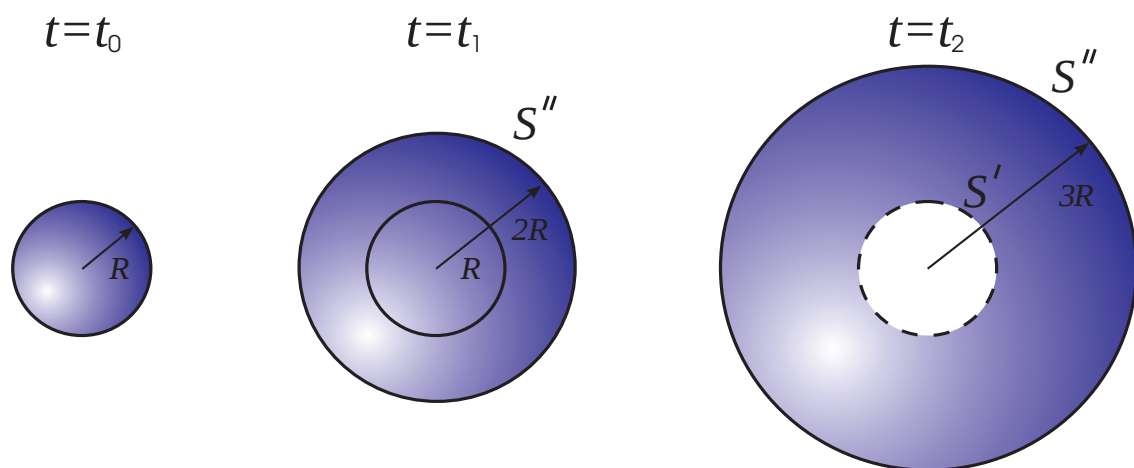


Г.В. Алексеев

КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ. Часть 1



Владивосток
Издательство Дальневосточного университета
2005

Под научной редакцией чл.-корр. РАН В.В. Васина

Рецензенты:

А.А. Буренин, доктор физ.-мат. наук, профессор;

Н.Н. Фролов, доктор физ.-мат. наук, профессор;

И.А. Шишмарев, доктор физ.-мат. наук, профессор

Алексеев Г.В.

А47 Классические методы математической физики. Учебное пособие. Часть 1. – Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2005. – 416 с. ISBN 5-7444-1177-1

Настоящая книга представляет собой первую часть учебного пособия по классическим методам математической физики, подготовленное автором для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений. В нем выводятся дифференциальные уравнения в частных производных, моделирующие различные физические процессы, и излагаются классические методы решений начально-краевых задач для основных уравнений математической физики. Написана на основе методологии математического моделирования. Большое внимание в ней уделяется как изложению строгих математических методов решения задач математической физики, так и физическому анализу полученных решений. Книга может быть полезной для математиков, физиков, а также специалистов, интересующихся прикладными вопросами теории дифференциальных уравнений с частными производными.

А 1704020000
180(03)-2005

ББК 22.311

© Г.В. Алексеев, 2005

© Издательство
Дальневосточного
университета, 2005

ISBN 5-7444-1177-1

Оглавление

Предисловие ко второму изданию	3
Введение	8
ГЛАВА 1. Сущность метода математического моделирования. Вывод классических математических моделей	15
§1. Основные этапы математического моделирования физических процессов	15
§2. Математические модели механики материальной точки. Второй закон Ньютона. Законы Кеплера	17
2.1. Простейшая модель движения тела	18
2.2. Усложненная модель движения тела	20
2.3. Дифференциальные уравнения небесной механики. Законы Кеплера как следствие закона тяготения Ньютона	22
§3. Математические модели гравитационного и электростатического поля. Уравнение Лапласа	29
3.1. Модели гравитационного поля	29
3.2. Модели электростатического поля	33
3.3. Постановка граничных условий	34
§4. Модели процессов переноса тепла и диффузии	37
4.1. Модели переноса тепла	37
4.2. Модели конвекции-диффузии вещества	43
§5. Математические модели движения жидкости и газов	46
5.1. Феноменологический подход к построению математических моделей движения жидкости	46
5.2. Общий закон сохранения	46
5.3. Модели движения идеальной жидкости	48
5.4. Модели движения вязкой жидкости	53
5.5. Модель безвихревого движения несжимаемой жидкости	56
5.6. Сила Кориолиса и элементы динамики океана	57
§6. Математическая модель распространения звука в жидкости	59
6.1. Модель распространения звука в однородной среде	59
6.2. Волновое уравнение для звукового давления. Постановка начальных и граничных условий	61
6.3. Потенциал звукового поля	63
6.4. Гармонические звуковые волны. Уравнение Гельмгольца	66

§7. Математические модели электромагнитного поля	69
7.1. Основные величины и уравнения, описывающие электромагнитные процессы	69
7.2. Векторное волновое уравнение в непроводящей среде. Уравнение диффузии в сильно проводящей среде . .	72
7.3. Граничные условия и условия сопряжения для электромагнитного поля	74
7.4. Гармонические электромагнитные поля	76
7.5. Статические электромагнитные поля. Модель электростатики. Электрическая краевая задача	77
7.6. Модель магнитостатики. Магнитная краевая задача . .	81
§8. Обзор других математических моделей	84
8.1. Модели колебательных процессов в сосредоточенных системах	84
8.2. Модели процессов колебания струны стержня мембраны	85
8.3. Модели электрических колебаний в проводах	88
8.4. Телеграфное уравнение	89
8.5. Уравнение Шредингера	90
8.6. Уравнение переноса излучения	91
ГЛАВА 2. Общие вопросы теории уравнений в частных производных	93
§1. Основные понятия теории уравнений с частными производными	93
1.1. Уравнения с частными производными и их решения . .	93
1.2. Типы уравнений второго порядка	96
1.3. Корректно и некорректно поставленные задачи	100
1.4. Теорема Коши-Ковалевской	105
1.5. Классическое и обобщенное решения	108
§2. Уравнения в частных производных 1-го порядка	109
2.1. Одномерное уравнение с постоянным коэффициентом. Условия Коши	110
2.2. Начально-краевая задача для одномерного неоднородного уравнения	119
2.3. Метод энергетических неравенств	125
2.4. Начально-краевая задача для двумерного уравнения переноса в прямоугольнике	129
2.5. Однородное стационарное уравнение переноса с двумя переменными	137
2.6. Квазилинейное уравнение первого порядка с двумя переменными	143
§3. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка	148
3.1. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	148

3.2. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными	150
§4. Постановка задачи Коши. Характеристики уравнения второго порядка	157
4.1. Постановка задачи Коши. Характеристическая поверхность	157
4.2. Примеры нахождения характеристик	162
ГЛАВА 3. Уравнения гиперболического типа и волновые процессы в пространстве	169
§1. Одномерное волновое уравнение (уравнение колебания струны). Формула Даламбера	169
1.1. Неограниченная струна. Формула Даламбера	169
1.2. Задача Коши для одномерного волнового уравнения	172
1.3. Устойчивость решения задачи Коши к исходным данным. Обобщенное решение	180
1.4. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения	182
1.5. Начально-краевая задача для однородного волнового уравнения на вещественной полуоси	184
§2. Волновое уравнение и бегущие волны. Обзор физических понятий	188
2.1. Бегущие волны	189
2.2. Гармонические волны. Уравнение Гельмгольца	194
2.3. Волны с дисперсией	195
§3. Однородное волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$	197
3.1. Трехмерное волновое уравнение. Решение задачи Коши. Формула Кирхгофа	197
3.2. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^2$. Решение задачи Коши для волнового уравнения методом спуска. Формула Пуассона	202
3.3. Физическая интерпретация решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$	204
3.4. Физическая интерпретация решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$	209
§4. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения	211
4.1. Задача Коши в $\mathbb{R}^3$	211
4.2. Задача Коши в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$	214
4.3. Качественный анализ решений неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$	215
§5. Некоторые общие вопросы теории распространения волн в пространстве $\mathbb{R}^n$	217
5.1. Теорема единственности решения задачи Коши для волнового уравнения	217

5.2. Область зависимости, область влияния и область определения для волнового уравнения	220
Литература	222

Введение

Настоящая книга представляет собой учебное руководство по методам математической физики, подготовленное для студентов физико-математических специальностей высших учебных заведений. Оно написано на основе лекций, которые автор неоднократно читал студентам Дальневосточного государственного университета, Дальневосточного технического университета и Дальневосточного технического рыбохозяйственного университета. В нем выводятся дифференциальные уравнения в частных производных, моделирующие различные физические процессы, и излагаются основные классические методы решений начально-краевых задач для указанных дифференциальных уравнений.

Отметим две особенности настоящего руководства. Первая связана с тем, что оно написано на основе методологии математического моделирования. Сущность этой методологии, как известно, заключается в сведении задачи изучения конкретного объекта, процесса или явления к задаче изучения его математического “образа” или математической модели и применении для исследования последней хорошо развитых к настоящему времени абстрактных математических методов, современных численных алгоритмов, ориентированных на использование ЭВМ, и новейших информационных технологий. Второй особенностью руководства, тесно связанной с первой, является то, что наряду с изложением ряда строгих математических методов решения рассматриваемых дифференциальных уравнений, большое внимание в книге уделяется и физическому анализу полученных решений. Поэтому изучение данного учебника будет представлять интерес как для математиков, которые всегда большое внимание уделяют строгому обоснованию построенных решений рассматриваемых задач, так и для прикладников. Последних, быть может, не всегда интересуют детали доказательства той или иной формулы и её строгое обоснование, но всегда интересуют те выводы о протекании изучаемого физического процесса, которые можно сделать на основе анализа полученных решений.

Использование метода математического моделирования при изучении физических процессов, безусловно, имеет ряд преимуществ по сравнению, например, с методом натурального эксперимента. К числу основных преимуществ метода относятся его безопасность, экологичность, относительная быстрота, универсальность, экономичность. Более того, исследование некоторых актуальных в настоящее время проблем возможно только на основе метода математического моделирования ввиду губительных последствий проведения натурального эксперимента. Достаточно вспомнить задачу огромной важности, поставленную перед учеными СССР и США в семидесятых годах. Она заключалась в изучении последствий локальной ядерной войны между воюющими державами, состоящей из ограниченного обмена удара-

ми по крупным городам с использованием малой части ядерного заряда порядка 100 мегатонн. До исследования этой задачи методом математического моделирования считалось, что основными поражающими факторами ядерного оружия являются проникающая радиация, световая вспышка и ударные волны, сопровождающие ядерные взрывы. Однако проведенные в обеих странах вычислительные эксперименты над соответствующими математическими моделями показали, что главным эффектом, сопровождающим локальный ядерный конфликт, будут не радиация и ударные волны, а быстрое и достаточно сильное охлаждение воздуха над континентами. В случае “100 мегатонного конфликта” падение температуры через месяц может составлять в некоторых районах свыше десяти градусов [45, с. 225]. Хорошо известно, что изменение средней температуры на Земле даже на 1–2 градуса может привести к катастрофическим последствиям для человечества. Тем самым проведенные вычислительные эксперименты наглядно продемонстрировали, что ядерная война будет сопровождаться глобальными катастрофическими изменениями климата, а следовательно, она не приемлема для человечества.

Вполне возможно, что к аналогичным выводам человечество пришло бы и в результате проведения натурного эксперимента, т. е. в результате проведения ядерных ударов. Однако извлекать уроки из сделанных выводов пришлось бы, по-видимому, лишь некоторым представителям малых народностей, живущих на крайнем Севере, которым, быть может, удалось бы перезимовать “ядерную зиму” и дождаться следующего потепления.

После заслуженного успеха в применении математического моделирования при решении задачи изучения последствий ядерной войны стало ясно, что в решении ни одной из актуальных задач, стоящих перед человечеством, нельзя добиться серьезного успеха без использования в той или иной степени идей математического моделирования. Освоение космоса и океана, овладение новыми источниками энергии, укрощение термоядерной реакции, экология и рациональное использование природных ресурсов, разработка новых лекарственных средств и продление активной жизни человека, очистка от загрязнений воздушного и водных бассейнов – вот далеко не полный список проблем, которые стоят и будут еще долго стоять перед человечеством. Решение этих задач невозможно себе представить без *метода математического моделирования*, являющегося без преувеличения величайшим изобретением человеческого разума.

К настоящему времени также стало ясно, что ряд традиционных курсов, читаемых в университетах, можно рассматривать с единых позиций метода математического моделирования. Особенно это относится к курсу “Уравнения математической физики”, входящему в обязательную программу ряда физико-математических специальностей. В этом можно убедиться из оглавления практически любого учебника по уравнениям математической

физики, где можно найти как вывод основных уравнений математической физики, так и применение абстрактных математических методов для нахождения решений краевых и начально-краевых задач для этих уравнений, а также физическую интерпретацию построенных решений. И то, и другое, и третье составляет основы методологии математического моделирования.

На основе идеологии математического моделирования написан и настоящий учебник. По своей структуре он состоит из семи глав. В первой главе приводится вывод математических моделей физических процессов, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производных. К ним относятся модели движения точки и обращения планет вокруг Солнца, модели гравитационного поля, процессов теплопроводности и диффузии, процессов движения жидкостей и газов, распространения звуковых и электромагнитных волн, распространения электромагнитных колебаний в проводниках, переноса излучения в пространстве и еще ряд других моделей.

Большое внимание в этой главе уделяется постановке и анализу дополнительных условий, служащих для обеспечения единственности решения рассматриваемой модели. В случае стационарных процессов, т. е. процессов, не зависящих от времени, к ним относятся краевые условия, задаваемые на границе рассматриваемой области, а также условия на бесконечности для неограниченной области. На примере уравнения Пуассона формулируются основные типы краевых задач: Дирихле, Неймана, третья краевая задача и смешанная краевая задача. При рассмотрении нестационарных процессов переноса тепла или вещества в § 4 либо распространения волн в § 6 вводятся начальные условия, служащие вместе с краевыми условиями для выделения единственного решения. При рассмотрении гармонических звуковых процессов в § 6 приводятся другие часто используемые в прикладной акустике задачи. К ним относятся: задача излучения и задача дифракции (или рассеяния). При рассмотрении электромагнитных процессов в § 7 наряду с введенными выше задачами рассматриваются еще две специальные задачи: электрическая и магнитная краевые задачи, играющие важную роль в электростатике и магнитостатике. Обсуждается характерная неединственность решений указанных задач, вызванная несвязностью границы рассматриваемой области в случае электрической задачи, и неодносвязностью области для магнитной задачи.

В гл. 2 излагаются элементы классификации уравнений в частных производных второго порядка и детально обсуждается фундаментальное понятие корректно поставленной математической задачи как задачи, решение которой существует, единственно и устойчиво, т. е. непрерывно зависит от исходных данных. Показывается, что все линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения второго порядка можно разбить на три типа: эллиптический, параболический и гиперболический. Простейшими пред-

ставителями каждого из этих типов уравнений являются: уравнение Пуассона, уравнение теплопроводности и волновое уравнение, имеющие соответственно вид

$$-\Delta u = f, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f.$$

Указанные уравнения принято называть основными уравнениями математической физики. Вводится фундаментальное понятие характеристики уравнения с частными производными второго порядка, изучается ее роль с точки зрения корректности постановки соответствующей задачи Коши, приводятся примеры характеристик. Отдельный параграф посвящается изучению свойств решений уравнений в частных производных 1-го порядка вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \text{gradu} = f, \quad \mathbf{a} \cdot \text{gradu} = f, \quad \mathbf{a} = (a, b, c),$$

описывающих перенос в среде какой-либо физической величины вследствие конвекции. Основное внимание в нём уделяется изложению метода характеристик решения начально-краевых задач и детальному обсуждению двух методов исследования единственности и устойчивости решений: методу энергетических неравенств и методу, основанному на принципе максимума.

В гл. 3 излагаются математические методы исследования волновых процессов и волновых уравнений в неограниченном пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$. Исследуются свойства частных решений волнового уравнения в $\mathbb{R}^n$, формулируется задача Коши, доказываются существование, единственность и устойчивость ее решения, выводятся явные формулы (Даламбера, Пуассона, Кирхгофа) для решения, вводится фундаментальное понятие волны, и на основе этого приводится детальный физический анализ полученных решений. Путём сравнения формул Кирхгофа и Пуассона делается вывод о значительном отличии в протекании волнового процесса в трёхмерном пространстве и на плоскости. В первом случае выполняется принцип Гюйгенса, согласно которому всякое начальное возмущение, локализованное в пространстве, вызывает в каждой точке пространства действие, локализованное по времени. При этом имеет место распространение волны с чётко выраженными передним и задним фронтами. В то же время на плоскости происходит нарушение указанного принципа. Дается математическое и физическое объяснение этому факту.

В гл. 4 волновое уравнение рассматривается в ограниченной области пространства $\mathbb{R}^n$, либо ее внешности, а для нахождения решений соответствующих начально-краевых задач применяется метод Фурье. Хорошо известно, что успех в применении метода Фурье основывается на возможности разделения переменных в дифференциальном уравнении и соответству-

ющих граничных условиях. С учетом этого волновое уравнение рассматривается лишь в канонических областях: отрезке вещественной оси, прямоугольнике либо круге на плоскости, а также во внешности шара. Приводится детальный физический анализ полученных решений. Единственность и устойчивость решений доказывается с помощью метода энергетических неравенств.

В гл. 5 излагаются основные свойства решений уравнения теплопроводности, являющегося простейшим представителем уравнений параболического типа. К ним относятся принцип максимума, бесконечная дифференцируемость решения однородного уравнения внутри рассматриваемой области и бесконечная скорость распространения возмущений. Излагаются два основных метода нахождения решений начально-краевых и начальных задач для уравнения теплопроводности: метод Фурье и метод интегральных преобразований. Единственность и устойчивость решений доказывается с помощью принципа максимума.

В гл. 6 излагаются элементы теории эллиптических уравнений и гармонических функций. Вводятся фундаментальные понятия гармонической функции и сингулярного решения оператора Лапласа в пространстве n измерений. Исследуются основные свойства сингулярного решения и устанавливается его физический смысл путем анализа потенциалов монополя, диполя и других точечных источников. Выводятся формулы для потенциалов полей, создаваемых источниками, распределенными по объему либо поверхности. Эти потенциалы, называемые соответственно объемным потенциалом либо потенциалом простого или двойного слоя, описываются кратными либо поверхностными интегралами, зависящими от параметра. Указанные интегралы являются несобственными в случае, когда значения параметра принадлежат области интегрирования. С учетом этого излагаются элементы теории кратных несобственных интегралов, зависящих от параметра. Вводится математический аппарат исследования гармонических функций, основанный на формулах Грина и интегральном представлении гладкой функции в виде суммы трех гармонических потенциалов: объемного, простого слоя и двойного слоя. С использованием его выводятся основные свойства гармонических функций, близкие к свойствам решений параболических уравнений: принцип максимума, бесконечная дифференцируемость и аналитичность внутри рассматриваемой области. Детально изучаются краевые задачи для уравнения Лапласа в круге и вне круга, а также в шаре и вне шара. С помощью метода Фурье находятся их решения, которые далее преобразуются к интегральным формулам Пуассона. На основе указанных формул выводятся оценки гармонической функции, заданной в неограниченной области, описывающие ее поведение на бесконечности. Формулируются четыре основные краевые задачи для уравнения Пуассона: задача Дирихле, задача Неймана, третья краевая задача и сме-

шанная краевая задача. С помощью принципа максимума и формул Грина доказываются теоремы единственности и устойчивости решений указанных задач. С использованием интегральной формулы Пуассона выводится ряд дополнительных свойств гармонических функций.

В гл. 7 излагаются элементы теории потенциала. В § 1 выводятся основные свойства объемного потенциала: доказывается его непрерывная дифференцируемость во всех точках пространства в случае ограниченной плотности и двухкратная непрерывная дифференцируемость для плотности с ограниченными производными. Показывается, что объемный потенциал является решением уравнения Пуассона, правая часть которого определяется плотностью источников поля. В § 2 приводятся основные свойства потенциалов простого и двойного слоя и, в частности, формулы скачка потенциала двойного слоя либо нормальных производных потенциала простого слоя при переходе через границу рассматриваемой области. В § 3 излагается сущность метода граничных интегральных уравнений, который далее применяется для исследования внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона. В § 4 излагается сущность метода функций Грина решения смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона. Устанавливаются основные свойства функций Грина и выводятся явные формулы решения в предположении его существования. Обсуждается физический смысл функций Грина. В § 5 кратко излагаются элементы теории интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

В заключение отметим, что настоящую книгу можно рассматривать как введение в общую теорию математического моделирования физических процессов. Действительно, каждый конкретный физический процесс можно считать состоящим из ряда элементарных физических процессов типа конвективного переноса, диффузии, распространения тепла, излучения звука или света и др. Более того, протекание конкретного физического процесса на малом интервале времени можно приближённо считать состоящим из последовательного протекания элементарных физических процессов, составляющих рассматриваемый процесс. На этом основан хорошо известный в вычислительной математике метод расщепления по физическим процессам [44]. Использование этого метода позволяет свести изучение сложного физического процесса к изучению составляющих его элементарных физических процессов типа конвективного переноса, диффузии, распространения тепла и излучения волн, чему фактически и посвящена настоящая книга. Конечно, при использовании такого подхода к изучению физических процессов возникает важный вопрос об обосновании данного подхода, т. е. об обосновании метода расщепления по физическим процессам. Последнее можно найти в учебниках по численным методам математической физики.

Отметим, что изучать данную книгу можно как последовательно по изложенной в оглавлении схеме, так и по другой схеме, которая быстрее при-

ведет читателя к его цели. Однако для полного понимания материала читателю следует предварительно изучить некоторые параграфы, имеющие общий характер. К их числу относятся Введение, § 1 гл. 1, а также § 1 и первые три пункта § 2 гл. 2. После освоения этих разделов читатель может перейти к изучению интересующей его модели в соответствующем параграфе гл. 1, где излагается ее вывод, а далее приступить к изучению той главы, в которой излагается необходимый ему математический аппарат.

Данное пособие написано для студентов и аспирантов университетов и при непосредственном их участии. Особенно большую помощь автору при подготовке и оформлении пособия оказали аспиранты, студенты и выпускники ДВГУ Адомавичюс Э.А., Панов Д.В., Синько В.Г., Смышляев А.Б., Терешко Д.А., Извекова Е.Р., Терентьев Л.Л., Бризицкий Р.В., Яровенко И.П. и Майзук Ю.Е. Очень ценными для автора были советы и критические замечания профессоров А.А. Буренина, П.Н. Вабищевича, Н.Н. Фролова, И.А. Шишмарева, член-корреспондентов РАН В.В. Васина, В.П. Коробейникова и академика А.А. Самарского. Первую главу книги внимательно прочитал профессор Лаборатории численного анализа Университета Пьера и Марии Кюри в Париже Gérard Tronell во время его пребывания в г. Владивостоке в августе 2000 г. Он сделал ряд ценных замечаний о сущности методологии математического моделирования и способствовал оказанию частичной финансовой поддержки, необходимой для подготовки и оформления данной книги. Определенная финансовая помощь на завершающем этапе подготовки книги была оказана Председателем Президиума ДВО РАН путем выделения в 2002 г. гранта по проекту “Методы математического моделирования в естественных науках”. Все расходы на издание данной книги, выигравшей в 2000 г. грант Первого конкурса грантов Ректора ДВГУ на публикацию учебно-методических изданий, взял Дальневосточный университет. Всем перечисленным товарищам и организациям автор выражает свою искреннюю признательность.

ГЛАВА 1. Сущность метода математического моделирования. Вывод классических математических моделей

§1. Сущность метода математического моделирования физических процессов

В этом параграфе мы изложим краткую схему применения метода математического моделирования для изучения различного рода процессов. Прежде чем излагать указанную схему, было бы весьма желательно дать строгое определение метода математического моделирования. Для этого, в свою очередь, необходимо точно определить такие термины как “метод”, “математический” и “модель”. Но дать точное определение указанным терминам весьма непросто. Об этом можно судить хотя бы по материалам заседания 3-го Европейского конгресса математиков в г. Барселоне (Испания) в июле 2000 г., где состоялся круглый стол по вопросу: что есть математика в наши дни. Быстро был сформулирован фундаментальный вопрос: что такое математика и что такое математик? Начался оживленный обмен мнениями между участниками круглого стола, однако они так и не смогли прийти к единому мнению и решить проблему строгого определения “математика”. Представляет также значительные трудности определить понятия “модель”, “процесс” и т.д. Например, при моделировании процессов распространения тепла в среде приходится оперировать с понятием “температура”. Дать строгое математическое определение этого термина вряд ли возможно.

Эти факты говорят о специфических сложностях в развитии науки о математическом моделировании различного рода процессов и явлений. Указанные сложности связаны с тем, что при применении метода математического моделирования исследователю приходится оперировать с двумя типами понятий. К первому относятся чисто математические понятия, такие как дифференциальное либо интегральное уравнение, система линейных алгебраических уравнений, решение дифференциального уравнения и т. п., т. е. те понятия, которые могут быть строго определены математически. Ко второму типу относятся всякого рода физические, биологические, химические и другие термины, не все из которых поддаются строгому математическому определению.

Использование указанных понятий вызывает определенные трудности у студентов-математиков, для которых излагаемые на первых двух курсах математические дисциплины основывались на введении некоторого количества точных определений, аксиом и последующем построении соответствующей теории на основе законов математической логики. Для физиков,

в свою очередь, особую трудность вызывает то обстоятельство, что для изучения рассматриваемого процесса или явления им приходится привлекать точные математические объекты, поведение которых подчиняется строгим законам математики. Последнее даже может находиться в противоречии с наглядным или интуитивным представлением о рассматриваемом процессе или явлении.

Ясно, что указанные сложности носят скорее общенаучный либо методологический характер. Не имея возможности обсуждать в данной книге указанные вопросы, условимся ниже не касаться вопроса о строгом математическом определении используемых физических понятий так же, как и понятий “модель”, “процесс” и др., понимая под ними общепринятые в “житейском” смысле термины, известные, например, со средней школы.

Перейдем теперь к описанию сущности метода математического моделирования и изложению краткой схемы применения этого метода. Прежде отметим, что обычно исследуется не сам реальный физический процесс, а некоторая его *физическая модель* (идеальный процесс), от которой требуется, чтобы она сохраняла основные черты рассматриваемого процесса и в то же время была настолько простой, чтобы поддавалась изучению имеющимися математическими методами. При построении математической модели, описывающей указанный идеальный процесс, можно выделить следующие основные этапы.

1. Выбираются величины $u, v, \dots$, характеризующие процесс. Как правило, эти величины зависят от точек $\mathbf{x}$ области D , где рассматривается процесс, и времени t .

2. На основании законов, которым подчиняется идеальный процесс, выводится система математических соотношений относительно величин $u, v, \dots$, состоящая обычно из дифференциальных, интегральных и функциональных уравнений (или неравенств) и называемая *математической моделью* рассматриваемого физического процесса.

3. Так как система дифференциальных уравнений, как правило, имеет бесчисленное множество решений, то ее недостаточно для описания конкретного процесса. Поэтому вводятся некоторые дополнительные условия, характеризующие процесс. Такими условиями чаще всего являются *граничные* (краевые) условия, т. е. условия, заданные на границе области D , и *начальные* условия, относящиеся к моменту времени, с которого начинается процесс. Совокупность математической модели и дополнительных условий представляет собой математическую формулировку рассматриваемой физической задачи и называется *задачей математической физики*.

4. Исследуется *корректность* указанной краевой задачи, т. е. устанавливаются условия на исходные данные, при которых ее решение *существует, единственно и устойчиво*.

5. С использованием математических методов, аналитических или чис-

ленных, ориентированных на ЭВМ, находится искомое решение – точно или приближенно.

6. На основе анализа свойств полученного решения делаются выводы о свойствах физического процесса (в рамках рассматриваемой модели).

Ниже мы применим приведенную схему при выводе математических моделей ряда важнейших физических процессов, таких как диффузия, распространение тепла, движение жидкостей и газов, излучение волн и др.

Обозначим через $\mathbb{R}^3$ трехмерное аффинно-евклидово пространство. Через $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$ будем обозначать точки $\mathbb{R}^3$, либо их радиус-векторы относительно начала координат. Наряду с пространством $\mathbb{R}^3$ будем также рассматривать плоскость $\mathbb{R}^2$ либо вещественную ось $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, а также произвольное n -мерное пространство $\mathbb{R}^n$. Важную роль при выводе указанных моделей будет играть следующая лемма.

ЛЕММА 1.1. Пусть D – произвольная область с границей S , и пусть непрерывная в D функция ψ обладает тем свойством, что для любой ограниченной (кубируемой) области $\Omega \subset D$

$$\int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.1)$$

Тогда $\psi(\mathbf{x}) \equiv 0$ в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, что $\psi(\mathbf{x}) \not\equiv 0$. Тогда найдется такая точка $\mathbf{x}_0 \in D$, что $\psi(\mathbf{x}_0) = \varepsilon \neq 0$. Пусть, например, $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности ψ существует такая окрестность $U_\delta = U_\delta(\mathbf{x}_0)$ с центром в точке $\mathbf{x}_0$ радиуса δ , что $\psi(\mathbf{x}) \geq \varepsilon/2 \forall \mathbf{x} \in U_\delta$. Полагая $\Omega = U_\delta(\mathbf{x}_0)$, имеем в силу (1.1):

$$0 = \int_{U_\delta} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq \frac{\varepsilon}{2} \int_{U_\delta} d\mathbf{x} = \frac{2\varepsilon}{3} \pi \delta^3 > 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. ■

§2. Математические модели механики материальной точки. Второй закон Ньютона. Законы Кеплера

С построением математических моделей мы встречались еще в школе, решая задачи по физике. В них обычно задается некоторая физическая система и описываются условия, в которых она находится. При этом необходимо сделать предположение о возможной идеализации этой системы (например, некоторое реальное тело рассматривается в виде материальной точки), определить физические законы, которые нужно принять во внимание при ее изучении, и записать их в виде математических уравнений. В

результате получим математическую модель рассматриваемой физической системы.

2.1. Простейшая модель движения тела. В этом и следующем пунктах, написанных по материалам [55, гл. 1], мы применим метод математического моделирования для решения следующей задачи механики: *телу массы m на Земле сообщена начальная скорость $\mathbf{v}_0$, направленная под углом α к ее поверхности; требуется найти траекторию движения тела и вычислить расстояние между ее начальной и конечной точками.* Как и в [55], будем предполагать, что речь идет о камне, брошенном с помощью катапульты. Это уточнение определяет характерные размеры тела, его массу и возможную начальную скорость. Построим для данного случая математическую модель, основанную на следующих предположениях:

- 1) Земля – инерциальная система отсчета.
- 2) Ускорение свободного падения g постоянно.
- 3) Кривизной Земли можно пренебречь, считая ее плоской и расположенной, например, на трех китах.
- 4) Камень моделируется материальной точкой массы m , вылетающей с уровня Земли, причем действием воздуха на движущийся камень можно пренебречь.

Введем систему координат x, y с центром в месте вылета камня из катапульты, причем ось x направим горизонтально в сторону движения камня, а ось y – вертикально вверх. При сделанных предположениях движение камня будет описываться известным из школьного курса физики вторым законом Ньютона, который мы запишем в виде

$$m\mathbf{a} \equiv m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}. \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ – положение камня в плоскости x, y в момент t , где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – орты введенной (плоской) декартовой системы координат, $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ – ускорение движущейся точки, $\mathbf{f}$ – вектор внешних сил и $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$ обозначает вторую производную по времени. Поскольку при наших предположениях на камень при его движении действует только массовая сила, то вектор $\mathbf{f}$ определяется формулой

$$\mathbf{f} = m\mathbf{g}, \quad (2.2)$$

где $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$ – вектор ускорения свободного падения. Подставляя (2.2) в уравнение (2.1), записанное в проекциях на оси координат, и добавляя начальные условия, приходим к искомой математической модели рассматриваемого процесса, имеющей вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad v_0 = |\mathbf{v}_0|, \\ m\ddot{y} &= -mg, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Математически полученная модель представляет собой задачу Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами, которая элементарно решается, а ее решение, как легко проверить, имеет вид

$$x = tv_0 \cos \alpha, \quad y = tv_0 \sin \alpha - gt^2/2. \quad (2.4)$$

Физически соотношения (2.4) означают, что проекция камня на ось x будет двигаться равномерно со скоростью $v_x = v_0 \cos \alpha$, тогда как проекция на ось y будет двигаться с постоянным ускорением $a_y = -g$, имея своей начальной скоростью $v_y = v_0 \sin \alpha$.

Выражая из первого уравнения в (2.4) время t через x и подставляя во второе уравнение (2.4), получаем искомое уравнение траектории камня. Оно имеет вид квадратичной параболы (см. рис. 2.1):

$$y = xtg\alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (2.5)$$

Указанная парабола (см. рис. 2.1), пересекает ось x в двух точках: $x = 0$ и $x = l$, где

$$l = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha tg\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (2.6)$$

Первая точка $x = 0$ является начальной точкой траектории, в ней камень вылетает из катапульты. Вторая точка соответствует месту падения камня на землю. Формула (2.6) и определяет в рамках принятой модели искомое расстояние l . Эта формула хорошо известна из школьного учебника по физике, где она выводится и подробно обсуждается.

В прикладных задачах построение математической модели представляет собой один из наиболее сложных и ответственных этапов. Трудность данного этапа состоит в том, что он требует соединения математических и специальных знаний. Опыт показывает, что во многих случаях правильный выбор модели означает половину решения рассматриваемой задачи.

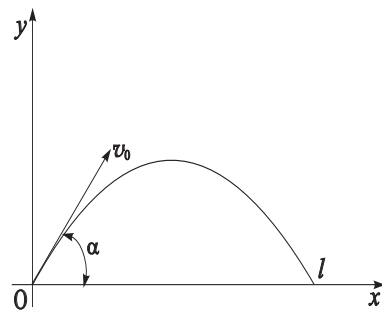


Рис. 2.1.

Более сложная ситуация возникает тогда, когда наших знаний об изучаемом объекте недостаточно. В этом случае при построении математической модели приходится делать дополнительные предположения, которые носят характер *гипотез*. Выводы, полученные в результате исследования такой *гипотетической модели*, носят для изучаемого объекта условный характер. Они справедливы для него настолько, насколько правильны исходные предположения. Для их проверки

необходимо сопоставить результаты исследования модели со всей имеющейся информацией об изучаемом объекте. Степень близости расчетных и экспериментальных данных позволяет судить о качестве гипотетической модели, о справедливости или ошибочности исходных предположений. Таким образом, вопрос применения некоторой математической модели к изучению рассматриваемого объекта не является чисто математическим вопросом и не может быть решен лишь математическими методами. Основным критерием истинности является эксперимент, практика в самом широком смысле этого слова. Критерий практики позволяет сравнить различные гипотетические модели и выбрать из них такую, которая является наиболее простой и в то же время в рамках требуемой точности правильно передает свойства изучаемого объекта.

2.2. Усложненная модель движения тела. Вновь обратимся к задаче нахождения траектории полета камня, выбрасываемого катапультией, и продолжим ее исследование. В п. 2.1 мы построили математическую модель движения камня, основанную на четырех упрощающих предположениях, и получили исходную формулу (2.6) для дальности броска. Теперь нам необходимо оценить точность этой формулы и установить пределы ее применимости. Для такого анализа нет нужды строить катапультию по сохранившимся чертежам и проводить соответствующие натурные эксперименты. Это объясняется тем, что по указанному материалу накоплен огромный экспериментальный и теоретический материал, так что нужно только умело воспользоваться им для анализа поставленной задачи.

Предположим, что катапульта может метать камни размером до 0.2 м на расстояние до 100 м, для чего она должна сообщить им начальную скорость порядка 30 м/с. При этом камень поднимется на высоту 20–30 м и пробудет в воздухе около 5 с. В этих условиях первые три предположения выглядят совершенно оправданными и нам остается только проанализировать справедливость четвертого предположения о влиянии воздуха.

Касаясь вопроса о правомерности этого предположения, отметим, что согласно данным многочисленных опытов на всякое тело, движущееся в воздухе, последний действует с некоторой силой $\mathbf{F}$. Ее модуль $F = |\mathbf{F}|$ и направление зависят от формы тела и скорости движения. Указанную силу $\mathbf{F}$ можно разложить на две составляющие: параллельную F_r и перпендикулярную $F_\perp$ скорости движения $\mathbf{v}$. Перпендикулярная составляющая возникает только при *асимметрии* тела по отношению к направлению движения. Наиболее характерным ее проявлением является *подъемная сила*, действующая на крыло самолета при его полете, на чем основана вся авиация. Для того, чтобы эта сила могла оторвать самолет от земли и поддерживать его в воздухе, крылу придают специальную форму и располагают его под определенным углом атаки к набегающему воздушному потоку (см. рис. 2.2).

Однако для камня, форма которого близка к сферической, перпендикулярная составляющая $F_{\perp}$ силы $\mathbf{F}$ мала, и ею можно пренебречь (для шара указанная сила в точности равна нулю в силу его симметричности).

Параллельная составляющая F_r силы $\mathbf{F}$ возникает при движении любого тела. Она направлена в сторону, противоположную движению, и стремится затормозить тело, ее называют *силой лобового сопротивления*. Таким образом, в рассматриваемом нами случае можно считать, что

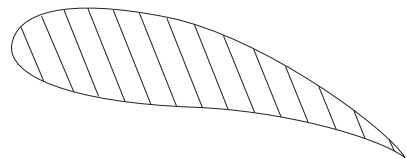


Рис. 2.2.

$$F \approx F_r. \quad (2.7)$$

Вопрос о конкретном выражении для силы F_r является достаточно сложным и требует привлечения законов аэрогидродинамики. Не имея здесь возможности останавливаться на приведении законов аэрогидродинамики, которые, к слову сказать, также выводятся путем математического моделирования процессов движения тел в сплошных жидких или газообразных средах (см. об этом в § 5), отметим, что указанную формулу можно записать в следующем виде

$$F_r = a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \dots \quad (2.8)$$

Здесь $v = |\mathbf{v}|$ – модуль скорости $\mathbf{v}$, а $a_1, a_2, \dots$ – коэффициенты, которые зависят от ряда факторов: формы камня, параметров воздуха и т. д. Часто вместо формулы (2.8) пользуются более простой формулой [55, с. 16]

$$F_r = CS \frac{\rho v^2}{2}, \quad (2.9)$$

где S – площадь поперечного сечения тела, ρ – плотность воздуха, C – безразмерный множитель, называемый *коэффициентом лобового сопротивления*. Указанный коэффициент зависит от формы тела и безразмерной характеристики Re процесса обтекания, называемой *числом Рейнольдса*: $C = C(Re)$, $Re = v\rho d/\mu$. Здесь d – характерный размер тела, ρ и μ – плотность и вязкость воздуха. Нетрудно проверить, что Re – безразмерная величина, но на этом мы не будем останавливаться.

Оценивая величину Re в интересующем нас случае, когда $\rho = 1.3 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м·с)}$, $v = 30 \text{ м/с}$, $d = 0.2 \text{ м}$, имеем

$$Re = \frac{30 \cdot 1.3 \cdot 0.2}{1.7 \cdot 10^{-5}} \approx 4.6 \cdot 10^5. \quad (2.10)$$

Эксперименты и теоретические исследования показывают, что для шара в широком диапазоне $3 \cdot 10^5 \leq Re \leq 7 \cdot 10^6$ изменения числа Рейнольдса, содержащем значение из (2.10), коэффициент C очень слабо зависит от

своего аргумента, и его можно считать постоянным и равным 0.15: $C \approx 0.15$.

Предполагая, что форма камня близка к форме шара радиуса R , и полагая в (2.9) $S = \pi R^2$, приходим к следующей простой формуле для модуля лобового сопротивления шара в указанном диапазоне изменения числа Re :

$$F_r = \frac{C\pi}{2} R^2 \rho v^2. \quad (2.11)$$

Из этой формулы, в частности, вытекает, что зависимость силы лобового сопротивления от скорости носит квадратичный характер.

Для того, чтобы оценить влияние сопротивления воздуха на характер движения камня, сравним его с основной силой в рассматриваемой задаче – силой тяжести P , действующей вертикально вниз. В случае, когда форма камня является сферической, сила P определяется формулой $P = mg = (4\pi/3)R^3\rho_0 g$. Здесь $\rho_0 = 2.3 \cdot 10^3$ кг/м³ – плотность камня. Заменим в (2.11) v^2 на lg (приблизленно) и составим отношение F_r/P . Получим

$$\frac{F_r}{P} \approx \frac{C\pi R^2 \rho l g / 2}{4\pi R^3 \rho_0 g / 3} = \frac{3}{8} \cdot \frac{C \rho l}{\rho_0 R}.$$

При $l = 100$ м, $R = 0,1$ м и $C \approx 0.15$ получаем $F_r/P \approx 0.03$.

Обозначим через Δl абсолютную погрешность, которую мы допускаем в определении дальности броска l , если пренебречь сопротивлением воздуха. При малом сопротивлении воздуха ($F_r/P \ll 1$) относительную погрешность $\Delta l/l$ можно считать пропорциональной F_r/P с коэффициентом пропорциональности порядка единицы, т. е. в рассматриваемом диапазоне изменения параметров задачи получаем $\Delta l/l \approx 3\%$ и, следовательно, $\Delta l = (2 - 3)$ м. Если не требуется высокой точности, то такая ошибка допустима, так что применение модели, полученной при выполнении условий 1)–4), оправдано. В противном случае ее следует заменить более сложной моделью, учитывающей трение воздуха.

2.3. Дифференциальные уравнения небесной механики. Законы Кеплера как следствие закона тяготения Ньютона. В рассмотренной в п. 2.1 задаче векторное дифференциальное уравнение движения можно было разделить на отдельные скалярные уравнения. Таким образом, каждая координата удовлетворяла своему отдельному дифференциальному уравнению, решая которое мы определили эту координату как функцию времени. Теперь же поставим и решим задачу другого типа, когда систему уравнений движения уже не удастся разбить простым путем на отдельные уравнения для каждой из искоемых функций, и интегрирование такой системы требует более сложных вычислений. В качестве указанной задачи рассмотрим актуальную для человечества задачу определения траектории

(или, как говорят астрономы, *орбиты*) движения планеты около Солнца. Данную задачу будем рассматривать при следующих предположениях:

1) Солнце имеет вид материальной точки массы μ , расположенной в начале декартовой системы координат.

2) Движущаяся планета моделируется материальной точкой массы m , которая в момент $t = 0$ занимает положение $\mathbf{r}_0$ с $r_0 = |\mathbf{r}_0| > 0$, имея начальную скорость $\mathbf{v}_0$.

3) Тело массы μ притягивает материальную точку массы m с силой $\mathbf{f}$, определяемой формулой

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\gamma\mu m \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.12)$$

Здесь γ – гравитационная постоянная (см. ее значение в § 3), $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – положение точки (планеты) в момент времени t , где $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ – единичные орты декартовой системы координат в $\mathbb{R}^3$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

В механике указанная сила называется *центральной*. В результате мы пришли к хорошо известной в механике задаче нахождения движения материальной точки (планеты) массы m под действием центрального силового поля (2.12). Для решения этой задачи опять выберем в качестве основной математической модели второй закон Ньютона (2.1), который с учетом (2.12) перепишем в виде:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \equiv -\frac{\gamma\mu m}{r^3}\mathbf{r} \quad \text{или} \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\gamma\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.13)$$

В проекциях на оси координат уравнение (2.13) принимает вид

$$\ddot{x} = -\gamma\mu \frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\gamma\mu \frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\gamma\mu \frac{z}{r^3}. \quad (2.14)$$

Подчеркнем, что в отличие от (2.3) система (2.14) состоит из трех *нелинейных* обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Хорошо известно, что нахождение точных решений систем нелинейных уравнений в явном виде возможно только в некоторых исключительных случаях. К счастью, в данной ситуации мы имеем тот исключительный случай, когда это возможно. Но для того, чтобы найти точное решение системы (2.14), придется провести ряд математических выкладок.

Мы начнем с того, что выведем в качестве следствия модели (2.13) дифференциальное уравнение первого порядка, выражающее закон сохранения энергии. Для получения этого уравнения умножим первое уравнение в (2.14) на $\dot{x}$, второе – на $\dot{y}$, третье уравнение – на $\dot{z}$ и сложим полученные соотношения. Учитывая соотношения $\dot{x}\ddot{x} = (1/2)d/dt(\dot{x}^2)$, $x\dot{x} = (1/2)d/dt(x^2)$ и аналогичные для y и z , получим после умножения на m

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -\gamma\mu m \frac{1}{2} \frac{1}{r^3} \frac{d}{dt}(r^2) = -\gamma\mu m \frac{\dot{r}}{r^2} = \gamma\mu m \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right). \quad (2.15)$$

Интегрируя (2.15), будем иметь

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\gamma\mu t}{r} = C. \quad (2.16)$$

Здесь C – некоторая константа, определяемая, например, из начальных условий. Левая часть (2.16) представляет собой сумму двух слагаемых: первое слагаемое $(1/2)m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ в точности равно *кинетической энергии* движущейся точки, второе слагаемое $-\gamma\mu t/r$ имеет смысл *потенциальной энергии*. Более подробно о физическом содержании этих понятий можно прочесть, например, в [30]. Равенство (2.16) выражает закон сохранения энергии, а именно: *при движении материальной точки в центральном поле сил полная энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, остается постоянной*.

Кроме (2.16), из уравнений (2.14) можно вывести еще три уравнения 1-го порядка. Они имеют вид

$$y\dot{z} - z\dot{y} = C_1, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = C_2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = C_3. \quad (2.17)$$

Здесь C_1 , C_2 и C_3 – произвольные константы. Для вывода, например, первого уравнения (2.17) умножим третье уравнение системы (2.14) на y , второе – на z и вычтем одно из другого. Получим $y\ddot{z} - z\ddot{y} = 0$, или $d/dt(y\dot{z} - z\dot{y}) = 0 \implies y\dot{z} - z\dot{y} = C_1$. Не умаляя общности, систему координат можно выбрать так, чтобы при $t = 0$ материальная точка находилась в плоскости xy и чтобы ее начальная скорость лежала в той же плоскости, т. е. чтобы в дополнение к 1)–3) выполнялись условия

$$4) \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0.$$

В таком случае будем иметь $(y\dot{z} - z\dot{y})|_{t=0} = 0$, $(z\dot{x} - x\dot{z})|_{t=0} = 0$. С учетом этого и (2.17) приходим к соотношениям

$$y\dot{z} - z\dot{y} = 0, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = 0, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = k \equiv \text{const} \quad \forall t. \quad (2.18)$$

Из уравнений (2.18) и предположения 4) вытекает, что процесс движения точки происходит в плоскости $z = 0$. Действительно, поскольку $z(0) = 0$, то в силу предположения 2) либо $x(0) \neq 0$, либо $y(0) \neq 0$. Пусть, например, $x(0) \neq 0$. Тогда из равенства $z\dot{x} - x\dot{z} = 0$ вытекает, что

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{z}{x} \right) = \frac{\dot{z}x - z\dot{x}}{x^2} = 0 \implies z = ax, \quad a = \text{const}.$$

Но при $t = 0$ имеем $0 = z|_{t=0} = ax|_{t=0} = ax(0) \implies a = 0 \implies z = 0$. Это означает, что $z(t) \equiv 0$. В результате задача интегрирования уравнений (2.14) свелась к решению системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\gamma\mu t}{r} = C, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = k, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.19)$$

Для нахождения решения системы (2.19) введем полярные координаты r и θ с помощью формул $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Легко проверить, что $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$, $x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\theta}$. С учетом этого из (2.19) приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для переменных r и θ :

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\gamma\mu m}{r} = C, \quad r^2\dot{\theta} = k. \quad (2.20)$$

Как уже указывалось, первое уравнение в (2.20) выражает закон сохранения энергии. Выясним смысл второго уравнения. Хорошо известно [24], что выражение $(1/2)r^2\dot{\theta}$ равно производной по времени от площади сектора, описываемого радиус-вектором движущейся точки, т. е. равно скорости изменения площади этого сектора. В таком случае второе уравнение в (2.20) утверждает, что эта скорость постоянна. Этот результат получил название второго закона Кеплера или закона площадей: *радиус-вектор планеты, движущейся вокруг Солнца, заметает в равные промежутки времени равные площади*.

Если “постоянная площадей” k равна нулю, то $\dot{\theta} = 0$ и $\theta = \text{const}$. Этот случай отвечает движению материальной точки по прямой, проходящей через начало координат, и ниже не будет рассматриваться.

Займёмся теперь определением геометрической формы орбиты планеты. Для этого будем рассматривать r как функцию от θ . Из второго уравнения (2.20) выводим, что

$$\dot{\theta} = \frac{k}{r^2}, \quad \dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{r^2} \frac{dr}{d\theta}.$$

Подставляя эти соотношения в первое уравнение (2.20), приходим к следующему дифференциальному уравнению для функции $r = r(\theta)$, описывающей орбиту планеты при ее движении вокруг Солнца:

$$\frac{m}{2} \left\{ \frac{k^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{k^2}{r^2} \right\} - \frac{\gamma\mu m}{r} = C \Rightarrow \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = r^4 \left(\frac{2C}{mk^2} + \frac{2\gamma\mu}{k^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} \right). \quad (2.21)$$

Выражение в скобках в правой части (2.21) можно преобразовать так:

$$\frac{2C}{mk^2} + \frac{2\gamma\mu}{k^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} = - \left(\frac{1}{r} - \frac{\gamma\mu}{k^2} \right)^2 + \frac{\gamma^2\mu^2}{k^4} + \frac{2C}{mk^2} = - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{p^2},$$

где

$$\frac{1}{p} = \frac{\gamma\mu}{k^2}, \quad \varepsilon^2 = 1 + \frac{2Ck^2}{m\gamma^2\mu^2}. \quad (2.22)$$

Тогда дифференциальное уравнение (2.21) орбиты примет следующий вид

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^4 \left\{ \frac{\varepsilon^2}{p^2} - \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)^2 \right\}.$$

Оно упростится, если ввести вместо r новую неизвестную функцию u , где

$$u = \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}. \quad (2.23)$$

Новая искомая функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{p^2} - u^2 \quad \text{или} \quad \frac{du}{d\theta} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{p^2} - u^2}. \quad (2.24)$$

Это – обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Оно легко интегрируется, в результате чего имеем

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{du}{\sqrt{\varepsilon^2/p^2 - u^2}} = \arcsin \frac{pu}{\varepsilon}. \quad (2.25)$$

Здесь θ_0 – константа интегрирования. Ее можно выбрать произвольным образом, так как безразлично, от какого фиксированного радиус-вектора следует отсчитывать угол θ . Примем $\theta_0 = \pi/2$, так что значению $u = 0$ соответствует значение $\theta = \pi/2$. Тогда, взяв синус от (2.25), имеем с учетом (2.23), что

$$\begin{aligned} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\theta = \frac{pu}{\varepsilon} \Rightarrow u = -\frac{\varepsilon}{p}\cos\theta \Rightarrow \\ \frac{1}{r} - \frac{1}{p} &= -\frac{\varepsilon}{p}\cos\theta \Rightarrow r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Из аналитической геометрии известно [43, с. 173], что уравнение (2.26) представляет собой полярное уравнение кривой второго порядка, один из фокусов которой находится в начале координат. Полученный результат дает первый закон Кеплера: *планеты (и кометы) движутся по коническим сечениям, в одном из фокусов которых находится Солнце*. Хорошо известно, что существует три типа кривых второго порядка: эллипс, гипербола и парабола. Две возможные в силу первого закона Кеплера ситуации, когда планета движется по эллипсу или по гиперболе, изображены на рис. 2.3а и 2.3б.

Отметим, что величина $p = k^2/\gamma\mu$ называется *параметром конического сечения* или *фокальным параметром*; у эллипса и гиперболы параметр p связан с большой и малой полуосями a и b простой формулой $p = b^2/a$.

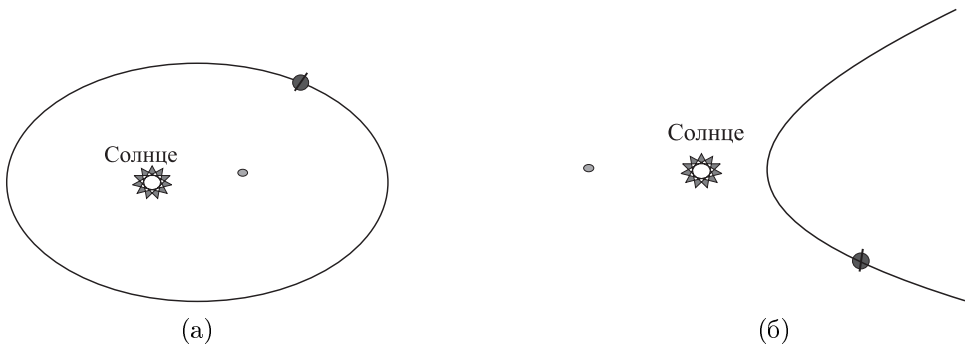


Рис. 2.3.

Величина $\varepsilon > 0$, определяемая второй формулой в (2.22), называется *эксцентриситетом*. Она определяет форму конического сечения, которое является эллипсом при $\varepsilon < 1$, параболой при $\varepsilon = 1$ и гиперболой при $\varepsilon > 1$. Из второго равенства в (2.22) сразу видно, что эти три различные возможности зависят от значений постоянной C , характеризующей энергию: орбита будет эллипсом, если $C < 0$, параболой, если $C = 0$, и гиперболой, если $C > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Отметим, что при $t = 0$ первое соотношение в (2.19) принимает вид

$$C = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{\gamma\mu m}{r_0}, \quad (2.27)$$

где $r_0 = r(0)$ – расстояние от точки (планеты) до центра (Солнца) в начальный момент времени, а $v_0 = v(0) = |\mathbf{v}(0)| = \sqrt{\dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0)}$. Поскольку C – абсолютная константа на всем временном интервале, определяющая вид орбиты (являющейся эллипсом, параболой или гиперболой), то из (2.27) следует, что вид орбиты зависит лишь от начального расстояния r_0 планеты до Солнца и модуля v_0 ее начальной скорости $\mathbf{v}(0)$, но не зависит от направления $\mathbf{v}(0)$ (при используемом нами предположении, что $k \neq 0$). В небесной механике показывается, что константа C в (2.27) отрицательна. Отсюда следует очень важный вывод о том, что орбитой Земли является эллипс. Нужно признать, что землянам крупно повезло, поскольку для Земли реализуется именно та благоприятная для существования жизни ситуация, которая изображена на рис. 2.3а.

Для полного решения задачи осталось определить некоторые количественные характеристики процесса движения планеты и, в частности, период ее обращения вокруг Солнца. Пусть в момент t_0 точка занимает положение $\mathbf{r}_0$ с координатами (r_0, θ_0) , а в момент $t > t_0$ – положение $\mathbf{r} = (r, \theta)$. Интегрируя второе уравнение в (2.20), записанное в виде $r^2 d\theta = k dt$, имеем

с учетом (2.26)

$$\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{p^2 d\theta}{(1 - \varepsilon \cos \theta)^2} = \int_{t_0}^t k dt = k(t - t_0). \quad (2.28)$$

Рассмотрим важный для жителей Земли случай, когда орбита имеет вид эллипса (т. е. $C < 0$). Пусть t таково, что $\theta = \theta_0 \pm 2\pi$, и, следовательно, $r = r_0$. Этому моменту отвечает полное обращение планеты вокруг Солнца, причем величина $T = t - t_0$ имеет смысл периода обращения вокруг центра. Поскольку интеграл слева в пределах от θ_0 до $\theta_0 \pm 2\pi$ дает удвоенную площадь орбитального эллипса [24], равную $2\pi ab$, то из (2.28) приходим к формуле: $2\pi ab = kT$. С другой стороны, постоянная k связана с полуосями a и b соотношением $k^2/\gamma\mu = b^2/a = p$. Исключив из этих двух равенств k , получим соотношение

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma\mu}, \quad (2.29)$$

выражающее третий закон Кеплера, который мы получили как следствие первых двух законов. Этот закон утверждает: *у эллиптических орбит отношение квадрата периода обращения к кубу большой полуоси есть величина постоянная, одинаковая для всех планет и однозначно определяемая заданным гравитационным полем, т. е. парой (γ, μ)* . Подчеркнем, что эта величина не зависит от массы m самой планеты.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Подчеркнем, что выведенные здесь законы Кеплера, названные так в честь выдающегося немецкого ученого и мыслителя I. Kepler (1571–1630), получены нами методом математического моделирования, т. е., образно выражаясь, на кончике пера. Однако, если обратиться в глубь веков лет на 400 назад, то необходимо отметить, что указанные законы были установлены И. Кеплером совсем другим путем, а именно путем неустанных размышлений над огромным числом поразительно точных наблюдений о движениях планет и Солнца, сделанных датским астрономом Тихо Браге (Т. Brahe, 1546–1601). Открытые Кеплером законы находились в явном противоречии с пропагандируемым Церковью учением о том, что не Земля вращается вокруг Солнца, а, наоборот, Солнце вращается вокруг Земли. Из истории хорошо известно, что церковь ненавидела людей, нарушающих ее устои и жестоко наказывала их через публичное сожжение, повешение, четвертование и т. д. Достаточно вспомнить итальянского философа Джордано Бруно (1548–1600), который был публично сожжен за высказанное им предположение о том, что пространство бесконечно и за поддержку им гелиоцентрической системы мира Коперника, созданной гениальным польским ученым N. Kopernik (1473–1543), а также выдающегося итальянского ученого Галилео Галилея (1564–1642), которому во

имя спасения жизни пришлось публично отречься от учения Коперника. К счастью, И. Кеплеру удалось избежать этих неприятных последствий. Ну, а в настоящее время, когда законы Кеплера можно вывести чисто математическим путем, используя идеи математического моделирования, как это было показано выше, их справедливость вряд ли у кого-либо может вызвать сомнение.

§3. Математические модели гравитационного и электростатического поля. Уравнение Лапласа

3.1. Модели гравитационного поля. Как уже указывалось в § 2, знаменитый немецкий ученый Иоганн Кеплер, обрабатывая наблюдения не менее знаменитого датского астронома Тихо Браге, открыл три замечательных закона (законы Кеплера), по которым планеты солнечной системы движутся вокруг Солнца. Указанные законы хотя и являются очень красивыми обладают, к сожалению, одним недостатком: они не указывают причину, заставляющую планеты двигаться вокруг Солнца. В дальнейшем великий английский математик, механик, физик, астроном и философ Исаак Ньютон (1643–1727), однажды, отдыхая, по словам историков, в яблоневом саду после сытного обеда и размышляя над этими законами, был внезапно разбужен слетевшим с яблони яблоком, и, не успев расстроиться, был озарен открытием весьма простого, но не менее удивительного объяснения законов Кеплера. В настоящее время это объяснение носит название Закона всемирного тяготения и звучит так:

ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ: *Между любыми двумя телами в пространстве действует сила притяжения, прямо пропорциональная их массам и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.*

Отметим при этом, что пространство и время Ньютон считал абсолютными, т. е. без всяких искривлений, изгибаний и других ставших модными после работ Альберта Эйнштейна вещей.

Законы Кеплера, Закон всемирного тяготения Ньютона и связь между ними подробно изучаются в небесной механике. Здесь же мы ограничимся выводом на основе Закона всемирного тяготения математической модели гравитационного поля. Основная заслуга в построении указанной модели принадлежит французскому математику, механику, физику и астроному Пьеру Симону Лапласу (P.S. Laplace, 1749–1827). Размышляя, как и многие другие видные умы человечества, над Законом всемирного тяготения, он никак не мог понять причину притяжения двух тел, например, Земли и Солнца, находящихся на колоссальном расстоянии друг от друга. Это дальное действие всегда казалось ему удивительным, если не сказать, более того, волшебным, и в бессильной попытке понять причину указанного дального действия, он пришел к следующей гипотезе:

ГИПОТЕЗА ДАЛЬНОДЕЙСТВИЯ ЛАПЛАСА: Наличие любого *притягивающего* (т. е. с положительной массой) *тела* влечет за собой возникновение во всем пространстве некоторой *субстанции*, интенсивность *и* которой в произвольной точке $\mathbf{x} = (x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$u(\mathbf{x}) = \gamma \frac{m}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (3.1)$$

Здесь m – масса данного тела, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ – место (точка) расположения тела, γ – абсолютная константа, получившая название *гравитационной постоянной*, ее численное значение в системе СИ равно $6.6732 \cdot 10^{-11} \text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$, наконец, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ – расстояние между точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_0$, определяемое формулой

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}. \quad (3.2)$$

Смысл субстанции u заключается в том, что ее знание позволяет вычислить вектор $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ силы притяжения, действующей со стороны тела на тело единичной массы, расположенное в точке $\mathbf{x}$, с помощью формулы

$$\mathbf{f} = \text{grad} u. \quad (3.3)$$

Вектор $\text{grad} u$ в (3.3) называется *градиентом* функции u . По своему смыслу $\text{grad} u(\mathbf{x})$ указывает направление быстреешего возрастания функции u в точке $\mathbf{x}$. В декартовой системе координат с ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ он определяется формулой

$$\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}.$$

С учетом этого векторное равенство (3.3) можно записать в эквивалентном виде трех скалярных равенств для декартовых компонент f_x, f_y и f_z :

$$f_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f_z = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (3.4)$$

Поскольку вектор $\mathbf{f}$ описывает силу тяготения, то функцию u принято называть потенциалом поля силы тяготения (создаваемой в данном случае *парой* или *телом* $(\mathbf{x}_0, m)$) или просто *гравитационным потенциалом*. При этом само поле тяготения часто называют *гравитационным полем*.

Подчеркнем, что для гравитационного поля справедлив *принцип суперпозиции*. Согласно этому принципу гравитационное поле, создаваемое совокупностью притягивающих тел, равно сумме гравитационных полей, создаваемых каждым из этих тел. Отсюда вытекает, что гравитационный потенциал поля, создаваемого N парами $(\mathbf{x}_1, m_1), (\mathbf{x}_2, m_2), \dots, (\mathbf{x}_N, m_N)$, определяется в произвольной точке $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_j$ формулой

$$u(\mathbf{x}) = \gamma \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|}. \quad (3.5)$$

Огромная заслуга Лапласа в деле дальнейшего изучения свойств явления всемирного тяготения заключается в том, что он предложил использовать при изучении тяготения не сам потенциал u , а то дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет u . Выведем это уравнение. Для этого, рассуждая далее, как в [14, с. 13-15], выберем i -ое слагаемое

$$u_i(\mathbf{x}) = \gamma \frac{m_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \quad (3.6)$$

в сумме (3.5) и вычислим вторые производные от функции u_i . Полагая для простоты $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| = r_i(\mathbf{x})$, имеем

$$\frac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial x} = \frac{x - x_i}{r}, \quad \frac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial y} = \frac{y - y_i}{r}, \quad \frac{\partial r_i(\mathbf{x})}{\partial z} = \frac{z - z_i}{r}. \quad (3.7)$$

Отсюда и из (3.6) вытекает, что

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x} = -\gamma m_i \frac{x - x_i}{r^3}, \quad \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial y} = -\gamma m_i \frac{y - y_i}{r^3}, \quad \frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial z} = -\gamma m_i \frac{z - z_i}{r^3}. \quad (3.8)$$

Дифференцируя еще раз, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial x^2} &= \gamma m_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(x - x_i)^2}{r^5} \right], \quad \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial y^2} = \gamma m_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(y - y_i)^2}{r^5} \right], \\ \frac{\partial^2 u_i(\mathbf{x})}{\partial z^2} &= \gamma m_i \left[-\frac{1}{r^3} + 3 \frac{(z - z_i)^2}{r^5} \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Складывая найденные частные производные, получаем

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_i.$$

Отсюда и из того условия, что $u = \sum_{i=1}^N u_i$ приходим к уравнению

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (3.10)$$

которому в каждой точке $\mathbf{x}$ области $D \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ удовлетворяет потенциал u гравитационного поля. Символ Δ , введенный в (3.10) (см. также (3.18)), называется *оператором Лапласа*, а уравнение (3.10) принято называть *уравнением Лапласа*.

Заслуга Лапласа, таким образом, заключается в том, что он предложил отказаться от явной формулы (3.3) для сил гравитационного взаимодействия в пользу уравнения (3.10) для потенциала u . Можно считать, что

дифференциальное уравнение описывает взаимодействие между соседними элементами поля, так что введение гравитационного потенциала подменяет задачу о дальном действии между реальными телами задачей о “близкодействующем” взаимодействии между соседними областями пространства, наполненного некоторой искусственно придуманной гравитационной субстанцией интенсивности u .

Подчеркнем, что потенциал u удовлетворяет уравнению Лапласа всюду в $\mathbb{R}^3$, кроме точек $\mathbf{x}_i$, где сосредоточены притягивающие массы. На практике обычно приходится иметь дело с полем тяготения, вызванным массой, распределенной с плотностью ρ по некоторой области Ω с границей Γ . Представляет интерес вывести формулу для потенциала указанного объемного распределения масс. Применим для этого следующую схему, на которую в дальнейшем будем ссылаться как на *стандартную схему метода математического моделирования*. Разобьем область Ω на элементарные подобласти Ω_i с объемами ΔV_i и будем считать, что в каждом из них сосредоточена масса, равная $\rho(\mathbf{x}_i)\Delta V_i$, где $\mathbf{x}_i$ – некоторая “средняя” точка подобласти Ω_i . В таком случае создаваемый указанной точечной массой потенциал u_i силы притяжения, соответствующий этой массе, определяется в каждой точке $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_i$ формулой $\gamma\rho(\mathbf{x}_i)\Delta V_i/|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0|$. Суммируя по всем $i = 1, 2, \dots, N$, приходим в силу принципа суперпозиции к формуле

$$\gamma \sum_{i=1}^N \frac{\rho(\mathbf{x}_i)\Delta V_i}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0|},$$

которая приближенно описывает потенциал тела (Ω, ρ) в произвольной точке $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_i$. Наконец, переходя здесь к пределу при неограниченном измельчении области Ω , приходим по определению тройного интеграла к следующей формуле

$$u(\mathbf{x}_0) = \gamma \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}, \quad (3.11)$$

которая уже точно определяет потенциал гравитационного поля тела (Ω, ρ) в произвольной точке $\mathbf{x}_0$, расположенной вне замыкания $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ области Ω . Здесь и ниже $d\mathbf{x}$ обозначает элемент объема. Формула (3.11) носит название *объемного или ньютоновского потенциала*.

Можно показать (этим мы займемся в гл. 7), что для плотности ρ , обладающей некоторой гладкостью, например, имеющей непрерывные производные 1-го порядка в $\mathbb{R}^3$, потенциал (3.11) удовлетворяет в каждой точке $\mathbf{x}$ пространства $\mathbb{R}^3$ так называемому *уравнению Пуассона*

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\gamma\rho(\mathbf{x}), \quad (3.12)$$

названному в честь французского математика S.D. Poisson (1781–1840). Вне притягивающих масс, где $\rho = 0$, уравнение (3.12) переходит в уравнение Лапласа (3.10). Подчеркнем, что уравнение Пуассона (3.12) и уравнение Лапласа (3.10) являются простейшими и в то же время наиболее яркими представителями уравнений эллиптического типа согласно общепринятой классификации уравнений в частных производных второго порядка, приведенной в гл. 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из формулы (3.8) при $i = 1$ вытекает, в частности, что сила $\mathbf{f}$ притяжения, действующая со стороны тела $(\mathbf{x}_1, m_1)$ на тело $(\mathbf{x}_2, m_2)$ определяется следующими соотношениями

$$\mathbf{f} = -\gamma m_1 m_2 \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^3} \Rightarrow f = |\mathbf{f}| = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (3.13)$$

Вторая формула в (3.13) представляет собой хорошо известную из школьной механики формулу для величины силы притяжения двух точечных масс m_1 и m_2 , расположенных в точках $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ на расстоянии $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ друг от друга.

