой задачи

$$\begin{cases} D^2 x + \omega^2 x = 0, \\ x(0) = 0, \\ x(\pi/2\omega) = 1. \end{cases}$$

Решение. В данной краевой задаче необходимо найти решение, график которого проходил бы через две заданные точки $(0, 0)$, $(\pi/2\omega, 1)$.

Решая исходное ДУ, найдем, что формула

$$\varphi(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$$

определяет полное семейство решений. Учитывая краевые условия, получаем $\varphi(0) = c_2 = 0$, $\varphi(\pi/2\omega) = c_1 = 1$. Таким образом, решение φ_0 краевой задачи определяется равенством

$$\varphi_0(t) = \sin \omega t.$$

Пример 38.2. Имеет ли решение краевая задача

$$\begin{cases} D^2 x + \omega^2 x = 0, \\ x(0) = 0, \\ x(\pi/\omega) = 1? \end{cases}$$

Решение. В данном случае $\varphi(0) = c_2 = 0$, а $\varphi(\pi/\omega) = -c_2 = 1$. Иными словами, заданная краевая задача решений не имеет.

Итак, в отличие от начальной задачи краевая задача не всегда имеет решение. Разрешимость краевой задачи зависит не только от вида линейного ДУ, но и от взаимного расположения точек, в которых задаются дополнительные условия.

В связи с этим представляют интерес различные критерии разрешимости краевых задач.

Ниже будем рассматривать только линейные краевые задачи, в которых как ДУ, так и краевые условия являются линейными. Левые части краевых условий — линейные комбинации значений искомой функции и ее производных в заданных точках t_1 , а правые части — заданные постоянные числа.

Если постоянная в правой части краевого условия равна нулю, то условие называется *однородным*, если же постоянная не равна нулю — *неоднородным*.

Краевая задача называется *однородной*, если ДУ и краевые условия линейны и однородны.

Примерами линейных краевых условий являются:

- 1) $x(t_1) = a$;
- 2) $Dx(t_1) = b$;
- 3) $\alpha x(t_2) + \beta Dx(t_2) = c \quad (|\alpha| + |\beta| \neq 0)$;
- 4) $x(t_0) - x(t_1) = d$;
- 5) $Dx(t_0) - Dx(t_1) = h$.

Но возможны и другие условия.

Остановимся более подробно на краевой задаче

$$\begin{cases} D^2 x + a_1(t) Dx + a_2(t) x = 0, \\ \alpha Dx(a) + \beta x(a) = A, \\ \gamma Dx(b) + \delta x(b) = B, \end{cases} \quad (38.3)$$

где функции a_1 и a_2 определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, а $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B$ — заданные постоянные такие, что $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, $|\gamma| + |\delta| \neq 0$.

Пусть x_1 и x_2 — два линейно независимых решения ДУ краевой задачи (38.3). Тогда полное семейство решений этого ДУ определяется равенством

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Следовательно, разрешимость или неразрешимость краевой задачи (38.3) зависит от возможности или невозможности разрешить относительно c_1 и c_2 систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_1 F_1(a) + c_2 F_2(a) = A, \\ c_1 G_1(b) + c_2 G_2(b) = B, \end{cases} \quad (38.4)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha D x_i(t) + \beta x_i(t) &= F_i(t), \\ \gamma D x_i(t) + \delta x_i(t) &= G_i(t), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Из вида системы (38.4) следует, что если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_1(a) & F_2(a) \\ G_1(b) & G_2(b) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то это условие является необходимым и достаточным условием того, чтобы краевая задача (38.3) имела единственное решение.

Далее, если краевые условия однородны ($A = B = 0$), то условие $\Delta = 0$ является необходимым и достаточным для того, чтобы однородная краевая задача (38.3) имела нетривиальные решения.

З а м е ч а н и е 38.1. Приведенные выше утверждения основаны на знании двух линейно независимых решений ДУ (38.3). В последующих теоремах знание линейно независимых решений не требуется.

Теорема 38.1. Для того чтобы краевая задача (38.3) имела при произвольных A и B одно и только одно решение, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная краевая задача имела только тривиальное решение.

Действительно, если однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то $\Delta \neq 0$. Справедливо и обратное.

З а м е ч а н и е 38.2. Отметим, что если однородная краевая задача (38.3) имеет нетривиальные решения, то неоднородная краевая задача либо не имеет ни одного решения, либо при некоторых A и B имеет бесконечно много решений, которые получаются из одного нетривиального решения неоднородной краевой задачи добавлением к нему любого решения однородной задачи.

Теорема 38.2. Если $\Delta = 0$, то однородная краевая задача (38.3) имеет бесконечно много решений, которые определяются равенством $x(t) = cx_1(t)$, где x_1 — некоторое нетривиальное решение задачи, а c — произвольная постоянная.

Доказательство. Если x_2 — некоторое частное решение однородной краевой задачи (38.3), отличное от решения x_1 , то, например, из первого краевого условия $\alpha Dx(a) + \beta x(a) = 0$ следует, что линейная однородная система алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \xi Dx_1(a) + \eta x_1(a) = 0, \\ \xi Dx_2(a) + \eta x_2(a) = 0 \end{cases}$$

относительно ξ и η имеет, по крайней мере, одно нетривиальное решение $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$. И в таком случае определитель этой системы — определитель Вронского в точке a — равен нулю, т. е. $W(a) = 0$, откуда вытекает, что $W(t) \equiv 0$ и, значит, $x_2(t) = cx_1(t)$.

Рассмотрим теперь краевую задачу

$$\begin{cases} D^2x + a_1(t)Dx + a_2(t)x = f(t), \\ \alpha Dx(a) + \beta x(a) = 0, \\ \gamma Dx(b) + \delta x(b) = 0, \end{cases} \quad (38.5)$$

где функции a_1 , a_2 и f определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, причем $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, $|\gamma| + |\delta| \neq 0$.

Определение 38.1. Функцией Грина¹ краевой задачи (38.5) называется функция $G(t, s)$, $t \in [a, b]$, $s \in (a, b)$, такая, что:

1) при каждом фиксированном s функция $G(t, s)$, как функция t , при $t \neq s$ является решением однородного ДУ $L_2(D)x = 0$;

2) при $t = a$ и $t = b$ функция $G(t, s)$ удовлетворяет краевым условиям из (38.5);

3) при $t = s$ функция $G(t, s)$ непрерывна по t , а ее производная по t имеет скачок, равный 1, т. е.

$$G|_{t=s+0} = G|_{t=s-0}, \quad DG|_{t=s+0} = DG|_{t=s-0} + 1. \quad (38.6)$$

Теорема 38.3. Если при $f(t) \equiv 0$ краевая задача (38.5) имеет только нулевое решение, то функция Грина существует и имеет вид

$$G(t, s) = \begin{cases} h(s)x_1(t), & a \leq t \leq s, \\ k(s)x_2(t), & s \leq t \leq b, \end{cases} \quad (38.7)$$

¹ Грин Джордж (Green G., 1793—1841), английский математик и физик.

где x_1 и x_2 — нетривиальные решения ДУ $L_2(D)x = 0$, удовлетворяющие соответственно первому и второму краевым условиям из (38.5), множители h и k зависят от s и определяются из требования, чтобы функция (38.7) удовлетворяла условиям (38.6), т. е.

$$hx_1(s) = kx_2(s), \quad kDx_2(s) = hDx_1(s) + 1. \quad (38.8)$$

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — решения ДУ $L_2(D)x = 0$, для которых

$$x_1(0) = \alpha, \quad Dx_1(a) = -\beta, \quad x_2(b) = \gamma, \quad Dx_2(b) = -\delta.$$

Эти решения удовлетворяют соответственно первому и второму краевым условиям в (38.5), причем они являются линейно независимыми.

Действительно, если бы решения x_1 и x_2 были линейно зависимы, то имело бы место тождество $x_1(t) \equiv cx_2(t)$ и нетривиальное решение $x_2(x_2(t) \neq 0$, так как $|\gamma| + |\delta| \neq 0$) удовлетворяло бы обоим краевым условиям в (38.5), что противоречило бы условию теоремы.

Итак, решения x_1 и x_2 линейно независимы, и любое решение ДУ $L_2(D)x = 0$ определяется равенством $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ при некоторых c_1 и c_2 .

При этом поскольку только решение x_1 удовлетворяет первому краевому условию из (38.5) и лишь решение x_2 — второму краевому условию из (38.5), то из требований 1) и 2) определения 38.1 вытекает, что функция G должна иметь вид (38.7). Из требования 3) определения 38.1 вытекают уравнения (38.8). Система (38.8) разрешима относительно h и k , так как ее определитель

$$\begin{vmatrix} x_1(s) & -x_2(s) \\ -Dx_1(s) & Dx_2(s) \end{vmatrix} = W(s) \neq 0$$

(решения x_1 и x_2 линейно независимые).

Таким образом, при выполнении условий теоремы найдутся h и k , удовлетворяющие уравнениям (38.8), а тогда функция (38.7) удовлетворяет требованиям 1)–3) определения 38.1. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 38.3. При выполнении условий теоремы 38.3 функция Грина определяется однозначно. Отметим также, что хотя решения x_1 и x_2 можно заменить решениями sx_1 и dx_2 , тем не менее с учетом (38.8) такая замена не изменит произведений hx_1 и kx_2 в (38.7).

Теорема 38.4. Если выполнены условия теоремы 38.3, то решение краевой задачи (38.5) задается равенством

$$x(t) = \int_a^b G(t, s) f(s) ds. \quad (38.9)$$

Доказательство. Будем строить решение краевой задачи (38.5) в виде (38.9). Разбивая промежуток интегрирования $[a, b]$ на два промежутка $a < s < t$ и $t < s < b$, получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_a^t G(t, s) f(s) ds = \int_a^t G(t, s) f(s) ds + \int_t^b G(t, s) f(s) ds = \\ &= x_2(t) \int_a^t k(s) f(s) ds + x_1(t) \int_t^b h(s) f(s) ds. \end{aligned}$$

Дифференцируя полученное равенство по t , имеем

$$\begin{aligned} Dx(t) &= Dx_2(t) \int_a^t k(s) f(s) ds + x_2(t) k(t) f(t) - \\ &\quad - Dx_1(t) \int_t^b h(s) f(s) ds - x_1(t) h(t) f(t) = \\ &= Dx_2(t) \int_a^t k(s) f(s) ds + Dx_1(t) \int_t^b h(s) f(s) ds. \end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned} D^2 x(t) &= D^2 x_2(t) \int_a^t k(s) f(s) ds + Dx_2(t) k(t) f(t) - \\ &\quad - D^2 x_1(t) \int_t^b h(s) f(s) ds - Dx_1(t) h(t) f(t) = \\ &= D^2 x_2(t) \int_a^t k(s) f(s) ds + D^2 x_1(t) \int_t^b h(s) f(s) ds + f(t). \end{aligned}$$

Если теперь выражения для $x(t)$, $Dx(t)$, $D^2 x(t)$ умножить соответственно на $a_2(t)$, $a_1(t)$, 1 и полученные соотношения сложить, то окажется, что

$$\begin{aligned} L_2(D)x &\equiv D^2 x + a_1(t) Dx + a_2(t) x = \\ &= (D^2 x_2 + a_1(t) Dx_2 + a_2(t) x_2) \int_a^t k(s) f(s) ds + \\ &\quad + (D^2 x_1 + a_1(t) Dx_1 + a_2(t) x_1) \int_t^b h(s) f(s) ds + f(t). \end{aligned}$$

Но $L_2(D)x_1 \equiv 0$, $L_2(D)x_2 \equiv 0$, поэтому $L_2(D)x \equiv f(t)$, т. е. x — решение ДУ из (38.5). Учитывая, что решения x_1 и x_2 однородного уравнения $L_2(D)x = 0$ удовлетворяют соответственно первому и второму краевым условиям из (38.5), то, подставив значения $x(t)$ и $Dx(t)$ в краевые усло-

вия (38.5), приходим к выводу, что решение x удовлетворяет обоим крайним условиям из (38.5). Это и завершает доказательство теоремы.

Пример 38.3. Найти функцию Грина краевой задачи

$$D^2x + x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad Dx(\pi) = 0. \quad (38.10)$$

Решение. Рассмотрим однородное ДУ $D^2x + x = 0$. Его полное семейство решений представляется в виде

$$x_0(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t,$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Первое краевое условие дает $x(t) = c_1 \sin t$. А тогда поскольку

$$Dx_0(t) = c_1 \cos t - c_2 \sin t, \quad \text{то} \quad Dx_0(\pi) = -c_1.$$

Отсюда следует, что при $f(t) \equiv 0$ краевая задача (38.10) имеет только нулевое решение (при $c_1 = 0$), т. е. условие существования функции Грина выполнено.

Функции x_1 и x_2 , определяемые равенствами $x_1(t) = \sin t$ и $x_2(t) = \cos t$, удовлетворяют ДУ $D^2x + x = 0$ и крайним условиям $x_1(0) = 0, Dx_2(\pi) = 0$. Поэтому согласно формуле (38.7)

$$\begin{cases} G(t, s) = h(s) \sin t, & 0 \leq t \leq s, \\ G(t, s) = k(s) \cos t, & s \leq t \leq \pi. \end{cases} \quad (38.11)$$

Из условий (38.6) или, что то же самое, из условий (38.8) имеем

$$h(s) \sin s = k(s) \cos s, \quad -k(s) \sin s = h(s) \cos s + 1.$$

Отсюда находим, что

$$h(s) = -\cos s, \quad k(s) = -\sin s.$$

Тогда из формул (38.11) окончательно получаем, что функция Грина задается равенствами

$$\begin{cases} G(t, s) = -\cos s \sin t, & 0 \leq t \leq s, \\ G(t, s) = -\sin s \cos t, & s \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-го ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

§ 39. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-го ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ВРОНСКОГО

Определение 39.1. Линейным векторным ОДУ 1-го порядка в нормальной форме называется уравнение вида

$$\dot{x} = A(t)x + g(t), \quad (39.1)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Если в (39.1) $g(t) \equiv 0$, то уравнение (39.1) называется однородным, в противном случае — неоднородным.

Будем предполагать, что $(n \times n)$ -матрица $A(t)$ и вектор-функция g непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Предложение 39.1. Единственным решением начальной задачи

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = 0 \quad (39.2)$$

является тривиальное решение $x(t) \equiv 0$.

Действительно, то, что $x(t) \equiv 0$ — решение рассматриваемого ДУ, проверяется непосредственной подстановкой. Единственность же следует из теоремы Пикара — Линделёфа для линейных систем.

Предложение 39.2 (принцип суперпозиции). Если $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — решения ДУ (39.2), а $c_1, c_2, \dots, c_n$ — вещественные постоянные, то функция φ , определяемая равенством

$$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_n \varphi_n(t),$$

также является решением ДУ (39.2).

Предложение 39.3. Если вектор-функция $\varphi: t \mapsto U(t) + iV(t)$, где $i = \sqrt{-1}$, — комплексное решение ДУ (39.2) при вещественных функциях U и V , то вектор-функции U и V — вещественные решения ДУ (39.2).

Справедливость двух последних утверждений устанавливается непосредственной проверкой.

Определение 39.2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — вектор-функции с одним и тем же числом n компонент, определенные на промежутке $[a, b]$. Определителем Вронского (или вронскианом) вектор-функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ называется определитель

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) & \dots & \varphi_{1n}(t) \\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t) & \dots & \varphi_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) & \dots & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Теорема 39.1 (необходимое условие линейной зависимости вектор-функций). Если вектор-функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно зависимы на промежутке $[a, b]$, то $W(t) \equiv 0$ на этом промежутке.

Доказательство. Из условий теоремы вытекает, что

$$\alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t) = 0 \quad \forall t \in [a, b],$$

где не все $\alpha_i, i = \overline{1, n}$, равны нулю. В таком случае определитель последней системы, составленный из линейно зависимых столбцов $\varphi_i(t), i = \overline{1, n}$, как раз совпадающий с определителем Вронского, тождественно равен нулю на $[a, b]$.

З а м е ч а н и е 39.1. Условие $W(t) \equiv 0$ достаточным для линейной зависимости вектор-функций, вообще говоря, не является. Так, например, для вектор-функций φ_1 и φ_2 , определяемых равенствами

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix},$$

определитель Вронского тождественно равен нулю на любом промежутке $|a, b|$, но указанные вектор-функции, как это следует из определения линейной зависимости вектор-функций, являются линейно независимыми.

Теорема 39.2 (теорема об определителе Вронского). Следующие утверждения эквивалентны:

1) решения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ДУ (39.2) линейно зависимы на промежутке $|a, b|$;

2) для любого фиксированного $t^* \in |a, b|$, векторы $\varphi_1(t^*), \varphi_2(t^*), \dots, \varphi_n(t^*)$ линейно зависимы;

3) существует такое $t^* \in |a, b|$, что векторы $\varphi_1(t^*), \varphi_2(t^*), \dots, \varphi_n(t^*)$ линейно зависимы;

4) $W(t) \equiv 0$ на $|a, b|$;

5) существует такое $t^* \in |a, b|$, что $W(t^*) = 0$.

Доказательство проведем по схеме: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1) с дополнительными эквивалентностями 2) $\Leftrightarrow$ 4) и 3) $\Leftrightarrow$ 5), которые являются, по существу, хорошо известным из алгебры утверждением о том, что определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда ее столбцы линейно зависимы.

Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) обсуждалась ранее в § 29: из линейной зависимости вектор-функций следует линейная зависимость векторов при каждом фиксированном значении t . Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна. Обратимся к импликации 3) $\Rightarrow$ 1).

Итак, пусть для некоторого t^* векторы $\varphi_1(t^*), \varphi_2(t^*), \dots, \varphi_n(t^*)$ линейно зависимы. Последнее означает, что существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 \varphi_1(t^*) + \alpha_2 \varphi_2(t^*) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t^*) = 0.$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию φ такую, что

$$\varphi(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t) + \dots + \alpha_n \varphi_n(t),$$

которая, очевидно, является решением векторного ДУ (39.2) и удовлетворяет при этом начальному условию $\varphi(t^*) = 0$. Последнее означает, что φ — тривиальное решение ДУ (39.2) (предложение 39.1) и, значит, решения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно зависимы на $|a, b|$.

Следствие из теоремы 39.2. Следующие утверждения эквивалентны:

1) решения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ДУ (39.2) линейно независимы на промежутке $|a, b|$;

2) для любого фиксированного $t^* \in |a, b|$ векторы $\varphi_1(t^*), \varphi_2(t^*), \dots, \varphi_n(t^*)$ линейно независимы;

3) существует такое $t^* \in |a, b|$, что векторы $\varphi_1(t^*), \varphi_2(t^*), \dots, \varphi_n(t^*)$ линейно независимы;

4) для любого $t \in |a, b|$ определитель $W(t) \neq 0$;

5) существует $t^* \in |a, b|$ такое, что $W(t^*) \neq 0$.

Определение 39.3. Базисом (или фундаментальной системой) решений линейного векторного однородного ДУ (39.2) на промежутке $|a, b|$ называется совокупность решений ДУ (39.2), определенных и линейно независимых на $|a, b|$.

Теорема 39.3. Базис решений ДУ (39.2) всегда существует.

Доказательство. Пусть $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_n^0$ — линейно независимые постоянные векторы с n компонентами и пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — такие решения ДУ (39.2), что

$$\varphi_1(t_0) = \varphi_1^0, \varphi_2(t_0) = \varphi_2^0, \dots, \varphi_n(t_0) = \varphi_n^0$$

(такие решения всегда существуют на основании теоремы Пикара — Линделёфа для линейных систем). Выбранные n решений будут линейно независимыми, поскольку в силу выбора векторов $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \dots, \varphi_n^0$ определитель Вронского $W(t_0) \neq 0$.

З а м е ч а н и е 39.2. Из доказательства теоремы 39.3 следует, что ДУ (39.2) имеет бесконечно много базисов решений.

Теорема 39.4 (теорема о полном семействе решений). Пусть вектор-функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ составляют базис решений ДУ (39.2). Тогда любое решение ДУ (39.2), отличное от базисного, определяется равенством

$$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_n \varphi_n(t), \quad (39.3)$$

где $c_i, i = \overline{1, n}$, — некоторые вещественные постоянные.

Доказательство. Формула (39.3) дает равенство множеств. Поэтому для доказательства искомого равенства необходимо сначала показать, что любой элемент правой части принадлежит левой части, а затем показать, что любое решение ДУ (39.2) может быть представлено в виде линейной комбинации.

То, что любая функция, представимая в виде (39.3), является решением ДУ (39.2), следует из принципа суперпозиции.

Обратно, покажем, что любое решение ДУ (39.2) может быть представлено в виде линейной комбинации. Итак, пусть φ^* — произвольное решение ДУ (39.2), t_0 — произвольная точка из области определения базиса решений ДУ (39.2) и пусть

$$\varphi^*(t_0) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dots \\ x_{n0} \end{pmatrix}.$$

Построим другое решение φ в виде линейной комбинации (39.3), удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(t_0) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dots \\ x_{n0} \end{pmatrix},$$

что приводит к следующей системе алгебраических уравнений:

[illegible]

определитель которой совпадает с определителем Вронского (в точке t_0) и, значит, отличен от нуля. Таким образом, последняя система имеет относительно $c_i, i = \overline{1, n}$, единственное решение. Но в таком случае имеем два решения одного и того же ДУ: решение φ^* и решение φ , удовлетворяющие одному и тому же начальному условию. В силу теоремы существования и единственности эти два решения обязаны совпадать, а значит, произвольно выбранное решение φ^* является линейной комбинацией базисных решений ДУ (39.2), что и доказывает требуемое.

§ 40. МАТРИЧНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ. ФОРМУЛА ЯКОБИ

Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ — квадратные $(n \times n)$ -матрицы. Тогда их произведение — матрица $C = (c_{ij})$ — вычисляется по формуле

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj},$$

т. е., чтобы получить элемент i -й строки j -го столбца матрицы C , надо перемножить i -ю строку матрицы A на j -й столбец матрицы B . Более подробно: чтобы получить элемент c_{11} , надо умножить первую строку матрицы A на первый столбец матрицы B ; чтобы получить элемент c_{21} надо умножить вторую строку матрицы A на первый столбец матрицы B . Таким образом, для получения элементов первого столбца матрицы C необходимы матрица A и только первый столбец матрицы B (рис. 39).

Приведенное свойство матричного умножения позволяет «разбить» одно матричное соотношение на набор векторных соотношений: первый столбец матрицы C (вектор) равен произведению матрицы A на первый столбец матрицы B , второй столбец матрицы C равен произведению матрицы A на второй столбец матрицы B и т. д.

$$\begin{pmatrix} * & \dots \\ * & \dots \\ * & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \dots \\ * & \dots \\ * & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots \end{pmatrix}$$

$C \qquad A \qquad B$

Рис. 39. К свойству матричного умножения

Возможна и обратная операция, т. е. можно из серии векторных соотношений с одной и той же матрицей «собрать» одно матричное соотношение. Именно последняя операция и используется при построении так называемого матричного ДУ. Строится оно следующим образом: пусть имеется набор векторных тождеств

$$\dot{x}^i = A(t)x^i, \quad i = \overline{1, n},$$

записанных для каждого решения векторного ДУ (39.2).

Этот набор можно объединить в одно соотношение, если обозначить матрицу, составленную из векторов x^i , через X (и тогда $\dot{X}$ окажется матрицей из производных этих векторов). Результатом такого объединения и будет *матричное ДУ*

$$\dot{X} = A(t)X. \quad (40.1)$$

Правило умножения матриц гарантирует, что матричная функция X является решением ДУ (40.1) тогда и только тогда, когда ее столбцы являются решениями векторного ДУ (39.2).

Определение 39.4. Квадратная $(n \times n)$ -матрица $\Phi(t)$ называется фундаментальной или интегральной матрицей векторного ДУ (39.2), если она невырождена и является решением матричного ДУ (40.1).

Фундаментальная матрица позволяет кратко записать формулу полного семейства решений векторного ДУ (39.2), поскольку эта формула определяет, по существу, линейную комбинацию столбцов матрицы $\Phi(t)$, а такая комбинация в точности совпадает с произведением матрицы, составленной из решений, на вектор произвольных постоянных:

$$\varphi(t) = c_1 \varphi^1(t) + c_2 \varphi^2(t) + \dots + c_n \varphi^n(t) = \Phi(t)C, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Полученная формула позволяет кратко записать и полное семейство решений матричного ДУ.

Именно, пусть $\Phi(t)$ — некоторая фундаментальная матрица, $X(t)$ — произвольное решение матричного ДУ, составленное из столбцов $x^1(t)$, $x^2(t)$, ..., $x^n(t)$. Поскольку каждый столбец является решением векторного ДУ (39.2), то

$$x^1(t) = \Phi(t)c^1, x^2(t) = \Phi(t)c^2, \dots, x^n(t) = \Phi(t)c^n$$

(для каждого вектора x^i вектор c^i свой), а эти соотношения опять же «собираются» в одно матричное соотношение

$$X(t) = \Phi(t)C, \quad (40.2)$$

где C — уже матрица, составленная из произвольных постоянных.

Таким образом, полное семейство решений матричного ДУ (40.1) определяется формулой (40.2).

В заключение параграфа остановимся на выводе *формулы Якоби*¹ (аналога формулы Абеля — Лиувилля — Остроградского) — формулы для определителя Вронского решений векторного ДУ (39.2).

Теорема 40.1. Если $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — решения векторного ДУ (39.2), определенные на интервале (a, b) , $W(t)$ — вронскиан этих решений, то для любого $t_0 \in (a, b)$ имеет место формула

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \text{Sp} A(\tau) d\tau}, \quad (40.3)$$

называемая *формулой Якоби*.

Доказательство. Согласно правилу дифференцирования определителей имеем:

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \begin{vmatrix} \dot{\varphi}_{11} & \dot{\varphi}_{12} & \dots & \dot{\varphi}_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \dot{\varphi}_{21} & \dot{\varphi}_{22} & \dots & \dot{\varphi}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{\varphi}_{n1} & \dot{\varphi}_{n2} & \dots & \dot{\varphi}_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} \varphi_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{1j} \varphi_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{1j} \varphi_{jn} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} \varphi_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{2j} \varphi_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{2j} \varphi_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \end{vmatrix}$$

¹ Якоби Карл Густав Якоб (Jacobi K. G. J., 1804—1851), немецкий математик.

$$+ \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} \varphi_{j1} & \sum_{j=1}^n a_{nj} \varphi_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n a_{nj} \varphi_{jn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(t)W(t) + a_{22}(t)W(t) + \dots + a_{nn}(t)W(t) = \text{Sp}A(t)W(t).$$

Предположим теперь, что решения $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ДУ (39.2) линейно зависимы на (a, b) . Тогда формула (40.3) очевидна. Если же указанные решения линейно независимы на (a, b) , то $W(t) \neq 0$ для любого $t \in (a, b)$ и, значит,

$$\frac{\dot{W}(t)}{W(t)} = \text{Sp}A(t).$$

Интегрируя это ДУ в пределах от t_0 до t , мы и получим формулу (40.3).

§ 41. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ВЕКТОРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 1-го ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ. МЕТОД ВАРИАЦИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

Рассмотрим линейное векторное ДУ

$$\dot{x} = A(t)x + g(t). \quad (39.1)$$

Предложение 41.1. Если x — решение неоднородного ДУ (39.1), а y — решение соответствующего однородного ДУ, то сумма $x + y$ будет решением неоднородного ДУ (39.1).

Предложение 41.2. Если x и y — два решения неоднородного ДУ (39.1), то их разность $(x - y)$ будет решением соответствующего однородного ДУ.

Эти два предложения доказываются аналогично доказательствам предложений 32.1 и 32.2.

Теорема 41.1 (теорема о полном семействе решений). Полное семейство решений φ неоднородного ДУ (39.1) представляет собой сумму полного семейства решений φ_0 соответствующего однородного ДУ и какого-либо частного решения φ^* неоднородного ДУ (39.1), т. е.

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi^*(t).$$

З а м е ч а н и е 41.1. Поскольку «полное семейство решений» — это множество функций, то теорема 41.1 устанавливает равенство двух множеств.

Доказательство теоремы 41.1 дословно совпадает с доказательством теоремы 32.1.

Метод вариации произвольных постоянных позволяет с помощью квадратур найти полное семейство решений линейного неоднородного ДУ (39.1), если известен базис решений соответствующего однородного ДУ

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (41.1)$$

Итак, пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица векторного ДУ (41.1). Полное семейство решений ДУ (39.1) будем искать, исходя из соотношения

$$\varphi(t) = \Phi(t)\mathbb{C}(t), \quad (41.2)$$

где $\mathbb{C}$ — неизвестная вектор-функция.