3.2. Модели электростатического поля. В физике имеется еще одна область, в которой сила взаимодействия между двумя телами так же, как и в теории тяготения, описывается соотношениями (3.13), где r – расстояние между двумя телами. Этим разделом является электростатика. При этом m_1 и m_2 имеют смысл электрических зарядов рассматриваемых материальных тел, которые в физике обычно обозначаются через q_1 и q_2 , а γ имеет смысл некоторой электростатической постоянной, зависящей от выбора системы единиц. Таким образом, в этом случае соотношения (3.13) описывают закон электростатического взаимодействия двух заряженных тел, который часто называют *законом Кулона* по имени французского физика S.O.Coulomb (1736–1806), открывшего этот закон. Как в гравитационном случае, для описания указанного закона можно ввести *электростатический* или *кулонов* потенциал u , удовлетворяющий уравнению Пуассона вида

$$\Delta u = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (3.14)$$

Здесь ρ_e имеет смысл плотности зарядов, ε – диэлектрическая проницаемость среды, ε_0 – электрическая постоянная (см. об этих величинах подробнее в § 7).

Основной силовой характеристикой электростатического поля является вектор напряженности $\mathbf{E}$ электрического поля, связанный с кулоновым потенциалом u формулой

$$\mathbf{E} = -\text{grad} u. \quad (3.15)$$

Из математического анализа известно, что с каждым дифференцируемым векторным полем $\mathbf{E}$ можно связать скалярное поле $\text{div} \mathbf{E}$, определяемое в

декартовой системе координат формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z}, \quad (3.16)$$

и векторное поле $\operatorname{rot} \mathbf{E}$, определяемое в декартовой системе координат формулой

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (3.17)$$

Здесь E_1, E_2, E_3 – декартовы компоненты вектора $\mathbf{E}$. Применяя к (3.15) оператор rot , либо div и используя известные соотношения [19, с. 158]

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u, \quad (3.18)$$

приходим с учетом (3.14) к следующей системе уравнений относительно $\mathbf{E}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (3.19)$$

Уравнения (3.19) так же, как и (3.14), образуют математическую модель электростатического поля. К этому вопросу мы еще вернемся в § 7.

3.3. Постановка граничных условий. Для выделения единственного решения уравнения (3.14), либо системы (3.19), необходимо задать дополнительные граничные условия для u либо $\mathbf{E}$ на границе Γ . В частности, для электростатического потенциала u задают одно из следующих граничных условий:

$$u = g \quad \text{на } \Gamma, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{на } \Gamma, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \quad \text{на } \Gamma. \quad (3.22)$$

Здесь g и $\alpha : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ – заданные функции на границе Γ . Граничное условие (3.20) принято называть *условием 1-го рода*, или *условием Дирихле*; условие (3.21) называют *условием 2-го рода* или *условием Неймана*; условие (3.22) – *условием третьего рода*. При этом саму краевую задачу (3.14), (3.20), либо (3.14), (3.21) либо (3.14), (3.22) называют соответственно *первой краевой задачей*, или *задачей Дирихле*, *второй краевой задачей*, или *задачей Неймана*, наконец, *третьей краевой задачей* для уравнения (3.14).

Наряду с указанными краевыми задачами на практике часто рассматривают и так называемую *смешанную краевую задачу*, заключающуюся в

нахождении решения u уравнения (3.14), удовлетворяющего общему граничному условию

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{на } \Gamma. \quad (3.23)$$

Здесь α , β и g – заданные функции на границе Γ . Условие (3.23), очевидно, объединяет все введенные выше условия (3.20)–(3.22). В частности, при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ оно переходит в (3.20), при $\alpha = 0$, $\beta = 1$ оно переходит в (3.21), при $\beta = 1$, $\alpha \neq 0$ оно переходит в (3.22). Что касается граничных условий для электрического поля $\mathbf{E}$, то к этому вопросу мы вернемся в § 7 при обсуждении математических моделей электромагнитного поля.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Обратим внимание на тот важный факт, что граничные условия (3.20)–(3.23) ставятся и имеют физический смысл именно для электростатического потенциала. Так, например, условие (3.20) при $g = 0$ физически означает, что граница Γ является эквипотенциальной или заземленной, т. е. своего рода экраном для электрического поля [38]. Что касается гравитационного потенциала u , то отвечающее ему уравнение Пуассона (3.12) следует рассматривать во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ без каких-либо граничных условий. Действительно, вряд ли можно создать такой экран, который бы полностью экранировал в некоторой области пространства действие гравитационного поля.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Ниже в гл. 2 мы покажем, что уравнение Пуассона (3.14) является простейшим представителем так называемого уравнения эллиптического типа, так что (3.14), (3.23) представляет собой эллиптическую краевую задачу. Данная эллиптическая задача подробно изучается в курсе дифференциальных уравнений в частных производных, где показано, что при некоторых естественных условиях на исходные данные она имеет единственное решение (потенциал u), непрерывно зависящее от исходных данных. Это означает, что при указанных условиях задача (3.14), (3.23) корректно поставлена. В данной книге математической физики задача (3.14), (3.23) будет изучаться в некоторых частных случаях. К их числу относится задача Дирихле для *канонической области* типа круга в $\mathbb{R}^2$ либо шара в $\mathbb{R}^3$. Можно показать, что в этих случаях точное решение соответствующей краевой задачи для уравнения Пуассона (3.14) существует и, более того, может быть представлено в виде ряда Фурье. Именно этим вопросом мы займемся детально в гл. 6. Что касается общей задачи (3.14), (3.23) в произвольной области Ω , то найти ее точное решение в явном виде средствами современной математики невозможно. Поэтому для решения указанной задачи необходимо использовать приближенные методы, например, численные методы, ориентированные на ЭВМ. Это составляет содержание курса “Численные методы математической физики” (см., например, [44]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. В случае, когда Ω является ограниченной областью,

каждая из рассмотренных выше краевых задач для уравнения (3.14) относится к классу так называемых *внутренних* эллиптических краевых задач. На практике часто возникает необходимость исследовать какое-либо эллиптическое уравнение в неограниченной области Ω . Для выделения единственного решения эллиптического уравнения в такой области необходимо задавать, кроме одного из введенных выше граничных условий, дополнительное условие на бесконечности, т. е. при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Для уравнения Пуассона, рассматриваемого во внешности компакта в $\mathbb{R}^3$, указанное условие, обеспечивающее корректность рассматриваемой краевой задачи, имеет вид

$$u(\mathbf{x}) = o(1) \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

Это условие означает согласно определению величины $o(1)$, что потенциал $u(\mathbf{x})$ равномерно стремится к нулю на бесконечности. В случае, когда $\Omega = \mathbb{R}^3$, как это имеет место при исследовании свойств гравитационного потенциала, (3.24) является единственным условием, обеспечивающим корректность задачи нахождения гравитационного потенциала в $\mathbb{R}^3$ (см. об этом в гл. 7).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Выше мы ввели фактически два определения оператора Лапласа Δ : одно в виде суммы вторых частных производных в (3.10), другое – с помощью второго соотношения в (3.18). Первое использует декартову систему координат и, следовательно, не является *инвариантным*, ибо оно зависит от выбора системы координат. В противоположность ему, второе определение носит *инвариантный*, т. е. не зависящий от выбора системы координат, характер, поскольку оно определяет оператор Δ через инвариантные дифференциальные операции векторного анализа: div и grad . Второе определение, конечно, более удобно, поскольку оно позволяет записывать выражения для Δu в любой криволинейной системе координат путем использования соответствующих выражений для div и grad . Ниже, наряду с выражением оператора Лапласа в декартовых координатах, мы будем также использовать его выражения в цилиндрических (ρ, φ, z) и сферических (r, θ, φ) координатах. Указанные выражения, приведенные, например, в [19, с. 168-169], имеют соответственно вид

$$\Delta u = \Delta_{r,\theta,\varphi} u \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad (3.25)$$

$$\Delta u = \Delta_{\rho,\varphi,z} u \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (3.26)$$

§4. Модели процессов переноса тепла и диффузии

4.1. Модели переноса тепла. Одним из важнейших жизненных процессов является процесс распространения тепла от одного участка рассматриваемой среды к другим. Указанный процесс вызывается несколькими механизмами, и, в частности: молекулярной диффузией, т. е. передачей кинетической энергии движущихся частиц (молекул и атомов), конвекцией или движением среды, лучеиспусканием, химическими процессами и т. д. Ниже мы выведем математическую модель распространения тепла, учитывающую первый механизм переноса тепла, а далее усложним ее за счет учета второго механизма, т. е. конвективного переноса тепла. Для конкретности будем рассматривать лишь жидкие среды.

Предположим, что жидкость, находящаяся в состоянии покоя, занимает некоторую область D пространства $\mathbb{R}^3$. Обозначим через Ω произвольную ее ограниченную подобласть с кусочно-гладкой границей Γ . Для математического описания процесса переноса тепла принято вводить *вектор потока тепла* $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$. Физический смысл вектора $\mathbf{q}$ заключается в том, что с его помощью можно определить количество Q_1 тепла, вносимое за промежуток времени от t_1 до t_2 в произвольную подобласть Ω рассматриваемой области D со стороны оставшейся части $\Omega_e = D \setminus \bar{\Omega}$, по формуле:

$$Q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4.1)$$

Здесь Γ – граница между Ω и Ω_e (рис. 4.1), $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ , dS – элемент площади поверхности Γ . Знак “–” выбран с учетом ориентации нормали $\mathbf{n}$.

Из школьного курса термодинамики хорошо известно, что мерой тепла является температура T . В связи с этим возникает принципиально важный вопрос о том, как связать поток тепла с температурой T . Основополагающую роль в термодинамике играет закон Фурье, названный так в честь известного французского математика и физика S.B. Fourier (1768–1830).

Указанный закон постулирует, что вектор потока тепла связан с температурой T формулой

$$\mathbf{q} = -k \text{grad} T. \quad (4.2)$$

Здесь k – параметр состояния среды, называемый *коэффициентом теплопроводности*, а знак “–” в законе Фурье отражает тот известный опытный факт, что тепло всегда течет от горячей части среды к холодной. В словесной форме закон Фурье выражается следующими словами: *если температура тела не равномерна, то в нем возникают тепловые потоки,*

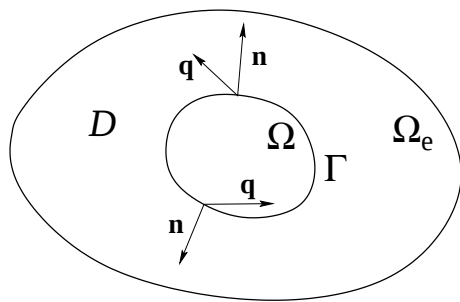


Рис. 4.1.

направленные из мест с более высокой температурой в места с более низкой температурой. Размерности величин $\mathbf{q}$, k и T в системе СИ приведены в таблице 4.1.

Напомним, что занимающая область D среда называется *однородной*, если ее свойства не меняются при переходе от одной точки $\mathbf{x} \in D$ к другой. Среда называется *изотропной* в точке $\mathbf{x}$, если ее свойства одинаковы по всем направлениям, выходящим из точки $\mathbf{x}$, и *анизотропной* в противном случае. Если среда изотропна, то k является скалярной величиной, зависящей в общем случае от точек $\mathbf{x} \in D$, времени t и температуры T . В случае анизотропной среды k является тензорной функцией, а вектор потока тепла представляет собой (скалярное) произведение тензора k на вектор $-\text{grad}T$. Ниже мы будем рассматривать только изотропные среды. Для таких сред формула (4.1) принимает с учетом (4.2) вид

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} k \text{grad}T \cdot \mathbf{n} dS.$$

Используя формулу Гаусса-Остроградского [19, с.192]

$$\int_{\Omega} \text{div} \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.3)$$

для дифференцируемого в Ω векторного поля $\mathbf{v}$, в которой следует положить $\mathbf{v} = k \text{grad}T$, выражение для Q_1 можно переписать в виде

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \text{div}(k \text{grad}T) d\mathbf{x}. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) описывает количество тепла, поступающее в область Ω за промежуток времени от t_1 до t_2 , вследствие потоков тепла, вызываемых неравномерным распределением температуры в D .

Предположим далее, что в области Ω распределены источники тепла с объемной плотностью F . Тогда количество тепла Q_2 , выделяемое ими в область Ω за время $\Delta t = t_2 - t_1$, будет равно

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F d\mathbf{x}.$$

Ясно, что получаемое областью Ω тепло идет на нагрев среды, т. е. на увеличение ее температуры. Если в момент t_1 температура в произвольной

точке $\mathbf{x}$ области Ω равна $T_1(\mathbf{x})$, а в момент t_2 равна $T_2(\mathbf{x})$, то количество тепла, необходимое для указанного увеличения температуры, равно в силу законов термодинамики Q , где

$$Q = \int_{\Omega} \rho c (T_2 - T_1) d\mathbf{x} \equiv \int_{\Omega} \rho c \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial t} dt d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\mathbf{x}. \quad (4.5)$$

Здесь параметры ρ (плотность среды) и c (коэффициент удельной теплоемкости при постоянном давлении) являются в общем случае функциями от $\mathbf{x} \in D$.

В силу *фундаментального закона сохранения тепла*, примененного к области Ω , должно выполняться соотношение: $Q = Q_1 + Q_2$, или

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) d\mathbf{x} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F d\mathbf{x}. \quad (4.6)$$

Оно называется *уравнением баланса тепла*. В словесной форме соотношение (4.6) можно выразить так: изменение количества тепла в области Ω за время $\Delta t = t_2 - t_1$ (см. левую часть в (4.6)) обусловлено притоком тепла в область Ω через граничную поверхность Γ за счет молекулярной диффузии, и количеством тепла, выделившимся в Ω за время Δt в результате действия объемных источников тепла с плотностью F .

Переписав соотношение (4.6) в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \left[\rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - F \right] d\mathbf{x} = 0,$$

предположим, что подинтегральная функция здесь является непрерывной в области D . Поскольку в этом соотношении Ω – произвольная область с кусочно-гладкой границей Γ , то тем самым мы находимся в условиях леммы 1.1. Согласно этой лемме указанная подинтегральная функция равна нулю всюду в области D , т. е. выполняется соотношение

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + F. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) и является искомой математической моделью, описывающей процесс распространения тепла в области D . Как уже указывалось, коэффициенты ρ и c в (4.7) являются в общем случае функциями от $\mathbf{x}$, а коэффициент k к тому же может зависеть и от t , а также самой температуры T . Поэтому (4.7) является в общем случае нелинейным уравнением.

В декартовой системе координат уравнение (4.7) имеет вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + F. \quad (4.8)$$

В частном случае, когда среда однородна, так что величины ρ, c и k есть константы, уравнение (4.7) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + f, \quad (4.9)$$

где $a = \sqrt{k/\rho c}$, $f = F/\rho c$. Уравнение (4.9) называется *неоднородным уравнением теплопроводности*, а a^2 называется коэффициентом температуропроводности. Если объемные источники тепла отсутствуют, так что $f = 0$, то уравнение (4.9) становится однородным. Указанное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T \quad (4.10)$$

является важнейшим и в то же время простейшим представителем уравнений *параболического типа* согласно классификации, приведенной в гл. 2.

Для выделения единственного решения уравнения (4.7) необходимо задавать дополнительные условия. В случае, когда процесс распространения тепла рассматривается во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, так что $\Omega = \mathbb{R}^3$, роль таких условий играет начальное условие

$$T|_{t=0} = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4.11)$$

а задача (4.7), (4.11) при $\Omega = \mathbb{R}^3$ называется *задачей Коши* для уравнения (4.7). Если процесс распространения тепла рассматривается в некоторой области Ω пространства $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$, то на границе Γ следует задавать краевые условия, имеющие в общем случае вид (ср. с (3.23)):

$$\alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial n} = g \quad \text{на } \Gamma. \quad (4.12)$$

Здесь α , β и g – заданные на Γ функции. Задача (4.7), (4.11), (4.12) называется *начально-краевой задачей* для уравнения (4.7): *первой краевой задачей* или *задачей Дирихле* при $\beta = 0$, $\alpha = 1$, *второй краевой задачей* или *задачей Неймана* при $\beta = k|_{\Gamma}$, $\alpha = 0$ и *третьей краевой задачей* при $\beta = k|_{\Gamma}$, $\alpha \neq 0$.

В физическом плане условие Дирихле ($\alpha = 1$, $\beta = 0$) в (4.12) отвечает заданию температуры на границе Γ , условие Неймана ($\alpha = 0$, $\beta = k|_{\Gamma}$) в (4.12) отвечает заданию теплового потока на Γ , наконец, условие 3-го рода означает, что на границе происходит теплообмен с внешней средой, температура которой известна. Подробнее о физическом смысле различных

граничных условий для температуры T можно прочитать в [21, с.27–28], [22, с.15–16], [56, с.196–202].

В частном случае, когда температура T зависит лишь от координат x, y и времени t , что имеет место, например, при изучении распространения тепла в тонкой однородной пластине или мембране, (4.9) принимает вид *двумерного* уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + f. \quad (4.13)$$

Наконец, для одномерного однородного тела, например, для однородного стержня, когда T зависит только от x и t , (4.9) переходит в *одномерное* уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f. \quad (4.14)$$

Следует, однако, отметить, что уравнения (4.13) и (4.14) не учитывают теплообмен между поверхностью пластинки или стержня с окружающей средой (точнее мы пренебрегаем им при выводе этих уравнений).

В ряде случаев зависимостью температуры T от времени t можно пренебречь. В этих случаях (4.7) либо (4.8) переходит в стационарное уравнение

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -F. \quad (4.15)$$

В случае, когда $k = \operatorname{const}$, (4.15) переходит в уравнение Пуассона

$$\Delta T = -f, \quad (4.16)$$

где $f = F/k$. В обоих случаях начальное условие (4.11), естественно, снимается, так что изучение процесса переноса тепла сводится к решению краевой задачи для уравнения с переменными коэффициентами (4.15) либо уравнения Пуассона (4.16). В простейшем случае, отвечающем распределению температуры в одномерном стержне длины l , уравнение (4.16) вместе с простейшим граничным условием 1-го рода в (4.12) принимает вид краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -f, \quad T(0) = T(l) = 0. \quad (4.17)$$

Граничные условия в (4.17) означают, что температура T на концах стержня, в котором изучается тепловой процесс, поддерживается равной нулю.

Уравнения (4.7), (4.15) относятся к случаю, когда жидкая среда находится в покое. Если жидкость, занимающая область Ω , находится в движении, то возникает дополнительный механизм переноса тепла за счет движущихся частиц жидкости. В физике указанный механизм называется (тепловой) *конвекцией*. Для вывода соответствующей математической модели

переноса тепла достаточно определить количество тепла, вносимое в область Ω со стороны оставшейся части $\Omega_e = D \setminus \overline{\Omega}$ движущимися частицами. Обозначив через $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ скорость жидкости в точке $\mathbf{x}$ в момент t , заметим что в соответствии с физическим смыслом поток тепла, переносимого движущимися частицами через элемент dS границы Γ области Ω в единицу времени, равен $-T\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}dS$. В таком случае количество тепла Q_3 , поступающее за время $\Delta t = t_2 - t_1$ в область Ω за счет конвекции, определяется формулой

$$Q_3 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} T\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}dS = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(T\mathbf{u})d\mathbf{x}. \quad (4.18)$$

С учетом этого закон сохранения тепла принимает вид: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$ или

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) d\mathbf{x} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} F d\mathbf{x} - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(T\mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

Применяя к этому соотношению лемму 1.1, приходим к уравнению

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - \operatorname{div}(T\mathbf{u}) + F. \quad (4.19)$$

Уравнение (4.19) является усложненной математической моделью, описывающей процесс распространения тепла в области Ω за счет молекулярной диффузии, конвекции и действия объемных источников тепла. В частном случае, когда жидкость несжимаема, так что скорость $\mathbf{u}$ удовлетворяет условию несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, имеем в силу известной формулы [16, с.311]

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (4.20)$$

что $\operatorname{div}(T\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} T$. С учетом этого (4.19) принимает вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} T + F. \quad (4.21)$$

Если же рассматриваемый процесс является стационарным, так что $\partial T / \partial t = 0$, то (4.19) принимает вид

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) - \operatorname{div}(T\mathbf{u}) = -F.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Более точный анализ показывает, что процесс переноса тепла в вязкой жидкости сопровождается переходом кинетической энергии жидкости в работу сил вязкого трения. Последнее приводит к появлению в жидкости дополнительного источника тепла, объемная плотность F_μ

которого определяется формулой [40, с.10]

$$F_\mu = 2\mu \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.22)$$

Здесь u_i – компоненты скорости $\mathbf{u}$, μ – динамический коэффициент вязкости (см. § 5), а функция F_μ носит название *диссипативной функции*. С учетом этого более точная модель переноса тепла в движущейся жидкости имеет вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k \text{grad} T) - \text{div}(T \mathbf{u}) + F + F_\mu. \quad (4.23)$$

Отметим также, что в том случае, когда скорость $\mathbf{u}$, входящая в (4.19), является неизвестной вектор-функцией вместе с T , (4.19) либо (4.23) представляет собой незамкнутую модель относительно функций T и $\mathbf{u}$. Вопрос о замыкании этой модели будет рассмотрен в § 5.

4.2. Модели конвекции-диффузии вещества. Выведем здесь математическую модель, описывающую процесс переноса в жидкости какого-либо вещества, например, загрязняющей примеси. Наличие этого вещества в жидкости описывается его концентрацией C , имеющей размерность $[C] = \text{кг}/\text{м}^3$ в системе СИ. Как и в случае теплопереноса, будем рассматривать следующие механизмы переноса вещества: *диффузию, конвекцию и внутренние источники*.

Обозначим через $\mathbf{J}$ вектор потока вещества за счет диффузии. Известно, что он связан с концентрацией законом Фика (названного так в честь немецкого физика А. Fick, открывшего его в 1855 г.), имеющим вид $\mathbf{J} = -\eta \text{grad} C$. Здесь параметр η , имеющий смысл коэффициента диффузии, зависит в общем случае как от точек $\mathbf{x}$ области Ω и времени t , так и от концентрации C . Рассуждения, аналогичные приведенным в п. 4.1, показывают, что количество R_1 вещества, поступающего за промежуток времени (t_1, t_2) в произвольную область Ω с границей Γ со стороны оставшейся под-области Ω_e области Ω за счет диффузии, определяется формулой

$$R_1 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{J} d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \text{div}(\eta \text{grad} C) d\mathbf{x}.$$

Если внутри Ω имеются источники вещества с объемной плотностью F_C , вырабатывающие это вещество, то полное количество вещества R_2 , вносимое ими в Ω за промежуток времени (t_1, t_2) , а также количество вещества R_3 , переносимое в Ω за счет конвекции, определяются формулами

$$R_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} F_C d\mathbf{x} dt, \quad R_3 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Gamma} C \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \text{div}(C \mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

В результате поступления вещества в Ω концентрация его изменяется, причем изменение количества вещества в Ω за интервал (t_1, t_2) выражается формулой

$$R = \int_{\Omega} [C(\mathbf{x}, t_2) - C(\mathbf{x}, t_1)] d\mathbf{x} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\mathbf{x}. \quad (4.24)$$

В силу закона сохранения массы должно выполняться соотношение – уравнение баланса вещества: $R = R_1 + R_2 + R_3$. В подробной записи оно имеет вид

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} d\mathbf{x} dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [\operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C \mathbf{u}) + F_C] d\mathbf{x} dt. \quad (4.25)$$

Применяя лемму 1.1, из (4.25) приходим к уравнению

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C \mathbf{u}) + F_C. \quad (4.26)$$

Оно называется *нестационарным уравнением конвекции-диффузии*. В частном случае, когда $\eta = \operatorname{const}$, а вектор $\mathbf{u}$ удовлетворяет условию $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, уравнение (4.26) можно переписать в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \eta \Delta C - \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} C + F_C. \quad (4.27)$$

Если же рассматриваемый процесс переноса (конвекции-диффузии) вещества является стационарным, так что $\partial C / \partial t = 0$, то (4.26) принимает вид

$$\operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C \mathbf{u}) = -F_C. \quad (4.28)$$

Распространение вещества в некоторых средах сопровождается химической реакцией взаимодействия диффундирующего вещества с веществом основной среды. Это приводит к поглощению вещества, причем скорость поглощения в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega$ можно считать пропорциональной концентрации $C(\mathbf{x}, t)$ с некоторым коэффициентом $\gamma(\mathbf{x})$. Вследствие явления поглощения, количество диффундирующего вещества в рассматриваемой области Ω уменьшается за промежуток (t_1, t_2) на величину

$$R_4 = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \gamma(\mathbf{x}) C(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (4.29)$$

Чтобы учесть явление поглощения вещества, достаточно при выводе уравнения баланса вещества выражение (4.29) вычесть из правой части (4.25). С учетом этого основные модели переноса вещества принимают вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C \mathbf{u}) - \gamma C + F_C, \tag{4.30}$$

$$\operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) - \operatorname{div}(C \mathbf{u}) - \gamma C = -F_C. \tag{4.31}$$

В частном случае, когда $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, (4.30) можно переписать в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} C + \gamma C = \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} C) + F_C. \tag{4.32}$$

На каждое из уравнений (4.30)–(4.32) иногда ссылаются как на уравнение конвекции-диффузии-реакции.

Для выделения единственного решения уравнения (4.26), рассматриваемого в некоторой области Ω , задаются начальное и граничное условия. Первое из них имеет стандартный вид

$$C|_{t=0} = C_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{4.33}$$

Чтобы задать граничное условие, границу Γ разбивают на два участка: Γ_D и Γ_N . На участке Γ_D задается условие Дирихле, тогда как на Γ_N задают диффузионный поток вещества в направлении внешней нормали

$$C = g_1 \text{ на } \Gamma_D, \quad -\eta \frac{\partial C}{\partial n} = g_2 \text{ на } \Gamma_N. \tag{4.34}$$

Начальное условие (4.33), описывающее распределение концентрации вещества в Ω в момент $t = 0$, моделирует, например, мгновенный выброс загрязняющего вещества, что часто происходит при взрывах или авариях. Граничные условия (4.34) моделируют поведение вещества на разных участках границы рассматриваемой области. В частном случае, когда участок Γ_N является непроницаемым для вещества, в (4.34) следует положить $g_2 = 0$.

Для удобства читателей ниже приводится таблица размерностей введенных в этом параграфе физических величин и параметров в системе СИ.

Таблица 4.1

величины	Q_i	$\mathbf{q}$	T	k	ρ	c	$\mathbf{u}$	C	η, a^2	$\mathbf{J}$	γ	μ	F, F_μ	F_C
размерности в СИ	Q	$\frac{Q}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$	K	$\frac{Q}{\text{м} \cdot \text{с} \cdot K}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\frac{Q}{\text{кг} \cdot K}$	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$	$\frac{1}{\text{с}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$	$\frac{K}{\text{с}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$

Здесь используются обычные сокращения. В частности, s обозначает секунду, m – метр, Q – джоуль, K – Кельвин (единица температуры).

§5. Математические модели движения жидкости и газов

5.1. Феноменологический подход к построению математических моделей движения жидкости. Как известно, жидкость или газ представляют собой совокупность большого числа частиц (молекул, атомов, ионов), находящихся в непрерывном хаотическом движении. Поэтому для того, чтобы полностью охарактеризовать состояние жидкости в данный момент времени, необходимо задать положение и скорость каждой частицы жидкости. Из-за огромного количества частиц это практически невозможно осуществить. С учетом этого для описания движения жидкости применяют специальные приближенные методы. Из них наиболее распространены два: феноменологический и молекулярно-кинетический. Согласно первому подходу, который обычно используется в теоретической гидродинамике – науке о движении жидкостей и газов, считается, что частицы, составляющие жидкость, непрерывным образом заполняют ее объем. Это означает, что жидкость моделируется *сплошной средой*, при этом ее основными характеристиками в произвольной точке $\mathbf{x}$ в момент t являются скорость $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, плотность $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ и давление $p = p(\mathbf{x}, t)$, имеющие в системе СИ соответственно размерности: м/сек, кг/м³ и Н/м², где Н=кг·м/сек² – сокращенное обозначение ньютона как единицы силы. Кроме указанных основных величин, используются некоторые дополнительные характеристики: температура T , энтропия s , соленость S , концентрация C загрязняющего вещества в жидкости и т. д. Размерности этих величин в системе СИ можно найти в таблице 5.1.

В результате задача построения той или иной математической гидродинамической модели сводится к выводу соответствующей системы дифференциальных уравнений относительно искомых функций $\mathbf{u}, p, \rho, \dots$, основываясь на тех фундаментальных законах, которые описывают процесс движения рассматриваемой жидкости. В качестве указанных законов используются *законы сохранения массы, импульса, энергии* и т. д. В соответствии с вышесказанным, мы начнем изложение с вывода общего гидродинамического закона сохранения. Он имеет две формы: *интегральную*, относящуюся к произвольному объему, занимаемому жидкостью, и *дифференциальную*, относящуюся к произвольной точке $\mathbf{x}$ рассматриваемой области, и имеющую вид соответствующего дифференциального уравнения в частных производных относительно искомых функций.

5.2. Общий закон сохранения. Предположим, что жидкость занимает некоторую область $D \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим через Ω произвольную ее подобласть с кусочно-гладкой границей Γ , неизменной во времени. Обычным образом, как это принято в механике сплошных сред [40], определяются бесконечно малые элементы объема и поверхности, а также понятие движущейся частицы. Пусть ψ – произвольная скалярная гидродинамическая ве-

личина, отнесенная к единице объема. Тогда интеграл $\Psi(t) = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ будет иметь смысл количества величины ψ в области Ω . В свою очередь, на $\psi(\mathbf{x}, t)$ можно смотреть как на объемную плотность интегральной величины $\Psi(t)$ в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t . Обозначим через q плотность объемных источников величины Ψ . В силу общего закона сохранения приращение величины Ψ в области Ω за время от t до $t + \Delta t$ происходит за счет действия объемных источников, изменяющих Ψ на величину

$$\int_t^{t+\Delta t} dt \int_{\Omega} q d\mathbf{x},$$

и за счет потока величины Ψ через поверхность Γ со стороны оставшейся части жидкости. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ . По определению, поток величины Ψ через элемент поверхности dS в единицу времени в направлении нормали $\mathbf{n}$ равен $\psi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$, где $\mathbf{u}$ – скорость жидкости. Следовательно, поток величины Ψ в область Ω со стороны оставшейся части жидкости через поверхность Γ за время от t до $t + \Delta t$ равен

$$- \int_t^{t+\Delta t} dt \int_{\Gamma} \psi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_t^{t+\Delta t} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi \mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

Здесь при переходе от двойного к тройному интегралу мы воспользовались формулой (4.3), а знак “–” выбран с учетом ориентации нормали $\mathbf{n}$.

Согласно *общему закону сохранения* приращение величины Ψ за время Δt определяется соотношением (*уравнением баланса величины Ψ в Ω*):

$$\Psi(t + \Delta t) - \Psi(t) = \int_t^{t+\Delta t} dt \int_{\Omega} q d\mathbf{x} - \int_t^{t+\Delta t} dt \int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi \mathbf{u}) dS. \quad (5.1)$$

Разделив обе части на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем уравнение

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Psi(t + \Delta t) - \Psi(t)}{\Delta t} \equiv \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \psi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} q d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi \mathbf{u}) d\mathbf{x}, \quad (5.2)$$

которое можно переписать в виде

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \mathbf{u}) - q \right] d\mathbf{x} = 0. \quad (5.3)$$

Считая подинтегральную функцию в (5.3) непрерывной и применяя лемму 1.1, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \mathbf{u}) = q. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.4) называется *дифференциальным законом сохранения* величины Ψ , тогда как уравнение (5.1) имеет смысл *интегрального закона сохранения* величины Ψ . Применяя (5.4) к конкретным гидродинамическим величинам, теперь нетрудно вывести законы сохранения *массы*, *импульса* и т. д., на основе которых выводятся искомые математические модели движения жидкости.

5.3. Модели движения идеальной жидкости. Начнем с вывода закона сохранения массы. С этой целью положим в (5.4) $\psi = \rho$, $q = 0$ (последнее объясняется отсутствием внешних источников массы). В результате получим уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (5.5)$$

Оно называется *дифференциальным законом сохранения массы*, или просто уравнением *неразрывности*. В силу закона сохранения массы движение жидкости происходит так, что ее скорость $\mathbf{u}$ и плотность ρ в каждой точке $\mathbf{x} \in D$ в любой момент t удовлетворяет уравнению (5.5). Важно отметить, что (5.5) имеет инвариантный характер (в том смысле, что в его записи не участвует конкретная система координат). Однако, для упрощения дальнейших выкладок нам будет удобно считать, что в области D , где рассматривается движение жидкости, введена декартова система координат $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ с правым базисом $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, причем ось z будем считать направленной вверх. Обозначив декартовы компоненты вектора $\mathbf{u}$ через $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ и учитывая формулу (3.16) для дивергенции в декартовой системе координат, уравнение (5.5) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0. \quad (5.6)$$

Прежде, чем приступить к выводу уравнения сохранения импульса, рассмотрим силы, действующие на жидкость. В общем случае эти силы подразделяются на *внешние* и *внутренние*. Внешние силы, как правило, являются *массовыми* (либо *объемными*) и описываются массовой (либо объемной) плотностью. Таким образом, если $\mathbf{f}$ – *массовая плотность внешней силы* (т. е. сила, действующая на единицу массы и имеющая размерность ускорения м/сек²), то $\rho \mathbf{f}$ представляет собой ее *объемную плотность* (т. е. силу, действующую на единицу объема), $\rho \mathbf{f} d\mathbf{x}$ – силу, действующую на элементарный объем $d\mathbf{x}$ и, наконец, $\int_{\Omega} \rho \mathbf{f} d\mathbf{x}$ – силу, действующую на область

Ω . Важным примером внешних сил является сила тяжести, массовая плотность которой определяется в выбранной декартовой системе координат формулой

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g). \quad (5.7)$$

Здесь g – ускорение свободного падения. Его величина на средних широтах равна примерно $9,8 \text{ м/сек}^2$. Ясно, что сила тяжести, действующая на элементарный объем $d\mathbf{x}$, равна $\rho g d\mathbf{x}$. Другим примером внешней силы, играющей важную роль при изучении гидродинамических процессов в океане, является сила Кориолиса. Речь о ней пойдет в п. 5.6.

Обратившись к анализу внутренних сил, заметим, что они существенно зависят от характера жидкости. Мы будем рассматривать в этом пункте *идеальную жидкость*, т. е. такую сплошную среду, в которой внутренние силы сводятся к давлению, причем независимо от того, находится ли среда в состоянии равновесия или движения. Это означает, что если выделить в жидкости некоторую область Ω , ограниченную поверхностью Γ , то действие на нее остальной части жидкости описывается силой, направленной в каждой точке $\mathbf{x} \in \Gamma$ по внутренней нормали. При этом сама величина p давления, приходящегося на единицу площади, зависит не от ориентации той бесконечно малой площадки, к которой давление приложено, а лишь от ее координат. Таким образом, на элемент поверхности dS в идеальной жидкости действует сила

$$-p \mathbf{n} dS = -(p \cos \alpha \mathbf{i} + p \cos \beta \mathbf{j} + p \cos \gamma \mathbf{k}) dS, \quad (5.8)$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали $\mathbf{n}$. Знак “–” в (5.8) выбран в связи с тем, что положительное давление действует в направлении внутренней нормали. На всю область Ω будет действовать сила, равная поверхностному интегралу

$$-\int_{\Gamma} p \mathbf{n} dS = -\left(\int_{\Gamma} p \cos \alpha dS \mathbf{i} + \int_{\Gamma} p \cos \beta dS \mathbf{j} + \int_{\Gamma} p \cos \gamma dS \mathbf{k} \right),$$

который с помощью формулы (4.3) можно свести к тройному интегралу

$$-\int_{\Omega} \nabla p d\mathbf{x}. \quad (5.9)$$

Формула (5.9) означает, что объемная плотность внутренних сил в идеальной жидкости равна $-\nabla p$. Из (5.9) и предыдущих результатов следует, что объемная плотность сил, действующих в идеальной жидкости, имеет вид

$$-\nabla p + \rho \mathbf{f}, \quad (5.10)$$

где $\mathbf{f}$ – массовая плотность всех внешних сил (например, силы тяжести, силы Кориолиса и т. д.). В проекциях на оси координат (5.10) имеет вид

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.11)$$

Теперь мы в состоянии вывести уравнение, описывающее движение жидкости под действием сил с объемной плотностью (5.10). С этой целью подставим в (5.4) вместо ψ произведение ρu_i , а вместо q компоненту (5.11) силы (5.10). В результате получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \operatorname{div}(\rho u_i \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i,$$

которое можно переписать в виде

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) \right] u_i = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i. \quad (5.12)$$

В силу уравнения неразрывности (5.6) выражение в квадратных скобках в (5.12) обращается в нуль. В результате приходим к следующим уравнениям

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.13)$$

для компонент u_i , эквивалентных одному векторному уравнению

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}. \quad (5.14)$$

Здесь через $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ обозначен вектор, имеющий размерность ускорения, называемый в гидродинамике *конвективным ускорением*, компоненты которого в декартовом базисе определяются формулами

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Уравнение (5.14) называется основным уравнением гидродинамики идеальной жидкости. Его также называют *уравнением Эйлера* в честь выдающегося ученого Леонардо Эйлера (1707–1783). Поскольку его вывод основан на интегральном законе сохранения импульса, то уравнение (5.14) называется также *дифференциальным законом сохранения импульса*.

Уравнения (5.5), (5.14) представляют собой систему четырех скалярных дифференциальных уравнений относительно пяти скалярных искомых

функций: компонент u_1, u_2, u_3 скорости u , давления p и плотности ρ , т. е. они образуют *незамкнутую* (неполную) математическую модель. Для ее замыкания к (5.5), (5.14) следует присоединить еще одно скалярное уравнение. Для рассматриваемой нами идеальной жидкости в качестве такого уравнения можно использовать термодинамическое уравнение состояния, имеющее в простейшем случае вид

$$p = P(\rho), \quad (5.15)$$

где $P(\rho)$ – заданная функция. В результате мы получим замкнутую систему пяти скалярных уравнений (5.5), (5.14) и (5.15) для пяти неизвестных u_1, u_2, u_3, p и ρ . Указанная система, называемая *математической моделью идеальной баротропной жидкости*, характеризует так называемую *однопараметрическую* среду, т. е. среду, в которой все термодинамические величины зависят от одного параметра, в данном случае от плотности ρ .

Более реалистическими являются *двухпараметрические* среды, для которых все термодинамические величины зависят от двух параметров, например, плотности ρ и энтропии s . (О физическом смысле энтропии можно прочитать, например, в [30]). Для таких сред (5.15) следует заменить уравнением

$$p = P(\rho, s), \quad (5.16)$$

а для замыкания системы (5.5), (5.14), (5.16) следует добавить еще одно уравнение для энтропии s . Указанное уравнение легко получается из общего закона сохранения (5.4), в котором следует положить $\psi = s$, $q = 0$ (последнее условие объясняется отсутствием источников энтропии в идеальной жидкости). В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \operatorname{div}(s\mathbf{u}) = 0, \quad (5.17)$$

называемому уравнением *адиабатичности* и описывающему фактически закон сохранения энергии в идеальной жидкости. Уравнения (5.5), (5.14), (5.16) и (5.17) образуют *модель идеальной двухпараметрической жидкости*.

Наряду с двухпараметрическими средами существуют среды, в которых давление зависит от трех и более параметров. Так, например, морскую воду, представляющую собой химический раствор, содержащий растворенные частицы соли и других веществ, можно считать трехпараметрической средой, в которой давление p будет зависеть не только от плотности ρ и энтропии s , но и от солёности S . Поэтому для более точного описания гидродинамических процессов в океане уравнение (5.16) следует заменить на уравнение

$$p = P(\rho, s, S), \quad (5.18)$$

а к системе (5.5), (5.14), (5.17), (5.18) следует добавить еще одно уравнение для S , получающееся из (5.4) при $\psi = S$, $q = F_S$, и имеющее вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(S\mathbf{u}) = F_S. \quad (5.19)$$

Здесь F_S – объемная плотность источников солей.

Приведенные выше модели описывают сплошные среды, характеризующие газы и сжимаемые жидкости. Многие среды, как, например, обычная вода, практически несжимаемы. Поэтому для замыкания математических моделей, описывающих такие среды, вместо уравнений состояния вида (5.15), (5.16), (5.18) следует добавить условие несжимаемости жидкости, имеющее вид

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \quad (5.20)$$

В силу (5.20) и тождества (4.20) уравнение неразрывности (5.5) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0. \quad (5.21)$$

Математическая природа уравнения 1-го порядка (5.21) такова (см. § 2 гл. 2), что его решения принимают постоянные значения на характеристиках уравнения (5.21), описывающих по своему физическому смыслу траектории частиц движущейся жидкости. Отсюда следует, что плотность ρ несжимаемой жидкости сохраняется вдоль любой траектории (т. е. вдоль характеристики уравнения (5.21)), хотя и может изменяться при переходе от одной траектории к другой. С учетом последнего обстоятельства указанную жидкость называют *неоднородной*, а соответствующую систему уравнений (5.14), (5.20) и (5.21) называют моделью идеальной несжимаемой неоднородной жидкости. В важном частном случае, когда $\rho = \operatorname{const}$, жидкость называется *однородной*. Поскольку уравнение (5.21) тождественно выполняется при $\rho = \operatorname{const}$, то модель идеальной несжимаемой однородной жидкости состоит из четырех скалярных уравнений (5.14), (5.20) относительно четырех скалярных функций u_1, u_2, u_3 и p .

Итак, выше мы вывели пять математических моделей, описывающих движение идеальной жидкости. Перечислим их: 1) модель M_1 идеальной баротропной жидкости, состоящая из пяти скалярных уравнений (5.5), (5.14), (5.15); 2) модель M_2 идеальной двухпараметрической жидкости, состоящая из шести уравнений (5.5), (5.14), (5.16) и (5.17); 3) модель M_3 идеальной трехпараметрической жидкости, состоящая из семи уравнений (5.5), (5.14), (5.17), (5.18) и (5.19); 4) модель M_4 идеальной несжимаемой неоднородной жидкости, состоящая из пяти уравнений (5.14), (5.20), (5.21) и 5) модель M_5 идеальной несжимаемой однородной жидкости, состоящая из четырех уравнений (5.14), (5.20) при $\rho = \operatorname{const}$.

В заключение отметим, что все пять построенных моделей содержат дифференциальные уравнения лишь первого порядка. Это не случайно, поскольку при их выводе мы пренебрегали действием эффектов вязкости, теплопроводности и химических реакций, которые описываются выражениями, содержащими производные второго и более высокого порядка от искомых функций. Таким образом, все построенные в п. 5.3 модели относятся к идеальной жидкости, в которой внутренние силы состоят из сил давления. В этом смысле все указанные модели описывают *идеальный* гидродинамический процесс (ср. с п. 1 § 1).

5.4. Модели движения вязкой жидкости. Модели идеальной жидкости являются весьма приближенными, поскольку в реальных жидкостях всегда присутствует трение, вызываемое наличием вязкости в жидкости. Наличие вязкости в жидкости приводит к возникновению дополнительной внутренней силы (препятствующей движению жидкости). Ее объёмная плотность часто моделируется выражением [40]:

$$\mu \Delta \mathbf{u}. \quad (5.22)$$

Здесь $\Delta \mathbf{u}$ – векторный лапласиан от скорости $\mathbf{u}$, определяемый, в частности, в декартовой системе координат формулой $\Delta \mathbf{u} = \Delta u \mathbf{i} + \Delta v \mathbf{j} + \Delta w \mathbf{k}$, μ – постоянный коэффициент динамической вязкости, имеющий размерность кг/м·сек. В общем случае коэффициент μ может зависеть как от точек $\mathbf{x} \in D$, так и от некоторых характеристик среды, например, температуры, причем выражение для силы вязкого трения имеет более сложный вид, чем в (5.22) (см., например, [40]). Однако рассмотрение более сложных моделей выходит за рамки данной книги. Добавив выражение (5.22) в правую часть основного уравнения движения идеальной жидкости (5.14), приходим к уравнению

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \quad (5.23)$$

представляющему собой основное уравнение движения вязкой жидкости. Оно называется векторным *уравнением Навье-Стокса* в честь французского инженера А. Navier (1785–1836) и английского физика G.G. Stokes (1819–1903), много сделавших для становления и развития гидродинамики вязкой жидкости.

Заменив в моделях M_1 и M_5 идеальных жидкостей уравнение движения идеальной жидкости (5.14) уравнением (5.23), мы получим еще две математические модели, описывающие движение вязкой жидкости: модель M_6 вязкой баротропной жидкости и модель M_7 вязкой несжимаемой однородной жидкости. Они описываются соответственно уравнениями

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad p = P(\rho),$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{f}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \rho = \text{const.}$$

Последняя модель, называемая *моделью Навье-Стокса*, является одной из важнейших моделей в гидродинамике вязкой несжимаемой жидкости.

Наряду с приведенными моделями движения вязкой жидкости, существует еще большое количество других моделей, в которых, кроме сил вязкого трения, учитываются и другие эффекты, описываемые дифференциальными операторами второго порядка. Среди них различают модели теплопереноса, учитывающие действие в жидкости как сил трения, так и тепловых эффектов, модели массопереноса, модели вязкой токопроводящей жидкости, учитывающие эффекты действия электромагнитных сил на проводящую жидкость, и т. д.

Ограничимся здесь приведением трех математических моделей. Первая модель описывает движение вязкой однородной несжимаемой теплопроводной жидкости. Предварительно отметим, что наличие градиента температуры в жидкости приводит к возникновению в ней дополнительной объемной силы. Чтобы вывести выражение для ее плотности, рассмотрим область D , в которой находится жидкость с постоянной плотностью ρ_0 и постоянной температурой T_0 . Предположим, что после нагревания либо охлаждения некоторой подобласти Ω области D плотность и температура жидкости в Ω становятся равными ρ и T . Тогда на жидкость в области Ω со стороны оставшейся жидкости будет действовать сила, имеющая смысл силы плавучести, объемная плотность которой равна $(\rho - \rho_0)\mathbf{g}$. Если разность $\rho - \rho_0$ мала по сравнению с ρ_0 , то термодинамическое уравнение состояния жидкости может быть приближенно записано в виде $\rho = \rho_0 - \rho_0 \alpha_T (T - T_0)$ [5, с.210], [15, с.264]. Здесь параметр $\alpha_T > 0$, называемый *объемным коэффициентом теплового расширения*, имеет размерность K^{-1} , где K – сокращенное обозначение Кельвина как единицы температуры. Он так назван в честь английского физика W. Thomson (1824–1907), получившего в 1892г. за выдающиеся научные заслуги титул барона Кельвина (Kelvin). С учетом указанного приближения объемную плотность $\mathbf{f}_T$ силы плавучести можно записать в виде

$$\mathbf{f}_T = -\rho_0 \alpha_T (T - T_0) \mathbf{g}. \quad (5.24)$$

Выражение (5.24) следует добавить в уравнение (5.23), в котором следует положить $\rho = \rho_0$. Поскольку в (5.24) входит неизвестная в общем случае температура T , то для построения замкнутой модели к построенной системе уравнений необходимо присоединить соответствующее уравнение для T . В качестве последнего можно взять уравнение (4.21) при $\rho = \rho_0$, $c = \text{const}$ и $k = \text{const}$. В результате приходим к следующей модели

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} - \rho_0 \alpha_T (T - T_0) \mathbf{g}, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

$$\rho_0 c \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T - \mathbf{u} \cdot \nabla T + F, \quad \rho_0 = \text{const.} \quad (5.25)$$

Модель (5.25) описывает процесс движения вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости. Указанная модель, называемая моделью Обербека-Буссинеска, была выведена нами при использовании так называемого *приближения Буссинеска*. Согласно этому приближению изменения плотности в жидкости, вызываемые наличием градиентов температуры, учитываются в соответствии с термодинамическим уравнением состояния лишь в записи дополнительной объемной силы – силы плавучести, в виде (5.24). Кроме того, коэффициенты μ , k и c считаются постоянными, а диссипативная функция F_μ в (4.22), описывающая влияние вязкости жидкости на тепловые процессы, считается равной нулю. Если отбросить последнее предположение, то уравнение для температуры в (5.25) следует заменить более сложным уравнением, имеющим вид (4.23), (4.22).

В качестве второй модели выведем модель переноса вещества (например, загрязняющей примеси) в вязкой несжимаемой жидкости. Как и выше, воспользуемся приближением Буссинеска. Согласно ему коэффициенты вязкости и диффузии μ и η считаются константами, тогда как сила плавучести, возникающая за счет изменения плотности среды, вызываемого наличием вещества с концентрацией C , является линейной функцией от C . Для вывода выражения этой силы рассмотрим область D жидкости постоянной плотности ρ_0 , в которой находится вещество с постоянной концентрацией C_0 . Предположим, что в некоторой части Ω области D произошло изменение количества вещества, в результате чего плотность и концентрация приняли значения, равные ρ и C . Тогда со стороны оставшейся жидкости на область Ω будет действовать сила плавучести, объемная плотность которой равна $(\rho - \rho_0)\mathbf{g}$. Если разность $\rho - \rho_0$ мала, то уравнение состояния может быть записано в виде $\rho = \rho_0 + \rho_0 \alpha_C (C - C_0)$ [15, с.264]. Здесь параметр $\alpha_C > 0$, имеющий размерность м³/кг, носит название *объемного коэффициента массового расширения* жидкости. С учетом этого объемную плотность $\mathbf{f}_C$ силы плавучести можно записать в виде

$$\mathbf{f}_C = \rho_0 \alpha_C (C - C_0) \mathbf{g}. \quad (5.26)$$

Выражение (5.26) следует добавить в уравнение (5.23). Поскольку (5.26) содержит неизвестную в общем случае концентрацию C , то для замыкания соответствующей модели к ней необходимо присоединить уравнение для концентрации C . В качестве его следует взять уравнение (4.27) при $\eta = \text{const}$. В результате приходим к следующей математической модели:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} + \rho_0 \alpha_C (C - C_0) \mathbf{g}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= \eta \Delta C - \mathbf{u} \cdot \nabla C + F_C, \quad \rho_0 = \text{const.} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Данная модель массопереноса, называемая моделью Обербека-Буссинеска, описывает процесс переноса вещества или масс в вязкой несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска.

В случае, если перенос вещества происходит в теплопроводной жидкости, в которой существенны тепловые эффекты, возникают две силы плавучести: одна вызывается наличием вещества в жидкости, а другая – температурными эффектами. Добавив выражения (5.24) и (5.26) для указанных сил в уравнение сохранения импульса (5.23) и присоединив к полученному уравнению соответствующие уравнения для температуры T и концентрации C и условие несжимаемости, приходим к еще одной математической модели, называемой *моделью тепло- и массопереноса* в жидкости:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{f} - \rho_0 [\alpha_T (T - T_0) - \alpha_C (C - C_0)] \mathbf{g}, \\ \rho_C \frac{\partial T}{\partial t} &= k \Delta T - \mathbf{u} \cdot \nabla T + F, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = \eta \Delta C - \mathbf{u} \cdot \nabla C + F_C, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Отметим, что для выделения единственного решения приведенных здесь математических моделей необходимо задавать начальные и краевые условия. Подробное обсуждение различных формулировок начально-краевых задач для указанных моделей можно найти в цитируемых выше руководствах по гидродинамике и тепломассопереносу [30], [40], [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Все приведенные выше модели описывают *нестационарное* движение жидкости. В случае, когда процессы движения жидкости являются *стационарными*, т. е. не зависят от времени, мы приходим к стационарным моделям движения жидкости. Они получаются из приведенных моделей отбрасыванием в исходных уравнениях слагаемых вида $\rho \partial \mathbf{u} / \partial t$, $\partial \rho / \partial t$, $\partial s / \partial t$ и т. д.

5.5. Модель стационарного безвихревого движения несжимаемой жидкости. Рассмотрим стационарный процесс движения идеальной несжимаемой однородной жидкости под действием силы тяжести. Отвечающая этому случаю модель M_5 принимает с учетом замечания 5.1 и условия $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ вид

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \rho = \text{const}. \quad (5.29)$$

Используя известное из векторного анализа векторное тождество

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)$$

и предполагая, что массовая сила является потенциальной, так что $\mathbf{g} = -\nabla G$, где G – потенциал силы тяжести, перепишем (5.29) в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + G \right), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (5.30)$$

Многие течения идеальной жидкости являются *безвихревыми*, т. е. удовлетворяют условию $\operatorname{rot} \mathbf{u} \equiv 0$. Для таких течений модель (5.30) принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (5.31)$$

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + G \right) = 0 \Rightarrow \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} + G = \text{const}, \quad \rho = \text{const}. \quad (5.32)$$

Важно отметить, что гидродинамическая модель в данном случае разделилась, т. е. свелась к системе двух уравнений (5.31) для скорости $\mathbf{u}$ и уравнению (5.32) для давления. Оно называется в гидродинамике уравнением Бернулли.

Напомним, следуя [19, с.200], что трехмерная область D называется *поверхностно-односвязной* (или просто *односвязной*), если для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой $\Gamma \subset D$ можно указать такую ориентируемую кусочно-гладкую поверхность в D , границей которой является Γ . Известно [19, с.200], что условие $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ эквивалентно (по крайней мере для односвязных областей) условию потенциальности потока, т. е. существованию такой функции φ , называемой *потенциалом скорости*, что $\mathbf{u} = -\operatorname{grad} \varphi$. Подставляя это соотношение во второе уравнение в (5.31), приходим с учетом (3.18) к уравнению Лапласа

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) \equiv \Delta \varphi = 0 \quad (5.33)$$

для потенциала φ . Следовательно, уравнение (5.33) образует математическую модель стационарного безвихревого движения идеальной однородной несжимаемой жидкости. Таким образом, задача изучения потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости сводится к нахождению решения уравнения Лапласа. Решив его при соответствующих граничных условиях на границе Γ области Ω и на бесконечности, если Ω – неограниченная область (см. об этом в § 3), мы найдем искомую скорость $\mathbf{u}$ по формуле $\mathbf{u} = -\operatorname{grad} \varphi$. Итак, в этом пункте построен пример еще одного физического процесса, а именно: стационарного потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости, исследование которого сводится к решению краевой задачи для уравнения Лапласа.

5.6. Сила Кориолиса и элементы динамики океана. Другим важным примером внешней силы является сила *Кориолиса*, названная в честь

французского ученого G.G. Coriolis (1792–1842). Указанную силу, возникающую вследствие вращения Земли, необходимо учитывать при рассмотрении гидродинамических процессов в океане. Согласно теории вращающихся тел, массовая плотность $\mathbf{f}^c$ силы Кориолиса определяется формулой [57, с.21]

$$\mathbf{f}^c = -2\Omega \times \mathbf{u}. \quad (5.34)$$

Здесь Ω – вектор угловой скорости вращения Земли, направление которого совпадает с направлением оси Земли (с юга на север), а величина равна примерно $1.46 \times 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$. Предположим для определенности, что ось y направлена по касательной к поверхности Земли на север (см. рис. 5.1.), тогда как ось z направлена вертикально вверх. Ось x в таком случае будет направлена на восток, поскольку тройка единичных ортов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ образует правый базис. Из рис. 5.1 видно, что угол между осью y и направлением вектора Ω в точке с широтой θ равен θ . Отсюда следует, что

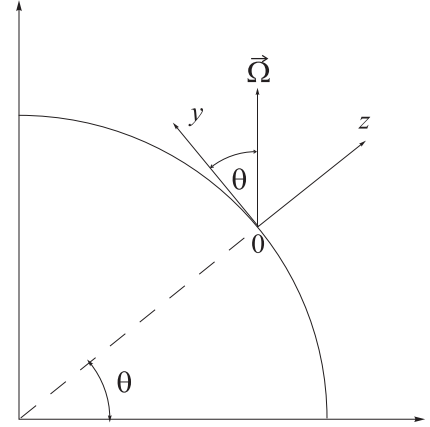


Рис. 5.1.

$$\Omega = |\Omega|(0, \cos \theta, \sin \theta). \quad (5.35)$$

Проекция на ось x вектора Ω равна нулю, так как при любом θ вектор Ω лежит в плоскости yz . С учетом (5.35) силу Кориолиса можно записать в виде

$$\mathbf{f}^c = -2|\Omega|[\mathbf{i}(w \cos \theta - v \sin \theta) + \mathbf{j}u \sin \theta - \mathbf{k}u \cos \theta]. \quad (5.36)$$

Добавление в правую часть (5.14) слагаемого $\rho \mathbf{f}^c$ приводит к следующему уравнению движения, учитывающему вращение Земли

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f} + \rho \mathbf{f}^c. \quad (5.37)$$

Уравнение (5.37), где вектор $\mathbf{f}$ в правой части описывает остальные силы, действующие в океане, является основным уравнением динамики океана.

При изучении динамических процессов в океане часто предполагается, что вертикальные перемещения жидкости малы по сравнению с горизонтальными, так что $|w| \ll |u|$ и $|w| \ll |v|$. Кроме того, вертикальная (z) компонента силы Кориолиса много меньше силы тяжести, и ее можно не учитывать. С учетом этого выражение (5.36) можно приближенно переписать в виде

$$\mathbf{f}^c = -2|\Omega|(-\mathbf{i}v \sin \theta + \mathbf{j}u \sin \theta) = f(\mathbf{i}v - \mathbf{j}u). \quad (5.38)$$

Величина $f = 2|\Omega| \sin \theta$ в (5.38) зависит от широты θ . Если область D имеет малые размеры (по сравнению с размерами Земли), указанной зависимостью от θ можно пренебречь и считать, что $f = \text{const}$. В этом случае о соответствующем приближении для силы Кориолиса говорят как о *приближении f -плоскости*. Другое, более точное, приближение для величины f заключается в том, чтобы считать ее линейной функцией от y : $f = f_0 + \beta y$, где f_0 и β – некоторые постоянные. В этом случае говорят о *приближении β -плоскости*. Более подробно об этих и других приближениях можно прочитать, например, в [57].

Размерности основных величин и параметров, используемых в этом параграфе приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1

вели- чины	$\mathbf{u}$	ρ	p	$g, \mathbf{f}^c$	s	μ	T	α_T	$\mathbf{f}_T, \mathbf{f}_C$	k, η, φ	F	α_C	F_S	G
размернос- ти в СИ	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$	$\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2 \cdot \text{К}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$	К	К^{-1}	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}^2}$	$\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$\frac{\text{К}}{\text{с}}$	$\frac{\text{м}^3}{\text{кг}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}$	$\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$

§6. Математическая модель распространения звука в жидкости

В этом параграфе мы выведем математическую модель, описывающую распространение в жидкости *звуковых волн*, т. е. распространение в жидкости гидродинамических возмущений малой амплитуды. Физически звуковая волна представляет собой процесс попеременного сжатия или разряжения среды, который распространяется с так называемой скоростью звука во всех возможных направлениях от источника звука. Строгое математическое определение звуковой волны будет дано в § 3 гл. 3.

6.1. Модель распространения звука в однородной среде. Пусть Ω – область пространства $\mathbb{R}^3$ с границей Γ , занятая жидкостью. При рассмотрении звуковых процессов в жидкости либо в газе в большинстве случаев можно пренебречь эффектами вязкости, теплопроводности и солености, либо учесть их действие эмпирически в выражениях для скорости звука. Исходя из этого, выберем в качестве основы для вывода уравнений акустики следующую простейшую гидродинамическую модель (модель M_1 из § 5):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \tag{6.1}$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{f}, \tag{6.2}$$

$$p = P(\rho). \tag{6.3}$$

Здесь записаны соответственно уравнения неразрывности, сохранения импульса и состояния, где $\mathbf{u}$ – скорость, p – давление, ρ – плотность, $\mathbf{f}$ – массовая плотность всех внешних сил, $P(\rho)$ – заданная функция плотности ρ .

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathbf{f} = 0$ и жидкость находится в покое: $\mathbf{u} = 0$. Нетрудно проверить, что в этом случае параметры ρ и p жидкости постоянны. Действительно, обозначив эти величины в состоянии покоя нулевым индексом внизу, имеем из (6.1)–(6.3), что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0(\mathbf{x}), \quad \nabla p = 0 \Rightarrow p = p_0(t), \quad (6.4)$$

$$p = P(\rho) \Rightarrow p = p_0 = \text{const}, \quad \rho = \rho_0 = \text{const}.$$

Рассмотрим далее движение жидкости, возникающее при малом возмущении указанного состояния равновесия. С этой целью представим гидродинамические параметры жидкости в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}', \quad p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad (6.5)$$

причем величины $|\mathbf{u}'|$, p' и ρ' будем считать малыми вместе с их производными по сравнению с p_0 и ρ_0 . Подставляя (6.5) в уравнения (6.1) и (6.2), будем иметь с учетом равенств $\partial \rho_0 / \partial t = 0$, $\nabla p_0 = 0$, что

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \rho' + \rho_0 \text{div} \mathbf{u}' + \rho' \text{div} \mathbf{u}' = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \rho' \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \rho_0 (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' + \rho' (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\nabla p'.$$

Пренебрегая в этих соотношениях величинами второго и третьего порядка малости, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \text{div} \mathbf{u}' = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = -\nabla p'. \quad (6.6)$$

В силу уравнения состояния (6.3) величины ρ' и p' должны быть связаны друг с другом. Чтобы получить указанную связь, разложим функцию $P(\rho)$ в ряд Тейлора в окрестности ρ_0 с точностью до членов второго порядка малости. Учитывая в силу (6.4), что $P(\rho_0) = p_0$, будем иметь

$$p = P(\rho_0) + \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) + O[(\rho - \rho_0)^2] \approx p_0 + \left. \frac{dP}{d\rho} \right|_{\rho=\rho_0} \rho'. \quad (6.7)$$

Величина $dP/d\rho$ всегда существенно положительна, так как плотность растет с увеличением давления и наоборот. В силу этого можно положить

$$c^2 = (dP/d\rho)|_{\rho=\rho_0}. \quad (6.8)$$

С учетом (6.8) и (6.5) равенство (6.7) примет вид

$$p' = c^2 \rho'. \quad (6.9)$$

Подставляя (6.9) в (6.6) и опуская (для простоты обозначений) в дальнейшем штрихи над $\mathbf{u}'$, p' и ρ' , приходим к искомой системе уравнений

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (6.11)$$

которая и описывает распространение малых возмущений, т.е. звуковых волн, в жидкости.

Рассмотрим теперь случай, когда в среде присутствуют внешние силы с плотностью $\varepsilon \mathbf{f}$, где ε – малый параметр, а $\mathbf{f}$ имеет физический смысл массовой плотности источников гидродинамических возмущений в среде. В этом случае, следуя теории возмущений, представим гидродинамические параметры $\mathbf{u}$, p и ρ в среде в виде $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}'$, $p = p_0 + \varepsilon p'$, $\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho'$, где величины $\mathbf{u}'$, p' и ρ' имеют тот же смысл, что и в (6.5). Подставляя эти соотношения в (6.1)–(6.3) и отбрасывая слагаемые порядков $O(\varepsilon^2)$ и $O(\varepsilon^3)$, приходим к системе уравнений, которая получается из (6.9)–(6.11) заменой уравнения (6.10) уравнением

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho_0 \mathbf{f}. \quad (6.12)$$

(Мы опять опускаем штрихи над $\mathbf{u}'$, p' и ρ'). Подробный вывод уравнения (6.12) можно найти, например, в [3, с.21].

Система (6.11), (6.12) состоит из четырех скалярных уравнений для четырех скалярных функций: трех компонент u , v , w вектора $\mathbf{u}$ и функции p , и получается путем линеаризации нелинейной системы уравнений гидродинамики (6.1)–(6.3). Линеаризация возможна, поскольку мы рассматриваем распространение малых возмущений гидродинамических параметров в жидкости. Указанную систему (6.11), (6.12) называют *математической моделью* распространения звука в жидкости или просто системой уравнений *линейной акустики*, а величины $\mathbf{u} = (u, v, w)$, p и $\rho = p/c^2$ носят названия соответственно вектора *колебательной скорости* частиц, *звукового давления* и *звуковой плотности*.

6.2. Волновое уравнение для звукового давления. Постановка начальных и граничных условий. Следует отметить, что система уравнений (6.11), (6.12) неудобна для проведения математического анализа, поскольку она содержит четыре скалярных уравнения для четырех неизвестных функций, связанных друг с другом через коэффициенты. В

математическом плане удобнее работать с одним уравнением, содержащим одну неизвестную функцию, например, звуковое давление p . Чтобы получить соответствующее уравнение, применим к уравнению (6.12) операцию $c^2 \operatorname{div}$, а к (6.11) – операцию $\partial/\partial t$ (в предположении достаточной гладкости функций $\mathbf{u}$ и p) и вычтем друг из друга полученные соотношения. Используя (3.18), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p + F, \quad (6.13)$$

где

$$F = -\rho_0 c^2 \operatorname{div} \mathbf{f}. \quad (6.14)$$

Математическая природа уравнения (6.13) такова, что оно описывает процесс распространения волн (см. гл. 3.). Поэтому уравнение (6.13) называют *волновым уравнением*, *однородным* при $F = 0$ и *неоднородным* в противном случае. Коэффициент c в нем физически представляет собой скорость распространения волн и, следовательно, имеет в нашем случае смысл скорости звука. Ввиду этого уравнение (6.13) можно назвать *волновым уравнением акустики*. В декартовой системе координат x, y, z уравнение (6.13) имеет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + F. \quad (6.15)$$

Таким образом, задача нахождения звукового давления p сводится к нахождению решения уравнения (6.13), рассматриваемого в области Ω пространства $\mathbb{R}^3$, где изучается звуковой процесс. Для выделения единственного решения к уравнению (6.13) необходимо добавить начальные и краевые условия. Если $\Omega = \mathbb{R}^3$, так что процесс распространения звука рассматривается во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, задаются лишь начальные условия

$$p|_{t=0} = p_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial p}{\partial t}|_{t=0} = p_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (6.16)$$

Здесь p_0 и p_1 – некоторые заданные функции точек $\mathbf{x} \in \Omega$, а задача (6.13), (6.16) называется *задачей Коши* для уравнения (6.13). В случае, когда $\Omega \neq \mathbb{R}^3$, к начальным условиям следует добавить граничное условие на границе Γ области Ω , имеющее в общем случае вид

$$ap + b \frac{\partial p}{\partial n} = g \text{ на } \Gamma, \quad (6.17)$$

где a, b и g – некоторые заданные функции точек границы Γ и времени t .

В соответствии с терминологией, введенной в § 3, задача (6.13), (6.16), (6.17) называется первой начально-краевой задачей или задачей Дирихле

при $a = 1, b = 0$, второй начально-краевой задачей или задачей Неймана при $a = 0, b = 1$, третьей начально-краевой задачей при $b = 1, a \neq 0$ и смешанной начально-краевой задачей в остальных случаях. Таким образом, изучение процесса распространения звуковых волн методом математического моделирования сводится к нахождению решений начально-краевой задачи (6.13), (6.16), (6.17) при определенных начально-краевых условиях, физическому анализу полученных решений и применению полученных результатов для решения конкретных прикладных задач. Более подробно об этом можно прочитать, например, в [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. В гл. 2 будет показано, что волновое уравнение (6.13) является уравнением *гиперболического типа*. Гиперболическая начально-краевая задача (6.13), (6.16), (6.17) подробно изучается в общем курсе дифференциальных уравнений в частных производных, где доказывается ее корректность при некоторых естественных условиях на исходные данные (см., например, [11, 34, 35]). В настоящей книге задача (6.13), (6.16), (6.17) будет изучаться в некоторых частных случаях: в случае, когда $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$ (см. гл. 3), либо в случае, когда Ω имеет вид некоторой канонической области типа отрезка на вещественной оси $\mathbb{R}$, прямоугольника либо круга в $\mathbb{R}^2$ и шара в $\mathbb{R}^3$, а решение может быть представлено в виде бесконечного ряда Фурье (см. гл. 4).