Подставляя значение $\varphi(t)$ в соотношение (39.1) и учитывая, что $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица ДУ (41.1), получим уравнение

$$\Phi(t)\dot{\mathbb{C}}(t) = g(t)$$

или

$$\dot{\mathbb{C}}(t) = \Phi^{-1}(t)g(t).$$

Интегрируя это ДУ в пределах от t_0 до t и учитывая равенство (41.2), найдем, что

$$\varphi(t) = \Phi(t) \left(c + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau \right), \quad (41.3)$$

где c — постоянный вектор.

Если мы ищем решение, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$, то в этом случае $\Phi(t_0)c = x_0$ и, значит, $c = \Phi^{-1}(t_0)x_0$. А тогда формулу (41.3) можно записать в так называемой форме Коши:

$$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)g(\tau)d\tau.$$

Функция

$$K(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau),$$

возникающая в формуле Коши дважды, называется *матричной функцией Коши*. С помощью этой функции формула полного семейства решений ДУ (39.1) в форме Коши записывается в виде

$$\varphi(t) = K(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t K(t, \tau)g(\tau)d\tau.$$

§ 42. СТРУКТУРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Напомним некоторые сведения из теории матриц, которые будут использоваться при выяснении структуры фундаментальной матрицы линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.

Пусть $Z = \{z_k^i\}$ — квадратная матрица порядка n (вообще говоря, функциональная). Такая матрица может быть аргументом некоторой функции. В частности, она может быть аргументом так называемой *экспоненциальной функции*, которая задается формулой

$$\exp Z \equiv e^Z = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} Z^s, \quad 0! = 1, \quad (42.1)$$

где элементы матрицы Z принимают конечные значения. В теории матриц доказывается, что матричный ряд (42.1) сходится для любой квадратной матрицы Z , причем абсолютно.

Отметим некоторые свойства экспоненциальной функции:

- 1) если $Z_1 Z_2 = Z_2 Z_1$, то $e^{Z_1} e^{Z_2} = e^{Z_1 + Z_2}$;
- 2) для некоторой матрицы S справедливо равенство

$$S e^Z S^{-1} = e^{S Z S^{-1}};$$

- 3) $\det e^Z = e^{\text{Sp} Z}$;

- 4) если $Z \frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{dt} Z$, то $\frac{d}{dt}(e^Z) = e^Z \frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{dt} e^Z$.

Теорема 42.1 (теорема Лаппо-Данилевского¹). Если матрица $A(t)$ коммутирует со своим интегралом, т. е. если

$$A(t) \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) = \left(\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau \right) A(t),$$

то за интегральную матрицу ДУ (40.1) можно взять матрицу

$$\Phi(t) = e^{\int_{t_0}^t A(\tau) d\tau}.$$

Доказательство. Обозначим $Z = \int_{t_0}^t A(\tau) d\tau$, тогда так как матрица Z ком-

¹ Лаппо-Данилевский Иван Александрович (1896—1931), русский математик.

мутирует со своей производной $dZ/dt = A(t)$, то в данном случае справедливо свойство 4) и, таким образом,

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(e^{\int_0^t A(\tau) d\tau} \right) = e^{\int_0^t A(\tau) d\tau} A(t) \equiv A(t) e^{\int_0^t A(\tau) d\tau} = A(t) \Phi(t),$$

что и доказывает требуемое.

З а м е ч а н и е 42.1. В том случае, когда матрица A оказывается постоянной, она коммутирует со своим интегралом, и поэтому в качестве интегральной матрицы матричного ДУ (40.1) с постоянной матрицей A можно взять матрицу

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$$

или, если положить $t_0 = 0$, — матрицу $\Phi(t) = e^{At}$.

Далее пусть λ — произвольный элемент поля P . *Клеткой Жордана*¹ называется квадратная порядка n_k матрица

$$J_{n_k} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Квазидиагональная матрица

$$J = \text{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_m}(\lambda_m)), \quad (42.2)$$

на диагонали которой расположены клетки Жордана, называется *жордановой матрицей*. При этом не предполагается, что элементы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ обязательно различны. В частности, всякая диагональная матрица является жордановой матрицей.

Пусть A — квадратная матрица над полем P . Жорданову матрицу Λ , подобную матрице A (т. е. матрицу, для которой существует невырожденная квадратная матрица T над полем P такая, что $\Lambda = T^{-1}AT$) называют *жордановой нормальной формой* матрицы A .

Характеристическим полиномом $\chi(\lambda)$ матрицы A называется определитель

$$\det(A - \lambda E),$$

где E — единичная матрица.

Характеристическим уравнением матрицы A называется уравнение $\chi(\lambda) = 0$.

¹ Жордан Мари Эдмон Камиль (Jordan M. E. C., 1838—1922), французский математик.

Далее покажем, что структура фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ ДУ

$$\dot{x} = Ax \quad (42.3)$$

с постоянной матрицей A полностью определяются структурой матрицы A . Знание же структуры матрицы $\Phi(t)$ позволяет выписать полное семейство решений исследуемой системы. При этом следует различать два случая.

Случай 1. Характеристическое уравнение $\chi(\lambda) = 0$ имеет n различных корней $\lambda_i, i = \overline{1, n}$.

В этом случае, как известно, существует невырожденная матрица T такая, что матрица $\Lambda = T^{-1}AT$ является диагональной, т. е.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая тогда, что

$$\begin{aligned} e^{\Lambda} &= E + \Lambda + \frac{1}{2!}\Lambda^2 + \dots + \frac{1}{k!}\Lambda^k + \dots = \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

имеем

$$e^A = e^{T\Lambda T^{-1}} = T e^{\Lambda} T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Таким образом, в случае 1 фундаментальная матрица $\Phi(t) = e^{At}$ ДУ (42.3) имеет вид

$$\Phi(t) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

В силу того что матрица $\Phi(t)C$, где C — постоянная матрица, также является фундаментальной для ДУ (42.3), то в качестве фундаментальной матрицы ДУ (42.3) можно взять матрицу

$$T = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Итак, построив матрицу

$$T = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

и воспользовавшись равенством

$$T\Lambda = AT, \quad (42.4)$$

фундаментальную матрицу ДУ (42.3) будем иметь в виде

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11}e^{\lambda_1 t} & \gamma_{12}e^{\lambda_2 t} & \dots & \gamma_{1n}e^{\lambda_n t} \\ \gamma_{21}e^{\lambda_1 t} & \gamma_{22}e^{\lambda_2 t} & \dots & \gamma_{2n}e^{\lambda_n t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1}e^{\lambda_1 t} & \gamma_{n2}e^{\lambda_2 t} & \dots & \gamma_{nn}e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Пример 42.1. Проинтегрировать ДУ

$$\dot{x} = Ax, \text{ где } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для матрицы A характеристический полином

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Отсюда $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ — корни характеристического уравнения. Таким образом,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Для построения матрицы T воспользуемся равенством (42.4). Имеем:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} i\gamma_{11} & -i\gamma_{12} \\ i\gamma_{21} & -i\gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{21} & \gamma_{22} \\ -\gamma_{11} & -\gamma_{12} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$i\gamma_{11} = \gamma_{21}, \quad -i\gamma_{12} = \gamma_{22}, \quad i\gamma_{21} = -\gamma_{11}, \quad -i\gamma_{22} = -\gamma_{12},$$

т. е. $i\gamma_{11} = \gamma_{21}$, $i\gamma_{22} = \gamma_{12}$. Положив, например, $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 1$, получим $\gamma_{21} = \gamma_{12} = i$.
Итак,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда фундаментальная матрица исходного ДУ имеет вид

$$\begin{pmatrix} e^{it} & ie^{-it} \\ ie^{it} & e^{-it} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t & \sin t + i \cos t \\ -\sin t + i \cos t & \cos t - i \sin t \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица является комплексной, но поскольку мы обычно интересуемся вещественными решениями, то за вещественную фундаментальную матрицу можно взять, например, матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

которая и позволяет указать формулу задания полного семейства решений:

$$\varphi_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

$$\varphi_2(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Случай 2. Характеристический полином $\chi(\lambda)$ имеет вид

$$\chi(\lambda) = \prod_{j=1}^m (\lambda - \lambda_j)^{r_j}, \quad r_1 + r_2 + \dots + r_m = n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ — его различные нули.

В данном случае вычисление матрицы e^A значительно усложняется по сравнению со случаем 1, поскольку ввиду наличия кратных нулей λ_j у характеристического полинома $\chi(\lambda)$ нормальные жордановы формы даже при одних и тех же λ_j определяются при различных матрицах A , вообще говоря, неоднозначно.

Так, например, если матрица A является (3×3) -матрицей и $\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^3$, то нормальная жорданова форма может иметь один из следующих трех видов:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_j & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_j & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_j \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_j & 1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_j & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_j \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda_j & 1 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_j & 1 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_j \end{array} \right),$$

каждый из которых в конкретном случае и нужно выявить.

Напомним здесь, что число $l_k(\lambda_j)$ клеток Жордана порядка k с элементом λ_j на диагонали у жордановой матрицы J можно определить по формуле

$$l_k(\lambda_j) = \text{rang}(A - \lambda_j E)^{k+1} - 2 \text{rang}(A - \lambda_j E)^k + \text{rang}(A - \lambda_j E)^{k-1},$$

а число $l(\lambda_j)$ всех клеток Жордана с элементом λ_j на диагонали у жордановой матрицы J можно определить по формуле

$$l(\lambda_j) = n - \text{rang}(A - \lambda_j E).$$

Переходя теперь непосредственно к построению фундаментальной матрицы ДУ (42.3), отметим, что в рассматриваемом случае существует невырожденная матрица T такая, что жорданова нормальная форма $J = T^{-1}AT$ является, вообще говоря, матрицей квазидиагональной. А тогда, в силу того что фундаментальную матрицу ДУ (42.3) можно записать в виде

$$e^{At} = e^{(TJT^{-1})t} = Te^{Jt}T^{-1}$$

или (с учетом того что матрица $e^{At} \in \mathbb{C}$, где $\mathbb{C}$ — постоянная матрица, также является фундаментальной) в виде

$$\Phi(t) = Te^{Jt},$$

для выяснения структуры фундаментальной матрицы $\Phi(t)$ достаточно выяснить структуру матрицы e^{Jt} , где J — квазидиагональная жорданова матрица вида (42.2).

Сразу можно заметить, что

$$e^{Jt} = \text{diag}\left(e^{J_{n_1}(\lambda_1)t}, e^{J_{n_2}(\lambda_2)t}, \dots, e^{J_{n_m}(\lambda_m)t}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{J_{n_1}(\lambda_1)t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_{n_2}(\lambda_2)t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_{n_m}(\lambda_m)t} \end{pmatrix},$$

и таким образом, вопрос сводится к построению матрицы вида

$$e^{J_{n_k}(\lambda_k)t}$$

как составляющего элемента (блока) квазидиагональной матрицы e^{Jt} .

Исследуем развернутый вид матрицы

$$e^{J_{n_k}(\lambda_k)t} = e^{(J_{n_k}(0) + \lambda_k E_{n_k})t}.$$

Здесь прежде всего заметим, что матрицы $J_{n_k}(0)t$ и $\lambda_k E_{n_k} t$ коммутируют, а значит, согласно свойству 1)

$$e^{(J_{n_k}(0) + \lambda_k E_{n_k})t} = e^{J_{n_k}(0)t} e^{\lambda_k E_{n_k} t} = e^{\lambda_k E_{n_k} t} e^{J_{n_k}(0)t} = e^{\lambda_k t} e^{J_{n_k}(0)t}. \quad (42.5)$$

Таким образом, решение задачи сводится, по существу, к выяснению структуры матрицы $e^{J_{n_k}(0)t}$. Но поскольку

$$e^{J_{n_k}(0)t} = E_{n_k} + J_{n_k}(0)t + \frac{1}{2!} J_{n_k}^2(0)t^2 + \dots + \frac{1}{s!} J_{n_k}^s(0)t^s + \dots, \quad (42.6)$$

а клетка Жордана $J_{n_k}(0)$ является жордановой нильпотентной матрицей с индексом нильпотентности n_k , то ряд (42.6) обрывается и записывается в виде

$$e^{J_{n_k}(0)t} = E_{n_k} + J_{n_k}(0)t + \frac{1}{2!} J_{n_k}^2(0)t^2 + \dots + \frac{1}{(n_k-1)!} J_{n_k}^{n_k-1}(0)t^{n_k-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!} & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{n_k-4}}{(n_k-4)!} & \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, принимая во внимание (42.5), получим, что

$$e^{J_{n_k}(\lambda_k)t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_k t} & te^{\lambda_k t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda_k t} & \dots & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} e^{\lambda_k t} & \frac{t^{n_k-1}}{(n_k-1)!} e^{\lambda_k t} \\ 0 & e^{\lambda_k t} & te^{\lambda_k t} & \dots & \frac{t^{n_k-3}}{(n_k-3)!} e^{\lambda_k t} & \frac{t^{n_k-2}}{(n_k-2)!} e^{\lambda_k t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_k t} & te^{\lambda_k t} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_k t} \end{pmatrix}.$$

Полученное представление матрицы $e^{J_{n_k}(\lambda_k)t}$ и выясняет структуру фундаментальной матрицы $\Phi(t) = Te^{Jt}$. А именно, фундаментальная матрица содержит m групп решений, где каждое из решений одной и той же группы получается из последнего решения (столбца) последовательным дифференцированием коэффициентов при $e^{\lambda_k t}$.

Пример 42.2. Проинтегрировать ДУ

$$\dot{x} = Ax, \text{ где } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. В данном случае

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)^2.$$

Тогда

$$l(3) = 2 - \text{rang}(A - 3E) = 2 - \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 - 1 = 1,$$

$$\text{т. е. } J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрицу T найдем из соотношения $TJ = AT$. Имеем:

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 3\gamma_{11} & \gamma_{11} + 3\gamma_{12} \\ 3\gamma_{21} & \gamma_{21} + 3\gamma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\gamma_{11} - \gamma_{21} & 4\gamma_{12} - \gamma_{22} \\ \gamma_{11} + 2\gamma_{21} & \gamma_{12} + 2\gamma_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим, что $\gamma_{11} = \gamma_{21}$, а $\gamma_{21} = \gamma_{12} - \gamma_{22}$. Полагая $\gamma_{11} = \gamma_{12} = 1$, получим $\gamma_{21} = 1$, $\gamma_{22} = 0$, т. е. $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Таким образом, фундаментальная матрица

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & (t+1)e^{3t} \\ e^{3t} & te^{3t} \end{pmatrix},$$

а полное семейство решений задается соотношениями

$$\varphi_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 (t+1)e^{3t}, \quad \varphi_2(t) = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t}.$$

§ 43. ТЕОРЕМА КОШИ О ГОЛОМОРФНОМ РЕШЕНИИ

Напомним некоторые сведения из теории степенных рядов.

Определение 43.1. Скалярная функция $f(z_1, z_2, \dots, z_s)$ называется голоморфной в окрестности

$$|z_1 - z_{10}| < \delta, |z_2 - z_{20}| < \delta, \dots, |z_s - z_{s0}| < \delta \quad (43.1)$$

точки $(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{s0})$ области $U \subset \mathbb{R}^s$, если она представима в этой окрестности в виде сходящегося степенного ряда, т. е.

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2, \dots, z_s) &= \\ &= \sum_{q_1 + q_2 + \dots + q_s = 0}^{\infty} a_{q_1 q_2 \dots q_s} (z_1 - z_{10})^{q_1} \dots (z_s - z_{s0})^{q_s}, \end{aligned} \quad (43.2)$$

где $a_{q_1 q_2 \dots q_s}$ — постоянные.

Предложение 43.1 (теорема Вейерштрасса). Если последовательность $\{f_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, голоморфных в области $G \subset \mathbb{R}^s$ функций равномерно сходится на каждом компактном подмножестве G , то предельная функция f голоморфна в G .

Предложение 43.2. Если степенной ряд (43.2) сходится в области (43.1) и если вместо переменных $z_1, z_2, \dots, z_s$ подставить степенные ряды, радиус сходимости которых меньше некоторого δ' , то радиус сходимости полученного степенного ряда будет меньше $\min(\delta, \delta')$.

Предложение 43.3. Ряд, полученный интегрированием сходящегося степенного ряда, является сходящимся степенным с областью сходимости исходного ряда.

Определение 43.2. Голоморфной n -мерной векторной функцией $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ в области $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ называется отображение области U в про-

пространство $\mathbb{R}^n$ такое, что координаты $f_1, f_2, \dots, f_n$ отображения f являются функциями, голоморфными в области U .

Рассмотрим векторную начальную задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (43.3)$$

и пусть $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $x^Q = (x_1)^{q_1} (x_2)^{q_2} \dots (x_n)^{q_n}$.

Теорема 43.1 (теорема Коши о голоморфном решении). Если вектор-функция f голоморфна относительно переменных t и x в окрестности точки (t_0, x_0) , т. е. она представима в виде степенного ряда

$$\begin{aligned} f(t, x) &= \sum a_{mQ} (t - t_0)^m (x - x_0)^Q = \\ &= \sum_{m+q_1+q_2+\dots+q_n=0}^{\infty} a_{mq_1q_2\dots q_n} (t - t_0)^m (x_1 - x_{10})^{q_1} \times \\ &\quad \times (x_2 - x_{20})^{q_2} \dots (x_n - x_{n0})^{q_n}, \end{aligned}$$

который сходится в некоторой области

$$|t - t_0| < \varepsilon, \|x - x_0\| < \varepsilon,$$

то начальная задача (43.3) имеет в некоторой окрестности точки $t = t_0$ единственное голоморфное решение φ , представимое в виде сходящегося степенного ряда

$$\varphi(t) = x_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s (t - t_0)^s.$$

Доказательство проведем, основываясь на принципе сжимающих отображений. Итак, пусть

$$\mathbb{D}: |t - t_0| \leq \varepsilon' < \varepsilon, \|x - x_0\| \leq \varepsilon' < \varepsilon —$$

параллелепипед такой, что

$$\max_{\mathbb{D}} \left\| \frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \right\| = M.$$

Введем в рассмотрение пространство C_n , точками которого являются голоморфные вектор-функции $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, определенные на промежутке $|t - t_0| \leq r$, где

$$r < \min \left(\frac{\alpha}{M}, \varepsilon' \right), \quad 0 < \alpha < 1,$$

и графики которых лежат в $\mathbb{D}$.

Тогда если за расстояние между двумя точками z^1 и z^2 в этом пространстве взять, например,

$$\begin{aligned}\rho(z^1, z^2) &= \|z^1 - z^2\| = \max_{|t-t_0| \leq r} \|z^1(t) - z^2(t)\| = \\ &= \max_{|t-t_0| \leq r} \left(\max_{i=1, n} |z_i^1(t) - z_i^2(t)| \right),\end{aligned}$$

то на основании приведенной выше теоремы Вейерштрасса (предложение 43.1) пространство C_n будет полным метрическим пространством.

Далее, как и при доказательстве теоремы Пикара — Линделёфа, рассуждения свяжем с рассмотрением интегрального уравнения

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau, \quad (43.4)$$

которое можно переписать в операторной форме в виде

$$\varphi(t) = A(\varphi(t)),$$

где оператор A определяется правой частью уравнения (43.4):

$$A(\varphi(t)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau.$$

Покажем, что оператор A — сжатие пространства C_n в себя. Действительно, тот факт, что оператор A переводит пространство C_n в себя, следует из предложений 43.2 и 43.3. Сжимаемость же оператора A вытекает из следующей цепочки оценок:

$$\begin{aligned}\rho(A(\varphi_1), A(\varphi_2)) &= \|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)\| = \\ &= \max_{|t-t_0| \leq r} \|A(\varphi_1(t)) - A(\varphi_2(t))\| = \\ &= \max_{|t-t_0| \leq r} \left\| \int_{t_0}^t (f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_2(\tau))) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \max_{|t-t_0| \leq r} \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_2(\tau))\| d\tau \right| \leq \\ &\leq \max_{|t-t_0| \leq r} \left| \int_{t_0}^t \max_{\mathbb{D}} \left\| \frac{\partial f(\tau, \varphi(\tau))}{\partial \varphi} \right\| \|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)\| d\tau \right| = \\ &= M \max_{|t-t_0| \leq r} \|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)\| |t - t_0| < \\ &< \alpha \max_{|t-t_0| \leq r} \|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)\| = \alpha \rho(\varphi_1, \varphi_2).\end{aligned}$$

Таким образом, согласно принципу сжимающих отображений, уравнение $\varphi = A(\varphi)$ имеет единственное решение φ^* , голоморфное на промежутке $|t - t_0| \leq r$, что равносильно существованию единственного на промежутке $|t - t_0| \leq r$ голоморфного решения интегрального уравнения (43.4), а значит, и начальной задачи (43.3).

З а м е ч а н и е 43.1. Как следует из формулировки теоремы Коши, она дает достаточные условия для существования голоморфного решения. Можно привести примеры ДУ, правые части которых не голоморфны в окрестности начальных данных, а голоморфное решение задачи Коши существует, и даже может оказаться так, что голоморфных решений существует бесконечно много.

Например, правая часть ДУ

$$\dot{x} = \frac{t + 2x}{t}$$

не голоморфна в точке $O(0,0)$, поскольку в этой точке она даже не определена. Тем не менее полное семейство решений данного ДУ определяется равенством

$$x(t) = ct^2 - t \quad (t \neq 0),$$

где c — произвольная постоянная, т. е. существует бесконечно много голоморфных решений, примыкающих к особой точке $O(0,0)$.

Рассмотрим теперь векторную начальную задачу

$$\dot{x} = A(t)x + g(t), \quad x(t_0) = x_0. \quad (43.5)$$

Теорема 43.2 (теорема Коши о голоморфном решении для линейных систем). Если матрица коэффициентов A и вектор-функция g голоморфны в области $|t - t_0| < \rho$, то начальная задача (43.5) имеет единственное решение, голоморфное, по меньшей мере, в той же области $|t - t_0| < \rho$, т. е. имеет решение, представимое степенным рядом

$$x(t) = x_0 + \sum_{s=1}^{\infty} c_s (t - t_0)^s,$$

заведомо сходящимся в области $|t - t_0| < \rho$.

Справедливость этой теоремы следует из теоремы Коши о голоморфном решении (теорема 43.1), теоремы Пикара — Линделёфа для линейных ОДУ (теорема 9.1) и предложения 43.1 (теорема Вейерштрасса).

§ 44. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ПРИ ПОМОЩИ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Из теоремы Коши для линейных систем следует, что если коэффициенты линейного однородного скалярного ДУ n -го порядка голоморфны в окрестности некоторой точки $t = t_0$, то уравнение имеет решение, голоморфное, по меньшей мере, в той же окрестности точки $t = t_0$. На практике такое решение ищется или методом неопределенных коэффициентов, или в виде рядов Тейлора¹. Но поскольку теорема Коши дает достаточные условия существования голоморфного решения, то в случае, когда коэффициенты не являются голоморфными функциями, решение, вообще говоря, не будет голоморфным ни в какой окрестности рассматриваемой точки.

Так, например, ДУ

$$D^2x + \frac{4}{t}Dx + \frac{2}{t^2}x = 0$$

имеет полное семейство решений, определяемое равенством

$$x(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2},$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, и значит, голоморфных решений данного ДУ в окрестности точки $t = 0$ не существует.

Однако, возможны случаи, когда решение может быть представлено в виде так называемого *обобщенного степенного ряда*.

Определение 44.1. Обобщенным степенным рядом называется ряд вида

$$(t - t_0)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k, \quad c_0 \neq 0,$$

где ρ — некоторая константа (вещественная или комплексная), а ряд

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k$ представляет собой сходящийся степенной ряд.

Теорема 44.1 (теорема Фукса²). Уравнение

$$D^n x + \frac{p_1(t)}{t - t_0} D^{n-1} x + \frac{p_2(t)}{(t - t_0)^2} D^{n-2} x + \dots + \frac{p_n(t)}{(t - t_0)^n} x = 0 \quad (44.1)$$

¹ Тейлор Брук (Taylor В., 1685—1731), английский математик.

² Фукс Иммануэль Лазарус (Fuchs I. L., 1833—1902), немецкий математик.

с голоморфными в некоторой окрестности точки $t = t_0$ функциями P_i , $i = 1, n$, имеет, по крайней мере, одно решение, представимое в окрестности $t = t_0$ обобщенным степенным рядом.

З а м е ч а н и е 44.1. ДУ вида (44.1) обычно называют ДУ класса Фукса.

Не останавливаясь на доказательстве теоремы Фукса, укажем способ нахождения показателя ρ (коэффициенты c_k находятся методом неопределенных коэффициентов), рассматривая для простоты ДУ второго порядка и считая, что $t_0 = 0$, т. е. будем рассматривать ДУ

$$D^2 x + \frac{p_1(t)}{t} Dx + \frac{p_2(t)}{t^2} x = 0, \quad (44.2)$$

где

$$p_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} t^k, \quad p_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} t^k, \quad |t| < r.$$

Перепишем ДУ (44.2) в виде

$$t^2 D^2 x + p_1(t) t Dx + p_2(t) x = 0 \quad (44.3)$$

и будем искать решение в виде

$$x(t) = t^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\rho}, \quad c_0 \neq 0. \quad (44.4)$$

Тогда, подставляя значение $x(t)$, определяемое формулой (44.4), и значения $Dx(t)$, $D^2 x(t)$ в уравнение (44.3), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) c_k t^{k+\rho} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(1)} t^k \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho) c_k t^{k+\rho} + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(2)} t^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+\rho} = 0. \end{aligned}$$

Используя теперь формулу

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^k a_{k-n} b_n \right) t^k$$

и сокращая в предыдущем равенстве на t^ρ , получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+\rho)(k+\rho-1) c_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^k a_{k-n}^{(1)} (n+\rho) c_n \right) t^k + \\ + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^k a_{k-n}^{(2)} c_n \right) t^k = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая теперь к нулю коэффициенты при всех степенях t , имеем

$$\begin{aligned} t^0 : (\rho(\rho-1) + a_0^{(1)}\rho + a_0^{(2)})c_0 &= 0, \\ t^k : ((k+\rho)(k+\rho-1) + a_0^{(1)}(k+\rho) + a_0^{(2)})c_k + \\ + \sum_{n=0}^{k-1} (a_{k-n}^{(1)}(n+\rho) + a_{k-n}^{(2)})c_n &= 0, \quad k=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Из первого уравнения приходим к уравнению

$$\rho(\rho-1) + a_0^{(1)}\rho + a_0^{(2)} = 0, \quad (44.5)$$

которое называется *определяющим уравнением в особой точке*¹ $t=0$.

Определяющее уравнение можно переписать в виде

$$\rho^2 + (p_1(0)-1)\rho + p_2(0) = 0.$$

Это уравнение играет основную роль в изучении фуксовых уравнений вида (44.2). Оно имеет два корня ρ_1 и ρ_2 , различных или совпадающих. Если их занумеровать так, чтобы вещественная часть корня ρ_1 была не меньше вещественной части корня ρ_2 , т. е. чтобы выполнялось неравенство $Re \rho_1 \geq Re \rho_2$, то можно показать, что корню ρ_1 определяющего уравнения (44.5) всегда отвечает решение вида (44.4) заданного ДУ (44.2).

Вообще же имеет место следующая теорема.

Теорема 44.2. Пусть ρ_1, ρ_2 — корни определяющего уравнения (44.5) такие, что $Re \rho_1 \geq Re \rho_2$. Тогда:

1) если разность $\rho_1 - \rho_2$ не является целым числом, то ДУ (44.2) имеет два линейно независимых решения x_1 и x_2 в виде обобщенных степенных рядов

$$x_1(t) = t^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} t^k, \quad c_0^{(1)} \neq 0, \quad (44.6)$$

и

$$x_2(t) = t^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} t^k, \quad c_0^{(2)} \neq 0,$$

сходящихся при $0 < t < r$;

2) если разность $\rho_1 - \rho_2$ — целое число, то существует решение x_1 в виде обобщенного степенного ряда (44.6), а второе линейно независимое решение представимо в виде

¹ Особой точкой коэффициента $\frac{P(t)}{Q(t)} = R(t)$ называется точка, в которой $Q(t) = 0$ или $R(t) = \infty$.

$$x_2(t) = t^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k + \gamma x_1(t) \ln t, \quad (44.7)$$

причем если $\rho_1 = \rho_2$, то коэффициент $\gamma \neq 0$, т. е. решение x_2 , определяемое формулой (44.7), обязательно содержит $\ln t$.

З а м е ч а н и е 44.2. Уравнения класса Фукса широко применяются в приложениях. Весьма распространенными при этом являются следующие уравнения:

- $t^2 D^2 x + a_1 t D x + a_2 x = 0$ — уравнение Эйлера;
- $t^2 D^2 x + t D x + (t^2 - \nu^2) x = 0$ — уравнение Бесселя¹;
- $t D^2 x + (\alpha + 1 - t) D x + \lambda x = 0$ — уравнение Лагерра²;
- $(1 - t^2) D^2 x - 2t D x + \lambda x = 0$ — уравнение Лежандра³;
- $t(t-1) D^2 x + (-\gamma + (1 + \alpha + \beta)t) D x + \alpha \beta x = 0$ — уравнение Гаусса⁴.