Из постановки задачи (6.13), (6.16), (6.17) вытекает, что существует три различных источника звуковых волн: *объемные* с плотностью F , *поверхностные* с (поверхностной) плотностью g и *начальные*, описываемые функциями p_0 и p_1 . Если, в частности, $F = 0, g = 0, p_0 = 0, p_1 = 0$, то единственным решением задачи (6.13), (6.16), (6.17) в силу ее линейности и корректности является функция $p = 0$. Таким образом, в отсутствие источников волновое поле отсутствует, что физически совершенно естественно.

6.3. Потенциал звукового поля. Уравнения, аналогичные волновому уравнению (6.13), можно получить и для других акустических величин. Так, для плотности ρ указанное уравнение получается в силу соотношения $p = c^2 \rho$ делением уравнения (6.13) на c^2 и имеет вид

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = c^2 \Delta \rho - \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{f}. \quad (6.18)$$

Чтобы получить соответствующее уравнение для $\mathbf{u}$, применим к уравнению (6.11) операцию $(1/\rho_0) \operatorname{grad}$, к уравнению (6.12) – операцию $(1/\rho_0) \partial/\partial t$ и вычтем друг из друга полученные выражения. Используя известное тождество векторного анализа [19, с.159]

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}, \quad (6.19)$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c^2 (\Delta \mathbf{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}. \quad (6.20)$$

Если, в частности, поле $\mathbf{u}$ является *безвихревым*, т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega \times (0, T), \quad (6.21)$$

то уравнение (6.20) принимает вид *векторного волнового уравнения*

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}. \quad (6.22)$$

Укажем достаточные условия, при которых выполняется условие (6.21). С этой целью применим оператор $(1/\rho_0)\operatorname{rot}$ к (6.12) и проинтегрируем полученное выражение по t . Поскольку в силу (3.18) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} p = 0$, то будем иметь

$$\frac{\partial(\operatorname{rot} \mathbf{u})}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{f} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) + \int_0^t \operatorname{rot} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \quad (6.23)$$

Равенство (6.23) показывает, что достаточные условия, при которых выполняется условие (6.21), имеют вид

(i) $\operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \equiv 0$ в Ω , (ii) $\operatorname{rot} \mathbf{f} \equiv 0$ в $\Omega \times (0, T)$.

Следует отметить, что уравнение (6.22) на практике используется очень редко, да в этом и нет необходимости, поскольку в большинстве случаев колебательную скорость $\mathbf{u}$ можно выразить через ее скалярный потенциал. Действительно, предположим в дополнение к (i), (ii), что выполняется еще одно условие:

(iii) Ω – односвязная область.

Условие (iii) заведомо выполняется, если $\Omega = \mathbb{R}^3$. Как уже указывалось в п. 5.5, при выполнении условия (iii) условие (6.21) эквивалентно условию потенциальности поля $\mathbf{u}$ [19, с. 200]. Последнее означает существование такой функции φ , называемой *акустическим потенциалом* поля $\mathbf{u}$, что

$$\mathbf{u} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (6.24)$$

При этом φ можно ввести по формуле

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = - \int_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} ds. \quad (6.25)$$

Здесь L – произвольная кусочно-гладкая кривая, соединяющая фиксированную точку $\mathbf{x}_0$ с переменной точкой $\mathbf{x}$ области Ω , $\mathbf{t}$ – единичный вектор касательной к кривой L . Ясно в силу формулы (6.24), что потенциал φ определяется с точностью до произвольной функции от t .

Важно отметить, что знание акустического потенциала φ позволяет определить не только скорость $\mathbf{u}$ по формуле (6.24), но и звуковое давление

p . Действительно, в силу условий (i)–(iii) существуют такие функции $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $\chi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, что

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = -\text{grad}\psi, \quad \mathbf{f} = -\text{grad}\chi. \quad (6.26)$$

С учетом (6.26) уравнение (6.12) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho_0} + \chi \right).$$

Интегрируя это уравнение по t , будем иметь

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) - \nabla \int_0^t \left(\frac{p}{\rho_0} + \chi \right) d\tau = -\nabla \left[\psi + \int_0^t \left(\frac{p}{\rho_0} + \chi \right) d\tau \right]. \quad (6.27)$$

Из (6.24), (6.27) вытекает, что искомый потенциал φ определяется (с точностью до произвольной функции от t) формулой

$$\varphi = \psi + \int_0^t \left(\frac{p}{\rho_0} + \chi \right) d\tau. \quad (6.28)$$

Дифференцируя (6.28) по t , приходим к искомой формуле

$$p = \rho_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \chi \right), \quad (6.29)$$

позволяющей определить давление p по потенциалу φ .

Используя формулы (6.29) и (6.24), нетрудно вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет потенциал φ . Действительно, дифференцируя обе части равенства (6.29) по t и применяя операцию div к (6.24), имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial \chi}{\partial t} \right), \quad \text{div} \mathbf{u} = -\Delta \varphi. \quad (6.30)$$

Подставляя (6.30) в уравнение (6.11), приходим после деления на ρ_0 к искомому волновому уравнению для потенциала φ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varphi + \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (6.31)$$

Решив уравнение (6.31) при соответствующих начальных и краевых условиях, далее по формулам (6.24), (6.29) и (6.9) можно определить все акустические величины: $\mathbf{u}$, p и ρ . Таким образом, знание потенциала φ позволяет определить все характеристики звукового поля. При этом для нахождения

самого потенциала φ достаточно решить начально-краевую задачу для скалярного волнового уравнения (6.31). В этом заключается смысл введения потенциала.

Следует отметить, что в приложениях часто встречаются звуковые поля, обладающие некоторой симметрией, например, не зависящие от одной или двух координат. Для таких полей волновое уравнение (6.13) принимает более простой вид. Так, например, в случае, когда все характеристики звукового поля зависят только от координат x и y , волновое уравнение (6.13) принимает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + F. \quad (6.32)$$

Уравнение (6.32), называемое *двумерным волновым уравнением*, описывает распространение двумерных звуковых волн. Уравнение (6.32) описывает также и другие двумерные волновые процессы, например, оно описывает процесс колебания плоской мембраны около ее положения равновесия.

Точно так же, если характеристики звукового поля зависят только от одной декартовой координаты x , то (6.13) принимает вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + F. \quad (6.33)$$

Уравнение (6.33), называемое *одномерным волновым уравнением*, описывает процесс распространения одномерных звуковых волн и, в частности, звуковых волн с так называемым *плоским фронтом*. Уравнение (6.33) описывает также и другие одномерные волновые процессы. В частности, оно описывает процесс колебания струны около положения своего равновесия (см. § 8).

6.4. Гармонические звуковые волны. Уравнение Гельмгольца. Важным классом решений уравнений (6.11), (6.12) являются *гармонические* звуковые волны, т. е. волны с гармонической зависимостью от времени. Для таких волн основные характеристики звукового поля определяются формулами

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x})e^{-i\omega t}. \quad (6.34)$$

Здесь $i = +\sqrt{-1}$ – мнимая единица, ω – круговая частота рассматриваемого гармонического процесса, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ и $P(\mathbf{x})$ – соответствующие амплитуды векторных полей $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и скалярного поля $p(\mathbf{x}, t)$. Как обычно, при рассмотрении гармонических колебаний физический смысл следует придавать вещественным частям выражений в (6.34). Подставляя (6.34) в (6.11), (6.12), приходим к следующим соотношениям для комплексных амплитуд $\mathbf{v}$ и P

$$P = \frac{\rho_0 c^2}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (6.35)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{i\omega\rho_0}(\nabla P - \rho_0\mathbf{F}). \quad (6.36)$$

Уравнения (6.35), (6.36) представляют собой математическую модель гармонического звукового процесса. Обычным образом из (6.35), (6.36) можно вывести одно скалярное уравнение для давления P . Для этого достаточно применить к уравнению (6.36) операцию $(-c^2\rho_0/i\omega)\operatorname{div}$ и вычесть полученное выражение из (6.35). В результате приходим к следующему уравнению

$$\Delta P + k^2 P = -f. \quad (6.37)$$

Здесь *волновое число* k и правая часть f определяются формулами

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad f = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{F}. \quad (6.38)$$

Уравнение (6.37) называется *уравнением Гельмгольца* (в честь известного немецкого ученого и естествоиспытателя Н.Л.Ф. Helmholtz, 1821–1894).

Таким образом, задача нахождения гармонического звукового поля сводится к нахождению решения уравнения Гельмгольца (6.37) в рассматриваемой области Ω . Для выделения единственного решения уравнения Гельмгольца к нему следует добавить граничное условие на границе Γ . Оно получается из исходного граничного условия (6.17) для p , если там положить $a(\mathbf{x}, t) = \alpha(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, $b(\mathbf{x}, t) = \beta(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, $g(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$, и имеет вид

$$\alpha P + \beta \frac{\partial P}{\partial n} = \gamma \text{ на } \Gamma. \quad (6.39)$$

Здесь α , β и γ – соответствующие амплитуды полей a , b и g , заданных на Γ . Задача (6.37), (6.39) носит название *задачи излучения*.

Приведенная здесь постановка задачи излучения относится к ограниченной области Ω . В случае неограниченной области постановка задачи излучения отличается тем, что к краевым условиям (6.39) необходимо добавить условия, характеризующие поведение давления P на бесконечности. В случае, когда Ω является внешностью компакта в $\mathbb{R}^3$, роль этих условий играют так называемые *условия излучения Зоммерфельда* (названные по имени немецкого физика и математика А. Sommerfeld, 1868–1951). Они имеют вид [11, с. 439]

$$P(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad \frac{\partial P(\mathbf{x})}{\partial |\mathbf{x}|} - ikP(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|^{-1}), \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (6.40)$$

В том модельном случае, когда $\Omega = \mathbb{R}^3$, так что звуковое поле рассматривается во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, условия Зоммерфельда (6.40) выделяют единственное решение уравнения Гельмгольца, причем по своему физическому смыслу оно описывает волну, уходящую в бесконечность. Аналогичный результат справедлив и в случае, когда Ω является внешностью

компакта, при условии, что на границе $\Gamma = \partial\Omega$ задано граничное условие Дирихле или Неймана. Более подробно об этом можно прочитать в [11, §30] и [48, гл. 2].

Отметим, что при изучении звуковых процессов в океане последний обычно моделируют областью типа трехмерного слоя, ограниченного по вертикали и неограниченного по горизонтали. Для таких областей условия на бесконечности, выделяющие единственное решение соответствующей краевой задачи для уравнения Гельмгольца (6.37), отличаются от условий (6.40). Формулировку некоторых таких условий можно найти в [3] и цитируемых там ссылках.

Наряду с задачей излучения звука важную роль играет задача дифракции звука, которую математически можно сформулировать следующим образом. На некоторое тело (препятствие), ограниченное поверхностью Γ (см. рис. 6.1), падает волна, излучаемая, например, объемными источниками и описываемая звуковым давлением P_1 . Падение волны на тело сопровождается образованием новой волны P_s , распространяющейся от тела обратно в среду, из которой пришла падающая волна. Указанная волна P_s называется *отраженной* волной, а само явление образования отраженной волны – *отражением* звука. Требуется определить P_s таким образом, чтобы полное давление $P = P_1 + P_s$, удовлетворяло уравнению Гельмгольца (6.37) вне Γ , однородному граничному условию (6.39) (при $\gamma = 0$) при определенном выборе функций α и β , описывающих акустические свойства границы Γ препятствия, и условиям излучения (6.40). В том модельном случае, когда на Γ падает волна, идущая из бесконечности, условиям излучения должна удовлетворять только отраженная волна P_s .

Термин “отражение” звука часто используется в узком смысле в тех случаях, когда распространение волны удовлетворяет законам так называемой *геометрической акустики*. Если же указанные законы не применимы (например, размеры тела малы по сравнению с длиной волны звука, либо излучение происходит на низких частотах), то вместо термина “отражение” часто употребляют – термин “дифракция” или “рассеяние” звука, а на сформулированную выше задачу нахождения волны P_s ссылаются как на задачу *дифракции* или задачу *рассеяния* звука.

Роль препятствия для звуковых волн может играть и граница Γ_s двух различных сред. Падение волны на указанную границу сопровождается (наряду с отражением) явлением образования волны, распространяющейся от границы во вторую среду. Указанная волна называется *преломленной*

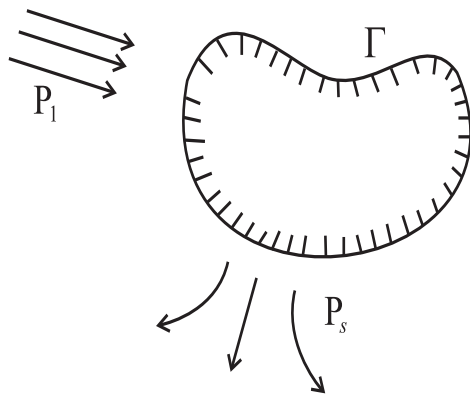


Рис. 6.1.

волной, а само явление образования преломленной волны – *преломлением* звука. Физические законы распространения звука налагают определенные условия на поведение звуковых полей вблизи границы Γ_s раздела обеих сред. В случае жидких сред они заключаются в непрерывности давлений и нормальных компонент колебательных скоростей частиц при переходе через Γ_s . При этом со стороны первой среды должен учитываться вклад падающей и отраженной волн, со стороны второй среды – вклад преломленной волны. Математически указанные условия, называемые *условиями сопряжения*, можно записать в виде

$$P_1 + P_s = P_2, \quad (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n} \quad \text{на } \Gamma_s. \tag{6.41}$$

Здесь $\mathbf{v}_1$ (либо $\mathbf{v}_s$) – колебательная скорость частиц в падающей (либо отраженной) волне, P_2 и $\mathbf{v}_2$ – звуковое давление и колебательная скорость частиц во второй среде. В случае, когда объемные источники отсутствуют, условия (6.41) можно переписать с учетом соотношения (6.36) между колебательной скоростью и звуковым давлением в следующем виде

$$P_1 + P_s = P_2, \quad \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(P_1 + P_s)}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial n} \quad \text{на } \Gamma_s. \tag{6.42}$$

Здесь ρ_2 – плотность второй среды. Таким образом, в данном случае задача дифракции заключается в нахождении звуковых давлений P_s и P_2 , удовлетворяющих соответствующим уравнениям Гельмгольца в своих областях, условиям (6.42) на границе Γ_s и условиям излучения на бесконечности (ему должна удовлетворять только функция P_s , если вторая среда занимает ограниченную область Ω).

Размерности основных используемых здесь величин и параметров в системе СИ приведены в таблице 6.1.

Таблица 6.1

величины	u, v, w, c	ρ, ρ', ρ_0	p', p, p_0, P, P_i, P_s	φ, ψ	$\mathbf{f}, \mathbf{F}$	F	χ	ω	k
размерности в СИ	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	$\text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$	$\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$	$\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$	$\frac{\text{кг}}{\text{с}^4 \cdot \text{м}}$	$\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$	$\frac{1}{\text{с}}$	$\frac{1}{\text{м}}$

§7. Математические модели электромагнитного поля

7.1. Основные величины и уравнения, описывающие электромагнитные процессы. Как и в §§ 4–6, будем рассматривать жидкую или

газообразную среду, занимающую некоторую область Ω трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$. Не останавливаясь здесь на строгом определении электромагнитного процесса, отметим, что при всем огромном многообразии электромагнитных явлений существует фундаментальное теоретическое понятие, позволяющее говорить об их единой основе. Таким понятием является *электромагнитное поле*. С математической точки зрения под электромагнитным полем можно понимать набор вектор-функций $\mathbf{E}$ (либо $\mathbf{D}$), $\mathbf{H}$ (либо $\mathbf{B}$), $\mathbf{J}$ и скалярной функции ρ_e , называемых соответственно *вектором напряженности (либо индукции) электрического поля*, *вектором напряженности (либо индукции) магнитного поля*, *вектором плотности электрического тока* и *плотностью электрических зарядов* в среде, удовлетворяющих в области Ω определенным дифференциальным и функциональным уравнениям.

Указанные уравнения можно разбить на две группы. Первая группа носит название *уравнений Максвелла* по имени выдающегося английского физика D. Maxwell (1831–1879), который впервые получил их в 19-ом веке. Эти уравнения, выведенные Максвеллом путем обобщения известных к тому времени законов электричества и магнетизма и устранения имеющихся в них противоречий, в современной записи имеют (в системе СИ) вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_e, \quad (7.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (7.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (7.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}. \quad (7.4)$$

Уравнение (7.1) является дифференциальным следствием основного закона электростатики – закона *Кулона* (см. § 3) и справедливо не только для статических, но и для нестационарных полей. Уравнение (7.2) является математическим отражением известного физического факта об отсутствии магнитных зарядов как источников магнитного поля. Уравнение (7.3) является следствием закона *электромагнитной индукции Фарадея*, названного так в честь известного английского физика – первооткрывателя явления электромагнитной индукции M. Faraday (1791–1867). Согласно этому закону всякое переменное во времени магнитное поле индуцирует связанное с ним электрическое поле (имеющее в отличие от электростатического поля вихревой характер) и выражает количественную характеристику вихря индуцированного поля. Наконец, уравнение (7.4) представляет собой обобщение дифференциальной формы

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (7.5)$$

известного закона *Био-Савара*, названного так в честь французских физиков J.B. Biot (1774–1862) и F. Savart (1791–1841), открывших его в 1820 г. Он выражает зависимость напряженности магнитного поля от плотности создающего его тока. Уравнение (7.4) отличается от (7.5) дополнительным членом $\partial \mathbf{D}/\partial t$, введенным Максвеллом. Указанный член имеет размерность плотности тока и называется *плотностью токов смещения*. Таким образом, из (7.4) следует, что магнитное поле может создаваться не только электрическим током, но и переменным во времени электрическим полем. В совокупности уравнения (7.3) и (7.4) означают, что нестационарные электрические или магнитные поля не могут существовать в пространстве отдельно, независимо друг от друга, а образуют по сути дела две стороны единого электромагнитного поля.

Важно отметить, что уравнения Максвелла образуют абсолютно точную универсальную систему дифференциальных уравнений электромагнитного поля, т. е. абсолютно точно описывают электромагнитные процессы в любой среде. Однако система (7.1)–(7.4) не является замкнутой, поскольку число неизвестных функций в ней превосходит число уравнений. Чтобы замкнуть систему (7.1)–(7.4), к ней необходимо присоединить дополнительные уравнения, вид которых уже целиком определяется свойствами среды, в которой рассматривается электромагнитное поле. Указанные уравнения, называемые *материальными* уравнениями электромагнитного поля, во многих случаях имеют следующий вид (мы запишем указанные уравнения в системе СИ)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}^{ct}. \quad (7.6)$$

Здесь ε_0 и μ_0 – *электрическая и магнитная* постоянные, определяемые формулами

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\Phi}{\text{м}}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{м}}, \quad (7.7)$$

где Φ и Γ_{H} – сокращенные обозначения фарады и генри как единиц размерностей, ε и μ – относительные *диэлектрическая и магнитная проницаемости* среды, σ – *удельная проводимость* среды, $\mathbf{J}^{ct}$ – заданная функция, имеющая смысл плотности токов, происходящих от действия сторонних электродвижущих сил. Последнее уравнение в (7.6) является дифференциальной формой закона Ома, связывающего силу тока, протекающего в электрическом проводнике, с падением напряжения на нем. (Указанный закон открыл в 1826 г. известный немецкий физик G.S. Ohm, 1787–1854). В случае однородной изотропной среды величины ε , μ и σ являются константами, причем $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, $\sigma \geq 0$. В частности, для вакуума $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$. Если среда неоднородна, то ε , μ и σ являются скалярными функциями координат точек среды, если к тому же среда анизотропна,

то эти функции становятся тензорными. Размерности введенных величин можно найти в таблице 7.1.

7.2. Векторное волновое уравнение в непроводящей среде. Уравнение диффузии в сильно проводящей среде. Подставим в (7.4) вместо $\mathbf{J}$ его выражение из закона Ома в (7.6). Получим

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}^{ct}. \quad (7.8)$$

Правая часть в (7.8) представляет по физическому смыслу сумму плотностей токов смещения $\partial\mathbf{D}/\partial t$, токов проводимости $\sigma\mathbf{E}$ и токов сторонних э.д.с. $\mathbf{J}^{ct}$. Применим к уравнению (7.8) оператор rot . Получим

$$\text{rotrot}\mathbf{H} = \text{rot}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \text{rot}(\sigma\mathbf{E}) + \text{rot}\mathbf{J}^{ct}.$$

Предположим, что среда, заполняющая область D , однородна и изотропна. В этом случае последнее уравнение с учетом (7.3) и первых двух уравнений в (7.6) можно записать в виде

$$\text{rotrot}\mathbf{H} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} - \sigma\mu\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot}\mathbf{J}^{ct}$$

или

$$\Delta\mathbf{H} = \sigma\mu\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} - \text{rot}\mathbf{J}^{ct}, \quad (7.9)$$

если воспользоваться векторным тождеством (6.19). Константа a^2 в (7.9) определяется формулой

$$a^2 = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}. \quad (7.10)$$

По аналогичной схеме выводится соответствующее уравнение для $\mathbf{E}$, имеющее при $\rho_e = 0$ вид

$$\Delta\mathbf{E} = \sigma\mu\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu\mu_0\frac{\partial\mathbf{J}^{ct}}{\partial t}. \quad (7.11)$$

Характер электромагнитного процесса определяется свойствами среды. Если среда является непроводящей, так что $\sigma = 0$, или обладает очень малой проводимостью σ , так что в (7.8) можно пренебречь плотностью токов проводимости $\sigma\mathbf{E}$ по сравнению с плотностью токов смещения $\partial\mathbf{D}/\partial t$, то, отбрасывая в (7.9) и (7.11) “малые” слагаемые $\sigma\mu\mu_0 \partial\mathbf{D}/\partial t$ и $\sigma\mu\mu_0 \partial\mathbf{E}/\partial t$, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = a^2\Delta\mathbf{H} + \mathbf{F}_1, \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \mathbf{E} + \mathbf{F}_2. \quad (7.13)$$

Здесь $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ – заданные вектор-функции, определяемые формулами

$$\mathbf{F}_1 = a^2 \operatorname{rot} \mathbf{J}^{ct}, \quad \mathbf{F}_2 = -a^2 \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}^{ct}}{\partial t}. \quad (7.14)$$

Каждое из уравнений (7.12), (7.13) представляет собой *векторное волновое уравнение*, в котором вектор-функции $\mathbf{F}_1 = a^2 \operatorname{rot} \mathbf{J}^{ct}$ и $\mathbf{F}_2 = -a^2 \mu \mu_0 \partial \mathbf{J}^{ct} / \partial t$ играют роль объемных источников поля. На основании этого и свойств волнового уравнения (см. § 3 гл. 3), приходим к важному выводу, что в непроводящей среде электромагнитное поле распространяется в виде незатухающих волн, скорость a которых определяется формулой (7.10). Указанные волны, естественно, носят название *электромагнитных волн*, а константа a в (7.10) называется *скоростью* электромагнитных волн. В частном случае, когда среда является вакуумом, подстановка значений $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ и (7.7) для ε_0 и μ_0 в (7.10) приводит к следующей формуле для скорости a_0 электромагнитных волн в вакууме

$$a_0 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{сек}}. \quad (7.15)$$

Для других сред скорость распространения электромагнитных волн отличается от значения a_0 в (7.15) множителем $(\varepsilon \mu)^{-1/2}$, который для большинства сред и, в частности, для воздуха близок к 1.

Согласно (7.15) скорость a_0 фактически совпадает со скоростью света в вакууме. Это не случайно, а является следствием волновой теории света, согласно которой свет распространяется в виде электромагнитных волн определенных частот. Строго говоря, скорость света в вакууме равна согласно последним измерениям 299792458 м/сек, что несколько меньше величины a_0 в (7.15). Однако это несовпадение объясняется тем, что при выводе (7.15) мы использовали округленные значения для постоянных ε_0 и μ_0 в (7.5).

Отметим, что Максвеллу удалось вывести волновое уравнение для электромагнитного поля только благодаря осевшей его гениальной догадке ввести в закон Био-Савара (7.5) странное и непонятное на первый взгляд слагаемое $\partial \mathbf{D} / \partial t$, названное им плотностью токов смещения. В итоге это позволило сделать ему величайшее открытие, доказав, что называется, на кончике пера, факт распространения электромагнитного поля в пространстве в виде электромагнитных волн со скоростью света. До выхода работ Максвелла волновые уравнения вида (7.12), (7.13) в принципе нельзя было получить, поскольку все исследователи использовали вместо (7.4) закон Био-Савара (7.5).

Если же среда, наоборот, обладает большой проводимостью σ , так что в (7.8) можно пренебречь плотностью токов смещения $\partial \mathbf{D} / \partial t$ по сравнению

с плотностью токов проводимости $\sigma \mathbf{E}$, то уравнения (7.9) и (7.11) после отбрасывания соответствующих членов принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = c^2 \Delta \mathbf{H} + \tilde{\mathbf{F}}_1, \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \Delta \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{F}}_2. \quad (7.17)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{F}}_1, \tilde{\mathbf{F}}_2$ – заданные вектор-функции, определяемые формулами

$$\tilde{\mathbf{F}}_1 = \frac{1}{\sigma \mu \mu_0} \text{rot} \mathbf{J}^{ct}, \quad \tilde{\mathbf{F}}_2 = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \mathbf{J}^{ct}}{\partial t}. \quad (7.18)$$

Каждое из уравнений (7.16), (7.17) представляет собой *векторное параболическое уравнение диффузии*, в котором вектор-функции $\tilde{\mathbf{F}}_1$ и $\tilde{\mathbf{F}}_2$ играют роль плотностей объемных источников поля. Коэффициент диффузии c для обоих уравнений определяется формулой

$$c^2 = \frac{1}{\sigma \mu \mu_0}. \quad (7.19)$$

На основании этого приходим к выводу о том, что в сильно проводящей среде основным механизмом распространения электромагнитного поля является процесс диффузии. В общем случае, когда токи проводимости и токи смещения сравнимы по порядку, уравнения (7.9) и (7.11) представляют собой уравнения гиперболического типа, описывающие распространение электромагнитного поля в среде в виде затухающих электромагнитных волн с затуханием, вызываемым диссипацией энергии вследствие ненулевой проводимости среды.

7.3. Граничные условия и условия сопряжения для электромагнитного поля. Если среда кусочно-однородна, то уравнения (7.9), (7.11) следует использовать в каждом однородном куске среды. На границе Γ_s раздела двух сред необходимо использовать так называемые условия *сопряжения*. В общем случае указанные условия имеют вид [38, с. 31], [59, р. 69]:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{J}_s, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s \text{ на } \Gamma_s, \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \text{ на } \Gamma_s. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Здесь индексами 1 и 2 отмечены предельные значения векторов поля при приближении к поверхности раздела, соответственно, со стороны сред 1 и 2, $\mathbf{J}_s$ и ρ_s – поверхностные плотности токов и зарядов на границе раздела, $\mathbf{n}$ – единичный вектор нормали, направленный от среды 1 к среде 2. Условия (7.20) легко выводятся с использованием интегральных аналогов уравнений Максвелла.

В теории электромагнетизма важную роль играет разбиение различных сред на два типа: проводники и диэлектрики. Под *проводником* принято понимать любую среду (твердую, жидкую, газообразную), в которой существуют заряды, способные перемещаться (на макроскопическом уровне) под действием электрического поля. *Омическим проводником* называют среду, в которой закон Ома в (7.6) выполняется с константой $\sigma > 0$. *Идеальным проводником* называют среду с “очень большим” значением коэффициента проводимости σ ($\sigma \rightarrow \infty$). Такая ситуация реализуется, например, для металлов, которые с высокой степенью точности можно считать идеальными проводниками. Внутри идеального проводника электромагнитное поле равно нулю. Мы также отметим, что *суперпроводники* по определению относятся к идеальным проводникам.

Идеальным изолятором называется среда, в которой $\sigma = 0$. Среда в которой отсутствуют свободные электроны, способные нести электрический ток, называется *диэлектриком*. Среда называется *идеальным диэлектриком*, если в ней соотношение $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$ выполняется с $\varepsilon = \text{const}$. Если среда является одновременно идеальным изолятором и идеальным диэлектриком, то в ней выполняется условие $\mathbf{J} = 0$. Среда называется *идеальной магнитной средой*, если в ней соотношение $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$ выполняется с $\mu = \text{const}$. Мы также будем использовать термин “идеальная среда” для среды, которая является одновременно однородной и изотропной.

В случае, когда область Ω граничит с идеальным проводником, задача нахождения электромагнитного поля упрощается. Действительно, в этом случае электромагнитное поле вне Ω отсутствует, так что имеем $\mathbf{E}_2 = 0$, $\mathbf{D}_2 = 0$, $\mathbf{H}_2 = 0$, $\mathbf{B}_2 = 0$. С учетом этого условия сопряжения (7.20) переходят в следующие граничные условия на $\Gamma \equiv \Gamma_s$ для $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_1$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = -\mathbf{J}_s, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} = -\rho_s, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (7.21)$$

Подчеркнем, что функции $\mathbf{J}_s$ и ρ_s в (7.21) в общем случае являются неизвестными, хотя в приложениях часто рассматриваются ситуации, когда одна из этих функций, либо обе известны.

Предположим в рассматриваемой ситуации, что область Ω заполнена идеальной средой, так что $\varepsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$, причем плотность ρ_e известна. Переписав с помощью соотношений (7.6) уравнения Максвелла (7.1)–(7.4) только в переменных $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и добавив к ним в качестве граничных условий последние два условия в (7.21) и соответствующие начальные условия для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, мы получим исходную начально - краевую задачу относительно величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Решив указанную задачу относительно $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, далее определяем остальные величины $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{J}$ из (7.6), а подставляя найденные величины $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$ в первые два уравнения в (7.21), мы также определяем и граничные плотности $\mathbf{J}_s$ и ρ_s . При таком подходе основная

трудность падает на решение сформулированной выше начально-краевой задачи для пары $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$. О методах и трудностях исследования этой задачи, а также о достаточных условиях, обеспечивающих единственность решения можно прочитать, например, в [59, гл. 1], [60, гл. 9].

Используя (7.20) и (7.21), нетрудно вывести частные формы граничных условий для электромагнитного поля, например, в случае, когда $\mathbf{J}_s = 0$ или $\rho_s = 0$, и указать их физический смысл. Можно также переформулировать все граничные условия относительно векторов напряженностей либо векторов индукции, но на этих деталях мы не будем здесь останавливаться, отсылая заинтересованного читателя, например, к [38], [59, гл. 1].

Подчеркнем, однако, что поскольку условия (7.20) и (7.21) являются следствиями уравнений Максвелла, то, как и уравнения Максвелла, они имеют универсальный характер, т. е. справедливы для любого электромагнитного поля. При решении конкретных задач излучения и распространения электромагнитных волн наряду с условиями (7.20), (7.21) иногда используют и так называемые *независимые граничные условия*, которые обычно выражают внешнюю причину существования электромагнитного поля. Так, например, если на границе Γ области Ω или некоторой ее части Γ_1 , действует стороннее электромагнитное поле, описываемое заданными функциями $\mathbf{E}^{ct}$ и $\mathbf{H}^{ct}$, то математическая формализация этого факта приводит к следующему требованию, налагаемому на решения уравнений Максвелла на Γ_1 :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{ct}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^{ct} \text{ на } \Gamma_1. \quad (7.22)$$

Уравнения (7.22) при естественном условии совместности с универсальными уравнениями (7.20), (7.21) играют в таком случае роль внешних источников существования электромагнитного поля.

7.4. Гармонические электромагнитные поля. Важный частный случай представляют собой *гармонические* электромагнитные поля. Любую характеристику $\mathbf{U}$ такого поля и, в частности, векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}^{ct}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{J} &= \tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{J}^{ct} = \tilde{\mathbf{J}}^{ct}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Здесь векторы $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}, \tilde{\mathbf{J}}, \tilde{\mathbf{J}}^{ct}$ имеют смысл *комплексных амплитуд* соответственно вектора напряженности электрического поля, вектора напряженности магнитного поля, вектора плотности тока и вектора плотности сторонних токов.

Подставляя (7.23) в (7.3) и (7.4) и опуская в дальнейшем знак волны над амплитудами полей, приходим с учетом (7.5) и в предположении, что $\rho_e = 0$, к следующим уравнениям для комплексных амплитуд

$$\text{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \quad \text{rot} \mathbf{H} = -i\omega\dot{\epsilon}_0 \mathbf{E} + \mathbf{J}^{ct}. \quad (7.24)$$

Величина $\dot{\epsilon} = \epsilon + i\sigma/\omega\epsilon_0$ в (7.24) называется *комплексной диэлектрической проницаемостью*. Применяя, как и выше, к уравнениям в (7.24) оператор rot , получаем следующие два векторных уравнения второго порядка для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mu \mathbf{J}^{ct}, \quad (7.25)$$

$$\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\text{rot} \mathbf{J}^{ct}. \quad (7.26)$$

Здесь комплексная величина $k = \omega\sqrt{\dot{\epsilon}\epsilon_0\mu\mu_0}$ носит название *комплексного волнового числа*, а каждое из уравнений (7.25), (7.26) называется *векторным волновым уравнением Гельмгольца*.

Подставляя далее (7.23) в одно из граничных условий (7.20), (7.21) и сокращая на $e^{-i\omega t}$ (в предположении, что правые части в (7.20), (7.21) также гармонически зависят от времени t), приходим к граничным условиям для векторных амплитуд, которые формально совпадают с соответствующими граничными условиями в (7.20), (7.21). Таким образом, амплитуды векторов напряженностей электромагнитного поля, в отличие от случая акустического поля, удовлетворяют *векторным уравнениям Гельмгольца* (7.25), (7.26) и векторным краевым условиям, формально совпадающим с выписанными ранее условиями (7.20), (7.21). Кроме того, параметры $\dot{\epsilon}$ и k , входящие в уравнения (7.24)–(7.26) являются комплексными числами. Последнее объясняется наличием явления диссипации электромагнитной энергии в проводящей среде, возникающей вследствие ее проводимости.

7.5. Статические электромагнитные поля. Модель электростатики. Электрическая краевая задача. Еще один важный частный случай представляют собой электромагнитные поля, не зависящие от времени и, следовательно, удовлетворяющие в силу (7.1)–(7.4) уравнениям

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho_e, \quad \text{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (7.27)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (7.28)$$

Если, более того, $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{H} = 0$ и $\mathbf{J} = 0$, т. е. магнитное поле отсутствует, так что уравнения (7.28) автоматически удовлетворяются, то задача нахождения электромагнитного поля сводится к нахождению тройки $(\mathbf{E}, \mathbf{D}, \rho_e)$, либо только пары векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, если плотность зарядов ρ_e известна, из соотношений (7.27), называемых *уравнениями электростатики*.

Для выделения единственного решения уравнений электростатики необходимо задать дополнительные условия. Роль их могут играть как материальные уравнения, так и краевые условия либо условия сопряжения, а также условия на бесконечности. Рассмотрим ниже два случая, отвечающие использованию тех или иных дополнительных условий.

1. Предположим, что все пространство $\mathbb{R}^3$ заполнено идеальной диэлектрической средой. Это означает, что в $\mathbb{R}^3$ выполняется соотношение $\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon\mathbf{E}$ с $\epsilon = \text{const}$. Как уже неоднократно указывалось, уравнение $\text{rot} \mathbf{E} = 0$

в $\mathbb{R}^3$ эквивалентно существованию потенциала φ , с которым выполняются соотношения

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi \implies \mathbf{D} = -\varepsilon_0\varepsilon\text{grad}\varphi. \quad (7.29)$$

Подставляя (7.29) в первое уравнение модели (7.27), приходим с учетом (3.18) к уравнению Пуассона для потенциала φ , имеющему вид

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0\varepsilon}. \quad (7.30)$$

(Оно, конечно, совпадает с выведенным в § 3 уравнением (3.14)). Чтобы выделить единственное решение уравнения (7.30), а следовательно, и рассматриваемой модели электростатики, нам достаточно в соответствии с замечанием 3.4 присоединить к (7.30) условие на бесконечности, имеющее вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = o(1) \text{ при } |\mathbf{x}| \rightarrow 0. \quad (7.31)$$

Из результатов § 3 и гл. 7 вытекает, что решение φ задачи (7.30), (7.31) существует, единственно и определяется в произвольной точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ с помощью объемного потенциала

$$\varphi(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \int_{\Omega} \frac{\rho_e(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (7.32)$$

При этом от плотности ρ_e требуется некоторая регулярность. В частности, она может быть как гладкой финитной в $\mathbb{R}^3$ функцией, так и функцией, лишь интегрируемой либо интегрируемой с квадратом в $\mathbb{R}^3$. Она может быть также обобщенной функцией, сосредоточенной в некоторых точках, линиях или поверхностях в $\mathbb{R}^3$. В последнем случае интеграл в (7.32) заменяется сверткой обобщенной функции ρ_e и функции $1/4\pi|\mathbf{x}|$, являющейся сингулярным решением оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$ (см. об этом подробнее в [59], [60] и в § 1 гл. 6).

2. Предположим теперь, что $\mathbb{R}^3 = \Omega_1 \cup \overline{\Omega}_2$, где Ω_1 – ограниченное открытое множество. Будем считать, что множества Ω_1 и Ω_2 заполнены разными идеальными средами диэлектрического типа с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 = \text{const}$ и $\varepsilon_2 = \text{const}$. Это означает, что выполняются соотношения

$$\mathbf{D}_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1\mathbf{E}_1 \text{ в } \Omega_1, \quad \mathbf{D}_2 = \varepsilon_0\varepsilon_2\mathbf{E}_2 \text{ в } \Omega_2. \quad (7.33)$$

Предположим для простоты, что каждое из множеств Ω_i , $i = 1, 2$, является односвязной областью. Отсюда, в частности, следует, что граница раздела Γ_s состоит только из одной связной компоненты. Уравнение $\text{rot}\mathbf{E}_i = 0$ в Ω_i , $i = 1, 2$, позволяет ввести для каждой области Ω_i скалярный потенциал φ_i , $i = 1, 2$, так что выполняются соотношения

$$\mathbf{E}_i = -\text{grad}\varphi_i, \quad \mathbf{D}_i = -\varepsilon_0\varepsilon_i\text{grad}\varphi_i \text{ в } \Omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (7.34)$$

Положим

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1 & \text{в } \Omega_1, \\ \varepsilon_2 & \text{в } \Omega_2, \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} \varphi_1 & \text{в } \Omega_1, \\ \varphi_2 & \text{в } \Omega_2, \end{cases} \quad \mathbf{E} = \begin{cases} \mathbf{E}_1 & \text{в } \Omega_1, \\ \mathbf{E}_2 & \text{в } \Omega_2, \end{cases} \quad \mathbf{D} = \begin{cases} \mathbf{D}_1 & \text{в } \Omega_1, \\ \mathbf{D}_2 & \text{в } \Omega_2. \end{cases} \quad (7.35)$$

Подставляя (7.34) в первое уравнение модели (7.27), рассматриваемое в области Ω_1 , а затем в Ω_2 , приходим с учетом обозначений (7.35) к следующему уравнению с разрывным коэффициентом ε :

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} (\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -\rho_e \text{ в } \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma_s. \quad (7.36)$$

Для выделения единственного решения к уравнению (7.36) следует добавить условие на бесконечности (7.31), а также соответствующие условия на поверхности раздела Γ_s . Они вытекают из общих условий сопряжения (7.20), которые для рассматриваемой модели электростатики сводятся к условиям:

$$\mathbf{E}_2 \times \mathbf{n} - \mathbf{E}_1 \times \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \rho_s \text{ на } \Gamma_s. \quad (7.37)$$

Для наших целей достаточно воспользоваться первым соотношением в (7.37), означающим непрерывность тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{E}$ при переходе через Γ_s . Записав с учетом (7.34) указанное соотношение в виде

$$\operatorname{grad} \varphi_2 \times \mathbf{n} - \operatorname{grad} \varphi_1 \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma_s, \quad (7.38)$$

приходим к искомой задаче для определения потенциала φ электростатического поля в $\mathbb{R}^3$. Она состоит из соотношений (7.36), (7.38) и (7.31). О методах ее решения можно прочесть в [59], [60]. Мы лишь отметим, что после нахождения φ векторы $\mathbf{E}_i$ и $\mathbf{D}_i$ определяются по φ_i соотношениями (7.34). Наконец, подставляя $\mathbf{D}_2$ и $\mathbf{D}_1$ во второе уравнение (7.37), находим поверхностную плотность ρ_s , являющуюся для рассматриваемой модели искомой величиной.

Рассмотрим теперь в рамках случая 2 ситуацию, когда область Ω_2 заполнена идеальным проводником и следовательно, в Ω_2 выполняются условия $\mathbf{E}_2 = 0$, $\mathbf{D}_2 = 0$. В этом случае задача нахождения электростатического поля в области $\Omega \equiv \Omega_1$ сводится к нахождению в области Ω решения φ уравнения Пуассона (7.30), удовлетворяющего краевому условию

$$\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (7.39)$$

Оно вытекает из (7.38), если там положить $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = \varphi$, $\Gamma = \Gamma_s$. Условие (7.39) означает, что тангенциальные производные от потенциала φ исчезают на границе Γ области Ω . Отсюда следует, что потенциал φ должен принимать постоянное значение на Γ . Если граница Γ является связной, то тогда эту константу можно выбрать равной нулю, полагая

$$\varphi = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (7.40)$$

Тем самым для нахождения потенциала φ мы получили однородную задачу Дирихле (7.30), (7.40), имеющую при определенных условиях на исходные данные (пару Γ и ρ_e) единственное решение. Определив потенциал φ , далее однозначно определяем векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ в Ω из (7.29), а также поверхностную плотность зарядов ρ_s из соотношения $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = -\rho_s$ на Γ , вытекающего из (7.37).

Задача нахождения в области Ω вектора $\mathbf{E}$ из условий

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon} \text{ в } \Omega, \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma \quad (7.41)$$

носит название *электрической краевой задачи*, поскольку именно к ней сводится задача определения вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ в области Ω , заполненной идеальной диэлектрической средой, граничащей с идеальным проводником. Из свойств решения задачи (7.30), (7.40) вытекает существование и единственность решения задачи (7.41), но в предположении, что Ω – односвязная область со связной границей Γ .

Более сложным является рассмотрение случая, когда граница Γ состоит из нескольких, например, $p + 1$ связных компонент $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_p$, где Γ_0 – внешняя компонента границы Γ (см. рис. 7.1а, где изображена область Ω с границей Γ , состоящей из трех компонент Γ_0, Γ_1 и Γ_2). Рассмотрим для этого случая неоднородную краевую задачу

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{F}, \operatorname{div} \mathbf{E} = \theta \text{ в } \Omega, \mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad (7.42)$$

где θ и $\mathbf{g}$ – некоторые функции. Указанная задача является обобщением задачи (7.41) и переходит в нее при $\mathbf{F} = 0$, $\theta = \rho_e / \varepsilon_0 \varepsilon$, $\mathbf{g} = 0$. С учетом этого будем ссылаться на (7.42) как на *неоднородную краевую задачу электрического типа*.

Ограничимся здесь исследованием единственности решения задачи (7.42). Для этого заметим, что разность $\mathbf{E} = \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1$ двух возможных решений задачи (7.42) является решением следующей однородной краевой задачи

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \text{ в } \Omega, \mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (7.43)$$

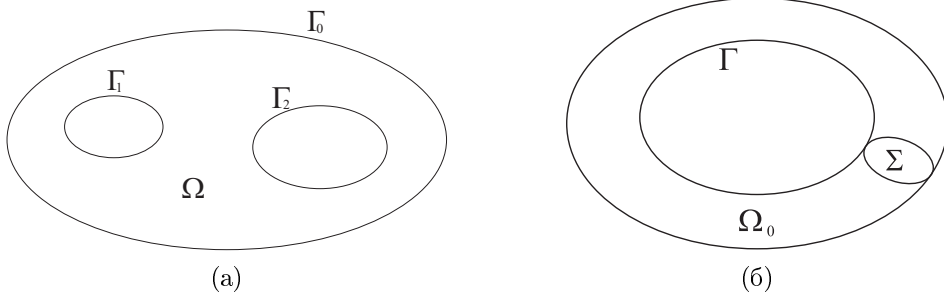


Рис. 7.1.

Попытаемся описать класс всех возможных решений задачи (7.43). С этой целью рассмотрим p задач Дирихле

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \varphi = 1 \text{ на } \Gamma_i, \varphi = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_i, i = 1, 2, \dots, p. \quad (7.44)$$

Пусть φ_i – решение задачи (7.44) (существование и единственность его доказывается в теории потенциала, см. гл. 7). Введем векторы

$$\mathbf{E}_i = -\text{grad}\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (7.45)$$

Ясно, что векторы $\mathbf{E}_i$ удовлетворяют первым двум уравнениям в (7.43) ибо в силу (3.18) $\text{rotgrad}\varphi_i = 0$, $\text{divgrad}\varphi_i \equiv \Delta\varphi_i = 0$. Кроме того, так как функция φ_i принимает постоянное значение на каждой связной компоненте Γ_j границы Γ , то вектор $\text{grad}\varphi_i$ направлен по нормали всюду на Γ . Это означает, что $\text{grad}\varphi_i \times \mathbf{n} = 0$ на Γ . Тем самым доказано, что каждый вектор $\mathbf{E}_i$ является решением однородной задачи (7.43). Поскольку к тому же они линейно независимы (это легко проверяется методом от противного), то тем самым мы построили p линейно независимых решений однородной задачи (7.43). Можно показать, что они исчерпывают совокупность всех решений однородной задачи (7.43) (см., например, [60]). Указанные векторы $\mathbf{E}_i$ называются *гармоническими векторами электрического типа*. В результате мы доказали, что решение $\mathbf{E}$ неоднородной задачи (7.42) определяется с точностью до p гармонических векторов $\mathbf{E}_i$ электрического типа. Подчеркнем, что число p всех векторов $\mathbf{E}_i$ совпадает с числом внутренних связных компонент границы Γ , т. е. определяется топологией границы Γ . Его называют *вторым числом Бетти*. В частном случае, когда $p = 0$, т. е. Γ состоит только из одной связной компоненты, решение $\mathbf{E}$ задачи (7.42) единственно. Более подробную информацию о свойствах гармонических векторов $\mathbf{E}_i$, а также о необходимых и достаточных условиях существования решения краевой задачи (7.42) можно найти в [12, гл. 1] и [60, гл. 9].

7.6. Модель магнитостатики. Магнитная краевая задача. Рассмотрим в рамках модели статического электромагнитного поля случай, когда

$$\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = 0, \quad \rho_e = 0, \quad (7.46)$$

так что электрическое поле отсутствует, а статическая модель примет вид уравнений (7.28), называемых *уравнениями магнитостатики*. Для выделения единственного решения уравнений (7.28) необходимо задать дополнительные условия, вид которых зависит от рассматриваемой задачи. Как в п. 7.5, мы рассмотрим два возможных случая.

1. Предположим, что все пространство заполнено идеальной магнитной средой. Это означает, что в $\mathbb{R}^3$ выполняется соотношение $\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}$ с $\mu = \text{const}$. С учетом этого соотношения уравнения (7.28) принимают вид

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad \text{div}\mathbf{H} = 0 \text{ в } \mathbb{R}^3. \quad (7.47)$$

Задача (7.47) представляет собой частный случай классической задачи

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \operatorname{div} \mathbf{H} = \theta \text{ в } \mathbb{R}^3, \quad (7.48)$$

закключающейся в нахождении векторного поля в пространстве $\mathbb{R}^3$ по заданным ротору и дивергенции этого поля. Хорошо известно, что для выделения единственного решения этой задачи достаточно задать соответствующее условие на бесконечности. О методах решения такой задачи во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ можно прочесть, например, в [59, гл. 1] и [60, гл. 9].

2. Рассмотрим более подробно второй случай, когда $\mathbb{R}^3 = \Omega_1 \cup \overline{\Omega}_2$, где Ω_1 – ограниченное открытое множество, причем Ω_1 заполнено идеальной магнитной средой, а второе множество Ω_2 является идеальным проводником. Эти предположения означают, что электрическое поле в Ω_2 отсутствует, а в области $\Omega = \Omega_1$ оно определяется вектором $\mathbf{H}$, удовлетворяющим уравнениям магнитостатики (7.47). К уравнениям (7.47) следует добавить условия на границе Γ области Ω , которые с учетом сделанных предположений и (7.21) сводятся к двум условиям

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = -\mathbf{J}_s, \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (7.49)$$

В рассматриваемой постановке граничную функцию $\mathbf{J}_s$, имеющую смысл плотности поверхностных токов на Γ , следует считать неизвестной функцией. В противном случае уравнения (7.47) пришлось бы рассматривать при двух граничных условиях (7.49), что заведомо переопределяет рассматриваемую задачу, делая ее некорректной. Присоединив к уравнениям (7.47) второе граничное условие (7.49), приходим к задаче нахождения вектора $\mathbf{H}$ из условий

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \text{ в } \Omega, \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (7.50)$$

Указанная задача, называемая *магнитной краевой задачей*, является частным случаем общей неоднородной краевой задачи

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}, \operatorname{div} \mathbf{H} = \theta \text{ в } \Omega, \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = g \text{ на } \Gamma. \quad (7.51)$$

Здесь θ и g – некоторые заданные функции. Задачу (7.51) принято называть *неоднородной краевой задачей магнитного типа*.

Так же, как и выше, ограничимся здесь исследованием единственности решения задачи (7.51). Для этого заметим, что разность $\mathbf{H} = \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1$ двух возможных решений задачи (7.51) является решением следующей краевой задачи

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \text{ в } \Omega, \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (7.52)$$

Мы рассмотрим случай, когда область Ω имеет вид тора (см. рис. 7.16). Как известно, тор не является односвязной областью. Однако его можно

превратить в односвязную область, проведя в нем *разрез* Σ вдоль поперечного сечения, имеющий вид круга на рис. 7.16. Обозначим через $\Omega_\Sigma = \Omega \setminus \Sigma$ соответствующую односвязную область и рассмотрим задачу нахождения функции φ из условий

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega_\Sigma, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (7.53)$$

$$[\varphi]_\Sigma = C = \text{const}, \quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right]_\Sigma = 0 \text{ на } \Sigma. \quad (7.54)$$

Здесь $[\varphi]_\Sigma$ (либо $[\partial\varphi/\partial n]_\Sigma$) обозначает скачок функции φ либо $\partial\varphi/\partial n$ при переходе через Σ , а условия (7.54) имеют смысл условий сопряжения на Σ . Можно показать (см. [59, гл. 1, §4] и ссылки там), что задача (7.53), (7.54) имеет единственное с точностью до мультипликативной константы решение φ . Положим

$$\mathbf{H} = \text{grad}\varphi \quad (7.55)$$

и докажем, что вектор $\mathbf{H}$ является искомым решением задачи (7.52). Действительно, используя (3.18) и (7.53), имеем

$$\text{rot}\mathbf{H} = \text{rotgrad}\varphi = 0, \quad \text{div}\mathbf{H} = \Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega_\Sigma, \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Отсюда следует, что первые два уравнения в (7.52) выполняются всюду в области Ω , кроме точек выбранного разреза Σ , которые являются внутренними для исходной области Ω . Тем самым остается лишь показать, что уравнения в (7.52) выполняются также и в точках разреза Σ . Это можно сделать, используя условия (7.54) на разрезе, но требует использования дополнительного математического аппарата. Поэтому мы не будем на этом останавливаться, но отметим, что для области типа тора существует лишь один вектор $\mathbf{H}$, являющийся решением однородной задачи (7.52). Чтобы получить этот вектор, надо провести в торе разрез Σ , превратив его в односвязную область, найти решение φ задачи (7.53), (7.54) и далее определить искомый вектор с помощью формулы (7.55).

Важно отметить, что аналогичный подход можно использовать и при нахождении всех решений задачи (7.52) в произвольной многосвязной области Ω , т. е. опять нужно провести *разрезы* Σ_i , превращающие Ω в односвязную область Ω_* . Предположим, что число таких разрезов равно q . Мы отметим, что это число q является *инвариантом* области Ω , т. е. оно не зависит от вида разрезов, а зависит лишь от топологической структуры области Ω . Указанное число q называется *первым числом Бетти*. Можно показать, что задача (7.52) имеет ровно q линейно независимых решений $\mathbf{H}_i$, $i = 1, 2, \dots, q$. При этом $\mathbf{H}_i = \text{grad}\varphi_i$, где φ_i является решением задачи вида (7.53), (7.54) при $\Sigma = \Sigma_i$. Указанные векторы $\mathbf{H}_i$, $i = 1, 2, \dots, q$, называются

гармоническими векторами магнитного типа. Таким образом, решение **H** неоднородной задачи (7.51) определяется с точностью до q гармонических векторов **H_i** магнитного типа. В частном случае, когда $q = 0$, т. е. Ω является односвязной областью, решение **H** задачи (7.51) единственно. Этот случай детально исследован в [56, с. 408–411], где приведена подробная процедура построения единственного решения задачи (7.51) для односвязной области. Более подробную информацию о свойствах гармонических векторов **H_i**, а также необходимых и достаточных условиях существования решения краевой задачи (7.51) можно прочитать в [12, гл. 1], [59], [60, гл. 9].

Итак, в этом параграфе указаны основные величины и приведены основные уравнения, описывающие электромагнитные процессы при произвольной и гармонической зависимости от времени. Размерности указанных величин в системе СИ приведены в табл. 7.1, где A и B – обозначают ампер и вольт.

Таблица 7.1

Величины	E	H, J_s	D, ρ_s	B	J	ρ_e	σ	ε_0	μ_0	a	c^2	ω
Размерности												
в системе СИ	$\frac{В}{м}$	$\frac{А}{м}$	$\frac{А \cdot с}{м^2}$	$\frac{В \cdot с}{м^2}$	$\frac{А}{м^2}$	$\frac{А \cdot с}{м^3}$	$\frac{А}{В \cdot м}$	$\frac{А \cdot с}{В \cdot м}$	$\frac{В \cdot с}{А \cdot м}$	$\frac{м}{с}$	$\frac{м^2}{с}$	$\frac{1}{с}$

§8. Обзор других математических моделей

В этом параграфе приведем краткий вывод либо обзор ряда других математических моделей, описывающих некоторые важные физические процессы. Начнем с рассмотрения так называемых *сосредоточенных систем*, поведение которых зависит лишь от времени t и, следовательно, описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. В качестве сосредоточенных систем рассмотрим материальную точку, колеблющуюся вокруг положения равновесия, и колебательный контур.

8.1. Модели колебательных процессов в сосредоточенных системах. Пусть материальная точка массы m движется вдоль оси x под действием упругой силы, связанной с точкой покоя $x = 0$. Как известно, величина возвращающей упругой силы пропорциональна отклонению x и, стало быть, равна $-kx$, где $k = \text{const} > 0$ – коэффициент упругости. Предположим также, что существует еще сила трения, пропорциональная скорости $\dot{x}$ точки, направленная в сторону, ей противоположную, и, следовательно, равная $-r\dot{x}$, где $r = \text{const} > 0$ – коэффициент трения. Пусть, наконец, на точку действует еще внешняя сила, заданная как функция $F(t)$

времени t . Тогда по закону Ньютона произведение $m\ddot{x}$ должно быть равно упругой силе, сложенной с силой трения и внешней силой. Это выражается следующим уравнением

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = F(t), \quad (8.1)$$

которое и является искомой моделью колебательного движения точки. Движение точки называется *свободным*, если $F = 0$, и *вынужденным*, если $F \neq 0$.

В качестве второго примера рассмотрим колебательный контур, изображенный на рис. 8.1, обладающий индуктивностью L , сопротивлением R и емкостью C . Кроме того, пусть на контур действует внешняя э.д.с. (*электродвижущая сила*) $\varphi(t)$, вызванная, например, электромагнитными волнами.

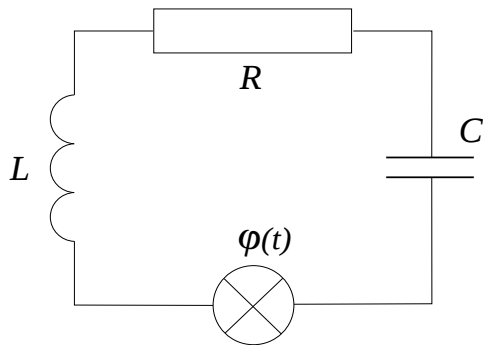


Рис. 8.1. Колебательный контур

Обозначим зависящий от времени заряд конденсатора через Q , силу тока, протекающего в колебательном контуре, через I , а напряжение на его обкладках (разность потенциалов) через E . Как известно из школьного курса физики, $Q = CE$, а сила тока I равна скорости изменения заряда на обкладках конденсатора, взятой с противоположным знаком, т. е. $I = -\dot{Q} = -C\dot{E}$. Согласно закону Ома, произведение RI равно суммарной э.д.с., т. е. равно в данном случае напряжению E минус э.д.с. самоиндукции $L\dot{I}$ (она действует в противоположном направлении) плюс внешняя э.д.с. $\varphi(t)$. Математическое выражение этого закона имеет вид: $RI = E - L\dot{I} + \varphi(t)$ или $-RC\dot{E} = E + LC\ddot{E} + \varphi(t)$. Разделив на C , приходим к уравнению

$$L\ddot{E} + R\dot{E} + \frac{1}{C}E = F(t), \quad F(t) = C^{-1}\varphi(t). \quad (8.2)$$

В результате для напряжения E в контуре мы получили уравнение того же типа, что и (8.1). Роль массы здесь играет индуктивность, роль трения – сопротивление, роль упругости – величина, обратная емкости, наконец, внешней силе соответствует внешняя э.д.с. (умноженная на константу).

8.2. Модели процессов колебания струны, стержня и мембраны. Струны, стержни и мембраны относятся к распределенным телам. Поэтому, в отличие от п. 8.1, происходящие в них колебательные процессы будут зависеть как от времени t , так и от одной или двух пространственных переменных. Строгий вывод моделей, описывающих поперечные колебания струны и мембраны либо продольные колебания стержня можно найти во многих учебниках (см., например, [6, 11, 21, 56]). Поэтому ограничимся здесь,

в основном, обсуждением соответствующих моделей. Начнем рассмотрение со струны, закрепленной на концах. Если ее вывести из положения равновесия, то она начнет совершать колебания, издавая при этом звук. Определим физическую модель струны так: струна есть упругая, невесомая и абсолютно гибкая нить. Указанный выбор физической модели струны позволяет пренебречь толщиной струны, силой тяжести, а также силами, возникающими при ее изгибании. В качестве основной силы, действующей на струну, выберем силу натяжения, которая подчиняется закону Гука: натяжение струны пропорционально ее удлинению.

Предположим, что струна совершает поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью x . Обозначив величину отклонения струны от положения равновесия в точке x в момент t через $u(x, t)$, рассмотрим малые колебания струны, т. е. такие, в которых можно пренебречь величиной $(u_x)^2$ по сравнению с единицей. Можно показать, что при выполнении указанных предположений процесс колебания струны описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F. \quad (8.3)$$

Здесь T_0 – постоянное натяжение, ρ – линейная плотность струны, F – плотность внешних сил, действующая на единицу длины. В случае когда $\rho = \rho_0 = \text{const}$, уравнение (8.3) принимает вид одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (8.4)$$

где $a^2 = T_0/\rho_0$, $f = F/\rho_0$.

Для выделения единственного решения уравнения (8.3) либо (8.4) необходимо задать начальные условия, имеющие вид

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in (0, l), \quad (8.5)$$

и граничные условия на концах струны. В случае струны, закрепленной на концах, они имеют вид

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0. \quad (8.6)$$

Если один из концов струны, например, левый, закреплен, а правый – свободен, то вместо (8.6) используются условия

$$u|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (8.7)$$

Уравнение (8.3) либо (8.4) вместе с начальными условиями (8.5) и соответствующими краевыми условиями представляет собой начально-краевую задачу, которую необходимо решить для нахождения закона колебания струны.

Рассмотрим теперь стержень, расположенный вдоль оси x . Введем аналогично [6, с. 21] следующие обозначения: $S(x)$ – площадь сечения стержня плоскостью, перпендикулярной оси x , проведенной через точку x , $k(x)$ и $\rho(x)$ – модуль Юнга и плотность стержня в сечении с абсциссой x ; $u(x, t)$ – величина смещения вдоль стержня сечения с абсциссой x в момент t . Мы предполагаем, конечно, что величина смещения всех точек фиксированного сечения одинакова. Ясно, что продольные колебания полностью описываются функцией u . Будем рассматривать малые продольные колебания, т. е. такие колебания, в которых *натяжения*, возникающие в процессе колебаний, подчиняются закону Гука.

При указанных предположениях процесс продольных колебаний в стержне описывается следующим уравнением

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k S \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F, \quad (8.8)$$

где F – объемная плотность внешних сил. В случае, когда $S = S_0 = \text{const}$, $\rho = \rho_0 = \text{const}$ и $k = k_0 = \text{const}$, уравнение (8.8) переходит в одномерное волновое уравнение (8.4), где $a^2 = k_0/\rho_0$, $f = F/\rho_0 S_0$. Присоединив к (8.8) либо (8.4) начальные условия вида (8.5) и краевые условия вида (8.6), означающие, что стержень закреплен на обоих концах [21, с. 66], либо условия (8.7), если левый конец стержня закреплен, а правый конец стержня свободен, получим начально-краевую задачу, которую необходимо решить для нахождения закона продольных колебаний рассматриваемого стержня.

Рассмотрим далее мембрану, под которой будем понимать натянутую плоскую пленку, не сопротивляющуюся изгибу и сдвигу, но оказывающую сопротивление растяжению. Предположим, что мембрана совершает поперечные колебания, в которых смещение перпендикулярно плоскости x, y , где находится мембрана в состоянии равновесия. Обозначив через $u(x, y, t)$ величину смещения точки (x, y) мембраны в момент t , будем рассматривать *малые колебания*, в которых можно пренебречь величинами u_x^2 и u_y^2 по сравнению с единицей.

Можно показать (см., например, [6, с. 26]), что при выполнении указанных предположений процесс колебания мембраны описывается уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + F. \quad (8.9)$$

Здесь T – постоянное натяжение, ρ – поверхностная плотность мембраны, F – плотность внешних сил, действующих на единицу площади. В частном

случае, когда $\rho = \rho_0 = \text{const}$, уравнение (8.9) принимает вид двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f, \quad (8.10)$$

где $a^2 = T/\rho_0$, $f = F/\rho_0$. Присоединив к (8.9) или (8.10) начальные условия и соответствующее краевое условие на границе Γ , получим начально-краевую задачу, которую необходимо решить для нахождения решения u .

8.3. Модели электрических колебаний в проводах. Из физики известно, что процесс прохождения электрического тока в проводе сопровождается появлением в его окрестности электромагнитного поля. Оно вызывает изменение как силы тока, так и напряжения. В результате в проводе возникает определенный колебательный процесс. Нашей целью является построение математической модели, описывающей этот процесс.

Проведем ось Ox вдоль оси провода, а начало координат поместим в один из его концов, длину провода обозначим через l . Силу тока I и напряжение v в каждой точке провода будем считать функциями абсциссы x и времени t . В силу законов, управляющих поведением электромагнитного поля, величины I и v связаны между собой некоторыми дифференциальными уравнениями с частными производными. При выводе этих уравнений будем предполагать, как в [21, с. 89], что *емкость, активное сопротивление, самоиндукция и утечка* распределены вдоль провода непрерывно и равномерно, и определяются соответственно константами C, R, L и G , рассчитанными на единицу длины провода.

Рассмотрим часть провода, заключенную между двумя сечениями $x = x_1$ и $x = x_2$. Применяя закон Ома к этой части провода, будем иметь

$$R \int_{x_1}^{x_2} I(x, t) dx = v(x_1, t) - v(x_2, t) - L \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} dx. \quad (8.11)$$

В словесной форме закон Ома гласит так: произведение сопротивления на величину тока, протекающего по участку (x_1, x_2) провода в момент t , равно сумме падения напряжения на участке (x_1, x_2) в момент t и э.д.с. самоиндукции участка (x_1, x_2) в момент t (сравните с законом Ома для сосредоточенной системы – колебательного контура, приведенным в п. 8.1).

Так как, с другой стороны, $v(x_1, t) - v(x_2, t) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} dx$, то из (8.11) приходим к соотношению

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial I}{\partial t} + RI \right) dx = 0.$$

Из него с учётом произвольности x_1 и x_2 следует в силу леммы 1.1, что

$$\frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial I}{\partial t} + RI = 0. \quad (8.12)$$

Чтобы получить второе уравнение относительно I и v , воспользуемся фундаментальным законом сохранения количества электричества на участке (x_1, x_2) . Согласно этому закону количество электричества $I(x_1, t) - I(x_2, t) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial I}{\partial x} dx$, протекающего через рассматриваемый участок (x_1, x_2) провода за единицу времени, равно сумме количества электричества $C \int_{x_1}^{x_2} (\partial v / \partial t) dx$ необходимого для зарядки этого участка провода, и количества электричества $G \int_{x_1}^{x_2} v dx$, “утекающего” из провода, вследствие несовершенства изоляции. С учетом этого приходим к следующему соотношению

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial I}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv \right) dx = 0. \quad (8.13)$$

Из него, как и выше, получаем уравнение

$$\frac{\partial I}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0. \quad (8.14)$$

Уравнения (8.12), (8.14) и представляют собой искомую математическую модель, описывающую при сделанных выше предположениях распространение электрических колебаний в проводах.

8.4. Телеграфное уравнение. Как уже указывалось в § 6, с математической точки зрения удобнее работать с одним скалярным уравнением относительно одной неизвестной функции v или I , нежели с двумя уравнениями относительно двух функций v и I . Чтобы получить соответствующее уравнение, продифференцируем уравнение (8.12) по x , а уравнение (8.14) по t и затем из найденных выражений исключим производную $\partial^2 I / \partial x \partial t$. В результате получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка относительно v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv.$$

Аналогично выводится уравнение для силы тока I , имеющее вид

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial I}{\partial t} + GRI.$$

Таким образом, напряжение v и сила тока I удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = a_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2b_0 \frac{\partial w}{\partial t} + c_0 w. \quad (8.15)$$

Здесь постоянные коэффициенты a_0, b_0, c_0 определяется формулами: $a_0 = LC$, $2b_0 = RC + GL$, $c_0 = GR$. (8.15) называют *телеграфным уравнением*.

Если ввести новую функцию u , полагая $w = e^{(-b_0/a_0)t}u$, то уравнение (8.15) примет более простой вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b^2 u, \quad (8.16)$$

где $a = 1/\sqrt{a_0}$, $b = \sqrt{b_0^2 - a_0 c_0}/a_0$. Если, кроме того, пренебречь потерями через изоляцию и сопротивлением току, полагая $G = R = 0$, то (8.16) переходит в одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (8.17)$$

где $a = \sqrt{1/LC}$. Интересно, что к этому же уравнению сводится уравнение (8.16) в случае, когда G и R не равны нулю, а связаны между собой соотношением $GL = RC$. При выполнении этого условия электрические линии называются *линиями без искажения*. Присоединив к (8.16) или (8.18) начальные условия вида (8.5) и соответствующие краевые условия на концах провода $x = 0$ и $x = l$, приведённые, например в [21, с. 97], получим начально-краевую задачу, которую необходимо решить для нахождения искомой функции u . Впрочем, в некоторых случаях провод является настолько длинным, что его можно считать простирающимся в обе стороны до бесконечности. В этом случае для выделения единственного решения достаточно задать лишь начальные условия на всей вещественной оси $\mathbb{R}$ (см. об этом подробнее в [21, гл. 7]).