Пример 44.1. Найти решение в виде обобщенного степенного ряда ДУ Гаусса

$$t(t-1) D^2 x - t D x + x = 0$$

в окрестности особой точки $t = 0$.

Решение. Убедимся, что заданное ДУ является уравнением класса Фукса. Действительно, перепишем данное уравнение в виде

$$D^2 x + \frac{1}{1-t} D x - \frac{1}{t(1-t)} x = 0.$$

Тогда если положить

$$p_1(t) = \frac{t}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{k+1}, \quad |t| < 1,$$

$$p_2(t) = -t \sum_{k=0}^{\infty} t^k = -\sum_{k=0}^{\infty} t^{k+1}, \quad |t| < 1,$$

то ДУ

$$D^2 x + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} t^{k+1}}{t} D x - \frac{\sum_{k=0}^{\infty} t^{k+1}}{t^2} x = 0$$

является уравнением класса Фукса.

¹ *Бессель Фридрих Вильгельм* (Bessel F. W., 1784—1846), немецкий математик и астроном.

² *Лагерьр Эдмон Никола* (Laguerre E. N., 1834—1886), французский математик.

³ *Лежандр Адриен Мари* (Legendre A. M., 1752—1833), французский математик.

⁴ *Гаусс Карл Фридрих* (Gauss C. F., 1777—1855), немецкий математик и астроном.

Определяющее уравнение в данном случае — это уравнение $\rho^2 - \rho = 0$. Тогда $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0$ и, значит, корню $\rho_1 = 1$ соответствует решение в виде обобщенного степенного ряда

$$x_1(t) = t \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, \quad c_0 \neq 0.$$

Подставляя последний ряд в исходное ДУ, можно убедиться, что все c_k , где $k = 1, 2, \dots$, равны нулю. Поэтому, положив, например, $c_0 = 1$, иско-мое решение получим в виде $x_1(t) = t$.

§ 45. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Теорема Коши дает условия существования голоморфного решения в некоторой окрестности точки $t = t_0$. Естественно, возникает вопрос: как ведут себя решения вдали от точки t_0 ? Уже простые примеры показывают, что вдали от этой точки могут появиться особенности. Часто это подвижные особенности решений уравнения, которые не являются особенностями самого уравнения и которые характеризуются тем, что их положения зависят от начальных условий.

Так, например, простое ДУ

$$\dot{x} + x^2 = 0$$

имеет c -семейство решений, определяемое равенством $x(t) = 1/(t - c)$, с особенностью (полюсом первого порядка) в точке $t = c$, зависящей от выбора произвольной постоянной c .

Однако это осложнение не возникает для некоторых важных классов ДУ, имеющих неподвижные особенности, в частности для линейных ДУ. Для таких ДУ имеет место следующее утверждение.

Теорема 45.1. Единственно возможными конечными особыми точками решений линейного ДУ

$$D^n x + a_1(t) D^{n-1} x + a_2(t) D^{n-2} x + \dots + a_n(t) x = 0$$

с голоморфными коэффициентами $a_i(t)$, $i = \overline{1, n}$, являются особые точки самих коэффициентов.

Например, для линейного ДУ

$$D^2 x + a_1(t) Dx + a_2(t) x = 0,$$

где $a_1(t)$ и $a_2(t)$ — голоморфные функции, особые точки этих функций являются единственно возможными особыми точками любого решения

ДУ: т. е. если $t = t_0$ — обыкновенная точка как для $a_1(t)$, так и для $a_2(t)$, то можно построить круг ненулевого радиуса с центром в точке $t = t_0$, внутри которого все решения уравнения голоморфны.

Еще раз подчеркнем, что особые точки коэффициентов могут (но не обязаны) быть особыми точками решений ДУ.

Например, для ДУ

$$D^2x + \frac{A}{t}Dx + \frac{B}{t^2}x = 0,$$

где A и B — постоянные, коэффициенты уравнения имеют особенность в точке $t = 0$. Что же касается полного семейства решений данного ДУ, то оно представляется в виде

$$x(t) = c_1 t^{\rho_1} + c_2 t^{\rho_2},$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а ρ_1, ρ_2 — корни (которые предполагаются различными) определяющего уравнения

$$\rho^2 + (A-1)\rho + B = 0.$$

Поэтому решения имеют или не имеют особенности в начале координат в зависимости от значений A и B . Так, например, если $A = -2$, $B = 2$, то $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2$ и ни одно решение ДУ не имеет в точке $t = 0$ особенности. Если же $A = 4$, $B = 2$, то $\rho_1 = -1$, $\rho_2 = -2$ и все решения имеют особенность в точке $t = 0$. Наконец, если $A = 1$, $B = -1$, то $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = -1$, и тогда бесконечно много решений типа $c_1 t^{\rho_1}$ голоморфны, а остальные решения имеют в точке $t = 0$ особенность.

Приведенный пример иллюстрирует тот факт, что даже для линейных ДУ особенности могут некоторым образом зависеть от начальных условий, но только в том смысле, что особые точки коэффициентов могут служить особыми точками одних решений, но не других.

§ 46. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Прежде всего заметим, что, говоря о периодических функциях, мы будем рассматривать непрерывные функции. Имея это в виду, напомним следующее определение.

Определение 46.1. Функция $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенная на всей вещественной оси, называется периодической, если существует $\tau \neq 0$ такое, что для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\varphi(t + \tau) = \varphi(t)$.

Выше отмечалось, что основная задача теории ДУ заключается в выявлении свойств решений ДУ по известным свойствам функций, определяющих ДУ. Эта сложная задача упрощается (иногда существенно), если решены, например, вопросы существования или отсутствия

периодических решений у исследуемых ДУ. Как отмечал А. Пуанкаре¹ «... особая ценность этих периодических решений заключается в том, что они являются единственной брешью, через которую мы могли бы попытаться проникнуть в область, считавшуюся недоступной».

Ниже будем рассматривать векторное ДУ

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (46.1)$$

где вектор-функция f удовлетворяет условиям существования решений.

Теорема 46.1 (основное свойство периодических решений). Если $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, — периодическое с периодом τ решение ДУ (46.1), то правая часть уравнения (46.1) является вдоль интегральной кривой, соответствующей решению φ , функцией периодической периода τ по явно входящему аргументу t .

Доказательство. Так как $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение ДУ (46.1), то

$$\dot{\varphi}(t) \equiv f(t, \varphi(t)). \quad (46.2)$$

Заменяя теперь в тождестве (46.2) переменную t на $t + \tau$ и учитывая τ -периодичность функции φ и ее производной, придем к соотношению

$$\dot{\varphi}(t) \equiv f(t + \tau, \varphi(t)).$$

Но в таком случае для любого $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$f(t + \tau, \varphi(t)) = f(t, \varphi(t)),$$

которое и доказывает теорему.

Обратим здесь внимание на тот факт, что для существования периодического решения с периодом τ или даже бесконечного числа таких решений у ДУ (46.1) не обязательно, чтобы правая его часть, рассматриваемая как функция t , сама была периодической с периодом τ . Так, например, правые части дифференциальной системы

$$\dot{x} = \sin t + t(x^2 + y^2 - 1), \quad \dot{y} = \cos t + t(x^2 + y^2 - 1)$$

вообще не являются периодическими по t , но система имеет периодическое решение

$$x = -\cos t, \quad y = \sin t.$$

Однако, если мы требуем, чтобы, например, все решения ДУ (46.1) были периодическими с периодом τ , то и функция f , рассматриваемая как функция t , должна быть периодической с периодом τ .

С другой стороны, очевидно, что если правая часть ДУ (46.1) не является периодической функцией по t при любом выборе $\varphi(t)$, то не существует и периодических решений.

¹ Пуанкаре Жюль Анри (Poincaré J. H., 1854—1912), французский математик, физик, астроном и философ.

Далее, в том случае, когда функция f не зависит явно от t , т. е. когда ДУ (46.1) является автономным, $f(x)$ можно рассматривать как периодическую по t вектор-функцию любого периода, и поэтому возможно существование периодических решений какого угодно периода.

Отметим также, что и неавтономные периодические ДУ могут иметь периодические решения любого периода.

Так, например, у дифференциальной системы

$$\dot{x} = -2\pi ky + (x^2 + y^2 - 1)\sin 2\pi t, \quad \dot{y} = 2\pi kx,$$

где k — отличное от нуля произвольное действительное число, правые части периодичны по t с периодом 1, а решение системы

$$x = \cos 2\pi kt, \quad y = \sin 2\pi kt$$

имеет период $1/k$.

Не следует, однако, думать, что в случае, когда правая часть ДУ (46.1) периодична по t с периодом τ , ДУ (46.1) обязано иметь периодические решения. Действительно, рассмотрим, например, простейшее скалярное ДУ

$$\dot{x} = f(t),$$

где f — периодическая с периодом τ функция. Полное семейство решений этого ДУ определяется, как мы знаем, равенством

$$x = F(t) + c,$$

где c — произвольная постоянная, а $F(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi$. Функция x в данном случае периодична тогда и только тогда, когда периодична функция F , а для этого необходимо, но недостаточно, чтобы функция f была периодической с периодом τ . Для периодичности функции F требуется дополнительное условие

$$\int_t^{t+\tau} f(\xi) d\xi = 0.$$

§ 47. РЯДЫ ФУРЬЕ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Наиболее часто применяемым и, по-видимому, самым естественным аналитическим аппаратом представления периодических функций являются ряды Фурье¹.

Проиллюстрируем этот подход на примере ДУ второго порядка

$$D^2x + \omega^2x = f(t), \quad \omega \neq 0, \tag{47.1}$$

с непрерывной 2π -периодической функцией f , представление в ряд Фурье которой задается равенством

¹ Фурье Жан Батист Жозеф (Fourier J. B. J., 1768—1830), французский математик.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (47.2)$$

где

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos k\tau d\tau, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin k\tau d\tau.$$

Следуя методу Фурье, периодическое решение ищем в виде

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt), \quad (47.3)$$

где коэффициенты A_0 , A_k , B_k неизвестны. Подставляя выражение для $x(t)$ из (47.3) в (47.1), получим, что

$$\begin{aligned} & - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (A_k \cos kt + B_k \sin kt) + \omega^2 \frac{A_0}{2} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \omega^2 (A_k \cos kt + B_k \sin kt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ((\omega^2 - k^2) A_k \cos kt + (\omega^2 - k^2) B_k \sin kt) = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения получаем бесконечную систему уравнений для определения A_0 , A_k , B_k :

$$\omega^2 A_0 = a_0, \quad (\omega^2 - k^2) A_k = a_k, \quad (\omega^2 - k^2) B_k = b_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь возможны два случая: 1) нерезонансный (ω не равно целому числу); 2) резонансный ($\omega = m$, где m — целое число).

1. *Нерезонансный случай.* Коэффициенты ряда (47.3) определяются однозначно по формулам

$$A_0 = \frac{a_0}{\omega^2}, \quad A_k = \frac{a_k}{\omega^2 - k^2}, \quad B_k = \frac{b_k}{\omega^2 - k^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, уравнению (47.1) удовлетворяет ряд

$$\frac{1}{2} \frac{a_0}{\omega^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \cos kt + b_k \sin kt}{\omega^2 - k^2}. \quad (47.4)$$

Этот ряд сходится и допускает двукратное дифференцирование, как показывают следующие рассуждения. Ряд (47.2) сходится равномерно, поскольку функция f непрерывна, а коэффициенты ряда

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 (a_k \cos kt + b_k \sin kt)}{\omega^2 - k^2}, \quad (47.5)$$

составленного из вторых производных от членов ряда (47.4), отличаются от коэффициентов a_k и b_k ряда (47.2) лишь не зависящим от t , монотонно стремящимся к 1 при $k \rightarrow \infty$ множителем

$$-\frac{k^2}{\omega^2 - k^2}.$$

Поэтому ряд (47.5) сходится равномерно, а значит, ряд (47.4) можно почленно дифференцировать два раза. Таким образом, ряд (47.4) не только формально удовлетворяет ДУ (47.1), но его сумма существует и является периодическим решением ДУ (47.1).

2. *Резонансный случай.* Здесь имеем соотношения:

$$m^2 A_0 = a_0, \quad (m^2 - k^2) A_k = a_k, \quad (m^2 - k^2) B_k = b_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что для $k \neq m$ все коэффициенты A_k и B_k находят-ся однозначно. Если же $k = m$, то решение ДУ (47.1) будет существовать только в случае, когда $a_m = b_m = 0$. При выполнении этих условий ДУ (47.1) имеет даже бесконечно много периодических решений, так как коэффициенты A_m и B_m можно выбирать произвольно. Если же указанные условия не выполняются, то решений периода 2π не существует.

Отметим, что условия $a_m = b_m = 0$ равносильны условиям

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = 0. \quad (47.6)$$

Условия (47.6) обычно называют *условиями ортогональности*. Таким образом, в резонансном случае ДУ (47.1) имеет периодические решения (даже целое семейство таких решений), если выполняются условия ортогональности (47.6). В том случае, когда условия ортогональности не выполняются, имеет место резонанс и периодических решений не существует. Так, например, ДУ

$$D^2 x + 4x = \sin^2 t$$

периодических решений не имеет, поскольку одно из условий ортогональности здесь не выполнено, а именно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t \cos 2t \, dt \neq 0.$$

С другой стороны, ДУ

$$D^2 x + x = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2}$$

имеет периодические решения, которые находятся по формуле

$$x(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2(1-k^2)} + c_1 \cos t + c_2 \sin t,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, так как в правой части ДУ отсутствуют резонирующие члены $a_1 \cos t + b_1 \sin t$.

З а м е ч а н и е 47.1. Метод Фурье является одной из разновидностей метода неопределенных коэффициентов.

§ 48. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Метод малого параметра, или, как его еще называют, метод Пуанкаре, применяют для построения периодических решений нелинейных ДУ, которые содержат малый параметр. При этом предполагается, что обращение в нуль малого параметра не понижает порядка ДУ. Метод был предложен А. Пуанкаре в начале 90-х гг. XIX в. для решения задач небесной механики. В дальнейшем этот метод нашел применение не только в небесной, но и в общей механике, электротехнике и физике. В настоящее время метод малого параметра является одним из основных при исследовании нелинейных колебаний.

Основывается метод малого параметра на теоремах об аналитической (голоморфной) зависимости решений ДУ от параметра. Остановимся на одной из таких теорем¹.

Итак, рассмотрим векторную начальную задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \mu), & t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (48.1)$$

Теорема 48.1 (теорема Пуанкаре). Если вектор-функция f голоморфна относительно переменных t, x, μ в окрестности точки $(t_0, x_0, 0)$, т. е. она представима в виде степенного ряда

$$\begin{aligned} f(t, x, \mu) &= \sum a_{mqv} (t-t_0)^m (x-x_0)^q \mu^v = \\ &= \sum_{m+q_1+q_2+\dots+q_n+v=0}^{\infty} a_{mq_1q_2\dots q_nv} (t-t_0)^m (x_1-x_{10})^{q_1} \times \\ &\quad \times (x_2-x_{20})^{q_2} \dots (x_n-x_{n0})^{q_n} \mu^v, \end{aligned}$$

который сходится в некоторой области

$$|t-t_0| < \varepsilon, \quad \|x-x_0\| < \varepsilon, \quad |\mu| < \varepsilon,$$

¹ Другой вариант теоремы об аналитической зависимости решений ДУ от параметра см., например, в [4, гл. 1, с. 55—56].

то начальная задача (48.1) имеет голоморфное относительно μ решение $\varphi(t, \mu)$, представимое в виде сходящегося при малых значениях μ степенного ряда

$$\varphi(t, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t) \mu^k. \quad (48.2)$$

Доказательство. Рассмотрим параллелепипед

$$\mathbb{D}: |t - t_0| \leq \varepsilon' < \varepsilon, \|x - x_0\| \leq \varepsilon' < \varepsilon, |\mu| \leq \varepsilon' < \varepsilon,$$

и пусть

$$\max_{\mathbb{D}} \left\| \frac{\partial f(t, x, \mu)}{\partial x} \right\| = M,$$

причем M не зависит от t, x, μ . Введем пространство C_n , точками которого являются голоморфные по t и μ вектор-функции

$$\varphi(t, \mu) = \sum_{m+\nu=0}^{\infty} c_{m\nu} t^m \mu^\nu,$$

определенные в квадрате

$$\Omega: |t - t_0| \leq r, |\mu| \leq r,$$

где

$$r = \min \left(\frac{\alpha}{M}, \varepsilon' \right), \quad 0 < \alpha < 1,$$

и графики которых лежат в $\mathbb{D}$.

Если за расстояние между двумя точками φ_1 и φ_2 в введенном пространстве C_n выбрать, например,

$$\begin{aligned} \rho(\varphi_1, \varphi_2) &= \|\varphi_1 - \varphi_2\| = \max_{\Omega} \|\varphi_1(t, \mu) - \varphi_2(t, \mu)\| = \\ &= \max_{\Omega} \left(\max_{i=1, n} |\varphi_{i1}(t, \mu) - \varphi_{i2}(t, \mu)| \right), \end{aligned}$$

то на основании предложения 43.1 (теорема Вейерштрасса) пространство C_n оказывается полным метрическим пространством.

Рассмотрим оператор

$$A(\varphi(t, \mu)) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) d\tau.$$

На основании предложений 43.2 и 43.3 оператор A переводит точки пространства C_n в точки того же пространства C_n . Сжимаемость же оператора A вытекает из следующей цепочки оценок:

$$\begin{aligned}
\rho(A(\varphi_1), A(\varphi_2)) &= \|A(\varphi_1) - A(\varphi_2)\| = \max_{\Omega} \|A(\varphi_1(t, \mu)) - A(\varphi_2(t, \mu))\| = \\
&= \max_{\Omega} \left\| \int_{t_0}^t \{f(\tau, \varphi_1(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi_2(\tau, \mu), \mu)\} d\tau \right\| \leq \\
&\leq \max_{\Omega} \left\| \int_{t_0}^t \|f(\tau, \varphi_1(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi_2(\tau, \mu), \mu)\| d\tau \right\| \leq \\
&\leq \max_{\Omega} \left\| \int_{t_0}^t \max_{\mathbb{D}} \left\| \frac{\partial f(t, x, \mu)}{\partial x} \right\| \|\varphi_1(\tau, \mu) - \varphi_2(\tau, \mu)\| d\tau \right\| = \\
&= M \max_{\Omega} \|\varphi_1(\tau, \mu) - \varphi_2(\tau, \mu)\| |t - t_0| < \\
&< \alpha \max_{\Omega} \|\varphi_1(\tau, \mu) - \varphi_2(\tau, \mu)\| = \alpha \rho(\varphi_1, \varphi_2).
\end{aligned}$$

Ссылка на принцип сжимающих отображений завершает доказательство теоремы.

Не останавливаясь далее на различных тонкостях метода малого параметра (по поводу которых см., например, [4, гл. 2, § 8]), проиллюстрируем его на примере ДУ второго порядка

$$D^2x + 2x - \frac{1}{100}x^2 = \sin t,$$

где требуется найти первые члены разложения 2π -периодического решения.

Для нахождения требуемых первых членов разложения рассмотрим вспомогательное ДУ

$$D^2x + 2x + \mu x^2 = \sin t, \quad (48.3)$$

где μ — малый параметр.

В соответствии с методом малого параметра периодическое решение ищем в виде (48.2) при условии, что

$$\varphi(t + 2\pi, \mu) = \varphi(t, \mu) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Подставляя ряд (48.2) в ДУ (48.3), имеем

$$\begin{aligned}
D^2x_0 + D^2x_1\mu + D^2x_2\mu^2 + \dots + 2x_0 + 2x_1\mu + 2x_2\mu^2 + \dots + \\
+ (x_0^2 + 2x_0x_1\mu + x_1^2\mu^2 + \dots)\mu = \sin t.
\end{aligned}$$

Приравнявая в полученном соотношении коэффициенты при μ^0 и μ^1 , получим:

$$\mu^0 : D^2x_0 + 2x_0 = \sin t, \quad (48.4)$$

$$\mu^1 : D^2 x_1 + 2x_1 + x_0^2 = 0.$$

Считая x_0 известной функцией (ее можно определить из ДУ (48.4)), для определения x_1 имеем тогда линейное неоднородное ДУ второго порядка

$$D^2 x_1 + 2x_1 = -x_0^2.$$

Итак, найдем прежде всего x_0 . Для этого, обращаясь к ДУ (48.4), заметим, что полное семейство решений его соответствующего однородного уравнения задается суммой $c_1 \sin \sqrt{2}t + c_2 \cos \sqrt{2}t$. Эта сумма определяет периодическую функцию с наименьшим положительным периодом $T = \sqrt{2}\pi$. С учетом этого и в соответствии с общей теорией линейных ДУ с постоянными коэффициентами частное решение ДУ (48.4) ищем в виде

$$x_0^*(t) = A \sin t + B \cos t.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $x_0^*(t) = \sin t$. Таким образом, полное семейство решений ДУ (48.4) определяется равенством

$$x_0(t) = c_1 \sin \sqrt{2}t + c_2 \cos \sqrt{2}t + \sin t,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Но поскольку нас интересует 2π -периодическое решение исходного ДУ, то в качестве $x_0(t)$ выбираем $x_0(t) = \sin t$. А в таком случае для определения $x_1(t)$ приходим к ДУ

$$D^2 x_1 + 2x_1 = -\sin^2 t = -\frac{1}{2}(\cos 2t - 1).$$

В данном случае частное решение ищем в виде

$$x_1(t) = A + B \cos 2t + C \sin 2t.$$

Проведя необходимые выкладки, находим, что

$$x_1(t) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t.$$

Следовательно,

$$\varphi(t, \mu) = x_0(t) + x_1(t)\mu + \dots = \sin t - \frac{1}{4}(1 + \cos 2t)\mu + \dots$$

Отметив, что для исходного ДУ значение $\mu = -\frac{1}{100}$, приходим к выводу, что искомое решение

$$x(t) = \frac{1}{400} + \sin t + \frac{1}{400} \cos 2t + \dots$$

З а м е ч а н и е 48.1. Метод малого параметра является еще одной разновидностью метода неопределенных коэффициентов.

Глава 5

АВТОНОМНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 49. ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Рассмотрим автономное векторное ДУ

$$\dot{x} = f(x), \quad (49.1)$$

где функция f удовлетворяет условиям существования и единственности решений в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^n$.

Определение 49.1. ДУ (49.1) определяет динамическую систему, если все решения этого уравнения продолжимы на все моменты времени от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. определены для любого $t \in \mathbb{R}^1$.

В общем случае ДУ (49.1) не определяет динамическую систему. Так, например, рассмотрим скалярную начальную задачу

$$\dot{x} = x^2, \quad x(1) = 1. \quad (49.2)$$

Ее решением является функция φ , заданная равенством

$$\varphi(t) = -\frac{1}{t-2}.$$

¹ В более общей ситуации (не касаясь автономных ДУ) динамической системой в пространстве $\mathbb{R}^n$ называют отображение $\varphi(t, p) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее следующим трем свойствам:

- 1) $\varphi(t, p)$ непрерывно (аксиома непрерывности);
- 2) $\varphi(0, p) = p \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$ (аксиома тождества);
- 3) $\varphi(t_1 + t_2, p) = \varphi(t_2, \varphi(t_1, p)) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ и } \forall p \in \mathbb{R}^n$ (аксиома группы).

Таким образом, решение данной начальной задачи определено на интервале $(-\infty, 2)$ (рис. 40) и, значит, ДУ (49.2) динамическую систему не определяет.

Однако, если мы интересуемся лишь геометрическими, точнее топологическими, свойствами решений автономного ДУ (49.1), то можно считать, что это ДУ определяет динамическую систему.

В самом деле, рассмотрим наряду с ДУ (49.1) ДУ

$$\dot{x} = \sigma(x)f(x), \quad (49.3)$$

где, например, $\sigma(x) = 1/\sqrt{1+f^2(x)}$. Здесь $f^2(x)$ — скалярное произведение вектора $f(x)$ на вектор $f(x)$. Как видно, ДУ (49.1) и (49.3) отличаются друг от друга скалярным положительным множителем $\sigma(x)$. Это означает, что скорости движения *изображающих точек*¹ по траекториям указанных ДУ различны. При этом скорость движения, определяемая ДУ (49.3), оказывается ограниченной, а поэтому точка, движущаяся по интегральной кривой ДУ (49.3), не может за конечное время уйти на бесконечность. Другими словами, ДУ (49.3), в отличие от ДУ (49.1), всегда определяет динамическую систему.

Что же касается траекторий ДУ (49.1) и (49.3), то они совпадают, поскольку введение в уравнение (49.1) скалярного множителя (который изменяет скорость движения) изменяет лишь независимую переменную t , а значит, изменяет лишь параметр на интегральных кривых.

Итак, с точки зрения исследования геометрических свойств решений (что мы и имеем в виду) ДУ (49.1) определяет динамическую систему.

Теорема 49.1. Если $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение ДУ (49.1), а $h^\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — сдвиг на $\tau \in \mathbb{R}$, переводящей точку $t \in \mathbb{R}$ в точку $(t+\tau) \in \mathbb{R}$, то композиция $\varphi \circ h^\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — также является решением ДУ (49.1).

Доказательство. Так как $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение ДУ (49.1), то

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

В частности, это равенство справедливо и для $t = t_0 + \tau$. Имея это в виду, получаем следующую цепочку равенств:

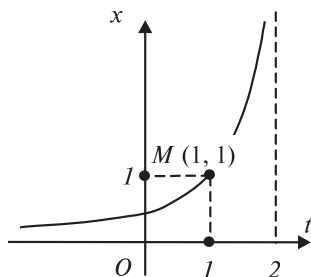


Рис. 40. К начальной задаче (49.2)

¹ Точка M фазового пространства называется изображающей, если она имеет координату $\varphi(t)$, т. е. $M = M(\varphi(t))$, где $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение ДУ.

$$\left. \frac{d\varphi(t+\tau)}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{t=t_0+\tau} = f(\varphi(t_0+\tau)) = f(\varphi(t+\tau)) \Big|_{t=t_0}.$$

Другими словами, для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ (а значит, для любого $t \in \mathbb{R}$)

$$\left. \frac{d\varphi(t+\tau)}{dt} \right|_{t=t_0} = f(\varphi(t+\tau)) \Big|_{t=t_0},$$

что и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 49.1. Геометрически (рис. 41) выясненный факт означает, что автономное ДУ допускает семейство параллельных движений, проекция которых на фазовое пространство дает одну и ту же траекторию.

Отметим также, что в случае неавтономного ДУ указанное выше свойство, вообще говоря, места не имеет.

Далее, поскольку мы предполагаем, что функция f удовлетворяет условиям, гарантирующим единственность решений ДУ (49.1), то это означает, что существуют $t^* \in \mathbb{R}$ и $\xi^* \in G$ такие, что в некоторой окрестности выбранного $t = t^*$ определено единственное решение φ ДУ (49.1), удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(t^*) = \xi^*. \quad (49.4)$$

Теорема 49.2. Через любую точку $M(\xi^*)$ области G фазового пространства проходит одна и только одна траектория ДУ (49.1).

Доказательство. Тот факт, что через точку M , по крайней мере, одна траектория действительно проходит, следует из того, что всегда существует решение, удовлетворяющее условию (49.4). Дальнейшие рассуждения проведем методом от противного. Именно, предположим, что через точку $M(\xi^*)$ проходят две траектории, соответствующие решениям

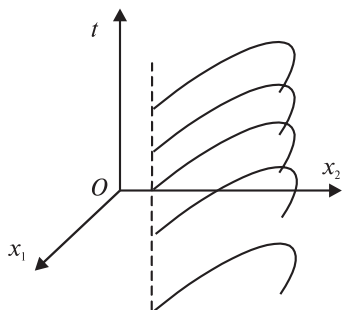


Рис. 41. К теореме 49.1

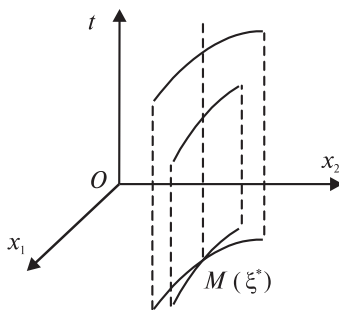


Рис. 42. К замечанию 49.2

$\varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Последнее означает, что существуют τ_1 и τ_2 такие, что $\varphi_1(\tau_1) = \varphi_2(\tau_2) = \xi^*$. Далее, если φ_1 — решение ДУ (49.1), то по теореме 49.1 решением будет и композиция $\varphi_1 \circ h^{\tau_1 - \tau_2}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Но для этого решения имеем цепочку равенств:

$$\varphi_1 \circ h^{\tau_1 - \tau_2}(\tau_2) = \varphi_1(t + \tau_1 - \tau_2) \Big|_{t=\tau_2} = \varphi_1(\tau_1) = \varphi_2(\tau_2) = \xi^*.$$

Отсюда следует, что траектории, определяемые решениями φ_1 и φ_2 , совпадают, так как совпадают траектории, определяемые решениями φ_1 и $\varphi_1 \circ h^{\tau_1 - \tau_2}$ (замечание 49.1), а решения $\varphi_1 \circ h^{\tau_1 - \tau_2}$ и φ_2 совпадают в силу условий единственности решений.

З а м е ч а н и е 49.2. Для случая неавтономных ДУ утверждение, аналогичное теореме 49.2, в общем случае места не имеет. Для неавтономных ДУ характерным является то, что графики решений таких ДУ, проходящие через точки, лежащие на прямой, параллельной оси t , имеют различные проекции на фазовое пространство, и значит, единственность в общем случае нарушается (рис. 42).

Обратимся теперь к понятию *оператора сдвига по траекториям* ДУ. Для этого введем в рассмотрение преобразование за время от s до t , которое для фиксированных $s, t \in \mathbb{R}$ представляет собой отображение

$$g_s^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (49.5)$$

фазового пространства $\mathbb{R}^n$ в себя, ставящее в соответствие каждой точке $x_s \in \mathbb{R}^n$ точку $\varphi(t)$ траектории ДУ (49.1), решение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ которого удовлетворяет начальному условию $\varphi(s) = x_s$.

Аналитическое свойство такого отображения, очевидно, определяется равенством

$$g_s^t x_s = \varphi(t),$$

которое часто записывают и в виде

$$g_s^t x_s = \varphi(t, x_s). \quad (49.6)$$

Введенное указанным выше образом отображение (49.5) обычно и называют *оператором сдвига по траекториям* ДУ (49.1)¹.

Очевидно, что оператор сдвига является непрерывным оператором и что:

- 1) для любого $t \in \mathbb{R}$ оператор g_t^t является тождественным оператором;
- 2) для любых $s, t, \tau \in \mathbb{R}$ оператор $g_s^t = g_t^\tau \circ g_s^\tau$.

¹ Введенное понятие оператора сдвига по траекториям ДУ используется и в общем случае неавтономных ДУ.

Действительно, свойство 1) непосредственно следует из определения оператора сдвига, а для доказательства свойства 2) достаточно показать, что для каждого вектора x_s справедливо равенство

$$g'_s x_s = g'_\tau \circ g_s^\tau x_s.$$

В самом деле, левая часть последнего соотношения определяется формулой (49.6), а

$$g'_\tau \circ g_s^\tau x_s = g'_\tau \varphi(\tau, x_s) = \varphi(t, \varphi(\tau, x_s)).$$

Таким образом,

$$\varphi(\tau, x_s) = \varphi(\tau, \varphi(\tau, x_s)),$$

что на основании предположения о единственности решений ДУ (49.1) приводит к равенству

$$\varphi(t, x_s) = \varphi(t, \varphi(\tau, x_s)),$$

которое и доказывает требуемое.

Заметим, что из свойства 2) следует, в частности, что оператор сдвига по траекториям всегда имеет обратный оператор $(g_s^t)^{-1} = g_t^s$. Для этого достаточно положить в равенстве свойства 2) $\tau = t_0$, $s = t$.

Теорема 49.3 (групповое свойство траекторий ДУ (49.1)). Справедлива цепочка равенств:

$$g_0^{t_1+t_2} = g_{t_1}^{t_2} \circ g_0^{t_1} = g_{t_2}^{t_1} \circ g_0^{t_2}. \quad (49.7)$$

Доказательство. Цепочка равенств (49.7) равносильна равенствам

$$\varphi(t_1 + t_2, x_0) = \varphi(t_2, \varphi(t_1, x_0)) = \varphi(t_1, \varphi(t_2, x_0)). \quad (49.8)$$

Рассмотрим вектор-функции φ_1 и φ_2 , которые определяются равенствами

$$\varphi_1(t) = \varphi(t, \varphi(t_1, x_0)), \quad \varphi_2(t) = \varphi(t + t_1, x_0)$$

и которые, в силу теоремы 49.1, являются решениями ДУ (49.1). При $t = 0$ имеем

$$\varphi_1(0) = \varphi(t_1, x_0), \quad \varphi_2(0) = \varphi(t_1, x_0),$$

т. е. $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. А в таком случае в силу предположения о единственности решений ДУ (49.1) справедливо тождество $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ для всех t , откуда следует первое из равенств (49.8). Аналогично доказывается равенство первой и последней вектор-функций в (49.8).

Определение 49.2. Точка a называется особой точкой (точкой покоя или положением равновесия) ДУ (49.1), если $f(a) = 0$.

Очевидно, что если a — особая точка ДУ (49.1), то:

(i) вектор-функция φ такая, что $\varphi(t) \equiv a$, является решением ДУ (49.1); (ii) точка $x = a$ является траекторией ДУ (49.1).

§ 50. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И ЗАМКНУТЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Теорема 50.1. Множество $\{\Omega_i\}$ всех периодов непрерывной функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ является замкнутым подмножеством множества вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Доказательство. Если множество $\{\Omega_i\}$ не имеет предельных точек, то оно содержит их все, т. е. является замкнутым.

Предположим, что $\{\Omega_i\}$ имеет предельные точки. Обозначим через Ω любую из них. Тогда в силу непрерывности функции f имеем цепочку равенств:

$$f(t + \Omega) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(t + \Omega_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следует, что $f(t + \Omega) = f(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$ и, значит, предельная точка принадлежит множеству $\{\Omega_i\}$, а это и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 50.1. Из теоремы 50.1 очевидным образом следует, что множество периодов непрерывной функции f является замкнутой подгруппой группы вещественных чисел.

Теорема 50.2. Замкнутая подгруппа G группы вещественных чисел $\mathbb{R}$ есть либо $\{0\}$, либо множество вида $\{k\Omega_0\}$, где $k \in \mathbb{Z}$, а Ω_0 — некоторое отличное от нуля число, либо $\mathbb{R}$.

Доказательство. Пусть $G = \{0\}$. Тогда сразу же имеем первый случай теоремы.

Предположим, что $G \neq \{0\}$. Тогда, не ограничивая общности рассуждений, всегда можно считать, что в множестве G есть положительные элементы, так как в противном случае, меняя t на $-t$, придем к этому случаю.

Пусть

$$\Omega_0 = \inf \{t \mid t \in G, t > 0\}.$$

Очевидно двойное неравенство $0 \leq \Omega_0 < +\infty$. Предположим, что $\Omega_0 > 0$. В силу замкнутости множества G из предыдущего имеем включение $\Omega_0 \in G$. С другой стороны, так как G — группа, то элементы вида $k\Omega_0$, где $k \in \mathbb{Z}$, принадлежат G . При этом других элементов в G быть не может. Действительно, точки $k\Omega_0$ разбивают вещественную прямую $\mathbb{R}$ на интервалы $k\Omega_0 < t < (k+1)\Omega_0$ (рис. 43).



Рис. 43. К случаю $\Omega_0 > 0$

Теперь если бы в группе G были элементы, отличные от элементов вида $k\Omega_0$, то они обязаны были бы попасть в указанные интервалы. Пусть t^* — один из таких элементов. В этом случае

$$0 < t^* - k\Omega_0 < \Omega_0,$$

а это противоречит тому, что Ω_0 — нижняя грань.

Итак, если $\Omega_0 > 0$, то имеем второй случай теоремы.

Пусть теперь $\Omega_0 = 0$. В этом случае по определению нижней грани существуют сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и $t \in G$ такие, что $0 < t < \varepsilon$. Но так как G — группа, то в G есть и элементы вида kt , где $k \in \mathbb{Z}$. Эти элементы разбивают всю вещественную ось t на интервалы, длина каждого из которых меньше ε . Но так как ε — сколь угодно малое, то это означает, что в любой сколь угодно малой окрестности произвольной точки из $\mathbb{R}$ есть элементы из G . А поскольку G — замкнутое множество, то отсюда и следует, что G совпадает с $\mathbb{R}$.

Итак, когда $\Omega_0 = 0$, имеем третий случай теоремы.

З а м е ч а н и е 50.2. Если говорить о периодических функциях, то множество их периодов есть либо множество $\{k\Omega_0\}$, где $k \in \mathbb{Z}$, а Ω_0 — некоторое отличное от нуля число, либо это множество совпадает со всей вещественной осью t и в этом случае функция постоянна.

Теорема 50.3. Если $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение ДУ (49.1) такое, что для некоторых $\tau_1 < \tau_2 \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$, то это решение является периодическим с периодом $\omega = \tau_2 - \tau_1$.

Доказательство. Так как $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение ДУ (49.1), то в силу теоремы 49.1 отображение $\varphi \circ h^{\tau_2 - \tau_1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ также является решением ДУ (49.1). Но для этого решения справедлива цепочка равенств:

$$\varphi \circ h^{\tau_2 - \tau_1}(\tau_1) = \varphi(t + \tau_2 - \tau_1)|_{t=\tau_1} = \varphi(\tau_2) = \varphi(\tau_1).$$

Тогда, исходя из единственности решений, приходим к выводу, что решения φ и $\varphi \circ h^{\tau_2 - \tau_1}$ совпадают. Отсюда приходим к равенству $\varphi(t + \tau_2 - \tau_1) = \varphi(t)$, справедливому для любого $t \in \mathbb{R}$, которое и доказывает теорему.

Теорема 50.4. Для того чтобы траектория Γ автономного ДУ (49.1) была простой замкнутой кривой, необходимо и достаточно, чтобы она была проекцией на фазовое пространство графика непостоянного периодического решения ДУ (49.1).

Доказательство. Необходимость. Пусть траектория Γ — простая замкнутая кривая, являющаяся проекцией на фазовое пространство графика некоторого решения $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ДУ (49.1). Тогда поскольку Γ — замкнутая кривая, то существуют $\tau_1 < \tau_2 \in \mathbb{R}$ такие, что $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$. Последнее означает (на основании теоремы 50.3), что φ — решение периодическое. С другой стороны, Γ — простая кривая, поэтому φ оказывается непостоянным периодическим решением.

Достаточность. Пусть $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непостоянное периодическое решение ДУ (49.1) с наименьшим положительным периодом ω_0 . Это означает, что траектория Γ , соответствующая этому решению, будет определена для всех t из промежутка $0 \leq t \leq \omega_0$. Если теперь $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$ для некоторых $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $0 \leq \tau_1 < \tau_2 \leq \omega_0$ (существование таких τ_1 и τ_2 следует из периодичности решения φ), то по теореме 50.3 разность $\tau_2 - \tau_1$ — период решения φ . Но так как ω_0 — наименьший положительный период решения φ , то $\tau_2 - \tau_1 = \omega_0$. Таким образом, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \omega_0$. А это и означает, что Γ — простая замкнутая кривая.

З а м е ч а н и е 50.3. В случае неавтономных ДУ замкнутые траектории могут быть проекциями на фазовое пространство графиков непериодических решений.

Так, например, рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = -ye^t, \quad \dot{y} = xe^t. \quad (50.1)$$

Переходя к полярным координатам ρ, θ по формулам $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, продифференцировав соотношения $x^2 + y^2 = \rho^2$, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ по t , получим равенства

$$\rho \dot{\rho} = x\dot{x} + y\dot{y}, \quad \rho^2 \dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}. \quad (50.2)$$

Тогда система (50.1) переписывается в полярных координатах в виде

$$\dot{\rho} = 0, \quad \dot{\theta} = e^t.$$

Интегрируя, имеем

$$\rho = c_1, \quad \theta = e^t + c_2$$

и, таким образом,

$$x = c_1 \cos(e^t + c_2), \quad y = c_1 \sin(e^t + c_2).$$

Здесь замкнутые траектории, уравнения которых $x^2 + y^2 = c_1^2$ ($c_1 \neq 0$), являются проекциями на фазовую плоскость xOy графиков непериодических решений (рис. 44).

З а м е ч а н и е 50.4. Из теоремы 50.4 непосредственно получаем следующее утверждение.

Теорема 50.5. Всякая траектория автономного ДУ (49.1) принадлежит одному из следующих трех типов:

1) особая точка;

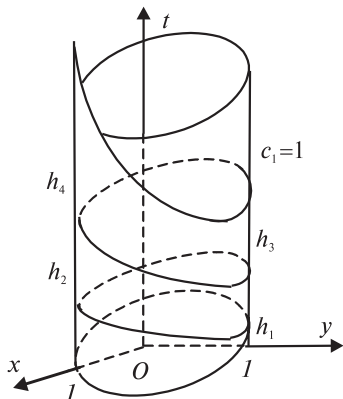


Рис. 44. К системе (50.1)

2) замкнутая траектория, которой соответствует периодическое решение;

3) траектория без самопересечений, которой соответствует непериодическое решение.

Теорема 50.6. Интегральная кривая автономного ДУ (49.1) не может войти в особую точку за конечное время.

Доказательство. Пусть a — особая точка ДУ (49.1). Тогда, как мы знаем, вектор-функция φ такая, что $\varphi(t) \equiv a$, является решением ДУ (49.1). А в таком случае, если траектории, соответствующие графикам решений φ^* и φ ДУ (49.1), не совпадают, то они не имеют общих точек, а значит, $\varphi^*(t) \neq a$ при любом $t \in \mathbb{R}$, что и доказывает теорему.

Следствие 50.1. Интегральная кривая ДУ (49.1) может приближаться к особой точке только при $t \rightarrow +\infty$ или при $t \rightarrow -\infty$.

§ 51. ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ

Определение 51.1. Точка q фазового пространства $\mathbb{R}^n$ называется ω -предельной точкой точки $p \in \mathbb{R}^n$ (траектории $\varphi(t, p)$, $t \in \mathbb{R}$), если существуют последовательность моментов времени $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, и решение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ДУ (49.1) такие, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, p) = q. \quad (51.1)$$

Множество Ω_p всех ω -предельных точек данной точки p (данной траектории $\varphi(t, p)$) называют ее ω -предельным множеством.

Определение 51.2. Точка q фазового пространства $\mathbb{R}^n$ называется α -предельной точкой точки $p \in \mathbb{R}^n$ (траектории $\varphi(t, p)$, $t \in \mathbb{R}$), если существуют последовательность моментов времени $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, и решение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ДУ (49.1) такие, что имеет место равенство (51.1).

Множество A_p всех α -предельных точек данной точки p (данной траектории $\varphi(t, p)$) называется ее α -предельным множеством.

З а м е ч а н и е 51.1. Наряду с ω - и α -предельными точками траектории $\varphi(t, p)$, $t \in \mathbb{R}$, рассматривают ω - и α -предельные точки положительной полутраектории $\varphi(I^+, p)$ и отрицательной полутраектории $\varphi(I^-, p)$, являющихся «сужениями» траектории $\varphi(t, p)$, $t \in \mathbb{R}$, соответственно на промежутки $I^+ = [t^* \leq t < +\infty)$ и $I^- = (-\infty < t \leq t^*]$.

Теорема 51.1. Предельные множества Ω_p и A_p замкнуты.

Доказательство проведем для множества Ω_p . Случай множества A_p рассматривается аналогично.

Итак, пусть $\{q_n\} \subset \Omega_p$ — такая последовательность точек, что $q_n \rightarrow q$ при $n \rightarrow +\infty$. Покажем, что точка $q \in \Omega_p$. Действительно, по определению множества Ω_p для $n \in \mathbb{N}$ существует последовательность моментов времени $\{t_n^k\}$, $t_n^k \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, такая, что $\varphi(t_n^k, p) \rightarrow q_k$ при $n \rightarrow +\infty$. Не умаляя общности рассуждений, можно считать, что для любого $k \geq 1$

$$\|\varphi(t_n^k, p) - q_k\| < \frac{1}{k},$$

где $t_n^k \geq k$ для $n \geq k$. Положим $t_n = t_n^n$. Тогда поскольку

$$\|\varphi(t_n, p) - q\| \leq \|q - q_n\| + \|q_n - \varphi(t_n, p)\| \leq \|q - q_n\| + \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$, то $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ при $t_n \rightarrow +\infty$, а значит, $q \in \Omega_p$, т. е. множество Ω_p замкнуто.

Определение 51.3. Множество M точек фазового пространства $\mathbb{R}^n$ называется инвариантным (положительно инвариантным или отрицательно инвариантным) по отношению к динамической системе, определяемой ДУ (49.1), или просто инвариантным, если для любой точки $q \in M$ траектория $\varphi(t, q)$ (полутраектория $\varphi(I^+, q)$ или $\varphi(I^-, q)$), проходящая через точку q , принадлежит множеству M .

Иначе, множество M точек фазового пространства $\mathbb{R}^n$ называется инвариантным (положительно инвариантным или отрицательно инвариантным), если оно состоит из целых траекторий (положительных полутраекторий или отрицательных полутраекторий) ДУ (49.1).

Теорема 51.2. Предельные множества Ω_p и A_p инвариантны.

Доказательство. Как и в случае теоремы 51.1 достаточно рассмотреть случай множества Ω_p .

Итак, пусть q — произвольная точка множества Ω_p . Тогда по определению найдется последовательность моментов времени $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, такая, что $\varphi(t_n, p) \rightarrow q$ при $n \rightarrow +\infty$, где φ — решение ДУ (49.1). Рассмотрим функции $\varphi \circ h^{t_n} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$, которые, как известно, — решения ДУ (49.1), причем такие, что

$$\varphi(t + t_n, p)|_{t=0} \rightarrow q \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

В силу группового свойства траекторий ДУ (49.1) получаем, что

$$\varphi(t + t_n, p) = \varphi(t, \varphi(t_n, p)).$$

Тогда, основываясь на свойстве непрерывной зависимости решений от начальных данных, приходим к выводу, что

$$\varphi(t+t_n, p) \rightarrow \varphi(t, q)$$

при $n \rightarrow +\infty$ и любом фиксированном t , т. е. при $t+t_n \rightarrow +\infty$, когда $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, точка $\varphi(t, q) \in \Omega_p$ при любом t , что и означает инвариантность множества Ω_p .

Приведем примеры предельных множеств.

Пример 51.1. Рассмотрим скалярное ДУ

$$\dot{x} = x,$$

полное семейство решений которого определяется равенством

$$x = ce^t,$$

где c — произвольная постоянная. Фазовым пространством здесь является ось Ox прямоугольной декартовой системы координат tOx . В данном случае траекториями ДУ являются: особая точка O и два бесконечных интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, вдоль первого из которых движение изображающих точек происходит в отрицательном направлении, а вдоль другого — в положительном направлении. Точка O — это α -предельная точка двух других траекторий (рис. 45).

Пример 51.2. Рассмотрим скалярное ДУ

$$\dot{x} = -x.$$

В данном случае траектории те же, что и в предыдущем примере, но направление движения изображающих точек по бесконечным интервалам противоположное (рис. 46). Точка O является ω -предельной точкой для двух других траекторий.

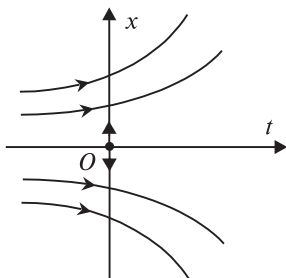


Рис. 45. К примеру 51.1

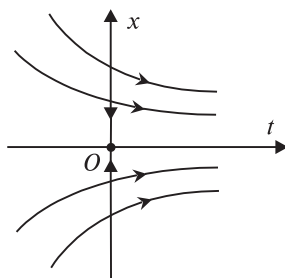


Рис. 46. К примеру 51.2

Пример 51.3. Рассмотрим скалярное ДУ

$$\dot{x} = |x|,$$

полное семейство решений которого задается равенствами

$$x = |c|e^t, \quad x = -|c|e^{-t},$$

где c — произвольная постоянная. Здесь траектории те же, что и в предыдущих двух примерах. Направление движения изображающих точек по бесконечным интервалам показано на рис. 47.

Точка O является ω -предельной точкой для траектории, движение изображающих точек по которой происходит по отрицательной полуоси Ox , и α -предельной точкой для траектории, движение изображающих точек по которой происходит по положительной полуоси Ox .

Пример 51.4. Рассмотрим двумерную систему

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2), \quad \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2). \quad (51.1)$$

Чтобы найти все траектории этой системы, введем полярные координаты ρ, θ , где $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Тогда на основании формул (50.2) система (51.1) перепишется в виде

$$\dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2), \quad \dot{\theta} = 1. \quad (51.2)$$

Учитывая теперь, что система (51.1) имеет единственную особую точку $O(0,0)$ и мы интересуемся построением траекторий, можно считать, что в системе (51.2) $\rho > 0$. Каждое из полученных уравнений системы (51.2) легко интегрируется, и все семейство решений, как нетрудно видеть, задается формулами

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{1 + ce^{-2t}}}, \quad \theta = t + t_0. \quad (51.3)$$

Если в первом уравнении системы (51.3) положить $c = 0$, то получим $\rho = 1$, $\theta = t + t_0$. Эти равенства определяют замкнутую траекторию — окружность, заданную уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Если $c < 0$, то ясно, что $\rho > 1$ и $\rho \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$. Если же $c > 0$, то $\rho < 1$, и снова $\rho \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$. Это означает, что существует единственная замкнутая траектория $\rho = 1$, к которой все остальные траектории с течением времени приближаются по спиралям (см. рис. 48).

Таким образом, окружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 1$, является ω -предельным множеством для всех спиралей-траекторий системы (51.1). Точка же $O(0,0)$ в данном случае — это α -предельная точка для спиралей-траекторий, расположенных в конечной области, ограниченной указанной окружностью.

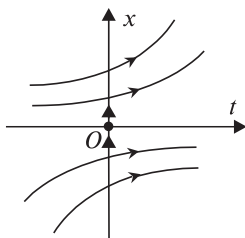


Рис. 47. К примеру 51.3

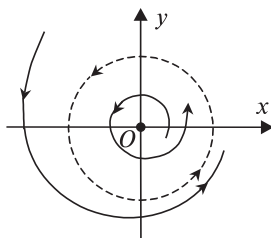


Рис. 48. К примеру 51.4

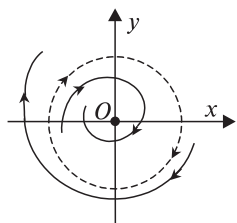


Рис. 49. Неустойчивый предельный цикл

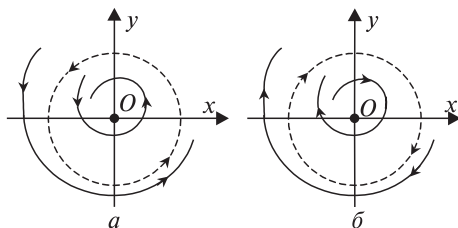


Рис. 50. Полуустойчивые предельные циклы (а, б)

Определение 51.4. Замкнутая траектория ДУ (49.1) с двумерным фазовым пространством называется предельным циклом, если она является α - или ω -предельным множеством хотя бы для одной другой траектории ДУ (49.1).

Предельные циклы бывают (орбитально) устойчивые, к которым все близкие траектории спиралевидно приближаются (необязательно монотонно) при $t \rightarrow +\infty$ (см. рис. 48), (орбитально) неустойчивые, к которым траектории спиралевидно приближаются (необязательно монотонно) при $t \rightarrow -\infty$ (рис. 49), и (орбитально) полуустойчивые, когда с одной стороны от цикла траектории спиралевидно к нему приближаются при $t \rightarrow +\infty$, а с другой — спиралевидно к нему приближаются при $t \rightarrow -\infty$ (рис. 50).

§ 52. ЗАМКНУТЫЕ ТРАЕКТОРИИ ДВУМЕРНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Остановимся на одном понятии, которое может быть использовано при выяснении вопроса о существовании предельных циклов. Это понятие *индекса замкнутой кривой*.

Итак, рассмотрим двумерную динамическую систему

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \quad (52.1)$$

где функции X и Y будем считать непрерывно дифференцируемыми в некоторой области G .

Пусть Γ — замкнутая кривая фазовой плоскости, которая не обязательно является траекторией системы (52.1) и которая не проходит через особые точки этой системы. Тогда если $M(x, y)$ — точка кривой Γ , то вектор

$$v(x, y) = X(x, y)i + Y(x, y)j, \quad (52.2)$$

где i, j — единичные векторы осей прямоугольных декартовых координат, будет ненулевым вектором и, следовательно, будет иметь определенное направление, заданное некоторым углом θ (рис. 51).

Если точка $M(x, y)$, двигаясь по кривой Γ , например, против хода часовой стрелки, совершит один оборот, то вектор v сделает при этом некоторое целое число оборотов, т. е. угол θ получит приращение

$$\Delta\theta = 2\pi n,$$

где n — целое положительное, нуль или целое отрицательное число. Это число и называется *индексом замкнутой кривой Γ* (цикла Γ).

Теорема 52.1. Замкнутая траектория Γ системы (52.1) окружает, по крайней мере, одну особую точку этой системы.

Доказательство. Прежде всего заметим, что индекс замкнутой траектории Γ системы (52.1) равен $+1$, поскольку вектор v всегда касается траектории. Если теперь цикл Γ начать стягивать так, чтобы он не проходил при деформации через особые точки системы (52.1), то индекс должен, с одной стороны, меняться непрерывно, а с другой — всегда быть равным целому числу. Это означает, что при непрерывной деформации индекс цикла не меняется. Поэтому индекс цикла равен нулю, если цикл можно непрерывно стянуть в точку, не пересекая при этом особые точки системы (52.1), т. е. если цикл не окружает особых точек системы. А так как индекс замкнутой траектории равен $+1$, то отсюда и следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 52.1. Теорема 52.1 часто используется при доказательстве отсутствия предельных циклов в определенной области фазовой плоскости.

Отметим и следующее важное утверждение.

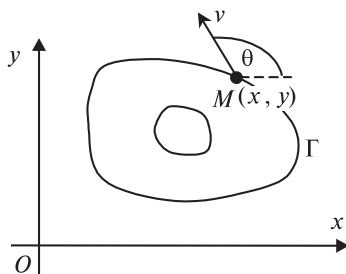


Рис. 51. К понятию индекса замкнутой кривой

Теорема 52.2 (признак Дюлака¹). Если в односвязной области G фазовой плоскости существует непрерывно дифференцируемая функция B ($B(x, y) > 0$) такая, что выражение

$$\frac{\partial}{\partial x}(BX) + \frac{\partial}{\partial y}(BY)$$

имеет в G постоянный знак и тождественно отлично от нуля в любой подобласти области G , то система (52.1) не имеет в области G замкнутых траекторий, а значит, и предельных циклов.

Доказательство. Предположим, что система (52.1) имеет в односвязной области G замкнутую траекторию Γ и пусть S — внутренняя область, ограниченная траекторией Γ . Тогда поскольку G — односвязная область, то $S \subset G$. По формуле Грина

$$\int_{\Gamma} (BX)dy - (BY)dx = \iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x}(BX) + \frac{\partial}{\partial y}(BY) \right) dx dy. \quad (52.3)$$

Но вдоль траектории Γ справедливо равенство $BXdY = BYdx$ (оно следует из вида соответствующего ДУ траекторий), поэтому

$$\int_{\Gamma} (BX)dy - (BY)dx \equiv 0.$$

С другой стороны, подынтегральное выражение в правой части (52.3) имеет постоянный знак и тождественно отлично от нуля в S . Последнее означает, что правая часть в (52.3) отлична от нуля. Полученное противоречие с предыдущим тождеством и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 52.2. При $B(x, y) \equiv 1$ теорему 52.2 называют *признаком Бендиксона*².

Пример 52.1. Показать, что система

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + g(x)y, \quad (52.4)$$

где g — непрерывная положительная функция, не имеет замкнутых траекторий.

Решение. В данном случае $X(x, y) = -y$, а $Y(x, y) = x + g(x)y$. Для доказательства отсутствия замкнутых траекторий у системы (52.4) применим признак Бендиксона. Имеем:

$$\frac{\partial X(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y} = g(x) > 0.$$

¹ Дюлак Генри (Dulac H., 1870—1955), французский математик.

² Бендиксон Ивар Отто (Bendixson I. O., 1861—1935), шведский математик.

Согласно признаку Бендиксона система (52.4) не имеет замкнутых траекторий во всей фазовой плоскости xOy .

Приведем теперь одно важное утверждение, которое дает достаточные условия для существования замкнутых траекторий у системы (52.1).

Теорема 52.3 (теорема Бендиксона).

Пусть в некоторой ограниченной замкнутой области $\mathbb{D}$ фазовой плоскости нет особых точек системы (52.1). Тогда если траектория Γ системы (52.1), проходящая в момент времени $t = t_0$ через точку области $\mathbb{D}$, остается в $\mathbb{D}$ при всех $t > t_0$, то Γ либо сама является замкнутой траекторией системы (52.1), либо по спирали приближается к замкнутой траектории системы (52.1) при $t \rightarrow +\infty$.

Не останавливаясь на формальном доказательстве этой теоремы, обратимся к рис. 52, который проясняет ее геометрический смысл.