8.5. Уравнение Шрёдингера. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ внешнее потенциальное силовое поле с потенциалом $V(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Предположим, что под действием указанного силового поля движется квантовая частица массы m . Обозначим через $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_t^1$ волновую функцию этой частицы. Согласно определению волновой функции выражение $|\psi(\mathbf{x}, t)|^2 d\mathbf{x}$ описывает вероятность того, что частица будет находиться в окрестности $\mathbf{x}$ в момент времени t . Можно показать, (см., например, [31]), что поведение функции ψ описывается так называемым *уравнением Шрёдингера*:

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m} \Delta \psi + V \psi. \quad (8.18)$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$, $h = 1,054 \cdot 10^{-27}$ эрг.сек – постоянная Планка. В стационарном случае, когда $\partial \psi / \partial t = 0$, уравнение (8.18) переходит в уравнение

$$\Delta \psi - \frac{2m}{h^2} V \psi = 0, \quad (8.19)$$

формально совпадающее с уравнением Гельмгольца (6.37). Уравнения (8.18) и (8.19) представляют собой простейшие математические модели, используемые в квантовой механике. Начальные и краевые условия для них формулируются так же, как и для уравнения теплопроводности либо уравнения Пуассона.

8.6. Уравнение переноса излучения. Если длина свободного пробега частиц среды значительно больше их размеров, то для описания процесса распространения частиц вместо приближения сплошной среды используется другое приближение, приводящее к так называемому *уравнению переноса*. Следуя [11, с. 51], приведем здесь уравнение переноса при следующих предположениях: 1) Скорости всех частиц одинаковы и равны v . 2) Столкновения частиц пренебрежимо редки. 3) Частицы сталкиваются с неподвижными ядрами среды; $l(\mathbf{x})$ - их средняя длина свободного пробега в точке $\mathbf{x}$. 4) При столкновении частицы с неподвижным ядром в точке $\mathbf{x}$ происходит одно из следующих трех случайных событий: а) с вероятностью $p_1(\mathbf{x})$ частица рассеивается на ядре, отскакивая от него, как упругий шарик; б) с вероятностью $p_2(\mathbf{x})$ частица захватывается ядром; в) с вероятностью $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ частица делит ядро, в результате чего появляется $\nu(\mathbf{x}) > 1$ таких же частиц (при этом считается, что частица, разделившая ядро, исчезает). 5) Распределение частиц по направлениям как после рассеяния, так и после деления является равномерным (т. е. изотропным).

Обозначим через $n(\mathbf{x}, \mathbf{s}, t)$ плотность частиц в точке $\mathbf{x}$, летящих в направлении $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $|\mathbf{s}| = 1$, в момент t , через $F(\mathbf{x}, \mathbf{s}, t)$ - плотность объемных источников. Введём функцию $\psi = vn$, зависящую от $\mathbf{x}, \mathbf{s}, t$ и называемую *потоком частиц*. Можно показать, что при указанных предположениях поведение функции ψ описывается следующим интегродифференциальным уравнением:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{s} \cdot \text{grad} \psi + \alpha \psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{s}', t) d\mathbf{s}' + F, \quad (8.20)$$

где $\alpha = 1/l$, $h = p_1 + \nu p_3$. Уравнение (8.20) называется *односкоростным уравнением переноса* для процессов с изотропным рассеянием.

Если процесс переноса стационарен, так что функции ψ и F не зависят от t , то уравнение переноса (8.20) принимает вид

$$\mathbf{s} \cdot \text{grad} \psi + \alpha \psi = \frac{\alpha h}{4\pi} \int_{S_1} \psi(\mathbf{x}, \mathbf{s}') d\mathbf{s}' + F. \quad (8.21)$$

Для полного описания процесса переноса частиц необходимо задать начальное распределение потока частиц ψ в среде и граничное условие, описывающее режим протекания процесса на границе этой среды. Например, если область Ω , где происходит процесс переноса, выпуклая, то часто используется граничное условие вида $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = 0$, $\mathbf{x} \in \Gamma_s = \{\mathbf{x} \in \Gamma : \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_x <$

$0\}$. Поставленное при каждом $\mathbf{s}$ в тех точках границы Γ , где $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_x < 0$, оно выражает отсутствие падающего потока частиц на область Ω из внешней среды.

ГЛАВА 2. Общие вопросы теории уравнений в частных производных

§1. Основные понятия теории уравнений в частных производных

1.1. Уравнения в частных производных и их решения. В гл. 1 на достаточно большом количестве примеров было показано, что математическое моделирование физических процессов приводит к необходимости решения начально-краевых либо краевых задач для волнового уравнения, уравнения теплопроводности, уравнений Лапласа, Пуассона, Гельмгольца и других дифференциальных уравнений либо их систем. Указанные уравнения являются важными представителями широкого класса математических объектов, называемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

В общем случае под *дифференциальным уравнением в частных производных*, рассматриваемым в некоторой области Ω пространства $\mathbb{R}^n$, понимается соотношение, связывающее неизвестную функцию $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ независимых переменных $x_1, \dots, x_n$ – координат произвольной точки $x \in \Omega$ и частные производные от функции u вида

$$F \left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь F – заданная функция своих аргументов. Порядок старшей частной производной, входящей в уравнение (1.1), называется *порядком уравнения в частных производных*. В соответствии с введенным определением уравнение (1.1) является уравнением второго порядка, если F явно зависит хотя бы от одной производной второго порядка, скажем $r = \partial^2 u / \partial x_1^2$, в том смысле, что $\partial F / \partial r \neq 0$, причем F не зависит от производных более высокого порядка.

Общее уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными x и y может быть записано в виде

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0. \quad (1.2)$$

Здесь F – заданная функция своих аргументов. В частности, она может не зависеть от x, y, u и одной из производных $p = \partial u / \partial x$ или $q = \partial u / \partial y$, но непременно должна зависеть от другой производной, так что выполняется условие

$$\left| \frac{\partial F}{\partial p} \right| + \left| \frac{\partial F}{\partial q} \right| \neq 0.$$

Аналогично общее уравнение в частных производных второго порядка имеет вид

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = 0, \quad (1.3)$$

где функция F явно зависит хотя бы от одной производной второго порядка. В дальнейшем при рассмотрении общих уравнений второго порядка указанное свойство явной зависимости функции F хотя бы от одной производной второго порядка всегда будет предполагаться выполненным.

Очень часто рассматриваемые уравнения являются линейными или квазилинейными. Уравнение в частных производных называется *квазилинейным*, если оно линейно относительно всех старших производных от неизвестной функции. Так, например, уравнение

$$A(x, y, u, u_x, u_y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(...) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(...) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(...) = 0, \quad (1.4)$$

где коэффициенты B , C и правая часть F зависят от тех же аргументов, что и A , есть квазилинейное уравнение второго порядка. Уравнение в частных производных называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и всех ее частных производных. Так, например, уравнение

$$\begin{aligned} & A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + G(x, y)u = F(x, y) \end{aligned}$$

есть линейное уравнение второго порядка относительно функции u . *Решением* уравнения в частных производных (1.1) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ называется любая дифференцируемая нужное количество раз функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, которая, будучи подставлена в (1.1) вместо неизвестной функции, обращает это уравнение в тождество по независимым переменным.

Несмотря на то, что в гл. 1 был рассмотрен широкий класс физических процессов и явлений, применение для их исследования идей математического моделирования привело нас фактически к трем уравнениям второго порядка. Уравнение Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f \quad (1.5)$$

моделирует распределение гравитационного или электростатического потенциала в пространстве, стационарные процессы переноса тепла и диффузии, поведение потенциала скорости безвихревого движения идеальной

жидкости и ряд других стационарных процессов. Уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f \quad (1.6)$$

моделирует нестационарные процессы переноса тепла и диффузии вещества, диффузию электромагнитного поля в электропроводящей среде и т. д. Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + f \quad (1.7)$$

моделирует распространение в пространстве звуковых и электромагнитных волн, поперечные колебания струны и мембраны, продольные колебания в однородном стержне, свободные электрические колебания в электрической линии без искажений и т. д. Мы также вывели в гл. 1 уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = -f, \quad (1.8)$$

моделирующее гармонические волновые процессы. Однако, как будет дальше показано, свойства решений уравнения Гельмгольца близки к свойствам решений уравнения Пуассона, поскольку оба уравнения отличаются лишь младшими членами, имея одну и ту же главную часть Δu .

Оказывается, что именно эти три уравнения (1.5)–(1.7) определяют основные типы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (см. п. 1.2.). Поэтому уравнения (1.5)–(1.7) часто называют *основными уравнениями математической физики*. Строгое математическое изучение указанных уравнений позволит заложить, с одной стороны, основы теории уравнений с частными производными второго порядка. С другой стороны, это позволит изучить свойства широкого класса физических процессов и явлений, описываемых указанными уравнениями.

Подчеркнем, что каждое из уравнений (1.5)–(1.8) имеет бесчисленное множество решений. При решении конкретной физической задачи необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из ее физического смысла. Как следует из гл. 1, такими дополнительными условиями чаще всего являются *начальные условия*, относящиеся к моменту времени, с которого начинается изучение данного физического процесса или явления, и/или *граничные условия*, т. е. условия, заданные на границе рассматриваемой области. Таким образом, *задачи математической физики состоят в отыскании решений уравнений в частных производных, удовлетворяющих начальным и/или граничным условиям*.

Отметим, что уравнение (1.6) является частным случаем нестационарного уравнения конвекции-диффузии-реакции

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\eta \operatorname{grad} u) + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u + \gamma u = f \quad (1.9)$$

с переменным коэффициентом диффузии η , описывающего распространение вещества в среде, движущейся со скоростью $\mathbf{a}$, с учетом эффекта поглощения вещества за счет химических реакций. При $\gamma = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ уравнение (1.9) совпадает с точностью до обозначений с уравнением распространения тепла (4.20) гл. 1 в движущейся среде. В другом важном частном случае, когда эффектами диффузии можно пренебречь по сравнению с конвекцией, полагая $\eta = 0$, уравнение (1.9) переходит в уравнение 1-ого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} u + \gamma u = f. \quad (1.10)$$

При $\gamma = 0$ уравнение (1.10) описывает распространение вещества либо тепла за счет конвекции и называется уравнением *переноса* либо уравнением *адвекции*.

Уравнение (1.10) играет важную роль при изучении процессов распространения вещества или тепла в средах, в которых можно пренебречь эффектами диффузии. Кроме того, необходимость в исследовании уравнения (1.10) возникает и в случае, когда для изучения общего уравнения конвекции-диффузии (1.9) применяется метод расщепления по физическим процессам (см. Введение). Ввиду важности уравнения (1.10) следующий параграф будет целиком посвящен изучению свойств его решений и изучению корректных постановок начально-краевых задач для уравнения (1.10), а также для его одномерного либо стационарного аналогов. Там же мы введем фундаментальное понятие характеристики уравнения (1.10) и покажем, что задача интегрирования уравнения (1.10) фактически эквивалентна интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений для его характеристик.

1.2. Типы уравнений второго порядка. Рассмотрим уравнение второго порядка вида

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (1.11)$$

Здесь коэффициенты a_{ij} – заданные функции координат $x_1, \dots, x_n$ точки $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, f – заданная функция своих аргументов, причем предполагается, что $a_{ij} = a_{ji}$. Все функции и независимые переменные считаем вещественными.

В этом параграфе мы приведём классификацию уравнений вида (1.11) в точке. Зафиксируем определенную точку $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ в области Ω и составим квадратичную форму, действующую по формуле:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 t_i t_j \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) t_i t_j. \quad (1.12)$$

Напомним, что квадратичная форма вида (1.12) называется *положительно, либо отрицательно определенной*, если существует константа $c > 0$, с которой выполняется условие

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 t_i t_j \geq c \sum_{i=1}^n t_i^2, \text{ либо } \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^0 t_i t_j \leq -c \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Из алгебры хорошо известно [17, с. 192], что существует невырожденное линейное преобразование переменных

$$t_k = \sum_{i=1}^n c_{ik} \xi_i, \quad (1.13)$$

которое приводит матрицу $((a_{ij}^0))$ квадратичной формы (1.12) к *каноническому* (диагональному) виду

$$\sum_{i=1}^m \pm \xi_i^2, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (1.14)$$

Существует много невырожденных вещественных преобразований, приводящих форму (1.12) к виду (1.14), но согласно закону инерции квадратичных форм число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы *инвариантно относительно линейного преобразования*, т. е. не зависит от выбора линейного преобразования [17, с. 198]. Из алгебры также известно, что уравнение $|a_{ij}^0 - \lambda \delta_{ij}| = 0$, где δ_{ij} – символ Кронекера, имеет лишь вещественные корни, называемые *собственными значениями* матрицы $((a_{ij}^0))$, причем число членов в (1.14) с положительными либо отрицательными знаками равно числу положительных либо отрицательных собственных значений матрицы $((a_{ij}^0))$.

Если преобразование (1.13) приводит форму (1.12) к каноническому виду (1.14), то, как легко проверить, преобразование

$$\xi_k = \sum_{i=1}^n c_{ki} x_i \quad (1.15)$$

приводит уравнение (1.11) к виду

$$\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \dots = 0. \quad (1.16)$$

Здесь коэффициенты $\tilde{a}_{ij}(x)$ таковы, что в точке x_0 выполняются соотношения

$$\tilde{a}_{ij}(x_0) = \begin{cases} \pm 1, & \text{если } i = j \leq m, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \text{ или если } i = j > m. \end{cases}$$

Мы выписали только члены со старшими производными от функции u . Вид (1.16) уравнения (1.11) называется *каноническим видом* в точке x_0 .

Итак, для каждой точки $x_0 \in \Omega$ можно указать такое невырожденное преобразование (1.15) независимых переменных, которое приводит уравнение (1.11) к каноническому виду в этой точке. Именно на этом свойстве основана классификация уравнений второго порядка. Введём следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Уравнение (1.11) называется *эллиптическим* в точке $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, если в уравнении (1.16) при $x = x_0$ все коэффициенты $\tilde{a}_{ii}(x_0)$, $i = 1, \dots, n$, отличны от нуля и имеют один знак, причем $m = n$. Уравнение (1.11) называется *гиперболическим* в точке x_0 , если в (1.16) все $\tilde{a}_{ii}(x_0)$ имеют один и тот же знак, за исключением одного, который имеет противоположный знак, причем $m = n$. Уравнение (1.11) называется *ультрагиперболическим* в точке x_0 , если в (1.16) имеется больше одного положительного коэффициента $\tilde{a}_{ii}(x_0)$ и больше одного отрицательного, причем $m = n$. Уравнение (1.11) называется *параболическим* в широком смысле в точке x_0 , если среди $\tilde{a}_{ii}(x_0)$ имеются равные нулю, т. е. если $m < n$. Уравнение (1.11) называется *параболическим* в узком смысле или просто *параболическим* в точке x_0 , если только один из коэффициентов $\tilde{a}_{ii}(x_0)$, пусть это будет $\tilde{a}_{nn}(x_0)$, равен нулю, а другие имеют одинаковые знаки, причем коэффициент при $\partial u / \partial \xi_n$ отличен от нуля.

В основу определения 1.1 взяты свойства в точке x_0 коэффициентов уравнения (1.16), полученного преобразованием исходного уравнения (1.11) с помощью линейной замены переменных. Можно дать эквивалентное определение, основываясь на свойствах квадратичной формы (1.12). Ограничившись рассмотрением лишь чисто эллиптических, гиперболических и параболических уравнений, приведем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1а. Уравнение (1.11) называется *уравнением эллиптического типа* в точке x_0 , если в этой точке квадратичная форма (1.12) положительно или отрицательно определена. Уравнение (1.11) называется *уравнением гиперболического типа* в точке x_0 , если в этой точке квадратичная форма (1.12) при приведении ее к сумме квадратов имеет все коэффициенты, кроме одного, определенного знака, а оставшийся один коэффициент — противоположного знака. Уравнение (1.11) называется *параболическим* в узком смысле или просто *уравнением параболического типа* в точке x_0 , если в этой точке квадратичная форма (1.12) при приведении ее к сумме квадратов имеет лишь один коэффициент, равный

нулю, а все остальные коэффициенты имеют одинаковые знаки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Уравнение (1.11) называют уравнением эллиптического (соотв. гиперболического либо параболического) типа в области Ω , если в каждой точке $x_0 \in \Omega$ оно является уравнением эллиптического (соотв. гиперболического либо параболического) типа.

Подчеркнем, что тип уравнения в частных производных второго порядка определяется только коэффициентами уравнения, стоящими при старших производных, т. е. производных второго порядка. Таким образом, тип не зависит от характера вхождения в него самой функции и ее частных производных $\partial u / \partial x_i$. Последние могут даже отсутствовать либо входить в уравнение достаточно сложным нелинейным образом. Легко убедиться, основываясь на приведенных определениях, что в любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ уравнение Лапласа (либо Пуассона, Гельмгольца) имеет эллиптический тип, волновое уравнение имеет гиперболический тип, а уравнение теплопроводности имеет параболический тип.

Конечно, среди огромного количества уравнений в частных производных, описывающих разнообразные процессы, встречаются уравнения *смешанного типа*, т. е. уравнения, тип которых является различным в различных подобластях рассматриваемой области. Так, например, в линейной газовой динамике широко используется уравнение *Трикоми*

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.17)$$

Уравнение (1.17) является эллиптическим в любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, лежащей выше оси x , тогда как в любой области Ω , лежащей ниже оси x , оно имеет гиперболический тип. Наконец, в точках $(x, 0)$, лежащих на оси x , оно имеет параболический тип. Указанные факты означают, что в любой области Ω , имеющей непустое пересечение с осью x , уравнение (1.17) является уравнением смешанного типа. Исследованию уравнений смешанного типа посвящено большое количество работ. Однако ниже мы не будем заниматься изучением уравнений смешанного типа, поскольку это выходит за рамки программы курса “Уравнения математической физики”. Мы также не будем заниматься ультрагиперболическими уравнениями и уравнениями, параболическими в широком смысле. В соответствии с этим ниже под термином “параболические уравнения” будем понимать только уравнения, параболические в узком смысле.

В силу определения 1.2 уравнение (1.11) является эллиптическим в области Ω тогда и только тогда, когда коэффициенты a_{ij} удовлетворяют (быть может, после умножения на -1) условию

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) t_i t_j \geq \alpha(x) \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (1.18)$$

Здесь α – некоторая положительная в Ω функция. Если, более того, существуют такие положительные константы α и β , что выполняются условия

$$\alpha \sum_{i=1}^n t_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) t_i t_j \leq \beta \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad \forall x \in \Omega, \quad (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.19)$$

то уравнение (1.11) называется *равномерно эллиптическим* в Ω . Ясно, что каждое эллиптическое уравнение с постоянными коэффициентами является равномерно эллиптическим в области Ω . Но не каждое эллиптическое в Ω уравнение является равномерно эллиптическим. Примером является уравнение Трикоми (1.17), которое, будучи эллиптическим в любой области Ω , лежащей выше оси x , не является равномерно эллиптическим в указанной области Ω , если ее замыкание $\bar{\Omega}$ содержит точки оси x .

По аналогичной схеме можно ввести понятие равномерной гиперболичности и параболичности дифференциального уравнения. Ограничимся здесь рассмотрением уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, t, u, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial t}), \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, t, u, \nabla u), \quad (1.21)$$

где $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, \dots, \partial u / \partial x_n)$. В соответствии с определением 1.2 условие гиперболичности уравнения (1.20) (либо параболичности уравнения (1.21)) в произвольной области $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t^1$ эквивалентно условию

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) t_i t_j \geq \alpha(x, t) \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad \forall (x, t) \in D, \quad (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.22)$$

где α – положительная функция точек $(x, t) \in D$. Если к тому же существуют положительные константы α и β , с которыми выполняются условия

$$\alpha \sum_{i=1}^n t_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) t_i t_j \leq \beta \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad \forall (x, t) \in D, \quad (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.23)$$

то уравнение (1.20) (либо (1.21)) называется *равномерно гиперболическим* (либо *параболическим*) в области D .

1.3. Корректно и некорректно поставленные задачи. Всякую задачу математической физики можно записать в виде

$$Lu = f, \quad u \in U, \quad f \in F. \quad (1.24)$$

Здесь u – неизвестная функция (либо вектор-функция), f – заданная функция (либо вектор-функция), L – дифференциальный оператор, который символически показывает, какие действия нужно проделать с функцией u , чтобы получить правую часть f , U – пространство, в котором ищется решение u , F – пространство, которому принадлежит f . Пространства U и F обычно можно считать нормированными с нормами $\|\cdot\|_U$ и $\|\cdot\|_F$ соответственно.

Напомним, что линейное пространство U называется *нормированным*, если каждому его элементу u можно поставить в соответствие вещественное число $\|u\|$ (норму u) так, что выполняются следующие три условия:

- 1) $\|u\| \geq 0 \forall u \in U$, $\|u\| = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$;
- 2) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \forall u \in U, \lambda \in \mathbb{R}$; 3) $\|u_1 + u_2\| \leq \|u_1\| + \|u_2\| \forall u_1, u_2 \in U$.

Последовательность $\{u_n\} \in U$ называют *фундаментальной*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что выполняется неравенство $\|u_{n+p} - u_n\| < \varepsilon \forall n \geq N$ и любого натурального числа p .

Нормированное пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность $\{u_n\}$ сходится к элементу из пространства U . Полное нормированное пространство называется *банаховым* пространством.

Приведем примеры нормированных пространств. Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ (либо $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$) обозначает множество всех целых неотрицательных (либо всех целых положительных) чисел. Через $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ обозначим мультииндекс, т. е. вектор с компонентами $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Для функции f будем обозначать через $D^\alpha f$ частную производную порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ вида

$$D^\alpha f(x) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей Γ . Обозначим через $C^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, множество всех функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, m раз непрерывно дифференцируемых в Ω . При $m = 0$ имеем пространство $C(\Omega) = C^0(\Omega)$, состоящее из непрерывных в Ω функций. Через $C^\infty(\Omega)$ обозначим пространство функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, бесконечно дифференцируемых в Ω . Через $C^m(\overline{\Omega})$, $m \in \mathbb{N}$ (либо $C^\infty(\overline{\Omega})$) обозначим множество функций из $C^m(\Omega)$ (либо $C^\infty(\Omega)$), все производные которых порядка $\leq m$ (либо любого порядка) допускают непрерывное продолжение на $\overline{\Omega}$.

Известно [28], что в случае ограниченной области Ω пространство $C^m(\overline{\Omega})$ является нормированным и, более того, *банаховым* по норме

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{k=0}^m \sup_{|\alpha|=k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|. \quad (1.25)$$

В то же время пространства $C^m(\Omega)$ и $C^\infty(\overline{\Omega})$, в отличие от $C^m(\overline{\Omega})$, не являются банаховыми. В случае неограниченной области Ω с границей Γ положим $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ и условимся под $C^m(\overline{\Omega})$ понимать множество функций в Ω , все производные которых до порядка m включительно существуют, ограничены в Ω и допускают непрерывное продолжение на $\Omega \cup \Gamma$. Можно показать, что указанное пространство также является банаховым по норме (1.25). Другие примеры нормированных пространств будут приводиться ниже при рассмотрении конкретных задач математической физики. Предполагая, что линейные пространства U и F в (1.24) являются нормированными с нормами $\|\cdot\|_U$ и $\|\cdot\|_F$ соответственно, введем следующее фундаментальное понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Задача нахождения решения $u \in U$ уравнения (1.24) называется корректно поставленной на паре (F, U) , если: 1) решение $u \in U$ существует для любого элемента $f \in F$, 2) решение $u \in U$ уравнения (1.24) единственно в U , 3) решение u непрерывно зависит от f в том смысле, что малому в норме пространства F изменению правой части f отвечает малое в норме пространства U изменение решения u . Если не выполняется хотя бы одно из условий 1) - 3), то данная задача называется некорректно поставленной.*

Свойство 3) называется также *устойчивостью* решения. Согласно ему для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если $\|f_1 - f_2\|_F \leq \delta$ и $Lu_1 = f_1$, $Lu_2 = f_2$, то $\|u_1 - u_2\|_U \leq \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В задачах математической физики оператор L обычно линеен, т. е. удовлетворяет условию

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv \quad \forall u, v \in U \text{ и } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Хорошо известно, что свойство единственности решения линейного уравнения (1.24) эквивалентно *обратимости* оператора L , т. е. существованию обратного оператора L^{-1} . Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что однородное уравнение $Lu = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Поэтому для линейных задач доказательство единственности сводится к доказательству единственности тривиального (нулевого) решения однородного уравнения (1.24) (при $f = 0$). Точно так же доказательство устойчивости (либо неустойчивости) сводится к доказательству устойчивости (либо неустойчивости) тривиального решения. Этими фактами мы в дальнейшем часто будем пользоваться при исследовании единственности и устойчивости решений линейных задач математической физики.

Примером корректно поставленной задачи является задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Здесь f – непрерывная в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ функция, удовлетворяющая условию Липшица по y . Доказательство корректности этой задачи,

т. е. существования, единственности и непрерывной зависимости решения u от исходных данных x_0 и y_0 , можно найти, например, в [51, гл. 2].

Существуют, конечно, и некорректно поставленные задачи. Ограничимся здесь приведением примера задачи, в которой отсутствует непрерывная зависимость решения от исходных данных. Первый пример такого типа был построен, по-видимому, французским математиком Жаком Адамаром в начале 20-го столетия (см. [1]). Он рассмотрел следующую задачу Коши для двумерного уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ в } \mathbb{R}^2, \quad u|_{y=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \psi(x) \text{ в } \mathbb{R}. \quad (1.26)$$

В случае, когда функции φ и ψ аналитичны в $\mathbb{R}$, решение u задачи Коши существует и единственно. Это вытекает, например, из теоремы Ковалевской (см. п. 1.4). Простой анализ показывает, что при $\varphi = \varphi_1 = 0$, $\psi = \psi_1(x) = (1/a)\sin ax$, где $a = \text{const} > 0$, решение u задачи (1.26) имеет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{a^2} \sin ax \operatorname{sh} ay, \quad (1.27)$$

тогда как при $\varphi = \varphi_2 = 0$, $\psi = \psi_2 = 0$ единственным решением задачи (1.26) является функция $u \equiv 0$. Рассматривая для конкретности решение u в полосе $\Omega = \{-\infty < x < \infty, 0 < y < b\}$, $b > 0$, условимся оценивать отклонения начальных данных и решений соответственно в нормах пространств $C(\mathbb{R})$ и $C(\overline{\Omega})$, где $\overline{\Omega} = \{-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq b\}$. Поскольку по определению

$$\|\psi\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|, \quad \|u\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{(x,y) \in \overline{\Omega}} |u(x, y)|,$$

то имеем

$$\|\psi_1 - \psi_2\|_{C(\mathbb{R})} = \|\psi_1\|_{C(\mathbb{R})} \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi_1(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{a} \sin ax \right| = \frac{1}{a},$$

$$\|u_1 - u_2\|_{C(\overline{\Omega})} = \|u_1\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup_{(x,y) \in \overline{\Omega}} |u_1(x, y)| = \frac{1}{a^2} \sup_{y \in [0,b]} \operatorname{sh} ay = \frac{1}{a^2} \operatorname{sh} ab.$$

Отсюда видно, что величина $\|\psi_1\|_{C(\mathbb{R})}$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно больших a . В то же время величина $\|u_1\|_{C(\overline{\Omega})}$, наоборот, может быть сделана сколь угодно большой при больших значениях a . Это означает неустойчивость нулевого решения однородной задачи (1.26). Отсюда вытекает с учетом замечания 1.1 некорректность задачи Коши для уравнения Лапласа.

Понятие корректно поставленной задачи было введено в 1923 г. Жаком Адамаром, который высказал свою точку зрения о том, что всякая математическая задача, отвечающая какой-либо физической задаче, должна быть

корректной и, в частности, устойчивой. Требование устойчивости решения Адамар мотивировал тем обстоятельством, что физические данные определяются, как правило, приближенно с помощью экспериментов. В связи с этим “физикам” надо иметь уверенность в том, что решение рассматриваемой ими математической задачи, моделирующей физический процесс, не будет сильно зависеть от погрешностей измерений. В самом деле, какую физическую интерпретацию может иметь решение задачи, у которой сколь угодно малым изменениям исходных данных могут отвечать достаточно большие изменения решения? Кроме того, к задачам такого типа затруднительно применять приближённые методы решения.

Долгое время в математической литературе господствовала точка зрения Адамара о нецелесообразности изучения некорректно поставленных по Адамару задач. Такая точка зрения сохранялась и после появления в 1943 г. фундаментальной работы А.Н. Тихонова [52], в которой впервые была указана практическая важность некорректных по Адамару задач и сформулированы новые требования, предъявляемые к их постановкам. Дальнейшее интенсивное проникновение идей математического моделирования в разные области знаний и, в частности, в геофизику, гидрофизику, биофизику, химию, экономику, социологию, а с другой стороны, бурное развитие средств вычислительной техники привело к появлению достаточно большого числа прикладных математических задач, не являющихся корректными по Адамару. К числу таких задач относятся задачи интерпретации данных физических экспериментов, задачи зондирования океана и атмосферы, задачи спектроскопии, а также обратные задачи, возникающие в геофизике, гидрофизике, астрономии, радиоастрономии и других областях. Указанные обратные задачи заключаются в нахождении неизвестных параметров, например, плотностей источников, либо коэффициентов уравнений или граничных условий по определенной дополнительной информации о решении. В частности, выяснилось, что рассмотренная выше задача Коши для уравнения Лапласа играет важную роль в геофизике, поскольку к ее исследованию сводится решение ряда обратных геофизических задач.

Появление такого типа задач привело к необходимости пересмотреть требования, указанные Ж. Адамаром к постановке прикладных математических задач, и разработать методы решения некорректных по Адамару задач. Основополагающую роль в этом направлении сыграли работы российских математиков А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и В.К. Иванова. Ими, в частности, было введено следующее определение корректности по Тихонову (см. [53]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. *Задача (1.24) называется корректно поставленной по Тихонову, если: 1) априори известно, что решение и существует и принадлежит некоторому множеству U_0 в U ; 2) решение и единственно; 3) бесконечно малым вариациям исходных данных, не выводящих ре-*

шение и из множества U_0 , соответствуют бесконечно малые вариации решения u .

Множество U_0 получило название множества *корректности* задачи. Непрерывная зависимость решения от исходных данных для задачи, поставленной корректно по Тихонову, восстанавливается сужением множества допустимых исходных данных, поэтому такие задачи называются также *условно-корректными*. Так, для того, чтобы сделать рассмотренную выше задачу Коши (1.26) условно-корректной, достаточно выбрать в качестве множества U_0 множество функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченных по модулю некоторой константой. Соответствующее априорное условие на решение данной задачи вместе с условием его существования, естественно, приводит к некоторым ограничениям на множество допустимых исходных данных в рассматриваемой задаче Коши. Более подробно о корректных постановках задачи Коши для уравнения Лапласа и методах решения можно прочитать в книге [27].

Следует отметить, что разработанная в трудах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева и В.К. Иванова теория условно-некорректных задач не даёт ответа на все вопросы, возникающие при исследовании некорректных задач. Однако из неё следует важный вывод о том, что указанные задачи не являются безнадежно плохими, а могут допускать вполне разумную физическую интерпретацию.

1.4. Теорема Ковалевской. В этом пункте мы выделим довольно обширный класс задач, а именно: задач Коши для так называемых нормальных относительно времени t систем дифференциальных уравнений произвольного порядка, для которых решение существует и единственно. Начнем с введения некоторых определений. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ -произвольная область.

1) Функция $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *аналитической в точке* $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \Omega$, если в некоторой окрестности этой точки она представляется в виде равномерно сходящегося степенного ряда

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{c_\alpha}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha. \quad (1.28)$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, причем для краткости используются обозначения $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$, $(x - x_0)^\alpha = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n}$. Если функция f аналитична в каждой точке области Ω , то говорят, что она *аналитична в области* Ω .

Отметим некоторые свойства аналитических функций. Первое свойство заключается в том, что ряд (1.28) является степенным рядом Тейлора функции u , аналитической в точке x_0 . Для доказательства этого свойства достаточно воспользоваться тем известным фактом, что степенной ряд внутри шара $B_r(x_0)$, целиком лежащего в области его сходимости,

можно почленно дифференцировать сколь угодно раз, причем ряд, полученный дифференцированием исходного ряда, будет также равномерно сходиться в $B_r(x_0)$. Отсюда следует, что сумма u ряда (1.28) бесконечно дифференцируема в $B_r(x_0)$. Применяя далее к (1.28) оператор дифференцирования D^α и полагая в полученных соотношениях $x = x_0$, получим $c_0 = f(x_0)$, $c_\alpha = D^\alpha f(x_0)$. Эти соотношения и означают, что ряд (1.28) является рядом Тейлора для суммы f . Отсюда, в частности, вытекает, что аналитическая в области Ω функция f однозначно определяется во всей области Ω значениями f и всех ее производных в фиксированной точке $x_0 \in \Omega$. В частности, из обращения в нуль самой функции f и всех ее производных в точке $x_0 \in \Omega$ вытекает, что $f \equiv 0$ в Ω . Это утверждение составляет содержание так называемой *теоремы единственности* аналитических функций.

Другим важным свойством аналитической функции является то, что из аналитичности в точке $x_0 \in \Omega$ вытекает аналитичность ее в некоторой окрестности. Доказательство этого факта можно найти в [34, с. 20].

2) Система N дифференциальных уравнений с N неизвестными функциями $u_1, u_2, \dots, u_N$ вида

$$\frac{\partial^{k_i} u_i}{\partial t^{k_i}} = \Phi_i(x, t, u_1, u_2, \dots, u_N, \dots, D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_j, \dots), \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (1.29)$$

называется *нормальной относительно переменной t* , если правые части Φ_i не содержат производных порядка выше k_i и производных по t порядка выше $k_i - 1$, так что $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k_i$, $\alpha_0 \leq k_i - 1$. Здесь $D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_j$ обозначает следующую производную:

$$D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_j(x) = \frac{\partial^{\alpha_0 + |\alpha|} u_j(x)}{\partial t^{\alpha_0} \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Например, волновое уравнение, уравнение Лапласа и уравнение теплопроводности нормальны относительно каждой переменной x_i ; волновое уравнение, кроме того, нормально относительно t .

Для нормальной относительно t системы уравнений (1.29) поставим следующую задачу Коши: найти решение $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ этой системы, удовлетворяющее начальным условиям при $t = t_0$:

$$\left. \frac{\partial^k u_i}{\partial t^k} \right|_{t=t_0} = \varphi_{ik}(x), \quad k = 0, 1, \dots, k_i - 1, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.30)$$

Здесь φ_{ik} – заданные функции в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА КОВАЛЕВСКОЙ. [11, с. 79] *Если все функции φ_{ik} в (1.30) аналитичны в некоторой окрестности точки x_0 , и все функции Φ_i в (1.29) аналитичны в некоторой окрестности точки $(x_0, t_0, \dots, D^\alpha \varphi_{j\alpha_0}(x_0), \dots)$,*

то задача Коши (1.29), (1.30) имеет аналитическое решение в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) и притом единственное в классе аналитических функций.

Доказательство теоремы основано на отыскании решения $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ в окрестности точки (x_0, t_0) в виде степенного ряда:

$$u_i(x, t) = \sum_{\alpha_0 \geq 0, |\alpha| \geq 0} \frac{D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_i(x_0, t_0)}{\alpha_0! \alpha!} (t - t_0)^{\alpha_0} (x - x_0)^\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.31)$$

Коэффициенты $D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha u_i(x_0, t_0)$ этого ряда определяются из начальных условий (1.30) и уравнений (1.29). Остается доказать равномерную сходимость рядов (1.31) в некоторой окрестности точки (x_0, t_0) , для чего используется метод мажорант. Единственность построенного решения в классе аналитических функций следует из теоремы единственности для аналитических функций.

Теорема Ковалевской носит фундаментальный характер, поскольку она указывает, как надо задавать дополнительные условия для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, которые позволяют выделить её единственное решение. Роль этих дополнительных условий для нормальной системы дифференциальных уравнений вида (1.29) играют условия Коши, задаваемые при $t = t_0$. Позже в § 4 мы еще раз обсудим аналогичные вопросы на примере задачи Коши для уравнения второго порядка. Там мы введем фундаментальное понятие характеристики для рассматриваемого дифференциального уравнения и, основываясь на теореме Ковалевской, покажем, что данные Коши, выделяющие единственное решение уравнения второго порядка, можно задавать и на произвольной (аналитической) поверхности в $\mathbb{R}^n$, не являющейся характеристикой.

Теорема Ковалевской является одной из самых красивых теорем теории уравнений в частных производных. В этом можно убедиться, познакоившись с ее полным доказательством по книгам И.Г. Петровского [41] и В.П. Михайлова [34]. Это естественно, поскольку она была доказана молодой талантливой женщиной – нашей соотечественницей Софьей Ковалевской в 1899г. Однако указанная теорема, несмотря на ее достаточно общий характер, не решает полностью вопроса о корректности постановки задачи Коши даже для нормальной системы дифференциальных уравнений. Действительно, эта теорема гарантирует существование и единственность решения рассматриваемой задачи Коши лишь в достаточно малой окрестности, или, как говорят, *в малом*. В то же время существование и единственность обычно требуется установить во всей рассматриваемой области, т. е., как говорят, *в целом*. Кроме того, в прикладных задачах начальные данные, а также коэффициенты и правая часть, как правило, не являются аналитическими функциями, и в этих случаях заведомо не существует аналитического решения. Наконец, даже если аналитическое решение рассматриваемой

задачи существует и единственно, то из теоремы Ковалевской не вытекает, что данное решение непрерывно зависит от исходных данных. Более того, приведенный в п. 1.3 пример задачи Коши для уравнения Лапласа показывает, что решение может быть неустойчивым.

С учетом приведенных фактов при рассмотрении конкретных задач математической физики обычно приходится отказываться от нахождения аналитического решения и заниматься поиском решения, обладающего конечной гладкостью. К настоящему времени в теории уравнений в частных производных наиболее распространены два типа решений: *классическое* решение, основанное на классической постановке рассматриваемой задачи, и *обобщенное* решение, основанное на её обобщенной постановке.

1.5. Классическое и обобщенное решения. Напомним, что решением уравнения n -го порядка (1.1) в области Ω мы называли такую функцию $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, которая обращает уравнение (1.1) в тождество в области Ω . Это определение автоматически предполагает, что функция u обладает определенной гладкостью, а именно, что в каждой точке $x \in \Omega$ существуют все её производные, входящие в это уравнение. Если дополнительно предположить, что указанные производные непрерывны всюду в Ω , то такую функцию принято называть *классическим решением* уравнения (1.1).

Заметим, что указанное определение не накладывает каких-либо ограничений на поведение решений на границе области Ω . Однако, если уравнение (1.1) рассматривается при определенных граничных условиях, то в определение классического решения соответствующей краевой задачи следует добавить условие непрерывности вплоть до границы тех производных от функции u , которые входят в краевые условия. Так, например, классическим решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области Ω

$$\Delta u = -f \text{ в } \Omega, \quad u = g \text{ на } \Gamma \quad (1.32)$$

принято называть функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению Пуассона в (1.32) в каждой точке $x \in \Omega$ и граничному условию в (1.32) в каждой точке $x \in \Gamma$. Определения классических решений других краевых задач будут введены в следующих главах, посвященных строгому математическому исследованию конкретных задач математической физики.

Здесь же отметим, что классическая постановка задачи предполагает, что коэффициенты и правая часть рассматриваемого уравнения также обладают определенной гладкостью, скажем, непрерывны в Ω . Вместе с тем на практике часто приходится рассматривать ситуации, когда, например, правая часть уравнения, описывающая плотность внешних источников, имеет определенные особенности в некоторых изолированных точках или даже подобластях области Ω . В этих случаях классического решения рассматриваемой задачи может не существовать. Поэтому приходится отказы-

ваться от требования гладкости решения внутри области или на границе и вводить так называемое *обобщенное решение* рассматриваемой задачи математической физики.

Существуют два основных подхода к введению обобщенного решения. В первом рассматриваемое дифференциальное уравнение умножается на *тестовую* функцию v из некоторого пространства функций V , тесно связанного с изучаемой задачей, и далее полученное соотношение интегрируется по рассматриваемой области. После применения формулы интегрирования по частям с использованием краевых и начальных условий возникает интегральное тождество, содержащее искомую функцию u и некоторые ее производные. Важно отметить, что порядок входящих в это тождество старших производных от функции u меньше порядка дифференциального уравнения. Это позволяет ослабить требования на гладкость функции u , которая и принимается за обобщенное решение. Описанный подход к определению обобщенного решения используется, например, в [13, 28, 32, 34]. Другой подход к введению обобщенного решения, основанный на понятии обобщенной функции, излагается в [11].

Не останавливаясь детально на обсуждении указанных подходов, отметим лишь, что цель введения обобщенного решения можно считать достигнутой, если в отсутствие существования классического решения удастся доказать существование, единственность и устойчивость обобщенного решения. Важно также установить, что гладкость обобщенного решения растет с ростом гладкости исходных данных. Именно эти вопросы исследуются в руководствах по современной математической физике (см. цитируемые книги). Мы же в этой книге будем рассматривать, в основном, классические постановки задач математической физики и исследовать вопросы существования, единственности и устойчивости классических решений. Более конкретно, мы будем заниматься *исследованием корректности основных начально-краевых задач для линейных дифференциальных уравнений математической физики и изучением качественных свойств решений и классических методов построения точных или приближенных решений этих задач*. Еще одной целью будет являться вывод и анализ явных представлений решений рассматриваемых задач в виде интегральных формул, либо рядов Фурье, либо интегральных преобразований.

§2. Уравнения в частных производных 1-го порядка

В гл. 1 было показано, что применение метода математического моделирования для исследования процессов тепло- и массопереноса в некоторой области Ω пространства $\mathbb{R}^3$ приводит к необходимости нахождения решения следующего уравнения в частных производных 1-го порядка:

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \text{grad} u = f \quad \text{в } \Omega \times (0, T]. \quad (2.1)$$

Здесь u – искомая функция, $\mathbf{a}$ и f – заданные в области $Q = \Omega \times (0, T]$ функции. Первая из них имеет смысл скорости движущейся жидкости, а вторая описывает объемную плотность величины u . В соответствии с физическим смыслом уравнение (2.1) описывает *конвективный перенос* некоторой субстанции (плотности, солености, температуры и т. д.) вдоль траекторий частиц движущейся жидкости в отсутствие эффектов диффузии. Поэтому на уравнение (2.1) часто ссылаются как на *уравнение переноса*. В этом параграфе мы исследуем некоторые свойства решений уравнения (2.1) и его стационарного аналога

$$\mathbf{a} \cdot \text{grad} u = f \quad \text{в } \Omega, \quad (2.2)$$

а также укажем, как надо задавать дополнительные (начальные и краевые) условия, выделяющие единственное решение уравнения (2.1) либо (2.2). Начнем рассмотрение с простейшего одномерного аналога уравнения (2.1).

2.1. Одномерное уравнение с постоянным коэффициентом. Условия Коши. Рассмотрим простейшее (одномерное по пространственным переменным) уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

Поставим задачу: найти общее решение уравнения (2.3). Под *решением* u уравнения (2.3) в некоторой области Q плоскости (x, t) будем понимать дифференцируемую в области Q функцию, удовлетворяющую в каждой точке $(x, t) \in Q$ уравнению (2.3). Что касается термина “общее решение”, то, как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, под ним будем понимать некоторое семейство решений (зависящее от одного или нескольких параметров), из которого можно получить любое частное решение уравнения (2.3), удовлетворяющее определенному классу условий. Речь об этих условиях пойдет ниже.

Чтобы получить формулу общего решения уравнения (2.3), сделаем, следуя [14, с.55], следующее построение. Проведем на плоскости (x, t) прямые $x - t = c$, где c – произвольная постоянная (см. рис. 2.1а). Любую такую прямую будем называть *характеристикой* уравнения (2.3). Мы пока не даем строгого определения этого важного понятия, но вернемся к нему в конце этого пункта. Ясно, что дифференциальное уравнение характеристик имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = 1. \quad (2.4)$$

Значения постоянных c как бы нумеруют эти характеристики. Поэтому можно считать, что постоянная c в уравнении прямой $x - t = c$ является “номером” прямой семейства характеристик, задаваемых уравнением

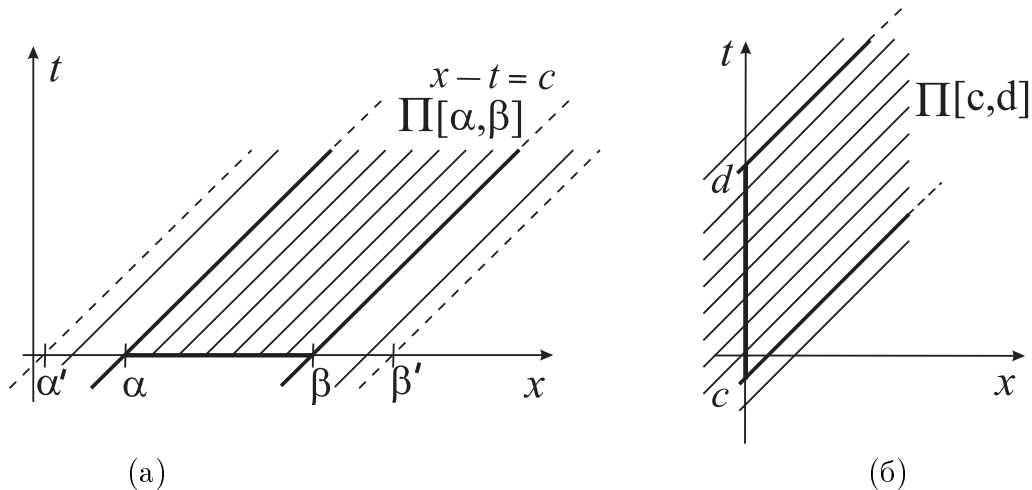


Рис. 2.1

(2.4). В то же время на t можно смотреть как на параметр, который изменяется вдоль характеристик данного семейства.

Рассмотрим теперь произвольную функцию u , зависящую от двух переменных x и t . Вдоль каждой характеристики функция u является сложной функцией параметра t . Предполагая функцию u дифференцируемой, обозначим через du/dt ее производную по параметру t . Используя правило дифференцирования сложной функции, имеем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Если теперь предположить, что функция u является решением уравнения (2.3), то из этой формулы следует, что вдоль любой характеристики выполняется соотношение $du/dt = 0$. Это означает, что u постоянна вдоль каждой из этих прямых. Таким образом, значение $u(x, t)$ решения u в точке (x, t) зависит лишь от “номера” c той характеристики $x - t = c$, на которой лежит точка (x, t) . Это означает, что решение u определяется формулой

$$u(x, t) = \Phi(x - t). \quad (2.5)$$

Здесь Φ – некоторая дифференцируемая функция одной переменной. В справедливости этого факта можно убедиться и непосредственной проверкой, если воспользоваться следующими соотношениями, вытекающими из (2.5)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Phi'(x - t), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\Phi'(x - t).$$

Итак, для любой дифференцируемой функции одной переменной Φ формула (2.5) дает решение уравнения (2.3). Фактически (2.5) представляет собой целое семейство решений уравнения (2.3), зависящее от одного функционального параметра. Роль его как раз играет функция Φ . С учетом этого

будем ссылаться ниже на формулу (2.5) как на общее решение уравнения (2.3). Чтобы это утверждение было корректным, достаточно показать, что с помощью формулы (2.5) можно получить любое решение уравнения (2.3), удовлетворяющее дополнительным условиям, в качестве которых будем использовать условия Коши.

Чтобы их сформулировать, выберем сначала на оси x отрезок $[\alpha, \beta]$ (см. рис. 2.1а) и зададим на этом отрезке дифференцируемую функцию φ . Поставим задачу: найти функцию u , удовлетворяющую уравнению (2.3) и принимающую заданные значения $\varphi(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, т. е. удовлетворяющую условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.6)$$

Условие (2.6) и называют (по историческим причинам) *условием Коши* для уравнения (2.3) на отрезке $[\alpha, \beta]$, а саму задачу (2.3), (2.6) – *задачей Коши* для уравнения (2.3). Поскольку условие (2.6) задано при $t = 0$, то это условие также называют *начальным условием* для уравнения (2.3).

Легко убедиться, что если в качестве функции Φ в (2.5) выбрать начальную функцию φ , то построенная таким образом функция $u(x, t) = \varphi(x - t)$ определяет решение уравнения (2.3), удовлетворяющее условию (2.6). Указанное решение будет определено в области Q , содержащей все такие точки (x, t) плоскости x, t , для которых определено значение $\varphi(x - t)$ функции φ . Роль такой области Q играет “характеристическая” полоса $\Pi[\alpha, \beta]$, образованная всеми характеристиками уравнения (2.3), пересекающими отрезок $[\alpha, \beta]$ оси x (см. рис. 2.1а). Более того, решение u задачи (2.3), (2.6) единственно в полосе $\Pi[\alpha, \beta]$.

Для доказательства единственности воспользуемся методом от “противного”, который обычно используется при доказательстве единственности решений задач математической физики. Следуя этому методу, предположим, что в полосе $\Pi[\alpha, \beta]$ существует два решения u_1 и u_2 задачи (2.3), (2.6). Тогда в силу линейности уравнения (2.3) их разность $u = u_1 - u_2$ будет по-прежнему являться решением уравнения (2.3), но удовлетворять нулевому условию вида

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.7)$$

Ясно, с одной стороны, что функция u , будучи решением уравнения (2.3), сохраняет постоянное значение вдоль каждой характеристики уравнения (2.3). С другой стороны, в силу (2.7) u равна нулю в точке $(x_0, 0)$ любой характеристики, лежащей в полосе $\Pi[\alpha, \beta]$. Отсюда следует, что u необходимо равна нулю на каждой характеристике из полосы $\Pi[\alpha, \beta]$, т. е. $u(x, t) \equiv 0$ в $\Pi[\alpha, \beta]$.

Если продолжить начальную функцию φ на больший отрезок $[\alpha', \beta'] \supset [\alpha, \beta]$, то мы сможем построить решение u в более широкой полосе $\Pi' =$

$\Pi[\alpha', \beta']$, границы которой помечены пунктиром на рис. 2.1а. Так как такое продолжение функции φ может быть выполнено бесконечным количеством способов, то и решений задачи (2.1), (2.4) в более широкой полосе будет бесконечно много. Отсюда следует, что именно полоса $\Pi[\alpha, \beta]$ имеет смысл *области единственности* для задачи Коши (2.3), (2.6). Указанный факт можно доказать и другим методом, используя соображения, основанные на фундаментальном законе сохранения энергии. К этому вопросу мы вернёмся в п. 2.3.

Подчеркнем, что с ростом гладкости начальной функции φ в (2.6) гладкость решения u также растёт. Если, в частности, φ непрерывно дифференцируема в $[\alpha, \beta]$, то и решение u является непрерывно дифференцируемой функцией в $\Pi[\alpha, \beta]$, т. е. классическим решением уравнения (2.3) (согласно определению из п. 1.5). С использованием определения пространства $C^m(\overline{\Omega})$, введенного в п. 1.3, соответствующий факт кратко можно записать так: если $\varphi \in C^m[\alpha, \beta]$, $m = 1, 2, \dots$, то $u \in C^m(\Pi[\alpha, \beta])$.

Если, более того, φ является аналитической функцией, то и решение задачи Коши (2.3), (2.6) является аналитической функцией по крайней мере в окрестности участка $[\alpha, \beta]$. Поскольку уравнение (2.3) является простейшим примером системы, нормальной относительно переменной t (как и x), то указанный факт является следствием теоремы Ковалевской (см. п. 1.4). Впрочем, это вытекает и из представления решения в виде $u(x, t) = \varphi(x - t)$.

В качестве отрезка, на котором задаются данные Коши, можно выбрать и отрезок $[c, d]$ оси t (см. рис. 2.1б), задавая начальные данные в виде

$$u(0, t) = g(t), \quad t \in [c, d], \quad (2.8)$$

где g – некоторая дифференцируемая функция. Простой анализ показывает, что решение u задачи (2.3), (2.8) в полосе $\Pi[c, d]$, образованной всеми характеристиками уравнения (2.3), пересекающими интервал $[c, d]$, существует, единственно и определяется формулой: $u(x, t) = g(t - x)$.

Более того, данные Коши для уравнения (2.3) можно задавать и на произвольной гладкой кривой Γ в плоскости (x, t) при условии, что с каждой из характеристик кривая Γ пересекается не более, чем в одной точке (см. рис. 2.2а).

Для построения решения уравнения (2.3), удовлетворяющего условию

$$u|_{\Gamma} = \varphi, \quad (2.9)$$

достаточно подобрать нужный вид гладкой функции Φ в (2.5). Это можно сделать, например, следующим образом. Предположим, что Γ задана параметрически в виде $x = x_s \equiv \xi(s)$, $t = t_s \equiv \eta(s)$, $s \in [s_1, s_2]$, причём функция φ зависит от параметра s кривой Γ . Проведем через каждую

точку $(x_s, t_s) \in \Gamma$ характеристику. Ее уравнение, очевидно, имеет вид

$$x - t = x_s - t_s = \xi(s) - \eta(s). \quad (2.10)$$

Сравнивая это уравнение с общим уравнением характеристики $x - t = c$,

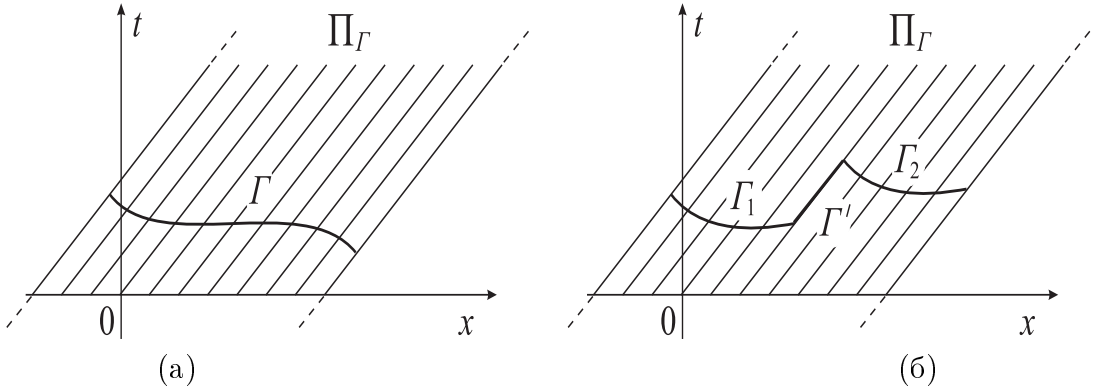


Рис. 2.2

приходим к следующему соотношению

$$c = \xi(s) - \eta(s). \quad (2.11)$$

Оно связывает значения параметра s кривой Γ с соответствующим “номером” c характеристики, проходящей через точку (ξ_s, η_s) . Предположим, что выполняются условия:

(i) $\varphi \in C^1(\Gamma)$, $\Gamma \in C^1$ (т.е. ξ и $\eta \in C^1[s_1, s_2]$), $\xi'(s) - \eta'(s) > 0 \quad \forall s \in [s_1, s_2]$.

Подчеркнем, что именно последнее условие в (i) обеспечивает наше предположение о том, что кривая Γ пересекается с каждой из характеристик, лежащей в полосе Π_Γ , лишь в одной точке. В силу этого условия имеем $c'_s(s) \equiv \xi'(s) - \eta'(s) > 0 \quad \forall s \in [s_1, s_2]$. Поэтому, когда параметр s пробегает интервал $[s_1, s_2]$, отвечающий ему в силу (2.11) “номер” c , монотонно возрастая, согласно последнему условию в (i), пробегает интервал $[c_1, c_2]$, где $c_1 = \xi(s_1) - \eta(s_1)$, $c_2 = \xi(s_2) - \eta(s_2)$. Ясно, что c_i отвечает характеристике, проходящей через граничную точку кривой Γ , соответствующую значению s_i , $i = 1, 2$, параметра s .

Обозначим через $\tilde{s} : [c_1, c_2] \rightarrow [s_1, s_2]$ функцию, обратную к функции (2.11), с которой выполняется равенство $\tilde{s}(c) = s \quad \forall c \in [c_1, c_2]$. Из свойств обратных функций и условий (i) вытекает, что $\tilde{s} \in C^1[c_1, c_2]$. Рассмотрим в полосе Π_Γ функцию u , действующую по формуле

$$u(x, t) = \varphi \circ \tilde{s}(x - t) \equiv \varphi[\tilde{s}(x - t)]. \quad (2.12)$$

Отметим следующие свойства функции u , справедливые при выполнении (i):

1) Функция u определена в полосе Π_Γ . Действительно, когда точка (x, t) пробегает полосу Π_Γ , разность $x - t = c$ пробегает интервал $[c_1, c_2]$, тогда как $\tilde{s}(x - t)$ пробегает интервал $[s_1, s_2]$, где определена функция φ .

2) Функция u как композиция непрерывно дифференцируемых функций принадлежит $C^1(\Pi_\Gamma)$ и удовлетворяет уравнению (2.3) в каждой точке Π_Γ .

3) Функция u удовлетворяет условию

$$u(x_s, t_s) = \varphi \circ \tilde{s}[\xi(s) - \eta(s)] = \varphi \circ \tilde{s}(c) = \varphi(s) \quad \forall s \in [s_1, s_2] \Rightarrow u|_\Gamma = \varphi.$$

На основании свойств 1)–3) приходим к выводу, что при выполнении условий (i) функция (2.12) является искомым классическим решением задачи (2.3), (2.9), причем единственным в полосе Π_Γ . Более того, из формулы (2.12) вытекает, что с ростом гладкости исходных данных, роль которых в данном случае играет как функция φ , так и сама кривая Γ , на которой задана функция φ , растёт также и гладкость решения u задачи (2.3), (2.9).

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполняются условия (i). Тогда классическое решение $u \in C^1(\Pi_\Gamma)$ задачи Коши (2.3), (2.9) в полосе Π_Γ существует, единственно и определяется формулой (2.12). Если, более того, $\Gamma \in C^m$ (т.е. $\xi, \eta \in C^m[s_1, s_2]$), а $\varphi \in C^m(\Gamma)$, $m = 2, 3, \dots$, то $u \in C^m(\Pi_\Gamma)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Подчеркнем, что последнее условие в (i) является необходимым условием существования решения задачи (2.3), (2.9) для произвольной дифференцируемой функции φ . Если оно не выполняется, то в общем случае решение задачи (2.3), (2.9) не существует. Тем не менее можно доказать его существование при выполнении некоторых дополнительных предположений на φ . Рассмотрим, например, случай, когда Γ состоит из трех участков: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma' \cup \Gamma_2$, причем на Γ_1 и Γ_2 последнее условие в (i) выполняется, тогда как на участке Γ' границы Γ , отвечающем изменению параметра s в интервале $[s'_1, s'_2] \subset [s_1, s_2]$, выполняется условие: $\xi'(s) - \eta'(s) = 0$ или $\xi(s) - \eta(s) = \text{const} \quad \forall s \in [s'_1, s'_2]$. Это условие означает в силу (2.11), что участок Γ' является отрезком характеристики для уравнения (2.3), так что кривая Γ имеет вид, изображенный на рис. 2.26. Поскольку любое решение уравнения (2.3) остается постоянным на характеристике, то становится ясно, что функцию φ нельзя задавать произвольным образом на Γ' : необходимое условие существования решения задачи (2.3), (2.9) в этом случае заключается в том, чтобы функция φ в (2.9) принимала постоянное значение на Γ' . Но это условие не является достаточным условием существования решения. Чтобы убедиться в этом, проведем дополнительные построения.

Разобьем характеристическую полосу Π_Γ на две: Π_{Γ_1} и Π_{Γ_2} . Первая представляет собой характеристическую полосу, образованную характеристиками, пересекающими участок Γ_1 кривой Γ . Вторая полоса представляет собой характеристическую полосу, образованную характеристиками, пере-

секающими участок Γ_2 кривой Γ . Ясно, что обе полосы разделяются между собой общей характеристикой $x - t = c'$, проходящей через участок Γ' (рис. 2.2б). Обозначим сужения начальной функции φ на Γ_1 и Γ_2 через φ_1 и φ_2 соответственно.

Рассмотрим функции u_1 и u_2 , определяемые в Π_{Γ_1} и Π_{Γ_2} соотношениями:

$$u_1(x, t) = \varphi_1(x - t), \quad (x, t) \in \Pi_{\Gamma_1}, \quad u_2(x, t) = \varphi_2(x - t), \quad (x, t) \in \Pi_{\Gamma_2}.$$

Из теоремы 2.1, примененной к каждой из полос Π_{Γ_1} и Π_{Γ_2} , следует, что функция u_1 является решением уравнения (2.3) в полосе Π_{Γ_1} удовлетворяющим начальному условию $u|_{\Gamma_1} = \varphi_1$, тогда как u_2 является решением уравнения (2.3) в полосе Π_{Γ_2} , удовлетворяющим условию $u|_{\Gamma_2} = \varphi_2$.

Чтобы построить решение u исходной задачи (2.3), (2.9) во всей полосе Π_{Γ} , “склеим” функции u_1 и u_2 на общей характеристике $x - t = c'$, полагая

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & (x, t) \in \Pi_{\Gamma_1}, \\ u_2(x, t), & (x, t) \in \Pi_{\Gamma_2}. \end{cases}$$

По построению функция u удовлетворяет условию (2.9), в том числе и на участке Γ' кривой Γ в силу нашего предположения на функцию φ , а также уравнению (2.3) всюду в Π_{Γ} , кроме общей характеристики $x - t = c'$, играющей, таким образом, особую роль для задачи (2.3), (2.9). Чтобы функция u удовлетворяла уравнению (2.3) и на этой “особой” характеристике, нужно потребовать от функций φ_1 и φ_2 , чтобы они удовлетворяли следующим двум условиям

$$\varphi_1(s'_1) = \varphi_2(s'_2), \quad \frac{d\varphi_1(s'_1)}{ds} = \frac{d\varphi_2(s'_2)}{ds}.$$

Указанные условия служат для обеспечения соответственно непрерывно-

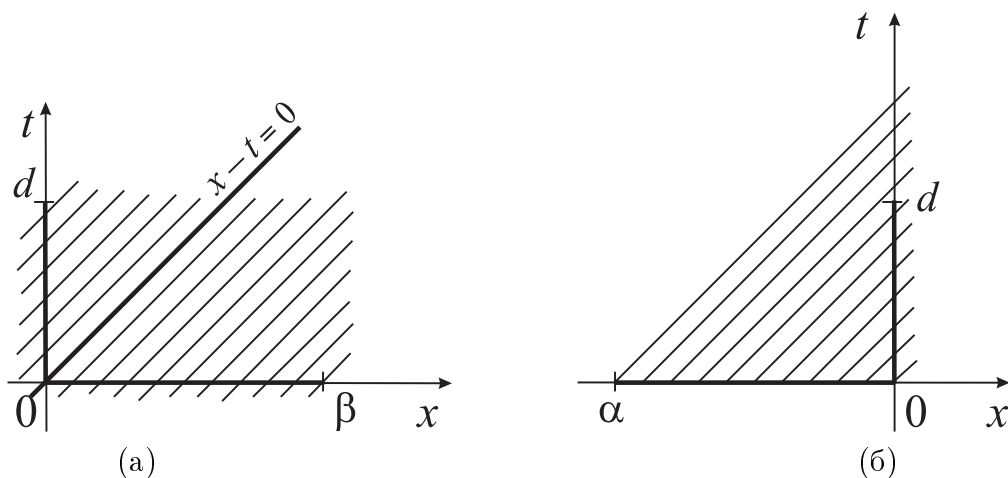


Рис. 2.3

сти и непрерывной дифференцируемости решения u на особой характеристике $x - t = c'$, а следовательно, и всюду в полосе Π_Γ . Их называют *условиями согласования* исходных данных рассматриваемой задачи.

Из проведенного анализа следует, что условия согласования для задачи Коши (2.3), (2.9) должны задаваться в одном из двух случаев: 1) кривая Γ , на которой задано условие Коши, является гладкой, но она содержит участок, совпадающий с частью характеристики уравнения (2.3), либо содержит точки, в которых направление Γ совпадает с характеристическим направлением; 2) кривая Γ является кусочно-гладкой, в этом случае условия согласования следует задавать в каждой точке кривой Γ , где нарушается ее гладкость.

В качестве кривой Γ можно выбрать, например, примыкающие друг к другу отрезки $[0, \beta]$ оси x и $[0, d]$ оси t (см. рис. 2.3а). Правда, поскольку гладкость такой кривой Γ нарушается в точке $(0, 0)$, то при этом придется позаботиться (с помощью условий согласования) о том, чтобы элементы функции φ , заданные на отрезках $[0, \beta]$ оси x и $[0, d]$ оси t , определяли функцию u в (2.5), дифференцируемую на характеристике $x = t$, проходящей через точку $(0, 0)$. К вопросу, как это сделать, мы еще вернемся в п. 2.2. А вот отрезки $[\alpha, 0]$ оси x и $[0, d]$ оси t , которые изображены на рис. 2.3б, использовать для постановки задачи Коши следует очень осторожно, так как в этом случае есть характеристики, которые пересекают как отрезок $[\alpha, 0]$ оси x , так и отрезок $[0, d]$ оси t . Поскольку вдоль каждой такой характеристики решение u сохраняет постоянное значение, то задавать значения φ на указанных отрезках произвольным образом нельзя. Рассмотрим теперь случай, когда данные Коши задаются на отрезке

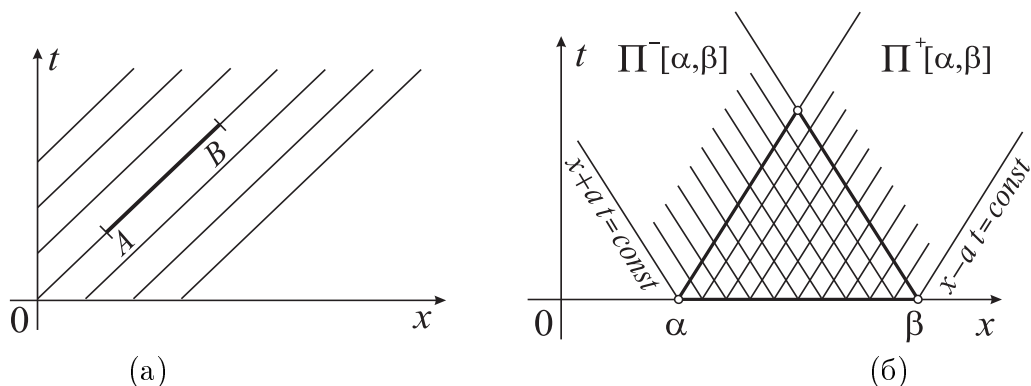


Рис. 2.4

AB одной из характеристик, например $x - t = 0$ (см. рис. 2.4а). Поскольку любое решение уравнения (2.3) постоянно на отрезке AB , то ясно, что функцию φ задавать на отрезке AB произвольным образом нельзя. Более того, в качестве функции φ можно задать лишь константу. Если же функция φ постоянна, т. е. $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ на AB , то решением такой задачи

Коши будет являться функция $u = \Phi(x - t)$, где функция Φ подчинена единственному условию $\Phi(0) = \varphi_0$, а в остальном произвольна. Таким образом, область единственности в этом случае стягивается в одну прямую (характеристику) $x - t = 0$.

Из приведенных результатов следует вывод, что выбор кривых или отрезков, на которых разумно задавать дополнительные условия, не может быть произвольным. Нужно учитывать расположение этих участков относительно прямых $x - t = c$, которые играют, таким образом, особую роль для уравнения (2.3). Поэтому эти прямые получили особое название *характеристик* уравнения (2.3).

В дальнейшем, задавая дополнительные условия на отрезке оси x в виде (2.6) и разыскивая решение уравнения (2.3) в характеристической полосе $\Pi[\alpha, \beta]$, опирающейся на этот отрезок, только для значений времени $t \geq 0$, мы будем ссылаться на (2.6) как на *начальное условие*. Если же дополнительное условие задается на некотором отрезке оси t , т. е. при $x = 0$, в виде (2.8), то на него будем ссылаться как на *граничное условие*.

Рассмотрим теперь более общее уравнение 1-го порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.13)$$

где $a = \text{const} > 0$. Рассуждая, как и выше, поставим в соответствие уравнению (2.13) следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad x|_{t=t_0} = x_0. \quad (2.14)$$

Поскольку $a = \text{const}$, то согласно теории обыкновенных дифференциальных уравнений [51] решение задачи (2.14) существует, единственно и описывает прямую (интегральную кривую задачи (2.14))

$$x = a(t - t_0) + x_0. \quad (2.15)$$

Указанную прямую называют *характеристикой* уравнения (2.13), проходящей через точку (x_0, t_0) . Когда точка (x_0, t_0) пробегает некоторую область в плоскости x, t , прямые (2.15) пробегают однопараметрическое семейство прямых $x - at = \text{const}$, изображенных на рис. 2.4б.

Рассуждая, как и выше, легко показываем, что общее решение уравнения (2.13) имеет вид

$$u(x, t) = \Phi(x - at), \quad (2.16)$$

где Φ – произвольная дифференцируемая функция, тогда как частное решение уравнения (2.13), удовлетворяющее начальному условию (2.6), имеет вид

$$u(x, t) = \varphi(x - at). \quad (2.17)$$

Точно так же частное решение уравнения (2.13), удовлетворяющее граничному условию (2.8), имеет вид

$$u(x, t) = g(t - x/a). \quad (2.18)$$

По аналогичной схеме исследуется уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (2.19)$$

Интегральная кривая (в данном случае прямая) задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = -a, \quad x|_{t=t_0} = x_0$$

называется *характеристикой* уравнения (2.19), проходящей через точку (x_0, t_0) . Поскольку $a = \text{const}$, то решение последней задачи существует, единственно и описывает прямую $x = -a(t - t_0) + x_0$. Когда точка (x_0, t_0) пробегает некоторую область, указанные прямые пробегает однопараметрическое семейство прямых $x + at = \text{const}$, изображенных вместе с характеристиками уравнения (2.13) на рис. 2.4б. Простой анализ показывает, что общее решение уравнения (2.19), частное его решение, удовлетворяющее начальному условию (2.6), и частное его решение, удовлетворяющее граничному условию (2.8), имеют соответственно вид $\Phi(x + at)$, $\varphi(x + at)$ и $g(t + x/a)$. При этом решение, например, задачи (2.19), (2.6) единственно в полосе $\Pi^-[\alpha, \beta]$, образованной всеми характеристиками уравнения (2.19), пересекающими $[\alpha, \beta]$.

2.2. Начально-краевая задача для одномерного неоднородного уравнения. Рассмотрим в этом пункте неоднородное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f. \quad (2.20)$$

Здесь f - заданная функция. Поставим задачу: найти в полосе $\Pi[\alpha, \beta]$ решение уравнения (2.20), удовлетворяющее начальному условию (2.6).

В силу линейности уравнения (2.20) для решения задачи (2.20), (2.6) справедлив *принцип суперпозиции*. Согласно ему, решение задачи Коши (2.20), (2.6) можно представить в виде суммы

$$u = u_1 + u_2. \quad (2.21)$$

Здесь u_1 - решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [\alpha, \beta], \quad (2.22)$$

тогда как u_2 - решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad u|_{t=0} = 0, \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (2.23)$$

Поскольку решение u_1 задачи (2.22) уже построено в п. 2.1 и имеет вид (2.17) в полосе $\Pi[\alpha, \beta]$, то нам остается найти лишь решение задачи (2.23). Для нахождения u_2 проделаем следующее построение. Введем в рассмот-

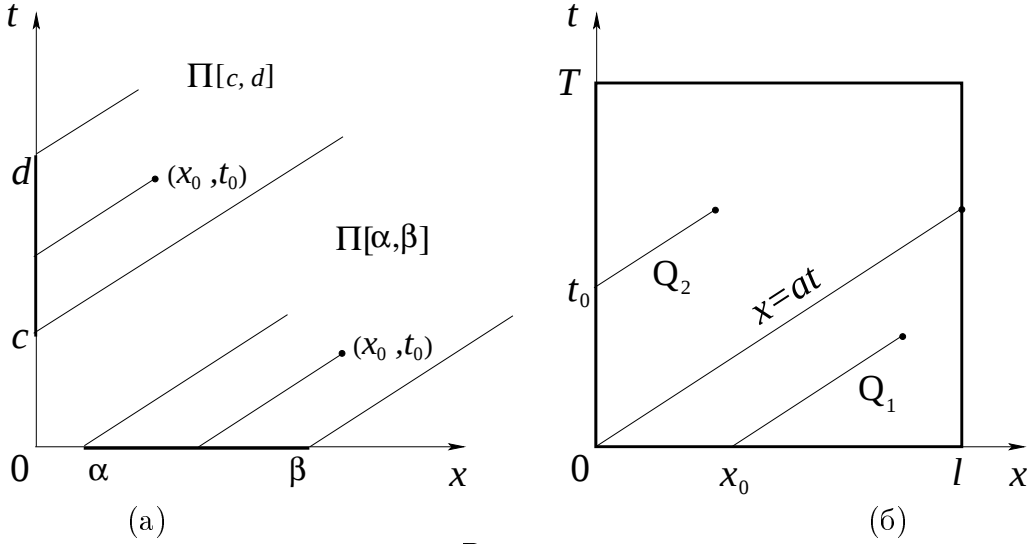


Рис. 2.5

рение характеристики уравнения (2.20). Как и для однородного уравнения (2.13), под ними будем понимать интегральные кривые задачи Коши (2.14), т. е. в данном случае (при $a = \text{const}$) прямые (2.15). Возьмем произвольную точку (x_0, t_0) характеристической полосы $\Pi[\alpha, \beta]$ для уравнения (2.20) и проведем через нее характеристику до пересечения с осью x (см. рис. 2.5а). Уравнение указанной характеристики имеет вид (2.15). Вдоль каждой такой характеристики решение u_2 является сложной функцией параметра t . Обозначим через du_2/dt соответствующую производную от u_2 по t . Рассуждая, как в начале п. 2.1, имеем

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + a \frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

Сравнивая это соотношение с (2.20), приходим к выводу, что вдоль каждой характеристики (2.15) уравнение в (2.23) сводится к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{dt} = f[x_0 + a(t - t_0), t] \quad (2.24)$$

для функции $u[x_0 + a(t - t_0), t]$ как функции одной переменной t . Интегрируя уравнение (2.24) на интервале $[0, t_0]$, получаем с учетом однородности начального условия в (2.23), что

$$u_2(x_0, t_0) = \int_0^{t_0} f[x_0 + a(t - t_0), t] dt = \int_0^{t_0} f[x_0 + a(\tau - t_0), \tau] d\tau. \quad (2.25)$$

(В последнем интеграле мы изменили для последующего удобства переменную интегрирования t на τ). Формула (2.25) описывает решение u_2 в фиксированной точке (x_0, t_0) . Если теперь (x, t) – переменная точка полосы $\Pi[\alpha, \beta]$, то, заменяя в (2.25) (x_0, t_0) на (x, t) , приходим к формуле

$$u_2(x, t) = \int_0^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau, \quad (x, t) \in \Pi[\alpha, \beta]. \quad (2.26)$$

Из построения вытекает, что функция u_2 является искомым решением задачи Коши (2.23). В этом можно убедиться и непосредственной проверкой. В самом деле, очевидно, что $u_2(x, 0) = 0$. Дифференцируя далее u_2 по t , имеем

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = -a \int_0^t f_y[x + a(\tau - t), \tau] d\tau + f(x, t),$$

где через f_y обозначена производная функции f по первому аргументу. Мы предполагаем, конечно, что она существует и непрерывна. Это заведомо имеет место, если функция f задана и непрерывно-дифференцируема в полосе $\Pi[\alpha, \beta]$. Аналогично

$$a \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = a \int_0^t f_y[x + a(\tau - t), \tau] d\tau.$$

Складывая последние два равенства, получаем

$$\frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} = f(x, t).$$

Из (2.26) и (2.21) следует, что решение задачи Коши (2.20), (2.6) имеет вид

$$u(x, t) = \varphi(x - at) + \int_0^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau, \quad (x, t) \in \Pi[\alpha, \beta] \quad (2.27)$$

при условии, конечно, что f и φ являются непрерывно-дифференцируемыми функциями. С помощью метода от противного легко показывается, что решение u задачи (2.20), (2.6) единственно в полосе $\Pi[\alpha, \beta]$. Изложенный метод решения задачи Коши (2.20), (2.6) носит название *метода характеристик*.

По аналогичной схеме метод характеристик применяется для решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad u|_{x=0} = g(t), \quad t \in [c, d], \quad (2.28)$$

отвечающей ситуации, когда данные Коши задаются на отрезке $[c, d]$ оси t . Возьмем произвольную точку (x_0, t_0) характеристической полосы $\Pi[c, d]$ для уравнения (2.20) и проведем через нее характеристику (2.15), являющуюся решением задачи (2.14), до пересечения с осью t в точке $t'_0 = t_0 - x_0/a$. Вдоль этой характеристики уравнение (2.20) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (2.24). Интегрируя его на интервале $\tau \in [t_0 - x_0/a, t_0]$, получим

$$u(x_0, t_0) = \int_{t_0 - x_0/a}^{t_0} f[x_0 + a(\tau - t_0), \tau] d\tau.$$

Заменяя (x_0, t_0) на переменную точку (x, t) полосы $\Pi[c, d]$, приходим к формуле

$$u(x, t) = \int_{t-x/a}^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau, \quad (x, t) \in \Pi[c, d]. \quad (2.29)$$

Простой проверкой убеждаемся, что функция (2.29) является решением задачи (2.28) при $g = 0$, тогда как функция

$$u(x, t) = g(t - x/a) + \int_{t-x/a}^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau, \quad (x, t) \in \Pi[c, d] \quad (2.30)$$

является решением неоднородной задачи (2.28) при условии, конечно, что функции f и g являются непрерывно-дифференцируемыми функциями своих аргументов. Указанное решение единственно в полосе $\Pi[c, d]$.

Рассмотрим теперь следующую общую неоднородную задачу для уравнения (2.20) в области $Q = (0, l] \times (0, T]$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f \text{ в } Q, \quad (2.31)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad u|_{x=0} = g(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.32)$$

Поскольку дополнительные условия для решения u уравнения (2.31) задаются как при $t = 0$, так и на конце $x = 0$ интервала $(0, l)$, то задача (2.31)–(2.32) имеет смысл начально-краевой задачи для уравнения (2.31). Для краткости на неё будем ссылаться как на задачу 1. Поставим цель: построить классическое решение u задачи 1. Приведем строгое определение этого понятия, руководствуясь соображениями, изложенными в п. 1.5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Классическим решением задачи 1 будем называть функцию $u \in C^1(Q) \cap C^0(\overline{Q})$, удовлетворяющую уравнению (2.31) в каждой точке $(x, t) \in Q$, начальному условию в (2.32) в каждой точке $x \in [0, l]$ и граничному условию в (2.32) при каждом значении $t \in [0, T]$.*

Подчеркнем, что в соответствии с определением 2.1 классическое решение u задачи 1 является непрерывно-дифференцируемой в Q функцией, удовлетворяющей уравнению (2.31) в каждой точке $(x, t) \in Q$, в том числе и в точках (l, t) и (x, T) , лежащих на правой и верхней границах Q . Но оно не обязано, вообще говоря, удовлетворять уравнению (2.31) и быть непрерывно-дифференцируемым в точках $(x, 0)$ нижней границы области Q , где задано начальное условие, и в точках $(0, t)$ левой границы, где задано граничное условие в (2.32).

Предположим, что выполняются условия

$$f \in C^m(\overline{Q}), \quad \varphi \in C^m[0, l], \quad g \in C^m[0, T]. \quad (2.33)$$

Здесь $m \in \mathbb{N}_+$ – некоторое положительное целое число. Положим

$$Q_1 = \{(x, t) \in Q : x > at\}, \quad Q_2 = \{(x, t) \in Q : x < at\}, \quad (2.34)$$

$$u_1(x, t) = \varphi(x - at) + \int_0^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau \text{ в } Q_1, \quad (2.35)$$

$$u_2(x, t) = g(t - x/a) + \int_{t-x/a}^t f[x + a(\tau - t), \tau] d\tau \text{ в } Q_2. \quad (2.36)$$

Из предыдущего анализа следует, что при выполнении условий (2.33) $u_i \in C^m(\overline{Q}_i)$, $i = 1, 2$, причем функция u_1 удовлетворяет уравнению (2.31) в каждой точке области $\overline{Q}_1$ и начальному условию в (2.32), а функция u_2 удовлетворяет уравнению (2.31) всюду в $\overline{Q}_2$ и граничному условию в (2.32). Для построения решения во всей области Q “склеим” функции u_1 и u_2 на “особой” для задачи 1 характеристике $x = at$, проходящей через угловую точку $(0, 0)$, полагая

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1(x, t), & (x, t) \in Q_1, \\ u_2(x, t), & (x, t) \in Q_2. \end{cases} \quad (2.37)$$

Ясно, что так введенная функция u принадлежит пространству $C^m(\overline{Q})$, $m \geq 1$, тогда и только тогда, когда функции u_1 и u_2 совпадают на особой характеристике $x = at$ вместе со всеми производными до порядка m включительно. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы исходные данные задачи (2.31), (2.32), т.е. функции f , φ и g , удовлетворяли вместе со своими производными до порядка m включительно определенным условиям согласования в точке $(0, 0)$. Простейшие из них, имеющие вид

$$\varphi(0) = g(0); \quad g'(0) + a\varphi'(0) = f(0, 0), \quad (2.38)$$

служат для обеспечения соответственно непрерывности и непрерывной дифференцируемости функции (2.37) на характеристике $x = at$, а следовательно, и во всей области $\overline{Q}$. Это составляет содержание следующей леммы, доказательство которой предоставляем читателю.

ЛЕММА 2.1. Пусть выполняются условия (2.33) при $m = 1$ и условия согласования (2.38). Тогда функция u , определяемая формулой (2.37), принадлежит пространству $C^1(\overline{Q})$.

Из леммы 2.1 и свойств функций u_1, u_2 вытекает, в свою очередь, что функция u удовлетворяет уравнению (2.31) и на характеристике $x = at$, а следовательно, и всюду в $\overline{Q}$. Таким образом, функция u в (2.31) обладает всеми свойствами, входящими в определение классического решения задачи (2.31)–(2.32). Более того, u непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (2.31) не только в Q , как это требуется в определении классического решения, но и всюду в $\overline{Q}$, т. е., кроме того, и в граничных точках $(0, t)$ и $(x, 0)$ множества Q . Единственность решения легко доказывается методом от противного. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполняются условия леммы 2.1. Тогда классическое решение u задачи 1 существует, единственно, принадлежит пространству $C^1(\overline{Q})$ и определяется соотношениями (2.35)–(2.37).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Отметим, что построенное с помощью формул (2.35)–(2.37) решение задачи 1 принадлежит пространству $C^1(\overline{Q})$, т. е. обладает более гладкими свойствами, чем указано в определении классического решения. Ситуация, когда построенное решение рассматриваемой задачи математической физики обладает более гладкими свойствами, чем полагается классическому решению в соответствии с его определением, будет часто встречаться далее при рассмотрении других задач математической физики. Чтобы отличить более гладкое классическое решение от чисто классического решения, на первое будем обычно ссылаться как на *регулярное* решение.

Из (2.35)–(2.37), в частности, следует, что для решения u задачи 1 справедлива оценка

$$\|u\|_{C(\overline{Q})} \leq \max(\|\varphi\|_{C[0,l]}, \|g\|_{C[0,T]}) + T\|f\|_{C(\overline{Q})}. \quad (2.39)$$

Здесь в соответствии с определениями п. 1.3

$$\|\varphi\|_{C[0,l]} = \max_{x \in [0,l]} |\varphi(x)|, \quad \|g\|_{C[0,T]} = \max_{t \in [0,T]} |g(t)|, \quad \|f\|_{C(\overline{Q})} = \max_{(x,t) \in \overline{Q}} |f(x,t)|.$$

При $f = 0$ решение u , кроме того, сохраняется вдоль характеристик и удовлетворяет “чистому” принципу максимума, а именно:

$$m \leq u(x, t) \leq M \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}. \quad (2.40)$$

Здесь $m = \min(\min_{x \in [0, l]} \varphi(x), \min_{t \in [0, T]} g(t))$; $M = \max(\max_{x \in [0, l]} \varphi(x), \max_{t \in [0, T]} g(t))$. Обратившись к оценкам (2.39), (2.40), заметим, что указанные оценки получены на основе явного представления решения в виде (2.35)–(2.37). Оценки такого рода (полученные с использованием информации о решении), называются *апостериорными*. Роль этих оценок в общем-то невелика, так как найти явное представление точного решения удаётся в редких случаях. Так, для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma(x, t)u = f \text{ в } Q \quad (2.41)$$

построение аналогичного представления решения становится проблематичным. Важно, однако, отметить, что оценки вида (2.39) можно получать и без использования информации о точном решении u , а с использованием лишь свойств самого дифференциального уравнения, которому удовлетворяет u . Поясним идею такого подхода к получению оценок решения на примере более общего уравнения (2.41). Напомним, что в соответствии с физическим смыслом (см. § 4 гл. 1) слагаемое γu описывает при $\gamma \geq 0$ эффект поглощения переносимой в среде субстанции, вызванного, например, действием химических реакций. Для краткости на задачу (2.41), (2.32) будем ссылаться как на задачу 2.

2.3. Метод энергетических неравенств. Введём в рассмотрение пространство функций, определённых и непрерывных на рассматриваемом интервале $[0, l]$. Определив в нем скалярное произведение и норму по формулам

$$(u, v) = (u, v)_H = \int_0^l u(x)v(x)dx, \quad \|u\| = \|u\|_H = (u, u)^{1/2}, \quad (2.42)$$

получим бесконечномерное евклидово (или предгильбертово) пространство, т. е. неполное по введённой норме функциональное пространство. Обозначим его через $H = H[0, l]$. Точно так же через $G = G[0, T]$ обозначим пространство непрерывных на интервале $[0, T]$ функций с нормой $\|g\|_G = \left(\int_0^T g^2(t)dt\right)^{1/2}$. Введем далее два нормированных пространства $U = C[0, T; H]$ и $F = L^1(0, T; H)$, состоящие из функций, зависящих от $(x, t) \in Q$, с нормами

$$\|u\|_U = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(\cdot, t)\|_H, \quad \|f\|_F = \int_0^T \|f(\cdot, t)\|_H dt. \quad (2.43)$$

Первое из них состоит из функций $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$, нормы которых в пространстве H , зависящие от t , являются непрерывными функциями от t на интервале $[0, T]$. Второе состоит из функций $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, нормы которых в H являются интегрируемыми функциями на $(0, T)$. Выражения в (2.43)

удовлетворяют всем трём условиям, входящим в определение нормы (см. п. 1.3). Это означает, что формулы в (2.43) действительно определяют нормы в пространствах U и F .

Предполагая, что решение u задачи 2 существует и принадлежит пространству $C^1(\overline{Q})$, т. е. является регулярным, умножим уравнение (2.41) на u и проинтегрируем на интервале $(0, l)$. Учитывая, что

$$\begin{aligned}\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} u dx &= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{d}{dt} u^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l u^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2, \\ \int_0^l a \frac{\partial u}{\partial x} u dx &= \frac{a}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} (u^2) dx = \frac{a}{2} [u^2(l, t) - u^2(0, t)],\end{aligned}$$

приходим с учетом граничного условия в (2.32) к соотношению

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2 + au^2(l, t) - ag^2(t) + 2 \int_0^l \gamma u^2 dx = 2(f, u). \quad (2.44)$$

Предположим сначала, что $g(t) = 0$, $\gamma(x, t) \geq 0$. Оставляя в левой части (2.44) первое слагаемое и применяя к правой части неравенство Коши, согласно которому $|(f, u)| \leq \|f\| \|u\|$, получим

$$\frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2 \equiv 2\|u\| \frac{d}{dt} \|u\| \leq 2\|f\| \|u\|.$$

Предполагая, что $\|u\| > 0$, сократим обе части на $2\|u\|$ и проинтегрируем полученное выражение на интервале $(0, t)$. Учитывая начальное условие в (2.32), получим неравенство

$$\|u(\cdot, t)\| \leq \|\varphi\|_H + \int_0^t \|f(\cdot, \tau)\| d\tau \leq \|\varphi\|_H + \int_0^T \|f(\cdot, \tau)\| d\tau \quad \forall t \in [0, T].$$

При $\|u\| = 0$ это неравенство и тем более справедливо. Из него вытекает с учетом обозначений (2.43), что

$$\|u\|_U \leq \|\varphi\|_H + \|f\|_F. \quad (2.45)$$

Пусть теперь $f = 0$, $\gamma \geq 0$. Интегрируя (2.44) при $f = 0$ на $(0, t)$, получим

$$\|u(\cdot, t)\|^2 = \|\varphi\|^2 + a \int_0^t g^2(\tau) d\tau - a \int_0^t u^2(l, \tau) d\tau - 2 \int_0^t \int_0^l \gamma u^2 dx d\tau. \quad (2.46)$$

Поскольку последние два слагаемых в правой части (2.46) неположительны, то, отбрасывая их, приходим к неравенству

$$\|u(\cdot, t)\|^2 \leq \|\varphi\|^2 + a \int_0^t g^2(\tau) d\tau = \|\varphi\|_H^2 + a\|g\|_G^2 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.47)$$

В частном случае, когда $\varphi = 0$, из (2.47) приходим к оценке

$$\|u\|_U \leq \sqrt{a}\|g\|_G. \quad (2.48)$$

Из (2.45) и (2.48) вытекает в силу линейности задачи 2 неравенство

$$\|u\|_U \leq \|\varphi\|_H + \sqrt{a}\|g\|_G + \|f\|_F. \quad (2.49)$$

Оно обобщает (2.45) на случай, когда $g(t) \neq 0$. Сформулируем полученные результаты в виде леммы.

ЛЕММА 2.2. Пусть функция u является регулярным решением задачи 2, отвечающим тройке (φ, g, f) , и $\gamma \geq 0$ в Q . Тогда справедлива оценка (2.49).

Неравенство (2.49) означает, что при $\gamma \geq 0$ норма регулярного решения u задачи 2 ограничена сверху постоянной, равной сумме норм исходных данных φ , g и f . Таким образом, (2.49) играет роль простейшей оценки на решение u сверху, причем указанная оценка получена не из представления решения, а исходя лишь из свойств самого уравнения (2.41) и предположения о существовании и непрерывной дифференцируемости решения. Оценки такого типа, устанавливающие соответствующую информацию о решении до его нахождения, называются *априорными*. В отличие от апостериорных оценок, априорные оценки играют важную роль в теории дифференциальных уравнений и используются, например, для доказательства существования, единственности и устойчивости решений краевых задач. Причем, поскольку при этом совершенно не используется явное представление решения, то с помощью такого подхода можно получать оценки как для уравнений с постоянными или переменными коэффициентами, так даже и для нелинейных дифференциальных уравнений.

Метод исследования корректности краевых задач, основанный на получении и использовании априорных оценок, называется методом *априорных оценок*. Его также называют методом *энергетических неравенств* или просто *энергетическим методом*. Последнее название связано с тем, что оцениваемая величина, в частности, $\|u\|^2$, часто имеет смысл энергии рассматриваемой физической системы. Хотя в нашем случае термин “энергия” скорее носит математический характер и обозначает величину $E(t) = \|u(\cdot, t)\|_H^2$, независимо от физического смысла последней.

В частности, из оценки (2.49) вытекает в силу линейности задачи 2 единственность решения u и устойчивость его в выбранных нормах. Действительно, пусть функции u_i являются регулярными решениями задачи 2, отвечающими тройкам (φ_i, g_i, f_i) исходных данных, $i = 1, 2$. Тогда разность $u_1 - u_2$ является регулярным решением, отвечающим тройке $(\varphi_1 - \varphi_2, g_1 - g_2, f_1 - f_2)$. Поэтому в силу леммы 2.2 справедлива оценка

$$\|u_1 - u_2\|_U \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_H + \sqrt{a}\|g_1 - g_2\|_G + \|f_1 - f_2\|_F. \quad (2.50)$$

Из (2.50), в частности, следует, что малым возмущениям правой части в норме пространства F , начальной функции в норме H и граничной функции в норме G отвечают малые возмущения решения в U . Это и означает устойчивость регулярного решения задачи 2. Из (2.50) также вытекает, что $u_1 = u_2$ при $\varphi_1 = \varphi_2, g_1 = g_2, f_1 = f_2$. Последнее означает единственность регулярного решения задачи 2. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2. *При выполнении условия $\gamma \geq 0$ в Q регулярное решение $u \in C^1(\overline{Q})$ задачи 2 единственно и непрерывно зависит от исходных данных (φ, g, f) в том смысле, что выполняется оценка (2.50).*

В частном случае, когда $\gamma = 0$, из теорем 2.1 и 2.2 вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *При выполнении условий теоремы 2.1 регулярное решение $u \in C^1(\overline{Q})$ задачи 1 существует, единственно, и для него выполняется оценка (2.49), означающая непрерывную зависимость решения u от данных (φ, g, f) .*

Итак, мы доказали существование и единственность регулярного решения задачи 1 при выполнении определенных условий на исходные данные. Подчеркнем, что доказательство существования решения основывалось на методе характеристик, с помощью которого фактически было построено явное представление решения в виде (2.35)–(2.37). В то же время при доказательстве устойчивости и единственности мы использовали совсем другой подход, основанный на методе энергетических неравенств. Такая ситуация, когда для доказательства существования и единственности решения рассматриваемой задачи используются разные методы, является обычным делом при теоретическом изучении задач математической физики. Отметим при этом, что метод характеристик, используемый при выводе явного представления решения задачи 1, является весьма специфическим и используется для нахождения решений лишь некоторых специальных уравнений математической физики. В противоположность ему, метод энергетических неравенств, используемый нами выше при доказательстве единственности решения задачи 2, является достаточно универсальным и с успехом будет применяться в следующих главах при исследовании единственности решений других задач математической физики.

Наряду с априорными оценками важную роль играют так называемые интегральные *законы сохранения*, устанавливающие некоторые интегральные свойства решений рассматриваемой задачи. Простейший из них для задачи (2.41), (2.32) имеет вид (2.46). В частном случае, когда $g(t) = 0$, он означает, что при $f = 0$ и $\gamma \geq 0$ энергия $E(t)$ убывает с ростом t (так как с ростом t убывают последние два слагаемых в правой части (2.46)). Это естественно с физической точки зрения, поскольку условия $f = 0, g = 0$ означают отсутствие притока энергии в рассматриваемую систему. Так как при этом частицы, выходящие из $(0, l)$ через конец $x = l$ выносят с собой

часть энергии, то энергия может лишь убывать. Предпоследнее слагаемое в правой части (2.46) как раз и описывают теряемую за счет выхода частиц энергию за время t , тогда как последнее слагаемое описывает теряемую энергию за счет действия химических реакций. Отбрасывая их, мы получили выше априорную оценку (2.47), справедливую при $f = 0$, которая является следствием закона сохранения.

При $\gamma \equiv 0$ закон сохранения (2.46) принимает вид

$$\|u(\cdot, t)\|_H^2 = \|\varphi\|_H^2 + a \int_0^t g^2(\tau) d\tau - a \int_0^t u^2(l, \tau) d\tau.$$

Данное соотношение связывает значения u в точках, расположенных лишь на границах прямоугольника $Q_t = (0 < x < l, 0 < \tau < t)$. Это объясняется тем обстоятельством, что уравнение (2.31) имеет *дивергентный* вид (так как левая часть уравнения (2.31) представляет собой двумерную дивергенцию вектора (u, au)). Свойство дивергентности играет важную роль при построении разностных схем, аппроксимирующих уравнение переноса [44], [2].

2.4. Начально-краевая задача для двумерного уравнения переноса в прямоугольнике. Пусть $\Omega = (0 < x < l, 0 < y < h)$ – прямоугольник в плоскости x, y . В области $Q = \{(x, y, t), (x, y) \in \Omega, t \in (0, T]\}$ рассмотрим двумерное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \text{gradu} \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = f. \quad (2.51)$$

Здесь a и b – заданные в Q компоненты вектора скорости $\mathbf{a} = (a, b)$ движущейся жидкости, f – заданная в Q правая часть. Функции a и b будем считать удовлетворяющими условиям:

- (i) $a, b \in C^{1,0}(\overline{Q})$,
- (ii) $a|_{x=0} = a_1(y, t) > 0$, $a|_{x=l} = a_2(y, t) > 0$, $y \in [0, h]$, $t \in [0, T]$;
 $b|_{y=0} = b|_{y=h} = 0$, $x \in [0, l]$, $t \in [0, T]$,
- (ii') $\text{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} = 0$ в Q , $\int_{\Gamma_1} a_1 ds = \int_{\Gamma_2} a_2 ds$.

Здесь $C^{1,0}(\overline{Q})$ обозначает пространство функций $w : Q \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывных на $\overline{Q}$ вместе с производными $\partial w / \partial x$ и $\partial w / \partial y$.

Условия (ii) физически означают, что жидкость втекает в область Ω слева через участок $\Gamma_1 = \{(x, y), x = 0, y \in (0, h)\}$, а вытекает из Ω справа через участок $\Gamma_2 = \{(x, y), x = l, y \in (0, h)\}$, причем горизонтальные стенки $y = 0$ и $y = h$ являются непроницаемыми для жидкости. Первое условие $\text{div} \mathbf{a} = 0$ в (ii') означает, что жидкость, в которой происходит процесс

переноса субстанции u , описываемый уравнением (2.51), является несжимаемой. Последнее условие в (ii') является следствием условия $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ и двумерной формулы Гаусса-Остроградского. Оно означает физически, что количество жидкости, втекающее в каждый момент времени t в область Ω через участок Γ_1 , равно количеству жидкости, вытекающей из Ω в тот же момент t через участок Γ_2 .

Положим $\Sigma_i = \Gamma_i \times (0, T]$, $i = 1, 2$. Уравнение (2.51) будем рассматривать при следующих начальных и граничных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega, \quad u|_{x=0} = g(y, t), \quad (y, t) \in \Sigma_1. \quad (2.52)$$

Здесь φ и g – заданные функции своих аргументов. Отметим, что на условия (2.52) можно смотреть как на условия Коши для двумерного уравнения (2.51), задаваемые на поверхности (носителе данных Коши), состоящей из нижней границы $\Omega_0 = \{(\mathbf{x}, t) \in \overline{Q} : \mathbf{x} \in \Omega, t = 0\}$ (основания) параллелепипеда Q и его боковой левой грани Σ_1 . При такой интерпретации участок $\overline{\Gamma}_1$ области $\overline{Q}$, являющийся пересечением $\overline{\Omega}_0$ и $\overline{\Sigma}_1$, играет особую роль для задачи Коши, ибо он состоит из точек, в которых нарушается гладкость носителя данных Коши.

Ниже на задачу (2.51), (2.52) для краткости будем ссылаться как на задачу 3. Будем предполагать, что выполняются условия:

$$(iii) \quad \varphi \in C^1(\overline{\Omega}), \quad g \in C^1(\overline{\Sigma}_1), \quad f \in C^1(\overline{Q}).$$

Нашей целью является доказательство существования и единственности регулярного решения задачи 3 из пространства $C^1(\overline{Q})$ при выполнении введенных условий на исходные данные и некоторых условий согласования на них. Для этого мы так же, как и в п. 2.2, построим формулу, описывающую явное представление ее решения через исходные данные.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно [51], что нахождение решения уравнения (2.51) эквивалентно, по крайней мере, для гладкой вектор-функции $\mathbf{a}$, нахождению его характеристик. Поэтому мы начнем с введения строгого понятия характеристики уравнения (2.51). Пусть $(\mathbf{x}, t) \in Q$ – произвольная точка. Рассмотрим задачу Коши, заключающуюся в нахождении вектор-функции $\mathbf{y}$ в некоторой окрестности точки $(\mathbf{x}, t)$ из условий

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = \mathbf{a}(\mathbf{y}, \tau), \quad (2.53)$$

$$\mathbf{y}|_{\tau=t} = \mathbf{x}. \quad (2.54)$$

Из [51, гл.7] вытекает, что при выполнении условий (i) решение задачи (2.53), (2.54) существует и единственно по крайней мере в некоторой окрестности любой точки $(\mathbf{x}, t) \in Q$.

Условимся о следующих обозначениях и терминологии. Через $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\tau)$ будем обозначать произвольное решение векторного обыкновенного дифференциального уравнения (2.53), через $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau)$ будем обозначать решение задачи (2.53), (2.54). Хорошо известно (см. [51, гл.7]), что при выполнении условий (i) каждая из этих двух вектор-функций является непрерывно дифференцируемой функцией аргумента τ , а вторая – $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau)$, является к тому же непрерывно-дифференцируемой функцией от параметров $\mathbf{x}$ и t . Когда τ пробегает некоторое множество на оси t , точка $\mathbf{y}(\tau)$ пробегает некоторую кривую в плоскости x, y (эту плоскость принято называть *фазовой плоскостью*), а соответствующая трехмерная точка $(\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau)$ пробегает некоторую “пространственную” кривую в пространстве x, y, t . Последнюю кривую, имеющую смысл интегральной кривой уравнения (2.53), будем называть *характеристикой уравнения* (2.51), а интегральную кривую задачи (2.53), (2.54) будем называть *характеристикой уравнения* (2.51), *проходящей через точку* $(\mathbf{x}, t)$. В свою очередь, первую кривую, являющуюся проекцией характеристики на фазовую плоскость x, y , будем называть *фазовой траекторией* уравнения (2.53). Последнее название связано с тем, что при гидродинамической интерпретации поля $\mathbf{a}$ как поля скоростей движущейся жидкости именно уравнение (2.53) описывает траектории, т. е. кривые, по которым движутся частицы жидкости в поле скоростей $\mathbf{a}$.

Наконец, отметим, что с учетом гидродинамической интерпретации векторного поля $\mathbf{a}$ как поля скоростей движущейся жидкости векторное уравнение (2.53) часто называют *динамической системой*, а раздел курса теории обыкновенных дифференциальных уравнений, где изучаются свойства динамических систем, называется *теорией динамических систем*.

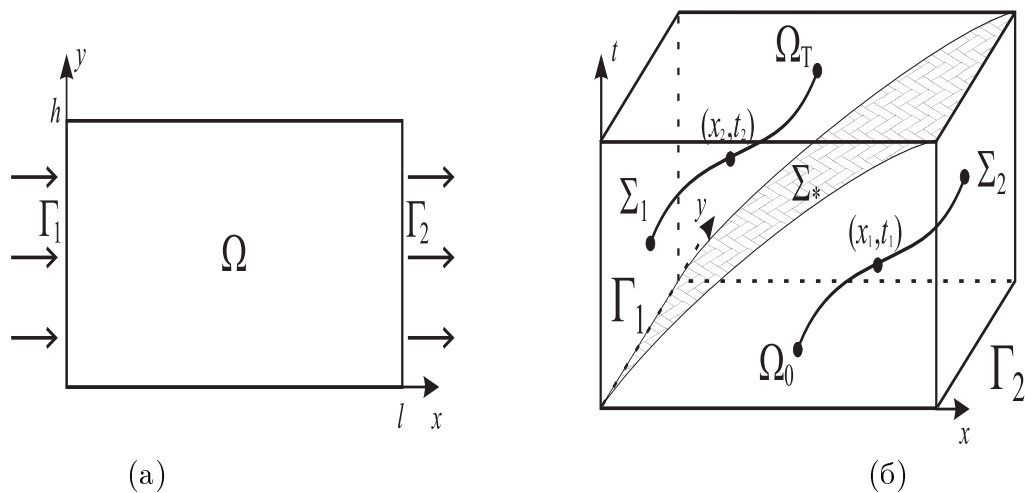


Рис. 2.6

Одним из основных результатов теории динамических систем является свойство *глобальной разрешимости* задачи (2.53), (2.54) при выполнении

условий (i), (ii). Это свойство означает, что ее решение, о локальном существовании которого было сказано выше, может быть продолжено, причём единственным образом, вплоть до границ области Q . Применяя это свойство к характеристикам, приходим к выводу, что через каждую точку $(\mathbf{x}, t) \in Q$ проходит единственная характеристика уравнения (2.51). Указанная характеристика начинается, т. е. входит в область Q , в некоторой точке $(\mathbf{x}', t') \in \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Sigma}_1$ и заканчивается, т. е. выходит из области Q , в некоторой точке $(\mathbf{x}'', t'') \in \bar{\Omega}_T \cup \bar{\Sigma}_2$. Здесь $\Omega_T = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \Omega, t = T\}$ – верхнее основание параллелепипеда Q .

Поскольку каждая характеристика начинается в точках $\bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Sigma}_1$, то возможны два варианта: либо для всех $\tau \in [0, t]$ $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau) \notin \bar{\Gamma}_1$, либо $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau) \in \bar{\Gamma}_1$ в некоторый момент времени $\tau'(\mathbf{x}, t)$ ($0 \leq \tau' \leq t$). Определим функцию τ_0 , зависящую от $\mathbf{x}$ и t , считая, что в первом случае она равна нулю, а во втором случае принимает значение $\tau'(\mathbf{x}, t)$. Положим также $\mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau_0(\mathbf{x}, t))$. Очевидно, $(\tau_0(\mathbf{x}, t), \mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t))$ – точка на участке $\bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Sigma}_1$ границы области Q , через которую в область Q входит характеристика уравнения (2.51), проходящая через точку $(\mathbf{x}, t)$. Физически $\tau_0(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t)$ обозначают время и место появления в $\bar{\Omega}$ частицы жидкости, проходящей в момент t через точку $\mathbf{x}$. Из теории динамических систем вытекает, что τ_0 и $\mathbf{y}_0$ являются непрерывно-дифференцируемыми функциями точек $(\mathbf{x}, t) \in \bar{Q}$.

Фундаментальным свойством характеристик уравнения (2.51) является тот факт, что решение u однородного аналога

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \mathbf{a} \cdot \text{grad} u = 0 \quad (2.55)$$

уравнения (2.51) сохраняется вдоль любой характеристики. (Здесь для единообразия с уравнением (2.53) мы обозначаем произвольную точку области Q через $(\mathbf{y}, \tau)$, считая тем самым, что функция u зависит от переменных $\mathbf{y}$ и τ .) Для доказательства этого факта рассмотрим функцию U одной переменной τ , зависящую от $\mathbf{x}$ и t как от параметров, определяемую формулой $U(\tau) = U_{\mathbf{x},t}(\tau) \equiv u[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau]$. Здесь u – произвольная непрерывно-дифференцируемая в Q функция. При изменении τ в окрестности точки t точка $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau)$ пробегает характеристику уравнения (2.51), проходящую через точку $(\mathbf{x}, t)$. Поэтому функция U описывает поведение функции u вдоль этой характеристики. Используя правило дифференцирования сложной функции и (2.53), имеем

$$\frac{dU_{\mathbf{x},t}}{d\tau} = \nabla u[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau] \cdot \frac{d\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau)}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial \tau}[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau] = \mathbf{a} \cdot \nabla u + \frac{\partial u}{\partial \tau}. \quad (2.56)$$

Пусть теперь u является решением однородного уравнения (2.55). Тогда правая часть (2.56) обращается в нуль и, следовательно, (2.56) принимает

вид

$$\frac{dU_{\mathbf{x},t}}{d\tau} = 0 \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in Q.$$

Это условие и означает, что всякое решение u однородного уравнения (2.55) принимает постоянные значения на характеристиках уравнения (2.51), хотя и разные для разных характеристик.

Введем еще одно важное определение из теории обыкновенных дифференциальных уравнений: функция $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$, не равная тождественно константе, называется *первым интегралом* уравнения (2.53), если она обращается в константу на любом решении $\mathbf{y}(\tau)$ уравнения (2.53). В некоторых учебниках под первым интегралом понимают само соотношение

$$u(\mathbf{y}, \tau) = C, \quad (2.57)$$

справедливое на любом решении $\mathbf{y}$ уравнения (2.53). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [51, с. 310], [54, с. 218]) известно, что функция $u \in C^1(Q)$ является первым интегралом уравнения (2.53) в области Q тогда и только тогда, когда функция u является решением уравнения (2.55) в Q . Ввиду важности этого факта приведем его полное доказательство.

Пусть функция u является первым интегралом уравнения (2.53). Тогда, подставляя в (2.57) вместо $\mathbf{y}$ какое-либо решение уравнения (2.53), получаем тождество относительно τ вида

$$u[\mathbf{y}(\tau), \tau] \equiv C. \quad (2.58)$$

Дифференцируя обе части по τ , будем иметь

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \text{grad} u \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\tau} = 0. \quad (2.59)$$

Заменяя в (2.59) производную $d\mathbf{y}/d\tau$ правой частью уравнения (2.53), получим

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \mathbf{a}[\mathbf{y}(\tau), \tau] \cdot \text{grad} u = 0. \quad (2.60)$$

В равенстве (2.60) $\mathbf{y}(\tau)$ является некоторым решением уравнения (2.53). Это означает, что в данном тождестве пара $(\mathbf{y}, \tau)$ пробегает точки в области Q , через которые проходит интегральная кривая данного решения. Но поскольку результат дифференцирования равенства (2.58) не зависит от C , то равенство (2.60) выполняется для точек $(\mathbf{y}, \tau)$, лежащих на любой интегральной кривой уравнения (2.53), расположенной в рассматриваемой области. Так как в силу условий (i) через каждую точку $(\mathbf{y}, \tau) \in Q$ проходит интегральная кривая уравнения (2.53), то равенство (2.60) выполняется тождественно относительно $(\mathbf{y}, \tau) \in Q$. Это означает, что u является решением уравнения (2.55) в Q .

Пусть, обратно, функция $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$ является решением уравнения (2.55) в Q . Тогда вдоль любой характеристики уравнения (2.55), т. е. вдоль любой интегральной кривой уравнения (2.53), функция u принимает постоянное значение, т. е. выполняется тождество (2.58). Последнее означает, что функция u является общим интегралом уравнения (2.53).

Сформулируем полученные результаты в виде следующей леммы, являющейся математическим отражением эквивалентности задачи решения уравнения первого порядка в частных производных и соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно его характеристик.

ЛЕММА 2.3. Пусть выполняются условия (i) и $u \in C^1(Q)$ – заданная в Q функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) функция u является решением уравнения (2.55) в области Q ;
- 2) функция u принимает постоянное значение на любой характеристике уравнения (2.55), проходящей через Q ;
- 3) функция u является первым интегралом уравнения (2.53) в области Q .

Из леммы 2.3 вытекает следующий элегантный способ построения решения рассматриваемой задачи Коши для однородного уравнения (2.51) (при $f = 0$). Через каждую точку $(\mathbf{x}, t) \in Q$ проводим характеристику $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau)$. Если она начинается в некоторой точке $(\mathbf{x}_0, 0) \in \overline{\Omega}_0$, то вдоль этой характеристики полагаем решение u равным $\varphi(\mathbf{x}_0)$. Если она начинается в некоторой точке $(y_0, t_0) \in \overline{\Sigma}_1$, то вдоль этой характеристики полагаем решение равным $g(y_0, t_0)$. В результате получим функцию u , определенную во всех точках $(\mathbf{x}, t) \in Q$. Остается только найти условия на исходные данные, при которых построенная таким образом функция u является непрерывно – дифференцируемым в Q решением задачи 3 при $f = 0$ и допускает непрерывно – дифференцируемое продолжение на замыкание $\overline{Q}$. К установлению указанных условий мы вернемся несколько позже, а пока отметим, что на основе свойства 2) решения уравнения (2.55) (см. лемму 2.3) легко доказывается единственность решения задачи 3. Действительно, если предположить, что существуют два решения u_1 и u_2 задачи 3, то их разность $u = u_2 - u_1$ будет удовлетворять однородному уравнению (2.51) и однородным условиям в (2.52). В таком случае из свойства постоянства решения однородного уравнения (2.51) на характеристиках вытекает, что функция u равна нулю вдоль любой характеристики, проходящей через область Q . Это означает, что u равна нулю всюду в Q .

Вернемся теперь к вопросу о построении решения задачи 3 в общем случае, когда $f \neq 0$. Рассуждая, как в п. 2.2, положим

$$Q_1 = \{(\mathbf{x}, t) \in Q : \tau_0(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t) \notin \overline{\Gamma}_1\}, Q_2 = \{(\mathbf{x}, t) \in Q : \tau_0(\mathbf{x}, t) > 0\}, \quad (2.61)$$

$$u_1(\mathbf{x}, t) = \varphi[\mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t)] + \int_0^t f[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau] d\tau \text{ в } Q_1, \quad (2.62)$$

$$u_2(\mathbf{x}, t) = g[\mathbf{y}_0(\mathbf{x}, t), \tau_0(\mathbf{x}, t)] + \int_{\tau_0(\mathbf{x}, t)}^t f[\mathbf{y}(\mathbf{x}, t; \tau), \tau] d\tau \text{ в } Q_2. \quad (2.63)$$

Обозначим через $\Sigma_* \in \overline{Q}$ множество, образованное характеристиками (или траекториями движущихся частиц), входящими в Q через участок $\overline{\Gamma}_1$ при $t = 0$. Формулы (2.61)–(2.63) являются двумерными аналогами формул (2.34)–(2.36), а множество Σ_* является двумерным аналогом особой для уравнения (2.31) характеристики $x = at$. Оно состоит из “особых” характеристик уравнения (2.51), входящих в область Q через точки особого множества $\overline{\Gamma}_1$ носителя данных Коши задачи 3. Геометрически множество Σ_* изображено на рис. 2.6б для случая, когда все особые характеристики, входящие в Q через участок $\overline{\Gamma}_1$ в момент времени $t = 0$, выходят из Q через участок $\overline{\Gamma}_2$ в момент $t = T$.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что при выполнении условий (i)–(iii) $u_i \in C^1(\overline{Q}_i)$, $i = 1, 2$, причем функция u_1 удовлетворяет уравнению (2.51) в каждой точке $(x, t) \in \overline{Q}_1$ и начальному условию в (2.52), а u_2 удовлетворяет уравнению (2.51) всюду в $\overline{Q}_2$ и граничному условию в (2.52). Для построения решения u во всей области $\overline{Q}$ “склеим” функции u_1 и u_2 на характеристиках, принадлежащих “особому” множеству Σ_* , полагая

$$u(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} u_1(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in Q_1, \\ u_2(\mathbf{x}, t), & (\mathbf{x}, t) \in Q_2. \end{cases} \quad (2.64)$$

Ясно, что введенная с помощью формулы (2.64) функция u является непрерывно дифференцируемой в $\overline{Q}$ тогда и только тогда, когда продолжения функций u_1 и u_2 на Σ_* непрерывно-дифференцируемы и совпадают вместе с производными в каждой точке $(x, t) \in \Sigma_*$. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы исходные данные задачи 3, т. е. функции φ , g и f удовлетворяли вместе со своими производными первого порядка условиям согласования в точках участка $\overline{\Gamma}_1$, имеющим вид

$$\varphi(0, y) = g(y, 0), \quad \left. \frac{\partial g}{\partial t} + a \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right|_{x=0, t=0} = f(0, y, 0) \quad \forall y \in [0, b]. \quad (2.65)$$

Это составляет содержание следующей леммы, доказательство которой предоставляем читателю.

ЛЕММА 2.4. Пусть выполняются условия (i)–(iii) и условия согласования (2.65). Тогда функция u , определяемая формулой (2.64), принадлежит пространству $C^1(\overline{Q})$.

Из леммы 2.4 и свойств функций u_1 , u_2 вытекает, в свою очередь, что функция u , определяемая формулой (2.64), удовлетворяет уравнению (2.51)

и в точках множества Σ_* , а следовательно, и всюду в $\overline{Q}$. Таким образом, функция u в (2.64) непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (2.51) всюду в $\overline{Q}$, т. е. является регулярным решением задачи 3. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть выполняются условия леммы 2.4. Тогда регулярное решение u задачи 3 из пространства $C^1(\overline{Q})$ существует, единственно и определяется соотношениями (2.62)–(2.64).*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Первое условие в (2.65) служит для обеспечения непрерывности решения u в $\overline{Q}$ и называется условием согласования нулевого порядка. Второе условие в (2.65), означающее выполнение уравнения (2.51) в точках $\overline{\Gamma}_1$ при $t = 0$, связывает первые производные от начальных и граничных функций в указанных точках. Оно называется условием согласования первого порядка. Используя условия согласования нулевого и первого порядков и формулу (2.64), можно получить условия согласования второго порядка, необходимые для принадлежности решения u задачи 3 пространству $C^2(\overline{Q})$, и, вообще, условия согласования любого порядка.

Отметим далее, что для решения двумерной задачи 3 справедливы двумерные аналоги оценок (2.39) и чистого принципа максимума (2.40), полученные в п. 2.2 для одномерного уравнения (2.31). Более того, для уравнения (2.51), а также для уравнения переноса с “поглощением” $\gamma \geq 0$, имеющего вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \text{grad} u + \gamma u = f, \quad (2.66)$$

справедлив двумерный аналог оценки (2.49). Для его доказательства обозначим через H предгильбертово пространство, состоящее из непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций со скалярным произведением и нормой, определяемыми формулами

$$(u, v) = (u, v)_H = \int_{\Omega} u(x, y)v(x, y)dx dy, \quad \|u\|_H^2 = (u, u)_H. \quad (2.67)$$

Аналогично одномерному случаю введем два нормированных пространства $U = C[0, T; H]$ и $F = L^1(0, T; H)$, состоящие из функций, зависящих от $(x, y, t) \in Q$, с нормами, определенными в (2.43), где $\|\cdot\|_H$ определена в (2.67).

Рассмотрим задачу 4, заключающуюся в нахождении решения u уравнения (2.66), удовлетворяющего условиям (2.52). Предполагая, что решение u задачи 4 существует и принадлежит пространству $C^1(\overline{Q})$, умножим уравнение (2.66) на u и проинтегрируем по области Ω . Учитывая условия (ii), (ii'), получим

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot, t)\|^2 + \int_{\Gamma_2} a_2 u^2 dy - \int_{\Gamma_1} a_1 g^2 dy + 2 \int_{\Omega} \gamma u^2 dx dy = 2(f, u). \quad (2.68)$$

Рассуждая далее, как в п. 2.3, приходим из (2.68) к следующей оценке

$$\|u\|_U \leq \|\varphi\|_H + \|f\|_F + \left(\int_0^T \int_{\Gamma_1} a_1 g^2 dy dt \right)^{1/2}, \quad (2.69)$$

являющейся двумерным аналогом оценки (2.49). Из этой оценки вытекает, в частности, единственность регулярного решения задачи 4 и непрерывная зависимость его от исходных данных. Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 2.4. *При выполнении условия $\gamma \geq 0$ в Q регулярное решение $u \in C^1(\overline{Q})$ задачи 4 единственно, и для него справедлива оценка (2.69), означающая непрерывную зависимость решения u от исходных данных – тройки (φ, g, f) .*

В случае, когда $\gamma = 0$, задача 4 переходит в задачу 3, существование регулярного решения которой вытекает из теоремы 2.3. С учетом этого имеем

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *При выполнении условий леммы 2.4 регулярное решение $u \in C^1(\overline{Q})$ задачи 3 существует, единственно, и для него выполняется оценка (2.69), означающая непрерывную зависимость решения u от данных (φ, g, f) .*

2.5. Однородное стационарное уравнение переноса с двумя переменными. Пусть Ω – ограниченная область в плоскости $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим в Ω однородное уравнение

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (2.70)$$

являющееся стационарным аналогом уравнения (2.51), причем будем считать, что коэффициенты a и b не зависят от времени t . Будем предполагать ниже, что выполняются условия

(j) $a, b \in C^1(\overline{\Omega})$, (jj) $a^2(x, y) + b^2(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in \overline{\Omega}$.

Под решением u уравнения (2.70) будем понимать непрерывно дифференцируемую функцию $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую (2.70) в каждой точке $(x, y) \in \Omega$.

Функции a и b определяют в области Ω поле направлений (a, b) . Кривые, касательные в каждой точке области Ω к полю (a, b) , называются *интегральными кривыми* данного поля. Хорошо известно [54], что указанные кривые определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)}. \quad (2.71)$$

Будем называть их *характеристическими кривыми* или *характеристиками* уравнения (2.70). В силу условий (j), (jj) через каждую точку $(x, y) \in \Omega$

проходит одна и только одна характеристика уравнения (2.70). Если ввести параметр t , изменяющийся вдоль характеристической кривой, то дифференциальные уравнения (2.71) характеристик можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y), \quad (2.72)$$

определяющем характеристики уравнения (2.70) в параметрической форме.

Если в дополнение к условиям (jj) выполняется условие $a > 0$ в $\bar{\Omega}$, то, разделив второе уравнение в (2.72) на первое, получаем следующее уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}. \quad (2.73)$$

Уравнение (2.73) определяет характеристики уравнения (2.70) в виде графика соответствующего решения y уравнения (2.73) как функции от абсциссы x .

Левую часть уравнения (2.70) можно интерпретировать как скалярное произведение вектора $\mathbf{a} = (a, b)$ на вектор $\text{gradu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$, т. е. как производную от функции u по направлению вектора $\mathbf{a}$. Поскольку указанная производная равна нулю в силу (2.70), то отсюда следует, что любое решение уравнения (2.70) сохраняет постоянное значение вдоль любой характеристики.

Как и в п. 2.4., будем использовать гидродинамическую интерпретацию уравнения (2.70), т. е. считать, что (2.70) описывает стационарный процесс переноса некоторой величины u в среде, движущейся со скоростью $\mathbf{a} = (a, b)$, которая зависит от $(x, y) \in \Omega$, но не зависит от времени t . Эта интерпретация удобна тем, что позволяет отождествить характеристики уравнения (2.70) (чисто математические объекты) с фазовыми траекториями системы (2.72), которые в стационарном случае совпадают с *линиями тока* поля скоростей $\mathbf{a}$ в области Ω . Последние имеют наглядный физический смысл линий в области Ω , по которым движутся частицы жидкости в стационарном поле скоростей $\mathbf{a}$. При такой интерпретации параметр t , входящий в уравнение (2.72), имеет смысл времени.

Напомним, что функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, не равная тождественно константе, называется первым *интегралом* системы (2.71), если u обращается в константу на любом ее решении. Рассуждая, как и в п. 2.4, легко убедиться в том, что функция $u \in C^1(\Omega)$ описывает первый интеграл системы (2.71) тогда и только тогда, когда u является решением уравнения (2.70). Другими словами, справедлив следующий аналог леммы 2.3, утверждающий эквивалентность задачи нахождения решения уравнения (2.70) и задачи решения системы (2.71) относительно его характеристик.

ЛЕММА 2.5. Пусть выполняются условия (j), (jj) и $u \in C^1(\Omega)$ – заданная в Ω функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) функция u является решением уравнения (2.70) в области Ω ;
- 2) функция u принимает постоянное значение на любой характеристике уравнения (2.70), проходящей через Ω ;
- 3) функция u является первым интегралом системы (2.71) в Ω .

В силу леммы 2.5 нахождение решений уравнения (2.70) сводится к нахождению первого интеграла системы (2.71). Последний при выполнении условий (j), (jj) существует по крайней мере в окрестности любой точки $(x_0, y_0) \in \Omega$ и принадлежит пространству C^1 . Отсюда следует существование классического решения уравнения (2.70) в окрестности любой точки $(x_0, y_0) \in \Omega$. Известно также, что с ростом гладкости функций a и b растет и гладкость интеграла u системы (2.71), а следовательно, и гладкость решения u уравнения (2.70). В частности, $u \in C^k(\Omega)$, если a и $b \in C^k(\Omega)$, $k = 2, 3, \dots$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Пусть функция u является первым интегралом системы (2.71) в Ω . Из леммы 2.5 следует, что для любой функции $\varphi \in C^1$ функция

$$\tilde{u}(x, y) = \varphi[u(x, y)], \quad (x, y) \in \Omega \quad (2.74)$$

также является первым интегралом системы (2.71), а следовательно, решением уравнения (2.70). Поскольку φ – произвольная функция, то можно считать, что (2.74) описывает общее решение уравнения (2.70). Таким образом, формула (2.74) является аналогом формулы (2.5) общего решения уравнения (2.3).

Для выделения единственного решения уравнения (2.70) введем в области Ω простую гладкую кривую

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \Omega : x = \xi(s), y = \eta(s), s \in [s_1, s_2]\} \quad (2.75)$$

и зададим следующее условие на Γ_0 :

$$u|_{\Gamma_0} = U_0(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0. \quad (2.76)$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (2.70), заключающуюся в нахождении решения u уравнения (2.70), удовлетворяющего условию (2.76). Полагая

$$u_0(s) = U_0[\xi(s), \eta(s)], \quad s \in [s_1, s_2], \quad (2.77)$$

введем пространственную кривую

$$\Gamma_0^u = \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 : x = \xi(s), y = \eta(s), u = u_0(s), s \in [s_1, s_2]\}. \quad (2.78)$$

Будем предполагать, что выполняются условия:

$$(jjj) \quad \xi, \eta \in C^1[s_1, s_2], U_0 \in C^1(\Gamma_0), [\xi'(s)]^2 + [\eta'(s)]^2 \neq 0 \quad \forall s \in [s_1, s_2];$$

(jv) $a[\xi(s), \eta(s)]\eta'(s) - b[\xi(s), \eta(s)]\xi'(s) \neq 0 \quad \forall s \in [s_1, s_2]$.

Условие (jv), являющееся аналогом последнего условия в (i) в п. 2.1, означает, что кривая Γ_0 нигде не касается характеристик уравнения (2.70), т. е. пересекается с каждой из них под ненулевым углом (см. рис. 2.7).

Поскольку функции a и b не зависят от t , то параметр t в (2.72) можно задать с точностью до произвольного слагаемого. Удобно задать его так, чтобы точка пересечения каждой характеристики уравнения (2.70) с кривой Γ_0 отвечала одному и тому же значению $t = t_0$.

Предположим, что $a > 0$ в $\bar{\Omega}$. В таком случае все характеристики уравнения (2.70), выходящие из Γ_0 , достигнут границы Γ в некоторые конечные моменты времени t . В частности, характеристики Γ' и Γ'' , выходящие из крайних точек (x', y') и (x'', y'') кривой Γ_0 , достигнут Γ в некоторые моменты t' и t'' .

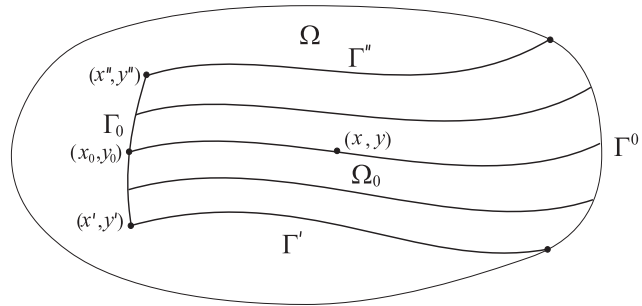


Рис. 2.7

Проще всего убедиться в этом с помощью физической интерпретации, согласно которой любая характеристика уравнения (2.70) описывает линию тока частицы жидкости, движущейся со скоростью $\mathbf{a}$ в области Ω . Поскольку координата x движущейся частицы может лишь расти с ростом времени t в силу первого уравнения в (2.72) и условия $a(x, y) > 0$ в $\bar{\Omega}$, то с учетом ограниченности области Ω каждая частица, занимающая в начальный момент $t = t_0$ положение на Γ_0 , достигнет границ области Ω за конечное время.

Обозначим через Ω_0 подобласть области Ω , ограниченную кривой Γ_0 , характеристиками Γ' и Γ'' и соответствующим участком Γ^0 границы Γ (см. рис. 2.7). Будем считать для простоты, что Ω_0 является односвязной областью. Это заведомо имеет место в случае, когда исходная область Ω односвязна. Вспомнив введенное в п. 2.1 понятие характеристической полосы для уравнения (2.3), приходим к выводу, что область Ω_0 имеет смысл характеристической полосы Π_{Γ_0} для уравнения (2.70). Рассуждая, как в п. 2.4, проведем через каждую точку $(x, y) \in \Omega_0$ характеристику $\tilde{y} = \tilde{y}(x, y; \tilde{x})$ уравнения (2.70), т. е. интегральную кривую уравнения (2.73), удовлетворяющую условию $\tilde{y}(x) = y$. В силу свойства единственности решения уравнения (2.73) и условия $a(x, y) > 0$ в $\bar{\Omega}_0$ указанная характеристика входит в область Ω_0 через некоторую точку $(x_0, y_0) \in \Gamma_0$ и выходит через некоторую точку $(x^0, y^0) \in \Gamma^0$. Тем самым мы определили в области Ω_0 две функции: $x_0 = x_0(x, y)$ и $y_0 = y_0(x, y)$. Они имеют смысл координат x_0 и y_0 точки на начальной кривой Γ_0 , через которую в область Ω_0 входит характеристика, проходящая через точку (x, y) . В силу условий (j) $x_0, y_0 \in C^1(\bar{\Omega}_0)$. Кро-

ме того, каждая из функций x_0 и y_0 постоянна на любой характеристике уравнения (2.70), расположенной в $\overline{\Omega}_0$, и, следовательно, является в силу леммы 2.5 решением уравнения (2.70) в $\overline{\Omega}_0$. Последнее означает, что

$$a \frac{\partial x_0}{\partial x} + b \frac{\partial x_0}{\partial y} = 0, \quad a \frac{\partial y_0}{\partial x} + b \frac{\partial y_0}{\partial y} = 0 \quad \text{в } \overline{\Omega}_0. \quad (2.79)$$

Далее рассуждаем следующим образом. Рассмотрим сужение $\tilde{y}_0$ функции y_0 на Γ_0 , определяемое соотношением $\tilde{y}_0(s) = y_0[\xi(s), \eta(s)]$, $s \in [s_1, s_2]$. Из свойств функций y_0 , ξ и η вытекает, что $\tilde{y}_0 \in C^1[s_1, s_2]$. Предположим, кроме того, что

$$\frac{d\tilde{y}_0(s)}{ds} \equiv \left(\frac{\partial y_0}{\partial x} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial y_0}{\partial y} \frac{d\eta}{ds} \right) \neq 0 \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (2.80)$$

Тогда существует обратная к $\tilde{y}_0$ функция S , с которой выполняется соотношение

$$S[y_0[\xi(s), \eta(s)]] = s \quad \forall s \in [s_1, s_2]. \quad (2.81)$$

В таком случае функция $u : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$u(x, y) \equiv u_0\{S[y_0(x, y)]\}, \quad (2.82)$$

и является искомым решением задачи Коши (2.70), (2.76). Действительно, в силу замечания 2.4 правая часть в (2.82) является, как и y_0 , решением уравнения (2.70). Кроме того, из (2.77) и (2.81) следует, что функция (2.82) удовлетворяет условию Коши (2.76), а из условия постоянства решения на характеристиках вытекает, что u является единственным решением задачи Коши (2.70), (2.76). Простой анализ показывает, что соотношение (2.80) выполняется при $a > 0$ в $\overline{\Omega}$, если выполняется условие (jv). Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 2.5 Пусть Ω – односвязная плоская область, Γ_0 – кривая в Ω , заданная соотношением (2.75), и выполняются условия (j), (jjj), (jv), причем $a > 0$ в $\overline{\Omega}$. Обозначим через Ω_0 подобласть области Ω , ограниченную кривой Γ_0 и характеристиками Γ' и Γ'' , проходящими через крайние точки (x', y') и (x'', y'') кривой Γ_0 (см. рис. 2.7). Тогда в области $\overline{\Omega}_0$ регулярное решение $u \in C^1(\overline{\Omega}_0)$ задачи Коши (2.70), (2.76) существует, единственно и определяется формулой (2.82). Если, более того, $a, b \in C^k(\overline{\Omega})$, $\Gamma_0 \in C^k$ и $U_0 \in C^k(\Gamma_0)$, $k = 2, 3, \dots$, то решение u принадлежит пространству $C^k(\overline{\Omega}_0)$.

График решения $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (2.70) геометрически представляет собой поверхность в пространстве (x, y, u) . Эту поверхность будем называть *интегральной поверхностью* уравнения (2.70). Выясним структуру любой интегральной поверхности и одновременно укажем простой способ

построения интегральной поверхности задачи Коши (2.70), (2.76). С этой целью заметим, что на каждой характеристике уравнения (2.70) любое его решение принимает постоянное значение. Это означает, что интегральная поверхность уравнения (2.70) necessarily состоит из его характеристик, сдвинутых вверх или вниз на значение, определяемое значением решения на этой характеристике. Отсюда вытекает, что для построения интегральной поверхности решения задачи Коши (2.70), (2.76) нужно через каждую точку $(x_0, y_0) \in \Gamma_0$ начальной кривой Γ_0 провести характеристику уравнения (2.70) и сдвинуть ее вверх на значение $u(x_0, y_0) > 0$, либо вниз, если $u(x_0, y_0) < 0$. В итоге мы получим поверхность, составленную из однопараметрического семейства сдвинутых указанным образом характеристик уравнения (2.70), которая по построению и является искомой интегральной поверхностью задачи Коши (2.70), (2.76).

Указанная интегральная поверхность как бы "сшивается" из характеристик уравнения (2.70). При этом гладкость интегральной поверхности в продольном направлении, т. е. вдоль характеристик, определяется лишь гладкостью коэффициентов a и b уравнения (2.70), тогда как гладкость в поперечном направлении, т. е. качество "сшивки", определяется гладкостью пространственной кривой Γ_0^u . Последняя целиком и полностью определяется гладкостью начальной кривой $\Gamma_0 \subset \Omega$ в (2.75) и начальной функции U_0 в (2.76). Второе утверждение теоремы 2.5 как раз и является математическим отражением указанного факта.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Условие $a(x, y) > 0$ в Ω при гидродинамической интерпретации означает, что векторное поле $\mathbf{a}$ описывает *однонаправленное* по отношению к оси x движение жидкости. Последнее соответствует тому, что угол φ между любой линией тока и осью x в каждой точке $(x, y) \in \Omega$, определяемый из соотношения

$$\varphi(x, y) = \arctg \frac{b(x, y)}{a(x, y)},$$

по модулю меньше $\pi/2$. Отметим, что основные утверждения теоремы 2.5 не изменятся, если условие $a(x, y) > 0$ в $\overline{\Omega}$ заменить условием $b(x, y) > 0$ в $\overline{\Omega}$, означающим однонаправленность поля скоростей $\mathbf{a}$ по отношению к оси y . Более того, используя несколько более сложные рассуждения с привлечением свойств динамических систем, можно показать, что основные утверждения теоремы 2.5 остаются справедливыми и в случае, когда вместо условия $a > 0$ в $\overline{\Omega}$ выполняется более

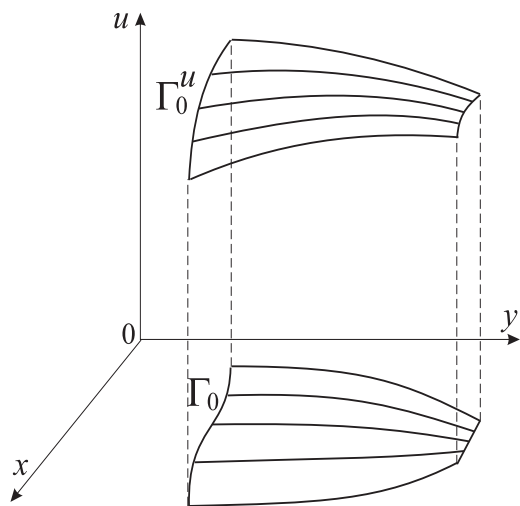


Рис. 2.8

общее условие (jj).