На рис. 52 замкнутая область $\mathbb{D}$ состоит из двух замкнутых кривых Γ_1 и Γ_2 (обозначенных пунктиром) и кольцеобразной области между ними. Предположим, что вектор (52.2) направлен внутрь $\mathbb{D}$ в каждой ее граничной точке. Тогда каждая траектория Γ , проходящая через граничную точку (в момент времени $t = t_0$), войдет в $\mathbb{D}$ и никогда эту область не покинет. Теорема утверждает, что траектория Γ должна по спирали приближаться к замкнутой траектории Γ_0 при $t \rightarrow +\infty$.

Заметим, что область $\mathbb{D}$ выбрана кольцеобразной потому, что замкнутая траектория должна окружать особую точку (на рис. 52 — это точка P), а в области $\mathbb{D}$ особых точек системы (52.1) быть не должно.

Пример 52.2. Рассмотрим систему (51.1). Эта система имеет, как уже отмечалось выше, единственную особую точку $O(0,0)$, и таким образом, в кольцевой области $\mathbb{D}$, например, между окружностями радиусов $\rho = \frac{1}{2}$ и $\rho = 2$ с центром в точке O особых точек системы нет. А поскольку

$$\dot{\rho} = \rho(1 - \rho^2) \text{ для } \rho > 0,$$

то $\dot{\rho} > 0$ на внутренней окружности и $\dot{\rho} < 0$ на внешней окружности. Таким образом, вектор (52.2) направлен внутрь $\mathbb{D}$ во всех граничных точках. Последнее означает, что любая траектория, проходящая через граничную точку, войдет в $\mathbb{D}$ и останется там при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно, по теореме 52.3 область $\mathbb{D}$ содержит замкнутую траекторию и таковой, как мы знаем, является предельный цикл, заданный уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

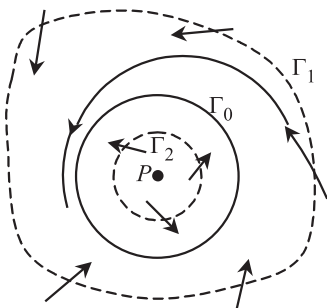


Рис. 52. К теореме 52.3

В заключение параграфа отметим следующее. 8 августа 1900 г. на II Международном конгрессе математиков в Париже Д. Гильберт¹ сформулировал 23 математические проблемы, которые, с его точки зрения, являлись наиболее значимыми для математики начинающегося XX столетия. Одна из них — 16-я проблема была сформулирована следующим образом: исследовать вопрос о максимальном числе и о расположении предельных циклов Пуанкаре для дифференциального уравнения первого порядка и первой степени вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}, \quad (52.5)$$

где Y, X — целые рациональные функции n -й степени относительно x, y .

К настоящему времени доказано только, что каждое конкретно взятое уравнение вида (52.5) имеет лишь конечное число предельных циклов. Оценки же для числа предельных циклов, верной для всех уравнений n -й степени, что, собственно, и составляет суть проблемы, до сих пор не получено.

Таким образом, 16-я проблема Гильберта, которая непосредственно связана с приложениями, например с физикой и радиотехникой², все еще ждет своего решения.

§ 53. ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы получить как можно больше информации о нелинейных ДУ, изучая фазовые портреты нелинейных автономных систем вида (52.1).

Один из аспектов этой задачи состоит в классификации особых точек таких систем по их природе и устойчивости. Ниже будет показано, что при определенных условиях задача классификации для конкретной нелинейной системы может быть решена на основе соответствующей линейной системы.

Поэтому по необходимости займемся прежде всего классификацией особых точек линейных автономных систем.

Итак, рассмотрим дифференциальную систему

¹ Гильберт Давид (Hilbert D., 1862—1943), немецкий математик.

² Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М. : ГИФМЛ, 1959.

$$\dot{x} = a_1x + b_1y, \quad \dot{y} = a_2x + b_2y, \quad (53.1)$$

для которой начало координат $O(0,0)$ фазовой плоскости является очевидной особой точкой. Всюду ниже предполагаем, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (53.2)$$

а значит, точка $O(0,0)$ является единственной особой точкой системы (53.1).

Из § 42 следует, что система (53.1) имеет нетривиальное решение вида

$$x = Ae^{\lambda_0 t}, \quad y = Be^{\lambda_0 t},$$

если λ_0 — корень характеристического уравнения

$$\lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0. \quad (53.3)$$

Очевидно, что условие (53.2) означает также, что число 0 не может быть корнем уравнения (53.3).

Пусть λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения (53.3). Покажем, что характер особой точки $O(0,0)$ системы (53.1) определяется природой чисел λ_1 и λ_2 . При этом необходимо рассмотреть 5 случаев.

Основные случаи:

Случай А. Корни λ_1 и λ_2 вещественные, различные и имеют один и тот же знак.

Случай В. Корни λ_1 и λ_2 вещественные и имеют противоположные знаки.

Случай С. Корни λ_1 и λ_2 комплексно сопряженные, но не чисто мнимые.

Критические случаи:

Случай D. Корни λ_1 и λ_2 вещественные и равные.

Случай Е. Корни λ_1 и λ_2 чисто мнимые.

Причина, по которой проводится деление на основные и критические случаи, будет ясна из последующего.

Обратимся теперь к рассмотрению каждого из выделенных случаев.

Случай А. Здесь поведение траекторий в окрестности особой точки $O(0,0)$ характеризуется рис. 53 ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$).

Действительно, предположим для определенности, что $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Согласно § 42 полное семейство решений системы (53.1) в этом случае задается равенствами

$$x = c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y = c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (53.4)$$

где A_i , B_i , $i = 1, 2$, — фиксированные постоянные такие, что

$$\frac{B_1}{A_1} \neq \frac{B_2}{A_2},$$

а c_1, c_2 — произвольные постоянные. Когда $c_2 = 0$, получим решения

$$x = c_1 A_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = c_1 B_1 e^{\lambda_1 t}, \quad (53.5)$$

а когда $c_1 = 0$, получаем решения

$$x = c_2 A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y = c_2 B_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (53.6)$$

Для любого $c_1 > 0$ решения, заданные формулами (53.5), определяют траекторию, состоящую из одной полупрямой прямой $A_1 y = B_1 x$ с угловым коэффициентом B_1 / A_1 , а для любого $c_1 < 0$ они определяют траекторию, состоящую из другой полупрямой указанной прямой. Далее, так как $\lambda_1 < 0$, то изображающие точки приближаются по указанным полупрямым-траекториям к особой точке $O(0,0)$, когда $t \rightarrow +\infty$, причем поскольку $y/x = B_1 / A_1$, изображающие точки «входят» в особую точку с угловым коэффициентом B_1 / A_1 (рис. 53).

Аналогично решения (53.6) определяют две полупрямые-траектории, лежащие на прямой $A_2 y = B_2 x$ с угловым коэффициентом B_2 / A_2 . По этим двум траекториям изображающие точки также приближаются к точке $O(0,0)$ при $t \rightarrow +\infty$ и «входят» в нее с угловым коэффициентом B_2 / A_2 .

Если $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, то полное семейство решений (53.4) определяет траектории, отличные от полупрямых. При этом в силу того, что $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 < 0$ вдоль этих траекторий изображающие точки также «входят» в точку $O(0,0)$ при $t \rightarrow +\infty$. Причем поскольку $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$, а

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 B_2 e^{\lambda_2 t}}{c_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 A_2 e^{\lambda_2 t}} = \frac{(c_1 A_1 / c_2) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + B_2}{(c_1 A_1 / c_2) e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + A_2},$$

то $y/x \rightarrow B_2 / A_2$ при $t \rightarrow +\infty$ и, таким образом, изображающие точки «входят» вдоль траекторий в точку $O(0,0)$ с угловым коэффициентом B_2 / A_2 . Рис. 53 реализует качественную картину поведения траекторий в рассматриваемом случае.

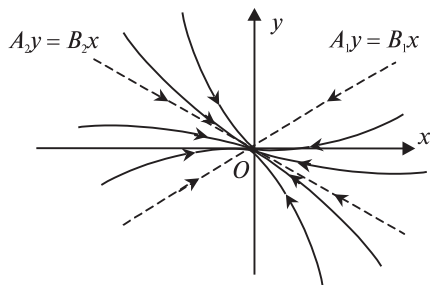


Рис. 53. Узел

Если λ_1 и λ_2 положительны и $\lambda_1 > \lambda_2$, то будем иметь только что рассмотренный случай при $t \rightarrow -\infty$.

Особая точка $O(0,0)$ в случае А называется **узлом**.

Случай В. Поведение траекторий в окрестности особой точки $O(0,0)$ иллюстрируется рис. 54.

Действительно, пусть для определенности $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Полное семейство решений в данном случае

снова записывается в виде (53.4), и таким образом, мы опять имеем частные решения, определяемые соотношениями (53.5) и (53.6). При этом вдоль двух полупрямых-траекторий, представленных формулами (53.5), изображающие точки «входят» в особую точку $O(0,0)$ при $t \rightarrow +\infty$, а вдоль полупрямых-траекторий, определяемых равенствами (53.6), изображающие точки «входят» в особую точку $O(0,0)$ при $t \rightarrow -\infty$.

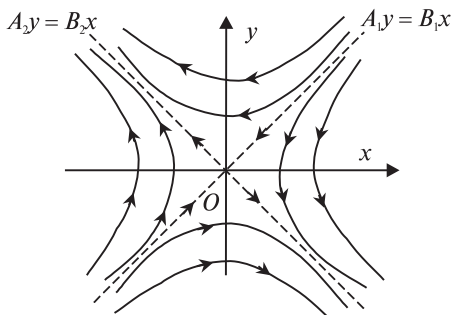


Рис. 54. Седло

Если $c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$, то полное семейство решений (53.4) определяет траектории, отличные от полупрямых. Причем поскольку $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, то вдоль этих траекторий изображающие точки не приближаются к точке $O(0,0)$ ни при $t \rightarrow +\infty$, ни при $t \rightarrow -\infty$. Эти траектории характеризуются тем, что вдоль них изображающие точки асимптотически приближаются при $t \rightarrow +\infty$ к одной из полупрямых (53.6), а при $t \rightarrow -\infty$ асимптотически приближаются к одной из полупрямых (53.5). На рис. 54 проиллюстрирована качественная картина такого поведения траекторий.

В рассматриваемом случае особая точка $O(0,0)$ называется *седлом*.

Случай С. Качественная картина поведения траекторий в окрестности особой точки $O(0,0)$ показана на рис. 55.

Проведем доказательство этого утверждения. В рассматриваемом случае корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 представимы в виде $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, где a и b — отличные от нуля вещественные числа. Отметим, что при таких λ_1 и λ_2 дискриминант D характеристического уравнения (53.3) будет отрицательным, т. е.

$$D = (a_1 + b_2)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1) \equiv (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 < 0. \quad (53.7)$$

Из § 42 следует, что полное семейство решений в этом случае задается соотношениями

$$\begin{aligned} x &= e^{at} (c_1 (A_1 \cos bt - A_2 \sin bt) + c_2 (A_1 \sin bt + A_2 \cos bt)), \\ y &= e^{at} (c_1 (B_1 \cos bt - B_2 \sin bt) + c_2 (B_1 \sin bt + B_2 \cos bt)), \end{aligned} \quad (53.8)$$

где $A_i, B_i, i=1, 2$, — фиксированные постоянные, а c_1, c_2 — произвольные постоянные.

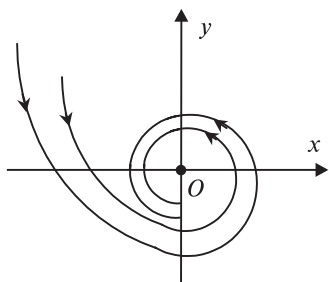


Рис. 55. Фокус ($a_2 > 0, a < 0$)

Пусть $a < 0$. Тогда из формул (53.8) следует, что $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$, если $t \rightarrow +\infty$, а значит, вдоль траекторий изображающие точки при $t \rightarrow +\infty$ приближаются к точке $O(0,0)$.

Покажем, что приближение к особой точке происходит по спиралям. Для этого введем полярную координату $\theta = \arctg \frac{y}{x}$. Оказывается, что вдоль любой

траектории производная $\dot{\theta}$ всегда или положительна, или отрицательна. В самом деле, поскольку из второй формулы (50.2) и вида системы (53.1) имеем

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} = \frac{a_2x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1y^2}{x^2 + y^2}, \quad (53.9)$$

то так как мы интересуемся траекториями, отличными от особой точки $O(0,0)$, считаем, что $x^2 + y^2 \neq 0$.

Неравенство (53.7) означает, что числа a_2 и b_1 имеют разные знаки. Пусть $a_2 > 0, b_1 < 0$. Тогда при $y = 0$ формула (53.9) означает, что $\dot{\theta} = a_2 > 0$. Если же $y \neq 0$, то в этом предположении производная $\dot{\theta}$ не может обращаться в нуль, так как в противном случае соотношение (53.9) означало бы, что

$$a_2x^2 + (b_2 - a_1)xy - b_1y^2 = 0$$

или

$$a_2 \left(\frac{x}{y} \right)^2 + (b_2 - a_1) \frac{x}{y} - b_1 = 0 \quad (53.10)$$

для некоторого вещественного числа x/y . Но этого быть не может, потому что дискриминант квадратного уравнения (53.10), который совпадает с D , отрицателен. Итак, $\dot{\theta} > 0$, если $a_2 > 0$. Подобным образом показывается, что $\dot{\theta} < 0$, если $a_2 < 0$.

Замечая теперь, что так как из (53.8) следует, что x и y меняют знак бесконечно много раз при $t \rightarrow +\infty$, то изображающие точки приближаются к особой точке по спиралям-траекториям (против движения часовой стрелки или по ее ходу в соответствии с неравенствами $a_2 > 0$ или $a_2 < 0$) (см. рис. 55).

Отметим, что в случае $a > 0$ спирали будут раскручиваться.

Особая точка $O(0,0)$ в случае C называется *фокусом*.

Случай D. Этот критический случай подразделяется на два подслучая: (i) $a_2 = b_1 = 0$, $a_1 = b_2 \neq 0$; (ii) все другие возможности, приводящие к кратному корню характеристического уравнения (53.3).

Переходя к рассмотрению этих подслучаев, предположим, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$.

Подслучай (i). Если a — это общее значение a_1 и b_2 , то уравнение (53.3) принимает вид $\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0$, откуда $\lambda = a$. Система же (53.1) в данном случае записывается в виде

$$\dot{x} = ax, \quad \dot{y} = ay, \quad (53.11)$$

полное семейство решений которой задается равенствами

$$x = c_1 e^{\lambda t}, \quad y = c_2 e^{\lambda t}, \quad (53.12)$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные. Траектории системы (53.11), определяемые соотношениями (53.12), представляют собой всевозможные полупрямые, вдоль которых изображающие точки «входят» в особую точку $O(0,0)$ при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 56).

В случае $\lambda > 0$ изображающие точки «входят» вдоль полупрямых в особую точку $O(0,0)$ при $t \rightarrow -\infty$.

Особая точка в подслучае (i) называется *дикритическим, или звездообразным, узлом*.

Подслучай (ii). Полное семейство решений системы (53.1) в данном подслучае может быть записано в виде

$$\begin{aligned} x &= c_1 A e^{\lambda t} + c_2 (A_1 + A t) e^{\lambda t}, \\ y &= c_1 B e^{\lambda t} + c_2 (B_1 + B t) e^{\lambda t}, \end{aligned} \quad (53.13)$$

где A, A_1, B, B_1 — фиксированные постоянные, а c_1, c_2 — произвольные постоянные. Когда $c_2 = 0$, получаем решения

$$x = c_1 A e^{\lambda t}, \quad y = c_1 B e^{\lambda t},$$

которые определяют две полупрямые-траектории, лежащие на прямой $Ay = Bx$ с угловым коэффициентом B/A . Причем поскольку $\lambda < 0$, то по обеим траекториям изображающие точки приближаются к точке $O(0,0)$ при $t \rightarrow +\infty$.

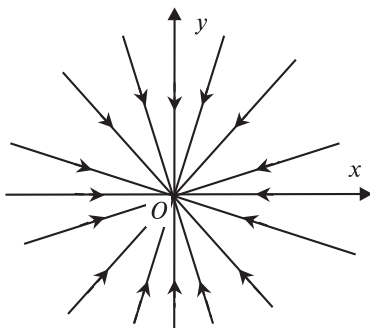


Рис. 56. Дикритический (звездообразный) узел

Если $c_2 \neq 0$, то решения (53.13) определяют искривленные траектории, вдоль которых изображающие точки также приближаются к точке $O(0,0)$ при $t \rightarrow +\infty$. Более того, из (53.13) следует, что

$$\frac{y}{x} = \frac{c_1 B e^{\lambda t} + c_2 (B_1 + Bt) e^{\lambda t}}{c_1 A e^{\lambda t} + c_2 (A_1 + At) e^{\lambda t}} = \frac{c_1 B / c_2 + B_1 + Bt}{c_1 B / c_2 + A_1 + At}$$

и, значит, $y/x \rightarrow B/A$ при $t \rightarrow +\infty$, т. е. вдоль искривленных траекторий изображающие точки «входят» в особую точку $O(0,0)$ с одним и тем же углом наклона B/A . Отметим также, что $y/x \rightarrow B/A$ и при $t \rightarrow -\infty$ (рис. 57).

Если $\lambda > 0$, то направление движения изображающих точек по траекториям противоположно указанному на рис. 57.

Особая точка в подслучае (ii) называется *вырожденным узлом*.

Случай E. В данном критическом случае $\lambda_{1,2} = \pm bi$, где $b \neq 0$, и, значит, полное семейство решений задается равенствами (53.8), где только отсутствует экспоненциальный множитель. Таким образом, функции x и y являются периодическими и каждая из траекторий представляет собой замкнутую кривую, окружающую начало координат, и являющуюся эллипсом (рис. 58). Последний факт может быть доказан непосредственным интегрированием дифференциального уравнения траекторий

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2 x + b_2 y}{a_1 x + b_1 y}.$$

Особая точка в случае E называется *центром*.

Суммируя полученные результаты, можно сформулировать следующее утверждение.

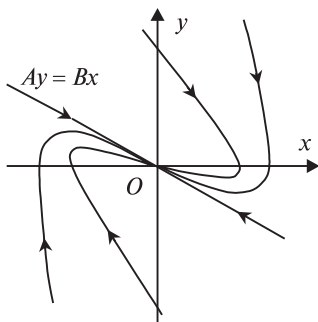


Рис. 57. Вырожденный узел

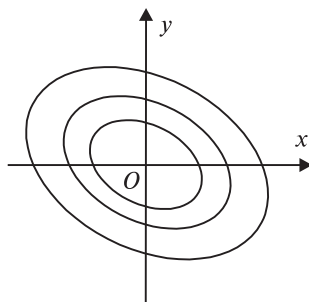


Рис. 58. Центр

Теорема 53.1. Система (53.1) с условием (53.2) имеет в начале координат $O(0,0)$ особую точку, тип которой определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 > 0 & \begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 > 0 - \text{узел;} \\ a_1b_2 - a_2b_1 < 0 - \text{седло;} \end{cases} \\ (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 < 0 & \begin{cases} a_1 + b_2 \neq 0 - \text{фокус;} \\ a_1 + b_2 = 0 - \text{центр;} \end{cases} \\ (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 = 0 & \begin{cases} a_2 = b_1 = 0, a_1 = b_2 \neq 0 - \\ \text{дикритический} \\ \text{(звездообразный) узел;} \\ \text{другие возможности -} \\ \text{вырожденный узел.} \end{cases} \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 53.1. Приведенную выше классификацию особых точек впервые предложил Н. Е. Жуковский¹ в магистерской диссертации «Кинематика жидкого тела», опубликованной в 1876 г. Названия же различным типам особых точек дал А. Пуанкаре.

§ 54. ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ИЗОЛИРОВАННОЙ ПРОСТОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Рассмотрим нелинейную систему ДУ

$$\dot{x} = a_1x + b_1y + X_1(x, y), \quad \dot{y} = a_2x + b_2y + Y_1(x, y). \quad (54.1)$$

Теорема 54.1. Если правые части системы (54.1) удовлетворяют условиям:

- 1) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$;
- 2) функции X_1 и Y_1 непрерывны в некоторой окрестности начала координат $O(0,0)$ и удовлетворяют условию Липшица по x и y ;

$$3) \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{X_1(x, y)}{\rho^{1+\varepsilon}} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{Y_1(x, y)}{\rho^{1+\varepsilon}} = 0, \quad \text{где } \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varepsilon - \text{любое малое}$$

фиксированное положительное число², то траектории системы (54.1) ведут себя в окрестности особой точки $O(0,0)$ подобно траекториям линейной системы (53.1), за исключением случаев, когда $(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 < 0$,

¹ Жуковский Николай Егорович (1847—1921), русский математик и механик.

² Из условия 3) следует, что $X_1(0,0) = Y_1(0,0) = 0$, и, таким образом, точка $O(0,0)$ — особая точка системы (54.1), причем изолированная.

$a_1 + b_2 = 0$, т. е. когда линейная система (53.1) имеет центр, а нелинейная система (54.1) может иметь или центр, или фокус, или центр-фокус¹ и когда $(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 = 0$, т. е. когда линейная система (53.1) имеет узел (дискритический (звездообразный), вырожденный), а нелинейная система (54.1) может иметь или узел, или фокус.

Отметим, что в теории ДУ все особые точки разделяют (по грубой классификации) на два класса: *простые особые точки* и *сложные особые точки*.

Определение 54.1. Особая точка (x^*, y^*) системы (52.1) называется простой (сложной) особой точкой, если определитель Якоби

$$J(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial X(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля (равен нулю) в рассматриваемой точке.

Таким образом, в соответствии с определением 54.1 и теоремой 54.1 приходим к выводу: если $O(0, 0)$ — простая особая точка нелинейной системы (54.1) и она, как особая точка линейной системы (53.1), описывается одним из основных случаев § 53, то тип особой точки линейной системы не меняется при нелинейных возмущениях. В критических случаях тип особой точки линейной системы может при нелинейных возмущениях измениться.

Ниже, не останавливаясь на доказательстве теоремы 54.1, проиллюстрируем ее примерами.

Пример 54.1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -y - 2y^3, \quad \dot{y} = x + 2x^3.$$

Для соответствующей линейной системы

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x$$

особая точка $O(0, 0)$ является центром. Эта же особая точка оказывается центром и для исходной нелинейной системы, поскольку интегрируя ДУ траекторий

$$(x + 2x^3)dx + (y + 2y^3)dy = 0,$$

находим, что полное семейство решений этого ДУ задается соотношением

$$x^2 + y^2 + x^4 + y^4 = c,$$

где c — произвольная постоянная. Отсюда следует, что все траектории при $c > 0$ являются замкнутыми и окружающими единственную особую точку $O(0, 0)$.

¹ См. пример 54.3.

Пример 54.2. Пусть дана система

$$\dot{x} = y + x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2).$$

В этом примере линейная система такая же, как и в предыдущем случае.

Выясним тип особой точки данной нелинейной системы. Для этого перейдем к полярным координатам ρ, θ , где $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$. В полярных координатах (см. формулы (50.2)) система переписывается в виде

$$\dot{\rho} = \rho^3, \quad \dot{\theta} = -1,$$

а значит,

$$\frac{d\rho}{d\theta} = -\rho^3.$$

Интегрируя полученное ДУ, находим, что

$$\rho^2 = \frac{1}{2\theta + c},$$

где c — произвольная постоянная, и, таким образом, начало координат $O(0,0)$ фазовой плоскости является фокусом.

Итак, в данном случае тип особой точки линейной системы изменился при нелинейных возмущениях.

Пример 54.3. Обратимся к системе ДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x\sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \dot{y} = x + y\sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{cases} \quad (54.2)$$

считая, что ее правые части равны нулю в точке $O(0,0)$.

При таком условии система (54.2) является системой класса C^1 и имеет, как и соответствующая ей линейная система, единственную особую точку $O(0,0)$. Эта особая точка, как мы знаем, — центр для линейной системы.

Исследуем систему (54.2). Переходя, как и в предыдущем примере, к полярным координатам, получим систему

$$\dot{\rho} = \rho^2 \sin \frac{1}{\rho}, \quad \dot{\theta} = 1,$$

откуда

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \rho^2 \sin \frac{1}{\rho}. \quad (54.3)$$

Полагая здесь

$$\frac{1}{\rho} = z, \quad z = z(\theta),$$

приходим к ДУ

$$\frac{dz}{\sin z} = -d\theta,$$

интегрируя которое, находим, что

$$\ln \left| \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right| = -\theta + \ln |c|,$$

где c — произвольная постоянная ($\neq 0$). А в таком случае

$$\operatorname{tg} \frac{z}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2\rho} = ce^{-\theta},$$

откуда

$$\rho = \frac{1}{2 \operatorname{Arctg}(ce^{-\theta})}. \quad (54.4)$$

Из уравнения (54.3) следует, что $d\rho/d\theta = 0$ для $\rho = \frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}, \frac{3}{\pi}, \dots$.

Последнее означает, что имеется счетное число замкнутых траекторий, а именно окружностей с центром в точке $O(0,0)$, радиусы которых равны указанным значениям ρ . Эти окружности образуют кольца, внутри которых, как это следует из (54.4), траектории представляют собой спирали, которые при $\theta \rightarrow +\infty$ или $\theta \rightarrow -\infty$ бесконечно приближаются к соответствующим окружностям.

Так, например, при $c > 0$ спирали приближаются к окружностям соответственно радиусов $1/2k\pi$ и $1/(2k+1)\pi$, если значения арктангенса берутся между $k\pi$ и $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В тривиальном случае $k = 0$ траектории при $\theta \rightarrow +\infty$ уходят в бесконечность.

Особая точка $O(0,0)$ в данном случае называется *центро-фокусом* (рис. 59).

З а м е ч а н и е 54.1. Обратим внимание на то, что нелинейные добавки в правых частях дифференциальных уравнений системы (54.2) нельзя разложить в окрестности точки $O(0,0)$ в ряды по степеням x и y . Оказывается, можно доказать, что если правые части системы (52.1) являются функциями аналитическими, то такая система не может иметь особой точки типа центро-фокуса.

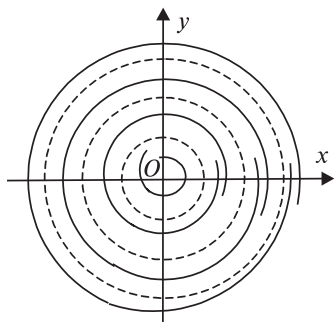


Рис. 59. Центро-фокус

Пример 54.4. Рассмотрим теперь систему

$$\dot{x} = -x + \frac{y}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \dot{y} = -y - \frac{x}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (54.5)$$

где, как и в предыдущем примере, считаем, что правые части дифференциальных уравнений системы обращаются в нуль в точке $O(0,0)$.

При таком предположении правые части уравнений системы (54.5) являются функциями класса C^1 в окрестности изолированной особой точки $O(0,0)$.

Линейная система, соответствующая системе (54.5), имеет в начале координат критический узел ($\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -y$).

Найдем траектории системы (54.5). Переходя к полярным координатам, получим систему

$$\dot{\rho} = -\rho, \quad \dot{\theta} = -\frac{1}{\ln \rho},$$

интегрируя которую, находим, что

$$\rho = \rho_0 e^{-t}, \quad \theta = \theta_0 + \ln(t - \rho_0), \quad t > \rho_0,$$

а значит, $\rho \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, т. е. исходная система имеет в начале координат особую точку фокус.

§ 55. ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ СЛОЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ. ПРОБЛЕМА РАЗЛИЧЕНИЯ ЦЕНТРА И ФОКУСА

В предыдущем параграфе речь шла о простых особых точках. А что можно сказать о типах сложных особых точек? Оказывается, этот случай существенно отличается от уже рассмотренного. Проиллюстрируем многообразие возможностей, которые здесь существуют, на примерах нелинейных систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x + b_1 y + c_1 x^2 + d_1 xy + e_1 y^2 + \dots, \\ \dot{y} = a_2 x + b_2 y + c_2 x^2 + d_2 xy + e_2 y^2 + \dots \end{cases} \quad (55.1)$$

Предварительно отметим, что если линейные члены в (55.1) не определяют качественную картину поведения траекторий в окрестности особой точки, то необходимо рассмотреть члены второй степени. Если и эти члены не определяют фазовые портреты, то следует рассматривать члены третьей степени и т. д. Это говорит о том, что, кроме «линейных»

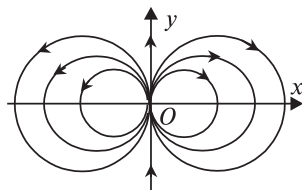
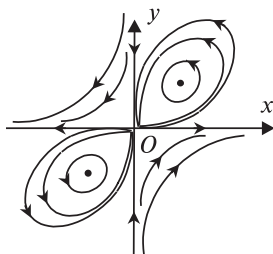
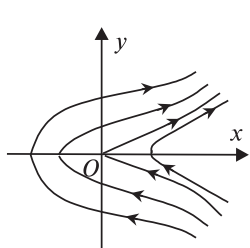


Рис. 60. К системе (55.2) Рис. 61. К системе (55.3) Рис. 62. К системе (55.4)

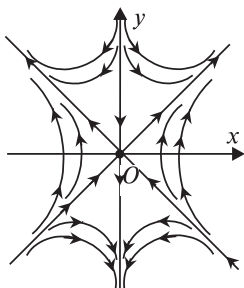


Рис. 63. К системе (55.5)

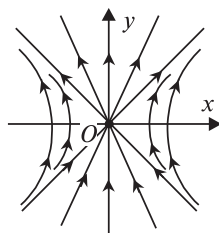


Рис. 64. К системе (55.6)

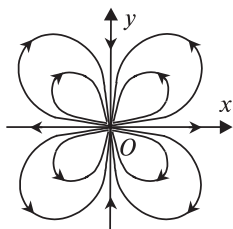


Рис. 65. К системе (55.7)

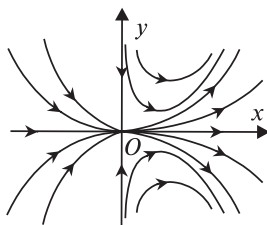


Рис. 66. К системе (55.8)

конфигураций, может возникнуть много других качественных картин, причем сложной структуры. Удивительным при этом является то, что весьма сложные картины поведения траекторий в окрестности особых точек описываются довольно простыми системами.

Так, например, рассмотрим системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = 2y, \quad \dot{y} = 3x^2, \quad (55.2)$$

$$\dot{x} = x - 4y\sqrt{|xy|}, \quad \dot{y} = -y + 4x\sqrt{|xy|}, \quad (55.3)$$

$$\dot{x} = 2xy, \quad \dot{y} = y^2 - x^2, \quad (55.4)$$

$$\dot{x} = xy, \quad \dot{y} = x^2 - y^2, \quad (55.5)$$

$$\dot{x} = 3xy, \quad \dot{y} = x^2 + 2y^2, \quad (55.6)$$

$$\dot{x} = x^3 - 2xy^2, \quad \dot{y} = 2x^2y - y^3, \quad (55.7)$$

$$\dot{x} = x^6, \quad \dot{y} = -y^3 + x^4y. \quad (55.8)$$

Качественные картины поведения траекторий указанных систем в окрестности особой точки $O(0,0)$ показаны соответственно на рис. 60–66.

Вообще в случае, когда, например, все частные производные функций X и Y , фигурирующих в представлении правых частей дифференциальных уравнений системы (52.1), обращаются в особой точке в нуль до порядка n включительно, в окрестности особой точки возможно бесконечно много картин поведения фазовых траекторий.

Вместе с тем если исключить из рассмотрения особые точки типа центра и фокуса, то оказывается, что окрестность особой точки может быть разбита на конечное число секторов с определенным поведением траекторий.

Отмеченный факт говорит о той важности, которую играет проблема различения центра и фокуса в вопросе построения качественных картин поведения траекторий автономных дифференциальных систем.

Остановимся на этой проблеме чуть подробнее. Как ранее было показано, возмущения линейного центра могут изменить характер поведения траекторий в окрестности особой точки. Такая же ситуация может иметь место и в случае сложной особой точки.

Проблема различения центра и фокуса, суть которой состоит в определении условий, при которых все траектории автономной системы ОДУ (52.1) в некоторой окрестности особой точки O , за исключением самой точки O , являются замкнутыми кривыми, имеет важное значение для теории ОДУ не только с точки зрения решения непосредственно самой поставленной задачи, но и с точки зрения исследования предельных циклов, а также в связи с многочисленными приложениями аналитических систем с особой точкой типа центра или фокуса, касающихся колебательных процессов.

Далее будем считать, что в системе (54.1) функции X_1 и Y_1 являются в окрестности точки $O(0,0)$ функциями голоморфными, не содержащими в своих разложениях свободных и линейных членов, т. е. будем считать, что

$$X_1(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} \bar{X}_k(x, y), \quad Y_1(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} \bar{Y}_k(x, y), \quad (55.9)$$

где $\bar{X}_k, \bar{Y}_k$ — однородные многочлены степени k относительно x, y .

Тогда если λ_1, λ_2 — корни характеристического уравнения (53.3), то проблема различения центра и фокуса для системы (54.1), (55.9) возникает в следующих двух случаях:

$$1) \operatorname{Re} \lambda_j = 0, \operatorname{Im} \lambda_j \neq 0, j = 1, 2;$$

$$2) \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

В первом случае аффинным преобразованием искомых функций и изменением шкалы времени рассматриваемую систему всегда можно привести к виду

$$\dot{x} = -y - P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y), \quad (55.10)$$

где P и Q — голоморфные в окрестности $x = y = 0$ функции, определяемые равенствами

$$P(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k(x, y), \quad Q(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} q_k(x, y)$$

с однородными относительно x, y степени k многочленами p_k, q_k .

Во втором случае при условии, что $|b_1| + |a_2| \neq 0$, линейным невырожденным преобразованием искомых функций система (54.1), (55.9) всегда сводится к системе вида

$$\dot{x} = y + P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (55.11)$$

где P и Q — голоморфные в окрестности $x = y = 0$ функции, разложения в ряды которых не содержат свободных и линейных членов.

А. М. Ляпунов¹ показал, что начало координат системы (55.11) может быть центром или фокусом тогда и только тогда, когда

$$Q(x, F(x)) = ax^{2n-1} + \dots,$$

$$\left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \right)_{(x, F(x))} = Ax^{n-1} + Bx^n + \dots, \quad A^2 + 4na < 0,$$

где $F(x), F(0) = 0$, — голоморфная в окрестности $x = 0$ функция, определяемая уравнением

$$y + P(x, y) = 0,$$

n — целое, больше единицы.

В случае двух нулевых корней характеристического уравнения проблема центра и фокуса возникает и для дифференциальных систем без линейных членов. Таковыми являются, например, системы вида

¹ Ляпунов Александр Михайлович (1857—1918), русский математик и механик.

$$\dot{x} = \sum_{k=n}^{\infty} P_k(x, y), \quad \dot{y} = \sum_{k=n}^{\infty} Q_k(x, y),$$

где правые части — голоморфные в окрестности $x = y = 0$ функции, P_k, Q_k — однородные полиномы k -й степени, а также системы вида

$$\dot{x} = y^{2m-1} + P(x, y), \quad \dot{y} = -x^{2n-1} + Q(x, y).$$

Более подробно о проблеме центра и фокуса, методах ее решения и некоторых полученных результатах см. [5]. Отметим лишь только следующий результат.

Теорема 55.1 (принцип симметрии). Пусть правые части дифференциальных уравнений системы (52.1) таковы, что

$$X(-x, y) = X(x, y), \quad Y(-x, y) = -Y(x, y), \quad (55.12)$$

а точка $O(0, 0)$ — единственная особая точка системы (52.1) на оси Oy . Тогда если траектория Γ системы (52.1), выходя из точки положительной полуоси оси Oy , пересекает отрицательную полуось оси Oy , то Γ будет замкнутой траекторией. Причем если все траектории в окрестности начала координат обладают этим свойством, то особая точка $O(0, 0)$ является центром для системы (52.1).

Справедливость теоремы следует из того, что векторное поле, определяемое системой (52.1), при условиях (55.12) симметрично относительно оси Oy .

З а м е ч а н и е 55.1. Если вместо равенств (55.12) выполняются равенства

$$X(x, -y) = -X(x, y), \quad Y(x, -y) = Y(x, y),$$

а точка $O(0, 0)$ — единственная особая точка системы (52.1) на оси Ox , то имеет место утверждение, аналогичное теореме 55.1.

Обратим внимание и на тот факт, что условия

$$X(-x, y) = -X(x, y), \quad Y(-x, y) = Y(x, y)$$

приводят к тому, что $X(0, y) = -X(0, y)$, а значит, положительная и отрицательная полуоси оси Oy , наряду с точкой $O(0, 0)$, являются траекториями системы (52.1).

Подобным образом, условия

$$X(x, -y) = X(x, y), \quad Y(x, -y) = -Y(x, y)$$

приводят к тому, что положительная и отрицательная полуоси оси Ox , наряду с точкой $O(0, 0)$, оказываются траекториями системы (52.1).

§ 56. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С УСТОЙЧИВОСТЬЮ РЕШЕНИЙ И ТОЧЕК ПОКОЯ. ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Как было показано в § 19, решение задачи Коши для векторного ДУ

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (56.1)$$

непрерывно зависит от начальных данных на конечном промежутке изменения времени t , если функция f удовлетворяет условиям теоремы Пикара — Линделёфа.

Если же время t изменяется на бесконечном промежутке $[t_0, +\infty)$, то вопросы зависимости решения задачи Коши от начальных данных — это вопросы теории устойчивости, основы которой были заложены А. М. Ляпуновым в его докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения», изданной в 1892 г.

Устойчивость решений имеет принципиальное значение не только для теории дифференциальных уравнений, но и с точки зрения решения самых разнообразных практических задач. Дело в том, что если сколь угодно малые изменения начальных данных сильно изменяют решение, определяемое выбранными неточными начальными данными, которые обычно являются результатом измерений и, следовательно, неизбежно получены с некоторой погрешностью, то такое решение не имеет никакого прикладного значения и даже приближенно не может описывать изучаемое явление или процесс.

Обращаясь к вопросам о непрерывной зависимости решений ДУ от начальных данных на бесконечном промежутке изменения времени t , будем предполагать, что относительно ДУ (56.1) выполнены условия, гарантирующие существование и единственность решений на множестве точек (t, x) таких, что $\tau < t < +\infty$, $x \in G$, где G — открытое множество в пространстве изменения переменной x .

Пусть

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (56.2)$$

решение ДУ (56.1), определенное при $t \geq t_0$.

Определение 56.1. Решение (56.2) ДУ (56.1) называется устойчивым (устойчивым по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого другого решения $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ДУ (56.1), удовлетворяющего неравенству

$$\|\psi(t_0) - \varphi(t_0)\| < \delta(\varepsilon),$$

для всех $t \geq t_0$ справедливо неравенство

$$\|\psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon. \quad (56.3)$$

Определение 56.2. Решение (56.2) ДУ (56.1) называется асимптотически устойчивым (асимптотически устойчивым по Ляпунову), если оно устойчиво и если существует такое положительное число h , что при

$$\|\psi(t_0) - \varphi(t_0)\| < h$$

будем иметь

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi(t) - \varphi(t)\| = 0. \quad (56.4)$$

Определение 56.3. Решение (56.2) ДУ (56.1) называется неустойчивым (неустойчивым по Ляпунову), если при сколь угодно малом $\delta(\varepsilon) > 0$ хотя бы для одного решения $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ДУ (56.1) неравенство (56.3) не выполняется.

Пример 56.1. Исследовать на устойчивость решение дифференциальной системы

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x,$$

которое удовлетворяет начальным условиям $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Решение. Прежде всего заметим, что решение с указанными начальными условиями — это тривиальное решение: $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$. Любое другое решение, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, имеет вид

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что для всех $t \geq 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x_0 - 0| < \delta$, $|y_0 - 0| < \delta$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |x(t) - 0| &= |x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon, \\ |y(t) - 0| &= |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Это и будет означать, что нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

Действительно, запишем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |x_0 \cos t - y_0 \sin t| &\leq |x_0 \cos t| + |y_0 \sin t| \leq |x_0| + |y_0|, \\ |x_0 \sin t + y_0 \cos t| &\leq |x_0 \sin t| + |y_0 \cos t| \leq |x_0| + |y_0|, \end{aligned}$$

которые имеют место для всех t .

Поэтому если $|x_0| + |y_0| < \varepsilon$, то и при всех t

$$|x_0 \cos t - y_0 \sin t| < \varepsilon, \quad |x_0 \sin t + y_0 \cos t| < \varepsilon.$$

Следовательно, если взять, например, $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$, то при $|x_0| < \delta$ и $|y_0| < \delta$ получим, что нулевое решение устойчиво.

Пример 56.2. Исследовать на устойчивость решение скалярного ДУ

$$\dot{x} = a^2 x, \quad a \neq 0,$$

удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0$.

Решение. Решение исходного ДУ с заданными начальными условиями определяется, очевидно, равенством

$$x = x_0 e^{a^2(t-t_0)}.$$

Это решение будет неустойчиво, поскольку нельзя подобрать $\delta > 0$ такое, чтобы из неравенства $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta(\varepsilon)$ следовало бы для всех $t \geq t_0$ неравенство

$$|\tilde{x}_0 e^{a^2(t-t_0)} - x_0 e^{a^2(t-t_0)}| \equiv e^{a^2(t-t_0)} |\tilde{x}_0 - x_0| < \varepsilon.$$

Пример 56.3. Исследовать на устойчивость решение скалярного ДУ

$$\dot{x} = -a^2 x, \quad a \neq 0,$$

которое удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Решение. В данном случае искомое решение $x = x_0 e^{-a^2(t-t_0)}$ будет асимптотически устойчивым, так как при всех $t \geq t_0$

$$|\tilde{x}_0 e^{-a^2(t-t_0)} - x_0 e^{-a^2(t-t_0)}| \equiv e^{-a^2(t-t_0)} |\tilde{x}_0 - x_0| < \varepsilon,$$

если положить $\delta(\varepsilon) = \varepsilon e^{-a^2 t_0}$, и, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-a^2(t-t_0)} |\tilde{x}_0 - x_0| = 0.$$

З а м е ч а н и е 56.1. Обратим внимание на то, что выполнимость условия (56.4) для решений ДУ (56.1) еще не означает асимптотическую устойчивость решения φ . Может оказаться, что даже в случае автономных ДУ при выполнении условия (56.4) решение φ вообще будет неустойчивым. Так, например, рассмотрим¹ дифференциальную систему

¹ Виноград Р. Э. Неприменимость метода характеристических показателей к изучению нелинейных дифференциальных уравнений // Математ. сб. 1957. Т. 41(83), № 4. С. 431—438.

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2(y-x) + y^5}{(x^2 + y^2)\{1 + (x^2 + y^2)^2\}}, \\ \dot{y} = \frac{y^2(y-2x)}{(x^2 + y^2)\{1 + (x^2 + y^2)^2\}}, \end{cases} \quad (56.5)$$

где по непрерывности считаем $\dot{x} = \dot{y} = 0$ при $x = y = 0$.

Траектории системы (56.5) симметричны относительно точки $O(0,0)$ фазовой плоскости и в окрестности точки O ведут себя подобно тому, как это показано на рис. 67.

Очевидно, что тривиальное решение в данном случае неустойчиво, поскольку траектория, проходящая, например, через точку P второго квадранта, достаточно близкую к началу координат, обязательно выйдет из заданной ε -окрестности, так как эта траектория должна обогнуть «лепесток».

З а м е ч а н и е 56.2. Исследование устойчивости решения φ ДУ (56.1) может быть сведено к исследованию на устойчивость тривиального решения некоторого вспомогательного ДУ, связанного с ДУ (56.1). Действительно, преобразуем ДУ (56.1), полагая

$$x(t) = y(t) + \varphi(t).$$

Тогда

$$\dot{y} = \dot{x} - \dot{\varphi} = f(t, y + \varphi) - f(t, \varphi) = Y(t, y),$$

где $Y(t, 0) = 0$, что и означает, что $y(t) \equiv 0$ — решение последнего ДУ.

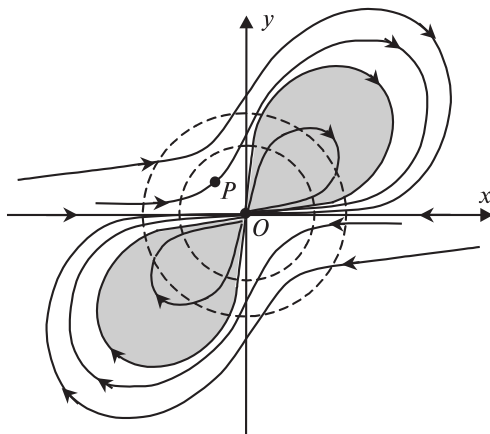


Рис. 67. Пример неустойчивого тривиального решения

Из замены очевидно, что исследуемому на устойчивость решению ф ДУ (56.1) соответствует тривиальное решение $y(t) \equiv 0$ ДУ $\dot{y} = Y(t, y)$.

Поэтому в дальнейшем без ограничения общности будем считать (как обычно и поступают), что на устойчивость исследуется тривиальное решение.

Отметим и следующее. Приведенные выше определения 56.1—56.3 относятся к ДУ общего вида (56.1), а значит, охватывают и случай автономных ДУ. Тем не менее в силу специфики автономных ДУ обычно говорят об устойчивости или неустойчивости точек покоя таких ДУ.

С учетом замечания 56.2 рассмотрим автономное векторное ДУ

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad (56.6)$$

где функция f непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в некоторой области G^1 фазового пространства $\mathbb{R}^n$, включающей точку $O(0)$ вместе с ее некоторой окрестностью.

Пусть $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — решение ДУ (56.6) такое, что

$$x(0) = x_0 \in G.$$

Обозначим траекторию, проходящую через точку x_0 , через $x(t, x_0)$.

Определение 56.4. Точка покоя $x = 0$ ДУ (56.6) называется устойчивой (устойчивой по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, то для всех $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$\|x(t, x_0)\| < \varepsilon. \quad (56.7)$$

Определение 56.5. Точка покоя $x = 0$ ДУ (56.6) называется асимптотически устойчивой (асимптотически устойчивой по Ляпунову), если она устойчива и если

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x_0)\| = 0 \quad (56.8)$$

при достаточно малых $\|x_0\|$.

Определение 56.6. Точка покоя $x = 0$ ДУ (56.6) называется неустойчивой (неустойчивой по Ляпунову), если при сколь угодно малом $\delta(\varepsilon) > 0$ хотя бы для одной траектории $x(t, x_0)$ ДУ (56.6) неравенство (56.7) не выполняется.

Для исследования устойчивости решений (точек покоя) А. М. Ляпунов предложил два метода. Первый из них состоит в непосредственном нахождении решения, явный вид которого и дает возможность судить об устойчивости или неустойчивости. Второй метод Ляпунова (прямой метод) основывается на использовании некоторых вспомогательных функ-

¹ В этом случае можно доказать, что любое решение ДУ (56.6) определено при всех $t \in \mathbb{R}$.

ций, по свойствам которых удастся сделать заключение об устойчивости или неустойчивости исследуемого решения (точки покоя). Обычно такие функции называют *функциями Ляпунова*.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема в окрестности G точки $x = 0$.

Определение 56.7. Функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ называется определенно положительной (определенно отрицательной) в области G , если $V(0) = 0$ и $V(x) > 0$ (< 0) при $x \neq 0$.

Определенно положительные и определенно отрицательные функции образуют класс *знакоопределенных функций*.

Определение 56.8. Функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ называется знакоположительной (знакоотрицательной) в области G , если в этой области $V(x) \geq 0$ (≤ 0), причем $V(0) = 0$.

Знакоположительные и знакоотрицательные функции образуют класс *знакопостоянных функций*.

Определение 56.9. Функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ называется знакопеременной в области G , если в этой области она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Например, при $n = 2$ функция V такая, что $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, является функцией определенно положительной. Функция V , определенная равенством $V(x_1, x_2) = x_1^2$, будет уже функцией знакоположительной, поскольку она обращается в нуль в точках оси Ox_2 . Очевидно также, что функция V , заданная равенством $V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, является знакопеременной.

Определение 56.10. Поверхность уровня c функции $V : G \rightarrow \mathbb{R}$, заданная уравнением $V(x) = c$, называется замкнутой относительно точки O , если на любой непрерывной кривой, соединяющей точку O с точкой границы области G , имеется, по крайней мере, одна точка, в которой $V = c$.

Теорема 56.1 (теорема о структуре поверхности уровня знакоопределенной функции). Если функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ знакоопределенная, то существует такое положительное число h , что все поверхности уровня c , где $|c| < h$, являются замкнутыми относительно точки O .

Не останавливаясь на доказательстве этой теоремы, которое проведено, например, в [6, гл. 1, теорема 3.1], отметим, что не все поверхности уровня знакоопределенной функции обязаны быть замкнутыми относительно точки O поверхностями. Например, функция V , заданная равенством

$$V(x, y) = \frac{x^2}{1 + x^2} + y^2,$$

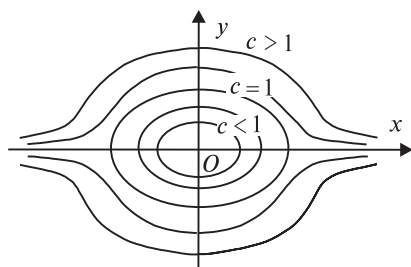


Рис. 68. К кривым (56.9)

имеет линии уровня

$$\frac{x^2}{1+x^2} + y^2 = c, \quad (56.9)$$

которые при $c \geq 1$ неограничены, а при $0 < c < 1$ замкнуты относительно точки O и ограничены (рис. 68).

Обратим также внимание и на то, что замкнутые относительно точки O поверхности могут иметь довольно необычную структуру. В частности, в двумерном случае поверхности уровня

замкнутые относительно точки O , могут не быть одномерными кривыми (рис. 69).

Отметим и следующее. Теоремы Ляпунова, касающиеся вопросов устойчивости решений и относящиеся ко второму методу, основаны на использовании знакоопределенных функций. Вместе с тем, при решении конкретных задач построение знакоопределенных функций представляет определенные трудности, но при этом оказывается возможным использовать функции знакопостоянные¹.

В дальнейшем будет показано, как знакопостоянные функции могут быть использованы при решении вопросов об устойчивости точек покоя динамических систем, определяемых дифференциальными уравнениями. Но предварительно приведем следующие определения.

Пусть Y — положительно инвариантное множество в $\mathbb{R}^n$, содержащее точку покоя $x = O$ ДУ (56.6), $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r, r > 0\}$, — шар радиуса r с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 56.11. Точка покоя $x = O$ ДУ (56.6) называется устойчивой относительно множества Y , если для любого $\varepsilon > 0$ существует

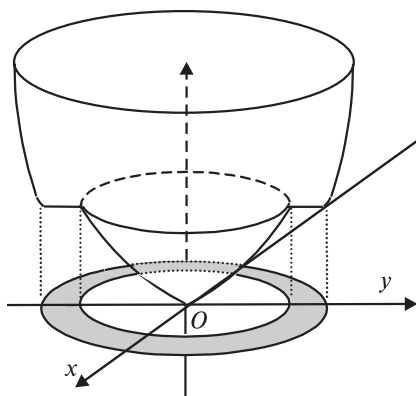


Рис. 69. Неодномерная замкнутая относительно точки O поверхность

¹ О развитии метода знакопостоянных функций см.: *Калитин Б. С. Устойчивость дифференциальных уравнений. Метод знакопостоянных функций Ляпунова.* LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. 223 с.

$\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждой точки $x_0 \in B_\delta \cap Y$ при всех $t \geq 0$ выполняется неравенство (56.7).

Определение 56.12. Точка покоя $x = O$ ДУ (56.6) называется асимптотически устойчивой относительно множества Y , если она устойчива относительно множества Y и если существует число $\Delta > 0$ такое, что из условия $x_0 \in B_\Delta \cap Y$ следует равенство (56.8).

Определение 56.13. Множество $\mathcal{A}_Y = \{x_0 \in Y \mid \|x(t, x_0)\| \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty\}$ называется областью притяжения точки покоя $x = O$ ДУ (56.6) относительно множества Y .

Определение 56.14. Точка покоя $x = O$ ДУ (56.6) называется неустойчивой относительно множества Y , если при сколь угодно малом $\delta(\varepsilon) > 0$ хотя бы для одной точки $x_0 \in B_\delta \cap Y$ неравенство (56.7) не выполняется.

§ 57. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ТОЧКИ ПОКОЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНВАРИАНТНОГО МНОЖЕСТВА

Лемма 57.1. Если точка покоя $x = O$ ДУ (56.6) неустойчива относительно замкнутого положительно инвариантного множества $Y \subset \mathbb{R}^n$, содержащего точку $x = O$, то в пересечении любой окрестности этой точки с множеством Y имеется нетривиальная отрицательная полутраектория ДУ (56.6).

Доказательство. Так как точка покоя $x = O$ неустойчива относительно множества Y , то существуют $\varepsilon > 0$, последовательность точек $\{p_n\} \subset (B_\varepsilon \cap Y)$, $p_n \rightarrow O$, и последовательность моментов времени $\{t_n\}$, $t_n \geq 0$, такие, что для любого фиксированного $n \geq 1$ будем иметь

$$\|x(t, p_n)\| < \varepsilon, \quad 0 \leq t < t_n, \quad \|x(t_n, p_n)\| = \varepsilon, \quad (57.1)$$

где символ $x(t, p_n)$ здесь обозначает при различных n , вообще говоря, различные траектории.

Пусть S_ε — граница шара B_ε . Тогда в силу компактности множества S_ε можно считать, не умаляя общности, что последовательность

$$\{y_n\}, \quad y_n = x(t_n, p_n),$$

является сходящейся, т. е. можно считать, что $y_n \rightarrow y$, где точка $y \in S_\varepsilon$ (рис. 70).

При этом вследствие положительной инвариантности множества Y имеет место включение $y_n \in Y$, а в силу замкнутости Y — включение $y \in Y$.

Заметим также, что $t_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Это следует из того, что если бы последовательность $\{t_n\}$ имела конечную предельную точку $\tilde{t}$,

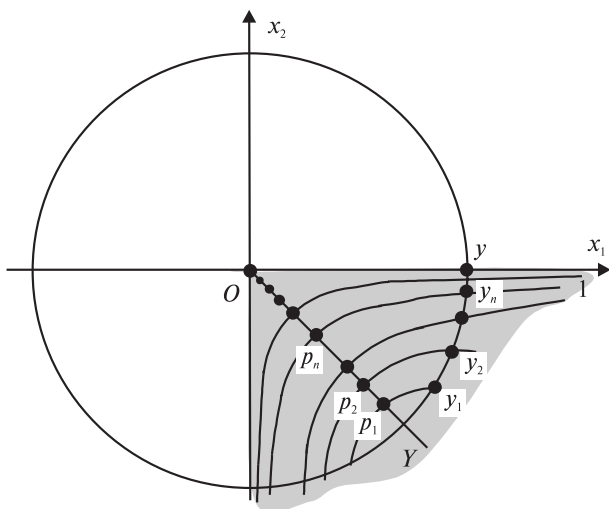


Рис. 70. К доказательству леммы 57.1

то выполнялось бы равенство $y = x(\tilde{t}, O)$, чего быть не может, поскольку $\|x(\tilde{t}, O)\| = \varepsilon$, а $x = O$ — точка покоя.

Покажем теперь, что нетривиальная отрицательная полутраектория ДУ (56.6) $x(\mathbb{R}_0^-, y) \subset B_\varepsilon$. В самом деле, допустим, что это не так. Тогда существует число $\tau < 0$ такое, что $\|x(\tau, y)\| > \varepsilon$. Выберем число $\mu > 0$ таким, чтобы выполнялось неравенство $\mu < \|x(\tau, y)\| - \varepsilon$. На основании теоремы о непрерывной зависимости решений от начальных данных можно по числам τ и μ указать число $\nu > 0$ такое, что если

$$\|y - z\| < \nu, \text{ то } \|x(\tau, y) - x(\tau, z)\| < \mu.$$

Теперь, так как последовательность $\{y_n\}$ является сходящейся, то существует натуральное число n^* такое, что для любого $n \geq n^*$ справедливо неравенство $\|y_n - y\| < \nu$. Тогда для любого $n \geq n^*$ имеет место неравенство $\|x(\tau, y_n) - x(\tau, y)\| < \mu$.

При этом заметим, что поскольку $t_n \rightarrow +\infty$, то число n^* можно выбрать настолько большим, что для любого $n \geq n^*$ будет выполняться неравенство $0 < t_n + \tau$.

А так как на основании неравенства треугольника для любого $n \geq n^*$ имеем

$$\begin{aligned} \rho(x(\tau, y_n), \bar{B}_\varepsilon) &\geq \rho(x(\tau, y), \bar{B}_\varepsilon) - \rho(x(\tau, y_n), x(\tau, y)) \geq \\ &\geq \rho(x(\tau, y), \bar{B}_\varepsilon) - \mu > 0, \end{aligned}$$

а с учетом группового свойства траекторий $x(\tau, y_n) \equiv x(t_n + \tau, p_n)$, приходим к выводу, что $\|x(t_n + \tau, p_n)\| > \varepsilon$. Но полученное неравенство противоречит неравенству (57.1). Таким образом, полутраектория $x(\mathbb{R}_0^-, y) \subset \bar{B}_\varepsilon$, причем $\|y\| = \varepsilon$.