2.6. Квазилинейное уравнение первого порядка с двумя переменными. Рассмотрим в этом пункте неоднородное уравнение 1-го порядка

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = f, \quad (2.83)$$

причем будем считать для общности, что коэффициенты a, b и правая часть f уравнения (2.83) зависят как от координат (x, y) точки $\mathbf{x}$, изменяющейся в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, так и от решения u . Такое уравнение называют *квазилинейным* уравнением 1-го порядка с двумя переменными. Если же a и b не зависят от u , а f линейно зависит от u , то (2.83) называется *линейным* уравнением. Оно имеет вид стационарного аналога

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma(x, y)u = f(x, y) \quad (2.84)$$

нестационарного уравнения переноса с поглощением (2.66).

Тот факт, что функции a, b и f зависят от трех переменных x, y и u , означает, что они определены в некоторой трехмерной области $D \subset \Omega \times \mathbb{R}_u^1$. Мы будем предполагать ниже, что выполняются условия

(i) $a, b, f \in C^1(\overline{D})$ и $a^2(x, y, u) + b^2(x, y, u) \neq 0 \quad \forall (x, y, u) \in \overline{D}$.

Функции a, b и f определяют в пространстве x, y, u поле направлений (a, b, f) . Кривые, касательные в каждой точке области D к полю (a, b, f) , называются интегральными кривыми либо фазовыми траекториями *данного поля*. Указанные кривые определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{f(x, y, u)}. \quad (2.85)$$

Будем называть их *характеристическими кривыми* или *характеристиками* уравнения (2.83). Проекции характеристических кривых на плоскость x, y будем называть *проекциями характеристик*. Если ввести параметр t , изменяющийся вдоль характеристической кривой, то дифференциальные уравнения (2.85) характеристик можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = a(x, y, u), \quad \frac{dy}{dt} = b(x, y, u), \quad \frac{du}{dt} = f(x, y, u), \quad (2.86)$$

определяющем характеристики уравнения (2.83) в параметрической форме.

Хотя параметр t явно не входит в стационарное уравнение (2.83), мы будем использовать, как и в п. 2.5, гидродинамическую интерпретацию уравнения (2.83). Согласно ей уравнение (2.83) описывает стационарный

процесс переноса некоторой величины (субстанции) u в среде, движущейся в области Ω со скоростью $\mathbf{a}$, зависящей как от x, y , так и самой величины u . При такой интерпретации t имеет смысл времени, тогда как проекции характеристических кривых на плоскость x, y описывают линии тока векторного поля $\mathbf{a}$.

Подчеркнем, что в отличие от линейного однородного уравнения (2.70), характеристиками которого являются плоские кривые, расположенные в плоскости x, y , характеристиками нелинейного уравнения (2.83) являются существенно пространственные кривые, расположенные в пространстве x, y, u . Указанные характеристики, как и их проекции на плоскость x, y , зависят от решения u , т. е. они являются разными для разных решений. В этом состоит существенное отличие характеристик нелинейного неоднородного уравнения (2.83) от характеристик линейного однородного уравнения (2.70). В частном случае, когда коэффициенты a и b не зависят от решения u , проекции характеристик также не зависят от u и совпадают с характеристиками уравнения (2.70). Если к тому же $f = 0$, то из третьего уравнения (2.86) следует, что на характеристиках уравнения (2.83) решение u сохраняет постоянные значения, хотя и разные в общем случае для разных характеристик. Поэтому в этом случае характеристики уравнения (2.83) являются плоскими в том смысле, что они расположены на плоскостях $u = C$, где C – константа, разная для разных характеристик.

Под решением u уравнения (2.83) будем понимать непрерывно дифференцируемую функцию $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую (2.83) в каждой точке $(x, y) \in \Omega$. График решения $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ уравнения (2.83) геометрически представляет собой поверхность в пространстве (x, y, u) . Эту поверхность будем называть *интегральной поверхностью* уравнения (2.83). Запишем уравнение интегральной поверхности уравнения (2.83) в виде

$$F(x, y, u) \equiv u(x, y) - u = 0. \quad (2.87)$$

Как известно, вектор нормали к поверхности $F(x, y, u) = 0$ совпадает по направлению с вектором $(F_x, F_y, F_u) = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1)$. Поэтому уравнение (2.83) представляет собой не что иное, как условие перпендикулярности нормали к интегральной поверхности с направлением поля. Это означает, что в каждой точке интегральной поверхности направление, определяемое указанным выше полем направлений, находится в касательной плоскости к поверхности. Поэтому с геометрической точки зрения проинтегрировать уравнение (2.83) – значит найти такие поверхности, касательные плоскости к которым в каждой точке касаются поля направлений. Отсюда следует вывод, что любая гладкая (класса C^1) *поверхность, составленная из однопараметрического семейства характеристических кривых, является интегральной поверхностью уравнения (2.83)*.

Справедливо и обратное. *Любая интегральная поверхность уравнения*

(2.83) порождается некоторым однопараметрическим семейством характеристических кривых. В самом деле на любой интегральной поверхности (2.87) уравнения (2.83) можно задать однопараметрическое семейство кривых $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u[x(t), y(t)]$ с помощью дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a[x, y, u(x, y)], \quad \frac{dy}{dt} = b[x, y, u(x, y)]. \quad (2.88)$$

Вдоль каждой такой кривой уравнение (2.83) эквивалентно условию $du/dt = f$. Это означает, что данное однопараметрическое семейство удовлетворяет соотношениям (2.86) и, следовательно, состоит из характеристических кривых. Так как в силу условий (i) решения системы (2.86) однозначно определяются начальными значениями x, y и u при $t = t_0$, мы получаем следующий результат: *любая характеристическая кривая, имеющая общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой поверхности.*

Для выделения единственного решения уравнения (2.83) рассмотрим задачу Коши. Чтобы ее сформулировать, введем в Ω гладкую кривую (2.75) и зададим условие Коши (2.76). Введем далее пространственную кривую Γ_0^u с помощью соотношений (2.77), (2.78) и предположим, что выполняются условия:

$$(ii) \quad \Gamma_0 \in C^1 \text{ (т. е. } \xi, \eta \in C^1[s_1, s_2]), U_0 \in C^1(\Gamma_0), [\xi'(s)]^2 + [\eta'(s)]^2 \neq 0 \quad \forall s \in [s_1, s_2], (\xi(s), \eta(s), u_0(s)) \in D \quad \forall s \in [s_1, s_2].$$

В силу условий (ii) задача Коши (2.83), (2.76) эквивалентна задаче нахождения интегральной поверхности уравнения (2.83), проходящей через кривую Γ_0^u .

Для нахождения решения задачи Коши (2.83), (2.76) проведем через каждую точку (x_0, y_0, u_0) кривой Γ_0^u характеристику, т. е. интегральную кривую системы (2.85). В силу предположений (i) это можно сделать, причем единственным образом в некоторой окрестности каждой точки кривой Γ_0^u . Мы получим семейство характеристических кривых

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t), \quad u = U(s, t), \quad (2.89)$$

зависящее от параметра s , при этом все функции в (2.89) имеют непрерывные производные первого порядка по s и t .

По построению функции X, Y и U удовлетворяют соотношениям

$$\frac{dX}{dt} = a(X, Y, U), \quad \frac{dY}{dt} = b(X, Y, U),$$

$$X(s, t_0) = \xi(s), \quad Y(s, t_0) = \eta(s), \quad U(s, t_0) = u_0(s), \quad s \in [s_1, s_2].$$

Составим функциональный определитель

$$\Delta(s, t) = X_t(s, t)Y_s(s, t) - Y_t(s, t)X_s(s, t) = aY_s(s, t) - bX_s(s, t).$$

Предположим сначала, что он не обращается в нуль на кривой Γ_0 , т. е. что выполняется соотношение

$$\Delta(s, t_0) \equiv a[\xi(s), \eta(s), u_0(s)]Y_s(s, t_0) - b[\xi(s), \eta(s), u_0(s)]X_s(s, t_0) \neq 0 \quad \forall s \in [s_1, s_2] \quad (2.90)$$

Условие (2.90) означает, что в любой точке кривой Γ_0^u касательное и характеристическое направления имеют различные проекции на плоскость x, y .

При выполнении условия (2.90) первые два уравнения в (2.89) можно локально, т. е. в окрестности некоторой точки $\mathbf{x}_0 \in \Gamma_0$, разрешить относительно s и t . В результате получим две непрерывно – дифференцируемые функции s и t от переменных x и y . Подставляя их в последнее соотношение в (2.89), получим функцию u переменных x и y , действующую по формуле

$$u(x, y) = U[s(x, y), t(x, y)]. \quad (2.91)$$

Нетрудно видеть, что так построенная функция u является искомым решением рассматриваемой задачи Коши. Действительно, используя правило дифференцирования сложной функции и (2.86), имеем

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.92)$$

Но $du/dt = f$. Отсюда и (2.92) следует, что функция u удовлетворяет уравнению (2.83) *локально*, т. е. в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$ кривой Γ_0 . Тот факт, что u удовлетворяет начальному условию (2.76), вытекает из построения решения. Наконец, единственность решения задачи Коши вытекает из того факта, что характеристическая кривая, имеющая одну общую точку с интегральной поверхностью, целиком лежит на этой поверхности. Отсюда следует, что любая интегральная поверхность, проходящая через кривую Γ_0^u , целиком содержит семейство характеристик, проходящих через Γ_0^u , и, следовательно, совпадает с построенной интегральной поверхностью.

Опять отметим, что интегральная поверхность задачи Коши (2.83), (2.86) “сшивается” из характеристик уравнения (2.83). Но если в случае линейного уравнения (2.70) указанные характеристики определяются лишь коэффициентами a и b уравнения (2.70) и не зависят от решения, то в случае нелинейного уравнения его характеристики зависят также и от решения, то есть являются разными для разных решений. Поэтому, если для линейного уравнения (2.70) данные Коши (2.76) влияют лишь на “поперечную” структуру интегральной поверхности, то в случае нелинейного уравнения

(2.83) данные Коши влияют на структуру решения как в “поперечном”, так и “продольном” направлениях.

Рассмотрим теперь случай, когда $\Delta \equiv 0$ всюду на Γ_0 . В силу предыдущих рассуждений для того, чтобы задача Коши (2.83), (2.76) имела решение, кривая Γ_0^u необходимо должна быть характеристической кривой. В этом случае задача Коши имеет бесконечно много решений, поскольку через каждую характеристическую кривую проходит бесконечно много интегральных поверхностей. Таким образом, характеристики являются линиями пересечения интегральных поверхностей – *линиями ветвления*, тогда как через нехарактеристическую кривую не может проходить более одной интегральной поверхности.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть выполняются условия (i), (ii) и (2.90). Тогда в некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$ кривой Γ_0 решение $u \in C^1$ задачи Коши (2.83), (2.76) существует и единственно. Если же $\Delta = 0$ на Γ_0 , то задача Коши (2.83), (2.76) имеет решение тогда и только тогда, когда соответствующая пространственная кривая Γ_0^u является характеристикой. В этом случае существует бесконечно много решений задачи Коши (2.83), (2.76).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Подчеркнем, что теорема 2.6 в отличие от теоремы 2.5 носит локальный характер, поскольку она утверждает существование решения задачи Коши (2.83), (2.76) лишь в окрестности точки $\mathbf{x}_0$ кривой Γ_0 . Можно показать при некоторых дополнительных условиях на функции a, b, f и кривую Γ_0^u , что указанное решение существует в окрестности не только точки $\mathbf{x}_0$, но и всей кривой Γ_0 . Об этом, а также о других свойствах решений квазилинейных и нелинейных уравнений 1-го порядка, как с двумя, так и с n независимыми переменными, можно прочитать в [21, с. 40–53], [48, гл. 1], [54, гл. 8].

§3. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка

3.1. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x_1, \dots, x_n). \quad (3.1)$$

Покажем в этом пункте, что с помощью линейной замены независимых переменных уравнение (3.1) может быть приведено к более простому (каноническому) виду, не содержащему смешанных производных второго порядка, а в случае гиперболического либо эллиптического типа и производных 1-го порядка.

С этой целью введем вместо $x_1, \dots, x_n$ новые независимые переменные $\xi_1, \dots, \xi_n$ при помощи линейного преобразования

$$\xi_k = \sum_{i=1}^n c_{ki} x_i, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Мы предполагаем, что преобразование (3.2) невырождено, т. е. что определитель $|c_{ki}| = \det((c_{ki}))$ не равен нулю. Производные по старым переменным выражаются через производные по новым переменным следующими формулами:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n c_{ki} \frac{\partial u}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n c_{ki} c_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l}. \quad (3.3)$$

Подставив (3.3) в уравнение (3.1), получим

$$\sum_{k,l=1}^n \bar{a}_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \frac{\partial u}{\partial \xi_k} + cu = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n). \quad (3.4)$$

Здесь, в частности,

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} c_{ki} c_{lj}, \quad \bar{b}_k = \sum_{i=1}^n b_i c_{ki}. \quad (3.5)$$

Нетрудно проверить, что формулы преобразования (3.5) коэффициентов при вторых производных от функции u при замене независимых переменных

ных по формулам (3.2) совпадают с формулами преобразования коэффициентов квадратичной формы

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} t_i t_j, \quad (3.6)$$

если в ней произвести линейное преобразование

$$t_i = \sum_{k=1}^n c_{ki} \tau_k, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.7)$$

приводящее ее к виду

$$\sum_{k,l=1}^n \bar{a}_{kl} \tau_k \tau_l. \quad (3.8)$$

Как уже указывалось в § 1, коэффициенты c_{ki} можно подобрать так, чтобы квадратичная форма (3.6) привелась к сумме квадратов вида

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \tau_k^2. \quad (3.9)$$

Здесь коэффициенты λ_k равны ± 1 или нулю соответственно, причем знаки коэффициентов λ_k и определяют тип уравнения (3.1). Преобразованное уравнение (3.4) принимает вид

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k^2} + \sum_{k=1}^n \bar{b}_k \frac{\partial u}{\partial \xi_k} + cu = f_1(\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (3.10)$$

который и является его *каноническим видом*.

Предположим, что все λ_k отличны от нуля, т. е. что уравнение (3.1) не является параболическим, и покажем, что в этом случае при помощи преобразования функции u можно освободиться от производных первого порядка. С этой целью вместо u введем новую искомую функцию v по формуле

$$u = v \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{b}_k}{\lambda_k} \xi_k \right). \quad (3.11)$$

Подставив (3.11) в (3.10), получим, как нетрудно проверить, уравнение вида

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k^2} + c_1 v = f_2(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Для эллиптического уравнения все λ_k равны 1 или -1. Поэтому умножая, если надо, обе части этого уравнения на (-1) , мы можем считать, что все λ_k равны 1. Это означает, что всякое линейное уравнение эллиптического типа с постоянными коэффициентами может быть приведено к уравнению, имеющему в прежних обозначениях вид

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_1 u = f(x_1, \dots, x_n). \quad (3.12)$$

В случае уравнения гиперболического типа удобно считать, что уравнение (3.1) рассматривается в области из пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда, заменив в (3.1) и (3.2) n на $n+1$ и полагая $\xi_{n+1} = t$, приходим к выводу, что всякое линейное уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами приводится к следующему каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + c_2 u = f(x_1, \dots, x_n, t). \quad (3.13)$$

В случае, когда коэффициенты уравнения (3.1) переменны, для каждой точки $x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ области Ω можно указать такое невырожденное преобразование независимых переменных, которое приводит уравнение (3.1) к каноническому виду в этой точке. Для каждой точки x_0 имеется, вообще говоря, свое преобразование независимых переменных, приводящее уравнение к каноническому виду; в других точках это преобразование может не приводить уравнение к каноническому виду. Примеры показывают, что дифференциальное уравнение с числом независимых переменных больше двух (если исключить случай постоянных коэффициентов), вообще говоря, невозможно привести с помощью преобразования независимых переменных к каноническому виду даже в сколь угодно малой области. В случае же двух переменных такое преобразование независимых переменных существует при достаточно общих предположениях о коэффициентах уравнения, как будет показано в следующем пункте.

3.2. Приведение к каноническому виду уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными. Рассмотрим в области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ уравнение, линейное относительно вторых производных, вида:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0. \quad (3.14)$$

Здесь $A, B, C \in C^2(\Omega)$ – заданные функции, F – непрерывная функция своих аргументов. Будем предполагать, что коэффициенты A , B и C не обращаются одновременно в нуль. Если F – линейная функция, т. е. $F = A_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C_1(x, y) u + f(x, y)$, то уравнение (3.14)

является *линейным*. Пусть $(x_0, y_0) \in \Omega$ – произвольная точка. Сопоставив уравнению (3.14) квадратичную форму $\Phi(\cdot, x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, действующую согласно (1.12) по формуле

$$\Phi(t_1, t_2; x_0, y_0) = A(x_0, y_0)t_1^2 + 2B(x_0, y_0)t_1t_2 + C(x_0, y_0)t_2^2, \quad (3.15)$$

выводим на основании определения 1.2, что уравнение (3.14) имеет в Ω :

1) *гиперболический тип*, если $B^2 - AC > 0$ в Ω . В этом случае квадратичная форма (3.15) знакопеременная. Это означает, что для каждой точки $(x_0, y_0) \in \Omega$ существует хотя бы один элемент $(t'_1, t'_2) \in \mathbb{R}^2$ такой, что $\Phi(t'_1, t'_2; x_0, y_0) > 0$, и хотя бы один элемент $(t''_1, t''_2) \in \mathbb{R}^2$ такой, что $\Phi(t''_1, t''_2; x_0, y_0) < 0$;

2) *параболический тип*, если $B^2 - AC = 0$ в Ω (квадратичная форма (3.15) знакопостоянна), т. е. выполняется условие

$$\Phi(t_1, t_2; x_0, y_0) \geq 0 \text{ либо } \Phi(t_1, t_2; x_0, y_0) \leq 0 \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (x_0, y_0) \in \Omega;$$

3) *эллиптический тип*, если $B^2 - AC < 0$ в Ω . В этом случае форма (3.15) знакоопределена, т. е. с некоторой константой $\alpha > 0$ выполняется условие

$$\Phi(t_1, t_2; x_0, y_0) \geq \alpha(t_1^2 + t_2^2) \quad \text{либо} \quad \Phi(t_1, t_2; x_0, y_0) \leq -\alpha(t_1^2 + t_2^2) \quad \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Первое условие здесь выполняется при $A > 0$, второе – при $A < 0$.

Случай, когда выражение $B^2 - AC$ меняет знак в Ω , т. е. когда уравнение (3.14) имеет смешанный тип, мы не будем рассматривать.

Поставим перед собой задачу: с помощью замены независимых переменных x, y привести уравнение (3.14) к каноническому виду в некоторой окрестности фиксированной точки $(x_0, y_0) \in \Omega$. С этой целью введем в Ω новые независимые переменные ξ и η по формулам

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \quad (3.16)$$

От функций φ и ψ в (3.16) потребуем, чтобы они были дважды непрерывно дифференцируемы и чтобы их якобиан был отличен от нуля в Ω :

$$D \equiv \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.17)$$

Как известно, условие (3.17) означает, что в некоторой окрестности каждой точки $(x_0, y_0) \in \Omega$ кривые $\varphi(x, y) = C_1 = \text{const}$ и $\psi(x, y) = C_2 = \text{const}$ образуют два семейства координатных линий, отвечающих новым переменным ξ и η . Кроме того, условие (3.17) является достаточным для существования преобразования $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, обратного к (3.16).

Преобразуя производные к новым переменным, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Подставляя значения производных из (3.18) в (3.14), приходим к уравнению

$$\overline{A} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\overline{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \overline{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \overline{F}(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0, \quad (3.19)$$

где коэффициенты $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{C}$, зависящие от ξ и η , определяются формулами

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2, \quad \overline{C} = A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2, \\ \overline{B} &= A \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Явное выражение $\overline{F}$ нас не интересует.

Попробуем выбрать функции φ и ψ в (3.16) так, чтобы обратить некоторые из коэффициентов $\overline{A}$, $\overline{C}$, $\overline{B}$ в нуль хотя бы в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \in \Omega$. Ясно, что вопрос об обращении в нуль $\overline{A}$ и $\overline{C}$ эквивалентен вопросу о разрешимости следующего нелинейного дифференциального уравнения первого порядка относительно неизвестной функции z

$$A \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + C \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (3.21)$$

В соответствии с введенным выше предположением коэффициенты A , B и C принадлежат классу C^2 в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и нигде в ней не обращаются одновременно в нуль. Для определенности можно считать, что $A \neq 0$ в этой окрестности. Действительно, в противном случае должно выполняться одно из условий $B \neq 0$ или $C \neq 0$. Если $C \neq 0$, то, меняя местами x и y , получим уравнение, у которого $A \neq 0$. Если же $C \equiv 0$, и, следовательно, $B \neq 0$, то после замены переменных $x' = x + y$ и $y' = x - y$ приходим к уравнению с $A \neq 0$. В дальнейшем будем, более того, считать,

что $A > 0$ в рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0) . В силу условия $A > 0$ уравнение (3.21) можно после умножения на A переписать в виде

$$\left[A \frac{\partial z}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial z}{\partial y} \right] \left[A \frac{\partial z}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial z}{\partial y} \right] = 0.$$

Это уравнение распадается на два уравнения

$$A \frac{\partial z}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (3.22)$$

$$A \frac{\partial z}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \quad (3.23)$$

Следовательно, решения каждого из уравнений (3.22) и (3.23) являются решениями уравнения (3.21). Уравнения (3.22), (3.23) являются линейными уравнениями в частных производных первого порядка. Как показано в § 2, они интегрируются методом характеристик, который сводит нахождение их решений к нахождению решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основываясь на методе характеристик, составим соответствующие уравнениям (3.22), (3.23) системы обыкновенных уравнений для нахождения их характеристик. Они имеют вид

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}}$$

или

$$A dy - (B + \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0, \quad (3.24)$$

$$A dy - (B - \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0. \quad (3.25)$$

В силу результатов п. 2.5 решения уравнений (3.22), (3.23) связаны с решениями уравнений (3.24), (3.25) следующим образом. Пусть

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2 \quad (3.26)$$

– первые интегралы уравнений (3.24) и (3.25). Тогда функции φ , ψ (и только они) являются решениями уравнений (3.22) и (3.23) соответственно, а следовательно, и решениями уравнения (3.21). Заметим, что указанное предложение имеет место, если коэффициенты уравнений (3.24) и (3.25) не обращаются в нуль одновременно. Последнее, очевидно, выполняется в силу условия $A > 0$.

Характеристики уравнений (3.22) и (3.23), определяемые как интегральные кривые обыкновенных дифференциальных уравнений (3.24) и (3.25) соответственно, мы будем называть также *характеристиками исходного*

уравнения (3.14), а уравнения (3.24), (3.25) – уравнениями характеристик уравнения (3.14). Позже в § 4 мы введем строгое определение характеристики общего уравнения 2-го порядка в пространстве n измерений, из которого в качестве частного случая будет вытекать приведенное здесь определение характеристик уравнения (3.14). Отметим, что уравнения (3.24), (3.25) могут быть записаны формально в виде одного легко запоминающегося уравнения характеристик

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0. \quad (3.27)$$

Поведение интегралов уравнений (3.24), (3.25), а следовательно, и искомый простейший вид уравнения (3.14) зависит от знака величины $\Delta \equiv B^2 - AC$. Нетрудно проверить, что

$$\overline{B}^2 - \overline{A} \overline{C} = (B^2 - AC) \left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right]^2. \quad (3.28)$$

Следовательно, знак Δ не меняется при преобразованиях независимых переменных, удовлетворяющих условию (3.17).

Вернемся теперь к нашей задаче упрощения уравнения (3.14), причем каждый тип будем изучать в отдельности.

1. $\Delta = B^2 - AC > 0$ в Ω : уравнение (3.14) имеет *гиперболический тип*. Выберем в качестве искомых функций φ и ψ в (3.16) решения задач Коши для уравнений (3.22) и (3.23) соответственно при условии, что данные Коши для φ задаются на некоторой линии l_1 , проходящей через точку (x_0, y_0) и нигде не касающейся характеристик уравнения (3.22), тогда как данные Коши для ψ задаются на другой, вообще говоря, линии l_2 , нигде не касающейся характеристик уравнения (3.23). Если линии l_i и заданные на них значения функций φ и ψ выбрать достаточно гладкими, например, из класса C^2 , то с учетом принадлежности коэффициентов A, B и C этому же классу C^2 мы получим в силу теоремы 2.5 решения φ и ψ , имеющие непрерывные производные по x и y до второго порядка включительно. Если предположить, кроме того, что начальные значения функции φ на l_1 и ψ на l_2 выбраны так, что производные от φ по направлению l_1 и от ψ по направлению l_2 не обращаются в нуль в точке (x_0, y_0) , то в этой точке не могут быть равными нулю одновременно обе частные производные функций φ и ψ по x и y (ибо тогда равнялись бы нулю производные в этой точке от φ и ψ по любому направлению). Так как $A \neq 0$, то из уравнений

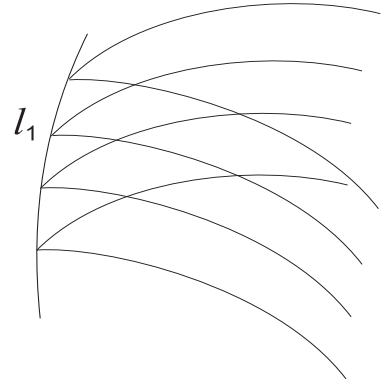


Рис. 3.1

(3.22) и (3.23) тогда следует, что $\partial\varphi/\partial y \neq 0$ и $\partial\psi/\partial y \neq 0$ в окрестности точки (x_0, y_0) и что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \neq \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{\partial\psi}{\partial x} : \frac{\partial\psi}{\partial y}. \quad (3.29)$$

Отсюда следует, что $D \neq 0$ в Ω .

Таким образом, выбранные указанным способом семейства характеристик (3.26) образуют два семейства координатных линий, по крайней мере в окрестности рассматриваемой точки (x_0, y_0) , а переменные ξ и η в (3.16) можно принять за новые координаты. Кроме того, из (3.20) вытекает, что $\overline{A} = \overline{C} \equiv 0$, а из (3.28) следует, что $\overline{B} \neq 0$. Разделив (3.19) на $2\overline{B}$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_1 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \quad (3.30)$$

где $F_1 = -\overline{F}/2\overline{B}$. Это – канонический вид уравнения гиперболического типа.

Существует и другой канонический вид, а именно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \tilde{F}_1 \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right). \quad (3.31)$$

Он получается из (3.30) заменой $\alpha = (\xi - \eta)/2$, $\beta = (\xi + \eta)/2$.

2. $\Delta = B^2 - AC = 0$ в Ω : уравнение (3.14) имеет *параболический тип*. В этом случае оба уравнения (3.22) и (3.23) совпадают и принимают вид

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (3.32)$$

Как и выше, мы можем найти такое решение $\varphi \in C^2$ уравнения (3.32), для которого $\text{grad} \varphi \neq 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . К этой функции φ подберем функцию $\psi \in C^2$ произвольным образом, лишь бы выполнялось условие (3.17). Например, можно взять $\psi(x, y) = x$. Отвечающие такой функции координатные линии совпадают с прямыми $x = \text{const}$. С учетом указанного выбора функций φ и ψ из (3.20) следует, что $\overline{A} \equiv 0$. Кроме того, так как $\Delta \equiv 0$, то из (3.28) вытекает, что $\overline{B} \equiv 0$. Коэффициент $\overline{C}$ преобразуется к виду

$$\overline{C} = \frac{1}{A} \left(A \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2. \quad (3.33)$$

Покажем, что $\overline{C} \neq 0$. Действительно, если $\overline{C} = 0$ в точке $(x_0, y_0) \in \Omega$, то в этой точке имеем

$$A \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (3.34)$$

Рассматривая (3.32) и (3.34) как систему линейных алгебраических уравнений относительно A и B , получим, что $D(\varphi, \psi)/D(x, y) = 0$ в (x_0, y_0) . Это противоречит предположению (3.17). Разделив (3.19) на $\overline{C}$, приходим к следующему каноническому виду уравнения параболического типа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (3.35)$$

Здесь функция F_2 определяется формулой $F_2 = -\overline{F}/\overline{C}$.

3. $\Delta = B^2 - AC < 0$ в Ω : уравнение (3.14) имеет *эллиптический тип*. В этом случае коэффициенты уравнений (3.24), (3.25) и их первые интегралы (3.26) являются комплексными величинами. Если предположить, что коэффициенты A, B и C – аналитические функции от x, y в окрестности точки $(x_0, y_0) \in \Omega$, то коэффициенты уравнений (3.22) и (3.23) также являются аналитическими функциями от x и y . Тогда можно показать, что в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \in \Omega$ существует аналитическое решение z уравнения (3.22), у которого в этой окрестности производные $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$ не обращаются одновременно в нуль. При этом комплексно-сопряженная к z функция z^* удовлетворяет уравнению (3.23).

Чтобы доказать существование аналитического решения уравнения (3.22), перепишем уравнение (3.22) после деления на A в виде

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{A}(B + \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial z}{\partial y}, \quad (3.36)$$

разрешенном относительно $\partial z/\partial x$, и зададим начальные значения функции z на некотором отрезке $x = x_0$, проходящем через точку (x_0, y_0) , в виде аналитической функции z_0 переменной y . В таком случае указанный факт вытекает из теоремы Ковалевской, примененной к задаче Коши для уравнения 1-го порядка (3.36), нормального относительно переменной x (см. п. 1.4). Если к тому же начальную функцию z_0 выбрать так, что $dz_0/dy \neq 0$, то в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) будет выполняться условие $\partial z/\partial y \neq 0$. Введем далее вещественные функции φ и ψ по формулам $\varphi = (z + z^*)/2$, $\psi = (z - z^*)/2i$. Ясно, что $\varphi, \psi \in C^\infty$, причем якобиан $D(\varphi, \psi)/D(x, y)$ отличен от нуля, ибо

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(z, z^*)} \frac{D(z, z^*)}{D(x, y)} = \frac{1}{2i} 2 \frac{\sqrt{\Delta}}{A} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z^*}{\partial y} = -\frac{\sqrt{-\Delta}}{A} \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right|^2 \neq 0.$$

С учетом этого функции φ и ψ можно выбрать в качестве искомым в (3.16).

Осталось выяснить, какой вид примет уравнение (3.14) в этих переменных. С этой целью заметим, что по построению функция $z = \varphi + i\psi$ является решением уравнения (3.21), так что

$$A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + 2B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \equiv 0.$$

Разделяя в этом тождестве вещественную и мнимую части, получим

$$A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2,$$

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Отсюда в силу (3.20) следует, что $\overline{B} = 0$, $\overline{A} = \overline{C}$, а из (3.28) и (3.17) следует, что $\overline{A} \neq 0$. Разделив уравнение (3.19) на $\overline{A}$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_3(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}), \quad (3.37)$$

где $F_3 = -\overline{F} \setminus \overline{A}$. Это – канонический вид уравнения эллиптического типа. Итак, предположив, что A , B и C – аналитические функции точек (x, y) , мы привели исходное уравнение (3.14) к каноническому виду (3.37) в окрестности некоторой точки (x_0, y_0) , в которой существуют аналитические решения уравнений (3.22), (3.23) с отличными от нуля производными по переменной y . Используя более сложные рассуждения, можно показать, что такое приведение возможно без предположения об аналитичности коэффициентов A , B и C , но при условии, что A , B и $C \in C^2$ (см. [11, с. 66]).

§4. Постановка задачи Коши. Характеристики уравнения второго порядка

4.1. Постановка задачи Коши. Характеристическая поверхность.

Рассмотрим уравнение в частных производных второго порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f(x_1, \dots, x_n, u, \nabla u) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь коэффициенты a_{ij} – заданные вещественные функции координат $x_1, x_2, \dots, x_n$ точки x , изменяющейся в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f – заданная вещественная функция своих аргументов, причем предполагается, что $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Пусть в области Ω задана гладкая $(n-1)$ – мерная поверхность S (рис. 4.1), и в каждой точке S задано векторное поле направлений $\mathbf{l}$, некасательное к S и гладко изменяющееся при движении вдоль S . В качестве такого поля можно взять, например, поле нормалей $\mathbf{n}$ к поверхности S .

На поверхности S зададим значения функции u и ее производной $\partial u / \partial l$:

$$u|_S = \varphi_0(x), \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_S = \varphi_1(x). \quad (4.3)$$

Будем ссылаться на (4.2), (4.3) как на *условия Коши*, а на функции φ_0, φ_1 в (4.2), (4.3) как на *данные Коши*, либо *начальные функции*. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (4.1). Она заключается в *нахождении в некоторой окрестности поверхности S решения уравнения (4.1), удовлетворяющего условиям Коши (4.2), (4.3)*.

Очевидно, что данные Коши определяют функцию u и все ее частные производные 1-го порядка на поверхности S . Предположим теперь, что уравнение (4.1) выполняется в каждой точке $x \in S$, причем все коэффициенты и решение u уравнения (4.1) бесконечно дифференцируемы в окрестности поверхности S . Ясно, что если u – искомое решение задачи Коши (4.1)–(4.3) в некоторой окрестности поверхности S , то в этой окрестности так же, как на самой поверхности S , можно найти производные от u любого порядка. При этом производные второго порядка $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ необходимо удовлетворяют уравнению (4.1). Другими словами уравнение (4.1) играет роль *необходимого условия совместности* указанных производных второго порядка. Если, далее, уравнение (4.1) продифференцировать один или несколько раз, то полученное уравнение на S будет играть роль необходимого условия совместности для производных более высокого порядка. С учетом приведенного анализа сформулируем теперь следующую вспомогательную задачу: *с помощью уравнения (4.1) и условий Коши (4.2), (4.3) однозначно определить на поверхности S все производные второго и более высокого порядков от искомого решения u .*

Рассмотрим сначала случай, когда условия Коши имеют вид

$$u|_{x_1=x_1^0} = \varphi_0(x_2, \dots, x_n), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|_{x_1=x_1^0} = \varphi_1(x_2, \dots, x_n), \quad (4.4)$$

т. е. когда данные Коши заданы на гиперплоскости $x_1 = x_1^0$, а в качестве поля $\mathbf{l}$ выбрано поле нормалей $\mathbf{n}$ к этой гиперплоскости, направленное по оси x_1 . Условия (4.4), очевидно, позволяют определить при $x_1 = x_1^0$ (с помощью дифференцирования функции φ_0 или φ_1) все производные первого порядка и все производные второго порядка, кроме $\partial^2 u / \partial x_1^2$. Чтобы определить $\partial^2 u / \partial x_1^2$, необходимо воспользоваться самим уравнением (4.1), положив в нем $x_1 = x_1^0$. На этом пути возможны два случая: 1) $a_{11}(x_1^0, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, 2) $a_{11}(x_1^0, x_2, \dots, x_n) = 0$.

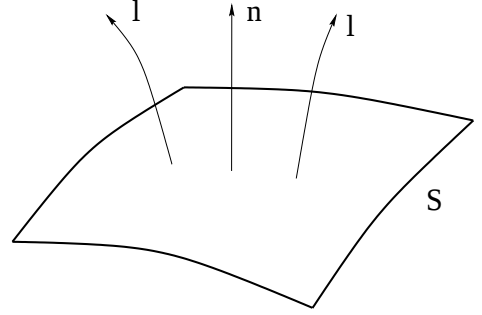


Рис. 4.1.

В первом случае мы однозначно определим вторую производную $\partial^2 u / \partial x_1^2$ на гиперплоскости $x_1 = x_1^0$, а также производные более высоких порядков путем дифференцирования уравнения (4.1) и условий (4.4). Во втором случае мы придем к невозможному равенству или получим тождество относительно $\partial^2 u / \partial x_1^2$, т. е. придем к несовместности или неопределенности при нахождении производных второго, а также более высокого порядка на гиперплоскости $x_1 = x_1^0$. Это означает, что в последнем случае поставленная выше вспомогательная задача нахождения всех производных от решения u на гиперплоскости $x_1 = x_1^0$ либо неразрешима, либо имеет много решений.

Рассмотрим теперь общий случай, когда условия Коши (4.2), (4.3), где поле $\mathbf{l}$ совпадает для конкретности с полем нормалей $\mathbf{n}$, заданы на некоторой поверхности S , описываемой уравнением

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) = 0, \quad \nabla \psi(x) \neq 0\}. \quad (4.5)$$

В окрестности поверхности S введем новые координаты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, полагая

$$\xi_i = \psi_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.6)$$

где $\psi_1 = \psi$, а функции $\psi_2, \dots, \psi_n$ выберем так, чтобы якобиан преобразования (4.6) был отличен от нуля на S . Производные от u по x_i выразятся через производные по ξ_i по следующим формулам:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_l} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{l,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_l \partial \xi_k} \frac{\partial \psi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_l} \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Подставляя эти выражения в (4.1), приходим к следующему уравнению для u в новых переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$:

$$a(x, \nabla \psi(x)) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial \xi_1^2} = G \left(x, u(x), \nabla u(x), \frac{\partial^2 u(x)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right), \quad i + j > 2. \quad (4.7)$$

Здесь G – известная функция своих аргументов, зависящая от x , u , ∇u и всех вторых производных $\partial^2 u / \partial \xi_i \partial \xi_j$, кроме производной $\partial^2 u / \partial \xi_1^2$, а коэффициент a в (4.7) определяется формулой

$$a(x, \nabla \psi(x)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j}. \quad (4.8)$$

Из (4.5) и (4.6) вытекает, что условия (4.2), (4.3) при $\mathbf{l} = \mathbf{n}$ переходят при преобразовании (4.6) в условия Коши

$$u|_{\xi_1=0} = \tilde{\varphi}_0(\xi_2, \dots, \xi_n), \quad \frac{\partial u}{\partial \xi_1}|_{\xi_1=0} = \tilde{\varphi}_1(\xi_2, \dots, \xi_n)$$

для уравнения (4.7), заданные на гиперплоскости $\xi_1 = 0$ и имеющие рассмотренный выше специальный вид. Другими словами, замена (4.6) как бы “выпрямляет” поверхность S (в окрестности точки $x_0 \in S$), переводя ее в участок гиперплоскости $\xi_1 = 0$. В таком случае из предыдущего анализа следует, что для того, чтобы условия Коши на поверхности S приводили к несовместности или неопределенности при нахождении производных второго порядка на S , необходимо и достаточно, чтобы функция ψ в (4.5) удовлетворяла условию

$$a(x, \nabla\psi(x)) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{на } S. \quad (4.9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Поверхность S в $\mathbb{R}^n$, описываемая уравнением (4.5), называется *характеристической* для уравнения (4.1), а соответствующее направление нормали $\nabla\psi(x_0)$ называется *характеристическим*, в точке $x_0 \in S$, если

$$a(x_0, \nabla\psi(x_0)) = 0, \quad (4.10)$$

и *нехарактеристической*, если

$$a(x_0, \nabla\psi(x_0)) \neq 0. \quad (4.11)$$

Поверхность S называется *характеристической поверхностью* (или *характеристикой*) для уравнения (4.1), если

$$a(x, \nabla\psi(x)) = 0 \quad \forall x \in S. \quad (4.12)$$

Если при этом для некоторого $j \leq n$ $(\partial/\partial x_j) a(x, \nabla\psi(x)) \neq 0 \quad \forall x \in S$, то характеристика называется *простой*. В противном случае она называется *кратной*. Поверхность S , не имеющая характеристического направления нормали ни в одной точке $x \in S$, называется *нехарактеристической* или *свободной поверхностью* для уравнения (4.1).

Свободная поверхность S называется *пространственно ориентированной* (или *пространственно подобной*) поверхностью, если

$$a(x, \nabla\psi(x)) > 0 \quad \forall x \in S, \quad (4.13)$$

и *временным образом ориентированной* (или *временно подобной*) поверхностью, если

$$a(x, \nabla\psi(x)) < 0 \quad \forall x \in S. \quad (4.14)$$

В соответствии с определением 4.1 рассмотрим два случая.

1. Поверхность S является нехарактеристической в точке x_0 . В этом случае в окрестности точки x_0 уравнение (4.7) можно записать в так называемой нормальной форме

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial \xi_1^2} = \Phi \left(x, u(x), \nabla u(x), \frac{\partial^2 u(x)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right), \quad i + j > 2. \quad (4.15)$$

Здесь $\Phi = G/a$, а функция G определена в (4.7). Основываясь на этом, можно доказать существование и единственность аналитического решения задачи Коши в окрестности точки x_0 . Этот результат составляет содержание теоремы Ковалевской. В применении к задаче (4.1)-(4.3) она имеет вид (ср. с ее формулировкой для нормальных систем в §1): *если S – аналитическая поверхность в окрестности своей точки x_0 , коэффициенты a_{ij} , правая часть f уравнения (4.1) и данные Коши φ_0 и φ_1 в (4.2), (4.3) аналитичны в этой окрестности, и выполнено условие (4.11), то в некоторой окрестности точки x_0 существует аналитическое решение и задачи Коши (4.1)-(4.3), которое в классе аналитических функций единственно.*

Отметим, что указанная теорема носит универсальный характер, поскольку, с одной стороны, она применима к любому уравнению в частных производных с аналитическими коэффициентами независимо от их типа (гиперболического, параболического и т. д.), а с другой стороны, она применима к уравнениям не только второго, но и старших порядков. Правда, как уже указывалось в §1, эта теорема носит *локальный* характер в том смысле, что она дает существование решения лишь “в малом”, т. е. в достаточно малой окрестности точки x_0 .

2. Поверхность S является характеристической в точке x_0 . В этом случае уравнение (4.7) в самой точке x_0 сводится к соотношению

$$a(x_0, \nabla \psi(x_0)) \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial \xi_1^2} = 0 = G \left(x_0, u(x_0), \nabla u(x_0), \frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \right), \quad i + j > 2. \quad (4.16)$$

Указанное соотношение представляет собой ограничение на данные Коши в (4.2), (4.3). При этом возможны два варианта:

а) Данные Коши в (4.2), (4.3) таковы, что (при $\mathbf{l} = \mathbf{n}$) выполняется второе равенство в (4.16). Отсюда следует, что исходное уравнение (4.1) выполняется в точке x_0 , причем в качестве второй производной $\partial^2 u / \partial \xi_1^2$ в этой точке можно взять любое число. Последнее означает, что имеет место неединственность решения. Следовательно, условий Коши (4.2), (4.3) не достаточно для однозначного определения решения в точке x_0 .

б) Данные Коши в (4.2), (4.3) (при $\mathbf{l} = \mathbf{n}$) не удовлетворяют второму равенству в (4.16). В этом случае уравнение (4.1) не может быть удовлетворено в точке x_0 , так что условия Коши (4.2), (4.3) переопределяют рассматриваемую задачу Коши (4.1)-(4.3).

Уравнение (4.9) называется уравнением *характеристик* или *характеристическим уравнением* для уравнения (4.1). Подчеркнем, что хотя (4.9) формально имеет вид уравнения в частных производных первого порядка относительно ψ , оно по своему определению им не является. Действительно, уравнение (4.9) должно выполняться не тождественно относительно $x_1, \dots, x_n$, а только для точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющих условию $\psi(x) = 0$, т.е. лежащих на искомой характеристической поверхности.

Потребуем теперь дополнительно, чтобы уравнение (4.9) выполнялось не только на поверхности S (т. е. при $\psi(x) = 0$), но и тождественно относительно $x_1, \dots, x_n$. Тогда получим нелинейное уравнение в частных производных 1-го порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0, \quad (4.17)$$

а из его вида вытекает, что всякое решение ψ уравнения (4.17), отличное от константы, будет давать целое семейство характеристик

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = C, \quad (4.18)$$

где C – произвольная константа.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Справедливо и обратное, а именно: для того, чтобы соотношение (4.18) определяло семейство характеристик, зависящих от произвольной постоянной C , необходимо и достаточно, чтобы функция ψ удовлетворяла уравнению (4.17). Более того, можно показать [21, с. 111], что всякую характеристику уравнения (4.1) можно включить в семейство вида (4.18). Отсюда следует, что все возможные решения уравнения (4.17) определяют все характеристические поверхности.

4.2. Примеры нахождения характеристик. В этом пункте мы займемся нахождением характеристических поверхностей для трех основных типов уравнений математической физики и некоторых их нелинейных аналогов.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t) \quad (4.19)$$

на плоскости $\mathbb{R}^2$ изменения переменных x, y и вещественной оси $\mathbb{R}_t^1$ изменения времени t . Это уравнение можно записать в виде (4.1), если положить

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = t, \quad a_{11} = a_{22} = -a^2, \quad a_{33} = 1, \quad a_{ij} = 0, \quad \text{при } i \neq j. \quad (4.20)$$

Мы уже знаем, что волновое уравнение (4.19) имеет гиперболический тип в каждой точке $(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t^1$. Найдем теперь его характеристики.

Подставляя (4.20) в (4.17), приходим к следующему характеристическому уравнению для уравнения (4.19):

$$a \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - a^2 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{на} \quad S. \quad (4.21)$$

Пусть $(x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_t^1$ – произвольная точка. Рассмотрим поверхность

$$S = \{ (x, y, t) : \psi(x, y, t) \equiv a^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0 \}, \quad (4.22)$$

являющуюся границей двух конусов с вершинами в точке (x_0, y_0, t_0) : верхнего

$$K^+(x_0, y_0, t_0) = \left\{ (x, y, t) : a(t - t_0) > \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right\} \quad (4.23)$$

и нижнего

$$K^-(x_0, y_0, t_0) = \left\{ (x, y, t) : -a(t - t_0) > \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right\}, \quad (4.24)$$

называемых соответственно *конусами будущего и прошлого* (см. рис. 4.2а).

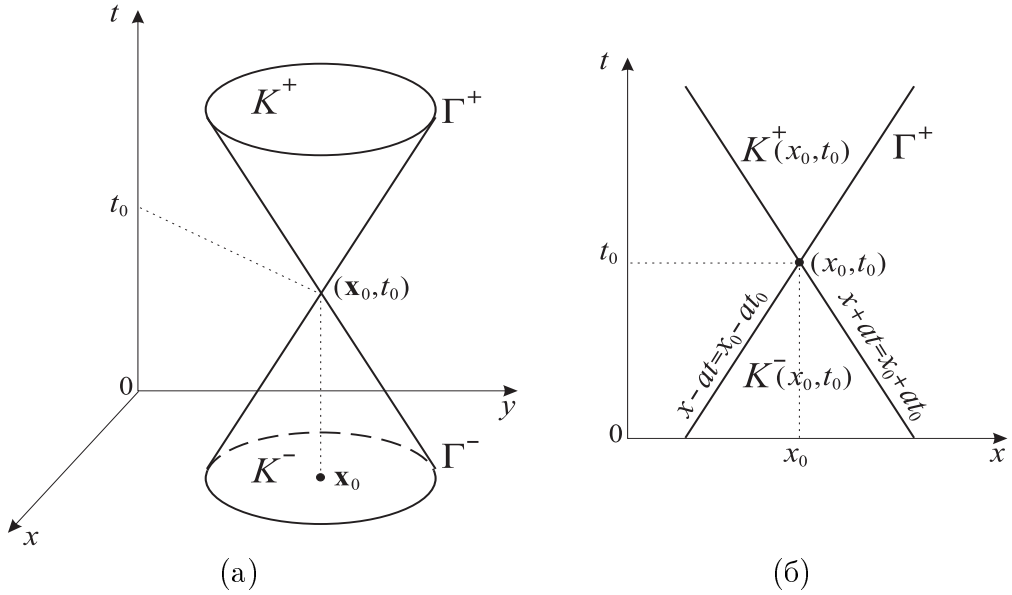


Рис. 4.2

Легко проверить, что функция ψ в (4.22) удовлетворяет уравнению (4.21) в любой точке (x, y, t) , принадлежащей поверхности $S \equiv \Gamma^+(x_0, y_0, t_0) \cup \Gamma^-(x_0, y_0, t_0)$, где $\Gamma^\pm(x_0, y_0, t_0) = \partial K^\pm(x_0, y_0, t_0)$. Действительно, так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = 2a^2(t - t_0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -2(x - x_0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -2(y - y_0), \quad (4.25)$$

то

$$a \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = 4a^2 [a^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2]. \quad (4.26)$$

Отсюда и (4.22) следует, что

$$a \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \equiv 0 \quad \text{на} \quad S \equiv \Gamma^+(x_0, y_0, t_0) \cup \Gamma^-(x_0, y_0, t_0). \quad (4.27)$$

Это означает, что поверхность S , определяемая уравнением (4.22), для любой точки (x_0, y_0, t_0) является характеристической. Ниже будем ссылаться на нее как на *характеристический конус с вершиной в точке (x_0, y_0, t_0)* , причем верхнюю ее часть $\Gamma^+(x_0, y_0, t_0)$ будем называть *характеристическим конусом будущего*, а нижнюю часть $\Gamma^-(x_0, y_0, t_0)$ — *характеристическим конусом прошлого*.

Отметим, что поверхность S , описываемая уравнением

$$S = \{(x, y, z) : \psi(x, y, t) \equiv a^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = \text{const} \neq 0\},$$

не удовлетворяет (4.21). Следовательно, она не является характеристической.

Аналогичные выводы справедливы и для n -мерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x, t), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.28)$$

рассматриваемого в $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t^1$, для которого отвечающее ему характеристическое уравнение имеет вид

$$a \left(\nabla \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 = 0 \quad \text{на} \quad S. \quad (4.29)$$

Рассмотрим поверхность вида

$$S = \{(x, t) : \psi(x, t) \equiv a^2(t - t_0)^2 - |x - x_0|^2 = 0\}, \quad (4.30)$$

где $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, представляющую собой границу двух конусов (точнее гиперконусов) с вершинами в точке (x_0, t_0) : верхнего

$$K^+(x_0, t_0) = \{(x, t) : a(t - t_0) > |x - x_0|\} \quad (4.31)$$

и нижнего

$$K^-(x_0, t_0) = \{(x, t) : -a(t - t_0) > |x - x_0|\}, \quad (4.32)$$

называемых соответственно *конусами будущего и прошлого*. Здесь $|x - x_0| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}$.

Рассуждая, как и выше, легко показываем, что для любой точки $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t^1$ функция ψ в (4.30) удовлетворяет уравнению (4.29). Это означает, что для любой точки (x_0, t_0) поверхность S , определяемая уравнением (4.30), является характеристической поверхностью. Ее называют *характеристическим конусом с вершиной в точке (x_0, t_0)* , причем верхнюю ее часть $\Gamma^+(x_0, t_0)$ называют *характеристическим конусом будущего*, а нижнюю часть $\Gamma^-(x_0, t_0)$ — *характеристическим конусом прошлого*. Кроме построенного семейства характеристических поверхностей (конусов), волновое уравнение (4.28) имеет и другое семейство характеристических поверхностей, а именно: семейство касательных плоскостей к характеристическим конусам (4.31) и (4.32). Уравнение второго семейства характеристик имеет вид

$$at + (b, x) \equiv at + \sum_{i=1}^n b_i x_i = C. \quad (4.33)$$

Здесь $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, b_i и C — любые вещественные числа, причем $|b| = 1$.

В частном случае $n = 1$ (4.28) переходит в одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (4.34)$$

на плоскости $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_t^1$, а его характеристическое уравнение имеет вид

$$a \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 = 0. \quad (4.35)$$

Записав указанное уравнение в виде $(\partial \psi / \partial t + a \partial \psi / \partial x)(\partial \psi / \partial t - a \partial \psi / \partial x) = 0$, приходим к выводу, что функция ψ является решением уравнения (4.35) тогда, когда ψ удовлетворяет одному из уравнений

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + a \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} - a \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (4.36)$$

Из результатов п. 2.1 следует, что решение первого (либо второго) уравнения в (4.36) сохраняет постоянное значение на характеристиках

$$\psi_1(x, t) \equiv x - at - C_1 = 0 \quad \text{либо} \quad \psi_2(x, t) \equiv x + at - C_2 = 0, \quad (4.37)$$

описывающих соответствующие прямые на плоскости x, t (см. рис. 2.4б). Здесь C_1 и C_2 — произвольные константы. Отсюда и замечания 4.1 приходим к выводу, что указанные прямые (4.37) и представляют собой два искомого семейства характеристик уравнения (4.34). При этом через любую точку $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}_x^1 \times \mathbb{R}_t^1$ проходят две характеристики, определяемые

уравнениями $x - at = x_0 - at_0$ и $x + at = x_0 + at_0$. Указанные прямые являются границами двумерного конуса $K(x_0, t_0) = K^+(x_0, t_0) \cup K^-(x_0, t_0)$, изображенного на рис.4.2б.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Все, что говорилось выше о характеристиках для n – мерного волнового уравнения (4.28), остается справедливым и для n – мерного квазилинейного уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = F\left(x, t, u, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial t}\right). \quad (4.38)$$

Здесь F – заданная функция своих аргументов. Другими словами, уравнение (4.38) так же, как и (4.28), имеет гиперболический тип в каждой точке $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t^n$, а его характеристиками являются характеристические конусы $\Gamma^+(x_0, t_0)$ и $\Gamma^-(x_0, t_0)$ так же, как и гиперплоскости (4.33).

Однако в случае более общего квазилинейного уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, t, u, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial t}), \quad (4.39)$$

гиперболического при выполнении (1.22), его характеристическое уравнение имеет вид нелинейного уравнения с переменными коэффициентами

$$a(x, t, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial t}, \nabla \psi) \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0. \quad (4.40)$$

Поэтому нахождение характеристик уравнения (4.39) в явном виде возможно лишь в исключительных случаях, хотя можно строго показать, что через каждую точку (x_0, t_0) проходят две характеристики уравнения (4.39).

То же самое справедливо и для одномерного аналога

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}) \quad (4.41)$$

уравнения (4.39). Условием его гиперболичности в точке (x, t) (либо в области $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_t$) является условие $a(x, t) > 0$ ($a(x, t) > 0 \forall (x, t) \in D$), а характеристическое уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - a^2(x, t) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 = 0. \quad (4.42)$$

Записав его в виде $[\partial \psi / \partial t + a(x, t) \partial \psi / \partial x][\partial \psi / \partial t - a(x, t) \partial \psi / \partial x] = 0$, приходим с учетом замечания 4.1 к выводу, что уравнение (4.41) имеет два семейства характеристик $\psi_1(x, t) = C_1$ и $\psi_2(x, t) = C_2$. Здесь C_1 и C_2 –

произвольные константы, а функции ψ_1 и ψ_2 являются решениями следующих двух уравнений в частных производных 1-го порядка

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial \psi_2}{\partial t} - a(x, t) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0. \quad (4.43)$$

Из результатов п.2.4 и 2.5 вытекает, что нахождение решений каждого из уравнений 1-го порядка в (4.43) сводится к определению характеристик данного уравнения. Последние определяются как интегральные кривые следующих задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t), \quad x|_{t=0} = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = -a(x, t), \quad x|_{t=t_0} = x_0. \quad (4.44)$$

При этом функция ψ_i является решением i -го уравнения в (4.43) тогда и только тогда, когда соотношение $\psi_i(x, t) = C_i$ определяет первый интеграл соответствующего уравнения в (4.44), $i = 1, 2$.

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно [51], что в случае, когда функция a непрерывна по t и дифференцируема по x , через каждую точку (x_0, t_0) рассматриваемой области проходит единственная интегральная кривая первой задачи Коши в (4.44), определяющая характеристику первого уравнения в (4.43), и единственная интегральная кривая второй задачи Коши в (4.44), определяющая характеристику второго уравнения в (4.43). Указанные характеристики по построению образуют два искоемых семейства характеристик для исходного квазилинейного уравнения (4.41).

ПРИМЕР 2. Рассмотрим n – мерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f \quad (4.45)$$

в пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t^1$. Его характеристическое уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 = 0. \quad (4.46)$$

Поскольку решениями уравнения (4.45) в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_t^1$ являются функции $\psi(x, t) = t - \text{const}$, то единственными характеристиками уравнения теплопроводности (4.45) являются гиперплоскости $t = \text{const}$.

Аналогичные утверждения справедливы и для n – мерного квазилинейного параболического уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = F \left(x, t, u, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (4.47)$$

а также более общего квазилинейного уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, t, u, \nabla u, \frac{\partial u}{\partial t}), \quad (4.48)$$

параболического при выполнении условия (1.22). Действительно, его характеристическое уравнение имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0. \quad (4.49)$$

Ясно, что при выполнении (1.22) единственным решением уравнения (4.49) является функция $\psi(x, t) = t - \text{const}$. Отсюда следует, что уравнение (4.48), как и (4.45), при выполнении условия (1.22) имеют своими характеристиками гиперплоскости $t = \text{const}$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение Пуассона

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -f. \quad (4.50)$$

Его характеристическое уравнение по-прежнему имеет вид (4.46), однако, в отличие от уравнения теплопроводности (4.45), его следует рассматривать в пространстве $\mathbb{R}^n$. С учетом этого приходим к выводу, что уравнение (4.50) не имеет вещественных характеристик. Подчеркнем, что речь идет о вещественных характеристиках уравнения (4.50), определяемых через вещественные решения уравнения (4.46). Можно показать, что в поле комплексных чисел уравнение (4.46) имеет два семейства “мнимых” решений, которым отвечает два семейства мнимых характеристик уравнения (4.50).

Аналогичный факт справедлив и для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = -f,$$

рассматриваемого в пространстве $\mathbb{R}^n$, а также для произвольного квазилинейного эллиптического уравнения $\Delta u = f(x, u, \nabla u)$, главная часть которого совпадает с оператором Лапласа, и, кроме того, для более общего эллиптического уравнения вида

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x, u, \nabla u)$$

при условии, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ удовлетворяют условию эллиптичности (1.18).

ГЛАВА 3. Уравнения гиперболического типа и волновые процессы в пространстве

§1. Одномерное волновое уравнение (уравнение колебания струны). Формула Даламбера

1.1. Неограниченная струна. Формула Даламбера. Обозначим через $\mathbb{R}_x$ (либо $\mathbb{R}_t$) вещественную ось, на которой изменяется пространственная переменная x (либо временная переменная t). Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$ переменных x и t одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \text{const}, \quad (1.1)$$

моделирующее, например, процесс свободных колебаний бесконечной однородной струны. *Решением* уравнения (1.1) в некоторой области Q плоскости $\mathbb{R}^2$ назовем функцию $u : Q \rightarrow \mathbb{R}$, имеющую в Q вторые производные $\partial^2 u / \partial t^2$ и $\partial^2 u / \partial x^2$, удовлетворяющие в каждой точке $(x, t) \in Q$ уравнению (1.1). Если к тому же функция u непрерывна в Q вместе со всеми производными до второго порядка включительно (этот факт схематически записывается в виде: $u \in C^2(Q)$), то указанную функцию u будем называть *классическим решением* уравнения (1.1) в области Q .

Поставим в этом пункте своей целью вывести явную формулу для классического решения уравнения (1.1). С этой целью, предполагая, что решение $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ уравнения (1.1) существует, введем новые независимые переменные ξ и η и зависимую переменную U по формулам

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at, \quad U(\xi, \eta) = u(x, t). \quad (1.2)$$

В новых переменных уравнение (1.1) примет вид $\partial^2 U / \partial \xi \partial \eta = 0$. Переписав его в виде $\partial / \partial \eta (\partial U / \partial \xi) = 0$ и интегрируя по переменной η , получаем, что $\partial U / \partial \xi = \omega(\xi)$, где ω – произвольная функция от ξ . Интегрируя это уравнение по ξ , рассматривая η как параметр, выводим, что $U(\xi, \eta) = \int \omega(\xi) d\xi + \theta_2(\eta)$, где θ_2 – произвольная функция от η . Полагая далее $\int \omega(\xi) d\xi = \theta_1(\xi)$, получим $U(\xi, \eta) = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta)$. Возвращаясь к старым переменным x, t , будем иметь

$$u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at). \quad (1.3)$$

Итак, предположив, что классическое решение u уравнения (1.1) существует, мы доказали, что оно необходимо представляется формулой (1.3). Нетрудно проверить, что справедливо и обратное, а именно: функция u , определяемая формулой (1.3), есть классическое решение уравнения (1.1),

если θ_1 и θ_2 – произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Сформулируем полученные результаты в виде леммы.

ЛЕММА 1.1. *Функция $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ является решением волнового уравнения (1.1) на плоскости $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда в каждой точке $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ справедливо представление (1.3), где $\theta_1 \in C^2(\mathbb{R})$ и $\theta_2 \in C^2(\mathbb{R})$ – произвольные функции одной переменной.*

Решение (либо формула) (1.3) называется *решением (либо формулой) Даламбера* в честь известного французского математика, механика и философа J.L. D’Alembert (1717–1783).

Выясним физический смысл решения Даламбера. Рассмотрим сначала частный случай, когда $\theta_2 = 0$, т. е. когда решение (1.3), описывающее отклонение струны от положения равновесия, имеет вид

$$u_1(x, t) = \theta_1(x - at). \quad (1.4)$$

Пусть наблюдатель (студент), выйдя в начальный момент времени $t = 0$ из точки $x = c$ струны движется в положительном направлении оси x со скоростью a , т. е. его абсцисса меняется по закону $x = c + at$ (или $x - at = c$). Тогда для него смещение струны, определяемое формулой (1.4), будет оставаться все время постоянным и равным $\theta_1(c)$. Другими словами, в процессе своего движения он будет все время видеть тот же профиль, что и в начальной момент. Это означает, что функция u_1 в (1.4) описывает перемещение профиля θ_1 вправо (в положительном направлении) со скоростью a . Физики в таком случае говорят, что по струне бежит (или распространяется) вправо волна с *профилем* θ_1 и *скоростью* a . Таким образом, функция u_1 описывает *бегущую* (или *распространяющуюся*) вправо волну с профилем θ_1 и скоростью a . Точно так же функция u_2 , определяемая формулой

$$u_2(x, t) = \theta_2(x + at), \quad (1.5)$$

описывает волну, *распространяющуюся влево* с той же скоростью a и профилем θ_2 . Для простоты ниже мы будем также ссылаться на функции $u_1 \equiv \theta_1(x - at)$ и $u_2 \equiv \theta_2(x + at)$ как на *прямую* и *обратную* волны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Строго говоря, $\theta_1(x - at)$ является не функцией, а значением функции $\theta_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x - at$, либо значением функции двух аргументов $u_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ в точке (x, t) . Однако, следуя устоявшейся физической традиции, мы часто будем ссылаться на выражение $\theta_1(x - at)$ как на соответствующую функцию. Это же правило будет относиться и к $\theta_2(x + at)$, а также к другим аналогичным выражениям.

На основании вышесказанного можно сделать вывод о том, что решение (1.3) уравнения (1.1) представляет собой *сумму* или *суперпозицию* прямой и обратной распространяющихся волн. Это приводит к следующему графическому способу построения формы струны в любой момент времени t .

Строим кривые

$$u_1 = \theta_1(x), \quad u_2 = \theta_2(x), \quad (1.6)$$

описывающие профили прямой и обратной волн в начальный момент времени $t = 0$, и затем передвигаем их одновременно без изменения формы на расстояние at в разные стороны: кривую $\theta_1(x)$ – вправо, а кривую $\theta_2(x)$ – влево. Чтобы получить теперь график струны в указанный момент t , достаточно построить алгебраические суммы ординат сдвинутых кривых.

Формула (1.3) позволяет выявить ряд важных свойств решения волнового уравнения (1.1). Для анализа указанных свойств удобно воспользоваться плоскостью $\mathbb{R}^2$, которую называют плоскостью состояний или “фазовой плоскостью”. Прежде всего напомним (см. гл. 2), что прямые

$$x - at = \text{const} \quad \text{и} \quad x + at = \text{const} \quad (1.7)$$

являются *характеристиками* уравнения (1.1) соответственно первого либо второго семейства. Из приведенных выше результатов следует, что функция (1.4) сохраняет постоянное значение вдоль характеристики $x - at = \text{const}$, тогда как функция (1.5) остается постоянной вдоль характеристики $x + at = \text{const}$.

Предположим, что $\theta_1(x)$ отлична от нуля в каждой точке интервала (x_1, x_2) оси x и равна нулю вне этого интервала. Такую функцию θ_1 называют *финитной с носителем* $\text{supp} \theta_1$, сосредоточенным в интервале (x_1, x_2) . Проведем через точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ характеристики первого семейства

$$\Gamma'_1 = \{(x, t) : t > 0, x - at = x_1\} \text{ и } \Gamma''_1 = \{(x, t) : t > 0, x - at = x_2\}. \quad (1.8)$$

Они разбивают замкнутую полуплоскость $\overline{\mathbb{R}^2_+}$, где

$$\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{t,+} \equiv \{(x, t) : -\infty < x < \infty, t > 0\},$$

на пять непересекающихся множеств: Q' , Γ'_1 , Q , Γ''_1 и Q'' (см. рис. 1.1а), где $Q' = \{(x, t) : x - at < x_1\}$, $Q = \{(x, t) : x_1 < x - at < x_2\}$, $Q'' = \{(x, t) : x_2 < x - at\}$. Таким образом, справедливо представление

$$\overline{\mathbb{R}^2_+} \equiv \mathbb{R}_x \times \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\} = Q' \cup \Gamma'_1 \cup Q \cup \Gamma''_1 \cup Q''. \quad (1.9)$$

Указанному представлению соответствует следующее разбиение прямой $\mathbb{R}$ в каждый момент времени $t \geq 0$:

$$\mathbb{R} = D'(t) \cup S'(t) \cup D(t) \cup S''(t) \cup D''(t).$$

Здесь $D'(t)$, $S'(t)$, $D(t)$, $S''(t)$ и $D''(t)$ суть сечения в момент времени t соответственно областей Q' , Γ'_1 , Q , Γ''_1 и Q'' в (1.9).

Из финитности функции θ_1 и (1.4) следует, что функция u_1 может быть отлична от нуля лишь в области Q , в точках которой выполняется условие

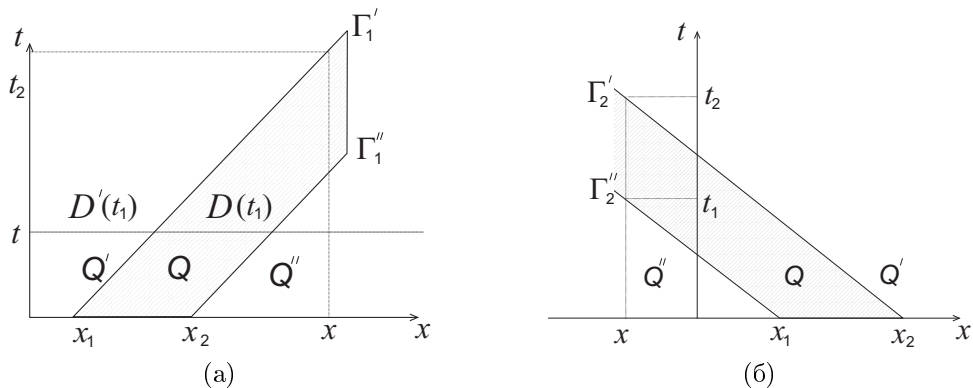


Рис. 1.1

$x_1 < x - at < x_2$ (для наглядности она заштрихована на рис. 1.1а). С учетом этого область Q назовем *носителем волны* u_1 , а ее сечение $D(t)$ в момент t – носителем волны в момент t . (Здесь мы допускаем неточность в математическом плане, поскольку под *носителем* непрерывной функции u математики понимают замыкание множества точек, где $u \neq 0$). В областях Q' и Q'' (либо D' и D'' в момент t) функция u_1 равна нулю. Физически это означает, что волновой процесс, описываемый функцией (1.4), происходит в момент t лишь в области D , причем до области D'' волна *еще* не дошла, так что там еще наблюдается покой, а через область D' волна *уже* прошла, так что там уже наступил покой. В свою очередь характеристика Γ_1'' в (1.8) имеет смысл *переднего фронта* волны u_1 , отделяющего носитель Q волны (1.4) от “передней” области покоя Q'' , тогда как характеристика Γ_1' имеет смысл *заднего фронта* волны u_1 , отделяющего носитель Q волны (1.4) от “задней” области покоя Q' . По аналогичной схеме исследуются свойства обратной волны $u_2 \equiv \theta_2(x + at)$ в предположении, что функция θ_2 отлична от нуля лишь в интервале (x_1, x_2) . Геометрическая картина изображена на рис. 1.1б, где область $\tilde{Q}$ имеет смысл носителя волны u_2 , $\tilde{Q}'$ и $\tilde{Q}''$ являются областями покоя, а Γ_2'' и Γ_2' имеют смысл переднего и заднего фронтов волны u_2 .

Пусть $x \notin [x_1, x_2]$ – произвольная точка. Из предыдущего анализа вытекает, что для любой такой точки существует интервал времени (t_1, t_2) , в течение которого в x распространяется волна. Чтобы определить геометрически указанный интервал, достаточно провести через точку x луч параллельно оси t , найти его пересечение с областью Q для прямой волны либо с $\tilde{Q}$ для обратной волны и спроектировать это пересечение на ось t . Схематически указанное построение изображено на рис. 1.1а для $x > x_2$ и на рис. 1.1б для $x < x_1$.

1.2. Задача Коши для одномерного волнового уравнения. Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.1). Она заключается в нахождении

классического решения u уравнения (1.1) в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$ из пространства $C^2(\mathbb{R}_+^2)$

$\cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$, удовлетворяющего начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Напомним, что условие $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$ означает, что функция u непрерывна вместе со всеми производными до второго порядка включительно в открытой области – полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$. В то же время условие $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ означает, что u вместе с производными $\partial u/\partial t$ и $\partial u/\partial x$ непрерывна в $\mathbb{R}_+^2$ и допускает непрерывное продолжение на замкнутую полуплоскость $\overline{\mathbb{R}_+^2} = \mathbb{R}_x \times \{t \in \mathbb{R}_t : t \geq 0\}$. Последнее требование $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ обусловлено необходимостью выполнения решением u начальных условий (1.10) на границе $t = 0$ замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbb{R}_+^2}$. Физически задача (1.1), (1.10) описывает процесс колебаний бесконечной струны, вызываемых ее *начальным отклонением* φ и *начальным импульсом* ψ . Ввиду неограниченности струны функции φ и ψ заданы на всей вещественной оси $\mathbb{R}_x$.

Предположим, что решение u задачи (1.1), (1.10) существует. Тогда в силу леммы 1.1 оно необходимо представляется в виде (1.3). Следовательно, для его нахождения достаточно подобрать функции θ_1 и θ_2 в (1.3) так, чтобы их сумма удовлетворяла обоим условиям в (1.10). Подставляя (1.3) в (1.10), получим

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi(x), \quad -a[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)] = \psi(x). \quad (1.11)$$

Интегрируя второе равенство, имеем $\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + C$, где C – произвольная постоянная. Складывая это равенство с первым равенством в (1.11) либо вычитая, приходим к двум соотношениям, имеющим вид:

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \frac{C}{2}, \quad \theta_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi - \frac{C}{2}. \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в (1.3), приходим к следующей окончательной форме решения задачи Коши (1.1), (1.10):

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (1.13)$$

Формула (1.13) так же, как и (1.3), называется формулой Даламбера. Легко проверить, что (1.13) дает искомое решение задачи (1.1), (1.10), если

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}). \quad (1.14)$$

(Здесь и ниже $C^l(\mathbb{R})$ обозначает класс функций: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, непрерывных вместе со всеми производными до порядка l включительно.)

Итак, предположив существование решения u задачи Коши (1.1), (1.10), мы показали, что оно должно представляться формулой (1.13). Отсюда, в частности, следует, что нулевым начальным данным $\varphi = 0$, $\psi = 0$ отвечает лишь тривиальное решение $u = 0$. Последнее эквивалентно в силу линейности уравнения (1.1) единственности решения задачи Коши (1.1), (1.10). Построив решение задачи Коши в виде (1.13), мы тем самым доказали его существование. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполняются условия (1.14). Тогда классическое решение $u \in C^2(\mathbb{R}_+) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ задачи Коши (1.1), (1.10) существует, единственно и определяется формулой (1.13).

Изложенный выше метод построения решения задачи Коши (1.1), (1.10) называется *методом распространяющихся волн* или *методом характеристик*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. По аналогии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений *частным* решением уравнения (1.1) можно назвать то его решение u , которое удовлетворяет начальным условиям (1.10) при конкретных функциях φ и ψ . Тогда тот факт, что любое частное решение уравнения (1.1) можно получить из формулы (1.3) при надлежащем выборе функций θ_1 и θ_2 означает, что формула (1.3) описывает *общее решение* уравнения (1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Простой анализ формулы (1.13) показывает, что при выполнении условий (1.14) обе производные $\partial^2 u / \partial t^2$ и $\partial^2 u / \partial x^2$, входящие в уравнение (1.1), непрерывны в замкнутой области $\overline{\mathbb{R}_+^2}$. Таким образом, построенное нами решение (1.13) обладает даже большей гладкостью, чем это требуется в определении классического решения задачи (1.1), (1.10). Чтобы отличить (по свойству гладкости) построенное решение от классического решения, для обозначения первого решения будем использовать здесь и ниже введенный в п. 2.3. гл. 2 термин *регулярное решение*.

Мы будем также рассматривать “решения”, обладающие меньшей гладкостью, чем указано в определении классического решения. На такие решения будем ссылаться в соответствии с материалами п. 1.5 гл. 2 как на *обобщенные решения*. Определение обобщенного решения играет важную роль в современной математической физике. Первое упоминание об обобщенных решениях применительно к задаче Коши (1.1), (1.10) будет сделано уже в п. 1.3 ниже.

Исследуем некоторые свойства общего решения (1.3) и частного решения (1.13) уравнения (1.1). С этой целью рассмотрим фиксированную точку $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}_+^2$ и проведем из нее характеристики

$$x - at = x_0 - at_0 \quad \text{и} \quad x + at = x_0 + at_0, \quad (1.15)$$

которые пересекают ось x соответственно в точках

$$x_1 = x_0 - at_0 \quad \text{и} \quad x_2 = x_0 + at_0. \tag{1.16}$$

Из (1.3) следует, что значение общего решения u в точке (x_0, t_0) равно $\theta_1(x_1) + \theta_2(x_2)$, т. е. оно определяется значениями функций θ_1 и θ_2 соот-

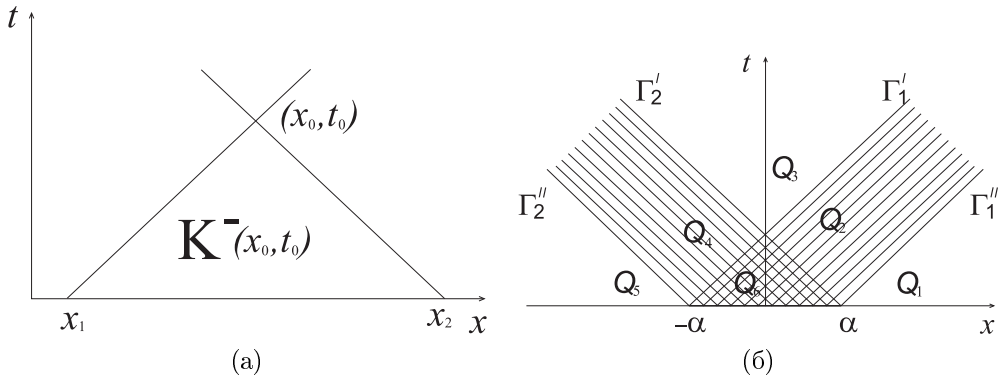


Рис. 1.2

ветственно в точках x_1 и x_2 , которые являются вершинами треугольника, образованного двумя характеристиками (1.15) и осью x (см. рис. 1.2а). Этот треугольник, обозначаемый через $K^-(x_0, t_0)$, называется *характеристическим треугольником точки (x_0, t_0)* , а указанный факт обычно интерпретируют так: *возмущение в струне, вызванное ее начальным отклонением, распространяется вдоль характеристик (1.7) уравнения (1.1) с постоянной скоростью a (без изменения формы)*. Сформулируем полученный результат в виде леммы.

ЛЕММА 1.2. *Значение решения (1.3) уравнения (1.1) в произвольной точке $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2$ равно сумме значений функций θ_1 и θ_2 в (1.3) в нижних вершинах $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ характеристического треугольника $K^-(x, t)$ точки (x, t) .*

Обратимся далее к формуле (1.13) и положим в ней $x = x_0, t = t_0$. Перепишав ее с учетом соотношений (1.16) в виде

$$u(x_0, t_0) = \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x_1}^{x_2} \psi(\xi) d\xi, \tag{1.17}$$

приходим к важному выводу, что значение $u(x_0, t_0)$ решения u задачи Коши (1.1), (1.10), описывающее отклонение струны в точке x_0 в момент t_0 , зависит только от значений начальной функции (начального отклонения) φ в точках $x_1 = x_0 - at_0$ и $x_2 = x_0 + at_0$ оси x – вершинах характеристического треугольника $K^-(x_0, t_0)$ точки (x_0, t_0) , и от значений начальной функции (начальной скорости отклонения струны) ψ на участке (x_1, x_2) оси x .

Начальные данные, заданные вне $[x_1, x_2]$, не оказывают влияния на значение решения u в точке (x_0, t_0) . Если начальные условия заданы не на всей бесконечной прямой, а лишь на отрезке $[x_1, x_2]$, то они однозначно определяют решение внутри характеристического треугольника, основанием которого является отрезок $[x_1, x_2]$.

В заключение этого пункта рассмотрим более детально два частных случая в задаче Коши (1.1), (1.10).

1) Начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение имеет место лишь в конечном интервале $(-\alpha, \alpha)$ струны, т. е.

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{вне} \quad (-\alpha, \alpha), \quad \psi(x) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}. \quad (1.18)$$

Решение (1.13) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}. \quad (1.19)$$

Из (1.19) следует, что решение u представляет собой сумму двух волн, распространяющихся вправо и влево со скоростью a , причем начальная форма обеих волн определяется функцией $(1/2)\varphi(x)$, равной половине начального смещения.

Дадим физическую интерпретацию решения (1.19). Рассмотрим точку $x > \alpha$, лежащую правее интервала $(-\alpha, \alpha)$. Разобьем интервал времени $[0, \infty)$ на три:

$$1) 0 \leq t \leq t_1 = \frac{x - \alpha}{a}; \quad 2) t_1 < t < t_2 = \frac{x + \alpha}{a}; \quad 3) t_2 \leq t < \infty.$$

Из (1.18) и (1.19), а также рис.1.1а при $x_2 = \alpha$ следует, что $u(x, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq t_1$. В физическом плане это можно интерпретировать так, что волна, возбужденная начальным возмущением – парой $\{(-\alpha, \alpha), \varphi\}$, еще не дошла до точки x . Точно так же из (1.18) и (1.19) следует, что $u(x, t) \not\equiv 0$ при $t_1 < t < t_2$. Физически это означает, что в течение интервала (t_1, t_2) времени t точка x струны совершает колебания около положения своего равновесия, и, следовательно, значение t_1 в физическом плане представляет собой момент, когда волна доходит до точки x , т. е., как говорят физики, момент прохождения *переднего фронта прямой волны*. Наконец, в силу (1.18), (1.19) имеем, что $u(x, t) \equiv 0$ при $t \geq t_2$. Физически это означает, что волна, возбужденная начальным отклонением φ , прошла в момент t_2 точку x , оставив после себя невозмущенное состояние. Следовательно, значение t_2 представляет собой момент прохождения *заднего фронта прямой волны* через точку x .

Аналогичные рассуждения, проведенные для произвольной точки струны $x < -\alpha$, лежащей левее интервала $(-\alpha, \alpha)$, показывают, что

$$u(x, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq t_1 = \frac{-\alpha - x}{a},$$

$$u(x, t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t_1 < t < t_2 = \frac{\alpha - x}{a} \quad \text{и} \quad u(x, t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t_2 \leq t < \infty.$$

При этом значения t_1 и t_2 представляют собой моменты прохождения соответственно *переднего* и *заднего фронта обратной волны* через точку x .

Наконец, через каждую точку x внутри интервала $(-\alpha, \alpha)$ сначала проходят обе волны (прямая и обратная), затем одна волна (прямая или обратная), а затем ни одной волны. Начиная с этого момента в указанной точке x струны наблюдается покой, т. е. $u(x, t) \equiv 0$. Наглядное представление о характере процесса распространения в данном частном случае можно получить с помощью фазовой плоскости (x, t) . Проведем характеристики через точки $(-\alpha, 0)$ и $(\alpha, 0)$. Они разбивают полуплоскость $\mathbb{R}_+^2 = (-\infty < x < \infty, t \geq 0)$ на шесть областей: $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ (см. рис.1.26). Анализ формулы (1.19) для отклонения $u(x, t)$ струны в любой точке (x, t) показывает, что в областях Q_1, Q_3, Q_5 отклонение равно нулю. Действительно, поскольку нижние вершины характеристического треугольника любой точки (x, t) из этих областей лежат вне интервала $(-\alpha, \alpha)$, на котором начальная функция φ отлична от нуля, то указанный факт следует из леммы 1.2. В области Q_2 решением является прямая волна $u = (1/2)\varphi(x - at)$, в области Q_4 – обратная волна $u = (1/2)\varphi(x + at)$, а в области Q_6 решение есть сумма прямой и обратной волн. Геометрическая интерпретация решения (1.19) представлена на рис. 1.3а в случае, когда $a = 1$, а начальная функция φ имеет вид “равнобедренного” треугольника, определяемого формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-1, 0), \\ 1 - x, & x \in (0, 1), \\ 0, & x \notin (-1, 1). \end{cases} \quad (1.20)$$

Такой начальный профиль можно получить, если при $t = 0$ оттянуть струну в точке $x = 0$ и зажать в точках $x = -1$ и $x = 1$. На рис. 1.3а даны профили последовательных положений струны в моменты времени $t_0 = 0, t_1 = 0.5, t_2 = 1, t_3 = 1.5, t_4 = 2$. Видно, что в каждый фиксированный момент $t_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$ профиль струны равен сумме двух профилей: “правого” и “левого”, где правый (либо левый) профиль получается сдвигом половинки начального профиля (равнобедренного треугольника) φ в (1.20) вправо (либо влево) на расстояние, равное по величине t_i (так как $a = 1$).

Отметим, что в рассмотренном примере начальная функция в (1.20), будучи кусочно-аналитичной, не удовлетворяет условию $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$. Однако этот пример полезен тем, что позволяет получить наглядное представление о физике протекания рассматриваемого волнового процесса.

2) Начальное смещение φ равно нулю, а функция ψ отлична от нуля лишь в конечном интервале $(-\alpha, \alpha)$. В таком случае говорят, что стру-

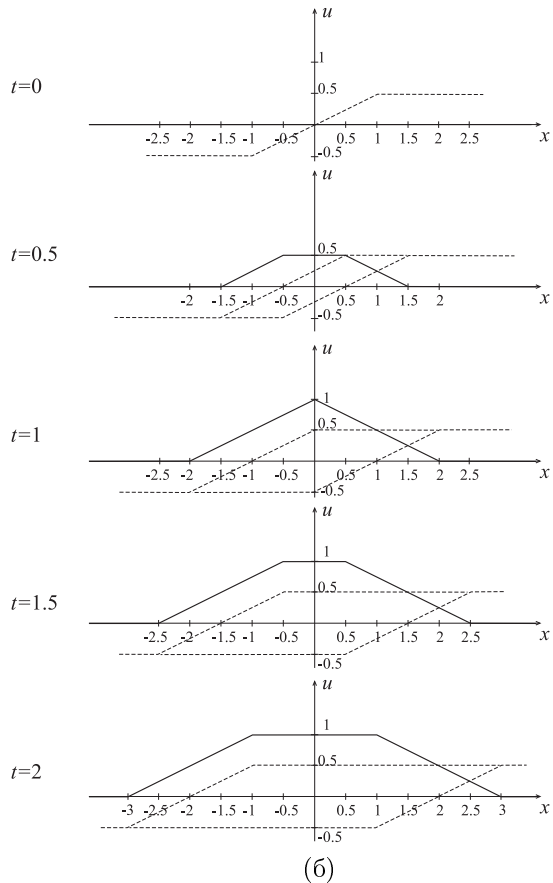
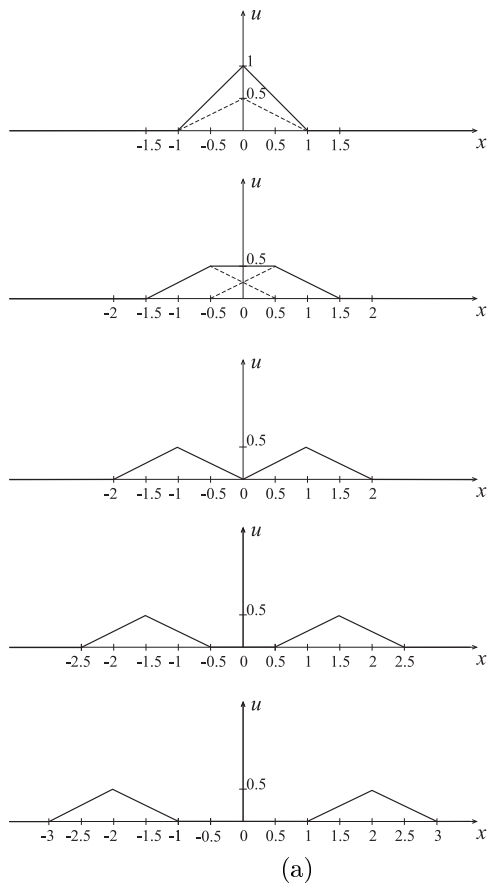


Рис. 1.3

на имеет лишь *начальный импульс*. Решение (1.13) принимает следующий вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \left(\int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \int_0^{x-at} \psi(\xi) d\xi \right). \quad (1.21)$$

Полагая

$$\frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi = \Psi(x), \quad (1.22)$$

перепишем (1.21) в виде

$$u(x, t) = \Psi(x + at) - \Psi(x - at). \quad (1.23)$$

Соотношение (1.23) означает, что указанный начальный импульс возбуждает по струне две волны: прямую с профилем $-\Psi$ и обратную с профилем Ψ . Из (1.23) также следует, что для нахождения в указанном частном случае профиля струны в момент t нужно сначала профиль Ψ сдвинуть влево

на расстояние at , затем вправо на то же расстояние и вычесть полученные профили.

Как и выше, рассмотрим подробнее случай, когда $x > \alpha$. Опять разобьем временной интервал $(0, \infty)$ на три подинтервала:

$$1) 0 \leq t \leq t_1 = \frac{x - \alpha}{a}; \quad 2) t_1 < t < t_2 = \frac{x + \alpha}{a}; \quad 3) t_2 \leq t < \infty.$$

1. $0 \leq t \leq t_1$. При $t = 0$ интервал интегрирования $(x - at, x + at)$ в (1.21) вырождается в точку x , а затем с увеличением t он расширяется в обе стороны со скоростью a . При $t \leq t_1$ он не имеет общих точек с интервалом $(-\alpha, \alpha)$, где ψ отлична от нуля. Отсюда следует, что

$$\psi = 0 \quad \text{в} \quad (x - at, x + at) \quad \forall t \leq t_1 \implies u(x, t) \equiv 0 \quad \forall t \leq t_1.$$

Эти факты физически означают, что волна, вызванная начальным возмущением – парой $\{(-\alpha, \alpha), \psi\}$, еще не дошла до точки x . Отметим, что последнее условие $u(x, t) \equiv 0$ выполняется и в момент времени t_1 , даже если $\psi(\alpha) \neq 0$.

2. $t_1 < t < t_2$. Для этих значений времени t , т. е., начиная с момента t_1 и до момента t_2 , интервал $(x - at, x + at)$ будет пересекать интервал $(-\alpha, \alpha)$, где $\psi \neq 0$. С учетом этого из (1.21) следует, что $u(x, t) \neq 0$ при $t_1 < t < t_2$. Физически это означает, что при $t > t_1$ в точку x приходит возмущение, вызванное ненулевым начальным импульсом струны, под влиянием которого точка x начинает колебаться. Сам же момент t_1 есть момент прохождения через точку x переднего фронта волны, вызванной начальным импульсом.

3. $t_2 \leq t < \infty$. Для этих значений t интервал интегрирования $(x - at, x + at)$ в (1.21) будет целиком содержать интервал $(-\alpha, \alpha)$. Так как $\psi = 0$ вне $(-\alpha, \alpha)$, то для таких t формула (1.21) принимает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{-\alpha}^{\alpha} \psi(\xi) d\xi = \text{const}, \quad \forall t \geq t_2. \quad (1.24)$$

Таким образом, начиная с момента t_2 , имеющего смысл момента прохождения через точку x заднего фронта волны, вызванной начальным импульсом струны, точка x перестает колебаться и занимает положение, определяемое формулой (1.24). Физически это означает, что волна оставляет в струне след после своего прохождения.

Геометрическая интерпретация решения (1.21) представлена на рис. 1.3б в случае, когда $a = 1$, а начальная функция ψ определяется формулой

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-1, 1), \\ 0, & x \notin (-1, 1). \end{cases} \quad (1.25)$$

Для этого случая функция Ψ в (1.22) определяется формулой

$$\Psi(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in (-\infty, -1), \\ 1/2x, & x \in [-1, 1], \\ 1/2, & x \in (1, +\infty). \end{cases} \quad (1.26)$$

Указанный профиль вместе со сдвинутым профилем $\Psi(x+t)$ изображен на рис. 1.4, тогда как на рис. 1.3б изображены в виде прерывистых линий профили функций $\Psi(x+t)$ и $\Psi(x-t)$ соответственно, а в виде сплошной линии профили отклонения струны в те же моменты времени t_0, t_1, t_2, t_3 и t_4 , что и на рис. 1.3а. Видно, что, начиная с момента $t > t_2$, профиль отклонения струны имеет форму равнобедренной трапеции единичной высоты, которая равномерно расширяется в обе стороны с ростом времени.

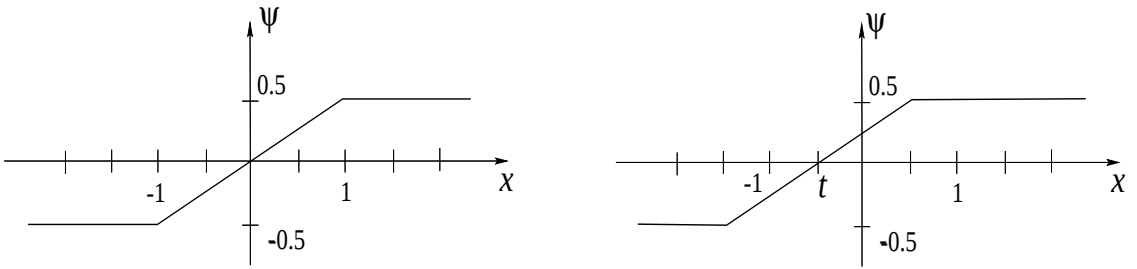


Рис. 1.4

Таким образом, действие ненулевого начального импульса ψ , определяемого формулой (1.25), приводит к сдвигу каждой точки струны в определенный момент t , зависящий от x , на единичное расстояние вверх. Опять отметим, что хотя в данном примере функция ψ даже не является непрерывной, приведенный выше анализ позволяет получить достаточно хорошее представление о физике протекания процесса в рассматриваемом случае. Из этого примера, в частности, следует, что принцип Гюйгенса (см. более подробно о нем в § 3) не выполняется в одномерном случае.

1.3. Устойчивость решения задачи Коши к исходным данным. Обобщенное решение. Как указывалось в гл. 2, одним из важнейших требований при постановке и исследовании задач математической физики является требование устойчивости решения к малым возмущениям исходных данных. Докажем, что для задачи Коши указанное свойство имеет место. Пусть $Q_T = \mathbb{R} \times (0, T]$, где $0 < T < \infty$.

ТЕОРЕМА 1.2. *(О непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных данных). Пусть u_1 и u_2 – решения задачи Коши (1.1), (1.10) из класса $C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ с начальными условиями*

$$u_1|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_1(x) \quad \text{и} \quad u_2|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon, T) > 0$, что из неравенств $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta$, $|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta$ $\forall x \in \mathbb{R}$ следует неравенство

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_T \equiv \mathbb{R} \times [0, T].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записав решения u_1 и u_2 в виде (1.13) через исходные данные (φ_1, ψ_1) и (φ_2, ψ_2) соответственно и вычитая, имеем

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &\leq \frac{1}{2} |\varphi_1(x - at) - \varphi_2(x - at)| + \\ &+ \frac{1}{2} |\varphi_1(x + at) - \varphi_2(x + at)| + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\xi) - \psi_2(\xi)| d\xi < \\ &< \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \delta d\xi = \delta + \delta t \leq \delta(1 + T) \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_T. \end{aligned}$$

Полагая здесь $\delta = \varepsilon/(1 + T)$, приходим к утверждению теоремы. Содержание теоремы 1.2 кратко можно выразить так: *малым изменениям начальных данных задачи Коши (1.1), (1.10) отвечают малые изменения решения.* ■

В практических задачах начальные значения получаются в результате измерений и, следовательно, не являются точными. Из теоремы 1.2 вытекает важный для практики вывод о том, что малые погрешности в начальных данных приводят к малым изменениям в решении задачи Коши. Эта теорема указывает также на один из возможных путей построения решения задачи Коши в тех случаях, когда начальные функции φ и ψ не обладают достаточной гладкостью. Рассмотрим для определенности случай, когда начальные функции φ и ψ имеют конечные носители, причем

$$\varphi \in C^1(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^0(\mathbb{R}). \quad (1.14a)$$

Построим для указанных функций последовательности $\{\varphi_n\} \in C^2(\mathbb{R})$ и $\{\psi_n\} \in C^1(\mathbb{R})$, равномерно сходящиеся соответственно к φ и ψ . Обозначим через u_n решение задачи Коши (1.1), (1.10), отвечающее паре (φ_n, ψ_n) .

Оценим разность $u_{n+k} - u_n$. В силу равномерной сходимости последовательностей $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$ для произвольных чисел $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ найдется такое N , что для любых $n > N$ и целых положительных k

$$|\varphi_{n+k}(x) - \varphi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + T}, \quad |\psi_{n+k}(x) - \psi_n(x)| < \frac{\varepsilon}{1 + T} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Тогда в силу теоремы 1.2 выполняется неравенство

$$|u_{n+k}(x, t) - u_n(x, t)| < \varepsilon \quad \forall (x, t) \in \overline{Q}_T, \quad n > N, \quad k = 1, 2, \dots$$

Оно означает, что последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в пространстве ограниченных и непрерывных на замкнутом множестве $\overline{Q}_T$ функций. Поскольку указанное пространство полно [32], то u_n равномерно сходится в $\overline{Q}_T$ к некоторой непрерывной в $\overline{Q}_T$ функции u , так что

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\varphi_n(x - at) + \varphi_n(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_n(\xi) d\xi \right\}.$$

Переходя в правой части этого соотношения к пределу при $n \rightarrow \infty$, приходим к выводу, что введенная функция u определяется по заданным функциям φ и ψ с помощью формулы Даламбера (1.13). Из нее, в частности, вытекает, что функция u удовлетворяет обоим начальным условиям в (1.10). Однако так построенная функция u уже не удовлетворяет, вообще говоря, уравнению (1.1). Последнее вытекает хотя бы из того, что в случае, когда функции φ и ψ удовлетворяют лишь условиям (1.14а), производных второго порядка от “решения” u , определяемого формулой (1.13), в общем случае не существует. Поэтому бессмысленно требовать от “решения” u чтобы оно удовлетворяло уравнению (1.1) в каждой точке $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2$. Тем не менее можно показать, что при выполнении лишь условий (1.14а) и даже более “слабых” условий на гладкость φ и ψ функция (1.13) удовлетворяет уравнению (1.1) в некотором интегральном (так сказать, обобщенном) смысле. С учетом этого функцию u , определяемую формулой Даламбера (1.13) по функциям φ и ψ , удовлетворяющим условиям (1.14а), можно назвать *обобщенным решением* задачи Коши (1.1), (1.10). Не имея возможности останавливаться более подробно на анализе свойств обобщенных решений, порекомендуем читателям книги [28, 32, 34], где детально освещаются свойства обобщенных решений, а также книгу [11]. В последней излагается другой подход к введению обобщенных решений для уравнений в частных производных, основанный на фундаментальном понятии обобщенной функции.

1.4. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения. Рассмотрим в этом пункте задачу Коши для неоднородного одномерного волнового уравнения. Она заключается в нахождении функции $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad \text{в } \mathbb{R}_+^2 \equiv \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{t,+} \quad (1.27)$$

и начальным условиям (1.10). Прежде всего отметим, что для нахождения решения общей неоднородной задачи (1.27), (1.10) достаточно найти решение уравнения (1.27) при нулевых начальных условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}. \quad (1.28)$$

Действительно, добавляя к этому решению решение задачи (1.1), (1.10) для однородного уравнения (1.1), определяемое формулой (1.13), мы получим в силу линейности уравнения (1.27) искомое решение задачи (1.27), (1.10).

Многие задачи математической физики обладают тем свойством, что решение соответствующей задачи для неоднородного уравнения может быть выражено тем или иным образом через решение аналогичной задачи для соответствующего однородного уравнения. Это имеет место и в рассматриваемом случае. Действительно. Рассмотрим функцию $v(x, t, \tau)$ переменных x, t и параметра τ , удовлетворяющую однородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{в } \mathbb{R} \times (\tau, \infty) \quad (1.29)$$

и следующим начальным условиям при $t = \tau$:

$$v|_{t=\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=\tau} = f(x, \tau) \quad \text{в } \mathbb{R}. \quad (1.30)$$

Вводя вместо t новую временную переменную $t_1 = t - \tau$, замечаем, что функция

$$w(x, t_1, \tau) \equiv v(x, t_1 + \tau, \tau) \quad (1.31)$$

является решением следующей задачи Коши

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{в } \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad w|_{t_1=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t_1} \right|_{t_1=0} = f(x, \tau) \quad \text{в } \mathbb{R}.$$

В таком случае функция w может быть представлена с помощью формулы (1.13), принимающей в данном случае вид

$$w(x, t_1, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-at_1}^{x+at_1} f(\xi, \tau) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq t_1 < \infty. \quad (1.32)$$

Для справедливости этой формулы достаточно предположить согласно теореме 1.1, что $f \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^2})$, $\partial f / \partial x \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^2})$. Возвращаясь к исходным переменным t и v , перепишем (1.32) в виде

$$v(x, t, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \leq t < \infty. \quad (1.33)$$

Покажем теперь, что функция $u : \overline{\mathbb{R}_+^2} \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$u(x, t) \equiv \int_0^t v(x, t, \tau) d\tau = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (1.34)$$

является искомым решением задачи (1.27), (1.28). В самом деле, дифференцируя (1.34) дважды по x и t , имеем с учетом условий (1.30), что

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v(x, t, \tau)}{\partial x^2} d\tau, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial v(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau + v(x, t, t) = \int_0^t \frac{\partial v(x, t, \tau)}{\partial t} d\tau, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v(x, t, \tau)}{\partial t^2} d\tau + f(x, t). \quad (1.37)$$

Умножим (1.35) на a^2 и вычтем из (1.37). Учитывая, что v удовлетворяет однородному уравнению (1.29), приходим к выводу, что указанная функция u и является решением неоднородного уравнения (1.27). Из (1.34) и (1.36) следует, что u удовлетворяет однородным начальным условиям (1.28). Единственность решения u вытекает из единственности решения задачи (1.1), (1.10). Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $f, \partial f / \partial x \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^2})$. Тогда функция u , определяемая формулой (1.34), принадлежит классу $C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$ и является единственным решением задачи Коши (1.27), (1.28).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Отметим, что интеграл в правой части (1.34) представляет собой повторный интеграл от функции f по характеристическому треугольнику $K^-(x, t)$ с центром в точке (x, t) . Таким образом, решение задачи Коши (1.27), (1.28) в произвольной точке $(x, t) \in \mathbb{R}_+^2$ зависит лишь от значений $f(\xi, \tau)$ правой части f в точках (ξ, τ) , изменяющихся внутри $K^-(x, t)$. Другими словами, характеристический треугольник $K^-(x, t)$ имеет смысл области зависимости для решения u уравнения (1.27) в точке (x, t) от правой части f . Ниже в §§ 4 и 5 мы еще вернемся к формуле (1.34) при обсуждении вопросов об областях зависимости и влияния для гиперболических уравнений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Решение общей неоднородной задачи (1.27), (1.10), очевидно, определяется формулой

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (1.38)$$

1.5. Начально-краевая задача для однородного волнового уравнения на вещественной полуоси. Рассмотрим в этом пункте начально-краевую задачу для уравнения (1.1) на полуоси $x > 0$. Эта задача имеет важное значение при изучении процессов отражения волн от границ и ставится следующим образом: *найти классическое решение и однородного волнового уравнения*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{в } Q = \mathbb{R}_{x,+} \times \mathbb{R}_{t,+} = (0, \infty) \times (0, \infty), \quad (1.39)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x < \infty \quad (1.40)$$

и граничному условию Дирихле на левом конце $x = 0$, имеющему вид

$$u|_{x=0} = g(t), \quad 0 < t < \infty. \quad (1.41)$$

Здесь φ, ψ и g – заданные функции своих аргументов.

Рассмотрим для простоты случай однородного граничного условия Дирихле

$$u|_{x=0} = 0. \quad (1.42)$$

Задача (1.39), (1.40), (1.42) описывает распространение начального возмущения в полубесконечной струне с закрепленным левым концом $x = 0$. Приведем следующие две леммы о свойствах решений задачи Коши (1.1), (1.10).

ЛЕММА 1.3. *Если в задаче Коши (1.1), (1.10) начальные функции φ и ψ являются нечетными функциями относительно некоторой точки x_0 , то соответствующее решение в этой точке x_0 равно нулю.*

ЛЕММА 1.4. *Если в задаче Коши (1.1), (1.10) начальные функции φ и ψ являются четными функциями относительно некоторой точки x_0 , то производная по x соответствующего решения в этой точке равна нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.3. Выберем x_0 за начало координат, т. е. положим $x_0 = 0$. Тогда условия нечетности начальных данных запишутся в виде

$$\varphi(x) = -\varphi(-x), \quad \psi(x) = -\psi(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1.43)$$

С учетом (1.43) для решения u задачи (1.1), (1.10), определяемого формулой Даламбера (1.13), имеем при $x = 0$, что

$$u(0, t) \equiv \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\xi) d\xi = 0. \quad (1.44)$$

Действительно, первое слагаемое в (1.44) равно нулю в силу нечетности φ , тогда как второе равно нулю в силу свойства равенства нулю интеграла от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат.

Аналогично доказывается лемма 1.4. Условия четности начальных данных относительно точки $x_0 = 0$ имеют вид $\varphi(x) = \varphi(-x)$, $\psi(x) = \psi(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Известно, что производная четной функции является нечетной функцией, так что $\varphi'(x) = -\varphi'(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Дифференцируя (1.13) по x и рассуждая, как при выводе (1.44), имеем, что

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\varphi'(-at) + \varphi'(at)}{2} + \frac{1}{2a}[\psi(at) - \psi(-at)] = 0 \quad \forall t > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Приведенное выше доказательство фактически опирается на формулу Даламбера и не связано с двукратной дифференцируемостью функции u . Это означает, что лемма 1.3 верна для любой непрерывной функции u , представимой формулой Даламбера (1.13), а лемма 1.4 верна для любой непрерывной функции того же вида, имеющей непрерывную производную $\partial u / \partial x$. Таким образом, леммы 1.3 и 1.4 фактически верны для обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.10).

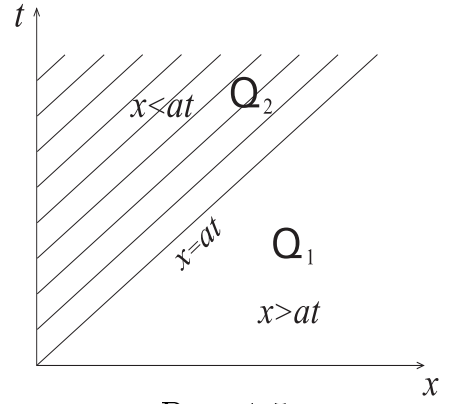


Рис. 1.5

Используя лемму 1.3, теперь несложно найти решение задачи (1.39), (1.40), (1.42). Отметим прежде, что для решения указанной задачи нельзя непосредственно воспользоваться формулой (1.13). Это связано с тем, что входящая в эту формулу разность $x - at$ может быть и отрицательной (см. область Q_2 на рис. 1.5), а для отрицательных значений аргумента начальные функции φ и ψ в (1.40) не определены. С учетом этого будем действовать по следующей схеме. Продолжим функции φ и ψ в (1.40) нечетным образом на отрицательную полуось ($x < 0$) и обозначим через Φ и $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ их продолжения:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для } x > 0, \\ -\varphi(-x) & \text{для } x < 0, \end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{для } x > 0, \\ -\psi(-x) & \text{для } x < 0. \end{cases} \quad (1.45)$$

Предположим, что так построенные функции удовлетворяют условиям (1.14), т. е. $\Phi \in C^2(\mathbb{R})$, $\Psi \in C^1(\mathbb{R})$. Легко проверить, что эти условия выполняются, если выполняются следующие условия гладкости и согласования данных:

$$\varphi \in C^2[0, \infty), \quad \varphi(0) = \varphi''(0) = 0; \quad \psi \in C^1[0, \infty), \quad \psi(0) = 0. \quad (1.46)$$

Тогда решение U задачи Коши (1.1), (1.10), отвечающее паре (Φ, Ψ) , можно представить в виде формулы Даламбера

$$U(x, t) = \frac{\Phi(x - at) + \Phi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi. \quad (1.47)$$

Рассмотрим сужение u функции U в (1.47) на область $\overline{Q}$. По построению функция u удовлетворяет уравнению (1.1) и начальным условиям (1.40). Кроме того, в силу леммы 1.3 для нее выполняется краевое условие (1.42). Это означает, что так построенная функция u является искомым решением задачи (1.39), (1.40), (1.42), и нам остается лишь записать выражение для u через исходные начальные функции φ и ψ . Простой анализ с учетом соотношений (1.45) показывает, что соответствующая формула для u имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & (x, t) \in Q_1 = \{(x, t) \in Q : at < x\}, \\ \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & (x, t) \in Q_2 = \{(x, t) \in Q : at > x\}. \end{cases} \quad (1.48)$$

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть выполняются условия (1.46). Тогда функция u , определяемая формулой (1.48), принадлежит классу $C^2(\overline{Q})$ и является регулярным решением задачи (1.39), (1.40), (1.42).

Точно так же, если при $x = 0$ мы имеем однородное условие Неймана

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (1.49)$$

отвечающее свободному концу струны, то решение соответствующей задачи (1.39), (1.40), (1.49) строится по аналогичной схеме с тем лишь изменением, что начальные функции φ и ψ в (1.40) продолжаются на отрицательную полуось четным образом. Простой анализ показывает, что полученное таким путем решение u имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, & (x, t) \in Q_1, \\ \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi \right], & (x, t) \in Q_2. \end{cases} \quad (1.50)$$

Анализ формулы (1.48) показывает, что в области Q_1 , лежащей ниже характеристики $x = at$, решение u задачи (1.39), (1.40), (1.42) совпадает

с решением Даламбера (1.13) задачи Коши (1.1), (1.10). Таким образом, в этой области отсутствует влияние граничного условия (1.42), а волновой процесс происходит так же, как и на всей оси $\mathbb{R}$ в отсутствие границы $x = 0$. Наоборот, в области Q_2 , лежащей выше характеристики $x = at$, решение u отличается от решения Даламбера (1.13). Физически это связано с появлением в Q_2 наряду с “прямой” волной, описываемой решением Даламбера (1.13), отраженной волны, получаемой отражением прямой волны от конца $x = 0$. Сумма прямой и отраженной волн и дает искомое решение в области Q_2 , стоящее в нижней части (1.48). Аналогичная ситуация справедлива и в отношении формулы (1.50). Более подробное обсуждение этих вопросов можно найти в [56, с. 68–78], где изложенная процедура продолжения начальных функций φ и ψ нечетным образом в случае условия Дирихле (1.42) и четным образом в случае условия Неймана (1.49) используется также при нахождении решения уравнения (1.1) на ограниченном интервале $(0, l)$, на концах которого заданы граничные условия Дирихле либо Неймана. В [56] показано, что полученное с помощью процедуры продолжения начальных функций решение имеет вид суммы прямой волны (1.13) и бесконечной суммы отраженных волн, полученных последовательным отражением прямой волны от концов $x = 0$ и $x = l$.

§2. Волновое уравнение и бегущие волны. Обзор физических понятий

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \Psi + F(\mathbf{x}, t). \quad (2.1)$$

Здесь Δ – скалярный лапласиан, $a^2 = \text{const} > 0$, F – заданная функция, Ψ – неизвестная функция, под которой будем понимать скалярный *потенциал* какого-либо физического поля. Решения уравнения (2.1) описывают волновые процессы, поэтому его называют (скалярным) *волновым уравнением*. При $F = 0$ уравнение

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \Psi \quad (2.2)$$

называют *однородным* волновым уравнением.

Существует большое количество волн различной физической природы. Среди них особую роль играют *звуковые (акустические)* и *электромагнитные* волны, дающие человеку основную часть информации об окружающем мире. Главное свойство всех волновых процессов независимо от их природы состоит в том, что волны осуществляют *перенос энергии без переноса вещества* (последнее может иметь место лишь как побочный эффект).

Другим важным свойством волновых процессов является *конечность* скорости распространения волн. Поэтому в случае, когда источники излучения волн *локализованы по пространству*, т. е. занимают ограниченную часть среды, в каждый момент времени существует поверхность, отделяющая точки, до которых волна еще не дошла, от точек, которые волна уже достигла. Указанную поверхность называют *волновой поверхностью* или *передним фронтом волны*. Если источники *локализованы* и *по времени*, то в отсутствие границ в пространстве $\mathbb{R}^3$ существует и *задний фронт волны*. Он отделяет множество точек, через которые волна уже прошла, от множества точек, через которые волна еще проходит. Таким образом, в последнем случае имеет место процесс распространения волн с резко выраженными передним и задним фронтами. Указанное свойство распространения волн в пространстве $\mathbb{R}^3$ впервые было сформулировано в 1678 году Х. Гюйгенсом и носит название *принципа Гюйгенса*. Несколько другая ситуация наблюдается в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^2$ (см. об этом более подробно в § 1 и § 3).

2.1. Бегущие волны. С математической точки зрения под *волной* следует понимать частное решение волнового уравнения (2.1) либо (2.2), зависящее от пространственных переменных и времени. Поскольку существует бесчисленное множество таких решений, то можно привести достаточное количество примеров различного типа волн. Ниже мы ограничимся рассмотрением лишь трех типов: плоских, сферических и цилиндрических бегущих волн.

Обозначим через x, y, z декартовы координаты точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, через $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ – произвольный вектор, имеющий размерность, обратную единице длины. Введем также величину $\omega = a|\mathbf{k}|$, имеющую размерность, обратную единице времени (напомним, что константа a в (2.2) имеет в соответствии с ее физическим смыслом размерность скорости). Безразмерные величины $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t$ будем называть *фазами*. Легко проверить с помощью непосредственной подстановки, что любая гладкая функция вида

$$\Psi_1(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t), \quad \text{или} \quad \Psi_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t), \quad (2.3)$$

зависящая от одной из фаз, является решением уравнения (2.2). Каждое такое решение называется *бегущей плоской неискажающейся волной*.

Чтобы выяснить смысл этого названия, рассмотрим множество точек, на котором одна из фаз, скажем $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$, принимает постоянное значение d :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = d. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) описывает плоскость в четырехмерном пространстве-времени $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_t$, состоящем из точек с координатами (x, y, z, t) . В каждой точке этой плоскости решение Ψ_1 принимает одно и то же значение, равное $\Psi_1(d)$. Разделив на $|\mathbf{k}|$, запишем теперь уравнение (2.4) в виде $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = at + c$,

$\mathbf{n} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$, $c = d/|\mathbf{k}|$. При фиксированном t это есть уравнение плоскости в обычном трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, причем вектор $\mathbf{n}$ служит для этой плоскости вектором единичной нормали. С возрастанием t указанная плоскость движется в пространстве $\mathbb{R}^3$ с постоянной скоростью, равной a , параллельно самой себе в направлении вектора $\mathbf{k}$. Учитывая, что на этой движущейся (или бегущей) плоскости решение Ψ_1 принимает постоянное значение $\Psi_1(d)$, описанный процесс можно трактовать как процесс переноса в пространстве $\mathbb{R}^3$ возмущения $\Psi_1(d)$, возникшего в начальный момент времени $t = t_0$ в каждой точке $\mathbf{x}$, лежащей на плоскости $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \omega t_0 + d$. Поскольку возмущение $\Psi_1(d)$ переносится плоскостью без изменения его величины и с постоянной скоростью a , то отсюда и идет название бегущей плоской неискажающейся волны. Вместо термина *неискажающаяся волна* используют также термин *недеформируемая* или *однородная* волна. Направление вектора $\mathbf{k}$ называется *направлением волны*, а сам вектор $\mathbf{k}$ называют *волновым вектором*, постоянная a называется (*фазовой*) *скоростью* волны, функция Ψ_1 носит название *формы* или *профиля волны*; наконец, сама бегущая плоскость, на которой фаза $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$, как и решение Ψ_1 , сохраняет постоянное значение, называется *фронтом* волны. Аналогичные рассуждения показывают, что функция $\Psi_2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)$ описывает плоскую неискажающуюся волну, бегущую без изменения формы со скоростью a в сторону, *противоположную* направлению вектора $\mathbf{k}$.

Следует отметить, что с помощью поворота системы координат ось x можно расположить перпендикулярно фронту волны. Тогда уравнения фронтов волны и решений (2.3) принимают вид

$$kx - \omega t = d, \quad kx + \omega t = d \quad \text{и} \quad \Psi_1(kx - \omega t), \quad \Psi_2(kx + \omega t). \quad (2.5)$$

Здесь постоянная $k = \omega/a$, называемая *волновым числом*, является скалярным аналогом волнового вектора $\mathbf{k}$. Функция $\Psi_1(kx - \omega t)$ (либо $\Psi_2(kx + \omega t)$) описывает плоскую волну, бегущую в положительном (либо отрицательном) направлении оси x , и называется *прямой* (либо *обратной*) плоской волной. Важно отметить при этом, что каждая из функций в (2.5) является решением как трехмерного однородного волнового уравнения (2.2), так и одномерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad (2.6)$$

описывающего, например, свободные колебания струны. Таким образом, процессы распространения бегущей плоской волны и колебаний струны описываются одним и тем же одномерным волновым уравнением (2.6). Указанный факт не случаен, а является проявлением общей закономерности, заключающейся в том, что многие различные по своей природе волновые процессы описываются одним и тем же волновым уравнением. Наконец,

перепишав выражения $\Psi_1(kx - \omega t)$ и $\Psi_2(kx + \omega t)$ в виде $\Psi_1(kx - \omega t) = \Psi_1[k(x - at)] \equiv \theta_1(x - at)$, $\Psi_2(kx + \omega t) \equiv \theta_2(x + at)$, заключаем, что линейная комбинация

$$\Psi_1(kx - \omega t) + \Psi_2(kx + \omega t) \equiv \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \quad (2.7)$$

имеет смысл общего решения уравнения (2.6). Последнее вытекает из результатов § 1, где показано, что путем подходящего выбора функций θ_1 и θ_2 либо, что то же, функций Ψ_1 и Ψ_2 в (2.7), можно получить любое частное решение уравнения (2.6), удовлетворяющее заданным начальным условиям. Этот факт означает, что на прямой $\mathbb{R}$ любое решение уравнения (2.6) имеет физический смысл одной из двух бегущих плоских волн, либо их линейной комбинации.

В пространствах бóльшего числа измерений существуют и другие типы волн, в том числе и бегущих. В качестве важного примера указанных волн отметим бегущую сферическую волну, которая является частным решением уравнения (2.2), зависящим от радиальной сферической переменной r и разности $kr - \omega t$, либо суммы $kr + \omega t$. Для построения указанной волны введем в $\mathbb{R}^3$ сферические координаты r, θ, φ и, используя известное представление оператора Лапласа в сферических координатах (см. § 3 гл. 1), запишем уравнение (2.2) в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \right].$$

В предположении, что Ψ не зависит от θ и φ , это уравнение после умножения на r можно записать аналогично (2.6) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\Psi) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Psi). \quad (2.8)$$

(2.8) означает, что функция $u = r\Psi$ в точности удовлетворяет одномерному волновому уравнению вида (1.1) при $x = r > 0$. Из результатов § 1 тогда вытекает, что решениями уравнения (2.8) являются функции

$$\frac{1}{r} \Psi_1(kr - \omega t), \quad \frac{1}{r} \Psi_2(kr + \omega t), \quad k = \frac{\omega}{a}, \quad r > 0, \quad (2.9)$$

где Ψ_1 и Ψ_2 – произвольные гладкие функции своих аргументов. Поскольку фаза $kr - \omega t$ (либо $kr + \omega t$) сохраняется на любой сфере, бегущей от точки $r = 0$ (либо к точке $r = 0$) с постоянной скоростью a , то каждая из функций в (2.9) называется *бегущей сферической волной с центром* в точке $r = 0$, а сама бегущая сфера – ее *фронтом*. При этом первая функция в (2.9) носит название *расходящейся* (*распространяющейся* либо *уходящей*) *сферической волны*. Эта волна отличается от соответствующей плоской волны тем, что

ее амплитуда убывает как $1/r$ по мере удаления от центра, хотя и постоянна во всех точках фронта. Вторая функция в (2.9) называется *сходящейся* (либо *приходящей*) *сферической* волной. Она отличается от плоской волны тем, что ее амплитуда растет как $1/r$ при приближении волны к центру.

Сопоставляя бегущие плоские и сферические волны, можно сделать вывод, что указанные волны характеризуются следующими двумя общими свойствами:

1) обе волны зависят от времени и одной пространственной переменной, при этом фаза каждой волны сохраняется на ее фронтах, т. е. на бегущих с постоянной скоростью a параллельных плоскостях для плоских волн и концентрических сферах для сферических волн;

2) величина

$$\int_S \Psi_i^2 d\sigma, \quad i = 1, 2,$$

имеющая физический смысл энергии волны, переносимой любым ее фронтом S , остается постоянной с течением времени (бесконечной для плоской волны и конечной для сферической волны).

Аналогичными свойствами обладают другие бегущие волны в $\mathbb{R}^3$: цилиндрические, сфероидальные и т. д. В частности, бегущей *цилиндрической расходящейся* от оси $\rho = 0$ (либо *сходящейся* к оси $\rho = 0$) волной называется функция от радиальной цилиндрической координаты ρ и разности $k\rho - \omega t$ (либо суммы $k\rho + \omega t$), определяемая формулой

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}}\Psi_1(k\rho - \omega t) \quad (\text{либо } \frac{1}{\sqrt{\rho}}\Psi_2(k\rho + \omega t)), \quad k = \frac{\omega}{a}. \quad (2.10)$$

Здесь Ψ_1 и Ψ_2 – гладкие функции своих аргументов. Следует однако отметить, что функции Ψ_1 и Ψ_2 в (2.10) не удовлетворяют уравнению (2.2). В этом легко убедиться, если подставить функцию Ψ_1 (либо Ψ_2) в уравнение (2.2), записанное с учетом представления оператора Лапласа в цилиндрических координатах ρ, φ, z (см. § 3, гл. 1) и независимости Ψ_1 и Ψ_2 от φ и z в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right). \quad (2.11)$$

Однако, если, считая ρ достаточно большим, прибавить к правой части (2.11) “малое слагаемое” – $\Psi/4\rho^2$, и умножить полученное уравнение на $\sqrt{\rho}$, то получим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 (\sqrt{\rho}\Psi)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\sqrt{\rho}\Psi). \quad (2.12)$$

Из результатов § 1 теперь легко следует, что обе функции в (2.10) являются решениями уравнения (2.12) при $\rho > 0$. Это означает, что уравнение (2.2)

описывает цилиндрические волны на больших расстояниях от оси $\rho = 0$ или, как говорят, *асимптотически* при $\rho \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Наряду со сферическими (либо цилиндрическими) волнами с центром в точке $r = 0$ (либо осью $\rho = 0$) можно рассматривать сферические (либо цилиндрические) волны с центром в произвольной точке $\mathbf{y}$ (с осью, проходящей через точку $\mathbf{y}$ параллельно оси z). Указанные волны описываются функциями

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \Psi(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \mp \omega t), \quad \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{(2)}}} \Psi(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{(2)} \mp \omega t).$$

Здесь $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_{(2)}$ обозначает “двумерное” расстояние между точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, т. е. расстояние между проекциями точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ на плоскость $z = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Аналогично плоским волнам (2.3), которые являются решениями уравнения (2.2) как в пространстве $\mathbb{R}^3$, так и на прямой $\mathbb{R}$, цилиндрические волны (2.10) можно считать решениями уравнения (2.2) не только в $\mathbb{R}^3$, что естественно с физической точки зрения, но и на плоскости $\mathbb{R}^2$, где введены полярные координаты ρ, φ . При последней интерпретации фаза $k\rho \mp \omega t$ решений (2.10) остается постоянной на бегущих со скоростью a концентрических окружностях с центром в точке $\rho = 0$. Поэтому для функций (2.10), рассматриваемых в $\mathbb{R}^2$, вместо термина *цилиндрическая волна с осью $\rho = 0$* иногда используют термин *сферическая волна на плоскости с центром* в точке $\rho = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Кроме бегущих волн существуют другие типы волн: *стоячие, нормальные, поверхностные* и т.д. Об этих волнах можно прочитать, например, в [3, 21].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Уравнение (2.1) является простейшей *математической моделью*, описывающей процессы излучения и распространения волн. Указанная модель не учитывает многие эффекты, происходящие при распространении волн в реальных средах: неоднородность и анизотропность среды, затухание волн, вызываемое действием сил вязкости и теплопроводности, фазовые переходы, нелинейные эффекты и т.д. Тем не менее она отражает основные черты, присущие многим волновым процессам. В частности, она описывает излучение и распространение звуковых волн малой амплитуды в однородной изотропной жидкой или газообразной среде без учета эффектов вязкости и теплопроводности (см. §6 гл.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Если функция Ψ в (2.1) является векторной, то уравнение (2.1) называется *векторным волновым уравнением*. Уравнение такого типа возникает, например, при описании электромагнитных полей (см. §7 гл.1).

Приведенные выше примеры решений волнового уравнения наглядно показывают, что одного уравнения (2.1) недостаточно для описания конкретного волнового процесса, поскольку уравнение (2.1) имеет бесчислен-

ное множество решений. Поэтому необходимо вводить дополнительные условия, характеризующие волновой процесс. Такими условиями обычно являются *начальные* условия

$$\Psi|_{t=t_0} = \Psi_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \Psi_1(\mathbf{x}), \quad (2.13)$$

относящиеся к моменту времени t_0 , с которого начинается процесс, и *граничные* (*краевые*) условия, т.е. условия, заданные на границе S области D , где изучается волновой процесс, если, конечно, $D \neq \mathbb{R}^3$. Указанные условия в общем случае можно записать в виде:

$$a(\mathbf{x}, t)\Psi + b(\mathbf{x}, t)\frac{\partial \Psi}{\partial n} = g(\mathbf{x}, t) \quad \text{на } S. \quad (2.14)$$

Здесь Ψ_0 , Ψ_1 , a , b и g – заданные функции своих аргументов. Задача (2.1), (2.13), (2.14) называется *начально - краевой задачей* для уравнения (2.1). В случае, если $D = \mathbb{R}^3$, так что волновой процесс рассматривается во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, краевые условия (2.14), естественно, отсутствуют, а задача (2.1), (2.13) называется *задачей Коши* для уравнения (2.1).

2.2. Гармонические волны. Уравнение Гельмгольца. Важным классом решений уравнения (2.1) являются *гармонические* волны, т.е. волны с гармонической зависимостью от времени. Для таких волн объемную плотность F и потенциал Ψ можно представить в виде:

$$F(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad \Psi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (2.15)$$

где ω – *круговая частота* рассматриваемого гармонического процесса, $f(\mathbf{x})$ и $\Phi(\mathbf{x})$ – комплексные (в общем случае) *амплитуды* полей F и Ψ . Подставляя (2.15) в (2.1), приходим к следующему уравнению для функции Φ :

$$L\Phi \equiv \Delta\Phi + k^2\Phi = -f(\mathbf{x}), \quad (2.16)$$

где $k = \omega/a$. Левая часть в (2.16) представляет собой оператор Гельмгольца, поэтому уравнение (2.16) называют *уравнением Гельмгольца*.

В одномерном случае уравнение (2.16) принимает вид $\Phi'' + k^2\Phi = -f(x)$, или

$$\Phi'' + k^2\Phi = 0 \quad (2.17)$$

при $f = 0$. Общее решение уравнения (2.17) можно записать в виде $\Phi(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Отсюда и (2.15) следует, что все гармонические волны для одномерного волнового уравнения (2.6) описываются формулами

$$\Psi_1(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}, \quad \Psi_2(x, t) = e^{-i(kx + \omega t)}. \quad (2.18)$$

Каждая из волн в (2.18) характеризуется круговой частотой ω , которая является параметром волны, изменяющимся в диапазоне $0 < \omega < \infty$, а также волновым числом k , циклической частотой f , длиной волны λ и периодом T . Последние определяются по ω соотношениями

$$k = \frac{\omega}{a}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \lambda = \frac{a}{f} = \frac{2\pi a}{\omega} = \frac{2\pi}{k}, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\lambda}{a}. \quad (2.19)$$

Функции (2.18) играют важную роль при исследовании волновых процессов. Это связано с тем, что произвольную функцию u двух переменных x и t можно представить с помощью ее разложения в интеграл или ряд Фурье в виде суперпозиции гармонических волн вида (2.18).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Следует отметить, что использование представления (2.15) приводит к необходимости оперирования с комплекснозначными, вообще говоря, функциями Φ , f и т.д. В то же время физические процессы описываются, как правило, вещественнозначными функциями. Ввиду этого под искомыми физическими величинами следует понимать не сами выражения в (2.15), а их вещественные или мнимые части. Другими словами, решив уравнение (2.16), либо (2.17), за искомое решение, имеющее физический смысл, следует брать не саму функцию Φ , а ее вещественную (или мнимую) часть.

2.3. Волны с дисперсией. Мы уже видели, что уравнение колебаний струны (2.6) допускает решения в виде бегущих волн $\theta(x \pm at)$ произвольной формы θ . К сожалению этот замечательный факт уже не справедлив для более общих уравнений гиперболического типа, описывающих волновые процессы.

Рассмотрим общее уравнение гиперболического типа второго порядка с постоянными коэффициентами a, b_1, b_2 и $\bar{c}$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_1 \frac{\partial v}{\partial t} + b_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{c}v = 0. \quad (2.20)$$

С помощью подстановки $v = ue^{\lambda x + \mu t}$, $\mu = -0.5b_1$, $\lambda = -0.5b_2/a^2$, оно сводится к следующему уравнению для функции u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu = 0, \quad (2.21)$$

Здесь $c = \bar{c} + (b_1/2)^2 - (b_2/2a)^2$. Легко видеть, что при $c \neq 0$ уравнение (2.21), в отличие от (2.6), не допускает решений в виде произвольной бегущей волны. В самом деле, подставляя в (2.21), например, выражение $\theta(x - at)$, находим: $a^2\theta'' - a^2\theta'' + c\theta = 0$. Отсюда следует в силу произвольности θ , что $c = 0$.

Произвольная функция u переменных x и t , являющаяся, например, решением уравнения (2.21), может быть с помощью разложения в интеграл

Фурье представлена в виде суперпозиции гармонических волн вида (2.18). Скорость v , с которой фаза $kx - \omega t$ либо $kx + \omega t$ волн в (2.18) перемещается в пространстве, называется *фазовой скоростью* волны. Очевидно, что $v = \omega/k$. Если фазовая скорость гармонической волны зависит от частоты, то говорят, что волновой процесс сопровождается *дисперсией*. При наличии дисперсии различные гармонические составляющие волны распространяются с разными скоростями и, следовательно, смещаются друг относительно друга. Это приводит к искажению с течением времени профиля рассматриваемой волны.

Простой анализ показывает, что в рассматриваемом волновом процессе дисперсия присутствует тогда и только тогда, когда соответствующее волновое уравнение не допускает решений в виде бегущих волн произвольной формы. Отсюда, в частности, следует, что дисперсия имеет место для уравнения (2.21) при $c \neq 0$. Указанный факт можно показать и аналитически. Для этого подставим в (2.21) любую из функций в (2.18). В результате получим следующее уравнение, связывающее ω и k :

$$\omega^2 - a^2 k^2 + c = 0. \quad (2.22)$$

Уравнение (2.22) называется *дисперсионным уравнением*, отвечающим волновому уравнению (2.21). По построению каждая из функций в (2.18) является решением уравнения (2.21) тогда и только тогда, когда параметры ω и k связаны дисперсионным уравнением (2.22). Из (2.22) следует, что фазовая скорость v определяется формулой $v \equiv \omega/k = \omega a / \sqrt{\omega^2 + c}$. Отсюда видно, что при $c \neq 0$ фазовая скорость v зависит от частоты. Наоборот, при выполнении условия $c = 0$, т.е. в случае, когда (2.21) принимает вид уравнения колебаний струны, фазовая скорость v равна a , т.е. не зависит от частоты. Следовательно, при $c = 0$ дисперсия отсутствует. С учетом этого условие $c = 0$ имеет смысл условия отсутствия дисперсии (или искажения) волны.

В качестве примера рассмотрим телеграфное уравнение (см. §8 гл.1)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv. \quad (2.23)$$

Здесь R, L, C и G - коэффициенты сопротивления, самоиндукции, емкости и утечки, рассчитанные на единицу длины линии. Полагая $v = ue^{-\mu t}$, где $\mu = 0.5(RC + GL)/CL$, приходим к следующему уравнению для новой функции u :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu, \quad (2.24)$$

где $a = \sqrt{1/LC}$, $c = (RC - GL)^2/4LC$. Из приведенного анализа вытекает, что при $c \neq 0$, т.е. при $RC \neq GL$, имеет место дисперсия, так что сигнал

по электрической линии распространяется с искажением. С учетом этого условие

$$RC = GL \quad \text{или} \quad \frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (2.25)$$

естественно назвать условием отсутствия искажения сигналов в телеграфной линии. При выполнении условия (2.25) функция $u \equiv ve^{+\mu t}$ удовлетворяет уравнению колебаний струны и, следовательно, может быть представлена в виде суммы бегущих плоских волн. Вернувшись к исходному телеграфному уравнению (2.23), приходим к выводу, что при выполнении условия (2.25) телеграфное уравнение допускает решения в виде *затухающих* бегущих плоских волн

$$v_1(x, t) = e^{-\gamma t} \theta_1(x - at), v_2(x, t) = e^{-\gamma t} \theta_2(x + at), \gamma = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}, a = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где θ_1, θ_2 - произвольные функции. Отсутствие искажения волн при их распространении по электрической линии, которое выполняется при выполнении условия (2.25), имеет особо важное значение для телефонной и телеграфной связи на больших расстояниях.

§3. Однородное волновое уравнение в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$

3.1. Трехмерное волновое уравнение. Решение задачи Коши. Формула Кирхгофа. Рассмотрим задачу Коши для трехмерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}_+^4 \equiv \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \quad (3.1)$$

и будем искать его классическое решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.2)$$

Будем предполагать ниже, что

$$\varphi_0 \in C^3(\mathbb{R}^3), \quad \varphi_1 \in C^2(\mathbb{R}^3). \quad (3.3)$$

Пусть $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ - произвольная точка. Обозначим через $B_{at}(\mathbf{x})$ (либо $S_{at}(\mathbf{x})$) шар (либо сферу) радиуса $r = at$ с центром в точке $\mathbf{x}$, через $\mathbf{y} = (\xi, \eta, \zeta)$ обозначим переменную точку сферы $S_{at}(\mathbf{x})$ (см. рис.3.1). Покажем сначала, что для произвольной функции $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$ поверхностный

интеграл, зависящий от параметров $\mathbf{x}$ и t , определяемый формулой

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \frac{\varphi(\mathbf{y})}{r} d\sigma_r = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \varphi(\xi, \eta, \zeta) d\sigma_r, \mathbf{y} = (\xi, \eta, \zeta) \in S_{at}(\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

где $r = at$, $d\sigma_r$ – элемент площади сферы $S_{at}(\mathbf{x})$, является решением волнового уравнения (3.1).