Далее, в силу положительной инвариантности множества Y для $0 \leq t \leq t_n$ имеем включение $x(t, p_n) \in Y$. Поэтому для любого $\tau < 0$ можно указать натуральное число n^* такое, что для всех $n \geq n^*$ будет выполняться неравенство $t_n + \tau > 0$. По групповому свойству траекторий и положительной инвариантности множества Y получаем, что

$$x(\tau, x(t_n, p_n)) \equiv x(t_n + \tau, p_n) \in Y.$$

Следовательно, при $n \rightarrow +\infty$ в пределе имеем включение $x(\tau, y) \in Y$. А так как момент времени $\tau < 0$ выбран произвольно, то $x(\mathbb{R}_0^-, y) \subset Y$. Таким образом,

$$x(\mathbb{R}_0^-, y) \subset (\bar{B}_\varepsilon \cap Y) \setminus \{O\}.$$

Теорема 57.1. Для того чтобы точка покоя $x = O$ ДУ (56.6) была асимптотически устойчивой относительно замкнутого положительно инвариантного множества $Y \subset \mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно существование окрестности G точки $x = O$ такой, чтобы множество $(G \cap Y) \setminus \{O\}$ не содержало отрицательных полутраекторий.

Доказательство. Необходимость. Пусть точка покоя $x = O$ ДУ (56.6) асимптотически устойчива относительно множества Y и пересечение $\bar{B}_\delta \cap Y$ принадлежит области притяжения A_γ .

Покажем, что множество $\bar{B}_\delta \cap Y$ не содержит нетривиальных отрицательных полутраекторий. Действительно, пусть, напротив, существует отрицательная полутраектория $x(\mathbb{R}_0^-, p) \subset (\bar{B}_\delta \cap Y) \setminus \{O\}$. Тогда в силу компактности замыкания $\bar{B}_\delta$ множество A_p непусто и инвариантно. По построению $A_p \subset (\bar{B}_\delta \cap Y)$, поэтому для любой точки $y \in A_p$ получаем, что $\|x(t, y)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Но в таком случае с учетом замкнутости предельного множества точки p точка покоя $x = O$ содержится в A_p . Следовательно, отрицательная полутраектория $x(\mathbb{R}_0^-, p)$ примыкает к точке $O(O)$ и, значит, точка покоя ДУ (56.6) неустойчива, что противоречит исходному предположению.

Достаточность. Пусть O — компактная окрестность точки $x = O$ такая, что множество $(O \cap Y) \setminus \{O\}$ не содержит отрицательных полутраекторий. Тогда по лемме 57.1 точка покоя $x = O$ ДУ (56.6) является устойчивой относительно множества Y , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $x_0 \in (B_\delta \cap Y)$, то $x(\mathbb{R}_0^+, x_0) \subset B_\varepsilon$. Выберем ε настолько ма-

лым, чтобы выполнялось включение $B_\delta \subset \mathcal{O}$. Тогда так как окрестность $\mathcal{O}$ компактна, то множество Ω_{x_0} непусто, компактно и содержится в $\mathcal{O}$. Множество $(\mathcal{O} \cap Y) \setminus \{0\}$ не содержит отрицательных полутраекторий, поэтому с учетом инвариантности предельных множеств получаем, что $\Omega_{x_0} = \{0\}$. Таким образом, точка $x_0 \in \mathcal{A}_\gamma$, что и доказывает теорему.

§ 58. ТЕОРЕМЫ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ ТОЧКИ ПОКОЯ

Теорема 58.1 (теорема об устойчивости). Если в области $G \subset \mathbb{R}^n$ определена знакоположительная функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$, производная $\dot{V}$ которой в силу ДУ (56.6)¹ является функцией знакоотрицательной, а точка покоя $x = 0$ ДУ (56.6) асимптотически устойчива относительно множества $Y_0 = \{x \in G \mid V(x) = 0\}$, то точка $x = 0$ устойчива по Ляпунову.

Доказательство. Предположим, что точка покоя $x = 0$ ДУ (56.6) неустойчива. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и две последовательности $\{p_n\} \subset B_\varepsilon$, $p_n \rightarrow 0$, $\{t_n\} \subset \mathbb{R}_0^+$ такие, что имеют место соотношения (57.1). Аналогично доказательству леммы 57.1 можно показать, что $x(t_n, p_n) \rightarrow y$, причем $x(\mathbb{R}_0^-, y) \subset \bar{B}_\varepsilon$ и $\|y\| = \varepsilon$.

Докажем теперь, что $V(x(\mathbb{R}_0^-, y)) = 0$. Действительно, пусть $\eta < 0$ — произвольное отрицательное число, а n^* — достаточно большое натуральное число такое, что $t_n + \eta \geq 0$ для всех $n \geq n^*$. Тогда на основании двух первых условий теоремы имеют место неравенства $0 \leq V(x(t_n + \eta, p_n)) \leq V(p_n)$. Отсюда, переходя к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получим, что $V(x(\eta, y)) = 0$ для любого $\eta < 0$, т. е. $V(x(\mathbb{R}_0^-, y)) = 0$ и, значит, $x(\mathbb{R}_0^-, y) \subset Y_0$.

С другой стороны, так как множество Y_0 положительно инвариантно, а в силу непрерывности функции V множество $\bar{B}_\varepsilon \cap Y_0$ замкнуто, то по теореме 57.1 это множество не содержит нетривиальных отрицательных полутраекторий. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Следствие 58.1 (теорема А. М. Ляпунова). Если в области $G \subset \mathbb{R}^n$ задана определенно положительная функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$, производная $\dot{V}$ которой в силу ДУ (56.6) является функцией знакоотрицательной, то точка покоя $x = 0$ ДУ (56.6) устойчива по Ляпунову.

¹ Производной $\dot{V}$ функции V в силу ДУ (56.6) называется функция, которая задается следующим образом: $\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial(x)} \dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x)$.

З а м е ч а н и е 58.1. Теорема 58.1 справедлива и тогда, когда условие знакоположительности функции V заменяется условием $V(x) \equiv 0$ в области G . В этом случае требование асимптотической устойчивости точки покоя $x = 0$ ДУ (56.6) относительно множества Y_0 означает ее асимптотическую устойчивость относительно всей окрестности G .

З а м е ч а н и е 58.2. Как теорема 58.1, так и следствие 58.1 справедливы и при замене условия знакоотрицательности производной $\dot{V}$ условием $\dot{V} \equiv 0$ в G . В этом случае функция V оказывается первым интегралом ДУ (56.6).

Пример 58.1. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ дифференциальной системы

$$\dot{x} = -x^3 y^4, \quad \dot{y} = x^7. \quad (58.1)$$

Решение. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ знакоположительную функцию V , заданную равенством $V(x, y) = (x^5 + y^5)^2$, производная в силу ДС (58.1) которой обращается в $\mathbb{R}^2$ тождественно в нуль, т. е. $\dot{V}(x, y) \equiv 0$.

Заметим, что прямая $x = 0$ сплошь состоит из особых точек (точек покоя) системы (58.1). На множестве $Y_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^5 + y^5 = 0\}$ данная система переходит в скалярное ДУ $\dot{y} = -y^7$, точка покоя которого $y = 0$ асимптотически устойчива. Следовательно, выполняются все предположения теоремы 58.1, а значит, точка $O(0,0)$ устойчива по Ляпунову (рис. 71).

Пример 58.2. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0,0)$ дифференциальной системы

$$\dot{x} = -y + xy^2 z - x^3, \quad \dot{y} = x - x^2 y z, \quad \dot{z} = -2z + xyz^2. \quad (58.2)$$

Решение. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ знакоположительную функцию V такую, что $V(x, y, z) = x^2 + y^2$. В данном случае $\dot{V}(x, y, z) = -2x^4$, т. е. производная функции V в силу системы (58.2) является функцией знакоотрицательной. На множестве $Y_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$ система переходит в скалярное ДУ $\dot{z} = -2z$, точка покоя $z = 0$ которого асимптотически устойчива, и, таким образом, выполняются все условия теоремы 58.1. Следовательно, точка покоя $O(0,0,0)$ системы (58.1) устойчива по Ляпунову.

Пример 58.3. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0,0)$ дифференциальной системы

$$\dot{x} = -y + xy^2 z, \quad \dot{y} = x - x^2 y z, \quad \dot{z} = -2z + xyz^2. \quad (58.3)$$

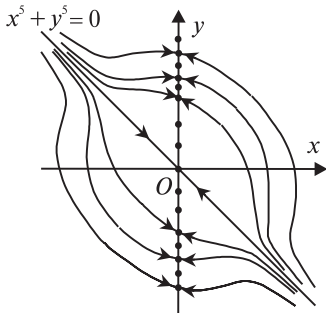


Рис. 71. К системе (58.1)

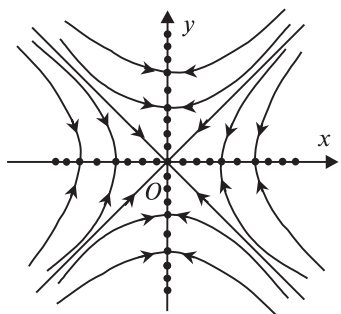


Рис. 72. К системе (58.4)

Решение. Полагая, как и в предыдущем случае, $V(x, y, z) = x^2 + y^2$, получим, что $\dot{V}(x, y, z) \equiv 0$, а значит, точка покоя $O(0, 0, 0)$ системы (58.3) устойчива по Ляпунову.

Пример 58.4. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0, 0)$ дифференциальной системы

$$\dot{x} = -xy^4, \quad \dot{y} = -yx^4. \quad (58.4)$$

Решение. Пусть $V(x, y) = x^4 + y^4$. Тогда $\dot{V}(x, y) = -4x^2y^2(x^2 + y^2)$ и, следовательно, по следствию 58.1 точка покоя $O(0, 0)$ ДС (58.4) устойчива по Ляпунову (рис. 72).

Лемма 58.1 (лемма Е. А. Барбашина¹). Если в области $G \subset \mathbb{R}^n$ определена непрерывно дифференцируемая функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что вдоль ограниченной положительной полутраектории $x(\mathbb{R}_0^+, x_0)$, $x_0 \in G$, дифференциального уравнения (56.6) производная $\dot{V}$ знакоотрицательна (знакоположительна), то все ω -предельные точки точки x_0 принадлежат одной и той же поверхности уровня функции V .

Доказательство. Пусть q_1 и q_2 — ω -предельные точки точки x_0 . Тогда по определению существуют последовательности моментов времени $\{t_n\}$, $t_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, и $\{\tau_n\}$, $\tau_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, такие, что соответственно $x(t_n, x_0) \rightarrow q_1$, а $x(\tau_n, x_0) \rightarrow q_2$ при $n \rightarrow +\infty$. Выберем две подпоследовательности $\{t'_n\} \subset \{t_n\}$ и $\{\tau'_n\} \subset \{\tau_n\}$ такие, чтобы для каждого фиксированного $n \geq 1$ выполнялось неравенство $t'_n \leq \tau'_n$. Тогда в силу неравенства $\dot{V}(x(\mathbb{R}_0^+, x_0)) \leq 0$ будем иметь неравенство $V(x(t'_n, x_0)) \geq V(x(\tau'_n, x_0))$. Отсюда при $n \rightarrow +\infty$ получаем, что $V(q_1) \geq V(q_2)$.

Аналогично, выбирая подпоследовательности $\{t''_n\} \subset \{t'_n\}$ и $\{\tau''_n\} \subset \{\tau'_n\}$ с условием $t''_n \geq \tau''_n$ для каждого фиксированного $n \geq 1$, находим, что $V(q_1) \leq V(q_2)$. Таким образом, $V(q_1) = V(q_2)$ для произвольных точек q_1, q_2 из ω -предельного множества, что и требовалось доказать.

Теорема 58.2 (теорема об асимптотической устойчивости). Если в области $G \subset \mathbb{R}^n$ определена знакоположительная функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$, производная $\dot{V}$ которой в силу ДУ (56.6) является функцией знакоотрицательной, а точка покоя $x = O$ ДУ (56.6) асимптотически устойчива относительно

¹ Барбашин Евгений Алексеевич (1918—1969), советский математик.

множества $Y = \{x \in G \mid \dot{V}(x) = 0\}$, то точка покоя $x = O$ асимптотически устойчива по Ляпунову.

Доказательство. Так как множество $Y_0 \subset Y$, то третье условие теоремы 58.2 влечет выполнение третьего условия теоремы 58.1. Поэтому точка покоя $x = O$ ДУ (56.6) устойчива по Ляпунову, а значит, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, то $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$. Пусть число $\varepsilon > 0$ настолько мало, что замыкание $\bar{B}_\varepsilon$ шара B_ε содержится в окрестности O точки $x = O$ и множество $(\bar{B}_\varepsilon \cap Y) \subset A_Y$.

Покажем, что $\|x(t, x_0)\| \rightarrow 0$, если $t \rightarrow +\infty$. Действительно, предположим, что это не так. Тогда можно указать начальную точку $x_0 \in B_\delta$ такую, что ее ω -предельное множество $\Omega_{x_0} \not\subset \{O\}$. Множество Ω_{x_0} непусто, инвариантно, замкнуто и принадлежит замыканию $\bar{B}_\varepsilon$, поэтому оно содержит некоторую отрицательную полутраекторию $x(\mathbb{R}_0^-, y) \neq \{O\}$, для которой имеет место включение $x(\mathbb{R}_0^-, y) \subset (\bar{B}_\varepsilon \setminus \{O\})$. Более того, по лемме 58.1 справедливо тождество $\dot{V}(x(\mathbb{R}_0^-, y)) \equiv 0$, т. е. $x(\mathbb{R}_0^-, y) \subset (\bar{B}_\varepsilon \cap Y)$.

Но тогда $x(\mathbb{R}_0^-, y) \subset A_Y$. Следовательно, для каждой точки $z \in x(\mathbb{R}_0^-, y)$ имеем: $\|x(t, z)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. А это значит, что $\{O\} \in \Omega_z \subset \Omega_{x_0}$, т. е. $\{O\} \in \Omega_{x_0}$. Полученное противоречие с указанным выше отрицанием включения $\Omega_{x_0} \not\subset \{O\}$ и доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 58.3. Можно доказать, на чем мы останавливаться не будем, что если в теореме 58.2 условие знакоположительности функции V заменить условием ее определенной положительности, то теорема 58.2 равносильна следующему утверждению.

Теорема 58.3 (теорема Н. Н. Красовского¹). Если в области $G \subset \mathbb{R}^n$ задана определенно положительная функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$, производная $\dot{V}$ которой в силу ДУ (56.6) является функцией знакоотрицательной, а множество $Y = \{x \in G \mid \dot{V}(x) = 0\}$ не содержит положительных полутраекторий ДУ (56.6), кроме точки покоя $x = O$, то точка $x = O$ асимптотически устойчива по Ляпунову.

Таким образом, теорема Н. Н. Красовского оказывается следствием теоремы 58.2.

Следствие 58.2 (теорема А. М. Ляпунова). Если в области $G \subset \mathbb{R}^n$ задана определенно положительная функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$, производная $\dot{V}$ которой в силу ДУ (56.6) является функцией определенно отрицательной, то точка покоя $x = O$ ДУ (56.6) асимптотически устойчива по Ляпунову.

¹ Красовский Николай Николаевич (1924–2012), российский математик.

Пример 58.5. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ дифференциальной системы

$$\dot{x} = -xy^2, \quad \dot{y} = x^3 - y^3. \quad (58.5)$$

Решение. Выберем знакоположительную функцию V , заданную равенством $V(x, y) = x^2$. Для этой функции производная в силу системы (58.5) $\dot{V}(x, y) = -2x^2y^2$, т. е. функция $\dot{V}$ является функцией знакоотрицательной. Множество

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dot{V}(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}. \quad (58.6)$$

Рассмотрим поведение траекторий системы (58.5) относительно множества Y . Так, при $x = 0$ система (58.5) вырождается в скалярное ДУ $\dot{y} = -y^3$, точка покоя которого $y = 0$ асимптотически устойчива, и, следовательно, третье условие теоремы 58.2 выполняется. Если $y = 0$, то единственной траекторией системы (58.2) на множестве Y является точка покоя $O(0,0)$ и, значит, третье условие теоремы 58.2 (равносильное третьему условию теоремы 58.3) также выполняется. Таким образом, точка покоя $O(0,0)$ ДС (58.5) асимптотически устойчива по Ляпунову (рис. 73).

Пример 58.6. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ дифференциальной системы

$$\dot{x} = y - xy^2, \quad \dot{y} = -x^3. \quad (58.7)$$

Решение. Пусть $V(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Тогда производная функции V в силу системы (58.7) определяется равенством $\dot{V}(x, y) = -x^4y^2$.

Множество Y в данном случае — это, как и в предыдущем примере, множество (58.6).

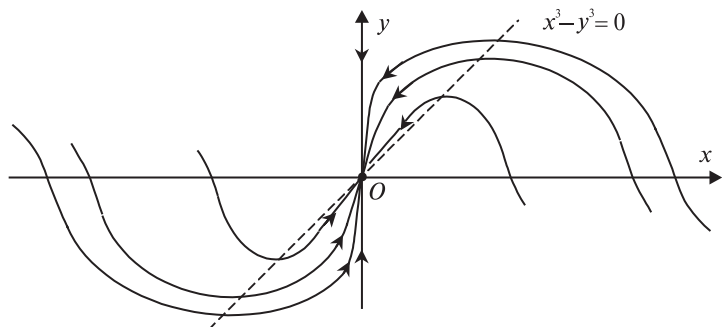


Рис. 73. К системе (58.5)

Легко убедиться, что множество Y не содержит положительных полутраекторий ДС (58.7), кроме точки покоя $O(0,0)$, а следовательно, по теореме 58.3 указанная точка, как траектория, асимптотически устойчива по Ляпунову.

Пример 58.7. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ дифференциальной системы

$$\dot{x} = -5y - 2x^3, \quad \dot{y} = 5x - 3y^3.$$

Решение. Положим $V(x, y) = x^2 + y^2$. Тогда $\dot{V}(x, y) = -2(2x^4 + 3y^4)$ и в силу следствия 58.2 точка покоя $O(0,0)$ устойчива по Ляпунову асимптотически.

§ 59. ТЕОРЕМЫ О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТОЧКИ ПОКОЯ

Теорема 59.1 (теорема Н. Н. Красовского). Если в области $G \subset \mathbb{R}^n$ определена функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$, $V(O) = 0$, производная $\dot{V}$ которой в силу ДУ (56.6) является функцией знакоположительной, сама функция V в любой окрестности точки покоя $x = O$ ДУ (56.6) не является знакоотрицательной, а множество $Y = \{x \in G \setminus \{O\} \mid \dot{V}(x) = 0\}$ не содержит положительных полутраекторий, то точка $x = O$ неустойчива по Ляпунову.

Теорема 59.2. Если в области $G \subset \mathbb{R}^n$ определена функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$, $V(O) = 0$, производная $\dot{V}$ которой в силу ДУ (56.6) является функцией знакоположительной, сама функция V в любой окрестности точки покоя $x = O$ ДУ (56.6) не является знакоотрицательной, а множество $Y = \{x \in G \setminus \{O\} \mid \dot{V}(x) = 0\}$ содержит лишь такие положительные полутраектории, которые при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к точке $x = O$, то эта точка неустойчива по Ляпунову.

Доказательство теорем 59.1 и 59.2. Так как в любой окрестности точки покоя $x = O$ функция V не является функцией знакоотрицательной, то в произвольно малой окрестности B_δ существует точка p такая, что $V(p) = v_0 > 0$. Пусть B_η — шар, во всех точках которого $|V(x)| < v_0$. Предположим теперь, что ни при каком значении t траектория $x(t, p)$ не выйдет из некоторого шара B_ε . Тогда поскольку траектория $x(t, p)$ не может войти в шар B_η (производная $\dot{V}$ знакоположительна), то при каждом фиксированном $t > 0$ точка $x(t, p)$ будет принадлежать шаровому слою $\bar{B}_\varepsilon \setminus B_\eta$, а следовательно, непустое ω -предельное множество Ω_p также будет принадлежать шаровому слою $\bar{B}_\varepsilon \setminus B_\eta$.

Пусть множество Y не содержит положительных полутраекторий (теорема 59.1). Тогда, замечая, что по лемме 58.1 множество Ω_p лежит на поверхности уровня $V = c$, а в соответствии с теоремами 51.1 и 51.2 оно

является замкнутым и состоит из целых траекторий (в частности, из положительных полутраекторий), приходим к выводу, что на множестве Ω_p производная $\dot{V} = 0$, а значит, $\Omega_p \subset Y$. Но полученное включение противоречит предположению теоремы 59.1 о том, что множество Y не содержит положительных полутраекторий. Полученное противоречие и доказывает теорему 59.1.

Рассмотрим теперь случай, когда множество Y содержит положительные полутраектории, но лишь такие, что при $t \rightarrow +\infty$ они стремятся к точке $x = O$ (теорема 59.2). Тогда если y — произвольная точка ω -предельного множества Ω_p такая, что $\|x(t, y)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то в силу инвариантности предельных множеств $\Omega_p \cap \{O\} \neq \emptyset$. Но это неравенство противоречит полученному выше включению $\Omega_p \subset (\bar{B}_\varepsilon \setminus B_\eta)$. Полученное противоречие и доказывает теорему 59.2.

Теорема 59.3 (теорема А. М. Ляпунова). Если в области $G \subset \mathbb{R}^n$ определена функция $V : G \rightarrow \mathbb{R}$, $V(O) = 0$, производная $\dot{V}$ которой в силу ДУ (56.6) является функцией определено положительной, а сама функция V в любой окрестности точки покоя $x = O$ ДУ (56.6) не является знакоотрицательной, то точка $x = O$ неустойчива по Ляпунову.

З а м е ч а н и е 59.1. Теорема 59.3 является следствием как теоремы 59.1, так и теоремы 59.2.

Пример 59.1. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ дифференциальной системы

$$\dot{x} = x^3 y^4, \quad \dot{y} = x^3 + \alpha y^3, \quad \alpha \neq 0. \quad (59.1)$$

Решение. Рассмотрим знакоположительную функцию V , заданную равенством $V(x, y) = x^2$. Производная $\dot{V}$ этой функции в силу системы (59.1) определяется равенством $\dot{V}(x, y) = 2x^4 y^4$, т. е. также является функцией знакоположительной. Множество Y здесь определяется формулой (58.6).

Рассмотрим поведение траекторий системы (59.1) относительно множества Y . Так, при $x = 0$ система (59.1) вырождается в скалярное ДУ

$$\dot{y} = \alpha y^3, \quad (59.2)$$

точка покоя $y = 0$ которого при $\alpha > 0$ неустойчива, а значит, точка $O(0,0)$ исходной системы (59.1) неустойчива по Ляпунову (рис. 74).

Рассмотрим случай $\alpha < 0$. При $x = 0$ точка покоя $y = 0$ ДУ (59.2) устойчива асимптотически и, следовательно, на подмножестве $x = 0$ множества Y третье условие теоремы 59.2 выполнено. Если же $y = 0$, то единственной траекторией системы (59.1) на множестве Y будет точка $O(0,0)$ и, значит, выполняется третье условие теоремы 59.1. Таким образом, и при $\alpha < 0$ точка покоя $O(0,0)$ системы (59.1) неустойчива по Ляпунову (рис. 75).

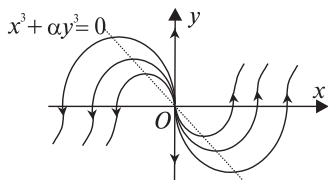


Рис. 74. К случаю $\alpha > 0$ ($\alpha = 1$)

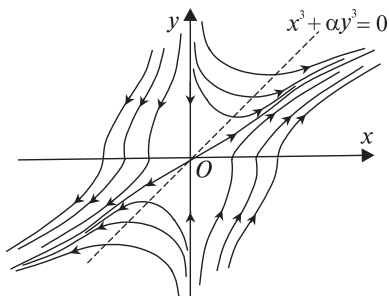


Рис. 75. К случаю $\alpha < 0$ ($\alpha = -1$)

Пример 59.2. Исследовать на устойчивость точку покоя дифференциальной системы

$$\dot{x} = y^3 + x^5, \quad \dot{y} = -x^3 + y^5. \quad (59.3)$$

Решение. Пусть $V(x, y) = x^4 + y^4$. Тогда $\dot{V}(x, y) = 4(x^3 y + y^3 x)$, а значит, по теореме 59.3 точка покоя $O(0, 0)$ системы (59.3) неустойчива по Ляпунову.

§ 60. УСТОЙЧИВОСТЬ ТОЧКИ ПОКОЯ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ МАТРИЦЕЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим векторное ДУ

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (60.1)$$

где A — вещественная постоянная $(n \times n)$ -матрица.

Теорема 60.1. Если все корни λ_j характеристического уравнения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, то точка покоя $x = 0$ ДУ (60.1) устойчива по Ляпунову асимптотически.

Доказательство. Из результатов § 42 следует, что любое решение ДУ (60.1) задается в векторной записи равенством

$$x(t) = \sum_{j=1}^m P_j(t) e^{\lambda_j t}, \quad (60.2)$$

где $P_j(t)$ — векторный полином, каждая координата которого имеет степень не выше $k_j - 1$, k_j — порядок наибольшей из жордановых клеток, содержащих элемент λ_j , коэффициенты полиномов — векторы из $\mathbb{R}^n$.

Замечая тогда, что при $\lambda = \alpha + \beta i$ справедливо равенство

$$P(t) e^{\lambda t} = P(t) e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t), \quad \text{где } |\cos \beta t + i \sin \beta t| = 1,$$

приходим к выводу, что если $\alpha < 0$, то $e^{\alpha t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ и, как известно из курса математического анализа, $P(t)e^{\alpha t} \rightarrow 0$, а следовательно, каждое решение ДУ (60.1) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ и, таким образом, ограничено при $t \geq 0$. Но в таком случае ограничена и фундаментальная матрица $\Phi(t)$, $\Phi(0) = E$, т. е. $\|\Phi(t)\| \leq m$ при $t \geq 0$, причем $\|\Phi(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Далее для любого решения ДУ (60.1) имеем $x(t) = \Phi(t)x(0)$. Отсюда следует, что $\|x(t)\| \leq \|\Phi(t)\| \|x(0)\| < \varepsilon$ при $t \geq 0$, если $\|x(0)\| < \delta = \varepsilon/m$, причем $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Теорема доказана.

Теорема 60.2. Если все корни λ_j характеристического уравнения матрицы A имеют неположительные вещественные части, причем корни характеристического уравнения, имеющие нулевые вещественные части, допускают жордановы клетки лишь порядка 1, то точка покоя $x = 0$ ДУ (60.1) устойчива по Ляпунову.

Доказательство. Сразу же отметим, что те слагаемые в равенстве (60.2), где вещественные части корней характеристического уравнения отрицательны, ограничены при любом $t \geq 0$. Слагаемые с нулевой частью корней характеристического уравнения являются константами и, значит, ограничены. Следовательно, все решения ДУ (60.1) ограничены и в силу оценок, приведенных при доказательстве предыдущей теоремы, приходим к выводу, что точка покоя $x = 0$ ДУ (60.1) устойчива по Ляпунову.

Теорема 60.3. Если все корни λ_j характеристического уравнения матрицы A имеют неотрицательные вещественные части, причем корни характеристического уравнения, имеющие нулевые вещественные части, допускают жордановы клетки только порядка ≥ 2 , то точка покоя $x = 0$ ДУ (60.1) неустойчива по Ляпунову.

Доказательство. При наличии хотя бы одного $\lambda_j = \alpha + \beta i$ с $\alpha > 0$ ДУ (60.1) имеет решение x такое, что $x(t) = e^{(\alpha + \beta i)t} v$, где v — собственный вектор для λ_j . А поскольку $e^{\alpha t} \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, $|e^{i\beta t}| \equiv 1$, то решение x неограничено при $t \geq 0$. При этом, если $\beta \neq 0$, то решение x комплексное, вещественная и мнимая части которого, как известно, — решения ДУ (60.1), из которых хотя бы одно неограничено.

Пусть δ — произвольное положительное число и $c = \delta/2 \|x(0)\|$. Тогда для решения x_1 ДУ (60.1) такого, что $x_1(t) = cx(t)$, находим, что $\|x_1(0)\| = \delta/2$. Отсюда следует, что решение x_1 неограничено при $t \geq 0$ и, значит, точка покоя $x = 0$ ДУ (60.1) неустойчива по Ляпунову.

Рассмотрим теперь случай, когда нет λ_j с положительной вещественной частью, но есть λ с нулевой вещественной частью и жордановой клеткой порядка $k \geq 2$. В этом случае из § 42 следует, что существует решение, определяемое равенством $x(t) = P(t)e^{\lambda t}$, где $P(t)$ — полином степени

$k - 1 \geq 1$ со старшим коэффициентом, не равным нулю, а $|e^{\lambda t}| = 1$ и, следовательно, это решение неограничено, что и доказывает теорему.

§ 61. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Пусть ДУ (56.6) оказывается таким, что

$$\dot{x} = Ax + g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (61.1)$$

где A — ненулевая вещественная постоянная матрица, а $g(x) = o(\|x\|)$ при $\|x\| \rightarrow 0$.