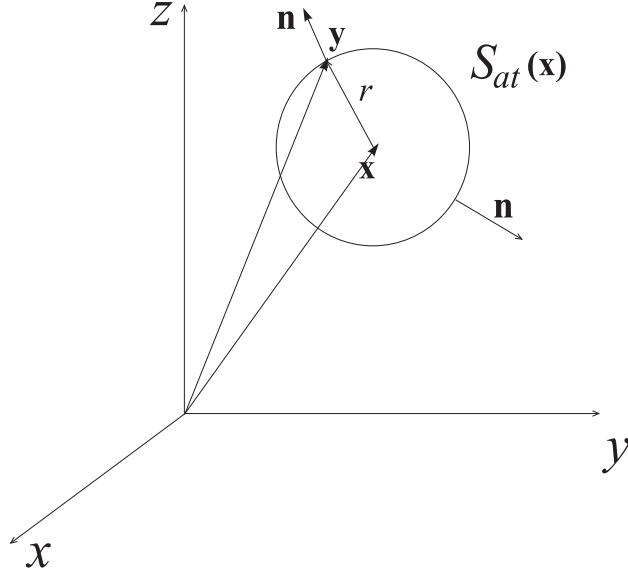


Рис.3.1

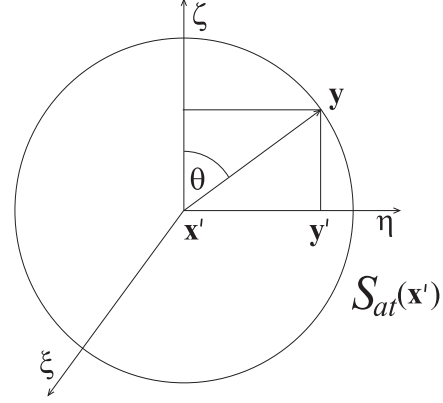


Рис.3.2

Представим $\mathbf{y}$ в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + at\mathbf{n}(\mathbf{y}) \text{ или } \xi = x + \alpha at, \eta = y + \beta at,$$

$$\zeta = z + \gamma at, \mathbf{n}(\mathbf{y}) = (\alpha(\mathbf{y}), \beta(\mathbf{y}), \gamma(\mathbf{y})). \quad (3.5)$$

Здесь $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ – единичный вектор внешней нормали к сфере $S_{at}(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{y}$, направляющие косинусы α, β и γ которого определяются формулами $\alpha = \cos\psi\sin\theta$, $\beta = \sin\psi\sin\theta$, $\gamma = \cos\theta$, где $\theta \in [0, \pi]$, $\psi \in [0, 2\pi)$ – угловые координаты точки $\mathbf{y}$ в сферической системе координат с центром в точке $\mathbf{x}$. Когда точка (точнее конец радиус-вектора) $\mathbf{y}$ пробегает сферу $S_{at}(\mathbf{x})$, соответствующий вектор нормали $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ (точнее точка (α, β, γ)) пробегает единичную сферу $S_1 = S_1(0)$ с центром в начале координат, причем между элементами площадей $d\sigma_r$ сферы S_r и $d\sigma_1$ сферы S_1 выполняется соотношение $d\sigma_r = r^2 d\sigma_1$, где $d\sigma_1 = \sin\theta d\theta d\psi$. С учетом этого делая в интеграле (3.4) замену

$$S_{at} \equiv S_r \ni \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{n}(\mathbf{y}) = (\alpha, \beta, \gamma) \in S_1, \quad d\sigma_r = r^2 d\sigma_1 \equiv (at)^2 d\sigma_1, \quad (3.6)$$

преобразуем его к соответствующему интегралу по единичной сфере S_1 . Получим

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(\mathbf{y}) d\sigma_1 \equiv \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(x + \alpha at, y + \beta at, z + \gamma at) d\sigma_1. \quad (3.7)$$

Из (3.7) вытекает, в частности, что $u \in C^l(\mathbb{R}^4)$, если $\varphi \in C^l(\mathbb{R}^3)$, $l = 1, 2, 3, \dots$.

Дифференцируя дважды (3.7) под знаком интеграла, имеем

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \left[\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{y})}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{y})}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{y})}{\partial \zeta^2} \right] d\sigma_1 \equiv \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} \Delta \varphi(\mathbf{y}) d\sigma_1, \quad (3.8)$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{x} + at\mathbf{n}$. Деля в (3.8) замену, обратную к (3.6), перепишем (3.8) в виде

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \Delta \varphi(\mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}+at\mathbf{n}} d\sigma_r, \quad \mathbf{y} = (\xi, \eta, \zeta) \in S_{at}(\mathbf{x}). \quad (3.9)$$

Дифференцируя далее (3.7) по t , получим

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(\mathbf{y}) d\sigma_1 + \frac{at}{4\pi} \int_{S_1} \left[\alpha \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \zeta} \right] d\sigma_1, \quad (3.10)$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{x} + at\mathbf{n}$. Учитывая (3.7) и делая во втором интеграле обратную к (3.6) замену, перепишем (3.10) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} &= \frac{u(\mathbf{x}, t)}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \left[\alpha \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \varphi(\mathbf{y})}{\partial \zeta} \right] d\sigma_r = \\ &= \frac{u(\mathbf{x}, t)}{t} + \frac{1}{4\pi at} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \text{grad} \varphi(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) d\sigma_r. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Применяя формулу Гаусса–Остроградского вида

$$\begin{aligned} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \text{grad} \varphi(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) d\sigma_r &= \int_{B_{at}(\mathbf{x})} \text{div} [\text{grad} \varphi(\mathbf{y})] d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \int_{B_{at}(\mathbf{x})} \Delta \varphi(\mathbf{y}) d\xi d\eta d\zeta \equiv I(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.12)$$

где точка $\mathbf{y}$ во втором и третьем интегралах пробегает весь шар $B_{at}(\mathbf{x})$, перепишем (3.11) в виде

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{u(\mathbf{x}, t)}{t} + \frac{I(\mathbf{x}, t)}{4\pi at}. \quad (3.13)$$

Дифференцируя это выражение по t , получим

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = -\frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} \left(\frac{u}{t} + \frac{I}{4\pi at} \right) - \frac{I}{4\pi at^2} + \frac{1}{4\pi at} \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{1}{4\pi at} \frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = a \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \Delta \varphi(\mathbf{y})|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}+at\mathbf{n}} d\sigma_r. \quad (3.15)$$

В самом деле, переходя в интеграле I по шару $B_{at}(\mathbf{x})$ к сферическим координатам (ρ, θ, ψ) с центром в точке $\mathbf{x}$, полагая $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \rho\mathbf{n}$, где $0 \leq \rho < at$, имеем

$$I(\mathbf{x}, t) = \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta \varphi(\mathbf{y}) \rho^2 \sin \theta d\theta d\psi d\rho, \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} + \rho\mathbf{n} \in B_{at}(\mathbf{x}).$$

Дифференцируя по времени t , входящему в переменный верхний предел внешнего интеграла, и переходя последовательно к интегралам по единичной сфере S_1 и сфере $S_{at}(\mathbf{x})$, получаем соотношение

$$\frac{\partial I(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta \varphi(\mathbf{y}) a^2 t^2 \sin \theta d\theta d\psi = a^3 t^2 \int_{S_1} \Delta \varphi(\mathbf{y}) d\sigma_1 = a \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \Delta \varphi(\mathbf{y}) d\sigma_r,$$

где $\mathbf{y} = \mathbf{x} + at\mathbf{n}$. Тем самым (3.15) доказано. Из (3.14) и (3.15) вытекает, в свою очередь, что

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{a}{4\pi} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \frac{\Delta \varphi(\mathbf{y})}{r} \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}+at\mathbf{n}} d\sigma_r. \quad (3.16)$$

Подставляя (3.9) и (3.16) в (3.1), приходим к выводу, что функция u , определяемая формулой (3.4), удовлетворяет волновому уравнению (3.1) для любой функции $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Из (3.7) и (3.10), кроме того, следует, что функция u удовлетворяет начальным условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}) \text{ в } \mathbb{R}^3. \quad (3.17)$$

Если, далее, u есть решение уравнения (3.1) с начальными данными (3.17), то в силу однородности (3.1) функция $v = \partial u / \partial t$ также является решением уравнения (3.1), но удовлетворяет с учетом (3.8) начальным условиям

$$v|_{t=0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_{t=0} = a^2 \Delta u|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^3. \quad (3.18)$$

Взяв теперь за φ в случае начальных условий (3.17) функцию φ_1 , а в случае начальных условий (3.18) – функцию φ_0 и сложив соответствующие решения, получим искомое решение уравнения (3.1), удовлетворяющее начальным условиям (3.2). Согласно построению оно определяется формулой:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \frac{\varphi_0(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r + \int_{S_{at}(\mathbf{x})} \frac{\varphi_1(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\sigma_r \right]. \quad (3.19)$$

Формула (3.19) называется *формулой Кирхгофа*.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполняются условия (3.3). Тогда решение $u \in C^2(\mathbb{R}_+^4) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^4})$ задачи Коши (3.1), (3.2) существует и определяется формулой Кирхгофа (3.19).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. В основе доказательства теоремы 3.1 лежит тот факт, что функция (3.4) является решением однородного волнового уравнения (3.1) для любой гладкой функции φ . Альтернативный метод доказательства теоремы 3.1, называемый *методом сферических средних*, основан на использовании свойств так называемых *сферических средних* от решения u , определяемых формулой:

$$u(r, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(\mathbf{x})} u d\sigma_r.$$

Здесь $S_r(\mathbf{x})$ – сфера с центром в точке $\mathbf{x}$ радиуса r . Более подробно об этом методе можно прочитать в [6, с.66], [56, с.429].

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Простой анализ формулы (3.19) показывает, что при выполнении условий (3.3) вторые производные от решения u , входящие в (3.1), существуют и непрерывны в замкнутом полупространстве $\overline{\mathbb{R}_+^4} = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, 0 \leq t < \infty\}$. Поэтому при выполнении (3.3) формула Кирхгофа описывает (с учетом терминологии замечания 1.3) *регулярное решение* задачи Коши (3.1), (3.2). Наоборот, если вместо (3.3) выполняются более общие условия, а именно:

$$\varphi_0 \in C^2(\mathbb{R}^3), \quad \varphi_1 \in C^1(\mathbb{R}^3), \quad (3.3a)$$

то функция u , определяемая по φ_0 и φ_1 формулой (3.19), по-прежнему удовлетворяет начальным условиям (3.2), но уже не удовлетворяет уравнению (3.1). (Последнее объясняется тем, что при выполнении (3.3а) правая часть в (3.19) не обладает вторыми производными, входящими в (3.1)). Однако можно показать (см. [11, §13]), что при выполнении условий вида (3.3а) и даже гораздо более общих условий на φ_0 и φ_1 функция (3.19) является решением уравнения (3.1) в некотором обобщенном смысле. С учетом этого можно считать, что формула (3.19) описывает регулярное решение при выполнении условий (3.3) и обобщенное решение, если выполняются более общие условия, например (3.3а).

3.2. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^2$. Решение задачи Коши для волнового уравнения методом спуска. Формула Пуассона. Предположим, что функции φ_0 и φ_1 в (3.2) не зависят от z . Тогда решение задачи (3.1), (3.2), определяемое формулой (3.19), также не будет зависеть от z . В этом легко убедиться, записав интегралы в (3.19) в сферических координатах. Это означает, что формула Кирхгофа (3.19) при $\mathbf{x} = \mathbf{x}' \equiv (x, y, 0)$ будет давать решение двумерной задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \text{ в } \mathbb{R}_+^3 = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \quad (3.20)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y) \text{ в } \mathbb{R}^2. \quad (3.21)$$

Формулу (3.19) не совсем удобно использовать для решения двумерной задачи (3.20), (3.21), поскольку (3.19) носит пространственный характер за счет наличия сфер $S_{at}(\mathbf{x})$. Однако в силу независимости φ_0 и φ_1 от z ее можно преобразовать в чисто “плоскую” формулу. Действительно, поскольку правая часть в (3.19) не зависит от z , то центр $\mathbf{x}$ сферы $S_{at}(\mathbf{x})$ можно взять в точке $\mathbf{x}' = (x, y, 0)$, лежащей на плоскости $\mathbb{R}^2$. В таком случае обе части этой сферы, лежащие над и под плоскостью $\mathbb{R}^2$, можно спроектировать на эту плоскость в виде круга $\Sigma_{at} = \Sigma_{at}(\mathbf{x}')$ с центром в точке $\mathbf{x}'$ радиуса at и заменить интегрирование по сфере $S_{at}(\mathbf{x}')$ интегрированием по кругу $\Sigma_{at}(\mathbf{x}')$.

Пусть $\mathbf{y} = (\xi, \eta, \zeta)$ – переменная точка сферы $S_{at}(\mathbf{x}')$, $\mathbf{y}' = (\xi, \eta, 0)$ – проекция точки $\mathbf{y}$ на плоскость $\mathbb{R}^2$. Элемент $d\sigma_r$ площади поверхности сферы $S_{at}(\mathbf{x}')$ с центром в $\mathbf{y}$ и отвечающий ему элемент площади $d\xi d\eta$ плоскости $\mathbb{R}^2$ в точке $\mathbf{y}'$ связаны соотношением

$$d\xi d\eta = \cos\theta d\sigma_r. \quad (3.22)$$

Здесь θ – угол между радиус-вектором $\mathbf{y}$ и осью ζ (см. рис. 3.2). Ясно, что

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{y} - \mathbf{y}'|}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}'|} = \frac{\sqrt{|\mathbf{y} - \mathbf{x}'|^2 - |\mathbf{y}' - \mathbf{x}'|^2}}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}'|} = \frac{\sqrt{a^2 t^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}{at}. \quad (3.23)$$

Аналогичные соотношения справедливы и для нижней полусферы.

Подставляя (3.22), (3.23) в (3.19), и учитывая, что на круг $\Sigma_{at}(\mathbf{x}')$ проектируются две полусферы сферы $S_{at}(\mathbf{x}')$, приходим к следующей формуле, решающей плоскую задачу (3.20), (3.21):

$$u(\mathbf{x}', t) = u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma_{at}(\mathbf{x}')} \frac{\varphi_0(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} + \right. \\ \left. + \int_{\Sigma_{at}(\mathbf{x}')} \frac{\varphi_1(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}} \right\}. \quad (3.24)$$

Формула (3.24) носит название *формулы Пуассона*. Подчеркнем, что формула (3.24) является “плоской” в том смысле, что интегрирование в (3.24) производится по кругу $\Sigma_{at}(\mathbf{x}')$ радиуса at с центром в точке $\mathbf{x}' = (x, y)$. Сформулируем полученный результат (с учетом замечания 3.2) в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\varphi_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\varphi_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Тогда регулярное решение $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+^3})$ задачи Коши (3.20), (3.21) существует и определяется формулой Пуассона (3.24).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Если функции φ_0 и φ_1 в (3.2) не зависят не только от z , но и от y , то аналогичные предыдущему рассуждения приводят к формуле

$$u(\mathbf{x}, t) = u(x, t) = \frac{\varphi_0(x + at) + \varphi_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\xi) d\xi, \quad (3.25)$$

решающей задачу Коши в $\mathbb{R}$ (эта формула была получена в §1 другим способом).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Для задачи Коши в $\mathbb{R}_+^4$ и $\mathbb{R}_+^3$ справедливы теоремы единственности и устойчивости по начальным данным. Они могут быть доказаны методами, аналогичными тем, которые были применены для одномерного волнового уравнения. К вопросу о единственности задачи Коши мы вернемся в §5. Что касается устойчивости, то отметим, что для устойчивости решений обеих задач не достаточно условий вида (см. §1)

$$|\tilde{\varphi}_0(\mathbf{x}) - \varphi_0(\mathbf{x})| < \delta, \quad |\tilde{\varphi}_1(\mathbf{x}) - \varphi_1(\mathbf{x})| < \delta \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{либо } \mathbb{R}^2),$$

где $\tilde{\varphi}_0$ и $\tilde{\varphi}_1$ – возмущенные начальные функции. Нужно еще потребовать дополнительно, чтобы выполнялось условие $|\nabla \tilde{\varphi}_0(\mathbf{x}) - \nabla \varphi_0(\mathbf{x})| < \delta$. Последнее связано с тем, что согласно (3.19), (3.24) решение u зависит не только от функций φ_0 и φ_1 , но и от производных функции φ_0 .

Изложенный выше метод решения плоской (и одномерной) задачи Коши носит название *метода спуска*. Такое название связано с тем, что при решении волновых уравнений на плоскости и прямой мы исходим из решения трехмерной задачи, как бы спускаясь к меньшему числу переменных. Метод спуска применим не только к волновому уравнению, но и к другим типам уравнений и позволяет в ряде случаев из формулы, определяющей решение уравнения для нескольких переменных, получить решение задачи для уравнения с меньшим числом независимых переменных.

3.3. Физическая интерпретация решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Как уже указывалось в гл.1, волновое уравнение (3.1) моделирует волновые процессы и, в частности, процесс распространения звуковых волн, т.е. процесс распространения малых гидродинамических возмущений в жидкой или газообразной среде. Для указанного процесса функция u в (3.1) имеет смысл звукового давления, а область D пространства $\mathbb{R}^3$, где $u \neq 0$, характеризуется тем, что частицы среды в D совершают малые колебания, что и является физическим механизмом переноса гидродинамических возмущений среды от точки к точке.

С помощью формулы Кирхгофа (3.19) (либо Пуассона (3.24)) можно выяснить физическую картину распространения звуковых волн в пространстве (либо на плоскости). Рассмотрим сначала случай трех измерений. Будем считать, что начальные функции φ_0 и φ_1 в (3.2) сосредоточены в некоторой ограниченной области Ω с границей Γ , точнее, что их носители $\text{supp}\varphi_0, \text{supp}\varphi_1$ содержатся в Ω , так что

$$\text{supp}\varphi_0 \subset \Omega, \text{supp}\varphi_1 \subset \Omega. \quad (3.26)$$

Используя физическую терминологию, на такие начальные функции φ_0 и φ_1 , точнее на тройку $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$, будем ссылаться как на *финитное начальное возмущение* среды в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\mathbf{x} = (x, y, z)$ – произвольная точка пространства $\mathbb{R}^3$, расположенная вне $\bar{\Omega}$. Обозначим через $d_1 = d_1(\mathbf{x})$ и $d_2 = d_2(\mathbf{x})$ соответственно наименьшее и наибольшее расстояния от точки $\mathbf{x}$ до точек Γ (см. рис.3.3).

Согласно формуле (3.19), значение решения u в точке $\mathbf{x}$ в момент t определяется значениями начальных функций φ_0 и φ_1 в точках, лежащих на сфере $S_{at}(\mathbf{x})$ радиуса at с центром в точке $\mathbf{x}$. Поэтому $u(\mathbf{x}, t) \neq 0$ только для тех значений t , для которых сфера $S_{at}(\mathbf{x})$ пересекает носители начальных функций φ_0 и φ_1 , лежащие в Ω . С учетом этого положим

$$t_1 = \frac{d_1}{a}, \quad t_2 = \frac{d_2}{a} \quad (3.27)$$

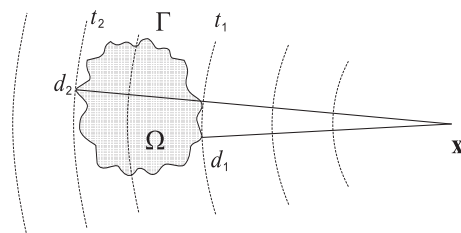


Рис.3.3

и разобьем весь временной интервал $(0, \infty)$ на три подинтервала $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ и (t_2, ∞) . Указанное разбиение, естественно, зависит от точки $\mathbf{x}$. (Оно незначительно отличается от разбиения, используемого в §1.) В соответствии с этим разбиением рассмотрим три случая.

1. $0 \leq t < t_1$. Для этих значений t сфера $S_{at}(\mathbf{x})$ *еще* не имеет общих точек с Ω . Следовательно, $\varphi_0|_{S_{at}} = \varphi_1|_{S_{at}} = 0$. Поэтому из формулы (3.19) следует, что $u(\mathbf{x}, t) \equiv 0$. (Ниже этот факт физически будет проинтерпретирован так, что финитное возмущение $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$, возникшее в начальный момент времени $t = 0$, *еще* не дошло до точки $\mathbf{x}$).

2. $t_1 \leq t \leq t_2$. Для указанных значений времени t , т.е. начиная с момента $t_1 = d_1/a$ и до момента $t_2 = d_2/a$, сфера $S_{at}(\mathbf{x})$ будет пересекать область $\overline{\Omega}$, либо касаться ее, например, при $t = t_1$. С учетом этого из формулы (3.19) следует, что $u(\mathbf{x}, t) \not\equiv 0$ для $t \in (t_1, t_2)$, т.е. что в точке $\mathbf{x}$ имеется возмущение.

3. $t_2 < t < \infty$. Для этих значений t радиус at сферы $S_{at}(\mathbf{x})$ больше d_2 , и, следовательно, сфера S_{at} *уже* не будет иметь общих точек с областью Ω (вся область Ω лежит внутри $S_{at}(\mathbf{x})$). Ввиду этого мы снова получим, как в случае 1, что $u(\mathbf{x}, t) \equiv 0$. Однако, этот факт следует интерпретировать так, что начальное возмущение *уже* прошло через точку $\mathbf{x}$.

На основании приведенного анализа можно сделать важный физический вывод о том, что акустическое возмущение $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$ среды, возникшее в начальный момент времени в некоторой области Ω пространства $\mathbb{R}^3$, распространяется по всем направлениям пространства с одной и той же скоростью, в точности равной коэффициенту a уравнения (3.1). Поэтому, если взять любую точку $\mathbf{x} \notin \overline{\Omega}$, то начальное возмущение, возникшее в Ω , придет в точку $\mathbf{x}$ в момент $t = t_1$, где момент t_1 определен в (3.27). (Более точно: в момент t_1 в точку $\mathbf{x}$ придут возмущения из точек $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$, расположенных на ближайшем для точек $\overline{\Omega}$ расстоянии d_1 от $\mathbf{x}$). В последующие моменты $t > t_1$ в точку $\mathbf{x}$ будут приходить возмущения из точек $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$, расположенных от точки $\mathbf{x}$ на расстоянии, равном $at > d_1$. Наконец, в момент $t = t_2$, где t_2 определен в (3.27), в точку $\mathbf{x}$ придут возмущения из точек $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$, расположенных на максимальном расстоянии d_2 от $\mathbf{x}$. С учетом этого решение – звуковое давление u в точке $\mathbf{x}$, может быть отлично от нуля, и, следовательно, в точке $\mathbf{x}$ может наблюдаться возмущенное состояние лишь в моменты времени t из интервала $[t_1, t_2]$. Фактически же решение u должно быть отлично от нуля в точке $\mathbf{x}$ лишь в моменты времени $t \in (t_1, t_2)$. Это является следствием того обстоятельства, что начальные функции φ_0 и φ_1 обращаются в нуль на границе Γ области Ω в силу их непрерывности в $\mathbb{R}^3$, вытекающей из (3.3) и условий (3.26). Аналогичный вывод справедлив и для точек $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, за исключением того, что для всех таких точек $t_1 = 0$, а $t_2 = d_2/a$, где d_2 – максимальное расстояние от $\mathbf{x}$ до точек $\mathbf{y} \in \overline{\Omega}$.

Основываясь на приведенных выводах, теперь мы в состоянии ввести

фундаментальное понятие современной физики и математики, а именно: понятие волны. Это понятие имеет два аспекта: физический и математический.

С физической точки зрения под *волной* (в однородной изотропной среде) следует понимать *особое возмущенное состояние среды*, при котором возмущение, возникшее в произвольной точке $\mathbf{y}$ среды, передается с постоянной скоростью a в любую другую точку $\mathbf{x}$ пространства $\mathbb{R}^3$ за конечное время, равное отношению $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|/a$, где $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ – расстояние между этими точками. В случае неоднородной среды, когда скорость распространения возмущений a зависит от координат точки $\mathbf{x}$, это время зависит не только от расстояния $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, но и от степени неоднородности среды, входящей в переменную скорость $a = a(\mathbf{x})$.

В математическом плане под *волной в пространстве* (в однородной изотропной среде без источников) *будем понимать решение задачи Коши (3.1), (3.2) для однородного волнового уравнения (3.1)*.

Используя последнее определение, для каждой волны можно определить ряд важных характеристик, например, *носитель волны, передний и задний фронты волны, области покоя*. Введем эти понятия.

Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ – произвольная точка. Если $u(\mathbf{x}, t) \neq 0$, то будем говорить, что в точке $\mathbf{x}$ в момент t *распространяется (или бежит) волна*. Объединение всех таких точек $\mathbf{x}$ в момент t обозначим через $D(t)$ и назовем *открытым носителем* волны u . Если u – непрерывная по x, y, z функция, то $D(t)$ – открытое множество, определяемое в каждый момент времени t формулой

$$D(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : u(\mathbf{x}, t) \neq 0\}. \quad (3.28)$$

Кроме множества $D(t)$, рассмотрим еще одно открытое множество (ниже “ $\text{int } M$ ” означает внутренность множества M),

$$D_0(t) = \text{int}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : u(\mathbf{x}, t) = 0\}, \quad (3.29)$$

которое в свою очередь разобьем на два подмножества

$$D''(t) = \{\mathbf{x} \in D_0(t) : u(\mathbf{x}, \tau) \equiv 0 \text{ при } 0 \leq \tau \leq t\} \text{ и } D'(t) = D_0(t) \setminus D''(t). \quad (3.30)$$

Множество $D''(t)$ физически можно интерпретировать как совокупность точек в $\mathbb{R}^3$, до которых волна u , вызванная начальным возмущением $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$, к моменту t еще не дошла и, следовательно, в которых *еще не наблюдается покой*. Аналогично $D'(t)$ представляет собой множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, через которые волна u уже прошла, и, следовательно, в которых *уже наблюдается покой*. Наряду с (открытыми) множествами $D(t)$, $D'(t)$ и $D''(t)$ рассмотрим три замкнутых множества:

$\overline{D(t)} = \text{supp } u(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $S'(t) = \overline{D(t)} \cap \overline{D'(t)}$ и $S''(t) = \overline{D(t)} \cap \overline{D''(t)}$. Множество $\overline{D(t)}$ имеет смысл замкнутого *носителя* волны u в момент t :

множество $S''(t)$, имеющее смысл “внешней” границы носителя $\overline{D(t)}$ волны u , назовем *передним фронтом волны*, наконец, множество $S'(t)$, имеющее смысл “внутренней” границы носителя $\overline{D(t)}$, назовем *задним фронтом волны*.

Осталось понять, как построить геометрически множества $D(t)$, $S'(t)$ и $S''(t)$ в каждый момент времени t . С этой целью заметим, что согласно предыдущему анализу каждая точка $\mathbf{x} \in D(t)$ характеризуется тем, что сфера $S_{at}(\mathbf{x})$ пересекает область Ω . Но таким свойством будут обладать все точки сфер $S_{at}(\mathbf{y})$, где $\mathbf{y}$ – переменная точка области Ω . Если граница Γ области Ω достаточно гладкая, то существуют две огибающие указанного семейства сфер: внутренняя и внешняя. Внешняя огибающая отделяет точки множества $D''(t)$, до которых волна u еще не дошла, от точек открытого носителя $D(t)$ волны u , и, следовательно, указанная огибающая совпадет с передним фронтом волны. Внутренняя огибающая отделяет точки открытого носителя $D(t)$ волны u от точек множества $D'(t)$, через которые волна, вызванная начальным возмущением $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$, уже прошла, и, следовательно, в которых вновь возникло состояние покоя, поэтому она совпадает с задним фронтом волны.

Резюмируя, приходим к выводу, что в любой момент t пространство $\mathbb{R}^3$ можно представить в виде объединения пяти непересекающихся подмножеств:

$$\mathbb{R}^3 = D'(t) \cup S'(t) \cup D(t) \cup S''(t) \cup D''(t). \quad (3.31)$$

Здесь, соответственно, $D''(t)$ – множество точек, до которых волна u еще не дошла в момент t , $S''(t)$ – передний фронт волны, $D(t)$ – открытый носитель волны, $S'(t)$ – задний фронт волны, наконец, $D'(t)$ – множество точек, через которые волна уже прошла. Некоторые из множеств в (3.31) могут быть пустыми, например, множество $D'(t)$ и задний фронт волны $S'(t)$ при малых t . С использованием введенных обозначений сам волновой процесс можно трактовать с математической точки зрения как процесс изменения с течением времени всех указанных в (3.31) множеств.

Основываясь на приведенном математическом выводе, можно сформулировать следующий физический вывод о характере распространения (звуковых) волн в пространстве $\mathbb{R}^3$, вызванных начальным возмущением, а именно: наличие финитного начального возмущения $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$ в однородной среде пространства $\mathbb{R}^3$ приводит к возникновению в пространстве $\mathbb{R}^3$ волны, т.е. *особого возмущенного состояния среды*, при котором начальное возмущение от каждой точки $\mathbf{y}$ носителя начальных функций передается в любую другую точку $\mathbf{x}$ пространства $\mathbb{R}^3$ через конечное время $t = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/a$. При этом в каждый момент времени волна имеет четко выраженный передний фронт, а начиная с некоторого времени, зависящего от размеров области Ω , и задний фронт.

Указанный вывод представляет собой расширенное содержание принципа Х. Гюйгенса распространения волн в пространстве, названного так в честь известного голландского ученого Н. Huygens (1629-1695), сформулировавшего его в 1678 г.:

ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА: *Всякое начальное возмущение, финитное (или, как говорят физики, локализованное) в пространстве $\mathbb{R}^3$, вызывает в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ действие, финитное по времени: при этом имеет место распространение волны с четко выраженными передним и задним фронтами.*

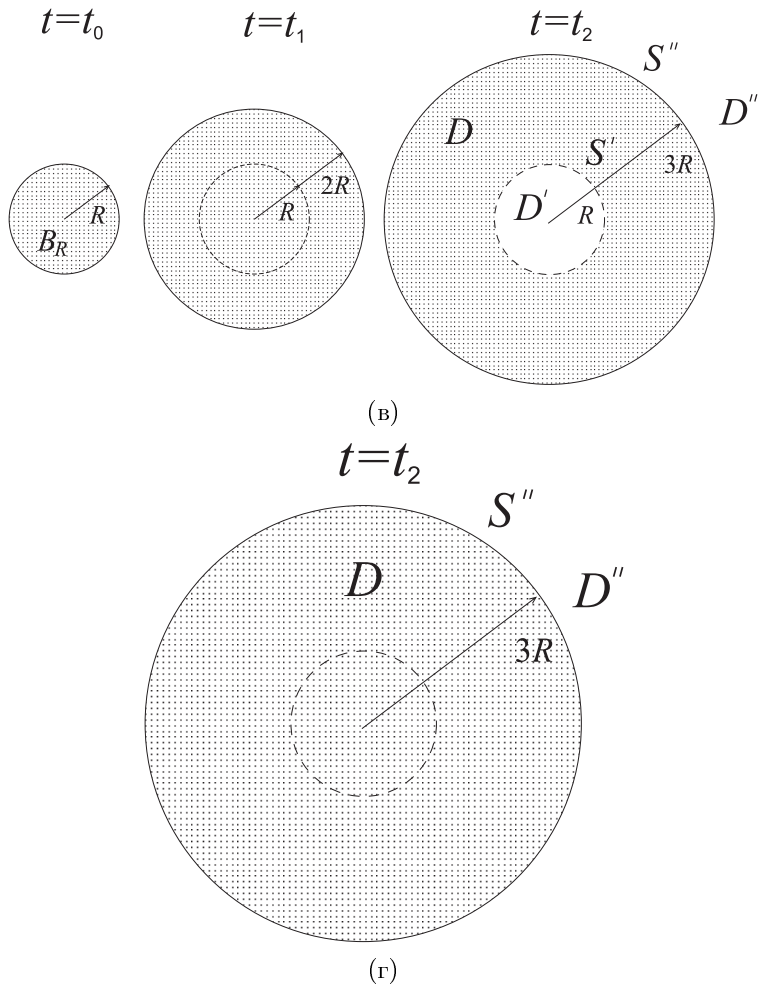


Рис. 3.4.

ПРИМЕР 1. Пусть область Ω есть шар B_R с центром в начале координат радиуса R . Основываясь на предыдущем анализе, нетрудно установить, что в каждый момент времени $t > 0$ передний S'' и задний S' фронты волны, образованной начальным возмущением $(B_R, \varphi_0, \varphi_1)$, есть сферы с центрами в начале координат, радиусов $at + R$ и $at - R$ соответственно, а носитель волны $D(t)$ представляет собой шаровой слой, заключенный между этими сферами. При этом задний фронт возникает только при $t > R/a$. Геомет-

рическая картина распространения волны в этом случае представлена на рис.3.4а, где в моменты $t = 0$, $t_1 = R/a$ и $t_2 = 2R/a$ изображены в виде затемненной области носитель $D(t)$ волны u так же, как и ее передний и задний фронты.

Принцип Гюйгенса впервые был сформулирован им в 1678 г., а далее был развит А. Френелем в 1818 г. при исследовании проблем дифракции волн. Строгая математическая формулировка принципа Гюйгенса впервые была дана Г. Гельмгольцем в 1859 г. для стационарного и Г. Кирхгофом в 1882 г. для нестационарного случаев. Позже в работах Ж. Адамара было установлено, что принцип Гюйгенса справедлив в пространстве $\mathbb{R}^n$ при любом нечетном $n \geq 3$ и не справедлив при $n = 1$ и любом четном n (см. об этом ниже).

3.4. Физическая интерпретация решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим теперь задачу (3.20), (3.21). Ее можно интерпретировать двояко: как задачу о распространении волн в пространстве $\mathbb{R}^3$ при условии, что начальные данные не зависят от z , либо как задачу о распространении волны на плоскости $z = 0$.

Как и выше, считаем, что функции φ_0 и φ_1 равны нулю вне некоторой ограниченной области Ω плоскости, ограниченной контуром Γ , так что выполняется условие (3.26). Это означает, что начальное возмущение сосредоточено: при первой интерпретации - внутри бесконечного цилиндра с направляющей Γ и образующими, параллельными оси z ; при второй интерпретации - внутри плоской области Ω . Ниже мы будем придерживаться второй интерпретации.

Пусть точка $\mathbf{x} = (x, y)$ лежит вне области Ω . Как и выше, обозначим через d_1 и d_2 соответственно наименьшее и наибольшее расстояния от $\mathbf{x}$ до точек границы Γ . Введем моменты t_1 и t_2 по формуле (3.27), но, в отличие от предыдущего, рассмотрим только два случая.

1. $0 \leq t < t_1$. В этом случае круг $\Sigma_{at}(\mathbf{x})$ радиуса at с центром в точке $\mathbf{x}$ находится вне Ω . Следовательно, $\varphi_0 = \varphi_1 \equiv 0$ в $\Sigma_{at}(\mathbf{x})$ и формула (3.24) дает: $u(\mathbf{x}, t) \equiv 0$. Физически это означает, что до точки $\mathbf{x}$ возмущение еще не дошло.

2. $t_1 \leq t < \infty$. В момент $t_1 = d_1/a$ в точку $\mathbf{x}$ придет передний фронт волны. Начиная с этого момента, круг $\Sigma_{at}(\mathbf{x})$ и область Ω будут иметь общую часть, где $\varphi_0^2 + \varphi_1^2 \neq 0$, причем при $t \geq t_2 = d_2/a$ эта общая часть просто совпадает с Ω . Поэтому из (3.24) следует, что $u(\mathbf{x}, t) \neq 0$ при $t_1 < t < \infty$. Это означает, что возмущение, попав в момент $t_1 = d/a$ в точку $\mathbf{x}$, никогда не прекратится, как это было в случае трехмерного пространства. Хотя, ввиду наличия в (3.24) выражения $\sqrt{(at)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}$ в знаменателе, решение u будет стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$, т. е. будет выполняться условие $\lim_{t \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}, t) = 0$. Таким образом, акустическое возмущение $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$, возникшее в начальный момент времени $t = 0$ на плоскости,

приводит к распространению на плоскости волны, которая в каждый момент времени t имеет четко выраженный передний фронт, представляющий собой некоторую замкнутую кривую – огибающую окружностей $\partial\Sigma_{at}(\mathbf{y})$ радиуса at с центрами в точках $\mathbf{y}$ области Ω , но, в отличие от случая трех измерений, не имеет заднего фронта. Другими словами, начальное возмущение $(\Omega, \varphi_0, \varphi_1)$, локализованное на плоскости $\mathbb{R}^2$, вызывает в каждой точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ возмущение, которое уже не является локализованным по времени. Это означает, что на плоскости принцип Гюйгенса не выполняется.

Причину этого легко понять, если вспомнить, что рассматриваемая плоская задача (3.20), (3.21) фактически представляет собой трехмерную задачу (3.1), (3.2) при условии, что функции φ_0 и φ_1 не зависят от z , для которой носители функций φ_0 и φ_1 расположены в цилиндре с направляющей Γ и образующими, параллельными оси z . Поскольку сферическая поверхность $S_{at}(\mathbf{x}')$ будет пересекать этот цилиндр при всех $t > t_1$, то оба интеграла в исходной трехмерной формуле Кирхгофа (3.19) будут, вообще говоря, отличны от нуля для всех значений $t > t_1$. Отметим также, что при трехмерной интерпретации задачи (3.20), (3.21) передний фронт, т.е. внешняя граница носителя решения, имеет вид цилиндрической поверхности с параллельными оси z образующими. С учетом этого на функцию (3.24), являющуюся решением задачи (3.20), (3.21), часто ссылаются как на *цилиндрическую волну* (см. об этом подробнее в §2).

ПРИМЕР 2. Пусть область Ω в (3.26) есть круг B_R с центром в начале координат радиуса R . Тогда в каждый момент времени $t > 0$ передний фронт представляет собой окружность радиуса $R+at$, носитель волны имеет вид соответствующего круга радиуса $R+at$, а задний фронт отсутствует. Геометрия носителя $D(t)$ такой волны u в моменты $t = 0$ и $t_1 = R/a$ аналогична геометрии носителя трехмерной волны на рис.3.4а, а при $t_2 = 2R/a$ в отличие от трехмерного случая, носитель $D(t_2)$ имеет вид круга радиуса $3R$, указанного в виде затемненной области на рис.3.4.б.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Аналогичные рассуждения можно провести и для формулы Даламбера (3.25) в предположении, что начальные функции φ_0 и φ_1 отличны от нуля на конечном интервале (x_1, x_2) (см. также §1). Нетрудно убедиться, что для слагаемого

$$\frac{1}{2}[\varphi_0(x - at) + \varphi_0(x + at)]$$

формулы (3.25) имеет место принцип Гюйгенса, а второе слагаемое

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\xi) d\xi$$

ведет себя аналогично формуле (3.24), с той лишь разницей, что оно не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

§4. Задача Коши для неоднородного волнового уравнения

4.1. Задача Коши в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$, заключающуюся в нахождении функции $u \in C^2(\mathbb{R}_+^4) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^4})$ из условий

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f \quad \text{в } \mathbb{R}_+^4 \equiv \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad (4.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(\mathbf{x}) \quad \text{в } \mathbb{R}^3. \quad (4.2)$$

Для нахождения решения задачи (4.1), (4.2) достаточно найти решение уравнения (4.1) при нулевых начальных условиях

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^3, \quad (4.3)$$

так как, добавляя к этому решению решение задачи (3.1), (3.2) для однородного волнового уравнения, определяемое формулой Кирхгофа (3.19), мы получим с учетом линейности уравнения (4.1) искомое решение задачи (4.1), (4.2).

Как и в одномерном случае (см. §1), будем отыскивать решение задачи Коши (4.1), (4.3) через решение аналогичной задачи для соответствующего однородного волнового уравнения. С этой целью рассмотрим функцию v переменных $\mathbf{x}, t$ и параметра τ , удовлетворяющую однородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \times (\tau, \infty) \quad (4.4)$$

и следующими начальным условиям при $t = \tau$:

$$v|_{t=\tau} = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=\tau} = f(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{в } \mathbb{R}^3. \quad (4.5)$$

Вводя вместо t новую переменную $t_1 = t - \tau$, замечаем, что функция $w(\mathbf{x}, t_1, \tau) \equiv v(\mathbf{x}, t_1 + \tau, \tau)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} = a^2 \Delta w \quad \text{в } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \quad (4.6)$$

и начальным условиям при $t_1=0$, имеющим вид

$$w|_{t_1=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial t_1} \right|_{t_1=0} = f(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3. \quad (4.7)$$

В таком случае функция w может быть представлена с помощью формулы Кирхгофа (3.19), принимающей в данном случае вид

$$w(\mathbf{x}, t_1, \tau) = \frac{1}{4\pi a} \int_{S_{at_1}(\mathbf{x})} \frac{f(\mathbf{y}, \tau)}{at_1} d\sigma. \quad (4.8)$$

Для справедливости этой формулы достаточно предположить в силу теоремы 3.1, что функция f непрерывна в замкнутой области $\overline{\mathbb{R}_+^4} = \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ вместе со всеми первыми и вторыми производными по $x_1 = x, x_2 = y$ и $x_3 = z$. Указанный факт кратко запишем в виде

$$f \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^4}), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^4}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \in C^0(\overline{\mathbb{R}_+^4}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.9)$$

Возвращаясь к переменным t и v и вводя сферические координаты переменной точки $\mathbf{y} \in S_{at_1}(\mathbf{x})$ в (4.8) с помощью формул (см. §3)

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + a(t - \tau)\mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = (\cos\psi\sin\theta, \sin\psi\sin\theta, \cos\theta), \quad (4.10)$$

$$d\sigma = a^2(t - \tau)^2 \sin\theta d\theta d\psi,$$

перепишем (4.8) в виде

$$v(\mathbf{x}, t, \tau) = \frac{1}{4\pi a} \int_{S_{a(t-\tau)}(\mathbf{x})} \frac{f(\mathbf{y}, \tau)}{a(t - \tau)} d\sigma = \frac{t - \tau}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f[\mathbf{x} + a(t - \tau)\mathbf{n}, \tau] \sin\theta d\theta d\psi. \quad (4.11)$$

Покажем теперь, что функция $u : \overline{\mathbb{R}_+^4} \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$u(\mathbf{x}, t) \equiv \int_0^t v(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau, \quad (4.12)$$

является искомым решением задачи (4.1), (4.3). В самом деле, дифференцируя (4.12) по x, y, z и t , имеем

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \Delta v(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial v(\mathbf{x}, t, \tau)}{\partial t} d\tau + v(\mathbf{x}, t, t) = \int_0^t \frac{\partial v(\mathbf{x}, t, \tau)}{\partial t} d\tau. \quad (4.14)$$

(Внеинтегральный член в (4.14) равен нулю в силу первого условия в (4.5)). Дифференцируя (4.14) по t , получим с учетом (4.5), что

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v(\mathbf{x}, t, \tau)}{\partial t^2} d\tau + f(\mathbf{x}, t). \quad (4.15)$$

Поскольку v удовлетворяет однородному волновому уравнению (4.4), то из (4.13), (4.15) следует, что u является решением неоднородного уравнения (4.1), а из (4.12), (4.14) следует, что u удовлетворяет однородным начальным условиям (4.3). Тем самым доказано, что функция (4.12) является искомым решением задачи Коши (4.1), (4.3).

Подставляя в (4.12) вместо функции v ее выражение (4.11), получим

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t - \tau) d\tau \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f[\mathbf{x} + a(t - \tau)\mathbf{n}, \tau] \sin\theta d\theta d\psi. \quad (4.16)$$

Введем в (4.16) вместо переменной интегрирования τ новую переменную

$$r = a(t - \tau). \quad (4.17)$$

Учитывая, что $t - \tau = r/a$, $\tau = t - (r/a)$, $d\tau = -(dr/a)$, и что r меняется от at до 0 при изменении τ от 0 до t , формулу (4.16) можно переписать в виде

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(\mathbf{x} + r\mathbf{n}, t - r/a)}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\psi dr. \quad (4.18)$$

Из (4.10) и (4.17) следует, что величина r имеет смысл расстояния между фиксированной точкой $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и переменной точкой $\mathbf{y}$ пространства $\mathbb{R}^3$, так что $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$. При этом при изменении r от 0 до at , а пары (θ, ψ) по единичной сфере S_1 точка $\mathbf{y}$ пробегает шар $B_{at}(\mathbf{x})$ радиуса at с центром в $\mathbf{x}$. С учетом этого формулу (4.18) можно переписать в виде

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{B_{at}(\mathbf{x})} \frac{f(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/a)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \quad (d\mathbf{y} = d\xi d\eta d\zeta). \quad (4.19)$$

Интеграл в правой части формулы (4.19), описывающей потенциал волнового поля, являющегося решением задачи Коши (4.1), (4.3), называется *запаздывающим потенциалом*. Такое название связано с тем, что значение потенциала u в фиксированной точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ в фиксированный момент времени $t > 0$ определяется значениями правой части f уравнения (4.1), описывающей плотность объемных источников, в точках $\mathbf{y} \in B_{at}(\mathbf{x})$, взятыми в предыдущие моменты времени $\tau = t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/a$. Другими словами, для нахождения потенциала u в точке $(\mathbf{x}, t)$ мы интегрируем плотность f источников поля по шару $B_{at}(\mathbf{x})$, причем значения функции f в произвольной точке $\mathbf{y} \in B_{at}(\mathbf{x})$ берутся не в рассматриваемый момент времени t , а в момент $t - r/a$, предшествующий моменту t . При этом величина запаздывания $r/a = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/a$, зависящая как от $\mathbf{x}$, так и $\mathbf{y}$, в точности равна времени, необходимому для прихода возмущения из точки $\mathbf{y}$ в точку $\mathbf{x}$ (со скоростью a). Указанный факт, очевидно, объясняется конечностью скорости распространения возмущений, которая для волнового уравнения (4.1) равна a .

Отметим также, что при выполнении условий (4.9) все вторые производные от функции u в (4.19), входящие в уравнение (4.1) существуют и непрерывны в замкнутом полупространстве $\overline{\mathbb{R}_+^4}$. Это означает, что формула (4.19) описывает регулярное решение задачи (4.1), (4.3). Сформулируем полученный результат.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполняются условия (4.9). Тогда функция $u : \overline{\mathbb{R}_+^4} \rightarrow \mathbb{R}$, определяемая запаздывающим потенциалом (4.19), является регулярным решением задачи Коши (4.1), (4.3).

4.2. Задача Коши в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$. Аналогичным образом можно найти решение двумерной задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \quad (4.20)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^2. \quad (4.21)$$

При выполнении условий на f вида (4.9) это решение имеет вид [11, с.214]

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \left[\int_{\rho \leq a(t-\tau)} \frac{f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}} \right] d\tau, \quad (4.22)$$

где ρ – расстояние между фиксированной точкой (x, y) и переменной точкой (ξ, η) плоскости $\mathbb{R}^2$: $\rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$.

Наконец, решение одномерной задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad \text{в} \quad \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (4.23)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R} \quad (4.24)$$

имеет вид (см. §1 и [11, с.214])

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left[\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right] d\tau. \quad (4.25)$$

4.3. Качественный анализ решений неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$. Займемся качественным анализом приведенных выше формул для решения неоднородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$. Предварительно напомним (см. гл.2), что поверхность $\Gamma(\mathbf{x}_0, t_0)$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$, определяемая соотношением $\Gamma(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : a^2(t - t_0)^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 = 0\}$, называется *характеристической конической поверхностью* (или более кратко *характеристическим конусом*) для волнового уравнения (4.1) с вершиной в точке $(\mathbf{x}_0, t_0)$. Указанная поверхность $\Gamma(\mathbf{x}_0, t_0)$ является границей конусов

$$K^+(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : a(t - t_0) > |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\},$$

$$K^-(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : a(t_0 - t) > |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\},$$

называемых соответственно *конусами будущего* и *прошлого* с вершиной в $(\mathbf{x}_0, t_0)$.

Важную роль с точки зрения анализа поведения решения u задачи Коши играет кусок $K_n^-(\mathbf{x}_0, t_0)$ конуса прошлого, отсекаемый плоскостью $t = 0$, т.е. пересечение конуса $K^-(\mathbf{x}_0, t_0)$ с полупространством $\mathbb{R}_+^{n+1} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_{t,+}$. В частных случаях, когда $n = 1$ или $n = 2$, соответствующие куски

$$K_1^-(x_0, t_0) = \{(x, t) \in K^-(x_0, t_0) : t > 0, a(t_0 - t) > |x - x_0|\},$$

$$K_2^-(x_0, y_0, t_0) = \{(x, y, t) \in K^-(x_0, y_0, t_0) : t > 0, a(t_0 - t) > \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\}$$

изображены на рис.4.1а и рис.4.1б. Для краткости на кусок $K_n^-(\mathbf{x}_0, t_0)$ будем также ссылаться как на конечный конус (или треугольник при $n = 1$) прошлого, а на его боковую границу $\Gamma_n^-(\mathbf{x}_0, t_0)$ - как на конечный характеристический конус (треугольник при $n = 1$) прошлого.

Используя введенные конечные конусы, перейдем теперь к анализу формул (4.19), (4.22), (4.25). Начнем исследование с самой наглядной формулы (4.25). Простой анализ показывает, что интегрирование в формуле (4.25) производится в точности по треугольнику $K_1^-(x, t)$. Точнее говоря, правая

часть в (4.25) представляет собой повторный интеграл, к которому сводится двойной (по переменным x, t) интеграл в формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{K_1^-(x, t)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (4.25a)$$

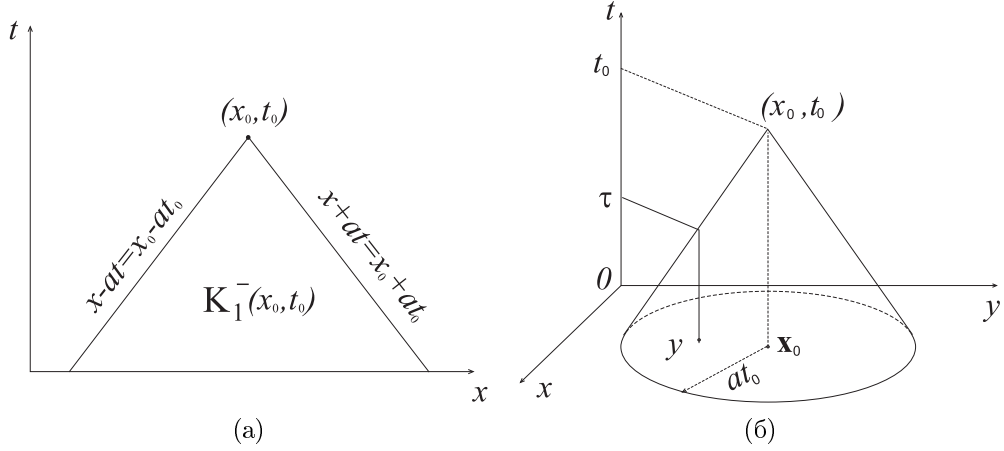


Рис. 4.1.

Аналогичный факт справедлив и для формулы (4.22), решающей двумерную задачу Коши (4.20), (4.21). Указанную формулу можно переписать в виде

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{K_2^-(x, y, t)} \frac{f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - (x - \xi)^2 - (y - \eta)^2}}. \quad (4.22a)$$

Другими словами, правая часть в (4.22) представляет собой повторный интеграл, к которому сводится тройной по переменным x, y и t интеграл по конечному конусу $K_2^-(x, y, t)$ в правой части (4.22a).

Что касается формулы (4.19), решающей трехмерную задачу Коши (4.1), (4.3), то простой анализ показывает, что она может быть переписана в виде:

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_3^-(\mathbf{x}, t)} (t - \tau) f[\mathbf{x} + a(t - \tau)\mathbf{n}, \tau] \sin\theta d\theta d\psi. \quad (4.19a)$$

Подчеркнем, что в отличие от формул (4.25a) и (4.22a), интегрирование в формуле (4.19a) производится по конечному характеристическому конусу $\Gamma_3^-(\mathbf{x}, t)$, т. е. по боковой границе конечного конуса $K_3^-(\mathbf{x}, t)$.

Формула (4.25a) (либо (4.22a)) означает, что значение решения одномерной задачи Коши (4.23), (4.24) в точке (x, t) (либо двумерной задачи

Коши (4.20), (4.21) в точке (x, y, t) зависит от значений правой части f уравнения (4.23) (либо (4.20)) в точках, расположенных внутри характеристического треугольника $K_1^-(x, t)$ (либо конуса $K_2^-(x, y, t)$). В противоположность этому значение $u(\mathbf{x}, t)$ решения u трехмерной задачи Коши (4.1), (4.3) в точке $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_+^4$ зависит лишь от значений $f(\mathbf{y}, t)$ плотности f в (четырёхмерных) точках $(\mathbf{y}, t)$, расположенных на боковой поверхности $\Gamma_3^-(\mathbf{x}, t)$ конечного конуса $K_3^-(\mathbf{x}, t)$. Таким образом, как и в §3, мы опять наблюдаем качественное отличие решений одномерной и двумерной задач Коши (4.23), (4.24) и (4.20), (4.21) соответственно от решения трехмерной задачи Коши (4.1), (4.3) для неоднородного волнового уравнения. Указанное отличие имеет ту же самую природу, что и для однородного волнового уравнения (см. §3), т.е. оно связано с нарушением принципа Гюйгенса в $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$, а также в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ четного числа измерений. Более детально этот вопрос освещается в [11, §14] и [35, гл.24].

§5. Некоторые общие вопросы теории распространения волн в пространстве $\mathbb{R}^n$

В этом параграфе мы докажем единственность решения задачи Коши для волнового уравнения в пространстве $\mathbb{R}^n$ любого числа измерений. Основываясь на этой теореме и результатах предыдущих параграфов, мы введем далее ряд важных в математическом и физическом планах понятий, связанных с общими уравнениями гиперболического типа. К указанным понятиям относятся область зависимости для волнового уравнения, область влияния и область определения для волнового процесса.

5.1. Теорема единственности решения задачи Коши для волнового уравнения. Теоремы единственности решений задач математической физики доказываются, как правило, независимо от метода их решения. Ниже мы приведем такое доказательство для двумерной (для определенности) задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t) \quad \text{в } \mathbb{R}_+^3 \equiv \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \quad (5.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x, y), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y) \quad \text{в } \mathbb{R}^2. \quad (5.2)$$

В (5.1) мы считаем для простоты, что $a = 1$, чего можно достигнуть, заменяя t на t/a . Докажем, что задача Коши (5.1), (5.2) имеет единственное регулярное решение из класса $C^2(\overline{\mathbb{R}_+^3})$.

Предположим противное, что существуют два регулярных решения u_1 и u_2 задачи (5.1), (5.2). Тогда их разность $u = u_1 - u_2$, очевидно, является

регулярным решением однородной задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \text{в } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty), \quad (5.3)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^2. \quad (5.4)$$

Покажем, что $u \equiv 0$ в $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$. С этой целью возьмем произвольную точку $(\mathbf{x}_0, t_0) = (x_0, y_0, t_0)$, $t_0 > 0$ и из нее, как вершины, проведем конус прошлого

$$K^-(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : t_0 - t > |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\} \quad (5.5)$$

до пересечения с плоскостью $t = 0$. Обозначим через $K \equiv K_2^-(\mathbf{x}_0, t_0)$ область (конечный конус), ограниченную частью Γ боковой поверхности конуса $K^-(\mathbf{x}_0, t_0)$ и частью $\Sigma = \Sigma(\mathbf{x}_0, t_0)$ плоскости $t = 0$, отсекаемой конусом $K^-(\mathbf{x}_0, t_0)$ (см. рис.4.1б). Легко проверить, что

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &\equiv \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] - \\ &- 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Проинтегрируем (5.6) по области K . Поскольку функция u является решением задачи (5.3), (5.4), так что левая часть (5.6) равна нулю, то получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_K \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} dx dy dt. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Используя формулу Гаусса-Остроградского, преобразуем объемный интеграл в (5.7) в поверхностный интеграл по границе $\Gamma \cup \Sigma$ области K . Так как в силу (5.4) $\partial u / \partial x = \partial u / \partial y = \partial u / \partial t = 0$ на Σ , то интеграл в (5.7) преобразуется лишь в один поверхностный интеграл по Γ :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \left\{ \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] \cos(\mathbf{n}, t) - \right. \\ \left. 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y) \right\} d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь $\mathbf{n} = (\cos(\mathbf{n}, x), \cos(\mathbf{n}, y), \cos(\mathbf{n}, t))$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ .

Легко видеть, что в каждой точке $(\mathbf{x}, t) = (x, y, t)$ боковой поверхности Γ выполняются условия $\cos^2(\mathbf{n}, t) = \cos^2(\mathbf{n}, x) + \cos^2(\mathbf{n}, y) = 1/2$. С учетом этого равенство (5.8) можно переписать в виде

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\cos(\mathbf{n}, t)} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, t) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(\mathbf{n}, x) \right]^2 + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, t) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(\mathbf{n}, y) \right]^2 \right\} d\sigma = 0 \quad (5.9)$$

Поскольку $\cos(\mathbf{n}, t) = 1/\sqrt{2}$ на Γ , то из (5.9) следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, t) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(\mathbf{n}, x) = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, t) - \frac{\partial u}{\partial t} \cos(\mathbf{n}, y) = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (5.10)$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{\partial u / \partial x}{\cos(\mathbf{n}, x)} = \frac{\partial u / \partial y}{\cos(\mathbf{n}, y)} = \frac{\partial u / \partial t}{\cos(\mathbf{n}, t)} \text{ на } \Gamma. \quad (5.11)$$

Равенства (5.11) означают, что в каждой точке $(\mathbf{x}, t) \in \Gamma$ вектор ∇u и вектор нормали $\mathbf{n}$ параллельны, так что с некоторым коэффициентом пропорциональности $\lambda = \lambda(\mathbf{x}, t)$ справедливо равенство

$$\nabla u(\mathbf{x}, t) = \lambda(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma. \quad (5.12)$$

Обозначим через $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$ единичный вектор образующей конуса в произвольной точке $(\mathbf{x}, t) \in \Gamma$. Учитывая (5.12), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial l}(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla u(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{l} = \lambda(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{l}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (5.13)$$

Последнее равенство в (5.13) следует из того условия, что векторы $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$ ортогональны. Равенство (5.13) означает, что на каждой образующей конуса $u = \text{const}$. Но во всех точках конуса, где образующие пересекают плоскость $t = 0$, согласно (5.4) имеем, что $u = 0$. Отсюда следует, что $u = 0$ вдоль каждой образующей конуса, а следовательно, $u = 0$ и в точке $(\mathbf{x}_0, t_0)$ ■.

Фактически мы доказали, что решение $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_+^3})$ задачи Коши (5.1), (5.2) равно нулю в произвольной точке $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \mathbb{R}_+^3$, если правая часть f уравнения (5.1) равна нулю в конусе $K(\mathbf{x}_0, t_0)$, а функции φ_0 и φ_1 равны нулю в круге $\Sigma = \Sigma(\mathbf{x}_0, t_0)$, где $K(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : t > 0, t_0 - t > |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\}$, $\Sigma(\mathbf{x}_0, t_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < at_0\}$. Подчеркнем, что указанный факт имеет место независимо от того, какие значения (нулевые или отличные от нуля) принимает правая часть f вне замкнутого конуса $\overline{K}$, а начальные

функции φ_0 и φ_1 – вне замкнутого круга $\overline{\Sigma}$. Другими словами, значения правой части f вне $\overline{K}$ и начальных функций φ_0 и φ_1 вне $\overline{\Sigma}$ не влияют на значения решения u в точке $(\mathbf{x}, t)$. Обобщая указанный результат на случай n измерений, приходим к теореме:

ТЕОРЕМА 5.1. *Рассмотрим две задачи Коши:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(\mathbf{x}, t) \text{ в } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), u|_{t=0} = \varphi_0(\mathbf{x}), \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(\mathbf{x}) \text{ в } \mathbb{R}^n, \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = g(\mathbf{x}, t) \text{ в } \mathbb{R}^n \times (0, T), v|_{t=0} = \psi_0(\mathbf{x}), \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi_1(\mathbf{x}) \text{ в } \mathbb{R}^n. \quad (5.15)$$

Пусть выполняются условия:

- (i) $f = g$ в конусе $K_n^-(\mathbf{x}_0, t_0) = \{(\mathbf{x}, t) : t > 0, a(t_0 - t) > |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|\}$;
- (ii) $\varphi_0 = \psi_0, \varphi_1 = \psi_1$ в шаре $\Sigma_{at}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < at_0\}$.

Если обе задачи имеют регулярное решение, то эти решения тождественно совпадают в $\overline{K}_n^-(\mathbf{x}_0, t_0)$.

5.2. Область зависимости, область влияния и область определения для волнового уравнения. Основываясь на установленных выше фактах, введем в рассмотрение еще ряд важных понятий, используемых в теории уравнений в частных производных гиперболического типа и, в частности, в теории волновых уравнений.

Пусть $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \equiv \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ – произвольная точка. *Областью зависимости* для точки $(\mathbf{x}, t)$ называется то множество точек плоскости $t = 0$, данные Коши на котором однозначно определяют значение $u(\mathbf{x}, t)$ решения волнового уравнения в (5.14) при $f = 0$. Из предыдущих результатов вытекает, что в частных случаях $n = 1, 2, 3$ областью зависимости для точки $(\mathbf{x}, t)$ является соответственно замкнутый интервал и замкнутый круг

$$I_{at}(x) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| \leq a^2 t^2\}, \quad \Sigma_{at}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq at\}, \quad (5.16)$$

а при $n = 3$ – замкнутый шар $B_{at}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leq at\}$. Более того, из формулы Кирхгофа (3.19) следует, что при $n = 3$ областью зависимости для точки $(\mathbf{x}, t)$ является на самом деле сфера

$$S_{at}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = at\}. \quad (5.17)$$

Если, далее, носителем данных Коши является некоторая область Ω плоскости $t = 0$, то данные Коши в области Ω *влияют* на решение во всех точках $(\mathbf{y}, t)$ множества $K \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$ для которого пересечение $\Omega \cap \{\mathbf{y} \in K : |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 \leq a^2 t^2\}, \mathbf{x} \in \Omega$ не пусто. Указанное множество K называется *множеством влияния* области Ω (см. рис.5.1). Если Ω представляет

собой одну точку: $S = \{\mathbf{x}\}$, то множеством влияния K точки $\mathbf{x}$ является треугольник будущего

$$K_1^+(x, 0) = \{(y, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : at > |y - x|\}$$

при $n = 1$, трехмерный (пространственно-временной) конус будущего

$$K_2^+(\mathbf{x}, 0) = \{(\mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) : at > |\mathbf{y} - \mathbf{x}|\}$$

при $n = 2$ и граница конуса будущего, т.е. характеристический конус будущего

$$\Gamma_3^+(\mathbf{x}, 0) = \partial K_3^+(\mathbf{x}, 0) = \{(\mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) : at = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|\}$$

при $n = 3$.

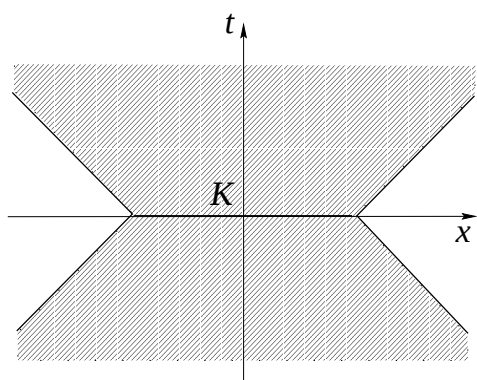


Рис.5.1

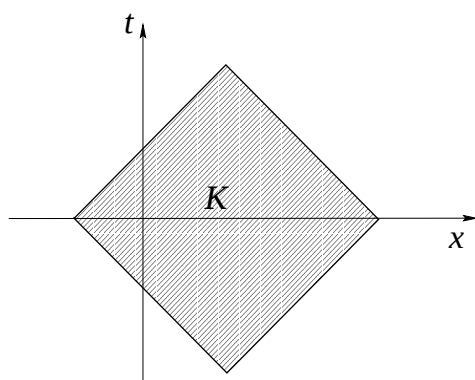


Рис.5.2

Множество точек $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, на котором решение u однозначно определяется по данным Коши в области Ω , называется *областью определения* $u(\mathbf{x}, t)$ с начальными данными в Ω (см. рис.5.2). В случае $n = 1$ (либо 2) область определения состоит из всех точек $(\mathbf{x}, t)$, для которых отрезок $I_{at}(\mathbf{x})$ либо круг $\Sigma_{at}(\mathbf{x})$ в (5.16) расположены в Ω . При $n = 3$ область определения состоит из всех точек $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}_+^4$, для которых сфера $S_{at}(\mathbf{x})$ в (5.17) расположена в Ω .

Приведенные результаты распространяются на более общую ситуацию, когда носителем данных Коши является поверхность S *пространственного типа*, а также на случай общих дифференциальных уравнений гиперболического типа. Более подробно об этом можно прочитать в [11, §13, 14], [23].

Литература

- [1] *Адамар Ж.* Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 352 с.
- [2] *Алексеев Г.В.* Численные методы решения задач математической физики. Владивосток. Изд-во Дальневост. ун-та, 1987. 88 с.
- [3] *Алексеев Г.В.* Математические основы акустики океана. Владивосток. Изд-во Дальневост. ун-та, 1988. 228 с.
- [4] *Алексеев Г.В.* Обратные задачи излучения волн и теории сигналов. Части I-II. Владивосток. Изд-во Дальневост. ун-та, 1991. 276 с.
- [5] *Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. М.: Наука, 1994.
- [6] *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 432 с.
- [7] *Бабиш В.М., Григорьева Н.С.* Ортогональные разложения и метод Фурье. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1983. 240 с.
- [8] *Берс Л., Джон Ф., Шефтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 352 с.
- [9] *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 296 с.
- [10] *Будак Б.М., Фомин С.В.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 608 с.
- [11] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
- [12] *Галанин М.П., Попов Ю.П.* Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах (математическое моделирование). М.: Наука, Физматлит, 1995. 300 с.
- [13] *Гильбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
- [14] *Годунов С.К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.
- [15] *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981. 640 с.
- [16] *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть 2. М.: МЦНМО, 1998. 788 с.
- [17] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра. М.: Наука, 1974. 296 с.
- [18] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч.1. М.: Наука, 1971. 600 с.

- [19] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч.2. М.: Наука, 1980. 448 с.
- [20] *Коробейников В.П.* Принципы математического моделирования. Владивосток, ДальНаука, 1997. 240 с.
- [21] *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов И.М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматиздат, 1962. 712 с.
- [22] *Крикунов Ю.М.* Лекции по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям. Казань. Изд-во Казанского ун-та, 1970. 210 с.
- [23] *Курант Р.* Уравнения с частными производными. Пер. с англ. М.: Мир, 1964.
- [24] *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Пер. с нем. Т. 1. М-Л. Гостехиздат, 1967. 704 с.
- [25] *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Пер. с нем. Т. 2. М-Л. Гостехиздат, 1970. 672 с.
- [26] *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Пер. с нем. Т. 1, 2. М-Л. Гостехиздат, 1951.
- [27] *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск. Изд-во СОАН СССР, 1962. 92 с.
- [28] *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
- [29] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. (Теоретическая физика. Т. 1). М.: Наука, 1988.
- [30] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. (Теоретическая физика. Т. 4). М.: Наука, 1988.
- [31] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. (Теоретическая физика. Т. 6). М.: Наука, 1989.
- [32] *Мизохата.* Теория уравнений с частными производными. М: Мир, 1977. 504 с.
- [33] *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957.
- [34] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 392 с.
- [35] *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.
- [36] *Михлин С.Н.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: Физматгиз, 1959. 232 с.
- [37] *Никифоров А.Ф., Уваров В.В.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.
- [38] *Никольский В.В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1978. 544 с.

- [39] *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 2. М.: Наука, 1973. 392 с.
- [40] *Овсянников Л.В.* Введение в механику сплошных сред. Т. 1-2. Новосибирск. Изд-во НГУ, 1977. 140 с.
- [41] *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматиздат, 1961. 400 с.
- [42] *Петровский И.Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 128 с.
- [43] *Постников М.М.* Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1979. 336 с.
- [44] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
- [45] *Самарский А.А., Михайлов А.П.* Математическое моделирование. М.: Наука, 1997. 320 с.
- [46] *Самарский А.А.* Введение в численные методы. М.: Наука, 1997. 240 с.
- [47] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 2. М.: Наука, 1974. 656 с.
- [48] *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. Часть I. М.: Наука, 1981. 552 с.
- [49] *Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1974.
- [50] *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
- [51] *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. М. Физматгиз, 1959. 468 с.
- [52] *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР, 1943. Т. 39. N 5. С. 195–198.
- [53] *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
- [54] *Тихонов А.Н., Васильева А.В., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 232 с.
- [55] *Тихонов А.Н., Костомаров Д.П.* Вводные лекции по прикладной математике. М.: Наука, 1984. 190 с.
- [56] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1999. 800 с.
- [57] *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. М.: Гидрометеиздат, 1980. 320 с.
- [58] *Шиммарев И.А.* Введение в теорию эллиптических уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1979. 184 с.
- [59] *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol.1. Physical Origins and Classical Methods. Berlin-Heidelberg. Springer-Verlag. 1988. 720 p.
- [60] *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol.3. Spectral Theory and Applications. Berlin-Heidelberg. Springer-Verlag. 1988. 542 p.