Определение 61.1. ДУ (60.1) называется ДУ первого (линейного) приближения для ДУ (61.1).

Теорема 61.1. Если все корни характеристического уравнения матрицы A ДУ первого приближения имеют отрицательные вещественные части, то точка покоя $x = 0$ нелинейного ДУ (61.1) устойчива по Ляпунову асимптотически.

Теорема 61.2. Если среди корней характеристического уравнения матрицы A ДУ первого приближения имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то точка покоя $x = 0$ нелинейного ДУ (61.1) неустойчива по Ляпунову.

Не останавливаясь на доказательстве приведенных теорем¹, отметим лишь, что ограничения, налагаемые на корни характеристического уравнения матрицы A ДУ первого приближения (60.1), не охватывают лишь так называемый критический случай, т. е. случай, когда характеристическое уравнение матрицы A , не имея корней с положительными вещественными частями, имеет корни с нулевыми вещественными частями.

В критическом случае в зависимости от функций g может иметь место как устойчивость, так и неустойчивость точки покоя $x = 0$ ДУ (61.1). Другими словами, в критическом случае исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно.

Пример 61.1. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ дифференциальной системы

$$\dot{x} = 2x + 8\sin y, \quad \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \quad (61.2)$$

Решение. Имея в виду разложения $\sin y$, e^x , $\cos y$ в ряды Тейлора, перепишем систему (61.2) в виде

$$\dot{x} = 2x + 8y + X(x, y), \quad \dot{y} = -x - 3y + Y(x, y),$$

где X и Y не содержат в своих разложениях свободных и линейных членов.

¹ Доказательства теорем 61.1 и 61.2 см., например, в книге: *Малкин И. Г. Теория устойчивости движения*. 2-е изд. М.: Наука, 1966.

Характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

системы первого приближения имеет корни $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{7}}{2}$ и, значит, в соответствии с теоремой 61.1 точка покоя $O(0,0)$ системы (61.2) асимптотически устойчива по Ляпунову (точка $O(0,0)$ является устойчивым фокусом).

Пример 61.2. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ дифференциальной системы

$$\dot{x} = x - y + x^2 + y^2 \sin x, \quad \dot{y} = x + y - y^2. \quad (61.3)$$

Решение. Характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

системы первого приближения имеет корни $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$, а следовательно, по теореме 61.2 точка покоя $O(0,0)$ системы (61.3) неустойчива по Ляпунову (точка $O(0,0)$ является неустойчивым фокусом).

Пример 61.3. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0)$ дифференциальной системы

$$\dot{x} = -4y - x^3, \quad \dot{y} = 3x - y^3. \quad (61.4)$$

Решение. Характеристическое уравнение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

системы первого приближения имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}i$ и, таким образом, налицо критический случай (система первого приближения имеет в начале координат центр), т. е. исследование на устойчивость точки покоя $O(0,0)$ по первому приближению невозможно. Тем не менее выбрав определенно положительную функцию V , полагая $V(x, y) = 3x^2 + 4y^2$, находим, что производная $\dot{V}$ функции V в силу системы (61.4) задается равенством $\dot{V}(x, y) = -2(3x^4 + 4y^4)$ ($\dot{V}$ является функцией определено отрицательной), т. е. на основании следствия 58.2 точка покоя $O(0,0)$ системы (61.4) асимптотически устойчива по Ляпунову (точка $O(0,0)$ является устойчивым фокусом).

Критерии отрицательности вещественных частей всех корней произвольного многочлена. В связи с приведенными выше теоремами 61.1 и 61.2 вопрос об устойчивости точки покоя широкого класса ДУ сводится к опреде-

лению знака вещественных частей корней характеристического уравнения. Однако в случаях, когда характеристическое уравнение имеет высокую степень (≥ 5), нет конечной формулы, позволяющей с помощью алгебраических операций выразить через коэффициенты уравнения его корни.

Тем не менее существуют критерии, которые позволяют по коэффициентам алгебраического уравнения n -й степени с вещественными коэффициентами определить (не зная корней уравнения), когда все вещественные части корней уравнения отрицательны.

Приведем эти критерии без доказательства.

Теорема 61.3 (критерий Рауса — Гурвица)¹. Для того чтобы все корни уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (61.5)$$

с вещественными коэффициентами имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы были положительными все главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрица Гурвица составляется следующим образом. На главной диагонали матрицы располагают последовательно коэффициенты a_j , $j = \overline{1, n}$, начиная с a_1 до a_n . Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, причем в число последних включается коэффициент $a_0 = 1$. Все недостающие элементы, т. е. коэффициенты с индексами, большими n или меньшими 0, заменяются нулями.

Главные диагональные миноры матрицы Гурвица — это:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

¹ Раус Эдвард Джон (Routh E. J., 1831—1907), английский механик; Гурвиц Адольф (Hurwitz A., 1859—1919), немецкий математик.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Отметим здесь, что так как $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$, то последнее условие $\Delta_n > 0$ сводится к требованию $a_n > 0$.

Пример 61.4. Исследовать на устойчивость точку покоя $O(0,0,0,0,0)$ дифференциальной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_2 = x_3, & \dot{x}_3 = x_4, & \dot{x}_4 = x_5, \\ \dot{x}_5 = -3x_1 - 10x_2 - 4x_3 - 7x_4 - x_5. \end{cases} \quad (61.6)$$

Решение. Система (61.6) является линейной однородной системой с матрицей коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -10 & -4 & -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы A , как это легко проверить, записывается в виде

$$\lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0$$

и, значит, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 7$, $a_3 = 4$, $a_4 = 10$, $a_5 = 3$. А тогда

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \Delta_5 = 3 \cdot 8 = 24 > 0$$

и, таким образом, точка покоя $O(0,0,0,0,0)$ системы (61.6) устойчива по Ляпунову асимптотически.

Теорема 61.4 (критерий Льенара — Шипара¹). Для того чтобы все корни уравнения (61.5) имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты a_j , $j = \overline{1, n}$, были положительны и чтобы имели место детерминантные неравенства $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0, \dots$

Так, например, применяя критерий Льенара — Шипара к системе (61.6), достаточно проверить лишь выполнимость неравенств $\Delta_4 > 0$, $\Delta_2 > 0$, которые и имеют место.

§ 62. ОРБИТАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ ЗАМКНУТЫХ ТРАЕКТОРИЙ АВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЕРНЫМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ. ПРОБЛЕМА ИЗОХРОННОСТИ

Изучая периодические решения двумерных автономных систем

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \quad (52.1)$$

следует учитывать, что имеется существенное различие между периодическими решениями, которым на фазовой плоскости соответствует континуум замкнутых траекторий, вложенных друг в друга и сплошь заполняющих некоторую область (и что возможно как в случае линейных, так и в случае нелинейных дифференциальных уравнений движения), и периодическими решениями, которым на фазовой плоскости соответствует изолированная замкнутая траектория — предельный цикл (и что возможно только в случае нелинейных дифференциальных уравнений).

В § 51 дано строгое определение предельного цикла и отмечено, что предельные циклы бывают (орбитально) устойчивые, (орбитально) неустойчивые и (орбитально) полуустойчивые.

Определим строго понятие «орбитальная устойчивость».

Определение 62.1. Траектория γ дифференциальной системы (52.1) называется *орбитально устойчивой*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что всякая положительная полутраектория, начинающаяся в δ -окрестности траектории γ , содержится в ε -окрестности траектории γ .

Таким образом, суть орбитальной устойчивости заключается в том, что при малых изменениях начальных данных изображающая точка переходит с одной траектории на другую, но сколь угодно близко лежащую к первоначально рассматриваемой.

¹ Льенар Альфред Мария (Liénard A. M., 1869—1958), французский математик; Шипар Альфред Анри (Chipart A. H., 1871—1941), французский механик.

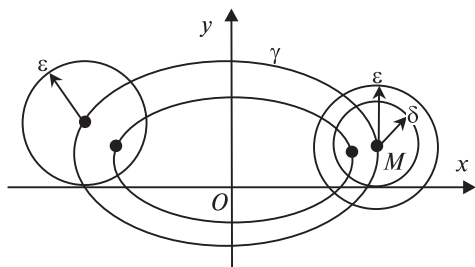


Рис. 76. К определению устойчивости периодических решений по Ляпунову

вложенных друг в друга и сплошь заполняющих некоторую область. В общем случае период обхода изображающих точек по разным траекториям различен. В геометрической интерпретации это означает, что две близкие друг к другу изображающие точки, начавшие в некоторый момент времени $t = t_0$ свое движение, например, с оси Ox , с течением времени разойдутся на некоторое конечное расстояние. Однако может случиться и так, что с течением времени указанные точки и не разойдутся. Чтобы различать эти две возможности, вводится понятие *устойчивости по Ляпунову периодических решений*. Суть его в следующем.

Если по данной сколь угодно малой ε -окрестности движущейся по замкнутой траектории γ точки M (рис. 76) можно указать такую движущуюся $\delta(\varepsilon)$ -окрестность той же точки M , что всякая изображающая точка, лежащая в начальный момент времени в $\delta(\varepsilon)$ -окрестности, с течением времени никогда не выйдет из ε -окрестности, то периодическое решение, соответствующее траектории γ , называют *устойчивым по Ляпунову*.

Если периодическое решение не является устойчивым по Ляпунову, то его называют *неустойчивым по Ляпунову*.

С понятием устойчивости по Ляпунову периодических решений тесно связано понятие *изохронности* периодических и аperiodических колебаний.

Чтобы определить это понятие, рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = \lambda x - y - P(x, y), \quad \dot{y} = x + \lambda y + Q(x, y), \quad (62.1)$$

где λ — некоторая постоянная (которая может быть и равной нулю), а $P, Q: G \rightarrow \mathbb{R}$ — голоморфные в окрестности

$$G = \{(x, y) \mid |x| < r, |y| < r\}, \quad r \in \mathbb{R}^+,$$

начала координат $O(0, 0)$ фазовой плоскости функции, которые не содержат в своих разложениях в степенные ряды по переменным x и y свободных и линейных членов, т. е.

Другими словами, орбитальная устойчивость определяет близость траекторий как множеств.

З а м е ч а н и е 62.1. Обратим внимание на то, что орбитальная устойчивость замкнутой траектории и устойчивость замкнутой траектории по Ляпунову — это принципиально разные понятия.

Предположим, например, что система (52.1) имеет континуум замкнутых траекторий,

$$P(x, y) = \sum_{k+l=2}^{\infty} A_{k,l} x^k y^l \equiv \sum_{n=2}^{\infty} p_n(x, y),$$

$$Q(x, y) = \sum_{k+l=2}^{\infty} B_{k,l} x^k y^l \equiv \sum_{n=2}^{\infty} q_n(x, y).$$

Заметим, что к системе вида (62.1) линейным невырожденным преобразованием и изменением масштаба времени приводится любая вещественная голоморфная монодромная система вида (52.1) с комплексно-сопряженными корнями характеристического уравнения системы первого приближения.

В этом случае, учитывая, что *монодромная система* вида (52.1) — это система, имеющая особую точку $M(x_0, y_0)$, в окрестности которой каждая траектория с началом на гладкой, трансверсальной к векторному полю вне точки $M(x_0, y_0)$, дуге Γ возвращается на Γ , сделав виток вблизи точки $M(x_0, y_0)$, приходим к выводу, что система (62.1) — это канонический вид уравнений движения (52.1), описывающих в окрестности точки покоя либо периодические колебания, которым на фазовой плоскости соответствует состояние равновесия типа центра, либо затухающие колебания (при $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$), которым на фазовой плоскости соответствует состояние равновесия типа фокуса.

Имея теперь в виду, что дальше речь будет идти об изолированной особой точке системы (62.1), которая совпадает с началом координат $O(0,0)$ фазовой плоскости (что, конечно, не ограничивает общности рассуждений), предположим, что в начальный момент времени $t = t_0$ изображающие точки кривых центра или фокуса системы (62.1) лежат на одном и том же луче OA с началом в точке $O(0,0)$, составляющем с осью абсцисс Ox декартовой прямоугольной системы координат xOy угол φ_0 (рис. 77).

Определение 62.2. Система (62.1) называется *изохронной* в особой точке $O(0,0)$, если все изображающие точки, лежащие при $t = t_0$ на луче OA , начиная двигаться в момент времени $t = t_0$ по траекториям центра или фокуса системы (62.1), совершают каждый полный оборот за одно и то же время $T = 2\pi$.

Исследования по проблеме изохронности колебаний имеют прямое отношение, например, к задачам общей теории конструирования точных приборов, они связаны с теорией спусковых регуляторов скорости. Свойство изохронности колебаний существенно используется в современных часах при

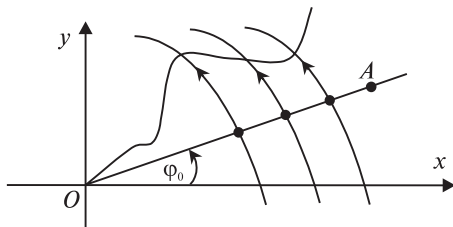


Рис. 77. К определению изохронности

конструировании одного из узлов часов — осциллятора свободных колебаний. Важный факт здесь — следующий: *в случае центра необходимым и достаточным условием устойчивости колебаний является изохронность этих колебаний.*

О других приложениях результатов исследований по проблеме изохронности и методах ее решения см., например, монографии [5, 7]. Мы же отметим лишь следующий результат.

Теорема 62.1. Изохронный центр и изохронный фокус системы (52.1) являются простыми особыми точками.

Доказательство. Предположим, что начало координат $O(0,0)$ системы (52.1) — сложный центр или фокус. Тогда если система (52.1) содержит линейные члены, то (см., например, [5]) ее характеристическое уравнение имеет два нулевых корня и линейным невырожденным преобразованием фазовых координат такая система приводится к виду

$$\dot{x} = y + R(x, y), \quad \dot{y} = S(x, y), \quad (62.2)$$

где R и S — голоморфные в окрестности $x = y = 0$ функции, разложение в ряды которых по степеням x и y не содержат свободных и линейных членов.

Если же система (52.1) не имеет линейных членов, то она записывается в виде

$$\dot{x} = R(x, y), \quad \dot{y} = S(x, y), \quad (62.3)$$

где функции R и S такие же, как и в предыдущем случае.

Перепишем системы (62.2) и (62.3) в полярных координатах $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Тогда соответственно имеем:

$$\dot{\rho} = (\sin \theta \cos \theta) \rho + \sum_{k=1}^{\infty} u(\theta) \rho^{k+1}, \quad \dot{\theta} = -\sin^2 \theta - \sum_{k=1}^{\infty} v(\theta) \rho^k, \quad (62.4)$$

и

$$\dot{\rho} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\theta) \rho^{k+1}, \quad \dot{\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(\theta) \rho^k, \quad (62.5)$$

где u_k , v_k , а также p_k , q_k — однородные относительно функций $\cos \theta$ и $\sin \theta$ полиномы степени $k + 2$.

Обратимся к системе (62.4). Если в этой системе сделать замену $\tau = -t$, то на изохронность такая замена не повлияет. А тогда из уравнения

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \sin^2 \theta + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(\theta) \rho^k$$

следует, что если задать некоторое $\varepsilon > 0$, то при ρ достаточно малом существуют в окрестности начала координат траектории, вдоль которых

$$\frac{d\theta}{d\tau} < \sin^2 \theta + \varepsilon^2 \quad \text{или} \quad \frac{d\theta}{\sin^2 \theta + \varepsilon^2} < d\tau.$$

Но поскольку

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta + \varepsilon^2} = \frac{2\pi}{\varepsilon \sqrt{1 + \varepsilon^2}},$$

приходим к выводу, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ время совершения траекторией одного витка вокруг особой точки неограниченно возрастает. Отсюда следует, что начало координат не может быть изохронной особой точкой системы (52.1).

Рассмотрим теперь случай системы (62.5). Из вида второго уравнения этой системы вытекает, что каким бы малым ни было $\varepsilon > 0$, всегда можно указать такую окрестность особой точки, в которой существуют траектории, вдоль которых $|\dot{\theta}| < \varepsilon$, т. е. существуют траектории, изображающие точки которых совершают виток вокруг начала координат за произвольной большой промежуток времени. Последнее означает, что система (52.1) не является изохронной в точке $O(0, 0)$. Теорема доказана.

Одним из примеров нелинейных изохронных систем с центром в начале координат (а значит, систем с устойчивыми по Ляпунову периодическими решениями) является система

$$\dot{x} = -\frac{y}{1-x}, \quad \dot{y} = \frac{x}{1-x},$$

что легко устанавливается переходом к полярным координатам и интегрированием полученной системы.

Следующий пример — это рассмотренная выше система (51.1), которая имеет в начале координат изохронный фокус ($\dot{\theta} = 1$) и устойчивый предельный цикл, заданный уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

§ 63. НЕАВТОНОМНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Метод функций Ляпунова может быть применен и для исследования на устойчивость тривиального решения неавтономного ДУ

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad f(t, 0) = 0, \quad (63.1)$$

где предполагается, что вектор-функция f непрерывно дифференцируема в некоторой области $\mathbb{D}: \|x\| < r, t \geq 0$.

Заметим, однако, что в данном случае обоснование теорем со знакопостоянными функциями не может опираться на теорию предельных множеств траекторий, поскольку эти множества в неавтономном случае, вообще говоря, не являются инвариантными.

Обращаясь к рассмотрению неавтономных ДУ вида (63.1), следует иметь в виду, что производная $\dot{V}$ непрерывно дифференцируемой функции $V: G \rightarrow \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^n$, в силу ДУ (63.1) задается уже равенством

$$\dot{V} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(t, x).$$

Приводимые выше теоремы Ляпунова об устойчивости (неустойчивости) точки покоя автономного ДУ переносятся и на случай ДУ (63.1) с некоторыми дополнительными ограничениями.

Доказательства формулируемых ниже теорем можно найти, например, в [8].

Теорема 63.1 (теорема А. М. Ляпунова об устойчивости). Если в области $\mathbb{D}^* : \|x\| < r$ задана определенно положительная функция V , производная $\dot{V}$ которой в силу ДУ (63.1) является функцией знакоотрицательной, то тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ ДУ (63.1) устойчиво по Ляпунову.

Теорема 63.2 (теорема А. М. Ляпунова об асимптотической устойчивости). Если в области $\mathbb{D}^* : \|x\| < r$ задана определенно положительная функция V такая, что

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(t, x) \leq -W(x),$$

где $W : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая непрерывная неотрицательная функция, равная нулю лишь в точке $x = 0$, то тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ ДУ (63.1) устойчиво по Ляпунову асимптотически.

Теорема 63.3 (теорема А. М. Ляпунова о неустойчивости). Если в области $\mathbb{D}^* : \|x\| < r$ задана определенно положительная функция V такая, что

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(t, x) \geq W(x),$$

где $W : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая непрерывная неотрицательная функция, равная нулю лишь в точке $x = 0$, то тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ ДУ (63.1) неустойчиво по Ляпунову.

В заключение отметим, что благодаря своей простоте и эффективности метод функций Ляпунова позволяет решать многие вопросы и не связанные с устойчивостью. Но, к сожалению, до сих пор не существует надежного алгоритма, который позволял бы строить функцию Ляпунова для произвольного нелинейного дифференциального уравнения. Усилия, направленные на решение этой проблемы для конкретных классов нелинейных ДУ, несомненно, окупятся как продвижениями в теоретических исследованиях, так и серьезными приложениями в различных областях науки и техники.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Пономарёв К. К. Составление дифференциальных уравнений : учеб. пособие. Минск, 1973.
2. Амелькин В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях. 3-е изд. М., 2009.
3. Богданов Ю. С., Мазаник С. А., Сыроид Ю. Б. Курс дифференциальных уравнений : учеб. пособие. Минск, 1996.
4. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : учебник. 4-е изд. М., 2000.
5. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А., Садовский А. П. Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск, 1982.
6. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
7. Амелькин В. В., Калитин Б. С. Нелинейные изохронные и импульсные колебания в динамических системах второго порядка. Минск, 2008.
8. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений : учебник. 7-е изд. М., 1984.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Бибиков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений : учеб. пособие / Ю. Н. Бибиков. М., 1991.

Боровских, А. В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям : учебник / А. В. Боровских, А. И. Перов. М.; Ижевск, 2004.

Еругин, Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. 3-е изд. Минск, 1979.

Понтрягин, Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учебник / Л. С. Понтрягин. 4-е изд. М., 1974.

Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений : учебник / В. В. Степанов. 18-е изд. М., 1959.

Тихонов, А. Н. Дифференциальные уравнения : учебник / А. Н. Тихонов, А. Б. Васильева, А. Г. Свешников. 3-е изд. М., 1998.

Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие / М. В. Федорюк. 2-е изд. М., 1985.

Филиппов, А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений : учебник / А. Ф. Филиппов. М., 2004.

Дополнительная

Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения : учеб. пособие / В. И. Арнольд. М., 1984.

Есипов, А. А. Практикум по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. А. Есипов, Л. И. Сазонов, В. И. Юдович. М., 2001.

Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. М., 1995.

Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. М., 1961.

Краснов, М. Л. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. 3-е изд. М., 1978.

Матвеев, Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Н. М. Матвеев. Минск, 1987.

Немыцкий, В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений / В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. 2-е изд. М.; Л., 1949.

Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения: Примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. 2-е изд. Минск, 1989.

Трикоми, Ф. Дифференциальные уравнения / Ф. Трикоми. М., 1962.

Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. Ижевск, 2000.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель Н. Х. 153
Адамар Ж. С. 106
Барбашин Е. А. 264
Бендиксон И. О. 234, 235
Бернулли Д. 34
Бессель Ф. В. 209
Больцано Б. 174
Вейерштрасс К. Т. В. 55, 105, 174, 203, 204
Вроньский Ю. М. 146
Гаусс К. Ф. 209
Гильберт Д. 236
Грин Д. 181, 184
Гронволл Т. 98, 100
Гурвиц А. 273
Даламбер Ж. Л. 44
Дирихле Л. П. Г. 127
Дюлак Г. 234
Жордан М. Э. К. 195
Жуковский Н. Е. 243
Клеро А. К. 116, 117
Коши О. Л. 16, 29, 86, 96, 122, 126, 160, 193, 252
Крамер Г. 159
Красовский Н. Н. 265, 267
Лагерр Э. Н. 209
Лагранж Ж. Л. 46, 105, 106, 115
Лаппо-Данилевский И. А. 194
Лежандр А. М. 209
Лейбниц Г. В. 9, 155, 163
Линделёф Э. Л. 48, 53
Липшиц Р. 45
Лиувилль Ж. 15, 30, 34, 153
Льенар А. М. 275
Ляпунов А. М. 250, 252, 257, 262, 265, 268, 276, 280
Монж Г. 115
Ньютон И. 155, 163
Остроградский М. В. 153
Пеано Д. 56, 59
Пикар Ш. Э. 48, 50, 51, 53
Пономарев К. К. 11
Пуанкаре Ж. А. 212, 216, 243
Пфафф И. Ф. 23, 25, 44
Раус Э. Д. 273
Риккати Я. Ф. 30, 34
Риман Г. Ф. Б. 44
Тейлор Б. 206
Фукс И. Л. 206, 209
Фурье Ж. Б. Ж. 213, 214, 216
Шипар А. А. 275
Штурм Ж. Ш. Ф. 174
Эйлер Л. 35, 43, 167, 209
Якоби К. Г. Я. 191

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	7
------------------	---

Глава 1

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-го ПОРЯДКА. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В КВАДРАТУРАХ

§ 1. Основные понятия, определения.....	9
§ 2. Задача Коши. Геометрический смысл обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка в нормальной форме.....	16
§ 3. Изоклины, линии точек перегиба скалярных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка в нормальной форме.....	18
§ 4. Различная запись скалярных обыкновенных дифферен- циальных уравнений 1-го порядка.....	21
§ 5. Примеры скалярных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка, интегрируемых в квадратурах.....	24
§ 6. Интегрирующий множитель.....	35
§ 7. Условие Липшица.....	45
§ 8. Теорема Пикара – Линделёфа.....	47
§ 9. Теорема Пикара – Линделёфа для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Теорема Пеано.....	53
§ 10. Продолжимость решений.....	56
§ 11. Особые решения.....	58
§ 12. Первые интегралы.....	65
§ 13. Редукция дифференциальных уравнений.....	71
§ 14. Общая теория интегрирующего множителя.....	72

§ 15. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка в симметрической форме.....	76
§ 16. Линейные однородные уравнения в частных производных 1-го порядка	82
§ 17. Линейные неоднородные уравнения в частных производных 1-го порядка	89
§ 18. Оценка расхождения решений	98
§ 19. Непрерывная зависимость решений от начальных данных...	100
§ 20. Непрерывная зависимость решений от параметра	102
§ 21. Дифференцируемость решений. Лемма Адамара.....	104
§ 22. Дифференцирование решений по параметрам и начальным данным	107
§ 23. Существование и единственность решений скалярных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка в общей форме.....	110
§ 24. Некоторые приемы интегрирования скалярных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка в общей форме.....	115
§ 25. Задача о траекториях	118

Глава 2

СКАЛЯРНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 26. Скалярные обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка в нормальной форме	121
§ 27. Простейшее скалярное обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка в нормальной форме и формула Коши	125
§ 28. Методы решения некоторых типов нелинейных скалярных обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков в нормальной и общей формах.....	128
§ 29. Три вида линейной зависимости.....	140
§ 30. Основные свойства решений линейных скалярных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка в нормальной форме. Определитель Вронского...	145
§ 31. Формула Абеля — Лиувилля — Остроградского	153

§ 32. Простейшие свойства линейных скалярных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка в нормальной форме	156
§ 33. Метод вариации произвольных постоянных. Метод Коши... 157	
§ 34. Линейные скалярные однородные обыкновенные дифференциальные уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами.....	162
§ 35. Уравнение Эйлера	167
§ 36. Построение частного решения скалярного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов.....	170
§ 37. Нули графиков решений линейных скалярных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка... 173	
§ 38. Краевые задачи для линейных скалярных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка	178

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-го ПОРЯДКА В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

§ 39. Основные свойства решений линейных векторных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка в нормальной форме. Определитель Вронского	185
§ 40. Матричное дифференциальное уравнение. Формула Якоби... 189	
§ 41. Простейшие свойства линейных векторных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка в нормальной форме. Метод вариации произвольных постоянных	192
§ 42. Структура фундаментальной матрицы линейной однородной системы с постоянными коэффициентами.....	194

Глава 4

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РЯДАМИ

§ 43. Теорема Коши о голоморфном решении.....	202
§ 44. Интегрирование линейных скалярных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков при помощи обобщенных степенных рядов.....	206

§ 45. Общие замечания об особых точках решений линейных дифференциальных уравнений	210
§ 46. Основное свойство периодических решений.....	211
§ 47. Ряды Фурье и периодические решения	213
§ 48. Метод малого параметра построения периодических решений	216

Глава 5

АВТОНОМНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 49. Общие свойства решений динамических систем, определяемых дифференциальными уравнениями.....	220
§ 50. Периодические решения и замкнутые траектории.....	225
§ 51. Предельное поведение траекторий.....	228
§ 52. Замкнутые траектории двумерных автономных систем	232
§ 53. Поведение траекторий линейной однородной системы дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами в окрестности изолированной особой точки....	236
§ 54. Поведение траекторий нелинейной двумерной системы дифференциальных уравнений в окрестности изолированной простой особой точки	243
§ 55. Поведение траекторий нелинейной двумерной системы дифференциальных уравнений в окрестности сложной особой точки. Проблема различения центра и фокуса	247

Глава 6

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

§ 56. Основные понятия и определения, связанные с устойчивостью решений и точек покоя. Функции Ляпунова.....	252
§ 57. Асимптотическая устойчивость точки покоя относительно инвариантного множества.....	259
§ 58. Теоремы об устойчивости по Ляпунову точки покоя	262
§ 59. Теоремы о неустойчивости точки покоя.....	267
§ 60. Устойчивость точки покоя линейного однородного дифференциального уравнения с постоянной матрицей коэффициентов.....	269
§ 61. Устойчивость по первому приближению.....	271

§ 62. Орбитальная устойчивость и устойчивость по Ляпунову замкнутых траекторий автономных дифференциальных уравнений с двумерным фазовым пространством. Проблема изохронности	275
§ 63. Неавтономные дифференциальные уравнения	279
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ	281
ЛИТЕРАТУРА	282
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ	283

Учебное издание

Классическое университетское издание

Амелькин Владимир Васильевич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор *А. Г. Купцова*

Художник обложки *Т. Ю. Таран*

Технический редактор *Т. К. Раманович*

Компьютерная верстка *О. Н. Сырель*

Корректор *М. А. Подголина*

Подписано в печать 21.09.2012. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,0. Уч.-изд. л. 16,93.

Тираж 120 экз. Заказ 768.

Белорусский государственный университет.

ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.

Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие

«Издательский центр Белорусского государственного университета».

ЛП № 02330/0494178 от 03.04.2009.

Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.